CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

"EL POTENCIAL DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN EL RECONOCIMIENTO DE PATRONES: UN ESTUDIO DE CASOS"

TESIS

Que presenta

Irene Carmona Sánchez

Para obtener el grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de tesis:
Dr. Antonio Rivera Figueroa

Ciudad de México Abril 2016

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo financiero brindado a través de la Beca otorgada durante mis estudios.

Jurado

Dr. Antonio Rivera Figueroa

Dra. Martha Leticia García Rodríguez

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Agradecimientos

En primer lugar quiero dar gracias a mi Hacedor, a mi Padre, a mi Redentor Dios Todopoderoso, Rey de Reyes y Señor de Señores. Por tu gracia es que hoy puedo agradecerte todas las bendiciones que me has dado desde el inicio de la maestría. Gracias por guardar mi salida y mi entrada, por haberme dado entendimiento, por ser mi escudo y fortaleza en cada etapa de la maestría y de mi vida. Gracias por la vida de mis padres y hermana, por haberme permitido conocer a mis maestros y amigos que me han ayudado a crecer profesionalmente y a ser una mejor persona. Es por tu favor y tu gracia que hoy es posible alcanzar esta meta. Padre a ti sea la Gloria, la Honra y el Poder por los siglos de los siglos. ¡Gracias Padre!

A mis padres Ramiro y Juanita, por todo el apoyo incondicional que me han brindado desde el primer momento que decidí realizar la maestría, por su cariño, confianza y comprensión. Gracias papá, gracias mamá por creer en mí, por apoyarme cuando lo necesitaba y sobre todo muchas gracias por levantarme el ánimo en las ocasiones que sentía que no llegaría a la meta, todo lo que he logrado también se los debo a ustedes.

A mi hermana Angélica, por su cariño, por su apoyo, sus porras y sus críticas.

A Nayelli Nava por su amistad incondicional, por la gran responsabilidad que muestras en tus estudios y que hizo no me rindiera en cada paso de esta meta.

A mi asesor de tesis: Dr. Antonio Rivera Figueroa, por darme la oportunidad de trabajar con él, por su gran apoyo en todo momento, por sus valiosos comentarios y observaciones. Gracias por corregir mis errores para realizar un mejor trabajo, por su comprensión y sobre todo muchas gracias por siempre mostrar entusiasmo en la realización de este trabajo. Gracias por ser el mejor ejemplo a seguir, por el tiempo dedicado a este trabajo, por siempre crear un ambiente de respeto y confianza, por compartir su conocimiento, sus ideas, por guiarme cuando lo necesitaba, por sus enseñanzas y por su profesionalismo. No olvidaré sus valiosos consejos y observaciones, ha sido un gran honor el trabajar con usted. ¡Gracias Doctor¡

A mis sinodales, gracias por su guía y sus observaciones, por siempre compartir su conocimiento y experiencia profesional.

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez, gracias por el tiempo dedicado en la revisión de la tesis, por sus enseñanzas durante la maestría, por guiarme y corregirme cuando lo necesitaba siempre en un ambiente de confianza y respeto, por ser un ejemplo a seguir y por siempre mostrar su dedicación y su profesionalismo.

Dra. Martha Leticia García Rodríguez, gracias por brindarme su confianza ya que desde el primer momento usted acepto revisar el presente trabajo. Gracias por sus valiosos consejos y observaciones, le doy gracias por transmitirme su dedicación, responsabilidad y el respeto hacia su profesión, es un gran ejemplo a seguir.

A Israel Méndez y Viridiana Arrioja por su gran apoyo y sus críticas constructivas durante la elaboración de la tesis. Gracias hermanitos por todo su apoyo incondicional.

Finalmente a mis grandes amigos Ricardo Cortés, Liliana Pérez, Liliana Tabares y Griselda Sánchez que ahora considero una familia. Gracias por todo su apoyo durante la maestría, por las porras, por las críticas, por apoyarme en las buenos y en las malas, por todos los momentos de alegría que compartimos durante la maestría, por escucharme y por aconsejarme cuando lo necesitaba, gracias por compartir su conocimiento y su amistad.

Contenido

Resumen

Diversas investigaciones, propuestas didácticas y evaluaciones importantes exhiben que el reconocimiento de patrones forma parte esencial del quehacer matemático, como es el caso del trabajo del investigador John Mason (1999) donde el autor declara que "la detección de patrones y la expresión de la generalidad están en el centro de las matemáticas" y que "la capacidad para detectar patrones y expresar la generalidad está presente en el niño desde su nacimiento y, ciertamente, desde su ingreso a la escuela"(p.232).

La presente investigación nace gracias a la reflexión de esta última conjetura, con el objetivo de averiguar acerca del potencial que hay en los estudiantes del nivel medio superior para reconocer patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos.

A partir de los elementos teóricos, planteamientos y sugerencias en la obra "Routes to/Roots of Algebra" (Mason et al., 1985), en la cual se destacan algunas etapas en el reconocimiento de patrones como son: percibir un patrón, describir un patrón, registrar un patrón y validar la formulación, realizamos un cuestionario de 15 preguntas referentes a tareas de este tipo.

Durante el desarrollo de este trabajo, contamos con la participación de 25 estudiantes de dos escuelas preparatorias del estado de Puebla, México, a los cuales se les aplicó el cuestionario, y en algunos de estos casos consideramos pertinente realizar sesiones de entrevistas con el propósito de conocer la forma en que procedieron a resolver determinados problemas. Posteriormente, el análisis de ambos instrumentos, nos permitió identificar el potencial que hay en los alumnos de este grado escolar para reconocer patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos, así como las dificultades que tienen los estudiantes para describir un patrón después de haberlo reconocido. Finalmente, identificamos que la mayoría de los estudiantes es capaz de reconocer las peculiaridades básicas del patrón, aun sin contar con el lenguaje natural y el conocimiento matemático para expresarlo.

Palabras clave: Reconocimiento de patrones, sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos, generalidad, etapas en el reconocimiento de patrones.

Abstract

Several researches, teaching proposals and famous assessments exhibit that pattern recognition is essential part of the mathematical tasks, as is the case, of researcher John Mason's work (1999) where the author proclaims that "the detection of pattern and expression of generality are in the center of mathematics " and that "the ability for detect patterns and express generality is present in the child since birth and certainly since your admission to the school" (p.232).

This research was born thanks to the reflection of the latter conjecture, with the aim of finding out if there is a potential in students of high school to recognize patterns in a context of successions of mathematical objects and not mathematical.

From the theoretical elements, proposals and suggestions in the work "Routes to/Roots of Algebra" (Mason et al., 1985), in which it stand out some stages in the pattern recognition such as: seeing a pattern, saying a pattern, recording a pattern and testing formulations, we conducted a questionnaire of 15 questions relating to such tasks.

During the developing of this work, we have the participation of 25 students from two high schools of the state of Puebla, Mexico, to which we applied the questionnaire, and in some of these cases, we considered relevant to conduct interview sessions with the aim of know how they proceeded to resolve certain questions. Subsequently, the analysis of both instruments allowed us to know the potential in students at this grade, to recognize patterns in a context of successions of mathematical objects and not mathematical, and the difficulties that students have to describe a pattern after having it acknowledged. Finally, we identified that the majority of students are shown to be able to recognize the basic characteristics of the pattern, even without the natural language and mathematical knowledge to express it.

Keywords: Pattern recognition, successions of mathematical objects and not mathematical, generality, stages in pattern recognition.

Introducción

La finalidad del presente trabajo de investigación es averiguar y conocer si hay un potencial en los estudiantes de nivel bachillerato para reconocer patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos.

Este trabajo inicia con base en una de las ideas fundamentales de John Mason (1999) las cuales promovió en una de sus conferencias: "La capacidad para detectar patrones y expresar la generalidad está presente en el niño desde su nacimiento y, ciertamente, desde su ingreso en la escuela" (p. 232). Retomando el planteamiento de este autor, en la presente investigación nos preguntarnos acerca del potencial que pudieran tener los jóvenes, lo cual nos conduce a averiguar si hay un potencial en los alumnos de este nivel escolar para reconocer patrones en diversas situaciones elaboradas. El reconocimiento de patrones es un elemento relevante en el estudio de las matemáticas y consideramos que incluso se puede acudir a esta práctica para orientar la enseñanza y el aprendizaje de diversos tópicos de la matemática.

¿Qué es un patrón? Consideramos que una de las acepciones del término patrón es una regla o ley de formación de una sucesión finita o infinita, de objetos matemáticos o no matemáticos. En nuestra investigación hemos diseñado un cuestionario para lo cual hemos considerado sucesiones cuyos objetos son de diversas naturalezas. Por ejemplo, sucesiones de símbolos, sucesiones cuyos elementos son de naturaleza aritmética, sucesiones de enunciados, sucesiones de figuras, etcétera. En algunas de las preguntas se pide al estudiante que proponga elementos faltantes de una sucesión, ya sea intermedios o que continúe con la lista de objetos. En algunos de los problemas, también se le pide al estudiante que determine algún elemento particular con índice suficientemente grande como para que renuncie a escribir todos los elementos intermedios y así necesite determinar la regla general de construcción. Se ha procurado que los conocimientos matemáticos que se requieren para resolver cada problema sean los que se adquieren en el nivel medio superior.

Al hablar del *potencial* que pudieran tener los estudiantes en el reconocimiento de patrones, nos referimos a su capacidad para reconocerlos aun cuando no cuenten con el conocimiento matemático, lenguaje matemático o lenguaje natural para expresarlo. Nosotros suponemos que a pesar de la escasez de estos recursos que pudiesen tener los estudiantes para describir un patrón, ellos son capaces de reconocerlos.

Como se puede deducir de lo anterior, en nuestro estudio no descartamos la posibilidad de que el estudiante tenga dificultades para expresar el patrón que rige en una sucesión de objetos, por ejemplo, la regla de formación utilizando una simbología matemática adecuada, no obstante tratamos de averiguar si el estudiante es capaz de detectar las peculiaridades básicas del patrón que rige una sucesión de objetos matemáticos. Es probable que en el proceso del reconocimiento de un patrón haya más de una tarea implícita que impida al estudiante reconocer el patrón en una primera instancia, sin embargo averiguaremos si mediante alguna ayuda que le proporcionemos podrá reconocerlo. La ayuda consistirá solamente de un estímulo y no, por supuesto, en darle una pista para resolver el problema.

Durante el desarrollo de la investigación se aplicó un cuestionario de 15 preguntas referentes al reconocimiento de patrones a 25 alumnos de dos escuelas preparatorias del estado de Puebla. Después de revisar cada una de sus respuestas se procedió a realizar sesiones de entrevistas precisamente para averiguar si tienen el potencial para reconocer los patrones en el sentido antes expuesto.

A continuación explicaremos brevemente el desarrollo de nuestra investigación que consiste de cinco capítulos. En el primer capítulo exponemos los antecedentes que brindan las componentes esenciales y que orientan la investigación en relación al potencial que poseen los estudiantes en el reconocimiento de patrones. La revisión de la literatura referente a este tema incluye propuestas didácticas e investigaciones sobre el reconocimiento de patrones. También se revisaron algunas evaluaciones importantes de diferente naturaleza en donde el reconocimiento de patrones es un elemento importante en el diseño de los cuestionarios. Además se exponen las ideas fundamentales que emergen dentro del planteamiento del problema, las preguntas de investigación y el objetivo general.

En el segundo capítulo, se presentan los marcos teórico y referencial. En primer lugar, mostramos los fundamentos teóricos que guían la investigación, haciendo una descripción de cada una de las etapas en el reconocimiento de patrones que se sugieren en la obra “*Routes to/Roots of Algebra*” (Mason et al., 1985) para llevar a cabo la *Expresión de la generalidad*. En segundo lugar, dentro del marco referencial se muestran: un par de reflexiones sobre qué es un patrón, una de ellas con base en las ideas de (Bressan y Bogisic, 1996; Bressan y Gallego, 2010) y otra expuesta en Guerrero y Rivera (2002). También se muestran algunos ejemplos de patrones en sucesiones de objetos matemáticos; y finalmente la descripción breve de un problema que plasma al reconocimiento de patrones como un recurso para cierto tipo de trabajo, en la asignatura de razonamiento matemático de una de las escuelas reportadas.

En el tercer capítulo, se explica la metodología seguida en esta investigación. Esta incluye la descripción de los participantes, el diseño de los instrumentos y los procedimientos considerados para la aplicación del cuestionario y las sesiones de entrevistas. Hacemos una descripción de la estructura y los propósitos de cada una de las 15 preguntas que conforman las dos partes del cuestionario.

En el cuarto capítulo, se presenta el análisis de los resultados obtenidos que consideramos los más relevantes para cada una de las preguntas de la primera y segunda parte del cuestionario, tomando en cuenta las respuestas dadas en forma escrita y las obtenidas por los casos en que se valoró la necesidad de una entrevista para la aclaración de ideas. La discusión de los datos obtenidos se hizo en correlación con las ideas fundamentales sugeridas del marco teórico.

Finalmente, el quinto capítulo está dedicado a las consideraciones finales que obtenemos del análisis de resultados y que apuntan a generar una colección de ideas fundamentales que permiten responder las preguntas de investigación.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se muestran los antecedentes que brindan los componentes esenciales y que orientan la investigación en relación al potencial que poseen los estudiantes en el reconocimiento de patrones.

1.1 Investigaciones acerca del reconocimiento de patrones

Diversas investigaciones coinciden en que el reconocimiento de patrones es un quehacer fundamental de las matemáticas, entre éstas tenemos el caso de los autores Mason, Graham, Pimm y Goward (1985) quienes consideran en su obra *Routes to & Roots of Algebra* que "la expresión de la generalidad está en el corazón del pensamiento matemático" (p. 8). Años más tarde, continuando sobre esta línea de investigación Mason declara en una visita a Colombia que:

> La detección de patrones y la expresión de la generalidad están en el centro de las matemáticas; La capacidad para detectar patrones y expresar la generalidad está presente en el niño desde su nacimiento y, ciertamente, desde su ingreso en la escuela. (Mason, 1999, p. 232).

En su trabajo realizado en Colombia, el autor proporciona ejemplos que van dirigidos a estimular a los alumnos a utilizar sus capacidades naturales para desarrollar expresiones con paréntesis y factorizaciones de expresiones cuadráticas, y no sólo a que esperen que los maestros o los libros de texto les proporcionen respuestas a las situaciones matemáticas que ellos enfrentan. Mason (1999) en su artículo construye varias sucesiones numéricas (llamadas secuencias de Tunja), con el objetivo de incitar a los alumnos a ver y expresar la generalidad en un contexto de tareas que implican el desarrollo y factorización de expresiones cuadráticas. El autor deja entrever cómo plantear, dirigir e ingresar a los alumnos hacia la factorización de expresiones cuadráticas en una clase conducida por él, asimismo declara que partiendo de los ejemplos que él propone de una clase de secuencias, los estudiantes pueden:

> Usar sus capacidades de detectar patrones y generalizar para aprender a multiplicar expresiones con paréntesis y números negativos; lo mismo que a factorizar expresiones cuadráticas simples; tener vivencias de expresiones cuadráticas como sus propias expresiones de generalidad en los números y no simplemente como expresiones 'aritméticas con letras' propuestas por otros. (Mason, 1999, p. 234).

Del mismo modo después de dar una explicación detallada tanto de la forma de trabajar, guiar y abordar los ejemplos de sus sucesiones numéricas como de los propósitos de éstas, Mason realiza la siguiente afirmación que también es un punto crucial en el surgimiento de este trabajo:

> Expresar generalidad es una capacidad con la que todo niño llega a la escuela, pero que por alguna razón no siempre se conoce o se usa. Es una capacidad que necesita refinarse y agudizarse, extenderse y desarrollarse; las secuencias de Tunja son apropiadas para apoyar esto. (Mason, 1999, p. 237).

La parte esencial del trabajo de Mason (1999) es estimular el uso de las capacidades en el reconocimiento de patrones a través de la exposición de la factorización de expresiones cuadráticas, es decir Mason sugiere incitar a los alumnos a explotar sus capacidades naturales para la detección de patrones mediante este tópico, además sus sucesiones muestran que estas habilidades pueden ser usadas para ingresarlos a la comprensión del mismo. Otro punto a considerar en esta investigación, es que el autor expresa que una secuencia de Tunja "es una secuencia de casos particulares de una expresión algebraica" (p. 239), además de comentar que se pretende que los alumnos "descubran las reglas de manipulación, de modo que las expresiones sobre las que trabajan y las reglas que se usen sean sus propias expresiones de generalidad y no simplemente reglas dadas por el profesor o el texto" (p.239).

El reconocimiento de patrones visto como un recurso para cierto tipo de trabajo matemático es un tema que ha sido discutido por diversos investigadores, entre ellos tenemos el trabajo de Keith Devlin (1994) en el cual se hace evidente que desde hace más de dos décadas la mayoría de los matemáticos está de acuerdo en que las matemáticas son la ciencia de los patrones.

Otra investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, es el caso de Chalé (2013) quien indaga sobre el álgebra como generalización matemática. Una de las ideas reportadas por Chalé que llamo nuestra atención y nos parece oportuna mencionar antes de comenzar con la descripción de su trabajo, es la manifestada por los autores Lee y Freiman (2006) en su obra *Devoloping algebraic thinking through pattern exploration.* Chalé muestra que estos dos últimos afirman que: "la exploración de patrones es una actividad central en toda la matemática y las ciencias en general" (2006, citados por Chalé, 2013, p. 8), asimismo Lee y Freiman aseguran que "el enfrentamiento temprano con tareas en las que se pide intentar expresar patrones matemáticamente, es una excelente herramienta para aprender el lenguaje algebraico y participar en actividades relacionadas con él" (2006, citados por Chalé, 2013, p. 8).

Regresando a la investigación de Chalé (2013), éste declara en el contexto de sucesiones de figuras que una problemática por la que pasan los estudiantes consiste en que "el proceso de detección del patrón que subyace a la secuencia a partir del análisis de las figuras no es espontaneo" (p. 15), Chalé nos afirma que los alumnos no logran determinar la relación entre la posición de cada figura y la razón de crecimiento, además el autor expresa que "el análisis visual de las organizaciones de una secuencia de figuras es de suma importancia, puesto que la relación que existe entre la posición y la razón de crecimiento de la secuencia, podría emerger del análisis visual de la secuencia" (Chalé, 2013, p.15).

Con base en este enfoque que consiste en el análisis visual organizado de las secuencias de figuras, Chalé sugiere que el trabajar de esta manera puede ayudar a "la emergencia de la detección del patrón de una secuencia, a la formulación de ésta y por ende a la generalización en el pensamiento algebraico" (p. 16). Lo anterior, nos permite identificar que los esfuerzos de Chalé enfatizan la relevancia que tienen las capacidades visuales de los estudiantes y que éstas pueden ser un valioso recurso que apoye el reconocimiento de patrones al trabajar en el contexto de sucesiones de figuras.

Por otro lado, las actividades propuestas por Chalé (2013) bajo el enfoque '*la visualización en el caso de los patrones'* también nos informan acerca de la atención y el cuidado en la elección y el diseño de secuencias de figuras, al mostrar ejemplos de sucesiones en las cuales la detección de la relaciones entre sus términos y sus posiciones son visualmente explícitas y otras en las que el reconocimiento de dicha relación no es tan inmediata.

Otra investigación, que también sustenta al proceso de reconocimiento de patrones como un punto crucial a considerar en el desarrollo del pensamiento algebraico es la aportación de Durán (1999). El objetivo de este autor consiste en identificar y analizar las estrategias utilizadas por estudiantes de sexto grado de primaria para reconocer patrones en un contexto de secuencias numéricas o de figuras, además de presentar la influencia que tienen las actividades de su propuesta (programa de enseñanza) en el desarrollo de estrategias que favorezcan el reconocimiento de patrones.

Como ya hemos mencionado, la propuesta de Durán en principio, consistió en realizar una clasificación de los estudiantes en relación al nivel de sus capacidades en este tipo de tareas, en otras palabras, el autor identificó las estrategias que utilizan los estudiantes (por sí mismos) para reconocer patrones, para posteriormente conducirlos hacia un programa de enseñanza bajo la asistencia y colaboración de expertos (niños más hábiles para reconocer patrones), con la finalidad de crear en ellos Zonas de Desarrollo Próximo (ZDP), esto es:

> Lo que hoy se realiza con la asistencia o con el auxilio de una persona más experta en el dominio en juego, en un futuro se realizará con autonomía sin necesidad de tal asistencia. Tal autonomía en el desempeño se obtiene, algo paradójicamente, como producto de la asistencia o auxilio, lo que conforma una relación dinámica entre aprendizaje y desarrollo. (como se citó en Durán, 1999, p.20).

Las ideas fundamentales del trabajo de Durán sugieren qué tipo de participación por parte del experto ayuda a los estudiantes novatos a desarrollar estrategias que favorezcan "la identificación, descripción, simbolización y utilización de reglas para calcular los términos de una secuencia"(p. 4), y por otro lado que el trabajo colaborativo ayuda a que los estudiantes novatos tomen sentido a las estrategias utilizadas por los expertos y las hagan suyas, con el objetivo de fomentar que los estudiantes sean capaces de expresar la generalidad por sí mismos. En suma, Durán manifiesta que: "Para que los niños puedan hacer generalizaciones es necesario que se apropien de estrategias específicas para el reconocimiento de patrones numéricos, así como para estar motivados a hacerlo" (p. 17). Esta última afirmación distingue al proceso de reconocimiento de patrones como un factor determinante hacia el progreso del estudiante en tareas que impliquen generalizar.

Finalmente, Bressan y Gallego (2010), dentro del estudio de patrones, consideran al trabajo en un contexto de sucesiones o secuencias, como una "fuente de generalización y de usos de modelos en distintos marcos, teniendo en cuenta que estos procesos constituyen una habilidad de razonamiento esencial para la resolución de problemas" (p. 1), de hecho, la primera autora en uno de sus trabajos anteriores expone algunas recomendaciones de cómo trabajar y enseñar el tema de patrones. Uno de los puntos que manifiestan Bressan y Bogisic (1996), es que el trabajo con patrones en el quehacer matemático implica tomar en cuenta procedimientos con diferentes grados de dificultad, como lo son:

> De reproducción (copia de un patrón dado), de identificación (detección de la regularidad), de extensión (dado un tramo de la sucesión el alumno debe extenderla de acuerdo al núcleo que la rige), de extrapolación (completamiento de partes vacías), de traslación (utilización del mismo patrón sobre propiedades diferentes, por ejemplo: cambiar formas de colores, cambiar una representación visual por una auditiva, etc.). (Bressan y Bogisic, 1996, p. 8).

Por último, cabe destacar que al igual que los diferentes investigadores, anteriormente citados, estas autoras también dejan entrever al reconocimiento de patrones como un factor relevante que puede ser utilizado para desarrollar en los estudiantes la capacidad de razonar matemáticamente, al decir que:

> Las actividades con patrones revisten la característica de la resolución de problemas ya que pueden ser formuladas de modo que el alumno las reconozca como situaciones problemáticas y así estimular la generación de hipótesis, su comunicación y comprobación y la refutación o confirmación de las mismas. (Bressan y Bogisic, 1996, p. 8).

1.2 El reconocimiento de patrones presente en documentos oficiales y en evaluaciones importantes

Documentos oficiales en México que comprenden los propósitos, enfoques, estándares curriculares y aprendizajes esperados referentes a la asignatura de matemáticas para los niveles básico y medio superior son los programas de estudios de la Secretaría de

Educación Pública (SEP, 2010 & 2011). En esta investigación nos dimos a la tarea de indagar y mostrar las ideas fundamentales en los planes de estudios que revelan el trabajo que realizan los estudiantes en relación hacia el reconocimiento de patrones, a continuación se muestra la información obtenida para cada uno de los niveles escolares.

En la educación secundaria, dentro de los propósitos de estudio de las matemáticas, se espera que los estudiantes: "Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones" (SEP, 2011, p. 14). Además durante el cuarto periodo escolar el conjunto de aprendizajes esperados están organizados en tres ejes temáticos, entre ellos '*Sentido numérico y pensamiento algebraico'* que a su vez contiene el tema patrones y ecuaciones. Uno de los estándares curriculares para este eje temático es que el estudiante: "Resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión" (SEP, 2011, p.16), lo cual aspira a que el estudiante sea capaz de expresar generalidad a partir del trabajo con sucesiones de naturaleza aritmética.

Respecto al programa de estudios 2010 de la Dirección General de Bachillerato, para la asignatura MATEMÁTICAS 1 se menciona que éste tiene la finalidad de:

> Propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trascienden el ámbito escolar. (p. 6).

Además de mostrar que al concluir el tercer bloque '*Realiza sumas y sucesiones de números'* de la asignatura MATEMÁTICAS 1, algunos de los desempeños esperados por parte de los alumnos son:

> Determinar patrones de series y sucesiones aritméticas y geométricas; Emplea la calculadora para la verificación de resultado en los cálculos de obtención de términos de las sucesiones; Realiza cálculos obteniendo el enésimo término y el valor de cualquier término en una sucesión aritmética y geométrica tanto finita como infinita mediante las formulas correspondientes. (SEP, 2010, p. 22).

Lo antes mencionado nos permite conocer que en este nivel se ambiciona que el estudiante sea capaz de detectar y establecer las reglas de formación para sucesiones de índole aritmético y geométrico.

Continuando en la línea de los planes de estudio, otro documento que nos dimos a la tarea de revisar es la conocida propuesta *Principios y Estándares para la Educación Matemática* de la National Council Teacher of Mathematics (NCTM) que presenta el conocimiento, la comprensión y las destrezas que se esperarían por parte de los estudiantes desde Prekindergarten hasta el nivel 12, dentro de los 10 estándares de la NCTM está el Álgebra (estándar de contenidos), el cual se considera en cada uno de estos niveles. Para este estándar se manifiesta que:

> Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; analizar el cambio en contextos diversos. (NCTM, 2000, p. 39).

Además para cada uno de los niveles la NCTM muestra de manera específica las expectativas en cada estándar de contenido, por ejemplo para el caso de Álgebra acerca de *Comprender patrones, relaciones y funciones* en las etapas 6 a la 8 se esperaría que los estudiantes sean capaces de:

> Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones mediante tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas; relacionar y comparar distintas formas de representación de una relación; identificar funciones, lineales o no lineales, y contrastar sus propiedades a partir de tablas, gráficas o ecuaciones. (NCTM, 2000, p. 226).

De igual forma para las etapas 9 a la 12 en relación a *Comprender patrones,* los estudiantes deberían: “Generalizar patrones usando funciones definidas explícitamente y recursivamente” (NCTM, 2000, p. 300).

Por otra parte, el reconocimiento de patrones es un elemento que también está presente en el diseño de los cuestionarios de evaluaciones importantes de diferente naturaleza. A continuación, mencionamos brevemente las características de algunas evaluaciones mostrando que el reconocimiento de patrones es una cuestión que se evalúa.

La primer prueba que cabe mencionar, es el caso de la Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE) aplicada en cada ciclo escolar de la educación básica y media superior desde el año 2007 hasta el 2013, actualmente sustituida (en especifico para la educación básica) por el Plan Nacional para las Evaluaciones de los Aprendizajes (PLANEA), comenzando en el ciclo escolar 2014-2015.

La característica diagnóstica de esta prueba permite averiguar y obtener información acerca del nivel académico de los estudiantes respecto a tópicos del currículo matemático actual, además la Secretaría de Educación Pública (SEP) realiza publicaciones periódicas que proporcionan información acerca de los conocimientos y habilidades que se evalúan en los reactivos de la prueba ENLACE (considerando distintos grados de dificultad), así como los resultados de los mismos.

Para el caso del primer grado de secundaria en el año 2012 la SEP en su publicación *Características Generales e Información de los Reactivos aplicados para su Uso Pedagógico* muestra que respecto al *Significado y uso de las literales* (en el grado alto de dificultad), el estudiante debe: “Identificar la expresión algebraica que se relaciona con una sucesión numérica” e “identificar la expresión algebraica que define una sucesión asociada a la formación de arreglos geométricos” (p. 76).

En segundo lugar, tenemos como ejemplo al Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C., (Examen Ceneval, 2006), el cual está ocupado en brindar servicios de evaluación a escuelas, empresas, autoridades educativas, instancias particulares y gubernamentales, entre otros. En el campo educativo, el CENEVAL ofrece los exámenes Nacionales de Ingreso (EXANI) y los Generales para el Egreso de la licenciatura (EGEL), además en la página de esta organización se puede acceder a una lista de Guías de Examen CENEVAL para personas que desean seguir sus estudios hacia el nivel medio superior, licenciatura y estudios de posgrado, así como los exámenes enfocados a los egresados de licenciaturas.

Por ejemplo, la Guía del Examen Nacional de Ingreso (EXANI-II) para los egresados del nivel medio superior muestra en la sección llamada *Qué se evalúa* de su primer capítulo que en el área de *pensamiento analítico* el sustentante debe ser capaz de “comprender e interpretar relaciones lógicas y patrones” (CENEVAL, EXANI-II, 2013, p. 12).

La Guía del EXANI-II muestra los conocimientos y habilidades que se evalúan a través de cada pregunta. En su primer capítulo, los contenidos temáticos que se exploran en el área de *pensamiento analítico*, dentro de la subsección denominada *Reconocimiento de patrones* son: “Sucesiones numéricas, completamiento con operaciones básicas; sucesiones alfanuméricas, completamiento con patrones regulares; sucesiones de figuras, completamiento con patrones regulares" (CENEVAL, EXANI-II, 2013, p. 17).

Un tercer ejemplo, que también muestra que el reconocimiento de patrones es una cuestión que se evalúa, son las pruebas psicométricas (Psicotecnicostest, 2007) las cuales son instrumentos que permiten medir y conocer el estado de diferentes cualidades psíquicas, una de ellas, la inteligencia de las personas.

Entre sus múltiples tipos, están las encargadas de evaluar cuestiones como el razonamiento abstracto a través de series numéricas, series de figuras, series alfabéticas, y ejercicios de visualización. A continuación citamos los objetivos implícitos de las pruebas que involucran el trabajo con series numéricas:

> Estos ejercicios prueban la capacidad para resolver problemas aritméticos y matemáticos convirtiéndose en una buena forma de medir el razonamiento inductivo o razonamiento abstracto. Las series numéricas pueden presentarse de forma que el individuo complete los números que le faltan o bien se les da a elegir el número siguiente entre varias alternativas posibles. (Psicotecnicostest, 2007).

Por otro lado, nos hemos percatado de que el reconocimiento de patrones es un proceso que no sólo se evalúa sino que se utiliza como una técnica en la resolución de problemas. Estos dos puntos se fundamentan por su presencia en los problemas de concursos nacionales e internacionales para las Olimpiadas Matemáticas.

En nuestro país contamos con el comité organizador de la Sociedad Mexicana de Matemáticas (SMM) que se encarga de revisar y organizar los problemas de las olimpiadas en folletos que van dirigidos especialmente a los concursantes, y que sirven como guía hacia el tipo de problemas que se aplican en las diferentes etapas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Las siguientes citas permiten identificar algunos ejemplos concretos de los problemas detectados referentes al reconocimiento de patrones para la 1ª (Problema 16), la 4ª (Problema 20), la 11ª (Problema 33) y la 19ª (Problemas 44 y 59) OMM, (Bosch, Illanes y Ramírez, 1987, p. 6; Alfaro et al., 1990, p.7; Pérez, 1997, p.10; Castro, Alonzo, Frías, y Arizmendi, 2005, pp. 9-11).

1.3 Planteamiento del problema

En secciones anteriores, se han comentado diversas ideas que expresan la presencia del reconocimiento de patrones en investigaciones, en propuestas didácticas e incluso en algunas evaluaciones importantes que lo consideran en el diseño de sus cuestionarios y cuyas preguntas lo plasman como uno de los conocimientos y habilidades que se evalúan en el individuo. En los planes de estudio nacionales, para los niveles básico y medio superior se ha identificado que el reconocimiento de patrones no está incluido propiamente, no obstante, es una cuestión que se considera como uno de los aprendizajes y destrezas esperados en el estudio de las matemáticas.

La revisión de la literatura nos proporcionó un panorama de los trabajos enfocados en la enseñanza y el aprendizaje del algebra, a partir de acercamientos desde el reconocimiento de patrones, y cuyos planteamientos coinciden en que éste es un factor relevante para expresar la generalidad y una práctica central en el quehacer matemático. Por otra parte, se identificó que las aportaciones teóricas plasman diversos planteamientos y conjeturas referentes al reconocimiento de patrones, entre ellos, se manifiesta que el individuo posee una capacidad para detectar patrones desde el nacimiento (Mason, 1999), y se considera beneficioso para la enseñanza de las matemáticas refinar e incitar la capacidad de los estudiantes en la tarea de reconocimiento de patrones.

Por esta razón, estamos interesados en averiguar si hay un potencial en los estudiantes de nivel medio superior para reconocer patrones, con base en una lista de situaciones matemáticas que consiste de una variedad de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos. Nosotros suponemos que a pesar de la escasez de recursos que pudiesen tener los estudiantes para describir un patrón, como el conocimiento matemático, el lenguaje matemático o el lenguaje natural, ellos son capaces de reconocerlo.

1.4 Objetivo general

En razón de lo expuesto, el interés de nuestra investigación es averiguar si hay un potencial en los estudiantes de nivel medio superior para reconocer patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos.

1.5 Preguntas de investigación

1) ¿Qué potencial podemos identificar en estudiantes de nivel medio superior en la tarea de reconocimiento de patrones?
2) ¿Qué dificultades podemos identificar en estudiantes de nivel medio superior para describir un patrón que ya han reconocido?

La primera pregunta, la planteamos para averiguar si el estudiante es capaz de reconocer el patrón que rige en una sucesión, ya sea de objetos matemáticos o no matemáticos. Como números, figuras, enunciados, igualdades, etc. Esta tarea, requirió una especial atención a los esfuerzos plasmados en las respuestas de los estudiantes durante la aplicación del cuestionario y en las entrevistas.

La formulación de la segunda pregunta, la realizamos con el propósito de reconocer las dificultades de los estudiantes para describir un patrón después de haberlo reconocido. Durante el desarrollo de este trabajo, se valoró la necesidad de sesiones de entrevistas en algunos casos de los estudiantes que detectamos fueron capaces de percibir los patrones desde la aplicación del cuestionario. Cabe destacar que algunas descripciones de los jóvenes de bachillerato se obtuvieron, durante sus entrevistas, después de que contestaron exitosamente las situaciones matemáticas que no lograron responder en la aplicación del cuestionario. La tarea en esta segunda pregunta de investigación, implicó ser tolerantes a las explicaciones de los estudiantes, para evidenciar de manera especial a los casos que lograron reconocer las peculiaridades básicas de los patrones pero que mostraron dificultades al intentar describirlos.

Capítulo 2

Marcos Teórico y Referencial

En este capítulo se presenta tanto el marco teórico como el referencial: el primero con base en la contribución de los autores Mason, Graham, Pimm y Goward (1985) en su trabajo llamado *"Routes to & Roots of Algebra"* y el segundo, fundamentado en las ideas elementales en matemáticas acerca de patrones matemáticos.

2.1 Marco teórico

2.1.1 La generalización como una ruta y raíz hacia el álgebra

Como ya se ha mencionado, el marco teórico considerado en este estudio se apoya en el trabajo de Mason, Graham, Pimm y Goward (1985), donde se exponen las ideas esenciales que constituyen las raíces del álgebra, y en el cual se sugiere, que estas ideas, podrían ofrecer posibles rutas hacia un mejor entendimiento del álgebra.

Una de las cuatro ideas que componen las raíces del álgebra, es la *"Expresión de la Generalidad"*. Los autores manifiestan que: "Generalidad es el elemento vital de las matemáticas y el álgebra es el lenguaje en el que se expresa la generalidad" (p. 8). Desde la perspectiva de los investigadores, para aprender el leguaje del álgebra es crucial contar con algo que decir y consideran pertinente que en esta tarea se debe aspirar a percibir algún patrón, intentar expresarlo en pocas palabras y usarlo para contestar preguntas específicas.

Respecto a la forma en que se introduce al estudiante al álgebra, Mason y sus colaboradores comentan que: “Si el álgebra surge porque los alumnos desean expresar alguna cosa que han visto, esa será su algebra, y no símbolos de otra persona que espera manejen de acuerdo a reglas extrañas” (p. 8).

En su trabajo, los autores sugieren algunos ejemplos de actividades que apuntan hacia un acercamiento al álgebra a través del deseo de expresar la generalidad. En este sentido hacen una reflexión sobre lo que implica el reconocimiento de patrones e intentan destacar algunas etapas en el reconocimiento de patrones como son: *percibir un patrón*, *describir un patrón*, *registrar un patrón* y *validar la formulación*. A continuación procedemos a explicar cada una de ellas brevemente.

Percibir un patrón

Los investigadores mencionan que la etapa *percibir* se refiere a “captar mentalmente un patrón o relación” (p.8), además comentan que el trabajo necesario para *percibir un patrón* implica dedicar un tiempo considerable, así como un número de ejemplos particulares. Los autores intentan explicar esta etapa a través de algunos ejemplos de sucesiones de números o de figuras y mencionan que en este tipo de sucesiones emergen una serie de tareas y cuestiones de índole matemática que son pertinentes y que pueden apoyar el reconocimiento de patrones, a saber:

a) Proponer el número o la figura siguiente en la sucesión.
b) Tratar de describir las figuras en pocas palabras.
c) Dados unos cuantos términos de la sucesión, escribir una regla que extienda sus términos.
d) Finalmente, sugieren pedir al estudiante que escriba algunos términos de la sucesión en posiciones arbitrarias.

En estas tareas, los autores comentan que es posible tener dificultades para comunicar en palabras lo que se puede percibir y que incluso se presentan más dificultades cuando se trata de proporcionar una regla precisa. También expresan que pedir al estudiante que escriba algunos términos que se encuentran en posiciones arbitrarias, prueba la precisión y la utilidad de su regla.

Continuando en esta etapa, los investigadores consideran pertinente reflexionar acerca del tipo de preguntas que se hacen a los estudiantes, así como realizar una lista de preguntas de acuerdo con sus capacidades. Algunas preguntas que proponen los autores, con base en el análisis de algunos ejemplos de sucesiones de figuras, son las siguientes:

¿Cómo pasas de la primera a la segunda figura?

¿De la segunda a la tercera?

¿Qué es semejante en ambos casos? (p.10).

Describir un patrón

En esta etapa, los autores mencionan que *describir* significa explicar la percepción a uno mismo o a otra persona. Mason y sus colaboradores comentan que frecuentemente, para los estudiantes es muy difícil intentar comunicar lo que han sido capaces de percibir, y también mencionan que "su lucha para decir lo que ven necesita apoyo, tiempo y aceptación de sus esfuerzos incompletos" (p.10). En esta etapa, se sugiere que se realicen intentos por expresar la percepción en voz alta y cuando sea posible explicarla a otras personas.

Registrar un patrón

En esta etapa, *registrar* significa plasmar las ideas en un lenguaje visible. Los investigadores comentan que "registrar implica el traslado a los símbolos y a la comunicación escrita (incluyendo dibujos)" (p. 8). En esta etapa, el estudiante expresa las ideas que ha captado mentalmente mediante recursos del lenguaje escrito y gráficos. El registro de un patrón implica diversas combinaciones de dibujos, palabras y símbolos, como lo son: "dibujos, dibujos con ayuda de palabras, en su mayoría palabras con algunos símbolos, o en su mayoría símbolos con algunas palabras" (Mason et al., 1985, p. 11). Por otro lado, el registro de las ideas contribuye a que el estudiante pueda discutirlas comprobarlas y modificarlas.

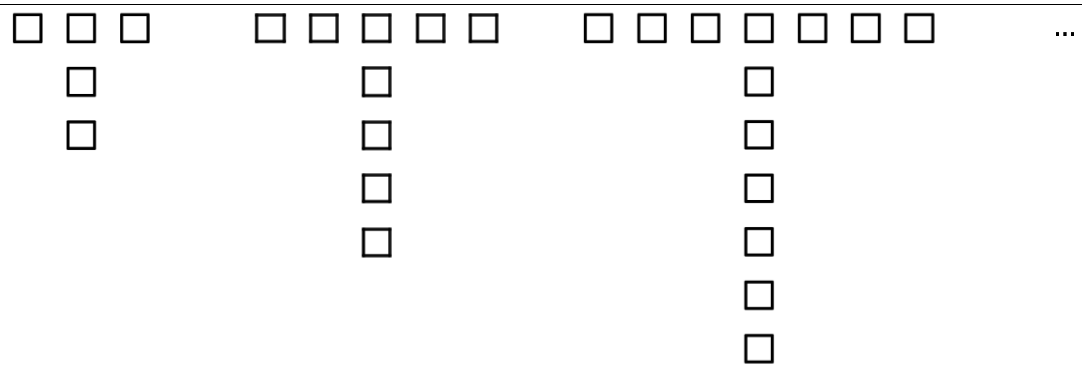
Validar la formulación

Los autores mencionan en esta etapa, que "la validez de una formulación puede ser probada en un número de maneras" (p. 11). Esta etapa, consiste en que el estudiante verifique la utilidad de su regla. Una manera de hacerlo es comprobar que todos los términos que se muestran en la sucesión están formados de acuerdo con la regla que se encontró, otra forma es calcular nuevos términos de la sucesión utilizando la regla y comprobarlos a través de conteos o dibujos.

El vocablo ‘formulación’ los investigadores lo utilizan para indicar la expresión que describe las ideas que una persona es capaz de percibir. Por ejemplo, una posible formulación para la sucesión de la tabla 1 es: “El número de cuadrados será siempre un número impar. Necesita multiplicar el número de la posición en la sucesión por cuatro y luego agregar uno” (Mason et al., 1985, p. 11). Un tema importante que los autores manifiestan y que cabe destacar en nuestro estudio, es que para un mismo patrón pueden emerger distintas expresiones, el punto crucial es identificar si tales expresiones se refieren a lo mismo.

Tabla 1. Sucesión de figuras de Mason y sus colaboradores.

5 cuadrados	9 cuadrados	13 cuadrados	...



Por otro lado, Mason y sus colaboradores también manifiestan que puede ser redituable invertir más tiempo en las etapas percibir un patrón y describir un patrón. En este sentido, encontramos pertinente aclarar que nos enfocaremos de manera especial en averiguar y reportar el éxito que pudieran tener los estudiantes de nivel medio superior para reconocer patrones en las etapas *percibir un patrón* y *describir un patrón*, no obstante, no descartamos la posibilidad de que el estudiante pudiera revelar ser capaz de registrar sus ideas en un lenguaje visible o que pudiera tener éxito en la verificación de sus formulaciones.

El reconocimiento de patrones es un proceso, en el que, se aspira que los estudiantes sean capaces de percibir un patrón, de explicar lo que han logrado percibir a otras personas, de plasmar sus ideas en un lenguaje visible, y de verificar la utilidad de su regla. Nosotros coincidimos con Mason y sus colaboradores, en que, se debe aspirar a tener éxito en cada una de las cuatro etapas antes mencionadas, sin embargo, en nuestra opinión un estudiante que pudiera mostrar tener dificultades para plasmar sus ideas a través de la comunicación escrita, pero que muestre éxito en la etapa *percibir*, sí es capaz de reconocer las peculiaridades básicas de un patrón, aun sin llegar a la etapa *registrar*.

Por lo anterior, nos parece importante reiterar que en nuestra investigación, al hablar del potencial que pudieran poseer los estudiantes para reconocer patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos, será suficiente que los estudiantes muestren éxito en las etapas *percibir un patrón* y *describir un patrón*.

2.2 Marco referencial

2.2.1 ¿Qué es un patrón?

Diversas investigaciones enfocadas en la enseñanza y aprendizaje del álgebra a partir de acercamientos desde el reconocimiento de patrones expresan la necesidad de actividades que impliquen percibir regularidades, sin embargo este enfoque requiere profundizar acerca de las ideas fundamentales sobre el proceso de reconocimiento de patrones e indagar acerca de las acepciones del término patrón.

Uno de los trabajos en el que se plasman algunas ideas sobre el término patrón es el caso de Bressan y Bogisic (1996), en su obra *Las regularidades: fuente de aprendizajes matemáticos*. Las autoras comentan que: “Un patrón es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo una regla (algoritmo), ya sea de repetición o de recurrencia” (p. 3). Llama nuestra atención que el patrón es visto como la *sucesión en sí*, y no como la ley o regla de formación de los elementos de una sucesión de objetos.

Años más tarde Bressan y Gallego (2010) emplean los términos patrones o secuencias indistintamente, incluso comentan que “otros autores utilizan el término patrón para designar estrictamente el núcleo o unidad de la secuencia” (p. 13).

Respecto a nuestra investigación, nosotros consideramos pertinente concebir el término patrón como *una regla o ley de formación de los términos de una sucesión finita o infinita, de objetos matemáticos o no matemáticos* (Guerrero y Rivera, 2002, p. 260). De esta manera, que el estudiante sea capaz de reconocer un patrón que rige una sucesión, significa que éste es capaz de reconocer una posible regla o ley de formación de los elementos de la sucesión.

2.2.2 El reconocimiento de patrones implícito en sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos

En este documento se estudia el proceso de reconocimiento de patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos. El vocablo *sucesión* en matemáticas se utiliza para expresar una colección ordenada de objetos, de forma que hay un primer elemento, un segundo elemento, un tercer elemento, y así sucesivamente. Una definición que retomamos en este documento es la que manifiesta el autor Rivera (1993):

> Una SUCESIÓN de números reales es toda lista o colección ordenada infinita de números, de los cuales algunos, o todos ellos, pueden coincidir entre sí. Una sucesión se distingue de un conjunto en dos cosas, la primera de ellas, es que en una sucesión hay un orden, es decir, se trata de una colección ordenada de números, de modo que hay un primer elemento, un segundo elemento, etc. La segunda diferencia es que la colección ordenada es *infinita*, como lista, no necesariamente como conjunto. (p. 1).

Por otro lado, los ejemplos que generalmente se analizan en una clase de matemáticas son sucesiones numéricas, no obstante, en la matemática hay objetos de diversas naturalezas con los cuales se pueden definir los términos de una sucesión, por ejemplo: números, signos, símbolos, ecuaciones, frases, figuras geométricas, etc. La tabla 2 muestra algunos ejemplos de sucesiones de símbolos y sucesiones numéricas, en las cuales, algunos de sus elementos coinciden entre sí. A continuación se explica brevemente el patrón que rige a cada sucesión.

Tabla 2. Algunos ejemplos de sucesiones de símbolos y sucesiones numéricas.

a)	1, 0, 1, 0, 1, 0, ..	Sucesión en la cual se alternan 1s y 0s. El patrón por el cual se rigen sus términos está determinado por $\boldsymbol{a_n} = \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
b)	*, #, #, *, #, #, *, #, #, ...	Es la sucesión en la que se van alternando una vez el signo '*' y dos veces el signo '#'.
c)	Ω, ■, &, Ω, ■, &, Ω, ■, ...	El arreglo que se repite en esta sucesión está conformado por sus tres primeros elementos.
d)	↓,↑,↓,↓,↑,↑,↓,↓,↓,↓ ↑,↑,↑,↑, ...	En esta sucesión el patrón que rige sus elementos está dado por las potencias de dos, $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ ... Los símbolos (↓) y (↑) van aumentando en un orden que está determinado por las potencias del número dos, cada vez que éstos se alternan.
e)	•,×,•,×,×,•,×,×,×,•,×,×,×,×, ...	Los símbolos (•) y (×) también se alternan. Cada vez que se repiten ambos elementos se va aumentando un (×) a la sucesión.

