CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Estrategias dinámicas para la introducción de la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con perspectiva de género. Un caso de simulación digital del fenómeno de caída libre.

TESIS

Que presenta

BRENDA CARRANZA–ROGERIO

Para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

en la especialidad de

MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de tesis

DRA. ROSA MARÍA FARFÁN MÁRQUEZ

Ciudad de México *Enero, 2019*

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Estrategias dinámicas para la introducción de la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con perspectiva de género. Un caso de simulación digital del fenómeno de caída libre.

Brenda Carranza–Rogerio

Índice de contenidos

Índice de ilustraciones

Índice de tablas

Agradecimientos

Un gran y sincero agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por haberme brindado el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Brenda Carranza Rogerio

Becaria número 613756

Un especial agradecimiento a las y los estudiantes que aceptaron participar en la toma de datos.

Dedicatoria

Este escrito representa la conclusión de un proceso intenso de formación en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional. Como se puede anticipar, cursar una maestría en esta institución es un reto que demanda un gran compromiso, tanto personal, como de quienes nos rodean: familiares, amistades, docentes, colegas y personal administrativo. Y es justamente a ellas y ellos a quienes dedico este trabajo:

A mi madre, una mujer inteligente, responsable, crítica y tierna.
Mi mayor apoyo y máximo ejemplo de vida.

A mi hermano, un hombre de familia, tan talentoso como solidario.

A Paulina, hermana de corazón, mujer exitosa y madre de Victoria, mi gran motivación.

A Cristina, a Diego, a Mario y a Laura, por siempre estar ahí, sin importar la hora ni la distancia.

A mi asesora, mujer destacada y con un bello corazón. Por creer en mí y apoyarme en todo momento.

Al profesor Marco Antonio, por su atenta colaboración durante la fase empírica del estudio.

A la Dra. Gisela, al Dr. Ricardo y a la Dra. Acuña. Por su inteligente guía.

A mis compañeros y compañeras de generación: Selvin, Luis Miguel, Melvin, Natalia, Fabiola y Roger.
Por compartir conmigo tanto dentro como fuera del aula.

A María y a Mayra, mis hermanas académicas, por su apoyo, confianza y amistad desde que ingresé.

A Cynthi, a Verónica, a Sergio y a Fabián, por sus observaciones y por su bella amistad.

A Eduardo y a Diana, por su apoyo y por sus lindos detalles.

A las y los demás compañeros de maestría y doctorado que me han brindado la mano.

A Adri, a Susy y a Nancy, por su eficiente y amable seguimiento de mis trámites en la maestría.

Resumen

Tras reconocer una *problemática doble* en el aprendizaje de las matemáticas en el Nivel Superior:

Desvinculación entre la matemática escolar y el "mundo real"	*Escasa participación* de las mujeres en el área de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés)

se perfiló un estudio enfocado en una comunidad en formación en el área fisicomatemática, ya que, además de pertenecer al área STEM, se espera que quienes egresen posean competencias transversales que les permitan atender problemas del mundo real.

Una revisión de literatura permitió identificar algunas tendencias en investigación para abordar el estudio, tales como: *modelación matemática*, *física en la contextualización*, *integración de la tecnología*, *enfoques interdisciplinarios de educación STEM* y *sensación de pertenencia* (*caso género*). Con base en ello se reconoció la necesidad de una perspectiva *integral* del aprendizaje en tres sentidos: integración de disciplinas, integración de tecnología (digital) e integración de género.

Así, se definió como problema de investigación el *analizar el proceso introductorio a la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con base en la modelación de un fenómeno físico*.

La pertinencia de una perspectiva *sociocultural* de la construcción de conocimiento matemático para dicho estudio se infirió a través de la necesidad de rescatar el *carácter funcional* del saber, es decir, el *uso* que da sentido a dicho conocimiento, pues es relevante tanto para un vínculo entre el aula y el cotidiano (situaciones de movimiento), como para la perspectiva de género adoptada, ya que se considera lo reportado en la literatura acerca de que las mujeres tienden a asociar con mayor énfasis lo matemático con variables asociadas a fenómenos específicos.

La *modelación* emergió entonces como elemento transversal, a partir del cual se elaboró un diseño que vinculara la *experimentación física* con la *simulación digital* en un ambiente de matemática dinámica. El análisis consecuente se centró en la hipótesis definida acerca de que la *noción de variación en la ecuación diferencial* surge de *modelar* un *fenómeno* (como el movimiento) *a partir de su naturaleza dinámica* y devino en caracterizar un conjunto de *estrategias dinámicas*.

Como parte de ello, se identificó la riqueza de la *experimentación digital* para un análisis variacional de la *ecuación diferencial ordinaria*. Particularmente, se reconoció la necesidad de centrar la atención en la forma relativa que guardan entre sí las gráficas correspondientes a los distintos niveles de variación, incorporando gradualmente los ejes a través de la necesidad que responde a su uso en la descripción del movimiento. En cuanto al *género*, se reconoció que existe una diferencia significativa en el orden de resolución seguido por mujeres y hombres, así como una constante incorporación de calificativos que sugieren la plausibilidad de sus respuestas y una fuerte resistencia a participar o a discutir resultados por parte de ellas.

Abstract

From the recognition of a double issue in mathematics learning at Higher Education:

Disconnection between school math and the "real world"

Low participation of women in science, technology, engineering and mathematics (STEM)

a study focused on a community of mathematical physics students was conducted, since they belong to the STEM area and graduates are expected to possess transversal competencies that allow them to address real–world problems.

A review of literature lead to the identification of some trends in research to address the study, such as: *mathematical modeling*, *physics in contextualization*, *integration of technology*, *interdisciplinary approaches to STEM education* and *sense of belonging* (*gender case*). Based on this, the need for an *integral* perspective of learning in three senses was recognized: integration of disciplines, integration of (digital) technology, and gender integration.

So, the research problem was defined in order to *analyze the introductory process to the notion of variation in the ordinary differential equation based on the modeling of a physical phenomenon*.

The pertinence of a *sociocultural* perspective of mathematical knowledge construction for this study was inferred from the need to rescue the *functional character* of knowledge, that is, the *use* that gives meaning to knowledge, since it is relevant both for a link between the classroom and everyday situations (like motion), and for the adopted gender perspective, since it was considered what literature reports about women tending to associate with greater emphasis mathematics with variables related to specific phenomena.

Modeling then emerged as a cross-cutting element, from which a design that linked *physical experimentation* with *digital simulation* in a dynamic mathematics environment was developed. The consequent analysis focused on the defined hypothesis regarding that *the notion of variation in the differential equation* arises from *modeling* a *phenomenon* (such as motion) from its *dynamic nature*, and that led to the characterization of a set of *dynamic strategies*.

As part of it, the richness of *digital experimentation* was identified for a variational analysis of the *ordinary differential equation*. Particularly, it was recognized the need to focus attention on the relative form of the graphs corresponding to the different levels of variation, gradually incorporating the axes through the need that responds to their use in the description of motion. Regarding *gender*, it was recognized that there is a significant difference in the order of resolution followed by women and men, as well as a constant incorporation by women of qualifiers that suggest the plausibility of their answers and a strong resistance to participate or discuss results on the part of them.

1. Introducción

En el presente capítulo se describen las motivaciones iniciales de la investigación, así como la problemática doble identificada con relación al género y a la desarticulación del currículo escolar.

Posteriormente, se comparte una recomendación para una lectura ágil de la tesis basada en la estructura del contenido.

1.1. Motivaciones

Como parte del objetivo de formarse como investigadora en Matemática Educativa, un sentido social emerge y, con ello, una preocupación por explorar la complejidad de los diversos ambientes de aprendizaje. En este sentido, además de tener presente el impacto que tiene la educación en la calidad de vida de cada habitante, se reconoce la influencia que cada *cultura* tiene, a su vez, sobre su sistema educativo en todos los niveles.

Revestida de elementos que se encuentran en una gama difusa entre lo *subjetivo* y lo *objetivo*, la cultura representa un marco de referencia para la toma de decisiones de cada persona, con manifestaciones explícitas e implícitas en las acciones que cada una lleva a cabo.

En particular, aquellos elementos que constituyen una *identidad cultural*, así como las complejas relaciones que se generan entre ellos, devienen en un amplio conjunto de *concepciones* individuales y colectivas que coexisten en los ambientes de aprendizaje.

En una revisión respecto a la influencia de la cultura en la educación matemática, Steinthorsdottir y Herzig (2014) destacan enfoques investigativos que buscan ir más allá de las características del alumnado, el currículo escolar y la pedagogía, confiriendo importancia a la cultura en la cual la educación se sitúa y sus efectos sobre quienes triunfan –o no– en matemáticas.

Como pudiera anticiparse, las características de dichos efectos no siempre son claras o evidentes, y lo mismo ocurre con sus *causas* respectivas; explicitarles es, de hecho, uno de los principales objetivos de las investigaciones con un enfoque sociocultural. En este punto cabe remarcar la posición ambivalente que ocupa la Matemática Educativa: como una *ciencia social* que atiende el aprendizaje de una *ciencia exacta*, pues de esta cualidad se asa el enfoque seguido.

Saber, *uso* y *costumbre* se entremezclan para dar pie a un fenómeno social que no es hermético a lo que ocurre "afuera" de las instituciones educativas. En este sentido, no es posible hablar de un dentro y un fuera con respecto a las relaciones sociales que se gestan en la interacción "adentro" del aula y, más aún, sobre la construcción de conocimiento que ahí se produce.

El fenómeno social al que se hace referencia es al aprendizaje de las matemáticas y, particularmente en el presente trabajo, al de las *ecuaciones diferenciales*. El problema de investigación se precisó en su estudio tras realizar un análisis general de los planes curriculares de las carreras STEM en una institución pública mexicana de Nivel Superior. A través de él fue posible identificar a las ecuaciones diferenciales como un elemento *transversal* en dicha área: *horizontalmente*, al estar presente en la mayoría de las carreras, y *verticalmente*, al retomarse en diversas asignaturas de distinto nivel en una misma carrera.

Si bien con solo leer "ecuación diferencial" pueden despertar una serie de emociones, ideas y opiniones, resulta de especial interés la aparente antonimia que evocan ambos términos: *ecuación* como "lo que es igual" y *diferencial* como "lo que es distinto". Esta dualidad no es exclusiva del ámbito matemático, ni siquiera del lingüístico; ella puede aparecer incluso como una situación para la cual no es posible dar una solución *absoluta*.

Un ejemplo claro: la *desigualdad social*. ¿Somos iguales?, ¿deberíamos ser iguales? o ¿debería tratársenos igual? Ante la ley, en términos generales, se asume que la respuesta a estas preguntas debe ser un sí categórico; no obstante, en el día a día, es posible ver que cada persona es, piensa y actúa de una manera única e *inigualable*. Entonces, ¿por qué buscar la *igualdad*?

Este es un tema amplio del cual difícilmente se lograría un tratamiento exhaustivo, pero es un problema social que precisa ser abordado desde cualquier ámbito, incluido el educativo. Bajo esta perspectiva, tras un primer acercamiento al *estado del arte* referente al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, se distingue una tendencia a incorporar enfoques constructivos e *integradores*, en los cuales el uso de la tecnología destaca como medio para trabajar tanto con la *cualidad interdisciplinaria* de dicho objeto matemático, como con sus potencialidades en la búsqueda de una *democratización del aprendizaje*.

Particularmente, Roschelle y Hegedus (2013) aluden a este último punto al ver en las representaciones dinámicas una oportunidad para crear notaciones más accesibles hacia las matemáticas del cambio y la variación (p. 7).

Respecto a la cualidad interdisciplinaria de la ecuación diferencial, en general, las investigaciones plantean propuestas en las que el *contexto* recobre la importancia epistemológica que tuvo en su desarrollo, pues su evolución estuvo siempre en estrecha relación con el estudio de otras disciplinas, especialmente, de la física.

La idea de *igualdad* emerge entonces en el sentido de ampliar el acceso al aprendizaje, en *democratizarlo*, pues existe evidencia –particularmente identificable a través del discurso matemático escolar (Soto y Cantoral, 2014)– de que los tratamientos "tradicionales" suelen excluir a un gran número de estudiantes. En especial, el aislamiento de la matemática escolar respecto a diversos contextos ha contribuido significativamente a esta problemática, pues se tiende a privilegiar una forma de pensamiento –usualmente *abstracta*– por encima de las demás.

En el caso de las mujeres, este fenómeno de exclusión se agudiza pues se ha identificado que en sus respuestas, inferencias y argumentaciones tienden a tomar en cuenta una gran cantidad de variables *funcionales* para asociar el conocimiento matemático con un fenómeno *real* específico (Farfán y Simón, 2016, p. 181).

En general, los medios y formas de exclusión son diversos y pueden ir desde aspectos didácticos y pedagógicos, hasta la discriminación y la *violencia simbólica*. De este hecho nace la necesidad de abordar no solo aspectos epistemológicos respecto a la ecuación diferencial, sino también de reconocer el *carácter social* de su construcción. Así, se perfiló una visión *socioepistemológica* en el desarrollo de la presente investigación.

1.2. Problemática

En particular, la motivación del estudio surge de una problemática doble: (1) la persistente desarticulación del currículo escolar en el Nivel Superior (universitario) y (2) la aún escasa presencia de las mujeres en carreras del área de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés).

En las siguientes subsecciones se describe con mayor detalle en qué consiste esta doble problemática.

1.2.1. Matemáticas y el contexto

En la época actual, los ambientes universitarios en los cuales comúnmente se aprende matemáticas se centran en un aula "tradicional" con la *virtud* de haber formado a profesionistas de alto nivel. Esto ha *justificado* de cierto modo su permanencia; no obstante, cada vez se muestra mayor evidencia de que muchos métodos son ya obsoletos y promueven disparidades, dejando fuera una enorme cantidad de talento.

Particularmente, en la universidad de la que provenían las y los participantes de la fase empírica de la investigación, el método usual de enseñanza–aprendizaje –como señala un reporte de autoevaluación realizado por la propia universidad[1]– se centra en la "exposición del docente", lo cual, expresan, "es insuficiente para desarrollar otras competencias". Más aún, en el mismo escrito se comenta que "para cubrir algunas de estas deficiencias se asigna una cantidad substancial de trabajo extra–clase a [las y] los estudiantes".

En general, el tratamiento de los temas en dicha universidad suele ser abstracto y lógico–formal. No obstante, al ser una carrera fisicomatemática en la cual el perfil de egreso establece como objetivo "comprender, en base en el estudio riguroso de la Física y las Matemáticas, las estructuras, las propiedades fundamentales y las leyes generales que rigen al mundo que nos rodea" y cuyo modelo educativo pretende "contar con procesos educativos flexibles e innovadores con múltiples espacios de relación con el entorno permitiendo que sus egresados sean capaces de combinar la teoría y la práctica para contribuir al desarrollo sustentable de la nación", se hace patente la necesidad de un tratamiento que considere la formación de competencias *transversales*.

[1] En aras de mantener la confidencialidad de las y los participantes, la referencia al reporte ha sido omitida intencionalmente.

Al respecto, se reporta que el plan de estudios "se basa en una sólida formación en física y matemáticas básicas", en el cual "los contenidos curriculares se estructuran en ejes formativos, que tienen el propósito de generar un estudiante con nuevo perfil, con sentido de actualización, actitud de autoaprendizaje, capaz, competente, proclive a la interdisciplinaridad y trabajo en equipo…"; asimismo, que las unidades de aprendizaje de su opción de terminación (área de especialidad) proporcionan "las condiciones necesarias para cubrir las diversas áreas de conocimiento y desarrollar sus capacidades interdisciplinarias, garantizando la diversidad y flexibilidad acordes al perfil de egreso".

Sin embargo, al analizar el contenido curricular de algunas asignaturas de física y de matemáticas de la carrera (TABLA 1-1), es posible identificar una desarticulación entre ellas.

TABLA 1-1 Contenido curricular de Cálculo I y II, Física I y Ecuaciones Diferenciales en una carrera fisicomatemática.

Primer semestre		**Segundo semestre**	
Física I	UNIDAD I *Sistemas de referencia.* *Conceptos de velocidad y aceleración desde el punto de vista vectorial.* *Leyes de Newton (conceptos de masa y fuerza), movimiento en una y dos dimensiones.* *Conceptos de trabajo y energía, fuerza en un campo conservativo, energía potencial.* *Teorema de la conservación de la energía.* UNIDAD II *Estudio de sistema formado por varios cuerpos considerados como partículas.* UNIDAD III *Estudio de un cuerpo rígido.* UNIDAD IV *Estudio de sistema con movimiento periódico.* UNIDAD V *Ley de la Gravitación Universal.* *Conceptos de masa inercial y masa gravitacional.* *El principio de equivalencia.* *La ley de Gauss.* *Las leyes de Kepler y el campo central.*	Ecuaciones Diferenciales	UNIDAD I *Preliminares técnicos y conceptos elementales.* UNIDAD II *Ecuaciones diferenciales exactas.* *Factor integrante.* *Ecuaciones diferenciales incompletas.* UNIDAD III *Ecuaciones diferenciales de orden* n *con coeficiente constante.* *Ecuaciones diferenciales de orden* n *afín con coeficiente constante.* *Método de variación de parámetros.* UNIDAD IV *Conceptos elementales.* *Método de series de potencias para la solución de ecuaciones diferenciales.*

Cálculo I	UNIDAD I *Números naturales, enteros, racionales (expansiones decimales), reales (axiomas de campo, relación de orden).* *Valor absoluto, desigualdades.* *Axiomas de completez y propiedad arquimediana.* UNIDAD II *Principio de inducción.* UNIDAD III *Sucesiones y su convergencia.* *Desigualdades de sucesiones.* *Teorema de Bolzano–Weierstrass y criterio de Cauchy.* *Divergencia a* $+\infty$ *y* $-\infty$. UNIDAD IV *Series infinitas y su convergencia.* UNIDAD V *Definición de función y dominio.* *Operaciones con funciones.* *Definición de límite de función y teoremas acerca de límites de funciones.*	Cálculo II	UNIDAD I *Definición de la derivada de una función y su interpretación geométrica.* *Derivación y continuidad.* *Reglas de derivación.* *Regla de cadena.* *Derivada de función inversa.* *Teorema del valor medio y sus consecuencias (crecimiento y decrecimiento de la función según el signo de la derivada, concavidad en términos de la monotonía de la derivada y concavidad según el signo de la derivada).* *Máximos y mínimos.* *Teorema de Taylor.* *Graficación de funciones.* UNIDAD II *Integral de Riemann y sus aplicaciones básicas (ilustrar la definición en funciones simples).* *Teorema fundamental del cálculo.* *Función exponencial y logarítmica.* *Integración por partes.* *Teorema de cambio de variable.* *Artificios en el cálculo de integrales indefinidas.* *Integrales impropias.* *Aplicaciones de la integral (cálculo de áreas de regiones delimitadas por la gráfica de una o varias funciones, cálculo de trabajo, de centroides y de volúmenes de sólidos de revolución).* UNIDAD III *Sucesiones de funciones y convergencia.* *Series de funciones.* *Series de potencias.* *Series trigonométricas y series de Fourier.*

Por ejemplo, mientras en Física I (asignatura de primer semestre) se comienza prácticamente con la definición de *velocidad* y *aceleración*, es hasta Cálculo II (asignatura de segundo semestre) que se introduce el concepto de *derivada*. El problema radica en que, consultando la bibliografía básica recomendada para Física I (Halliday, Resnick y Walker, 2009), dichas definiciones parten de una concepción *diferencial*, aludiendo –implícita o explícitamente– a la resolución de *ecuaciones diferenciales ordinarias* con condiciones iniciales (introducidas formalmente hasta la asignatura de Ecuaciones Diferenciales en el segundo semestre) para deducir las fórmulas correspondientes al movimiento con aceleración constante.

De hecho, mientras que en Física I se pide, desde el inicio, interpretar las gráficas de posición, velocidad y aceleración con respecto al tiempo (Halliday, Resnick y Walker, 2009, Capítulo 2), el plan de estudios sugiere que la interpretación geométrica de la derivada (*crecimiento*, *decrecimiento*, *concavidad*, *máximos* y *mínimos*) sea abordada hasta Cálculo II. Más detalles sobre la desarticulación identificada se muestran en la sección Libros de texto en el capítulo **Revisión de literatura**.

En este sentido, una de las críticas actuales más frecuentes a la educación matemática tradicional en el Nivel Superior es la nula, escasa o artificial conexión que tienen los ambientes de aprendizaje con el *mundo real*, ya que esto es limitante para los requerimientos de su campo profesional. Esto se hace crítico en una comunidad de estudiantes en formación en una carrera fisicomatemática, pues se espera que sean capaces de articular los conocimientos de ambas disciplinas para estudiar fenómenos reales.

Si bien esta desvinculación se puede apreciar a lo largo de todas las etapas del sistema educativo mexicano, es particularmente visible en los niveles *Medio superior* y *Superior*, específicamente en las carreras del área STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, por sus siglas en inglés), puesto que las asignaturas que comprende refieren constantemente a conceptos que han surgido de estudios empíricos, pero cuyas características prácticas han sido traducidas a teorías de las cuáles solo se exponen los resultados más depurados y acabados para ser generalmente operados de manera meramente algorítmica.

Lo anterior supone, a primera vista, una contradicción con los procesos históricos y epistemológicos de estos sucesos pues, en la construcción de los conocimientos que fundamentan dichas asignaturas, la *experimentación* con fenómenos *reales* fue base indiscutible.

Es claro que reproducir fielmente las situaciones en las que los fenómenos fueron estudiados en *sus inicios*[2] y experimentar tal cual "a la manera" de antes, además de impráctico y dudablemente viable, conduciría al desaprovechamiento de los recursos teóricos y materiales con que se cuenta actualmente gracias al desarrollo científico. La labor en la investigación en matemática educativa tiene como uno de sus objetivos indagar sobre aquellos elementos que permitieron la emergencia del saber y evaluar su pertinencia para acompañar el aprendizaje dados los resultados que se conocen en la actualidad.

El aprovechamiento de esta diversidad de recursos demanda entonces un enfoque *holístico* del aprendizaje que concuerde con la complejidad de los ambientes educativos, considerando no solo la interacción de la persona con el objeto de aprendizaje, sino también las interacciones entre quienes construyen conocimiento y la exploración en contextos que promuevan la significación o resignificación del objeto.

En este orden de ideas, tras identificar el tema de género como una problemática *transversal*, se sientan las bases de una perspectiva para el proyecto: *hombres y mujeres deben tener la oportunidad de desarrollar sus capacidades e intereses al margen de su condición genérica*.

La pertinencia de considerar esta perspectiva se fundamenta en la persistencia de la brecha de género respecto a la participación de la mujer en la ciencia con todas las condiciones que engloba: estereotipos, emociones, expectativas, entre muchas otras. Es decir, en palabras de la vicepresidenta del Banco Interamericano de Desarrollo Julie T. Katzman[3], "no se trata solo de *algo amable* que podemos hacer, sino de una *necesidad*, productiva y esencial".

Lo anterior delimita el sentido que cobra en el presente estudio la *perspectiva de género*: como un elemento transversal basado en la prioridad de apoyar la equidad, partiendo del hecho de que el proyecto se aborda *desde* la matemática educativa y que en función de ello se incorporará en el desarrollo de la investigación.

Por otro lado, un enfoque *holístico* tiene presente que las matemáticas son parte de un sistema de aprendizaje humano en donde ninguna disciplina puede abarcarlo todo sin correlacionarse con las demás. Sin embargo, es importante aclarar en este sentido que no se pretende abarcar

---

[2] Aquí se enfatiza que es incluso prácticamente imposible hacer referencia a *un inicio* en el desarrollo científico.
[3] Parte de su discurso durante su conferencia en la edición 12 del Gender Summit, 2017, Santiago de Chile.

la complejidad *entera* del fenómeno educativo en el estudio –pues esto en sí sería inverosímil– sino mantener una visión abierta de tal complejidad.

1.2.2. Género y matemáticas

Hasta este punto se ha hablado de la cultura y de las matemáticas, pero ¿qué sería una *cultura matemática*? Dependiendo del entorno social del que se trate, esta podría presentar distintos matices y especificidades; sin embargo, existen ciertas características que se perciben comúnmente de ella en varios ambientes: *alto grado de dificultad*, *participación predominantemente masculina*, *asociación de su dominio con perfiles de gente aislada*, entre otras.

En conjunto, tales características pueden provocar un eventual *rechazo* hacia las matemáticas, lo cual, sumado a la complejidad que de por sí poseen y a otros factores más, da como resultado el ampliamente reportado problema del aprendizaje de las matemáticas.

Este fenómeno sociocultural se replica, e incluso intensifica, en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería, incluyendo la componente tecnológica que se halla cada vez más inmersa en la sociedad y en todas sus vertientes académicas y culturales. A raíz de ello, ha habido un creciente interés en la investigación educativa por estudiar dichas áreas. La consecuente referencia constante a ellas –como conjunto: ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas– provocó que eventualmente se les denotara por un mismo término: STEM, por sus siglas en inglés: *science*, *technology*, *engineering* y *mathematics*.

Parte de la importancia de la educación en el campo STEM radica en que las áreas que comprende son reconocidas como cruciales para el desarrollo económico sustentable de la humanidad. Dada esta prioridad –en principio económica– un argumento con el que suelen iniciar estudios que contemplan la variable *género* es que el capital humano no explotado constituido por las mujeres podría potenciar la fuerza de trabajo STEM, al representar el 50% de la población (Dasgupta y Stout, 2014, p. 21).

Pero más allá de esta necesidad, existe una *demanda real de equidad* para el desarrollo de *la mujer* fuera de los roles estereotípicos, aunado a una correspondiente (y no menos importante) emancipación *del hombre* de las categorías a las cuales la sociedad lo restringe.

Justamente, en el punto anterior se ha destacado "la mujer" y "el hombre" pues, como se discutió previamente, la *unicidad* de cada persona implica la imposibilidad de una caracterización absoluta sobre lo que significa *ser mujer* y *ser hombre*; sin embargo, pareciera que la sociedad, a través de sus diferentes sistemas, intentara perpetuar una clasificación arcaica y cerrada que, pese a haber avances, no ha sido superada aún.

En este sentido, de pronto podría parecer que la categoría de género en su forma *binaria* (hombre–mujer) limita al momento de realizar una investigación; no obstante, desde tiempos remotos se ha documentado una supremacía del hombre sobre la mujer, de *lo masculino* sobre *lo femenino*, con fuertes implicaciones en la forma de vida, en el trabajo y en la educación; una dicotomía que se ha reforzado "por el hecho de que casi todas las sociedades hablan y piensan binariamente, y así elaboran sus representaciones" (Lamas, 2013, p. 340).

En otras palabras, pese a ser base de un discurso divisorio, dicha concepción binaria ha permitido, al mismo tiempo, *visibilizar* una problemática que ha afectado a las mujeres como *grupo social* y, por ende, con ciertas especificidades colectivas –no restrictivas– que se han de explicitar y esclarecer con el fin de confrontarlas.

En particular, dada la comunidad en la que se enfoca la fase empírica de la investigación –estudiantes de una carrera fisicomatemática–, se presta especial atención al caso de las mujeres, pues desde hace tiempo se ha venido reportando una significativamente menor participación de ellas en el área STEM en comparación a los hombres (Zubieta y Herzig, 2016, p. 161; El Colegio de México, 2018, p. 47). Las razones de esta desproporción son aún poco claras y hasta cierto punto difusas; sobre ello, García de León (2002) expresa que:

> La erosión del modelo tradicional de división sexual en todas las facetas de la vida social, en un lapso temporal muy breve para lo que suele acontecer en los procesos de cambio, arroja sobre esta faceta de la vida social toda una caterva de ambigüedades, matices contradictorios, opiniones enfrentadas que nos obliga a cribar fino y a tratar de aportar algo de claridad tanto a los hechos como a los discursos sobre género. (p. 197).

Una situación que destaca la autora en dicho sentido es la dualidad de la *igualdad discursiva* frente a la *divergencia fáctica*, en cuanto "las opiniones se muestran más avanzadas de lo que acontece en la esfera de lo real" (García de León, 2002, p. 197).

Algunas manifestaciones de esta dualidad pueden observarse desde la investigación. Diversos resultados nacionales e internacionales frecuentemente coinciden en una *brecha de género* respecto a la participación de las mujeres en matemáticas y ciencia; sin embargo, como comenta Fennema (2000), lamentablemente el trabajo de quienes se han dedicado a investigar este tema ha llegado a tener el efecto paradójico de crear un discurso acerca de que las mujeres *no pueden hacer matemáticas* (como se citó en Steinthorsdottir y Herzig, 2014, p. 130).

Es decir, en lugar de cuestionar las razones posibles de las diferencias reportadas, los resultados se asumen como justificaciones plausibles de que las mujeres en realidad no pertenecen a esa área. Esta interpretación refleja creencias culturales fuertemente arraigadas acerca de que hombres y mujeres son diferentes de manera innata en cuanto a destrezas e intereses, y probablemente persisten por la idea de que esta diferencia se considera natural y no discriminatoria (Ferguson, 2003, como se citó en Riegle–Crumb y Humphries, 2012, p. 291). Así, llega un punto en que la problemática de género parece *naturalizarse* y ello obstaculiza tanto su identificación y visibilización como su confrontación.

Por supuesto, como se ha venido señalando, este fenómeno no se restringe a un solo sexo o grupo social, pues hombres, poblaciones indígenas, personas con identidades de género distintas al perfil *dominante*, personas con discapacidad, entre otras, son también objeto de discriminación en este y otros campos. Cada uno, indiscutiblemente, merece y requiere atención, pero hacerlo implica realizar estudios minuciosos con la profundidad que demandan. Por ende, se aclara que ello queda fuera del alcance de la presente investigación.

El grado de aceptación (reflejo del *statu quo*) que reciban los diversos discursos sobre el rol de cada persona en las matemáticas tendrá fuertes implicaciones en el *sentido de pertenencia* que desarrollen en su comunidad, siendo especialmente vulnerables aquellas que se encuentren en más de un grupo social *marcado*[4].

De manera particular, Damarin (2000, como se citó en Steinthorsdottir y Herzig, 2014) señala que una persona *hábil* en matemáticas comparte características con quienes se encuentran en *categorías marcadas*. Por ejemplo, en cuanto se suele asumir que se trata de personas

---

[4] El término "marcado" se usa aquí en concordancia con la caracterización que Suzanne Damarin propone sobre las *categorías marcadas* (Damarin, 2000, pp. 72-74, como se citó en Steinthorsdottir y Herzig, 2014, pp. 130-131). Para más detalles, consultar la subsección *Transversalidad del género* en el capítulo **Marco teórico–conceptual**.

incompetentes para afrontar la vida diaria de algún modo (como el tener pocas habilidades sociales) y, a la vez, de personas intimidantes por poseer poder (como su dominio en la materia), aunque se les marque en general como *impotentes* (como débiles).

Lamentablemente, tales visiones estereotípicas pueden hacer que ingresar y permanecer en el campo sea particularmente desafiante para las mujeres y otras *minorías* (Steinthorsdottir y Herzig, 2014, p. 131). Con relación a dichas visiones, Spelke (2005) considera tres afirmaciones populares acerca de las diferencias cognitivas que suelen atribuirse al sexo para justificar la diferencia en la representación de hombres y mujeres en las carreras de alto nivel en matemáticas y ciencia[5].Esta investigadora de Harvard discute tal diferencia –reportada en varios países– argumentando que lo más probable es que el desempeño de hombres y mujeres en pruebas estandarizadas refleje una compleja mezcla de factores sociales, culturales y biológicos (p. 956).

Respecto a tales factores, Master y Meltzoff (2016) parten de cuatro barreras sociales para las mujeres en STEM reportadas en la investigación: (a) actitudes de personas cercanas y demás acerca de qué es más apropiado para una mujer; (b) falta de visibilidad de representantes y modelos a seguir; (c) una sistemática baja autoestima acerca de qué tan bien pueden desempeñarse las mujeres; y (d) discriminación en tales campos que impiden que las mujeres calificadas obtengan las mismas oportunidades que los hombres (p. 217). Ante ello, proponen desde el entorno escolar: hacer que los salones tengan una decoración neutral (sin objetos estereotípicos); hacer énfasis en que las habilidades requeridas en el área STEM son maleables; remarcar que las carreras STEM involucran trabajo colaborativo; y mostrar modelos de rol con quienes puedan identificarse de algún modo, ya sean mujeres u hombres (p. 227).

Si bien estos aspectos son *independientes* del contenido matemático de un curso, en el enfoque seguido para la presente investigación se considera que estos no son menos relevantes en la generación de espacios inclusivos, pues diversas investigaciones dan cuenta de los efectos

---

[5] Tales características son, a grandes rasgos, (a) que los hombres están más enfocados en objetos –mientras las mujeres se enfocan a las personas– desde el inicio de su vida y por lo tanto están predispuestos a aprender mejor que ellas acerca de los sistemas mecánicos; (b) que los hombres tienen un perfil con habilidades espaciales y numéricas que les genera mayor aptitud para las matemáticas; y (c) que los hombres son más variables en sus habilidades cognitivas, es decir, más hombres muestran un talento matemático extremo –positivo o negativo– (Spelke, 2005).

negativos que tiene la *amenaza del estereotipo* en el aprovechamiento escolar de las mujeres (Steele, 1997) y de cómo su atenuación favorece significativamente su desarrollo (Good, Aronson y Harder, 2008).

Aunado a lo anterior, se ha de discutir el propio tratamiento del conocimiento matemático pues, como evidencian Farfán y Simón (2016), la desatención al *carácter funcional* del saber en el discurso matemático escolar plantea de entrada un obstáculo para la equidad en la construcción social del conocimiento. Ello refuerza la necesidad de un currículo escolar articulado que permita generar espacios de aprendizaje *integradores*.

Particularmente, en la universidad de donde provenían las y los participantes de la fase empírica de la presente investigación, menos de la tercera parte de la población estudiantil eran mujeres y, de acuerdo con investigaciones previas en la comunidad (Carranza–Rogerio, 2016), en la mayoría de estas estudiantes persisten concepciones estereotípicas sobre su campo. De ahí que, si bien la variable género no es un objetivo *central* en la investigación, una perspectiva de género sí se considera pertinente y fundamental para desarrollarla.

1.3. Recomendación de lectura

Para una lectura más ágil de la tesis se sugiere leer los siguientes apartados:

- Resumen
- Capítulo 3 – **Problema de investigación**
  Síntesis de la revisión de literatura (artículos, libros de texto y tesis) y el cómo esta condujo a la definición del problema de investigación.
- Sección 4.6 – Articulación a través de las dimensiones
  Síntesis y articulación de los elementos en el Marco Teórico–Conceptual (TSME, STEM, género, tecnología y modelación) a través de las dimensiones *didáctica*, *epistemológica*, *cognitiva* y *social*.
- Capítulo 5 – **Hipótesis y preguntas**
  Hipótesis epistemológica y preguntas de investigación.
- Sección 6.3 – Instrumentos

Descripción del diseño implementado durante la fase empírica del estudio (trayectoria hipotética de aprendizaje) y de la encuesta sociocultural aplicada a quienes participaron.

- Sección 7.2 – Análisis de datos

  Análisis de los datos recabados durante la fase empírica del estudio (resoluciones individuales y socialización de resultados).
- Capítulo 8 – **Discusión**

  Descripción sintetizada y discusión de los principales hallazgos de la investigación.
- Capítulo 9 – **Conclusiones**

  Postura ante la problemática identificada y recomendaciones.
- Capítulo 10 – **Prospectivas**

  Posibles líneas para investigaciones futuras.

2. Revisión de literatura

Con base en las motivaciones que incentivaron el inicio de este proyecto de investigación (sección 1.1) y tomando en cuenta la problemática general que se delineó en el primer capítulo (subsecciones *1* y *1.2.2*), se emprendió una revisión de literatura respecto a las temáticas involucradas. Esta revisión se fue especializando cada vez más hasta acotar la investigación al tema de ecuaciones diferenciales y es en esa dirección que se comparte a continuación un sumario de los principales resultados hallados.

A lo largo de la descripción de dichos resultados, se dan indicios sobre la manera en la cual se fueron tomando en cuenta para empezar a definir la fundamentación teórica del estudio (capítulo 4). Esquemáticamente, el presente capítulo se divide en tres secciones principales: Tendencias en investigación (sección 2.1), Libros de texto (sección 2.2) y Tesis en Matemática Educativa (sección 2.3).

La primera sección se subdivide en apartados que están asociados a los principales elementos que se identificaron en la revisión: *Modelación matemática* (subsección 2.1.1), *Física en la contextualización* (subsección 2.1.2), *Tecnología y educación STEM* (subsección 2.1.3), y *Género y matemáticas* (subsección 2.1.4).

La segunda sección se subdivide en dos apartados con las observaciones producto de la revisión del *Libro de Física* (subsección 2.2) y de los *Libros de Ecuaciones Diferenciales* (subsección *2.2.2*). Similarmente, la tercera sección se subdivide para presentar resultados de las dos tesis que se analizaron de manera especial: la

Tesis doctoral de Hernández (1995) en la subsección *2.3* y la *Tesis doctoral de Arrieta (2003)* en la subsección *2.3.2*.

A manera de preámbulo, en el sistema educativo mexicano actual, los cursos de *Cálculo Diferencial* e *Integral* (como una sola asignatura o por separado) suelen introducirse en el Nivel Medio Superior, mientras que la asignatura de *Ecuaciones Diferenciales* (ED) se incluye usualmente hasta los primeros cursos del Nivel Superior, especialmente en los programas de ciencias e ingeniería.

En los programas de estudio y en los libros de texto se aprecia que la *continuidad* de los temas tratados en estas asignaturas a través de ambos niveles educativos se tiende a basar comúnmente en los algoritmos para la *obtención* de la derivada o la integral, con el fin de ser aprovechados en la solución de ecuaciones diferenciales mediante métodos específicos.

El proceso anterior ha sido ampliamente reportado como insuficiente para un *uso* consciente y efectivo de las ecuaciones diferenciales. *Consciente* en el sentido de que los procedimientos, aunque eventualmente sean condensados y optimizados mediante algoritmos, sean comprendidos en cuanto a dónde, cómo y por qué se usan, y *efectivo* en el sentido de que se obtenga una solución adecuada a la situación abordada.

Sin embargo, en un acercamiento "tradicional" (generalmente con tiempo, espacio y recursos limitados) se busca que los alumnos *se aprendan* (de memoria) los métodos para resolver determinados tipos de ecuaciones diferenciales y su trabajo se evalúa a través de *problemas* con una estructura (*estándar*) que suele consistir en hallar la solución de una ecuación diferencial particular, ya sea planteándola directamente, o bien, añadiendo que tal ecuación *modela* cierto fenómeno, de tal manera que se obtenga la ecuación a resolver tras "rellenar" los datos proporcionados en una fórmula dada.

Esto deviene en el círculo vicioso descrito por Artigue (1995) en el que, para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que el alumnado puede hacer mejor y esto es, a su vez, considerado por el alumnado como lo esencial, ya que es lo que se evalúa (p. 97).

2.1. Tendencias en investigación

En respuesta a acercamientos *tradicionales*, se han desarrollado una serie de propuestas innovadoras para la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde la investigación.

En la presente sección se describe brevemente en qué consisten algunas de ellas a través de tres elementos que destacaron durante su revisión: la *modelación*[6] *matemática*, el *uso de la tecnología*

[6] *Modelado* o *modelamiento*, dependiendo del enfoque.

y la *contextualización mediante fenómenos físicos*. Estos elementos están presentes en la mayoría de las propuestas revisadas, pero el énfasis que se hace en unos u otros depende del enfoque de cada una. Con base en dicho énfasis es que se ha subdividido esta sección para su presentación.

2.1.1. Modelación matemática

La *modelación* recibe diferentes nombres e interpretaciones y, por ende, el énfasis que se hace en ella es variable. Desde algunos acercamientos se le considera un constructo teórico esencial, con características o fases bien delimitadas; mientras que para otros se trata de un término menos específico que alude a una especie de *traducción* en términos matemáticos.

En general, desde varias posturas se resalta la importancia de partir de fenómenos reales para que, a partir del contexto, se reconozcan algunas condiciones necesarias en la definición de la ecuación diferencial ordinaria, así como algunas tendencias posibles en su solución. De manera particular, en este proceso se observa un especial interés en los acercamientos *cualitativos*.

En el caso de Suárez (2014), se concibe a la *modelación* como una construcción teórica que un individuo realiza al enfrentarse a una tarea matemática en la que pone en juego sus conocimientos, cuyas características son que posee estructura propia y que está constituida por un sistema dinámico. En dicho sistema se incluye la *simulación*, la cual propicia a su vez el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, pues busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes (p. 18). En el análisis de las actividades planteadas en su investigación se observa que un trazo de forma global incluye decisiones sobre la elección de las variables a representar por cada uno de los ejes coordenados, la elección de un punto de referencia, la elección de los cuadrantes y la percepción de aspectos característicos de la gráfica como puntos iniciales y finales, así como puntos extremos (p. 159). Un elemento de debate se observó al analizar de manera simultánea dos órdenes de variación a partir de gráficas de posición y velocidad de una misma situación de movimiento (p.160).

Una dificultad más con respecto a la modelación es reportada por Cordero (2016), quien apunta que “se destaca la recurrente necesidad, en el cotidiano, de relacionar un ‘dibujo’ o una gesticulación con el movimiento mismo, es decir buscan que el ‘dibujo’ guarde cierta fidelidad al movimiento en cuestión” (p. 82), por lo cual invita a “considerar las trayectorias no como errores, sino como indicadores para incorporar la realidad del ciudadano en el aula" (p. 83). En otra obra, Cordero et al. (2009) señalan que:

> La dimensión social de la epistemología en sus aspectos matemáticos en general y de modelación matemática en particular [...] se ve seriamente afectado por la falta de antecedentes matemáticos en la mayoría de los sujetos involucrados [...] lo que ha privado la modelación matemática de la potenciación [...] por parte de la sociedad. (p. 1719).

Plaza (2015) expone algunas perspectivas respecto al *modelamiento* en ingeniería para el caso particular de las ecuaciones diferenciales, entre las cuales es posible distinguir características como: la necesidad de interpretar la situación a modelar, la relación entre lo teórico y lo práctico, así como el uso de *métodos sistémicos*. Asimismo, tanto en dicha revisión como en un trabajo posterior (Plaza, 2016), el investigador destaca entre las dificultades para el modelamiento: la identificación y clasificación de parámetros y variables, la transición entre diferentes sistemas de representación, y la interpretación de la solución en estos sistemas con relación al significado de la derivada.

De este modo, los puntos anteriores sugieren una tendencia a acercamientos *cualitativos* más allá de los meramente analíticos. Tal es el caso también de Fallas (2015), quien propone abordar el teorema de existencia y unicidad a través de argumentos numéricos y visuales además de los analíticos para la comprensión de este conocimiento, partiendo de un análisis histórico de la construcción de dicho teorema en contraste con la costumbre didáctica alrededor de él. En particular, analiza dos métodos de aproximación: el de las *quebradas* (usado por Cauchy y Lipschitz) y el de *cuadraturas* (de Picard).

Asimismo, en el trabajo de Suárez (2014) se presenta un acercamiento cualitativo, pues "se define una construcción epistemológica del desarrollo del uso de las gráficas en la figuración de las cualidades [...] descrito en términos del debate entre el funcionamiento y forma del uso que Oresme hace de las figuras geométricas para modelar el cambio y la variación" (pp. 81-82). Cordero, Cen y Suárez (2010) señalan al respecto que "su *funcionamiento* y *forma* estaba basada en la posibilidad de representar diferentes grados de intensidad de una cualidad por medio de segmentos y diferentes cambios por medio de figuras" (p. 192).

De acuerdo con estos autores, el *uso* tiene inherente al binomio *funcionamiento y forma* (Cordero, Cen y Suárez, 2010, p. 199). A partir de los usos de las gráficas que identifican en el bachillerato, se puede inferir que *funcionamiento* alude al por qué y para qué se usan, mientras que la *forma* alude al cómo se da ese uso.

En la dirección cualitativa también se encuentra, por ejemplo, el trabajo reportado por Martínez, Pluvinage y Montaño (2017), el cual tiene por objetivo "proporcionar un acercamiento diferente al concepto de derivada en el que no necesariamente se tengan que introducir elementos teóricos que tradicionalmente han resultado complicados para poder definirla y enseñarla" (p. 17), aprovechando el uso de las *tecnologías digitales* para enseñar los aspectos físicos y matemáticos de los temas estudiados. Una de sus propuestas plantea analizar la grabación de un aparato experimental (resorte con movimiento oscilatorio amortiguado) a través de *VidAnalysis* para generar una nube de puntos cuyos valores sean ajustados en GeoGebra a través de la interacción con un conjunto de parámetros (modificando valores como amplitud, fase y amortiguamiento) que permitan identificar la función asociada al modelo del comportamiento observado (pues la gráfica correspondiente a cada modificación se muestra de forma paralela, siendo además posible colocarla en el mismo plano que la nube de puntos para una comparación directa).

En la propuesta anterior se comenta que el modelo ha de ser simplificado con la intención de que el estudiante tenga "un acercamiento gradual a su descripción" (Martínez, Pluvinage y Montaño, 2017, p. 11). Además, los autores proponen que luego se obtenga la derivada de la función identificada con el fin de determinar el cambio en el desplazamiento del resorte con respecto al tiempo, pues argumentan que el cálculo de esta velocidad permitiría asociar el *recurso* de la derivada de una función con el *esquema* de máquina que realiza un algoritmo (con base en los *recursos* y *esquemas conceptuales* detectados por Hu y Rebello, 2013, citados en el mismo reporte); sin embargo, apuntan que lo deseable sería que, para llegar a ese punto, se haya explicitado previamente la relación que existe entre la derivada y la velocidad.

De hecho, un punto particularmente importante señalado por los autores con respecto a la noción de derivada es el papel que la notación juega dependiendo de si un problema de variación se aborda en física o matemáticas. En específico, convencionalmente la letra "delta" (Δ) se suele emplear para referirse a incrementos *pequeños*, pero no *infinitamente*, pues para el caso límite se suele utilizar la letra d; no obstante, en algunos textos de física de secundaria y nivel bachillerato se tiende a usar la primera notación, posiblemente "porque los cambios expresados como diferencias finitas permiten una aproximación suficiente a ciertos fenómenos observados" (Martínez, Pluvinage y Montaño, 2017, p. 7).

Rubio, Prieto y Ortiz (2016) proponen el trabajo con la modelación de la mano de la simulación en ambientes digitales. Para estos autores, un *modelo matemático* es una descripción de un fenómeno del mundo real cuya finalidad es comprender el fenómeno o hacer predicciones acerca de su comportamiento futuro. En especial, abordan la simulación de un fenómeno de caída libre y comentan al respecto que "la teoría física y matemática en torno a este movimiento nos aporta modelos que apoyan el diseño de forma directa o indirecta, y el GeoGebra proporciona los insumos necesarios para la representación de la situación" (p. 94).

Es decir, se reconoce la necesidad de un análisis físico de la situación previo a su *matematización* vía el modelo, a la vez que se identifica el apoyo del software para poder representar esta relación entre lo físico y lo matemático.

La *representación* emerge entonces como un elemento clave en la modelación, como Guevara (2011) señala, este proceso integra: símbolos, signos, figuras, gráficas y construcciones geométricas. Más aún, con relación a la simulación en el trabajo con modelos, el autor considera pertinente distinguir las definiciones de ambos términos para evitar ambigüedades: "la diferencia semántica [entre *modelo* y *simulación*] reside en que un modelo es una representación de estructuras, mientras que una simulación, infiere un proceso o interacción entre las estructuras del modelo para crear un patrón de comportamiento" (p. 10). Particularmente, en el caso de la simulación en ambientes digitales, el patrón de comportamiento se construye a través de la programación de los elementos en el modelo, de tal manera que la *animación* producida sea consistente con el fenómeno que se simula y con las condiciones a las cuales se restringe.

Respecto a cómo ocurre la modelación en la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, el trabajo de la doctora Ruth Rodríguez es un importante referente. Ella propone el *ciclo de modelación* que se muestra en la ILUSTRACIÓN 2-1, en el cual reconoce, además del dominio *real* y el *matemático*, dos dominios intermedios: uno *físico* y uno *pseudo–concreto*.

En particular, parece ser que el dominio *pseudo–concreto* se asocia con el uso de términos o representaciones que se encuentran más cerca de lo concreto o *cotidiano* para el alumnado (Rodríguez, 2010, p. 197). De acuerdo con la investigadora, Henri (2001) establece que el paso de la Situación Real (SR) al Modelo Pseudo–Concreto (MPC) y la transición entre las etapas de modelación de Resultados Pseudo–Concretos (RPC) hacia la Confrontación Modelo–Situación Real (CM–SR) "son importantes a ser consideradas desde un punto de vista didáctico si realmente se pretende enseñar la modelación" (p. 199).

No obstante, tras un análisis de libros de texto, la autora identificó que el primer paso (SR al MPC) es muy pocas veces dejado al alumnado, así como el establecer un Modelo Físico. Además, que el establecimiento de la ecuación diferencial tiene lugar más ampliamente en clase de Física que de Matemáticas, aunque se guía al alumnado en el proceso. Y que en ambas clases existen pocos ejercicios para confrontar al alumnado a la transición entre los Resultados Pseudo–Concretos y la Confrontación Modelo–Situación Real (Rodríguez, 2010, p. 199).

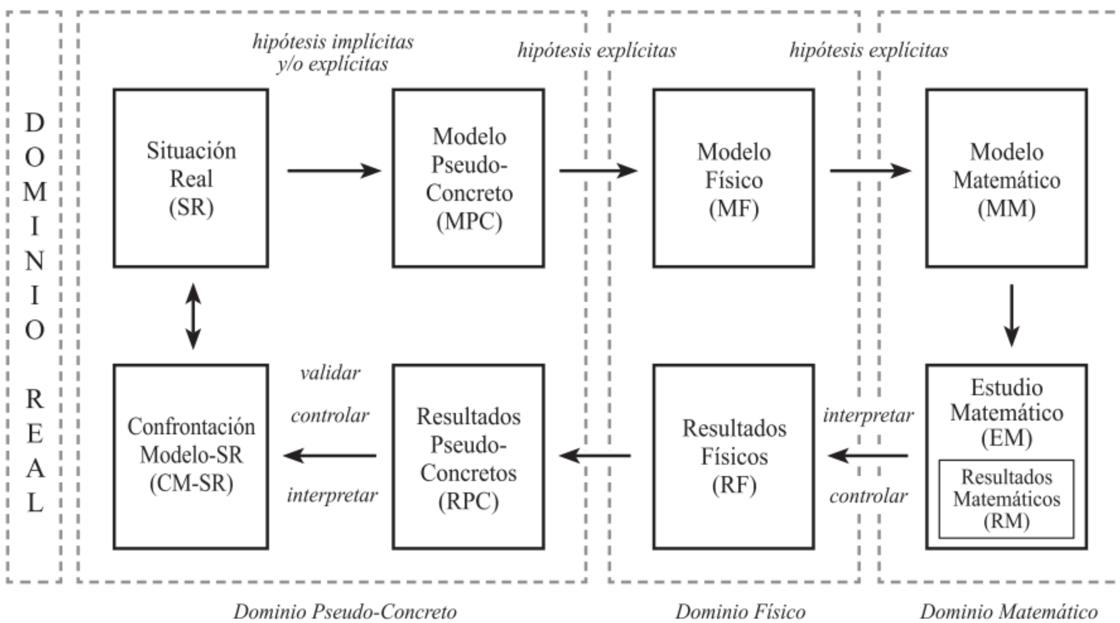


ILUSTRACIÓN 2-1 Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010) (tomado de Rodríguez y Quiroz, 2016, p. 104).

El hallazgo anterior es consistente con la observación de Romero y Rodríguez (2003) respecto a que, en las didácticas tradicionales, "se confunde los procesos de matematización de los fenómenos físicos con la aplicación de fórmulas y algoritmos" (p. 57).

Esto conduce a un segundo aspecto que se discute de manera recurrente en los trabajos que abordan la modelación de situaciones reales: la *relación entre la física y las matemáticas*, usualmente explicada con base en el origen mismo de *lo diferencial* para describir fenómenos físicos.

2.1.2. Física en la contextualización

La física es, de manera resumida, una ciencia que estudia la materia y la energía en el tiempo y el espacio. Enunciada de esta manera, suele ser vista como una disciplina reservada y exclusiva de investigaciones teóricas o experimentales que se conducen en proyectos a gran escala.

Sin embargo, lo cierto es que, incluso etimológicamente, el término *física* hace alusión a algo más general: "lo relativo a la naturaleza"; pudiendo interpretarse como lo relativo a observaciones de la *realidad* circundante.

De ahí que una persona pudiera tener un primer acercamiento a esta disciplina al cuestionarse sobre el mundo a su alrededor, haciendo algunas inferencias sobre los fenómenos que observa y explorando la factibilidad de sus suposiciones; por supuesto, esta labor puede ser llevada a cabo en diferentes niveles.

El desarrollo de la ciencia ha conducido a que, actualmente, se parta de ciertos criterios para evaluar los hallazgos en función del procedimiento seguido para llegar a ellos. No obstante, algo que se ha de destacar aquí es el origen tan *cotidiano* que tuvo una rama que ahora es tan avanzada como lo es la física.

El tratar de rescatar ese origen es uno de los propósitos actuales de la matemática educativa, pues se reconoce que la física y las matemáticas se desarrollaron conjuntamente a partir de él. En este sentido, la investigación de Farfán (2012), señala "la importancia de estudiar el contexto físico a fin de procurar un acercamiento fenomenológico que posibilite futuros diseños didácticos en contextos afines a la ingeniería en las diversas especialidades que lo propicien" (p. 270). Particularmente, para el área de cálculo, la autora señala que "en el contexto físico ha de tenerse una clara referencia para distinguir *lo que varía* respecto *a qué* es lo que produce tal variación" (p. 271); aunque advierte que el retomar el fenómeno físico que dio origen a un determinado concepto matemático puede representar en sí una dificultad mayor que el concepto mismo estudiado.

Rodríguez y Bourguet-Díaz (2015) abordan lo anterior bajo la postura de que incorporar un punto de vista *sistémico*, con el fin de entender el entorno completo del problema, es de gran provecho pues, por ejemplo, como parte de los resultados que reportan al implementar este enfoque en un diseño, está el que algunos aspectos de interés social, ético y de desarrollo sustentable aparecieron en los argumentos que daban las y los estudiantes para dar respuesta al problema planteado y que, no obstante, este tipo de práctica de modelación tan observada en la mayoría de campos de la ingeniería es apenas atendida en las clases tradicionales de matemáticas.

Típicamente, cuando se aborda un problema en el aula, se parte desde la visión formal, delimitando la situación mediante una serie de restricciones que proporcionan de antemano los *valores* necesarios para ser introducidos en una fórmula (cuya validez regularmente es asumida partiendo de su presentación teórica[7] y no como resultado de una *exploración* o contextualización previa) y obtener la ecuación a resolver.

Las propuestas más actuales presentan una visión diferente a la tradicional, partiendo de una exploración de un fenómeno de variación, en el cual no se pida solo resolver una fórmula, sino *modelar matemáticamente* el fenómeno para establecer una expresión que lo describa y entonces interpretar sus elementos y soluciones con relación a él.

Lo anterior se observa de manera particular en el trabajo de Rodríguez y Quiroz (2016), cuyo objetivo principal fue identificar el impacto que tienen los materiales tecnológicos en las transiciones entre las etapas del *ciclo de modelación* (ILUSTRACIÓN 2-1) propuesto por Rodríguez (2007, 2010, como se citó en Rodríguez y Quiroz, 2016, p. 104).

Las investigadoras reportan que entre los principales elementos del proceso de modelación matemática promovidos por el diseño que implementaron está el que, al pasar de la situación real al modelo físico, el alumnado relaciona constantemente términos físicos para el entendimiento del problema, permitiendo con ello que la creación del modelo físico tenga sentido con el fin de dar respuesta a la situación real. De este modo, se aprecia una relación recíproca entre las matemáticas y la física pues, así como el modelo matemático describe la situación planteada, "los mismos conocimientos físicos permiten una verdadera comprensión del problema" (Rodríguez y Quiroz, 2016, p. 113).

[7] Kuhn (2013), en su obra *La estructura de las revoluciones científicas* (primera edición original en inglés: 1962) hace un amplio análisis de esta situación; en particular, comenta que: "Los científicos trabajan a partir de modelos adquiridos a través de la educación y de la subsiguiente exposición a la bibliografía, a menudo sin conocer plenamente o sin necesidad siquiera de saber qué características han conferido a tales modelos la condición de paradigmas comunitarios" (p. 165).

De hecho, las autoras comentan que, al cuestionar sobre las características del modelo matemático generado, dado que la ecuación diferencial, sus partes y su solución se asumieron con sentido tanto físico como matemático, fue posible anticipar la solución, de tal manera que, incluso antes de resolver el problema analíticamente, se tenía una idea del comportamiento que seguiría la respuesta (Rodríguez y Quiroz, 2016, p. 117). Más aún, ello permitió que en una etapa posterior los mismos alumnos pudieran encontrar errores en sus cálculos, puesto que sabían de qué manera se iba a comportar la respuesta y hacia qué valor debía tender (p. 118). Esto último se vio facilitado en gran medida por el hecho de que la mayor parte del alumnado había cursado previamente una materia que proveía el sustento teórico físico necesario: Electricidad y Magnetismo, pues en el diseño se abordó un circuito eléctrico RC (Resistencia–Capacitor). Por otro lado, las investigadoras afirman que la tecnología empleada (calculadora gráfica y sensor de voltaje) jugó también un papel crucial para la visualización y correspondiente asociación entre los dominios (p. 120).

Con respecto al análisis de fenómenos físicos, un conflicto al que suelen enfrentarse los acercamientos no tradicionales cuando abordan problemas de contexto son las *limitaciones* durante la experimentación, dada la dificultad para restringir el fenómeno con el fin de minimizar los efectos de variables que, para fines didácticos, no permitirían iniciar con un modelo matemático *simple* al que después pudieran ser "agregadas" algunas de las variables antes despreciadas.

A raíz de dicho conflicto es que nacen iniciativas que proponen que los fenómenos *reales* sean abordados a través de *simulaciones*, en las cuales se tenga presente –o se haga explícito– que se trata de casos *ideales* limitados a ciertas condiciones. Más adelante se describen las propuestas de Suárez (2014) y de Martínez, Pluvinage y Montaño (2017) en este sentido.

Particularmente, lo anterior invita a preguntarse: ¿cómo compaginaría el uso de *simulaciones* con la postura de abordar las matemáticas partiendo de un fenómeno *real* (cercano a la realidad de la comunidad estudiada: estudiantes de una carrera STEM)?

La respuesta podría abordarse desde cómo se concibe una experimentación con el fenómeno. En este sentido, explorar una simulación podría verse como una forma de experimentar. De acuerdo con Arrieta y Díaz (2016), la *experimentación* puede plantearse en tres *ambientes*:

- *Presencial*: los datos se obtienen desde la experimentación directa con el fenómeno.

- *Virtual*: recurriendo a simulaciones del fenómeno con aplicaciones informáticas.
- *Discursivo*: la experimentación se establece recurriendo a una narración, una figura y una tabla inicial de datos, o con datos obtenidos de la red (p. 27).

Y cada modalidad trae consigo características propias que *imprimen su huella* en la forma de modelar (Arrieta y Díaz, 2016, p. 27).

Al manifestar que las características respectivas de cada ambiente "imprimen su huella" se alude a que optar por uno de los tres no se restringe a una elección accesoria o superficial, sino que implica reconocer propiedades particulares de cada uno, en correspondencia con los objetivos que se pretenda cubrir.

En sí, no se trata de contraponer estos ambientes, sino de identificar lo que cada uno propicia; por ejemplo, al estudiar un fenómeno de variación. En este sentido, si bien la costumbre didáctica en los cursos usuales de Ecuaciones Diferenciales es permanecer en el ambiente *discursivo*, se podría plantear una articulación con alguno de los otros dos o ambos.

Por ejemplo, a través de un software de matemática dinámica se podría partir de una tabla de valores proporcionados en un ambiente *discursivo* y experimentar con ellos de manera *virtual*. Similarmente, se podría partir de un conjunto de datos recabados en una experimentación *presencial* (cámaras, sensores, etc.) y manipularlos *virtualmente*.

Respecto al ambiente *virtual*, Rodríguez y Quiroz (2016) concluyen que "la tecnología, debidamente elegida y puesta en marcha en actividades clave del proceso de modelación, puede ser un elemento importante e, incluso, indispensable para la generación de relaciones entre los diversos dominios del ciclo de modelación matemática [ILUSTRACIÓN 2-1]" (p. 120).

Esta idea es explorada por Parada, Conde y Fiallo (2016) en el estudio de la variación con GeoGebra. La investigación que condujeron tuvo por objetivo "*caracterizar las habilidades básicas del Pensamiento Variacional que son necesarias para la comprensión del Cálculo Diferencial*" (p. 1032) y comentan que sus reflexiones emergieron del diseño e implementación de un curso de Cálculo Diferencial mediado por un software matemático interactivo "alrededor de problemas de cambio, variación, interdependencia, aproximación y tendencia para tratar los conceptos de función, límites y derivada" (p. 1032).

De manera particular, los autores identifican al *cambio* como núcleo conceptual del cálculo que surge de identificar y usar *variables*, y aclaran que más que considerarlas solo como una letra que representa un valor desconocido en una ecuación, se les conciba "como cantidades mesurables, que cambian cuando las situaciones en que ocurren cambian" (Parada, Conde y Fiallo, 2016, p. 1035). Esta concepción resulta esencial en el trabajo con tecnología y, en especial, en ambientes digitales con posibilidades de interacción dinámica, pues además de que se muestran de manera inmediata los efectos del cambio en ciertos parámetros y variables sobre otros, quien realiza las acciones en este ambiente puede identificar los efectos de las variaciones que provoca.

Sobre el uso del software (GeoGebra) empleado en la investigación de Parada, Conde y Fiallo (2016), los autores destacan que tales variaciones se pueden representar en movimiento a través de una *simulación*, con lo cual se posibilita la visualización de variantes e invariantes "para poder analizar y comprender las propiedades que caracterizan a cada una de ellas" (p. 1035).

Entonces, respecto a la pregunta de ¿cómo compaginaría el uso de *simulaciones* con la postura de abordar las matemáticas partiendo de un fenómeno *real* (cercano a la realidad de la comunidad estudiada: estudiantes de una carrera STEM)?, en el caso de los ambientes digitales, la respuesta podría partir de considerar que, en principio, se espera que el alumnado se involucre *gradualmente* en actividades propias del contexto de su disciplina y, precisamente, las *simulaciones* permiten acceder a fenómenos físicos que se encuentran completamente controlados, es decir, donde las variables involucradas pueden ser delimitadas tanto como se requiera acorde con los objetivos del curso.

Además, dadas las capacidades computacionales actuales, la complejidad de las simulaciones puede aumentar para dar cabida a una mayor cantidad de variables (a tal grado que hoy en día es posible ver que pilotos aviadores, doctores, ingenieros en sistemas y hasta futbolistas entrenan en ambientes de *realidad virtual*). Al final, la respuesta radica en qué postura se adopta respecto a lo que se considera *real* y lo que se asume como objetivo en una situación de aprendizaje particular.

Lo anterior conduce a un tercer aspecto que con frecuencia constituye una parte importante de los estudios sobre la modelación de fenómenos físicos: el *uso de la tecnología*. En el siguiente apartado se explora este aspecto con relación a la educación STEM.

El término STEM, como se ha descrito anteriormente, es un acrónimo que alude a las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, por sus siglas en inglés. Su mención frecuente en la literatura se corresponde con la constante consideración de estas áreas en temas de creciente interés para la investigación actual; por ejemplo, por su papel crucial en el desarrollo sustentable a nivel internacional o por la escasa representatividad de las mujeres en estas disciplinas.

En particular, los ejemplos anteriores han sido abordados desde el plano educativo y ello ha dado lugar, eventualmente, al uso del término compuesto *educación STEM*. En ocasiones, este término se refiere simplemente a la educación en alguna de las áreas que engloba; en otras, el término adopta una connotación más innovadora sugiriendo ser parte de una corriente que busca *integrar* estas disciplinas para la educación.

Sanders (2009) hace un análisis de los usos de este término desde la aparición del acrónimo como "SMET" en la década de los noventa –dentro de las publicaciones de la *National Science Foundation* de Estados Unidos– hasta sus variantes actuales –como educación STEM integradora– con el fin de señalar la importancia de aclarar el sentido en el que se emplea para evitar ambigüedades[8].

Así, define el término *educación STEM* como la educación en cualquiera de sus disciplinas y el término *educación STEM integradora* como aquella que incluye acercamientos que exploran la enseñanza y el aprendizaje entre cualesquiera dos o más de las disciplinas STEM y/o entre una asignatura STEM y otra de un área distinta (Sanders, 2009, p. 21).

Con base en la distinción anterior, y en correspondencia con las motivaciones de la presente investigación, el término *integrador* adquiere dos connotaciones en este estudio: en cuanto al enfoque de educación STEM integradora y con relación a la constitución de ambientes inclusivos para el aprendizaje.

[8] Sanders relata que, en el lanzamiento de un programa universitario en su institución, él y sus colegas decidieron titularlo "Educación STEM", pero observaron que, al popularizarse el uso del término para referirse en general a la educación en cualquiera de sus disciplinas, el título se había hecho ambiguo, así que lo renombraron "Educación STEM integradora" pues el programa buscaba enfocarse en nuevos acercamientos integradores para el aprendizaje en esas áreas.

En especial, en el tema de la inclusión de género, Dasgupta y Stout (2014) hacen una síntesis de cómo se desarrolla la *sensación de pertenencia* en las mujeres en estas áreas:

> Una de las razones principales por las cuales una mujer se siente fuera de lugar en STEM es por el extendido estereotipo acerca de que los campos STEM, tales como las ciencias físicas, la tecnología, las matemáticas y la ingeniería son "cosa de chicos" (e.g. Nosek, Banaji y Greenwald, 2002). Las mujeres que creen en este estereotipo tienden a tener un desempeño menor en campos de matemática intensiva (Miyake et al., 2010) y poseen una sensación menor de pertenencia (Stout, Ito, Finkelstein y Pollock, 2013). El bajo nivel de pertenencia conduce a un mayor desgaste. Por lo tanto, la conciencia del estereotipo STEM–es–para–hombres puede convertirse en una profecía autocumplida [que una vez cumplida, sea en sí misma la causa de que se hiciera realidad]. (p. 24, traducción personal).

Ahora bien, con respecto al enfoque de educación STEM integradora, éste se compagina con el enfoque *sistémico* que se reportó previamente. De hecho, podría hablarse incluso de un paso de lo sistemático (estructural y relacionado) a lo sistémico (orgánico y correlacionado).

En concordancia con ello, en esta revisión se presentan resultados de investigación sobre el aprendizaje de las *matemáticas* (ecuaciones diferenciales) considerando su relación con la *ciencia* (física) y la *ingeniería* (comunidad afín) a través del uso de la *tecnología* (en la simulación, visualización y modelación, como se detallará a continuación). De ahí que el término STEM ocupe un lugar especial en el desarrollo del presente escrito.

La dimensión tecnológica se observa, por ejemplo, en el estudio de Suárez (2014) pues, como señala la autora, con su investigación "se ha contribuido a generar un marco de referencia que integra la modelación con la graficación y el uso de la tecnología" (p. 172). Particularmente, en su trabajo, el ambiente tecnológico se establece a partir del uso de calculadoras graficadoras (TI–Voyage), sensores y transductores de datos (p. 125).

De manera particular, la investigadora destaca que la tecnología permite identificar invariantes, pues muestra los efectos de la variación de parámetros en las representaciones gráficas asociadas a ellos. En su caso, la parte de la experimentación se centra primordialmente en la simulación *física* de ciertos fenómenos, siendo el posterior análisis de los datos el que se acompaña con el uso de herramientas digitales.

Un enfoque diferente sobre el uso de la tecnología lo proveen Villa–Ochoa y Ruiz (2010) en su investigación sobre la *variación*. Ellos retoman la propuesta de que "el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica” (Vasco, 2006, como se citó en Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 516) y agregan que:

> Es precisamente en este aspecto donde la Tecnología interviene como una manera de indagar no solo por procesos asociados a la modelación desde fenómenos de variación en otras ciencias; sino también, como una forma de producir y reproducir las relaciones variacionales que se dan entre algunos objetos matemáticos. (p. 516).

Más aún, los autores ofrecen una mirada alternativa a la representación matemática que posibilita el software (GeoGebra, en su caso). En lugar de considerarle como un *conjunto* de representaciones (algebraicas, numéricas y geométricas), sugieren que se le puede considerar como una *unidad* en la cual estos registros se encuentran armonizados, dinámicamente relacionados (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 527).

En este sentido, la *simulación digital* mediante animaciones interactivas en GeoGebra no entra en solo uno de los sistemas de representación convencionales (algebraico, numérico, geométrico), pues se trata en realidad de una representación *dinámica* con características específicas y que puede permitir articular a los demás sistemas mencionados.

En el trabajo de Marciuc y Miron (2014), se retoman dichas posibilidades dinámicas del software en los tres acercamientos que proponen para el estudio del movimiento curvilíneo, basados en los diferentes conocimientos matemáticos de estudiantes en educación preuniversitaria de los niveles noveno, décimo y décimo primero.

La propuesta de estas investigadoras tiene por objetivo mostrar las propiedades que poseen las aplicaciones de software interactivo para permitir la construcción, vista y puesta a prueba de los modelos considerados con el fin de desarrollar competencias matemáticas, tecnológicas y científicas, pues apuntan a una educación *interdisciplinaria*.

Para el noveno grado, se ilustra la aplicabilidad de la geometría euclidiana y el cálculo vectorial en el estudio de la *aceleración centrípeta*; en el caso del décimo grado, se propone el uso de coordenadas cartesianas para introducir el concepto de *radio de curvatura* en un punto de una trayectoria y, a partir de tales nociones, se justifica la relación entre la aceleración centrípeta, la *velocidad* y el radio de curvatura; finalmente, para el décimo primer grado se atiende el mismo problema pero, esta vez, usando herramientas del cálculo diferencial (en funciones continuas y diferenciables), el cual reconocen como una herramienta poderosa en la modelación de diversos procesos físicos (Marciuc y Miron, 2014, p. 284).