Por otro lado, en la matemática también hay una variedad de ejemplos de sucesiones cuyos elementos son de naturaleza aritmética, y en las cuales, la determinación del lugar que ocupa cada término, las habilidades en los cálculos numéricos, etc., son algunos de los factores que influyen para el reconocimiento del patrón que las rige, ver tabla 3.

Tabla 3. Algunos ejemplos de sucesiones numéricas.

	Sucesión	Término general
a)	-1, 2, -3, 4, -5, ...	$a_n = (-1)^n n$
b)	$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	$a_n = \frac{n-1}{n}$
c)	5, 10, 17, 26, 37, 50,…	$a_n = (n+1)^2 + 1$
d)	$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$	$a_n = \frac{n+1}{n}$
e)	4, 9, 16, 25, 36, 49, ...	$a_n = (n+1)^2$
f)	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$	$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
g)	1, 2, 6, 24, 120, ...	$a_n = n!$
h)	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{2^n}$
i)	2, 4, 6, 8, 10, 12, ...	La sucesión de los números pares $a_n = 2n$.
j)	1, -1, 1, -1, 1, ...	$a_n = (-1)^{n+1}$
k)	1, 4, 9, 16, 25, 36, ...	$a_n = n^2$
l)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{n}$
m)	1, 8, 27, 81, 125, ...	Cada término de la sucesión, está definido por el cubo de su posición, $a_n = n^3$
n)	$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \ldots$	$a_n = \frac{2^n}{2n-1}$
o)	$\frac{2}{1}, \frac{6}{2}, \frac{24}{6}, \frac{120}{24}, \frac{720}{120}, \ldots$	$a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$

Otros ejemplos, en la matemática son las sucesiones cuyos términos están definidos en función de los anteriores, ver tabla 4.

Tabla 4. Algunos ejemplos de sucesiones cuyos términos están definidos en función de los anteriores.

Sucesión	
a) $5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots$	La determinación del lugar que ocupa cada elemento de la sucesión, es un factor relevante que ayuda a establecer la expresión que sirve para obtener el término general, esto es, $a_n = 3n + 2$. Por otro lado, esta sucesión también se puede definir por recurrencia $a_1 = 5,\ a_n = a_{n-1} + 3$, en otras palabras, a partir del segundo término cada uno de los siguientes se obtiene al sumar 3 unidades al término anterior.
b) $-1, 1, -1, 1, \ldots$	Su fórmula general está determinada por $a_n = (-1)^n$, y también podemos escribirla en forma recursiva $a_1 := -1,\ \ a_{n+1} := -1\, a_n.$
c) $1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots$	Es la sucesión cuyo patrón esta dado por $a_1 = 1,\ \ a_n = a_{n-1} + n^2.$
d) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$	Es una de las sucesiones más conocidas en matemáticas. A partir de su tercer término cada uno de los siguientes se obtiene al sumar los dos términos anteriores, su regla de formación está dada por $a_1 = 1\ ,\ a_2 = 1\ y\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$.
e) $1, 2, 3, 7, 16, 65, \ldots$	Es la sucesión cuyo patrón está dado por $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$, con $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$.
f) $3, \sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\sqrt{\mathbf{3}}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\mathbf{3}}}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\mathbf{3}}}}}, \ldots$	El patrón que rige la sucesión está dado por $a_1 = 3,\ a_n = \sqrt{a_{n-1}}$.
g) $\sqrt{\mathbf{2}},\ \sqrt{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}, \sqrt{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}}, \ldots$	El patrón que rige la sucesión esta dado por $a_1 = \sqrt{2},\ \ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$.

Por otra parte, con el objetivo de profundizar un poco más acerca del reconocimiento de patrones en sucesiones de objetos matemáticos, se presenta el siguiente problema:

"La sucesión de Fibonacci $f_1, f_2, f_3, \ldots$ se define como sigue: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y, para $n \geq 3$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Probar que 9 divide a una infinidad de términos de la sucesión Fibonacci" (Alfaro et al., 1990, p. 7).

Mostremos que 9 divide a una infinidad de términos de la sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ Para esto consideremos primeramente la lista de residuos que se forma al dividir cada término de la sucesión de Fibonacci entre 9, y veamos qué ocurre con aquellos términos que tienen residuo igual a cero.

Tabla 5. Lista de residuos módulo 9 de la sucesión Fibonacci.

	SUCESIÓN DE FIBONACCI	RESIDUO MÓDULO 9
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	5	5
6	8	8
7	13	4
8	21	3
9	34	7
10	55	1
11	89	8
12	144	0
⋮	⋮	⋮
21	10946	2
22	17711	8
23	28657	1
24	46368	0
25	75025	1
26	121393	1
27	196418	2
28	317811	3
29	514229	5
30	832040	8
31	1346269	4
⋮	⋮	⋮

Tabla 6. Patrón implícito de 'la nueva sucesión', la generada por cada uno de los residuos.

	RESIDUO (a_n, 9) con $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
$a_1 = 1$	1
$a_2 = 1$	1
a_3	2
a_4	3
a_5	5
a_6	8
a_7	4
a_8	3
a_9	7
a_{10}	1
a_{11}	8
a_{12}	0
⋮	⋮
a_{21}	2
a_{22}	8
a_{23}	1
a_{24}	0
a_{25}	1
a_{26}	1
a_{27}	2
a_{28}	3
a_{29}	5
a_{30}	8
a_{31}	4
⋮	⋮

En la tabla 5, se puede observar la lista de residuos módulo 9, para los primeros 31 elementos de la sucesión. Por otro lado, los datos de la tabla 6 nos facilitan reconocer el patrón de los términos de 'la nueva sucesión' (la sucesión generada por cada uno de los residuos modulo 9). El patrón de esta nueva sucesión se puede describir de la siguiente manera: *a partir del tercer término sumamos los dos residuos anteriores*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3, \ con\ a_1 = 1, a_2 = 1,$$

y calculamos nuevamente el valor del residuo que se obtiene de dividir la suma a_n *entre 9*. Cabe destacar que la característica recurrente de 'la nueva sucesión', la hereda de la sucesión Fibonacci.

Este problema se torna difícil para los estudiantes de bachillerato, si se piensa en una demostración, por consiguiente, lo más que podemos esperar es que el estudiante intuya de la tabla 6 que hay una infinidad de residuos iguales a cero, pero no podemos concluir categóricamente que haya una tal infinidad. La descripción anterior de unos cuantos residuos modulo 9 nos permitió realizar un reconocimiento, pero de ninguna manera se trata de una demostración.

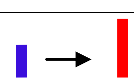
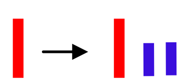
Otro problema que analizaremos en este trabajo es el siguiente: Se tiene una pareja de conejos en un lugar cerrado, y se desea saber cuántas parejas de conejos se tendrán en un año, si a partir del segundo mes de vida, cada pareja de conejos procrea dos nuevas parejas cada mes.

Las condiciones del problema establecen que:

a) Comenzando con una pareja de conejos (barra azul), al cabo de un mes de edad la pareja ya es adulta y se cruza (barra roja),
b) llegando el final del segundo mes la pareja adulta tiene dos parejas de conejos (par de barras azules) y se repite el mismo proceso para cada pareja de conejos.

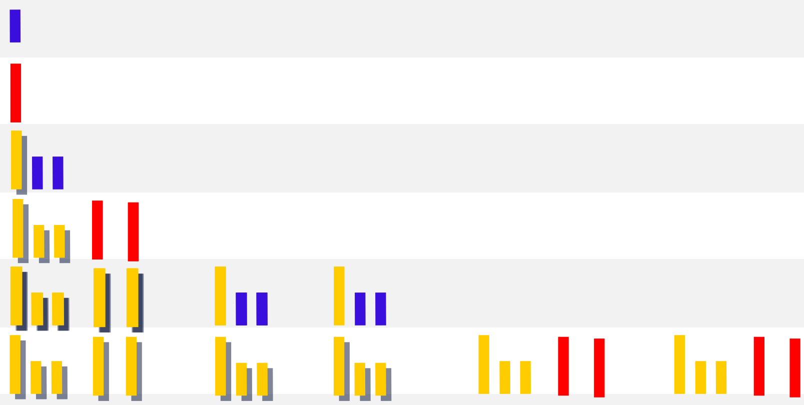
En las condiciones anteriores, está implícito el siguiente patrón.

Tabla 7. Patrón

a)	
b)	

Haciendo uso de este patrón, determinamos las parejas de conejos que se tendrán en cada uno de los primeros doce meses, ver tabla 8.

Tabla 8. Parejas de conejos que se tendrán en cada uno de los primeros doce meses.

Número de mes	Patrón	Total de parejas de conejos
Inicio del primer mes		**1**
Final del 1° mes		**1**
Final del 2° mes		**1**+2(1)=**3**
Final del 3° mes		**3**+2(1)=**5**
Final del 4° mes		**5**+2(3)=**11**
Final del 5° mes		**11**+2(5)=**21**
Final del 6° mes		**21**+2(11)=**43**
Final del 7° mes		**43**+2(21)=**85**
Final del 8° mes		**85**+2(43)=**171**
Final del 9° mes		**171**+2(85)=**341**
Final del 10° mes		**341**+2(171)=**683**
Final del 11° mes		**683**+2(341)=**1365**
Final del 12° mes		**1365**+2(683)=**2731**

El patrón antes mencionado, aparece en la segunda columna de tabla 8, además para cada uno de los primeros seis meses podemos verificar el número total de parejas de conejos que se generan a través del conteo de las barras verticales. Por ejemplo, para obtener el total de parejas de conejos en el final del cuarto mes, tenemos que sumar las 5 barras amarillas que indican el total de parejas generadas al final del tercer mes, más las 6 barras restantes que indican el doble de parejas de conejos que se generaron en el final del segundo mes, ver tabla 9.

Tabla 9. Parejas de conejos al final del 4° mes.

Total de parejas de conejos al final del 4° mes		
	Total de parejas de conejos al final del tercer mes	El doble de parejas de conejos al final del segundo mes

Podríamos seguir ilustrando el total de parejas de conejos con barras de colores para los primeros 12 meses, y verificar que 'el total de parejas de conejos al final de un mes está determinado por las parejas de conejos de los dos meses anteriores'. Dicho de otra forma, el total de parejas de conejos al final de un mes, se obtiene sumando el total de parejas de conejos del mes anterior, más el doble de parejas de conejos del penúltimo mes.

Está misma relación la heredan la lista de números que se muestra en la tercera columna de la tabla 8, esto es: 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365 y 2731 ya que éstos representan el total de parejas de conejos de cada mes para los 12 primeros meses, sin embargo, hasta el momento está relación sólo se cumple para los primeros meses.

Ahora, probemos que cualquier elemento de la sucesión 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, … se puede obtener sumando el número anterior más el doble valor del penúltimo número que le precede.

Supongamos que en un determinado mes 'm_n' hay 'a' parejas de conejos adultos que denotaremos por $a^{(adultos)}$ y 'b' parejas de conejos crías denotadas por $b^{(crías)}$, a saber:

$$m_n = a^{(adultos)} + b^{(crías)}$$

Dado el patrón anterior, ver tabla 7, tenemos que para el mes siguiente hay un total de

$$\boldsymbol{m_{n+1} = a^{(adultos)} + 2a^{(crías)} + b^{(adultos)}}$$

Y para el siguiente mes tenemos

$$m_{n+2} = a^{(adultos)} + 2a^{(crías)} + 2a^{(adultos)} + b^{(adultos)} + 2b^{(crías)}$$

Trabajando con nuestra notación llegamos a que

$$m_{n+2} = \boldsymbol{a^{(adultos)}} + \boldsymbol{2a^{(crías)}} + \boldsymbol{b^{(adultos)}} + 2\left(a^{(adultos)} + b^{(crías)}\right)$$

Por lo que $m_{n+2} = m_{n+1} + 2m_n$.

Finalmente, un ejemplo más que consideramos pertinente mostrar en esta sección, a propósito del reconocimiento de patrones, es parte del trabajo que realizan los estudiantes de una de las escuelas participes en la presente investigación, con el objetivo de contrastar el enfoque de nuestro estudio con el quehacer matemático que se realiza en el aula escolar acerca del reconocimiento de patrones.

Dentro del plan de estudios 2008-2009 para la asignatura *razonamiento matemático,* se menciona que, en su primera unidad, la '*búsqueda de patrones'* se aborda como una técnica o estrategia de la resolución de problemas. A continuación, mostramos uno de los problemas que los autores del plan de estudios sugieren a los estudiantes, además presentamos la primera de tres soluciones que proporcionan los autores y algunos comentarios nuestros al respecto.

> Resuelva en equipo el siguiente problema: Las figuras 0, 1, 2 y 3 constan de 1, 5, 13 y 25 cuadrados unitarios que no se traslapan o superponen. Si se continua con este patrón, ¿cuántos cuadrados unitarios habrá en la figura 2008? (SEP, 2008, p. 6).

Tabla 10. Sucesión de figuras (SEP, 2008, p. 6).

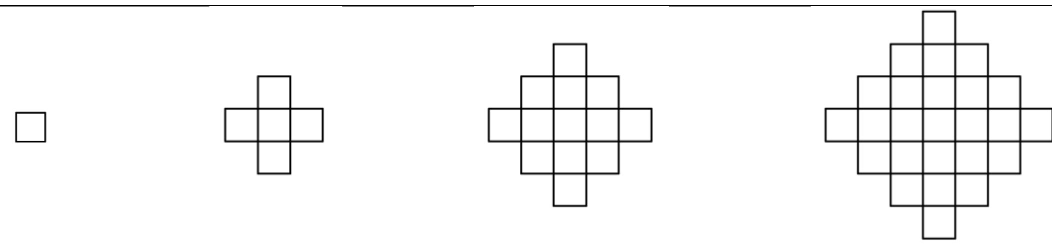


Figura 0	Figura 1	Figura 2	Figura 3

En la primera solución de los autores, el objetivo es recurrir al manejo de tablas y a la búsqueda de patrones como estrategias para resolver el problema. Para iniciar, los autores solicitan que el estudiante dibuje las figuras 4, 5 y 6, también solicitan que el estudiante cuente los cuadrados unitarios en cada figura y que reúna la información obtenida en una tabla.

Un paso más que los alumnos deben realizar, es observar la cantidad de cuadrados unitarios que hay en las seis primeras figuras, así como deducir que el total de cuadrados unitarios se puede escribir de la siguiente manera, ver tabla 11.

Tabla 11. Patrón de la sucesión de figuras (SEP, 2008, p. 7).

No. Figura	Total de Cuadrados Unitarios
0	1
1	$1+\ (4\times 1) = 5$
2	$1+\ (4\times 1)+(4\times 2) = 13$
3	$1+\ (4\times 1)+(4\times 2)+(4\times 3) = 25$
4	$1+\ (4\times 1)+(4\times 2)+(4\times 3)+(4\times 4) = 41$
5	$1+\ (4\times 1)+(4\times 2)+\ (4\times 3)+(4\times 4)+(4\times 5) = 61$
$\vdots$	$\vdots$
2008	$1+\ (4\times 1)+(4\times 2)+\cdots+(4\times 2008) = 8,068,145$
n	$1+\ (4\times 1)+(4\times 2)+\cdots+(4\times n) = 1+2n(n+1)$

Las expresiones aritméticas de la tabla 11, nos hacen concluir que los autores podrían haber percibido bloques de cuatro cuadrados unitarios en cada una de las figuras de la sucesión, en otras palabras, los autores podrían haber aislado visualmente bloques con esta característica. La anterior descripción nos ayuda a comprender los datos proporcionados por los autores en la tabla 11.

En la resolución de este problema, se ofrecen las verificaciones del total de cuadrados unitarios para algunos casos particulares, también se muestra una fórmula para hallar el total de cuadrados unitarios de una figura en cualquier posición, y además la información de la tabla deja entrever que se pueden seguir calculando la cantidad de cuadrados unitarios considerando la posición que ocupa una figura dentro de la sucesión.

Por otro lado, los resultados de aprendizaje esperados en la primera unidad del plan de estudios antes mencionado incluyen que el alumno reconozca la importancia de aplicar estrategias en la resolución de un problema, dicho de otra forma, se espera que el alumno pueda usar la ‘búsqueda de patrones’ como una heurística para la resolución de problemas. La naturaleza de este propósito es buena en este caso, sin embargo, enfocándonos en la importancia que tiene el reconocimiento de patrones para expresar generalidad, una tarea que también conviene considerar en el aula escolar, es inducir desde el inicio, a que el estudiante sea quien perciba el patrón que rige a la sucesión de figuras. Estimulando a que el estudiante intente explicar su percepción, con su propio lenguaje, motivándolo a que utilice distintos recursos, con los cuales se sienta seguro, antes de proporcionarle la expresión para hallar el término general. De esta forma, se podría fomentar que sea el estudiante quien le encuentre sentido a la regla de formación de la sucesión de figuras y que además sea capaz de utilizarla para determinar nuevos términos de la sucesión.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo, se explica detalladamente la metodología utilizada en cada una de las etapas del desarrollo de la investigación, describiendo: la selección de la población estudiada; los instrumentos para el acopio de datos; el procedimiento de la aplicación del cuestionario y de las sesiones de entrevistas; y finalmente la estructura, propósitos y respuestas de cada una de las preguntas del cuestionario.

Iniciamos esta sección exponiendo que el método considerado y sobre el cual nos basamos, en este trabajo, es de corte cualitativo. Nos proponemos explorar y entender el trabajo que realizan los estudiantes en la tarea de reconocimiento de patrones y no mostrar datos estadísticos de nuestro estudio pues se trata de un estudio de casos. Es a través de los instrumentos de acopio de datos que pretendemos analizar e identificar si hay un potencial en los estudiantes para tareas de este tipo.

3.1 Participantes de la investigación

Dado el propósito de nuestra investigación, la selección de los participantes se realizó con el interés de obtener datos que brinden información clara y que a su vez permitan responder las preguntas de investigación.

La muestra a estudiar en nuestro trabajo no pretende enfocar únicamente la mirada en estudiantes con un excelente historial académico, ni en aquellos casos que se encuentren en el extremo contrario. La población partícipe consistió de alumnos de sexto semestre (generación 2012-2015) de dos escuelas de nivel medio superior del estado de Puebla, México. La elección de los estudiantes se realizó de esta forma con el objetivo de contar con diversas y diferentes respuestas que arrojen información de calidad.

Como ya se ha manifestado los participantes en la investigación son 25 estudiantes de dos escuelas preparatorias (privadas) de la ciudad de Puebla, ocho de ellos pertenecieron a la comunidad estudiantil de la escuela Liceo Serdán, a los cuales les asignamos los nombres $A1, A2, \dots, A8$, los 17 restantes fueron un grupo conformado por estudiantes de los tres grupos de sexto semestre de otra escuela, cabe mencionar que mantenemos el anonimato de esta última por ser una de las condiciones de sus autoridades académicas para el libre acceso a su institución. Los nombres para estos alumnos son $B1, B2, \dots, B17$.

3.2 Instrumentos

El primer instrumento para el acopio de datos es un cuestionario cuya estructura consiste de 15 preguntas, en las cuales, hemos considerado sucesiones cuyos objetos son de diversas naturalezas (las comentamos con más detalle en las secciones 3.4, 3.5 y 3.6). Tomamos en cuenta que el tiempo en una clase de matemáticas es menor a una hora y para no entorpecer el rendimiento de los estudiantes decidimos dividir el cuestionario y aplicarlo en dos sesiones: la primera consistió en responder las preguntas 1-8 y la segunda en responder las siete preguntas restantes.

El segundo instrumento para la recolección de datos que se consideró en esta investigación fue la intervención de entrevistas, realizadas a 8 alumnos en diferentes partes del cuestionario, con el objetivo de que nos comentaran cómo procedieron en algunas de sus respuestas que son cruciales para la investigación y para que retomaran e intentaran responder algunas de las preguntas que no contestaron durante la aplicación del cuestionario.

3.3 Procedimiento

La recolección de datos en la escuela Liceo Serdán se realizó gracias al gran apoyo de sus directivos, se nos asignó un salón así como el apoyo de un maestro del área de matemáticas, el cual también estuvo presente durante la aplicación de las dos partes de nuestro cuestionario. La primera parte se aplicó en una sesión de 50 minutos y al día siguiente los estudiantes contestaron la segunda parte en el mismo lapso de tiempo.

Respecto a la segunda escuela preparatoria, la toma de datos se efectúo con el permiso de la subdirección, del mismo modo nos asignaron un aula de su institución en la cual se procedió a aplicar el cuestionario. El tiempo que se nos otorgó en cada una de las dos sesiones de trabajo con los estudiantes fue de una hora y diez minutos, el primer día se aplicaron las preguntas de la parte uno y al tercer día los estudiantes contestaron las siete preguntas de la segunda parte. Al igual que la primera escuela, durante las dos sesiones de trabajo contamos con el apoyo de una maestra del área de matemáticas.

Por otra parte, después de revisar las respuestas en cada uno de los 25 cuestionarios reafirmamos que se consideró pertinente entrevistar a 8 estudiantes, a saber, cuatro estudiantes de la escuela Liceo Serdán y cuatro alumnos de la preparatoria anónima. Las sesiones de entrevistas para los alumnos de la escuela Liceo Serdán se efectuaron durante un tiempo promedio de 30 minutos para cada uno de los alumnos. Respecto a los estudiantes de la escuela anónima, la primera sesión abarco un tiempo de 60 minutos en la cual se entrevistaron a dos estudiantes, y continuamos con el resto un día después durante un lapso de hora y media.

Cabe resaltar que la subdirección de la escuela Liceo Serdán fue muy amable y mostro gran apoyo al revisar los horarios de las asignaturas del área de matemáticas y al organizar dentro de éstos la agenda de sesiones de entrevistas, cuidando no interrumpir las actividades de sus alumnos, además de brindarnos un espacio en el cual se procedió a llamar a cada estudiante para el comienzo de su diálogo. De la misma forma logramos trabajar con los cuatro alumnos de la escuela anónima.

Por último, otros recursos que consideramos importantes en nuestro trabajo fueron realizar notas acerca de los comportamientos y aptitudes de los estudiantes durante la aplicación del cuestionario y las sesiones de entrevistas. También realizamos grabaciones (en audio) de las sesiones de entrevistas, las cuales fueron transcritas al final de este documento, con el objetivo de tener una mejor organización de las respuestas de los alumnos y utilizarlas como apoyo para el análisis de los resultados.

3.4 Estructura del cuestionario

Dado el objetivo de nuestra investigación nos dimos a la tarea de diseñar y aplicar un cuestionario para averiguar y obtener información acerca de si hay un potencial en los estudiantes de nivel medio superior para el reconocimiento de patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos. El cuestionario consiste de 15 preguntas, en las cuales, hemos considerado sucesiones cuyos objetos son de diversas naturalezas, por ejemplo, sucesiones cuyos elementos son de naturaleza aritmética, sucesiones de enunciados, sucesiones de figuras, etcétera. Enseguida presentamos la estructura de ambas partes del cuestionario.

Nombre: ____ PARTE 1

1. Escriba en los espacios indicados los términos de cada una de las sucesiones.

   a) --1, 1, -1, _____, _____, _____, ...

   b) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25},$ _____, _____, _____, $\frac{64}{81}, \frac{81}{100}, \ldots$

   c) $1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2},$ _____, _____, _____, ...

   d) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120},$ _____, _____, $\frac{1}{40{,}320}, \frac{1}{362{,}880}, \ldots$

2. Considere el listado de números impares agrupados de la siguiente manera

   $$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19) \ldots$$

   Halle los números impares que se encuentran en el quinto, sexto y décimo grupo.

3. Encuentre los siguientes 8 términos de cada sucesión.
   a) 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, ...
   b) 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, ...

4. Escriba los siguientes tres términos de cada una de las sucesiones.
   a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
   b) 1, 3, 7, 17, 41, 99, ...

5. Escriba en cada espacio el término correspondiente de la siguiente sucesión.

   1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, _____, _____, _____, 34, 35, ...

6. Considere la secuencia de enunciados y continúe la lista escribiendo los siguientes tres.
   a) Uno más uno
   b) Dos más dos
   c) Cuatro más uno
   d) Cinco más tres
   e) Ocho más uno
   f) Nueve más cuatro

   g) __________________________
   h) __________________________
   i) __________________________

7. Observe la siguiente secuencia de figuras

1	2	3	4
□□	□□□	□□□□	□□□□□
□	□□	□□□	□□□□
□	□□	□□□	□□□□
□	□□	□□□	□□□□

   Continuando con esta secuencia, diga cuántos cuadrados hay en las figuras de las posiciones 8 y 15.

8. Considere la siguiente sucesión 7, 11, 15, 19, 23, 27, _____, _____, _____, 43, 47, ...
   a) Escriba en cada espacio el término correspondiente de la sucesión.
   b) ¿Qué número aparece en la posición 250?

Nombre: ____ PARTE 2

9. Se tiene la siguiente lista de números consecutivos

<table>
<tr><td colspan="9">1</td></tr>
<tr><td colspan="3">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table>

Cada número tiene 3 hijos: el hijo medio es el triple del padre, el menor es el triple del padre menos uno y el hijo mayor es el triple del padre más uno.

a) ¿Cuál es el hijo mayor del número 50?
b) ¿Cuál es el hijo menor de 72?
c) ¿Cuál es el papá del número 2013?

10. En la tabla del problema anterior

a) En la primera fila hay una casilla, en la segunda hay tres, ¿cuántas casillas hay en la sexta fila?
b) ¿Qué número se encuentra en el centro de la fila 17?

11. Verifique que valen las siguientes igualdades

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$
$$\vdots$$

a) Escriba los siguientes dos renglones.
b) Encuentre el valor de $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 + 101$

12. Verifique que valen las igualdades de abajo y escriba los siguientes dos renglones.

$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$
$$\vdots$$

13. Considere la siguiente tabla

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	3	2	1.5
3	7	5	1.4
4	17	12	1.41666667
5	41	29	1.41379310
6	99	70	1.41428571
7	239	169	1.41420118
8	577	408	1.41422156
9	1393	985	1.41421319
10	3363	2378	1.41421362
11			
12			
13			

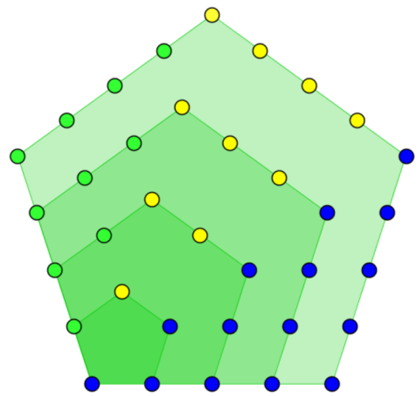
a) Escriba los valores de la sucesión x_n para las filas 11, 12 y 13.
b) Escriba los valores de la sucesión y_n para las filas 11, 12, y 13.
c) Halle los valores para las tres últimas filas de la cuarta columna.
d) ¿Qué puede decir de los valores de la cuarta columna?

14. Considere la siguiente tabla

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	4	2	2.0
3	10	6	1.66666666
4	28	16	1.75
5	76	44	1.72727272
6	208	120	1.73333333
7	568	328	1.73170731
8	1552	896	1.73214285
9	4240	2448	1.73202614
10	11584	6688	1.73205741
11			
12			
13			

a) Escriba los valores de la sucesión x_n para las filas 11, 12 y 13.
b) Escriba los valores de la sucesión y_n para las filas 11, 12, y 13.
c) Halle los valores para las tres últimas filas de la cuarta columna.
d) ¿Qué puede decir de los valores de la cuarta columna?

15. Oscar va a celebrar su cumpleaños y desea colocar luces de colores en su patio (él cuenta con 50 luces verdes, 50 amarillas y 50 azules), las cuales se formaran pentágonos como se muestra en la siguiente figura.



Oscar se dio cuenta que al acomodar las luces de colores en el orden anterior, le sería fácil saber cuántas luces necesita para formar hasta siete pentágonos. La información se da en la siguiente tabla

Número de Pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
2	3	3	6	12
3	6	6	10	22
4	10	10	15	35
5				
6				
7				

a) Completa los datos que faltan en las filas 5, 6 y 7.
b) Siguiendo el orden de Oscar, encuentra cuántas luces verdes, amarillas y azules le hacen falta si él quisiera formar 10 pentágonos.

3.5 Propósitos del cuestionario

En general, cada una de las preguntas del cuestionario tiene un mismo propósito, el cual es identificar si hay un *potencial* en estudiantes de nivel medio superior para reconocer patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos. Procedemos a explicar a qué nos referimos cuando hablamos de potencial.

Por el *potencial* que pudieran tener los estudiantes en el reconocimiento de patrones, nos referimos a su capacidad para reconocerlos aun cuando no cuenten con el conocimiento matemático, lenguaje matemático o lenguaje natural para expresarlo.

En nuestro estudio no descartamos la posibilidad de que el estudiante tenga dificultades para expresar el patrón que rige en una sucesión de objetos, por ejemplo, la regla de formación utilizando una simbología matemática adecuada, no obstante trataremos de averiguar si el estudiante es capaz de detectar las peculiaridades básicas del patrón que rige una sucesión de objetos matemáticos. Es probable que en el proceso del reconocimiento de un patrón haya más de una tarea implícita que impida al estudiante reconocer el patrón en una primera instancia, sin embargo averiguaremos si mediante alguna ayuda que le proporcionemos podrá reconocerlo. La ayuda consistirá solamente de un estímulo y no, por supuesto, en darle una pista para resolver el problema.

Por otro lado, respecto al diseño del cuestionario hemos considerado sucesiones cuyos objetos son de diversas naturalezas, en la primera parte del cuestionario consideramos sucesiones numéricas con relaciones de naturaleza aritmética, sucesiones numéricas cuyos términos están definidos en función de los anteriores, sucesiones de enunciados, y sucesiones de figuras. En algunas de las preguntas se le pide al estudiante que proponga elementos faltantes de una sucesión, ya sea intermedios o que continúe con la lista de objetos.

En la segunda parte del cuestionario se muestran dos sucesiones de igualdades, así como tres diferentes contextos en los cuales se presentan cuatro tablas con información numérica cuya estructura está definida mediante relaciones matemáticas, como lo son, relaciones de naturaleza aritmética y relaciones de recurrencia. En esta parte se le pide al estudiante que continúe con la escritura de la lista de igualdades, así como completar la información de las tablas.

En algunos de los problemas de ambas partes del cuestionario, también se le pide al estudiante que determine algún elemento particular con índice suficientemente grande como para que renuncie a escribir todos los elementos intermedios y así necesite determinar la regla general de construcción. A continuación describimos con más detalle ambas partes del cuestionario.

En la primera pregunta del cuestionario, se presentan cuatro sucesiones numéricas (mostrando unos cuantos términos de éstas), en las cuales, se pide al estudiante que proponga términos faltantes, ya sea intermedios o que continúe la lista. En la sucesión del inciso (a) algunos de sus términos coinciden entre sí, por su parte las sucesiones (b), (c) y (d) presentan relaciones de naturaleza aritmética.

1. Escriba en los espacios indicados los términos de cada una de las sucesiones.

   a) -1, 1, -1, ______, ______, ______, ...

   b) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}$, ______, ______, ______, $\frac{64}{81}, \frac{81}{100}, \dots$

   c) $1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$, ______, ______, ______, ...

   d) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$, ______, ______, $\frac{1}{40{,}320}, \frac{1}{362{,}880}, \dots$

Figura 1. Pregunta 1 de la primera parte del cuestionario.

En la segunda pregunta, se considera una lista finita de números impares positivos agrupados. En el primer grupo tenemos al número uno, en el segundo grupo se tienen a los impares tres y cinco, en el tercer grupo a los impares 7, 9, y 11, etc. Solicitamos que los estudiantes escriban el quinto, sexto y décimo grupo con el objetivo de averiguar si tienen potencial para reconocer el patrón que sigue el listado de números impares agrupados.

2. Considere el listado de números impares agrupados de la siguiente manera

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19) \dots$$

Halle los números impares que se encuentran en el quinto, sexto y décimo grupo.

Figura 2. Pregunta 2 de la primera parte del cuestionario.

En esta pregunta se pretende identificar si los estudiantes reconocen la relación que hay entre el número de impares en cada grupo y su posición, ver sección 3.6.

La tercera pregunta, consta de dos sucesiones numéricas cuyos términos están organizados en bloques de 1s y 0s, en la sección 3.6 explicamos el patrón de cada una de ellas. Nuestro objetivo es averiguar si el estudiante tiene potencial para reconocer el patrón que rige a cada sucesión.

3. Encuentre los siguientes 8 términos de cada sucesión

a) 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, ...
b) 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, ...

Figura 3. Pregunta 3 de la primera parte del cuestionario.

En la cuarta pregunta, se muestran dos sucesiones numéricas cuyos términos están definidos en función de los anteriores, la primera de ellas, es la conocida sucesión de Fibonacci y la segunda una de sus variantes. En ambos casos, determinar los tres términos siguientes requiere reconocer relaciones aritméticas de alta sofisticación, por lo cual, el estudiante necesita de una excelente agudeza visual.

4. Escriba los siguientes tres términos de cada una de las sucesiones.

a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...
b) 1, 3, 7, 17, 41, 99, ...

Figura 4. Pregunta 4 de la primera parte del cuestionario.

La quinta pregunta, consiste de una sucesión numérica de tipo especial, ver sección 3.6. Nuestro objetivo es averiguar si el estudiante tiene potencial para reconocer el patrón que permite construir los tres términos intermedios.

5. Escriba en cada espacio el término correspondiente de la siguiente sucesión.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, _____, _____, _____, 34, 35 ...

Figura 5. Pregunta 5 de la primera parte del cuestionario.

En la sexta pregunta, se presenta una sucesión de enunciados. Los enunciados son las verbalizaciones que describen al patrón que rige a la sucesión de la quinta pregunta.

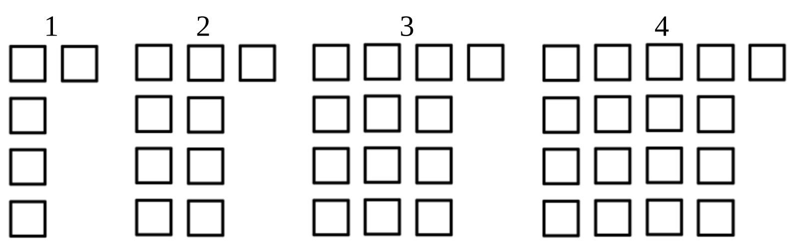
6. Considere la secuencia de enunciados y continúe la lista escribiendo los siguientes tres.

   a) Uno más uno
   b) Dos más dos
   c) Cuatro más uno
   d) Cinco más tres
   e) Ocho más uno
   f) Nueve más cuatro
   g) ____________________________________
   h) ____________________________________
   i) ____________________________________

Figura 6. Pregunta 6 de la primera parte del cuestionario.

En la séptima pregunta, se muestra una sucesión de figuras, en ésta, solicitamos que el estudiante determine la cantidad de cuadrados en distintas posiciones. Elegimos posiciones con índice suficientemente grande como para que los estudiantes renuncien a dibujar todas las figuras intermedias y así necesiten determinar la regla general de construcción. Nuestro objetivo es identificar si el estudiante tiene potencial para reconocer el patrón que rige a la sucesión.

7. Observe la siguiente secuencia de figuras



Continuando con el crecimiento de esta secuencia, ¿cuántos cuadrados hay en las figuras que ocupan las posiciones 8 y 15?

Figura 7. Pregunta 7 de la primera parte del cuestionario.

La pregunta número ocho, consta de una sucesión numérica cuyos elementos son de naturaleza aritmética. En esta sucesión solicitamos que el estudiante escriba los términos intermedios faltantes, ver figura 8, además pedimos que el estudiante determine un elemento particular con índice suficientemente grande como para que renuncie a escribir todos los términos intermedios y así necesite determinar la regla general de construcción. Planteamos las tareas anteriores, con el objetivo de identificar si el estudiante tiene potencial para reconocer el patrón que rige a la sucesión.

8. Considere la siguiente sucesión

7, 11, 15, 19, 23, 27, _____, _____, _____, 43, 47, ...

a) Escriba en cada espacio el término correspondiente de la sucesión.
b) ¿Qué número aparece en la posición 250?

Figura 8. Pregunta 8 de la primera parte del cuestionario.

En las preguntas nueve y diez del cuestionario, se presenta una tabla que consiste de una cantidad finita de números naturales. Pretendemos identificar si el estudiante tiene potencial para reconocer los patrones implícitos en el contexto del problema. La disposición de cada número natural en la tabla plasma algunos patrones, pero en este trabajo sólo analizaremos tres de ellos.

El primero es que cada hijo medio tiene la regularidad de ser un múltiplo de 3, el segundo es que el número que se encuentra en el centro de cada fila es de la forma 3^{n-1}, donde n representa el número de la fila y el tercero es que el número de casillas en cada fila es de la forma 3^{n-1}, donde n representa el número de la fila.

9. Se tiene la siguiente lista de números consecutivos

<table>
<tr><td colspan="9">1</td></tr>
<tr><td colspan="3">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table>

En la que cada número tiene 3 hijos: el hijo medio es el triple del padre, el menor es el triple del padre menos uno y el hijo mayor es el triple del padre más uno.
a) ¿Cuál es el hijo mayor del número 50?
b) ¿Cuál es el hijo menor de 72?
c) ¿Cuál es el papá del número 2013?

Figura 9. Pregunta 9 de la segunda parte del cuestionario.

10. Dado el problema anterior

    a) En la primera fila hay una casilla, en la segunda hay tres, ¿cuántas casillas hay en la sexta fila?
    b) ¿Qué número se encuentra en el centro de la fila 17?

Figura 10. Pregunta 9 de la segunda parte del cuestionario.

La pregunta 11, consiste de una sucesión de igualdades. La verificación de cada igualdad sugiere que el estudiante identifique las características comunes de una igualdad a otra, en el primer inciso de esta pregunta, se pide que el estudiante continúe la lista de igualdades con el propósito de identificar si tiene potencial para reconocer el patrón que siguen cada una de las igualdades. El segundo inciso se ha formulado en el mismo sentido, solicitando que el estudiante calcule la suma de los primeros 51 números impares.

11. Verifique que ciertamente valen las siguientes igualdades

$$
\begin{gathered}
1 = 1 \\
1 + 3 = 4 \\
1 + 3 + 5 = 9 \\
1 + 3 + 5 + 7 = 16 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

    a) Escriba los siguientes dos renglones
    b) Encuentre el valor de $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 + 101$

Figura 11. Pregunta 11 de la segunda parte del cuestionario.

En la pregunta 12, se presenta una sucesión de igualdades. La verificación de cada igualdad sugiere que el estudiante perciba las características comunes de una igualdad a otra. Pedimos al estudiante escribir las siguientes dos igualdades con el objetivo de averiguar si tiene potencial para reconocer las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión.

12. Verifique que ciertamente valen las igualdades y escriba los siguientes dos renglones

$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

Figura 12. Pregunta 12 de la segunda parte del cuestionario.

Por su parte, cada una de las preguntas 13 y 14 muestran una tabla construida a través de dos sucesiones numéricas, cuyos términos están definidos en función de los anteriores, ver sección 3.6. Los incisos (a) y (b) solicitan al estudiante escribir los términos de ambas sucesiones para las filas 11, 12 y 13, finalmente el inciso (d) se planteó para indagar si el estudiante puede identificar que los valores de los cocientes en la cuarta columna se aproximan a $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ respectivamente.

13. Considere la siguiente tabla

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	3	2	1.5
3	7	5	1.4
4	17	12	1.41666667
5	41	29	1.41379310
6	99	70	1.41428571
7	239	169	1.41420118
8	577	408	1.41422156
9	1393	985	1.41421319
10	3363	2378	1.41421362
11			
12			
13			

a) Escriba los valores de la sucesión x_n para las filas 11, 12 y 13.
b) Escriba los valores de la sucesión y_n para las filas 11, 12, y 13.
c) Halle los valores para las tres últimas filas de la cuarta columna.
d) ¿Qué puede decir de los valores de la cuarta columna?

Figura 13. Pregunta 13 de la segunda parte del cuestionario.

14. Considere la siguiente tabla

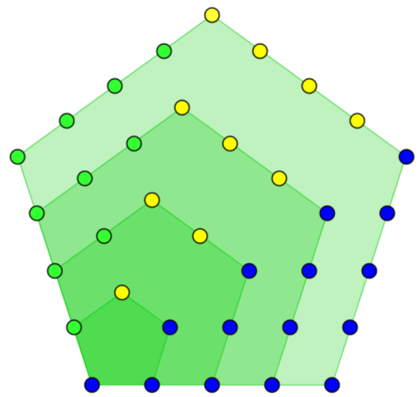
n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	4	2	2.0
3	10	6	1.66666666
4	28	16	1.75
5	76	44	1.72727272
6	208	120	1.73333333
7	568	328	1.73170731
8	1552	896	1.73214285
9	4240	2448	1.73202614
10	11584	6688	1.73205741
11			
12			
13			

a) Escriba los valores de la sucesión x_n para las filas 11, 12 y 13.
b) Escriba los valores de la sucesión y_n para las filas 11, 12, y 13.
c) Halle los valores para las tres últimas filas de la cuarta columna.
d) ¿Qué puede decir de los valores de la cuarta columna?

Figura 14. Pregunta 14 de la segunda parte del cuestionario.

Finalmente, la pregunta 15 consiste de un problema, cuya solución requiere reconocer relaciones de naturaleza aritmética, ver figura 15. En el planteamiento del problema incluimos una tabla que muestra la cantidad de luces que se necesitan para formar los primeros cuatro pentágonos. Solicitamos que el estudiante calcule la cantidad de luces verdes, amarillas y azules para formar hasta 10 pentágonos.

15. Oscar va celebrar su cumpleaños y desea colocar luces de colores en su patio (él cuenta con 50 luces verdes, 50 amarillas y 50 azules), las cuales formen pentágonos como se muestra en la siguiente figura



Oscar se dio cuenta que al acomodar las luces de colores en el orden anterior, le sería fácil saber cuántas luces necesita para formar hasta siete pentágonos. La información se da en la siguiente tabla

Número de Pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
2	3	3	6	12
3	6	6	10	22
4	10	10	15	35
5				
6				
7				

a) Completa los datos que faltan en las filas 5, 6 y 7.
b) Siguiendo el orden de Oscar, encuentra cuántas luces verdes, amarillas y azules le hacen falta si él quisiera formar 10 pentágonos.

Figura 15. Pregunta 15 de la segunda parte del cuestionario.

3.6 Respuestas del cuestionario

Pregunta 1

En la primera sucesión, esto es, $-1, 1, -1,$ ... el patrón que siguen sus elementos es que se van alternando -1s y 1s, su fórmula general está determinada por $a_n = (-1)^n$. Asimismo, notamos que a partir del segundo término de la sucesión cada uno de los siguientes se puede obtener en función del anterior, por lo que también podemos escribir la regla en forma recursiva $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -1\,a_n$. De esta forma, la respuesta para el primer inciso es

-1, 1, -1, _1_, _-1_, _1_, ...

Para la segunda sucesión, $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \dots$ el patrón que se observa tanto en numeradores como en denominadores es que están determinados por el cuadrado de un entero positivo n, esto es, los numeradores están determinados por el cuadrado del valor de su posición y los denominadores están definidos por el cuadrado del valor de la siguiente posición. Su fórmula general está dada por $a_n = \frac{n^2}{(n+1)^2}$, por consiguiente la respuesta a esta pregunta es

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \frac{64}{81}, \frac{81}{100}, \dots$$

En la tercera sucesión, $1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2} \dots$ notamos que en las posiciones impares se encuentra la lista de los primeros números naturales y en las posiciones pares los numeradores consisten de números impares consecutivos, comenzando con el impar ‘tres’, también notamos que en estas posiciones los denominadores tienen la característica de estar determinados por el número ‘dos’. Por otro lado, podemos convertir los términos enteros a a medios $\frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \boldsymbol{\frac{7}{2}, \dots}$ e identificar que hay una relación entre el término de la sucesión y su posición, la cual queda determinada por $a_n = \frac{n+1}{2}$.

Otra forma de determinar los elementos de esta sucesión es reconocer que a partir del segundo término cada uno de los siguientes se obtiene sumando $\frac{1}{2}$ al término anterior, por lo que su regla de formación también puede ser dada en notación recursiva $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ con $a_1 = 1$. De esta forma la respuesta correcta es

$$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \dots$$

En la última sucesión $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots$ el patrón que siguen sus términos es que los numeradores están determinados por el número uno, además los denominadores se pueden calcular por medio del factorial de un entero positivo n, esto es, el factorial del valor de su posición, por lo que su regla general está dada por $a_n = \frac{1}{n!}$. De esta manera, la respuesta correcta es

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \frac{1}{40{,}320}, \frac{1}{362{,}880}, \dots$$

Pregunta 2

Para determinar los números impares que se encuentran en el quinto, sexto y décimo grupo, el primer punto a notar es que *el número de impares consecutivos en cada grupo corresponde con el número de su posición*, por consiguiente, en el quinto grupo hay cinco impares consecutivos, en el sexto hay seis impares consecutivos y en el décimo grupo hay diez impares consecutivos. Continuando con la solución, nos fijaremos en los últimos números impares que se encuentran en los primeros cuatro grupos, ver tabla 12.

Tabla 12. Últimos números impares de los primeros cuatro grupos.

No. de Grupo	1	2	3	4	...
Último impar	1	5	11	19	

Nuestra siguiente tarea es encontrar si hay una relación entre los términos de la nueva sucesión (la generada por los últimos impares de los primeros cuatro grupos) y su posición, para esto re-expresemos los primeros cuatro términos y tratemos de determinar su regla de formación.

Tabla 13. Regla de formación.

No. de Grupo	1	2	3	4		n
	1^2+0 =1	2^2+1 =5	3^2+2=11	4^2+3 =19	...	$a_n = n^2 + (n-1)$

La regla mostrada en la tabla 13, nos permite calcular el último número impar que se encuentra en el quinto, sexto y décimo grupo, como se muestra en la tabla 14.

Tabla 14. Último impar en el quinto, sexto y décimo grupo.

No. de Grupo	1		5	6		10
	1^2+0 =1	...	5^2+4 =29	6^2+5=41	...	10^2+9=109

De esta forma, los resultados de la tabla 14 y considerando que *el número de impares consecutivos en cada grupo corresponde con el número de su posición*, nos permiten determinar cada uno de los números impares que se encuentran en el quinto, sexto y décimo grupo, como se muestra en la tabla 15.

Tabla 15. Números impares que se encuentran en los primeros diez grupos.

No. de Grupo	
1	(1)
2	$(3, 5)$
3	$(7, 9, 11)$
4	$(13, 15, 17, 19)$
5	$(21, 23, 25, 27, 29)$
6	$(31, 33, 35, 37, 39, 41)$
$\vdots$	$\vdots$
10	$(91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109)$

De forma similar, podemos fijarnos en los primeros números impares que se encuentran en los primeros cuatro grupos $(1, 3, 7, 13, \ldots)$ y determinar que su regla de formación está dada por $a_n = n^2 - (n - 1)$. Dada esta regla, que nos permite calcular el primer número impar que se encuentra en el quinto, sexto y décimo grupo, bastará realizar el conteo de los números impares que le siguen.

Pregunta 3

En la primera sucesión, $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$ el patrón que siguen sus elementos es que se van alternando 1s y 0s y además cada vez que se alternan se aumenta un cero a la sucesión. Por consiguiente, la respuesta es:

Tabla 16.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	
x_n	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	$\cdots$

Para la segunda sucesión, $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$ el patrón es que se van alternando 1s y 0s y además 1s y 0s van aumentando en uno más, cada vez que se alternan. Por lo tanto, la respuesta es:

Tabla 17.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	
x_n	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**	$\cdots$

Pregunta 4

El patrón que rige a la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$ ... es que, a partir de su tercer término, cada uno de los siguientes se obtiene al sumar los dos términos anteriores, de esta manera la regla de formación está dada por $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Por consiguiente, los tres términos siguientes son $34, 55$ y 89.

Por otro lado, el patrón que rige a la sucesión $1, 3, 7, 17, 41, 99, \ldots$ es que, a partir de su tercer término, cada uno de los siguientes se obtiene al sumar el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término, esto es, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ y $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Por lo tanto, los tres términos siguientes son $239, 577$ y 1393.

Pregunta 5

El patrón de la sucesión $1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, \ldots$ es que, dado su primer término $a_1 = 1$, procedemos a sumarle la unidad para obtener al segundo término, posteriormente, al segundo término le sumamos dos unidades para obtener al tercer término, al tercero nuevamente le sumamos la unidad, al cuarto término le sumamos tres unidades, así sucesivamente. En otras palabras, a partir del primer término operamos alternadamente, empezando por sumar la unidad y después ir sumando los números naturales, partiendo desde el número dos. De esta forma, la respuesta es:

$$1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 34, 35 \ \ldots$$

Pregunta 6

Retomando la sucesión de enunciados de la pregunta 6, a saber,

a) Uno más uno
b) Dos más dos
c) Cuatro más uno
d) Cinco más tres
e) Ocho más uno
f) Nueve más cuatro

observamos en primer lugar, que el patrón que determina la estructura de cada enunciado está implícito en la lectura de los mismos. Por un lado, podemos percibir que a partir del segundo enunciado en cada uno de los siguientes, los ‘primeros sumandos’ son el resultado de la suma que expresa el enunciado anterior, por ejemplo, ‘Uno más uno’ es igual a ‘Dos’, ‘Dos más dos’ es igual a ‘Cuatro’, ‘Cinco más tres’ es igual a ‘Ocho’, etc.

Por otro lado, podemos percibir frases alternadas que expresan al ‘segundo sumando’ de cada enunciado, a saber, ‘más uno’, ‘más dos’, ‘más uno’, ‘más tres’, ‘más uno’, ‘más cuatro’, etc. De esta manera, con “Uno más uno” como primer enunciado, la regla de formación consiste en escribir el resultado de la suma que expresa el enunciado anterior y posteriormente escribir alternadamente las frases que expresan al ‘segundo sumando’ del enunciando, comenzando por las frases ‘más dos’, ‘más tres’, ‘más cuatro’, ‘más cinco’, etc., siguiendo el orden de los números naturales, y después la frase ‘más uno’. Por consiguiente, la respuesta es:

g) Trece más uno
h) Catorce más cinco
i) Diecinueve más uno

Pregunta 7

La estructura de cada una de las figuras en la sucesión de la pregunta 7, nos permite percibir que al pasar de una posición a otra, *hay un aumento de una columna formada por cuatro cuadrados*. También podemos identificar, que el número de columnas con esta característica corresponde con el valor de la posición en la que se encuentran, es decir, hay una relación entre el valor que expresa la cantidad de columnas formadas por cuatro cuadrados y el valor de su posición.

Con base en esta relación, hasta este momento logramos identificar, que en cada figura hay una cantidad igual a $4n$ cuadrados donde n representa el valor de su posición, además podemos notar que en la parte superior derecha de cada figura hay un cuadrado más, por consiguiente, la regla que determina la cantidad de cuadrados en cualquier figura de la sucesión está dada por $4n + 1$. Dado lo anterior, para las figuras que ocupan las posiciones 8 y 15 hay 33 y 61 cuadrados respectivamente.

Pregunta 8

En la sucesión $7, 11, 15, 19, 23, 27, \ldots$ podemos percibir primeramente, que a partir del segundo término cada uno de los siguientes se obtiene sumando cuatro unidades al término anterior.

En segundo lugar, podemos continuar la lista de términos de la sucesión, por medio del patrón que hemos identificado al re-expresar aritméticamente cada uno de sus primeros seis términos. Por ejemplo, el número 7 lo podemos re-expresar como $4 + 3$, el número 11 lo re-expresamos como $8 + 3$, el 15 como $12 + 3$, el 19 como $16 + 3$, etc.

En estas expresiones, podemos reconocer que cada uno de los primeros sumandos es de la forma $4n$ y la suma de la constante tres. Las características anteriores, nos facilitan identificar que hay una relación entre los términos de la sucesión y su posición. De esta forma, la regla de formación queda determinada por $4n + 3$, donde n representa el valor de la posición. Por lo tanto, la respuesta para el inciso (a) es

$$7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, \ldots$$

Finalmente, utilizando la regla de formación obtenemos que el término de la sucesión que aparece en la posición 250 es el número 1003.

Pregunta 9

En la información que brinda el enunciado de la pregunta 9, podemos reconocer que las tres características esenciales que permiten la construcción de su tabla, ver figura 9, son que: *el hijo medio es el triple del padre, el menor es el triple del padre menos uno y el hijo mayor es el triple del padre más uno*.

De esta forma, para responder la primera pregunta ¿cuál es el hijo mayor del número 50?, bastará reconocer que *el hijo mayor es el triple del padre más uno*, por consiguiente, debemos obtener el triple del número cincuenta y sumarle la unidad, así hemos determinado que el hijo mayor del número 50 es 151. Para responder la pregunta ¿cuál es el hijo menor de 72?, es suficiente identificar que *el hijo menor es el triple del padre menos uno*, por lo tanto, el hijo menor del número 72 es $(3 \times 72) - 1 = 215$. Finalmente, para responder la cuestión ¿cuál es el papá del número 2013?, bastará reconocer nuevamente que *el hijo medio es el triple del padre*, al invertir esta la regla podemos identificar que la respuesta está implícita en los residuos módulo 3, esto es, en $\{0, 1, 2\}$. Para este caso $\left(\frac{2013}{3}\right)$, el residuo es igual a cero, lo cual significa que el padre del número 2013 es 671.

Pregunta 10

En la pregunta 10, dar respuesta a ¿cuántas casillas hay en la sexta fila? requiere retomar la información que se nos brinda en la tabla de la pregunta 9, esto es, en la primera fila hay una casilla, en la segunda fila hay tres casillas, en la tercera hay nueve, etc. Después de analizar la información que brinda la tabla, ver figura 9, podemos identificar que *el número de casillas en cada fila corresponde con una potencia del número tres*, a saber, en la primera fila hay $3^0 = 1$ casilla, en la segunda hay $3^1 = 3$ casillas, en la tercera hay $3^2 = 9$, en la cuarta hay $3^3 = 27$, etc., de esta forma, en la enésima fila hay 3^{n-1} casillas. Por lo tanto, en la sexta fila habrá $3^{6-1} = 3^5 = 243$ casillas. Hacemos notar, que consideramos pedir al estudiante el número de casillas en la sexta fila, debido a que el número 3^{6-1} es lo suficientemente grande para que el estudiante no dibuje todas las casillas hasta llegar a la fila número seis y es lo suficientemente pequeño para hacer la aritmética correspondiente que permita calcular las 243 casillas.

Continuando con el segundo inciso de la pregunta 10, el cual es, ¿qué número se encuentra en el centro de la fila 17?, podemos identificar de manera similar que *el número que se encuentra en el centro de cada fila corresponde con una potencia del número tres*, en la primera fila el número en el centro es $1 = 3^0$, en la segunda fila el número en el centro es $3 = 3^1$, en la tercera el número en el centro es $9 = 3^2$, etc., de esta manera, en la enésima fila el número que se encuentra en el centro será igual a 3^{n-1}. Por lo tanto, el número en el centro de la fila 17 es

$$3^{17-1}.= 3^{16} = 43\,046\,721.$$

Pregunta 11

En la pregunta 11, el análisis de una igualdad a otra nos permite identificar en primer lugar, que el número de sumandos impares en cada renglón siempre aumenta en uno más, esto es, el número de sumandos impares consecutivos coincide con el número de la igualdad en la que se encuentran.

$$1) \quad 1 = 1$$
$$2) \quad 1 + 3 = 4$$
$$3) \quad 1 + 3 + 5 = 9$$
$$4) \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$5) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$
$$6) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

Además, podemos notar que el patrón que sigue cada igualdad es que el valor total de la suma corresponde con el cuadrado del número de sumandos impares consecutivos que la generan. Por lo tanto, siendo n la variable que representa el número sumandos impares consecutivos, el resultado total de su suma será n^2. De esta forma, las igualdades en los renglones séptimo y octavo son

$$7) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$$
$$8) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

La relación anterior, nos permite identificar que para conocer el valor de la suma $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 + 101$ requerimos saber cuántos impares se están sumando, para esto, basta reconocer que el último impar en cada expresión es de la forma $2n - 1$. En este caso, podemos expresar al último impar como $2n - 1 = 101$, por lo tanto $n = \frac{102}{2} = 51$, lo cual significa que la igualdad en su miembro izquierdo consta de 51 sumandos impares. De aquí que $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 + 101 = 51^2 = 2\,601$.

Pregunta 12

La tarea en la pregunta 12, consiste en continuar la lista de igualdades. Para determinar las dos igualdades siguientes, lo primero que identificamos, es que los números que aparecen en las tres primeras igualdades son consecutivos. Por otra parte, al numerar cada renglón

$$1) \quad 1 + 2 = 3$$
$$2) \quad 4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$3) \quad 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

podemos detectar que el número de sumandos en ambos lados de cada igualdad crece de acuerdo con el orden de los números naturales. Dado lo anterior, las igualdades en el cuarto y quinto renglón son:

$$4)\ 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$
$$5)\ 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$

Por otra parte, notamos que la primera igualdad comienza con el número uno, la segunda igualdad comienza con el número 4, la tercera con el número 9, etc., en otras palabras, el primer sumando en cada renglón es un número cuadrado perfecto. Dadas las características anteriores, el patrón que rige el listado de igualdades está dado por

$$n^2 + (n^2 + 1) + \cdots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + \cdots + (n^2 + 2n)$$

Donde n representa el número del renglón que ocupa la igualdad.

Pregunta 13

Para la pregunta 13, procedemos a explicar el patrón que permite continuar la lista de términos, en cada una de las sucesiones de la tabla, ver figura 13. Primeramente, notamos que tanto x_n como y_n son sucesiones que presentan una relación recurrente entre sus términos, esto es, a partir del tercer término cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término.

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3 \text{ y } x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} \text{ para } n \geq 3.$$
$$y_1 = 1,\ y_2 = 2 \text{ y } y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2} \text{ para } n \geq 3.$$

Por otro lado, en la tabla de la pregunta 13, también identificamos que no solamente x_n y y_n son recurrentes por sí mismas, sino que la una depende de la otra, esto es:

$$x_n = 2y_{n-1} + x_{n-1}, \text{ con } x_1 = 1 \text{ y } y_1 = 1$$
$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1}, \text{ con } x_1 = 1 \text{ y } y_1 = 1$$

Por ejemplo, para la cuarta fila, los términos en las sucesiones x_n y y_n se pueden expresar como $17 = 2(5) + 7$ y $12 = 5 + 7$ respectivamente.

Por consiguiente, las respuestas para los tres primeros incisos de esta pregunta son

Tabla 18. Valores de las sucesiones x_n y y_n para las filas 11, 12 y 13.

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
⋮	⋮	⋮	⋮
11	8119	5741	1.41421355
12	19601	13860	1.41421356
13	47321	33461	1.41421356

Finalmente, la respuesta para el último inciso de esta pregunta, es que los valores de los cocientes en la tabla se aproximan a $\sqrt{2}$.

Pregunta 14

Para la pregunta 14, de manera similar explicamos el patrón que permite continuar la lista de términos, en cada una de las sucesiones de la tabla, ver figura 14. En primer lugar, notamos que tanto x_n como y_n son sucesiones que presentan una relación recurrente entre sus términos, esto es, a partir del tercer término cada uno de los siguientes se obtiene al calcular el doble valor de la suma de los dos términos anteriores.

$$x_1 = 1, x_2 = 4, \text{ y } x_n = 2(x_{n-1} + x_{n-2}) \text{ para } n \geq 3.$$
$$y_1 = 1,\ y_2 = 2, \text{ y } y_n = 2(y_{n-1} + y_{n-2}) \text{ para } n \geq 3.$$

Por otro lado, en la tabla de la pregunta 14, también detectamos que no solamente x_n y y_n son recurrentes por sí mismas, sino que la una depende de la otra, esto es:

$$x_n = 3y_{n-1} + x_{n-1}, \text{ con } x_1 = 1 \text{ y } y_1 = 1$$
$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1}, \text{ con } x_1 = 1 \text{ y } y_1 = 1$$

Por ejemplo, para la quinta fila, los términos en las sucesiones x_n y y_n se pueden expresar como $76 = 3(16) + 28$ y $44 = 16 + 28$ respectivamente.

Por lo tanto, las respuestas para los tres primeros incisos de esta pregunta son

Tabla 19. Valores de las sucesiones x_n y y_n para las filas 11, 12 y 13.

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
⋮	⋮	⋮	⋮
11	31648	18272	1.73204904
12	86464	49920	1.73205128
13	236224	136384	1.73205068

Por último, la respuesta para el último inciso de esta pregunta, es que los valores de los cocientes en la tabla se aproximan a $\sqrt{3}$.

Pregunta 15

Finalmente, en la tabla de la pregunta 15 podemos identificar que a partir del segundo valor numérico de la columna 'luces verdes' cada uno de los siguientes se obtiene al sumar todos los valores numéricos de la columna 'número de pentágonos' que se encuentran en filas anteriores, incluyendo el valor del número de pentágonos que se deseen formar. Por ejemplo, para calcular el número de luces verdes que se necesitan para formar tres pentágonos realizamos la suma $1 + 2 + 3 = 10$, para formar cuatro pentágonos realizamos la suma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, etc., ver tabla 20. De forma similar, se pueden calcular la cantidad de luces de color amarillo y verde.

Notamos que en las columnas 'luces verdes', 'luces amarillas' y 'luces azules' se encuentra implícita la suma de los primeros n números naturales, por consiguiente, podemos calcular la cantidad de luces para formar cualquier número de pentágonos a través de la siguiente fórmula.

$$P(n) = 2\,T(n) + \; T(n+1), \text{ con } T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde n representa el número de pentágonos que deseamos formar.

De esta forma, los datos que faltan en las filas 5, 6 y 7 son

Tabla 20. Cantidad de luces verdes, amarillas y azules para formar hasta siete pentágonos.

Número de Pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
2	3	3	6	12
3	6	6	10	22
4	10	10	15	35
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

Finalmente, para calcular la cantidad de luces que le faltan a Oscar para formar 10 pentágonos, hacemos lo siguiente

$$P(10) = 2\,T(10) + \,T(11)$$

$$P(10) = 2(55) + 66$$

$$P(10) = 176$$

Por lo tanto, como Oscar cuenta con 150 luces, determinamos que le hacen falta 26 luces para formar 10 pentágonos, de las cuales 5 son verdes, 5 son amarillas y 16 son azules.

Capítulo 4

Análisis de las respuestas del cuestionario

En este capítulo, se presenta el análisis de los resultados obtenidos que consideramos los más relevantes para cada una de las preguntas de la primera y segunda parte del cuestionario, tomando en cuenta las respuestas dadas en forma escrita y las obtenidas por los casos en que se valoró la necesidad de una entrevista para la aclaración de ideas. La discusión de los datos obtenidos se hizo en correlación con las ideas fundamentales sugeridas del marco teórico.

La tablas 21 y 22 muestran los resultados obtenidos en las preguntas de la primera y segunda parte del cuestionario. El relleno verde indica que los estudiantes contestaron satisfactoriamente, el color rojo significa que muestran dificultades para dar una respuesta correcta, y el blanco representa las preguntas que no fueron contestadas.

Tabla 21. Resultados obtenidos en las preguntas de la primera parte del cuestionario.

Alumno	Pregunta 1				Pregunta 2	Pregunta 3		Pregunta 4		Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7	Pregunta 8	
	a	b	c	d		a	b	a	b				a	b
A1														
A2														
A3														
A4														
A5														
A6														
A7														
A8														
B1														
B2														
B3														
B4														
B5														
B6														
B7														
B8														
B9														
B10														
B11														
B12														
B13														
B14														
B15														
B16														
B17														
Respuestas correctas	24	15	25	16	23	25	24	18	9	23	22	23	24	10

Tabla 22. Resultados obtenidos en las preguntas de la segunda parte del cuestionario.

Alumno	Pregunta 9			Pregunta 10		Pregunta 11		Pregunta 12	Pregunta 13				Pregunta 14				Pregunta 15	
	a	b	c	a	b	a	b		a	b	c	d	a	b	c	d	a	b
A1																		
A2																		
A3																		
A4																		
A5																		
A6																		
A7																		
A8																		
B1																		
B2																		
B3																		
B4																		
B5																		
B6																		
B7																		
B8																		
B9																		
B10																		
B11																		
B12																		
B13																		
B14																		
B15																		
B16																		
B17																		
Respuestas correctas	20	20	17	19	14	25	13	22	23	22	21		14	14	12		23	13

A continuación mostramos una discusión de las respuestas más relevantes en ambas partes del cuestionario, en correlación con las ideas fundamentales del marco teórico.

4.1 Discusión de resultados obtenidos en las preguntas de la primera parte del cuestionario

Acerca de la pregunta 1a:

En la primera sucesión, $-1, 1, -1,$ ... se identificó que a excepción del estudiante B17, todos lograron continuar la lista de términos. Las respuestas de la mayoría de los estudiantes revelan que fueron capaces de percibir que la ley de formación es alternar -1s y 1s. Además, en las figuras 16 y 17 se muestra que los estudiantes B5 y B13 plasmaron en un lenguaje visible las peculiaridades básicas del patrón que percibieron.

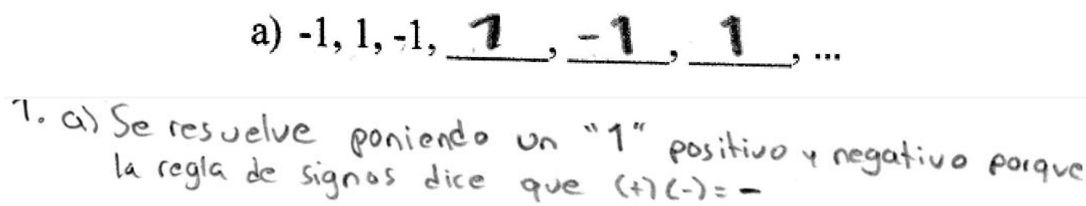


Figura 16. Respuesta al problema 1a por B5.

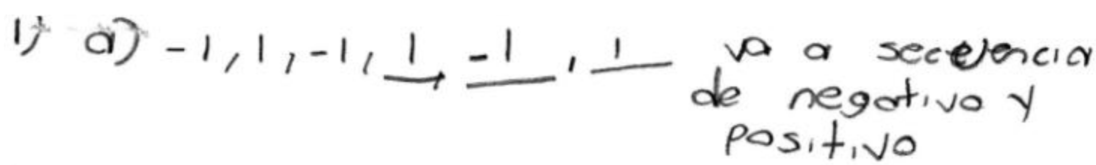


Figura 17. Respuesta al problema 1a por B13.

En el caso del estudiante B5, la formulación que realizó es "*Se resuelve poniendo un 1 positivo y negativo porque la regla de los signos dice que* $(+)(-) = -$ ". Esta expresión nos permitió identificar que en cada término de la sucesión el estudiante B5 utilizó al número '-1' como factor para generar la siguiente posición.

Respecto al alumno B17 que fue el único que no contestó la pregunta 1(a) durante la aplicación del cuestionario, decidimos entrevistarlo para conocer los motivos que le impidieron establecer una respuesta y le pedimos que nuevamente intentara contestarla. A continuación presentamos un fragmento de su diálogo y el resultado de su respuesta.

Entrevista alumno B17

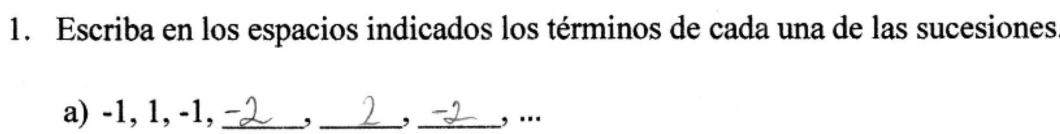
Pregunta 1a

Investigadora: En la primera parte del cuestionario, en la pregunta 1(a), usted no contesto la pregunta, quiero que usted lea la pregunta y responda el inciso (a).

Alumno B17: Bueno (el alumno empieza a leer lo siguiente) escriba en los espacios indicados los términos de cada una de las sucesiones, inciso (a) -1, 1 y -1, ¡ah! No le vi (recuerda por qué no contesto la pregunta y explica sus motivos), bueno un comienzo a lo que sigue, está menos uno, uno positivo y vuelve a estar un número que se repite menos uno, entonces como no le encontré, quise contestar algo rápido entonces me seguí con la que …

Investigadora: Ok, me puedes decir ahora, ¿cuáles son los tres términos que siguen?

Alumno B17: Pues eh… que sea una sucesión de uno hmm… dos, menos dos y dos (sin embargo en el cuestionario escribe -2, 2, -2).


1. Escriba en los espacios indicados los términos de cada una de las sucesiones.

a) -1, 1, -1, -2, 2, -2, ...

Figura 18. Respuesta al problema 1a por B17.

Una vez que el estudiante B17 exploró los pocos términos de la sucesión, identificamos que él fue capaz de percibir que el primer y el tercer término coinciden entre sí, en la figura 18 se muestra que B17 plasmó que -2, 2 y -2 son los siguientes tres términos. Su solución nos permite reconocer que él fue capaz de percibir una ley de formación diferente que le funcionó para comprobar los tres primeros términos de la sucesión y para continuar la lista de términos.

Como Rivera (1993) menciona:

> Desde un punto de vista estricto, unos cuantos términos no son suficientes para definir una sucesión, pues no obstante que en la mayoría de los ejemplos que aparecen en los textos, hay una “ley natural” de formación sugerida por esos primeros términos, los estudiantes podrían argumentar legítimamente, dos correspondientes leyes de formación diferentes. Por ejemplo, si escribimos 3, 5, 7, … algunos podrían opinar que el cuarto término es 9 (seguramente es lo “más natural”), mientras que otros podrían asegurar que es 11, argumentando que se trata de la sucesión de los primos impares”. (pp. 2-3).

La respuesta del alumno B17, nos permite evidenciar, que efectivamente podemos encontrar argumentaciones con sentido por parte de los estudiantes.

Acerca de la pregunta 1b:

En la sucesión, $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \cdots$ se identificó que 15 estudiantes fueron capaces de escribir los tres términos intermedios que se solicitaron. En este grupo, notamos que seis estudiantes lograron percibir que el numerador y denominador de cada fracción son números cuadrados perfectos y la mayoría de estos estudiantes también detectó que a partir del primer término de la sucesión el valor del denominador coincide con el valor del numerador de la siguiente posición. A continuación, mostramos el caso del estudiante A8 que en esta sucesión realizó la formulación "*son puros números al cuadrado*".

Entrevista alumno A8

Pregunta 1b

Investigadora: En la pregunta 1b

Alumno A8: Son puros números al cuadrado

Investigadora: Tenemos $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \cdots$ los numeradores son

Alumno A8: 1, 4, 9, 16, …

Investigadora: Y en los denominadores

Alumno A8: 4, 9, 16 y 25.

Por otro lado, los nueve estudiantes restantes que también contestaron satisfactoriamente son A2, A4, A6, B3, B4, B5, B11, B12 y B16. Estos nueve estudiantes realizaron conteos de una posición a la siguiente y percibieron que los numeradores se generan conforme a la suma de los primeros n números impares, lo cual les ayudo a determinar los valores de cada denominador, ver figuras 19 y 20.

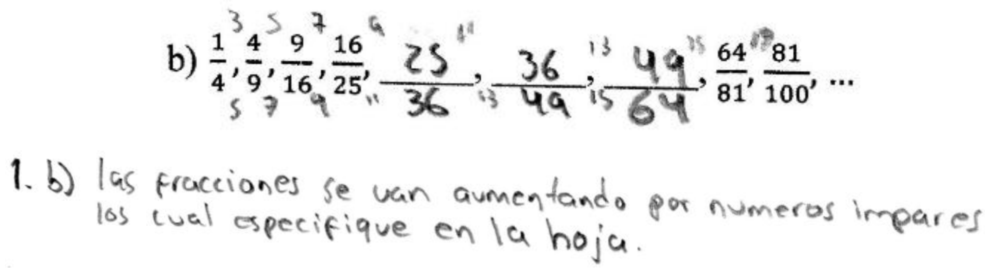


Figura 19. Respuesta al problema 1b por B5.

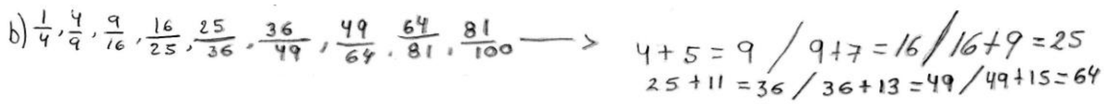


Figura 20. Respuesta al problema 1b por B11.

Finalmente, de los 5 alumnos que tuvieron dificultades para escribir los tres términos intermedios, ver tabla A1, identificamos que algunos de ellos sí percibieron la presencia de los números cuadrados perfectos, pero no lograron determinar los tres términos intermedios ya que no percibieron las características comunes de un término a otro o la relación que hay entre el término de la sucesión y su posición.

Acerca de la pregunta 1c:

En la tercera sucesión, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, ... identificamos que todos los estudiantes fueron capaces de continuar la lista de términos. En este grupo, cabe destacar que aunque 11 estudiantes lograron percibir las peculiaridades básicas del patrón (ver celdas amarillas de la tabla A1), plasmaron a cada término de la sucesión como la combinación de un número entero y una fracción impropia, como se observa en la figura 21.

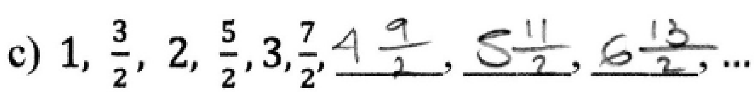


Figura 21. Respuesta al problema 1c por B10.

Por otro lado, tenemos los casos representativos de A6, B5, B8 y B13, quienes intentaron expresar sus percepciones mediante el lenguaje escrito. Por ejemplo, el recurso matemático que utilizó el alumno A6, fue convertir los términos enteros a medios, lo cual le permitió percibir números naturales consecutivos en los numeradores de cada fracción. Esta conversión fue un punto clave que le facilitó continuar la lista de términos de la sucesión.

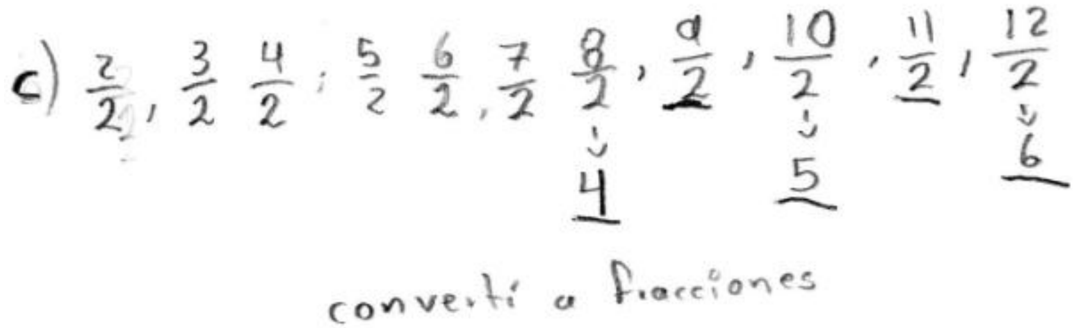


Figura 22. Respuesta al problema 1c por A6.

Por su parte, los alumnos B5 y B13 hicieron un esfuerzo por expresar algunas características comunes entre los términos de la sucesión, las cuales les sirvieron para generar los tres términos siguientes, ver figuras 23 y 24.

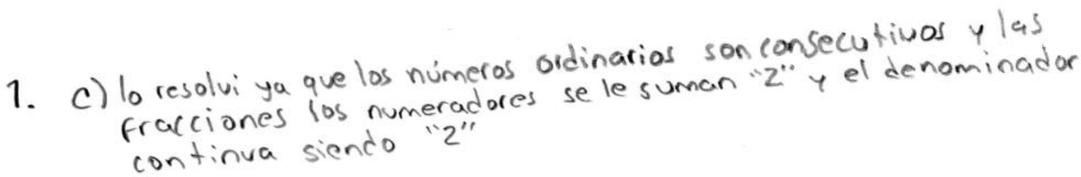


Figura 23. Respuesta al problema 1c por B5.

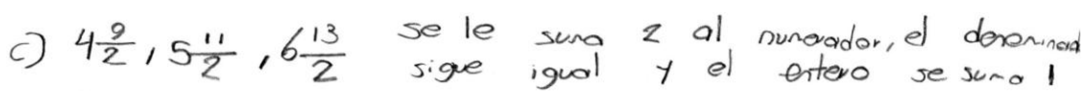


Figura 24. Respuesta al problema 1c por B13.

Finalmente, los alumnos A8 y B8 fueron capaces de percibir que a cada término de la sucesión se le suma $\frac{1}{2}$ para obtener el siguiente, ver figura 25.

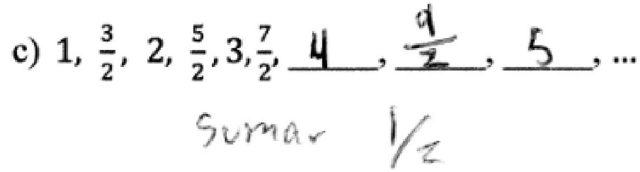


Figura 25. Respuesta al problema 1c por B8.

En el caso del estudiante A8 identificamos que también tuvo éxito para describir las peculiaridades básicas del patrón, puesto que explicó que fue sumando $\frac{1}{2}$ a cada término de la sucesión, como se muestra en el siguiente fragmento de su entrevista.

Entrevista alumno A8

Pregunta 1c

Investigadora: Para la sucesión 1c, ¿qué fue lo que usted hizo?

Alumno A8: Se va sumando $\frac{1}{2}$, al 1 le sumas $\frac{1}{2}$ dan $\frac{3}{2}$, más $\frac{1}{2}$ son $\frac{4}{2}$ que son 2…

Investigadora: ¿Cómo fue que encontraste que se suma $\frac{1}{2}$?, ¿qué fue lo que hiciste?

Alumno A8: Transformo en medios y ya veo que va de $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$, y así y se le va sumando.

Acerca de la pregunta 1d:

En la sucesión $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$, ... identificamos en primer lugar que ocho estudiantes no contestaron la pregunta, en segundo lugar notamos que el estudiante B10 fue el único que mostró dificultades para determinar los dos términos intermedios de la sucesión, y en tercer lugar identificamos que 16 estudiantes fueron capaces de percibir que los denominadores están definidos por el producto de los primeros *n* números naturales.

En este último grupo sobresalen 11 estudiantes, de los cuales, diez lograron plasmar las peculiaridades básicas del patrón mediante descripciones coloquiales y algunas expresiones aritméticas, como es el caso de los estudiantes B5 y B9, ver figuras 26 y 27.

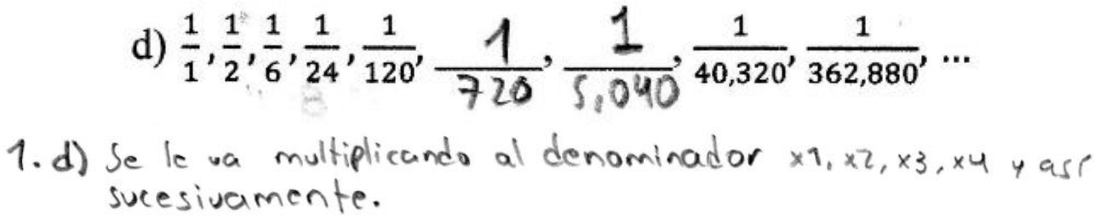


Figura 26. Respuesta al problema 1d por B5.

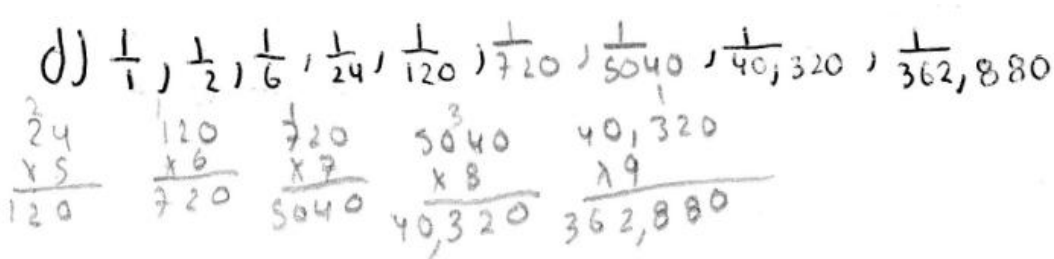


Figura 27. Respuesta al problema 1d por B9.

El onceavo estudiante es A8, quien logró describir las peculiaridades básicas del patrón al explicar que para generar los siguientes denominadores "*Se va multiplicando la posición por el denominador del anterior*". Podemos identificar que la percepción del estudiante A8 le sirvió para calcular el valor del siguiente denominador a partir del producto de los primeros $n-1$ naturales. El trabajo de este estudiante revela que fue capaz de verificar su regla para los primeros 5 términos de la sucesión y además la utilizó para generar los términos que ocupan la sexta y séptima posición. A continuación mostramos parte de su entrevista.

Entrevista alumno A8

Pregunta 1d

Investigadora: En la pregunta 1d ¿qué fue lo que hiciste?

Alumno A8: Se va multiplicando la posición por el denominador del anterior, por ejemplo, acá que es la posición dos, se va a multiplicar por uno, da dos. La posición tres va a ser 3(2)=6, acá (se refiere al elemento que ocupa el cuarto lugar) va a ser 4(6)=24, luego esta es la posición 5, 5(24)=120, luego la posición 6 va a ser 6(120)=720, en la posición 7 va a ser 7(720)=5040.

Finalmente de los estudiantes que no contestaron la pregunta 1d, decidimos entrevistar a A1 y le sugerimos que nuevamente intentará contestar la pregunta. Los resultados fueron que nuevamente no tuvo éxito para percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión.

Entrevista alumno A1

Pregunta 1d

Investigadora: En la pregunta 1d no la respondió

Alumno A1: El problema es que aquí no, por la presión y todo realmente no pude encontrar una sucesión, así que pues la deje en blanco.

Investigadora: Ok

Alumno A1: Ahora el problema son los denominadores. (Se le dio un tiempo para contestar la pregunta, sin embargo no logró proponer los dos términos intermedios de la sucesión).

Acerca de la pregunta 2:

En la segunda pregunta del cuestionario, se identificó que a excepción de los alumnos B7 y B13 todos fueron capaces de reconocer el patrón que sigue el listado de números impares agrupados. Sus respuestas revelan que lograron percibir que el número del grupo es igual al número de impares que lo constituyen, ver figura 28.

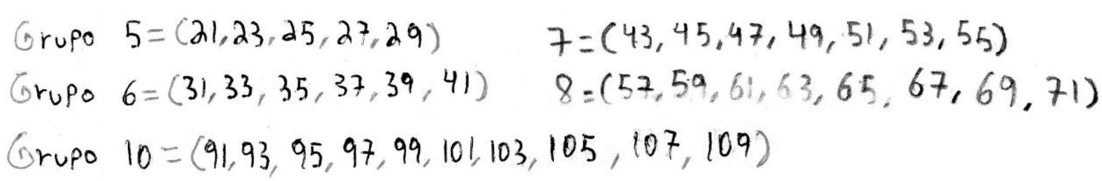


Figura 28. Respuesta al problema 2 por A1.

Otro ejemplo, es el caso del estudiante B8 quien fue capaz de plasmar su percepción mediante el lenguaje escrito, B8 nos manifestó que "*el número del grupo es igual al número de elementos*", ver figura 29.

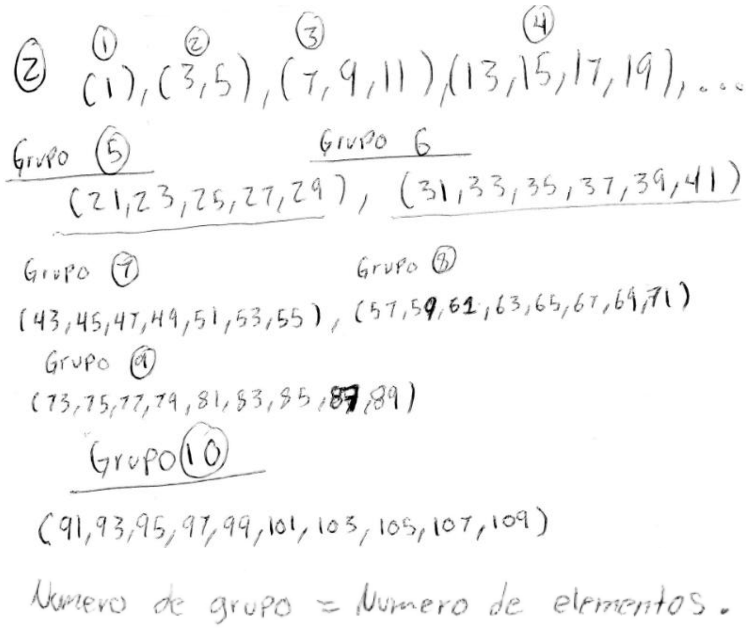


Figura 29. Respuesta al problema 2 por B8.

Por otro lado, el estudiante B5 nos intentó explicar que identificó números impares en cada grupo y que el número de impares aumenta de acuerdo con el orden de los números naturales, como él expresó: "*van aumentando del 1, 2, 3, 4, etc.*", ver figura 30. Esta descripción y su respuesta en el cuestionario nos permiten confirmar que B5 fue capaz de percibir que el número del grupo es igual al número de impares que lo constituyen. Finalmente, la única dificultad que mostró B5 fue que no realizó correctamente el conteo de los impares en el décimo grupo, ver figura 30.

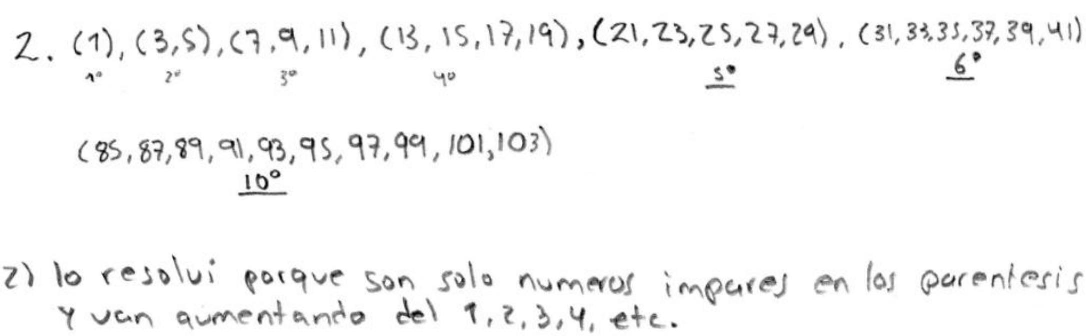


Figura 30. Respuesta al problema 2 por B5.

Como ya habíamos mencionado, los estudiantes que tuvieron dificultades para determinar los números impares que se encuentran en el quinto, sexto y décimo grupo fueron B7 y B13. Por un lado, el estudiante B13 fue capaz de plasmar que "*el grupo siguiente integra un número más mientras crece*", ver figura 31. Esta formulación nos revela que B13 sí fue capaz de percibir las peculiaridades básicas del patrón y que usó esta regla para ir agrupando la lista de los números, pero no identificó que los números que constituyen a cada grupo son números impares, ver figura 31.

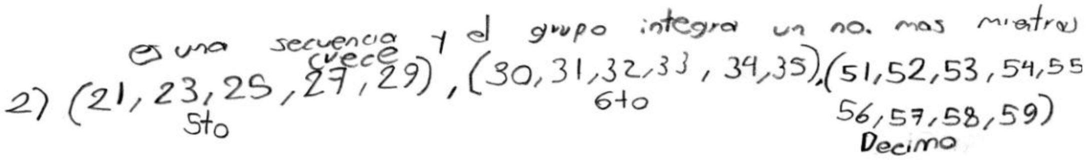


Figura 31. Respuesta al problema 2 por B13.

Por otro lado, en el caso del estudiante B7 decidimos entrevistarlo con el objetivo de que nos argumentará su respuesta y el resultado fue que nuevamente mostró dificultades para recordar y explicar lo que hizo.

Entrevista alumno B7

Pregunta 2

Investigadora: En la pregunta 2, en su respuesta, usted solamente me dio dos grupos, el (23, 25, 27, 29, 30), el (33, 35, 37, 41, 43, 45) y en el tercero usted nada más escribió el número 47, pero necesito saber, ¿por qué escribió esos números en cada grupo?

Alumno B7: El alumno lee la pregunta 2

Investigadora: La grabación no se entiende, sin embargo el alumno se puso muy nervioso y en las notas del día de la entrevista se menciona que el alumno no recuerda como procedió y no pudo explicar su respuesta.

Finalmente, la entrevista del estudiante A8 nos permitió confirmar que él logró percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige al listado de los números impares. El estudiante A8 nos explicó que identificó números impares en cada grupo y además intentó describirnos que la cantidad de números impares es igual al número de su grupo, como él expresó: "*la cantidad de números va a ser igual que el grupo, el número de grupo que sea*". A continuación mostramos el diálogo del estudiante A8.

Entrevista alumno A8

Pregunta 2:

Investigadora: En la pregunta dos usted escribió el grupo 5, el grupo 6 y el décimo grupo, por favor explícame ¿qué fue lo que te ayudo a determinar esos grupos?

Alumno A8: Son los números impares, en el tercer grupo por ejemplo va a ver… bueno la cantidad de números va a ser igual que el grupo, el número de grupo que sea, entonces en este caso el grupo quinto va a tener los cinco números impares siguientes que van del cuarto, y así, de hecho creo que escribí todos.

Investigadora: No, sólo escribiste los tres grupos (la investigadora se refiere al quinto, sexto y décimo).

Acerca de la pregunta 3a:

En la sucesión $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$ se identificó que todos los estudiantes fueron capaces de continuar la lista de términos, pero las respuestas de los estudiantes A4 y B5 revelan que ellos plasmaron a cada término de la sucesión como un bloque de 1s y 0s. El estudiante B5 expresó que "*los ceros van aumentando de 1, 2, 3, etc.*", lo cual revela que B5 logró percibir que se aumenta un cero a la sucesión cada vez que se alternan 1s y 0s, ver figura 32.

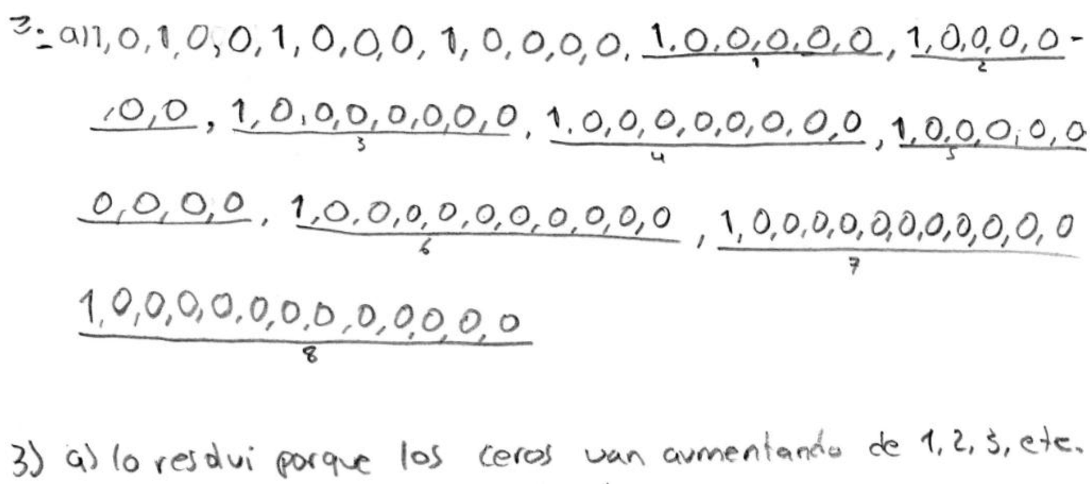


Figura 32. Respuesta al problema 3a por B5.

Por otro lado, tenemos los casos de los estudiantes A6, B6 y B13, quienes intentaron explicar sus soluciones, ver figuras 33, 34 y 35. Por ejemplo B6 nos explicó "*sólo le voy aumentando 1 al 0*". Esta expresión nos permitió identificar que B6 fue capaz de percibir que se aumenta un cero a la sucesión cada vez que se alternan 1s y 0s.

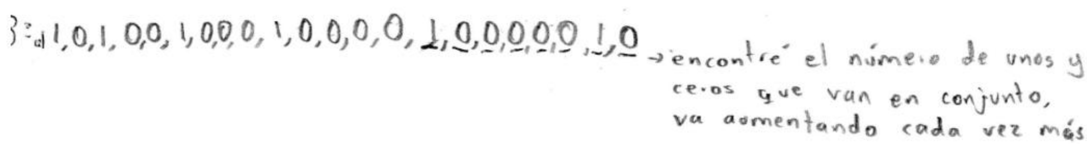


Figura 33. Respuesta al problema 3a por A6.

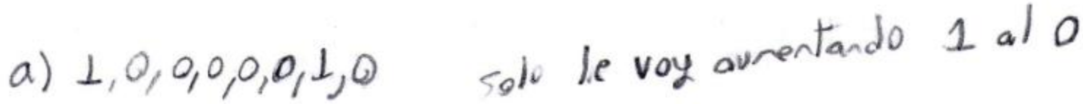


Figura 34. Respuesta al problema 3a por B6.