En los tres acercamientos propuestos para cada nivel se hace uso del software libre *GeoGebra* para la modelación del fenómeno físico. De manera particular, en el tercer acercamiento se usa para *simular* el movimiento circular uniforme de un punto material y visualizar el ángulo de rotación del vector radial y su dinámica. Las investigadoras señalan que una de las fortalezas de dicho software es que combina las características de un Sistema de Geometría Dinámica con aquellas de un Sistema Algebraico Computacional o CAS, por sus siglas en inglés (Marciuc y Miron, 2014, p. 281), por lo que se le considera un software de *matemática dinámica*.

De acuerdo con las autoras, estas capacidades son explotadas en la modelación al *animar* los objetos geométricos representados para obtener una simulación del fenómeno físico involucrado y señalan que sus beneficios pueden ser potenciados aplicando principios *constructivistas*. De este modo, señalan que nociones como la derivada, la velocidad y la aceleración, al ser representadas visual, dinámica e interactivamente con GeoGebra, pueden ser entendidas con mayor profundidad (Marciuc y Miron, 2014, p. 287).

En términos más generales, Suárez (2014) considera que en la *modelación* –al estar constituida por un sistema dinámico– la *simulación* es un elemento importante, pues mediante ella se pueden hacer ajustes en la estructura para producir un resultado deseable. Esto es consistente con la distinción que hace Guevara (2011) entre modelo y simulación (p. 10).

De ahí que, para la autora, la simulación se trate de un medio que propicia el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, ya que se busca explicaciones a un rango y se enfatizan invariantes. De tal forma que el modelo reproduce solo algunos aspectos del objeto original importantes para la investigación y deja de lado los demás (Suárez, 2014, p. 18), por lo que se ha de reconocer que se está trabajando con un modelo en un aspecto particular y ello implica establecer explícitamente la correspondencia entre las variables de la situación original que se están considerando y las de la simulación (p. 32); esto mismo se relaciona con el acercamiento gradual que proponen Martínez, Pluvinage y Montaño (2017, p. 11).

Por todo lo descrito hasta el momento es posible identificar que, en el estudio de las ecuaciones diferenciales a través de la modelación de fenómenos físicos, la tecnología tiene implicaciones que van más allá de automatizar cálculos o trasladar una impresión en papel a la pantalla, se trata de un *medio* que puede propiciar la construcción de conocimiento a través de sus propias características.

En particular, a partir de lo revisado, se comenzó a perfilar una *naturaleza dinámica* de la variación en la ecuación diferencial. Una naturaleza en estrecha relación con las capacidades dinámicas del medio. Por ende, se intuyó que en la elección del instrumento tecnológico para el diseño de una situación de aprendizaje influirían más aspectos además de lo didáctico.

En este sentido, Joubert (2017) trata el caso de los ambientes digitales con base en la concepción de *milieu* de Brousseau[9] y analiza el papel de la *retroalimentación*. Así, ella destaca como uno de sus elementos importantes al instrumento empleado, y agrega:

> El software computacional posee un "carácter cognitivo intrínseco" (Balacheff y Kaput, 1996, p. 469), lo cual significa, en primera, que algunos softwares pueden llevar a cabo ciertos procesos matemáticos o "hacer matemáticas" (Bokhove y Drijvers, 2010; Hoyles y Noss, 2003; Sutherland, 2007) para el usuario y, en segunda, que puede proveer retroalimentación matemática relevante para el usuario (Bokhove y Drijvers, 2010; Granberg y Olsson, 2015). En adición, tal retroalimentación es "rápida y esencialmente ilimitada... 'sin costo alguno'" (Hillel, 1992, p. 205). (p. 24, traducción personal).

En consecuencia, afirma que, en el caso del uso de software, el conjunto de supuestos epistemológicos es probable que sea más complejo que cuando no se usan herramientas digitales (Joubert, 2017, p. 24).

La afirmación anterior conlleva reconocer una complejidad en la *integración* de la tecnología en la matemática educativa y, por ende, a preguntarse cómo se podría analizar dicha integración. Ello se explora con mayor profundidad en lo sucesivo con respecto al enfoque particular adoptado para este proyecto, pues dicho enfoque se fue refinando a lo largo del desarrollo de la investigación.

Por el momento, resulta importante comentar el caso de *la representación y la realidad*. Si bien la cuestión de hasta dónde *algo* se considera "real" o bien "una de sus representaciones" conlleva una discusión filosófica que queda fuera de los objetivos de la presente investigación,

[9] Para Brousseau, las interacciones entre cada estudiante y el *milieu* se pueden conceptualizar como un diálogo entre ella, él o un grupo de estudiantes y la retroalimentación del *milieu* (Brousseau, 1997, como se citó en Joubert, 2017, p. 19).

al hablar de tecnologías digitales y, en especial, de software de matemática dinámica, la pregunta sobre si las representaciones generadas en este tipo de medio son *concretas* o no emerge como un cuestionamiento natural. Sobre todo, si se reconoce al contexto como un elemento esencial en la significación de conceptos matemáticos.

Esta cuestión es abordada por Sarama y Clements (2016) en el análisis de los manipulables virtuales (*virtual manipulatives*), entre los cuales se encuentra el software de matemática dinámica. Los autores refieren que, si estos manipulables no son *concretos* en el sentido físico, ¿cómo pueden satisfacer el rol pretendido? Y responden:

> Sorpresivamente, contrario a nuestra intuición, la tecnología puede proveer representaciones que son tan personalmente significativas para [las y] los estudiantes como los manipulables físicos (Yerushalmy, 2005). La literatura señala que las representaciones basadas en tecnología pueden ser incluso más manejables, "limpias", flexibles y extensibles que sus contrapartes físicas. (p. 73, traducción personal).

Para ejemplificar esto, se puede tomar el caso de GeoGebra. En este software, además de ser posible la construcción de simulaciones que se mantengan estables, es posible restringir la interfaz de tal modo que solo aparezcan ciertas ventanas (plano gráfico, hoja de cálculo, vista algebraica, entre otras) y ciertas herramientas que se adapten a las variables de control establecidas como necesarias en un diseño.

Por supuesto, esto conlleva cuestionarse sobre la deseabilidad de evitar o promover ciertos conflictos, pues en la experimentación presencial existen elementos que no es posible controlar; sin embargo, ello ha de estar en concordancia con los objetivos establecidos para la exploración.

Si lo que se pretende es –por ejemplo, en esta investigación– introducir la noción de ecuación diferencial a partir de la exploración de un fenómeno físico, es deseable que los errores posibles durante la experimentación se minimicen y se canalice la atención de cada estudiante a las variables que en principio se desean modelar, pues –en sí– el analizar las posibles causas del *ruido* en los datos queda fuera de los objetivos centrales del estudio. Aunque, ciertamente, se habrá de buscar que el alumnado tenga presente que las condiciones han sido limitadas con un cierto objetivo.

En el caso de la experimentación en ambientes digitales –la cual Arrieta y Díaz (2016) categorizan como *virtual* (p. 27)–, el ruido queda, de entrada, fuera de la generación de datos, pues aparecerá solo si se programa dentro de las condiciones del fenómeno simulado.

Respecto a lo “virtual”, Sarama y Clements (2016) llaman la atención a una aclaración conceptual necesaria. Ellos comentan que han decidido usar este término en su investigación –sobre los manipulables *virtuales*– para que concuerde con lo que se acostumbra en la literatura usual; no obstante, aclaran que prefieren el término "tecnológico" a "virtual" pues, en sentido estricto, el segundo significa "algo que no existe físicamente" (p. 73).

De hecho, en física se usa para calificar algo “que tiene existencia aparente y no real”[10] (como una *imagen virtual*). Sin embargo, los autores antes mencionados afirman que esos manipulables *sí existen* –aunque no en el mismo sentido– y que lo que importa en realidad es la experiencia fenomenológica de la usuaria o el usuario con el manipulable y las acciones que realiza en él.

En general, analizar el papel de la tecnología conlleva determinar los objetivos de la investigación con respecto a la población a la que va dirigida y lo que de ella se espera en su formación profesional.

En correspondencia con lo anterior, el trabajo ya comentado de Rodríguez y Bourguet–Díaz (2015), que propone abordar los problemas desde un punto de vista *sistémico*, contempla el uso del recurso tecnológico *Vensim* (en su versión demo para educación: “Personal Learning Edition”) para apoyar dicha visión en su diseño. Los investigadores reportan que parte del alumnado destacó ciertas capacidades del software como: permitir el entendimiento de las relaciones entre las variables para explicar y resolver el problema, describiendo el comportamiento y computando predicciones; facilitar la comunicación de ideas matemáticas a no–matemáticos; poseer la riqueza de producir gráficos para correlacionar hallazgos previos, entre otras. Sin embargo, señalan que una de las dificultades halladas fue que las y los estudiantes tuvieron problemas para establecer una conclusión sin apoyarse en el software.

En este sentido, es pertinente retomar una observación que Noss y Hoyles (1996) hacen en su reporte sobre la modelación a través de un ambiente de geometría dinámica. Comentan que

[10] Tercera acepción en la definición de la Real Academia Española para el término “virtual”. Recuperada el 30 de julio de 2018 de http://dle.rae.es/srv/search?m=30&w=virtual

la computadora actúa en dos sentidos para el alumnado: como un apoyo para desarrollar nuevos significados y como un medio para *superar* tal apoyo (p. 126, como se citó en Drijvers et al., 2010, p. 101). Un objetivo análogo ha de buscarse en la implementación de iniciativas en las cuales se pretenda desarrollar significados matemáticos con apoyo en la tecnología.

La perspectiva que hasta este punto se ha presentado respecto a la *integración tecnológica*, en conjunto con la *modelación* y la *contextualización física* que se comentaron anteriormente, guía la investigación *desde* la matemática educativa. ¿Pero qué significa hacerlo *desde* esta disciplina?

En principio, implica tener presente un conjunto de consideraciones respecto al carácter *interdisciplinario* de la propuesta –incluyendo la transversalidad de lo social– a la par de una consciencia sobre las limitaciones en el alcance de la investigación.

En este sentido, Roth (2014) señala que, en matemáticas y en su enseñanza, uno de los problemas que suele enfrentar la interdisciplinariedad es que, particularmente en el nivel medio superior, las matemáticas son consideradas como una disciplina *de servicio* y una consecuencia de esta concepción es que, dado que las intenciones curriculares de las demás materias son diferentes a las de las matemáticas, ello conduce a tensiones acerca de dónde hacer énfasis en las iniciativas interdisciplinarias (p. 317).

Para Roth (2014), actividad, consciencia y cognición van de la mano, por lo que la intención de cada disciplina será distinta a la de otras aun cuando trabajen con el mismo objeto (pp. 317-318). De hecho, el autor utiliza esta idea como base para explicar la *incompatibilidad* (o la no integración) del currículo de matemáticas y de física de la *British Columbia* (Canadá) al introducir la derivada y tratar las ecuaciones de movimiento acelerado, respectivamente, en un mismo nivel (p. 318) sin enlaces o referencias directas. En respuesta a ello, el autor sugiere que:

> El propósito de emprendimientos interdisciplinarios en torno a las matemáticas puede ser el desarrollo de un conjunto rico de experiencias que subyazcan emprendimientos posteriores puramente matemáticos. (p. 319, traducción personal).

En el presente trabajo se coincide con el autor en cuanto a que dicho conjunto rico de *experiencias* resulta fundamental para el trabajo matemático, por lo tanto, esta idea se toma como base para las consideraciones teóricas que más adelante se describen en el **Marco teórico–conceptual**.

En adición, se concibe que estas experiencias son situadas y, por ende, con una componente social intrínseca. De ahí que, como se comentó en un inicio, el trabajo en general esté permeado por una perspectiva de género. A continuación, se comentan algunos resultados de investigación en esta línea producto de la revisión llevada a cabo.

2.1.4. Género y matemáticas

Desde la literatura es posible identificar diversos enfoques o posturas respecto a la influencia que el género tiene sobre el aprendizaje de las matemáticas y la ciencia. En términos generales, dichos enfoques parecen dividirse en las siguientes concepciones:

- Que biológicamente (sexo) mujeres y hombres poseen capacidades cognitivas diferentes (para algunas posturas dichas capacidades son equivalentes, i.e. ambos pueden conseguir lo mismo aunque sigan caminos diferentes; mientras para otras posturas las capacidades son exclusivas, i.e. dependiendo del sexo se pueden llevar a cabo mejor ciertas actividades).
- Que la identidad es construida socialmente (género) y, por ende, quienes integran cada género desarrollan capacidades cognitivas específicas dependiendo de los roles definidos en su comunidad.
- Que el desarrollo de las capacidades cognitivas es producto de una combinación de características tanto biológicas como socioculturales.

En este sentido, a pesar de que algunos estudios atribuyen las diferencias a la biología, existe aún un gran debate sobre hasta qué punto lo biológico explica las diferencias en el desempeño de mujeres y hombres en matemáticas (Good, Aronson y Harder, 2008, pp. 17-18), pues como Lamas (2013) afirma, "no hay cuerpo que no haya sido marcado por la cultura" (p. 160).

Una aclaración conceptual importante en los estudios con perspectiva de género es que "sexo" se refiere a una categoría basada en las diferencias biológicas entre mujeres y hombres, mientras que "género" alude a diferencias definidas socialmente, es decir, una serie de atributos considerados culturalmente *femeninos* o *masculinos*, variando en función del entorno espacial y temporal, manifestándose de forma explícita o implícita, intencional o inconscientemente.

Ahora bien, sobre los enfoques de género que se mencionaron anteriormente, Spelke (2005) analiza tres afirmaciones comunes acerca de las diferencias cognitivas que suelen atribuirse al *sexo* para justificar la diferencia en representación de hombres y mujeres en las carreras de alto nivel en matemáticas y ciencia, las cuales son:

- Que los hombres están más enfocados en objetos –y las mujeres en personas– desde el inicio de su vida y, por lo tanto, están predispuestos a aprender mejor acerca de los sistemas mecánicos.
- Que los hombres tienen un perfil con habilidades espaciales y numéricas que les genera mayor aptitud para las matemáticas.
- Que los hombres son más variables en sus habilidades cognitivas, es decir, más hombres muestran un talento matemático extremo.

La autora analizó estas afirmaciones a través de reportes de investigación basados tanto en estudios del comportamiento, como de las neuroimágenes en la cognición humana. Lo que encontró es que estos sugieren que, aunque hombres y mujeres muestren perfiles cognitivos más o menos diferentes en tareas complejas que pueden ser resueltas por múltiples estrategias, ambos muestran un mismo rendimiento en tareas que requieren de competencias fundamentales para el pensamiento matemático.

Por lo tanto, concluye que la diferencia en perfiles no hace que unas u otros tengan una ventaja intrínseca, pues pese a que en las pruebas estandarizadas de nivel medio superior (en Estados Unidos) los hombres obtienen niveles promedio mayores y una variabilidad más grande (alcanzando niveles mucho mayores o mucho menores a la media), ambos sexos muestran ser *igualmente* competentes en los cursos de matemáticas de nivel medio superior y superior.

De este modo, apunta que el conjunto de habilidades comunes que poseen para representar y aprender acerca de objetos, números, lenguaje y espacio, contribuyen al aprendizaje en matemáticas y ciencia muy probablemente a través de un proceso complejo en el cual las capacidades intrínsecas son afinadas tanto por la experiencia diaria como por la educación[11].

[11] En este sentido, Cordero (2016) expone que el objeto de estudio de la matemática educativa es la transversalidad de usos del conocimiento matemático en los diferentes escenarios: la escuela, el trabajo y la ciudad.

Por ende, la robusta literatura en cognición y desarrollo cognitivo, conducida por más de 40 años, no aporta razones para creer que las desigualdades de género en las facultades de ciencia emanen de diferencias sexuales de aptitud intrínseca. Así, se invita a ver más allá de la habilidad cognitiva, hacia otros aspectos de la biología humana y la sociedad para poder apreciar mejor este fenómeno (Spelke, 2005, p. 956).

Similarmente, en un meta–análisis realizado por Lindberg, Hyde, Petersen y Linn (2010) en el cual analizaron datos de 242 artículos publicados entre 1990 y 2007 (los cuales representan 1,286,350 personas), las investigadoras concluyen que los hallazgos reportados respaldan la visión de que hombres y mujeres se desempeñan de manera similar en matemáticas, sin diferencias significativas.

En el presente proyecto lo anterior se toma como principio, es decir, se parte de considerar que ambos sexos tienen el *potencial* para desarrollarse al mismo nivel en matemáticas y ciencia. Lo que se cuestiona entonces es si los entornos de aprendizaje (escolares o no escolares) y los diseños que se elaboran e implementan en dichos espacios propician y evalúan *equitativamente*, tomando en cuenta que las estrategias seguidas pueden variar de persona a persona. En este sentido, cabe aclarar que, si bien buscar respuesta a lo anterior no es el objetivo central de la investigación (pues no se trata de un estudio de género), sí se planea prestar especial atención a las posibles diferencias que emanen durante la fase empírica y, cuanto sea posible, propiciar la conformación de un entorno inclusivo para las alumnas durante la implementación, pues se ha identificado al *sentido de pertenencia* como uno de los elementos clave para la participación y permanencia de las mujeres en las carreras STEM (Dasgupta y Stout, 2014; Master y Meltzoff, 2016).

Sobre ello, se retoman los hallazgos de Farfán y Simón (2016) cuya investigación parte de reconocer una doble desigualdad que viven las estudiantes: al ser parte de un grupo social excluido como producto de las atribuciones socioculturales hechas a su sexo y al pertenecer "a una población para la cual la escuela tradicional obvia su atención al no considerar que también necesitan de entornos de aprendizaje específicos de tal forma que puedan desarrollar al máximo su potencial" (p. 23).

Lo anterior da evidencia de la complejidad que tiene el responder si ¿somos *iguales*?, a la par de si ¿se nos debe tratar *igual*? Es claro que cada persona es diferente a las demás, pero al mismo tiempo, se ha de buscar que todas las personas tengan acceso a los mismos derechos. La cuestión radica entonces en identificar de qué manera se ha de propiciar dicho acceso, de tal forma que sea adecuado a cada persona.

Según la OECD (1999), no se trata de considerar que hombres y mujeres son lo mismo, sino de buscar que tengan iguales oportunidades de vida. Más aún, el modelo de *equidad* no se asume que sea el mismo para todas las sociedades y culturas, pero sí que refleje la preocupación de que mujeres y hombres tengan la misma oportunidad de tomar decisiones acerca de lo que se debe entender por equitativo, trabajando en colaboración para conseguirlo.

Dadas las asimetrías actuales, el trato igualitario de hombres y mujeres es una estrategia insuficiente para conseguir una equidad de género, *tratar de la misma manera en un contexto de desigualdades puede implicar la perpetuación de las disparidades.* Así, conseguir una equidad de género requiere de cambios en las prácticas institucionales y en las relaciones sociales a través de las cuales las disparidades son reforzadas y sustentadas (OECD, 1999, p. 13).

De acuerdo con Araya (2001, como se citó en Farfán y Simón, 2016), la *equidad* consiste en "ofrecer a cada quien lo que necesita para desarrollar al máximo su potencial, de acuerdo a su condición personal, familiar y social" (p. 23).

Es decir, se busca que cada persona pueda desarrollarse *independientemente* de sus condiciones, pero *dependiendo* de esas mismas condiciones se ha de propiciar su desarrollo.

De pronto puede parecer confuso, pues se critica la *diferenciación* producto de atribuciones socioculturales a la vez que se sugiere prestar atención a la necesidad de entornos de aprendizaje *adecuados* a cada grupo social.

En este sentido, se retoman los hallazgos del estudio conducido por Farfán y Simón (2016) respecto a que, en el caso de las mujeres, existe una tendencia a valorar el conocimiento *funcional* por encima del conocimiento *conceptual* (p. 181), ya que identificaron que las respuestas, inferencias, explicaciones y argumentaciones de las jóvenes talento que participaron en su investigación toman en cuenta una gran cantidad de variables relacionadas con el fenómeno específico (p. 181).

De ahí que propongan la necesidad de rescatar el *carácter funcional del saber* en iniciativas encaminadas al aprendizaje de las matemáticas (esto se profundiza en la sección 4.3), pues consideran que el *talento* en esta área es desarrollable en su interacción con el medio sociocultural (familia, escuela, sociedad) a la luz de un saber matemático transversal y funcional (Farfán y Simón, 2016, pp. 28-29), con implicaciones positivas tanto para ellas como para sus compañeros.

Ahora bien, en general, de la revisión descrita hasta este punto –en las cuatro subsecciones– se derivaron algunas líneas a seguir en la investigación con base en las dificultades u obstáculos identificados en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. En específico, se observó que los reportes de investigación tienden a centrar más su atención en la parte de modelación de los fenómenos que en la introducción misma a la noción de ecuación diferencial. En consecuencia, se decidió explorar este punto en libros de texto usuales en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el Nivel Superior.

Además, particularmente, se identificó el papel de la tecnología como medio para trabajar con lo que se perfiló como una *naturaleza dinámica* de la variación en la ecuación diferencial, así como para transitar entre diferentes sistemas de representación (gráfico, numérico y algebraico) y para acompañar la modelación matemática de un fenómeno físico.

En un sentido amplio, es importante hacer hincapié en la comunidad considerada para la fase empírica de la investigación: estudiantes de nuevo ingreso en una carrera del área STEM en un momento previo a cursar la asignatura de Ecuaciones Diferenciales. La importancia reside en que se ha de buscar una cierta continuidad o concordancia con los recursos conceptuales de los que disponga el alumnado, en función de las habilidades que se espera de su formación (más detalles sobre este punto se encuentran en la sección Población de estudio en el capítulo **Método**).

2.2. Libros de texto

Como se mencionó al final de la sección anterior, para tener un mayor acercamiento al proceso usual de *introducción* a la ecuación diferencial, se consultaron algunos de los libros de texto más comunes en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales (Boyce y DiPrima, 2000; Edwards y Penney, 2009; Elsgoltz, 1969; Simmons, 1993; Spiegel, 1983; Zill, 1997).

Asimismo, dado que uno de los elementos principales que se identificaron en la revisión de artículos de investigación sobre el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales fue la *física en la contextualización*, se decidió explorar cómo es su tratamiento en dichos libros.

Además, con el fin de contrastar lo abordado en ellos con el tratamiento de las ecuaciones diferenciales en los cursos de física, se analizó el Volumen I de los *Fundamentos de Física* de Halliday, Resnick y Walker (2009), pues suele ser un referente básico en dichos cursos. En particular, en la universidad de donde provenían quienes participaron en la fase empírica de la investigación, ese libro constituye la bibliografía básica recomendada.

En general, como señala Cantoral (2013b), el libro de texto se constituye como un objeto pluridimensional que puede juzgarse desde diferentes enfoques: es a la vez *apoyo del saber* y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto del alumnado como del profesorado, y es un *instrumento de poder* dado que contribuye a la uniformación lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes (p. 105). Con esto en mente, en la presente sección se describen las principales observaciones que emanaron de la exploración bibliográfica.

Un primer aspecto peculiar observado es que, en la introducción del libro más reciente de todos los consultados, el de Edwards y Penney (2009), se trata el tema de las "Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos" e incluso se presenta un esquema del proceso de modelación (ILUSTRACIÓN 2-2).

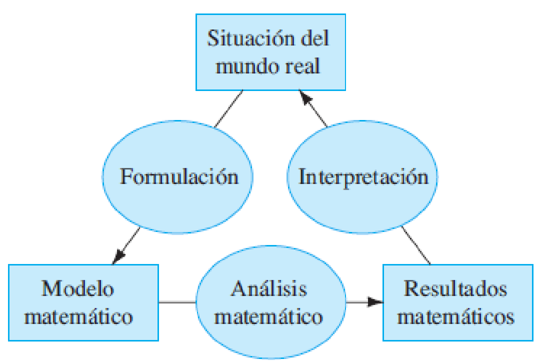


ILUSTRACIÓN 2-2 Proceso del modelado matemático según Edwards y Penney (2009).

Esto podría corresponderse con el creciente interés –que continúa en la actualidad– por considerar a la *modelación* en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, de lo cual dieron cuenta los reportes de investigación revisados en la sección Tendencias en investigación.

Igualmente, es interesante que en un libro publicado más de una década antes que el de Edwards y Penney, Zill (1997) presenta, en la tercera sección de su introducción, "Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos" e incluye también un esquema del proceso de modelación (ILUSTRACIÓN 2-3).

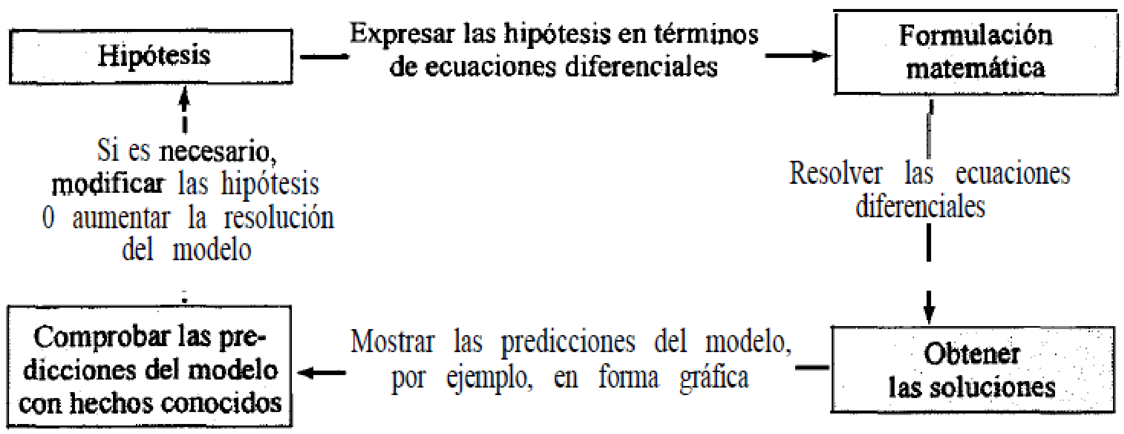


ILUSTRACIÓN 2-3 Pasos del proceso de modelado según Zill (1997, p. 20).

Sin embargo, en este último libro, se destaca la centración en la identificación de un método para resolver la ecuación diferencial ordinaria como objetivo principal de su estudio:

> El problema al que nos encararemos en este curso no es "dada una función $y = \varphi(x)$ determinar su derivada". El problema es "dada una ecuación diferencial, como la ecuación 1 [$\frac{dy}{dx} = 2xy$], ¿hay algún método por el cual podamos llegar a la función desconocida $y = \varphi(x)$?". (Zill, 1997, p. 2).

En línea con lo anterior, como se discute más adelante en la presente sección, el *proceso de modelado* que se plantea en el desarrollo de los libros de ecuaciones diferenciales suele restringirse a reemplazar valores en fórmulas preconcebidas y a traducir sus variables en términos diferenciales sin mayor explicación.

Un fenómeno similar ocurre en el plano curricular. Como se observa en el plan de estudios de la universidad de la que provenían las y los participantes de la fase empírica de la investigación (parte de él se presenta en la TABLA 1-1), el proceso de modelación de un fenómeno queda fuera de los objetivos del curso de Ecuaciones Diferenciales, pues su desarrollo se centra en la presentación de conceptos elementales, en la clasificación de los tipos de ecuaciones diferenciales y en el ejercicio de sus métodos respectivos de resolución.

De hecho, en la propia fundamentación del curso se expresa que "la mayoría de las asignaturas, en especial las de física, tratan con problemas descritos por ecuaciones diferenciales" y que, por ello, el alumnado "debe reconocer estos problemas, identificar las ecuaciones y poder resolverlas técnicamente, aún en los primeros semestres". Si esto se compara con el contenido del programa del curso, la parte de identificar las ecuaciones y resolverlas *técnicamente* es consistente con lo que se planea; no obstante, el "reconocer estos problemas" parece asumirse como una tarea por realizar en los cursos respectivos de física.

Más aún, el enfatizar que "aún en los primeros semestres" se *debe* poder hacer esto, refleja la desarticulación del currículo descrita previamente, pues se espera que el alumnado resuelva e interprete problemas donde intervienen ecuaciones diferenciales en Física I, cuando todavía no le ha sido introducida en los cursos de matemáticas. Este punto se discute con mayor detalle en la siguiente subsección *Libro de Física* considerando el caso particular del movimiento con aceleración constante.

Respecto a los libros de ecuaciones diferenciales y su frecuente referencia a fenómenos *físicos* para ejemplificar la variación, como se mencionó líneas arriba, se observa que estos ejemplos suelen aparecer hasta después de la presentación de conceptos, clasificaciones y métodos de resolución, y/o de manera superficial, usualmente considerando que quien lee ya tiene cierta familiaridad con la relación entre la derivada y la razón de cambio con un sentido físico y, a su vez, con las fórmulas físicas respectivas del fenómeno. La subsección *Libros de Ecuaciones Diferenciales* se dedica al análisis de este punto y a la descripción de la forma usual de introducir la noción de ecuación diferencial ordinaria en los libros de texto.

2.2.1. Libro de Física

Como se comentó al inicio de la sección, se revisó el libro *Fundamentos de Física* (Halliday, Resnick y Walker, 2009), pues constituye la bibliografía básica recomendada para el curso de Física I en la universidad de la cual provenían las y los estudiantes de la fase empírica del estudio.

Esta revisión se centró en el capítulo 2 que trata el "Movimiento a lo largo de una recta" con el fin de comparar el contenido que es presentado al alumnado al inicio del curso de Física I (de primer semestre) con aquello que le es introducido hasta Cálculo II y Ecuaciones Diferenciales (de segundo semestre).

Además, la elección de este tema tiene una justificación epistemológica. Romero y Rodríguez (2003) proponen "configurar fenómenos donde se posibilite la identificación del estado del movimiento como variable y el establecimiento de relaciones con otras variables que permitan su cuantificación" (p. 61), para lo cual consideran "relevante realizar un análisis del fenómeno de la caída de los cuerpos [movimiento rectilíneo uniforme], según la perspectiva galileana" (p. 61). Este punto se discute con mayor profundidad en el **Marco teórico–conceptual**.

Volviendo al libro, al inicio del capítulo referido se plantea que: "La clasificación y la comparación de movimientos (llamada **cinemática**) es, con frecuencia, un desafío. ¿Qué es exactamente lo que se mide y cómo se compara?" (p. 14). Así, para empezar, se introducen los conceptos de *posición* y *desplazamiento*. Al respecto, se señala que ubicar un objeto significa encontrar su **posición** respecto a algún punto de referencia, que a menudo es el *origen* (o punto cero) de un eje, como el x, en el plano coordenado. La *dirección positiva* del eje es la dirección de números crecientes (coordenadas) y la dirección opuesta es la *dirección negativa* (p. 14). Un cambio de una posición x_1 a otra x_2 se llama **desplazamiento** Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y "el símbolo Δ, que es la delta mayúscula griega, representa un cambio en una cantidad, y significa el valor final de esa cantidad menos el valor inicial" (p. 15).

Posteriormente, se presenta la diferencia entre una **magnitud** y una **cantidad vectorial**. Se explica que "si pasáramos por alto el signo (y por tanto la dirección) de un desplazamiento, [...] sólo queda la **magnitud** (o valor absoluto) del desplazamiento" (p. 15). Por ende, se señala que "el desplazamiento es un ejemplo de una **cantidad vectorial**, ya que tiene dirección y magnitud" (p. 15).

A continuación, se plantea que "una forma de describir una posición es con una gráfica de posición x trazada como función del tiempo t, es decir una gráfica $x(t)$" (p. 15). Para ahondar, se presenta:

> Como ejemplo sencillo, la figura 2-2 [ILUSTRACIÓN 2-4] muestra la función de posición $x(t)$ para un armadillo estacionario (que trataremos como una partícula) a lo largo de un intervalo de tiempo de $7\ s$. La posición del animal permanece en $x = -2\ m$. (p. 15).

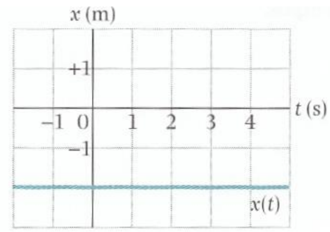


ILUSTRACIÓN 2-4 Gráfica de $x(t)$ para un armadillo que está estacionario en $x = -2\ m$. El valor de x es $-2\ m$ para todo tiempo t (tomada de Halliday, Resnick y Walker, 2009, p. 15).

> La figura 2-3a [ILUSTRACIÓN 2-5*a*] es más interesante, porque abarca movimiento. En apariencia, el armadillo se ve por primera vez en $t = 0$ cuando está en la posición $x = -5\ m$. Se mueve hacia $x = 0$, pasa por ese punto en $t = 3\ s$ y luego continúa a valores positivos cada vez más grandes de x.

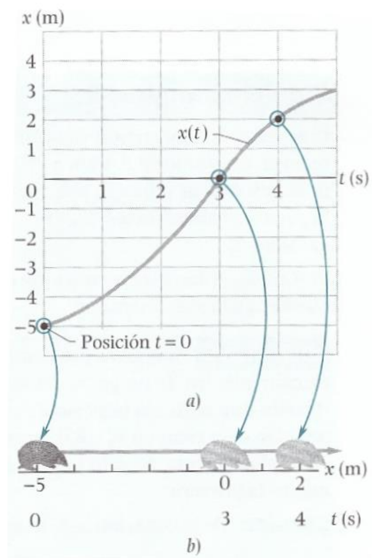


ILUSTRACIÓN 2-5 *a*) Gráfica de $x(t)$ para un armadillo en movimiento. *b*) Trayectoria asociada con la gráfica. La escala abajo del eje x muestra los tiempos en que el armadillo alcanza varios valores x (tomada de Halliday, Resnick y Walker, 2009, p. 15).

> La figura 2-3b [ILUSTRACIÓN 2-5*b*] describe el movimiento rectilíneo del armadillo y es algo como lo vería un observador [los armadillos sombreados representan otros estados en el movimiento]. La gráfica de la figura 2-3a [ILUSTRACIÓN 2-5*a*] es más abstracta y muy diferente a lo que se vería, pero es más rica en información. También muestra qué tan rápido se mueve el armadillo. (p. 15).

Es en este punto que se observa una primera gran desarticulación en el currículo respecto a lo que se aborda en Física I y lo que se trabaja en el área de matemáticas (TABLA 1-1). El programa de Cálculo I se basa en la idea de que esta materia “fundamenta y amplía los conocimientos de Cálculo que [las y] los estudiantes tienen; [por lo tanto] proporciona demostraciones rigurosas”, lo cual, en sus propios términos, "tiene mucho sentido si se considera que [las y] los estudiantes ya han llevado un curso operativo y aplicado de cálculo en el nivel medio superior".

Una implicación curricular importante de tal consideración es que la *función* sea definida hasta la quinta unidad de Cálculo I y que la *graficación de funciones* (*crecimiento*, *decrecimiento*, *concavidad*, *máximos* y *mínimos* con base en el análisis de su derivada) sea abordada hasta el final de la primera unidad de Cálculo II, lejos del momento en que en Física I se demanda ya un cierto dominio en la interpretación de funciones, su derivada y sus gráficas correspondientes.

Particularmente, se destaca el papel de las gráficas y la derivada para analizar *cómo* es el movimiento. En este sentido, se señala que la gráfica de la ILUSTRACIÓN 2-5*a* "muestra qué tan rápido se mueve el armadillo". Aunque se aclara que "en realidad, varias cantidades están asociadas con la frase 'con qué rapidez'". Se describe entonces que una de esas cantidades "es la **velocidad promedio** v_{prom}, que es la razón entre el desplazamiento Δx que ocurre durante un intervalo particular de tiempo Δt y ese intervalo: $v_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$" (p. 15).

Para ejemplificar este concepto, se retoma el movimiento del armadillo presentado en la ILUSTRACIÓN 2-5 y se halla su velocidad promedio entre $t = 1\,s$ y $t = 4\,s$. Se describe: "Trazamos la recta que enlaza el punto sobre la curva de posición al principio del intervalo y el punto sobre la curva al final del intervalo. Así encontramos la pendiente $\Delta x/\Delta t$ de la recta" (ILUSTRACIÓN 2-6).

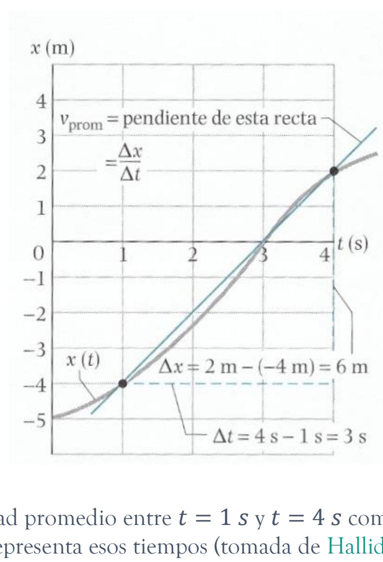


ILUSTRACIÓN 2-6 Cálculo de la velocidad promedio entre $t = 1\,s$ y $t = 4\,s$ como la pendiente de la recta que enlaza los puntos sobre la curva $x(t)$ que representa esos tiempos (tomada de Halliday, Resnick y Walker, 2009, p. 16).

Más adelante en el texto, se presenta un "problema modelo" sobre cómo se obtiene la gráfica de la velocidad para un elevador que inicialmente se encuentra estacionario, luego sube y una vez más se detiene, cuyo desplazamiento está representado en la gráfica *a*) de la ILUSTRACIÓN 2-7.

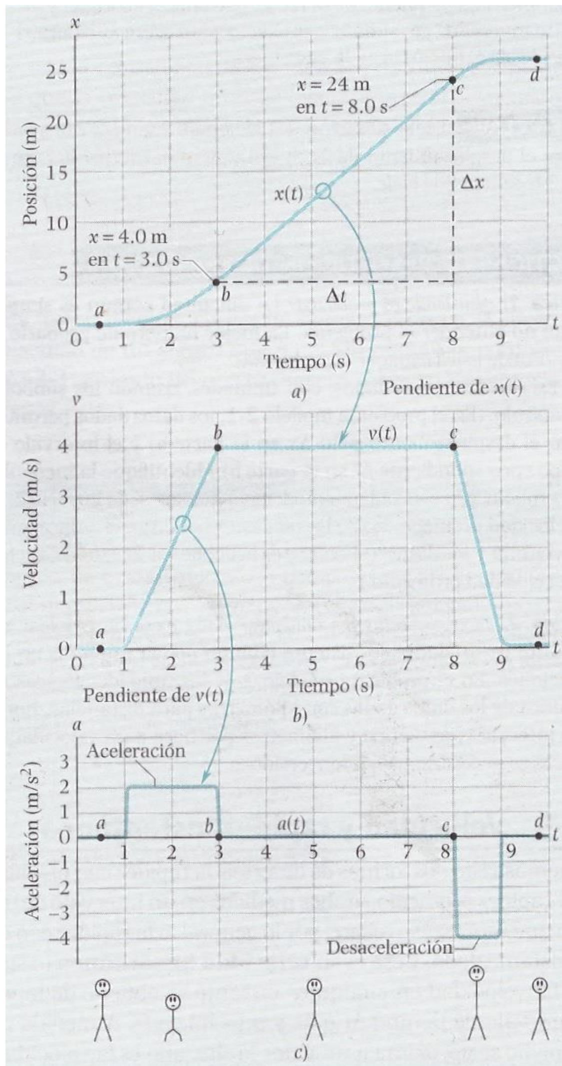


ILUSTRACIÓN 2-7 *a*) Curva $x(t)$ para una cabina de elevador que se mueve hacia arriba a lo largo de un eje x. *b*) Curva $v(t)$ para la cabina. Nótese que es la derivada de la curva $x(t)$, $(v = dx/dt)$. *c*) Curva $a(t)$ para la cabina. Es la derivada de la curva $v(t)$ $(a = dv/dt)$. Las figuras a lo lago de la parte inferior sugieren cómo se sentiría el cuerpo de un pasajero durante las aceleraciones (tomada de Halliday, Resnick y Walker, 2009, p. 18).

La idea clave para resolver el problema es considerar que "podemos hallar la velocidad en cualquier momento, a partir de la pendiente de la curva $x(t)$ en ese tiempo" (p. 18). Partiendo de ella, el análisis inicia al observar que, como de $0\ s$ a $1\ s$ y de los $9\ s$ en adelante el elevador no se mueve, entonces la pendiente de $x(t)$, "y por tanto también la velocidad" (p. 18) es cero.

Luego, como en bc la pendiente es constante y diferente de cero, "significa que la cabina se mueve con velocidad constante" (p. 18) y se calcula entonces la pendiente numéricamente mediante el cociente de incrementos:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24\,m - 4\,m}{8\,s - 3\,s} = +4\,m/s$$

Donde el signo positivo en el resultado indica la dirección del movimiento.

Se señala entonces que ambos resultados ($0\,m/s$ y $4\,m/s$) se han trazado en la ILUSTRACIÓN 2-7*b*.

Resta el caso de los intervalos de $1\,s$ a $3\,s$ y de $8\,s$ a $9\,s$. Para ello, se describe que "como la cabina inicialmente comienza a moverse y luego desacelera hasta detenerse, v varía como se indica en los intervalos [en la ILUSTRACIÓN 2-7*b*]" (p. 18). En particular, no se explica por qué tal variación se comporta de manera *lineal*, de tal forma que la gráfica se *complete* uniendo los puntos con segmentos de recta, ni mucho menos se explicita el por qué alrededor de los $9\,s$ los dos segmentos se unen mediante una ligera curva.

Adicionalmente, en la resolución del *problema modelo* se comenta que:

> Dada una gráfica $v(t)$ como la de la figura 2-6*b* [ILUSTRACIÓN 2-7*b*], podríamos "regresar" para obtener la forma de la gráfica $x(t)$ correspondiente (figura 2-6*a* [ILUSTRACIÓN 2-7*a*]). Sin embargo, no sabríamos los valores reales para x en varios tiempos, porque la gráfica de $v(t)$ sólo indica *cambios* en x. Para hallar tal cambio en x durante cualquier intervalo, debemos, en el lenguaje de cálculo, determinar el área "bajo la curva" en la gráfica $v(t)$ para ese intervalo. (p. 18).

Con "valores reales" los autores parecen aludir a los valores particulares de la posición dadas las *condiciones iniciales* del fenómeno, pues en el "regreso" se sabe cuánto y cómo cambia la posición, pero no de qué valor específico a qué valor específico es que cambia. En ese sentido, advierten que "necesitamos más información como el valor de x para algún instante dado" (p. 18), es decir, al menos una condición *inicial*, para determinar la gráfica particular de la posición del fenómeno a partir de la integración de la velocidad (aunque estos términos de cálculo y ecuaciones diferenciales no se mencionan explícitamente).

La otra forma de describir *con qué rapidez*, de acuerdo con los autores, es la **rapidez promedio** r_{prom}, la cual "comprende la distancia total recorrida [...] independientemente de la dirección" (p. 16).

Luego de haber introducido estas cantidades que se refieren a intervalos de tiempo finitos, se plantea que "la frase 'con qué rapidez' se refiere, por lo general, a la rapidez con que una partícula se mueve en un instante dado, y esa es su **velocidad instantánea** (o simplemente **velocidad)** v" (p. 17). Así, se define que:

> La velocidad en cualquier instante se obtiene de la velocidad promedio al acortar el intervalo de tiempo Δt más y más hacia 0. A medida que Δt se acorta, la velocidad promedio se aproxima a un valor límite, que es la velocidad en ese instante:
>
> $$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$
>
> Nótese que v es la razón con la cual la posición x de la partícula está cambiando con el tiempo en un instante dado: en otras palabras, v es la derivada de x con respecto a t. Así mismo, note cómo v en cualquier instante es la pendiente de la curva de posición–tiempo de la partícula en el punto que representa ese instante. (pp. 17-18) [12].

La *aceleración promedio* y la *aceleración instantánea* "(o simplemente **aceleración**)" (p. 16) se definen de manera análoga, haciendo igualmente alusión al análisis gráfico para la interpretación de su significado y su asociación con la posición y la velocidad; específicamente, esto se hace con base en el ejemplo del *problema modelo* de la ILUSTRACIÓN 2-7. Al respecto, se describe que la ILUSTRACIÓN 2-7*c* es una gráfica de la aceleración de la cabina de elevador:

> Compare esta curva $a(t)$ con la curva $v(t)$, donde cada punto en la curva $a(t)$ muestra la derivada (pendiente) de la curva $v(t)$ en el tiempo correspondiente. Cuando v es constante (ya sea en 0 o $4\ m/s$), la derivada es cero y también sucede así con la aceleración. Cuando la cabina comienza a moverse primero, la curva $v(t)$ tiene una derivada positiva (la pendiente es positiva), lo cual significa que $a(t)$ es positiva. Cuando la cabina desacelera hasta detenerse, la derivada y la pendiente de la curva $v(t)$ son negativas, es decir $a(t)$ es negativa.

Con esta cita queda claro que los autores toman como sinónimos a los conceptos *derivada* y *pendiente*.

---

[12] Respecto a la última frase, cabe señalar que los autores utilizan el término "pendiente de una curva" para referirse a la pendiente de la recta tangente a dicha curva en un punto específico. El mismo uso del término se evidencia también en la ILUSTRACIÓN 2-8, a partir de la cual se analiza el comportamiento de las gráficas de posición, velocidad y aceleración correspondientes a un movimiento con *aceleración constante*.

Por otro lado, se sugiere que se comparen las pendientes de la curva $v(t)$ durante los dos periodos de aceleración (positiva y negativa), para identificar que la desaceleración es más pronunciada porque la cabina se detiene en la mitad del tiempo que tardó en acelerar en el intervalo de aceleración positiva.

Luego, se comenta que las sensaciones que se experimentarían en la cabina están indicadas por la serie de figuras debajo de la ILUSTRACIÓN 2-7*c*, de tal forma que cuando la cabina acelera al inicio, se sentiría una presión hacia abajo en el cuerpo; después, cuando la cabina "enfrena" hasta detenerse, parecería que el cuerpo se alargara hacia arriba; y en el centro "no se siente nada especial" (p. 20). Los autores agregan como nota que el cuerpo reacciona a las aceleraciones, por lo que es un *acelerómetro*, pero no a la velocidad, así que no es un *velocímetro*.

La presentación simultánea de las gráficas de movimiento para distintos órdenes de variación (posición, velocidad y aceleración) es un recurso constantemente utilizado en el libro, como se verá a continuación, aunque, de acuerdo con Suárez (2014), esto puede ser en sí un elemento de debate para el alumnado.

En particular, se trata el caso de la *aceleración constante* y se determinan las ecuaciones para su tipo de movimiento con base en las gráficas de la ILUSTRACIÓN 2-8 (pp. 21-23).

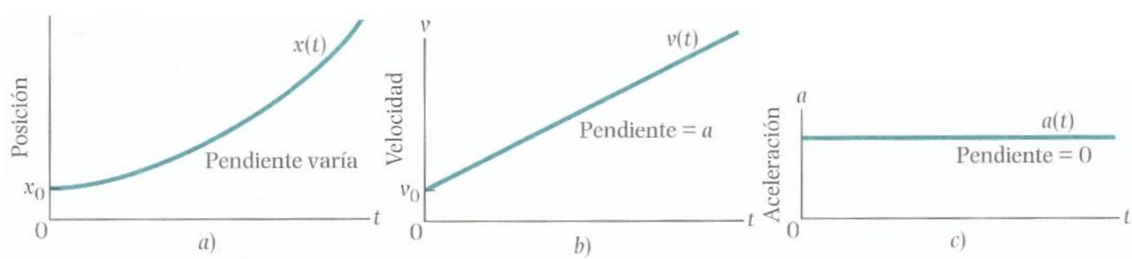


ILUSTRACIÓN 2-8 *a*) Posición $x(t)$ de una partícula que se mueve con aceleración constante. *b*) Su velocidad $v(t)$, dada en cada punto por la pendiente de la curva en *a*). *c*) Su aceleración (constante). Igual a la pendiente (constante) de la curva $v(t)$ (tomada de Halliday, Resnick y Walker, 2009, p. 21).

El análisis es como sigue:

- Cuando la aceleración es constante, tanto la *aceleración instantánea*, como la *aceleración promedio* son iguales, por lo tanto: $a = a_{prom} = \frac{v-v_0}{t-0}$, entonces si se despeja la velocidad resulta: $v = v_0 + at$, considerando que v_0 es la velocidad en $t = 0$. [En este punto se sugiere, como "prueba adicional" derivar esta expresión, lo cual "resulta en $dv/dt = a$, que es la definición de a" (p. 22)].

- De manera similar, como $v_{prom} = \frac{x-x_0}{t-0}$, entonces: $x - x_0 = v_{prom}t$.
- De la gráfica de la ILUSTRACIÓN 2-8b se observa que la función $v(t)$ es lineal, por lo tanto, la *velocidad promedio* sobre cualquier intervalo de tiempo es igual al promedio de las velocidades al inicio y al final del intervalo [lo cual es una aplicación de la Regla de Merton, aunque esto no se menciona explícitamente ni tampoco se aclara cómo es que se obtuvo la equivalencia], entonces: $v_{prom} = \frac{v_0+v}{2}$. Al sustituir en esta expresión la ecuación que se obtuvo en el primer punto, se tiene que: $v_{prom} = \frac{v_0+v_0+at}{2} = v_0 + \frac{1}{2}at$ y al sustituir esto en la ecuación del segundo punto resulta que: $x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

Así, se tienen las tres ecuaciones básicas para el movimiento con aceleración constante[13]:

$$a = \text{constante}$$

$$v = at + v_0$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

Este desarrollo da evidencia de una desarticulación del currículo respecto al área de física y de matemáticas, pues mientras el plan establece que hasta Cálculo II se aborde la derivada y la graficación de funciones, en Física de primer semestre se demanda ya del alumnado una concepción diferencial de la velocidad y un cierto dominio en el estudio gráfico de funciones.

Más aún, en Física I se plantea la integración gráfica como un elemento para el análisis del movimiento retomando el Teorema Fundamental del Cálculo:

[13] La segunda y la tercera fórmula han sido reacomodadas para ajustarse a la posición usual de la constante de integración.

Cuando tenemos una gráfica de la aceleración de un objeto como función del tiempo, podemos integrar en la gráfica para hallar la velocidad del objeto en cualquier tiempo determinado. Como la aceleración a se define en términos de la velocidad como $a = dv/dt$, el Teorema Fundamental de Cálculo nos dice que:

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a\, dt.$$

El lado derecho de la ecuación es una integral definida (da un resultado numérico más que una función), v_0 es la velocidad en el tiempo t_0 [no necesariamente el inicial] y v_1 es la velocidad en un tiempo t_1 posterior. La integral definida se puede evaluar de una gráfica $a(t)$, como la de la figura 2-13*a* [ILUSTRACIÓN 2-9*a*]. En particular:

$$\int_{t_0}^{t_1} a\, dt = \begin{pmatrix} \text{área entre la curva de aceleración} \\ \text{y el eje del tiempo de } t_0 \text{ a } t_1 \end{pmatrix}.$$ (p. 27).

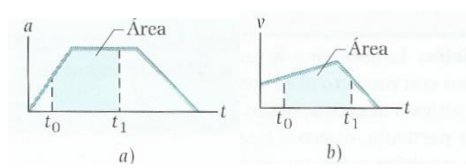


ILUSTRACIÓN 2-9 El área entre una curva trazada y el eje horizontal del tiempo, del tiempo t_0 al tiempo t_1, está indicada para *a*) una gráfica de aceleración a contra t y *b*) una gráfica de velocidad v contra t) (tomada de Halliday, Resnick y Walker, 2009, p. 27).

Y mediante un proceso análogo se describe la obtención del *desplazamiento* (cambio de posición) a partir de la integración definida de la velocidad. Algo que cabe destacar aquí es la aclaración "da un resultado numérico más que una función", pues con ella se alude a que, si bien al integrar la aceleración se obtiene la *función* de la velocidad, al calcular la integral definida se obtiene un *valor numérico* correspondiente al cambio en la velocidad ($\Delta v = v_1 - v_0$).

En este sentido, cuando se hacen integrales indefinidas sucesivas a partir de la función de la aceleración, se pasa de ella a la función de la velocidad y de ahí a la función de la posición. Mientras que, cuando se hacen de manera definida, se va obteniendo como resultado el: *cambio en la velocidad*, *cambio en la aceleración* y *cambio en la posición* (desplazamiento). Cabe aclarar que en dicho caso los primeros dos resultados de la integración definida no corresponderían a la *velocidad promedio* y la *aceleración promedio*, respectivamente, pues es hasta que los cambios se hacen relativos al tiempo que se obtienen los valores *promedio*.

En conjunto, este tipo de consideraciones conllevan un tránsito constante entre las gráficas y las expresiones algebraicas, a la par de una comprensión diferencial del fenómeno físico de movimiento y de su estrecha relación con la integración; sin embargo, es también hasta Cálculo II, en su segunda unidad, que se introduce la integral de Riemann y el Teorema Fundamental del Cálculo.

Ahora bien, hasta este punto llega un primer análisis del fenómeno de *movimiento uniformemente acelerado* con relación a los conceptos de cálculo y de ecuaciones diferenciales desde el libro de física. A continuación, se describe cómo se introduce la noción de ecuación diferencial en los libros de texto de ecuaciones diferenciales revisados y la manera en la cual plantean el mismo fenómeno de movimiento, particularmente, el de caída libre.

2.2.2. Libros de Ecuaciones Diferenciales

Tanto la forma de introducir la ecuación diferencial, como el tratamiento del fenómeno de movimiento, se presentan a la par en este apartado por cada obra revisada, pues en ambos elementos se pueden establecer relaciones para delinear la perspectiva de los autores. Cabe hacer notar que las revisiones se presentan en orden cronológico.

Elsgoltz (1969)

El libro inicia tal cual haciendo alusión a los fenómenos físicos, señalando que si bien la determinación de sus leyes no es inmediata, sí lo es la dependencia entre las magnitudes que les caracterizan y sus derivadas o diferenciales (p. 11). Es decir, se asume como algo inmediato el uso de *diferenciales* en la descripción del fenómeno y, particularmente, se plantean casi como un sinónimo de las *derivadas*:

> Al estudiar un fenómeno físico, con frecuencia no es posible hallar de inmediato las leyes físicas que enlazan las magnitudes que caracterizan dicho fenómeno. Pero, al mismo tiempo, es fácil establecer la dependencia entre esas magnitudes y sus derivadas o sus diferenciales. Así obtenemos ecuaciones que contienen las funciones desconocidas, escalares o vectoriales, bajo el signo de derivada o de diferencial.

Consecuentemente, plantea la siguiente definición de ecuación diferencial (p. 11):

> Las ecuaciones en las cuales la función desconocida, escalar o vectorial, se encuentra bajo el signo de derivada o de diferencial, se llaman *ecuaciones diferenciales*. Veamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales.

Como se puede observar, la introducción es en realidad muy general y de inmediato se abordan ejemplos. El segundo de ellos refiere al caso de la segunda ley de Newton considerando cualquier aceleración (p. 11):

> 2) $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}\left(t,\mathbf{r},\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ es la ecuación del movimiento de un punto de masa m, bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F}$ dependiente del tiempo, de la posición del punto—determinada por el radio-vector $\mathbf{r}$—, y de su velocidad $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. La fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración.

Un par de páginas más adelante se describe la necesidad de las condiciones iniciales de la siguiente manera (p. 13):

> Por lo tanto, el problema se reduce a la integración de esta ecuación diferencial. Es evidente que la ley del movimiento aún no queda determinada por completo si se dan la masa m y la fuerza $\mathbf{F}$; hay que conocer también la posición inicial del punto
>
> $$\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0 \qquad (\mathrm{I}.2_1)$$
>
> y su velocidad inicial
>
> $$\dot{\mathbf{r}}(t_0)=\dot{\mathbf{r}}_0. \qquad (\mathrm{I}.2_2)$$

Es decir, se plantea como *evidente* que se necesitan dos condiciones: posición y velocidad iniciales, para determinar una solución; sin aclarar que bien pudieran ser los valores de posición y velocidad en otro momento, y mucho menos se discute el por qué se necesitan estas condiciones.

Simmons (1993)

En esta obra, el fenómeno parte de las siguientes consideraciones que se presentan desde la introducción del libro (p. 1):

Es fácil comprender la razón que se oculta tras una tan amplia gama de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. El lector recordará que si $y = f(x)$ es una función dada, su derivada se puede interpretar como el ritmo de cambio de y con respecto a x. En cualquier proceso natural, las variables involucradas y sus ritmos de variación están relacionadas entre sí por medio de los principios científicos básicos que gobiernan dicho proceso. Al expresar tal conexión en símbolos matemáticos, el resultado es con frecuencia una ecuación diferencial.

Destaca la noción de *gobierno* que se incluye en la idea de que "las variables involucradas y sus ritmos de variación están relacionados entre sí por medio de los principios científicos básicos que gobiernan dicho proceso", pues parece aludir a que el fenómeno es el que obedece la ley, en lugar de que sea la ley la que se deriva del fenómeno.

El siguiente ejemplo ilustra estos comentarios. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración a de un cuerpo de masa m es proporcional a la fuerza total F, que actúa sobre él con $1/m$ como constante de proporcionalidad, de modo que $a = F/m$, o sea,

$$ma = F. \tag{1}$$

Supongamos, por ejemplo, que un cuerpo de masa m cae bajo la sola influencia de la gravitación. En tal caso, la única fuerza que actúa sobre él es mg, donde g denota la aceleración de la gravedad[1]. Si y es la altura medida hacia abajo desde una cierta posición prefijada, entonces su velocidad $v = dy/dt$ es el ritmo de cambio de su posición y su aceleración $a = dv/dt = d^2y/dt^2$ es el ritmo de cambio de la velocidad. Con esta notación, (1) se convierte en

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg,$$

o sea,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g. \tag{2}$$

En este ejemplo de caída libre se explicita el cambio de notación, aunque este se sustenta en tener ya una concepción de la velocidad y la aceleración en su forma diferencial, y de la derivada como ritmo de cambio. Como se mencionó al inicio, este problema es básicamente lo primero que se aborda en el libro, por ende, parece asumirse que quien lee ya tiene cierto dominio de la física involucrada y del uso de cociente de diferenciales para describir el movimiento.

Por otro lado, el capítulo introductorio cierra con una lista de problemas, con la característica de que en ninguno de ellos se hace alusión a algún fenómeno físico.

La introducción a las ecuaciones diferenciales comienza básicamente con un ejemplo: la segunda ley de Newton (que es referida simplemente como *ley de Newton*).

> Cuando se plantean en términos matemáticos muchos problemas importantes y significativos de la ingeniería, las ciencias físicas y las ciencias sociales, se requiere determinar una función que satisfaga una ecuación que contiene una o más derivadas de la función desconocida. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales**. Quizá el ejemplo más conocido es la ley de Newton
>
> $$m \frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right] \tag{1}$$
>
> para la posición $u(t)$ de una partícula sobre la cual actúa una fuerza F, que puede ser una función del tiempo t, de la posición $u(t)$ y de la velocidad $du(t)/dt$. Para determinar el movimiento de una partícula sobre la que actúa una fuerza F es necesario hallar una función u que satisfaga la ecuación (1).
>
> El objetivo primordial de este libro es analizar algunas propiedades de las soluciones de las ecuaciones diferenciales y describir algunos de los métodos que han probado su eficacia para hallar las soluciones o, en algunos casos, dar aproximaciones de las mismas. A fin de contar con un marco de referencia para la presentación, en principio se mencionarán varias maneras útiles de clasificar las ecuaciones diferenciales.

Luego de esta definición (p. 17), como señalan los autores, se presenta una clasificación general de las ecuaciones diferenciales y se describen métodos para resolverlas.

Este capítulo introductorio cierra con ejercicios para resolver mediante los métodos descritos y con algunas notas históricas. Para introducir el problema de caída libre, en el capítulo 2 del libro, se describe la utilidad de la segunda ley de Newton en aplicaciones a mecánica elemental (p. 87).

> Algunas de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones diferenciales de primer orden se encuentran en el dominio de la mecánica elemental. En esta sección se considerarán algunos problemas en los que interviene el movimiento de un cuerpo rígido a lo largo de una recta. Se supondrá que estos cuerpos obedecen la ley de Newton del movimiento: *el producto de la masa y la aceleración es igual a la fuerza externa.* En símbolos,
>
> $$F = ma, \tag{1}$$
>
> en donde F es la fuerza externa, m es la masa del cuerpo y a es la aceleración en la dirección de F.

Es decir, la ley se introduce como una fórmula que obedecen los cuerpos y, aunque se hace posteriormente un análisis de cuando el fenómeno de movimiento no ocurre al nivel del mar (p. 88), los argumentos se siguen fundamentando en la preconcepción de las fórmulas involucradas.

Para el caso particular de la caída libre, el problema se expresa con la condición de vacuidad y una cercanía considerable a la Tierra de tal forma que su movimiento sea modificado por efecto de su campo gravitacional (p. 87):

> Considérese ahora un cuerpo que cae libremente en un vacío y lo suficientemente cerca de la superficie terrestre, de modo que la única fuerza significativa que actúa sobre ese cuerpo es su peso debido al campo gravitacional de la Tierra. Entonces, la ecuación (1) toma la forma
>
> $$w = mg \tag{2}$$
>
> en donde w es el peso del cuerpo y g denota su aceleración debida a la gravedad.

Para mostrar cómo se resolvería un problema con base en lo anterior (p. 89), se plantea el siguiente ejemplo:

> Se deja caer desde el reposo un objeto de masa m en un medio que presenta una resistencia proporcional a v, la magnitud de la velocidad instantánea del objeto.[12] Si se supone que la fuerza gravitacional es constante, determinar la posición y la velocidad del objeto en cualquier instante t.
>
> En este caso es conveniente trazar el eje x positivo hacia abajo con el origen en la posición inicial del objeto (ver la figura 2.7.1). El peso mg del objeto actúa entonces en la dirección hacia abajo (positiva), pero la resistencia $k|v|$, en donde k es una constante positiva, actúa para impedir el movimiento. Si $v > 0$, la resistencia es en la dirección hacia arriba (negativa) y, por tanto, se expresa por $-kv$. Si $v < 0$, la resistencia actúa hacia abajo y todavía se expresa por $-kv$. Por tanto, en todos los casos es posible escribir la ley de Newton como
>
> $$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Algo que se identifica es que las condiciones de resistencia del medio se establecen a manera de ley también y que la sustitución de la aceleración por el cociente $\frac{dv}{dt}$ se hace de manera inmediata. Esto último se puede deber a que el problema se plantea hasta mediados del capítulo 2; aunque resulta curioso que la fórmula con la que se introdujo el libro se aborde en un problema hasta mucho después.

Edwards y Penney (2009)

El capítulo introductorio de este libro comienza señalando que "las leyes del universo están escritas en el lenguaje de las matemáticas" (p. 1). A lo que se añade que:

> Debido a que la derivada $dx/dt = f'(t)$ de la función f es la razón a la cual la cantidad $x = f(t)$ está cambiando respecto de la variable t independiente, es natural que las ecuaciones que involucran derivadas se usen frecuentemente para describir el universo cambiante. Una ecuación que relaciona una función desconocida con una o más de sus derivadas se llama **ecuación diferencial**.

El capítulo continúa con la presentación de ejemplos contextuales que "ilustran el proceso de traducción de las leyes y principios científicos en ecuaciones diferenciales" (p. 2). Es decir, la ecuación diferencial se ve como una *traducción* de las leyes físicas en fórmulas matemáticas y no precisamente como el resultado de un proceso de modelado.

Sin embargo, cabe destacar la constante referencia a la representación gráfica de las soluciones y a su análisis para la determinación de *soluciones particulares*. En el caso del movimiento, se presenta el caso de la *velocidad* y la *aceleración* desde el capítulo 1 (p. 12):

> Una integración directa es suficiente para permitirnos resolver un importante número de problemas relativos al movimiento de una partícula (o *punto masa*) en términos de las fuerzas que actúan sobre ella. El movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta (el eje x) es descrito por su **función posición**
>
> $$x = f(t) \tag{5}$$
>
> conociendo su coordenada en el eje x para el t. La **velocidad** de la partícula se define como
>
> ➤ $$v(t) = f'(t); \quad \text{esto es,} \quad v = \frac{dx}{dt}. \tag{6}$$

Por ende, se parte de una *definición* de la velocidad y no precisamente de su *construcción* como modelo del cambio de posición respecto al tiempo. De manera análoga se presenta la aceleración (p. 12):

> Su **aceleración** $a(t)$ es $a(t) = v'(t) = x''(t)$; en notación Leibniz,
>
> ➤ $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{7}$$
>
> La ecuación (6) puede aplicarse en forma de integral indefinida $x(t) = \int v(t)dt$ o en forma de integral definida
>
> $$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds,$$
>
> la cual se reconocerá como un postulado del teorema fundamental de cálculo (precisamente porque $dx/dy = v$).

Similar a lo que se encontró en el *Libro de Física*, se hace alusión al Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la posición a partir de la velocidad y la posición inicial; en particular, se plantea cómo a partir de la segunda ley de movimiento de Newton se puede determinar la posición de un objeto dada la fuerza que actúa sobre él (p. 13):

La *segunda ley de movimiento* de Newton dice que si una fuerza $F(t)$ actúa en una partícula y ésta la dirige a lo largo de su línea de movimiento, entonces

$$ma(t) = F(t); \quad \text{esto es,} \quad F = ma, \tag{8}$$

donde m es la masa de la partícula. Si se conoce la fuerza F, entonces la ecuación $x''(t) = F(t)/m$ se puede integrar dos veces para encontrar la función posición $x(t)$ en términos de sus dos constantes de integración. Estas dos constantes arbitrarias son frecuentemente determinadas por la **posición inicial** $x_0 = x(0)$ y la **velocidad inicial** $v_0 = v(0)$ de la partícula.

Es decir, la necesidad de las condiciones iniciales se atribuye a la aparición de *constantes arbitrarias* durante la integración. Y se señala que ambas son "frecuentemente determinadas por la **posición inicial** [...] y la **velocidad inicial**", sin aclarar qué queda fuera de lo "frecuente". Probablemente se alude a que no necesariamente tienen que ser las condiciones de inicio, pues pueden ser los valores de posición y velocidad correspondientes a cualquier otro tiempo, siempre y cuando sea el mismo para ambas.

En el caso de la *aceleración constante*, se presenta un desarrollo con base en la integración y la sustitución de condiciones iniciales para determinar las ecuaciones de la velocidad a partir de integrar la aceleración (p. 13):

Aceleración constante. Por ejemplo, supóngase que la fuerza F, y por tanto la aceleración $a = F/m$, son *constantes*. Entonces iniciamos con la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = a \qquad (a \text{ es una consonante}) \tag{9}$$

e integrando ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$v(t) = \int a\,dt = at + C_1.$$

Se sabe que $v = v_0$ cuando $t = 0$, y la sustitución de esta información dentro de la ecuación anterior nos lleva al hecho de que $C_1 = v_0$. Así

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = at + v_0. \tag{10}$$

Mediante un proceso análogo se determina, a partir de la integración de la velocidad, la función de la posición (p. 13):

$$x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0. \tag{11}$$

> De este modo, con la ecuación (10) es posible encontrar la velocidad, y con la ecuación (11) la posición de la partícula en cualquier tiempo t en términos de su aceleración *constante* a su velocidad inicial v_0 y su posición inicial x_0.

Aunque la última frase se presta a confusión respecto al número de condiciones iniciales que se requieren, pues se hace referencia a que la posición queda determinada por su aceleración, su velocidad inicial y su posición inicial (es decir, no solo estas dos últimas).

Respecto al problema de caída libre, se plantea (p. 15):

> El **peso** W de un cuerpo es la fuerza de la gravedad ejercida sobre el cuerpo. Así, la sustitución de $a = g$ y $F = W$ en la segunda ley de Newton $F = ma$ resulta en

$$W = mg \tag{14}$$

Posteriormente, se aclara la elección de variables con base en la posición de los ejes coordenados en relación con la dirección del movimiento. En este caso, se justifica la elección de la variable y por tratarse de un movimiento vertical.

> Para estudiar el movimiento vertical es natural escoger el eje y como el sistema coordenado para posición, donde frecuentemente $y = 0$ corresponde al "nivel del piso". Si se selecciona la dirección hacia *arriba* como positiva, entonces el efecto de la gravedad en un movimiento vertical del cuerpo es para disminuir su altura y también su velocidad $v = dy/dt$. En consecuencia, si se ignora la resistencia del aire, entonces la aceleración $a = dv/dt$ del cuerpo está dada por

➤ $$\frac{dv}{dt} = -g. \tag{15}$$

> Esta ecuación de aceleración proporciona un punto de inicio en muchos problemas que involucran un movimiento vertical. Integraciones sucesivas [como en las ecuaciones (10) y (11)] nos llevan a fórmulas de velocidad y de altura

$$v(t) = -gt + v_0 \tag{16}$$

y

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0. \tag{17}$$

> Aquí y_0 representa la altura inicial del cuerpo ($t = 0$) y v_0 su velocidad inicial.

Es de destacar la aclaración de la elección de variables pues una observación general respecto al tratamiento de la caída libre en estas obras es la notación diversa que se emplea para denotar la posición: x, y, s. Ello puede ser en sí un obstáculo didáctico cuando se propone al estudiante emplear diferentes libros de texto como bibliografía para el curso.

Por otro lado, nuevamente, se observa que las fórmulas de movimiento se deducen a partir de la integración sucesiva. En contraste, en el *Libro de Física*, el desarrollo seguido para obtener estas ecuaciones partió de modelar el movimiento a través de la velocidad y la aceleración, tomando en cuenta consideraciones relativas al fenómeno y a las propiedades tanto *promedio* como *instantánea* de ambas. El proceso de integración se planteó entonces como una herramienta para el análisis del movimiento en lugar de como un método para la deducción de sus ecuaciones.

No obstante, en la misma obra, en la deducción de las expresiones para el movimiento uniformemente acelerado se hizo un trabajo principalmente algebraico; asimismo, algunos detalles quedaron fuera de ser explicitados, como el hecho de que la velocidad promedio en un intervalo de tiempo es el promedio de las velocidades inicial y final en dicho lapso, pues esto es válido siempre y cuando la posición con respecto al tiempo tenga un comportamiento cuadrático.

Además, similar a lo encontrado en obras más antiguas, la definición de *ecuación diferencial* en el más reciente de los libros (Edwards y Penney, 2009) se basa en una concepción de la derivada como razón de cambio y, por ello, se asume a las ecuaciones que la contengan como la forma más *natural* de describir al "universo cambiante".

Como se comentó previamente, es hasta Cálculo II que la derivada es abordada formalmente; no obstante, la familiarización del alumnado con este concepto se tuvo que haber abordado ya en múltiples ocasiones a lo largo del curso de Física I.

El problema radica en que, al iniciar Física I, se demanda ya una concepción de la derivada como razón de cambio, por ende, se espera que en el Nivel Medio Superior ésta haya sido abordada con ese significado. Por otro lado, al analizar los fundamentos de la asignatura de Cálculo I, se observa que lo que se espera del alumnado es que previamente haya llevado un curso operativo y aplicado del cálculo; por lo tanto, no necesariamente se espera que cuenten ya con una noción más profunda de los conceptos, como sería el caso de una concepción de la derivada como razón de cambio.

Al confrontar la última observación con los fundamentos de la asignatura de Cálculo II, ésta parece confirmarse, pues se menciona que:

> Es el segundo de una serie de dos cursos donde se introduce al estudiante una de las ramas más importantes de las matemáticas, que es el análisis matemático. En ellos se presenta propiamente los "Fundamentos de Cálculo", lo cual podemos traducir, como la justificación de las técnicas del Cálculo infinitesimal aprendidas en los cursos, a nivel operativo, en el Bachillerato. [...] Se muestra que es posible traducir ideas geométricas e intuitivas a un lenguaje claro y preciso con lo cual muchas veces es la única manera de poder abordar determinados problemas matemáticos.

Por ende, mientras en Física se espera del alumnado de primer ingreso un cierto dominio del cálculo, en Cálculo se espera que dicho dominio esté a nivel operativo. Esta disyuntiva conduce a que el curso de Ecuaciones Diferenciales se fundamente en la noción de que "la mayoría de las asignaturas, en especial las de física, tratan con problemas descritos por ecuaciones diferenciales por lo que el estudiante tiene y debe reconocer estos problemas" a la par de tener como objetivo particular de cada unidad el conocer y desarrollar métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Es decir, en la misma asignatura se contrapone un objetivo funcional con un contenido operativo.

En este sentido, la primera unidad del curso de Ecuaciones Diferenciales establece como objetivo: "Introducir al estudiante al material que debe dominar técnicamente para resolver cualquier Ecuación Diferencial. Introducir los conceptos de Ec. diferenciales, orden, grado, solución general, solución particular, etc. y tener una visualización geométrica".

De los ejemplos anteriores se pude deducir que, cuando el fenómeno de caída libre (movimiento con aceleración constante) es abordado en los libros de ecuaciones diferenciales, la ecuación a resolver parte netamente de la ley preconcebida (segunda ley de Newton) y no se hace un tratamiento particular que permita su construcción a través de la modelación del fenómeno.

A diferencia de ellos, en el libro de Física se parte justamente de los aspectos cualitativos del movimiento para ir deduciendo las expresiones matemáticas que lo modelan. Sin embargo, se identifica que para ello se demanda una concepción de la derivada como razón de cambio y de su relación con la integral a través del teorema fundamental del cálculo, por lo que la mayor parte de la deducción es presentada por el libro en lugar de ser explorada por el alumnado.

En particular, a partir de la exploración de los libros de texto de ecuaciones diferenciales, se ha bosquejado un esquema *grosso modo* sobre el tratamiento usual de los problemas físicos en ellos (ILUSTRACIÓN 2-10).

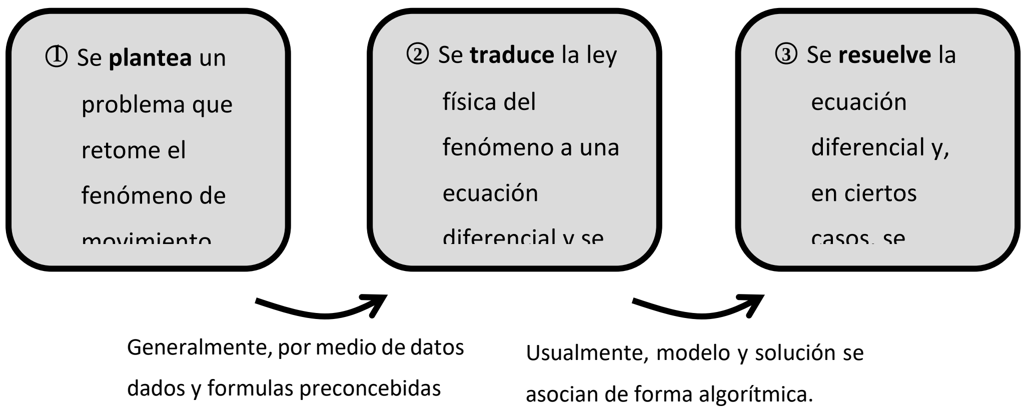


ILUSTRACIÓN 2-10 Bosquejo *grosso modo* del tratamiento usual de los problemas físicos en libros de texto de ecuaciones diferenciales.

De manera particular, algo que llamó la atención durante la revisión de estos libros fue la inclusión de notas respecto al uso de tecnología en algunos de ellos. Por ejemplo, al final de la primera sección en la introducción del libro de Boyce y DiPrima (2000), se habla sobre el "empleo de las computadoras en las ecuaciones diferenciales".

En principio, es importante tener presente el momento en el cual se escribió este libro para tener una idea sobre el potencial de las computadoras de la época, así como el acceso que se tenía a éstas. En este sentido, se habla de la naciente (y en aumento) disponibilidad a microcomputadoras poderosas que permiten realizar aproximaciones numéricas y trazar sus gráficas respectivas, cuya presentación "suele ser mucho más ilustrativa y útil, para comprender e interpretar la solución de una ecuación diferencial, que una tabla de números o una fórmula analítica complicada" (Boyce y DiPrima, 2000, p. 24), añadiendo que quien tenga interés "en las ecuaciones diferenciales debe considerar, a la luz de sus propias circunstancias, la mejor manera de aprovechar los recursos de cómputo de que disponga" (p. 24).

La misma sección concluye comentando que:

> Sigue siendo esencial comprender cómo se aplican los diversos métodos de resolución, y esta solución se logra en parte al trabajar con detalle un número suficiente de empleos. Sin embargo,

llegará el momento en que deba delegar tanto como sea posible los detalles sistemáticos (a menudo repetitivos) a una computadora para *concentrar más la atención en el planteamiento adecuado del problema y en la interpretación de la solución*. En especial, el [y la] estudiante debe esforzarse por combinar los métodos numéricos, gráficos y analíticos a fin de comprender mejor el comportamiento de la solución y del proceso subyacente modelado por el problema. Nuestro punto de vista es que siempre debe tratar de usar las mejores herramientas disponibles para cada tarea. Algunas veces pueden ser lápiz y papel; otras una computadora o una calculadora. A menudo lo mejor es una combinación atinada. (Boyce y DiPrima, 2000, p. 25, el subrayado fue agregado).

Sobre esta cita, cabe señalar un par de detalles. En primer lugar, es de destacar la importancia que atribuye a la transición entre sistemas de representación (numérico, gráfico y analítico). En segundo lugar, si bien las computadoras actualmente poseen (todavía, como en el 2000) tal capacidad de automatizar procesos analíticos y numéricos con sus respectivos trazos gráficos, sus potencialidades de *representación* y *manipulación* son mucho mayores ahora (no se limitan solo a una programación por código), lo cual favorece su integración en el proceso de modelación y su respectiva asociación con el plano físico; por ejemplo, a través de un ambiente dinámico e interactivo.

Estos tres elementos distinguidos en los textos (*modelación*, *física* y *tecnología*) son justamente aquellos aspectos que se destacaron en las investigaciones reportadas anteriormente; no obstante, en estos libros el tratamiento que se les da es muy diferente, con frecuencia sin explicitarse y haciendo en ellos un énfasis menor.

La primera etapa de revisión de literatura, constituida principalmente por estas dos secciones: (1) sobre las tendencias en investigación (artículos y publicaciones) y (2) sobre los libros de texto usuales en la enseñanza, tuvo la finalidad de proveer una perspectiva general sobre el fenómeno de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El paso siguiente consistió en complementar dicha revisión con el estudio de tesis que permitieran un análisis más profundo y específico del fenómeno.

2.3. Tesis en Matemática Educativa

Para la revisión de tesis en matemática educativa, se consideraron investigaciones que trataran sobre el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y se observó que, acorde con las tendencias identificadas en la revisión de artículos científicos, en ellas se destacan: la modelación, la asociación a contextos físicos y el uso de la tecnología.

De manera especial, se prestó atención a dos de las tesis:

> *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinaras*. Tesis de doctorado de Arturo Hernández Ramírez, dirigida por el Dr. Fernando A. Hitt Espinosa, 1995.
>
> *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado de Jaime L. Arrieta Vera, dirigida por el Dr. Ricardo A. Cantoral Uriza y el Dr. Francisco Cordero Osorio.

La primera de ellas fue esencial para postular una hipótesis epistemológica sobre el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, mientras la segunda lo fue para definir la articulación de la modelación con un enfoque socioepistemológico enmarcado en el uso de la tecnología. Por este motivo, se dedican a ellas las dos siguientes subsecciones.

2.3.1. Tesis doctoral de Hernández (1995)

"Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias"

Uno de los principales fundamentos teóricos de la tesis de Hernández (1995) es la Transposición Didáctica de Chevallard. El autor presenta de manera esquematizada cómo la consideró en su estudio: partiendo del *saber matemático*, a través de la historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias y los escenarios para la búsqueda de sus soluciones, que luego es transpuesto al *saber a enseñar*, reflejado en los libros de texto, y que finalmente, por medio de una Ingeniería Didáctica basada en el "juego de marcos" propuesto por Douady[14] (1986), plantea presentar a los alumnos como el *saber enseñado* (p. 3).

En cuanto al juego de marcos, como parte de la conclusión de la tesis se detectó que "una primera etapa para la mejor comprensión de los modelos era que, ya que las ecuaciones diferenciales definen funciones había que ahondar en el estudio y articulación de sus diferentes representaciones desarrollando los tres marcos de resolución [numérico, gráfico y algebraico]" (pp. 184-185). Estos marcos de resolución se rescatan a partir de los escenarios para la búsqueda de soluciones que se hallaron dentro de la revisión histórica: en el *marco algebraico*, las soluciones en series, la integración en términos finitos y los métodos operacionales; en el *marco gráfico* (también referido en ocasiones por el autor como *geométrico*), "describir" las curvas definidas por una ecuación diferencial; y en el *marco numérico*, esquemas iterativos para conocer "aproximadamente" la solución en un intervalo dado (p. 3).

Este último entrecomillado parece aludir a la *precisión* necesaria en la práctica real profesional; en particular, por un subrayado de Hernández (1995) en una cita tomada de una propuesta del *School Mathematics Project* (1983, p. 57): "*these methods follow more closely the actual practice of those who use 'real' differential equations in research or industry where a 'solution' is more likely to be a graph or a table of values than a formula*" (p. 45). Es decir, se basa en que, con frecuencia, en la investigación o en la industria, es más probable que la solución se obtenga a partir de un conjunto de datos (como las mediciones experimentales) en lugar de como una función explícita.

Este punto se encuentra en estrecha relación con el uso de notación diferenciada (usualmente no explicitada) para la *razón de cambio*: como cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ y como derivada y'. Al respecto, Martínez, Pluvinage y Montaño (2017) señalan que tal vez se deba a que "los cambios expresados como diferencias finitas permiten una aproximación suficiente a ciertos fenómenos observados" (p. 7).

[14] "Un marco (cadre), como ella [Douady (1986)] misma dice, se entiende en el sentido usual que se tiene cuando hablamos del marco algebraico, del marco aritmético, del marco geométrico" (Hernández, 1995, p. 59).

Por este motivo, en la propuesta del Hernández (1995) se contemplan ejemplos donde se hace un tratamiento a partir de un conjunto de puntos, para lo cual se hace además evidente el papel de la tecnología como una herramienta esencial.

En este sentido, se hace énfasis en que "el software computacional constituye la principal vía de acceso a las representaciones gráficas y numéricas" (p. 4), pero además de estos dos marcos, "para –con la ayuda de los procesadores simbólicos– enfocar de otra forma el acercamiento algebraico (efectuando el cálculo de: derivadas, integrales, series de potencias o de transformadas de Laplace)" (p. 68).

Y si bien ya han pasado más de dos décadas desde el momento del estudio, las herramientas tecnológicas con las que se contaba en ese entonces ya poseían una enorme capacidad para plantear acercamientos que, en palabras del autor, "en otros tiempos difícilmente podríamos instrumentar en el salón de clases" (p. 4).

Sobre esta última observación, en el trabajo se hace referencia a una propuesta hecha en el año 1919, por Brodetsky, quien "después de criticar el curso de EDO [Ecuaciones Diferenciales Ordinarias] por ser la 'perpetuación de una serie de trucos y malabarismos', nos dice que sería deseable que en los cursos elementales se hiciera menos énfasis en los casos integrables y, se suministrara mayor información sobre las características (de una naturaleza geométrica o algebraica) que proporciona la solución de una ecuación dada (Brodetsky, 1919, p. 379)" (pp. 22-23).

La *visionaria*[15] propuesta de Brodetsky, de inicios del siglo pasado, consistía en "usar en principio papel milimétrico y lápiz, con el fin de bosquejar las curvas integrales de algunas ecuaciones diferenciales" (p. 131); estas herramientas con las que contaba permitían justamente trabajar con la *naturaleza geométrica* y *algebraica* de la solución desde un punto de vista *cualitativo*, como se comentó anteriormente. Por otro lado, sobre las herramientas tecnológicas que sugiere Hernández[16], se comenta que se decidió "usar paquetes 'amables',

[15] Hernández (1995) comenta que Brodetsky "desarrolla un método gráfico, el cual básicamente hace uso de los campos de pendientes y la segunda derivada, para describir cualitativamente las soluciones de la ecuación diferencial. Quizás desde una perspectiva actual su acercamiento no sea muy novedoso, pero desde el punto de vista de la enseñanza, es muy visionario ya que otorga al proceso de visualización un lugar central" (p. 22).

[16] Entre las principales herramientas tecnológicas que trata en su investigación se encuentran las hojas de cálculo: *Excel* (versión 3.0 para Windows) y *Mathcad* (2.5 para el caso numérico y 3.1 para Windows para abordar

como *Mathcad* y *Omnigraph*, los cuales realmente ayudaran a la mejor comprensión de los acercamientos numérico y gráfico. El software *DERIVE*, debido a sus características y el cual requiere más de pericia para su manejo, lo utilizamos para articular los tres marcos de resolución" (p. 185).

En particular, Hernández propone una articulación a través de representaciones en las cuales sea posible modificar valores y parámetros, así como hacer *zoom* de las gráficas obtenidas; como él mismo menciona: "(en el caso de las ecuaciones de primer orden), básicamente nos permiten trazar campos de pendientes y bosquejar –sobre la misma pantalla– las curvas solución (especificando desde luego la condición inicial) mediante la implementación de un método numérico" (p. 71).

Del análisis de su propuesta es posible interpretar que el énfasis que hace el autor en la dificultad previa (para instrumentar un acercamiento gráfico en el estudio de las ecuaciones diferenciales) nace de ver a la tecnología (que él emplea) desde dos potencialidades principalmente: en su capacidad para producir de manera *rápida* y *precisa* gráficas, campos de pendientes, planos fase, entre otros; y en su capacidad para *articular* dicho acercamiento con los de tipo algebraico y numérico a través de los procesadores simbólicos y las hojas de cálculo. Esta es una clara innovación a su época; sin embargo, la tecnología ha evolucionado y, con ello, se presentan nuevas posibilidades para abordar las ecuaciones diferenciales.

En particular, la herramienta propuesta para llevar a cabo la presente investigación fue *GeoGebra*[17]. Al ser un software de *matemática dinámica* que combina las características de un Sistema de Geometría Dinámica con aquellas de un Sistema Algebraico Computacional (CAS, por sus siglas en inglés) permite, además de las capacidades que destaca Hernández en la tecnología que él usó, acceder a lo que se perfiló como una *naturaleza dinámica* de la variación, específicamente, de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

---

cuestiones simbólicas); los paquetes: *Graphic Calculus* de David Tall et al. (1988) y *Omnigraph* de Brayne (1988); y el procesador simbólico: *DERIVE* (Hernández, 1995, pp. 53, 70-71 y en Anexos: "Una breve introducción al uso de *DERIVE*").

[17] Versión "Classic 5".

Sobre dicha naturaleza se seguirá ahondando a lo largo del presente escrito; por ahora, se discutirá más acerca del estudio epistemológico que presenta Hernández en su tesis. Este autor comenta que su motivación surge de que:

> Una de las críticas más frecuentes de los profesores de la especialidad es que [las y] los estudiantes no 'transfieren' los conocimientos adquiridos en este curso [Ecuaciones Diferenciales] a los modelos que estudian en la especialidad. Este problema quizás se deba, en parte, a la gran cantidad de articulaciones que se tienen que hacer entre representaciones gráficas y analíticas (ver figura [Ilustración 2-11]) (pp. 6-7).

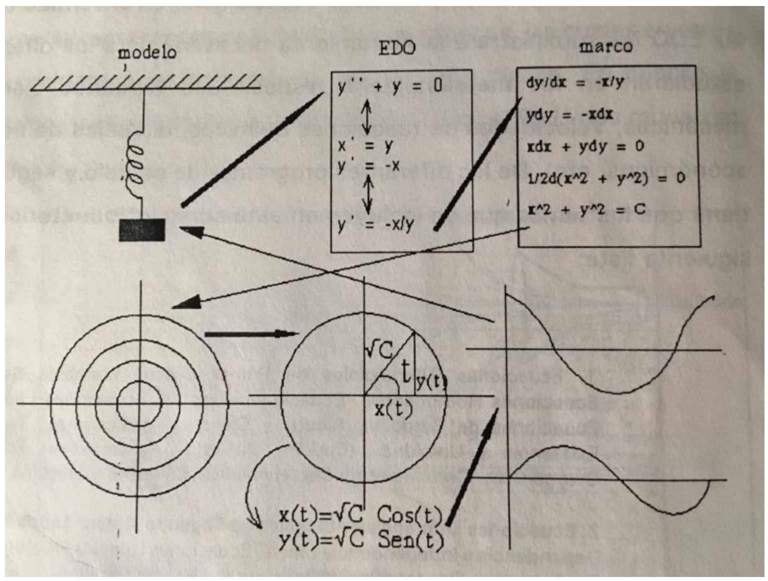


ILUSTRACIÓN 2-11 Esquema sobre las articulaciones entre representaciones gráficas y analíticas (Hernández, 1995, p. 6).

El autor propone explicar esta situación a través de la transposición didáctica, "analizando la historia (desde la perspectiva del currículum) y los libros de texto" (p. 8). Esto con la finalidad de elaborar una propuesta en donde se incorporen los acercamientos numérico y geométrico, pues desde el inicio señala que el currículo escolar ha priorizado el algebraico.

Para este recorrido *histórico–epistemológico*, Hernández se basa en dos obras: *Métodos formales de integración* de Ince (1992) y *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* de Kline (1972). A continuación se describe sintéticamente lo que reporta el investigador, tratando de rescatar los elementos más importantes de su estudio y compartiendo, en algunos casos, una apreciación desde la mirada *socioepistemológica* (para una descripción más detalla de esta perspectiva, se invita a la lectura de la sección Constructos teóricos de la TSME en el capítulo **Marco teórico–conceptual**).

"*Aequatio differentiatis*", término que dio pie a la futura denominación de *ecuación diferencial*, fue acuñado por Leibniz en 1676 y empleado inicialmente para denotar una relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x y y (Ince, 1992, como se citó en Hernández, 1995, p. 9). Como podría anticiparse, las condiciones bajo las cuales este término era empleado por Leibniz correspondían a un conocimiento emergente que apenas comenzaba a caracterizarse, por lo tanto, no es de esperar que coincida con la definición actual.

Más aún, el origen mismo del término es debatido en cuanto a quién lo acuñó por primera vez. De acuerdo con la otra obra consultada por Hernández, sería Huygens el primero en emplearlo en el *Acta Eruditorum* de 1693 y que, en años posteriores, Leibniz lo retomaría.

Desde una perspectiva socioepistemológica, conocer *quién* lo usó por vez primera resulta secundario al concebir a la construcción del conocimiento matemático como un proceso *social*, es decir, como producto de un trabajo en comunidad. De ello dan cuenta las cartas en las que científicos intercambiaban sus hallazgos y discutían sus diferentes interpretaciones. Por ende, si bien no es posible determinar exactamente la naturaleza del intercambio intelectual entre ellos, se puede afirmar al menos que lo hubo.

Tal es el caso de Newton y Leibniz, dos científicos asociados al nacimiento del cálculo y, a su vez, al de las ecuaciones diferenciales, pues éstas emergen paralelamente a él. Se reporta que Newton escribió a Leibniz un anagrama que decía en latín: "Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa". O bien, "es útil resolver ecuaciones diferenciales" (Arnold, 1983, como se citó en Hernández, 1995, pp. 9-10).

De acuerdo con la revisión de Hernández, la primera parte de la historia de las ecuaciones diferenciales está marcada por su clasificación, métodos de integración y por estar originadas en problemas de tipo geométrico o mecánico. Este devenir histórico estuvo protagonizado por Newton, Leibniz, los Bernoulli, Ricatti, Euler, Laplace y Lagrange.

Newton provee de una primera clasificación de las ecuaciones diferenciales (entonces *ecuaciones fluxionales*) ordinarias de primer orden. Más tarde, en la última decada del siglo XVII, James y Jhones Bernoulli introducen los términos: "integrar" una ecuación diferencial y el método "separación de variables" (*separatio indeterminatarum*) para resolver una ecuación diferencial (Ince, 1929, p. 531, como se citó en Hernández, 1995, p. 11).

Hernández relata entonces que, para finales del siglo XVII, básicamente todos los métodos elementales para resolver las ecuaciones diferenciales de primer orden habían "salido a la luz" (p. 11). A principios del siglo XVIII se comienzan a estudiar las de segundo orden y, de acuerdo con el autor, durante la primera mitad de dicho siglo se había escrito prácticamente la historia de los métodos formales de integración vía los trabajos de los descendientes de los Bernoulli, Ricatti, Clairaut y Euler, entre otros (Ince, 1929, p. 539, como se citó en Hernández, 1995, p. 12).

Por su parte, Euler elabora una primera sistematización de los trabajos generados en la época en sus *Institutiones Calculi Integralis* (1760-1770), "en donde encontramos lo que se puede llamar la primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias [y más aún] esta obra contiene una buena parte (y mucho más) del material que encontraríamos en un libro de texto en la actualidad" (Hernández, 1995, p. 12).

Un punto para destacar, respecto a lo que constituiría el currículo escolar, es la priorización del marco algebraico. En este sentido Hernández señala que:

> El carácter algorítmico-algebraico está determinado, por un lado, por la relación tan cercana que existe entre el desarrollo del álgebra (como búsqueda de las raíces de un polinomio en términos de radicales) y de las ecuaciones diferenciales lineales (en cuanto a su integración por cuadratura) (Demidov, 1982), y por otro, porque el estudio de las transformadas integrales, en particular la transformada de Laplace, se origina en el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales (Deakin, 1984, Lützen, 1979). En este sentido, el programa de estudios actual se alimenta de estas dos componentes históricas, las cuales determinan su carácter algebraico. (p. 183).

Pero destaca además tres factores de esta preponderancia del marco algebraico:

- Los procedimientos algorítmico–algebraicos en problemas rutinarios son más sencillos de desarrollar "como lo demuestran los estudios de Orton, Selden et al. (1989), y Artigue (1991)" (p. 183).
- Instrumentar el acercamiento gráfico (o numérico) en el aula "requiere necesariamente de la microcomputadora" (p. 183).
- Con la incorporación de la Transformada de Laplace al currículum de las escuelas de ingeniería, hacia la segunda mitad del siglo pasado, los procedimientos algebraicos vuelven a cobrar un nuevo impulso en la enseñanza (p. 184).

En cuanto a la forma en la cual se concebía a la *derivada* en tiempos de Euler, ésta se consideraba más bien como el cociente de diferenciales:

$$\frac{dy}{dx}$$

Mientras que el concepto de *ecuación diferencial* era: "ecuación que relaciona la variable x y y, y sus correspondientes diferenciales, dx y dy" (p. 12). En este sentido, apunta que "en el caso de una ecuación diferencial de segundo orden aparecen las diferenciales de segundo orden ddx y dx^2 en lugar de la segunda derivada y''" (p. 12).

En línea con lo anterior, el autor comenta que "la definición actual de ecuación diferencial [propuesta por Cauchy] se expresa más en términos de la derivada de la función incógnita que en términos de las diferenciales de ésta" (p. 90). Y por ende señala que en $\frac{dy}{dx}$ "conviven la derivada de y respecto de x (en el sentido de operador $\frac{d}{dx}$), y el cociente de las diferenciales dx & dy" (p. 91).

Sin embargo, esto no suele aclararse en los cursos de Ecuaciones Diferenciales y es particularmente importante al presentar los métodos de resolución, pues a veces se parte de contemplar una derivada y, en otras, de considerar un cociente de diferenciales.

De hecho, sobre el método de separación de variables, Hernández comenta que "es más bien un truco que un método (Pólya, 1977, p. 172)" (p. 96) y comenta que algo similar ocurre con los demás métodos para resolver ecuaciones diferenciales.

Se señala además el énfasis inicial que se hace en la mayoría de los cursos sobre la importancia de saber identificar los tipos de ecuación diferencial, pues con base en ello se procede mediante el algoritmo correspondiente a cada caso. Aspecto que concuerda con la cita mostrada anteriormente en la sección Libros de texto sobre el objetivo planteado por Zill (1997) para su libro.

En respuesta, Hernández propone que se parta de acercamientos *cualitativos*, para resolver problemas específicos, cercanos a la práctica del ingeniero. Para tal fin, destaca el uso de la tecnología (*DERIVE*) para la articulación de marcos en el proceso de modelación. En cuanto a esta, señala que "los problemas de enseñanza–aprendizaje se encuentran fundamentalmente en la parte de Matematización (con diferentes matices)" (p. 105), la cual para él corresponde al paso del *modelo de una situación real* al *modelo matemático*.

El autor divide dichos problemas en dos tipos:

- *Traducción* del modelo de una situación real al modelo matemático: traducir pendiente de recta tangente, velocidad, corriente y crecimiento, razón de cambio, etc. como la *derivada* de una función (p. 105).
- En vista de que, en muchas de las aplicaciones, las leyes que determinan éstas son de tipo *experimental* (sobre todo en la física y en la biología) se pasa directamente al modelo matemático identificando las variables que intervienen en el problema (p. 105).

El primer punto concuerda con la necesidad manifestada en varios artículos de dar significado a la derivada como valor que indica la razón de cambio con respecto al tiempo (velocidad) y con relación al fenómeno de variación simulado (Marciuc y Miron, 2014; Martínez, Pluvinage y Montaño, 2017).

Con respecto al segundo punto, esto concuerda con el tipo de experimentación *discursiva* que se comentó previamente; pues generalmente se parte de un texto para identificar los datos necesarios para resolver el problema:

> Dicho de otra forma, la fase de transición de la física a las matemáticas, se reduce a la aplicación directa de leyes de la física, que nos conducen a una ecuación matemática. Desde este punto de vista, podemos afirmar que la mayoría de los procesos de modelación que se manejan en los cursos y en los libros de texto [...] pertenecen a esta categoría. (Hernández, 1995, pp. 123-124).

Esto es consistente con lo hallado en la revisión de los *Libros de Ecuaciones Diferenciales* respecto a la forma usual de abordar problemas de física, pues se identificó que, principalmente, el trabajo se reduce a sustituir valores en una fórmula dada correspondiente a una ley preconcebida.

El autor sugiere como motivo de trabajos futuros, dentro de la misma línea de investigación, un esquema teórico para enseñar ecuaciones diferenciales a través de procesos de *modelación*, pues aclara que ese no fue el objetivo central de su tesis. No obstante, afirma que para su trabajo los *modelos* fueron de primordial importancia, ya que "nos van a proveer de pistas para ubicar, por ejemplo, el papel a jugar por los distintos marcos (así como su articulación) de resolución en este contexto" (p 121).

Por otro lado, Hernández indica que existen obstáculos de orden epistemológico en la primera etapa del círculo de modelación, los cuales se refieren, en general, a la complicada interacción que se da entre la física y las matemáticas, la cual representa "quizás la característica central, de la historia de las matemáticas desde el siglo XVII" (p. 127).

Una cita de particular interés acerca de los problemas *reales* es la que retoma el autor del trabajo de Pólya (1963), ésta consiste en el siguiente planteamiento:

> ¿Un terrón de azúcar, o dos? ¿Crema? Todos hemos observado a una dama tomando té. ¿Qué pasa? Lo más seguro es de que ella revuelva la parte superior con su cuchara para que el té ascienda. Si lo revuelve muy rápidamente, lo derrama y arruina su tarde. Su cuchara contiene un problema para ella y para nosotros. Nuestro problema es tratable matemáticamente: ¿Cuál es la forma de la superficie del té rotando? (pp. 160-174, como se citó en Hernández, 1995, p. 122).

Lo curioso es cómo, *para la dama*, el problema al derramar el té es arruinar su tarde; mientras que, *para el lector* (muy probablemente pensado en masculino dada la afirmación inicial de que "todos hemos observado a una dama tomando té"), el problema es el tratamiento del fenómeno desde las matemáticas.

Tomando en cuenta el año en que se escribió el libro, la concepción de *la dama* y *del lector* parecen concordar con la ideología de la época respecto a los roles de género. Sin embargo, si bien actualmente un problema redactado así sería repensado antes de ser incluido en un libro de texto –pues se lucha por una neutralidad en el lenguaje–, hay mucho sobre la situación de género que *se dice sin palabras*.

Retomando la implementación de la propuesta de Hernández (1995), se comenta que, en la articulación de los tres marcos de resolución, a pesar de que en principio se sugería una estrategia para atacar los problemas (gráfico, numérico y algebraico), también se diseñaron tareas en las cuales se pudiera proponer una estrategia propia, de tal forma que se evitara privilegiar un marco de resolución (p. 181).

Donde se detectó mayor número de problemas fue en las tareas de asociación entre los marcos gráfico y algebraico, con el fin de establecer una decodificación adecuada; particularmente, donde se buscaba una asociación entre representaciones algebraicas de familias monoparamétricas de funciones y sus correspondientes representaciones gráficas. Por otro lado, en lo que respecta a las tareas de asociación entre ecuaciones diferenciales y campos de pendientes, la existencia de un método les permitió establecer rápidamente la codificación adecuada (pp. 181-182).

En prospectivas, el autor consideró necesario que en trabajos posteriores se fuera ahondando en algunos aspectos particulares de los diferentes marcos de resolución, mediante la organización local de una secuencia de enseñanza o fase, es decir al nivel de una *micro–ingeniería* (p. 186).

Finalmente, algo que sin duda preocupa es el hecho de que, pese a ser relativamente reciente la investigación en matemática educativa sobre el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, desde hace ya más de dos décadas existen propuestas para incidir en el sistema de enseñanza pública y, no obstante, las condiciones que entonces se criticaban sobre él parecen haberse mantenido inmutables hasta la actualidad.

Inclusive, desde hace un siglo, Brodetsky criticaba los cursos de EDO por ser la "perpetuación de una serie de trucos y malabarismos" y sugería que en los cursos elementales se hiciera menos énfasis en los casos integrables y, se suministrara más información sobre las características (de una naturaleza geométrica o algebraica) que proporciona la solución de una ecuación dada.

Por lo anterior, es pertinente resaltar la importancia que tiene el considerar la viabilidad de la implementación de un diseño, evaluar las condiciones del espacio donde se plantea y las necesidades de la comunidad objetivo.

2.3.2. Tesis doctoral de Arrieta (2003)

"Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula"

Como rasgos generales de esta tesis de Arrieta (2003), se observa cómo el autor destaca la relación entre lo individual (*identidad*) y lo social (*interacción*) al construir conocimiento matemático. Es decir, no ve esta construcción *solo* como un proceso aislado, sino también como un proceso social de creación conjunta. Así, plantea que su "investigación está insertada en el proceso de búsqueda sobre las formas de interacción de los conocimientos matemáticos de [las y] los estudiantes en diversos contextos extraescolares o no, como los son el trabajo y la interacción con otras ramas de la ciencia" (p. 4).

Un aspecto por el cual se ha prestado especial atención a este trabajo es que parte de preocupaciones que surgen de pensar "en un currículo integrado que permita el tratamiento de las ciencias exactas y naturales a la par de las sociales, donde la matemática y la tecnología jugarían un papel relevante" (p. 4).

Algunos ejemplos en ese sentido, citados por el autor, son:

- Aquellos donde la cuestión radica en el problema de la transferencia de conocimientos del ámbito escolar al ámbito cotidiano y viceversa (Evans, 1996; Saxe, 1991; Carraher, 1991).
- Mientras para otros la cuestión radica en una integración del currículo que permita el tratamiento simultáneo de asignaturas tradicionalmente disjuntas (AAAS, 1997; Bernsteir, 1971, 1990; Waszkiewicz, 1978)
- Asimismo, quienes teorizan sobre la *cognición en práctica* y de la *psicología de exteriores* (Lave, 1992; Lave y Wegner, 1993; Wegner, 2001), haciendo énfasis en el estudio de las *continuidades* y *discontinuidades* de la práctica matemática en una variedad de actividades escolares y extraescolares, en lugar de preocuparse solamente de los procesos de *transferencia* del conocimiento matemático desde la clase de matemáticas hacia otras actividades (p. 5).

El autor destaca en particular una cita de la *American Association for the Advancement of Science* (AAAS) donde se comenta que "una comprensión integrada del conocimiento científico habría de permitir que [las y] los estudiantes y la población puedan conocer al mundo natural y respetar su unidad; percatarse de algunos de los modos importantes de interdependencia de las matemáticas, la tecnología y las ciencias" (p. 5), entre otros puntos.

Por otro lado, comenta sobre el trabajo de Coll (1986) en cuanto a "la adquisición de una cultura científica y el desarrollo de una actitud científica" (p. 5), entendida como el que se contribuya a formar valores y concebir a la relación del ser humano con su medio ambiente de una manera racional y razonada.

A su vez, el autor expone que antiguamente los matemáticos recurrían con frecuencia a *argumentos contextuales*; en este sentido, comenta que "estudios recientes en el campo de la matemática educativa como (Moreno, 1999) o (Farfán, 1997) mencionan [esto] en la componente epistemológica de su análisis preliminar" (p. 6). En consecuencia, el interés de la tesis es explorar cómo dicha tradición podría considerarse en las actividades del alumnado para la construcción de su cognición y de sus realidades (p. 7).

De manera particular, una pregunta de investigación de la tesis plantea el:

> Explorar las prácticas discursivas que ejercen los estudiantes y profesor en el aula en contextos discursivos centrados en las prácticas de modelación de fenómenos donde construyen, interactivamente, argumentos, herramientas y significados a partir de la interacción con el fenómeno a modelar. (p.8).

El autor agrega por lo tanto que:

> Nuestro interés específico consiste en investigar las interacciones entre estudiantes y profesores con fenómenos modelables mediante relaciones lineales y no lineales, en un proceso de matematización en el aula, y cómo coadyuvan a desarrollar nociones matemáticas ligadas a procesos de cambio y de variación, donde busquemos predecir estados futuros de un proceso de cambio con base en datos que provienen de la empiria y de la matematización del fenómeno en sí. Así, nuestra intención es investigar las prácticas donde se combina la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática y las construcciones al ser ejercidas dichas prácticas. (p. 8).

Un antecedente particular de la tesis fue "sobre la formación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas a través de la modelación de fenómenos, reportada en el trabajo de (Carrión y Arrieta, 1998)" (Arrieta, 2003, p. 9), pues el autor considera los sistemas semióticos de representación verbal, gráfico, numérico y algebraico.

En particular, el trabajo aquí referido trata sobre *relaciones lineales* y *no lineales* en un proceso de matematización en el aula, así como de la manera en que coadyuvan a desarrollar nociones matemáticas ligadas a procesos de cambio y de variación. De ahí que un esquema de lo planteado serían las relaciones que se presentan en la TABLA 2-1.

yo–matemáticas ("Matemáticas modernas") *Lo epistemológico*	estudiante–matemáticas (Cómo se aprende – Piaget...) *Lo cognitivo*
salón de clases–matemáticas (Vygotsky...) *Lo didáctico*	lo no escolar–matemáticas (Lave, Carraher...) *Lo social*

TABLA 2-1 Relaciones con las matemáticas (basado en Arrieta, 2003, p. 8).

Como perspectiva teórica se empleó la socioepistemológica y de ella destaca tres características fundamentales sintetizadas a continuación:

- *Primacía de las prácticas sobre los objetos*: sobre la interacción con herramientas en contexto con intensiones situadas.
- *Carácter situado de dichas prácticas*: sobre la inseparabilidad del contexto y práctica en contraste con el papel de las condiciones que facilitan o alteran acciones.
- *Carácter discursivo en la construcción social del conocimiento*: sobre las interacciones de quienes participan en la construcción de conocimientos, realidades y herramientas, con el mundo y con otros (p. 11).

En el capítulo de la tesis que trata la *modelación*, se pretende "argumentar sobre la pertinencia de tomar las prácticas sociales de modelación como epistemologías en el diseño de secuencias de aprendizaje" (p. 14). Por ende, los diseños de su propuesta "se centran, no en los contenidos matemáticos en sí o en las producciones de [las y] los participantes, sino en las prácticas sociales ejercidas por [las y] los participantes utilizando herramientas, situadas en un contexto social" (p. 15).

El trabajo de "Malaspina (1998) menciona que conocer conceptos de otros campos del saber y modelos matemáticos de la realidad, contribuye en alguna medida a desarrollar ideas para visualizar conceptos matemáticos y reforzar así su comprensión y manejo y facilitar, en consecuencia, una intuición de lo abstracto" (como se citó en Arrieta, 2003, p. 87).

Por otro lado, en cuanto al trabajo de Brousseau (1986, como se citó en Arrieta, 2003) se comenta sobre la *recontextualización* que el profesor tiene como tarea (pues los conceptos surgen en ciertos contextos que el proceso de formalización descontextualiza), así como la *repersonalización* para intentar que el alumnado tome como suyo el problema; asimismo, que, para desarrollar el proceso de abstracción, habrá de invertir los procesos anteriores (como se citó en Arrieta, 2003, pp. 87-87).

Con relación a la física y conceptos especiales como la *velocidad* y la *aceleración*, Arrieta cita el trabajo de Reig (1987), quien señala que la habilidad para interpretarlos y usarlos es un prerrequisito para la resolución de problemas tanto de la ciencia como de las matemáticas (p. 88).

Mientras en lo que respecta al uso de la tecnología, se cita un trabajo de Sutherland, Mochón, Jinich y Rojano (1996) donde se concluye que la *modelación matemática* en un *medio computacional* (en su caso, mediando el aprendizaje con hojas de cálculo) permite al alumnado crear un mundo propio, un mundo artificial, en el cual explora fenómenos del mundo físico y logra hacer conceptualizaciones a partir de esta experiencia. Para ello, se apoyan en la teoría de la cognición en práctica y psicología de exteriores de Lave (1992, como se citó en Arrieta, 2003) que enfatiza "el estudio de las continuidades y discontinuidades de la práctica matemática en una variedad de materias científicas, desde las clases de matemáticas hacia las demás materias escolares" (p. 88-89). En el **Marco teórico–conceptual** se discute con mayor detalle el caso de las iniciativas interdisciplinarias *desde* la matemática educativa.

En particular, Arrieta retoma lo anterior prestando además atención a las interacciones humanas, "prácticas referentes a la construcción de herramientas matemáticas utilizadas por comunidades interviniendo en los fenómenos de la naturaleza" (p. 89).

Con respecto al lenguaje, el autor no lo concibe únicamente como un vehículo para expresar pensamiento, sino que, en concordancia "con Edwards y Potter (1992), [...] el *habla como acción situada en un contexto discursivo construye el significado, la realidad e incluso la misma cognición*" (p. 93-94).

Para el presente estudio, este elemento se vuelve particularmente importante para la última etapa de la fase empírica de la investigación (ver el capítulo **Método** para más detalles).

Por otro lado, se cita el trabajo de Cantoral y Farfán (1998) en cuanto señalan que existen nociones que se construyen socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de las personas (individualmente) y de los grupos sociales; por ejemplo, la noción de *predicción*. Por lo cual, la investigación conducida por Arrieta "*toma epistemologías de las prácticas relacionadas con el uso de las matemáticas* como base para el diseño de situaciones didácticas" (p. 99). En cuyo sentido, se rescatan "*prácticas que combinan la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática* [y] a la estructuración discursiva de estas prácticas en el aula es lo que llamamos *modelación como proceso de matematización en el aula*" (p. 100).

Ahora bien, un elemento que entra entonces a discusión es respecto a la *interacción* o *intervención* en la naturaleza, el contexto o, más específicamente, lo que se concibe como *realidad*. Acerca de ésta, Arrieta comenta que:

> Decir que la realidad tiene una estructura que no está constituida por sustancia [como la cualidad de "gravedad"] y, en particular, identificar la realidad con una estructura matemática de los fenómenos (como lo señalaron Galileo y Newton), nos permite formular la idea de que, si bien la realidad última, el origen de la estructura, está fuera del alcance de nuestras capacidades cognoscitivas, sí podemos tener conocimiento cierto de esa estructura. Esto es conocimiento de la estructura matemática de los fenómenos. [...] Desde nuestro enfoque los modelos matemáticos son algo más que ecuaciones, lo son también las gráficas y las tablas numéricas, por mencionar algunos, y la interacción con estos a lo largo de la historia ha sido una práctica que frecuentemente está ligada a la construcción social del conocimiento. (p. 104).

Por ello, el autor identifica un estudio de "la realidad" que no parte de analizar *su esencia*, sino cómo se constituye su estructura, esto es, en las relaciones que se generan entre los elementos que la conforman y la manera en la cual se pueden describir matemáticamente. En este sentido, para comenzar a concretar esto en el presente proyecto de investigación[18], el *modelo* se perfila como cualquier representación matemática a partir de la cual se puedan estudiar ciertos elementos de la estructura del fenómeno que se modela. Así, se concuerda con el autor en que:

> 'La modelación como prácticas sociales de matematización en el aula', recoge la tradición de las prácticas que han estado presentes, entre otros lugares, en el quehacer científico del siglo XVII, y que Cantoral (2001) documenta como una incesante relación entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático. El estudio de esta relación, desde una perspectiva socioepistemológica, sistémica, deviene a ser central en la presente investigación. (pp. 104-105).

Además, se destaca la aclaración del autor en cuanto que "la principal distinción con otras perspectivas lo constituye la intención, los modelos son usados como herramientas para argumentar" (p. 105). Esto implica que, en las interacciones presentes en la construcción del conocimiento, no solo "se justifica", sino que "se justifica *en*" y "se justifica *para*", es decir, interviene el *contexto* además del propio sujeto y su reflexión personal. Y dichas argumentaciones bien pueden ser las respuestas escritas, los gestos realizados o los diálogos.

En este sentido, Arrieta considera las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil, concibiendo a la *comunicación* como una modelación compartida de

---

[18] Una discusión más detallada sobre la concepción de la modelación para el estudio se presenta en el **Marco teórico–conceptual**.

un fenómeno a través de una acción conjunta, incluyendo el lenguaje natural, escrito y hablado; las gráficas utilizadas, los gestos y señas; y los movimientos que se reproducen (pp. 147-148).

Cuando se tiene esta concepción de la interacción en la producción de conocimiento científico, surge la necesidad de cuestionarse sobre los criterios de validez a través de los cuales se discutirá dicha producción.

Por ejemplo, Arrieta relata la manera en la cual Galileo describe su descubrimiento de la "ley de la caída de los cuerpos graves". El científico argumentaba que "los cuerpos caen, privados de su sostén, de tal forma que su velocidad aumenta proporcionalmente al tiempo, $(v = gt)$" y lo afirmaba con base en observaciones empíricas al experimentar con un plano inclinado, es decir, justificaba esta ley dada la gran cantidad de veces en que se repitieron tales observaciones y la exactitud de los resultados que se obtuvieron en cada una de ellas (pp. 105-106).

Este último punto, además de permitir analizar el papel de la argumentación en la construcción de conocimiento, da pie al investigador para discutir también sobre el papel de la *inducción* como práctica.

Con esta inducción no se hace referencia a la del tipo formal matemática, sino como en los trabajos de Copérnico, Kepler, Descartes, Galileo y Pascal, quienes partían de la experimentación y sus múltiples observaciones para asegurarse tanto como fuera posible de sus conclusiones, de tal forma que luego pudieran hacerlas *demostrables*. Como hacía Wallis (de acuerdo con la cita de Confrey y Dennis, 2000), "él visualizaba un patrón, verificaba una serie de ejemplos y después asumía que su regla era válida en tanto 'no se encontrara sospecha por la que podía fallar'" (pp. 108-109). De manera análoga, Arrieta describe que esta práctica permite también "'anticipar' a partir de 'un fragmento de un fenómeno' su comportamiento global" (p. 229). En tal caso, se trataría de un tipo de *generalización*.

Ahora bien, de lo anterior surge el preguntarse de qué manera ocurre dicha *visualización* en el análisis del fenómeno. Un punto que Arrieta destaca en este sentido es respecto a los procesos de constitución de "relaciones entre variables" como *herramienta*:

> El establecimiento de la relación entre variables no se hace dependiente de otros procesos, se constituye en cuanto indaga las formas que esta relación adopta. Es decir, no se constituyen como herramientas las relaciones entre variables para después estudiar sus formas, se hace en un mismo

> proceso, se constituye estableciendo las formas. De esta forma, lo lineal, lo cuadrático, lo periódico y lo exponencial son herramientas usadas en el ejercicio de prácticas de modelación; por ejemplo, en prácticas como "la figuración del devenir de las cualidades" y "la numerización de los fenómenos". Así, la linealidad, lo cuadrático, lo periódico y lo exponencial tienen su concreción y significados en cada escenario donde se ejercen prácticas de modelación. Por ejemplo, la linealidad significa antes que nada líneas rectas cuando se ejercen prácticas de figuración del devenir de las cualidades. Esto es poner en el centro los modelos gráficos; en este caso, líneas rectas y, a partir de ellos, se construyen diferentes argumentos, significados y herramientas de lo que es la linealidad. (p. 109).

Por ende, el autor hace referencia a la apreciación de la *forma* de estas relaciones entre variables y su indisolubilidad con respecto a su estructura. En particular que, en el caso de los modelos gráficos, se pueden construir significados a partir de aspectos cualitativos.

En este sentido, se plantea cómo "las prácticas determinan la concreción y significado de las herramientas" (p. 109). En el caso del contexto numérico, la práctica de *numerización de los fenómenos* permite justamente partir de datos numéricos obtenidos de la interacción con el fenómeno que, como se mencionó previamente, puede ser mediante la experimentación presencial, discursiva o *virtual* (digital).

Arrieta y Díaz (2015) describen una experiencia didáctica basada en esta práctica de numerización. En particular, atienden el modelado del estiramiento de un resorte, para el cual se parte de la experimentación discursiva en la que se presenta una tabla con los datos correspondientes de peso y elongación. Los autores señalan que el alumnado tendrá "que utilizar la tabla de datos para determinar lo que sucederá con el resorte en el arreglo experimental" (p. 39).

En este sentido, los investigadores apuntan que sin la interacción con el fenómeno no hay modelación, pero que no basta interactuar con el fenómeno para modelar, por ende cuestionan "¿Cuándo decimos: 'los estudiantes están modelando'?" (p. 39). En respuesta, dada la experiencia que reportan, los autores señalan que cuando la o el "estudiante advierte que, 'para decir qué va a pasar con el resorte', se vale de otra cosa, de la tabla de datos. Este es un acto que caracteriza la modelación" (p. 39), pues se establece una articulación a partir del modelo para intervenir en lo modelado; particularmente en este caso con el fin de predecir.

En cualquiera de estos casos, lo que se pretende es que el alumnado articule tablas de datos, gráficas y fórmulas, es decir, en correspondencia con la necesidad señalada por Hernández (1995), que articulen los contextos *numérico*, *gráfico* y *algebraico*. Esta articulación se esquematiza en la ILUSTRACIÓN 2-12.

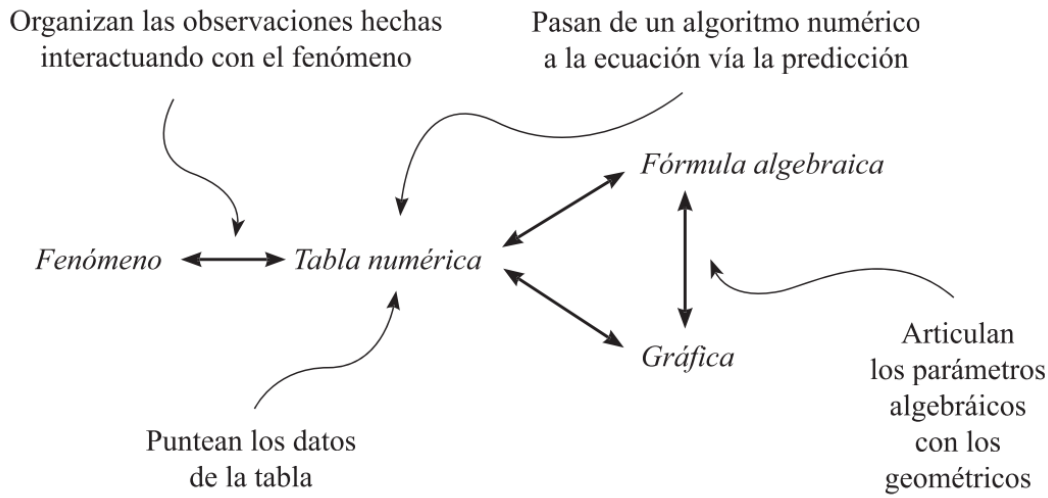


ILUSTRACIÓN 2-12 Numerización de los fenómenos (tomado de Arrieta y Díaz, 2015, p. 37).

Para ir concluyendo, Arrieta concibe a la modelación como *prácticas sociales*, "prácticas –con–en" e identifica como actividades dentro de esta práctica a las siguientes:

- Emplear herramientas específicas (las gráficas y/o las tablas numéricas) y formas particulares para describir los hechos (lo lineal, lo cuadrático, etc.), construyendo versiones de éstos.
- Construir argumentos a través de conjeturas y confirmaciones, basadas en la inducción como práctica.
- Argumentar y validar versiones utilizando una coordinación de múltiples herramientas.
- Desarrollar formas de predicción.
- Elaborar descripciones y explicaciones de nuevas experiencias utilizando conocimientos que tienen, derivados de otros contextos y frente a otras experiencias. (Arrieta, 2003, pp. 112-113).

Asimismo, Arrieta analiza el papel de los medios tecnológicos en el proceso de modelación y, en ese sentido, en concordancia con lo que Hernández (1995) afirmaba, el autor comenta que el sistema simbólico algebraico se ha privilegiado, considerando como una de sus posibles causas el que:

> Dibujar una considerable cantidad de gráficas con precisión y manipular gran cantidad de datos y operaciones con una tabla de datos, presenta dificultades, tanto para alumnos como para maestros [...] Compartimos la opinión de Bruner (1972) acerca de la importancia de la variación de la herramienta: en todos los tiempos, los cambios en los utensilios han significado cambios en la cultura y en la organización social. Trabajar con instrumentos adecuados nos permite utilizar las formas gráficas y numéricas con mayor desenvolvimiento. (p. 118).

Con lo cual comienza a perfilar una postura respecto a la integración de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas. No solo como un elemento que permite automatizar procesos, sino como una herramienta que interviene *en la cultura y en la organización social*.

Apunta por ende que "la importancia estriba en el ***para qué***, en el ***cómo*** y en el ***quiénes*** utilizan los medios tecnológicos" (p. 119). Y reafirma que, "más aún, el conocimiento se ha ligado tangiblemente a una tecnología que transforma las prácticas sociales que lo posibilitaron" (p. 120), es decir, se plantea el concebir a la tecnología como un *instrumento* en la construcción social del conocimiento matemático que *coevoluciona* con él.

En el siguiente capítulo se describe la manera en la cual los resultados de investigación de estas tesis, los libros y los referentes se consideraron para delinear el planteamiento del problema.

3. Problema de investigación

Como se mencionó en la sección de Motivaciones (capítulo 1), tras realizar un análisis general de los *planes curriculares* de las carreras STEM en una institución de educación pública mexicana del Nivel Superior (universitario) –entre las cuales se encuentra la universidad de donde provenían las y los participantes de la fase empírica de la investigación–, se identificó a las ecuaciones diferenciales como un elemento *transversal* en dicha área: *horizontalmente*, al estar presente en la mayoría de las carreras, y *verticalmente*, al retomarse en diversas asignaturas de distinto nivel en una misma carrera. Por tal motivo, se decidió enfocar la atención en este tema.

Posteriormente, la revisión de literatura (capítulo 2) proporcionó elementos para delimitar un problema de investigación en torno a su aprendizaje. En un principio, a través de la revisión de artículos y reportes de investigación (secciones 2.1 y 2.3), se identificó que la etapa introductoria a las ecuaciones diferenciales recibe poca atención. En este sentido, se habla de la centración en la identificación del tipo de ecuación diferencial dada, de lo "artificial" de los problemas que se suelen proponer para abordarlas, de lo "mágicos" que parecen ser los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales y del énfasis en la mecanización de algoritmos que suele restringir el trabajo al plano algebraico, pero poco se habla sobre el tratamiento mismo de su introducción. Así, el problema de investigación se comenzó a orientar hacia dicho momento.

Con el fin de explorar la *didáctica tradicional* en dicha etapa introductoria, se hizo una revisión de libros de texto de física y de ecuaciones diferenciales (sección 2.2) y se observó –en términos generales– que se suele partir de considerar que el alumnado posee ya una concepción de la derivada como razón de cambio, de lo diferencial como caso límite, del Teorema Fundamental del Cálculo como vínculo entre la derivada y su integral, y de la integral cómo área bajo la curva. Asimismo, se asume que las y los estudiantes han trabajado previamente con la interpretación geométrica de la derivada para analizar el crecimiento, decrecimiento, concavidad, máximos y mínimos de una función.

Sin embargo, al contrastar las observaciones anteriores con el contenido de los planes curriculares de las asignaturas de Física I, Cálculo (I y II) y Ecuaciones Diferenciales (Tabla

1-1) en la universidad de donde provenían las y los participantes de la fase empírica del estudio, se identificó una *desarticulación* entre ellas y, a su vez, con sus fundamentos y objetivos y con la propia visión de la universidad y de la institución.

De manera resumida, la desarticulación entre las asignaturas se puede observar en que la definición diferencial de la derivada de una función, su interpretación geométrica y su concepción como razón de cambio (necesarias para comenzar Física I de primer semestre y Ecuaciones Diferenciales de segundo semestre) se abordan hasta la primera unidad de Cálculo II (segundo semestre). Similarmente, la definición de integral, su interpretación como área bajo la curva y el Teorema Fundamental del Cálculo se introducen hasta la segunda unidad de Cálculo II.

Respecto a los fundamentos y objetivos de las asignaturas, se aprecia una desarticulación en distintos niveles. Por ejemplo, en Ecuaciones Diferenciales se puede observar entre los fundamentos y los objetivos ya que, mientras sus *fundamentos* se basan en que "la mayoría de las asignaturas, en especial las de física, tratan con problemas descritos por ecuaciones diferenciales" y que, por ello, el alumnado "debe reconocer estos problemas, identificar las ecuaciones y poder resolverlas técnicamente, aún en los primeros semestres", los *objetivos* de la asignatura plantean únicamente "preparar al estudiante a la identificación y resolución de una gran variedad de ecuaciones diferenciales [e] introducirlo a los métodos de resolución de Ecuaciones Diferenciales".

Es decir, si bien el identificar las ecuaciones y resolverlas técnicamente es consistente con los objetivos del curso, el cómo reconocer estos problemas en física queda fuera de los propósitos de la asignatura. Asimismo, el *contenido* del curso es congruente con los fines técnicos de resolución, pero no con el reconocimiento de problemas descritos por ecuaciones diferenciales en asignaturas de física.

Un ejemplo más respecto a la desarticulación entre asignaturas se encuentra justamente en que, en Ecuaciones Diferenciales (asignatura de segundo semestre), se afirma que el alumnado debe reconocer estos problemas, identificar las ecuaciones y poder resolverlas técnicamente, *aún en los primeros semestres* y, precisamente, en la asignatura de primer semestre Física I se presenta –implícitamente– la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (subsección *2.2.1*).

Otro nivel en el cual se puede apreciar la desarticulación es a través de comparar el *contenido* de Física I (y del Laboratorio de Física I) con los *fundamentos* y *objetivos* de Cálculo I (todo en primer semestre). Como se describió anteriormente, en Física I se demanda ya una concepción de la derivada como razón de cambio, una interpretación geométrica de ella y un cierto dominio del cálculo diferencial e integral; análogamente, en el Laboratorio de Física I se plantea que el alumnado realice mediciones de ciertos fenómenos de movimiento y que, a partir de ello, construya una tabla con los resultados, elabore una gráfica, proponga una relación analítica y determine sus parámetros por tanteo y por el método de mínimos cuadrados, es decir, se demanda también ya de un dominio más allá de lo técnico.

Sin embargo, al analizar los *fundamentos* de la asignatura de Cálculo I, se observa que lo que se espera del alumnado es que, previamente –en el Nivel Medio Superior–, haya llevado un curso meramente operativo y aplicado del cálculo, por lo cual se establece como *objetivo* de la asignatura que el alumnado "adquiera un conocimiento profundo de la fundamentación del Cálculo con base en las propiedades de los números reales, que mejore su capacidad para entender y construir demostraciones pertinentes; así como [...] [reafirmar] sus destrezas y conocimientos para aplicar el Cálculo"; particularmente, se pretende que se adquieran conocimientos que son requisito indispensable para fundamentar la derivada y la integral en Cálculo II, pues "tienen gran importancia en las aplicaciones del Cálculo".

A su vez, así como en Cálculo I se hace referencia a sus aplicaciones, y en Ecuaciones Diferenciales a su tratamiento para resolver problemas de física, en la *fundamentación* de la asignatura de Física I se menciona que se busca además "apoyar los conceptos e ideas que en otras materias de la misma licenciatura se desarrollan". Es decir, esto parece consistente con el modelo educativo de la institución a la cual pertenece la universidad pues, según su reporte de autoevaluación, "se basa en una sólida formación en física y matemáticas básicas" donde "los contenidos curriculares se estructuran en ejes formativos, que tienen el propósito de generar un [o una] estudiante con nuevo perfil [...] proclive a la interdisciplinaridad"; sin embargo, esto no parece congruente con el contenido de estas asignaturas, dado lo descrito anteriormente.

Por otro lado, *epistemológicamente*, existen motivos para inferir la necesidad de un contexto fenomenológico propicio para la significación de la noción de ecuación diferencial (ordinaria). Particularmente para el caso del cálculo, se señala que en el contexto físico se ha de tener una clara referencia para distinguir lo que varía respecto a qué es lo que produce tal variación

(Farfán, 2012); es decir, la elección y exploración de las variables (fundamentales para el estudio del *cambio* de acuerdo con Parada, Conde y Fiallo, 2016) puede partir de una experimentación –*presencial*, *virtual* (digital) y/o *discursiva* (Arrieta y Díaz, 2016)– con el fenómeno físico.

En este sentido, además de reconocer al cálculo (diferencial e integral) como una herramienta poderosa en la *modelación* de fenómenos físicos (Marciuc y Miron, 2014), se reconoce el aporte mismo de la teoría física en torno al estudio del *movimiento* –como el de la caída libre– para construir e interpretar modelos matemáticos que permitan describirlo o hacer predicciones sobre él (Rubio, Prieto y Ortiz, 2016). Más aún, se identifica al contexto físico como un elemento *significativo* para desarrollar prácticas de matematización, dada la incesante relación entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático en el desarrollo del cálculo que documenta Cantoral (2001) y que retoma Arrieta (2003) además de otros resultados, como el de Reig (1987), acerca de que la habilidad para interpretar y usar los conceptos de *velocidad* y *aceleración* es un prerrequisito para la resolución de problemas tanto en ciencia como en matemáticas.

Un aspecto epistemológico que se ha de tomar en cuenta para lo anterior es la constante recurrencia a argumentos *contextuales* que se hacía en el pasado. Por ejemplo, en el caso de la "ley de la caída de los graves", Galileo justificaba su validez dada la gran cantidad de veces en que se repetían las observaciones y su *exactitud* (la cual puede depender de la aproximación que se considere suficiente para el fenómeno particular abordado, según Martínez, Pluvinage y Montaño, 2017). Tomando en cuenta la relatividad epistemológica propia de la época, Arrieta (2003) denominó a esta práctica –compartida por científicos como Copérnico, Kepler, Descartes, Galileo y Pascal– como una *inducción*, distinta de la "inducción matemática", en la cual se partía de la experimentación y sus múltiples observaciones para hacer demostrables las conjeturas. Asimismo, identificó que esta práctica aplica también cuando, a partir de un "fragmento del fenómeno", se anticipa su "comportamiento global".

A su vez, estos aspectos epistemológicos dan indicios sobre cómo se fue desarrollando el proceso de institucionalización del conocimiento, su concretización en la *didáctica* de antaño y su correspondiente coevolución hacia la actualidad. En el caso de las ecuaciones diferenciales, Hernández (1995) menciona que el término "*aequatio differentiatis*" fue acuñado, de acuerdo con ciertos autores, por Leibniz en 1676 y empleado inicialmente para denotar una relación entre los diferenciales dx y dy, y las variables x y y. Relata que la primera parte de la historia de las ecuaciones diferenciales –"protagonizada" por Newton, Leibniz, los Bernoulli, Ricatti, Euler, Laplace y Lagrange– estuvo marcada por su *clasificación*, *métodos de integración* y por estar *originadas en problemas de tipo geométrico o mecánico*, y que, para finales del siglo XVII, básicamente todos los métodos elementales para resolver las ecuaciones diferenciales de primer orden ya habían surgido. Asimismo, que para la primera mitad del siglo XVIII se había escrito prácticamente la historia de los métodos formales de integración.

Con base en los trabajos generados en la época, Euler elaboró una primera *sistematización* en su obra *Institutiones Calculi Integralis* (1760-1770), la cual, de acuerdo con Hernández (1995), presenta lo que se podría llamar una primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias con buena parte –"y mucho más"– del material que se podría encontrar en un libro de texto actual. En especial, una observación que realiza el autor respecto a los cursos de enseñanza tradicionales (y que fue señalada desde hace un siglo por Brodetsky) es su fuerte *carácter algebraico–algorítmico* y el énfasis inicial en identificar el tipo de ecuación diferencial para seleccionar el método de resolución, en contraposición con la diversidad de escenarios en los que se solía dar la búsqueda de soluciones en la historia de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, en el *marco gráfico* (también referido en ocasiones por el autor como *geométrico*), al "describir" las curvas definidas por una ecuación diferencial y, en el *marco numérico*, a través de esquemas iterativos para conocer "aproximadamente" la solución en un intervalo dado.

Tal observación es consistente con lo que se halló en los libros de ecuaciones diferenciales revisados (subsección 2.2.2), pues en ellos se destaca la identificación de un método para resolver una ecuación diferencial ordinaria dada como objetivo principal (como en el libro de Zill, 1997).

Así, la estructura usual de trabajo en ellos suele consistir en la presentación de conceptos elementales, la clasificación de los tipos de ecuaciones diferenciales y el ejercicio de sus métodos respectivos de resolución, dejando usualmente fuera no solo otros acercamientos cualitativos, sino además, restringiendo la modelación a un proceso de traducción de leyes y principios (preconcebidos) en ecuaciones diferenciales, tal como se identificó en el libro de Edwards y Penney (2009) y como reportan Romero y Rodríguez (2003). Particularmente, Hernández (1995) identificó que tal traducción (como al pasar de la pendiente, la razón de cambio o la velocidad a la *derivada*) es uno de los principales problemas en la etapa de matematización.

Los ejemplos "de aplicación" entonces suelen aparecer hasta después, como es el caso del libro de Simmons (1993), en el que incluso cuando desde el inicio se destaca el uso de las ecuaciones diferenciales para describir leyes físicas, el capítulo introductorio culmina con una lista de problemas en los que no se hace alusión a algún fenómeno físico. Además, se suele considerar que quien lee ya tiene cierta familiaridad con –e incluso, dominio de– la relación entre la derivada y la razón de cambio con un sentido físico.

Ello también se puede apreciar en la obra antes citada, pues se inicia afirmando que quien lee "recordará que si $y = f(x)$ es una función dada, su derivada se puede interpretar como el ritmo de cambio de y con respecto a x" y se señala que, en cualquier proceso *natural*, las variables involucradas y sus ritmos de variación están relacionados entre sí por medio de principios científicos cuya conexión, al ser expresada en símbolos matemáticos, resulta con frecuencia en una ecuación diferencial.

Respecto a las *condiciones iniciales*, en el caso del fenómeno de caída libre, su necesidad se presenta como evidente (Elsgoltz, 1969), o bien, se atribuye a la aparición de constantes arbitrarias durante la integración sucesiva a partir de la ecuación de la aceleración (Edwards y Penney, 2009); por lo tanto, no se discute si tales condiciones deben corresponder necesariamente a valores de *inicio*, ni mucho menos el por qué y el cuántas se requieren.

En general, se identificó que cuando el fenómeno de caída libre (movimiento con aceleración constante) es abordado en los libros de ecuaciones diferenciales, la ecuación a resolver parte netamente de una ley preconcebida (la segunda ley de Newton) y no se hace un tratamiento particular que permita su construcción a través de la modelación de ciertas características del fenómeno; además, como en el caso del libro de Edwards y Penney (2009), se hace uso del Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la posición del objeto que cae a partir de la *traducción* matemática de la ley y de los valores iniciales de posición y velocidad sin mayor aclaración respecto a por qué se necesitan.

En contraste, en el libro de física se parte justamente de aspectos cualitativos del movimiento y de sus representaciones gráficas para ir deduciendo las expresiones matemáticas que lo modelan. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, en tal deducción se demanda también una concepción de la derivada como razón de cambio (de hecho, se toma como sinónimo de la derivada a la *pendiente*) y se retoma implícitamente la Regla de Merton. En cuanto al análisis y aplicación de las fórmulas obtenidas, se retoma explícitamente la relación de la derivada con la integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo, justificando contextualmente la necesidad de las condiciones iniciales, pero sin hacer explícita la aparición de la ecuación diferencial ordinaria. En particular, dicho teorema se retoma para el análisis mediante integración gráfica.

En cuanto a aspectos *cognitivos*, se identifica que ya que las ecuaciones diferenciales definen funciones, se ha de ahondar en el estudio y articulación de sus diferentes representaciones para su resolución; asimismo, se ha de tener en cuenta que en la expresión dy/dx "conviven" la derivada como operador ($\frac{d}{dx}$) y el cociente de diferenciales, pues el omitirlo puede llevar a concebir a métodos como el de separación de variables más como un truco que como un método. En tiempos de Euler, la derivada se consideraba como el cociente de diferenciales, por lo que en las ecuaciones diferenciales de segundo orden aparecía ddx y dx^2 en lugar de y'' (Hernández, 1995).

Por otro lado, se concuerda en que conocer conceptos de otros campos y modelos de la realidad contribuye a desarrollar ideas para visualizar conceptos matemáticos que permitan reforzar su comprensión y manejo, de tal manera que se facilite una futura abstracción (Malaspina, 1998, como se citó en Arrieta, 2005). Lo cual es consistente con el hallazgo de Rodríguez y Quiroz (2016) de que los mismos conocimiento físicos pueden permitir una verdadera comprensión del problema y con la idea de Roth (2014) respecto a que el propósito de emprendimientos interdisciplinarios en torno a las matemáticas puede ser el desarrollo de un conjunto rico de experiencias que subyazcan emprendimientos posteriores puramente matemáticos.

La *modelación* emerge entonces tanto como un medio para la significación de la ecuación diferencial y sus partes, como para anticipar soluciones previo a la manipulación algebraica (Rodríguez y Quiroz, 2016). Asimismo, se basa en concebir que la *realidad* se puede identificar con una estructura matemática de los fenómenos, de tal manera que, si bien la "realidad última" está fuera las capacidades cognoscitivas del ser humano, sí es posible tener cierto conocimiento de esa estructura a través de modelos matemáticos (ecuaciones, gráficas, tablas, etc.), como lo constata la frecuente interacción con ellos a lo largo de la historia en la construcción social del conocimiento (Arrieta, 2005).

Al modelar se reconoce asimismo la importancia de la visualización en la constitución de *relaciones entre variables*, en cuanto su establecimiento indaga las *formas* que estas relaciones adoptan. En este sentido, Suárez (2014) comenta que un trazo de forma global incluye decisiones sobre la elección de las variables a representar por cada uno de los ejes coordenados, la elección de un punto de referencia y la percepción de aspectos característicos de la gráfica como puntos iniciales y finales, así como puntos extremos. Más aún, epistemológicamente, en prácticas como la figuración del devenir de las cualidades de Oresme, la linealidad significa antes que nada líneas rectas, por ende, la apreciación de la forma de una relación se infiere como indisoluble respecto a su estructura, lo cual otorga un lugar central a los modelos gráficos para construir significados a partir de aspectos cualitativos (Arrieta, 2005).

En cuanto al contexto numérico se retoma asimismo la práctica de *numerización de los fenómenos* que reportan Arrieta (2003) y Arrieta y Díaz (2015), pues permite justamente partir de datos numéricos obtenidos de la interacción con el fenómeno que, como se mencionó previamente, puede ser mediante una experimentación presencial, discursiva o *virtual* (digital), como sugieren Arrieta y Díaz (2016).

Por otro lado, en el proceso de modelación se puede considerar la *simulación* para hallar explicaciones a un rango e identificar variantes o invariantes a través de ajustes en su estructura (Suárez, 2014) con el fin de crear un patrón de comportamiento específico (Guevara, 2011). De hecho, de acuerdo con Suárez (2014), esto puede propiciar el desarrollo del razonamiento y de la *argumentación*.