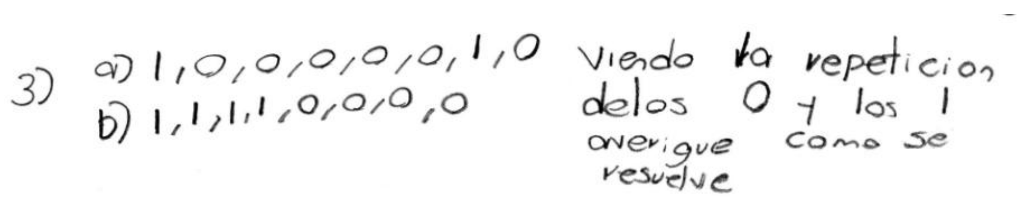


Figura 35. Respuesta al problema 3a por B13.

Podemos identificar que los estudiantes A6, B6 y B13 tienen dificultades para explicar sus percepciones mediante su lenguaje natural, pero es claro que lograron comprender la ley de formación de los términos de la sucesión y que la utilizaron para proponer los ocho términos siguientes.

Por otro lado, tenemos el caso del estudiante A3 que borró su respuesta (que fue correcta) durante la aplicación del cuestionario. Dada esta situación, decidimos entrevistarlo con el objetivo de conocer lo que hizo. Enseguida mostramos parte de su diálogo.

Entrevista alumno A3

Pregunta 3a

Investigadora: En la pregunta 3a explícame que fue lo que hiciste para determinar los 8 términos, primero quiero que leas el enunciado.

Alumno A3: Encuentra los siguientes 8 términos de cada sucesión. Aja yo lo que hice es que como va 1, 0 (señala los dos primeros términos de la sucesión 3a), uno, dos (señala el tercero, cuarto y quinto elemento de la sucesión 3a, esto es, 1, 0, 0) y vi que iban de la numeración 1, 2, 3, 4, … y luego aquí pues obviamente iba el 5 (señala su respuesta 1, 0,0,0,0,0, 1,…) ¡uno y cinco ceros! Y así me iba, uno y los seis ceros, y luego uno y siete ceros y así.

Investigadora: ¿Cómo lo describirías?

Alumno A3: ¡Eh! Que va, como en la numeración. Así va uno… pues va un cero, luego 1, 2 (el estudiante señala los términos 1, 0, 0), luego 1, 3 (el estudiante señala los términos 1, 0, 0, 0)... Así en la numeración, va de, pues así.

Podemos identificar que el estudiante A3 tuvo éxito para percibir la ley de formación de la sucesión 3a, como él nos comentó: "*y vi que iban de la numeración 1, 2, 3, 4, …*", lo cual nos revela que logró detectar que los 0s van aumentando de acuerdo con el orden de los números naturales. Por otro lado, la entrevista anterior nos permite notar que el estudiante A3 intentó describir coloquialmente su regla, al expresar la siguiente formulación: *"¡Eh! Que va, como en la numeración. Así va uno… pues va un cero, luego 1, 2, luego 1, 3… Así en la numeración*". Finalmente identificamos que A3 verificó la utilidad de su regla para los 14 términos mostrados en el cuestionario y recurrió a ésta para continuar la lista de términos de la sucesión, como lo muestran las siguientes líneas: "*y luego aquí pues obviamente iba el 5, ¡uno y cinco ceros! Y así me iba, uno y los seis ceros, y luego uno y siete ceros y así*".

Acerca de la pregunta 3b:

En la sucesión $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$, se identificó que a excepción del estudiante A3 todos fueron capaces de continuar la lista de términos. En primer lugar tenemos los casos representativos de los estudiantes B5, B6 y B16 quienes plasmaron las peculiaridades básicas del patrón mediante el lenguaje escrito, ver figuras 36, 37 y 38. Las respuestas de B5, B6 y B16 nos revelan que los tres estudiantes fueron capaces de percibir que 1s y 0s se alternan y que 1s y 0s van aumentando de acuerdo con el orden de los números naturales.

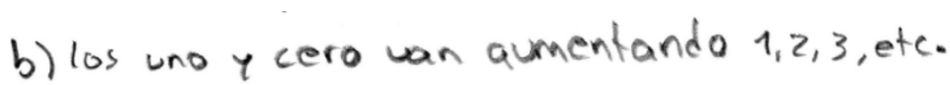


Figura 36. Respuesta al problema 3b por B5.

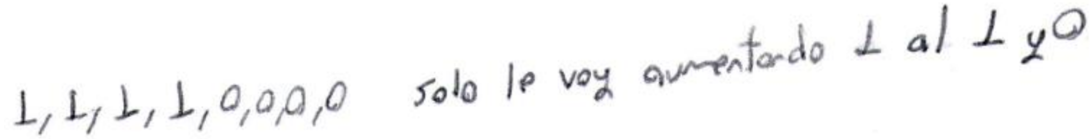


Figura 37. Respuesta al problema 3b por B6.

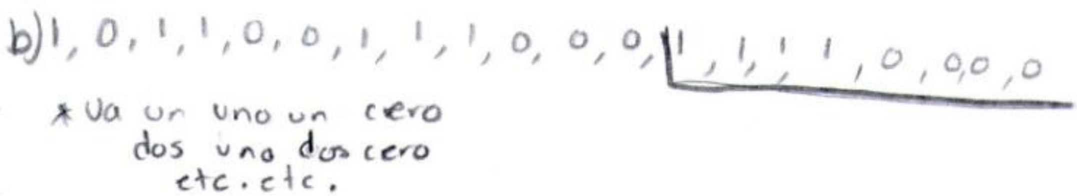


Figura 38. Respuesta al problema 3b por B16.

Finalmente, respecto al estudiante A3 que fue el único que no respondió la pregunta, decidimos entrevistarlo y le sugerimos que ocupará unos minutos de su entrevista para proponer los ocho términos que se le solicitaron en la sucesión 3b. Enseguida mostramos el resultado de su trabajo.

Entrevista alumno A3

Pregunta 3b

Investigadora: En la pregunta 3b usted no respondió (se le permite responder)

Alumno A3: ¡Ah! Era lo mismo pero ahora con los unos.

Investigadora: Explíqueme que haría

Alumno A3: Aja, por ejemplo en el primero dice 1, 0, y luego va así como por decirse… ¡Aja! pero ahora como en el primero (señala la sucesión 3a) sólo iban aumentando los ceros, aquí en el 3b ¡son los dos!, acá es 1, 0, en el otro es 1, 1, 0, 0, ¡dos! Y luego 1, 1, 1, 0, 0, 0 ¡va de tres!

Investigadora: Y el siguiente

Alumno A3: El siguiente sería 1, 1, 1, 1 y cuatro ceros.

Investigadora: Y el siguiente

Alumno A3: Y así pues cinco unos y cinco ceros y así va a aumentar

Investigadora: Puedes escribir tu respuesta en la hoja.

Alumno A3: Acá los escribo.

Investigadora: Sí. Entonces, ¿cómo describes el comportamiento de esta sucesión?

Alumno A3: Que va, cómo se dice, que va creciendo conforme a la numeración, van creciendo los números, los ceros y los unos.

La entrevista del estudiante A3 nos permitió identificar que él fue capaz de percibir las peculiaridades básicas del patrón de los términos de la sucesión. Notamos que dado el éxito para responder la pregunta 3a el estudiante A3 no tuvo dificultad alguna para intentar describir su regla mediante un lenguaje coloquial. Durante el diálogo de A3 identificamos que él fue capaz de comprender la ley de formación, puesto que nos expresó *"¡Aja! pero ahora como en el primero (señala la sucesión 3a) sólo iban aumentando los ceros, aquí en el 3b ¡son los dos!, acá es 1, 0, en el otro es 1, 1, 0, 0, ¡dos! Y luego 1, 1, 1, 0, 0, 0 ¡va de tres!*". Finalmente, identificamos que A3 verificó la utilidad de su regla para los 12 términos mostrados en el cuestionario y también la utilizó para determinar los ocho términos siguientes.

Acerca de la pregunta 4a:

En la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$ ... se identificó que a excepción del estudiante B1, todos tuvieron una actitud positiva hacia la tarea 'determinar los tres términos siguientes'. Incluso al final de la aplicación del cuestionario, algunos de los estudiantes me comentaron que '*percibían que debían actuar de una forma diferente en las sucesiones 4a y 4b*', y que tenían curiosidad por saber cómo podrían proceder para encontrar los tres términos que se les pedían.

Respecto a los resultados en esta pregunta, se identificó que 6 estudiantes tuvieron dificultades para percibir el patrón que rige a la sucesión, ver tabla A4. Como es el caso del estudiante A3, quien a partir del octavo término de la sucesión procedió a sumar cantidades diferentes sin relación alguna, para obtener los tres términos siguientes, ver figura 39.

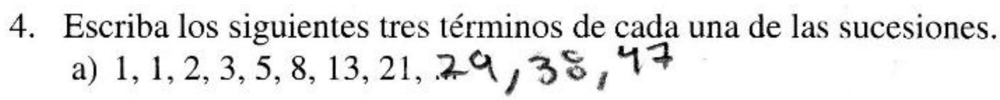


Figura 39. Respuesta al problema 4a por A3.

Por otro lado, identificamos que 18 estudiantes percibieron que los dos primeros términos de la sucesión son unos y que cada uno de los siguientes se obtiene *al sumar los dos términos anteriores*. También notamos que los estudiantes A6, B5, B6, B8, B13 y B16 lograron describir sus percepciones en forma escrita, por ejemplo A6 plasmó que su regla consiste en *"sumar los dos números que están juntos",* ver figura 40.

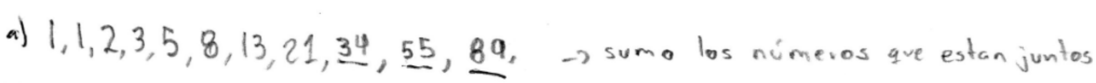


Figura 40. Respuesta al problema 4a por A6.

Dos ejemplos más que cabe mencionar son los estudiantes A1 y A8, quienes intentaron explicar el patrón que rige a la sucesión 4a, durante sus entrevistas. En el caso de A1 se observó que aunque no logró describir la regla de formación de manera explícita sí logró comprenderla y utilizarla para calcular algunos términos con índice pequeño. Respecto al alumno A8, identificamos que tuvo éxito, para describirnos, que la regla consiste en "*sumar los dos números anteriores*". A continuación mostramos parte de sus entrevistas.

Pregunta 4a

Investigadora: En la pregunta 4 nos dice encuentra los siguientes tres términos de cada una de las sucesiones, en la primera sucesión yo le di los primeros 8 elementos y usted escribió los números 34, 55 y 89, me puedes decir ¿cómo los hallaste?

Alumno A1: A ver recuerdo, bueno aquí según yo para encontrar el tercero (señala el número 2 en la sucesión) tenemos que tener los dos datos anteriores por ejemplo 1+1 daba el siguiente ¡dos!, 2+1 daba el siguiente ¡tres!, 3+2 daba el siguiente, 5+3 daba el siguiente ¡ocho!, 8+5 daba el siguiente ¡trece!, 13+8 da el siguiente ¡veintiuno! Y entonces sería 21+13 daría el siguiente y así hasta llegar al 34, 55 y 89.

Entrevista alumno A8

Pregunta 4a

Investigadora: Ok, no te preocupes. Ahora ¿cuál es la regla que hallaste?

Alumno A8: Sumar los dos números anteriores, se suma el número anterior más el anterior del anterior.

Finalmente, entrevistamos al estudiante B17 quien tuvo dificultades para determinar los tres elementos siguientes de la sucesión 4a, ver tabla A4. El resultado de su entrevista fue que no logró explicar la respuesta que propuso en su cuestionario, como se muestra en las siguientes líneas.

Entrevista alumno B17

Pregunta 4a

Investigadora: Puedes leer por favor la pregunta 4a

Alumno B17: El alumno comienza a leer la pregunta 4a

Investigadora: Aja, los números que usted escribió fueron 37, 69 y 133, ahora ¿por qué escribió esos números?

Alumno B17: No me acuerdo cómo le hice, hay no me acuerdo, pero según yo… (El alumno intentó recordar, pero se puso muy nervioso al no poder recordar lo que hizo y decidimos terminar su entrevista).

Acerca de la pregunta 4b:

En la sucesión $1, 3, 7, 17, 41, 99, \ldots$ se observó un aumento notable de estudiantes que no contestaron la pregunta. En comparación a los resultados obtenidos en la pregunta 4a, trece alumnos no fueron capaces de proponer una respuesta. Además los estudiantes B6, B11 y B13 mostraron dificultades para percibir la regla de formación que funciona para los primeros seis términos de la sucesión, ver tabla A4.

Por otra parte, identificamos que 9 estudiantes sí lograron percibir la regla de formación de los términos de la sucesión. A continuación mostramos los casos de los estudiantes A6, A7 y B8 quienes mostraron potencial para reconocer que los dos primeros términos son 1 y 3 y que cada uno de los siguientes se obtiene al sumar el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término.

En primer lugar, los estudiantes A6 y A7 intentaron describir en forma escrita la regla de formación que percibieron, por ejemplo, A6 nos explicó lo siguiente: "*sumo el número a la derecha con el de la izquierda y se vuelve a sumar el de la derecha*", ver figura 41.

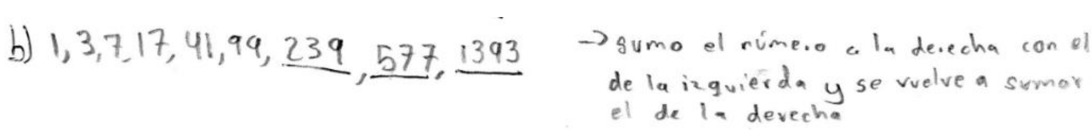


Figura 41. Respuesta al problema 4b por A6.

En el caso del estudiante A7, identificamos que también fue capaz de plasmar sus ideas en un lenguaje visible, ver figura 42. Él expresó la regla de formación mediante algunas expresiones aritméticas y además verificó la utilidad de su regla para los primeros seis términos de la sucesión.

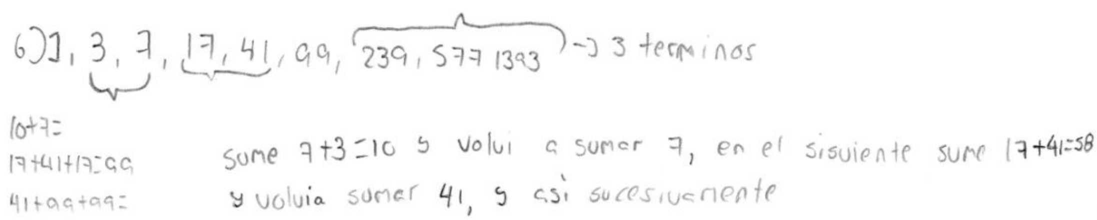


Figura 42. Respuesta al problema 4b por A7.

En segundo lugar, el estudiante B8 expresó que la regla de formación consiste en sumar "*el doble de número anterior a la respuesta más el anterior a este*", ver figura 43.

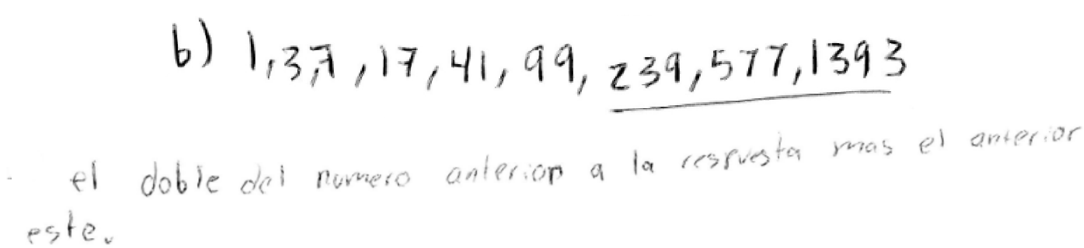


Figura 43. Respuesta al problema 4b por B8.

Finalmente, de los estudiantes que no contestaron la pregunta 4b, tenemos los casos de A1 y A8 a quienes les sugerimos que intentaran proponer los tres términos siguientes durante algunos minutos de sus entrevistas. A continuación mostramos parte de sus diálogos.

Entrevista alumno A1

Pregunta 4b

Investigadora: Ahora para la pregunta 4b, no la contestó (el investigador da un tiempo para contestarla).

Alumno A1: Bueno según yo de los tres que veo sería 3(2)+1 porque 3(2)=6 más uno ¡siete!, 7(2)=14 más tres 17, entonces según yo siguiendo esa lógica sería 17(2)+7 quedaría 41, 41(2)+17 quedaría 99 y 99(2)+41 y daría el siguiente número.

Investigadora: Me puedes escribir en la hoja los tres términos, encuentra los tres términos siguientes

Alumno A1: Serían 99(2)+41… (el alumno procede a realizar las operaciones para determinar los tres términos siguientes en la sucesión).

Investigadora: Escríbelos en la parte de abajo

Alumno A1: ¡Ya! Según yo los tres términos que siguen son 239, 577 y 1393

Entrevista alumno A8

Pregunta 4b

Investigadora: Ahora para 4b

Alumno A8: Es, este… Dos veces el anterior, más el dos veces antes. Por ejemplo, este, 3(2)=6; 6+1=7, 7(2)=14; 14+3=17, luego 17(2)=34; 34+7=41 y así.

Investigadora: ¿Cómo los encontraste?

Alumno A8: Sólo ¡me vino!

Investigadora: Si quieres determinar un elemento… entonces…

Alumno A8: Se va a multiplicar por dos el número anterior y se le va a sumar el número anterior del anterior.

Las entrevistas de los alumnos A1 y A8 nos permitieron identificar que ambos fueron capaces de percibir la regla de formación que rige a la sucesión, ambos también verificaron la utilidad de su regla para los seis términos mostrados en el cuestionario y en el caso del estudiante A8 identificamos que logró describir coloquialmente el patrón de la sucesión, a través de la siguiente formulación: "*Se va a multiplicar por dos el número anterior y se le va a sumar el número anterior del anterior*".

Acerca de la pregunta 5:

En esta pregunta, identificamos que los estudiantes B7 y B14 fueron los únicos que tuvieron dificultades para percibir las peculiaridades básicas del patrón. El estudiante B14 percibió que basta sumar la unidad a los términos en las posiciones impares para obtener el término siguiente, pero no percibió que en las posiciones pares, se deben ir sumando los números naturales, iniciando desde el número dos.

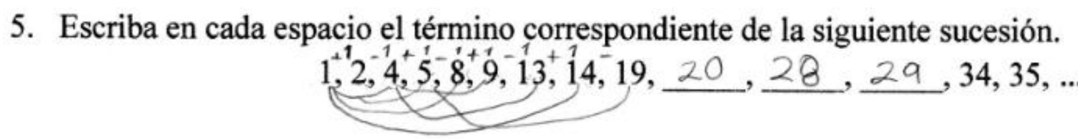
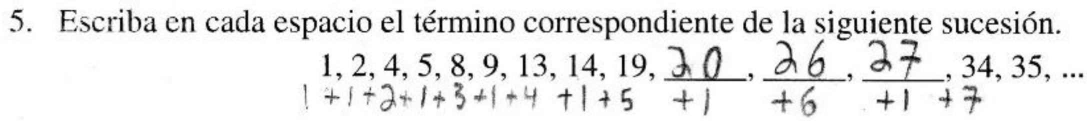


Figura 44. Respuesta al problema 5 por B14.

Por otro lado, de los 23 estudiantes que lograron determinar los tres términos intermedios, presentamos 5 respuestas representativas en las cuales se plasmaron las peculiaridades básicas del patrón. En primer lugar, los estudiantes A1, B6 y B16 intentaron expresar que al primer término le sumaron la unidad, que al segundo término le sumaron dos unidades, que al tercero le sumaron la unidad, que al cuarto término le sumaron tres unidades, etc., ver figuras 45, 46 y 47.

El estudiante A1 realizó conteos de un término a otro y recurrió a símbolos numéricos para expresar que sumó alternadamente la unidad y la suma de n, partiendo desde $n = 2$. Por otro lado, los estudiantes B6 y B16 también intentaron plasmar la regla anterior a través de las siguientes formulaciones: "*sólo le aumento uno y el siguiente el otro número*", "*se deja un espacio y se va aumentando 1, espacio, 2, espacio 3, etc.*". Como se observa en las figuras 45, 46 y 47, los alumnos A1, B6 y B16 fueron capaces de validar la utilidad de sus formulaciones para los primeros nueve términos de la sucesión y utilizaron la regla de formación para calcular los tres términos intermedios.

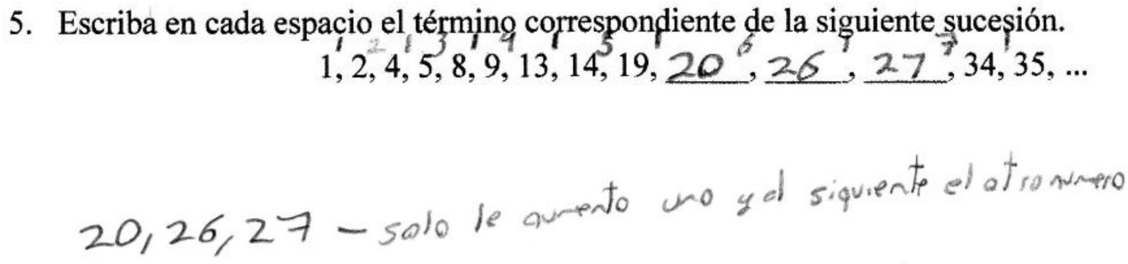


5. Escriba en cada espacio el término correspondiente de la siguiente sucesión.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 34, 35, ...

1 +1 +2 +1 +3 +1 +4 +1 +5 +1 +6 +1 +7

Figura 45. Respuesta al problema 5 por A1.

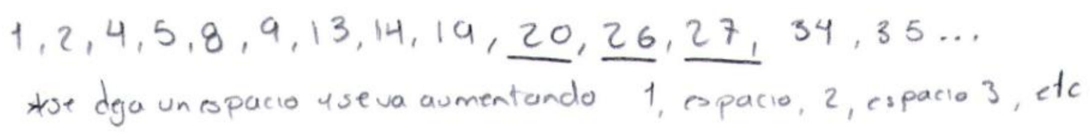


5. Escriba en cada espacio el término correspondiente de la siguiente sucesión.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 34, 35, ...

20, 26, 27 — solo le aumento uno y el siguiente el otro número

Figura 46. Respuesta al problema 5 por B6.

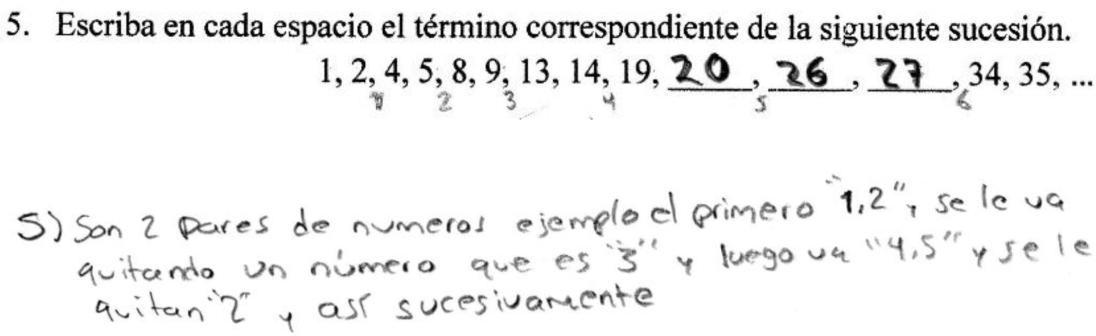


1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 34, 35 ...

*se dga un espacio yseva aumentando 1, espacio, 2, espacio 3, etc.

Figura 47. Respuesta al problema 5 por B16.

En segundo lugar, presentamos el trabajo de los estudiantes B5 y B8, que tuvieron dificultades para comunicar sus percepciones en forma escrita. Ambos alumnos intentaron explicar que detectaron parejas de números consecutivos entre los primeros términos de la sucesión, a saber, la pareja 1, 2, la pareja 4, 5, la pareja 8, 9, la pareja 13, 14, etc. Posteriormente, expresaron que no aparece el número 3 después de la primera pareja de números, también intentaron explicar que no aparecen los números 6 y 7 después de la segunda pareja de números, etc. En sus respuestas, se observó que realizaron el conteo de los números naturales que son consecutivos a cada pareja y reconocieron que esta lista de números crece de acuerdo con el orden de los números naturales. De esta forma, lograron determinar los tres términos intermedios de la sucesión, ver figuras 48 y 49.

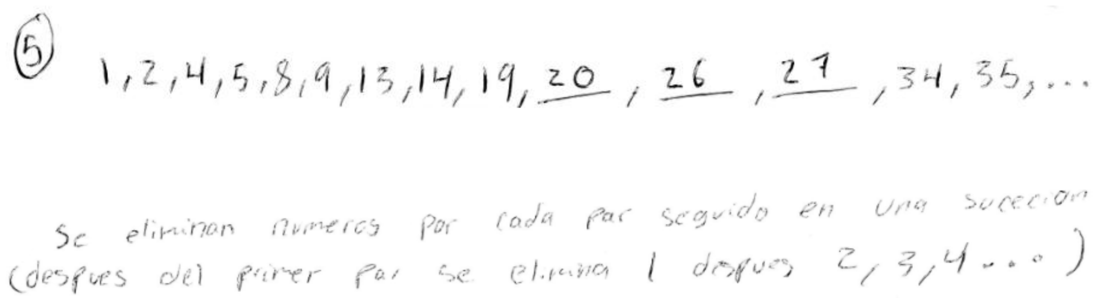


5. Escriba en cada espacio el término correspondiente de la siguiente sucesión.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 34, 35, ...

5) Son 2 pares de numeros ejemplo el primero "1,2", se le va quitando un número que es "3" y luego va "4,5" y se le quitan "2" y así sucesivamente

Figura 48. Respuesta al problema 5 por B5.



5 1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 34, 35, ...

Se eliminan numeros por cada par seguido en una sucecion.
(despues del primer par se elimina 1 despues 2, 3, 4 ...)

Figura 49. Respuesta al problema 5 por B8.

A continuación mostramos la entrevista del estudiante B8, cuyo resultado fue satisfactorio, pues, fue capaz de mejorar la descripción de su percepción.

Entrevista alumno B8

Pregunta 5

Investigadora: Usted dio está respuesta (la investigadora señala la respuesta del alumno).

Alumno B8: 20, 26 y 27

Investigadora: Quiero saber ¿cómo obtuvo los números 20, 26 y 27?

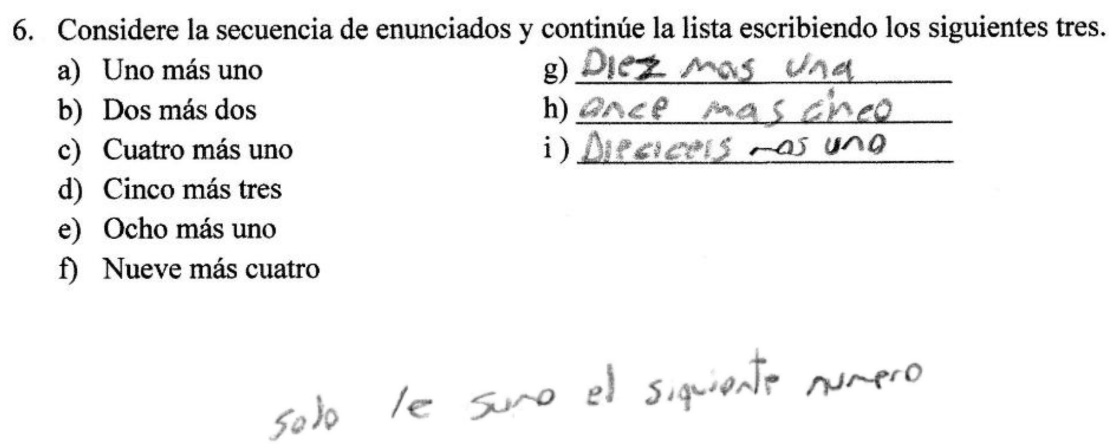
Alumno B8: Bueno creo que fue por, no sé si es lógica o un patrón pero primero son dos números seguidos, 1y 2 y después un número que no está que sería el 3, después otra vez son dos números seguidos (el 4 y 5) y faltan dos números (se refiere al número 6 y 7), de nuevo dos números seguidos (señala los números 8 y 9) y faltan tres números (se refiere a los números 10, 11 y 12) y así sucesivamente.

Acerca de la pregunta 6:

Como se indico en el capitulo tres, la sexta pregunta del cuestionario presenta una lista de enunciados, que son las verbalizaciones que describen al patrón de la sucesión de la quinta pregunta, a saber, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19,...

En primer lugar, identificamos que los estudiantes A2, A5 y B6 tuvieron dificultades para percibir el patrón que permite construir la sucesión de enunciados. Además es importante mencionar, que estos tres estudiantes contestaron satisfactoriamente la quinta pregunta del cuestionario.

En el caso del estudiante B6, identificamos que logró percibir las frases alternadas “más uno”, “más dos”, “más uno”, “más tres”, “más uno”, “más cuatro”, etc. Su respuesta también revela que fue capaz de percibir que ‘el resultado de la suma que expresa cada enunciado, representa al primer sumando del siguiente enunciado’, ver figura 50. Pero no verificó su formulación “*sólo le sumo el siguiente número”* para los seis primeros enunciados, por ende, no logró determinar que el siguiente enunciado es ‘trece más uno’.


6. Considere la secuencia de enunciados y continúe la lista escribiendo los siguientes tres.

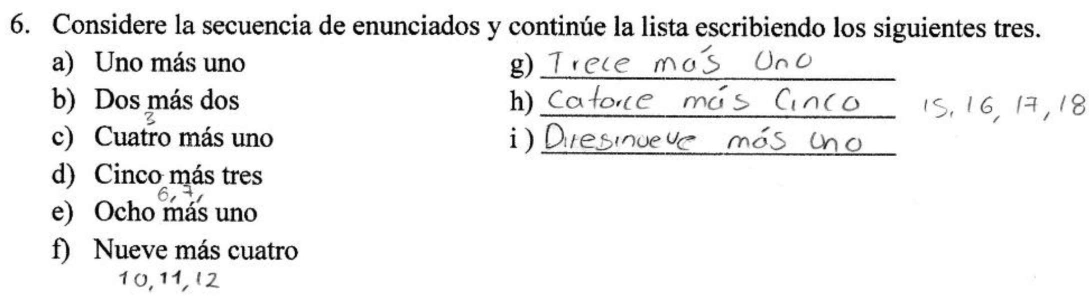
a) Uno más uno
b) Dos más dos
c) Cuatro más uno
d) Cinco más tres
e) Ocho más uno
f) Nueve más cuatro
g) Diez mas una
h) once mas cinco
i) Dieciceis mas uno

solo le suno el siguiente numero

Figura 50. Respuesta al problema 6 por B6.

En segundo lugar, se identificó que 22 estudiantes tuvieron éxito para continuar la lista de enunciados, mostramos 3 respuestas representativas, en las cuales, se plasmaron las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión de enunciados.

La primera respuesta es del estudiante B14. Cabe destacar que este alumno mostró dificultades para responder la pregunta 5, pero en esta pregunta logró continuar la lista de enunciados, ver figura 51. La respuesta de B14 nos permitió identificar su capacidad para percibir las frases alternadas “más uno”, “más dos”, “más uno”, “más tres”, “más uno”, “más cuatro”, etc. Posteriormente, identificamos que B14 completó la lista de los primeros doce números naturales y percibió que la lista (3), (6, 7), (10, 11, 12) va incrementando conforme al orden de los números naturales.


6. Considere la secuencia de enunciados y continúe la lista escribiendo los siguientes tres.

a) Uno más uno
b) Dos más dos
3
c) Cuatro más uno
d) Cinco más tres
6, 7,
e) Ocho más uno
f) Nueve más cuatro
10, 11, 12
g) Trece más Uno
h) Catorce más Cinco 15, 16, 17, 18
i) Diesinueve más uno

Figura 51. Respuesta al problema 6 por B14.

La segunda respuesta es del estudiante B8. Este alumno percibió que ‘la suma’ expresada en cada enunciado representa al ‘primer sumando’ del siguiente enunciado y además detectó que la frase ‘más uno’ se alterna en los primeros seis enunciados, como se muestra en el siguiente fragmento de su entrevista.

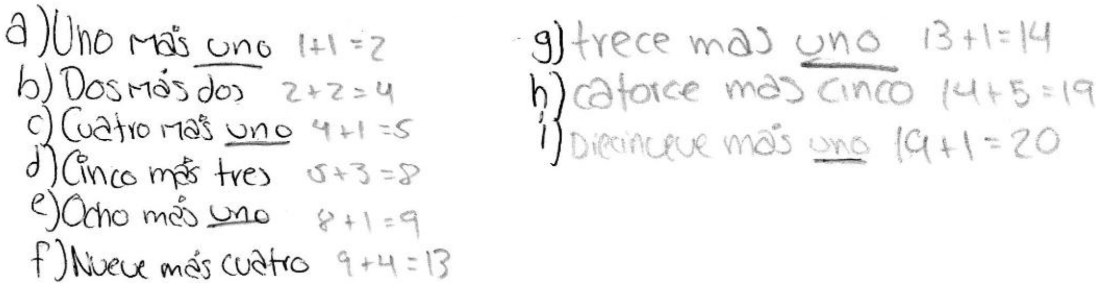
Entrevista alumno B8

Pregunta 6

Investigadora: ¿Y su respuesta en la pregunta 6?

Alumno B8: Pues creo que por lógica 1+1=2 más dos son 4 y pues como vi que se seguían repitiendo el más uno, son ¡cinco! (señala la frase cuatro más uno) y después éste iba aumentando uno nada más (señala las frases, más dos, más tres, más cuatro), más tres, más cuatro, más cinco y así.

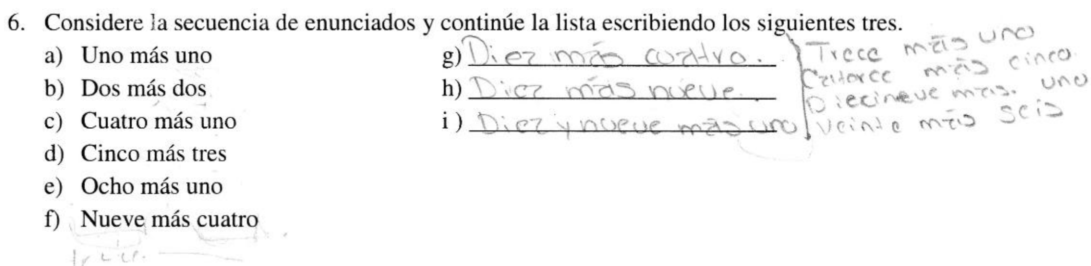
La tercera respuesta que se identificó es la de los estudiantes A4, A7, B1, B12, B15 y B17 que de manera similar, utilizaron símbolos numéricos para reescribir cada enunciado. La transformación numérica fue una estrategia que les facilitó percibir el patrón de la sucesión, como se muestra en la figura 52.



a) Uno más uno 1+1=2
b) Dos más dos 2+2=4
c) Cuatro más uno 4+1=5
d) Cinco más tres 5+3=8
e) Ocho más uno 8+1=9
f) Nueve más cuatro 9+4=13
g) trece más uno 13+1=14
h) catorce más cinco 14+5=19
i) Diecinueve más uno 19+1=20

Figura 52. Respuesta al problema 6 por B12.

Finalmente, de los alumnos que mostraron dificultades para continuar la lista de enunciados, decidimos entrevistar al estudiante A5 y lo invitamos a leer nuevamente la pregunta. El resultado fue satisfactorio, pues logró reconocer el patrón y lo utilizó para proponer los tres enunciados siguientes, ver figura 53.



6. Considere la secuencia de enunciados y continúe la lista escribiendo los siguientes tres.
   a) Uno más uno
   b) Dos más dos
   c) Cuatro más uno
   d) Cinco más tres
   e) Ocho más uno
   f) Nueve más cuatro
   g) Diez más cuatro.
   h) Diez más nueve.
   i) Diez y nueve más uno

Trece más uno
Catorce más cinco
Diecinueve más uno
Veinte más seis

Figura 53. Respuesta al problema 6 por A5.

Acerca de la pregunta 7:

En esta pregunta, se identificó que a excepción de los estudiantes B2 y B11 todos fueron capaces de determinar la cantidad de cuadrados en las figuras de las posiciones 8 y 15, enseguida mostramos 6 respuestas representativas.

En primer lugar, mencionamos a los estudiantes A1, A7, A8, B4, B7, B10, B12 y B13 quienes percibieron que el número de columnas formadas por cuatro cuadrados corresponde con el valor de la posición en la que se encuentran. Este grupo de estudiantes plasmó sus percepciones mediante algunas expresiones aritméticas y en algunos casos se observó que describieron de forma escrita los cálculos que realizaron para determinar la cantidad de cuadrados en las figuras de la octava y decimoquinta posición. También se identificó que algunos de estos estudiantes expresaron de forma escrita haber verificado la utilidad de su regla de formación, para las primeras 4 figuras mostradas en el cuestionario, ver figuras 54 y 55.

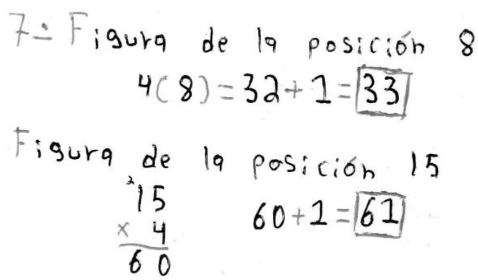


Figura 54. Respuesta al problema 7 por A1.

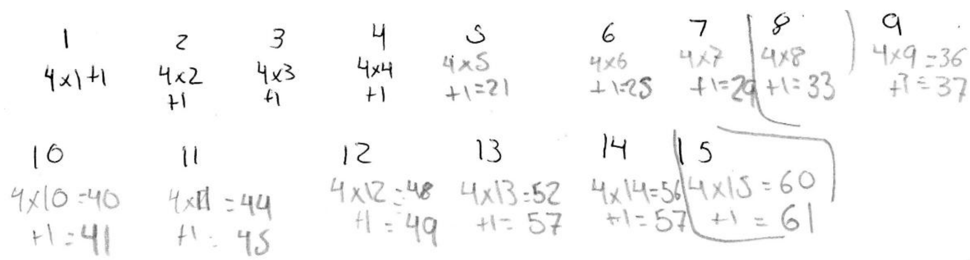


Figura 55. Respuesta al problema 7 por B12.

En segundo lugar, se identificó que los estudiantes A4, A5, B1, B3, B5, B6, B16 y B17 recurrieron a símbolos numéricos. Este grupo de alumnos realizó el conteo de los cuadrados en cada una de las primeras cuatro figuras y les asignaron el valor numérico que representa la cantidad de cuadrados que las forman. Posteriormente, percibieron que cada valor numérico se obtiene sumando 4 al anterior, ver figuras 56 y 57.

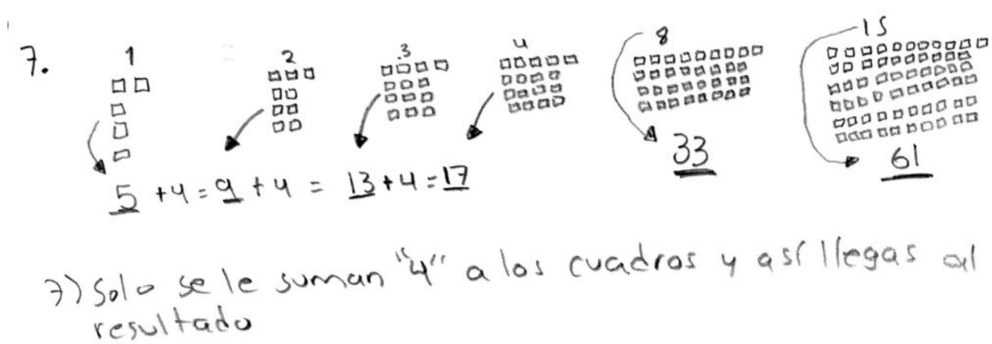


Figura 56. Respuesta al problema 7 por B5.

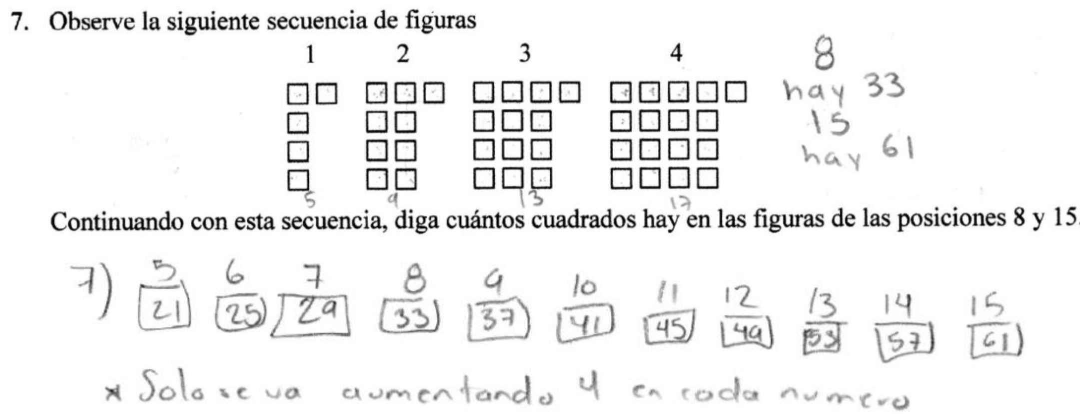


Figura 57. Respuesta al problema 7 por B16.

En tercer lugar, se identificó que el estudiante A8 fue capaz de expresar el patrón que rige a la sucesión de figuras, mediante una simbología matemática. El estudiante plasmó que siendo n la variable que representa la posición de la figura, la expresión $4n + 1$ representa la cantidad de cuadrados de la figura, ver figura 58.

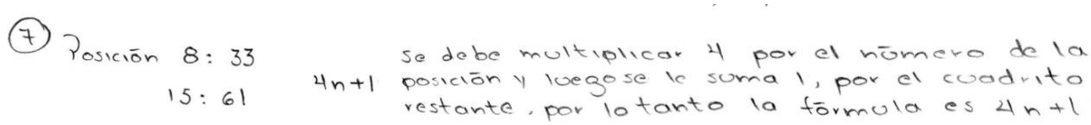


Figura 58. Respuesta al problema 7 por A8.

En cuarto lugar, se identificó que los estudiantes A2, A3, B8, B9 y B14 percibieron un aumento de cuatro cuadrados en cada figura. Los estudiantes dibujaron algunas de las primeras 15 figuras y en cada ilustración que realizaron identificamos que agregaron una columna formada por cuatro cuadrados, ver figura 59.

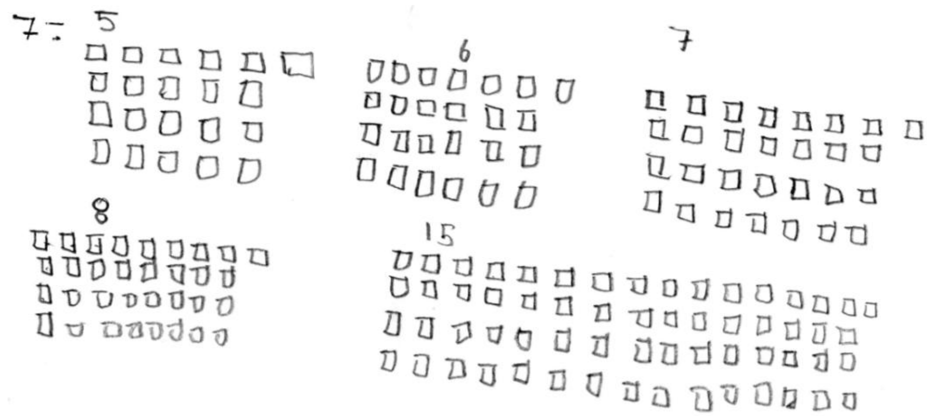


Figura 59. Respuesta al problema 7 por A3.

En quinto lugar, mostramos la respuesta del estudiante A6, que fue capaz de percibir dos características en cada figura. En primer lugar, percibió que las 3 últimas filas de cuadrados forman un bloque con un total de $3n$ cuadrados, donde n representa la posición de la figura, y en segundo lugar, percibió que la primera fila está formada por $n+1$ cuadrados, donde n representa la posición de la figura. Aunque el estudiante A6 no logró hacer una descripción como la anterior, sus intentos por explicarnos su respuesta nos facilitaron comprender algunas de las ideas que percibió, ver figura 60.

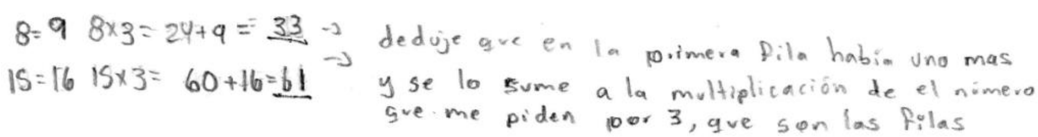


Figura 60. Respuesta al problema 7 por A6.

Finalmente, en esta pregunta, se identificó que el estudiante B5 procedió de una manera diferente. En primer lugar, notamos que B5 completó bloques con un total de $5n$ cuadrados, en cada figura de la sucesión. En segundo lugar, se observó, que en cada figura, el alumno B5 restó el número de cuadrados que les agregó, ver figura 61.

La estrategia que utilizó este estudiante, nos facilita determinar que la expresión $5n-(n-1)$ representa la cantidad de cuadrados de la enésima figura. Por otra parte, los cálculos aritméticos que plasmó el estudiante B5 y a través de los cuales identificamos sus percepciones revelan que no logró expresar la regla de formación mediante una simbología matemática adecuada, pero sí fue capaz de percibirla, comprobarla en casos particulares y utilizarla para determinar la cantidad de cuadrados en las figuras de las posiciones 8 y 15.

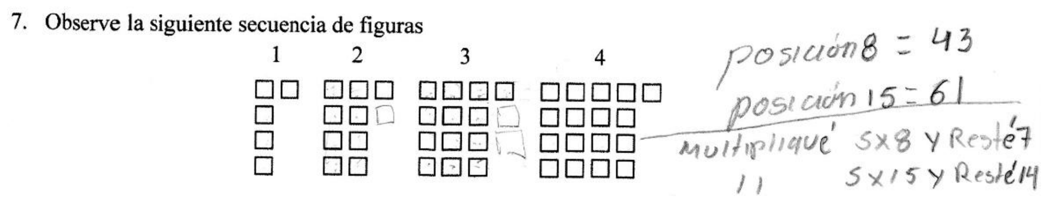


Figura 61. Respuesta al problema 7 por B15.

Acerca de la pregunta 8a:

En esta pregunta, se identificó que a excepción del estudiante B11 todos fueron capaces de proponer los tres términos faltantes de la sucesión. Por un lado, los estudiantes A1, A4, B3, B6, B8, B9, B12, B15 y B17 percibieron la relación entre los términos de la sucesión y su posición, ver figura 62.