Este último elemento posee un peso *social* relevante al considerar el *carácter discursivo en la construcción social del conocimiento* que reconoce Arrieta (2003) como parte de los fundamentos teóricos de su investigación. En dicho carácter, se contempla la *interacción* de quienes participan en la construcción del conocimiento con otras personas que también participan, con las herramientas que emplean y con las realidades que abordan. En particular, el autor considera las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil, concibiendo a la comunicación como una *modelación compartida* de un fenómeno a través de una acción conjunta, incluyendo el *lenguaje natural*, *escrito* y *hablado*; las *gráficas* utilizadas, los *gestos* y *señas*; y los *movimientos* que se reproducen. Por ende, concibe al lenguaje no únicamente como un vehículo para expresar pensamiento, sino que, en concordancia con Edwards y Potter (1992), como una acción situada en un contexto discursivo que permite construir el significado, la realidad e incluso la misma cognición.

Dicho *carácter discursivo* es retomado por el autor con base en la teoría socioepistemológica, la cual reconoce además una *primacía de las prácticas sobre los objetos* y un *carácter situado de dichas prácticas*. Estas consideraciones de corte social cobran especial importancia al retomar los aspectos didácticos, epistemológicos y cognitivos descritos hasta el momento. En particular, reconocer el carácter *situado* de las prácticas en la construcción *social* del conocimiento conlleva reconocer que el *entorno sociocultural* tiene efectos en dicha construcción.

Esta consideración tiene a su vez un impacto significativo dada la preocupación manifestada sobre la problemática de género existente alrededor de la participación de las mujeres en las carreras STEM. Sugerencias como las de Spelke (2005), acerca de ver más allá de la habilidad cognitiva hacia otros aspectos de la biología humana y la sociedad para apreciar mejor este fenómeno cobran mayor sentido, así como los resultados sobre el impacto de la *sensación de pertenencia* en el aprovechamiento escolar de las mujeres en STEM reportados por Dasgupta y Stout (2014).

Asimismo, la necesidad de rescatar el *carácter funcional del saber* cumple una doble intencionalidad: al buscar recontextualizar el aprendizaje en matemáticas y al propiciar la integración de las mujeres estudiantes al proceso de construcción del conocimiento matemático, dados los hallazgos de Farfán y Simón (2016). Particularmente, respecto a las interacciones en el aula, se destaca la observación de estas autoras en cuanto a que la forma en como las jóvenes talentosas en matemáticas constituyen su relación con el conocimiento matemático con base en su funcionalidad se encuentra en la base de la relación que establecen con otros individuos. De tal modo que la forma en que ellas se relacionan con las personas y con el medio en el que se desenvuelven es justamente a través de la búsqueda del conocimiento, priorizando su valor *funcional* por sobre el *conceptual*.

Asimismo, el buscar propiciar acercamientos cualitativos a las ecuaciones diferenciales parte de reconocer la necesidad de abordar problemas cercanos a la práctica profesional de la comunidad con quienes se trabaja, pues en la investigación e industria es más probable que la solución de una ecuación diferencial ordinaria se obtenga a partir de un conjunto de datos que de una función explícita (Hernández, 1995).

En este punto la *tecnología* cobra especial importancia, pues interviene como una manera para indagar no solo procesos asociados a la modelación desde fenómenos de variación en otras ciencias, sino también como una forma de producir y reproducir las relaciones variacionales que se dan entre los objetos matemáticos involucrados (Villa–Ochoa y Ruiz, 2010).

En este sentido, a la vez que tanto la teoría física como la matemática aportan información para el modelado del movimiento, el software de matemática dinámica (como GeoGebra) proporciona insumos para representar la situación (Rubio, Prieto y Ortiz, 2016), de tal manera que lo algebraico, numérico y gráfico se encuentren dinámicamente relacionados (Villa–Ochoa y Ruiz, 2010). En consecuencia, más que considerar a las *variables* como letras que representan valores desconocidos, se les concibe como cantidades mesurables que cambian cuando las situaciones en que ocurren cambian (Parada, Conde y Fiallo, 2016).

En particular, al abordar tales variaciones a través de una *simulación* del fenómeno en un ambiente digital dinámico e interactivo, se puede favorecer la visualización de lo que varía y lo que se mantiene constante para un análisis de las propiedades que caracterizan su comportamiento (Parada, Conde y Fiallo, 2016). La articulación entre diferentes sistemas de representación –que plantea Hernández (1995) como una componente necesaria en el diseño de situaciones para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales– se ve asimismo promovida por la tecnología pues, en la identificación de invariantes, se muestran los efectos de la variación de parámetros en las representaciones gráficas asociadas a ellos (Suárez, 2014).

El mismo investigador Hernández (1995) señalaba desde hace dos décadas, en correspondencia con los hallazgos de otras investigaciones de su época, que el software computacional constituye la principal vía de acceso a las representaciones gráficas y numéricas. El autor justificaba su idea al contrastar las potencialidades gráficas y numéricas de la tecnología en su época con lo que "en otros tiempos" difícilmente se habría podido instrumentar en el salón de clases. Particularmente, hace referencia a la "visionaria" propuesta de Brodetsky (1919) quien –luego de criticar los cursos de EDO por ser la "perpetuación de una serie de trucos y malabarismos"– sugería que se desarrollara un método gráfico en el que se hiciera uso de los campos de pendientes y la segunda derivada para describir cualitativamente las soluciones de una ecuación diferencial, con lo cual otorgaba al proceso de visualización un papel central.

En algunas investigaciones más actuales lo que se comienza a vislumbrar es que las representaciones dinámicas pueden consistir no solo en una manera *diferente* de abordar las matemáticas del cambio y la variación, sino que pueden constituir en sí mismas un medio congruente con su propia estructura. En este sentido se encuentra la idea de Vasco (2006) que retoman Villa-Ochoa y Ruiz (2010) respecto a que "el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica" y la postura de Marciuc y Miron (2014) quienes señalan que nociones como la *derivada*, la *velocidad* y la *aceleración*, al ser representadas visual, dinámica e interactivamente con GeoGebra, pueden ser entendidas con mayor profundidad.

En la misma línea se encuentra la afirmación de Arrieta (2003) en cuanto a que "el conocimiento se ha ligado tangiblemente a una tecnología que transforma las prácticas sociales que lo posibilitaron" (p. 120), como evidencia el resultado que retoma este autor del trabajo de Sutherland, Mochón, Jinich y Rojano (1996), donde se concluye que la *modelación matemática* en un *medio computacional* permite al alumnado crear un mundo propio en el cual explora fenómenos del mundo físico y logra hacer conceptualizaciones a partir de esta experiencia. Por supuesto, como señalan Arrieta y Díaz (2016), cada modalidad de experimentación trae consigo características propias que imprimen su huella en la forma de modelar, pero se asume que las representaciones basadas en tecnología pueden ser significativas para el alumnado e incluso más manejables, "limpias", flexibles y extensibles que sus contrapartes físicas (Sarama y Clements, 2016).

Por lo tanto, la tecnología se concibe como un *instrumento* en la construcción social del conocimiento matemático que *coevoluciona* con él. De tal forma que se reconoce que en la búsqueda de un currículo integrado, la matemática y la tecnología han de jugar un papel relevante (Arrieta, 2005) y, por ende, en el caso del uso de software, se coincide en que el conjunto de supuestos epistemológicos es probable que sea más complejo que cuando no se usan herramientas digitales (Joubert, 2017).

Por todo lo anterior, la necesidad de buscar una *articulación* en el currículo escolar –ubicada inicialmente como parte de una problemática más amplia (subsección *1*)– se hace de particular importancia tomando en cuenta las consideraciones[19] *epistemológicas*, *cognitivas*, *didácticas* y *sociales* descritas alrededor de la construcción de las ecuaciones diferenciales.

Asimismo, la necesidad de una perspectiva de género se hizo patente tras reconocer que la problemática identificada (subsección *1.2.2*) posee aún una fuerte componente sociocultural en el campo STEM.

A partir de lo descrito, el problema de investigación se definió como sigue:

Analizar el proceso introductorio a la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con base en la modelación de un fenómeno físico de movimiento que parta de la experimentación en un ambiente dinámico digital, a través de observaciones cualitativas (gráficas y físicas) y cuantificaciones discretas (numéricas), en donde se contemple el intercambio discursivo de las y los participantes con atención al valor funcional del conocimiento que sugiere la perspectiva de género adoptada.

En el siguiente capítulo se describen los fundamentos teóricos que permitieron definir una hipótesis epistemológica con base en el problema de investigación establecido, así como las preguntas de investigación que guiarían el estudio.

[19] Estas consideraciones se basan en las *dimensiones* que se proponen desde la Teoría Socioepistemológica. Para más detalles, consultar la sección Constructos teóricos de la TSME en el **Marco teórico–conceptual**.

4. Marco teórico–conceptual

En concordancia con las motivaciones y problemática descritas al inicio del presente reporte (capítulo 1) y con base en el problema de investigación establecido (capítulo 3), en este capítulo se propone una articulación teórica para atenderles. De manera general, el hilo conductor lo provee el enfoque sociocultural de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME). De manera particular, los elementos que constituyen esta articulación provienen de algunos resultados obtenidos a partir de la revisión de literatura realizada (capítulo 2) y de una revisión especializada que se realizó complementariamente.

En ese sentido, la revisión de literatura en el capítulo anterior se describió a manera de *estado del arte* para plantear en qué contexto de investigación es que surge el presente proyecto. El dónde y cómo se sitúa este estudio en dicho contexto es lo que se trata a continuación. Asimismo, este capítulo constituye el fundamento teórico central para la fase empírica de la investigación.

Para comenzar, en la sección 4.1 se describen algunos elementos clave de la TSME como constructos esenciales para la articulación teórica que se propone en conjunto con algunas consideraciones epistemológicas. En especial, desde esta teoría, la componente sociocultural se plantea como *transversal* a todo lo que la conforma, es decir, como una dimensión siempre presente en el proceso de aprendizaje, y es justamente esta transversalidad la que hace posible abordar temas como la necesidad de un currículo más integrado en conjunto con la problemática de género identificada.

A estos dos puntos se dedican las secciones 4.2 y 4.3, respectivamente, con el fin de exponer la pertinencia de una propuesta integradora de educación STEM desde este enfoque, así como para hacer explícita la manera en la cual la perspectiva de género es abordada a lo largo del estudio.

Más adelante, para profundizar en el tema del uso de la tecnología, en la sección 4.4 se describe el papel de los ambientes digitales en la integración de la tecnología digital a la matemática educativa y sus implicaciones en el estudio dinámico de la variación para introducir la noción de ecuación diferencial ordinaria. Posteriormente, acorde con esta propuesta interdisciplinaria, y encaminando la teoría hacia la definición de la hipótesis epistemológica, en la sección 4.5 se define la postura adoptada respecto a la modelación matemática y su papel en la conformación del diseño elaborado.

Finalmente, en la sección 4.6 se presenta una articulación de los elementos descritos en las primeras cinco secciones a través las dimensiones *epistemológica* (subsección 3), *didáctica* (subsección *4.6.2*), *cognitiva* (subsección *4.6.3*) y *social* (subsección *4.6.4*) que contempla la visión socioepistemológica.

4.1. Constructos teóricos de la TSME

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), como se ha descrito previamente, destaca la importancia de considerar la *transversalidad* de lo sociocultural en el aprendizaje de las matemáticas y, si bien la manera en la cual se interprete dicha transversalidad dependerá de las características de cada estudio que se base en ella, la propia teoría establece un conjunto de *principios* para poder abordarla.

De acuerdo con Cantoral (2013b), estos son: *principio normativo de la práctica social*, *principio de racionalidad contextualizada*, *principio de relativismo epistemológico* y *principio de significación progresiva* (*resignificación*). En conjunto, estos principios delinean una perspectiva para la investigación en matemática educativa que parte de reconocer la pluralidad y diversidad de las comunidades y sus contextos.

Más adelante, en la TABLA 4-1, se presenta con mayor detalle de qué manera se pueden considerar para un rediseño del discurso matemático escolar. Previo a ello, se considera pertinente destacar una característica particular en la constitución de esta Teoría: el pasar el foco de atención de los *objetos* (matemáticos) hacia las *prácticas* asociadas a dichos objetos.

Es decir, si se trata el tema de las *ecuaciones diferenciales ordinarias*, en lugar de solo trabajar bajo una *evolución conceptual* de qué es una ecuación diferencial, cuáles son los tipos en que se clasifican y qué método de resolución le corresponde a cada uno –como se observa en la *didáctica tradicional*, de acuerdo con los reportes de investigación revisados (sección 2.1) y el análisis de libros de texto realizado (sección 2.2)–, se propone que sean consideradas también prácticas asociadas a su construcción que perfilen una *evolución pragmática* relativa a la ecuación diferencial ordinaria.

Como se verá a lo largo de este capítulo, dicha evolución pragmática parece cimentarse en algunas de las *estrategias variacionales* que reportan Caballero–Pérez y Cantoral (2017) y en las *estrategias dinámicas* que se postulan en el presente estudio como parte de la exploración de fenómenos de movimiento en ambientes dinámicos digitales.

Reyes–Gasperini (2016) comenta en este sentido que "los conocimientos se dotan de significados a través de su *uso* y *funcionalidad*"[20] (pp. 59-60). En cuanto al *uso*, Cantoral (2013b) señala que "en contraste con la noción psicológica de *adquisición por aprendizaje*, [en la TSME] se pasó del *conocimiento estático* al *estudio del conocimiento en uso*, es decir, al estudio del saber" (p. 97). He aquí un aspecto, aparentemente sutil, en el que se ha de hacer énfasis: desde la perspectiva socioepistemológica, el *saber* se concibe como el conocimiento puesto en uso.

A su vez, el estudio del saber se encuentra en estrecha relación con la noción de *funcionalidad*. Mendoza y Cordero (2012), quienes estudian los usos de las ecuaciones diferenciales y de la modelación en una comunidad de ingenieros en formación, reportan que no se ha logrado que el conocimiento matemático sea *funcional*, pues se busca explicar la matemática desde ella misma, "soslayando otros campos científicos que le permitieron su desarrollo e incluso, desconociendo las prácticas de referencia que hicieron surgir el conocimiento matemático" (p. 1023). En este sentido, señalan que la matemática presentada al ingeniero en formación es *acabada*, pues las ecuaciones que modelan los fenómenos que estudia la ingeniería ya están institucionalizadas y difícilmente se pueden modificar para provocar otras variantes en los fenómenos (p. 1025).

Es decir, la *funcionalidad* del conocimiento se asocia con su uso en contextos que requieran de él para poder ser abordados. Cuando este carácter funcional se ignora, se soslaya a lo humano y a los sentidos de todo el *saber* matemático (Cordero, Cen y Suárez, 2010, p. 189), puesto que, como se mencionó previamente, desde la mirada socioepistemológica el saber corresponde al conocimiento cuando es puesto en uso.

[20] Las cursivas se añadieron.

Ahora bien, ello implica a su vez cuestionarse sobre los escenarios en los cuales una situación puede plantearse, pues si solo se presenta y se aborda en términos de su *estructura lógica*, aparecerán naturalmente elementos que no corresponden a las justificaciones razonadas que norman a esta estructura, sino "a la utilidad del participante en la situación específica" (Cordero, Cen y Suárez, 2010, p. 189).

Esta discrepancia que puede emerger entre el tratamiento lógico–abstracto que suele caracterizar a la didáctica matemática tradicional, respecto a su propio desarrollo histórico–epistemológico, es consistente con los hallazgos de Hernández (1995), presentados en la **Revisión de literatura**, sobre las ecuaciones diferenciales y su proceso de *institucionalización* (organización de los conocimientos emergentes de la disciplina para su incorporación en el currículo escolar).

En particular, se retoma la conclusión de Hernández (1995) respecto a que una primera etapa para la mejor comprensión de los modelos es que, ya que las ecuaciones diferenciales definen funciones, se ha de ahondar en el estudio y articulación de sus diferentes representaciones desarrollando los tres *marcos* de resolución: numérico, gráfico y algebraico (pp. 184-185), pues estos estuvieron presentes en los escenarios para la búsqueda de soluciones que se hallaron dentro de la revisión histórica (p. 3).

Asimismo, llama la atención el cómo la preocupación por integrar, en los cursos escolares, características de naturaleza geométrica sobre la solución de la ecuación diferencial se ha venido manifestando desde hace casi un siglo (Brodetsky, 1919, como se citó en Hernández, 1995).

Si bien, en aquel entonces, dados los medios técnicos con los que se contaba, Brodetsky proponía el uso de papel milimétrico y lápiz para trabajar con dicha naturaleza desde un punto de vista *cualitativo*, Hernández (1995) comenta que con las tecnologías más recientes es posible abordar esto de manera más eficiente.

En línea con ello, un punto importante a destacar, del análisis epistemológico y didáctico realizado por este autor, es la necesidad de una articulación entre diferentes representaciones dada la preponderancia que el discurso usual concede al *algebraico*. En este sentido, Farfán (2012) indica que:

> Sin lugar a dudas, el [contexto] *algebraico* es el predominante en la matemática escolar, en franca oposición a la enseñanza de los otros contextos. En el caso del contexto *geométrico* se aducen varios argumentos, como los siguientes: en el terreno *epistemológico*, se sitúa el predominio del paradigma algebraico durante los siglos XIX y XX, así como los problemas ligados al nacimiento y desarrollo de la teoría geométrica. En lo concerniente a lo *cognoscitivo*, se exige una movilidad permanente entre ambos contextos para un estudio cualitativo; asimismo, las justificaciones requieren cierto nivel de maestría, aun para analizar los objetos más elementales (por ejemplo, la justificación de una raíz doble). Dentro de la *didáctica*, la inclinación sistemática del recurso algorítmico que bloquea al estudio cualitativo, es lo que da lugar al desarrollo de métodos susceptibles de algoritmización; el *status* inframatemático del contexto geométrico que permea el ámbito escolar –es lo *intuitivo*, de ninguna manera lo *riguroso*–, se usa para *representar* no para *justificar* resultados [Artigue, 1990]; el mito de la solución completa, el estudio cualitativo –que propicia el contexto geométrico– se excluye en aras de la imposibilidad de admitir (sin menoscabo del deber) que no se puede dar respuesta a todas las preguntas. (pp. 265-266).

Reconocer lo anterior responde al hecho de aceptar que la construcción de conocimiento, pese a parecer completamente estructurada y ser presentada en una especie de secuencia lógica de conceptos, se constituyó en la confrontación y superación de obstáculos de origen diverso (Kuhn, 2013). No se ahondará mayormente en este punto pues existe ya una robusta literatura que lo aborda con la profundidad que merece y ello queda fuera de los objetivos de esta investigación; sin embargo, se asume lo afirmado como una postura respecto a la construcción del conocimiento matemático y científico.

Asumir ello implica, a su vez, reconocer que reducir el estudio de las ecuaciones diferenciales en el aula a un tratamiento meramente lógico–abstracto es *limitante* y *excluyente*. De ello dan cuenta las diversas investigaciones citadas anteriormente en la **Revisión de literatura** (como las de Hernández, 1995; Plaza, 2015; Rodríguez y Quiroz, 2016; Rodríguez y Bourguet–Díaz, 2015) y, particularmente, aquellas que abordan este fenómeno tomando en cuenta las características del *discurso matemático escolar* desde un enfoque socioepistemológico (como es el caso de Fallas, 2015; Mendoza y Cordero, 2012), pues dicha caracterización atiende justamente a las formas en que se limita y excluye a través del discurso.

De acuerdo con (Soto y Cantoral, 2014, p. 1528), esto ocurre mediante:

- La *atomización en los conceptos*: no se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.

- El *carácter hegemónico*: existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otras.
- La *concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo*: los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden.
- El *carácter utilitario y no funcional del conocimiento*: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.
- La *falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar*: se ha soslayado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

En consecuencia, desde la TSME se propone la *despersonificación* de la problemática estructural del conocimiento matemático. Así, lejos de concebir estudiantes o docentes deficientes, se *problematiza el propio saber matemático* (Reyes-Gasperini, 2016, p. 52). En palabras de esta autora, ello consiste en "hacer del saber un problema a través de sus cuatro dimensiones, un objeto de análisis localizando y analizando su uso y razón de ser, o sea, estudiar la naturaleza del saber" (p. 52).

Las cuatro dimensiones a las que hace referencia en el primer punto corresponden a una concepción del triángulo didáctico que incorpora y visibiliza la transversalidad de la dimensión sociocultural, a la vez que considera a todas las dimensiones de manera sistémica. A saber, en la TSME estas dimensiones son: *didáctica*, *cognitiva*, *epistemológica* y *sociocultural* (Cantoral, 2013b).

A partir de cada una de las dimensiones, e incorporados a ellas, se pueden plantear cuestionamientos respecto al proceso de aprendizaje en la construcción social del conocimiento matemático, de tal forma que exista un diálogo consistente entre todas, como un todo *sistémico* (Reyes-Gasperini, 2016). En este sentido, la autora plantea un cuestionamiento desde/en la dimensión sociocultural respecto a "¿dónde contextualizar el aprendizaje?" (pp. 56-57).

Esta pregunta se ha planteado desde diversas perspectivas. Simon (1995), desde el *constructivismo social*, propone una articulación alrededor de diversas nociones que abordan la contextualización. De manera particular, alude a que el objetivo es proponer una situación de aprendizaje en la cual el alumnado busque una respuesta al *milieu*, en lugar de una que solo busque satisfacer a quien enseña (p. 120).

En términos generales, el *constructivismo* se deriva de una posición filosófica respecto a que, como seres humanos, no se tiene acceso a una *realidad objetiva*, es decir, a una realidad independiente de la manera de conocerla. En lugar de ello, que el conocimiento del mundo se construye a partir de percepciones y experiencias (Simon, 1995, p. 115). En este sentido, un concepto será *viable* en cuanto funcione para lo que se desea: para dar sentido a percepciones o datos, para hacer una predicción precisa, para resolver un problema, o para conseguir una meta personal (p. 115).

Desde la TSME, el tratamiento del *saber* se ubica en el tiempo y el espacio, y por ende, se posiciona a la opción constructivista en la perspectiva histórica, cultural e institucional (Cantoral, 2013b, pp. 97-98), por ende, no existe un *uso* sin *quien* lo usa, y esta persona a su vez no es usuaria sin el *contexto* (p. 98).

En línea con lo anterior, Reyes–Gasperini (2016) identifica dos contextos que rigen a las interacciones didácticas: el *contexto situacional* y el *contexto de significancia*. "El primero, refiere a la manera de contextualizar la tarea y, el segundo, la manera de contextualizar la construcción de conocimiento matemático (basado en objetos o en prácticas)" (p. 58). La investigadora añade, en esa dirección, que "las *prácticas de referencia* están inmersas en el *contexto de significancia* mientras que los marcos de referencia podrían relacionarse con el *contexto situacional*" (p. 58).

La noción de *práctica de referencia* fue introducida a la teoría socioepistemológica por Farfán (2012) con base en la matematización del estado estacionario a partir de fenómenos propios de la ingeniería. En especial, su hipótesis inicial de trabajo radicó en que "es indispensable, para la construcción de un concepto matemático, la significación que le dio origen" (p. 33).

No obstante, advierte sobre la complejidad del fenómeno a abordar, pues el tipo de estudio epistemológico que realizó proporcionó la explicación que niega, parcialmente, su hipótesis de partida, pues "si bien es cierto que el concepto surgió en el ámbito de la determinación del estado estacionario (particularmente en la teoría del calor), éste no es propicio para recrearlo en el aula" (p. 34), ya que resulta ser más complejo que la noción misma que se deseaba introducir.

Como la autora explica, a partir de lo anterior se señaló como un problema fundamental de corte epistemológico el saber si las trasposiciones deben depender del público al cual se destina la enseñanza. La respuesta fue afirmativa; sin embargo, era necesario precisar *cómo* y en función de *qué*. En consecuencia, se plantearon dos *acercamientos* posibles: retomar el contexto en que surgió, lo que requiere el desarrollo de la intuición física en el alumnado; o bien, involucrar la epistemología propia del ámbito en que se desarrollará profesionalmente el alumnado fortaleciendo las habilidades que le son requeridas (Farfán, 2012, p. 34). Para la autora, lo segundo se apreció como lo más viable en su investigación.

En el caso particular de la comunidad con quienes se trabajó en la fase empírica del presente estudio, al tratarse de estudiantes en una carrera fisicomatemática, ambos acercamientos se hallan estrechamente relacionados, pues parte de lo que se espera en su formación es justamente el desarrollo de una intuición física. En este sentido, como se describió en la subsección 2.3, la ecuación diferencial surge enmarcada en una constante interacción entre la física y las matemáticas, a la par del *cálculo* –entonces denominado cálculo *fluxional* (Hernández, 1995)–, con el cual comparte prácticas de referencia dada su estrecha relación.

Respecto a dichas prácticas, existe ya una robusta investigación en torno al desarrollo epistemológico del cálculo desde una perspectiva socioepistemológica. Cantoral (2013b) señala que la *teoría de fluxiones* fue la herramienta mediante la cual se puso en uso el conocimiento matematizando el cambio instantáneo, dando pie al nacimiento de un saber con práctica de referencia específica: la *cinemática* y la *dinámica* (pp. 125-126).

Estas dos ramas de la física se encuentran diferenciadas en que la *cinemática* describe el movimiento de objetos, su comparación y clasificación, independientemente de sus causas; mientras que la *dinámica*, para el caso de movimiento, busca describir su evolución con respecto al tiempo y con relación a las causas que lo originan.

En la tarea de definir las características que se retomarían a partir de esta práctica de referencia (cinemática y dinámica) para el diseño de la fase empírica del estudio (subsección 6.3), se consideraron los trabajos de Arrieta (2003), Pérez y Sols (1994), Suárez (2014) y Arthur (1995).

Por un lado, la *figuración de las cualidades* de Oresme –que retoma Arrieta (2003) en su tesis doctoral (subsección *2.3.2*)– permite establecer un puente entre las descripciones *cinemáticas* de los miembros del Merton College y el análisis *dinámico* de Galileo a través de una caracterización gráfica del movimiento que es independiente a la utilización explícita de ejes coordenados graduados, aunque con una patente asociación funcional de correspondencia entre la "cualidad" (velocidad) y el tiempo. Como mencionan Cordero, Cen y Suárez (2010):

> [En la obra de Oresme] el uso de las figuras no está anclado a la representación analítica, que históricamente es posterior, ni dependía de la asociación de puntos respecto a coordenadas rectilíneas; su *funcionamiento* y *forma* estaba basada en la posibilidad de representar diferentes grados de intensidad de una cualidad por medio de segmentos y diferentes cambios por medio de figuras. (p. 192).

En particular, uno de los *calculadores* del Merton College –William Heytesbury– definió el movimiento *uniformemente acelerado* (*uniformiter disformis* con respecto al tiempo) como aquel en el que se adquieren incrementos iguales de velocidad en periodos iguales de tiempo; asimismo, definió la *velocidad instantánea* de forma análoga a como lo haría Galileo tres siglos más tarde (Pérez y Sols, 1994, p. 458):

> En Oxford, Heytesbury y sus contemporáneos del Merton College dieron descripciones matemáticas de varias clases de movimiento: uniforme y disforme. Los términos *uniformis*, *disformis* y *uniformiter disformis* llegaron a adquirir una significación cinemática. Descubrieron el Teorema Fundamental de la Cinemática, o *Teorema del Merton College*, que establece: «*en iguales periodos de tiempo, un móvil con velocidad uniformemente acelerada y otro con velocidad igual a la media entre las velocidades inicial y final del movimiento uniformemente acelerado, recorrerán espacios iguales*». (pp. 458-459).

Oresme demostró geométricamente este teorema (la misma prueba que ofrecería Galileo) e introdujo en la clasificación de los tipos de movimiento su esquema de dos variables –espacio y tiempo– (Pérez y Sols, 1994, p. 459). En particular, se reporta el trabajo de Domingo de Soto en la definición del movimiento uniformemente acelerado y la caída de los graves:

> «*Movimiento uniformemente disforme con respecto al tiempo es el movimiento de tal modo disforme, que si dividimos según el tiempo (a saber, según anterior y posterior), el punto medio de la proporción excede el extremo más lento lo que es excedida por el más rápido*». (Pérez y Sols, 1994, pp. 461).

De acuerdo con López (2013), "este dominico español [Segovia, 1494 – Salamanca, 1560] se adelantó en más de medio siglo a Galileo con esta afirmación [sobre la caída libre de los *graves*]" (p. 28); sin embargo, señala una diferencia sustancial en cuanto a cómo cada uno la concibió. Como es sabido, Galileo partió de observaciones experimentales para concluir la ley. A diferencia de él, Domingo de Soto se basó en una intuición más bien teórica.

Al respecto, López (2013) comenta que una pista sobre cómo él llegó teóricamente a dicha ley se halla en un enunciado de su obra *Quaestiones super octo libros physicorum Aristotelis* que acompaña a la definición antes citada, en el cual indica que:

> Este tipo de movimiento uniformemente disforme con respecto al tiempo propiamente sucede en los [graves] naturalmente movidos [...] donde un peso cae desde lo alto por un medio uniforme, se mueve más veloz en el fin que en el principio. (p. 29)[21].

La pista "es que en este movimiento la velocidad es mayor al final que al principio, o sea, podemos sobreentender, la velocidad crece con el tiempo" (López, 2013, p. 30). Tomando en cuenta que Domingo de Soto era además un importante filósofo, el autor describe que entonces "él sabía que el movimiento más natural es uniforme" (p. 30), seguramente influenciado por las ideas Aristotélicas aún predominantes en aquella época. Como señala más adelante el mismo autor:

> Esta idea de que lo natural es sencillo estaba fuertemente anclada en el pensamiento griego clásico. Pero, como el movimiento de caída de los graves, aunque también es natural, no es *uniformis simpliciter*, seguramente pensó que debe ser lo más sencillo y próximo posible al *uniformis*. Para él estaba claro que este movimiento era el *uniformiter disformis*, que no es uniforme en el pleno sentido, pero sí que lo es en parte. (p. 30).

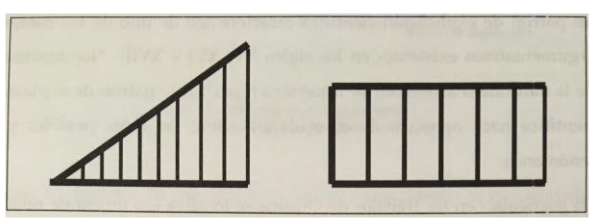


ILUSTRACIÓN 4-1 Figuración de las cualidades *uniformemente disforme* y *uniforme*. Tomado de Arrieta (2003, p. 128).

[21] La aclaración entre corchetes aparecía en la cita.

Esto es consistente con el Teorema del Merton College (también llamado Regla de Merton) y denota una propiedad específica de la caída libre en el vacío (movimiento con *aceleración constante*). Su figuración –al ser *uniformemente disforme*– correspondería entonces a un triángulo rectángulo y la *uniforme* a un rectángulo (ILUSTRACIÓN 4-1).

En consecuencia, la demostración del teorema antes citado se representaría gráficamente como en la ILUSTRACIÓN 4-2. En esta figuración, la hipotenusa del triángulo rectángulo y el lado superior del rectángulo se intersecan en sus puntos medios respectivos.

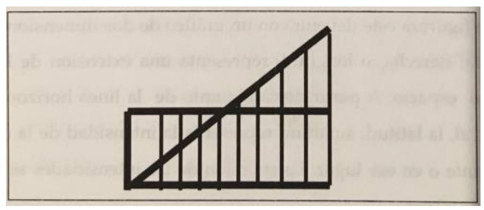


ILUSTRACIÓN 4-2 Cantidad según grado de punto medio. Tomado de Arrieta (2003, p. 128).

En particular, como se describió previamente, Suárez (2014) retoma esta figuración para estudiar el uso de gráficas en la modelación de fenómenos de variación a través de figuras geométricas (p. 97). De su investigación se retoma parte de la información epistemológica que emanó como resultado de su estudio. Ella reporta tres elementos en el uso de las gráficas para la *modelación*:

- *Elementos de pertinencia*. Se discute por qué es conveniente para la didáctica la consideración teórica del "uso de las gráficas en la modelación" como un conocimiento en sí mismo. La justificación se basa en tres datos epistemológicos: (1) la gráfica antecede a la función, (2) la gráfica es argumentativa, y (3) el uso de las gráficas tiene un desarrollo, es decir, aspectos propios del conocimiento identificados en el *Tratado de Oresme*, que dan información sobre el uso integrado del conocimiento matemático de las formas geométricas y de proporciones para obtener una funcionalidad en situaciones de variación.

- *Elementos de construcción*. Se define una construcción epistemológica del desarrollo del uso de las gráficas en la figuración de las cualidades. El desarrollo está descrito en términos del debate entre el funcionamiento y forma del uso que Oresme hace de las figuras geométricas para modelar el cambio y la variación. Esta epistemología marca tres momentos: (1) establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento del uso de las gráficas, (2) construcción de argumentos en el uso de las gráficas, (3) puesta en funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación. Los cuales se corresponden con el desarrollo del uso de las gráficas en la modelación.

- *Elementos de integración*. En esta dirección se realiza una articulación de los datos epistemológicos aportados en el estudio del uso de las gráficas en Oresme con los aspectos distintivos del binomio modelación–graficación que es una manifestación de las gráficas en la construcción de ideas del Cálculo y el Análisis Matemático (Cordero, 2011). (Suárez, 2014, pp. 81-82).

En palabras de la autora:

> Estos tres elementos y sus relaciones conforman una epistemología para la modelación escolar que está anclada en las gráficas, que se llamará una *práctica de modelación–graficación*, y que proporciona un marco de referencia para entender cómo [las y] los estudiantes logran una resignificación de sus conocimientos matemáticos. (Suárez, 2014, p. 82).

Por otro lado, Arthur (1995) –cuyo aporte se describe con mayor detalle en la sección 4.2– provee un indicio a partir del análisis de lo *fluxional* para la visión newtoniana, pues señala que ésta contenía inmersa una concepción *absoluta* del tiempo como referente inmutable con respecto al cual se cuantifica el cambio, ya que el considerar *fluentes* (cantidades que fluyen) presuponía la existencia de un *flujo* temporal cuya magnitud no aumenta ni disminuye. A su vez, asumir que con él se generan *todas* las cantidades, permite *comparar* las tasas (*fluxiones*) a las cuales cambian (p. 334).

Actualmente se sabe que el tiempo mismo es *relativo*[22]; sin embargo, lo importante a destacar en este punto es que, a partir del relativismo con respecto al *flujo* temporal (en su concepción absoluta) que describe Arthur sobre el pensamiento newtoniano, se comenzó a vislumbrar una *naturaleza dinámica* en la variación de la ecuación diferencial que luego se retomaría en el diseño de la fase empírica.

---

[22] James Chin–Wen Chou y sus colegas del US National Institute of Standards and Technology en Colorado encontraron que, cuando monitoreaban dos relojes atómicos posicionados justo a un pie de distancia el uno sobre el otro al nivel del mar, el tiempo corre más rápido cuando a mayor altura se está. Recuperado el 15 de agosto de 2018 de: https://www.independent.co.uk/news/science/einsteins-theory-is-proved-and-it-is-bad-news-if-you-own-a-penthouse-2088195.html

De manera especial, respecto a la variación, se retomaron algunos avances en la línea del *Pensamiento y lenguaje variacional* de la TSME; la cual, en palabras de Cantoral (2013b), "fue la fuente de inspiración del programa socioepistemológico" (p. 191).

El autor comenta que en su desarrollo se buscó analizar "los *procesos de construcción del conocimiento matemático* cuando estos se guiaron por la *transversalidad* del pensamiento físico, ámbito de *significación progresiva* cuyo *valor epistémico* se nutre de las peculiaridades de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza" (Cantoral, 2013b, p. 102).

En esta línea se hace una distinción entre el "cambio" y la "variación". De acuerdo con Cantoral (2013a), la expresión *cambio* se entiende como una modificación de estado, mientras que *variación* se entiende como una cuantificación de dicho cambio (p. 45), lo cual implica conocer *cómo* y *cuánto* cambia el sistema o cuerpo dado (Cantoral, Molina y Sánchez, 2006, p. 464). El cambio podría asociarse entonces con el estudio *cinemático* del movimiento, mientras la variación se podría relacionar con su estudio *dinámico* (añadiendo el *por qué* cambia). Por ende, la variación constituye además una *cualificación* del cambio.

Esta distinción es de gran utilidad para poder definir una *naturaleza dinámica* de la variación, pues es en la correlación del movimiento con el tiempo que emerge la cualidad dinámica inmersa en la variación que representa una ecuación diferencial.

Caballero–Pérez y Cantoral (2017) señalan que la variación "no es explícita en los fenómenos, no se observa, sino que se infiere, se calcula, se mide, y por tanto, se construye" (p. 1058). Este tipo de concepciones fueron retomadas para la elaboración del diseño a través del cual se propuso analizar el estudio cualitativo de la variación en las ecuaciones diferenciales ordinarias en consonancia con el problema de investigación establecido (capítulo 3) alrededor de su introducción.

La necesidad de abordar de manera cualitativa su estudio surgió de identificar que, tanto en términos epistemológicos como cognitivos (así como didácticos y sociales, dada la concepción sistémica de estas cuatro dimensiones), el contexto de significancia que constituyen los fenómenos de *movimiento* representa un elemento clave en la construcción de la noción de ecuación diferencial.

Por lo tanto, para abordar su introducción se propone rescatar el análisis cinemático y dinámico del movimiento. En este propósito, las *estrategias variacionales* propuestas por Caballero-Pérez y Cantoral (2017), "deja[n] ver una evolución pragmática en el estudio del cambio y la variación" (p. 1060). Estas estrategias son: la *comparación*, la *seriación*, la *predicción* y la *estimación*, aunque no se descarta la existencia de otras (Caballero-Pérez y Cantoral, 2013).

De acuerdo con estos autores, las estrategias variacionales surgen en el tratamiento de *situaciones variacionales* que requieran establecer puntos de análisis entre diversos estados de cambio. En dicho proceso, se da pie al uso de *argumentos variacionales*, los cuales son aquellos "que recurren al análisis del cambio y de su cuantificación" (Caballero-Pérez y Cantoral, 2013, p. 1201) y que permiten explicar la situación variacional. A su vez, tales argumentos se articulan a través de *códigos variacionales* que consisten en la expresión oral o escrita del cambio y la variación a través de frases, dibujos, tablas o ademanes (p. 1201).

Particularmente, en estos últimos es en los que se prestó atención durante el análisis de los datos obtenidos en la fase empírica del estudio. En especial, con base en las estrategias variacionales antes referidas, las cuales se han reinterpretado a partir de las definiciones propuestas por Caballero-Pérez y Cantoral (2013, p. 1202) como sigue:

- *Comparación*: Establecer diferencias entre estados para identificar si hubo cambio y en qué consistió dicho cambio.

- *Seriación*: Analizar varios estados sucesivos con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos (hallando una relación funcional a partir de una tabla, encontrando un patrón de comportamiento en una gráfica o, en general, estableciendo relaciones entre variables).

- *Predicción*: Anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de haber analizado estados previos. Se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo pero de manera puntual (correspondiente a un momento o valor determinado).

- *Estimación*: Proponer nuevos estados a corto plazo de manera global (como trazos de gráficas) conociendo el comportamiento de un fenómeno en otros estados.

En adición, los autores retoman dos nociones de la psicogenética: *causalidad* y *temporalización*. La primera implica reconocer que, entre todas las posibles variables que intervienen en un fenómeno, existen algunas que se pueden relacionar entre sí; mientras que la segunda conlleva reconocer los estados intermedios de un fenómeno (Cantoral, Moreno–Durazo y Caballero–Pérez, 2018).

Este par de nociones pueden ser justamente la base para pasar del estudio *cinemático* de un fenómeno de movimiento a un estudio *dinámico*, pues en la causalidad y la temporalización interviene la descripción de su evolución con respecto al tiempo y las implicaciones de las variables involucradas.

Transversal a lo anterior se encuentra la consideración de un *sistema de referencia* (Caballero–Pérez y Cantoral, 2017) con el fin de "organizar" la variación del fenómeno mediante cuatro elementos: *variables* (¿qué cambia?), *unidad de referencia* (¿respecto de qué cambia?), *unidad de medida* (¿cuánto cambia?) y *temporización* (¿cómo cambia?). En un fenómeno de movimiento este sistema se constituye espacial y temporalmente.

De manera especial, este sistema de referencia constituye un elemento importante al pasar de un estado de variación mayor a uno menor, por ejemplo, de la *aceleración* a la *velocidad*, pues el cambio que describe la primera sobre la segunda no es suficiente para caracterizar completamente a esta última, pues se necesita al menos un valor que funja como referente en la determinación de una solución particular. En ecuaciones diferenciales, dicho valor se denomina *condición inicial* y puede corresponder, en el ejemplo anterior, al valor inicial de aceleración, o bien, a cualquier otro valor en el intervalo de tiempo considerado.

En cuanto a dichas condiciones, se retoman los hallazgos de Buendía y García (2002) que parten de observar gráficamente que, en el caso de las ecuaciones diferenciales de primer orden, la familia de soluciones se conforma por un conjunto de curvas con la salvedad de que no se cruzan entre ellas, por lo que, para determinar una solución particular, basta con *una* condición inicial que indique un punto por el cual pase la curva (p. 112).

Por ejemplo, si se busca determinar la función que describe la *posición* de un objeto en movimiento con respecto al tiempo a partir de las curvas solución de la ecuación diferencial correspondiente a su *velocidad*, bastará con conocer la altura inicial del objeto, la final o la de cualquier momento intermedio, para hallar la solución particular.

En el caso de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, al observar que varias curvas solución se pueden intersecar en un mismo punto, se hace necesario saber además de qué manera la curva solución pasa por él, lo cual se obtiene con una *segunda* condición inicial (Buendía y García, 2002, p. 112).

Retomando el mismo ejemplo, si la función de la *posición* se busca determinar a partir de las curvas solución de la ecuación diferencial correspondiente a su *aceleración*, además de su altura en cierto momento, será necesario conocer la velocidad que llevaba el objeto en dicho punto.

Abordar esto mediante la *modelación* de un fenómeno físico permite justamente articular los diferentes significados contextuales de las condiciones iniciales para una resignificación de la relación entre el orden de una ecuación y su número de condiciones iniciales (Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar, 2016, p. 116).

Por otro lado, aunado a los resultados anteriores, se retoman las consideraciones en el estudio de Cordero et al. (2016) con base en las dimensiones de la TSME respecto al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales:

- En la dimensión *epistemológica*:

  > Los contextos por los cuales ha evolucionado la teoría de ecuaciones diferenciales han sido: *algebraico*, *numérico* y *geométrico*. Sin embargo, la enseñanza de las ecuaciones diferenciales no ha seguido, hasta ahora, esa evolución, pues los tratamientos suelen centrarse en el contexto algebraico.

- En la dimensión *cognitiva*:

  > Una dificultad aparece en el alumnado al hacer intercambios entre los diferentes contextos.

- En la dimensión *didáctica*

  > Con el propósito de encontrar un equilibrio de enseñanza más satisfactorio desde un punto de vista epistemológico y cognitivo se considera la posibilidad de enseñar a considerar soluciones cualitativas.

- En la dimensión *social*:

  > La necesidad de incorporar argumentaciones que correspondan a categorías de una matemática funcional (p. 22).

Una estructura que permite abordar lo descrito hasta este punto en un diseño de intervención, desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento matemático, se presenta en la TABLA 4-1. En ella se articulan las características descritas del discurso matemático escolar (dME) con los principios de la TSME para proponer un rediseño.

En esta tabla, con base en lo señalado por Reyes–Gasperini (2016), se hace una distinción entre la *matemática escolar* y el *saber matemático escolar*. La primera es un derivado de los procesos de trasposición de la Matemática hacia el ámbito escolar (p. 44), mientras la segunda es producto de la interacción de naturaleza sistémica del saber *popular*, el saber *técnico* y el saber *culto* (p. 50).

TABLA 4-1 Caracterización teórica del dME y la fundamentación para su rediseño (basada en la tabla de Cantoral, Montiel y Reyes–Gasperini, 2015 considerando la aclaración de Reyes–Gasperini, 2016, p. 44, sobre el "saber matemático escolar").

Discurso Matemático Escolar actual (Soto, 2010)	**Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2013b)**	**Propuesta de dME**
Carácter utilitario	*Normativa de la práctica social*	*Carácter funcional*
La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.	La significación de la matemática mediante el uso: anidación de prácticas.	El *saber matemático escolar* se organiza con base en el saber y el funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, reconociendo a las prácticas sociales en la base de la creación del conocimiento: contexto de significación.
Atomización en los conceptos	*Racionalidad contextualizada*	*Racionalidades conceptuales diversas*
No considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.	La relación con el saber es una función contextual.	Se reconocen, privilegian y potencian diversos tipos de racionalidad relativos a la realidad en la que el individuo se encuentre en un momento y lugar; desde el cual se construirá conocimiento: aula extendida (contexto situado).

<table>
<tr><td>Carácter hegemónico</td><td>Relativismo epistemológico</td><td>Validación de saberes (conocimientos construidos)</td></tr>
<tr><td>Supremacía de argumentaciones y significados frente a otros.</td><td rowspan="3">La validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural.</td><td rowspan="3">El saber matemático escolar tiene diversas maneras de verse, trabajarse, construirse y desarrollarse, concibiendo que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural en el cual éste ha emergido y respecto a la racionalidad contextualizada que éste posea.</td></tr>
<tr><td>Conocimiento acabado y continuo</td></tr>
<tr><td>La enseñanza de la matemática se reduce a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.</td></tr>
<tr><td>Falta marcos de referencia para la resignificación</td><td>Resignificación progresiva</td><td>Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación</td></tr>
<tr><td>Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, donde se encuentran las bases de significados naturales.</td><td>La significación no es estática, es funcional, relativa y contextual.</td><td>La pluralidad de prácticas de referencia, su interacción con diversos contextos y la propia evolución de la vida del individuo o grupo, resignificarán los saberes hasta el momento construidos, enriqueciéndolos con nuevos significados.</td></tr>
</table>

4.2. Educación integradora STEM

La relación entre la TSME y la STEM va más allá de un anagrama. Desde el momento en que la primera identifica un papel esencial en la transversalidad sociocultural, reconoce una importancia en la transversalidad del *saber* en diferentes escenarios. De manera análoga, la segunda, desde una perspectiva integradora, al identificar una necesidad por promover la integración del currículo escolar, reconoce la importancia de considerar el contexto (en un sentido amplio) de las y los estudiantes.

De este modo, se aprecia viable una articulación de la visión sistémica de las cuatro dimensiones de la TSME (didáctica, cognitiva, epistemológica y sociocultural) con los objetivos de un enfoque integrador de la educación STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, por sus siglas en inglés).

Hasta este punto, el término *integración* se ha usado en tres sentidos: integración de las tecnologías digitales en la matemática educativa, integración del currículo escolar e integración de las mujeres a la construcción social del conocimiento. De cierto modo, la primera de estas integraciones podría asumirse como parte de la segunda, de tal forma que **se podría plantear un enfoque *integrador* de la matemática educativa desde la *interdisciplinariedad* y la *inclusión***.

La necesidad de plantear un enfoque de esa naturaleza nace de los elementos característicos en la enseñanza usual de las ecuaciones diferenciales (y de la física y las matemáticas en términos generales) que se identificaron en la problemática (capítulo 1) y en la revisión de literatura (capítulo 2), y que dieron pie al problema de investigación (capítulo 3).

La propuesta para confrontarlos (*Diseño* en la subsección *6.3.1*) parte de considerar (1) el *contexto* en el cual surgieron las ecuaciones diferenciales (a lo cual se dedican esta sección y la anterior) a la par de (2) las posibilidades instrumentales que proveen los *ambientes digitales* actuales para la modelación de fenómenos físicos (secciones 4.4 y 4.5). A su vez, en ella se tuvo presente (3) una perspectiva de *género* transversal (sección 4.3).

Retomando el primer punto, como se mencionó anteriormente, el trabajo de Hernández (1995) proporcionó un claro indicio para la identificación de un *contexto de significancia* de las ecuaciones diferenciales al describir su surgimiento en estrecha relación con el *cálculo fluxional* y los fenómenos físicos asociados a éste.

De manera más específica, en las investigaciones socioepistemológicas sobre el pensamiento y lenguaje variacional, un elemento clave fue el estudio de obras originales, particularmente, el "análisis de construcciones originales de conocimiento matemático en ámbitos físicos de fenómenos de flujo" (Cantoral, 2013b, p. 106), con el fin de "identificar estrategias formales e informales que propiciaron la construcción de conocimientos matemáticos, teniendo como referencia, el pensamiento físico propio de los fenómenos deterministas del movimiento" (p. 106).

En este sentido, como se comenzó a plantear en la sección 4.1, tal denominación *fluxional* del cálculo contenía inmersa la concepción de Newton sobre el tiempo y el movimiento. La existencia de *fluentes*, es decir, cantidades que fluyen, presuponía un *flujo* temporal: una cantidad no puede disminuir o aumentar continuamente *en el tiempo* a menos de que el tiempo mismo experimente un aumento continuo (Arthur, 1995, p. 334). Es decir, para determinar que algo cambia de manera continua con respecto al tiempo, el tiempo ha de emerger como un referente absoluto y regular con respecto al cual se cuantifica el cambio.

Más aún, el considerar que, a la vez que el tiempo se genera de manera continua, junto con él se generan todas las cantidades, implica que las *tasas* (velocidades o *fluxiones*) –a las cuales tales cantidades cambian con respecto a este flujo constante del tiempo– pueden ser comparadas entre ellas (Arthur, 1995, p. 334).

Lo anterior contiene una sutilidad epistemológica muy importante respecto a la concepción de las ecuaciones diferenciales. Como se señaló, para Newton, el medir *con respecto* al tiempo implica que éste se convierte en una referencia absoluta para poder describir la cualidad del cambio. Entonces, dado que esta referencia temporal *fluye* de manera continua e *independiente* a todo lo demás, se convierte en un referente absoluto que permite comparar todas las cantidades cambiantes. Es decir, además de que el tiempo funge como referente para describir cambios, emerge a su vez como un referente para *comparar* descripciones de cambio.

En términos más actuales (y convencionales), lo anterior permite definir al tiempo como una *variable independiente* o, incluso, concebir la independencia de una variable al aceptar su inmutabilidad. Por otro lado, implica la existencia de una variable que es uniforme para todas las cantidades analizadas (*posición*, *velocidad*, *aceleración*, etc.) y, por ende, una variable respecto a la cual sea posible compararlas.

En este punto cabe hacer una aclaración, párrafos arriba se mencionan las *cantidades* y las *tasas* a las cuales cambian tales cantidades, proporcionando el ejemplo de la velocidad como tasa; no obstante, la velocidad también puede ser una "cantidad", es decir, se puede describir su cambio con respecto al tiempo, en cuyo caso la *tasa* correspondería a la aceleración. Sucesivamente, los demás órdenes de variación pueden igualmente ser *cantidades* o *tasas*.

Para estudiar esto se puede partir de un análisis de *proceso–objeto* en la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria. Romero–Fonseca (2016) comparte una explicación de este tipo de análisis desde la mirada socioepistemológica:

> La TSME posee una aproximación sociocultural del aprendizaje, para la cual los diferentes escenarios (culturales, históricos e institucionales) modifican los procesos mentales del individuo, lo que permite hablar de distintas formas de pensar matemáticas (principio de racionalidad

> contextualizada) (Cantoral, 2013). En función de estas formas de pensar y los escenarios[,] los objetos matemáticos desempeñan un papel dual, proceso–objeto. Los diferentes entes matemáticos se pueden considerar objetos, los cuales poseen ciertas relaciones entre sí; [a su vez,] cada objeto es parte de una estructura más amplia de objetos. Los procesos se componen de operaciones sobre esos objetos y transforman a los objetos mismos. (p. 17).

En este sentido, se delineó un esquema de trabajo (ILUSTRACIÓN 4-3) para ser considerado en la introducción de la noción de ecuación diferencial ordinaria que se basa justamente en la dualidad *proceso–objeto* de la derivada. Este esquema representa el eslabón de un ciclo que se repite para cada proceso. Por ejemplo, en el contexto de una situación de movimiento: al *pasar* de posición a velocidad y de velocidad a aceleración, y viceversa.

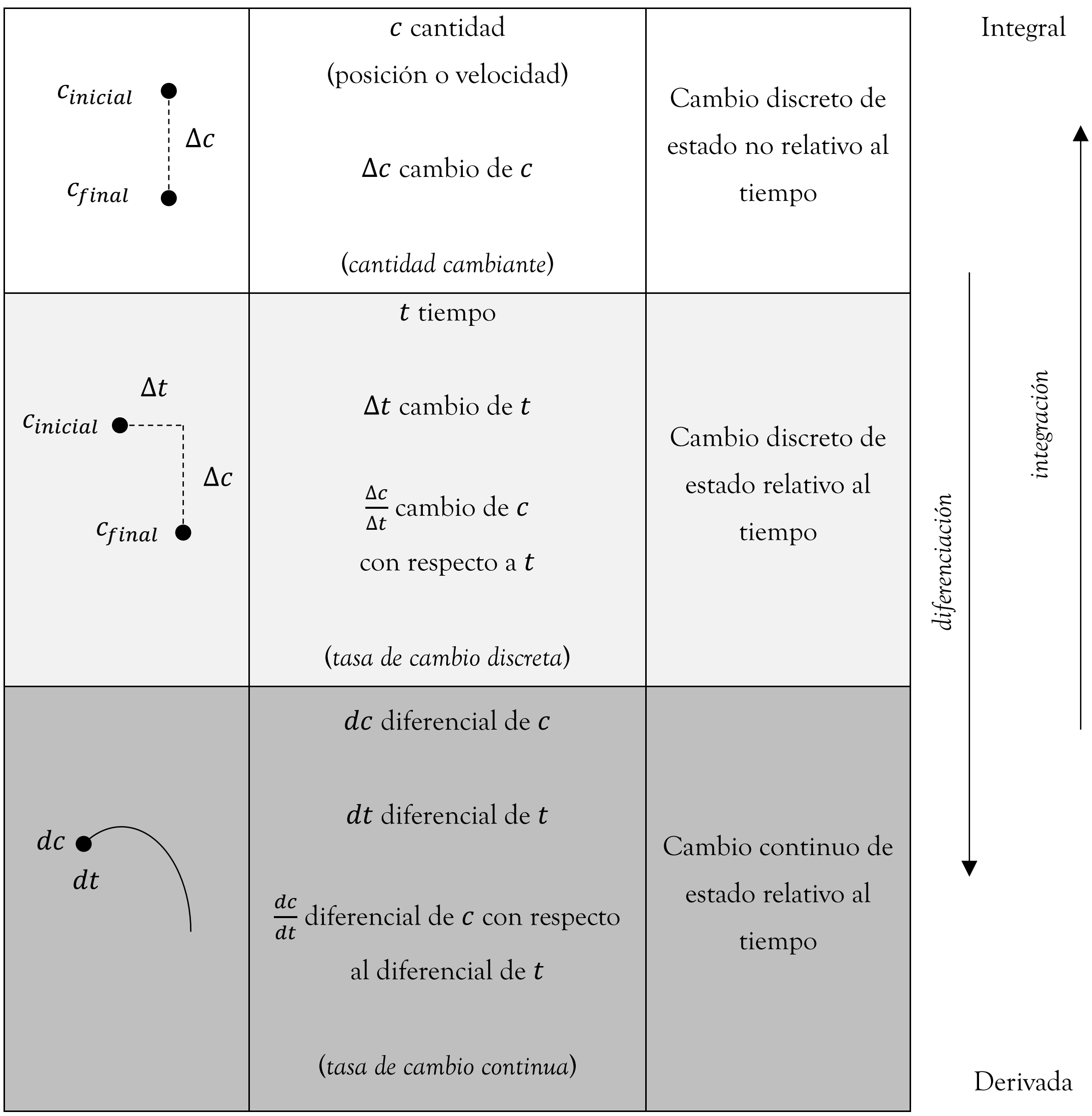


ILUSTRACIÓN 4-3 Esquema de trabajo para la introducción de la EDO con base un análisis proceso–objeto de la derivada.

El contexto se vuelve particularmente significativo tomando en cuenta una segunda dualidad inmersa en la anterior: la dualidad *discreto–continuo*. De arriba hacia abajo, el esquema muestra una evolución que parte de una medida discreta, la cual se relativiza (con respecto al tiempo) igualmente de manera discreta y que concluye en su generalización (al menos en un nivel local) de manera continua. Contextualmente, esto se corresponde, dependiendo del orden de variación, con las nociones de velocidad y aceleración *promedio* (discreta) e *instantánea* (continua), las cuales se asumen esenciales en la significación del paso de lo discreto a lo continuo dado el análisis realizado.

Asimismo, las *estrategias variacionales* antes citadas (sección 4.1) entran en juego de manera especial en este esquema. La *comparación* y la *seriación* permiten identificar el cambio y hallar un patrón de comportamiento de dicho cambio. La *predicción* hace uso de dicho patrón para deducir el valor correspondiente a algún otro estado particular. Y la *estimación* de cierto modo generaliza las deducciones para establecer un modelo global del comportamiento.

Con base en el esquema de la ILUSTRACIÓN 4-3, estas estrategias se pueden corresponder con un análisis discreto y continuo. En este sentido, en la ILUSTRACIÓN 4-4 se presenta un esquema en el cual se integran dichas estrategias para los distintos niveles. Es de destacar que en la fila inferior del esquema –correspondiente al caso continuo– la *estimación* se concibe como transversal a las estrategias de *comparación*, *seriación* y *predicción*.

Ahora bien, considerando un ambiente *dinámico* digital, la dualidad discreto–continuo puede adquirir mayores matices. Por ejemplo, el caso *discreto* en la primera fila de la ILUSTRACIÓN 4-4 se puede abordar como "pausas" en la animación del movimiento, de tal manera que lo puntual (discreto) se aprecie como parte de un todo continuo.

Asimismo, el patrón de comportamiento que se busca identificar en la *seriación* se puede explorar mediante la caracterización de invariantes en la variación de parámetros. Estas y otras implicaciones de la experimentación en ambientes digitales se discuten con mayor profundidad en las secciones 4.4 y 4.5.

Por lo pronto, cabe señalar que este tipo de acercamientos permite vislumbrar la existencia de *estrategias dinámicas* –ligadas a las potencialidades del instrumento– como parte del *análisis variacional* del movimiento (estas estrategias se perfilan y caracterizan a lo largo de la investigación con base en la noción de *valor epistémico* que plantea Artigue, 2002).

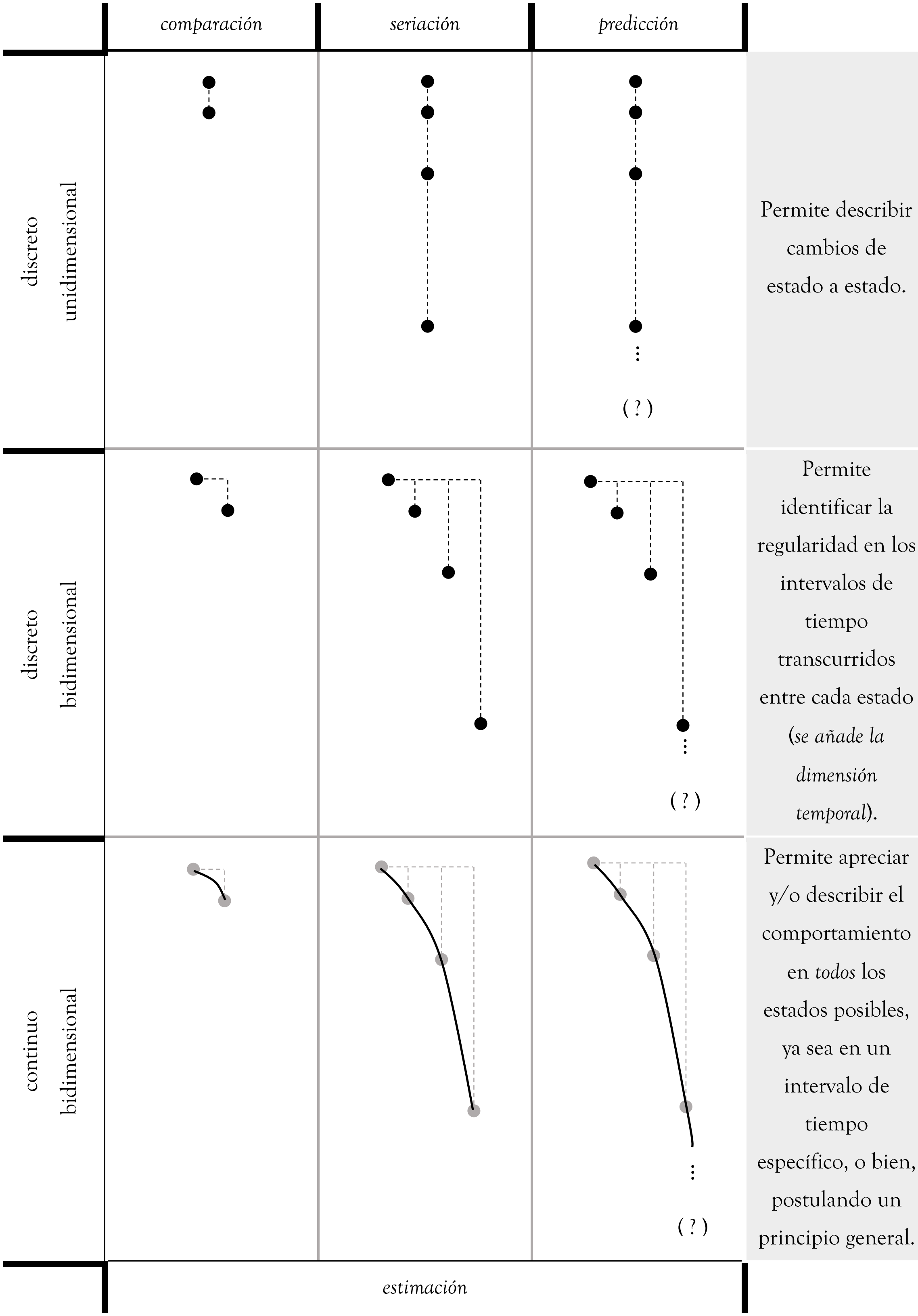


ILUSTRACIÓN 4-4 Esquema de estrategias variacionales en el caso discreto y continuo.

En dichas estrategias interviene nuevamente el tema de la dualidad *proceso–objeto*. Gray y Tall (2001) plantean que los *objetos materializados* (*embodied objects*) comienzan con las percepciones humanas a través de los sentidos y que se van fundamentando mentalmente a través de la reflexión y la discusión (p. 65). Su hipótesis es que la "encapsulación teórica" (o *reificación*) de un *proceso* como *objeto mental* está con frecuencia enlazada a una correspondiente configuración materializada de los objetos sobre los cuáles se actuó (*objeto base*).

Estos autores consideran que las configuraciones materializadas son primitivamente más significativas que los objetos mentales encapsulados; sin embargo, que a la vez carecen del poder y flexibilidad de la esencia destilada del simbolismo que lleva tanto al concepto matemático como al proceso. La noción de *embodied* comienza justamente con la concepción mental de un objeto físico (que se percibe en el mundo real a través de los sentidos), por ejemplo, el dibujo de una gráfica. La concepción mental puede estar entonces en la forma de un prototipo, con ciertas propiedades generales que proveen una base para la comunicación, hasta la adición de propiedades que conduzcan a un particular. Eventualmente, tales percepciones se vuelven abstracciones que ya no se asocian conscientemente a objetos específicos en el mundo real (Gray y Tall, p. 66).

Uno de los ejemplos que proporcionan los autores, y por el cual se retoma lo anterior en esta fundamentación teórica, es el de la *razón de cambio* y el sutil proceso matemático de la *diferenciación* con su concepto relacionado de la *derivada*. Particularmente, se retoma dada la constante referencia que hacen las y los autores que se citaron en el capítulo 2 sobre la importancia de una concepción de la derivada como razón de cambio para la significación de la noción de ecuación diferencial ordinaria, así como del análisis de los libros de texto de física y ecuaciones diferenciales en la sección 2.2.

En dicho ejemplo, se observa a la imagen de una gráfica como un objeto materializado que representa visualmente el concepto de función. Esta puede ser dibujada o vista ya sea con un lápiz o delineando en el aire una curva con la mano. Esta *acción materializada* expresa el sentido de cambio del gradiente de la gráfica al ir modificando su pendiente. Las ideas formales pueden introducirse entonces luego de que esta actividad materializada se haya construido con el apoyo del movimiento del individuo (Gray y Tall, 2001, p. 71).

En el presente estudio, se postula que *como parte de* dicho trabajo material se encuentra también la exploración de una animación de movimiento en un ambiente digital, pues en la modificación manual de parámetros (por ejemplo, con un *deslizador*), y correspondiente visualización de efectos en el movimiento, se representa la relación funcional referida.

Se hace énfasis en el "*como parte de*" dicho trabajo material, pues se tiene presente que no es un equivalente directo de la acción materializada de un trazo o el movimiento de la mano. En este sentido, cobra importancia la aclaración de Joubert (2017) respecto a la *retroalimentación* del ambiente tecnológico (software de matemática dinámica), pues en ciertos casos (como este) la computadora puede realizar *parte* del trabajo. Es decir, si se tiene una animación del movimiento de un objeto que cae vinculada con un deslizador que corresponde al paso del tiempo, quien mueve el deslizador podrá ver los efectos de su variación en el movimiento del objeto, por ejemplo, que en valores de tiempo más cercanos al inicio de la caída, el objeto llevará una velocidad menor que en valores de tiempo cercanos al final.

En dicho caso, la variación en el parámetro de tiempo se ve correspondida con un desplazamiento del objeto con ciertas características. Esta acción exploratoria (estrategia dinámico–variacional) puede acompañar la descripción cualitativa del movimiento (*diferenciación*) y anteceder la estimación continua del comportamiento (*temporalización*) que se manifiesta en la derivada.

Para cerrar este punto, Gray y Tall (2001) señalan que su análisis los llevó a establecer una diferencia sustancial con la teoría APOE, en cuanto sus observaciones revelan que el "objeto encapsulado" no se produce simplemente por una "reificación" del proceso hacia el objeto, sino que es en gran medida propiciado al emplear la configuración de los *objetos base* involucrados como *precursores* de una abstracción matemática sofisticada. Lo cual no implica que en ello siempre se mantiene un enlace consciente con los *objetos materializados* fundamentales, sino que pueden permanecer pero hacerse inconscientes, de tal manera que se pueda centrar la atención en detalles esenciales particulares como base para un futuro desarrollo axiomático (p. 71).

Este punto es importante tomando en cuenta que los cursos de cálculo de la carrera fisicomatemática considerada están principalmente orientados hacia la axiomatización y formalización de la teoría.

Particularmente, desde la TSME, el cambiar la centración en el *objeto* para enfocar la mirada en las *prácticas* no implica negar el *concepto objetivado*, sino sustentarlo en prácticas que le doten de sentido y significado. De esta manera, se concibe que "el *concepto objetivado*: propiamente el *objeto*, no es aprehensible por [las y] los estudiantes, sin el acompañamiento del *proceso objetivable*: la *práctica*" (Cantoral, 2013b, p. 114). Es decir, "la descentración del objeto no lo anula, solo promueve llegar a él luego de un trabajo pragmático con las prácticas asociadas (Reyes–Gasperini, 2016, p. 182).

En el caso de las ecuaciones diferenciales, Perdomo (2011) señala que el enfoque de enseñanza *habitual* –en el que se introduce el concepto a partir de su definición formal– no favorece el desarrollo de *heurísticas* que permitan al alumnado plantear y resolver problemas enunciados en un contexto diferente al que se les presenta como ejemplos de aula, en especial aquellos cuyo enunciado se plantea en un contexto no matemático (p. 132).

En el caso particular del contexto físico, dado el análisis realizado hasta el momento respecto a los fenómenos de movimiento, una tercera dualidad se identifica: la dualidad *absoluto–relativo*. Para ejemplificar esta dualidad en el contexto referido, a continuación se trata el análisis de la posición de un objeto en caída libre. En la ILUSTRACIÓN 4-5 se muestra un análisis de la variación en la posición del objeto a través de las estrategias de *comparar* y *seriar* con base en una medida *absoluta*: la distancia.

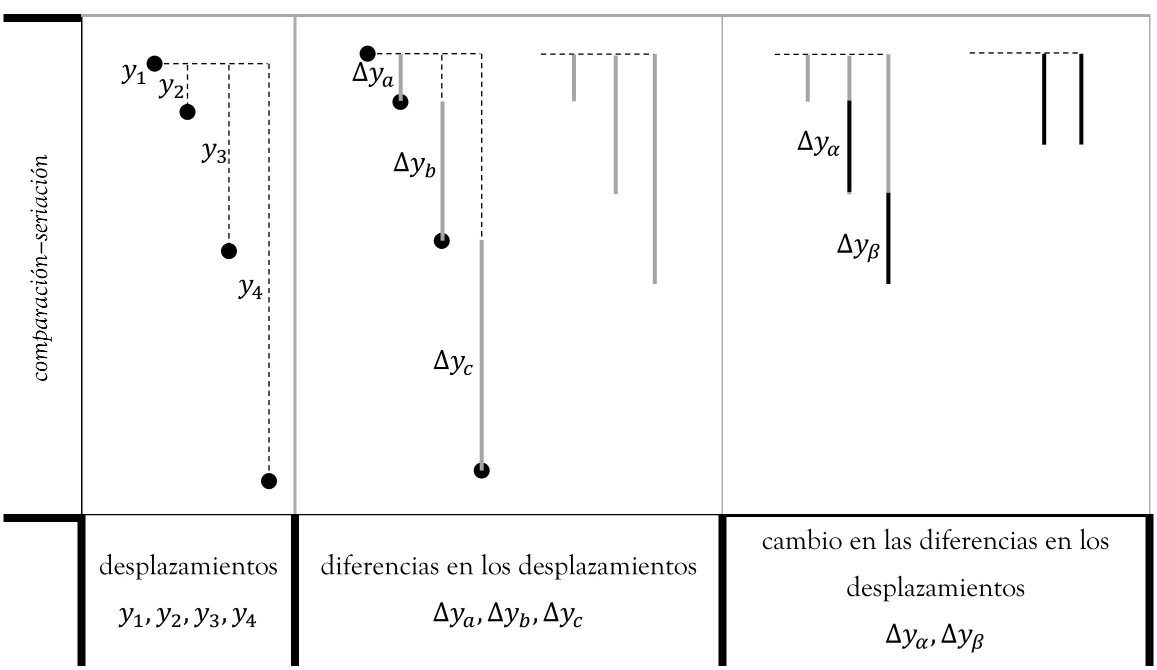


ILUSTRACIÓN 4-5 Esquema de estrategias variacionales en el caso de medidas absolutas.

Con esta medida absoluta es posible identificar un patrón de comportamiento en las *diferencias en los desplazamientos* (crecimiento constante) y en el *cambio en dichas diferencias* (constante). Particularmente, con un software de matemática dinámica lo invariante en dichos patrones se puede constatar mediante la variación de parámetros.

Uno de los parámetros que es posible modificar es la longitud del intervalo considerado. En la ILUSTRACIÓN 4-6 se muestra un análisis considerando intervalos de diferente longitud con respecto a una medida *absoluta* y a una medida *relativa*:

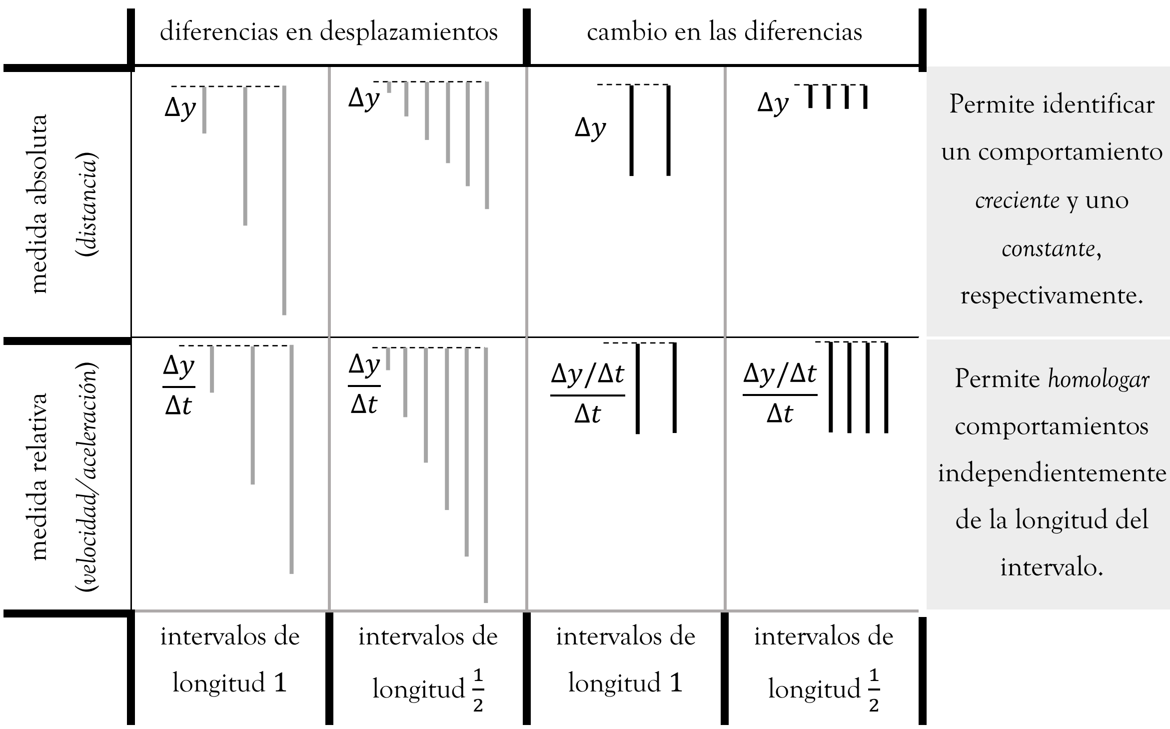


ILUSTRACIÓN 4-6 Comparación y seriación con medidas absoluta y relativa.

Para pasar de la medida absoluta a la medida relativa, los valores en la fila superior fueron divididos entre los valores respectivos de tiempo dadas las longitudes de los intervalos en cada caso. En el análisis de las diferencias en desplazamientos, los valores se dividieron una vez entre el tiempo. En el análisis del cambio en dichas diferencias, los valores se dividieron dos veces entre el tiempo pues la medida relativa de la *aceleración* corresponde a la medición de la medida relativa de la *velocidad* (es decir, se divide una vez por cada medición relativa).

Como se puede observar, mientras que con base en una medida *absoluta* es posible identificar un comportamiento (crecimiento constante o constante), con base en una medida *relativa* se puede establecer un patrón que homologue el comportamiento identificado. En el caso de la *velocidad*, dicho patrón corresponde a una pendiente constante y, en el caso de la *aceleración*, el patrón correspondiente es el valor constante de las magnitudes.

Este análisis permite reconocer la necesidad de una medida *relativa* para establecer otro nivel de comparación que permita identificar un nuevo invariante. En el caso del análisis de la posición de un objeto en caída libre, la *relación* entre ambas cantidades (distancia y tiempo), es decir, el hacerlas *relativas*, introduce una nueva *unidad* en el análisis del movimiento que permite concebir simultáneamente el desplazamiento del objeto y el tiempo transcurrido.

La relevancia de lo anterior radica en que, además de identificar *cuánto* cambia algo en sentido absoluto, se busca describir *cómo* es que cambia y en ese "cómo" interviene la *razón* como una nueva unidad de medida y la *función* como la relación de dicha medición. Esquemáticamente:

$$f(t) = \text{ cómo} = \frac{\text{cuánto cambia}}{\text{cuánto tiempo}}$$

Para este punto se ha tomado como base la conjetura en el estudio de Reyes–Gasperini (2016) en cuanto que "la razón es la unidad de medida y *lo proporcional* es la característica de la relación de medición" (p. 139). En analogía con ella, para el caso de la caída libre, la característica de la relación de medición es *lo cuadrático* cuando se trata de la posición y *lo lineal* cuando se trata de la velocidad. En consecuencia, en cada ciclo de descripción del cambio (ILUSTRACIÓN 4-3), los *cuánto* y los *cómo* se interconectan para analizar la variación.

La *unidad de referencia* y la *unidad de medida* que caracterizan Caballero–Pérez y Cantoral (2017) sobre el *sistema de referencia* se vuelven especialmente cruciales para lo anterior, pues mientras con la primera se considera un referente respecto al cual se mide el cambio, con la segunda se busca describir la magnitud (absoluta) o intensidad (relativa) respecto a la unidad de referencia. De ahí que la pregunta asociada a unidad de medida –que los autores señalan como *¿cuánto cambia?* (absoluta)– se podría plantear también como *¿con qué intensidad cambia?* (relativa).

Como anteriormente se discutió con base en el análisis de Arthur (1995), el contar con un referente absoluto respecto al cual todas las cantidades se miden permite compararlas entre sí. Por ende, se *mide* con respecto al tiempo, pero también se *compara* con base en él.

Lo primero queda evidenciado en la fila superior de la ILUSTRACIÓN 4-6, pues, pese a ser una *medida absoluta* (distancia), cada medida se obtuvo considerando un cierto intervalo de tiempo transcurrido, es decir, *se midió con respecto al tiempo*. Lo segundo queda evidenciado en la fila inferior de la ILUSTRACIÓN 4-6, pues la *medida relativa* (velocidad o aceleración) permite *comparar comportamientos con base en el tiempo*.

Por todo lo anterior, como se mencionó en la sección 4.1, el estudio de la variación se asume como un proceso de *cuantificación* y *cualificación* del cambio que toma como referente el paso regular del tiempo. Es decir, implica un estudio dinámico.

En el sistema gráfico, este estudio puede corresponder al análisis del movimiento a partir de un plano cartesiano con dos ejes: uno *temporal* y otro *espacial*. En el caso de una simulación en un ambiente dinámico, el análisis puede partir del mismo fenómeno animado, donde la dimensión espacial se manifiesta en el desplazamiento del objeto y la dimensión temporal se puede apreciar como en una *experimentación presencial*, considerando el propio transcurrir del tiempo, pero con la posibilidad de manipular dicho transcurso a través de un deslizador.

Ahora bien, en el análisis de la dualidad absoluto–relativo cobra sentido el estudio de Oresme respecto a la *figuración de las cualidades*, en cuanto que para describir el movimiento se abordaba la representación geométrica del *comportamiento* de la posición, es decir, de su velocidad (medida relativa).

A su vez, lo anterior se asocia estrechamente con lo reportado por Romero y Rodríguez (2003), respecto a la atención que Galileo prestaba a la *cualidad* del movimiento, es decir, a su *velocidad*. Si bien el cambio de posición provee cierta información del fenómeno, fue a partir del comportamiento de su cambio que se comenzó a caracterizar el movimiento y es con base en ello que se configuró el diseño para la fase empírica de la investigación (en las siguientes secciones se discute con mayor profundidad esta referencia).

En particular, como previamente se discutió, las matemáticas suelen ser consideradas como una disciplina *de servicio* y, a consecuencia de esta concepción, dado que las intenciones curriculares de las demás materias son diferentes a las de las matemáticas, se generan tensiones respecto a dónde hacer énfasis en las iniciativas interdisciplinarias (Roth, 2014, p. 317).

Tomando en cuenta lo anterior, para la elaboración del diseño se partió de analizar un contexto de significancia que fuera propicio para abordar la noción de ecuación diferencial. Se debía tratar de un contexto que permitiera partir de nociones comunes y, a su vez, abrir la discusión a posibles explicaciones físicas del fenómeno, pues considerando la comunidad a la cual se dirigió el diseño, se trataba de estudiantes que ya habían trabajado previamente con los conceptos de posición, velocidad y aceleración en un curso de física.

Especialmente, los conceptos de *velocidad promedio/aceleración promedio* y *velocidad instantánea/aceleración instantánea* se identificaron como un medio para contextualizar el paso de lo discreto a lo continuo (como sugiere la discusión de Galileo que retoman Romero y Rodríguez, 2003). En este sentido, cuando se tiene una cuantificación discreta relativa al tiempo, se está considerando un intervalo de tiempo, es decir, se está analizando un lapso del fenómeno; por otro lado, cuando la cuantificación relativa se hace continua, se pasa a la consideración de un instante, es decir, un solo momento. Pero más aún, tal cuantificación continua no solo permite conocer la forma en que cambia algo en un solo punto, sino en *todos* los puntos correspondientes a todo el intervalo estudiado (*estimación*).

Para ejemplificar lo anterior se puede considerar lo siguiente: si se tuviera la foto de un objeto tomada durante su movimiento, no se podría determinar la dirección que éste seguía o qué tan rápido se movía cuando se fotografió, pues para ello se necesitaría –al menos–conocer dónde estaba en otro momento. Con solo esos dos estados, se podría aproximar su dirección y su velocidad (*promedio*); sin embargo, no sería posible asegurar que su comportamiento presenta la regularidad de una velocidad constante o si es variable, o bien, si la trayectoria que sigue es lineal, curva o cualquier otra forma posible. Para tales casos, más y más información se requeriría, y con cada nuevo dato, la aproximación se acercaría más a la realidad; se aproximaría a determinar, por ejemplo, su dirección y velocidad en todo momento (*instantánea*).

Retomando lo indicado por Roth (2014) respecto a las iniciativas interdisciplinarias –las cuales define como el hecho, cualidad o condición que pertenece a dos o más campos académicos o ramas de aprendizaje (p. 317)–, es posible diseñar currículo de tal manera que el alumnado aprenda en una manera *muy* cualitativa tanto física como matemáticas, teniendo presente que el propósito de emprendimientos interdisciplinarios involucrando matemáticas puede ser el desarrollo de un conjunto rico de experiencias que subyazcan emprendimientos puramente matemáticos para más adelante en la vida de las y los estudiantes (p. 319).

4.3. Transversalidad del género

La forma en la cual se concibe al ser humano social y culturalmente ha ido evolucionando a lo largo de la historia. Una de las clasificaciones más elementales de la especie humana radica en lo que biológicamente distingue a hombres y a mujeres, lo cual devino en la categoría *sexo*. De tal diferenciación se derivaron una serie de atributos que se fueron considerando culturalmente *femeninos* o *masculinos*, variando en función del entorno espacial y temporal. El término *género* alude a dichos aspectos construidos socialmente y surge como categoría para distinguirlos de las diferencias biológicas.

Dada esta distinción podría resultar confuso o inclusive contradictorio hablar de "sexo masculino" y "sexo femenino", pero se ha de entender –al menos en el presente escrito– que en tales casos se hace referencia a lo biológico; mientras que los términos sin la palabra *sexo* antepuesta se referirán a lo sociocultural.

En la actualidad, la división *binaria* de lo femenino y lo masculino comienza a ser repensada en la investigación en materia de género en cuanto existe una mayor diversidad de acuerdo con la orientación sexual de las personas y su identidad de género (Lamas, 2013, p. 358). En este sentido, se podría incluir también a quienes biológicamente no concuerdan por completo con uno de los dos sexos.

Sin embargo, pese a la evidente existencia de tal diversidad, un gran porcentaje de estos individuos se identifica con cualidades que describen a *lo masculino* y/o *lo femenino* en su sociedad, independientemente de la *asignación de sexo* que se les haya dado al nacer. Claramente, tales cualidades no son absolutas, pues aspectos como la personalidad y el temperamento varían de persona a persona como individuos.

Como se comentó en la descripción de la problemática en la subsección *Género y matemáticas*, pese a ser base de un discurso divisorio, dicha concepción binaria ha permitido, al mismo tiempo, *visibilizar* una problemática que ha afectado a las mujeres como *grupo social* (análogamente ha ocurrido con los hombres en ciertos ámbitos) y, por ende, con ciertas especificidades colectivas –no restrictivas– que se han de explicitar y esclarecer con el fin de confrontarlas.

En línea con lo anterior se encuentra el cuestionamiento de Conway, Bourque y Scott (1989): ¿Puede afirmarse que un único rasgo de conducta permite identificar a las mujeres como grupo?

La respuesta no es evidente; sin embargo, durante años, las mujeres, como *grupo*, han sido privadas de derechos a los cuales solo hombres han sido acreedores y las justificaciones suelen redundar en el hecho biológico (análogamente, y no menos importante, los hombres han sufrido las consecuencias complementarias del mismo fenómeno). En este sentido, dados los intereses del presente proyecto, se reconoce que las mujeres constituyen un grupo social *marcado* en el área de la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés), tanto en el ámbito educativo como en el profesional.

De acuerdo con Suzanne Damarin, las personas en *categorías marcadas* (*marked categories*), comparten las siguientes características:

- Se les ridiculiza y calumnia, y las descripciones de sus categorías se usan para acosar, hacer burlas y disciplinar a la sociedad en general.
- Se les percibe como incompetentes para afrontar la vida diaria.
- Se les teme como personas con poder, aunque se les marque como impotentes.
- Si pertenecen a múltiples categorías marcadas, se les ubica en los márgenes de cada comunidad marcada (Damarin, 2000, pp. 72-74, como se citó en Steinthorsdottir y Herzig, 2014, pp. 130-131).

En el primer punto entrarían expresiones como la de “hacer algo como niña” cuando se usa en sentido peyorativo para referirse a que algo se hizo *débilmente*. Asimismo, la autora señala que:

- El marcado explícito o social sirve para definir comunidades marcadas.
- El estudio de una categoría marcada conduce a la construcción y estudio de la clase complementaria de personas.
- La categoría sin marcar es generalmente más grande que la categoría marcada; incluso cuando este no es el caso (numéricamente), la categoría marcada no es reconocida como la mayoría (Damarin, 2000, pp. 72-74, como se citó en Steinthorsdottir y Herzig, 2014, pp. 130-131).

En cuanto al penúltimo punto, García de León (2002) lo lleva a la práctica al plantear que "el gran cambio social de España en el postfranquismo podría ser entendido a través de sus mujeres. Es decir, el género puede vertebrar una de las perspectivas más estimulantes para comprender el cambio social de España" (p. 105). En otras palabras, el género puede emerger entonces como un elemento transversal que permita investigar fenómenos sociales de mayor alcance.

En este sentido, Lamas (2013) comparte la acertada pregunta de Michelle Z. Rosaldo: "¿Qué característica se encuentra presente en todas y cada una de las sociedades para que produzcan y reproduzcan un orden sexual desigual?" (p. 108).

Respecto al caso de las mujeres, Lamas (2013) señala que:

> Cuando una mujer quiere salir de la esfera de lo *natural*, o sea, que no quiere ser madre ni ocuparse de la casa, se le tacha de antinatural. En cambio, para los hombres "lo natural" es rebasar el estado natural: volar, sumergirse en los océanos, etcétera. Que a las hembras se les adjudique mayor cercanía con la naturaleza (supuestamente por su función reproductora) es un hecho *cultural*. (p. 102).

Hasta la década de los sesenta, la entonces concepción *moderna* respaldada por el teórico social Talcott Parsons, sostenía que la asignación de los "papeles de género" había sido finalmente *racionalizada* (en términos de su función económica y sexual) por su fundamento biológico (Conway, Bourque y Scott, 1987, p. XXI); es decir, que por el hecho de ser capaz de concebir hijos, a la mujer correspondía criarlos. Este cuidado luego se extendía a que la mujer debía hacerse cargo de la mayoría de las labores en el hogar y, por tanto, desarrollarse en lo profesional era considerado innecesario, si no es que irresponsable.

Cuando finalmente la mujer se incorporó a la vida académica y al trabajo remunerado fuera de casa, el recibimiento no fue pleno ni inmediato. Las transformaciones y evoluciones sociales resultan de eventos drásticos profundos y, en ocasiones, suceden en periodos cortos de tiempo; sin embargo, las concepciones culturales suelen transformarse lentamente y su evolución halla constante resistencia. En el caso de la *lucha de género*, las mismas mujeres pueden ser parte de la oposición al retomar y reforzar –de manera consciente o inconsciente– las concepciones culturales con las que han sido criadas y que coartan su libertad. En este tipo de concepciones entran los *estereotipos*, los cuales son ideas que se asumen como cualidades intrínsecas de cierto grupo de personas.

Esta complejidad hace difícil aislar lo biológicamente determinado de lo que ha sido socialmente adquirido en cuanto a capacidades cognitivas, pues aunque se quiera realizar un estudio *controlado* en algún laboratorio, "no hay cuerpo que no haya sido marcado por la cultura" (Lamas, 2013, p. 160).

A pesar de ello, desde la incorporación de la mujer en ámbitos más allá del hogar y la familia, numerosas investigaciones han intentado explorar y explicar de qué manera aprenden y cómo se desempeñan hombres y mujeres en determinadas áreas. Dichas investigaciones presentan el inconveniente de que algunas características que tal vez son adquiridas hayan sido tomadas como justificaciones biológicas de por qué el hombre es mejor para ciertas áreas y la mujer para otras.

Sea en el contexto de la física, de las matemáticas, de la ingeniería o de la propia tecnología, las mujeres se encuentran escasamente representadas tanto en esferas académicas como profesionales (como ejemplo del caso de la educación en el Nivel Superior están los datos presentados en la TABLA 4-2).

TABLA 4-2 Distribución porcentual de la matrícula de licenciatura en México, por sexo y disciplina, año escolar 2012-2013 (basada en la Tabla 72 de Zubieta y Herzig, 2016, p. 161).

Disciplina	Hombres	Mujeres
Ciencias exactas y naturales	58.2	41.8
Ingeniería y tecnología	73.2	26.8

De acuerdo con la literatura consultada, incluso luego de haber superado el primer obstáculo del *ingreso* al nivel superior en carreras del área STEM, un segundo obstáculo se presenta en la trayectoria de las mujeres: la *sensación de pertenencia*.

Esta sensación, que de pronto puede parecer un aspecto actitudinal estrictamente personal y ajeno a la comunidad, constituye un elemento de identidad significativo para las y los estudiantes en una carrera del Nivel Superior en el cual confluyen factores sociales de distintos órdenes. Familia, amistades, figuras públicas, personajes de la ciencia, entre otros, *todo* puede influir en esta sensación y tener repercusiones irremediables en el futuro profesional de una persona (Dasgupta y Stout, 2014; Francis, Archer, Moote, DeWitt, MacLeod y Yeomans, 2017).

En el caso de las mujeres, tal sensación suele combinarse con bajos niveles de *confianza* y altos niveles de *ansiedad*, a la par de una siempre presente *amenaza del estereotipo* (Good, Aronson y Harder, 2008; Steele, 1997), la cual refuerza su cualidad de grupo *marcado*.

Spelke (2005) hace una revisión en esta línea dada la prevalencia de ciertas concepciones acerca de diferencias cognitivas en hombres y mujeres en las cuales distintos sectores de la sociedad se basaban para limitar el acceso de las mujeres a esferas asumidas *masculinas*.

Esta investigadora de Harvard comenta que a pesar de que ciertas mediciones sobre el comportamiento motor, la sexualidad y la agresión muestran mayores y más consistentes diferencias entre sexos, en pocas diferencias cognitivas ocurre algo similar (Spelke, 2005, p. 953). En cuanto a ellas, la autora muestra los resultados de diversas investigaciones que sugieren que la diferencia en elección de estrategias es lo que subyace en las diferencias por sexo en el desempeño cognitivo maduro (p. 954).

Así, llevando a cabo un estudio más amplio, tomando en cuenta otras disciplinas, los análisis se pueden robustecer. Por ejemplo, la investigación de Master y Meltzoff (2016) respalda el hecho de que la psicología social y cognitiva ofrecen la oportunidad de conducir de manera controlada investigaciones para entender mejor aspectos como la *motivación* y *aprovechamiento* de las mujeres en el área STEM, lo cual hace referencia a lo fructífero y necesario que es el que se creen puentes entre la psicología y la educación con el fin de desvanecer los estereotipos culturales para obstaculizan la equidad.

Desde la matemática educativa este puente podría generarse con los recursos cognitivos y pedagógicos de los que se nutre y, sin duda, el enfoque necesario requiere de tomar también en cuenta los aspectos socioculturales. Naturalmente, dependiendo de la disciplina desde la cual se considere la *perspectiva de género*, el estudio analizará con mayor profundidad determinadas dimensiones del fenómeno propias del campo en que trabaja; pero, como se planteó anteriormente, ello no debe ser razón para dejar fuera lo que la investigación en materia de género ya ha evidenciado en otras disciplinas.

Lo anterior amplía el panorama de lo que puede tomarse en cuenta y por ello, a continuación, se presentan algunos resultados de diversas investigaciones que delinean algunas maneras de no dejar fuera el aspecto de *género* aun cuando no se trate del objeto central de estudio en un proyecto de investigación.

Hasta la fecha, a pesar de que algunos estudios han hallado evidencia de diferencias biológicas, existe aún un gran debate sobre hasta qué punto lo biológico explica las diferencias en el desempeño de hombres y mujeres en matemáticas (Good, Aronson, & Harder, 2008, pp. 17-18). Tal como se planteó líneas arriba, al ser la conformación de un ser humano tan compleja y en estrecha relación con el entorno, resulta difícil (si no imposible) ser objetivamente concluyente.

Como ya se mencionó, algunos investigadores señalan a la sensación de pertenencia como una de las razones de que las mujeres se encuentren escasamente representadas en el área STEM. Dasgupta y Stout (2014) hacen una síntesis de cómo se lleva a cabo este proceso:

> Una de las razones principales por las cuales una mujer se siente fuera de lugar en STEM es por el extendido estereotipo acerca de que los campos STEM, tales como las ciencias físicas, la tecnología, las matemáticas y la ingeniería son "cosa de chicos" (e.g. Nosek, Banaji y Greenwald, 2002). Las mujeres que creen en este estereotipo tienden a tener un desempeño menor en campos de matemática intensiva (Miyake et al., 2010) y poseen una sensación menor de pertenencia (Stout, Ito, Finkelstein y Pollock, 2013). El bajo nivel de pertenencia conduce a un mayor desgaste. Por lo tanto, la conciencia del estereotipo STEM–es–para–hombres puede convertirse en una profecía autocumplida [que una vez cumplida, sea en sí misma la causa de que se hiciera realidad]. (p. 24, traducción personal).

Tal como se reporta en el meta análisis de Lindberg, Hyde, Petersen y Linn (2010), se han evidenciado en reiteradas ocasiones las actitudes implícitas de estudiantes universitarios que asocian a las matemáticas con los hombres, o con *lo masculino* en general (p. 1124). Dichas asociaciones conllevan a la generación de *estereotipos* acerca de las capacidades de hombres y mujeres, y sus efectos han sido ampliamente estudiados (Good et al., 2008; Steele, 1997). Lamas (2013) comenta al respecto que:

> La dicotomía masculino–femenina, con sus variantes culturales establece estereotipos [...] las más de las veces rígidos, que condicionan los papeles y limitan las potencialidades humanas de las personas al estimular o reprimir los comportamientos en función de su adecuación al género. (p. 114).

El estudio de Good et al. (2008) refleja estas limitaciones que puede provocar el estereotipo. Ellos llevaron a cabo una investigación situándola en un salón de clases real, en donde hallaron que incluso entre las mujeres más altamente calificadas y persistentes en cursos de gran dificultad de matemáticas en el Nivel Superior, la amenaza del estereotipo merma su desempeño durante los exámenes, y más aún, encontraron que al minimizarse estas fuerzas sociales disruptivas (a través de un texto que atenuara la amenaza del estereotipo) no sólo obtuvieron ellas los mismos resultados que sus pares masculinos, sino que incluso les superaron en exámenes de alta dificultad en matemáticas.

Retomando el tema de las concepciones acerca de las capacidades cognitivas, Spelke (2005) considera tres afirmaciones populares acerca de las diferencias cognitivas que suelen atribuirse al sexo para justificar la diferencia en representación de hombres y mujeres en las carreras de alto nivel en matemáticas y ciencia (TABLA 4-3).

TABLA 4-3 Concepciones comunes acerca de diferencias cognitivas entre hombres y mujeres (izquierda) con algunas justificaciones usuales (centro) y los contraargumentos que sustentan una equivalencia en capacidades (derecha). Basado en la revisión de Spelke (2005).

Concepciones	**Justificaciones**	**Contraargumentos**
a) Los hombres están más enfocados en objetos (mujeres a personas) desde el inicio de su vida y por lo tanto están predispuestos a aprender mejor acerca de los sistemas mecánicos.	Los niños pequeños observan durante mayor tiempo los objetos y las niñas a personas.	No fue replicado en ninguna otra investigación y una literatura más antigua y robusta sugiere que tanto niños como niñas se interesan igualmente por objetos y personas. Además, no discute sobre las posibles razones de predilección entre objeto y persona. Finalmente, no discute sobre los controles críticos para controlar posibles sesgos.
b) Los hombres tienen un perfil con habilidades espaciales y numéricas que les genera mayor aptitud para las matemáticas.	Los hombres tienen una predisposición biológica a desarrollar uno o más de los sistemas cognitivos clave para el pensamiento matemático en la edad adulta.	Los niños y las niñas muestran iguales habilidades primarias en matemáticas.
c) Los hombres son más variables en sus habilidades cognitivas, es decir, más hombres muestran un talento matemático extremo.	Existe una mayor cantidad de hombres en relación con las mujeres al extremo superior de los puntajes en pruebas estandarizadas.	Al seguir la trayectoria de hombres y mujeres que habían pasado la prueba en años anteriores (donde se había suscitado el fenómeno) se observó que ambos aprendieron igualmente y obtuvieron el mismo éxito en matemáticas avanzadas.

Su revisión se enfocó en reportes de investigación basados en estudios del comportamiento y las neuroimágenes en la cognición humana, los cuales demuestran que el talento de la especie humana para el pensamiento matemático y científico posee como importante base genética un conjunto de sistemas centrales para representar a los objetos, el espacio y el número, los cuales están *igualmente* disponibles para hombres y para mujeres.

Spelke (2005) discute también un poco acerca de la diferencia en otros países, argumentando que es más probable que “el desempeño de hombres y mujeres en pruebas estandarizadas refleje una compleja mezcla de factores sociales, culturales y biológicos” (p. 956, traducción personal). Esta diferencia también puede deberse a que las pruebas estandarizadas, pese a que aparentemente ponen a prueba las mismas habilidades y las evalúan de manera idéntica en distintos países, podrían en realidad estar midiendo con instrumentos inadecuados e incompatibles con el contexto de cada país, basándose únicamente en el entorno de donde surgieron.

Algo similar podría ocurrir con las estrategias de hombres y mujeres. La investigadora sugiere que queda abierta también la posibilidad de que o más hombres que mujeres poseen talento extremo en matemáticas, o bien, las pruebas estandarizadas sobreestiman las habilidades de hombres talentosos (Spelke, 2005, p. 955).

De la discusión anterior se puede concluir que, pese a la existencia de estrategias distintas, las investigaciones no aseguran que ello pueda convertirse en una deficiencia para las mujeres, sino al contrario, la inclusión de las mujeres puede muy probablemente resultar en una contribución rica en diversidad para resolver problemas en el área STEM.

De hecho, se ha señalado que la *diversidad* es parte integral de la innovación, en cuanto contribuye a la inteligencia colectiva de un grupo. Tan es así que el aumento de la participación de la mujer en el área STEM para impulsar la innovación y conseguir, eventualmente, una excelencia en el campo de la investigación se establece como una meta de la UNESCO (Allagnat, Berghmans, Falk–Krzesinski, Hanafi, Herbert, Huggett y Tobin, 2017).

En cuanto al desempeño que ambos puedan tener, el meta–análisis de Lindberg et al. (2010) concluye que de acuerdo con los 242 artículos publicados entre 1990 y 2007 (los cuales representan 1,286,350 personas), los hallazgos respaldan la visión de que hombres y mujeres se desempeñan de manera similar en matemáticas, sin diferencias significativas.

Si esta conclusión sobre el desempeño se toma como cierta y aplicable en nuestro país, entonces cabe preguntarse por qué persiste el problema de ingreso y permanencia en las carreras STEM en México. Una razón simple e inmediata podría sustentarse en la frecuentemente temprana edad a la cual se embarazan las jóvenes mexicanas; ello, aunado al apoyo limitado que reciben, conlleva claramente a una deserción. Sin embargo, no es el caso de todas las mujeres que abandonan sus estudios.

Otra razón de la que se habla continuamente es el enorme impacto que tiene el trato que se haya recibido durante la niñez y la forma en la cual se haya lidiado con ello al crecer. Es claro que, desde los niveles más básicos de enseñanza, y dentro de la misma familia, es necesario un trato que potencie las habilidades de hombres y mujeres para desempeñar actividades (juegos en un principio) que refuercen acciones y actitudes que limiten la diferenciación de aptitudes que más tarde puede repercutir en su trayectoria escolar durante la adolescencia.

Una de las propuestas más comunes para mejorar la retención y el progreso de las mujeres a través de los estudios superiores en el campo STEM, es el que se incremente el sentimiento de pertenencia mediante la exposición a mujeres pares y expertas, por ejemplo, asistiendo a reuniones en eventos científicos para mujeres o incluso con mentoras durante la universidad (Dasgupta y Stout, 2014). Aunque Master y Meltzoff (2016) amplían las posibilidades al señalar que no solo se pueden presentar mujeres como modelo, sino también otros individuos con quienes las alumnas puedan sentirse identificadas de algún modo.

La sensación de no encajar en las clases del área STEM al ser superadas en número por los pares masculinos puede provocar que las estudiantes abandonen prematuramente esos cursos. A partir los resultados que muestran que hacer que las mujeres trabajen en equipos donde la composición es *cuatro a una* las inhibe a participar (pues les hace sentir más inseguras o preocupadas), Dasgupta y Stout (2014) proponen que para la generación de un clima inclusivo en las áreas STEM se promueva el trabajo en colaboración con expertas o pares de la misma área y el apoyo a iniciativas para permitir a las alumnas que lo requieran un balance entre la familia y los estudios.

Otra forma de hallar indicios sobre cómo favorecer el sentimiento de pertenencia es analizando a quienes han pasado por ello y lo han superado. Ese fue el caso de Talley y Martinez Ortiz (2017), quienes consideraron en su investigación a 47 mujeres exitosas en camino a concluir su carrera en el área STEM. Entre sus resultados, las investigadoras encontraron que dichas mujeres manifestaron tener una mayor capacidad para desempeñarse bien que para obtener una calificación promedio excelente. En consecuencia, las autoras sugieren que la distinción de ambos conceptos (desempeño y calificación) puede ser en parte la razón de que estas estudiantes triunfen en comparación con otras mujeres que desertan (p. 22).

Por otro lado, Master y Meltzoff (2016) describen el papel de los *estereotipos* en el interés y la permanencia en el área STEM, así como sus efectos en el desempeño académico. Además, muestran intervenciones prácticas innovadoras para equilibrar la motivación y el compromiso en STEM de hombres y mujeres. Identificaron dos estereotipos en particular: uno *cultural* (que las matemáticas son para los hombres) y otro *de habilidad* (que a los hombres se les facilita resolver problemas del campo STEM más que a las mujeres). Asimismo, señalan las cuatro *barreras sociales* para las mujeres en la ciencia más comúnmente reportadas:

- Actitudes de personas cercanas y no cercanas acerca de qué es más apropiado para una mujer.
- Falta de visibilidad de representantes y modelos a seguir.
- Una sistemática baja autoestima acerca de qué tan bien podrán desempeñarse las mujeres en la ciencia.
- Discriminación en tales campos que impidan que las mujeres calificadas obtengan las mismas oportunidades.

En un experimento que llevaron a cabo se presentó a adolescentes (de entre 14 y 17 años) dos fotos de salones: en uno se presentaban diversos objetos estereotípicos del área, mientras el otro lucía como un salón normal (es importante señalar que estos investigadores proponen establecer puentes entre la educación y la psicología social). Lo que hallaron fue que las mujeres se mostraron 3 veces más interesadas en tomar el curso en el segundo salón, mientras que los hombres los eligieron prácticamente de manera equitativa. A raíz de ello, Master y Meltzoff (2016) dedujeron que los objetos físicos sirvieron como guías para determinar quién pertenecía a qué ambiente determinado, además de que señalaban la cultura asociada con tal ambiente.

Más aún, en torno a la concepción general que se tiene del área STEM como de “ciencias duras”, los investigadores sugieren hacer énfasis en que las habilidades requeridas en el área STEM son como un músculo que ha de fortalecerse, no es como "lo tienes o no lo tienes". En ello concuerdan Good, Aronson e Inzlicht (2003), pues encontraron que el exponer a mujeres estudiantes a la idea de que la inteligencia es una capacidad maleable generó en su desempeño un efecto positivo, incrementando sus calificaciones en una prueba estandarizada de matemáticas. Asimismo, Farfán y Simón (2016) señalan que concebir a la inteligencia como innata y estática impide la democratización del aprendizaje al excluir a ciertos grupos sociales de la posibilidad de desarrollar al máximo su potencial (p. 62).

Además Master y Meltzoff (2016) señalan la importancia de remarcar que las carreras STEM involucran trabajo con y apoyando a otros (p. 227). De acuerdo con Farfán y Simón (2016), las mujeres formaron –y siguen formado– parte del desarrollo de conocimiento en los espacios que les han sido asignados debido a los roles de género (p. 43). Por ende, lo anterior puede ser el resultado de la forma en la cual la sociedad ha caracterizado la figura *femenina*. Como ejemplo está el resultado del análisis de biografías conducido por las mismas investigadoras el cual sugiere que las madres, debido al poder simbólico que aún conservan, transmiten tradicionales roles de género a sus hijas, en especial aquellos que se refieren al cuidado de los otros y el cual se relaciona con el papel que han jugado en sus familias, a pesar de que hayan tenido la oportunidad de desempeñarse profesionalmente o de ser independientes económicamente (p. 179).

En el caso de *la matemática*, a lo largo de la historia se ha constituido socialmente como una herramienta de segregación intelectual, por ende, quienes destaquen en ella obtendrán reconocimiento social, pero también sufrirán las consecuencias que este conlleva dada la presión social depositada para mantener o mostrar su estatus, con implicaciones diferenciales para hombres y mujeres (Goetz, Kleine, Reinhard y Preckel, 2008, como se citó en Farfán y Simón, 2016, pp. 31-32). Lo cual:

> En la mayoría de los casos, afecta positivamente a los primeros tanto en su auto–percepción como en su imagen social y en las segundas de manera negativa en la mayoría de los casos en los mismos aspectos (Lee y Sriraman, 2010). (Farfán y Simón, 2016, p. 32).

De ahí que, en línea con el *ideal* de la matemática educativa de *democratizar* el aprendizaje, se destaque la atención a la población de estudio. Particularmente, desde la TSME, los acercamientos parten de reconocer cómo aquello que caracteriza a la población permea la forma en que construye conocimiento (Farfán y Simón, 2016, p. 36).

En este sentido, como se comentó previamente, el problema no se restringe a las interacciones entre estudiantes y profesorado, pues existe incluso en la forma en que las y los estudiantes interactúan con el propio saber matemático.

> Desde cualquier otra perspectiva podría pensarse que la matemática, en tanto que está establecida y es universal, no juega el papel de variable en este tipo de estudios [con perspectiva de género]. (Farfán y Simón, 2016, p. 62).

Desde la perspectiva socioepistemológica, Farfán y Simón (2016) describen a las matemáticas como un paradigma *androcéntrico* de conocimiento que se fue consolidando a lo largo del tiempo como producto de diversos *golpes* al papel de la mujer en su construcción. Pese a haber estado siempre presentes en el desarrollo de las matemáticas, un primer golpe fue la imposibilidad de ingresar a las universidades. Si bien esto creó un obstáculo físico, no impidió que muchas mujeres siguieran trabajando en ello (p. 44).

Un segundo golpe lo constituyó la matematización de la ciencia y el establecimiento de la matemática como un campo superior reservado a unos cuantos. Mientras la ciencia y la tecnología se desarrollaron como una necesidad de resolver problemas relacionados a la vida cotidiana, la matemática se separó del resto de las ciencias para desarrollarse en sí misma (Farfán y Simón, 2016, p. 44). A ello, las autoras agregan que:

> De este modo, la razón, el saber el intelecto, la excelencia, lo legítimo, lo medible y perfecto van apareciendo como sinónimos por estar exentos de emociones, de afectos, de intuición, de intangibilidad, valores considerados puramente femeninos (Fernández, 2010). [...] Este modo de pensamiento sobre las matemáticas, de origen puramente androcéntrico, así como su aprendizaje y valor social, regulan las interacciones al interior de las aulas: las relaciones familiares y escolares, las intervenciones pedagógicas y didácticas, el logro y desempeño escolar así como las motivaciones e intereses desarrollados de las jóvenes mujeres. (p. 44).

En su estudio, Farfán y Simón (2016) analizan las formas en las que las y los jóvenes participantes construyen y usan el conocimiento matemático desde una perspectiva de género. Para ello, consideran “las herramientas y argumentos que ponen en juego en la construcción de consensos o en la toma de decisión al enfrentar una situación que precise del uso del conocimiento matemático” (p. 83).

En este sentido, para la socioepistemología (visión de la cual parten las investigadoras), “la cognición es entendida como la capacidad de ‘hacer emerger’ significados a partir de realimentaciones sucesivas entre actores y un medio ambiente próximo, tanto físico como cultural, a partir de una interacción ‘dialéctica’ entre protagonistas” (Cantoral, 2013b, p. 149). Es decir, se asume que dicha *dialéctica* se encuentra mediada por el entorno sociocultural de quienes participan.

En el análisis conducido por Farfán y Simón (2016) se consideraron los resultados de una *prueba de pensamiento matemático* que se planteó como una propuesta “que pudiese dar un perfil del uso del conocimiento matemático" (p. 100). Con base en la perspectiva de género adoptada, las autoras encontraron que en el caso de los jóvenes, sus respuestas se orientaron a elegir, en una mayor cantidad de ocasiones, una respuesta marcadamente matemática, mientras que las jóvenes privilegiaron las respuestas que pudieran ofrecer una solución adecuada pero tomando en cuenta una mayor cantidad de variables que influyeran en el fenómeno (p. 103).

Como se mencionó en la sección 4.1, el *discurso matemático escolar*, en cuanto hegemónico y utilitario, *excluye* a una gran cantidad de alumnas y alumnos de la construcción social del conocimiento matemático (Soto y Cantoral, 2014). En el caso de las mujeres, de acuerdo con Farfán y Simón (2016), esta exclusión se ve reforzada a través de concepciones sobre quiénes poseen mayor aptitud para aprender matemáticas (p. 64) y, más aún, de acuerdo con las observaciones descritas en el párrafo anterior, al no considerar el *carácter funcional del saber*, la exclusión del discurso se intensifica en ellas, pues sus respuestas, inferencias, explicaciones y argumentaciones tienden a tomar en cuenta una gran cantidad de variables relacionadas con el fenómeno específico (p. 181). Por ende:

> La forma en que el conocimiento matemático es tratado escolarmente –estático, descontextualizado, en el cual se imponen significados y procedimientos asociados a objetos matemáticos (Soto, 2014)– no solamente las excluye de la construcción de conocimiento matemático sino que además esta perspectiva no es suficiente para despertar su interés en matemáticas o para cumplir con sus expectativas. (pp. 181-182).

Por otra parte, las autoras destacan la necesidad de incorporar al análisis de datos aspectos socioculturales sobre las y los participantes con el fin de reconocer aquellos elementos que pudieran estar frenando el desarrollo de su potencial, al no ser permitido o promovido para ser o hacer en un entorno dividido en roles de género (Farfán y Simón, 2016, p. 125). En particular, las investigadoras hallaron que las jóvenes talento que participaron en su estudio se habían desarrollado en un entorno más diverso en cuanto a roles de género (p. 179). Asimismo, señalan que si bien estas jóvenes destacaban en la matemática escolar, sus capacidades no se habían desarrollado o expresado a través de algoritmos o en la aplicación explícita o repetitiva de conceptos, pues había sido a través de experiencias con el conocimiento matemático funcional que ellas se habían relacionado con la matemática a lo largo de su vida (p. 181).

A partir de lo anterior, las investigadoras concluyeron que la forma en la que las jóvenes enfrentan un reto o una situación problemática no tiene una respuesta única, contrario a lo exigido en las pruebas estandarizadas (Farfán y Simón, 2016, p. 181). Además, respecto a cómo se constituyeron ellas como jóvenes talentosas en matemáticas, la información recabada permitió identificar "que su relación al conocimiento matemático se ha establecido con base en su funcionalidad y por lo tanto también está en la base de la relación que establecen con otros individuos" (p. 182), de tal forma que "su auto–percepción de talento en matemáticas no está en función del dominio de conceptos sino de la funcionalidad de éstos" (p. 182).

Así, se vislumbra que un paso primario para la confrontación de la problemática de género consiste en que las alumnas se conciban a sí mismas como integrantes activas en la *construcción social del conocimiento matemático*. En dicho proceso, dada la discusión presentada hasta este punto, el *carácter funcional* del saber se habrá de considerar como un elemento transversal para la elaboración de diseños. De ahí que una propuesta *interdisciplinaria* que contemple la articulación de las matemáticas con otras disciplinas resulta pertinente desde la *perspectiva de género* asumida, pues se busca propiciar la constitución de un ambiente de aprendizaje que de sentido del *uso* y *funcionalidad* del conocimiento matemático para las y los estudiantes.

Por otro lado, se reconoce la necesidad de un estudio que retome aspectos de la psicología social y cognitiva (como proponen Master y Meltzoff, 2016), y probablemente otras disciplinas, para poder atender aspectos emocionales y socioculturales con mayor profundidad. Por ende, las observaciones en torno al género que surjan durante el análisis de datos respecto a estos aspectos se expresarán respetando las limitaciones dado el alcance del presente estudio.

Como comentan Dasgupta y Stout (2014), no existe una causa única que cree el problema de pérdida de mujeres en el campo STEM, así que por tanto tampoco hay un remedio mágico único que resuelva todo el problema de una vez (p. 247).

4.4. Integración tecnológica en la Matemática Educativa y lo dinámico

Como se destacó previamente en la **Revisión de literatura** (capítulo 2), diferentes investigaciones desde enfoques diversos señalan la necesidad de integrar la tecnología al aprendizaje en matemáticas, en particular, al tratar el tema de las ecuaciones diferenciales con relación a la modelación de fenómenos físicos.

A partir de su análisis, se comenzó a apreciar al *software de matemática dinámica* como un ambiente que hace posible no solo la representación de entidades matemáticas de manera gráfica, numérica y algebraica, sino como un medio que permite además *interactuar* con dichas representaciones y manipularlas para obtener cierta *retroalimentación*. En este sentido, se identificó que dicha retroalimentación no se reduce a un *valor pragmático* en la eficiencia de producción de representaciones, sino que posee también un *valor epistémico* ligado a la propia epistemología del conocimiento matemático en cuestión. Esta caracterización de *valores* de Artigue (2002) conforma un elemento clave en el análisis conducido alrededor de la *naturaleza dinámica* de la variación en las ecuaciones diferenciales.

En especial, las *representaciones dinámicas* son vistas incluso como un camino hacia la *democratización* en el acceso al aprendizaje de las matemáticas; Roschelle y Hegedus (2013) argumentan al respecto que las representaciones dinámicas constituyen una oportunidad para crear notaciones más accesibles hacia las *matemáticas del cambio y la variación* (p. 7).

En línea con lo anterior, la naturaleza dinámica de la variación se fue definiendo en el presente estudio con base en los aspectos epistemológicos identificados en capítulos anteriores. Si bien el cálculo *fluxional* y las ecuaciones diferenciales surgieron en estrecha relación con el análisis de situaciones de movimiento (generalmente con comprobaciones centradas en la repetición experimental), tras la *institucionalización* de estos conocimientos, la parte experimental se omitió en su tratamiento.

En términos *didácticos*, como se discutió en la subsección 2.3, la omisión de las prácticas asociadas a dicha fenomenología se debe en parte a las limitaciones en tiempo y recursos con que se cuenta en el aula tradicional para poder abordar los fenómenos de forma física, aunado a los *contratiempos* que de por sí pueden presentarse durante la experimentación (variables extra, averíos en los sistemas, imprecisiones en la medida, entre otros).

Si bien tales contratiempos resultan ser parte *natural* en la formación de una carrera fisicomatemática, pues a ello se enfrentarán en su vida profesional quienes egresen de ella, se retoma lo señalado por Roth (2014) respecto a la atención sobre dónde poner énfasis en las iniciativas interdisciplinarias. Asumiendo que se parte desde la matemática educativa y que el problema de investigación (capítulo 3) radica en analizar la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria, la atención se inclina a su proceso de significación contextualizada (considerando nociones que la física ya tiene bien caracterizadas y que son cercanas a la comunidad atendida) y, por ende, se busca reducir tanto como sea posible la emergencia de dichos contratiempos, pues queda fuera de los objetivos el discutir el por qué el sistema no funciona apropiadamente. Es decir, no se niega que esto sea importante para la práctica profesional, solo se acota que ello no será abordado en el diseño.

Lo que se plantea es partir de la modelación de un fenómeno físico de movimiento. Como se mencionó anteriormente, dicha *modelación* puede abordarse desde la experimentación ya sea de forma *directa*, *discursiva* o *virtual*, o mediante una combinación de ellas (Arrieta y Díaz, 2016). En particular, en el diseño se recurre a la experimentación *virtual* (la cual comprende la *simulación* en ambientes digitales a través de animaciones interactivas) pues, como sugieren Rubio, Prieto y Ortiz (2016), la simulación se postula como un elemento que permite fusionar la modelación con las tecnologías digitales para vincular hechos e ideas asociadas a un fenómeno físico.

Sin duda, al tratarse de una simulación en un ambiente digital, surge la interrogante respecto a la *realidad* que se estaría abordando, pues, como una de las connotaciones de "virtualidad" sugiere, se puede pensar que una experimentación *virtual* es "potencialmente real", pero sin llegar a serlo. No obstante, como señalan Sarama y Clements (2016), en este tipo de ambientes, se tiene un soporte *concreto* significativo para el alumnado, que resulta ser incluso más limpio, flexible y extensible que su contraparte física (p. 73). Por ende, en general, se prefiere el término "digital" al "virtual" para evitar ambigüedades en su concepción.

Por otro lado, se postula que la propia naturaleza dinámica de la variación en la ecuación diferencial se encuentra intrínsecamente relacionada con las representaciones dinámicas que permite un software de matemática dinámica, como es el caso del software libre GeoGebra.

Al respecto, Parada, Conde y Fiallo (2016) señalan que, en este ambiente, “todas estas variaciones se pueden representar *en movimiento*” (p. 1035), con lo cual se potencia la visualización de *variantes* e *invariantes* y, por ende, se “involucra al concepto de *función* como la generalización de la *interdependencia* entre magnitudes variables” (pp. 1035-1036).

En concordancia con ello, se plantea que este instrumento puede permitir el acceso a la cualidad dinámica de la variación inherente al objeto matemático (ecuación diferencial ordinaria) mediante *estrategias dinámicas* en cuyo proceso se reconoce el *valor epistémico* (en cuanto tales acciones instrumentadas promueven el planteamiento de preguntas respecto al conocimiento matemático involucrado, Artigue, 2002) asociado a su naturaleza.

Es decir, lo que en el sistema gráfico se puede representar mediante un eje *temporal* y uno *espacial* en el análisis del movimiento, en un ambiente dinámico se representa por el propio transcurrir del tiempo y el desplazamiento del objeto; a su vez, la vista gráfica asociada en la interfaz puede mostrar la representación correspondiente con las variaciones respectivas. De este modo, en los ambientes dinámicos, la representación se encuentra enlazada a establecer una infraestructura con la cual el alumnado pueda trabajar de forma *significativa*, por ejemplo, al cambiar la pendiente de una gráfica mediante la acción de arrastre y que la tabla y el movimiento se actualicen simultáneamente (Roschelle y Hegedus, 2013, p. 9).

Así, se postula que el ambiente digital de matemática dinámica se conciba como un medio en el cual conviven los dominios *real* y *matemático* (en alusión a los términos que emplea Rodríguez y Quiroz, 2016). Es decir, que *modelo* y *modelado* (en el sentido de Arrieta y Díaz, 2015) se presentan en un mismo ambiente. De hecho, en sintonía con estos últimos autores, se concuerda en que no hay una separación tajante entre “las matemáticas” y “el mundo real”.

Sin embargo, en la universidad de la que provenían las y los participantes de la fase empírica del estudio parece prevalecer una visión separada de ambos. En particular, en un reporte elaborado por la propia universidad se describe que:

> Los contenidos se organizan en unidades de aprendizaje del plan de estudios y corresponden exclusivamente a las ciencias fundamentales, aquéllas que proporcionan los fundamentos de un determinado campo del saber científico y son indispensables para, *posteriormente*, comprender un campo específico de la realidad. (El subrayado se agregó).

Al concebir a las "ciencias fundamentales" como un conjunto de fundamentos necesarios para una *futura* comprensión de *la realidad* parece ser que se asumen como ajenos a ella.

En el caso de la ecuación diferencial ordinaria con *condiciones iniciales*, un punto importante a destacar del análisis epistemológico y didáctico que realizó Hernández (1995), reportado en la sección 2.3, estriba en el uso de la tecnología para su estudio. El investigador menciona, por ejemplo, que las representaciones en las cuales es posible modificar los valores y parámetros, así como hacer *zoom* de las gráficas, permiten trazar campos de pendientes y bosquejar las curvas solución.

Si lo anterior se retoma para el caso de las representaciones dinámicas, un campo de direcciones correspondiente a la familia de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria podría explorarse mediante la variación de parámetros específicos que correspondan a las condiciones iniciales de la ecuación.

Por ejemplo, si la familia de soluciones es un conjunto de parábolas cóncavas hacia abajo con el mismo lado recto (como muestra el campo de direcciones de la ILUSTRACIÓN 4-7), de tal manera que una *solución particular* se determine a partir de un punto específico por el cual pase una de las curvas, una *representación dinámica* podría corresponder a una parábola susceptible de ser desplazada verticalmente, ya sea mediante un deslizador que aumente o disminuya la ordenada de su vértice, o bien, haciendo posible su *arrastre* (matemáticamente, una transformación rígida de *translación*) a lo largo del eje y.

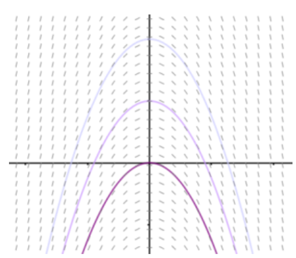


ILUSTRACIÓN 4-7 Campo de direcciones y soluciones particulares de una ecuación diferencial ordinaria.

Respecto al *arrastre*, Rubio–Pizzorno (2018) describe su funcionamiento en el software de matemática dinámica a partir del trabajo de Hölzl (2001). Este último, tras reconocer que las investigaciones realizadas hasta ese momento a menudo utilizaban el arrastre únicamente como *herramienta de verificación*, tuvo por objetivo evidenciar otras funcionalidades según las *variables didácticas* puestas en juego en la situación de aprendizaje.

De esta manera concluye que en un aspecto epistemológico, el arrastre tiene una definición como herramienta y tiene distintas formas de uso (Hölzl, 2001, p. 83):

- **Definición**: es una herramienta para encontrar diferentes representaciones de una y la misma figura en transición continua.
- **Modo de uso**: debido a que el arrastre actúa sobre la representación concreta, cuyo efecto es determinado por la figura conceptual, se reconoce que el arrastre posee una función mediadora, que puede ser usada, por lo menos, de dos modos principales:

1. **Arrastre como modo de prueba**: se utiliza para comprobar si una construcción tiene las propiedades que declara.

2. **Arrastre como modo de búsqueda**: se utiliza para reconocer nuevas propiedades.

Por lo tanto, esta investigación identifica que el arrastre se puede utilizar para probar o para buscar, al resolver una tarea geométrica, y menciona como prospectiva, la posibilidad de investigar situaciones donde los estudiantes se enfoquen en reconocer invariantes más que en detalles específicos en una situación geométrica. (Rubio–Pizzorno, 2018, p. 96).

En particular, la herramienta de arrastre surge a partir del análisis del trabajo geométrico en software de matemática dinámica, en cuanto prueba para verificar la consistencia de las construcciones geométricas realizadas; sin embargo, retomando lo que el autor marca con una prospectiva, el pasar el foco al reconocimiento de invariantes abre la posibilidad a su exploración para las matemáticas del cambio y la variación, como se plantea en el presente estudio.

Ahora bien, si se aborda un fenómeno físico y se propone un experimento para simularlo, independientemente de si es de manera *presencial*, *virtual* o *discursiva* (como categorizan Arrieta y Díaz, 2016, p. 27), existirán elementos que queden fuera de consideración. Por lo tanto, al estudiar el fenómeno, no se ahonda en toda su complejidad pues eso en sí es prácticamente inasequible, sino que se limita a ciertas condiciones que puedan ser abordadas con los instrumentos con que se cuente, en lo cual entran a su vez consideraciones respecto a la exactitud y precisión de los resultados, así como las decisiones didácticas que se mencionaron respecto al énfasis en iniciativas interdisciplinarias.

Lo que se propone considerar es que, en principio, una simulación en un ambiente digital trae consigo fuertemente –aunque de manera *implícita*– el hecho de que se trata de una situación que está restringida a ciertas condiciones (didácticamente compatibles a su vez con las variables de control).

Es decir, no se esperará que los sistemas de medición fallen, o que el aire cambie de dirección y afecte la trayectoria del objeto, a no ser que el simulador se haya diseñado para provocar este tipo de fenómenos, en cuyo caso se haría explícito para quien lo vaya a usar. Por lo tanto, se puede focalizar con mayor énfasis la atención en las matemáticas que intervienen en el proceso de modelación, y dejar fuera, dados los objetivos en esta etapa, las complicaciones técnicas que podrían emanar de una manipulación *presencial* del fenómeno simulado.

En general, respecto a las *matemáticas del cambio y la variación*, Kaput y Roschelle (2013) establecen tres grandes preguntas para la actualidad:

1. ¿El movimiento de las matemáticas de lo estático–inerte a los medios dinámico–computacionales conducirá a la expansión de los géneros matemáticos y las formas de razonamiento matemático?

2. ¿La actividad matemática en medios computacionales conducirá a la democratización en el acceso a (potencialmente nuevas formas de) razonamiento matemático?

3. ¿Pueden estos cambios transformar nuestras nociones del núcleo del currículo matemático para todas y todos quienes aprenden? (p. 13).

En particular, Hegedus y Moreno–Armella (2013) comentan que las conexiones entre las capacidades computacionales y visuales ofrecen una infraestructura profunda y amplia que puede definirse como un complejo cimiento de funcionalidades, capacidades expresivas y operacionales, establecidas a través de una estructura organizacional global que permita conexiones matemáticas válidas y viables (p. 48).

Estos autores conciben a la *comunicación* como acciones humanas en términos del habla o el movimiento físico, o bien, a través de las inscripciones digitales de las interfaces actuales; una *infraestructura comunicacional* sería entonces la estructura organizacional de varios de los tipos de comunicación disponibles en la sociedad (p. 49).

Cuando lo anterior se interseca con el contexto educativo, Hegedus y Moreno–Armella (2013) afirman que la evolución del aprendizaje es potenciada conforme las formas tradicionales de expresión son transformadas o habilitadas. Y en el corazón de esta convergencia, se encuentra una expresividad representacional, con formas que se hallan cargadas de *intencionalidad*, tanto para el alumnado como para quienes diseñan.

Para quien aprende, constituye una acción para identificarse con el diálogo *en el aula* (concebirse parte de la construcción de conocimiento) y para relacionarse *con el artefacto* representacional tecnológico. Para quien diseña, como una decisión pedagógica o epistemológica específica *a priori* con base en las capacidades del ambiente y la estructura específica de las actividades abordadas (Hegedus y Moreno–Armella, 2013, p. 49).

En este sentido, se reconoce la atención al ambiente de diseño como uno de los principales elementos en la integración digital a la práctica docente (y educativa, en general) dado el carácter híbrido de los ambientes de aprendizaje de la presente era digital (Rubio–Pizzorno, 2018, p. 137).

Más aún, se retoma el aporte de Huffaker y Calvert (2003, como se citó en Hegedus y Moreno–Armella, 2013), respecto a que el enlace del trabajo privado (individual) de una manera matemáticamente significativa a través de redes, y mostrando los aportes de todo el trabajo de la clase (sus integrantes), promueve potencialmente la habilidad metacognitiva del alumnado para reflexionar respecto a su propio trabajo con relación al de los demás (p. 51). Este punto será especialmente crítico en la última fase de la implementación del diseño.

Por otro lado, se retoma la sugerencia de Salinas (2013) respecto a que confrontar a los estudiantes con la representación semiótica gráfica de derivada y antiderivada en conjunto con la simulación del fenómeno descrito ofrecerá una mejor oportunidad para plantear una descripción lingüística de las gráficas y el movimiento (p. 385).

Ella comenta que la exploración con las herramientas computacionales permite al alumnado reorganizar estrategias para la resolución de problemas. En primer lugar, ellas y ellos pueden hacer algunas observaciones situadas que pueden estar asociadas con cierta propiedad, teorema o fórmula donde el ambiente facilita su identificación. Esto constituye una prueba situada (*situated proof*), el resultado de una exploración sistemática explotada intencionalmente dentro de un ambiente computacional con el fin de "probar" relaciones matemáticas.

A través del desarrollo histórico de las matemáticas, un cierto ir y venir entre los acercamientos inductivo y deductivo es reconocido, entonces, la prueba no afecta al teorema que fue concebido en el pasado sin el rigor moderno estándar (aquí se reconocen el *relativismo* *epistemológico* y la *racionalidad contextualizada*). Tal vez observar los resultados matemáticos emergiendo de la actividad humana pueda proveer elementos más apropiados al ambiente cultural del aula (Salinas, 2013, p. 386). Lo cual es justamente base para una mirada socioepistemológica.

En este sentido, como describe Tall (2013), la naturaleza precisa de los acercamientos prácticos y teóricos cambiará conforme la tecnología disponible evolucione y permita nuevas formas de dar sentido a las nociones dinámicas de continuidad y de las matemáticas de cambio y variación (p. 459).

Por ende, este autor ve a las nuevas tecnologías creando la posibilidad de reconectar las representaciones matemáticas y conceptos con el fenómeno directamente percibido, así como para fortalecer la comprensión de las y los estudiantes de conexiones entre diferentes formas de representación matemática. Partiendo de antecedentes más familiares, tales como gráficas y movimiento, ambos en su forma kinestésica y cibernética, y desarrollando hacia representaciones matemáticas más compactas y formales, se ve la oportunidad de crear un nuevo camino para el acceso a las matemáticas que frecuentemente permanece como exclusivo de una elite reducida (Tall, p. 461).

4.5. Modelación matemática

En la sección anterior se planteó cómo en la enseñanza tradicional se suele ver a la matemática escolar y al mundo real como dos ambientes separados el uno del otro. En ese sentido, Arrieta y Díaz (2015) señalan la común y profunda escisión en la educación al "abordar problemas de la vida real" como algo *desconectado* de la vida en la escuela.

Más aún, los autores mencionan que esto se manifiesta asimismo en el campo profesional. En particular, presentan los resultados de una encuesta en donde se cuestionó a egresados de un instituto tecnológico mexicano sobre el uso de las ecuaciones diferenciales en su vida profesional: el 96% señaló que *nunca* las usa (el 4% no respondió). A partir de ello, comentan que entonces "lo que se hace en aulas de ecuaciones diferenciales no tiene sentido en el trabajo profesional de ingenieros en ejercicio" (Arrieta y Díaz, 2015, p. 22).

Lo anterior, lejos de interpretarse como que en el ejercicio profesional de la ingeniería no se emplean ecuaciones diferenciales, parece responder a un tratamiento claramente diferenciado en la práctica profesional respecto al trabajo que se aborda en la matemática escolar, lo cual es consistente con las conclusiones del análisis realizado en el capítulo 2.

De ahí que la preocupación de los autores se cimiente en buscar *puentes* entre la escuela y su entorno, por lo que sugieren proponer prácticas (situadas) que se desplacen desde ambientes no escolares a escolares para que funcionen como dicho puente. En particular, plantean como una propuesta a la práctica *modelación*. Para ello, señalan que "se procura ubicar prácticas de comunidades para establecer puentes, estudiando sus intenciones, sus procedimientos, sus herramientas, los argumentos con que justifican sus acciones, su emergencia y constitución y el ámbito sociocultural que les da cabida" (Arrieta y Díaz, 2015, p. 28), lo cual, en palabras de los autores, "rebasa el terreno de la contextualización" (p. 28).

Respecto a esta necesidad, para la presente investigación, se identifica la práctica en fisicomatemáticas como un campo profesional que demanda, en principio, una articulación de conceptos entre ambas disciplinas. En este sentido, se tiene presente que caracterizar sus prácticas conlleva un estudio minucioso de su labor, lo cual queda fuera de los objetivos del estudio; sin embargo, se rescata como punto de partida la necesidad de plantear los inicios de un puente entre ambas disciplinas que se conduzca mediante la modelación matemática de fenómenos físicos como rasgo esencial.

En concordancia con lo anterior, retomando la concepción de Mendoza y Cordero (2012), quienes consideran a la modelación “como una práctica social que construye conocimiento y que expresa una funcionalidad del conocimiento matemático” (p. 1026), se perfila que tal puente se establezca en términos de una matematización de la física que rescate el *carácter funcional* del saber.

En particular, Arrieta y Díaz (2015) señalan que una característica de la modelación en la práctica profesional es que se interviene en una entidad (*modelado*) a partir de otra (*modelo*), a lo cual se refieren como *acto de modelar* (p. 35). No obstante, indican que “la ‘transferencia’ de las prácticas de comunidades a la escuela no consiste en tomar lo que hacen los profesionistas de las comunidades y reproducirla en el aula” (p. 36), pues no es posible reproducir las *intencionalidades* de dichas comunidades, ya que las entidades con las que trabajan son distintas a aquellas con las que se interactúa en la escuela. Lo que sí se “transporta” al aula, de acuerdo con los autores, es el *acto de modelar*, es decir, “el cómo se han logrado construir los dipolos modélicos” (p.36). En la ILUSTRACIÓN 4-8 se muestra un esquema de este dipolo.

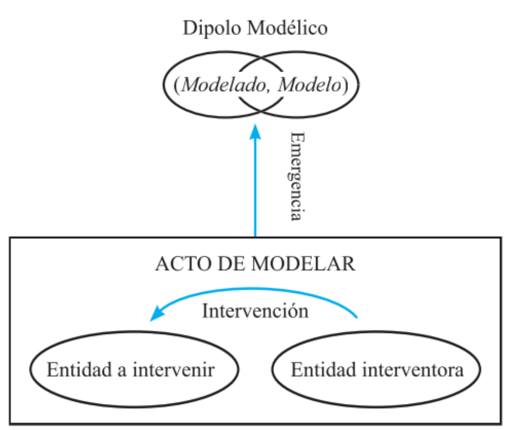


ILUSTRACIÓN 4-8 La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico. Tomado de Arrieta y Díaz (2015, p. 62).

Por ende, la *modelación* se presenta como una práctica que articula entidades con el fin de configurar otras nuevas, y la articulación se establece al *intervenir* en una de las entidades desde la otra (noción de especial importancia dado lo que ya se describió respecto al trabajo en ambientes digitales), proveyendo a la vivencia de quien modela, de una tercera y nueva entidad: el dipolo modélico (Arrieta y Díaz, 2015, p. 45).

En particular, se ha de tener presente que el *modelo* solo reproduce algunos aspectos del objeto original, aquellos que se consideren importantes para el estudio, dejando de lado los demás, pero manteniendo una constante relación con lo *modelado*. A diferencia de como ocurre en la escuela *tradicional*, donde la modelación suele ser considerada como una actividad que solo le da un sentido de *aplicación* a los conocimientos adquiridos en los distintos cursos de matemáticas (Suárez, 2014, p. 18).

De acuerdo con esta investigadora, se ha de:

> Considerar a la modelación como una construcción en sí misma, compuesta por elementos generativos, en el sentido que le da Confrey (1999) de características heurísticas o que generan conocimiento y que han sido propuestas por Cordero (2011): 1) los argumentos gráficos se generan a partir de una simulación que lleva a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en el movimiento para producir un resultado deseable en la gráfica, 2) tiene un carácter dinámico que permite crear modelos gráficos que se convierten en argumentos para nuevas descripciones de movimientos, 3) propicia la búsqueda de explicaciones y enfatiza los comportamientos invariantes en las situaciones. (Suárez, 2014, p. 103).

Así, para la elaboración del diseño, se considera un proceso de modelación *acompañado*, en donde el recurso tecnológico apoye la constitución del dipolo modélico. Particularmente, a través de las *estrategias variacionales* descritas en la sección 4.2 y de *estrategias dinámicas* que se plantea caracterizar. Estas últimas están ligadas a las representaciones dinámicas alusivas al fenómeno físico abordado y a los elementos matemáticos que apoyan su descripción a través de un análisis variacional.

En este sentido, se retoman los hallazgos de Romero y Rodríguez (2003) respecto a la formalización de los conceptos físicos, particularmente, en el caso de la *velocidad instantánea*. Ellos reportan que “la forma de plantear y abordar la relación entre la física y las matemáticas más difundida en el ámbito escolar es aquella por la cual se considera a las matemáticas como *lenguaje* de la física” (p. 57). Esta visión puede conducir a concretar su relación a través de una *relación de aplicación*, o bien, a considerar que las matemáticas tienen con la física una *relación de constitución* (p. 58).

Enmarcado en el segundo enfoque, han surgido propuestas para relacionar ambas disciplinas a partir de la *indagación histórico–epistemológica* de la física. Tales investigaciones han dado evidencia de que, por un lado, no existe una única manera de materializar dicha relación (Paty, 1994, p. 404, como se citó en Romero y Rodríguez, 2003, p. 58); y, por otro, que matematizar un fenómeno requiere, ante todo, construir las magnitudes, relaciones y procedimientos apropiados para representarlo y cuantificarlo (Malagón, 1988, p. 114, como se citó en Romero y Rodríguez, 2003, p. 58).

Por ende, los investigadores señalan que "los modelos constituyen el núcleo del conocimiento científico y la modelización es la actividad sistemática a partir de la cual se puede construir y emplear este conocimiento" (Romero y Rodríguez, 2003, p. 58). Particularmente, su estudio parte de que, en el estudio de la cinemática, no se suele dedicar el tiempo suficiente al concepto de velocidad instantánea.

Para su tratamiento, sugieren la perspectiva de considerar que el movimiento no es una *propiedad* que se le atribuye a un cuerpo, sino un *estado* de un sistema. Considerar el movimiento como un estado conlleva identificar una propiedad variable a través de la cual se dé cuenta de los diferentes estados de movimiento. Romero y Rodríguez (2003) comentan que esta posibilidad ya está presente en el lenguaje a muy tempranas edades: cuando se habla de qué tan *rápido* o *lento* se mueve un cuerpo, pues ello evidencia que "para referirnos al movimiento identificamos una cierta cualidad susceptible de tener grados, que da cuenta del estado del movimiento de los cuerpos: el grado de velocidad" (p. 60).

Como se mencionó brevemente en la sección **4.1**, desde la línea del pensamiento y lenguaje variacional de la TSME, se definen los *argumentos variacionales* como aquellos que:

> Recurren al análisis del cambio y de su cuantificación y que son utilizados por las personas cuando hacen uso de "maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando" (Cantoral, 2000, pp. 54). (Caballero–Pérez y Cantoral, 2013, p. 1201).

Lo cual es compatible con la concepción del movimiento a través de estados. En particular, Romero y Rodríguez (2003) proponen "configurar fenómenos donde se posibilite la identificación del estado del movimiento como variable y el establecimiento de relaciones con otras variables que permitan su cuantificación. Para este fin se considera relevante realizar un análisis del fenómeno de la caída de los cuerpos, según la perspectiva galileana" (p. 61). Esto sustenta la elección del fenómeno de caída libre para la elaboración del diseño y, asimismo, la pertinencia de reproducir el fenómeno en un ambiente digital a través de una simulación interactiva, pues permite una representación directa de las variables involucradas; particularmente, está el caso del *deslizador* que permite controlar el paso del tiempo y del *arrastre* como alternativa dinámica de la variación de parámetros.

Ahora bien, esto posee una fuerte relación con el estudio que reporta Cantoral (2013b) en la línea del pensamiento y lenguaje variacional respecto al *paso de la gramática a las matemáticas* (pp. 188-192) y el *paso de las derivadas sucesivas a la derivada* (pp. 181-188).