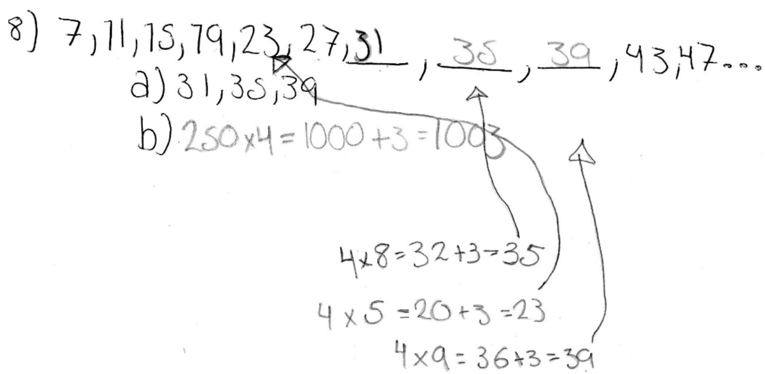


Figura 62. Respuesta al problema 8a por B12.

La figura anterior, muestra que el estudiante B12 plasmó la regla de formación en un lenguaje visible, también logró verificar la utilidad de su regla para los primeros seis términos de la sucesión y calculó nuevos términos en distintas posiciones.

Por otro lado, identificamos que los estudiantes A2, A3, A5, A6, A7, A8, B1, B2, B4, B5, B7, B10, B13, B14 y B16 percibieron que el primer término de la sucesión es siete y que cada uno de los siguientes se obtiene sumando cuatro unidades al término anterior. Por ejemplo, el estudiante A8 realizó la siguiente formulación: "*en todas va aumentando cuatro*". La anterior descripción, nos permitió identificar que A8 sumó cuatro unidades a cada término de la sucesión para generar el término siguiente. A continuación mostramos parte de su entrevista.

Entrevista alumno A8

Pregunta 8

Investigadora: En la pregunta 8 usted escribió los números 31, 35 y 39 en las posiciones que yo le indique, me puedes explicar ¿por qué escribiste esos números?

Alumno A8: Ah, va aumentando, de 7 a 11 aumenta cuatro, en todas va aumentando cuatro es 7+4=11, más cuatro da 15, 15+4=19, más cuatro 23, más cuatro 27 y a 27 le sume cuatro para que de 31, y luego así, más cuatro 35, más cuatro 39.

Por último, cabe destacar, que en esta sucesión numérica, hay una diferencia entre los estudiantes que percibieron la relación recurrente entre sus términos y los que lograron reconocer la relación entre dos variables, siendo estos últimos la minoría.

Acerca de la pregunta 8b:

En esta pregunta, identificamos que la mayoría de los estudiantes no contestó la pregunta, diez estudiantes lograron determinar el número que aparece en la posición 250 y los estudiantes A2 y A7 tuvieron dificultades para calcularlo.

En primer lugar, consideramos importante mencionar que los dos estudiantes que mostraron dificultades para determinar el número que aparece en la posición 250, forman parte de los estudiantes que percibieron la relación recurrente entre los términos de la sucesión. Por ejemplo, el estudiante A7 reexpresó aritméticamente cada uno de los primeros 9 términos de la sucesión, pero, no logró reconocer que el patrón de las expresiones está dado por $4n + 3$, ver figura 63.

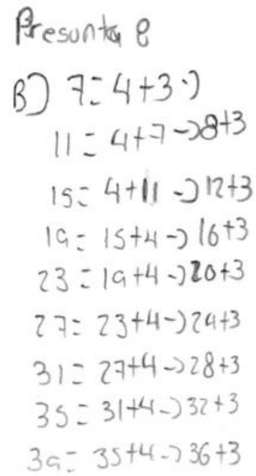


Figura 63. Respuesta al problema 8b por A7.

Por otra parte, durante las sesiones de entrevista, se identificó que el estudiante B8 también recurrió a reexpresar los primeros términos de la sucesión y logró describir su respuesta, puesto que nos expresó "*me di cuenta que sólo son los múltiplos de cuatro, pero… por ejemplo, 4 en el primero sería 4+3, en el segundo sería el doble de cuatro más tres ¡serían once!, y así el triple de 4… y ya lo único que hice fue multiplicar 250 por 4 y le sume 3*". Su formulación, nos permitió identificar que aunque no pudo expresar explícitamente la regla general, fue capaz de comprenderla y usarla para establecer términos que ocupan distintas posiciones. Enseguida mostramos parte de su entrevista.

Entrevista alumno B8

Pregunta 8b

Investigadora: En la pregunta 8b igual me das el resultado 1003 ¿cómo lo hallaste?, dice ¿qué número aparece en la posición 250?

Alumno B8: En este caso me di cuenta que todos los números son, se puede decir que aumentan cuatro, son múltiplos de cuatro, por ejemplo 7+4 serían 11, entonces me di cuenta que sólo son los múltiplos de cuatro, pero…, por ejemplo, 4 en el primero sería 4+3, en el segundo sería el doble de cuatro más tres ¡serían once!, y así el triple de 4…y ya lo único que hice fue multiplicar 250 por 4 y le sume 3.

Finalmente cabe destacar que los 10 estudiantes que lograron determinar el número que aparece en la posición 250, son los mismos estudiantes que plasmaron haber percibido la relación entre los términos de la sucesión y su posición. Este grupo de estudiantes plasmó las peculiaridades básicas del patrón a través de algunas expresiones aritméticas, por ejemplo, los cálculos aritméticos que se muestran en la figura 64, revelan que el estudiante A1 generó un nuevo término partiendo de la posición que ocupa en la sucesión. Por otro lado, los alumnos A4 y A8 expresaron la regla de formación utilizando una simbología matemática, ver figura 65.

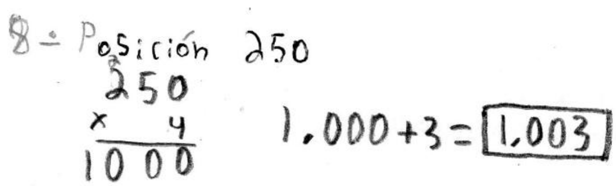


Figura 64. Respuesta al problema 8b por A1.

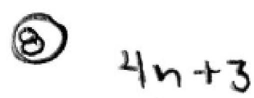


Figura 65. Respuesta al problema 8a por A8.

En párrafos anteriores de la pregunta 8a, hemos comentado que el estudiante A8 realizó la formulación "*en todas va aumentando cuatro*", y que esta regla le sirvió para calcular los tres términos intermedios que se solicitan en el cuestionario. No obstante, un punto interesante que identificamos en la entrevista del estudiante A8, fue que, para calcular un término con índice mayor tiende a buscar la relación entre los términos de la sucesión y su posición, a continuación mostramos parte de su entrevista.

Entrevista alumno A8

Pregunta 8

Investigadora: Aja, ahora en el inciso 8b, que dice ¿Qué número aparece en la posición 250?, usted escribió el número 1003 como respuesta y en la hoja posterior para este inciso escribió $4n + 3$, explíqueme ¿por qué escribiste esta fórmula?

Alumno A8: Pues, solamente me di cuenta, así, fui buscando, eh bueno va, pensé el número, pensé la fórmula para que al principio me diera 7 y ya vi que si iba coincidiendo con los siguientes números, entonces como sí iba quedando pues ya use eso para 250. Por ejemplo 4(2)+3=11, 4(3)+3=15, fui pensando así multiplicaciones e irle sumando hasta que me quedo. Lo primero que hago es, no sé… multiplicando por 2 y ya e irle sumando por ejemplo 2(1)=2 para 7 van a faltar 5 pero para el siguiente caso 2(2)=4 más cinco ya dan 9 entonces ya no queda (señala al número 11 que ocupa el segundo lugar en la sucesión), entonces ya no hay que probar multiplicar por 2 sino por otro número y ya no sé luego probé ya con 3 y vi que ese le tenía que sumar… por ejemplo en el primero sería 3(1)=3 para siete 4 y así no queda en las siguientes, y ya al siguiente de multiplicar por 4 y sumarle el 3 para que nos de 7 en la posición número 1 ya coincide y sí da el resultado bien en los siguientes números (señala los primeros elementos de la sucesión).

4.2 Discusión de resultados obtenidos en las preguntas de la segunda parte del cuestionario

Acerca de la pregunta 9:

En esta pregunta, se identificó, en primer lugar, que 20 estudiantes fueron capaces de percibir que el valor de cada hijo medio tiene la regularidad de ser un múltiplo de 3, puesto que lograron determinar el hijo mayor del número 50 y el hijo menor del número 72, como se muestra en las respuestas de los estudiantes A8 y B13, ver figuras 66 y 67.

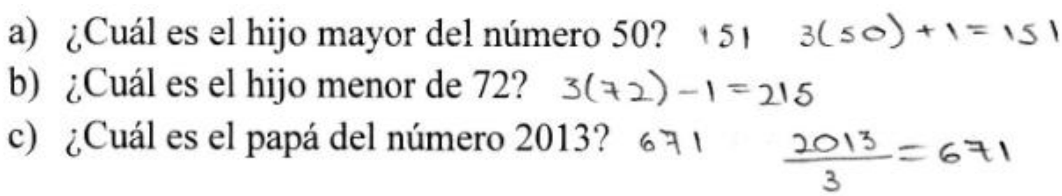


Figura 66. Respuesta al problema 9 por A8.

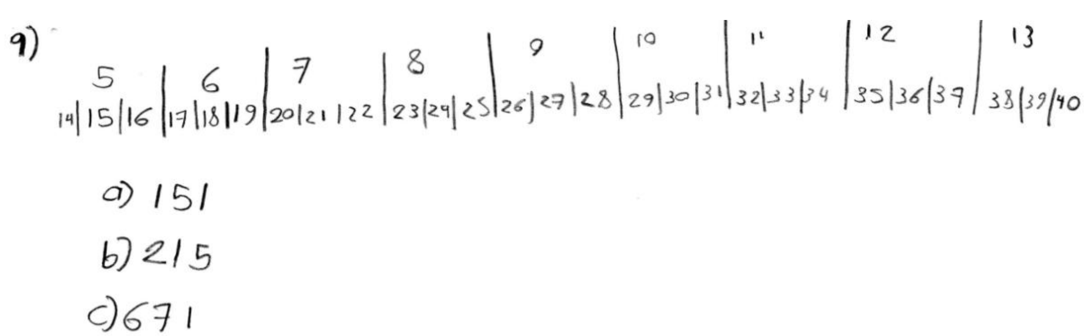


Figura 67. Respuesta al problema 9 por B13.

También identificamos que 4 estudiantes no contestaron las preguntas 9 a y 9b, y que el estudiante B6 tuvo dificultades para proponer el hijo mayor del número 50 y el hijo menor del número 72.

Las respuestas del estudiantes B6 en las preguntas 9a y 9b, manifiestan que sí percibió la afirmaciones "*el hijo mayor es el triple del padre más uno y el hijo menor es el triple del padre menos uno*", pero los números que él propuso, nos revelan que no comprendió la expresión "*el triple de un número*", y por ende, no pudo usarla para calcular el hijo mayor del número 50 y el hijo menor del número 72, ver figura 68.

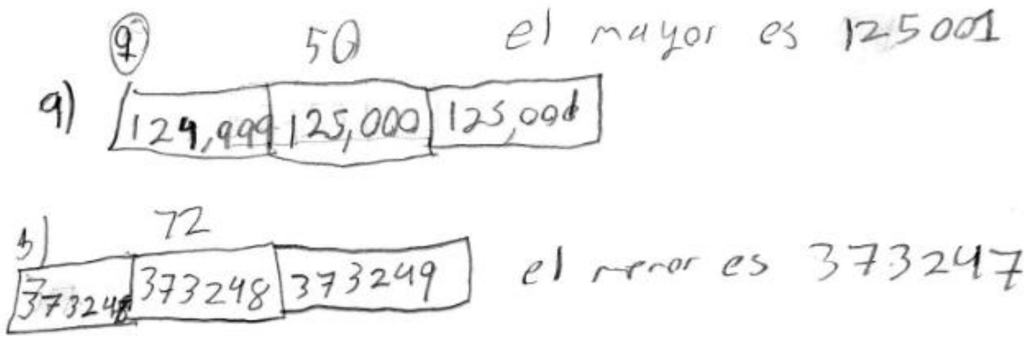


Figura 68. Respuesta al problema 9 por B6.

Cabe destacar, que el estudiante B6 tampoco intentó determinar el número que es el padre del número 2013.

Finalmente, identificamos que 17 estudiantes lograron proponer al padre del número 2013, y que 8 estudiantes no intentaron determinarlo, ver tabla A9. De este último grupo, mencionamos los casos de los estudiantes B4, B7 y B16 quienes no tuvieron dificultades para reconocer que "*el hijo medio es el triple del padre*". Estos tres estudiantes mostraron éxito para responder las preguntas 9a y 9b, sin embargo, tuvieron dificultades para comprender que el valor de cada hijo medio es divisible entre tres, y por ende, para calcular el padre del número 2013.

Acerca de la pregunta 10a:

En esta pregunta, identificamos que 3 estudiantes no la contestaron, 3 tuvieron dificultades para calcular el número de casillas y 19 mostraron potencial para percibir las peculiaridades básicas del patrón, puesto que fueron capaces de calcular la cantidad de casillas en la sexta fila, ver tabla A10. En este último grupo, por un lado, identificamos que en su mayoría, percibieron que a partir de la segunda fila, el número de casillas es el triple del número de casillas de la fila anterior, como es el caso del estudiante A8 quien manifestó "*así fui multiplicando por tres hasta que fue 243*", a continuación mostramos parte de su entrevista, en la cual, nos explicó su respuesta.

Entrevista alumno A8

Pregunta 10a

Investigadora: En la pregunta 10a usted me dio como resultado 243 casillas, explíqueme su respuesta.

Alumno A8: Hice todas las operaciones, fui, eh 1(3)=3 que es de la segunda fila, luego para sacar los de la fila siguiente por tres otra vez y ya dan 9, luego esos 9 por tres otra vez y así fui multiplicando por tres hasta que fue 243.

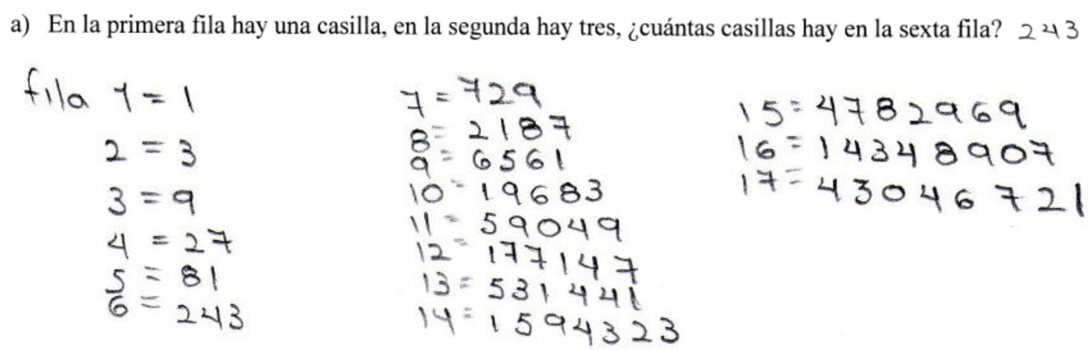


Figura 69. Respuesta al problema 10a por A8.

Por otro lado, identificamos que los estudiantes A6 y B15 fueron los únicos casos que percibieron y plasmaron en un lenguaje visible, la relación entre el número de casillas y el número de su fila. Aunque cabe destacar que B15, no logró expresar de forma correcta que para la enésima fila hay 3^{n-1} casillas, ver figura 70.

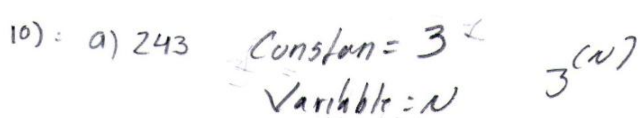


Figura 70. Respuesta al problema 10a por B15.

De los estudiantes que intentaron contestar la pregunta 10a, pero que tuvieron dificultades para calcular las 243 casillas, tenemos los casos de los estudiantes A3 y A7. El primero respondió que “*en la sexta fila hay 10 casillas”*, lo cual nos muestra que no fue capaz de identificar que el número de casillas crece conforme se avanza de una fila a otra, ver figura 71. El estudiante A7, por su parte, sí percibió que el número de casillas se triplica de una fila a la siguiente, pero erró en su respuesta, al calcular las casillas de la quinta fila en lugar de calcular las de la sexta fila, ver figura 72.

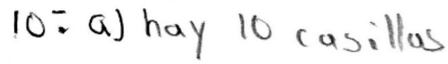


Figura 71. Respuesta al problema 10a por A3.

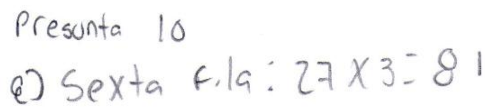


Figura 72. Respuesta al problema 10a por A7.

Finalmente, el estudiante A1 que también tuvo dificultades para calcular la cantidad de casillas en la sexta fila, en su entrevista mostró que sí fue capaz de reconocer las peculiaridades básicas del patrón que genera el número de casillas. El estudiante nos explicó “*me di cuenta que el número de casillas era una potencia de tres*”, pero erró en su respuesta al calcular las casillas de la séptima fila. Enseguida mostramos parte de la entrevista del estudiante A1.

Entrevista alumno A1

Pregunta 10a

Investigadora: Puede leer la pregunta 10

Alumno A1: ¿inciso (a)?

Investigadora: Sí

Alumno A1: En la primera fila, ah, o sea en la tabla del problema anterior (señala la tabla de la pregunta 9), en la primera fila hay una casilla y en la siguiente hay tres, ¿cuántas casillas hay en la sexta fila? ¡Eh! Ahí lo respondí (señala su respuesta que es 729 casillas) porque eran las potencias de tres, no sé, por ejemplo aquí es x, aquí sería 3, entonces aquí empieza.

Investigadora: En la fila uno hay una casilla

Alumno A1: En la fila dos ya hay 3 casillas, en la fila tres ya hay 9 casillas, en la fila cuatro hay 27 casillas, me di cuenta que el número de casillas era una potencia de tres.

Acerca de la pregunta 10b:

En esta pregunta, identificamos que 14 estudiantes fueron capaces de percibir que a partir de la segunda fila, cada número que se encuentra en el centro es el triple del anterior, como es el caso del estudiante A5, quien además logró plasmar en un lenguaje visible las peculiaridades básicas del patrón, ver figura 73.

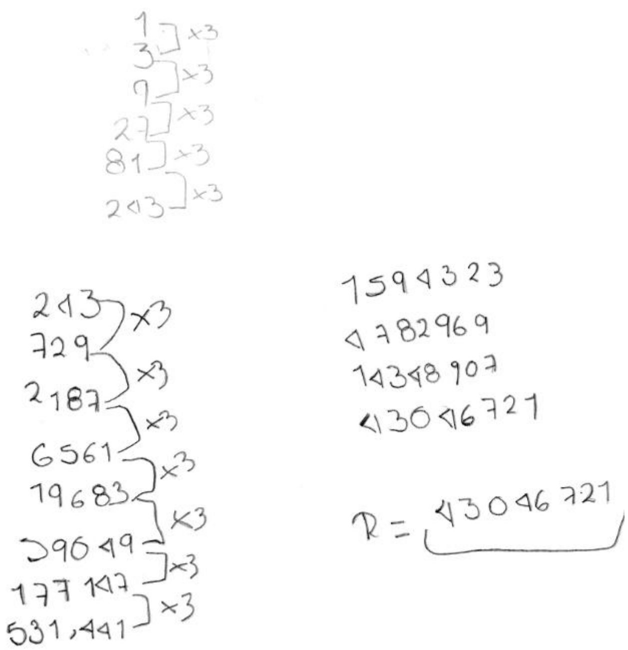


Figura 73. Respuesta al problema 10b por A5.

También identificamos que 6 estudiantes no contestaron la pregunta, y que 5 estudiantes tuvieron dificultades para calcular el número que se encuentra en el centro de la fila 17, ver tabla A10. En este último grupo, notamos en primer lugar que los estudiantes A3 y A7 al igual que en la pregunta 10a, tampoco tuvieron éxito para determinar el número central de la fila 17.

En segundo lugar, tenemos los casos de los estudiantes B6, B10 y B13 que sí respondieron correctamente la pregunta 10a, pero mostraron dificultades para calcular el número central de la fila 17. Las respuestas de los estudiantes B6, B10 y B13 revelan que fueron capaces de percibir que a partir de la segunda fila, cada número que se encuentra en el centro es el triple del anterior, sin embargo, sus errores consistieron en el conteo de las filas. Por ejemplo, la respuesta de B10 fue el número central de la fila 18, ver figura 74, por otro parte, los estudiantes B6 y B13 calcularon el número central de la fila 16.

Figura 74. Respuesta al problema 10b por B10.

Cabe destacar que el estudiante B13 nos explicó que todos los cálculos los hizo mentalmente, lo cual nos hace deducir que posiblemente esta fue la causa de sus errores en los conteos.

Entrevista alumno B13

Pregunta 10b

Investigadora: En la pregunta 10b

Alumno B13: ¿Qué número se encuentra en el centro de la fila 17? Hm, lo hice mental.

Acerca de la pregunta 11a:

En la pregunta 11a, identificamos que todos los estudiantes percibieron las características comunes de una igualdad a otra, y que pudieron utilizarlas para continuar con la lista de igualdades. La mayoría de este grupo de estudiantes, percibió que a partir de la segunda igualdad se suma el siguiente número impar, también notamos que estos estudiantes procedieron a sumar todos los números impares del séptimo y octavo renglón, para calcular el valor total de su suma.

Por otro lado, los estudiantes A8 y B5 percibieron que para obtener el valor de la suma se debe calcular el cuadrado del número de impares que la generan. Por ejemplo, el estudiante A8 en su entrevista, nos explicó "*vi que los resultados iban siendo números al cuadrado*", posteriormente logró mejorar su formulación al expresar que la regla consiste en "*multiplicar ya sea el número de dígitos* (el estudiante A8 se refiere al número de sumandos impares) *o el número de la fila que sea, al cuadrado*." Esta última descripción muestra el potencial que tuvo el estudiante A8 para reconocer el patrón de la sucesión de igualdades. A continuación mostramos parte de su diálogo.

Entrevista alumno A8

Pregunta 11 a

Investigadora: La pregunta 11 dice verifique que valen las igualdades de abajo y escriba los siguientes dos renglones y el inciso (b) le pide la suma del 1 hasta el 101. Explícame cómo determinaste estos dos renglones (la investigadora señala la respuesta del alumno en su hoja).

Alumno A8: Vi que se les iba agregando el siguiente número impar, entonces, este, si había por ejemplo en el renglón de anterior había 6 dígitos (señala los 6 impares de la sexta igualdad) el siguiente iba a tener 7 y el siguiente 8 y así iba aumentando de uno en uno.

Investigadora: ¿el 49 y el 64?

Alumno A8: Porque vi que los resultados iban siendo números al cuadrado

Investigadora: En el caso del 49, ¿qué número elevaste al cuadrado?

Alumno A8: El 7

Investigadora: ¿Por qué elevaste el 7?

Alumno A8: Ah, porque es la fila 7 y hay 7 dígitos (se refiere a los 7 sumandos impares del séptimo renglón), bueno vi que, si había, por ejemplo en la fila 3, eh que también hay tres dígitos (se refiere a los impares 1, 3 y 5), bueno es que se multiplica ya sea el número de dígitos (se refiere al número de sumandos impares) o el número de la fila que sea, al cuadrado.

Finalmente, durante las sesiones de entrevista, confirmamos que el estudiante A1 sumó todos los números impares, del séptimo y octavo renglón, para calcular el valor total de su suma. Cabe destacar que este estudiante logró percibir una característica más, al terminar de leer su respuesta, y la describió de la siguiente manera: "*los resultados eran el número de la fila al cuadrado*". Por otra parte, se identificó que A1 verificó esta formulación para las primeras seis igualdades, como se puede observar en el siguiente fragmento de su diálogo: "*por ejemplo aquí* $2^2 = 4$ (señala la segunda igualdad), *en este caso* $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ (señala la cuarta igualdad), $5^2 = 25$, $6^2 = 36$ *y bueno siguiendo esa lógica diría que* $7^2 = 49$ y $8^2 = 64$." A continuación mostramos parte de la entrevista del estudiante A1.

Entrevista alumno A1

Pregunta 11a

Investigadora: Ahora en la pregunta 11a, puedes leer el enunciado por favor.

Alumno A1: Escriba los siguientes renglones de la sucesión

Investigadora: Lee los renglones que diste como respuesta

Alumno A1: $1+3+5+7+9+11+13=49$ y $1+3+5+7+9+11+13+15$ que es igual a 64. Lo que note es que sólo se le sumaban números impares y que los resultados eran el número de la fila al cuadrado, o sea, por ejemplo aquí $2^2=4$ (señala la segunda igualdad), en este caso $3^2=9$, $4^2=16$ (señala la cuarta igualdad), $5^2=25$, $6^2=36$ y bueno siguiendo esa lógica diría que $7^2=49$ y $8^2=64$. Ahorita me doy cuenta que es el número de la fila al cuadrado

Investigadora: Aquella vez (en la aplicación del cuestionario) ¿hiciste lo mismo para encontrar el número 49?

Alumno A1: No, sí hice la suma, aquella vez sí hice la suma (aclara que para los renglones 8 y 7 si efectuó la suma de cada impar), pero ahorita ya me doy cuenta que es el número de la fila al cuadrado y ese ya es el resultado.

Acerca de la pregunta 11b:

En esta pregunta, se identificó que trece estudiantes fueron capaces de calcular la suma de los primeros 51 números impares y doce estudiantes no contestaron la pregunta, ver tabla A11. Cabe destacar que desde la pregunta 11a, este último grupo de estudiantes, plasmó haber percibido que a partir de la segunda igualdad, se suma el siguiente número impar. Por otro lado, cinco estudiantes que contestaron satisfactoriamente, nos explicaron que sumaron cada uno de los primeros 51 números impares, ver figura 75.

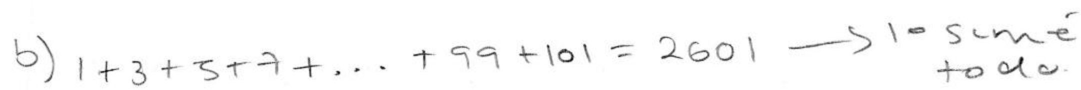


Figura 75. Respuesta al problema 11b por B10.

En las respuestas de esta pregunta, los estudiantes A8 y B5 también plasmaron que el resultado total de la suma es igual a el cuadrado del número de impares consecutivos que la generan, ver figuras 76 y 77.

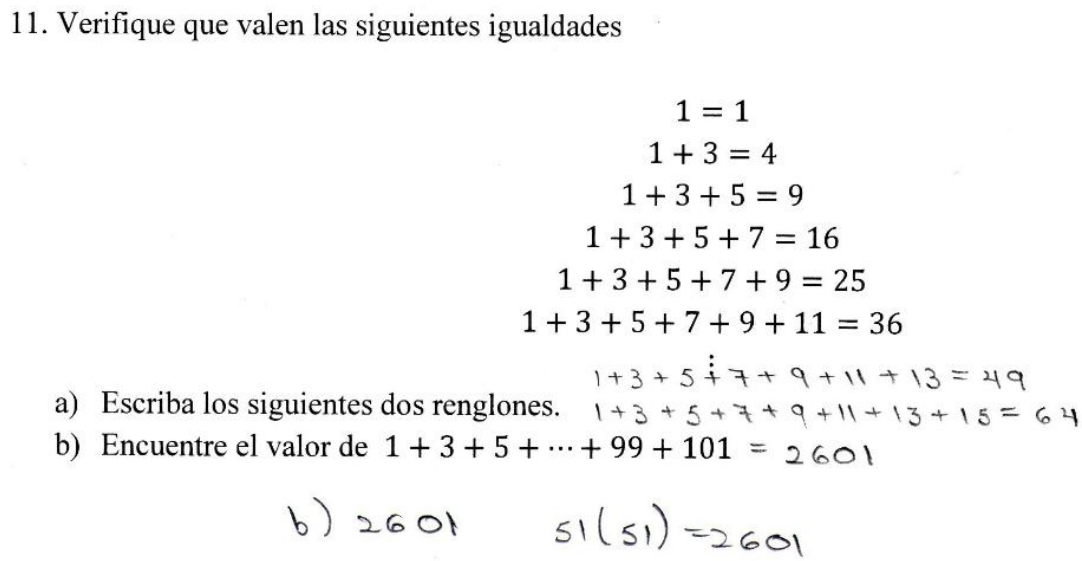


Figura 76. Respuesta al problema 11b por A8.

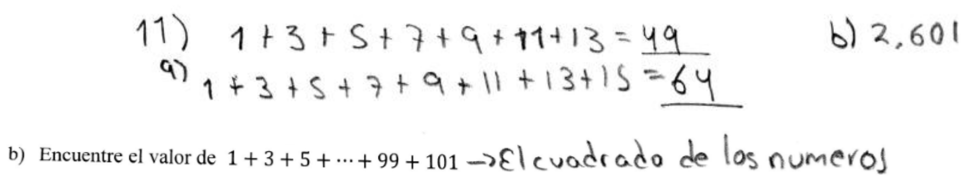


Figura 77. Respuesta al problema 11b por B5.

Destacamos nuevamente la entrevista del estudiante A8, con el propósito de mostrar el potencial que tuvo en la tarea de reconocimiento de patrones. En este caso, A8 también fue capaz de percibir que el último impar en cada expresión es de la forma $2n - 1$. A continuación, mostramos parte de su entrevista.

Entrevista alumno A8

Pregunta 11b

Investigadora: Ok, entonces para obtener la suma del 1 hasta el 101 ¿qué hizo?

Alumno A8: Pues vi que son 51 dígitos (lo recuerda al observar su respuesta y nota que realizó la operación 51(51)=2601).

Investigadora: ¿Por qué son 51?

Alumno A8: Pues se puede sumar uno al último número (señala al número 101) y dividir entre dos, por ejemplo acá que es la fila 6, al 11 que es el último se le puede sumar uno ya va a ser $\frac{12}{2}$ es 6, acá igual (señala la quinta igualdad) 9+1=10, $\frac{10}{2} = 5$, entonces eh, $\frac{101+1}{2}$ es 51.

Investigadora: Entonces el comportamiento que usted encontró fue

Alumno A8: Que eh, primero se tiene que sacar el número de sumandos que tiene y eso se puede sacar sumándole uno al último dígito (impar) y dividiéndolo entre dos y ya el resultado de la derecha va a ser elevando el número de dígitos (impares) al cuadrado.

Finalmente, queremos mencionar el trabajo del alumno A1, en esta pregunta. Como se ha comentado en el análisis de la pregunta 11a, el estudiante A1 tuvo éxito para continuar la lista de igualdades, pero, en esta pregunta mostró dificultades para determinar que la expresión $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 + 101$ está constituida por los primeros 51 números impares, por consiguiente, no logró calcular el valor de la suma. Enseguida mostramos parte de su entrevista.

Entrevista alumno A1

Pregunta 11b

Investigadora: La pregunta 11b no la contesto usted, quiero que con lo que encontraste quiero que me digas cuánto es ese valor (la investigadora señala la suma $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 + 101$).

Alumno A1: ¿Del 1 al 101? A ver, necesito el número de sumandos y dividirlos a la mitad porque no se estas poniendo todos como debe ser, como sólo estamos contando los números impares entonces sería como dividirlo a la mitad y entonces diría que hay 50.5 aproximadamente.

Acerca de la pregunta 12:

Las respuestas en la pregunta 12 nos permitieron identificar, en primer lugar, que 22 estudiantes tuvieron potencial para reconocer las peculiaridades básicas del patrón que rige el listado de igualdades, puesto que lograron utilizarlas para determinar las siguientes dos igualdades, ver tabla A12. Estos 22 estudiantes percibieron números consecutivos en las tres igualdades mostradas en el cuestionario, y además detectaron que el número de sumandos en ambos lados de cada igualdad crece de acuerdo con el orden de los números naturales, ver figuras 78 y 79.

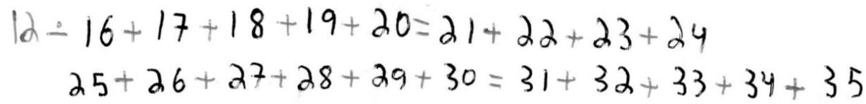


Figura 78. Respuesta al problema 12 por A1.

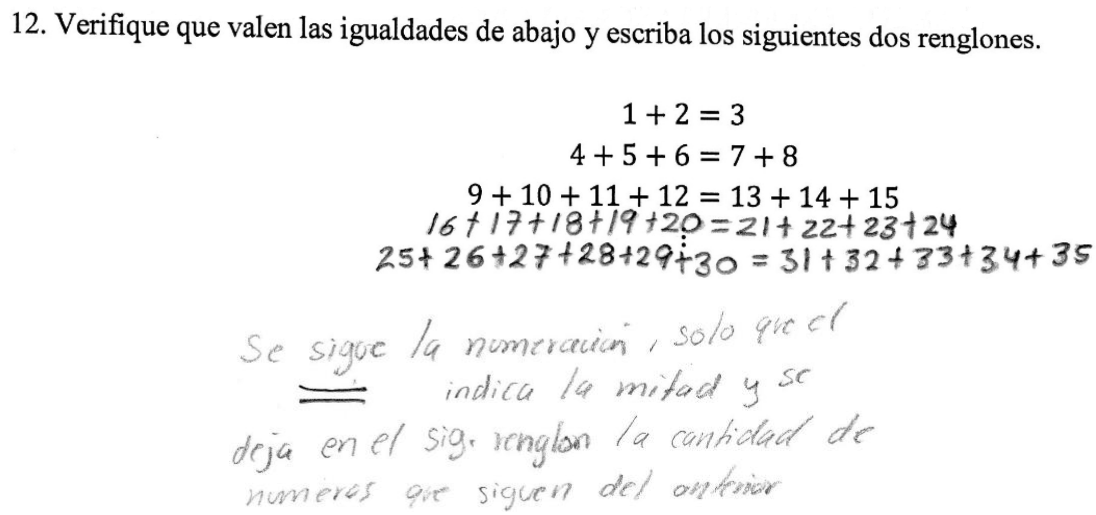


Figura 79. Respuesta al problema 12 por B11.

La respuesta del estudiante B11 nos revela que comprendió las peculiaridades básicas del patrón y que las utilizó para continuar el listado de igualdades, pero presentó dificultades para describirlas mediante su lenguaje natural.

En segundo lugar, identificamos que los estudiantes B1, B7 y B13 tuvieron dificultades para responder la pregunta 12. Sus respuestas muestran que no lograron reconocer que el número de sumandos en ambos lados de cada igualdad crece de acuerdo con el orden de los números naturales, ver figura 80.

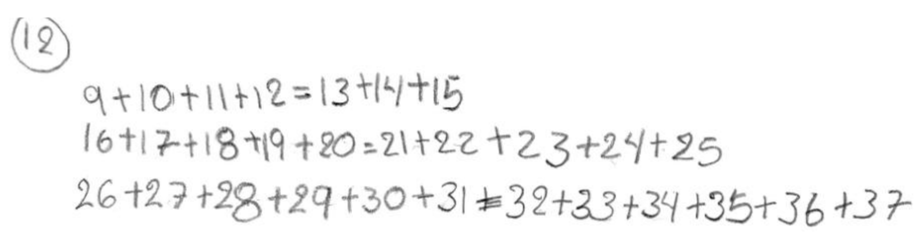


Figura 80. Respuesta al problema 12 por B7.

Finalmente, destacamos el caso del estudiante A8 quien logró explicarnos sus percepciones mediante un lenguaje coloquial. Durante su entrevista, confirmamos que reconoció números consecutivos en cada igualdad, ya que expresó: "*vi que todos los números iban así como por renglones sucesivamente*". Por otro lado, confirmamos que A8 percibió que el número de sumandos en ambos lados de cada igualdad crece de acuerdo con el orden de los números naturales, puesto que nos explicó: "*se va aumentando un dígito en cada parte al ir aumentando la fila*". A continuación mostramos parte de la entrevista del estudiante A8, donde se plasman las peculiaridades básicas del patrón que percibió.

Entrevista alumno A8

Pregunta 12

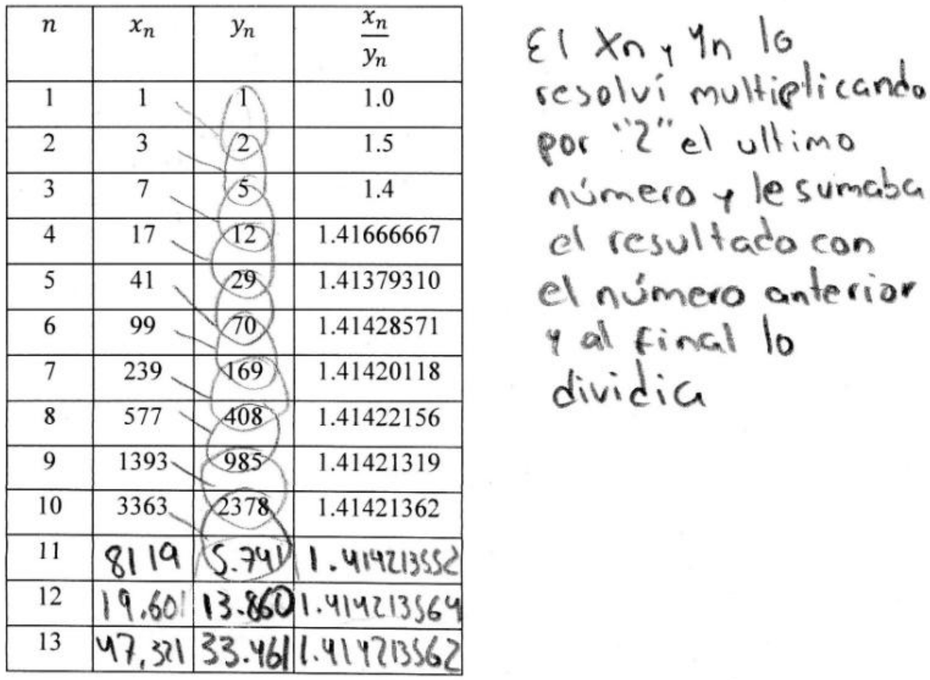
Investigadora: Ahora en la pregunta 12, explícame ¿cómo encontraste esos dos renglones? (la investigadora señala su respuesta en la hoja del cuestionario).

Alumno A8: Ah, vi que todos los números iban así como por renglones sucesivamente, aquí del 3 (señala el resultado de la primera suma) se pasaba al, 4 del 8 al 9 y así, y que se va aumentando un dígito en cada parte al ir aumentando la fila.

Acerca de la pregunta 13a:

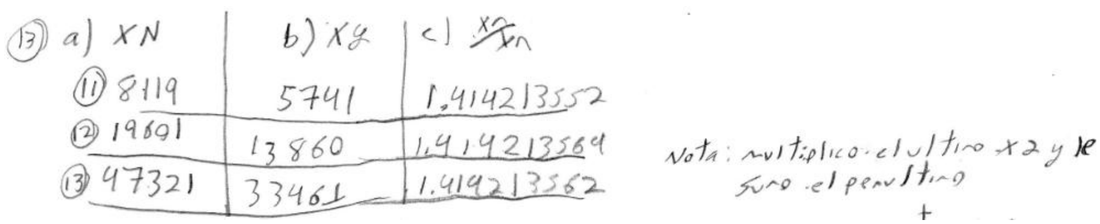
Antes de analizar las respuestas de los estudiantes en esta pregunta, consideramos pertinente mencionar que la sucesión x_n, en la tabla de la pregunta 13, es la misma sucesión de la pregunta 4b, ver figuras 4 y 13. También destacamos que las respuestas en la pregunta 13a, nos permitieron identificar un aumento significativo en el número de estudiantes que lograron percibir la regla de formación de la sucesión de la pregunta 4b, esto es, de 9 estudiantes aumenta a 23, ver tablas 21 y 22. Por otra parte, identificamos que nuevamente los estudiantes A1 y A2 no fueron capaces de reconocer la regla de formación que rige a la sucesión $1, 3, 7, 17, 41, 99, \ldots$

Comenzando con el análisis de las respuestas, en la pregunta 13a, identificamos que 23 estudiantes fueron capaces de percibir que a partir del tercer término de la sucesión x_n, cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término. También se observó, que ocho estudiantes plasmaron en un lenguaje visible las peculiaridades básicas del patrón, entre ellos, mostramos las respuestas de los alumnos B5, B6, B7, B10, B13 y B14, ver figuras 81, 82, 83, 84, 85 y 86.



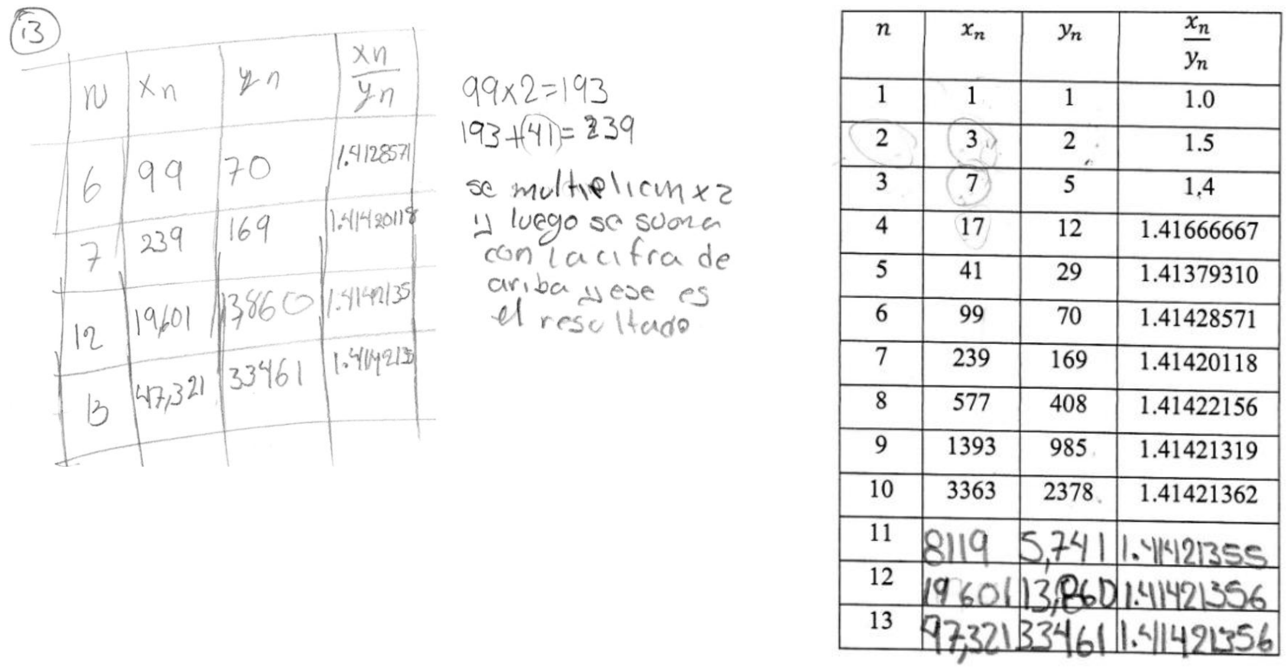
n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	3	2	1.5
3	7	5	1.4
4	17	12	1.41666667
5	41	29	1.41379310
6	99	70	1.41428571
7	239	169	1.41420118
8	577	408	1.41422156
9	1393	985	1.41421319
10	3363	2378	1.41421362
11	8119	5.741	1.414213552
12	19.601	13.860	1.414213564
13	47,321	33.461	1.414213562

Figura 81. Respuesta al problema 13a por B5.



13 a) XN	b) XY	c) Xn/Xn
11 8119	5741	1.414213552
12 19891	13860	1.414213564
13 47321	33461	1.414213562

Figura 82. Respuesta al problema 13a por B6.



n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	3	2	1.5
3	7	5	1,4
4	17	12	1.41666667
5	41	29	1.41379310
6	99	70	1.41428571
7	239	169	1.41420118
8	577	408	1.41422156
9	1393	985	1.41421319
10	3363	2378	1.41421362
11	8119	5,741	1.41421355
12	19601	13,860	1.41421356
13	47,321	33461	1.41421356

Figura 83. Respuesta al problema 13a por B7.

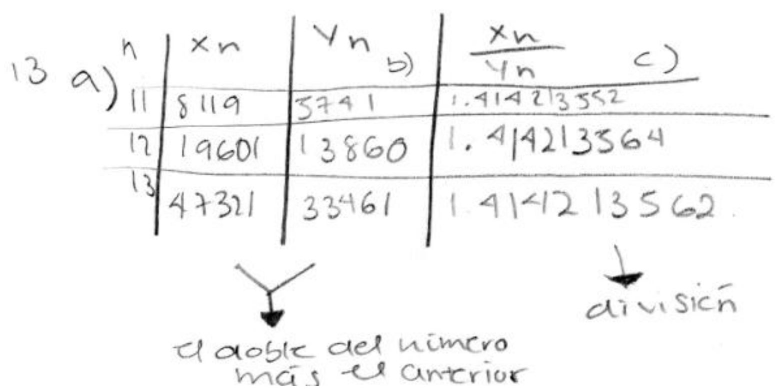
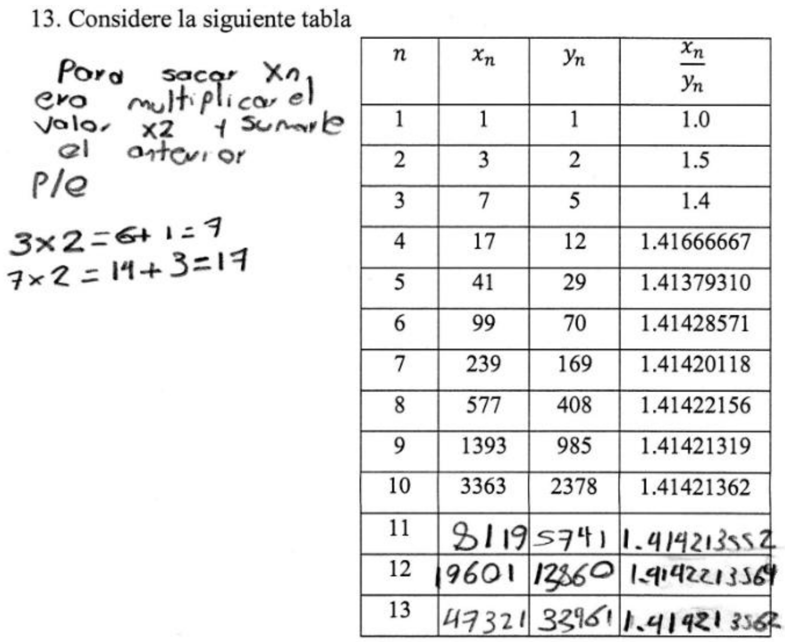


Figura 84. Respuesta al problema 13b por B10.