El primer *paso* se asocia con lo mencionado por Romero y Rodríguez (2003) respecto al lenguaje en la descripción del movimiento cuya cualidad se asume como susceptible de tener grados. En este sentido, Cantoral (2013b) señala que en el ámbito de las ciencias y la tecnología al tratar la variación con tres variables cuantificables (*posición*, *velocidad* y *aceleración*), se requiere de tres datos y dos variaciones, "o dicho de otro modo, de una relación cuadrática, pues como sabemos, con tres puntos no colineales en un plano, es posible determinar una única parábola que los contenga. [...] Se tiene [con ello] la unicidad en la solución del sistema" (p. 189).

Para exponer el segundo *paso*, Cantoral (2013b) presenta un ejemplo sobre cómo es que se construye la noción de derivada a partir de problemáticas ligadas al cambio y la variación de orden superior. Menciona que teóricamente anticipó que, en la enseñanza del Cálculo, se produciría un singular fenómeno ligado al aprendizaje tanto en el alumnado como en el profesorado:

> En términos técnicos, diríamos que el *discurso Matemático Escolar*, en tanto sistema de razón, estructura a los actores educativos a través de una *costumbre didáctica*, produciendo un escaso entendimiento conceptual para la *transferencia de significados*. [...] Encontré en esos años, teóricamente que sin el desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional* [...] un estudiante o un profesor, tendría dificultades en asignar los significados asociados al tipo de relaciones f y f'' [...] pues el *discurso Matemático Escolar* induce un énfasis mayor en las derivadas consecutivas, o en relaciones del tipo $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+1)}$. Pero casi nunca centrarían la mirada en aquellas otras del tipo $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+2)}$. (pp. 182-183).

El consecuente estudio epistemológico conducido por el investigador le condujo a establecer una hipótesis que perfilara una ruta de solución didáctica: "la noción matemática de derivada, que acompaña a la práctica de predecir, sólo puede ser estabilizada entre los estudiantes hasta que la derivada sea usada como una articulación conveniente de las derivadas sucesivas" (Cantoral, 2013b, p. 184).

Para la investigación se retoma el tratamiento de las derivadas sucesivas no consecutivas a través de la relación $f \leftrightarrow f''$ en el contexto del paso de la *posición* a la *aceleración* y viceversa. Particularmente, en el fenómeno de caída libre, tanto esta transición como la de la relación $f \leftrightarrow f'$ (*posición* $\leftrightarrow$ *velocidad* $\leftrightarrow$ *aceleración*) tienen implicaciones importantes, como se verá a continuación.

Las implicaciones están asociadas con otro elemento dinámico del ambiente digital que se puede retomar en el estudio de la ecuación diferencial con base en los hallazgos de Buendía y García (2002) sobre las condiciones iniciales. Si se considera la ecuación diferencial que representa la velocidad de caída por fuerza gravitacional, la exploración de su solución (posición del cuerpo en todo momento) se podría realizar a través del desplazamiento de la gráfica en el plano.

Como se describió en un ejemplo de la sección anterior, si el campo de direcciones es como el de la ILUSTRACIÓN 4-7, con un arrastre de la gráfica (parábola en ese caso) que sea restringido a solo desplazamientos verticales, se tendrá el conjunto de soluciones que representa el campo, pues la decisión de dónde ubicar la gráfica se centrará en la condición inicial necesaria (algún dato sobre la altura) para determinar su ordenada.

Por otro lado, si en el arrastre se permiten también desplazamientos horizontales, la decisión de dónde ubicar la gráfica implicará no solo la necesidad de una condición inicial respecto a un punto por el cual pase la gráfica como en el caso anterior, sino además de una segunda condición inicial que indique la forma en la cual la gráfica pasa por dicho punto (lo cual correspondería a su velocidad).

En este sentido, mediante este recurso dinámico además de que se tendría una representación visual del comportamiento de las soluciones, el hecho de visualizar *una* sola gráfica sugiere la existencia de una solución particular. Para este último punto será además indispensable la vinculación con la simulación (animación interactiva) del fenómeno físico descrito de tal manera que la existencia y unicidad respondan al fenómeno en cuestión.

Respecto a la visualización, Cantoral (2013a) destaca su papel como un recurso viable. Alude a que, generalmente, este concepto se entiende como la “habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual” (p. 47). En particular, comenta que, desde hace años en esa línea de investigación, él y su grupo han encontrado "una fuerte correlación entre la habilidad para procesar información visual con la capacidad de analizar información analítica relevante en el campo del precálculo, la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral y el análisis matemático" (p. 48).

Una base para definir la manera en la cual se aborda la derivada en el diseño se retoma de la investigación de González (1999, como se citó en Cantoral, 2013a), en cuanto reporta que para su enseñanza no es suficiente con dotar de significado a la *primera derivada*. Su hipótesis, en consecuencia, sostiene que "la noción de derivada surge hasta que se estabiliza entre los estudiantes una articulación de las *derivadas sucesivas* y se establece un tratamiento de 'ida y venida' entre las funciones y sus derivadas" (p. 55).

Si bien el objetivo del presente estudio no es analizar la noción de derivada, sí se reconoce como elemento crucial el abordar su significado en la matematización del fenómeno físico de movimiento. En específico, la articulación de las derivadas sucesivas se plantea desde el plano físico a través de la triada *posición–velocidad–aceleración*.

En este sentido, Cantoral (2013a) comenta que, a partir de un análisis de los currículos, se deduce que, al enseñar el tema de la derivada, el objetivo es realizar correctamente el estudio analítico y la representación gráfica de una función donde se determina de forma mecánica la primera y segunda derivada, lo cual "no implica que el estudiante ponga en juego su pensamiento y lenguaje variacional" (p. 59). En respuesta, se propone la incorporación de estrategias variacionales para buscar resignificar la noción de derivada en el contexto de la triada mencionada. Como indica Cantoral (2002, como se cita en Cantoral, 2013a) "en las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento" (p. 65).

Asimismo, una sutilidad importante, que asocia epistemológicamente la descripción de la derivada en la ecuación diferencial con el concepto de velocidad instantánea, se encuentra en la identificación de este tipo de velocidad como variable continua que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos.

De acuerdo con los autores Romero y Rodríguez (2003), este aspecto de la perspectiva galileana del movimiento suele pasar desapercibido en análisis históricos y en textos de enseñanza. En particular, refieren que el considerar al estado de reposo como un *estado* más de movimiento

–el estado de lentitud infinita– implica asumir el grado de velocidad como variable continua, en el sentido de que cuando un cuerpo pasa de dicho estado a otro, o viceversa, tiene que pasar por todos los infinitos grados de movimiento intermedios. Lo cual, en palabras de los autores: “hace aceptable la idea de que el móvil pasa por infinito número de grados de velocidad en un tiempo finito, al hacer una correspondencia uno a uno entre los grados de velocidad y los instantes de tiempo” (p. 62). Con relación a la representación de estos grados, los autores comentan que:

> Resulta importante resaltar aquí la pertinencia de la representación geométrica en los procesos de construcción conceptual del fenómeno del movimiento y, consecuentemente, en los procesos para su matematización: a través de esta representación, magnitudes no geométricas como la velocidad y el tiempo son representadas como segmentos, hecho que posibilita poder operar sobre ellas de la misma forma como se opera con segmentos, es decir, a través de proporciones y composición de proporciones. (Romero y Rodríguez, 2003, p. 63).

La representación de Galileo es similar a la de Oresme; la principal diferencia radica en que, en el caso del primero, en lo vertical se considera al tiempo y en lo horizontal la magnitud de la velocidad (ILUSTRACIÓN 4-9).

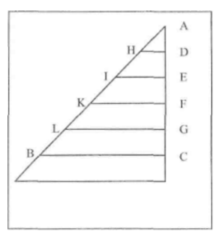


ILUSTRACIÓN 4-9 Representación geométrica de los grados de velocidad instantáneos de un cuerpo en caída. Tomado de Romero y Rodríguez (2003, p. 63).

De este análisis se deriva que el concepto de velocidad instantánea, fenomenológicamente más próximo a la realidad del alumnado que la idea infinitesimal del diferencial, puede contribuir a la significación de los elementos en la ecuación diferencial ordinaria.

Por otro lado, la *notación* que se utiliza para describir el caso discreto (con deltas) y el caso continuo (con diferenciales) es algo meramente social, por ende, así tendrá que ser su introducción. No obstante, precisará de una explicitación respecto a su uso, acorde con lo señalado por Martínez, Pluvinage y Montaño (2017).

En particular, a raíz de lo anterior, se reconoce el papel de la graficación como un elemento que promueve el tránsito entre el fenómeno físico y el modelo matemático que lo describe. De hecho, se considera la posibilidad de concebir a la modelación como una actividad anclada a la graficación cuando se estudia situaciones de movimiento, como sugieren Mendoza y Cordero (2012, p. 1028) con base en el *binomio modelación–graficación* de Suárez (2014). En especial, se postula que en dicho proceso el papel de las representaciones dinámicas (en ambientes dinámicos digitales) configura un eje para la construcción de la noción de ecuación diferencial mediante un trabajo coordinado entre los sistemas gráfico, numérico y algebraico (en correspondencia con la necesidad que señala Hernández, 1995).

4.6. Articulación a través de las dimensiones

Como se mencionó previamente, en el tratamiento del *saber* desde la teoría socioepistemológica se consideran cuatro dimensiones: la *epistemológica*, la *didáctica*, la *cognitiva* y la *sociocultural* (como transversal a las demás).

En cuanto *construcción social*, el saber matemático, posee estas "dimensiones que interactúan entre sí de modo tal que no puede analizarse una sin la otra" (Cantoral, 2013b, p. 143). Como Reyes-Gasperini (2016) señala, "los límites entre una y otra serán, en muchos casos, imperceptibles producto del proceso en su análisis sistémico" (p. 57). Sin embargo, se tiene claro que, por cuestiones de método, estas dimensiones son separadas temporal e intencionalmente (Cantoral, 2013b, p. 143), con el fin de ser analizadas.

A continuación, se presenta una articulación de lo descrito hasta el momento en el capítulo a través de dichas *dimensiones*, entendiendo justamente que su separación no implica una desvinculación entre sus elementos, sino que se configura con el fin de facilitar su análisis.

En este sentido, tres ejemplos que permiten apreciar la cualidad *sistémica* del problema de investigación al ser abordado a través de las cuatro dimensiones son: la *desarticulación del currículo escolar*, la *integración de la tecnología a la matemática educativa* y el *tema de género*, como se presenta a continuación a través de las cuatro subsecciones correspondientes a las dimensiones.

Cabe señalar que las preguntas (basadas en la propuesta de Reyes-Gasperini, 2016) y las definiciones (recuperadas de la obra de Cantoral, 2013b) con las cuales inicia cada apartado fungieron principalmente como una guía para la descripción de su contenido.

4.6.1. Dimensión didáctica

¿Cómo se aprende y cómo se enseña? ¿Cómo se produce la difusión institucional? (Reyes-Gasperini, 2016, p. 57).

Esta dimensión "trata con la matemática escolar como objeto de estudio y sirve fundamentalmente para localizar y explicitar al discurso Matemático Escolar" (Cantoral, 2013b, p. 146).

En este sentido, para el análisis de esta dimensión se consideran dos fuentes principalmente: (1) el de la enseñanza tradicional a través del currículo escolar y los libros de texto, y (2) lo que se halló durante la revisión de literatura.

Respecto a la primera, como se mostró en el capítulo 3, a través del análisis del currículo de la universidad de donde provenían las y los participantes de la fase empírica del estudio (TABLA 1-1), se puede identificar una clara *desarticulación* entre las asignaturas de Física I (primer semestre), Cálculo I (primer semestre) y Cálculo II (segundo semestre) con repercusiones en el curso de Ecuaciones Diferenciales (segundo semestre).

Principalmente, esto se manifiesta en los libros de texto revisados (sección 2.2). En ellos se observó que, tanto en Física I como en Ecuaciones Diferenciales, se suele partir de considerar que el alumnado posee ya una concepción de la derivada como razón de cambio, de lo diferencial como caso límite, del Teorema Fundamental del Cálculo como vínculo entre la derivada y su integral, y de la integral cómo área bajo la curva. Asimismo, se asume que las y los estudiantes han trabajado previamente con la interpretación geométrica de la derivada para analizar el crecimiento, decrecimiento, concavidad, máximos y mínimos de una función. Sin embargo, todo esto se aborda hasta el segundo semestre de la carrera.

En concreto, un elemento que subyace en esta desarticulación es la diferencia en la *fundamentación* de cada área. Mientras en matemáticas (Cálculo I) se espera que el alumnado haya llevado previamente (en el Nivel Medio Superior) un curso meramente operativo y aplicado del cálculo, en física (Física I) se demanda ya una comprensión más profunda de este, como se señaló anteriormente.

Respecto a la segunda, el estudio de Hernández (1995) muestra cómo, en el proceso de institucionalización del conocimiento, el análisis gráfico y numérico (esencial en los orígenes del *cálculo fluxional*) se fue aislando de la enseñanza tradicional en los cursos de Ecuaciones Diferenciales para dar un lugar central al análisis algebraico.

Como señala Farfán (2012), "dentro de la didáctica, la inclinación sistemática del recurso algorítmico que bloquea al estudio *cualitativo*, es lo que da lugar al desarrollo de métodos susceptibles de algoritmización" (p. 266). Así, pese a que los contextos por los cuales ha evolucionado la teoría de ecuaciones diferenciales han sido: *algebraico*, *numérico* y *geométrico*, la enseñanza de las ecuaciones diferenciales no ha seguido, hasta ahora, esa evolución, pues los tratamientos suelen centrarse en el contexto algebraico (Cordero et al., 2016, p. 22).

Más aún, el estatus *inframatemático* del contexto geométrico que permea el ámbito escolar –como lo *intuitivo*, de ninguna manera lo *riguroso*– "se usa para representar no para justificar resultados [Artigue, 1990]" (p. 266). En consecuencia, "el estudio cualitativo –que propicia el contexto geométrico– se excluye en aras de la imposibilidad de admitir (sin menoscabo del deber) que no se puede dar respuesta a todas las preguntas" (Farfán, 2012, p. 266).

Ello se puede constatar hasta la fecha en el enfoque tradicional de los cursos de enseñanza actuales, donde el énfasis suele hacerse en la identificación de un método para resolver una ecuación diferencial ordinaria como objetivo principal. Además, dicho aislamiento queda patente en la forma usual para abordar problemas de física en los libros de ecuaciones diferenciales. Generalmente, el método de resolución se limita a la sustitución de datos en fórmulas que se asumen preconcebidas por el alumnado.

En particular, cuando se aborda el fenómeno de caída libre (movimiento con aceleración constante), la ecuación a resolver parte netamente de la fórmula (segunda ley de Newton) y no se hace un tratamiento particular que permita su construcción a través de la modelación de ciertas características del fenómeno. En algunos casos, se hace uso del Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la posición del objeto que cae a partir de la *traducción* matemática de la ley, su integración y de los valores iniciales de posición y velocidad sin mayor aclaración respecto a por qué se necesitan.

En contraste, en el libro de física se parte justamente de aspectos cualitativos del movimiento y de sus representaciones gráficas para ir deduciendo las expresiones matemáticas que lo modelan. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, en tal deducción se demanda también una concepción de la derivada como razón de cambio (de hecho, se toma como sinónimo de la derivada a la *pendiente*) y se retoma implícitamente la Regla de Merton.

En cuanto al análisis y aplicación de las expresiones obtenidas, se retoma explícitamente la relación de la derivada con la integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo, justificando contextualmente la necesidad de las condiciones iniciales, pero sin hacer explícita la aparición de la *ecuación diferencial ordinaria*. En particular, dicho teorema se retoma para el análisis mediante integración gráfica.

Un constructo que permite abordar lo anterior con relación a las dimensiones *social*, *cognitiva* y *epistemológica* es el del *discurso matemático escolar*. De acuerdo con Soto y Cantoral (2014), este discurso resulta *excluyente* para el alumnado, particularmente dado su *carácter hegemónico*, su *concepción de la Matemática como un conocimiento acabado y contino*, y su *carácter utilitario no funcional*. Pero particularmente, al carecer de *marcos de referencia para resignificar la matemática escolar*, se omite que las matemáticas responden también a otras disciplinas en donde encuentra una base de significados naturales.

Además, dada la perspectiva de género adoptada, con respecto a dicho rasgo excluyente del sistema escolar tradicional, se destaca la necesidad de promover en las alumnas una *sensación de pertenencia* (Dasgupta y Stout, 2014; Talley y Martinez Ortiz, 2017), de reconocer la posible emergencia de la *amenaza del estereotipo* en ellas (Good, Aronson y Harder, 2008; Steele, 1997) y, más aún, de considerar el *carácter funcional del saber* pues, de acuerdo con los hallazgos de Farfán y Simón (2016), la exclusión del discurso matemático escolar se intensifica en las mujeres estudiantes, ya que en su estudio encontraron que sus respuestas, inferencias, explicaciones y argumentaciones tienden a tomar en cuenta una gran cantidad de variables relacionadas con el fenómeno específico abordado.

En dicho sentido, Mendoza y Cordero (2012) reportan que no se ha logrado que el conocimiento matemático sea *funcional*, pues se busca explicar la matemática desde ella misma, "desconociendo las prácticas de referencia que hicieron surgir el conocimiento matemático" (p. 1023). De ahí la necesidad de incorporar la dimensión *epistemológica* al estudio de este fenómeno educativo, pues a través de ella se indaga sobre dichas prácticas.

4.6.2. Dimensión epistemológica

¿Cuál es el origen de un conocimiento matemático? ¿Cuál era la situación contextual durante su construcción? (Reyes–Gasperini, 2016, p. 57).

Esta dimensión se ocupa fundamentalmente de los análisis sobre la problematización del saber, la localización de las fenomenologías intrínsecas y los constructos característicos a través de las prácticas (Cantoral, 2013b, p. 146), *en síntesis, concierne a las formas en que el saber matemático puede ser conocido* (p. 148).

En un principio, a partir de la revisión de literatura presentada en el capítulo 2, se reconoció la necesidad de partir de un contexto fenomenológico propicio para abordar la noción de ecuación diferencial ordinaria. En particular, se identificó al contexto físico como medio epistemológicamente significativo para estudiar la variación, pues en él se ha de distinguir lo que varía respecto a qué produce tal variación (Farfán, 2012) y, a su vez, implica la elección y exploración de *variables*, fundamentales para el estudio del cambio (Parada, Conde y Fiallo, 2016).

Se reconoce el aporte mismo de la teoría física en torno al estudio del *movimiento* para construir e interpretar modelos matemáticos que permitan describirlo o hacer predicciones sobre él (Rubio, Prieto y Ortiz, 2016), lo cual epistemológicamente cobra sentido dada la incesante relación entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático en el desarrollo del cálculo que documenta Cantoral (2001) y que retoma Arrieta (2003) además de otros resultados, como el de Reig (1987), acerca de que la habilidad para interpretar y usar los conceptos de *velocidad* y *aceleración* es un prerrequisito para la resolución de problemas tanto en ciencia como en matemáticas.

Sin embargo, como se mencionó en la dimensión *didáctica*, existe una discrepancia entre el tratamiento lógico–abstracto que suele caracterizar a la didáctica matemática tradicional, respecto a su propio desarrollo histórico–epistemológico, tal como reporta Hernández (1995) y como señalan Cordero et al. (2016) respecto a que los contextos por los cuales ha evolucionado la teoría de ecuaciones diferenciales han sido: *algebraico*, *numérico* y *geométrico*, y que, no obstante, la enseñanza tradicional privilegia usualmente solo al primero.

Desde la perspectiva socioepistemológica, Farfán y Simón (2016) describen cómo este modo de pensar se encuentra vinculado a una visión de las matemáticas como un paradigma *androcéntrico* de conocimiento. Particularmente, las autoras señalan que mientras la ciencia y la tecnología se desarrollaron como una necesidad de resolver problemas relacionados a la vida cotidiana, la matemática se separó del resto de las ciencias para desarrollarse en sí misma y:

> De este modo, la razón, el saber el intelecto, la excelencia, lo legítimo, lo medible y perfecto van apareciendo como sinónimos por estar exentos de emociones, de afectos, de intuición, de intangibilidad, valores considerados puramente femeninos (Fernández, 2010). [...] Este modo de

> pensamiento sobre las matemáticas, de origen puramente androcéntrico, así como su aprendizaje y valor social, regulan las interacciones al interior de las aulas: las relaciones familiares y escolares, las intervenciones pedagógicas y didácticas, el logro y desempeño escolar así como las motivaciones e intereses desarrollados de las jóvenes mujeres. (p. 44).

Así, como se mencionó en la dimensión *didáctica*, el estudio cualitativo que propicia el contexto geométrico, al poseer un estatus *inframatemático* en el ámbito escolar tradicional como lo *intuitivo*, de ninguna manera lo *riguroso*, "se excluye en aras de la imposibilidad de admitir (sin menoscabo del deber) que no se puede dar respuesta a todas las preguntas" (Farfán, 2012, p. 266).

Ahora bien, con base en su estudio sobre la matematización del estado estacionario a partir de fenómenos propios de la ingeniería, Farfán (2012) señalaba como hipótesis inicial que "es indispensable, para la construcción de un concepto matemático, la significación que le dio origen" (p. 33). Sin embargo, encontró que "si bien es cierto que el concepto surgió en el ámbito de la determinación del estado estacionario (particularmente en la teoría del calor), éste no es propicio para recrearlo en el aula" (p. 34), ya que resultaba ser más complejo que la noción misma que se deseaba introducir.

En el caso de la comunidad de estudiantes de la carrera fisicomatemática, parte de lo que se espera en su formación es justamente el desarrollo de una intuición física, por lo cual, se asume propicio el rescatar las *prácticas de referencia* que dieron origen a la ecuación diferencial para la elaboración de propuestas didácticas.

Particularmente, al haberse desarrollado en estrecha relación con el cálculo *fluxional*, la teoría en ecuaciones diferenciales comparte con éste las prácticas de referencia identificadas por Cantoral (2013b), a saber, la *cinemática* y la *dinámica*. Como se describió en la sección 4.1, estas ramas de la física se diferencian en que la primera describe el movimiento de objetos, su comparación y clasificación, independientemente de sus causas; mientras que la segunda busca describir su evolución con respecto al tiempo y con relación a las causas que lo originan.

A partir del análisis cinemático, se propone como una primera *etapa* de trabajo el **identificar el cambio** para comenzar a caracterizarlo cualitativamente. Posteriormente, una segunda *etapa* se identifica con base en la *figuración de las cualidades* de Oresme –que retoman Suárez (2014) en su estudio y Arrieta (2003) en su tesis doctoral (subsección 2.3.2)–, la cual provee de una caracterización gráfica del movimiento que es independiente a la utilización explícita de ejes coordenados graduados, es decir, "el uso de las figuras no está anclado a la representación analítica, que históricamente es posterior" (Cordero, Cen y Suárez, 2010, p. 192), aunque posee una patente asociación funcional de correspondencia entre la "cualidad" (velocidad) y el tiempo. Así, la segunda etapa de trabajo que se propone es la **geometrización del cambio**.

En este sentido, Suárez (2014) argumenta la conveniencia para la didáctica de la consideración teórica del uso de las gráficas en la modelación como un conocimiento en sí mismo proveyendo tres datos epistemológicos: (1) la gráfica antecede a la función, (2) la gráfica es argumentativa, y (3) el uso de las gráficas tiene un desarrollo, es decir, aspectos propios del conocimiento identificados en el *Tratado de Oresme*, que dan información sobre el uso integrado del conocimiento matemático de las formas geométricas y de proporciones para obtener una funcionalidad en situaciones de variación.

Así, entre la primera y la segunda etapa se puede retomar lo reportado por López (2013) acerca del trabajo de Domingo de Soto (previo a Galileo) respecto a que él sabía que el movimiento más *natural* era uniforme pero, dado que el movimiento de caída de los graves, aunque también es natural, no es *uniformis*, habría de ser lo más sencillo y próximo él, por lo cual intuía que debía ser del tipo *uniformiter disformis*, que no es uniforme en el pleno sentido, pero sí en parte.

En el caso del contexto numérico, se retoma asimismo la práctica de *numerización de los fenómenos* que reportan Arrieta (2003) y Arrieta y Díaz (2015), pues permite justamente partir de datos numéricos obtenidos de la interacción con el fenómeno que, como se mencionó previamente, puede ser mediante una experimentación presencial, discursiva o *virtual* (digital), como sugieren Arrieta y Díaz (2016).

Respecto a la modelación, con base a lo señalado por Arrieta y Díaz (2015), se asume que cuando el alumnado advierte que para describir el fenómeno se ha de valer de otro elemento como la tabla de datos se constituye un acto que caracteriza la modelación, pues se establece una articulación a partir del modelo para intervenir en lo modelado. Por lo tanto, se asume como tercera *etapa* de trabajo la **numerización del cambio**.

En la línea del *Pensamiento y lenguaje variacional* de la TSME, Cantoral (2013b) describe que en el estudio de las matemáticas del cambio y la variación (el *Calculus*), el objetivo de análisis se basa en "los *procesos de construcción del conocimiento matemático* cuando estos se guiaron por la *transversalidad* del pensamiento físico, ámbito de *significación progresiva* cuyo *valor epistémico* se nutre de las peculiaridades de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza” (p. 102).

Como se discutió en la sección 4.2, la denominación *fluxional* del cálculo contenía inmersa la concepción de Newton sobre el tiempo y el movimiento. La existencia de *fluentes*, es decir, cantidades que fluyen, presuponía un *flujo* temporal: una cantidad no puede disminuir o aumentar continuamente *en el tiempo* a menos de que el tiempo mismo experimente un aumento continuo (Arthur, 1995, p. 334).

Es decir, para determinar que algo cambia de manera continua con respecto al tiempo, el tiempo ha de emerger como un referente absoluto y de comportamiento regular con respecto al cual se cuantifica el cambio.

Más aún, al contar con un referente absoluto respecto al cual todas las cantidades se miden permite compararlas entre sí. Por ende, se infiere que se *mide* con respecto al tiempo, pero también se *compara* con base en él. Así, se asume como cuarta *etapa* de trabajo la **temporalización del cambio**.

Los resultados anteriores se retoman en la concepción de una *naturaleza dinámica* de la variación en la ecuación diferencial ordinaria. Para ello, la variación es entendida como una *cuantificación* y *cualificación* del cambio (que se manifiesta a través de *argumentos variacionales*) en donde las *estrategias variacionales* (*comparación*, *seriación*, *predicción* y *estimación*) propuestas por Caballero-Pérez y Cantoral (2017), “deja[n] ver una evolución pragmática en el estudio del cambio y la variación” (p. 1060).

En este sentido, Caballero-Pérez y Cantoral (2013) aclaran que no se descarta la existencia de otras *estrategias variacionales*. Particularmente, en el presente estudio se perfila la existencia de *estrategias dinámicas* ligadas a las anteriores y que atañen a la cualidad dinámica tanto del movimiento analizado como de la herramienta matemática y tecnológica que se emplea para describirlo.

Respecto a dichas estrategias, como más adelante se detalla en la dimensión *cognitiva*, se retoman particularmente los hallazgos de Suárez (2014) en cuanto a la visualización en la constitución de *relaciones entre variables* y la *simulación* para hallar explicaciones a un rango e identificar variantes o invariantes a través de ajustes en su estructura, con el fin de crear, como señala Guevara (2011), un patrón de comportamiento específico.

Asimismo, los aportes de Rubio, Prieto y Ortiz (2016) acerca de que el software de matemática dinámica (como GeoGebra) proporciona insumos para representar la situación de variación en el modelado del movimiento, de tal manera que, como indican Villa–Ochoa y Ruiz (2010), lo algebraico, numérico y gráfico se encuentren dinámicamente relacionados. Aunado a la consideración de Parada, Conde y Fiallo (2016) acerca de que más que considerar a las *variables* como letras que representan valores desconocidos, se les conciba como cantidades mesurables que cambian cuando las situaciones en que ocurren cambian. Así, se perfilan como estrategias dinámicas la *exploración de parámetros*, la *búsqueda de invariantes* y los *ajustes en la estructura*, cuando se realizan en ambientes dinámicos (en este caso, digitales), y el *arrastre* como una estrategia que puede incorporar a las otras tres, pero que particularmente se empleará para la confrontación del proceso de integración con la necesidad de condiciones iniciales para determinar una cantidad a partir de su cualidad.

Un aspecto epistemológico que se considera en esta dirección para el análisis del movimiento se retoma del trabajo de Romero y Rodríguez (2003), quienes sugieren la perspectiva de considerar que el movimiento no es una *propiedad* que se le atribuye a un cuerpo, sino un *estado* de un sistema, pues ello conlleva identificar una propiedad variable a través de la cual se dé cuenta de los diferentes estados de movimiento, por ejemplo, el *grado de velocidad*. Dicho grado, con relación a lo que se expone en la dimensión *cognitiva*, representa una nueva unidad que permite concebir simultáneamente lo temporal y lo espacial a través de su *razón*.

Para dicho análisis, como se presentó en la sección 4.3, se considera relevante realizar un análisis del fenómeno de caída libre, acorde con lo sugerido por los mismos autores, pues proponen "configurar fenómenos donde se posibilite la identificación del estado del movimiento como variable y el establecimiento de relaciones con otras variables que permitan su cuantificación" (Romero y Rodríguez, 2003, p. 61), para cuyo fin consideran "relevante realizar un análisis del fenómeno de la caída de los cuerpos" (p. 61).

Además, la pertinencia de reproducir el fenómeno en un ambiente digital a través de una simulación interactiva radica en que permite una representación vinculada de las variables involucradas; particularmente, está el caso del *deslizador* que permite controlar el paso del tiempo y del *arrastre* como alternativa dinámica de la variación de parámetros.

Es decir, se reconoce que las posibilidades de un ambiente de matemática dinámica van más allá de un *valor pragmático* en la eficiencia de producción de representaciones por parte del instrumento, pues este posee además un *valor epistémico* en cuanto las acciones instrumentadas a través de él promueven el planteamiento de preguntas respecto al conocimiento matemático involucrado (Artigue, 2002). De ahí que se afirme que, en el caso del uso de software, el conjunto de supuestos epistemológicos es probable que sea más complejo que cuando no se usan herramientas digitales (Joubert, 2017, p. 24). Asimismo, la integración de la tecnología a la práctica educativa demanda también un análisis desde la dimensión *cognitiva*.

4.6.3. Dimensión cognitiva

¿Cómo se resuelven los problemas? ¿Cómo se desarrolla el pensamiento matemático? (Reyes-Gasperini, 2016, p. 57).

Como base de esta dimensión se considera que los conocimientos, para ser objetivables, requieren del uso que da sentido al conocimiento (Cantoral, 2013b, p. 145).

En cuanto a esta dimensión, a partir de trabajos como el de Hernández (1995), se identifica que ya que las ecuaciones diferenciales definen funciones, se ha de ahondar en el estudio y articulación de sus diferentes representaciones para su resolución. Como se revisó en la dimensión *epistemológica*, los contextos por los cuales ha evolucionado la teoría de ecuaciones diferenciales han sido *algebraico*, *numérico* y *geométrico*; sin embargo, una dificultad aparece en el alumnado al hacer intercambios entre los diferentes contextos, de ahí que, con el propósito de encontrar un equilibrio de enseñanza más satisfactorio desde un punto de vista epistemológico y cognitivo se considera la posibilidad de considerar soluciones cualitativas (Cordero et al., 2016, p. 22).

Asimismo, se asume que conocer conceptos de otros campos y modelos de la realidad contribuye a desarrollar ideas para *visualizar* conceptos matemáticos que permitan reforzar su comprensión y manejo, de tal manera que se facilite una futura abstracción (Malaspina, 1998, como se citó en Arrieta, 2005). Lo cual es consistente con el hallazgo de Rodríguez y Quiroz (2016) en cuanto que la modelación emerge como un medio tanto para la significación de la ecuación diferencial y sus partes, como para anticipar soluciones previo a la manipulación algebraica, y con la idea de Roth (2014) respecto a que el propósito de emprendimientos interdisciplinarios en torno a las matemáticas puede ser el desarrollo de un conjunto rico de experiencias que subyazcan emprendimientos posteriores puramente matemáticos.

Desde el *constructivismo social*, Simon (1995) propone que las situaciones de aprendizaje se deben elaborar con el fin de que el alumnado busque una respuesta al *milieu*, en lugar de una que solo busque satisfacer a quien enseña. Es decir, se parte de concebir que el conocimiento del mundo se construye a partir de percepciones y experiencias, de tal manera que un concepto será *viable* en cuanto funcione para lo que se desea (dar sentido a percepciones o datos, predecir, resolver un problema, conseguir una meta personal, etc.).

Desde la TSME, el tratamiento del *saber* se ubica en el tiempo y el espacio, y por ende, se posiciona a la opción constructivista en la perspectiva histórica, cultural e institucional (Cantoral, 2013b, pp. 97-98), por ende, no existe un *uso* sin *quien* lo usa, y esta persona a su vez no es usuaria sin el *contexto* (p. 98).

De este modo, se reconocen dos contextos que rigen las interacciones didácticas: el *contexto situacional* y el *contexto de significancia*, donde el primero alude a *cómo se contextualiza una tarea* y el segundo a *cómo se contextualiza la construcción de conocimiento* (basado en objetos o en prácticas) (Reyes–Gasperini, 2016, p. 58).

De acuerdo con las consideraciones epistemológicas descritas en la subsección anterior, se reconoce que el contexto de significancia que constituyen los fenómenos de *movimiento* representa un elemento clave en la construcción de la noción de ecuación diferencial a través de las *estrategias variacionales* mencionadas, así como la consideración de un *sistema de referencia* –propuesto por Caballero–Pérez y Cantoral (2017)– con el fin de "organizar" la variación del fenómeno mediante cuatro elementos: *variables* (¿qué cambia?), *unidad de referencia* (¿respecto de qué cambia?), *unidad de medida* (¿cuánto cambia?) y *temporización* (¿cómo cambia?). En este punto cabe señalar que, como se describió anteriormente, dependiendo de si la medida es *absoluta* o *relativa*, se propone considerar como pregunta asociada a la segunda unidad también el *¿con qué intensidad cambia?* además de *¿cuánto cambia?*

En un fenómeno de movimiento, dicho sistema se constituye espacial y temporalmente a través de su *modelación matemática* y, al modelar, se reconoce la importancia de la visualización en la constitución de *relaciones entre variables*, en cuanto su establecimiento indaga las *formas* que estas relaciones adoptan (Suárez, 2014).

En este sentido, con relación a la dimensión epistemológica, en prácticas como la figuración del devenir de las cualidades de Oresme, la linealidad significa antes que nada líneas rectas, por ende, la apreciación de la forma de una relación se infiere como indisoluble respecto a su estructura, lo cual otorga un lugar central a los modelos gráficos para construir significados a partir de aspectos cualitativos (Arrieta, 2005).

A su vez, en el proceso de modelación se puede considerar la *simulación* para hallar explicaciones a un rango e identificar variantes o invariantes a través de ajustes en su estructura (Suárez, 2014) con el fin de crear un patrón de comportamiento específico (Guevara, 2011). De hecho, de acuerdo con Suárez (2014), esto puede propiciar el desarrollo del razonamiento y de la *argumentación*.

La *representación* emerge entonces como un elemento clave en la modelación, como Guevara (2011) señala, este proceso integra: símbolos, signos, figuras, gráficas y construcciones geométricas (p. 10). Además, la representación puede ser vista como *objeto* y como *proceso*. El tránsito entre los diferentes sistemas de representación podría constituir entonces una asociación de objetos y una articulación de procesos.

Pero más allá de la representación, desde la TSME, en función de la racionalidad contextualizada, los entes matemáticos desempeñan el papel dual proceso–objeto, pudiendo ser considerados objetos con ciertas relaciones entre sí y, a su vez, como un objeto parte de una estructura más amplia de objetos; así, los procesos se componen de operaciones sobre esos objetos y transforman a los objetos mismos (Romero–Fonseca, 2016, p. 17).

Particularmente, el cambiar la centración en el *objeto* para enfocar la mirada en las *prácticas* no implica negar el *concepto objetivado*, sino sustentarlo en prácticas que le doten de sentido y significado. De esta manera, se concibe que "el *concepto objetivado*: propiamente el *objeto*, no es aprehensible por [las y] los estudiantes, sin el acompañamiento del *proceso objetivable*: la *práctica*" (Cantoral, 2013b, p. 114). Es decir, "la descentración del objeto no lo anula, solo promueve llegar a él luego de un trabajo pragmático con las prácticas asociadas (Reyes–Gasperini, 2016, p. 182).

Esta dualidad *proceso–objeto* se aborda particularmente en el caso de la *derivada*, concepto esencial en la noción de ecuación diferencial. En el esquema que se presenta en la ILUSTRACIÓN 4-3 se muestra un modelo de trabajo para ser considerado en la introducción de la noción de ecuación diferencial ordinaria con base en dicha dualidad a través de los procesos de diferenciación e integración. Específicamente, el esquema se halla en el contexto de una situación de movimiento al pasar de la posición a velocidad y de velocidad a aceleración, y viceversa.

A su vez, una segunda dualidad *discreto–continuo* se identifica inmersa en la anterior. En el esquema de la ILUSTRACIÓN 4-4 se presenta un modelo donde se integran las *estrategias variacionales* en el contexto de una situación de movimiento con base en esta dualidad. En particular, se muestra cómo la *estimación* puede considerarse de manera transversal a la *comparación*, *seriación* y *predicción* cuando se atiende el caso *continuo*. En este punto cobra importancia lo señalado por Suárez (2014), en cuanto que un trazo de forma global incluye aspectos asociados al fenómeno mismo, y lo que indica Arrieta (2003) respecto a la inducción como una práctica que permite, a partir de un "fragmento del fenómeno", anticipar su "comportamiento global".

Además, en el caso particular del contexto físico, dado el análisis realizado respecto a los fenómenos de movimiento, se identifica una tercera dualidad *absoluto–relativo*. En este sentido, si bien con una medida *absoluta* (por ejemplo, la distancia), como se muestra en la ILUSTRACIÓN 4-5, es posible identificar un comportamiento (por ejemplo, crecimiento constante), con base en una medida *relativa* se puede establecer un patrón que homologue el comportamiento identificado, tal como se muestra en la ILUSTRACIÓN 4-6 respecto al análisis de las diferencias en desplazamientos y del cambio en dichas diferencias.

El estudio de Oresme respecto a la *figuración de las cualidades* cobra sentido en el análisis de esta dualidad en cuanto que para describir el movimiento se abordaba la representación geométrica del *comportamiento* de la posición, es decir, de su velocidad (*medida relativa*). El nombre mismo de la *figuración de las cualidades* alude al análisis geométrico del comportamiento de la cualidad (velocidad).

Así, en el estudio del *cambio* (o del *cambio del cambio*) se recurre a una nueva unidad de medida: razón entre distancia y tiempo (o entre velocidad y tiempo), la cual permite concebir simultáneamente el desplazamiento del objeto (o su velocidad) y el tiempo transcurrido, donde la característica de la relación de medición dependerá de la *cualidad* (*tasa* en el sentido del cálculo fluxional) que se esté analizando (velocidad o aceleración).

Más aún, el concebir que se *mide* con respecto al tiempo, pero también se *compara* con base en él, conlleva reconocer justamente la necesidad de una medida relativa al *comparar* y *seriar*, pues el patrón de comportamiento (identificable con base en medidas absolutas) se *especifica* en la homologación de las cantidades al contar con un referente común.

En este punto la *tecnología* cobra especial importancia, pues interviene como una manera para indagar no solo procesos asociados a la modelación desde fenómenos de variación en otras ciencias, sino también como una forma de producir y reproducir las relaciones variacionales que se dan entre los objetos matemáticos involucrados (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010).

En este sentido, a la vez que tanto la teoría física como la matemática aportan información para el modelado del movimiento, el software de matemática dinámica (como GeoGebra) proporciona insumos para representar la situación (Rubio, Prieto y Ortiz, 2016), de tal manera que lo algebraico, numérico y gráfico se encuentren dinámicamente relacionados (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010). En consecuencia, más que considerar a las *variables* como letras que representan valores desconocidos, se les concibe como cantidades mesurables que cambian cuando las situaciones en que ocurren cambian (Parada, Conde y Fiallo, 2016).

Lo que se comenzó a vislumbrar con ello es que las representaciones dinámicas pueden consistir no solo en una manera *diferente* de abordar las matemáticas del cambio y la variación, sino que pueden constituir en sí mismas un medio congruente con la estructura dinámica de la variación en la ecuación diferencial.

En este sentido se encuentra la idea de Vasco (2006) que retoman Villa-Ochoa y Ruiz (2010) respecto a que "el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica" y la postura de Marciuc y Miron (2014) quienes señalan que nociones como la *derivada*, la *velocidad* y la *aceleración*, al ser representadas visual, dinámica e interactivamente con GeoGebra, pueden ser entendidas con mayor profundidad.

En la misma línea se encuentra la afirmación de Arrieta (2003) en cuanto a que "el conocimiento se ha ligado tangiblemente a una tecnología que transforma las prácticas sociales que lo posibilitaron" (p. 120). Como señalan Arrieta y Díaz (2016), cada modalidad de experimentación trae consigo características propias que imprimen su huella en la forma de modelar.

En especial, se asume que las representaciones basadas en tecnología pueden ser significativas para el alumnado e incluso más manejables, "limpias", flexibles y extensibles que sus contrapartes físicas (Sarama y Clements, 2016).

Así, considerando un ambiente dinámico digital, respecto a la dualidad *proceso–objeto*, en sintonía con Gray y Tall (2001), la imagen de una gráfica como *objeto materializado* que representa visualmente el concepto de función se puede expresar mediante una *acción materializada* facilitada por el software de matemática dinámica. Por ejemplo, al trazar una gráfica en la pantalla teniendo en paralelo la simulación del fenómeno, o bien, al explorar una animación del movimiento y visualizar los efectos en el objeto que se desplaza correspondientes a la modificación manual de parámetros asociados. Esta acción exploratoria (estrategia dinámico–variacional) puede acompañar la descripción cualitativa del movimiento (*diferenciación*) y anteceder la estimación continua del comportamiento (*temporalización*) que se manifiesta en la derivada.

En el caso de la dualidad *discreto–continuo*, lo discreto en la primera fila de la ILUSTRACIÓN 4-4 se puede abordar como "pausas" en la animación del movimiento, de tal manera que lo puntual (discreto) se aprecie como parte de un todo *continuo*. Asimismo, el patrón de comportamiento que se busca identificar en la *seriación* se puede explorar mediante la caracterización de invariantes en la variación de parámetros (ya sea mediante un deslizador, una casilla de entrada, el arrastre o alguna otra herramienta dinámica).

Y respecto a la dualidad *absoluto–relativo*, el análisis del movimiento que en el sistema gráfico puede partir de un plano cartesiano con dos ejes: uno *temporal* y otro *espacial*, en el ambiente digital, mediante la simulación, puede partir del mismo fenómeno animado, donde la dimensión espacial se manifiesta en el desplazamiento del objeto y la dimensión temporal se puede apreciar como en una *experimentación presencial*, considerando el propio transcurrir del tiempo, pero con la posibilidad de manipular dicho transcurso a través de alguna de las herramientas dinámicas. A su vez, la vista gráfica asociada en la interfaz puede mostrar la representación correspondiente con las variaciones respectivas (Roschelle y Hegedus, 2013).

En dicha interacción, el medio provee una *retroalimentación* que no se reduce a un *valor pragmático* en la eficiencia de producción de representaciones, sino que posee también un *valor epistémico* ligado a la propia epistemología del conocimiento matemático en cuestión. Esta caracterización de *valores* de Artigue (2002) conforma un elemento clave en el análisis conducido alrededor de la *naturaleza dinámica* de la variación en las ecuaciones diferenciales con base en los aspectos epistemológicos identificados.

Aquí cabe hacer una aclaración con relación a lo señalado por Roth (2014) respecto a la atención sobre dónde poner énfasis en las iniciativas interdisciplinarias, pues se asume que se parte desde la matemática educativa con el objetivo de analizar la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria en el contexto de una situación de movimiento, es decir, en ello se busca centrar la atención y, por ende, aspectos *naturales* como los contratiempos que pueden surgir durante la experimentación se reducen tanto como sea posible en este caso, pues queda fuera de los objetivos el discutir por qué el sistema podría no funcionar apropiadamente.

En este sentido, no se niega que la ocurrencia de contratiempos durante la experimentación sea importante para la práctica profesional de la comunidad, solo se acota que ello no es abordado en el diseño dado el problema de investigación establecido (capítulo 3).

Se recurre así a la experimentación *virtual* –la cual comprende la *simulación* en ambientes digitales a través de animaciones interactivas– pues, como sugieren Rubio, Prieto y Ortiz (2016), la simulación se postula como un elemento que permite fusionar la modelación con las tecnologías digitales para vincular hechos e ideas asociadas a un fenómeno físico. Y, más aún, como se ha venido sugiriendo, se postula que la propia naturaleza dinámica de la variación en la ecuación diferencial se encuentra intrínsecamente relacionada con las representaciones dinámicas que, en particular, permite un software de matemática dinámica, como es el caso del software libre GeoGebra.

Como señalan Parada, Conde y Fiallo (2016), en este ambiente, "todas estas variaciones se pueden representar *en movimiento*" (p. 1035), con lo cual se potencia la visualización de *variantes* e *invariantes* y, por ende, se "involucra al concepto de *función* como la generalización de la *interdependencia* entre magnitudes variables" (pp. 1035-1036). Así, se postula que el ambiente digital de matemática dinámica se conciba como un medio en el cual conviven los dominios *real* y *matemático* (en alusión a los términos que emplea Rodríguez y Quiroz, 2016). Es decir, que *modelo* y *modelado* (en el sentido de Arrieta y Díaz, 2015) se presentan en un mismo ambiente.

En el caso de la *noción de derivada*, esencial para la conceptualización de la ecuación diferencial, Cantoral (2013a) señala que solo puede ser estabilizada hasta que la derivada sea usada como una articulación de las derivadas sucesivas y, retomando la investigación de González (1999, como se citó en Cantoral, 2013a), no es suficiente con dotar de significado a la *primera derivada*, pues se requiere de un tratamiento de *ida y vuelta* [o "ida y venida"] entre las funciones y sus derivadas.

En cuanto a lo primero, para la presente investigación se retoma el tratamiento de las derivadas sucesivas no consecutivas a través de la relación $f \leftrightarrow f''$ en el contexto del paso de la *posición* a la *aceleración* y viceversa. Respecto a lo segundo, la articulación de las derivadas sucesivas se plantea desde el plano físico a través de un proceso de ida y vuelta en la triada *posición–velocidad–aceleración*.

Para ello, se retoma a su vez lo que indica Cantoral (2002, como se cita en Cantoral, 2013a) respecto a que "en las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento" (p. 65).

Asimismo, lo señalado por Romero y Rodríguez (2003), respecto a que el concepto de velocidad instantánea se encuentra en la identificación de este tipo de velocidad como variable continua que da cuenta del *estado* de movimiento de los cuerpos, en lo cual destaca "la pertinencia de la representación geométrica en los procesos de construcción conceptual del fenómeno del movimiento y, consecuentemente, en los procesos para su matematización" (p. 63).

Por ende, se reconoce el papel de la graficación como un elemento que promueve el tránsito entre el fenómeno físico y el modelo matemático que lo describe. De hecho, se considera la posibilidad de concebir a la modelación como una actividad anclada a la graficación cuando se estudia situaciones de movimiento, como sugieren Mendoza y Cordero (2012, p. 1028) con base en el *binomio modelación–graficación* de Suárez (2014).

En especial, se postula que en dicho proceso el papel de las representaciones dinámicas (en ambientes digitales) configura un eje para la construcción de la noción de ecuación diferencial mediante un trabajo coordinado entre los sistemas gráfico, numérico y algebraico (en correspondencia con la necesidad que señala Hernández, 199).

Ahora bien, con relación a las condiciones iniciales, se retoman los hallazgos de Buendía y García (2002) en el contexto gráfico de resolución, en cuanto que para las ecuaciones diferenciales de primer orden, al estar la familia de soluciones conformada por un conjunto de curvas que no se intersecan, basta con una condición *inicial* que indique un punto por el cual pase la curva para determinar una solución particular y que, en el caso de las de segundo orden, se requiere además conocer cómo es que pasa la curva en dicho punto pues existe la posibilidad de que las curvas se intersequen, lo cual se determina a partir de una segunda condición *inicial*.

En los ambientes digitales, como se describió en la sección 4.4 a través de la ILUSTRACIÓN 4-7, una representación dinámica podría corresponder –al mismo tiempo– a la solución particular y al conjunto de soluciones del sistema, de tal manera que la curva solución adecuada a las condiciones del fenómeno se determine a través de un arrastre en el plano. Es decir, las posibles ubicaciones de la curva manifiestan que el conjunto de curvas solución tiene un comportamiento específico (similar a como lo hace el campo de direcciones). A su vez, el hecho de que sea una sola curva manifiesta la existencia y unicidad de la solución.

En este punto cabe aclarar que sin duda se puede hacer un tratamiento más profundo sobre la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria, como sugiere Fallas (2015); sin embargo, para la presente investigación dado que el estudio se basa en la triada posición–velocidad–aceleración, la existencia y unicidad de la solución se plantea en términos del fenómeno. Como señalan Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016), abordar esto mediante la *modelación* de un fenómeno físico permite justamente articular los diferentes significados contextuales de las condiciones iniciales para una resignificación de la relación entre el orden de una ecuación y su número de condiciones iniciales (Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar, 2016, p. 116).

En cuanto al género en la dimensión *cognitiva*, se asumen los resultados reportados por Lindberg et al. (2010) quienes concluyen que, de acuerdo con los 242 artículos publicados entre 1990 y 2007 (los cuales representan 1,286,350 personas), los hallazgos respaldan la visión de que hombres y mujeres se desempeñan de manera similar en matemáticas, sin diferencias significativas, es decir, que poseen un potencial similar.

Asimismo, en consonancia con lo anterior, se asumen los hallazgos de Spelke (2005) en su revisión de reportes de investigación basados en estudios del comportamiento y las neuroimágenes en la cognición humana, los cuales demuestran que el talento de la especie humana para el pensamiento matemático y científico posee como importante base genética un conjunto de sistemas centrales para representar a los objetos, el espacio y el número, los cuales están *igualmente* disponibles para hombres y para mujeres.

Es decir, se concuerda en que es más probable que "el desempeño de hombres y mujeres en pruebas estandarizadas [las cuales constituyen el principal referente sobre la diferencia en desempeño] refleje una compleja mezcla de factores sociales, culturales y biológicos" (p. 956, traducción personal).

En este sentido, se destaca la importancia de analizar las formas en las que las y los jóvenes construyen y usan el conocimiento matemático considerando "las herramientas y argumentos que ponen en juego en la construcción de consensos o en la toma de decisión al enfrentar una situación que precise del uso del conocimiento matemático" (Farfán y Simón, 2016, p. 83), específicamente tomando en cuenta la relatividad epistemológica y la racionalidad contextualizada dados los hallazgos en la línea socioepistemológica que sugieren que la forma en la que las jóvenes enfrentan un reto o una situación problemática no tiene una respuesta única, contrario a lo exigido en las pruebas estandarizadas (p. 181) y que, como se señaló en la dimensión *didáctica*, al no considerar el *carácter funcional del saber*, la exclusión del discurso matemático escolar se intensifica en ellas, pues sus respuestas, inferencias, explicaciones y argumentaciones tienden a tomar en cuenta una gran cantidad de variables relacionadas con el fenómeno específico (p. 181).

Lo anterior da evidencia de la transversalidad de lo *social* en las demás dimensiones dado el carácter social de la construcción de conocimiento matemático que se asume y por lo cual se reconoce como una de las *dimensiones del saber* a ser analizadas.

¿Cómo se aprende y cómo se enseña? ¿Cómo se produce la difusión institucional? (Reyes–Gasperini, 2016, p. 57).

Esta dimensión se centra en los roles que juegan quienes participan "y en el papel que tiene el saber en tanto construcción social del conocimiento en sus tareas principales: la construcción de consensos, los usos y las prácticas y la elaboración y adaptación de los instrumentos mediadores" (Cantoral, 2013b, p. 146).

Al reconocer que la racionalidad es contextualizada, se reconoce que el aprendizaje es situado y, por ende, habrá implicaciones de la sociedad y su cultura en este mismo ámbito. En el caso de la *modelación matemática*, relevante al considerar el *carácter discursivo en la construcción social del conocimiento* que reconoce Arrieta (2003), se contempla la *interacción* de quienes participan en la construcción del conocimiento con otras personas que también participan, con las herramientas que emplean y con las realidades que abordan. En particular, el autor considera las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil, concibiendo a la comunicación como una *modelación compartida* de un fenómeno a través de una acción conjunta, incluyendo el *lenguaje natural*, *escrito* y *hablado*; las *gráficas* utilizadas, los *gestos* y *señas*; y los *movimientos* que se reproducen.

Esta consideración tiene un impacto significativo dada la preocupación manifestada sobre la problemática de *género* (entendido como una caracterización sociocultural) existente alrededor de la participación de las mujeres en las carreras STEM. Como se mencionó en la sección 4.3, la concepción binaria hombre–mujer, pese a ser base de un discurso divisorio, al mismo tiempo ha permitido visibilizar una problemática que ha afectado a las mujeres como *grupo social* (y análogamente ha ocurrido con los hombres en otros ámbitos), con ciertas especificidades colectivas –no restrictivas– que se han de explicitar y esclarecer con el fin de confrontarlas.

En términos generales, una característica singular en el caso de las mujeres en el área STEM en el Nivel Superior radica en su escasa participación. Sobre ello, se reportan diferentes razones, pero en particular, dados los hallazgos de Lindberg et al. (2010) que respaldan la visión de que hombres y mujeres se desempeñan de manera similar en matemáticas, sin diferencias significativas, y de trabajos como los conducidos por Spelke (2005), Dasgupta y Stout (2014), Master y Meltzoff (2016), Good, Aronson e Inzlicht (2003) que destacan la necesidad de enfocar la atención hacia aspectos socioculturales, se concluye que la problemática va más allá de aspectos biológicos (en los que se centraban antiguamente las justificaciones de las diferencias en el desempeño matemático entre sexos y que hoy en día se siguen empleando en diversas esferas de la sociedad). Sobre todo teniendo en cuenta que "no hay cuerpo que no haya sido marcado por la cultura" (Lamas, 2013, p. 160) y, por ende, difícilmente se podría ser concluyente respecto a diferencias netamente biológicas.

En esta línea, se reconoce que la necesidad de rescatar el *carácter funcional del saber* cumple una doble intencionalidad: al buscar recontextualizar el aprendizaje en matemáticas y al propiciar la integración de las mujeres estudiantes al proceso de construcción del conocimiento matemático, dados los hallazgos de Farfán y Simón (2016).

Particularmente, respecto a las interacciones en el aula, se destaca la observación de estas autoras en cuanto a que la forma en como las jóvenes talentosas en matemáticas constituyen su relación con el conocimiento matemático con base en su funcionalidad se encuentra en la base de la relación que establecen a su vez con otros individuos. De tal modo que la forma en que ellas se relacionan con las personas y con el medio en el que se desenvuelven es justamente a través de la búsqueda del conocimiento, priorizando su valor *funcional* por sobre el *conceptual*.

Asimismo, el buscar propiciar acercamientos cualitativos a las ecuaciones diferenciales parte de reconocer la necesidad de abordar problemas cercanos a la práctica profesional de la comunidad con quienes se trabaja, pues en la investigación e industria es más probable que la solución de una ecuación diferencial ordinaria se obtenga a partir de un conjunto de datos que de una función explícita (Hernández, 1995).

Sin embargo, como señalan Mendoza y Cordero (2012) respecto a la dimensión didáctica, la matemática presentada al ingeniero en formación es *acabada*, pues las ecuaciones que modelan los fenómenos que estudia la ingeniería ya están institucionalizadas y difícilmente se pueden modificar para provocar otras variantes en los fenómenos (p. 1025).

De ahí que existan resultados como los de la encuesta reportada por Arrieta y Díaz (2015) donde, al cuestionar a personas egresadas de un instituto tecnológico mexicano sobre el uso de las ecuaciones diferenciales en su vida profesional, el 96% señaló que *nunca* las usa (p. 22).

Esto, lejos de interpretarse como que en el ejercicio profesional de la ingeniería no se emplean ecuaciones diferenciales, parece responder a un tratamiento claramente diferenciado en la práctica profesional respecto al trabajo que se aborda en la matemática escolar, lo cual es consistente con las conclusiones del análisis realizado en el capítulo 2.

La importancia de la tecnología para establecer un puente entre la matemática escolar y las prácticas de referencia se encuentra en línea con lo señalado por Salinas (2013). Ella comenta que la exploración con las herramientas computacionales permite al alumnado reorganizar estrategias para la resolución de problemas. En primer lugar, ellas y ellos pueden hacer algunas observaciones situadas que pueden estar asociadas con cierta propiedad, teorema o fórmula donde el ambiente facilita su identificación. Esto constituye una prueba situada, el resultado de una exploración sistemática explotada intencionalmente dentro de un ambiente computacional con el fin de "probar" relaciones matemáticas.

Más aún, la autora señala que a través del desarrollo histórico de las matemáticas, un cierto ir y venir entre los acercamientos inductivo y deductivo es reconocido, entonces, la prueba no afecta al teorema que fue concebido en el pasado sin el rigor moderno estándar (aquí se reconocen el *relativismo epistemológico* y la *racionalidad contextualizada*). Por ende, la investigadora sugiere que tal vez observar los resultados matemáticos emergiendo de la actividad humana pueda proveer elementos más apropiados al ambiente cultural del aula (Salinas, 2013), lo cual es justamente parte del enfoque socioepistemológico.

Para la presente investigación, se identifica la práctica en fisicomatemáticas como un campo profesional que demanda, en principio, una articulación de conceptos entre ambas disciplinas (física y matemáticas). En este sentido, se tiene presente que caracterizar sus prácticas conlleva un estudio minucioso de su labor, lo cual queda fuera de los objetivos del estudio; sin embargo, se rescata como punto de partida la necesidad de plantear los inicios de un puente entre ambas disciplinas que se conduzca mediante la modelación matemática de fenómenos físicos como rasgo esencial.

En concordancia con lo anterior, retomando la concepción de Mendoza y Cordero (2012), quienes consideran a la modelación “como una práctica social que construye conocimiento y que expresa una funcionalidad del conocimiento matemático” (p. 1026), se perfila que tal puente se establezca en términos de una matematización de la física que rescate el *carácter funcional* del saber.

Más aún, se retoma el aporte de Huffaker y Calvert (2003, como se citó en Hegedus y Moreno–Armella, 2013), respecto a que el enlace del trabajo privado (individual) de una manera matemáticamente significativa a través de redes, y mostrando los aportes de todo el trabajo de la clase (sus integrantes), promueve potencialmente la habilidad metacognitiva del alumnado para reflexionar respecto a su propio trabajo con relación al de los demás (p. 51).

Este punto es especialmente crítico en la última fase de la implementación del diseño para fomentar un consenso basado en los principios de *racionalidad contextualizada* y de *significación progresiva*. En dicho proceso, el uso de la tecnología –específicamente, el uso de la plataforma GeoGebra– favoreció el enlace entre el trabajo individual y el colectivo.

Por otro lado, como describe Tall (2013), la naturaleza de los acercamientos prácticos cambiará conforme la tecnología disponible evolucione y permita nuevas formas de dar sentido a las nociones dinámicas de continuidad y de las matemáticas de cambio y variación (p. 459).

Por ende, este autor ve a las nuevas tecnologías creando la posibilidad de reconectar las representaciones matemáticas y conceptos con el fenómeno directamente percibido, así como para fortalecer la comprensión de las y los estudiantes de conexiones entre diferentes formas de representación matemática. Partiendo de antecedentes más familiares, tales como gráficas y movimiento, ambos en su forma kinestésica y cibernética, y desarrollando hacia representaciones matemáticas más compactas y formales, se ve la oportunidad de crear un nuevo camino para el acceso a las matemáticas que frecuentemente permanece como exclusivo de una elite reducida (Tall, 2013, p. 461).

Si bien usualmente se cree que la unión de dimensiones permite un análisis sistémico del fenómeno, donde cada dimensión se sume o se una para llevar a cabo un análisis robusto, Cantoral (2013b) señala que se precisa de una *unidad de análisis socioepistémica* que articule a las dimensiones con el fenómeno en juego, por lo cual resulta indispensable un análisis de la transversalidad del saber y para ello es que se elige saberes que sean a la vez funcionales y transversales (pp. 143-144). De acuerdo con Reyes–Gasperini (2016), la *unidad de análisis socioepistémica* es una estructura teórica que evidencia la unidad fundamental de la problematización del saber matemático (p. 52).

En este sentido, para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se identificó un elemento que permite articular las cuatro dimensiones y, por tanto, perfilar una unidad de análisis socioepistémica: *lo dinámico*.

Una primera parte de la configuración de esta unidad (*uase*–A) se esquematiza en la ILUSTRACIÓN 4-10. En ella se articulan las etapas de trabajo (*identificación del cambio*, *geometrización del cambio*, *numerización del cambio* y *temporalización del cambio*), dos de las dualidades identificadas (*proceso–objeto* y *discreto–continuo*), las estrategias variacionales (*comparar*, *seriar*, *predecir* y *estimar*), dos elementos del sistema de referencia (*variables* y *temporización*), los tipos de análisis físico (*cinemático* y *dinámico*) y las estrategias dinámicas que se han perfilado hasta el momento con base en el análisis dimensional realizado (*exploración de parámetros*, *identificación de invariantes* y *ajustes en la estructura*).

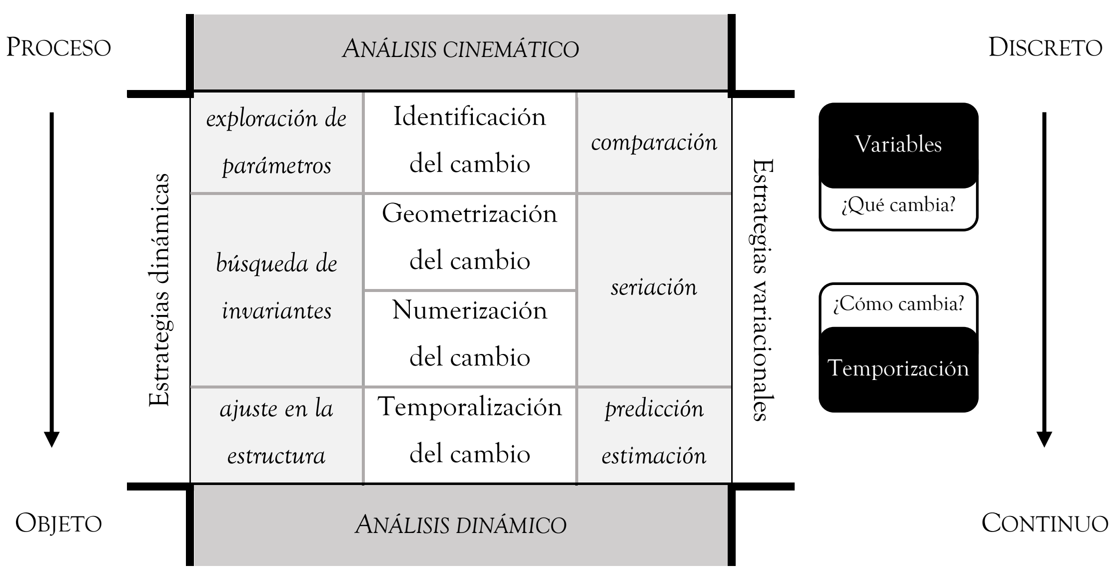


ILUSTRACIÓN 4-10 Configuración de la unidad de análisis socioepistémica (primera parte: *uase*–A).

Una segunda parte de la configuración (*uase*–B) se muestra en la ILUSTRACIÓN 4-11. Esta parte representa el ciclo de trabajo con base en la triada de movimiento (*posición–velocidad–aceleración*) incorporando en cada fase el esquema de la primera parte de la configuración. En ella se integra la tercera de las dualidades identificadas (*absoluto–relativo*), los dos elementos del sistema de referencia restantes (*unidad de referencia* y *unidad de medida*) y una estrategia dinámica más (*arrastre con base en condiciones iniciales*).

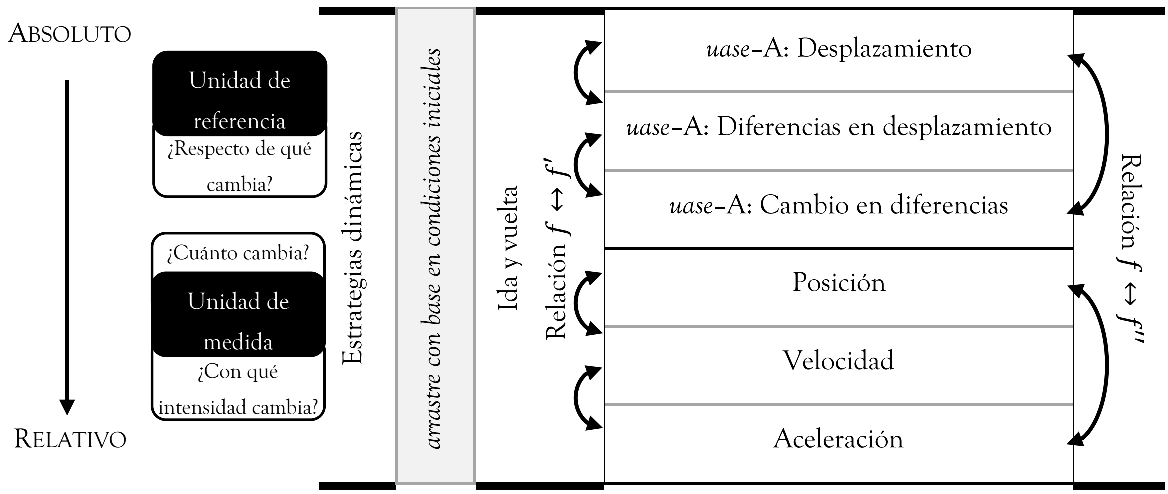


ILUSTRACIÓN 4-11 Configuración de la unidad de análisis socioepistémica (segunda parte: *uase*–B).

La dimensión *social* se evidencia en esta configuración en el tratamiento *funcional* que se hace del saber con base en las estrategias dinámicas y las estrategias variacionales, es decir, constituye un elemento transversal de la *uase*, consistente tanto con la perspectiva socioepistemológica de modelación adoptada como con la perspectiva de género asumida.

Específicamente, la relación *modelo–modelado* se considera en cada vínculo que se realice entre la situación real y alguno de sus modelos matemáticos (de naturaleza gráfica, numérica, algebraica o dinámica) o físicos.

El objetivo del diseño para la fase empírica del estudio consiste entonces en buscar significar (o resignificar) la variación en la ecuación diferencial ordinaria a partir de la descripción (cualificación y cuantificación) del cambio en el contexto de un fenómeno de movimiento y la confrontación del proceso de integración con la necesidad de condiciones iniciales para determinar una cantidad a partir de su cualidad.

Donde, en el caso absoluto, la *cantidad* puede corresponder a la posición (desplazamiento) o a las diferencias en desplazamientos y la *cualidad* a las diferencias en desplazamientos o al cambio en diferencias. O bien, en el caso relativo, *cantidad* a la posición o velocidad y *cualidad* a la velocidad o aceleración, respectivamente.

Para ahondar un poco más, se define la postura del estudio respecto a la práctica social *Prædiciere*. Cantoral (2013b) comenta que:

> El surgimiento del Cálculo no estuvo asociado exclusivamente al estudio de los procesos infinitos o al arribo del concepto de límite a la matemática [...] sino más bien y en definitiva, a la existencia de *campos de prácticas* que guiaban y estructuraban el proceso de construcción del pensamiento matemático avanzado a lo largo de los siglos. (pp. 108-109).

A ello denominaron «el *Prædiciere*» y le caracterizaron como "la acción intelectual del sujeto epistémico sobre los datos fácticos para establecer patrones de regularidad del comportamiento de lo que ha de predecirse. Acción que tiene efecto, sólo con el conocimiento de las explicaciones causales de los fenómenos estudiados" (Cantoral, 2013b, p. 109).

En la presente investigación se considera al *Prædiciere* de una manera amplia, en cuanto que, además de buscar *predecir* estados futuros del fenómeno, se busca describir sus estados previos y actuales, es decir, se asume en estrecha relación con la *estimación*. Así, se ve a la causalidad y la temporalización del movimiento no solo como medios *para* predecir, sino también como fines en sí. Particularmente, esto tiene implicaciones en la interpretación del *Prædiciere* como *esquema*, *modelo* y *teoría*.

De acuerdo con Cantoral (2013b), *Prædiciere* como esquema consiste en concebirlo "en tanto *noción* o *preconcepto* [...] que se relaciona a su vez con fenómenos del movimiento de los cuerpos en el espacio..." (pp. 110-111) y que "más tarde se traduce o se expresa en tablas numéricas [...] [y luego] en ecuaciones con variables continuas de naturaleza cuasi empíricas" (p. 111). Señala que lo anterior se produce en un contexto específico que evoluciona desde el momento en el que los fenómenos de movimiento eran interpretados cualitativa e intuitivamente, hasta que fueron concebidos en el marco de esquemas que se pueden llamar *aristotélicos*, los cuales "centraba[n] la mirada en los atributos inherentes a los cuerpos y no en las medidas y comparaciones de las relaciones entre variables del movimiento" (Cantoral, 2013b, p. 111).

En el *Prædiciere* como *modelo*, basado en una "primera significación que permite reconocer el todo solo con mirar la parte" (Cantoral, 2013b, p. 111), evoluciona "hasta conformarse en el estudio del elemento puntual para el conocimiento del todo global" (p. 111). En este punto, el estudio respecto a la *velocidad instantánea* de Romero y Rodríguez (2003) cobra especial importancia, así como las consideraciones de Suárez (2014) y Arrieta (2003). Con ello se ve un paso "del elemento diferencial a la integración" (Cantoral, 2013b, p. 112), crucial en la noción de la derivada como proceso y objeto. Así, el *Prædiciere* como *modelo* se "centra [...] en la búsqueda de todas las relaciones –prácticas y utilitarias– existentes entre variables vinculadas al movimiento: *tiempo*, *posición*, *velocidad* y *aceleración*” (p. 112).

En el presente estudio, lo anterior se emplea como parte de la base para el análisis del tránsito entre diferentes órdenes de variación a través de la ecuación diferencial ordinaria. En este sentido, si bien la EDO suele ser asumida como un objeto matemático puramente algebraico, se reconoce que esta posee prácticas asociadas a la descripción del cambio como cualificaciones, cuantificaciones y comparaciones, por lo que su proceso de resolución, más que con un método, se corresponde con caracterizar la evolución de estados a partir de cualidades en su comportamiento.

Finalmente, el *Prædiciere* como *teoría* “surge cuando este principio y su afirmación como modelo, se incorporan al modelo formal de las matemáticas para desarrollarse posteriormente mediante principios, corolarios, axiomas, teoremas, procedimiento, ...” (Cantoral, 2013b, p. 112), lo cual, en palabras del autor, “se suele asociar con los momentos de formalización y, en consecuencia, se tornan en el sostén de los diversos paradigmas educativos” (p. 112).

Lo último se asocia con lo que se identificó durante el análisis presentado en el capítulo 2, pues en el sistema educativo lo que suele normar la didáctica es la visión teórico–formal, obviando la evolución del *Prædiciere* como *esquema* y *modelo*.

La triada descrita respecto al *Prædiciere* como *esquema–modelo–teoría*, señala Cantoral (2013b), “opera al nivel del pasaje (el tránsito) entre *conocimiento* y *saber*” (p. 110). Y en dicho tránsito, para el presente estudio, se considera el uso de *estrategias dinámicas* a la par de las *estrategias variacionales*.

Conceptualmente, la noción de ecuación diferencial ordinaria podría partir de concebir a este objeto mediante tres aspectos: (a) que en ella aparece al menos una *derivada* (como función o como cociente de diferenciales) de la función a analizar; (b) que a través de ella es posible *relacionar* una o más derivadas de diferente orden y la propia función; y (c) que su solución es de tipo funcional y depende de condiciones particulares (llamadas *condiciones iniciales*) asociadas al fenómeno descrito.

A raíz de la problematización del saber realizada, mediante un análisis sistémico de las dimensiones descritas, se identifica una aproximación pragmática para anteceder y acompañar la construcción conceptual de esta noción.

En primer lugar, tras observar el acercamiento **didáctico** tradicional para introducir la noción de ecuación diferencial ordinaria a través de una evolución conceptual del objeto ("estas son sus partes", "estos son sus tipos" y "estas son sus soluciones") resulta *natural* que el enfoque del curso se torne hacia la clasificación de las ecuaciones diferenciales y la memorización de sus algoritmos correspondientes de resolución.

En contraste, el análisis **epistemológico** alrededor de esta noción revela que su construcción parte de la fenomenología intrínseca de lo dinámico en la descripción del cambio y la variación en un *fenómeno físico de movimiento*. Específicamente, que en el análisis de su comportamiento emerge como necesario describir su *cualidad*, es decir, las características de su evolución a través de diferentes estados temporales como medio para identificar lo variante e invariante que permita una posterior temporalización del fenómeno y la relativización de su medida. Por ende, no se trata de una mera inversión de "hallar la derivada de una función" hacia "hallar la función cuya(s) derivada(s) se expresan", sino que parte de que, en la descripción de la caída libre de un objeto, la función que describe su desplazamiento se construye a partir del análisis progresivo de su cambio. En consecuencia, se parte del *cómo* es la función (de posición en este caso) para determinar *cuál* es esa función.

En el plano **cognitivo**, dicho análisis progresivo provee una alternativa pragmática al estudio de la evolución *proceso–objeto* que constituyen la diferenciación e integración en el uso de la ecuación diferencial ordinaria para realizar un análisis variacional del movimiento; asimismo, de las dualidades asociadas *discreto–continuo* y *absoluto–relativo* a través de la visualización en la exploración dinámica con el fenómeno, particularmente, mediante una experimentación digital. Con relación al plano **social**, se asume que el conocimiento adquiere significado a través del uso que le da sentido y, por ende, que en la construcción de un *modelo* habrá de considerarse características que respondan al fenómeno específico *modelado*. En este sentido, se asume que, para *quien modela*, el intercambio social en la construcción de consensos promueve potencialmente su habilidad metacognitiva para reflexionar respecto a su propio trabajo considerando los principios de *significación progresiva*, *racionalidad contextualizada* y *relativismo epistemológico* y que, en el caso de las mujeres, propiciar un intercambio basado en la *funcionalidad* del saber puede favorecer su participación y, consecuentemente, el desarrollo de su sensación de pertenencia al reconocerse como parte de quienes construyen conocimiento matemático.

En cuanto a las implicaciones didácticas que este análisis puede tener en la elaboración de un rediseño, en el capítulo 6 se presenta –en términos de una *trayectoria hipotética de aprendizaje*– el diseño que se configuró con base en dicho análisis para la fase empírica de la investigación. Previo a ello, en el capítulo 5 (a continuación) se plantea la hipótesis de investigación para el estudio y las preguntas que se establecieron como guía para conducirlo.

5. Hipótesis y preguntas

Para el desarrollo de la investigación se estableció una hipótesis de corte epistemológico buscando ser doblemente pertinentes: con relación a la problemática identificada (capítulos 1 y 2) y en cuanto al sustento teórico descrito (capítulo 4). En síntesis, se postula que:

La noción de variación en la ecuación diferencial surge de modelar un fenómeno de variación (como el movimiento) a partir de su naturaleza dinámica.

Como puede apreciarse, en esta hipótesis interviene la necesidad de rescatar el carácter funcional del saber (acorde con la doble problemática identificada respecto a la desarticulación curricular en el Nivel Superior y la relación género–matemáticas en las carreras STEM), la modelación matemática de un fenómeno de variación (particularmente, a partir del análisis variacional del movimiento), el uso de tecnología para abordar representaciones dinámicas (en este caso, en ambientes digitales) y la articulación de diferentes sistemas de representación.

Respecto al último punto, se establece como definición complementaria a la hipótesis que:

La naturaleza dinámica de la variación se constituye a partir de la correlación de variables, independientemente del contexto desde el cual se aprecien (físico, gráfico, numérico, algebraico), en donde la caracterización funcional de la relación se establece en la identificación de invariantes a partir de la variación continua de parámetros.

En particular, se definen dos acepciones de lo dinámico: con respecto a la relación de variables (*estrategias dinámicas*) y con respecto a las transformaciones de los objetos (*acciones dinámicas*). La primera alude a la *naturaleza dinámica* de la variación, mientras que la segunda se refiere al movimiento en ambientes dinámicos (como traslaciones o rotaciones).

La *estrategia dinámica* emerge entonces en el uso del instrumento con una intención particular en el análisis de fenómenos de variación, es decir, se encuentra estrechamente ligada al *valor epistémico* del instrumento, en cuanto las acciones instrumentadas promuevan el planteamiento de preguntas respecto al conocimiento matemático involucrado.

Por ejemplo, el permitir el arrastre libre de una gráfica en un plano coordenado (como se planteó a través de la ILUSTRACIÓN 4-7), que en principio consiste en una *acción dinámica*, podría propiciar el surgimiento de una *estrategia dinámica* al promover que se cuestione sobre la necesidad de condiciones iniciales para determinar una cantidad a partir de su cualidad, es decir, en el establecimiento de una solución particular a una ecuación diferencial.

Las particularidades de este proceso se basan en lo descrito en el capítulo 3 y en las reflexiones derivadas de la articulación teórica a través de las dimensiones *didáctica*, *epistemológica*, *cognitiva* y *social* que se presentaron en la sección 4.6.

En específico, se propone explorar la hipótesis empíricamente (capítulo 6) con base en la *unidad de análisis socioepistémica* que se esquematizó en las ILUSTRACIONES ILUSTRACIÓN 4-10 y ILUSTRACIÓN 4-11 alrededor de *lo dinámico*. Para tal finalidad, y con miras hacia el análisis de datos (capítulo 7), se establecieron las siguientes preguntas de investigación:

Durante la resolución del diseño:

[*Var*] ¿Qué variables se consideran en la exploración inicial del fenómeno?

[*EstDin*] ¿Emergen las estrategias dinámicas perfiladas? ¿De qué manera se exploran?

[*CIArr*] Particularmente, en el caso de la estrategia dinámica *arrastre con base en condiciones iniciales*, ¿cómo actúa el alumnado ante las relaciones $f \leftrightarrow f'$ y $f \leftrightarrow f''$ en el arrastre de las representaciones gráficas? ¿Emerge la necesidad de condiciones iniciales a través del arrastre?

Tanto en la resolución del diseño como en la socialización de resultados:

[*ArgVar*] ¿Qué argumentos variacionales se emplean? ¿De qué naturaleza son (gráficos, numéricos, algebraicos)?

[*NumGraf*] ¿De qué manera se recurre a las tablas numéricas y a las gráficas para argumentar respecto al fenómeno? ¿Se integran diferentes sistemas?

[*NocFis*] ¿Qué nociones físicas se incorporan a la argumentación?

[*Gen*] ¿Qué aspectos asociados al género (cultural) se observan?

En la socialización de resultados:

[*Val*] ¿Qué argumentos emergen respecto a la validez de los modelos generados (gráficas, tablas, fórmulas)? ¿Qué postura se adopta respecto a la racionalidad contextualizada durante la construcción de consensos?

6. Método

En el presente capítulo se describe el método seguido durante la fase empírica del estudio. En un inicio, en la sección 6.1, se describe la población con quienes se trabajó y, en la sección 6.2, se detallan las herramientas empleadas para el registro de datos (*recursos tecnológicos* y *cuaderno de notas*).

Posteriormente, en la sección 6.3, se presentan los instrumentos que fueron empleados: el *diseño* para abordar la hipótesis y preguntas de investigación (subsección 6.3) y la *encuesta* para conocer el entorno sociocultural de las y los participantes (subsección 6.3.2). Respecto a la *validación* del primero de los instrumentos, en la sección 6.4 se describe la prueba piloto del diseño y las observaciones que de ella emanaron.

Finalmente, en la sección 6.5, se describe la *implementación* del diseño, es decir, los detalles de su aplicación con la población de estudio y, en la sección 7.3, las *limitaciones* que surgieron durante este proceso.

6.1. Población de estudio

La población con quienes se trabajó estuvo conformada por un grupo de 11 estudiantes (3 mujeres y 8 hombres), de entre 18 y 19 años de edad, de una carrera fisicomatemática en una universidad mexicana. En particular, las y los alumnos se encontraban próximos a cursar la asignatura de Ecuaciones Diferenciales por primera vez.

De acuerdo con el programa de estudios de la carrera (parte de él se muestra en la TABLA 1-1), dicha asignatura forma parte del segundo semestre y, según el reglamento de la institución, para poder inscribirse en ella es necesario haber aprobado previamente el curso de Cálculo I (asignatura de primer semestre).

En general, la asignatura de Cálculo I presenta un bajo índice de aprobación en tal institución. De hecho, todas y todos los participantes la acababan de cursar por segunda vez. Por ende, habían cursado al menos una vez todas las asignaturas del primer semestre e, incluso, hubo quienes acababan de cursar otras asignaturas del segundo semestre también. Así, se trabajó con una comunidad que ya había tomado el curso de Física I y/o el de Física II, pues corresponden, respectivamente, al primer y segundo semestre de la carrera.

Con relación a la problemática de género, el porcentaje promedio de mujeres a lo largo de dicha carrera es de aproximadamente un 20%. En el caso del grupo que participó en el estudio, el porcentaje de mujeres fue similar aunque, en sus grupos escolares respectivos (no todas formaban parte del mismo grupo y no todos los hombres de sus grupos accedieron participar en el estudio), tal porcentaje disminuía pues la cantidad de hombres era mayor.

Además, respecto a la misma problemática, en un estudio de caso previo (Carranza–Rogerio, 2016) se reportan algunos resultados particulares sobre la *sensación de pertenencia* de las mujeres en dicha carrera, los cuales se resumen a continuación:

- *En cuanto a la autodefinición de las mujeres estudiantes*: Se sienten mujeres capaces por encontrarse en esa carrera; sin embargo, gran parte de la muestra considera que las mujeres no suelen mostrar interés en el área de matemáticas y por ello se conciben a sí mismas como un caso fuera de lo común; asimismo, la mayoría manifiesta que se siente más identificada con sus pares hombres y algunas de ellas relacionan incluso esto directamente con el hecho de estudiar una carrera de esa naturaleza.

- *Con respecto a la forma en la que las estudiantes perciben que la sociedad ve a la mujer en matemáticas*: Todas consideran que la sociedad, en general, ve a los hombres con más habilidad que las mujeres para las matemáticas; al comparar sus creencias con las de sus compañeros hombres, ellas asocian implícitamente más que ellos a lo masculino con las ciencias exactas. Además, algunas mencionan que la sociedad las llega a considerar "locas" por dedicarse a una carrera así, aunque asumen este término con una connotación positiva.

- *Acerca de la interacción que tienen con los compañeros y el profesor*: Un alto porcentaje de las mujeres manifestó sentir temor de consultar al profesor, dentro o fuera de clase, pues creían que él las confrontaría en cuanto a sus conocimientos (aun habiendo tenido un buen desempeño en los exámenes y considerando al profesor como una persona accesible); algunas preferían evitar cualquier tipo de interacción con el profesor para evitar que se creyera que estaban siendo favorecidas de algún modo; similarmente, algunas evitaban consultar dudas con compañeros hombres para que no se creyera que ellos las apoyaban de más; hubo quienes experimentaron de manera directa algún tipo de discriminación por género de parte de algún profesor o compañero, y que tomaron la decisión de trabajar para demostrar su capacidad, evitando discusiones directas.

- *En lo que respecta a la actitud de las estudiantes y su desempeño tanto en el examen de conocimientos como en el curso*: Pocas mujeres elegían los lugares frontales del salón, a pesar de que tuvieran un gran gusto por la asignatura; muy pocas intervenían en la exposición del profesor para hacer alguna aclaración pertinente (algunas lo hacían a través de un compañero hombre); no se hallaron diferencias significativas entre las estrategias que las mujeres y los hombres eligieron durante el examen de conocimientos, aunque se encontraron más errores elementales en los exámenes de ellas, que no concordaban con el desempeño general que mostraban en la prueba y que probablemente se debían a un factor de actitud pues, en promedio, en los exámenes las mujeres indicaron niveles de confianza menores y niveles de ansiedad mayores con respecto a sus compañeros. (pp. 171-173).

6.2. Registros

Con el fin de recabar la mayor cantidad de información posible –y pertinente– durante la fase empírica de la investigación, se hizo uso de diversos recursos. En las siguientes subsecciones se describe cada uno de ellos y los objetivos por los cuales fueron empleados.

De antemano, y en conformidad con el *Código de Ética* de la Asociación Americana de Psicología (APA, por sus siglas en inglés), se notificó a las y los participantes sobre el uso de estos recursos y se solicitó su autorización –pues ya eran mayores de edad– por escrito (ver ANEXO A) para poder utilizar los registros recabados con fines exclusivamente académicos. Todas y todos aceptaron colaborar en el estudio.

6.2.1. Recursos tecnológicos

Tal como se describe más adelante, en la sección 6.5, una parte de la implementación consistió en la *resolución del diseño* por parte del alumnado en las computadoras y otra en la *socialización* *de resultados*. Así, con el objetivo de tener un registro cercano del proceso, todo fue grabado en audio y video. Para ello, se contó con tres grabadoras de sonido, una cámara de video, una cámara fotográfica y un programa computacional de grabación de pantalla.

Las grabadoras de sonido fueron contempladas como un apoyo para la cámara de video pues, dada su ubicación (ver ILUSTRACIÓN 6-1), podría no captar todas las voces.

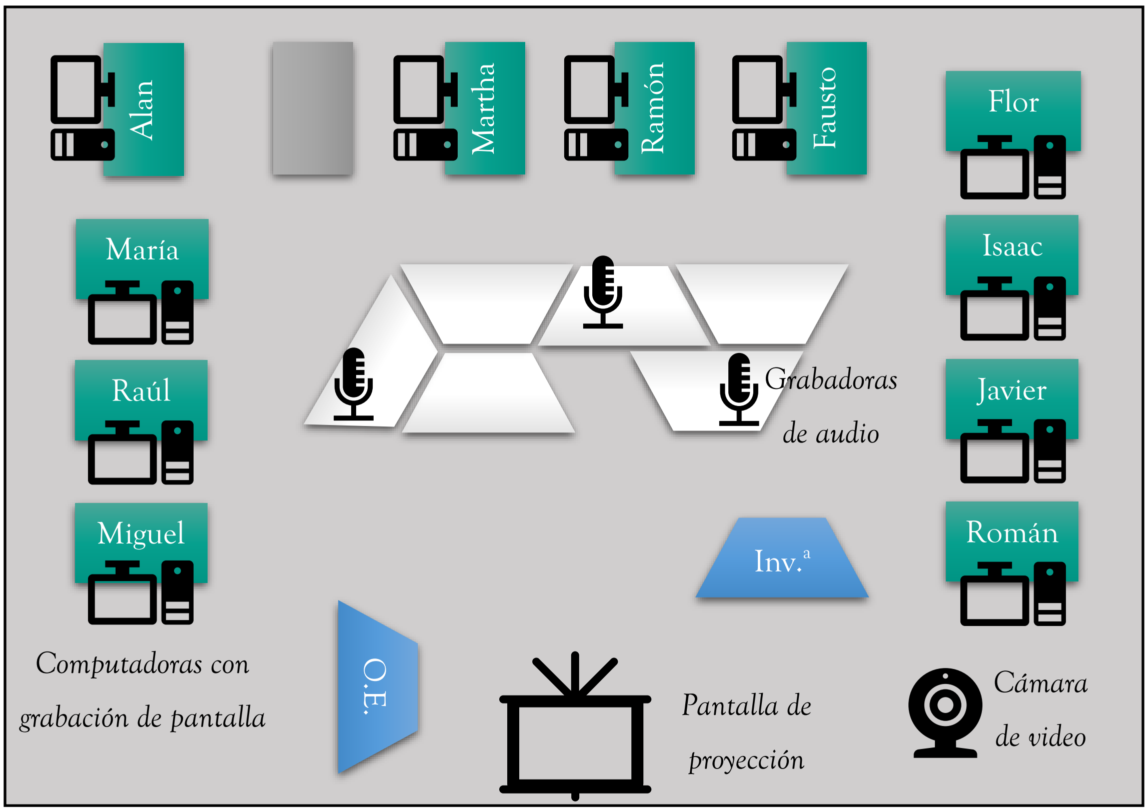


ILUSTRACIÓN 6-1 Ubicación de participantes (los nombres que se muestran son seudónimos) y disposición de recursos tecnológicos en el espacio físico donde se llevó a cabo la fase empírica del estudio.

El programa en las computadoras para grabar la pantalla de cada estudiante se utilizó con el objetivo principal de analizar el *uso dinámico* que el alumnado hacía de los applets incluidos en el diseño; asimismo, permitió registrar los tiempos en los cuales resolvieron cada una de las tareas propuestas y, adicionalmente, disminuyó la posibilidad de que el alumnado se adelantara en el diseño (para ver qué responder), pues sabían que todo estaba siendo registrado.

Por otro lado, dado que el diseño se elaboró en un *Libro GeoGebra*[23] (conformado por *Hojas dinámicas*[24]) y que su resolución se llevó a cabo a través de un *Grupo GeoGebra*[25], todas las respuestas de las y los participantes a las preguntas planteadas, así como el estado final en el que dejaron cada applet del diseño, se guardaron automáticamente. Esto tuvo como propósito general el contar con un registro del trabajo del alumnado a lo largo del diseño y, en particular, hizo posible la observación y selección en tiempo real de sus respuestas y de sus interacciones con los applets, pues a partir de algunas de ellas se guiaría la posterior discusión de resultados con el grupo.

Además, cada estudiante contó con un par de hojas blancas y una pluma por si lo requerían. Al final, todas estas hojas fueron recabadas para observar si hicieron uso de ellas y qué es lo que plasmaron en cada una.

6.2.2. Cuaderno de notas

Aunado a los recursos tecnológicos, se contó con un cuaderno de notas[26] (ver ANEXO B) que fue empleado tanto por la investigadora ("inv.ª" en la ILUSTRACIÓN 6-1) como por el *observador externo* ("O.E." en la ILUSTRACIÓN 6-1) para registrar las primeras observaciones de la implementación.

En dicho cuaderno se contemplaron rubros que van desde aspectos temporales y espaciales, hasta observaciones sobre la interacción y manejo de conceptos de las y los participantes. Respecto a lo primero, se consideró la *descripción del espacio físico*, *composición del grupo*, *tiempos de inicio y cierre de cada sesión*, así como las *tareas abordadas* en cada una. En cuanto a lo segundo, se consideraron los siguientes apartados y puntos de interés:

---

[23] De acuerdo con el sitio oficial de GeoGebra, el *Libro GeoGebra* es "un medio ágil para crear libros interactivos con textos en línea ilustrados y dinámicos". Recuperado el 11 de octubre de 2018 de https://wiki.geogebra.org/es/Creando_un_Libro_GeoGebra

[24] De acuerdo con el mismo sitio, una *Hoja Dinámica* "es una página interactiva (en línea) que combina diferentes elementos (como texto, applets, videos, imágenes) en una disposición flexible". Recuperado el 11 de octubre de 2018 de https://wiki.geogebra.org/es/Creando_Hojas_Din%C3%A1micas_en_L%C3%ADnea

[25] Para más información, consultar el sitio "Grupos GeoGebra" en https://www.geogebra.org/m/Ucar7PHU

[26] Elaborado con base en el cuaderno de notas de Cruz–Amaya (2018).

- *Proceso general*:
    - Tareas realizadas por la investigadora y por el alumnado.
    - Interacciones entre participantes (incluyendo a la investigadora y al observador externo).
- *Dimensión didáctico–pedagógica*:
    - Comprensión de indicaciones y preguntas expresadas oralmente por la investigadora.
    - Dificultades en la manipulación del software.
    - Dificultades en la comprensión de algunos puntos del diseño.
    - Intervenciones de la investigadora ante las dudas y dificultades emergentes.
- *Conocimientos matemáticos* (nociones matemáticas en las intervenciones de las y los participantes):
    - Nociones asociadas a las posibilidades dinámicas del software.
    - Referencias a aspectos cualitativos del fenómeno o de las gráficas para abordar alguna noción.
    - Naturaleza (dinámica, gráfica, numérica, algebraica) de los argumentos.
    - Asociación de argumentos de distinta naturaleza.
- *Conocimiento interdisciplinario y del contexto* (nociones físicas en las intervenciones de las y los participantes):
    - Relaciones entre nociones físicas y matemáticas.
    - Referencias a las posibilidades dinámicas del software en la argumentación física.
    - Interpretaciones de la simulación digital.
- *Acontecimientos de la comunidad*:
    - Situaciones que favorecieran o impidieran la discusión.
    - Priorización en la selección de intervenciones del alumnado por parte de la investigadora.
- *Actitudes*:
    - Comportamiento y actitud general del alumnado.
    - Rol de la investigadora.

- Rol del alumnado.
- Participantes más activas o activos.
- Participantes menos activas o activos.

- *Registros complementarios*:
  - Actitud del alumnado ante las herramientas de grabación.
  - Actitud del alumnado ante la presencia del observador externo.
- Otros:
  - Otras observaciones por apartado o de manera general.

Estos rubros fueron abordados a través de preguntas y planteamientos específicos en el *Cuaderno de notas* (para consultar la versión completa ver el ANEXO B).

6.3. Instrumentos

Como se ha venido adelantando, los instrumentos que se emplearon durante la fase empírica consistieron en: un *diseño* para estudiar la hipótesis de investigación y una *encuesta* sobre el entorno sociocultural de las y los participantes.

En los siguientes apartados se describe con mayor detalle el proceso de elaboración del diseño, en términos de una *trayectoria hipotética de aprendizaje* (subsección 6.3), y el contenido de la encuesta (subsección 6.3.2).

6.3.1. Diseño (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje)

El diseño (ANEXO C) se elaboró con la finalidad de explorar la hipótesis planteada respecto a la noción de variación en la ecuación diferencial (capítulo 5), a saber, que esta *surge de modelar un fenómeno de variación (como el movimiento) a partir de su naturaleza dinámica*. Para ello, se consideró como objetivo del diseño el buscar significar (o resignificar) la variación en la ecuación diferencial ordinaria a partir de la descripción (cualificación y cuantificación) del cambio en el contexto de un fenómeno de movimiento y la confrontación del proceso de integración con la necesidad de condiciones iniciales para determinar una *cantidad* a partir de su *cualidad*.

Así, acorde con lo presentado en la **Revisión de literatura** y el **Marco teórico–conceptual**, y con el problema de investigación establecido (capítulo 3), el diseño se planteó con el fin de estudiar la introducción a la noción de variación en la *ecuación diferencial ordinaria* partiendo de aspectos *cualitativos*, a través del estudio del *cambio y la variación* presentes en el fenómeno de *caída libre*.

En cuanto a ello, dado el análisis de las dimensiones didáctica, epistemológica, cognitiva y social descrito en la sección 4.6, se tiene presente que reproducir *tal cual* la fenomenología que dio lugar al desarrollo de las ED no es en sí propicio para plantearse directamente en el aula, sino que precisa de un tratamiento de acuerdo con los recursos conceptuales y tecnológicos con que se cuente.

En ese sentido, se identificó a la *modelación* como un recurso propicio para contextualizar y significar el objeto matemático referido en su estrecha relación con la variación y sus cualidades dinámicas en la descripción de un fenómeno de movimiento. Particularmente, se postula que un marco que contemple *estrategias dinámicas* (como las descritas en la sección 4.6) puede propiciar la concepción de la ecuación diferencial como un modelo matemático con características asociadas al fenómeno.

Con base en estas consideraciones, se elaboró un diseño cuyo contenido y propósitos específicos se describen a continuación en términos de una *Trayectoria hipotética de aprendizaje* (THA), la cual, de acuerdo con Simon (1995), se conforma por tres componentes: (1) objetivos de aprendizaje, (2) actividades de aprendizaje y (3) un proceso hipotético de aprendizaje. El tercero de estos puntos, esencia de la THA, se trata de una predicción sobre la evolución del pensamiento y comprensión de cada estudiante en el contexto de las actividades presentadas con base en los objetivos pretendidos.

Metodológicamente, se optó por la THA pues permite especificar la *intencionalidad* de cada elemento en el diseño, así como establecer su relación con la hipótesis y las preguntas de investigación planteadas (capítulo 5).

De manera general, el diseño se compone de cuatro *tareas*, tres de las cuales se subdividen a su vez en cuatro *momentos*:

I. Tarea 0 – *Conociendo GeoGebra*

II. Tarea 1 – *Gota a gota*
   - Momento 1 – *Viendo al cielo*
   - Momento 2 – *Viendo más de cerca*
   - Momento 3 – *Reloj de agua*
   - Momento 4 – *Figuras en movimiento*

III. Tarea 2 – *Más gotas de agua*
   - Momento 1 – S*imulación*
   - Momento 2 – *Ida y vuelta*
   - Momento 3 – *Viendo al cielo de nuevo*
   - Momento 4 – *Todos los valores de t*

IV. Tarea 3 – *Simulando y graficando*
   - Momento 1 – *Diferencias para todo t*
   - Momento 2 – *Cambio para todo t*
   - Momento 3 – *Ida y vuelta*
   - Momento 4 – *Retomando los diferenciales*

En el ANEXO C se puede consultar el diseño en su versión completa con descripciones de los efectos dinámicos de cada applet[27]. Tal presentación difiere de la que se comparte a continuación en que, como se mencionó anteriormente, aquí se describe en términos de una *trayectoria hipotética de aprendizaje*, por lo que su contenido se muestra en función del objetivo de cada tarea acompañado de un desarrollo hipotético del proceso de modelación.

Cabe señalar que, en dicho sentido, la *Tarea 0* posee una estructura e intencionalidad que difiere sustancialmente de las demás tareas pues consiste básicamente en introducir al

[27] El *Libro GeoGebra* del diseño se puede consultar en: https://www.geogebra.org/m/DswwUSzJ

alumnado a las herramientas que empleará a lo largo del diseño. Es decir, no se encuentra relacionada *directamente* con las preguntas de investigación, pero sí se reconoce como un paso necesario para abordar las tareas siguientes.

Respecto a las *Tareas 1*, *2* y *3*, para facilitar la asociación de las Actividades con las preguntas de investigación planteadas, se empleará el *código* que aparece entre corchetes en cada una de ellas en el capítulo **5**; asimismo, para establecer un vínculo entre las Trayectorias hipotéticas y el desarrollo teórico presentado en capítulos anteriores, se recurrirá a la *unidad de análisis socioepistémica* haciendo referencia a alguno –o algunos– de sus elementos (ILUSTRACIÓN 4-10 e ILUSTRACIÓN 4-11) igualmente entre corchetes.

TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE
Tarea 0 – *Conociendo GeoGebra* (*Anexo C.a*)

Objetivo:

Conocer y utilizar las herramientas necesarias para interactuar con los applets del diseño.

Actividades:

I. Explorar las herramientas: *botón*, *deslizador*, *casilla de visibilidad*, *casilla de entrada*, *hoja de cálculo*, *mover un objeto*, *puntero*, *punto* y *lápiz* a partir de una descripción breve de la herramienta sobre cómo y para qué se puede utilizar, y un applet donde se pueda explorar.

Trayectoria hipotética:

I. Se espera que el alumnado interactúe con cada applet y explore los usos de la herramienta referida con diferentes valores o variaciones (ya sea los sugeridos o algunos otros).

Tarea 1 – *Gota de agua* (*Anexo C.b*)

Objetivo general:

Análisis cualitativo de la caída libre y estimación dinámica del fenómeno.

Momento 1 (M1) – *Viendo al cielo*

Objetivo M1:

Exploración inicial cualitativa del fenómeno de caída libre.

Actividades M1:

I. Explorar en el **Applet 1.1.1** [*EstDin*] la caída simultánea de tres gotas de agua que tienen velocidades iniciales distintas (nula la primera, mayor la segunda y todavía mayor la tercera) y responder cuál gota cae más rápido, qué se tomó como referencia para identificarlo [*Var*|*ArgVar*] y a qué factores físicos podría deberse la diferencia en las caídas [*NocFis*].

II. Observar la unión vertical de las tres escenas de la caída de las gotas en el **Applet 1.1.2** para explorar la caída de una sola gota [*EstDin*]. Comentar qué se aprecia en la caída de la gota conforme transcurre el tiempo [*ArgVar*] y si ello se relaciona con alguno de los factores mencionados en la actividad anterior [*NocFis*].

Trayectoria hipotética M1:

I. Se espera que el alumnado observe la caída de las tres gotas e identifique que la gota de hasta la derecha es la que cae más rápido [Identificación del cambio| Comparación]. Como la caída se simula en tiempo real, la diferencia se hace menos notoria entre la segunda y la tercera gota, por lo que se espera que el alumnado haga uso de los deslizadores [Exploración de parámetros], ya sea para controlar el transcurso del tiempo (deslizador t), o bien, para modificar su paso (deslizador r). Este último tiene la ventaja de *mantener* el comportamiento del fenómeno pues la animación se ralentiza uniformemente, lo cual es difícil de conseguir con el control manual del primero. Respecto a los factores físicos, dado que ya han cursado Física I, se espera que el alumnado atribuya la diferencia en las caídas a la gravedad, o bien, a las características del medio.

II. Se espera que el alumnado identifique, tras la unión de las escenas, que la velocidad final de la gota en la primera escena es la misma que la velocidad con la que inicia la gota en la segunda escena y, similarmente, que la velocidad con la que esta última termina es con la que inicia la siguiente. Es decir, se espera que las escenas sean vistas como diferentes tramos de la caída de una misma gota y, por ende, que la diferencia en la caída de las tres gotas sea interpretada como distintos estados de una misma caída [Esto como un primer paso de lo discreto a lo continuo]. Cabe señalar que, como se mencionó en la subsección *5*, el contar con el programa de grabación de pantalla permitirá identificar si las respuestas a la primera actividad se vieron influenciadas por la segunda.

Momento 2 (M2) – *Viendo al cielo*

Objetivo M2:

Estimación del comportamiento de la caída libre en intervalos de tiempo cada vez menores.

Actividades M2:

I. Observar ahora la separación de una de las tres escenas en otras tres escenas que se despliegan horizontalmente en el **Applet 1.2.1** y explorar cómo es la caída de las tres gotas de agua correspondientes a cada escena [*EstDin*]. Responder cuál gota cae más rápido y qué se tomó como referencia para identificarlo [*Var*|*ArgVar*]. Proponer qué ocurriría con la diferencia en las caídas si la primera escena fuera subdividida nuevamente y qué se esperaría si se siguiera subdividiendo en más partes [*ArgVar*|*NocFis*].

Trayectoria hipotética M2:

I. Se espera que el alumnado comience a anticipar cómo evoluciona el comportamiento de la caída a lo largo del tiempo [Esto como un segundo paso de lo discreto a lo continuo|Predicción], es decir, que comience a vislumbrar una evolución continua de estados [Temporización]. Asimismo, con relación a las nociones físicas, es posible que emerjan conceptos como la velocidad promedio y la velocidad instantánea en los argumentos del alumnado.

Momento 3 (M3) – *Reloj de agua*

Objetivo M3:

Descripción cualitativa de la aceleración en la caída del agua a partir de las figuras que muestra una cascada artificial y establecer conjeturas sobre ello.

Actividades M3:

I. Observar el **Video 1.3.1** de un *reloj de agua* (cascada artificial que muestra diversas figuras mediante una caída regulada del agua) acompañado de una descripción de su funcionamiento[28]. Analizar la figura (similar a una circunferencia) en el **Video 1.3.2** creada con el mismo reloj y explicar qué se observa en su forma conforme va cayendo el agua [*EstDin*|*ArgVar*]. Explicar si ello se asocia con las observaciones sobre la caída de las gotas de agua que se expresaron en los Momentos 1 y 2 [*ArgVar*|*NocFis*].

II. Analizar si es posible generar las **Imágenes 1.3.1** y **1.3.2** en el reloj de agua [*ArgVar*|*NocFis*].

Trayectoria hipotética M3:

I. Con el primer video se espera que el alumnado se familiarice con el funcionamiento del reloj de agua y con las figuras que es capaz de mostrar. Con el segundo, que identifique que la figura se va alargando verticalmente conforme cae, cada vez más. Como el video está en tiempo real, se sugiere el emplear la opción de modificar la velocidad del video en el reproductor para ver más lentamente la caída y apreciar mejor el alargamiento. Respecto a las asociaciones con las observaciones en Momentos anteriores, se espera que el alumnado relacione el alargamiento en las figuras en el reloj de agua con el creciente aumento en la velocidad (aceleración) de caída de la gota de agua analizada previamente [Esto como un paso previo a la Geometrización del cambio].

[28] Para más detalles sobre el video y la descripción ver el *Anexo C.b*.

II. La primera imagen es posible y la segunda no lo es. En este punto, si el alumnado logró asociar el comportamiento de la caída del agua (cada vez más rápida) con el alargamiento en las figuras, se espera que puedan reconocer la imposibilidad de mostrar la segunda imagen en el reloj de agua al contener una línea recta, pues dadas las propiedades mencionadas, ésta tenderá a deformarse y hacerse curva. En caso contrario, se espera que asuman que ambas son posibles [Esto como otro paso previo a la Geometrización del cambio].

Momento 4 (M4) – *Figuras en movimiento*

Objetivo M4:

Comprobar o refutar las conjeturas propuestas en el momento anterior.

Actividades M4:

I. Observar los **Videos 1.4.1** y **1.4.2** con escenas del reloj de agua donde se muestran figuras similares a las planteadas en el Momento 3 para analizar la conjetura respecto a si es posible generar o no las imágenes propuestas e indicar qué se concluye respecto a la caída de la gota de agua, el tiempo que tarda en caer y las características de las figuras en el reloj [*ArgVar*|*NocFis*].

Trayectoria hipotética M4:

I. Se espera que el alumnado confronte sus hipótesis respecto a la posibilidad de mostrar las imágenes propuestas. En caso de no concordar con ellas, se espera que sugieran a qué se pudo haber debido y, con el último cuestionamiento, que establezcan una conjetura respecto a la relación entre la caída de la gota (su posición), el tiempo que tarda en caer y lo que se observó en las figuras; particularmente, que a más tiempo transcurrido las gotas tienen un desplazamiento más rápido y que ello provoca un alargamiento en las figuras [previo a Geometrización del cambio].

Tarea 2 – Más *gotas de agua* (Anexo C.c)

Objetivos generales:

Explorar dinámicamente el comportamiento de las *diferencias* en los desplazamientos de las gotas en el reloj de agua y de los *cambios* en dichas diferencias, así como la necesidad de una condición inicial para determinar una magnitud a partir del comportamiento de su cambio (análisis de la relación $f \leftrightarrow f'$).

Construir un modelo gráfico de la posición con respecto al tiempo correspondiente al fenómeno de caída libre y, con base en dicho modelo, predecir el comportamiento a través del tiempo de las *diferencias* en los desplazamientos del objeto que cae.

Momento 1 (M1) – *Simulación*

Objetivo M1:

Explorar el comportamiento de las *diferencias* en los desplazamientos (lineal) y de los *cambios* en dichas diferencias (constante) mediante la geometrización y numerización de su cambio.

Actividades M1:

I. Explorar una simulación del *reloj de agua* en el **Applet 2.1.1**, en la cual cada válvula del mecanismo se va abriendo de izquierda a derecha a diferencias de tiempo iguales (esto se menciona como parte de su descripción) [*EstDin*]. Describir cómo es la caída de las gotas conforme pasa el tiempo de izquierda a derecha [*ArgVar*], buscar un momento en el cual todas las gotas aparezcan y describir cómo es la forma que describen en conjunto [*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*].

II. Analizar numéricamente en el **Applet 2.1.2** los desplazamientos de las gotas de agua en la simulación. Ubicarse en un momento específico con el deslizador de tiempo (t) y describir *cómo* cambian los desplazamientos de las gotas desde la primera (a la izquierda) hasta la última (a la derecha) [*ArgVar*]. Además, señalar *cuánto* cambian registrando los valores y sus diferencias en la tabla del **Applet 2.1.3** [*NumGraf*]. Explicar si se identifica algún patrón específico en el comportamiento de las diferencias y cómo se encontró [*ArgVar*].

III. Observar en el **Applet 2.1.4** una forma gráfica de determinar las *diferencias* entre desplazamientos (como segmentos) para el mismo momento analizado en la actividad anterior y observar la alineación de tales segmentos mediante una animación con el fin de describir qué comportamiento se nota en las diferencias alineadas [*ArgVar*|*NumGraf*]. Manipular el tiempo con el deslizador t y explicar cómo es dicho comportamiento conforme cambia el tiempo [*EstDin*|*ArgVar*]. Comparar las observaciones que se manifestaron en este último punto con las expresadas en los puntos anteriores; para ello, se sugiere calcular el *cambio en las diferencias* numéricamente y registrarlo en la misma tabla del **Applet 2.1.3** [*NumGraf*].

IV. Para seguir analizando el *cambio en las diferencias*, observar en el **Applet 2.1.5** su determinación gráfica y la alineación de sus segmentos correspondientes con el fin de analizar su comportamiento [*ArgVar*|*NumGraf*]. Asimismo, analizar qué ocurre cuando se manipula el tiempo transcurrido [*EstDin*].

Trayectoria hipotética M1:

I. En un inicio, se espera que el alumnado emplee los deslizadores de control y modificación de paso del tiempo (t y r, respectivamente) con el fin de identificar que aunque las gotas de agua caen en diferencias de tiempo iguales, sus desplazamientos cambian de una manera no uniforme, aumentando más rápidamente hacia la izquierda (pues llevan una velocidad mayor) [Exploración de parámetros]. Después, que emplee dichos deslizadores para ubicar un momento en el cual todas las gotas aparezcan e identifiquen que la forma que describen las gotas es curva, o más aún, que es de tipo parabólica, ya sea porque al percibir que no es lineal se asuma como *natural* que debe ser cuadrática (como ocurrió en la deducción teórica de Domingo de Soto sobre la caída de los graves descrita en la dimensión epistemológica), o bien, porque lo relacionen con la fórmula asociada a la fuerza de gravedad (de grado dos) [Esto como etapa intermedia entre la Identificación del cambio y su Geometrización].

II. Se espera que, al principio, el alumnado identifique que los desplazamientos van siendo menores hacia la derecha [Comparación y Seriación]. Luego, que a partir de la tabla numérica se reconozca que la *diferencia* entre desplazamientos consecutivos es también cada vez menor [Numerización del cambio]. En la pregunta siguiente respecto al patrón de comportamiento de las *diferencias*, dado el uso previo que se hizo de la tabla numérica, se contempla la posibilidad de que el alumnado recurra nuevamente a la tabla para hallar el *cambio en las diferencias* e identificar que este es constante (comportamiento lineal). Sin embargo, dadas las observaciones que emanaron del análisis de la dimensión didáctica, se espera que el alumnado no haga uso de este recurso pues el discurso matemático escolar usualmente no propicia el trabajo numérico.

III. En caso de que el alumnado no recurra a la tabla para responder a la última pregunta de la actividad anterior, se espera que con la determinación gráfica de las *diferencias* se identifique un patrón de comportamiento lineal en su crecimiento al ver sus segmentos correspondientes alineados [Geometrización del cambio]. Con la manipulación del tiempo, se espera que el alumnado identifique que, si bien la magnitud de los segmentos de las *diferencias* varía con respecto al tiempo, su comportamiento se mantiene lineal ante las variaciones [Búsqueda de invariantes|Comparación y Seriación]. Luego, a partir de la sugerencia de calcular numéricamente los *cambios* en las diferencias, se espera que asocien la linealidad observada con un *cambio constante en el cambio* [Asociación de la Geometrización del cambio con su Numerización]. En este punto cabe señalar que, con fines de claridad, a lo largo del diseño se emplea el término "diferencia" para aludir al cambio en los desplazamientos y "cambio" para referirse al cambio del cambio en dichos desplazamientos (asimismo, se empleó un código de colores para distinguir ambos términos tanto en el texto como en los applets: de naranja las *diferencias* y de rojo los *cambios*). Por otro lado, aquí nuevamente es importante la grabación de pantalla al permitir identificar si la estrategia numérica emerge o no en la actividad anterior, antes de que les sea sugerida en esta actividad[29].

---

[29] En principio, dado que las y los participantes saben que sus pantallas están siendo grabadas, ello les inhibe a modificar la estrategia que propusieron en la actividad anterior dada la nueva sugerencia. En caso contrario, aunque llegaran a hacerlo (lo cual es totalmente admisible), la misma grabación permitiría identificar cómo es que incorporaron la nueva sugerencia a su trabajo previo.

IV. Con el análisis gráfico del *cambio del cambio* [Geometrización del cambio], se espera que el alumnado identifique que éste tiene un comportamiento constante [Búsqueda de invariantes|Comparación y Seriación] y que asocie dicha observación con la linealidad en el comportamiento de las diferencias.

Momento 2 (M2) – *Ida y vuelta*

Objetivo M2:

Explorar la necesidad de una condición inicial para determinar una magnitud a partir del comportamiento de su cambio.

Actividades M2:

I. Explorar una síntesis del desarrollo del Momento 1 en el **Applet 2.2.1** donde se observa la simulación del reloj de agua, las diferencias gráficas en los desplazamientos de las gotas, los cambios gráficos en dichas diferencias, con la posibilidad de modificar el tiempo transcurrido [*EstDin*].

II. Analizar el "camino opuesto" en el **Applet 2.2.2** partiendo gráficamente de las diferencias (reordenando los segmentos alineados) para descubrir en qué posición se encuentran las gotas. Arrastrar las *diferencias ordenadas* para determinar el lugar del conjunto de gotas [*EstDin*|*CIArr*] y explicar si fue posible encontrar su ubicación, así como por qué sí o por qué no se pudo [*ArgVar*|*NocFis*].

III. Arrastrar en el **Applet 2.2.3** las *diferencias ordenadas* para determinar el lugar del conjunto de gotas contando con la posición de una de ellas [*EstDin*] e indicar de qué manera dicha información es útil para ubicar al conjunto [*ArgVar*|*NocFis*]. Indicar si sería posible ubicar un conjunto mayor de gotas teniendo sus diferencias ordenadas y contando solamente con la posición de una de las gotas, explicar si con esa información sería suficiente o si se requeriría más [*ArgVar*|*NocFis*].

IV. Analizar el "camino opuesto" en el **Applet 2.2.4** partiendo ahora del cambio en las diferencias (reordenando los segmentos correspondientes) para determinar dichas diferencias (su comportamiento y ubicación). Arrastrar los *cambios* *ordenados* para hallar el lugar de las *diferencias alineadas* [*EstDin*|*CIArr*] y explicar si se identificó la necesidad de un valor de referencia [*ArgVar*].

V. Arrastrar los *cambios ordenados* en el **Applet 2.2.5** contando ahora con la magnitud de una de las diferencias [*EstDin*]. Explicar de qué manera es útil esta información para determinar la ubicación de las diferencias alienadas [*ArgVar*| *NocFis*].

<u>Trayectoria hipotética M2</u>:

I. Con la primera actividad, se espera que el alumnado corrobore dinámicamente que el comportamiento lineal de las *diferencias* y el constante de los *cambios* se mantiene aun modificando el paso del tiempo, por ende, se espera que manipulen el deslizador de tiempo [Exploración de parámetros|Búsqueda de invariantes]. Particularmente, esto tiene la finalidad de que se aprecien y asocien dinámicamente los niveles de variación analizados.

II. Al *ordenar* las diferencias y cuestionar sobre la ubicación del conjunto de gotas se espera que el alumnado comience a identificar la reversibilidad del proceso [Ida y vuelta]. Con la actividad de arrastre se busca confrontar al alumnado con la necesidad de una *condición inicial* para hallar una solución particular [Arrastre con base en condiciones iniciales]. Al cuestionar por qué sí o por qué no fue posible ubicar la posición del conjunto de gotas se pretende analizar el referente considerado por el alumnado para tomar la decisión (por ejemplo, si se considera que la última de las gotas acaba de salir, si la primera gota está por llegar al final de su recorrido o algún otro factor) [Relación $f \leftrightarrow f'$].

III. Dada la información de una de las gotas, se espera que el alumnado reconozca la *necesidad* (por si no la hubiera reconocido en el paso anterior) de una *condición inicial* para ubicar al conjunto de gotas. De manera intencional, la gota que se presenta no es la que empezó a caer primero, pues se busca significar a las condiciones *iniciales* como información *de partida*, es decir, no necesariamente como aquello que ocurre en el tiempo cero del fenómeno. En particular, con la argumentación que se solicita sobre cómo dicha información se puede emplear para la ubicación del conjunto, se espera que el alumnado profundice en el hecho de que, si bien se puede partir de las diferencias para hallar los desplazamientos (es decir, que se puede determinar la *cantidad* a partir de su *cualidad*), es necesario saber al menos qué desplazamiento tiene una de las gotas en el momento analizado, pues otro conjunto de gotas podría tener el mismo comportamiento (mismas *diferencias* alineadas) y ubicarse a una altura distinta. En ambos puntos se espera que la exploración dinámica provea elementos para el análisis, ya que, al tener la posibilidad de desplazar las diferencias ordenadas verticalmente hacia cualquier altura, se espera que el alumnado cuestione la necesidad de un referente para ubicar las posiciones [Arrastre con base en condiciones iniciales]. Por otro lado, al cuestionar sobre el caso de un conjunto mayor de gotas, se espera que el alumnado reconozca además la *suficiencia* de la condición inicial considerada en el análisis de la relación $f \leftrightarrow f'$ [Predicción]. Aquí también es importante el que se esté grabando la pantalla para evitar influir en la resolución de la segunda actividad con esta tercera actividad (como se mencionó previamente, aunque el alumnado modifique su respuesta anterior, ello se podría identificar).

IV. Dada la experiencia anterior con el arrastre de las diferencias, en este punto se espera que el alumnado reconozca que para ubicar el lugar de las *diferencias alineadas* a partir del arrastre de los *cambios ordenados* es necesario un valor de referencia (en este caso, la magnitud de una de las diferencias) [Ida y vuelta| Arrastre con base en condiciones iniciales].

V. Al contar con la magnitud de una de las diferencias se espera que el alumnado compruebe nuevamente la necesidad de una condición inicial para poder pasar de la descripción del cambio en las diferencias a su magnitud.

Momento 3 (M3) – *Viendo al cielo de nuevo*

Objetivo M3:

Construir un modelo gráfico de la posición con respecto al tiempo correspondiente al fenómeno de caída libre.

Actividades M3:

I. Explorar el **Applet 2.3.1** con la misma simulación del *reloj de agua* y registrar en una tabla en qué momento (variando los valores de t) aparece cada gota de agua.

Indicar cada cuánto tiempo (medido en segundos) aparece una gota nueva. Ubicarse en el momento en que han transcurrido $1.2\ s$ y señalar en qué posición (y por qué) se esperaría que estuviera una gota proveniente de una válvula ubicada entre la primera y la segunda, cuya caída comience a los $0.15\ s$ [*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*].

II. Comparar el fenómeno analizado en la Tarea 1 sobre la caída de la gota de agua con el *reloj de agua* mediante el **Applet 2.3.2**. Utilizar el deslizador t para identificar en qué momentos la altura de la gota que cae es igual a la altura de alguna de las gotas en el reloj de agua (se muestra una simulación pausada del reloj donde la última de las gotas acaba de salir). Contrastar las observaciones que se deriven en este punto con lo que se halló en la primera actividad [*ArgVar*|*NocFis*].

III. Explorar en el **Applet 2.3.3** el modelo gráfico de la posición de la gota para más valores de tiempo en intervalos de $0.3\ s$ (a través del *rastro* del punto que señala la altura de la gota con respecto al tiempo) moviendo el deslizador t (programado con saltos de magnitud 0.3). Bosquejar con la herramienta *lápiz* dónde se encontrarían las alturas correspondientes a "todos los demás valores de tiempo" [*EstDin*].

IV. Explorar en el **Applet 2.3.4** el modelo gráfico de la posición de la gota en intervalos de tiempo menores ($0.15\ s$, $0.75\ s$ y $0.05\ s$) nuevamente a través del rastro del punto que señala la altura de la gota en los tiempos respectivos. Comparar lo observado en este punto con el bosquejo realizado en la actividad anterior [*ArgVar*].

<u>Trayectoria hipotética M3</u>:

I. Al inicio, se espera que el alumnado identifique que las gotas caen cada $0.3\ s$ y, con base en esa información, se espera que predigan en qué lugar se encontraría una gota más del conjunto, es decir, se busca poner en juego la *predicción* sobre un estado intermedio en la caída de las gotas de agua [Inicio de la Temporalización del cambio a partir de su Geometrización y Numerización]. Al cuestionar sobre por qué se esperaría que estuviera ahí, se pretende explorar el tipo de argumentos que emergen en su ubicación (si responden a la *forma* que describen las gotas, a los valores *numéricos* hallados, a la propia naturaleza del *fenómeno* o a una combinación de estos factores) [Predicción].

II. Con la comparación entre la simulación del reloj de agua y la de la caída de la gota de agua se espera que el alumnado comience a relacionar la *forma* curva de las gotas en el reloj con la representación gráfica de la posición de la gota que cae con respecto al tiempo [Esto como un vínculo más de la Geometrización y la Numerización del cambio con su Temporalización]; en este sentido, se buscó partir de un fenómeno real (la caída del agua en una cascada artificial) para comenzar a explorar cualitativamente la forma de la representación gráfica de la posición con respecto al tiempo en el fenómeno de caída libre, así, la *dimensión temporal* se introduce a partir de una *dimensión espacial* (eje horizontal con las válvulas de agua), donde, para conseguir la *equivalencia*, se recurre a las diferencias de tiempo constantes en la caída de las gotas de agua. El explorar los valores de tiempo en los cuales coinciden las alturas de las gotas en uno y otro fenómeno tiene justamente la finalidad de favorecer dicha asociación [Exploración de parámetros], pues la distancia regular entre las válvulas se puede asociar con la diferencia constante entre tiempos.

III. Con el rastro del punto que señala la altura de la gota para distintos valores de tiempo se espera que el alumnado identifique una tendencia en los valores de posición, esto como un paso previo a la construcción de la gráfica de la posición con respecto al tiempo [Es decir, como paso previo a la Estimación]. Con el bosquejo se espera entonces que el alumnado construya un modelo gráfico de la posición de la gota con respecto al tiempo [Estimación]. En particular, se espera que el alumnado conciba al eje *espacial* (y: distancia) directamente como la altura de la escena en la simulación y, dado que el deslizador de tiempo se ubica en la parte inferior del modelo gráfico, que conciba al eje *temporal* (x: tiempo) como el transcurso del tiempo que está manipulando.

IV. Con la exploración del *rastro* de la posición para intervalos de tiempo menores se busca que el alumnado evalúe lo que estimó en la actividad anterior [Exploración de parámetros].

Momento 4 (M4) – *Todos los valores de t*

Objetivo M4:

Comprobación del modelo gráfico de la posición en caída libre y predicción sobre el comportamiento de las diferencias con base en dicho modelo.

Actividades M4:

I. Comprobar el bosquejo realizado en el Momento 3 con la gráfica que aparece en el **Applet 2.4.1**. Explorar cuál sería el comportamiento de las *diferencias* entre distintas posiciones de la gota de agua para varios valores de tiempo en el **Applet 2.4.2**; particularmente, observar la diferencia entre $t = 0\ s$ y $t = 1\ s$, así como entre $t = 1\ s$ y $t = 2\ s$ a partir de la gráfica de la posición de la gota con respecto al tiempo. Indicar cómo se espera que se comporten dichas *diferencias* [*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*].

II. Calcular en el **Applet 2.4.3** el *cambio* en las *diferencias* presentadas en el applet anterior (se muestran las magnitudes de los segmentos correspondientes a las diferencias), indicar cuánto se espera que se desplace la gota de agua entre $t = 2\ s$ y $t = 3\ s$ [*ArgVar*|*NumGraf*] y explicar si ello es consistente con lo que se indicó sobre el comportamiento de las *diferencias* en la actividad anterior [*NocFis*].

Trayectoria hipotética M4:

I. Al cuestionar sobre cómo se espera que se comporten las diferencias se espera que el alumnado retome lo que se ha discutido hasta el momento sobre el comportamiento del fenómeno físico y señale que las diferencias serán cada vez mayores con un incremento lineal [Predicción|Temporalización del cambio].

II. Tras calcular el *cambio* en las *diferencias*, se espera que el alumnado anticipe cuánto se desplazaría la gota en un intervalo de tiempo futuro (consecutivo), es decir, que prediga el valor de la siguiente *diferencia* [Predicción], el cual sería de $14.715 + 9.81 = 24.525$. El comparar lo que se dedujo en este punto con lo que se anticipó en la actividad anterior tiene como finalidad el propiciar una articulación entre lo *modelado* (caída libre) y el *modelo* (gráfico y numérico).

Tarea 3 – *Simulando y graficando* (Anexo C.a)

Objetivos generales:

Concepción de la *velocidad* como unidad de medida para describir la intensidad del cambio de posición con respecto al tiempo y de la *aceleración* para describir la intensidad del cambio de velocidad con respecto al tiempo.

Construcción de las gráficas de velocidad y aceleración *promedio* e *instantánea* correspondientes al fenómeno de caída libre a partir de la estimación dinámica.

Introducción de la notación correspondiente a cada tipo de velocidad y aceleración: incrementos (Δ) y diferenciales (d), respectivamente para los casos promedio e instantáneo.

Análisis cualitativo de la gráfica de la posición de un objeto en caída libre con base en los valores de velocidad que adquiere en cierto intervalo de tiempo.

Explorar la necesidad de una condición inicial en el análisis gráfico de la relación $f \leftrightarrow f'$ en el paso de la aceleración a la velocidad y de la velocidad a la posición correspondientes al fenómeno de caída libre con el fin de determinar una cantidad a partir de su cualidad.

Retomar la notación diferencial para incorporarla a las expresiones de velocidad, posición y aceleración correspondientes al fenómeno de caída libre.

Explorar la necesidad de dos condiciones iniciales en el análisis gráfico de la relación $f \leftrightarrow f''$ en el paso de la aceleración a la posición correspondientes al fenómeno de caída libre para determinar una magnitud a partir del comportamiento del cambio de su cambio.

Momento 1 (M1) – *Diferencias para todo t*

Objetivo M1:

Concepción de la *velocidad* como unidad de medida para describir la intensidad del cambio de posición con respecto al tiempo.

Construcción de las gráficas de velocidades *promedio* e *instantánea* correspondientes al fenómeno de caída libre a partir de la estimación dinámica.

Introducción de la notación correspondiente a cada tipo de velocidad: incrementos (Δ) y diferenciales (d), respectivamente.

Actividades M1:

I. Observar en el **Applet 3.1.1** la alineación gráfica de las *diferencias* entre las posiciones de la gota de agua correspondientes a los momentos $t = 0\ s, 1\ s, 2\ s$ e indicar si ello es consistente con lo que se predijo en el Momento 4 de la Tarea 2 [*ArgVar*].

II. Observar ahora gráficamente en la **Imagen 3.1.1** las *diferencias* y sus *cambios* correspondientes a intervalos de tiempo de $0.5\ s$ (además de los intervalos anteriores de $1\ s$ de duración). Describir qué similitudes y diferencias, cualitativas o cuantitativas, se observan entre estos segmentos y los que corresponden a intervalos de tiempo de $1\ s$ [*ArgVar*|*NumGraf*].

III. Explorar la unidad de medida *velocidad* calculando en el **Applet 3.1.2** el cociente entre desplazamiento e intervalo de tiempo correspondientes a los cambios de posición en intervalos de $1\ s$ analizados anteriormente. Calcular en el **Applet 3.1.3** las velocidades correspondientes a los desplazamientos en intervalos de $0.5\ s$ e indicar qué relación se observa entre la primera velocidad calculada en los intervalos de $1\ s$ y los dos primeros valores de velocidad calculados en los intervalos de $0.5\ s$. Señalar si dicha relación se mantiene en los valores siguientes [*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*].

IV. Calcular el promedio de los dos primeros valores de velocidad calculados en los intervalos de $0.5\ s$ y compararlos con el primer valor en los intervalos de $1\ s$. Señalar si lo mismo ocurre con los demás valores (se puede emplear la herramienta de *hoja de cálculo* proporcionada). Explicar, en términos físicos, a qué podrían deberse estas observaciones [*ArgVar*|*NocFis*].

V. Analizar el **Applet 3.1.4**, en el cual aparecen los valores promedio de velocidad calculados (correspondientes a intervalos de $0.5\ s$ y $1\ s$) y la simulación del fenómeno con el deslizador t, con base en los resultados anteriores [*EstDin* *ArgVar*|*NocFis*].

VI. Observar en el **Applet 3.1.5** una construcción gráfica de las velocidades promedio correspondientes a los intervalos de $0.5\ s$ y $1\ s$ e indicar de qué manera se asocia con lo analizado en la actividad anterior [*ArgVar*]. Explorar en el **Applet 3.1.6** cómo sería dicha construcción considerando intervalos de tiempo cada vez más cortos y describir lo que ocurre conforme se consideran intervalos de tiempo más pequeños, así como cuando se alcanza un valor de intervalo muy cercano a cero [*EstDin*|*ArgVar*].

VII. Como cierre, se explica que lo que se ha construido corresponde a una representación gráfica de la velocidad instantánea y se propone explorar la notación acostumbrada en el **Applet 3.1.7** (en ella se observa la simulación, la gráfica de la posición y la de la velocidad con la posibilidad de modificar la longitud del intervalo de tiempo mediante dos puntos en el eje temporal) [*EstDin*]; comentar qué cambios se observan en la notación cuando ambos puntos se aproximan tanto como sea posible e indicar qué ocurre con la caída de la gota cuando se está en dicho caso [*ArgVar*|*NocFis*].

<u>Trayectoria hipotética M1</u>:

I. Con la primera actividad se espera que el alumnado compruebe gráficamente lo que predijo en la tarea anterior, a partir de los segmentos correspondientes a las *diferencias* y a sus *cambios*.

II. Con el contraste de las *diferencias* y los *cambios* correspondientes a intervalos de $0.5\ s$ y $1\ s$ se busca poner en juego la comparación y la seriación con base en una medida *absoluta*, tal como se presentó en la ILUSTRACIÓN 4-6 [Es decir, esto como paso previo a un análisis Relativo]. Al cuestionar sobre las similitudes, se espera que el alumnado identifique un tipo de comportamiento (creciente lineal en las *diferencias* y constante en los *cambios*), mientras que respecto a las diferencias, se espera que el alumnado identifique que las magnitudes son distintas entre las *diferencias* correspondientes a intervalos de $0.5\ s$ y $1\ s$ y entre los *cambios* correspondientes a los mismos intervalos [Búsqueda de invariantes].

III. Mediante el cálculo de los cocientes se espera que el alumnado comience a explorar el comportamiento de las *diferencias* a partir de la magnitud de su intensidad de cambio con respecto al tiempo. Al cuestionar sobre la relación entre los valores de velocidad correspondientes a intervalos de $1\ s$ y $0.5\ s$, se espera que el alumnado identifique que existe una relación de orden entre dichos valores. Incluso, se contempla la posibilidad de que emerjan argumentos donde intervenga la noción de *velocidad promedio* [Unidad de medida en caso Discreto].

IV. Con la sugerencia de calcular el promedio se busca propiciar la emergencia del concepto de velocidad promedio por si en la actividad anterior no hubiera emergido [Esto como paso previo a la concepción Continua de la intensidad de cambio: Velocidad instantánea como cociente de diferenciales].

V. Con la exploración de la simulación se busca profundizar en la noción de velocidad promedio [Aproximación discreta previa a la concepción Continua].

VI. Con la exploración dinámica se espera que el alumnado comience a identificar una tendencia en los valores conforme se consideran intervalos de tiempo menores, en particular, que tienden hacia una recta [Concepción continua de la intensidad de cambio: Velocidad instantánea].

VII. En el caso de la exploración de la notación, se espera que el alumnado identifique que cuando dichos puntos se hallan a cierta distancia, la notación que se presenta corresponde a la de incrementos (Δ), mientras que, cuando ambos puntos convergen en un solo lugar, la notación cambia a la de diferenciales (d). Asimismo, con la exploración dinámica se espera que el alumnado reconozca a los distintos trozos de gráfica correspondientes a cada selección de intervalo como la descripción de un periodo específico del fenómeno [Exploración de parámetros]. Con la última pregunta respecto a qué ocurre con la simulación cuando se está en el segundo caso, se contempla que, además de reconocer que la gota no se mueve de lugar, emerjan algunos argumentos respecto a la concepción del movimiento como una evolución de estados, es decir, que se conciba lo puntual en lo continuo [Unidad de medida en caso Continuo].

Momento 2 (M2) – *Cambio para todo t*

Objetivo M2:

Concepción de la *aceleración* como unidad de medida para describir la intensidad del cambio de velocidad con respecto al tiempo.

Construcción de la representación gráfica de la aceleración correspondiente al fenómeno de caída libre.

Actividades M2:

I. Calcular en el **Applet 3.2.1** los cocientes entre cambio de velocidad e intervalo de tiempo correspondientes a los intervalos de $1\ s$ y $0.5\ s$ con base en la gráfica de la velocidad instantánea construida en el Momento 1. Indicar qué se identifica en los valores que se obtuvieron [*ArgVar*]. Además, explicar qué valores se esperaría encontrar en intervalos de tiempo más cortos [*ArgVar*|*NocFis*]. Se señala que estos valores corresponden a la *aceleración promedio*.
II. Explorar en el **Applet 3.2.2** los valores de aceleración para intervalos de tiempo cada vez menores. Explicar con base en ello cómo es la *aceleración instantánea* respecto a la *aceleración promedio* [*ArgVar*].
III. Explorar la notación acostumbrada en el **Applet 3.2.3** y compartir observaciones al respecto. Se cierra con una síntesis de las gráficas construidas en los Momentos 1 y 2 para el caso instantáneo de la velocidad y la aceleración [*EstDin*|*ArgVar*].

Trayectoria hipotética M2:

I. Al comparar los cocientes calculados se espera que el alumnado identifique que en ambos casos se obtiene un mismo valor. Con la segunda pregunta se espera que el alumnado anticipe una regularidad en dicho valor independiente a la longitud de los intervalos considerados [Búsqueda de invariantes]. La unidad de medida relativa (velocidad) permite hallar un invariante en el comportamiento del cambio en el desplazamiento.
II. Con la exploración de intervalos cada vez menores se espera que alumnado confirme su anticipación anterior.
III. Similar a la última actividad en el momento anterior, se espera que el alumnado explore el cambio de la notación incremental hacia la diferencial cuando se tiende de *intervalos* a *instantes* de tiempo.

Momento 3 (M3) – *Ida y vuelta*

Objetivo M3:

Analizar cualitativamente la gráfica de la posición de un objeto en caída libre con base en los valores de velocidad que adquiere en cierto intervalo de tiempo.

Analizar gráficamente la relación $f \leftrightarrow f'$ en el paso de la aceleración a la velocidad y de la velocidad a la posición correspondientes al fenómeno de caída libre y reconocer la necesidad de valores de referencia (*condiciones iniciales*) para determinar una cantidad a partir de su cualidad.

Actividades M3:

I. Explorar en el **Applet 3.3.1**, mediante el deslizador t y la simulación de la caída de la gota de agua, las tres gráficas construidas: *posición*, *velocidad instantánea* y *aceleración instantánea* [*EstDin*]. Explicar qué forma toma la gráfica de la posición conforme la velocidad se acerca a los $0\ m$ y conforme toma valores mayores [*ArgVar*|*NumGraf*].

II. Observar en el **Applet 3.3.2** cómo se ordenan los *cambios de velocidad* a partir de la gráfica de aceleración instantánea. Luego, en el **Applet 3.3.3**, observar cómo se ordenan los *cambios de posición* a partir de la gráfica de la velocidad instantánea. Ubicar, en el **Applet 3.3.4** la gráfica de la aceleración tomando en cuenta la graduación de los ejes coordenados (Tiempo [t] y Aceleración [m/s^2]) y, en el **Applet 3.3.5**, la gráfica de la velocidad tomando en cuenta nuevamente la graduación de los ejes (Tiempo [t] y Velocidad [m/s]) [*EstDin*|*CIArr*]. Explicar si fue posible ubicar la gráfica de la velocidad e indicar qué información se tomó como referencia para hacerlo [*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*]. En caso de no haber podido ubicar las gráficas, explorar el **Applet 3.3.1** para obtener más información.

III. Ubicar la gráfica de la posición en el **Applet 3.3.6** [*EstDin*|*CIArr*] y explicar qué valor se tomó como referencia para poder ubicarla [*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*]. Para cerrar, se presenta un análisis con base en el **Applet 3.3.7** acerca de la posibilidad de considerar magnitudes *negativas* de posición, velocidad y aceleración. Asimismo se presentan las expresiones algebraicas (ecuaciones) correspondientes a cada gráfica en términos de x y y, así como en términos de t y y. Luego, con el fin de introducir la notación de *derivada* (y: magnitud analizada, y': cambio en la magnitud, y'': cambio del cambio), se presentan las mismas expresiones en términos de ella.

<u>Trayectoria hipotética M3</u>:

I. La exploración dinámica de las gráficas tiene como finalidad integrar las representaciones construidas asociadas al fenómeno de caída libre [Exploración de parámetros]. Las preguntas acerca de la forma que adquiere la gráfica de la posición cuando la velocidad tiende a distintos valores tiene justamente como intención el profundizar en su análisis gráfico y cualitativo [Temporalización del cambio]. En este punto, se espera que el alumnado identifique que la gráfica de la posición tiende a "curvarse" más conforme la velocidad toma valores menores y a "estirarse" conforme los valores son mayores. Aunque, dadas las observaciones que emanaron del análisis de la dimensión didáctica, se espera que existan ciertas dificultades aquí por parte del alumnado, ya que este tipo de análisis usualmente queda fuera del currículo tradicional.

II. Con el primer par de animaciones se busca retomar la noción de reversibilidad (abordada en la Tarea 2 – Momento 2, cuando se ordenaron los *cambios* y las *diferencias* en los desplazamientos de las gotas en el *reloj de agua*) al partir del comportamiento del cambio para describir la magnitud que cambia [Análisis de la Relación $f \leftrightarrow f'$]. Para facilitar esta evocación, se presenta como apoyo visual los cambios de velocidad y posición correspondientes a intervalos de $1\,s$ (velocidades y aceleraciones promedio). Luego, con la ubicación de las gráficas, dada la exploración previa con el arrastre de las *diferencias* y los *cambios ordenados*, se espera que el alumnado reconozca la necesidad de considerar un valor de referencia para ubicar cada gráfica [Ajuste en la estructura]. En el caso de la aceleración, dicho valor corresponde a la magnitud constante hallada en las exploraciones anteriores ($9.8\,m/s^2$) y, dado que es un valor de uso recurrente en el curso de Física I, se espera que no haya problemas por parte del alumnado para reconocerlo. En el caso de la velocidad, el valor de referencia puede ser el que tenía la gota al iniciar su caída ($0\,m/s$), o bien, el de algún otro momento con base en los valores presentados en el **Applet 3.3.1** (por ello se sugiere su exploración en caso de no haber podido ubicar la gráfica correspondiente). En este sentido, se espera que en la descripción de la información necesaria para ubicarla, los valores sean justificados con base en las características particulares del fenómeno simulado.

III. Como en la actividad anterior, en esta se espera que, en el arrastre de la gráfica de la posición, el alumnado reconozca la necesidad de un valor de referencia para ubicarla [Ajuste en la estructura]. En este caso, con base en la información presentada en el **Applet 3.3.1**, dicho valor puede corresponder a $\mathbf{0}\ m$ para el tiempo inicial, o bien, a algún valor en otro momento. En el cierre, el análisis de las magnitudes *negativas* se explica en términos de las unidades de referencia consideradas con base en la dirección del movimiento descrito por el objeto. En cuanto a las expresiones algebraicas, no se hace un tratamiento especial para construirlas pues se asume que el alumnado ya reconoce dichas expresiones. Respecto a la notación, dado que esta es resultado de una convención social, se introduce tal cual como una nomenclatura.

Momento 4 (M4) – *Retomando los diferenciales*

<u>Objetivo M4</u>:

Retomar la notación diferencial para incorporarla a las expresiones de *velocidad*, *posición* y *aceleración* correspondientes al fenómeno de caída libre.