13. Considere la siguiente tabla

Para sacar x_n era multiplicar el valor x2 y sumarle el anterior

P/e

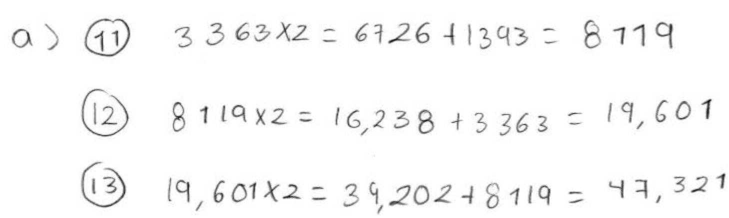
3x2=6+1=7

7x2=14+3=17

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	3	2	1.5
3	7	5	1.4
4	17	12	1.41666667
5	41	29	1.41379310
6	99	70	1.41428571
7	239	169	1.41420118
8	577	408	1.41422156
9	1393	985	1.41421319
10	3363	2378	1.41421362
11	8119	5741	1.414213552
12	19601	13860	1.4142213564
13	47321	33461	1.414213562

Figura 85. Respuesta al problema 13a por B13.

Las figuras 81, 82, 83, 84 y 85 nos muestran que los estudiantes B5, B6, B7, B10 y B13 escribieron diferentes expresiones que describen las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión x_n. Por ejemplo, el estudiantes B6 anotó "*Multiplico el último por dos y le sumo el penúltimo*" y B13 expresó "*Para sacar x_n era multiplicar el valor por dos y sumarle el anterior*". Cabe mencionar que B6 y B13 forman parte de los estudiantes que mostraron dificultades para contestar la pregunta 4b.



a) 11 3363x2 = 6726 + 1393 = 8119

12 8119x2 = 16,238 + 3363 = 19,601

13 19,601x2 = 39,202 + 8119 = 47,321

Figura 86. Respuesta al problema 13a por B14.

Por otra parte, la figura 86 muestra los cálculos aritméticos que el estudiante B14 realizó para determinar los valores de la sucesión x_n en las filas 11, 12 y 13. Las expresiones aritméticas nos permiten identificar que B14 también logró comprender la regla de formación y que la usó para generar nuevos términos.

Finalmente, consideramos importante destacar el trabajo de los estudiantes A1 y A8. En primer lugar mencionamos al estudiante A1. En párrafos anteriores, hemos comentado que este alumno no contestó la pregunta 4b y que durante su entrevista fue capaz de percibir el patrón, pero no logró describirlo explícitamente, ver análisis de la pregunta 4b. Por otro lado, se identificó que el alumno A1 no contestó la pregunta 13a, dado lo anterior, decidimos entrevistarlo y le sugerimos que intentará proponer los valores de la sucesión x_n para las filas 11, 12 y 13. A continuación mostramos parte de la entrevista, donde se muestra que A1 nuevamente tuvo éxito para percibir la regla de formación de la sucesión x_n, pero no fue capaz de articular palabras para comunicarla.

Entrevista alumno A1

Pregunta 13

Investigadora: La pregunta 13 y 14 no la contesto, quiero que observes la tabla y halles los términos que siguen (la investigadora señala los espacios en blanco para las filas 11, 12 y 13).

Alumno A1: 1, 3, 7, eh

Investigadora: No te preocupes aún tenemos tiempo.

Alumno A1: ¡Huy! Pues para esta expresión realmente no, no, no sé.

Investigadora: No te preocupes.

Alumno A1: La veo muy complicada y pues como para tener la tercera (señala la cuarta columna de la tabla) debes tener las otras dos.

Investigadora: Esta bien, ¿estás completamente seguro? Se le da más tiempo para responder la pregunta. Ya encontraste algo, verdad.

Alumno A1: Sí, creo que sí, según yo para x_n sería la suma de este (señala el número 7 de la sucesión x_n) con este (señala el número 3 de la sucesión x_n) y aparte el número original (vuelve a señalar el número 7 de la sucesión x_n) para dar el siguiente número (señala el número 17 de la sucesión x_n). ¡Hm! 3363 y sí es el siguiente.

Investigadora: A ver para otro más

Alumno A1: ¡Hm! 3363 y sí es el siguiente. Entonces según yo para calcular toda la fila de x_n sería…

En segundo lugar, tenemos al estudiante A8. En la sección anterior, hemos mencionado que este estudiante no contestó la pregunta 4b y que durante su entrevista tuvo éxito para percibir y describir la regla de formación, puesto que logró expresar la siguiente formulación: "*Se va a multiplicar por dos el número anterior y se le va a sumar el número anterior del anterior*", ver análisis de la pregunta 4b. También identificamos que A8 contestó correctamente la pregunta 13a durante la aplicación del cuestionario y nuevamente notamos que fue capaz de describir coloquialmente la regla de formación, como se muestra en las siguientes líneas de su entrevista.

Entrevista alumno A8

Pregunta 13

Investigadora: En la pregunta 13 explícame tu respuesta

Alumno A8: ¿Puedo usar la calculadora?

Investigadora: Sí

Alumno A8: Se… Al número anterior se va a multiplicar por dos y se le suma el penúltimo, por ejemplo acá va a ser 3(2)+1 es siete, luego 7(2)=14 más tres es 17.

Investigadora: Entonces la regla que sigues es

Alumno A8: Multiplicar por dos el último número y sumarle el penúltimo.

Acerca de la pregunta 13b:

Las respuestas en la pregunta 13b, nos permitieron identificar que los estudiantes A1, A2 y A5 no fueron capaces de proponer los valores de la sucesión y_n, para las filas 11, 12 y 13. Por otro lado, identificamos que 22 estudiantes dieron una respuesta satisfactoria. En este último grupo, notamos que a excepción de los estudiantes B13 y B15 todos fueron capaces de percibir que a partir del tercer término de la sucesión y_n, cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término. Además se identificó, que siete estudiantes plasmaron en un lenguaje visible las peculiaridades básicas del patrón, entre ellos, mostramos las respuestas de los alumnos B5, B6, B7, B9, y B10, ver figuras 81, 82, 83, 84 y 87.

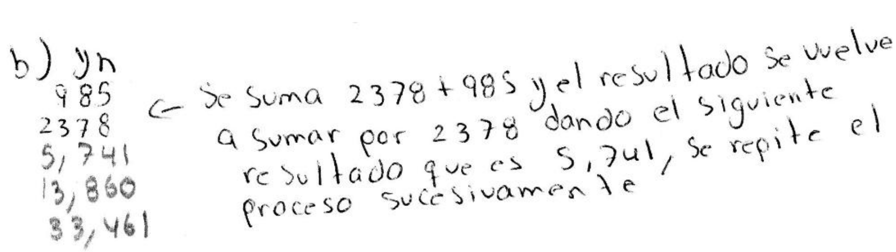


Figura 87. Respuesta al problema 13b por B9.

Por otra parte, se identificó que los estudiantes B13 y B15 aplicaron la regla $y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$, a partir del segundo término de la sucesión y_n, para calcular los valores de las filas 11, 12 y 13. Por ejemplo B13, fue capaz de describir su percepción de la siguiente manera "*Para sacar y_n era una suma entre x_n y y_n*", y además notamos que pudo utilizarla para verificar los valores de la sucesión y_n de la segunda y tercera fila, ver figura 88.

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	3	2	1.5
3	7	5	1.4
4	17	12	1.41666667
5	41	29	1.41379310
6	99	70	1.41428571
7	239	169	1.41420118
8	577	408	1.41422156
9	1393	985	1.41421319
10	3363	2378	1.41421362
11	8119	5741	1.4142135552
12	19601	13860	1.4142213569
13	47321	33461	1.414213562

Parasacar yn era una suma entre xn y yn P/e
1+1=2
3+2=5

Figura 88. Respuesta al problema 13b por B13.

Por último, reportamos el caso del estudiante A1, quien no contestó la pregunta 13b. Como ya hemos mencionado en el análisis de la pregunta 13a, durante la sesión de entrevista, el estudiante A1 mostró tener potencial para reconocer la regla de formación de la sucesión x_n. Dado su éxito para responder la pregunta 13a identificamos que A1 no tuvo dificultades para responder la pregunta 13b, la solución del estudiante A1 fue instantánea, como se muestra en las siguientes líneas de su entrevista.

Entrevista alumno A1

Pregunta 13

Investigadora: Ahora para y_n

Alumno A1: Para ¿cuál?, ah y_n a ver, hm… ¡lo mismo!

Investigadora: Encuentra el primer término (señala el espacio en blanco correspondiente a la fila 11), el termino de la fila 11.

Alumno A1: Según yo ¡ah! 5741

Acerca de la pregunta 13c:

En esta pregunta, identificamos que los estudiantes A1, A2, A3 y A5 fueron los únicos que no propusieron una respuesta. El estudiante A3, nos explicó que no logró calcular los cocientes para las tres últimas filas de la cuarta columna, debido a que decidió tomarse su tiempo para contestar el resto de las preguntas del cuestionario.

Acerca de la pregunta 13d:

En esta pregunta, identificamos que ningún estudiante logró expresar, que los valores de los cocientes en la tabla de la pregunta 13 se aproximan a $\sqrt{2}$.

Acerca de la pregunta 14a:

En la pregunta 14a, identificamos que 11 estudiantes no propusieron una respuesta y 14 estudiantes fueron capaces de percibir que a partir del tercer término de la sucesión x_n, cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el doble valor del penúltimo término. Además identificamos que nueve estudiantes plasmaron en un lenguaje visible las peculiaridades básicas del patrón, entre ellos, mostramos las respuestas de los alumnos A6, B2, B5, B13 y B14, ver figuras 89, 90, 91, 92 y 93.

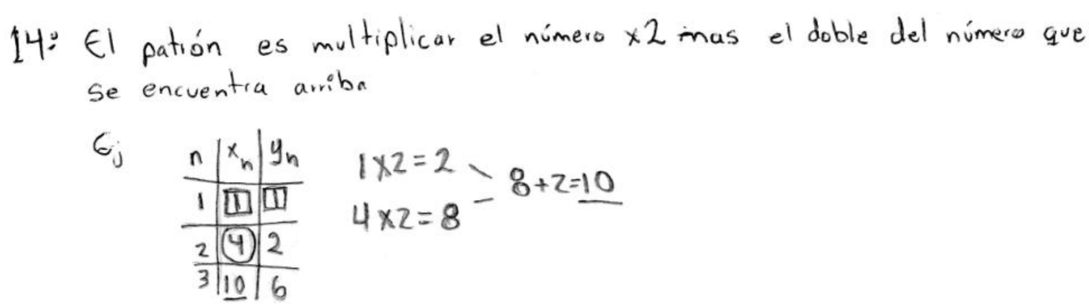


Figura 89. Respuesta al problema 14b por A6.

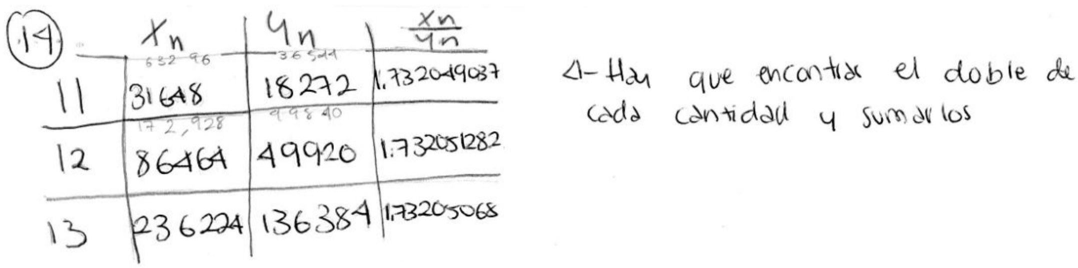


Figura 90. Respuesta al problema 14b por B2.

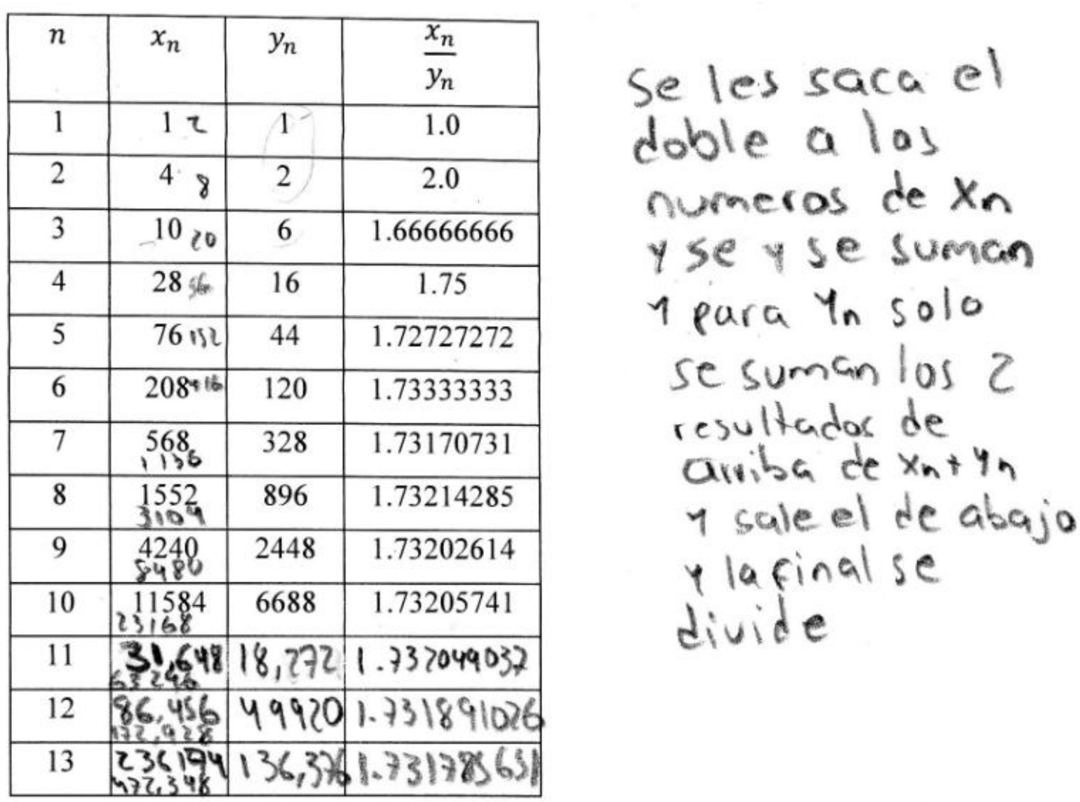
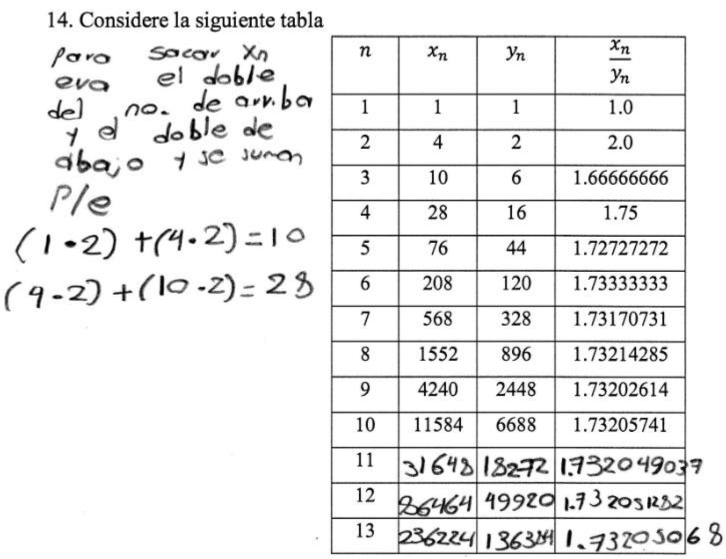


Figura 91. Respuesta al problema 14b por B5.



14. Considere la siguiente tabla

Para sacar x_n era el doble del no. de arriba y el doble de abajo y se suman

P/e

$(1 \cdot 2)+(4 \cdot 2)=10$

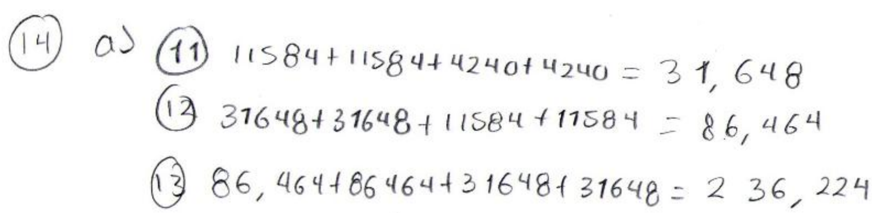
$(4 \cdot 2)+(10 \cdot 2)=28$

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	4	2	2.0
3	10	6	1.66666666
4	28	16	1.75
5	76	44	1.72727272
6	208	120	1.73333333
7	568	328	1.73170731
8	1552	896	1.73214285
9	4240	2448	1.73202614
10	11584	6688	1.73205741
11	31648	18272	1.7320490377
12	86464	49920	1.732051282
13	236224	136384	1.73205068

Igual es una suma entre x_n y y_n

Figura 92. Respuesta al problema 14a por B13.

Las figuras 89, 90, 91 y 92 nos muestran que los estudiantes A6, B2, B5 y B13 fueron capaces de recurrir al lenguaje escrito, para describir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión x_n. Por ejemplo, B13 estableció la siguiente formulación “*Para sacar* x_n *era el doble del número de arriba y el doble de abajo y se suman*”. Por otro lado, el estudiante A6 nos expresó “*El patrón es multiplicar el número por dos más el doble del número que se encuentra arriba*”. Los pocos cálculos aritméticos que realizaron los estudiantes A6 y B13 nos confirmaron que ambos lograron comprender la regla de formación, que la verificaron en casos particulares y que la utilizaron para generar nuevos términos.



14 a) 11 11584+11584+4240+4240 = 31,648

12 31648+31648+11584+11584 = 86,464

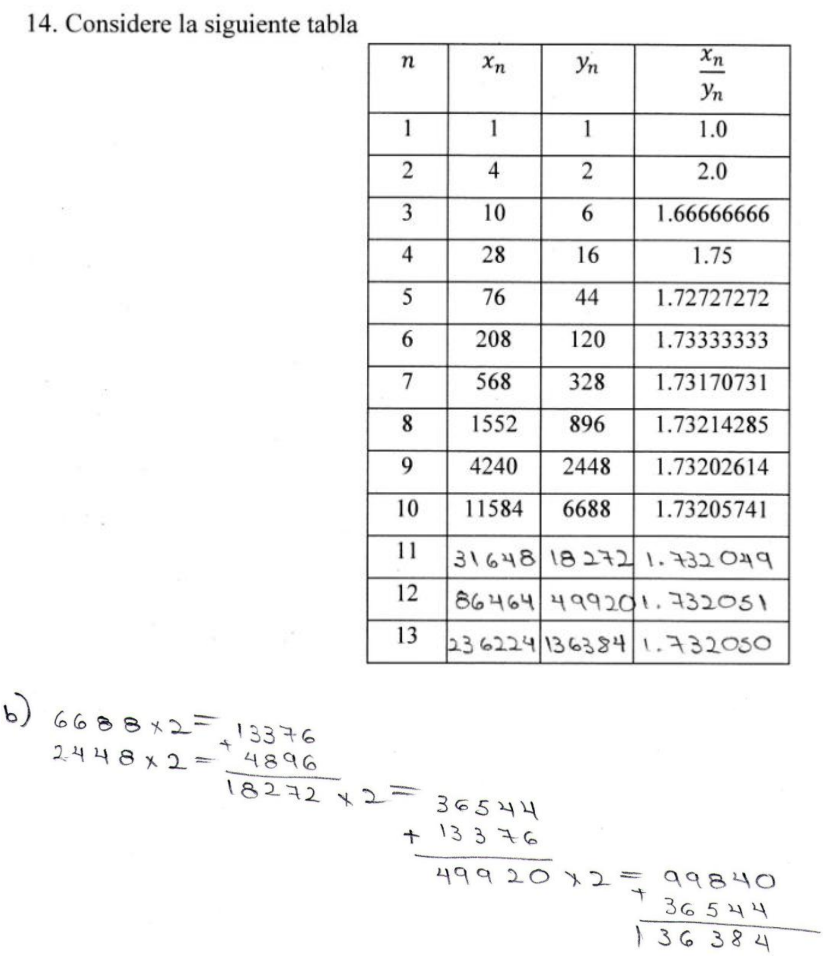
13 86,464+86464+31648+31648 = 236,224

Figura 93. Respuesta al problema 14a por B14.

Por otra parte, los cálculos aritméticos que el estudiante B14 realizó para determinar los valores de la sucesión x_n, en las filas 11, 12 y 13, nos permitieron identificar su capacidad para percibir la regla de formación y su capacidad para trasladar su percepción a la comunicación escrita, ver figura 93.

Acerca de la pregunta 14b:

En esta pregunta, identificamos que 11 estudiantes no propusieron una respuesta, cabe destacar que estos estudiantes tampoco contestaron la pregunta 14a. Por otro lado, notamos que 14 estudiantes dieron una respuesta satisfactoria, en este grupo, se observó que a excepción de los estudiantes B5, B13 y B15 todos fueron capaces de percibir que a partir del tercer término de la sucesión y_n cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el doble valor del penúltimo término. También notamos que siete estudiantes plasmaron la regla de formación un lenguaje visible, entre ellos, mostramos las respuestas de los alumnos A6, B2, A8 y B14, ver figuras 89, 90, 93, 94.



14. Considere la siguiente tabla

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1	1	1.0
2	4	2	2.0
3	10	6	1.66666666
4	28	16	1.75
5	76	44	1.72727272
6	208	120	1.73333333
7	568	328	1.73170731
8	1552	896	1.73214285
9	4240	2448	1.73202614
10	11584	6688	1.73205741
11	31648	18272	1.732049
12	86464	49920	1.732051
13	236224	136384	1.732050

b) 6688 x 2 = 13376
2448 x 2 = + 4896
18272 x 2 = 36544
+ 13376
49920 x 2 = 99840
+ 36544
136384

Figura 94. Respuesta al problema 14a por A8.

Finalmente, identificamos que los estudiantes B5, B13 y B15 aplicaron la regla $y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$, a partir del segundo término de la sucesión y_n, para calcular los valores de las filas 11, 12 y 13. Por ejemplo B5, fue capaz de describir la regla que percibió, de la siguiente manera "*Para* y_n *sólo se suman los dos resultados de arriba de* x_n + y_n *y sale el de abajo*", ver figuras 91 y 92.

Acerca de la pregunta 14c:

En esta pregunta, identificamos que 13 estudiantes no propusieron una respuesta. En este grupo, están los casos de A6 y B15, quienes sí tuvieron éxito para percibir la regla de formación en las preguntas 14a y 14b.

Acerca de la pregunta 14d:

En esta pregunta, identificamos que ningún estudiante logró expresar, que los valores de los cocientes en la tabla de la pregunta 14 se aproximan a $\sqrt{3}$.

Acerca de la pregunta 15a:

En la pregunta 15a, se identificó que a excepción de los estudiantes A2 y A3, todos lograron completar la información para la quinta, sexta y séptima fila de la tabla, ver tabla A15. Este último grupo conformado por 23 estudiantes percibió que los valores en las columnas 'luces verdes', 'luces amarillas' y 'luces azules' aumentan de acuerdo con el orden de los números naturales, y además notamos que los estudiantes detectaron características invariantes de una columna a otra.

Por otra parte, se identificó que los estudiantes B2, B3, B5 y B9 fueron capaces de plasmar sus percepciones en un lenguaje visible, ver figuras 95, 96, 97 y 98. Por ejemplo, el estudiante B2 expresó que la regla para obtener los valores de cada columna consiste en "*sumarle a la cantidad conforme va la numeración*", ver figura 95. Por otro lado, el estudiante B13 nos intentó explicar que notó características invariantes en las columnas 'luces verdes', 'luces amarillas', y 'luces azules' y además nos explicó que los valores en la columna 'luces azules' "*va aumentando de 3, 4, 5, etc.*", ver figura 96.

15 a)

	Verde	Amarillo	Azul	total
5	15 + 6	15 + 6	21 + 7	51
6	21 + 7	21 + 7	28 + 8	70
7	28 + 8	28 + 8	36 + 9	92
8	36 + 9	36 + 9	45 + 10	....
9	45 + 10	45 + 10	55 + 11	
b) 10	55	55	66	176

4-Hay que sumarle a la cantidad conforme va la numeración

Figura 95. Respuesta al problema 15a por B2.

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
2	3	3	6	12
3	6	6	10	22
4	10	10	15	35
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

15 1 3 6 10 15 21
2 3 4 5 6

Figura 96. Respuesta al problema 15a por B3.

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
2	3	3	3 6	12
3	6	6	4 10	22
4	10	10	5 15	35
5	15	15	6 21	51
6	21	21	7 28	70
7	28	28	8 36	92

En este las luces verde y Amarilla se repiten y es el mismo que obtiene el azul y ese va aumentando de 3, 4, 5, etc.

Figura 97. Respuesta al problema 15a por B5.

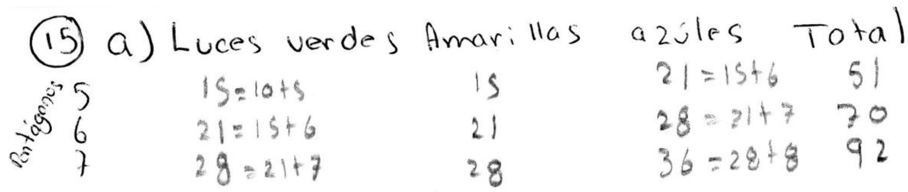


Figura 98. Respuesta al problema 15a por B9.

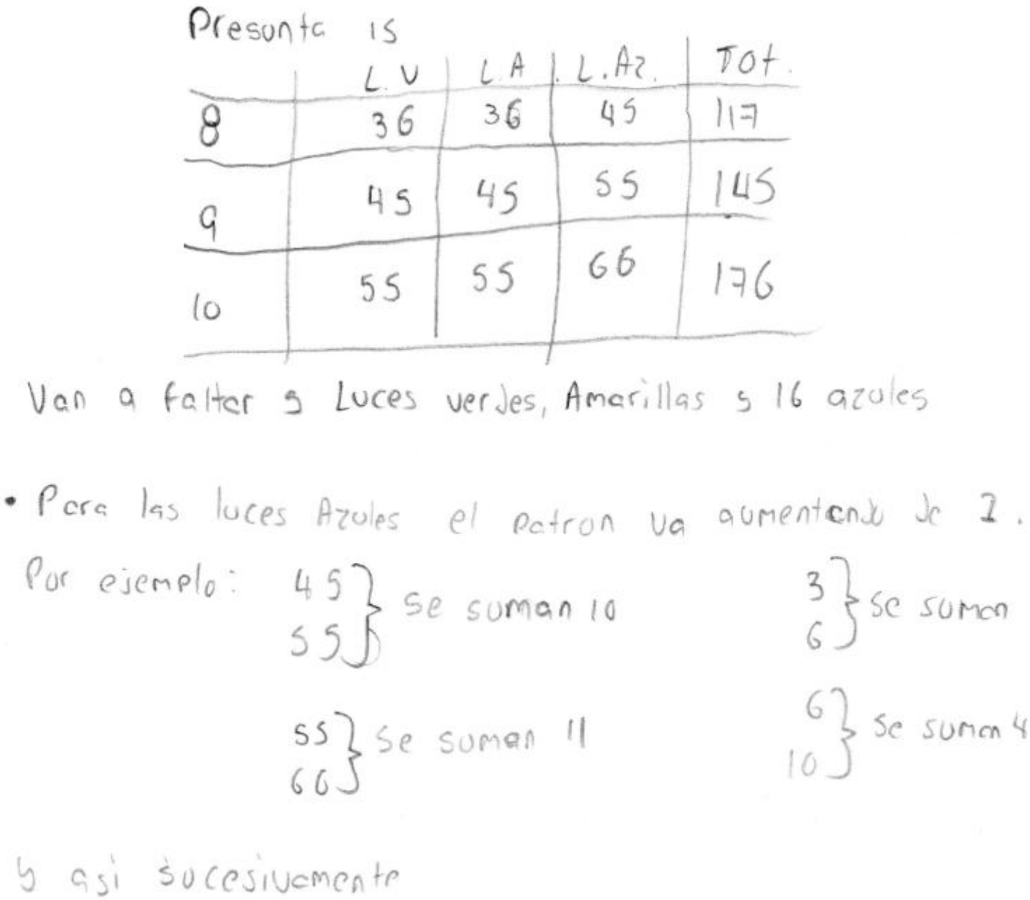
Acerca del problema 15b:

En esta última pregunta, se identificó que 12 estudiantes no propusieron una respuesta y que 13 contestaron satisfactoriamente. Las respuestas de este último grupo, revelan que siguieron realizando la suma de n en las columnas ‘luces verdes’, ‘luces amarillas’ y ‘luces azules’ para calcular la cantidad de luces que forman 8, 9 y 10 pentágonos, como se muestra en la entrevista del estudiante B8 y en las respuestas de los estudiantes A7 y B1, ver figuras 99 y 100.

Pregunta 15b

Investigadora: La pregunta 15b

Alumno B8: Pues en el primero es una secuencia, en el primero del verde es 1, (señala la cantidad de luces verdes en el primer pentágono) en el segundo son 2, en el tercero son 3 (señala la cantidad de luces verdes en el tercer pentágono) y así sucesivamente, así que lo único que sería por ejemplo… a éste, aumentarle dos (señala el número 1 de la columna luces verdes), al 3 (señala el número 3 de la columna luces verdes) pues ya le aumentaría el tres, al 6 cuatro, al 10 cinco, al 15 seis, al 21 siete y así sucesivamente, lo mismo para las luces amarillas y para las luces azules pues… era un poco diferente, pero no recuerdo bien cómo lo hice.


Presunta 15

	L. V	L. A	L. Az.	Tot.
8	36	36	45	117
9	45	45	55	145
10	55	55	66	176

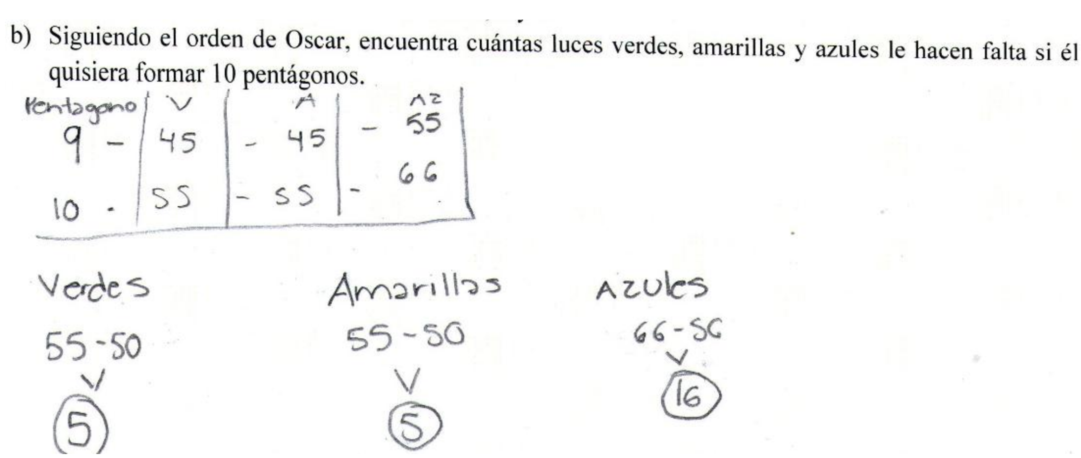
Van a faltar 5 Luces verdes, Amarillas 5 16 azules

• Para las luces Azules el patron va aumentando de 1.

Por ejemplo: 45, 55 se suman 10 — 3, 6 se suman — 55, 66 se suman 11 — 6, 10 se suman 4

y asi sucesivamente

Figura 99. Respuesta al problema 15b por A7.


b) Siguiendo el orden de Oscar, encuentra cuántas luces verdes, amarillas y azules le hacen falta si él quisiera formar 10 pentágonos.

Pentagono	V	A	Az
9	45	45	55
10	55	55	66

Verdes 55 - 50 → 5

Amarillas 55 - 50 → 5

Azules 66 - 50 → 16

Figura 100. Respuesta al problema 15b por B1.

Capítulo 5

Consideraciones finales

Este capítulo está dedicado a las consideraciones finales que obtenemos del análisis de resultados y que apuntan a generar una colección de ideas fundamentales que permiten responder las preguntas de investigación.

5.1 Sobre el objetivo de investigación

El objetivo de nuestra investigación desde un principio ha sido averiguar si hay un potencial en estudiantes de nivel medio superior para reconocer patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos.

En este trabajo, el análisis de resultados fue satisfactorio, pues en la mayoría de las sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos se identificó que casi el total de estudiantes tuvo éxito para percibir las peculiaridades básicas de los patrones, ver tablas 21 y 22. Las respuestas en cada una de las 15 situaciones matemáticas, muestran que los estudiantes plasmaron sus percepciones mediante símbolos numéricos, ilustraciones, expresiones aritméticas y descripciones en forma escrita.

Durante las entrevistas, los jóvenes de bachillerato tuvieron disponibilidad en tratar de describir las peculiaridades básicas del patrón que captaron mentalmente. Los diálogos que entablamos con algunos de los estudiantes, nos permitieron identificar que en su mayoría no cuentan con un discurso formal y organizado de sus percepciones, lo cual les impidió expresarlas de forma clara, no obstante, el trabajo de los alumnos reveló que comprendieron las características básicas del patrón y que las utilizaron para determinar elementos específicos de las sucesiones.

Por lo anterior, queremos comentar que hemos registrado una lista de ideas, que plasman, de forma más específica, el potencial que tienen los estudiantes para reconocer patrones en un contexto de sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos, y que permitió responder nuestras preguntas de investigación, las cuales son:

1) ¿Qué potencial podemos identificar en estudiantes de nivel medio superior en la tarea de reconocimiento de patrones?
2) ¿Qué dificultades podemos identificar en estudiantes de nivel medio superior para describir un patrón que ya han reconocido?

Primeramente, nos enfocamos en realizar una organización de las sucesiones de ambas partes del cuestionario con base en la naturaleza de sus objetos, con el propósito de mostrar el potencial que identificamos en los estudiantes para reconocer patrones en correlación a las cuatro etapas sugeridas por Mason y sus colaboradores, ver tabla 23. Posteriormente, se muestra una lista de las dificultades que tuvieron algunos estudiantes para describir el patrón que reconocieron exitosamente.

Antes de comenzar con nuestra lista de ideas, nos parece pertinente mencionar que asignamos el color verde a la etapa *percibir*, el color amarillo a la etapa *describir,* el *anaranjado* a la etapa *registrar* y el azul a la etapa *validar*, con el objetivo de tener una mejor organización del éxito que tuvieron los estudiantes en cada una de ellas.

Tabla 23. Etapas en el reconocimiento de patrones sugeridas por Mason et al. (1985).

Percibir un patrón
Describir un patrón
Registrar un patrón
Validar la formulación

En la tabla 24, se muestra el potencial que poseen los estudiantes para reconocer patrones en las sucesiones numéricas de las preguntas 1a, 3a y 3b.

Tabla 24. Potencial identificado en las respuestas de las preguntas 1a, 3a y 3b.

Etapa	Pregunta	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	1a, 3a y 3b	Comparar los términos de la sucesión entre sí.
		Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, a partir de sus primeros términos.
	1a	Los estudiantes percibieron que en la sucesión $-1, 1, -1, \ldots$ se alternan -1s y 1s.
	3a	Los estudiantes percibieron que en la sucesión $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$ se alternan 1s y 0s y que los ceros van aumentando de acuerdo con el orden de los números naturales.
	3b	Los estudiantes percibieron que 1s y 0s se alternan y que 1s y 0s van aumentando de acuerdo con el orden de los números naturales.
	1a, 3a y 3b	Usar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión para continuar la lista de sus términos.
		Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje oral.
	3a	Estudiante A3: "¡*Eh! Que va, como en la numeración. Así va uno… pues va un cero, luego 1, 2 (el estudiante señala los términos 1, 0, 0), luego 1, 3 (el estudiante señala los términos 1, 0, 0, 0)... Así en la numeración*".
	3b	*Estudiante A3: "Va creciendo conforme a la numeración, van creciendo los números, los ceros y los unos"*.
		Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje escrito.
	1a	Estudiante B5: *"Se resuelve poniendo un 1 positivo y negativo porque la regla de los signos dice que* $(+)(-) = -$ *"* Estudiante B13: *"Va una secuencia de negativo y positivo"*.
	3a	Estudiante B5: "*Los ceros van aumentando de 1, 2, 3, etc.*"
	3b	Estudiante B5: "*Los unos y ceros van aumentando 1, 2, 3, etc.*" Estudiante B16: "*Va un uno, un cero, dos uno, dos ceros, etc.*"
	1a, 3a y 3b	Verificar que la ley de formación sirve para construir los términos de la sucesión que se muestran en el cuestionario.

En las tablas 25, 26, 27 y 28 se muestra el potencial que tienen los estudiantes para reconocer patrones en las sucesiones numéricas de las preguntas 1b, 1c, 1d, 2, 5, 8a y 8b.

Tabla 25. Potencial identificado en las respuestas de las preguntas 1b, 1c y 1d.

Etapa	Pregunta	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	1b, 1c, 1d	Explorar los términos de la sucesión.
		Detectar características comunes entre los términos de la sucesión.
	1b	Los estudiantes detectaron que a partir del primer término de la sucesión el valor del denominador coincide con el valor del numerador de la siguiente posición.
	1c	Todos los estudiantes detectaron que en las posiciones pares el denominador es el número dos y también identificaron que en las posiciones impares están los primeros números naturales. Se observó, que 23 estudiantes utilizaron estas características para continuar la lista de los términos de la sucesión 1c.
	1c	Realizar manipulaciones aritméticas sobre unos cuantos términos de la sucesión.
		Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, a partir de sus primeros términos.
	1b	Seis estudiantes percibieron que el numerador y denominador de cada fracción son números cuadrados perfectos.
	1b	Nueve estudiantes percibieron que los numeradores se generan conforme a la suma de los primeros n números impares.
	1c	Dos estudiantes percibieron que a cada término de la sucesión se le suma $\frac{1}{2}$ para obtener el siguiente.
	1c	Un estudiante convirtió los términos enteros de la sucesión a medios, $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ y detectaron números naturales consecutivos en los numeradores de cada fracción.
	1d	Los estudiantes percibieron que los denominadores están definidos por el producto de los primeros n números naturales.
		Usar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión para:
	1b y 1d	Calcular unos cuantos términos intermedios de la sucesión.
	1c	Continuar la lista de términos de la sucesión
		Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje oral.
	1b	Estudiante A8: *"Son puros números al cuadrado".*
	1c	Estudiante A8: *"Se va sumando $\frac{1}{2}$, al 1 le sumas $\frac{1}{2}$ dan $\frac{3}{2}$, más $\frac{1}{2}$ son $\frac{4}{2}$ que son 2…".*
	1d	Estudiante A8: "*Se va multiplicando la posición por el denominador del anterior".*

		Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje escrito.
	1b	Los estudiantes A2, A4, A6, B3, B4, B5, B11, B12 y B16 plasmaron las peculiaridades básicas del patrón mediante expresiones aritméticas. *“4+5=9, 9+7=116, 16+9=25, 25+11=36, 36+13=49, 49+15=64”.*
	1c	Estudiante B8: *“Sumar un medio”.* Estudiante B5: *“Los números ordinarios son consecutivos y las fracciones los numeradores se le suman 2 y el denominador continua siendo 2”*
	1d	Estudiante B5: “*Se le va multiplicando al denominador* $\times 1, \times 2, \times 3, \times 4$ *y así sucesivamente*”. Los estudiantes A4, A7, B1, B2, B3, B6, B9, B11 y B15 plasmaron las peculiaridades básicas del patrón mediante expresiones aritméticas. $24 \times 5 = 120, 120 \times 6 = 720, 720 \times 7 = 5\,040,$ $5\,040 \times 8 = 40\,320, 40\,320 \times 9 = 362\,880.$
	1c, 1d	Verificar que las peculiaridades básicas del patrón sirven para construir los términos de la sucesión que se muestran en el cuestionario, a través de cálculos aritméticos.

Tabla 26. Potencial identificado en las respuestas de la pregunta 2.

Etapa	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	Explorar los términos de la sucesión.
	Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, a partir de sus primeros términos.
	Los estudiantes percibieron que el número del grupo es igual al número de impares que lo constituyen.
	Usar las peculiaridades básicas del patrón para continuar la lista de términos de la sucesión.
	Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje oral.
	Estudiante A8: “*La cantidad de números va a ser igual que el grupo, el número de grupo que sea*”.
	Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje escrito.
	Estudiante B5: “*Lo resolví porque son sólo números impares en los paréntesis y van aumentando del 1, 2, 3, 4, etc.*” Estudiante B8: “*El número del grupo es igual al número de elementos*”. Estudiante B13: “*El grupo siguiente integra un número más mientras crece”*.
	Verificar que las peculiaridades básicas del patrón funcionan para construir los términos de la sucesión que se muestran en el cuestionario, a través de conteos.

Tabla 27. Potencial identificado en las respuestas de la pregunta 5.

Etapa	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	Explorar los términos de la sucesión.
	Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, a partir de sus primeros términos.
	Los estudiantes A2, B5, B8 y B13 detectaron parejas de números consecutivos entre los primeros términos de la sucesión, posteriormente percibieron la lista de los números naturales que son consecutivos a cada pareja y reconocieron que esta lista crece de acuerdo con el orden de los números naturales. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, … ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ Uno Dos Tres Cuatro Cinco…
	Los estudiantes percibieron que a cada término que ocupa una posición impar se le suma la unidad para obtener el siguiente y además detectaron que a cada término que ocupa una posición par se le suma n, partiendo desde $n = 2$, para obtener el siguiente término.
	Usar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, para calcular unos cuantos términos intermedios.
	Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje oral.
	Estudiante B8: "*Bueno creo que fue por, no sé si es lógica o un patrón pero primero son dos números seguidos, 1y 2 y después un número que no está que sería el 3, después otra vez son dos números seguidos (el 4 y 5) y faltan dos números (se refiere al número 6 y 7), de nuevo dos números seguidos (señala los números 8 y 9) y faltan tres números (se refiere a los números 10, 11 y 12) y así sucesivamente*".
	Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje escrito.
	Estudiante B6: *"Sólo le aumento uno y el siguiente el otro número"*. Estudiante B16: *"Se deja un espacio y se va aumentando 1, espacio, 2, espacio 3, etc."*. Los estudiantes A1, A4, B1, B6, B9, B12 y B17 plasmaron mediante símbolos numéricos y expresiones aritméticas que sumaron alternadamente la unidad y la suma de n, partiendo desde $n = 2$. $1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 1 + 6 + 1 + 7 + 1 + \cdots$
	Verificar que las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión funcionan para los términos mostrados en el cuestionario, a través de conteos.

Tabla 28. Potencial identificado en las respuestas de las preguntas 8a y 8b.

Etapa	Pregunta	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	8a	Explorar los términos de la sucesión.
	8a	Realizar manipulaciones aritméticas sobre unos cuantos términos de la sucesión.
		Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, a partir de sus primeros términos.
	8a	Los estudiantes A2, A3, A5, A6, A7, A8, B1, B2, B4, B5, B7, B10, B13, B14 y B16 percibieron que el primer término es siete y que cada uno de los siguientes se obtiene sumando cuatro unidades al término anterior.
	8a y 8b	Los estudiantes A1, A4, A8, B3, B6, B8, B9, B12, B15 y B17 percibieron la relación entre los términos de la sucesión y su posición.
		Usar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión para:
	8a	Calcular unos cuantos términos intermedios de la sucesión.
	8b	Calcular un término particular con índice grande.
		Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje oral.
	8a	Estudiante A8: *"En todas va aumentando cuatro es 7+4=11, más cuatro da 15, 15+4=19, más cuatro 23, más cuatro 27 y a 27 le sume cuatro para que de 31, y luego así, más cuatro 35, más cuatro 39".*
	8b	Estudiante B8: "*Me di cuenta que sólo son los múltiplos de cuatro, pero… por ejemplo, 4 en el primero sería 4+3, en el segundo sería el doble de cuatro más tres ¡serían once!, y así el triple de 4… y ya lo único que hice fue multiplicar 250 por 4 y le sume 3*".
		Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje escrito.
	8a	Estudiante A6: *"Se van sumando 4".* Estudiante B4: *"El término correspondiente es de 4".* Estudiante B5: *"Se le suman 4 a cada uno de los números".* Estudiante B14: *"Se suma 4, a cada número".* Los estudiantes A2, A3, A5, A7, A8, B1, B2, B7, B10, B13 y B16 plasmaron mediante símbolos numéricos y algunas expresiones aritméticas que sumaron 4 unidades a cada término de la sucesión, que se mostró en el cuestionario.
	8a y 8b	Estudiante A4: $f = 4 \cdot np + 3$
	8b	Estudiante A8: "$4n + 3$"
	8a y 8b	Los estudiantes A1, A4, B6, B8, B9, B12, B15, B17 plasmaron mediante algunas expresiones aritméticas que calcularon nuevos términos partiendo de la posición que ocupan en la sucesión.
	8a y 8b	Verificar que la regla de formación sirve para calcular los términos mostrados en el cuestionario, a través de cálculos aritméticos.

En la tabla 29, se muestra el potencial que tienen los estudiantes para reconocer patrones en las sucesiones numéricas cuyos términos están definidos en función de los anteriores.

Tabla 29. Potencial identificado en las respuestas de las preguntas 4a y 4b.

Etapa	Pregunta	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	4a y 4b	Explorar los términos de la sucesión.
	4a y 4b	Percibir que deben proceder de una manera diferente, al intentar determinar la regla de formación de los términos de la sucesión.
		Percibir la regla de formación de la sucesión, a partir de sus primeros términos.
	4a	Los estudiantes percibieron que los dos primeros términos son unos y que cada uno de los siguientes se obtiene al sumar los dos términos anteriores.
	4b	Los estudiantes percibieron que los dos primeros términos son 1 y 3 y que cada uno de los siguientes se obtiene al sumar el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término.
	4a y 4b	Usar la regla de formación de la sucesión para continuar la lista de términos.
		Intentar explicar la regla de formación de la sucesión, mediante el lenguaje escrito.
	4a	Estudiante A8: *"Sumar los dos números anteriores, se suma el número anterior más el anterior del anterior".*
	4b	Estudiante A8: *"Dos veces el anterior, más el dos veces antes".* Luego mejora su formulación y expresa: *"Se va a multiplicar por dos el número anterior y se le va a sumar el número anterior del anterior".*
		Plasmar la regla de formación de los términos de la sucesión, mediante el lenguaje escrito.
	4a	Estudiante A6: *"Sumo los números que están juntos".* Estudiante B5: *"Sólo se le va sumando con el número anterior".* Estudiante B6: *"Sumando el último con el penúltimo".* Estudiante B8: *"Se suman los 2 números anteriores".* Estudiante B10: 13+21= 34, 34+21=55, 55+34=89. Estudiante B13: *"Son suma del último con el penúltimo".*
	4b	Estudiante A6: *"Sumo el número a la derecha con el de la izquierda y se vuelve a sumar el de la derecha".* Estudiante A7: *"Sume 7+3=10 y volví a sumar 7, en el siguiente sume 17+41=58 y volví a sumar 41, y así sucesivamente".* Estudiante B8: *"El doble del número anterior a la respuesta más el anterior a este".* Estudiante B9: 17+7=24, 24+17=41; 41+17=58, 58+41=99; 99+41=140, 140+99=239, 239+99=338, 338+239=577. Estudiante B12: 41+17=58, 58+41=99; 99+41=140, 140+99=239, 239+99=338, 338+239=577: 577+239=816, 816+577=1393. Estudiante B14: 17+17+7=41, 99+99+41=239, 239+239+99=577, 577+577+239=1393.
	4a y 4b	Verificar que la regla de formación funciona para los términos mostrados en el cuestionario, a través de cálculos aritméticos.

En la tabla 30, se presenta el potencial que tienen los estudiantes para reconocer el patrón que rige a la sucesión de enunciados de la pregunta 6.

Tabla 30. Potencial identificado en las respuestas de las preguntas 6.

Etapa	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	Identificar características comunes de un enunciado a otro.
	Percibir las peculiaridades del patrón que rige a la sucesión de enunciados, a partir de los seis primeros enunciados.
	Los estudiantes, B5 y B14 detectaron números naturales entre cada pareja de ‘primeros sumandos’ que expresan los enunciados. Posteriormente, percibieron que esta lista de números crece de acuerdo con el orden de los números naturales. Uno más uno Dos más dos El número 3 ← Un número Cuatro más uno Cinco más tres Los números 6 y 7 ← Dos números Ocho más uno Nueve más cuatro Los números 10, 11 y 12 ← Tres números
	Catorce estudiantes percibieron que ‘la suma’ expresada en cada enunciado representa al ‘primer sumando’ del siguiente enunciado y además detectaron las frases alternadas “más uno”, “más dos”, “más uno”, “más tres”, “más uno”, “más cuatro, …”
	Los estudiantes A4, A7, B1, B12, B15 y B17 recurrieron a símbolos numéricos. Este grupo de alumnos, reescribió los seis primeros enunciados a su expresión aritmética, y todos percibieron que el resultado de la suma representa al ‘primer sumando’ del siguiente enunciado, además detectaron que los segundos sumandos de cada expresión aritmética se generan al alternar la unidad y los números naturales n, partiendo desde $n = 2$. $1 + 1,\ 2 + 2,\ 4 + 1,\ 5 + 3,\ 8 + 1,\ 9 + 4,\ 13 + 1,\ 14 + 5,\ 19 + 1, \ldots$
	Usar las peculiaridades básicas del patrón, para continuar la lista de enunciados.
	Intentar explicar el patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje oral.
	Estudiante B8: *“Pues creo que por lógica 1+1=2 más dos son 4 y pues como vi que se seguían repitiendo el más uno, son ¡cinco! (señala la frase cuatro más uno) y después éste iba aumentando uno nada más (señala las frases, más dos, más tres, más cuatro), más tres, más cuatro, más cinco y así”.*
	Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión de enunciados, mediante el lenguaje escrito.
	Los estudiantes A4, A7, B1, B12, B15 y B17 plasmaron el patrón a través de símbolos numéricos y expresiones aritméticas.
	Verificar que el patrón sirve para los seis primeros enunciados, mediante la comprobación de las expresiones aritméticas.

En la tabla 31, se muestra el potencial que tienen los estudiantes para reconocer la regla de formación de la sucesión de figuras de la pregunta 7.

Tabla 31. Potencial identificado en las respuestas de la pregunta 7.

<table>
<tr><th>Etapa</th><th>Los estudiantes mostraron ser capaces de</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, a partir de las primeras cuatro figuras.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes A2, A3, B8, B9 y B14 percibieron un aumento de cuatro cuadrados en cada figura.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes A1, A7, A8, B4, B7, B10, B12 y B13 percibieron que el número de columnas formadas por cuatro cuadrados corresponde con el valor de la posición en la que se encuentran.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes A4, A5, B1, B3, B5, B6, B16 y B17 recurrieron a símbolos numéricos. Este grupo de alumnos realizó el conteo de los cuadrados en cada una de las primeras cuatro figuras y les asignaron el valor numérico que representa la cantidad de cuadrados que las forman. Posteriormente, percibieron que cada valor numérico se obtiene sumando 4 al anterior.</td></tr>
<tr><td></td><td>Usar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión para calcular el número de cuadrados en las figuras de las posiciones 8 y 15.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión de figuras, mediante el lenguaje escrito.</td></tr>
<tr><td>Estudiante B5: “Sólo se le suman 4 a los cuadrados y así llegas al resultado”.
Estudiante B7: “Aumentan 4 cuadrados por cada grupo”.
Estudiante B16: “Sólo se va aumentando 4 en cada número”.
Estudiante A8: “Se debe multiplicar 4 por el número de la posición y luego se le suma 1, por el cuadrito restante, por lo tanto la formula es $4n + 1$”.
Los estudiantes A2, A3, B8, B9 y B14 dibujaron cuatro cuadrados más a cada figura.
Los estudiantes A4, A5, B1, B3, B5, B6, B16 y B17 plasmaron a través de tablas y expresiones aritméticas que sumaron el número 4 a cada valor numérico.
5+4=9, 9+4=13, 13+4=17, 17+4=21, 21+4=25, 25+4=29, 29+4=33⋯ 57+4=61
<table>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>...</td><td>15</td><td>...</td></tr>
<tr><td>21</td><td>25</td><td>29</td><td>33</td><td>37</td><td>41</td><td></td><td>61</td><td></td></tr>
</table>
Los estudiantes A1, A7, B4, B7, B10, B12 y B13 plasmaron las siguientes expresiones aritméticas, para indicar el número de cuadrados en algunas de las figuras que ocupan las primeras 15 posiciones.
<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>8</td><td>...</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$4 \times 1 + 1$</td><td>$4 \times 2 + 1$</td><td></td><td>$4 \times 8 + 1$</td><td></td><td>$4 \times 15 + 1$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>Verificar que la regla de formación sirve para calcular los cuadrados en las cuatro figuras presentadas en el cuestionario, a través de dibujos y cálculos aritméticos.</td></tr>
</table>

En la tabla 32, se muestra el potencial que tienen los estudiantes para reconocer patrones en el contexto de las preguntas 9 y 10.

Tabla 32. Potencial identificado en las respuestas de las preguntas 9 y 10.

Etapa	Pregunta	Los estudiantes mostraron ser capaces de
		Percibir las reglas de formación implícitas en el enunciado de la pregunta 9.
	9a, 9b y 9c	Los estudiantes percibieron que el hijo medio es el triple del padre, que el hijo menor es el triple del padre menos uno y que el hijo mayor es el triple del padre más uno.
		Percibir la regla de formación que rige a los valores numéricos que representan la cantidad de casillas.
	10a	Los estudiantes percibieron que a partir de la segunda fila, el número de casillas es el triple del número de casillas de la fila anterior.
	10a	Los estudiantes A6 y B15 percibieron la relación entre el número de casillas y el número de su fila. Ambos alumnos intentaron plasmar la regla de formación mediante una simbología matemática. Por ejemplo A6, plasmó en la hoja del cuestionario que “3^{n-1} funciona en ambos casos”.
		Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a los valores numéricos que se encuentran en el centro de cada fila.
	10b	Los estudiantes percibieron que a partir de la segunda fila, el número que se encuentra en el centro es el triple del anterior.
	10b	Los estudiantes A6 y B15 percibieron la relación entre el número de que se encuentra en el centro de la fila y el número de su fila.
		Usar la regla de formación para:
	9a	Calcular el hijo mayor del número 50.
	9b	Calcular el hijo menor del número 72.
	9c	Calcular el padre del número 2013.
	10a	Calcular el número de casillas en la sexta fila.
	10b	Determinar el número que se encuentra en el centro de la fila 17.
		Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a los valores numéricos que representan la cantidad de casillas, mediante el lenguaje oral.
	10a	Estudiante A8: *“Fui eh 1(3)=3 que es de la segunda fila, luego para sacar los de la fila siguiente por tres otra vez y ya dan 9, luego esos 9 por tres otra vez y así fui multiplicando por tres hasta que fue 243”*.
		Plasmar la regla de formación, mediante el lenguaje escrito.
	9a y 9b	Los estudiantes A5, A7, A8, B3, B9 y B10 plasmaron que el hijo mayor es el triple del padre más uno y que el hijo menor es el triple del padre menos uno, mediante expresiones aritméticas.
	9c	Los estudiantes A1, A5, A7, A8, B2, B3, B9 y B10 plasmaron que haber comprendido que el valor de cada hijo medio es divisible entre tres, mediante expresiones aritméticas.

	10a	Estudiante B9: *"El número de la fila se multiplica por 3"*. Este alumno utilizó la palabra 'fila' pero sus cálculos revelan que se refirió 'al número de casillas'.
	10a y 10b	Estudiante A6: 3^{n-1} *funciona en ambos casos*.
	10a	Los estudiantes A2, A4, A5, A8, B1, B2, B3, B5, B9, B10, B11, B14 y B17 plasmaron a través de símbolos numéricos y expresiones aritméticas que el número de casillas se triplica de una fila a la siguiente.
	10b	Los estudiantes A2, A4, A5, A8, B1, B2, B3, B5, B9 y B14 plasmaron a través de símbolos numéricos y expresiones aritméticas que a partir de la segunda fila, cada número que se encuentra en el centro es el triple del anterior.
	10a	Verificar que la regla de formación funciona para calcular el número de casillas de las tres primeras filas de la tabla, mediante cálculos aritméticos.
	10b	Verificar que la regla de formación funciona para calcular los números que se encuentran en el centro de las tres primeras filas de la tabla, mediante cálculos aritméticos.

En la tabla 33, se muestra el potencial que tienen los estudiantes para reconocer el patrón que rige a la sucesión de igualdades de la pregunta 11.

Tabla 33. Potencial identificado en las respuestas de la pregunta 11.

Etapa	Pregunta	Los estudiantes mostraron ser capaces de
		Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige la sucesión de igualdades.
	11	La mayoría de los estudiantes percibió que a partir de la segunda igualdad, se suma el siguiente número impar.
	11	Los estudiantes A1, A8 y B5 percibieron que para obtener el valor de la suma se debe calcular el cuadrado del número de impares que la generan.
		Usar las peculiaridades básicas del patrón para:
	11a	Continuar la lista de igualdades.
	11b	Calcular la suma de los primeros 51 números impares.
		Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión, mediante el lenguaje oral.
	11a	Estudiante A1: *"Lo que note es que sólo se le sumaban números impares y que los resultados eran el número de la fila al cuadrado".* Estudiante A8: "*Vi que los resultados iban siendo números al cuadrado*", "*Bueno es que se multiplica ya sea el número de dígitos* (impares) *o el número de la fila que sea, al cuadrado".*
	11b	Estudiante A8: *"Primero se tiene que sacar el número de sumandos que tiene y eso se puede sacar sumándole uno al último dígito (impar) y dividiéndolo entre dos y ya el resultado de la derecha va a ser elevando el número de dígitos (impares) al cuadrado".*
		Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión de igualdades, mediante el lenguaje escrito.
	11a	*Estudiante B16: "Se le aumenta un número impar, por ejemplo 13+15, 15+17, 17+19, etc…"*
	11b	Estudiante A8: (51)(51)=2601 Estudiante B5: *"El cuadrado de los números".*
	11	Verificar que las peculiaridades básicas del patrón se cumplen para las igualdades exhibidas en el cuestionario.

En la tabla 34, se presenta el potencial que tienen los estudiantes para reconocer el patrón que rige a las igualdades de la pregunta 12.

Tabla 34. Potencial identificado en las respuestas de las pregunta 12.

Etapa	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	Explorar las igualdades y compararlas entre sí.
	Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión de igualdades.
	Los estudiantes percibieron números consecutivos en ambos lados de cada igualdad, mostrada en el cuestionario.
	Los estudiantes percibieron que el número de sumandos en ambos lados de cada igualdad crece de acuerdo con el orden de los números naturales.
	Usar las peculiaridades básicas del patrón para determinar las dos igualdades siguientes.
	Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión de igualdades, mediante el lenguaje oral.
	Estudiante A8: *“Se va aumentando un dígito en cada parte al ir aumentando la fila”.*
	Plasmar las peculiaridades básicas del patrón que rige a la sucesión de igualdades, mediante el lenguaje escrito.
	Estudiante B11: *“Se sigue la numeración…y se deja en el siguiente renglón la cantidad de números que siguen del anterior”.*
	Verificar que las peculiaridades básicas del patrón se cumplen para las igualdades exhibidas en el cuestionario.

En las tablas 35 y 36, se muestra el potencial que tienen los estudiantes para reconocer los patrones implícitos en la tabla de las preguntas 13 y 14.

Tabla 35. Potencial identificado en las respuestas de la pregunta 13.

Etapa	Pregunta	Los estudiantes mostraron ser capaces de
		Percibir la regla de formación de las sucesiones x_n y y_n, a partir de sus primeros términos.
	13a	Los estudiantes percibieron que los dos primeros términos son 1 y 3 y que cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término.
	13b	Los estudiantes percibieron que los dos primeros términos son 1 y 2 y que cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término.
	13b	Los estudiantes B13 y B15 percibieron que los términos de la sucesión y_n están definidos en función de los términos anteriores de ambas sucesiones. Estos dos alumnos aplicaron la regla $y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$, a partir del segundo término de la sucesión y_n, para calcular los valores de las filas 11, 12 y 13.
		Usar la regla de formación para:
	13a	Calcular los valores de la sucesión x_n en las filas 11, 12 y 13.
	13b	Calcular los valores de la sucesión y_n, en las filas 11, 12 y 13.
		Intentar explicar la regla de formación de los términos de la sucesión x_n, mediante el lenguaje oral.
	13a	Estudiante A8: *"Al número anterior se va a multiplicar por dos y se le suma el penúltimo, por ejemplo acá va a ser 3(2)+1 es siete, luego 7(2)=14 más tres es 17"*.
		Plasmar la regla de formación de la sucesión x_n y de la sucesión y_n, mediante el lenguaje escrito.
	13a y 13b	Estudiante B5: *"El x_n y y_n lo resolví multiplicando por 2 el último número y le sumaba el resultado con el número anterior"*.
	13a y 13b	Estudiante B6: *"Multiplico el último $\times$ 2 y le sumo el penúltimo"*.
	13a y 13b	Estudiante B7: *"Se multiplican $\times$ 2 y luego se suma con la cifra de arriba y ese es el resultado"*.
	13b	Estudiante B9: *"Se suma 2378+985 y el resultado se vuelve a sumar por 2378 dando el siguiente resultado que es 5741, se repite el proceso sucesivamente"*.
	13a y 13b	Estudiante B10: *"El doble del número más el anterior"*.
	13a	Estudiante B11: *"Doble de x_n y se suma la cifra de arriba"*.
	13a	Estudiante B13: *"Para sacar x_n, era multiplicar el valor $\times$ 2 y sumarle el anterior"*.
	13b	Estudiante B13: *"Para sacar y_n era una suma entre x_n y y_n"*.
	13a	Los estudiantes B7 y B11 también plasmaron la regla de formación mediante expresiones aritméticas.
	13a y 13b	Los estudiantes B3, B13 y B14 también plasmaron la regla de formación mediante expresiones aritméticas. Cabe destacar que los estudiantes B3 y B14 aplicaron la regla "sumar el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término".
	13a y 13b	Verificar que la regla de formación funciona para los primeros términos de la sucesión x_n, y para los primeros términos de la sucesión y_n, a través de cálculos aritméticos.

Tabla 36. Potencial identificado en las respuestas de la pregunta 14.

Etapa	Pregunta	Los estudiantes mostraron ser capaces de
		Percibir la regla de formación de las sucesiones x_n y y_n, a partir de sus primeros términos.
	14a	Los estudiantes percibieron que los dos primeros términos son 1 y 4 y que cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el doble valor del penúltimo término.
	14b	Los estudiantes percibieron que los dos primeros términos son 1 y 2 y que cada uno de los siguientes se obtiene sumando el doble valor del término anterior más el doble valor del penúltimo término.
	14b	Los estudiantes B5, B13 y B15 percibieron que los términos de la sucesión y_n están definidos en función de los términos anteriores de ambas sucesiones. Estos tres alumnos aplicaron la regla $y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$, a partir del segundo término de la sucesión y_n, para calcular los valores de las filas 11, 12 y 13.
		Usar la regla de formación para:
	14a	Calcular los valores de la sucesión x_n en las filas 11, 12 y 13.
	14b	Calcular los valores de la sucesión y_n, en las filas 11, 12 y 13.
		Intentar explicar la regla de formación de los términos de la sucesión x_n, mediante el lenguaje oral.
	14a y 14b	Estudiante A8: *"Se van a multiplicar por dos el último y el penúltimo, acá por ejemplo va a ser 4(2)=8 más 2(1) es 10, luego 10(2)=20 más 4(2)=8, 20+8=28… Se suman el doble del último más el doble del penúltimo".*
		Plasmar la regla de formación de la sucesión x_n y de la sucesión y_n, mediante el lenguaje escrito.
	14a y 14b	Estudiante A6: "*El patrón es multiplicar el número* $\times$ 2 *más el doble del número que se encuentra arriba*".
	14a y 14b	Estudiante B2*: "Hay que encontrar el doble de cada cantidad y sumarlos".*
	14a	Estudiante B5: *"Se le saca el doble a los números de* x_n *y se suman".*
	14b	Estudiante B5: "*Para* y_n *sólo se suman los dos resultados de arriba de* x_n + y_n *y sale el de abajo*".
	14a y 14b	Estudiante B6: "Multiplico el último $\times$ 2 y el penúltimo igual".
	14a y 14b	Estudiante B7: "Se multiplican $\times$ 2, luego la cifra de arriba se $\times$ 2, luego los 2 resultados se suman y ese es el resultado".
	14a y 14b	Estudiante B10: "Sume el doble del número más el doble del número anterior".
	14a	Estudiante B13: "*Para sacar* x_n *era el doble del número de arriba y el doble de abajo y se suman*".
	14b	Estudiante B13: *"Es una suma entre* x_n *y* y_n*".*
	14a	Los estudiantes A6 y B13 también plasmaron la regla de formación mediante expresiones aritméticas.
	14a y 14b	Los estudiantes A8 y B14 también plasmaron la regla de formación mediante expresiones aritméticas. Cabe destacar que el estudiante B14 aplicó la regla "sumar el doble valor del término anterior más el doble valor del penúltimo término".
	14a y 14b	Verificar que la regla de formación funciona para los primeros términos de la sucesión x_n, y para los primeros términos de la sucesión y_n, a través de cálculos aritméticos.

Finalmente, en la tabla 37, se muestra el potencial que tienen los estudiantes para reconocer el patrón implícito en el contexto del problema de la pregunta 15.

Tabla 37. Potencial identificado en las respuestas de las pregunta 15.

Etapa	Los estudiantes mostraron ser capaces de
	Percibir características invariantes en las columnas 'luces verdes' y 'luces amarillas'.
	Percibir las peculiaridades básicas del patrón que rige a los valores de la columna 'luces verdes' y 'luces amarillas'.
	Los estudiantes percibieron que los valores en las columnas 'luces verdes', 'luces amarillas' y 'luces azules' aumentan de acuerdo con el orden de los números naturales.
	Usar sus percepciones para completar la información de la tabla y para calcular la cantidad de luces verdes, amarillas y azules para formar hasta 10 pentágonos.
	Intentar explicar las peculiaridades básicas del patrón que rige a los valores de la columna 'luces verdes' y 'luces amarillas', mediante el lenguaje oral.
	Estudiante B8: *"Por ejemplo… a éste, aumentarle dos (señala el número 1 de la columna luces verdes), al 3 (señala el número 3 de la columna luces verdes) pues ya le aumentaría el tres, al 6 cuatro, al 10 cinco, al 15 seis, al 21 siete y así sucesivamente, lo mismo para las luces amarillas y para las luces azules pues… era un poco diferente, pero no recuerdo bien cómo lo hice"*.
	Plasmar sus percepciones, mediante el lenguaje escrito.
	Estudiante B2: *"Hay que sumarle a la cantidad conforme va la numeración"*. Estudiante B13: *"Va aumentando de 3, 4, 5, etc."*. Los estudiantes A4, A7, B2, B3, B5 y B9 plasmaron, la suma de n, en las columnas 'luces verdes', 'luces amarillas' y 'luces azules' mediante símbolos numéricos y expresiones aritméticas.
	Verificar que la regla de formación funciona para generar los datos de las primeras 4 filas de la tabla.

Las tablas anteriores, muestran claramente el éxito que tuvieron los estudiantes en las etapas percibir, describir, registrar y validar la formulación, no obstante, cabe destacar que los logros de los jóvenes de bachillerato disminuyeron significativamente en las etapas, describir, registrar y validar. En esta última etapa, notamos que algunos estudiantes que plasmaron sus percepciones en un lenguaje visible también fueron capaces de comprobar la utilidad de la regla o ley de formación sobre unos cuantos términos de las sucesiones.

En las sucesiones numéricas de las preguntas 1a, 3a y 3b se identificó que casi el total de los estudiantes tuvo éxito para percibir la ley de formación que las rige, ver tabla 24. Por ejemplo, en la sucesión 1a, los jóvenes percibieron que los números -1 y 1 se alternan, y aunque los estudiantes B5 y B13 fueron los únicos en intentar plasmar la ley de formación mediante el lenguaje escrito, fue claro que el resto de los estudiantes también comprendió la ley, puesto que fueron capaces de escribir unos cuantos términos adicionales.

En la sucesión de la pregunta 6, se identificó que 22 estudiantes pudieron continuar la lista de enunciados. Deseamos destacar que 8 estudiantes acudieron a símbolos numéricos y enfocaron su atención sobre las expresiones aritméticas que representan a los seis primeros enunciados, posteriormente regresaron a lista de verbalizaciones y sobre ellas verificaron las características del patrón que percibieron en los números.

En el caso de la pregunta 7, se observó que 8 estudiantes recurrieron a símbolos numéricos para representar la cantidad de cuadrados en cada una de las figuras del cuestionario, ver tabla 31. Este grupo de jóvenes trabajó sobre la sucesión numérica y calcularon el siguiente término a partir del anterior. Por otro lado, se identificó que con base en la estructura de las figuras, cinco estudiantes construyeron la siguiente figura partiendo de la anterior.

En la sucesión numérica de la pregunta 8, se identificó que casi el total de los estudiantes logró calcular los términos de las posiciones séptima, octava y novena. En esta sucesión notamos que 14 estudiantes percibieron una relación recurrente entre los términos de la sucesión, y 10 calcularon los tres términos intermedios partiendo de la posición que ocupan en la sucesión, ver tabla 28. Este último grupo, tuvo éxito cuando la tarea consistió en calcular el número que aparece en la posición 250, pero los 14 estudiantes que generaron los primeros términos desde el valor anterior, tuvieron dificultades para calcular un término con índice mayor. Cabe destacar, que el estudiante A8, percibió que a partir del segundo término de la sucesión cada uno de los siguientes se obtiene sumando cuatro unidades al anterior y con esta regla logró generar los primeros términos, posteriormente para contestar la pregunta 8b tiende a buscar la relación entre los términos de la sucesión y su posición, y además fue uno de los estudiantes que expresó el patrón de la sucesión utilizando una simbología matemática.

En las sucesiones x_n y y_n de las preguntas 13 y 14, se observó que la mayoría de los estudiantes construyó el siguiente término, con base en, operaciones aritméticas sobre los dos términos anteriores. Por otro lado, menos de la cuarta parte de los jóvenes percibió que los términos de la sucesión y_n están definidos en función de los términos anteriores de ambas sucesiones (x_n y y_n), ver tablas 35 y 36.

Finalmente, deseamos destacar los resultados obtenidos en las sesiones de entrevistas de algunos estudiantes que tuvieron dificultades para responder ciertas preguntas o que no propusieron una respuesta durante la aplicación del cuestionario. La tabla 38, presenta los resultados de 6 estudiantes a quienes les sugerimos que nos explicaran o que contestaran algunas de las situaciones matemáticas en las que detectamos que no tuvieron éxito. A continuación mostramos algunos avances de los jóvenes de bachillerato.

Tabla 38. Resultados durante la sesión de entrevista.

Pregunta	Estudiante	Resultados de la aplicación del cuestionario.	Resultados durante la sesión de entrevista
1d	A1	No contestó la pregunta.	El estudiante no respondió la pregunta.
2	B7	Tuvo dificultades para contestar correctamente.	El estudiante no logró explicar su respuesta.
3b	A3	No contestó la pregunta.	El estudiante logró continuar la lista de términos de la sucesión 3b.
4a	B17	Tuvo dificultades para contestar correctamente.	El estudiante no logró explicar su respuesta.
4b	A1	No contestó la pregunta.	El estudiante logró continuar la lista de términos de la sucesión 4b.
4b	A8	No contestó la pregunta.	El estudiante logró continuar la lista de términos de la sucesión 4b.
6	A5	Tuvo dificultades para contestar correctamente.	El estudiante logró continuar la lista de enunciados.
10a	A1	Tuvo dificultades para contestar correctamente.	El estudiante logró determinar que en la sexta fila hay 243 casillas. En su entrevista nos comentó: *¡Eh! Ahí lo respondí (señala su respuesta que es 729 casillas) porque eran las potencias de tres [...] me di cuenta que el número de casillas era una potencia de tres.* Lo cual, revela que desde la aplicación del cuestionario logró percibir las peculiaridades básicas del patrón.
11b	A1	No contestó la pregunta.	El estudiante logró percibir el patrón que rige la lista de igualdades, pero tuvo dificultades para calcular que la expresión $1+3+5+\cdots+99+101$ consiste de 51 impares consecutivos.

11b	A5	No contestó la pregunta.	El estudiante no logró determinar la suma de los primeros 51 impares.
13a	A1	No contestó la pregunta.	El estudiante logró proponer los valores de la sucesión x_n para las filas 11, 12 y 13.
13b	A1	No contestó la pregunta	El estudiante logró proponer los valores de la sucesión y_n para las filas 11, 12 y 13.
14a	A3	No contestó la pregunta	El estudiante logró proponer los valores de la sucesión x_n para las filas 11, 12 y 13.
14b	A3	No contestó la pregunta	El estudiante logró proponer los valores de la sucesión y_n para las filas 11, 12 y 13.

Las filas de la tabla 38 marcadas con el color verde, muestran que los estudiantes A1, A3 y A8 tuvieron potencial para percibir la regla de formación en algunas de las sucesiones de las preguntas 3a, 3b, 4b, 10a, 13a y 13b. Además, se identificó que estos estudiantes aplicaron las reglas de formación para calcular términos particulares de las sucesiones numéricas antes mencionadas. Por otro lado, el estudiante A5, mostró ser capaz de percibir el patrón que rige a la sucesión de enunciados después de leer repetidamente las primeras seis verbalizaciones. Este alumno, detectó que su primera respuesta no plasma las características del patrón que percibió durante su entrevista, y por ende, decidió escribir una nueva respuesta que sí cumple la ley de formación de la sucesión.

Con respecto a nuestra segunda pregunta de investigación, nos enfocamos en los alumnos que plasmaron haber percibido las peculiaridades básicas de los patrones desde la aplicación del cuestionario y en los estudiantes que tuvieron éxito en sus respuestas durante las sesiones de entrevistas. En la tabla 39, mostramos una lista de las explicaciones de algunos estudiantes, acerca de los patrones que detectaron y las dificultades que tuvieron para describirlos, ver tabla 39.

Tabla 39. Dificultades de los estudiantes para describir un patrón después de haberlo reconocido.

Pregunta	Estudiante	Explicación	Dificultad
3a	A3	*"¡Eh! Que va, como en la numeración. Así va uno… pues va un cero, luego 1, 2 (el estudiante señala los términos 1, 0, 0), luego 1, 3 (el estudiante señala los términos 1, 0, 0, 0)... Así en la numeración, va de, pues así."*	El estudiante no logró explicar explícitamente que se aumenta un cero a la sucesión cada vez que se alternan 1s y 0s, utilizando el lenguaje natural.
3b	A3	*"Va creciendo conforme a la numeración, van creciendo los números, los ceros y los unos".*	El estudiante no logró explicar claramente que 1s y 0s van aumentando en uno más cada vez que se alternan, mediante el lenguaje natural.
4a	A1	*"Bueno aquí según yo para encontrar el tercero (señala el número 2 en la sucesión) tenemos que tener los dos datos anteriores por ejemplo 1+1 daba el siguiente ¡dos!, 2+1 daba el siguiente ¡tres!, 3+2 daba el siguiente, 5+3 daba el siguiente ¡ocho!, 8+5 daba el siguiente ¡trece!, 13+8 da el siguiente ¡veintiuno! Y entonces sería 21+13 daría el siguiente y así hasta llegar al 34, 55 y 89".*	El estudiante no logró explicar claramente que a partir del tercer término cada uno de los siguientes se obtiene al sumar los dos términos anteriores.
4b	A1	*"Bueno según yo de los tres que veo sería 3(2)+1 porque 3(2)=6 más uno ¡siete!, 7(2)=14 más tres 17, entonces según yo siguiendo esa lógica sería 17(2)+7 quedaría 41, 41(2)+17 quedaría 99 y 99(2)+41 y daría el siguiente número [...] ¡Ya! Según yo los tres términos que siguen son 239, 577 y 1393".*	El estudiante no logró explicar claramente que a partir del tercer término cada uno de los siguientes se obtiene al sumar el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término.
4b	A8	Primera formulación: *"Dos veces el anterior, más el dos veces antes".* Segunda formulación: *"Se va a multiplicar por dos el número anterior y se le va a sumar el número anterior del anterior".*	En la primera formulación, el estudiante no logró explicar claramente que la regla de formación consiste en sumar el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término. No obstante, mostró un avance notable en su segunda formulación.
8b	B8	"*Me di cuenta que sólo son los múltiplos de cuatro, pero… por ejemplo, 4 en el primero sería 4+3, en el segundo sería el doble de cuatro más tres ¡serían once!, y así el triple de 4… y ya lo único que hice fue multiplicar 250 por 4 y le sume 3*".	El estudiante no logró expresar la regla de formación utilizando una simbología matemática, pero sí comprendió que la expresión 4n+3 representa el término que ocupa la posición enésima.

10a	A8	*"Hice todas las operaciones, fui, eh 1(3)=3 que es de la segunda fila, luego para sacar los de la fila siguiente por tres otra vez y ya dan 9, luego esos 9 por tres otra vez y así fui multiplicando por tres hasta que fue 243".*	El estudiante no logró explicar claramente que para obtener el número de casillas de la siguiente fila, la regla consiste en multiplicar el número de casillas de la fila anterior por 3.
11b	A8	*"Primero se tiene que sacar el número de sumandos que tiene y eso se puede sacar sumándole uno al último dígito (impar) y dividiéndolo entre dos y ya el resultado de la derecha va a ser elevando el número de dígitos (impares) al cuadrado".*	El estudiante no logró explicar claramente que el valor total de la suma corresponde con el cuadrado del número de sumandos impares consecutivos que la generan.
13a	A1	*Sí, creo que sí, según yo para x_n sería la suma de este (señala el número 7 de la sucesión x_n) con este (señala el número 3 de la sucesión x_n) y aparte el número original (vuelve a señalar el número 7 de la sucesión x_n) para dar el siguiente número (señala el número 17 de la sucesión x_n). ¡Hm! 3363 y sí es el siguiente. ¡Hm! 3363 y sí es el siguiente. Entonces según yo para calcular toda la fila de x_n sería…*	El estudiante no logró articular palabras para comunicar, que a partir del tercer término cada uno de los siguientes se obtiene al sumar el doble valor del término anterior más el valor del penúltimo término.
15b	B8	*"Por ejemplo… a éste, aumentarle dos (señala el número 1 de la columna luces verdes), al 3 (señala el número 3 de la columna luces verdes) pues ya le aumentaría el tres, al 6 cuatro, al 10 cinco, al 15 seis, al 21 siete y así sucesivamente, lo mismo para las luces amarillas".*	El estudiante no logró expresar claramente que los valores en las columnas luces verdes y luces amarillas se determinan mediante la suma de n.

Las descripciones que realizaron los estudiantes, nos permitieron identificar que la mayoría no logró explicar de forma clara el patrón mediante el lenguaje natural, el estudiante A1 no fue capaz de articular palabras para comunicar la regla de formación de la sucesión numérica de la pregunta 13a y en el caso de la sucesión numérica de la pregunta 8a notamos que el estudiante B8 no pudo expresar la regla de formación utilizando una simbología matemática.

En suma, la lista de afirmaciones de esta sección, muestra que la mayoría de los estudiantes tuvo éxito para percibir las peculiaridades básicas de los patrones y, aunque, no lograron comunicarlos de forma explícita, identificamos que sí fueron capaces de realizar un esfuerzo para describir sus percepciones mediante el lenguaje oral y mediante el lenguaje escrito.

En razón de lo anterior, y sin intentar generalizar, mencionamos que los estudiantes partícipes de este estudio mostraron tener potencial para reconocer las peculiaridades básicas de los patrones que rigen a las sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos del cuestionario.

5.2 Algunas reflexiones finales

Como ya hemos comentado en la primera sección de este capítulo, el análisis de resultados nos permitió generar una colección de ideas que plasman el potencial que tuvieron los jóvenes de nivel medio superior para la tarea de reconocimiento de patrones, no obstante, queremos formular algunos comentarios acerca del trabajo que los estudiantes realizaron durante el desarrollo de la investigación.

En primer lugar, queremos destacar que los estudiantes partícipes en este estudio, mostraron disponibilidad a responder cada pregunta del cuestionario, de hecho, algunos jóvenes nos solicitaron preguntas del mismo tipo para realizarlas en su casa. Los estudiantes nos comentaron que este tipo de preguntas les agradan, debido a que, son diferentes a las que realizan en el aula escolar.

En segundo lugar, mencionamos que durante las entrevistas, los estudiantes mostraron que mediante el apoyo de tiempo son capaces de retomar la pregunta y mejorar sus esfuerzos incompletos, como es el caso de los estudiantes que tuvieron dificultades para contestar correctamente algunas preguntas del cuestionario y los que no propusieron una respuesta durante su aplicación. En las entrevistas de estos jóvenes, se observó que la mayoría logró percibir el patrón al intentar explicar sus respuestas y depués de realizar un segundo intento por contestar las preguntas. Por otro lado, las conversaciones de los estudiantes que contestaron correctamente las preguntas del cuestionario, nos permitieron confirmar su capacidad para percibir los patrones de las sucesiones y en el caso del estudiante A8, se observó que en las sucesiones 4b y 13a logró mejorar su formulación acerca del patrón que las rige.

En tercer lugar, el trabajo de los estudiantes reveló que en conjunto fueron capaces de proponer diferentes formulaciones para un mismo patrón, pero de manera individual notamos que plasmaron una única formulación que describe las peculiaridades básicas del patrón.

En cuarto lugar, se observó que en las sucesiones de las preguntas 7 y 8 poco más de la cuarta parte de los estudiantes logró continuar la lista de los primeros términos o generar términos con un índice mayor, a partir de la posición que ocupan en la sucesión, y en el caso de la pregunta 10 notamos que sólo dos estudiantes fueron capaces de calcular el número de casillas y el número central a partir del número de su fila. Deseamos destacar que en estas tres preguntas sólo 5 jóvenes intentaron proponer una simbología matemática para plasmar en un lenguaje visible la representación general del enésimo elemento de la sucesión, en el caso de la pregunta siete fue el alumno A8, en el caso de la pregunta ocho fueron los estudiantes A4 y A8, y en el caso de la pregunta diez fueron los estudiantes A6 y B15.

También fue notorio que en las sucesiones de las preguntas 7, 8a, 10a, 10b, 13 y 14 la mayoría de los estudiantes generó un término con índice pequeño a partir del anterior y en el caso de las preguntas 1c, 5, 11a y 12 continuaron la lista de objetos matemáticos, haciendo uso de las características comunes o invariantes que percibieron entre los términos de las sucesiones. Cabe mencionar, que en el caso de la sucesión numérica de la pregunta 8, los estudiantes no tuvieron éxito cuando la tarea consistió en calcular un término con índice mayor, en esta sucesión se observó que la mayoría de los alumnos calculó el término que ocupa la séptima, la octava o la novena posición con base en el término anterior, pero su regla no les fue tan útil cuando intentaron proponer el término que ocupa la posición 250.

En general, el trabajo de los jóvenes de bachillerato reveló el potencial que tienen para percibir las peculiaridades básicas de los patrones, en la mayoría de las sucesiones que les presentamos. Sin embargo, con base en algunas de sus formulaciones (acerca del patrón) que expresaron mediante el lenguaje oral o escrito, se identificó que no lograron usar las peculiaridades para expresar la generalidad.

En razón de lo anterior, se infiere que el potencial de los estudiantes se podría utilizar para guiarlos hacia un razonamiento en general de las peculiaridades básicas que han demostrado ser capaces de percibir y también consideramos que su capacidad podría explotarse para guiarlos a expresar la generalidad.

Referencias

Alfaro, J., Bosch, C., Gómez, C., Gónzalez, M., Illanes, A., Pérez, S. M., Rueda, R., y Villalba, R. (1990). *Problemas para la 4ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. México, D.F: Sociedad Matemática Mexicana [SMM].

Bosch, C., Illanes, A., y Ramírez, A. I. (1987). *Problemas para la 1ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. México, D.F: SMM.

Bressan, A., y Bogisic, B. (29 de septiembre de 2015). *Las regularidades: fuente de aprendizajes matemáticos.* Documento curricular del Consejo Provincial de Educación de Río Negro 1996. Recuperado de: http://www.gpdmatematica.org.ar/

Bressan, A., y Gallego, M. (2010*). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones* (GPDM Informe 168). Recuperado el 29 de septiembre de 2015 del sitio de internet del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/corre_maestro__matematizacion_progresiva.pdf

Examen Ceneval. (10 de febrero de 2006). Guías Ceneval. Recuperado el 29 de septiembre de 2015 de: http://www.ceneval.net/

Castro, J., Alonzo, J., Frías, M., y Arizmendi, O. (2005). *Problemas para la 19ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. México, DF: SMM.

Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, Exámenes Nacionales de Ingreso. (2013). *Guía del Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior*. Recuperado el 29 de septiembre de 2015 de: http://www.ceneval.net/guias-ceneval/GuiadelEXANI-II2014.pdf

Chalé, C. S. (2013). *El desarrollo del pensamiento algebraico, la visualización en el caso de los patrones* (Tesis de maestría). CINVESTAV, México D.F.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns.* New York: Scientific American Library.

Durán, P. R. (1999). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria* (Tesis de maestría). CINVESTAV, México D.F.

Guerrero, L., and Rivera, A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions, *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting, PMENA*, Athens, Georgia, 2002, pp. 259-269

Mason, J. (1999). La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar la generalidad: Las secuencias de Tunja (Trad. P. I. Perry). *Revista EMA, 4*(3), 232-247. Recuperado el 29 de septiembre de 2015 de: http://core.ac.uk/download/pdf/12341574.pdf

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gower, N. (1985). *Routes to/Roots of Algebra*. Great Britain: The Open University.

National Council of Teacher of Mathematics [NCTM] (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (Trad. M. Fernández). En Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Ed.). Armilla Granada.

Pérez, S. M. (Ed.). (1997). *Problemas para la 11ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. México, D.F: SMM.

Psicotecnicostest.(7 de enero de 2007). Test Psicotécnicos. Recuperado el 29 de septiembre de 2015 de: http://www.psicotecnicostest.com/testpruebaspsicometricas.asp

Rivera, A. (1993). *Lecturas sobre sucesiones y series infinitas*. México, D.F: CINVESTAV-IPN

Secretaría de Educación Pública. (2012). *ENLACE 2012 Secundaria primer grado. Características generales e información de los reactivos aplicados para su uso pedagógico.* México: SEP. Recuperado el 29 de septiembre de 2015 de: http://www.dgep.sep.gob.mx:8080/apoyos/content.php?apli=2012

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Secundaria. Matemáticas.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2008). *Programa de Estudios 6° Semestre 2008-2009 Razonamiento matemático*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2010). *Serie: Programas de Estudio. Dirección General de Bachillerato.* México: SEP. Recuperado el 29 de septiembre de 2015 de: http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/1er_SEMESTRE/Matematicas_I_biblio2014.pdf

Apéndice A.

Tabla A1. Respuestas de los alumnos en la pregunta 1

Alumno	Pregunta 1							
	a	b	c	d	a	b	c	d
A1					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	
A2					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
A3					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$		$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	
A4					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
A5					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{31}, \frac{31}{36}, \frac{36}{64}, \ldots$	$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
A6					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$\frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{10}{2}, \frac{11}{2}, \frac{12}{2}, \ldots$	
A7					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
A8					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B1					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{48}, \frac{48}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B2					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{}, -, \frac{}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B3					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B4					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$	
B5					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B6					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{34}, \frac{36}{47}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B7					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$		$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B8					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B9					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B10					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$		$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{240}, \frac{1}{20160}, \ldots$
B11					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B12					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	
B13					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$		$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	
B14					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$		$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	
B15					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$
B16					$\underline{1}, \underline{-1}, \underline{1}, \ldots$	$\frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \ldots$	$4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$	
B17						$\frac{25}{}, -, \frac{}{64}, \ldots$	$4\frac{9}{2}, 5\frac{11}{2}, 6\frac{13}{2}, \ldots$	$\frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040}, \ldots$

Tabla A2. Respuestas de los alumnos en la pregunta 2

<table>
<tr><th>Alumno</th><th colspan="2">Pregunta 2</th></tr>
<tr><td>A1</td><td></td><td rowspan="14"><table><tr><td>Grupo</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>$(21, 23, 25, 27, 29)$</td></tr><tr><td>6</td><td>$(31, 33, 35, 37, 39, 41)$</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>10</td><td>$(91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109)$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>A2</td><td></td></tr>
<tr><td>A3</td><td></td></tr>
<tr><td>A4</td><td></td></tr>
<tr><td>A5</td><td></td></tr>
<tr><td>A6</td><td></td></tr>
<tr><td>A7</td><td></td></tr>
<tr><td>A8</td><td></td></tr>
<tr><td>B1</td><td></td></tr>
<tr><td>B2</td><td></td></tr>
<tr><td>B3</td><td></td></tr>
<tr><td>B4</td><td></td></tr>
<tr><td>B5</td><td></td></tr>
<tr><td>B6</td><td></td></tr>
<tr><td>B7</td><td></td><td><table><tr><td>Grupo</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>$(23, 25, 27, 29, 30)$</td></tr><tr><td>6</td><td>$(33, 35, 37, 41, 43, 45)$</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>B8</td><td></td><td rowspan="5"><table><tr><td>Grupo</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>$(21, 23, 25, 27, 29)$</td></tr><tr><td>6</td><td>$(31, 33, 35, 37, 39, 41)$</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>10</td><td>$(91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109)$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>B9</td><td></td></tr>
<tr><td>B10</td><td></td></tr>
<tr><td>B11</td><td></td></tr>
<tr><td>B12</td><td></td></tr>
<tr><td>B13</td><td></td><td><table><tr><td>Grupo</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>$(21, 23, 25, 27, 29)$</td></tr><tr><td>6</td><td>$(30, 31, 32, 33, 34, 35)$</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>10</td><td>$(51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59)$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>B14</td><td></td><td rowspan="4"><table><tr><td>Grupo</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>$(21, 23, 25, 27, 29)$</td></tr><tr><td>6</td><td>$(31, 33, 35, 37, 39, 41)$</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>10</td><td>$(91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109)$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>B15</td><td></td></tr>
<tr><td>B16</td><td></td></tr>
<tr><td>B17</td><td></td></tr>
</table>

Tabla A3. Respuestas de los alumnos en la pregunta 3

Alumno	Pregunta 3			
	Incisos			
	a	b	a	b
A1			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
A2			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
A3			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	
A4			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...
A5			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...
A6			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
A7			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
A8			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B1			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B2			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B3			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B4			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B5			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...
B6			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B7			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...
B8			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B9			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...
B10			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B11			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B12			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B13			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B14			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B15			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B16			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...
B17			1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...	1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...

Tabla A4. Respuestas de los alumnos en la pregunta 4

Alumno	Pregunta 4			
	Incisos			
	a	b	a	b
A1			$34, 55, 89$ ...	
A2			$30, 40, 51,$ ...	
A3			$29, 38, 47,$ ...	
A4			$33, 50, 73,$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
A5			$34, 55, 89$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
A6			$34, 55, 89$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
A7			$34, 55, 89$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
A8			$34, 55, 89$ ...	
B1				
B2			$34, 55, 89$ ...	
B3			$34, 55, 89$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
B4			$34, 55, 89$ ...	
B5			$34, 55, 89$ ...	
B6			$34, 55, 89$ ...	$239, 277, 554,$ ...
B7			$31, 43, 58,$ ...	
B8			$34, 55, 89$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
B9			$34, 55, 89$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
B10			$34, 55, 89$ ...	
B11			$34, 55, 89$ ...	$239, 717, 2151,$ ...
B12			$34, 75, 109,$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
B13			$34, 55, 89$ ...	$239, 717, 2151,$ ...
B14			$34, 55, 89$ ...	$239, 577, 1393,$ ...
B15			$34, 55, 89$ ...	
B16			$34, 55, 89$ ...	
B17			$37, 69, 133,$ ...	

Tabla A5. Respuestas de los alumnos en la pregunta 5

Alumno	Pregunta 5	
A1		20, 26, 27, 34, 35 ...
A2		20, 26, 27, 34, 35 ...
A3		20, 26, 27, 34, 35 ...
A4		20, 26, 27, 34, 35 ...
A5		20, 26, 27, 34, 35 ...
A6		20, 26, 27, 34, 35 ...
A7		20, 26, 27, 34, 35 ...
A8		20, 26, 27, 34, 35 ...
B1		20, 26, 27, 34, 35 ...
B2		20, 26, 27, 34, 35 ...
B3		20, 26, 27, 34, 35 ...
B4		20, 26, 27, 34, 35 ...
B5		20, 26, 27, 34, 35 ...
B6		20, 26, 27, 34, 35 ...
B7		20, 26, 28, ...
B8		20, 26, 27, 34, 35 ...
B9		20, 26, 27, 34, 35 ...
B10		20, 26, 27, 34, 35 ...
B11		20, 26, 27, 34, 35 ...
B12		20, 26, 27, 34, 35 ...
B13		20, 26, 27, 34, 35 ...
B14		20, 28, 29, ...
B15		20, 26, 27, 34, 35 ...
B16		20, 26, 27, 34, 35 ...
B17		20, 26, 27, 34, 35 ...

Tabla A6. Respuestas de los alumnos en la pregunta 6

Alumno	Pregunta 6	
A1		g) Trece más uno, h) Catorce más cinco, i) Diecinueve más uno
A2		g) Diez más uno, h) Once más cinco, i) Doce más uno
A3		g) Trece más uno, h) Catorce más cinco, i) Diecinueve más uno
A4		
A5		g) Diez más cuatro, h) Diez más nueve, i) Diecinueve más uno
A6		g) Trece más uno, h) Catorce más cinco, i) Diecinueve más uno
A7		
A8		
B1		
B2		
B3		
B4		
B5		
B6		g) Diez más una, h) Once más cinco, i) Dieciséis más uno
B7		g) Trece más uno, h) Catorce más cinco, i) Diecinueve más uno
B8		
B9		
B10		
B11		
B12		
B13		
B14		
B15		
B16		
B17		

Tabla A7. Respuestas de los alumnos en la pregunta 7

<table>
<tr><th>Alumno</th><th colspan="3">Pregunta 7</th></tr>
<tr><td>A1</td><td></td><td>Figura de la posición 8
$4(8) = 32$
$32 + 1 = 33$</td><td>Figura de la posición 15
$15 \times 4 = 60$
$60 + 1 = 61$</td></tr>
<tr><td>A2</td><td></td><td colspan="2">Posición 8, 33 cuadritos;   15, 61 cuadritos.</td></tr>
<tr><td>A3</td><td></td><td colspan="2">Dibujó 33 cuadrados en la posición 8 y 61 cuadrados en la posición 15.</td></tr>
<tr><td>A4</td><td></td><td colspan="2"><table><tr><td></td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td></td><td>15</td><td>…</td></tr><tr><td></td><td>21</td><td>25</td><td>29</td><td>33</td><td>37</td><td>41</td><td></td><td>61</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>A5</td><td></td><td colspan="2">Figura 8-33, Figura 15-61.</td></tr>
<tr><td>A6</td><td></td><td>Figura 8
$8 \times 3 = 24$
$24 + 9 = 33$</td><td>Figura 15
$15 \times 3 = 45$
$45 + 16 = 61$</td></tr>
<tr><td>A7</td><td></td><td>Figura de la posición 8
$4 \times 8 = 32$
$32 + 1 = 33$</td><td>Figura de la posición 15
$15 \times 4 = 60$
$60 + 1 = 61$</td></tr>
<tr><td>A8</td><td></td><td colspan="2">Se debe multiplicar 4 por el número de la posición y luego se le suma 1, por el cuadrito restante, por lo tanto la fórmula es $4n + 1$.

Posición 8, 33; Posición 15, 61.</td></tr>
<tr><td>B1</td><td></td><td colspan="2"><table><tr><td>5
↓</td><td>6
↓</td><td>7
↓</td><td>8
↓</td><td>9
↓</td><td>10
↓</td><td>…</td><td>15
↓</td><td>…</td></tr><tr><td>21</td><td>25</td><td>29</td><td>33</td><td>37</td><td>41</td><td></td><td>61</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>B2</td><td></td><td colspan="2">En la posición 8 habrá 64 cuadrados y en la posición 15 habrá 225 cuadrados.</td></tr>
<tr><td>B3</td><td></td><td colspan="2">1-5   5-21   9-37   13-53
2-9   6-25   10-41   14-57
3-13   7-29   11-45   15-61
4-17   8-33   12-49

Posición $8 = 33$, Posición $15 = 61$</td></tr>
<tr><td>B4</td><td></td><td colspan="2">$8 \times 4 = 32$, $32 + 1 = 33$ cuadrados hay en la posición 8
$15 \times 4 = 60$, $60 + 1 = 61$ cuadrados hay en la posición 15</td></tr>
<tr><td>B5</td><td></td><td colspan="2">Dibujó cada figura en las primeras 15 posiciones, realizó el conteo de los cuadrados en cada figura y les asignó su valor numérico. Finalmente describió: “Sólo se le suman 4 a los cuadrados y así llegas al resultado”.</td></tr>
<tr><td>B6</td><td></td><td colspan="2">Figura 8:33, Figura 15:61</td></tr>
<tr><td>B7</td><td></td><td colspan="2">En la posición de 8 seria 8 filas $\times$ 4 casillas y 1 sólo queda un cuadrado. Da un total de casillas 33.
En la posición de 15 sería 15 filas $\times$ 4 casillas y 1 sólo casilla. Da un</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>total casillas 61.</td></tr>
<tr><td>B8</td><td></td><td>Aumentan 4 cuadrados por cada grupo. 8-33, 15-61.</td></tr>
<tr><td>B9</td><td></td><td>Dibujó las figuras de las posiciones 1, 2, 3, 4 y 5. Después escribe: Respuesta Posición $8 = 33$ cuadritos, Posición $15 = 61$ cuadritos.</td></tr>
<tr><td>B10</td><td></td><td>En cada secuencia se suma 4 pero está acomodado de manera que pueda multiplicar la altura $\times$ la base $h \times b$ y le agrego 1... Posición $8 = \ 4 \times 8 + 1 = 33$, Posición $15 = \ 4 \times 15 + 1 = 61$.</td></tr>
<tr><td>B11</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B12</td><td></td><td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>…</td><td>8</td><td>…</td><td>15</td><td>…</td></tr><tr><td>$4 \times 1 + 1$</td><td>$4 \times 2 + 1$</td><td></td><td>$4 \times 8 + 1$</td><td></td><td>$4 \times 15 + 1$</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>B13</td><td></td><td>Posición $8 = 33$, Posición $15 = 61$
Al ocho lo multiplicas por 4 y le sumas 1 y al quince $\times 4 + 1$</td></tr>
<tr><td>B14</td><td></td><td>Dibujó los 33 cuadrados en la posición 8 y 61 cuadrados en la posición 15.</td></tr>
<tr><td>B15</td><td></td><td>Posición 8=33, Posición 15=61.
Multipliqué 5×8 y resté 7, 5×15 y resté 14.</td></tr>
<tr><td>B16</td><td></td><td><table><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>…</td><td>15</td><td>…</td></tr><tr><td>21</td><td>25</td><td>29</td><td>33</td><td>37</td><td>41</td><td></td><td>61</td><td></td></tr></table>Sólo se van aumentando 4 en cada número.</td></tr>
<tr><td>B17</td><td></td><td>1. 5+4=9
2. 9+4=13
3. 13+4=17
4. 17+4=21
5. 21+4=25
6. 25+4=29
7. 29+4=33
⋮
14. 57+4=61
Le sume así como me fue saliendo el número porque al inicio se ve que en cada momento se agregan 4 cuadrados.</td></tr>
</table>

Tabla A8. Respuestas de los alumnos en la pregunta 8

Alumno	Pregunta 8			
	a	b	a	b
A1			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	$250 \times 4 = 1000, 1000 + 3 = 1003$
A2			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	993
A3			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
A4			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	$7 = 4 + 3$ $11 = 4 + 7 = 4 + 4 + 3 = 4 \cdot 2 + 3$ $15 = 4 + 11 = 4 + 4 + 7 = 4 + 4 + 4 + 3$ $= 4 \cdot 3 + 3$ $19 = 4 + 15, \;\; f = 4 \cdot np + 3$ $= 4 \times 7 + 3 = 31$ $= 4 \cdot 250 + 3 = 1003$
A5			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
A6			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
A7			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	$7 = 4 + 3 \rightarrow$ $11 = 4 + 7 \rightarrow 8 + 3$ $15 = 4 + 11 \rightarrow 12 + 3$ $19 = 15 + 4 \rightarrow 16 + 3$ $23 = 19 + 4 \rightarrow 20 + 3$ $27 = 23 + 4 \rightarrow 24 + 3$ $31 = 27 + 4 \rightarrow 28 + 3$ $35 = 31 + 4 \rightarrow 32 + 3$ $39 = 35 + 4 \rightarrow 36 + 3$
A8			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	$4n + 3$, 1003
B1			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B2			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B3			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	1003
B4			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B5			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B6			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	1003 multipliqué $4 \times 250 + 3$
B7			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B8			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	$(250 \times 4) + 3 = 1000 + 3 = 1003$
B9			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	$250 \times 4 = 1000, 1000 + 3 = 1003$
B10			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B11				
B12			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	$250 \times 4 = 1000, 1000 + 3 = 1003$
B13			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B14			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B15			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	$250 \times 4 = 1000, 1000 + 3 = 1003$
B16			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	
B17			$31, 35, 39, 43,47, \ldots$	1003

Tabla A9. Respuestas de los alumnos en la pregunta 9

Alumno	Pregunta 9					
	Incisos					
	a	b	c	a	b	c
A1				151	215	$\frac{2013}{3} = 671$
A2				151	215	671
A3						
A4				151	215	671
A5				$50 \times 3 = 150$ $150 + 1 = 151$	$72 \times 3 = 216$ $216 - 1 = 215$	$\frac{2013}{3} = 671$
A6						
A7				$50 \times 3 = 150$ $150 + 1 = 151$ Hijo mayor del número 50	$72 \times 3 = 216$ $216 - 1 = 215$ Hijo menor del número 72	$\frac{2013}{3} = 671$
A8				$3(50) + 1 = 151$	$3(72) - 1 = 215$	$\frac{2013}{3} = 671$
B1				151	215	671
B2				151	215	$\frac{2013}{3} = 671$
B3				$50 \times 3 = 150$ $150 + 1 = 151$	$72 \times 3 = 216$ $216 - 1 = 215$	$\frac{2013}{3} = 671$
B4				151	215	
B5				151	215	671
B6				125001	373247	
B7				151	215	
B8				151	215	671
B9				$50 \times 3 = 150$ $150 + 1 = 151$	$72 \times 3 = 216$ $216 - 1 = 215$	$\frac{2013}{3} = 671$
B10				$50 \times 3 + 1 = 151$	$72 \times 3 - 1 = 215$	$\frac{2013}{3} = 671$
B11						
B12				151	215	671
B13				151	215	671
B14						
B15				151	215	671
B16				151	215	
B17				El hijo mayor del número 50 es 151	El hijo menor de 72 es 215	El papá del número 2013 es 671

Tabla A10. Respuestas de los alumnos en la pregunta 10

Alumno	Pregunta 10			
	a	b	a	b
A1			729	
A2			243 casillas.	43 046 721.
A3			Hay 10 casillas	El número 157
A4			Fila 6-243 casillas.	43 046 721.
A5			243 casillas.	43 046 721.
A6			243, 3^{n-1}funciona en ambos casos.	43 046 721, 3^{n-1}funciona en ambos casos.
A7			Sexta fila: $27 \times 3 = 81$	$17 \times 3 = 41$ son múltiplos de 3
A8			243 casillas.	43 046 721.
B1			243 casillas.	43 046 721.
B2			$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ casillas.	43 046 721.
B3			243	43 046 721.
B4				
B5			243	43 046 721.
B6			243 casillas.	143 489 907
B7				
B8			243	43 046 721.
B9			Tercera fila: 9 Cuarta fila: 27 Quinta fila: 81 Sexta fila: 243 El número de la fila se multiplica por 3. Este alumno utilizó la palabra 'fila' pero sus cálculos revelan que se refirió 'al número de casillas'.	43 046 721.
B10			9 | 9 | 9 | $= 27$ 27 | 27 | 27 | $= 81$ 81 | 81 | 81 | $= 243$ 243 casillas en la sexta fila.	129 140 163
B11			243	
B12				
B13			243 casillas.	143 489 907
B14			243	Lo mismo que en el inciso a sólo que multiplicando hasta el número 17 43 046 721.

B15			243 casillas.	43 046 721.
B16			243	43 046 721.
B17			En la sexta fila hay 243 casillas.	

Tabla A11. Respuestas de los alumnos en la pregunta 11

Alumno	Pregunta 11			
	a	b	a	b
A1				
A2				2 601
A3				
A4				2 601
A5				
A6				
A7				
A8				$(51)(51) = 2\,601$
B1			7) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$ 8) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$	
B2				2 601
B3				
B4				2 601
B5				2 601
B6				2 601
B7				
B8				2 601
B9				2 601
B10				2 601
B11				
B12				
B13				2 601
B14				2 601
B15				
B16				
B17				2 601

Tabla A12. Respuestas de los alumnos en la pregunta 12

Alumno		Pregunta 12
A1		4) $16+17+18+19+20=21+22+23+24$ 5) $25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$
A2		
A3		
A4		
A5		
A6		
A7		
A8		
B1		4) $16+17+18+19+20=21+22+23+24+25$ 5) $26+27+28+29+30+31=32+33+34+35+36$
B2		4) $16+17+18+19+20=21+22+23+24$ 5) $25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$
B3		
B4		
B5		
B6		
B7		4) $16+17+18+19+20=21+22+23+24+25$ 5) $26+27+28+29+30+31=32+33+34+35+36+37$
B8		4) $16+17+18+19+20=21+22+23+24$ 5) $25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$
B9		
B10		
B11		
B12		
B13		4) $16+17+18+19+20=21+22+23+24+25$ 5) $26+27+28+29+30+31=32+33+34+35+36+37$
B14		4) $16+17+18+19+20=21+22+23+24$ 5) $25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$
B15		
B16		
B17		

Tabla A13. Respuestas de los alumnos en la pregunta 13

<table>
<tr><th rowspan="2">Alumno</th><th colspan="8">Pregunta 13</th></tr>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr>
<tr><td>A1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A3</td><td></td><td></td><td></td><td></td>
<td><table><tr><th>n</th><th>x_n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>8119</td></tr><tr><td>12</td><td>19601</td></tr><tr><td>13</td><td>47321</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>n</th><th>y_n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>5741</td></tr><tr><td>12</td><td>13860</td></tr><tr><td>13</td><td>33461</td></tr></table></td>
<td></td><td></td></tr>
<tr><td>A4</td><td></td><td></td><td></td><td></td>
<td><table><tr><th>n</th><th>x_n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>8119</td></tr><tr><td>12</td><td>19601</td></tr><tr><td>13</td><td>47321</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>n</th><th>y_n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>5741</td></tr><tr><td>12</td><td>13860</td></tr><tr><td>13</td><td>33461</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>n</th><th>$\frac{x_n}{y_n}$</th></tr><tr><td>1</td><td>1.0</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>1.41421355</td></tr><tr><td>12</td><td>1.41421356</td></tr><tr><td>13</td><td>1.41421356</td></tr></table></td>
<td>Se divide la segunda y tercera columna para sacar la cuarta.</td></tr>
<tr><td>A5</td><td></td><td></td><td></td><td></td>
<td><table><tr><th>n</th><th>x_n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>8119</td></tr><tr><td>12</td><td>19601</td></tr><tr><td>13</td><td>47321</td></tr></table></td>
<td></td><td></td>
<td>Fue la división de la segunda columna con la tercera.</td></tr>
<tr><td>A6</td><td></td><td></td><td></td><td></td>
<td rowspan="9"><table><tr><th>n</th><th>x_n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>8119</td></tr><tr><td>12</td><td>19601</td></tr><tr><td>13</td><td>47321</td></tr></table></td>
<td rowspan="9"><table><tr><th>n</th><th>y_n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>5741</td></tr><tr><td>12</td><td>13860</td></tr><tr><td>13</td><td>33461</td></tr></table></td>
<td rowspan="9"><table><tr><th>n</th><th>$\frac{x_n}{y_n}$</th></tr><tr><td>1</td><td>1.0</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>1.41421355</td></tr><tr><td>12</td><td>1.41421356</td></tr><tr><td>13</td><td>1.41421356</td></tr></table></td>
<td></td></tr>
<tr><td>A7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Que no son constantes porque aumentan y disminuyen.</td></tr>
<tr><td>B1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Sólo es la división de x_n y y_n</td></tr>
<tr><td>B6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

B7							
B8							
B9							
B10							
B11							
B12							
B13							
B14							
B15							
B16							
B17							

n	x_n
1	1
⋮	⋮
11	8119
12	19601
13	47321

n	y_n
1	1
⋮	⋮
11	5741
12	13860
13	33461

n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1.0
⋮	⋮
11	1.41421355
12	1.41421356
13	1.41421356

Tabla A14. Respuestas de los alumnos en la pregunta 14

<table>
<tr><th rowspan="2">Alumno</th><th colspan="8">Pregunta 14</th></tr>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr>
<tr><td>A1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td><table><tr><td>n</td><td>x_n</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>31648</td></tr><tr><td>12</td><td>86464</td></tr><tr><td>13</td><td>236224</td></tr></table></td><td><table><tr><td>n</td><td>y_n</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>18272</td></tr><tr><td>12</td><td>49920</td></tr><tr><td>13</td><td>136384</td></tr></table></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"><table><tr><td>n</td><td>x_n</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>31648</td></tr><tr><td>12</td><td>86464</td></tr><tr><td>13</td><td>236224</td></tr></table></td><td rowspan="3"><table><tr><td>n</td><td>y_n</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>18272</td></tr><tr><td>12</td><td>49920</td></tr><tr><td>13</td><td>136384</td></tr></table></td><td rowspan="3"><table><tr><td>n</td><td>$\frac{x_n}{y_n}$</td></tr><tr><td>1</td><td>1.0</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>1.73204904</td></tr><tr><td>12</td><td>1.73205128</td></tr><tr><td>13</td><td>1.73205068</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>B1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5"><table><tr><td>n</td><td>x_n</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>31648</td></tr><tr><td>12</td><td>86464</td></tr><tr><td>13</td><td>236224</td></tr></table></td><td rowspan="5"><table><tr><td>n</td><td>y_n</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>18272</td></tr><tr><td>12</td><td>49920</td></tr><tr><td>13</td><td>136384</td></tr></table></td><td rowspan="5"><table><tr><td>n</td><td>$\frac{x_n}{y_n}$</td></tr><tr><td>1</td><td>1.0</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>1.73204904</td></tr><tr><td>12</td><td>1.73205128</td></tr><tr><td>13</td><td>1.73205068</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>B5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B9</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"><table><tr><td>n</td><td>x_n</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>31648</td></tr><tr><td>12</td><td>86464</td></tr><tr><td>13</td><td>236224</td></tr></table></td><td rowspan="2"><table><tr><td>n</td><td>y_n</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>18272</td></tr><tr><td>12</td><td>49920</td></tr><tr><td>13</td><td>136384</td></tr></table></td><td rowspan="2"><table><tr><td>n</td><td>$\frac{x_n}{y_n}$</td></tr><tr><td>1</td><td>1.0</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>11</td><td>1.73204904</td></tr><tr><td>12</td><td>1.73205128</td></tr><tr><td>13</td><td>1.73205068</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>B11</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B12</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B13</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

B14

n	x_n
1	1
⋮	⋮
11	31648
12	86464
13	236224

n	y_n
1	1
⋮	⋮
11	18272
12	49920
13	136384

n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	1.0
⋮	⋮
11	1.73204904
12	1.73205128
13	1.73205068

B15

n	x_n
1	1
⋮	⋮
11	31648
12	86464
13	236224

n	y_n
1	1
⋮	⋮
11	18272
12	49920
13	136384

B16

B17

Tabla A15. Respuestas de los alumnos en la pregunta 15

<table>
<tr><th rowspan="2">Alumno</th><th colspan="4">Pregunta 15</th></tr>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>a</th><th>b</th></tr>
<tr><td>A1</td><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>15</td><td>21</td><td>51</td></tr>
<tr><td>6</td><td>21</td><td>21</td><td>28</td><td>70</td></tr>
<tr><td>7</td><td>28</td><td>28</td><td>36</td><td>92</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>A2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A3</td><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>16</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>7</td><td>18</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>8</td><td>22</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>A4</td><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>15</td><td>21</td><td>51</td></tr>
<tr><td>6</td><td>21</td><td>21</td><td>28</td><td>70</td></tr>
<tr><td>7</td><td>28</td><td>28</td><td>36</td><td>92</td></tr>
</table>
</td><td>Pentágono 10, Luces verdes 55, Luces amarillas 55, Luces azules 66. Faltan 26 para formar 10 pentágonos</td></tr>
<tr><td>A5</td><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>15</td><td>21</td><td>51</td></tr>
<tr><td>6</td><td>21</td><td>21</td><td>28</td><td>70</td></tr>
<tr><td>7</td><td>28</td><td>28</td><td>36</td><td>92</td></tr>
</table>
</td><td>Faltan 5, 5 y 16.</td></tr>
<tr><td>A6</td><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>15</td><td>21</td><td>51</td></tr>
<tr><td>6</td><td>21</td><td>21</td><td>28</td><td>70</td></tr>
<tr><td>7</td><td>28</td><td>28</td><td>36</td><td>92</td></tr>
</table>
</td><td>$V =$ faltan 5
$A =$ faltan 5
$A =$ faltan $\underline{16}$
26</td></tr>
</table>

A7	<table><tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>5</td><td>15</td><td>15</td><td>21</td><td>51</td></tr><tr><td>6</td><td>21</td><td>21</td><td>28</td><td>70</td></tr><tr><td>7</td><td>28</td><td>28</td><td>36</td><td>92</td></tr><tr><td>8</td><td>36</td><td>36</td><td>45</td><td>117</td></tr><tr><td>9</td><td>45</td><td>45</td><td>55</td><td>145</td></tr><tr><td>10</td><td>55</td><td>55</td><td>66</td><td>176</td></tr></table>	Van a faltar 5 luces verdes y 5 amarillas y 16 azules.
A8	<table><tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>5</td><td>15</td><td>15</td><td>21</td><td>51</td></tr><tr><td>6</td><td>21</td><td>21</td><td>28</td><td>70</td></tr><tr><td>7</td><td>28</td><td>28</td><td>36</td><td>92</td></tr></table>	
B1	<table><tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>5</td><td>15</td><td>15</td><td>21</td><td>51</td></tr><tr><td>6</td><td>21</td><td>21</td><td>28</td><td>70</td></tr><tr><td>7</td><td>28</td><td>28</td><td>36</td><td>92</td></tr><tr><td>8</td><td>36</td><td>36</td><td>45</td><td>117</td></tr><tr><td>9</td><td>45</td><td>45</td><td>55</td><td>145</td></tr><tr><td>10</td><td>55</td><td>55</td><td>66</td><td>176</td></tr></table>	<table><tr><td>Verdes</td><td>55-50</td><td>5</td></tr><tr><td>Amarillas</td><td>55-50</td><td>5</td></tr><tr><td>Azules</td><td>66-50</td><td>16</td></tr></table>
B2	<table><tr><th>Número de pentágonos</th><th>Luces verdes</th><th>Luces amarillas</th><th>Luces azules</th><th>Total</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>5</td><td>15 +6</td><td>15 +6</td><td>21 +7</td><td>51</td></tr><tr><td>6</td><td>21 +7</td><td>21 +7</td><td>28 +8</td><td>70</td></tr><tr><td>7</td><td>28 +8</td><td>28 +8</td><td>36 +9</td><td>92</td></tr><tr><td>8</td><td>36 +9</td><td>36 +9</td><td>45 +10</td><td>117</td></tr><tr><td>9</td><td>45+10</td><td>45 +10</td><td>55 +11</td><td>145</td></tr><tr><td>10</td><td>55</td><td>55</td><td>66</td><td>176</td></tr></table>	Verdes 55, Amarillas 55, Azul 66. Total 176 5, 5 y 16

B3

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

No.de pentágonos	10	
Luces verdes	55	→ 5
Luces amarillas	55	→ 5
Luces azules	66	→ 16
Total	176	

B4

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

B5

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

8-36/36/45=117
9-45/45/55=145
10-55/55/66=176

Falta 5, 5 y 16

B6

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

Verdes 55, Amarillas 55, Azules 66. (Al final agrega que faltan 5 verdes, pero no dice nada de cuantas faltan para el caso de las amarillas y azules).

B7

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

B8

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70

5 Luces verdes, 5 luces amarillas y 16 azules.

7	28	28	36	92

B9

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	**15**=10+5	15	**21**=15+6	51
6	**21**=15+6	21	**28**=21+7	70
7	**28**=21+7	28	**36**=28+8	92
8	**36**=28+8	36	**45**	117
9	**45**=36+9	45	**55**	145
10	**55**=45+10	55	**66**=55+11	176

5 V, 5 A, 16 A

B10

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

B11

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

Faltan 5 verdes/5 amarillas/ 16 azules.

B12

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92
8	36	36	45	117
9	45	45	55	145
10	55	55	66	176

B13

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

B14

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

B15

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92

No. de pentágonos	10	
L verdes	55	5
L amarillas	55	5
L azules	66	16

B16

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92
8	36	36	45	117
9	45	45	55	145
10	55	55	66	176

B17

Número de pentágonos	Luces verdes	Luces amarillas	Luces azules	Total
1	1	1	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15	15	21	51
6	21	21	28	70
7	28	28	36	92
8	36	36	45	117
9	45	45	55	145
10	55	55	66	176

Apéndice B. Transcripciones de las entrevistas

Entrevista alumno A1

Pregunta 1d

Investigadora: En la pregunta 1d no la respondió

Alumno A1: El problema es que aquí no, por la presión y todo realmente no pude encontrar una sucesión, así que pues la deje en blanco.

Investigadora: Ok

Alumno A1: Ahora el problema son los denominadores. (Se le dio un tiempo para contestar la pregunta, sin embargo no logró proponer los dos términos intermedios de la sucesión).

Pregunta 4a

Investigadora: En la pregunta 4 nos dice encuentra los siguientes tres términos de cada una de las sucesiones, en la primera sucesión yo le di los primeros 8 elementos y usted escribió los números 34, 55 y 89, me puedes decir ¿cómo los hallaste?

Alumno A1: A ver recuerdo, bueno aquí según yo para encontrar el tercero (señala el número 2 en la sucesión) tenemos que tener los dos datos anteriores por ejemplo 1+1 daba el siguiente ¡dos!, 2+1 daba el siguiente ¡tres!, 3+2 daba el siguiente, 5+3 daba el siguiente ¡ocho!, 8+5 daba el siguiente ¡trece!, 13+8 da el siguiente ¡veintiuno! Y entonces sería 21+13 daría el siguiente y así hasta llegar al 34, 55 y 89.

Pregunta 4b

Investigadora: Ahora para la pregunta 4b, no la contesto (el investigador da un tiempo para contestarla)

Alumno A1: Bueno según yo de los tres que veo sería 3(2)+1 porque 3(2)=6 más uno ¡siete!, 7(2)=14 más tres 17, entonces según yo siguiendo esa lógica sería 17(2)+7 quedaría 41, 41(2)+17 quedaría 99 y 99(2)+41 y daría el siguiente número.

Investigadora: Me puedes escribir en la hoja los tres términos, encuentra los tres términos siguientes

Alumno A1: Serían 99(2)+41… (el alumno procede a realizar las operaciones para determinar los tres términos siguientes en la sucesión).

Investigadora: Escríbelos en la parte de abajo

Alumno A1: ¡Ya! Según yo los tres términos que siguen son 239, 577 y 1393

Pregunta 10a

Investigadora: Puede leer la pregunta 10

Alumno A1: ¿inciso (a)?

Investigadora: Sí

Alumno A1: En la primera fila, ah, o sea en la tabla del problema anterior (señala la tabla de la pregunta 9), en la primera fila hay una casilla y en la siguiente hay tres, ¿cuántas casillas hay en la sexta fila? ¡Eh! Ahí lo respondí (señala su respuesta que es 729 casillas) porque eran las potencias de tres, no sé, por ejemplo aquí es x, aquí sería 3, entonces aquí empieza.

Investigadora: En la fila uno hay una casilla

Alumno A1: En la fila dos ya hay 3 casillas, en la fila tres ya hay 9 casillas, en la fila cuatro hay 27 casillas, me di cuenta que el número de casillas era una potencia de tres.

Pregunta 11a

Investigadora: Ahora en la pregunta 11a, puedes leer el enunciado por favor.

Alumno A1: Escriba los siguientes renglones de la sucesión

Investigadora: Lee los renglones que diste como respuesta

Alumno A1: $1+3+5+7+9+11+13=49$ y $1+3+5+7+9+11+13+15$ que es igual a 64. Lo que note es que sólo se le sumaban números impares y que los resultados eran el número de la fila al cuadrado, o sea, por ejemplo aquí $2^2=4$ (señala la segunda igualdad), en este caso $3^2=9$, $4^2=16$ (señala la cuarta igualdad), $5^2=25$, $6^2=36$ y bueno siguiendo esa lógica diría que $7^2=49$ y $8^2=64$. Ahorita me doy cuenta que es el número de la fila al cuadrado

Investigadora: Aquella vez (en la aplicación del cuestionario) ¿hiciste lo mismo para encontrar el número 49?

Alumno A1: No, sí hice la suma, aquella vez sí hice la suma (aclara que para los renglones 8 y 7 si efectuó la suma de cada impar), pero ahorita ya me doy cuenta que es el número de la fila al cuadrado y ese ya es el resultado.

Pregunta 11b

Investigadora: La pregunta 11b no la contesto usted, quiero que con lo que encontraste quiero que me digas cuánto es ese valor (la investigadora señala la suma $1+3+5+\cdots+99+101$).

Alumno A1: ¿Del 1 al 101? A ver, necesito el número de sumandos y dividirlos a la mitad porque no se estas poniendo todos como debe ser, como sólo estamos contando los números impares entonces sería como dividirlo a la mitad y entonces diría que hay 50.5 aproximadamente.

Pregunta 13 a y b

Investigadora: La pregunta 13 y 14 no la contesto, quiero que observes la tabla y halles los términos que siguen (la investigadora señala los espacios en blanco para las filas 11, 12 y 13).

Alumno A1: 1, 3, 7, eh

Investigadora: No te preocupes aún tenemos tiempo.

Alumno A1: ¡Huy! Pues para esta expresión realmente no, no, no sé

Investigadora: No te preocupes

Alumno A1: La veo muy complicada y pues como para tener la tercera (señala la cuarta columna de la tabla) debes tener las otras dos

Investigadora: Esta bien, ¿estás completamente seguro? Se le da más tiempo para responder la pregunta. Ya encontraste algo, verdad

Alumno A1: Sí, creo que sí, según yo para x_n sería la suma de este (señala el número 7 de la sucesión x_n) con este (señala el número 3 de la sucesión x_n) y aparte el número original (vuelve a señalar el número 7 de la sucesión x_n) para dar el siguiente número (señala el número 17 de la sucesión x_n). ¡Hm! 3363 y sí es el siguiente.

Investigadora: A ver para otro más

Alumno A1: ¡Hm! 3363 y sí es el siguiente. Entonces según yo para calcular toda la fila de x_n sería…

Investigadora: Ahora para y_n

Alumno A1: Para ¿cuál?, ah y_n a ver, hm… ¡lo mismo!

Investigadora: Encuentra el primer término (señala el espacio en blanco correspondiente a la fila 11), el termino de la fila 11.

Alumno A1: Según yo ¡ah! 5741

Entrevista alumno A3

Pregunta 3a

Investigadora: En la pregunta 3a explícame que fue lo que hiciste para determinar los 8 términos, primero quiero que leas el enunciado.

Alumno A3: Encuentra los siguientes 8 términos de cada sucesión. Aja yo lo que hice es que como va 1, 0 (señala los dos primeros términos de la sucesión 3a), uno, dos (señala el tercero, cuarto y quinto elemento de la sucesión 3a, esto es, 1, 0, 0) y vi que iban de la numeración 1, 2, 3, 4, … y luego aquí pues obviamente iba el 5 (señala su respuesta 1, 0,0,0,0,0, 1,…) ¡uno y cinco ceros! Y así me iba, uno y los seis ceros, y luego uno y siete ceros y así.

Investigadora: ¿Cómo lo describirías?

Alumno A3: "¡Eh! Que va, como en la numeración. Así va uno… pues va un cero, luego 1, 2 (el estudiante señala los términos 1, 0, 0), luego 1, 3 (el estudiante señala los términos 1, 0, 0, 0)... Así en la numeración, va de, pues así.

Pregunta 3b

Investigadora: En la pregunta 3b usted no respondió (se le permite responder)

Alumno A3: ¡Ah! Era lo mismo pero ahora con los unos.

Investigadora: Explíqueme que haría

Alumno A3: Aja, por ejemplo en el primero dice 1, 0, y luego va así como por decirse… ¡Aja! pero ahora como en el primero (señala la sucesión 3a) sólo iban aumentando los ceros, aquí en el 3b ¡son los dos!, acá es 1, 0, en el otro es 1, 1, 0, 0, ¡dos! Y luego 1, 1, 1, 0, 0, 0 ¡va de tres!

Investigadora: Y el siguiente

Alumno A3: El siguiente sería 1, 1, 1, 1 y cuatro ceros.

Investigadora: Y el siguiente

Alumno A3: Y así pues cinco unos y cinco ceros y así va a aumentar

Investigadora: Puedes escribir tu respuesta en la hoja.

Alumno A3: Acá los escribo.

Investigadora: Sí. Entonces, ¿cómo describes el comportamiento de esta sucesión?

Alumno A3: Que va, cómo se dice, que va creciendo conforme a la numeración, van creciendo los números, los ceros y los unos.

Entrevista alumno A5

El estudiante A5, en el lapso de su entrevista intentó responder las preguntas 6 y 11b.

Entrevista alumno A8

Pregunta 1b

Investigadora: En la pregunta 1b

Alumno A8: Son puros números al cuadrado

Investigadora: Tenemos $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \cdots$ los numeradores son

Alumno A8: 1, 4, 9, 16, …

Investigadora: Y en los denominadores

Alumno A8: 4, 9, 16 y 25.

Pregunta 1c

Investigadora: Para la sucesión 1c, ¿qué fue lo que usted hizo?

Alumno A8: Se va sumando $\frac{1}{2}$, al 1 le sumas $\frac{1}{2}$ dan $\frac{3}{2}$, más $\frac{1}{2}$ son $\frac{4}{2}$ que son 2…

Investigadora: ¿Cómo fue que encontraste que se suma $\frac{1}{2}$?, ¿qué fue lo que hiciste?

Alumno A8: Transformo en medios y ya veo que va de $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$, y así y se le va sumando

Pregunta 1d

Investigadora: En la pregunta 1d ¿qué fue lo que hiciste?

Alumno A8: Se va multiplicando la posición por el denominador del anterior, por ejemplo, acá que es la posición dos, se va a multiplicar por uno, da dos. La posición tres va a ser 3(2)=6, acá (se refiere al elemento que ocupa el cuarto lugar) va a ser 4(6)=24, luego esta es la posición 5, 5(24)=120, luego la posición 6 va a ser 6(120)=720, en la posición 7 va a ser 7(720)=5040.

Pregunta 2:

Investigadora: En la pregunta dos usted escribió el grupo 5, el grupo 6 y el décimo grupo, por favor explícame ¿qué fue lo que te ayudo a determinar esos grupos?

Alumno A8: Son los números impares, en el tercer grupo por ejemplo va a ver… bueno la cantidad de números va a ser igual que el grupo, el número de grupo que sea, entonces en este caso el grupo quinto va a tener los cinco números impares siguientes que van del cuarto, y así, de hecho creo que escribí todos.

Investigadora: No, sólo escribiste los tres grupos (la investigadora se refiere al quinto, sexto y décimo).

Pregunta 4a

Investigadora: Comenzaremos con las preguntas 4a y 4b.

Alumno A8: La 4b no la conteste.

Investigadora: No, no la contestaste. Primero la 4a. En la 4a usted me escribió los números 34, 55 y 90, quiero que usted me diga ¿por qué escribió esos números?

Alumno A8: Se le iba sumando el número anterior, por ejemplo para… está uno, anterior no hay nada, entonces el siguiente va a ser uno, luego va a ser, se toma el uno, se le va a tomar el uno anterior y da dos, luego dos y uno tres, tres y dos cinco, ocho y tres ¡digo cinco y tres ocho!, ocho y cinco trece, trece y ocho veintiuno, entonces para el siguiente va a ser 21+13 por eso puse 34.

Investigadora: Para el 55

Alumno A8: Es 34+21

Investigadora: ¿El 90?

Alumno A8: 34+55 que es 89

Investigadora: Ok, no te preocupes. Ahora ¿cuál es la regla que hallaste?

Alumno A8: Sumar los dos números anteriores, se suma el número anterior más el anterior del anterior.

Pregunta 4b

Investigadora: Ahora para 4b

Alumno A8: Es, este… Dos veces el anterior, más el dos veces antes. Por ejemplo, este, 3(2)=6; 6+1=7, 7(2)=14; 14+3=17, luego 17(2)=34; 34+7=41 y así.

Investigadora: ¿Cómo los encontraste?

Alumno A8: Sólo ¡me vino!

Investigadora: Si quieres determinar un elemento… entonces…

Alumno A8: Se va a multiplicar por dos el número anterior y se le va a sumar el número anterior del anterior.

Pregunta 8 a y b

Investigadora: En la pregunta 8 usted escribió los números 31, 35 y 39 en las posiciones que yo le indique, me puedes explicar ¿por qué escribiste esos números?

Alumno A8: Ah, va aumentando, de 7 a 11 aumenta cuatro, en todas va aumentando cuatro es 7+4=11, más cuatro da 15, 15+4=19, más cuatro 23, más cuatro 27 y a 27 le sume cuatro para que de 31, y luego así, más cuatro 35, más cuatro 39.

Investigadora: Aja, ahora en el inciso 8b, que dice ¿Qué número aparece en la posición 250?, usted escribió el número 1003 como respuesta y en la hoja posterior para este inciso escribió $4n + 3$, explíqueme ¿por qué escribiste esta fórmula?

Alumno A8: Pues, solamente me di cuenta, así, fui buscando, eh bueno va, pensé el número, pensé la fórmula para que al principio me diera 7 y ya vi que si iba coincidiendo con los siguientes números, entonces como sí iba quedando pues ya use eso para 250. Por ejemplo 4(2)+3=11, 4(3)+3=15, fui pensando así multiplicaciones e irle sumando hasta que me quedo. Lo primero que hago es, no sé… multiplicando por 2 y ya e irle sumando por ejemplo 2(1)=2 para 7 van a faltar 5 pero para el siguiente caso 2(2)=4 más cinco ya dan 9 entonces ya no queda (señala al número 11 que ocupa el segundo lugar en la sucesión), entonces ya no hay que probar multiplicar por 2 sino por otro número y ya no sé luego probé ya con 3 y vi que ese le tenía que sumar… por ejemplo en el primero sería 3(1)=3 para siete 4 y así no queda en las siguientes, y ya al siguiente de multiplicar por 4 y sumarle el 3 para que nos de 7 en la posición número 1 ya coincide y sí da el resultado bien en los siguientes números (señala los primeros elementos de la sucesión).

Pregunta 10a

Investigadora: En la pregunta 10a usted me dio como resultado 243 casillas, explíqueme su respuesta.

Alumno A8: Hice todas las operaciones, fui eh 1(3)=3 que es de la segunda fila, luego para sacar los de la fila siguiente por tres otra vez y ya dan 9, luego esos 9 por tres otra vez y así fui multiplicando por tres hasta que fue 243.

Pregunta 11 a y b

Investigadora: La pregunta 11 dice verifique que valen las igualdades de abajo y escriba los siguientes dos renglones y el inciso (b) le pide la suma del 1 hasta el 101. Explícame cómo determinaste estos dos renglones (la investigadora señala la respuesta del alumno en su hoja).

Alumno A8: Vi que se les iba agregando el siguiente número impar, entonces, este, si había por ejemplo en el renglón de anterior había 6 dígitos (señala los 6 impares de la sexta igualdad) el siguiente iba a tener 7 y el siguiente 8 y así iba aumentando de uno en uno.

Investigadora: ¿el 49 y el 64?

Alumno A8: Porque vi que los resultados iban siendo números al cuadrado

Investigadora: En el caso del 49, ¿qué número elevaste al cuadrado?

Alumno A8: El 7

Investigadora: ¿Por qué elevaste el 7?

Alumno A8: Ah, porque es la fila 7 y hay 7 dígitos (se refiere a los 7 sumandos impares del séptimo renglón), bueno vi que, si había, por ejemplo en la fila 3, eh que también hay tres dígitos (se refiere a los impares 1, 3 y 5), bueno es que se multiplica ya sea el número de dígitos (se refiere al número de sumandos impares) o el número de la fila que sea, al cuadrado.

Investigadora: Ok, entonces para obtener la suma del 1 hasta el 101 ¿qué hizo?

Alumno A8: Pues vi que son 51 dígitos (lo recuerda al observar su respuesta y nota que realizó la operación 51(51)=2601).

Investigadora: ¿Por qué son 51?

Alumno A8: Pues se puede sumar uno al último número (señala al número 101) y dividir entre dos, por ejemplo acá que es la fila 6, al 11 que es el último se le puede sumar uno ya va a ser $\frac{12}{2}$ es 6, acá igual (señala la quinta igualdad) 9+1=10, $\frac{10}{2} = 5$, entonces eh, $\frac{101+1}{2}$ es 51.

Investigadora: Entonces el comportamiento que usted encontró fue

Alumno A8: Que eh, primero se tiene que sacar el número de sumandos que tiene y eso se puede sacar sumándole uno al último dígito (impar) y dividiéndolo entre dos y ya el resultado de la derecha va a ser elevando el número de dígitos (impares) al cuadrado.

Pregunta 12

Investigadora: Ahora en la pregunta 12, explícame ¿cómo encontraste esos dos renglones? (la investigadora señala su respuesta en la hoja del cuestionario).

Alumno A8: Ah, vi que todos los números iban así como por renglones sucesivamente, aquí del 3 (señala el resultado de la primera suma) se pasaba al, 4 del 8 al 9 y así, y que se va aumentando un dígito en cada parte al ir aumentando la fila.

Pregunta 13

Investigadora: En la pregunta 13 explícame tu respuesta

Alumno A8: ¿Puedo usar la calculadora?

Investigadora: Sí

Alumno A8: Se… Al número anterior se va a multiplicar por dos y se le suma el penúltimo, por ejemplo acá va a ser 3(2)+1 es siete, luego 7(2)=14 más tres es 17.

Investigadora: Entonces la regla que sigues es

Alumno A8: Multiplicar por dos el último número y sumarle el penúltimo.

Investigadora: Ok, en la sucesión x_n, ¿y en la sucesión y_n?

Alumno A8: Igual.

Pregunta 14

Investigadora: ¿Para la sucesiones x_n y y_n de la pregunta 14?

Alumno A8: Es igual, eh, sólo que se van a multiplicar por dos el último y el penúltimo, acá por ejemplo va a ser 4(2)=8 más 2(1) es 10, luego 10(2)=20 más 4(2)=8, 20+8=28.

Investigadora: Ok, entonces la regla para x_n y y_n de la pregunta 14 ¿cuál es?

Alumno A8: Se suman el doble del último más el doble del penúltimo.

Entrevista alumno B7

Pregunta 2

Investigadora: En la pregunta 2, en su respuesta, usted solamente me dio dos grupos, el (23, 25, 27, 29, 30), el (33, 35, 37, 41, 43, 45) y en el tercero usted nada más escribió el número 47, pero necesito saber, ¿por qué escribió esos números en cada grupo?

Alumno B7: El alumno lee la pregunta 2

Investigadora: La grabación no se entiende, sin embargo el alumno se puso muy nervioso y en las notas del día de la entrevista se menciona que el alumno no recuerda como procedió y no pudo explicar su respuesta.

Entrevista alumno B8

Pregunta 5

Investigadora: Usted dio está respuesta (la investigadora señala la respuesta del alumno).

Alumno B8: 20, 26 y 27

Investigadora: Quiero saber ¿cómo obtuvo los números 20, 26 y 27?

Alumno B8: Bueno creo que fue por, no sé si es lógica o un patrón pero primero son dos números seguidos, 1y 2 y después un número que no está que sería el 3, después otra vez son dos números seguidos (el 4 y 5) y faltan dos números (se refiere al número 6 y 7), de nuevo dos números seguidos (señala los números 8 y 9) y faltan tres números (se refiere a los números 10, 11 y 12) y así sucesivamente.

Pregunta 6

Investigadora: ¿Y su respuesta en la pregunta 6?

Alumno B8: Pues creo que por lógica 1+1=2 más dos son 4 y pues como vi que se seguían repitiendo el más uno, son ¡cinco! (señala la frase cuatro más uno) y después este iba aumentando uno nada más (señala las frases, más dos, más tres, más cuatro), más tres, más cuatro, más cinco y así.

Pregunta 8b

Investigadora: En la pregunta 8b igual me das el resultado 1003 ¿cómo lo hallaste?, dice ¿qué número aparece en la posición 250?

Alumno B8: En este caso me di cuenta que todos los números son, se puede decir que aumentan cuatro, son múltiplos de cuatro, por ejemplo 7+4 serían 11, entonces me di cuenta que sólo son los múltiplos de cuatro, pero…, por ejemplo, 4 en el primero sería 4+3, en el segundo sería el doble de cuatro más tres ¡serían once!, y así el triple de 4…y ya lo único que hice fue multiplicar 250 por 4 y le sume 3.

Pregunta 15b

Investigadora: La pregunta 15b

Alumno B8: Pues en el primero es una secuencia, en el primero del verde es 1, (señala la cantidad de luces verdes en el primer pentágono) en el segundo son 2, en el tercero son 3 (señala la cantidad de luces verdes en el tercer pentágono) y así sucesivamente, así que lo único que sería por ejemplo… a éste, aumentarle dos (señala el número 1 de la columna luces verdes), al 3 (señala el número 3 de la columna luces verdes) pues ya le aumentaría el tres, al 6 cuatro, al 10 cinco, al 15 seis, al 21 siete y así sucesivamente, lo mismo para las luces amarillas y para las luces azules pues… era un poco diferente, pero no recuerdo bien cómo lo hice.

Entrevista alumno B13

Pregunta 10a y 10b

Investigadora: En la pregunta 10b

Alumno B13: ¿Qué número se encuentra en el centro de la fila 17? Hm, lo hice mental.

Investigadora: ¿Cómo hallaste el número que escribiste en 10a y 10b?

Alumno B13: En 10a si me tarde mucho porque sí hice toda la fila, todo lo hice en la cabeza como prueba y error.

Investigadora: En 10a ¿qué fue lo que hiciste para hallar las 243 casillas?

Alumno B13: A cada una le puse 3 (señala las casillas), o sea sólo lo hice en la cabeza, recuerdo que había puesto cuantas filas me pedían, recuerdo que había multiplicado el 6 por algo, es que son de esos momentos que me entra la inspiración.

Entrevista alumno B17

Pregunta 1a

Investigadora: En la primera parte del cuestionario, en la pregunta 1a, usted no contesto la pregunta, quiero que usted lea la pregunta y responda el inciso (a).

Alumno B17: Bueno (el alumno empieza a leer lo siguiente) escriba en los espacios indicados los términos de cada una de las sucesiones, inciso (a) -1, 1 y -1, ¡ah! No le vi (recuerda por qué no contesto la pregunta y explica sus motivos), bueno un comienzo a lo que sigue, esta menos uno, uno positivo y vuelve a estar un número que se repite menos uno, entonces como no le encontré, quise contestar algo rápido entonces me seguí con la que …

Investigadora: Ok, me puedes decir ahora, ¿cuáles son los tres términos que siguen?

Alumno B17: Pues eh… que sea una sucesión de uno hmm… dos, menos dos y dos (sin embargo en el cuestionario escribe -2, 2, -2).

Pregunta 4a

Investigadora: Puedes leer por favor la pregunta 4a

Alumno B17: El alumno comienza a leer la pregunta 4a

Investigadora: Aja, los números que usted escribió fueron 37, 69 y 133, ahora ¿por qué escribió esos números?

Alumno B17: No me acuerdo cómo le hice, hay no me acuerdo, pero según yo… (El alumno intentó recordar, pero se puso muy nervioso al no poder recordar lo que hizo y decidimos terminar su entrevista).