Sintetizar y enfatizar en los puntos analizados hasta el momento.

Explorar la necesidad de dos condiciones iniciales para determinar una magnitud a partir del comportamiento del cambio de su cambio.

<u>Actividades M4</u>:

I. Descripción sobre la notación diferencial.
II. Síntesis sobre las actividades realizadas con relación a la notación diferencial.
III. Analizar el “camino opuesto” en el **Applet 3.4.3** partiendo de una escena de la caída de la gota (muestra su posición en un momento específico) y de la gráfica que fue producto de ordenar el cambio en la velocidad y el cambio en la

posición. Para ello, indicar si la gráfica que se presenta se encuentra en el lugar correcto o, de lo contrario, arrastrarla para señalar su ubicación correspondiente [*EstDin*|*CIArr*] y explicar por qué se ubicó en ese lugar [*ArgVar*|*NocFis*].

IV. Ubicar en el **Applet 3.4.4** la gráfica en el lugar que se definió como correcto en el applet anterior y observar la animación de la caída de la gota cuya escena se mostró en la actividad anterior. Indicar si fue correcta la ubicación que se eligió y explicar qué información se necesita, además de una posición de la gota, para ubicar la gráfica [*ArgVar*|*NocFis*].

Trayectoria hipotética M4:

I. Se describe que la notación acostumbrada para describir "cambio con respecto al tiempo" es: $\frac{d}{dt}$ y que, en general, permite describir con respecto a qué se mide. Además se explica, con base en la **Imagen 3.4.2**, que de la misma manera en que los *apóstrofos* indican un *primer orden* de cambio ($'$) o un *segundo orden* de cambio ($''$), dependiendo de cuántas veces se utilice $\frac{d}{dt}$ (o del exponente en el numerador y el denominador $\frac{d^n}{dt^n}$), se indica si se hace alusión al *cambio* o al *cambio del cambio*.

II. Para retomar lo que se hizo en el proceso de Ida y vuelta tanto en el Momento 1 como en el Momento 2, se aborda la pregunta: ¿Y cuál es la solución? En ese sentido, se indica que ello depende de qué se desea encontrar pues, si se sabe que la gota de agua se mueve con aceleración constante, el interés podría estar en hallar su velocidad en todo momento, lo cual correspondería a cuando se *ordenaron* los *cambios*; por otro lado, si se conoce la velocidad instantánea de la gota, se podría desear encontrar su posición durante cada momento en el intervalo, tal como ocurrió al ordenar las *diferencias*. Además, se señala que estos "pasos" corresponden a la integración sucesiva de la aceleración para hallar la velocidad y la posición, en lo cual, tal como se exploró previamente, es necesario un valor de referencia para pasar de uno a otro, el cual es denominado *condición inicial* pues provee justamente información inicial sobre las condiciones del fenómeno en algún instante de tiempo específico.

III. En el arrastre de esta gráfica se permite no solo un desplazamiento vertical, sino también horizontal, pues con ello se espera que el alumnado se cuestione, además de por qué punto pasa la gráfica (el cual corresponde a la posición de la gota mostrada en la escena), el cómo pasa por dicho punto [Ajuste en la estructura|Relación $f \leftrightarrow f''$]. Al cuestionar sobre por qué se ubicó en dicho punto se espera que el alumnado explique la referencia que consideró con relación al fenómeno.

IV. El hacer posible la animación de la caída tiene como finalidad que el alumnado contraste su propuesta anterior con base en la nueva información (velocidad de caída) y que identifique como necesario dicho valor además de la posición de la gota dada para un momento específico [Relación $f \leftrightarrow f''$].

A modo de cierre, se comparten los siguientes comentarios finales con relación al diseño:

Epistemológicamente, el problema atendido cobra mayor sentido al tomar en cuenta que es justamente a partir del cambio que se desea describir el comportamiento del movimiento. Es decir, en un principio, al observar la caída libre de un objeto es casi imposible saber de qué manera varía la distancia recorrida por dicho objeto conforme pasa el tiempo.

Didácticamente, en este punto, en general, se espera que el alumnado anticipe que su caída siga un comportamiento cuadrático dado que previamente ha cursado Física I y, por tanto, tiene cierta familiaridad con la ley de gravitación y su fórmula respectiva. Sin embargo, al cuestionar sobre *cómo* es la caída, cómo va cambiando, cómo va aumentando, se espera que emerjan argumentos cualitativos, descripciones de la forma en la cual caen las gotas de agua, más que aspectos asociados a una ley preconcebida.

Posteriormente, cuando se comienza a indagar sobre el *cuánto*, se espera que emerjan criterios específicos para la temporalización del fenómeno a través de la numerización del cambio. A su vez, cuando se cuestiona sobre *cómo es ese cuánto*, es decir, cuando se busca describir el comportamiento del cambio en la caída, se espera que emerjan criterios sobre la invariabilidad de la pendiente que describen las diferencias ordenadas (o los valores de velocidad promedio) mediante la geometrización del cambio.

Finalmente, cuando se cuestiona sobre cuánto cambian las diferencias y cómo se comporta dicho cambio, se busca un vínculo entre la pendiente invariante en el paso anterior y el valor constante de la aceleración. Así, la necesidad de una ecuación diferencial queda de manifiesto al reconocer que para describir *cómo* y *cuánto* se mueve el objeto que cae se recurre a la identificación de invariantes en sus cambios. En particular, el llegar a un valor constante de aceleración permite alcanzar un criterio de estabilidad en el fenómeno. Y a partir de dicho criterio, el "regreso" (resolución de la ecuación diferencial) parece *natural* pues al final lo que se desea caracterizar es la caída del objeto.

Por ende, no se trata de sacar dos veces la derivada y luego dos veces la integral como un *ejercicio de mecanización*, sino que se trata de la exploración de un fenómeno y su matematización a través de la descripción del cambio. En el camino, a su vez, se reconoce la necesidad de ciertos valores específicos para particularizar las soluciones. No solo porque aparece una constante de integración arbitraria, o porque muchas gráficas pueden pasar por un punto, sino porque aunque se conozca de qué forma cambia la caída, siempre es necesario un referente respecto al cual se mida el cambio en su desplazamiento. Es decir, la necesidad de condiciones iniciales se halla anclada en las propias características del fenómeno.

6.3.2. Encuesta

La encuesta (ANEXO D) es un recurso creado por Hinojos y Torres-Corrales (2018) con base en la obra de Farfán y Simón (2016). Se trata de un *Formulario de Google*[30] con un conjunto de preguntas (abiertas y de opción múltiple) referentes al contexto sociocultural de estudiantes en una carrera STEM. Su estructura general es la siguiente:

- Datos generales
    - Nombre – *Opcional*
    - Edad
    - Sexo
    - Lugar de nacimiento

[30] El enlace a la encuesta es: https://goo.gl/forms/pTbE9yiFgHoYzaxo2

- Pasatiempos
    - Actuales
    - En la infancia
- Aspectos familiares
    - Integrantes[31]
    - Edad de madre, padre, hermana(s), hermano(s)
    - Escolaridad máxima y ocupación de madre, padre, hermana(s), hermano(s)
    - Escolaridad máxima y ocupación de abuela(s), abuelo(s) – *Opcional*
    - Tipos de juegos en la infancia
        - Con hermana(s), hermano(s)
        - Con madre, padre
        - Con abuela(s), abuelo(s)
- Acerca de la carrera
    - Nombre de la carrera y semestres
    - Trabajo
    - Lugar de la carrera en las opciones de formación profesional
    - Motivaciones para la carrera
    - Expectativas al finalizar
- Historia académica
    - Materias preferidas
        - Primara
        - Secundaria
        - Bachillerato
        - Estudios profesionales
    - Trabajo en equipo
        - Identificación con mujeres u hombres
    - Apoyo en las tareas

[31] Aunque en los puntos sucesivos solo se menciona a la madre o al padre, también se contempla "pareja del padre" y "pareja de la madre".

6.4. Prueba piloto

Con el fin de validar el diseño propuesto, este fue resuelto y revisado por un egresado de la misma carrera que cursaban las y los participantes de la fase empírica, dos estudiantes de la Maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y dos estudiantes del Doctorado en la misma institución.

Para ello, se creó un *Grupo GeoGebra* con el *Libro GeoGebra* del diseño, de tal manera que todas sus respuestas, así como el estado final de los applets con que interactuaron, quedaran registrados en la plataforma. Asimismo, se recibieron sus comentarios (de manera oral y escrita) respecto a los diferentes elementos del diseño.

Un resultado importante de esta prueba fue que se pudieron corroborar los puntos de *conflicto* principales en su resolución. Aquellos no deseables fueron editados para evitar su aparición durante la implementación, mientras que los deseables fueron contrastados con lo esperado en el proceso hipotético a fin de ser retomados durante la selección de respuestas para la discusión en la última etapa de la implementación (Fase IV en la ILUSTRACIÓN 6-4).

Por otro lado, se reconoció que contar con el programa de grabación de pantalla permitiría, además de analizar las exploraciones dinámicas del alumnado, hacer un mejor seguimiento de su resolución del diseño, pues dada la estructura del Libro GeoGebra, existe la posibilidad de modificar respuestas anteriores conforme se avanza en el diseño y esto se observaría en la grabación.

En este sentido, retroceder y editar respuestas no se prohíbe en ningún momento al alumnado, aunque se anticipa que, al saber de antemano que sus pantallas están siendo grabadas, el complementar respuestas previas se vea inhibido. Por ende, para los casos en los que se considera necesario saber de qué manera influyen las confrontaciones que se van propiciando a lo largo del diseño en lo que anteriormente se haya respondido, se incluyeron preguntas que permitieran abordarlo.

6.5. Implementación

Previamente, se acordó con quienes accedieron participar una fecha que fuera conveniente para llevar a cabo la fase empírica del estudio. La fecha acordada fue un día en el que todas y todos los estudiantes ya habían concluido sus evaluaciones ordinarias.

La implementación se llevó a cabo en un laboratorio de cómputo del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. La disposición de los recursos tecnológicos empleados, así como el lugar que ocupó cada participante en el espacio físico donde se llevó a cabo la fase empírica del estudio, se muestra en la ILUSTRACIÓN 6-1. Dichas ubicaciones corresponden principalmente a la fase de *resolución del diseño* por parte del alumnado en las computadoras.

La ubicación de cada participante durante la *socialización de resultados* y durante la *charla informal* se muestra, respectivamente, en la ILUSTRACIÓN 6-2 y en la ILUSTRACIÓN 6-3.

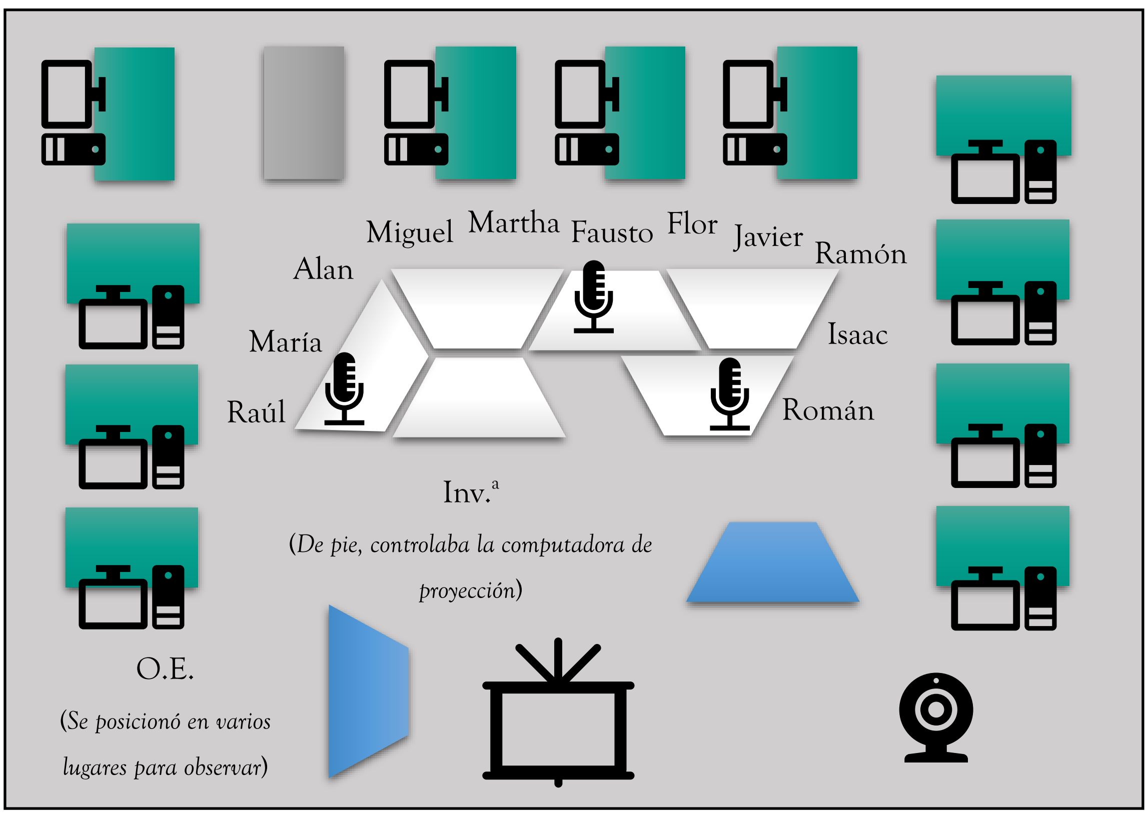


ILUSTRACIÓN 6-2 Ubicación de participantes durante la socialización de resultados (los nombres del alumnado son seudónimos).

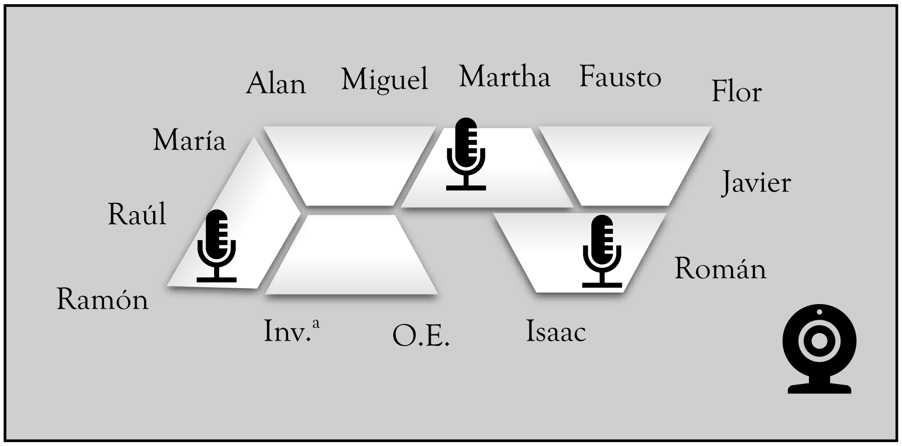


ILUSTRACIÓN 6-3 Ubicación de participantes durante la charla informal (los nombres del alumnado son seudónimos).

En todo el proceso estuvieron presentes:

- Tres estudiantes mujeres y ocho estudiantes hombres inscritos en una carrera de ciencias fisicomatemáticas.
- Un estudiante de cuarto semestre de la Maestría en Matemática Educativa (Observador Externo).
- Una estudiante de cuarto semestre de la Maestría en Matemática Educativa (Investigadora).

A grandes rasgos, la implementación consistió en: una descripción del plan de trabajo al alumnado, la solicitud por escrito de su autorización para el registro de datos (ANEXO A), la resolución del diseño por parte del alumnado (Fase I y Fase III), una charla informal grupal respecto a experiencias escolares (Fase II) y una socialización de las respuestas al diseño (Fase IV). Aunado a ello, se les solicitó resolver la encuesta en línea descrita en la subsección 6.3.2 (Fase III). El orden en que cada fase de la implementación fue abordada, así como su duración aproximada, se presenta esquemáticamente en la ILUSTRACIÓN 6-4.

INTRODUCCIÓN		10 MINUTOS
FASE I	○ Tarea 0 – *Conociendo GeoGebra* ○ Tarea 1 – *Gota a gota* ▪ Momento 1 – *Viendo al cielo* ▪ Momento 2 – *Viendo más de cerca* ▪ Momento 3 – *Reloj de agua* ▪ Momento 4 – *Figuras en movimiento* ○ Tarea 2 – *Más gotas de agua* ▪ Momento 1 – Simulación ▪ Momento 2 – *Ida y vuelta* ▪ Momento 3 – *Viendo al cielo de nuevo* ▪ Momento 4 – *Todos los valores de t*	2 HORAS
FASE II	○ Charla informal – Almuerzo	40 MINUTOS
FASE III	○ Tarea 3 – *Simulando y graficando* ▪ Momento 1 – *Diferencias para todo t* ▪ Momento 2 – *Cambio para todo t* ▪ Momento 3 – *Ida y vuelta* ▪ Momento 4 – *Retomando los diferenciales* ○ Resolución de la encuesta / Discusión extra	2 HORAS
FASE IV	○ Socialización de resultados	1 HORA
CIERRE		5 MINUTOS

ILUSTRACIÓN 6-4 Etapas de la implementación y sus duraciones aproximadas.

7. Resultados

En este capítulo se presentan los datos obtenidos durante la fase empírica de la investigación, así como su análisis con base en las consideraciones teóricas descritas anteriormente.

Para comenzar, en la sección 7.1 se muestran los datos seleccionados a partir de: la *resolución del diseño* (subsección *7.1.1*) y la *socialización de resultados* y la *charla informal* (subsección *7.1.2*), y la *encuesta sociocultural* (subsección *7.1.3*). En cuanto a la encuesta, se presentan las respuestas obtenidas de manera grupal y por caso.

Posteriormente, en la sección 7.2, se presenta el análisis de estos datos con base en la *unidad de análisis socioepistémica* presentada en el capítulo **4**, las *preguntas de investigación* planteadas en el capítulo **5** y la *trayectoria hipotética de aprendizaje* descrita en el capítulo **6**.

Finalmente, en la sección 7.3, se mencionan algunas limitaciones que surgieron durante la fase empírica del estudio.

7.1. Selección de datos

Los datos que se presentan a continuación en el apartado *7.1.1* corresponden principalmente a cuatro casos: *María* [M], *Alan* [A], *Flor* [F] e *Isaac* [I], los cuales fueron elegidos con base en la cantidad de información que proveían. Adicionalmente, con el fin de complementar la información, en ciertos puntos se presentan algunos otros datos correspondientes a las demás personas participantes.

En los apartados *7.1.2* y *7.1.3* se presentan datos de todas y todos los participantes, pues el primero contiene fragmentos de la socialización de resultados y de la charla informal, mientras el segundo contiene los resultados de la encuesta de manera individual (por cada caso elegido) y grupal.

Como se mencionó párrafos atrás, en la selección de datos a partir de la resolución del diseño se tomó como referencia la THA descrita en el capítulo anterior. Por ende, dado que dicha trayectoria se basa en las *preguntas de investigación* planteadas en el capítulo **5**, los datos se presentan siguiendo el orden en que estas fueron abordadas en las Tareas y Actividades del diseño. Para hacer referencia a cada pregunta, se retoma la notación en corchetes empleada anteriormente: [*Var*], [*EstDin*], [*CIArr*], [*ArgVar*], [*NocFis*], [*NumGraf*], [*Gen*], [*Val*].

Asimismo, en cada Tarea se indica el tiempo promedio de resolución considerando los cuatro casos seleccionados. Para complementar esta información, a continuación se muestra una gráfica con los tiempos de resolución de cada estudiante por Momento:

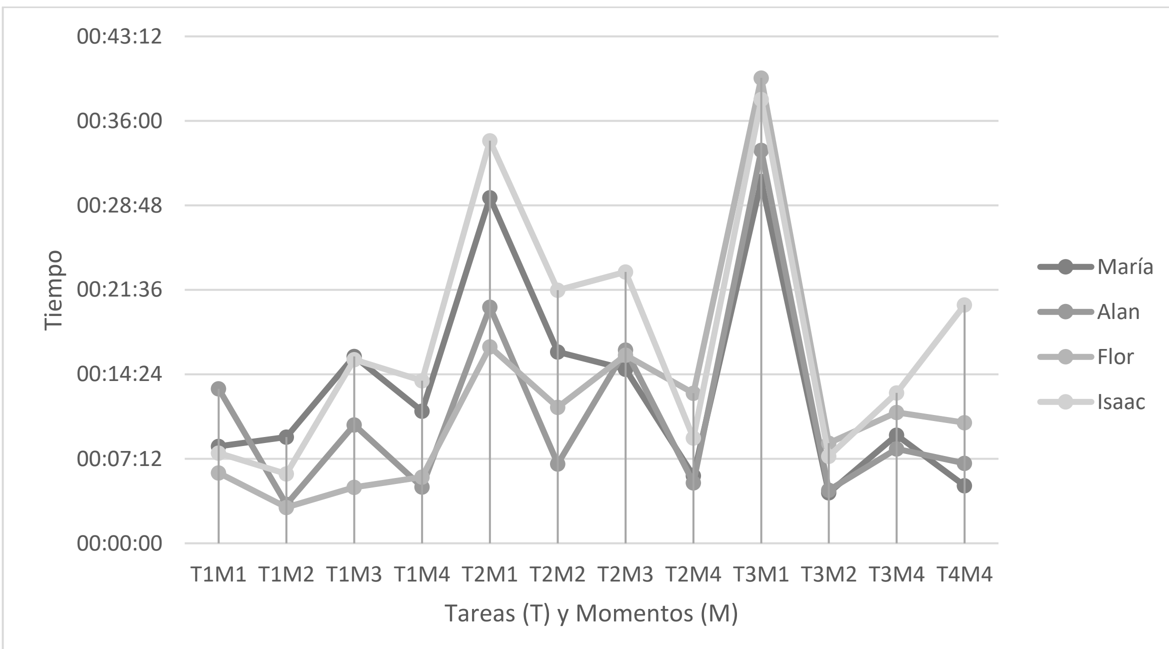


ILUSTRACIÓN 7-1 Tiempos de resolución por Tarea (T) y Momento (M) de los cuatro casos elegidos.

En esta gráfica se aprecia que Flor y Alan ocuparon menos tiempo en terminar que María e Isaac.

Cabe señalar que la Tarea 0 no se considera para la selección y análisis de datos pues no se relaciona *directamente* con las preguntas de investigación. Así, la selección de datos inicia a continuación con la Tarea 1:

Tarea 1

Tiempo promedio de resolución: 35 minutos

Momento 1

Actividad I

[*EstDin*] (Applet 1.1.1)

Para iniciar el análisis del fenómeno, el alumnado manipuló los deslizadores: tiempo (t) y paso de tiempo (r) en el Applet 1.1.1. La manera en la cual dicha exploración fue llevada a cabo por los casos elegidos (María, Alan, Flor e Isaac) se describe en los siguientes puntos:

- María
    - Ralentizar el tiempo con el deslizador r e iniciar caída
    - Explorar caída con diferentes pasos de tiempo con el deslizador r
- Alan
    - Iniciar caída en tiempo real
    - Ralentizar el tiempo con el deslizador r y reiniciar animación
    - Detener animación durante la caída
    - Reanudar animación
    - Explorar caída con diferentes pasos de tiempo con el deslizador r
- Flor
    - Iniciar caída en tiempo real
    - Ralentizar el tiempo con el deslizador r y reiniciar animación
    - Detener animación durante la caída
    - Explorar caída con diferentes pasos de tiempo con el deslizador r
- Isaac
    - Iniciar caída en tiempo real
    - Ralentizar el tiempo con el deslizador r y reiniciar animación
    - Explorar caída con diferentes pasos de tiempo con el deslizador r

Los cuatro casos culminaron con la exploración de la caída a un paso de tiempo más lento que el real (manipulando el deslizador r).

En los casos de Miguel, Martha, Ramón, Fausto y Javier, una acción más fue llevada a cabo: *adelantar y atrasar el tiempo con el deslizador* t para observar el recorrido de las gotas de agua conforme el tiempo se modificaba, aunque igualmente culminaron con la exploración de diferentes pasos de tiempo con el deslizador r. Es decir, la exploración no se detuvo al observar que, al modificar el tiempo (manipulando el deslizador t hacia atrás o hacia adelante), las gotas tenían diferentes desplazamientos, sino que se buscó explorar la caída de las tres gotas manteniendo la continuidad en el transcurso del tiempo (lo cual se consigue mediante el deslizador r).

Esto último concuerda con la ventaja señalada en la THA respecto al deslizador r, acerca de *mantener* el comportamiento del fenómeno, pues la animación se ralentiza uniformemente (lo cual es difícil de conseguir con el control manual del deslizador t).

[*Var* | *ArgVar*] (Pregunta *a*)

Al cuestionar cuál de las gotas cae más rápido, María, Alan, Flor e Isaac identificaron que se trata de la tercera.

Respecto a en qué se fijaron para determinarlo, María basó su observación en que la última gota "es la primera en salir de cuadro mientras las otras dos aún continúan cayendo, es decir aún las puedo visualizar en la animación". Es decir, ella tomó como referencia el que la tercera gota hubiera sido la primera en recorrer la altura completa del cuadro. Similarmente, Alan se basó en que dicha gota "es la que recorre el cuadro en menos tiempo". Por ende, tanto María como Alan tomaron como referencia la distancia recorrida y el tiempo transcurrido: la que cae más rápido es la que recorre el cuadro en menos tiempo.

En el caso de Flor se identifica como principal referencia el comportamiento de la caída con respecto al tiempo, pues ella basa su argumento en que "al variar el paso del tiempo esa [la tercera gota] siempre caía más rápido". Dinámicamente, dicha variación fue apreciada[32] al explorar diferentes pasos de tiempo con el deslizador r. Es decir, a diferencia de Alan y María, en lugar de basarse en la distancia recorrida, Flor centró su atención en la velocidad media de las gotas durante su caída, identificando que la tercera *siempre* (en diferentes intervalos de tiempo) cae más rápidamente que las otras dos. Similarmente, Martha fijó su atención en el comportamiento con respecto al tiempo, pues expresó que: "para determinarlo observé el movimiento de la gota en diferentes tiempos".

Por su lado, Isaac no explicó en qué se basó para determinarlo, pero señaló una consideración especial: "la gota del tercer recuadro cae más rápido, esto suponiendo que las tres gotas caen a la misma distancia del observador, es decir, que los tres cuadros representan la misma altura". Con ello, él deja entrever una posible explicación de la diferencia en las caídas: la distancia desde la cual se observa el fenómeno, pues a una distancia mayor o menor se apreciaría una caída más lenta o más rápida, respectivamente.

De acuerdo con la grabación de su pantalla, Isaac modificó su respuesta luego de interactuar con el Applet 1.1.2 de la siguiente actividad (con la unión vertical de las escenas) quedando de la siguiente manera: "la gota del tercer recuadro cae más rápido, esto suponiendo que los tres cuadros toman un video con la misma distancia recorrida por las gotas".

Algo que llama la atención es la referencia al "video" por parte de Isaac, así como el uso de la expresión "salir de cuadro"[33] por parte de María, pues ambas aluden a la manera en la cual se concibe la simulación, como una *escena* del fenómeno.

[*NocFis*] (Pregnta *b*)

Los factores físicos a los cuales se atribuyó la diferencia en las caídas fueron los siguientes:

M: "A la resistencia del aire, y a la fuerza con la que caen de la nube."

A: "el tiempo que lleva de caída, la resistencia y dirección del viento"

[32] Esto se observó en la grabación de su pantalla.
[33] Esta expresión se emplea comúnmente en las filmaciones para referirse a alguien o algo que deja de aparecer en lo que se está grabando.

F: “a la densidad del aire y la gravedad”

I: “A que se están mostrando las gotas cayendo pero a distintas distancias de su altura inicial, por lo que, debido a la aceleración causada por la gravedad, las más rápidas lo son porque llevan más tiempo cayendo.”

En el caso de María y en el de Alan, un factor común que mencionan es la *resistencia* del aire, mientras que Flor alude a su *densidad*. Pese a esta diferencia en los términos empleados, durante la fase de socialización, Flor aclaró que ella en realidad se refería también a la resistencia del aire.

Con relación a la simulación del Applet 1.1.1, María escribió la segunda parte de su respuesta tras explorar nuevamente la caída.

Por otro lado, tanto Alan como Isaac exploraron el applet de la siguiente actividad (Applet 1.1.2, con la animación de la unión vertical de las escenas) antes de responder a este cuestionamiento, por lo tanto, era de esperar que en su respuesta mencionaran el tiempo que llevaba la gota de caída y la distancia al origen de la caída como un factor de diferencia.

En el caso de Flor, ella complementó su respuesta tras explorar el Applet 1.1.2 añadiendo el factor de “la gravedad”.

Otros factores señalados por las y los demás participantes fueron: *viscosidad del aire*, *densidad del aire*, *corrientes de viento*, *otras fuerzas*, *temperatura*, *masa de la gota*, *gravedad*, *velocidad inicial* y *aceleración a la cual están expuestas*.

En especial, tanto Raúl como Javier hicieron alusión al fenómeno de *caída libre*. Raúl señaló que la tercera gota era la única “en caída libre” y que en las otras dos gotas influían fuerzas distintas que hacían más lenta su caída.

En el caso de Javier, él describió el principio de este fenómeno: “en caída libre, el cuerpo va ganando velocidad conforme aumenta el tiempo hasta alcanzar una velocidad máxima. en este caso la gota continuara aumentado su velocidad hasta impactar en el suelo”, pero lo hizo hasta después de interactuar con el Applet 1.1.2 (como ocurrió en los casos de Alan e Isaac).

Actividad II

[*EstDin*] (Applet 1.1.2)

Las exploraciones del applet de esta actividad (Applet 1.1.2) consistieron generalmente en unir y separar (varias veces) las escenas e iniciar la caída de la(s) gota(s) en cada caso con diferentes pasos de tiempo (mediante el deslizador r).

[*ArgVar*] (Pregunta *c*)

Respecto a qué se aprecia en la caída de la gota conforme transcurre el tiempo:

M: "Que tienen un movimiento acelerado, conforme van cayendo"

A: "su velocidad cambia con respecto al tiempo, además entre más tiempo pase a más velocidad caerá"

F: "Su aceleración incrementa debido a la gravedad"

I: "Conforme transcurre el tiempo, la gota de agua va cayendo con una mayor rapidez."

Tras explorar el Applet 1.1.2, las descripciones del movimiento de María, Alan, Flor e Isaac se basaron en el comportamiento del objeto asociado a su caída a causa de la gravedad (en lugar de como efecto de las propiedades del medio o del objeto). Es decir, se centró la atención en el aumento en el desplazamiento con respecto al tiempo: acelerado, o bien, con velocidad (o rapidez) variable.

[*NocFis*] (Pregunta *d*)

En cuanto a si esto se relaciona con los factores físicos que señalaron al inicio:

M: "Con la fuerza con la que salen disparadas las gotas de lluvia de la nube, ya que la fuerza resultante no es cero, quiere decir que hay una aceleración en las gotas, ya que no caen con velocidad constante."

A: "si pues al separar la gota en tres casos tendremos velocidades iniciales en cada separación (las cuales conforman a la gota 1,2 y 3 del primer caso)"

F: "Si, la gravedad hace que esta sea atraída hacia el centro de la Tierra"

I: "Sí, puesto que se había mencionado la aceleración que tienen las gotas debida a la gravedad."

Flor había comenzado inicialmente su respuesta con "Hasta cierto punto". Luego, hizo una pausa y complementó su respuesta en la Actividad I añadiendo "la gravedad" como factor. Entonces borró la respuesta inicial que tenía aquí y afirmó que sí se relacionaba con los factores que había mencionado.

Con esta pregunta se confirma que, tras interactuar con el segundo applet, María, Alan, Flor e Isaac identificaron a la gravedad (equivalentemente una aceleración en las gotas o velocidades iniciales distintas) como un factor de diferencia.

Después de esta respuesta y antes de pasar al siguiente Momento, María exploró nuevamente el Applet 1.1.2 uniendo las escenas y observando la caída una vez más.

Momento 2

Actividad I

[*EstDin*] (Applet 1.2.1)

La exploración del Applet 1.2.1 se llevó a cabo de la siguiente manera:

- María
  - Separar escenas
  - Ralentizar fenómeno con el deslizador r
  - Iniciar caída
  - Unir de nuevo y ver caída ralentizada
  - Separar escenas y explorar caída en tiempo real varias veces
- Alan
  - Iniciar caída
  - Separar escenas
  - Iniciar caída
  - Ralentizar fenómeno con el deslizador r
- Flor
  - Iniciar caída
  - Separar escenas

- Iniciar caída
- Unir de nuevo y ver caída en tiempo real
- Separar escenas y ver caída

- Isaac
    - Iniciar caída
    - Ralentizar fenómeno con el deslizador r
    - Separar escenas y ver caída ralentizada

[*Var*|*ArgVar*] (Pregunta *a*)

Todas y todos identificaron que la tercera gota fue la que cayó más rápido.

Respecto a en qué se fijaron para determinarlo:

M: "es la que aparece menos tiempo en pantalla"

A: "recorre la misma distancia en menos tiempo"

F: "observando el tiempo y su velocidad podemos notarlo"

I: "me fijé en el tiempo que le toma a las gotas recorrer la que se supone es la misma distancia."

Similar a como explicaron en la primera Actividad del Momento anterior, tanto María como Alan tomaron nuevamente como referencia el que la gota aparecía menos tiempo en pantalla, es decir, su referente fue la distancia recorrida dado el tiempo transcurrido. Lo mismo se aprecia en la respuesta de Isaac.

En el caso de Flor, ella tomó nuevamente como referente el comportamiento del fenómeno con respecto al tiempo, es decir, su velocidad media. Similarmente, Martha tomó nuevamente como referencia el comportamiento, pues señaló en este punto que lo identificó "observando su movimiento en el tiempo".

[*ArgVar*|*NocFis*] (Preguntas *b* y *c*)

Respecto a qué ocurriría si la primera escena se subdividiera nuevamente en tres:

M: "Igualmente la primera etapa sería más lenta que la que le sigue y que la última parte sería donde la gota es más veloz."

A: “sería constante la diferencia.”

F: “la tercera siguiera siendo la más rápida”

I: “Que en las divisiones inferiores, que llevan más tiempo cayendo, notemos que la gota cae a mayor rapidez que en las superiores.”

Una noción física que aparece en tres de las respuestas es la de velocidad o rapidez.

Acerca de qué se esperaría si se siguiera subdividiendo, el alumnado indicó lo siguiente:

M: “Que la gota de la última división es la que caería con mayor rapidez, mientras que la primera caería más lento que la otra división, y si repitiéramos el proceso de división de la primera parte de la gota pasaría exactamente lo mismo, hasta llegar a un punto donde el tiempo de división seria nulo y solo obtendríamos 3 imágenes de la gota casi en el mismo lugar, pero se movería muy poco, pero se movería.”

A: “notaríamos la diferencia de cada velocidad pero como este es un caso de M.R.U.A el cambio en la velocidad es una constante es decir se tiene una aceleración constante”

F: “la última seguiría siendo la más rápida pues esta toma más aceleración entre más cerca este del suelo”

I: “Ocurriría el mismo fenómeno, las divisiones inferiores presentarían una mayor velocidad de la gota que las superiores, pero, mientras más divisiones tengamos, la diferencia será menor y se volverá muy difícil apreciarla a simple vista, pues el tiempo de la caída será muy similar si se divide la caída en partes suficientes.”

Tanto María como Isaac explican, respectivamente, que entre más divisiones haya, los valores de desplazamiento y de tiempo serían muy similares, mas no iguales.

Momento 3

Actividad I

[*EstDin*|*ArgVar*] (Videos 1.3.1 y 1.3.2 y pregunta *a*)

En el análisis del Video 1.3.2, María tomó en cuenta la sugerencia y modificó la velocidad del video en el reproductor (a 0.5 y luego a 0.25) para ver más lentamente la caída. Con base en sus observaciones, ella indicó que la figura mostrada “se va deformando, es decir pareciera que la figura se alarga conforme cae, por ejemplo el circulo llega un punto en que parece ovalo”.

Alan igualmente tomó en cuenta la sugerencia de modificar la velocidad del video y observó la caída de la figura a 0.25. Con base en ello, explicó que “lo que se nota es que la figura se ‘estira’ en la dirección del eje Z”.

Flor reprodujo los Video 1.3.1 y 1.3.2 una vez cada uno y señaló que la figura “se va deformando”.

Isaac reprodujo dos veces tanto el Video 1.3.1 como el 1.3.2. Luego, revisó lo que venía más adelante en el Momento 3 y reprodujo el Video 1.3.2 a 0.25 de su velocidad normal. Entonces indicó que “La figura parece alargarse y estrecharse conforme va cayendo”. Luego, reprodujo el Video 1.3.1 también a 0.25 y a 0.75.

Es decir, a excepción de Flor, el alumnado exploró los videos a distintas velocidades de reproducción, a partir de lo cual identificaron que la figura tendía a alargarse o estirarse (deformarse en el eje vertical).

[*ArgVar* | *NocFis*] (Pregunta *b*)

Respecto a si lo que se observa en la figura del Video 1.3.2 se asocia con las observaciones sobre la caída de las gotas de agua que se expresaron en los Momentos 1 y 2:

M: “En que como la gota tiene un movimiento acelerado, parte de una velocidad y después aumenta su velocidad, cae más rápido, por eso en la parte de arriba de la fuente se observa con claridad la figura ya que las gotas tienen una aceleración lenta, pero conforme cae las gotas avanzas caen más rápido y se distorsiona la figura.”

A: “como sabemos las gotas en caída libre experimentan una aceleración constante y positiva. por lo que cambia su velocidad y a su vez el tiempo que recorren una determinada distancia. haciendo este tiempo más corto debido a eso se ‘estiran’ las figuras hechas por las válvulas de agua”

F: “En que casi al llegar al suelo las gotas de agua incrementan su aceleración”

I: “La figura se alarga debido a que, como la cantidad total de agua fue soltada progresivamente, es decir, que no se dejó caer la masa completa al mismo tiempo, hay ‘partes’ o moléculas del agua que van ganando velocidad con su caída, digamos que una molécula de agua se suelta de la fuente, y transcurrido un determinado tiempo, se suelta otra molécula, en ese espacio de tiempo la primera molécula se aceleró , y por lo tanto, al momento de soltar la segunda, hay un espacio entre las moléculas mayor que el que se tendría si cayeran a velocidad constante, por ello se alarga la figura.”

Es decir, los cuatro casos asociaron el estiramiento de la figura con el creciente aumento en la velocidad (una aceleración) de caída de la gota de agua analizada previamente. Aunque Flor se refirió a un “incremento en su aceleración” en lugar de en su velocidad.

Una observación particular es que Isaac había comenzado su respuesta con “la figura se *estrecha*” y luego la modificó por “la figura se *alarga*”.

Actividad II

[*ArgVar* | *NocFis*] (Imágenes 1.3.1 y 1.3.2 y preguntas *c* y *d*)

En cuanto a las Imágenes 1.3.1 y 1.3.2, María y Flor indicaron que ambas figuras podrían mostrarse. Alan señaló que la primera sí y que la segunda no sería posible, mientras que Isaac indicó que ninguna de las dos se podría formar.

Sobre la Imagen 1.3.1, María explicó que para formarla “primero permitirías que saliera la cantidad de agua como la parte de abajo de la figura y después irías cerrando o impidiendo el paso de agua a los lados así progresivamente hasta solo dejar que el agua saliera como la parte de arriba de la imagen”; mientras que para la Imagen 1.3.2 señaló que para “la parte de abajo de la línea diagonal, solo tendrías que permitir el paso de agua hasta determinado tiempo y después cerrar las llaves mientras que la de la parte de arriba de la diagonal al contrario de la parte de abajo a partir de cierto tiempo [este proceso alude a la generación de las barras], a la par que el de arriba tendrías que permitir el paso de agua para poder obtener esta figura [esta parte alude a la generación del perfil diagonal]”. Por lo tanto, en este punto María no retomó la deformación de la figura como un factor que impide mostrar la línea diagonal.

En el caso de Alan, antes de responder si las imágenes se podrían mostrar, él analizó nuevamente el Video 1.3.2 haciendo pausas intermedias durante la caída del agua y, posteriormente, el Video 1.3.1 modificando la velocidad de reproducción a 0.25. Entonces respondió que la Imagen 1.3.1 "si, pues lo único que es modificado es la altura de la figura hecha [en el "eje Z", donde él había identificado la deformación]", mientras que para la 1.3.2 señaló inicialmente que sí se podría[34], pero tras un tiempo de espera señaló que "no se podría generar perfectamente pues generar la diagonal es un problema ya que como vimos las gotas se dejan de caer desde una misma altura por ello en la diagonal debe de haber distintas velocidades deformando esta diagonal".

Respecto a la Imagen 1.3.1, Flor indicó que se puede formar haciendo "una figura más pequeña pero de similar forma, al avanzar las gotas de agua deformarán la figura haciendo que quede". En cuanto a la 1.3.2, Flor volvió a ver el Video 1.3.1 en el lapso que muestra flores y sus tallos antes de responder que "de igual manera si las gotas se colocan de cierta manera podrían formar dicha figura". Es decir, no retomó la deformación analizada en la Actividad I para identificar la imposibilidad de mostrar la diagonal.

Acerca de la Imagen 1.3.1, Isaac explicó que "si la fuente deja caer el agua únicamente de forma vertical entonces considero que no es posible hacer esa figura, puesto que si aplicamos el razonamiento del inciso b), esta figura indicaría que la altura que hay entre las moléculas se reduciría, fenómeno que indicaría una aceleración negativa, lo que no es posible por la forma en que se considera este sistema de 'caída libre'". En este punto se identifica que Isaac asoció principalmente la aceleración de las gotas con el estrechamiento de la figura (en lugar de con su estiramiento). Por lo tanto, al ver que la figura se engrosaba en la parte inferior, asumió que ello correspondería a una desaceleración. Respecto a la 1.3.2, Isaac señaló que esta no podría formarse "pues supongo que en la caída se debería presentar el fenómeno del estrechamiento de la figura antes mencionado, lo que en este caso no se observa". Es decir, la imposibilidad de mostrar la figura no se basa en que la diagonal se deformaría, sino en que las barras

[34] Ello se observó en la grabación de su pantalla.

tienen un ancho constante, por lo tanto, nuevamente se aprecia la asociación de la aceleración con el estrechamiento.

La opción de ralentizar los videos se aprecia como un recurso útil para la apreciación del fenómeno.

Momento 4

Actividad I

[*ArgVar*|*NocFis*] (Videos 1.4.1 y 1.4.2 y preguntas *a*, *b* y *c*)

Al ver el Video 1.4.1, María identificó que, como ella pensaba, la figura sí se puede mostrar y agregó que incluso "la figura opuesta (el pico abajo y ancha de arriba) [que ella pensaba] no se iba a poder obtener, ya que como el agua de manera acelerada pensaba que se iba a perder la figura, pero se ve que ambas figuras se pueden obtener". Luego, a partir del Video 1.4.2, ella señaló que si bien la figura también se puede mostrar, "hay que observar que no se obtiene una línea diagonal perfecta por lo mismo del movimiento acelerado", entonces observó nuevamente este video y añadió: "ya que esta línea se vuelve un poco curva, en teoría no es idéntico a la figura propuesta, pero muy similar".

En el caso de Alan, él vio los Videos 1.4.1 y 1.4.2 antes de responder las preguntas. Entonces confirmó que "es posible formar esta figura [la primera] pues lo único que se 'estira' es el eje Z". Respecto a la segunda imagen, igualmente confirmó que "no se puede generar esta diagonal".

Por su lado, luego de ver el primer video, Flor señaló que "dicha figura es creada de cierta forma tal que cuando esta se deforme, se obtenga la figura esperada". En cuanto a la segunda imagen, ella identificó "una especie de curva".

Similar a como hizo Alan, Isaac vio ambos videos antes de responder las preguntas, solo que el primero, además de verlo a velocidad normal, lo reprodujo nuevamente a 0.5. Entonces, respondió la primera pregunta señalando que "en los anteriores incisos di una respuesta que consideraba un funcionamiento constante de las fuentes [válvulas] de agua, donde ninguna de las que se presentaban se apagaba o modificaba la cantidad de agua que expulsaba, en cuyo caso la figura no se puede realizar. Sin embargo, noto que es posible realizar el arreglo si estas características son modificadas". Es decir, Isaac reconoce que activando y desactivando las válvulas se pueden mostrar las figuras. En cuanto a la segunda imagen, antes de responder, Isaac reprodujo el segundo video a 0.5 de la velocidad real; entonces, indicó que “parece ser que la altura del reloj de agua y la forma en que las fuentes expulsan agua, el fenómeno de estrechamiento no se presentaría o sería casi imperceptible”. Por tanto, Isaac sigue asociando la aceleración con el estrechamiento, en lugar de con el estiramiento.

Respecto a qué se concluye en la relación de la caída de la gota de agua, el tiempo que tarda en caer y las características de las figuras en el reloj:

M: “Que se puede obtener una gran variedad de figuras y hasta algunas que pareciera que no, solo hay que saber qué cantidad de agua hay que dejar caer, como distribuirlas y solo un determinado tiempo (este último punto es muy importante) y así progresivamente, para poder generar todas esas bonitas siluetas”

A: “la dificultad de generar la diagonal consiste en que al dejarse caer desde la misma altura y recordando que sufren una caída libre la velocidad que experimentan es distinta por lo que no puede generar esta línea diagonal”

F: “la aceleración que toman las gotas de agua al final y el tiempo que ocurre hacen que se puedan crear ciertas figuras en el reloj de agua, es decir, que se creen patrones de la cantidad de agua que debe caer para que este cree la figura que esperamos observar”

I: “Las figuras del reloj se deforman por la aceleración de las gotas de agua, como en el planteamiento inicial, las gotas que llevan más tiempo cayendo tienen mayor velocidad. Pero en otros tipos de figuras como los últimos dos casos, esto no se observa, en cambio, lo que se hace es aprovechar que las gotas tardan una cierta cantidad de tiempo en caer para modificar el comportamiento de las fuentes y así conformar estas curiosas figuras.”

En el caso de Flor, su respuesta alude a la aceleración de las gotas; sin embargo, no queda clara la relación entre este factor y la curva que identificó.

En los demás casos de María y Alan se identificó una clara articulación entre la forma de las figuras y los factores físicas asociadas al fenómeno de caída libre, específicamente, su velocidad variable (aceleración constante).

En el caso de Isaac, parece ser que la asociación de la aceleración con el estrechamiento de las figuras le impidió retomar su observación respecto a la separación entre las gotas ("moléculas") de agua debida a "que van ganando velocidad con su caída". Antes de pasar a la siguiente Tarea, Isaac vio nuevamente el Video 1.4.2 a 0.25.

TAREA 2

TIEMPO PROMEDIO DE RESOLUCIÓN: 1 hora 5 minutos

Momento 1

Actividad I

[*EstDin*] (Applet 2.1.1)

De inicio, el paso de tiempo (deslizador r) en el Applet 2.1.1 se encontraba un poco más lento que en tiempo real.

Las exploraciones de este applet se llevaron a cabo por el alumnado de la siguiente manera:

- María:
    - Iniciar simulación con el paso de tiempo preestablecido
    - Reiniciar simulación en tiempo real
    - Reiniciar simulación con el paso de tiempo más lento
- Alan:
    - Iniciar simulación con el paso de tiempo preestablecido
    - Reiniciar simulación con el paso de tiempo más lento
- Flor:
    - Iniciar simulación con el paso de tiempo preestablecido
    - Reiniciar simulación en tiempo real
    - Reiniciar simulación con un paso de tiempo más lento

- Isaac:
  - Iniciar simulación con el paso de tiempo preestablecido
  - Reiniciar simulación en tiempo real
  - Reiniciar simulación con el paso de tiempo más lento
  - Detener las simulación en un momento en que aparezcan todas

En este punto cabe señalar que Isaac exploró un poco qué habría más adelante en el Momento.

[*ArgVar*] (Pregunta *a*)

En cuanto a cómo es la caída de las gotas de izquierda a derecha, respondieron:

> M: "Se puede observar que cuando se visualizan todas las gotas en pantalla, forman una línea curva, ya que aunque se dejan caer a tiempos iguales, no avanzan distancias proporcionales, ya que no tiene velocidad constante entonces por eso, no se obtiene una línea recta."

> A: "desde el momento que se dejan caer a distintos tiempos se produce una diferencia de velocidad. es decir la gota 1 tiene una velocidad inicial en el momento que la gota 2 es soltada"

> F: "Tienen una diferencia de tiempo que hace que caigan unas antes que las otras"

> I: "En todo momento en que aparece más de una gota en pantalla, estas tienen distintas velocidades, cuando aparecen varias a la vez, las gotas de la izquierda tienen una velocidad mayor, pues llevan más tiempo en caída. Pero todas las gotas tardan individualmente la misma cantidad de tiempo en caer."

María describe cualitativamente el movimiento pues alude a la forma del conjunto de gotas. Flor se basa en las características cualitativas más generales: que caen unas antes que otras.

Alan e Isaac se centran en las propiedades físicas principalmente y no describen la forma.

[*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*] (Pregunta *b*)

Respecto a qué forma se aprecia en el conjunto de gotas cuando todas aparecen:

M: “forman una línea curva, y aún más podemos ver que la distancia que las separa de una gota a otra gota de izquierda a derecha cada vez va disminuyendo, ya que como sabemos en la parte de arriba van más lento por eso la diferencia de distancias es menor.”

A: “generan una media parábola invertida. describen un estilo de tiro parabólico”

F: “Describen una curva, en este caso una parábola”

I: “Si se unen con una línea las gotas de agua, entonces esta no será una recta, sino que será curva.
Sería una recta solo si las gotas cayeran a velocidad constante.”

En el caso de María, ella asoció la forma curva del conjunto de gotas con el comportamiento de la distancia que separaba a una de otra, la cual va disminuyendo de izquierda a derecha, pues al inicio de cada caída (parte superior del recorrido) las velocidades son menores.

Alan reconoce la forma curva del conjunto, incluso señala que es parabólica y nuevamente recurre a las propiedades físicas, pues hace alusión al tiro parabólico. Asimismo, Flor indica que se trata de una parábola.

Isaac asocia la velocidad de las gotas con la forma que describirían si se unieran con una línea: curva para velocidad variable y recta para velocidad constante. En este caso, la línea –o el trazo que las uniera– representa la continuidad del comportamiento que se observaría en una gráfica.

Actividad II

[*ArgVar*] (Applet 2.1.2 y pregunta *c*)

Al cuestionar acerca de cómo cambian las alturas de las gotas de izquierda a derecha, María, antes de responder, exploró el Applet 2.1.2 algunas veces modificando los valores de paso de tiempo con el deslizador r; luego, observó nuevamente la caída de las gotas en el Applet 2.1.1 en tiempo real; y después, observó una vez más la caída de las gotas en el Applet 2.1.2 en tiempo real. A continuación, María activó la casilla “Mostrar distancias” en este mismo applet, inició la caída de las gotas y la detuvo en un momento en que todas se observaran. Posteriormente, dado que la indicación así lo señalaba, María se ubicó en el momento $t = 1.64$. Entonces explicó que "la distancia de la primera gota a la segunda cambia casi como 3 unidades, y después de la segunda a la tercera como 2.5 unidades, de la tercera a la cuarta como 2.2 unidades y finalmente de la cuarta a la última como 1.5 unidades, es decir las gotas de la izquierda están más alejadas que las de la derecha que apenas van cayendo". En este punto, el hecho de mostrar numéricamente los valores de las distancias de las gotas a las válvulas permitió que María describiera el cambio a partir de aproximaciones numéricas.

En el caso de Alan, él exploró el Applet 2.1.2 con distintos pasos de tiempo (manipulando el deslizador r), activó la casilla "Mostrar distancias" y se ubicó en $t = 1.64$. Entonces señaló que las alturas se comportan "cuadráticamente".

Flor inició la caída en el applet, activó la casilla y se ubicó en $t = 1.64$. Entonces indicó que "se hacen menores las distancias".

En el caso de Isaac, él inicio la simulación en tiempo real, luego, se ubicó en $t = 1.64$ y entonces activó la casilla "Mostrar distancias". Después exploró nuevamente qué se encontraba más abajo en ese Momento y se detuvo en la pregunta *e* (respecto a si se identificaba algún patrón en las diferencias). Acto seguido, comenzó a registrar los valores de las distancias en la hoja de cálculo del Applet 2.1.3 y sus diferencias respectivas, obteniendo la siguiente tabla:

	A	B
1		
2	13.192	3.021
3	10.171	2.629
4	7.542	2.237
5	5.305	1.844
6	3.461	

Con base en ello señaló que: "debido a la forma en que las gotas se dejaron caer, la gota del extremo izquierdo tiene una mayor distancia con el punto inicial, y las gotas hacia la derecha, van teniendo una distancia menor"

[*NumGraf*] (Pregunta *d* y Applet 2.1.3)

Para responder cuánto cambiaban las distancias, María empleó la hoja de cálculo (como se sugirió) y obtuvo la siguiente tabla:

	A	B
1	distancia	diferenci
2	13.192	3.021
3	10.171	2.629
4	7.542	2.237
5	5.305	1.844
6	3.461	

Con base en ella, María expresó numéricamente los valores de diferencia (columna B), indicando que corresponden a los valores de las diferencias en las distancias de izquierda a la derecha.

En el caso de Alan, él obtuvo la siguiente tabla:

	A	B	C
1	13.192		
2	10.171	3.021	
3	7.542	2.629	0.392
4	5.305	2.237	0.392
5	3.461	1.844	0.393

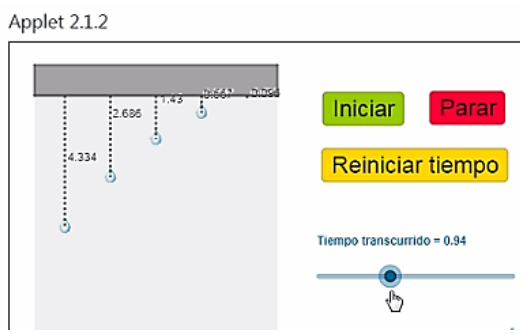
Y en el mismo momento calculó el cambio en la diferencia (columna C).

Flor obtuvo la siguiente tabla e indicó que son "casi 4 décimas de diferencia":

	A	B	C	D	E
1	13.192	10.171	7.542	5.305	3.461
2	3.021	2.629	2.237	1.844	

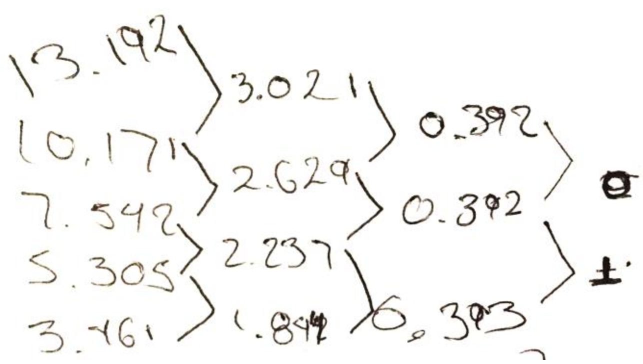
Respecto a cuánto cambian, Isaac, antes de responder, nuevamente exploró lo que vendría más adelante en ese Momento y entonces escribió "las distancias entre las gotas", dejando temporalmente inconclusa la respuesta. Luego, exploró nuevamente el Applet 2.1.2 manipulando el deslizador t y se detuvo en el siguiente instante:

Acto seguido, movió lentamente el deslizador a valores mayores:



Y luego a valores menores. Con base en lo anterior, completó su respuesta indicando que "las distancias entre las gotas no es constante, aquellas que fueron soltadas primero tienen en un cierto instante una distancia mayor con las que le siguen que alguna de estas otras gotas con la que le siguen a ella". Es decir, Isaac identificó que el comportamiento en las diferencias entre las distancias es decreciente.

Otra de las tablas obtenidas se basa en lo que Fausto hizo en papel:



Quedando como sigue:

	A	B	C	D	E
1	13.192				
2		3.021			
3	10.171		0.392		
4		2.629		0	
5	7.542		0.392		0
6		2.237		-0.001	
7	5.305		0.393		
8		1.844			
9	3.461				

Esta representación le permitió a Fausto tener presente qué diferencias estaba calculando. Asimismo, le permitió explorar la precisión del instrumento, pues si bien el tercer dato en la columna C (del cambio en las diferencias) no es igual a los otros dos, el calcular el cambio del cambio y el cambio de dicho cambio del cambio, le dio como resultado cero. Tomando ello en cuenta, Fausto identificó, respecto al comportamiento de las diferencias, "que tienen un incremento proporcional".

[*ArgVar*] (Pregunta *e*)

Respecto a si notaron algún patrón específico en las diferencias, las y los participantes indicaron lo siguiente:

M: "pues que la diferencia de las diferencias valga la redundancia es de 4 unidades aproximadamente"

A: "si tomo la diferencia de la diferencia llego a una constante 0.392, esto es muy similar a las sucesiones cuadráticas estudiadas en la secundaria"

F: "hay casi 4 décimas entre cada uno de ellos, simplemente observe sus diferencias"

I: "En un instante dado, las diferencias de las primeras gotas son mayores, pero se puede notar que 'la diferencia entre las diferencias' es constante."

En el caso de María, pese a haber empleado en el punto anterior la hoja de cálculo, para este punto no recurrió a ella. Sin embargo, sí se basó en los datos de su tabla para proporcionar un valor aproximado. Por otro lado, en este punto se observa que ella emplea el término "unidades" para referirse a las "décimas".

Para dar respuesta, Alan retomó los valores que determinó previamente en la hoja de cálculo. Además, asoció los términos con una sucesión cuadrática.

Flor igualmente se basó en los valores que encontró al elaborar la tabla de datos.

Respecto a Isaac, en este punto nuevamente, antes de responder, exploró lo que venía más adelante. En particular, observó la determinación gráfica de la diferencia entre las distancias en el Applet 2.1.4, así como su alineación y (sin ver la sugerencia) manipuló el deslizador t varias veces, aumentando y disminuyendo sus valores lentamente. Luego, utilizó la hoja de cálculo para determinar el cambio (columna C) en las diferencias (columna B) que había calculado previamente, obteniendo la siguiente tabla:

	A	B	C
1			
2	13.192	3.021	0.392
3	10.171	2.629	0.392
4	7.542	2.237	0.393
5	5.305	1.844	?
6	3.461		

Y con base en ello, respondió lo antes citado.

Actividad III

[*ArgVar* | *NumGraf*] (Applet 2.1.4 y pregunta *f*)

Respecto al comportamiento de las diferencias al ser alineados sus segmentos correspondientes, María identificó que "es el mismo comportamiento que tienen las gotas al caer, es decir como la primera gota de izquierda a derecha recorrió mayor distancia entonces también su diferencia es mayor y así con las demás gotas". Es decir, identificó el decrecimiento más no especificó de qué tipo era.

Para este punto, Alan exploró distintos valores de t en el Applet 2.1.4 y señaló que "tienden a tener la misma distancia entre ellas".

Flor indicó que "son diferencias mínimas".

En el caso de Isaac, con base en lo descrito al final de la Actividad anterior, señaló que "en el inciso anterior se notó que la diferencia entre las diferencias es constante, y aquí podemos observar lo que significa, todas las líneas de diferencia aparecen en instantes diferentes, pero al final todas crecen al mismo ritmo".

[*EstDin* | *ArgVar* | *NumGraf*] (Pregunta *g*)

Al manipular el tiempo con el deslizador t para analizar las diferencias en el Applet 2.1.4, María hizo primero una exploración lenta, luego incrementó la velocidad de su movimiento y aumentó y disminuyó rápidamente el valor de t. Después, siguió la sugerencia de emplear la hoja de cálculo en el Applet 2.1.3 y registró en la columna C el valor de la diferencia de las diferencias:

	A	B	C
1	distancia	diferenci	dif de dif
2	13.192	3.021	0.392
3	10.171	2.629	0.392
4	7.542	2.237	0.393
5	5.305	1.844	
6	3.461		

Luego de ello, manipuló una vez más el deslizador t y señaló que "parece que la diferencias si tienen como un comportamiento de velocidad contante, es decir pues la diferencia que hay entre ellas si es una constante", entonces volvió a consultar la tabla y complementó su respuesta con "entre 0.392 o 0.393 y podemos ver que esto ocurre en cualquier tiempo, o mientras transcurre el tiempo de que las gotas caen".

En este caso, ella reconoció la constancia en el aumento; sin embargo, lo identificó como la velocidad y no la aceleración.

En el caso de Alan, él ya había determinado en la tabla del Applet 2.1.3 el cambio en las diferencias y explorado el Applet 2.1.4 con distintos valores de t, pero lo exploró otro rato más y entonces señaló "noto que el cambio de estas diferencias es constante".

De acuerdo con la grabación, Flor modificó el valor de t en el Applet 2.1.4, observó la tabla en el Applet 2.1.3 (asumiendo que estaba asociada con el otro applet) e indicó que "siguen siendo casi 4 décimas de diferencia, no importa el tiempo". Esta observación es correcta, pero los applets en realidad no estaban vinculados dinámicamente.

Antes de responder, Isaac restauró el Applet 2.1.4, observó nuevamente la determinación gráfica de las diferencias y también su alineación. Luego, exploró el applet con el deslizador t (aumentando y disminuyendo lentamente sus valores) y, dada la sugerencia de calcular el cambio en las diferencias en la "***fila 3*** del **Applet 2.1.3**", reubicó los valores en la tabla que ya había construido en los pasos anteriores (pues había organizado los valores en columnas y no en filas), obteniendo lo siguiente:

	A	B	C	D	E
1	13.192	10.171	7.542	5.305	3.461
2	3.021	2.629	2.237	1.844	
3	0.392	0.392	0.393		

Entonces señaló que "esta diferencia [en las diferencias] es constante, aumentan al mismo ritmo sin importar cuanto tiempo haya transcurrido desde la caída de las gotas".

Actividad IV

[*EstDin* | *ArgVar* | *NumGraf*] (Applet 2.1.5 y preguntas *h* e *i*)

María, luego de ver la alineación de los cambios, exploró diferentes valores de tiempo con el deslizador t (antes de ser sugerido) en el Applet 2.1.5, entonces señaló en la primera pregunta que "es un cambio constante, es decir en todo el transcurso que caen las gotas la diferencia de las diferencias es el mismo, no importa en que instante lo tomes". Más aún, en la segunda pregunta expresó que "este comportamiento se mantiene, la distancia que los separa 0.392 es constante".

En cuanto a Alan, asumió que los últimos puntos se referían nuevamente al comportamiento de las diferencias y no al del cambio en las diferencias, por lo tanto, indicó que el comportamiento era lineal.

En el caso de Flor, ella observó en el Applet 2.1.5 la determinación gráfica del cambio en las diferencias y, antes de ver dichos cambios alineados, exploró diferentes valores de tiempo con el deslizador t (previo a ser sugerido). Entonces, observó la alineación de los cambios y, con base en ello y la exploración anterior, indicó que los cambios son iguales entre sí en la primera pregunta y, en la segunda, que su comportamiento "sigue siendo el mismo en cada intervalo de tiempo".

Por su lado, Isaac exploró el Applet 2.1.5 aumentando y disminuyendo los valores del deslizador t, primero lentamente y luego rápidamente. Entonces señaló en la primera pregunta que "una vez que la gota, y por tanto una diferencia aparece, aparece una línea de cambio de diferencia que no sufre modificación alguna, siempre tiene el mismo valor de 0.392". Para responder la segunda pregunta, exploró nuevamente el Applet 2.1.5 aumentando y disminuyendo rápidamente los valores del deslizador t y, con base en ello, indicó que el comportamiento "es constante, no importa en qué momento de t nos ubiquemos, el cambio de diferencias es siempre el mismo".

Momento 2

Actividad I

[*EstDin*] (Applet 2.2.1)

En general, la exploración dinámica de este applet consistió en manipular el deslizador t aumentando y disminuyendo sus valores.

En el caso de María, ella inició con modificaciones lentas y luego rápidas.

Al igual que María, Alan inició con modificaciones lentas y luego rápidas, solo que lo hizo menos veces que ella.

En el caso de Flor, ella exploró lentamente los valores de tiempo hacia el inicio de la caída, luego lentamente hacia el final.

Isaac solo exploró un poco los valores del deslizador.

Actividad II

[*EstDin* | *CIArr* | *ArgVar* | *NocFis*] (Applet 2.2.2 y preguntas *a* y b)

En este applet se encontró una falla técnica pues, de acuerdo con la grabación de la pantalla de María, si bien al inicio era posible desplazar el conjunto de diferencias ordenadas, luego de un par de movimientos, el desplazamiento quedó bloqueado. Cuando María pudo desplazar el conjunto, primero, lo desplazó hacia arriba, mantuvo seleccionado el triángulo verde (a partir del cual se movía el conjunto) y lo soltó luego de unos segundos. Entonces, lo volvió a seleccionar y ubicó al conjunto justo hasta abajo del fondo del reloj de agua. En ese momento es que el desplazamiento se bloqueó. Pese a ello, María indicó que "sí [es posible encontrar el lugar del conjunto], pero estas posiciones las encuentras asignando tú una posición a la primera gota de izquierda a derecha y ya a partir de ahí encuentras las posiciones de las otras gotas respecto a la primera gota, pero no sabes a que tiempo están esas posiciones". Es decir, María identificó la necesidad de un valor de referencia y su suficiencia para ubicar al conjunto de gotas, aunque señaló como dicho valor solo a la posición de la primera de las gotas.

En el caso de Alan, él desplazó inicialmente hacia la parte más baja del fondo del reloj de agua al conjunto, lo mantuvo seleccionado un rato y entonces lo desplazó hasta la parte superior (donde no se veía). Después, lo volvió a colocar en la parte baja y reinició el applet. Tras ello, el desplazamiento se bloqueó (nuevamente, el problema técnico) y Alan inició su respuesta indicando que "sí, pues", entonces hizo una pausa de algunos segundos y reformuló su respuesta: "sí y no, encontré la posición de las gotas en un determinado tiempo".

En el caso de Flor dos problemas técnicos se suscitaron durante esta exploración. El primero ocurrió cuando Flor intentó reubicar al conjunto de diferencias ordenadas y lo que seleccionó fue el fondo del reloj de agua. Dado que las diferencias dependían de los puntos en los que se ubicaba el fondo (que accidentalmente modificó Flor), estas se desconfiguraron. El segundo problema fue que, tras restaurar el applet, el desplazamiento quedó bloqueado. Tras estas complicaciones, María indicó en respuesta a la pregunta *b* que "siguiendo las líneas se puede localizar desde donde parten".

Por su parte, Isaac revisó todo lo que se vería en ese Momento antes de empezar este punto. Luego, ubicó en el Applet 2.2.2 el conjunto de diferencias ordenadas con el extremo derecho alineado al extremo superior del fondo del reloj. Posteriormente, regresó al Applet 2.2.1 (que tenía ubicado en $t = 1.2$) y desplazó el conjunto en el 2.2.2, primero hacia arriba (hasta no verse) y luego hacia abajo un par de veces. Como en el caso de la exploración de Flor del siguiente applet (2.2.3), parece ser que Isaac trató de reproducir la caída de las gotas. Entonces, volvió al Applet 2.2.1 y manipuló el deslizador t aumentando y disminuyendo sus valores lentamente. Vio nuevamente el conjunto de diferencias ordenadas en el 2.2.2 y manipuló el deslizador t en el 2.2.1 hasta encontrar un momento en el que las diferencias mostradas coincidieran con las otras. Con base en ello, reubicó al conjunto para asemejarse a la posición de ese. Finalmente, exploró el Applet 2.2.3 y ubicó al conjunto de diferencias ordenadas con base en la posición de una de las gotas. Entonces señaló que en 2.2.2 "no se pudo [ubicar el conjunto de gotas], porque las diferencias que se muestran corresponden a un instante de tiempo preciso, el cual no conocemos, o al menos, si se pudiera conocer la posición de una sola gota, sería suficiente para hallar las posiciones de las demás.

Tanto María como Isaac, identificaron adicionalmente que no es posible saber a qué tiempo transcurrido corresponden las posiciones. Esto tiene una importancia significativa dado que, en este caso, el eje temporal es a la vez un eje espacial. Una discusión más profunda de ello se obtuvo a partir de una observación expresada por Javier durante la socialización de resultados.

Respecto a las demás personas participantes, Miguel reconoció la necesidad de un punto de referencia respecto al cual ubicar las diferencias ordenadas, pues señaló que “no lo creo [haber podido ubicarlas], respecto a el inciso anterior recuerdo que las diferencias van cambiando a medida que subía o bajaba el conjunto de gotas, entonces al no tener con qué comparar, no creo haberlas encontrado”.

En el caso de Raúl, él inicialmente señaló que “sí, ya que al saber la distancia que tiene cada gota con la otra podemos ver donde esta cada una”; sin embargo, tras concluir este Momento e iniciar a explorar del siguiente, regresó a esta pregunta y la cambió a “no, ya que necesito al menos una posición para saber donde están las demás gotas”. De hecho, en su applet también se le había bloqueado el desplazamiento, pero el hecho de pasar a la siguiente hoja y regresar, lo hizo nuevamente posible.

Actividad III

[*EstDin*] (Applet 2.2.3)

Respecto a la ubicación del conjunto de gotas dada la posición de la última de ellas, María y Alan desplazaron las diferencias ordenadas y hallaron el lugar del conjunto.

En el caso de Flor, dados los problemas técnicos que se suscitaron en su exploración del applet anterior, desde el inicio seleccionó el fondo del reloj en el Applet 2.2.3 y lo modificó, quizá buscando la manera de restaurar el Applet 2.2.2, pues hizo esto varias veces en ambos applets. Luego, en el Applet 2.2.3 desplazó el conjunto de diferencias hacia arriba, deteniéndose en la posición de la gota de referencia, subiendo lentamente, luego bajando lentamente otra vez a la posición de la gota y finalmente subiendo de nuevo. Al parecer, Flor trataba de reproducir la exploración de applets anteriores donde modificaba el paso del tiempo y veía la caída del conjunto de gotas.

Isaac ubicó el lugar del conjunto de diferencias ordenadas anteriormente.

[*ArgVar* | *NocFis*] (Pregunta *c*)

En cuanto a cómo sirvió la nueva información para encontrar el lugar del conjunto, María señaló que "como ya sabes donde hay una gota puedes encontrar las otras a partir de esta nueva gota y en relación a su posición". Es decir, identificó que con una de las posiciones se ubicaba el lugar del conjunto, mas no reparó en el hecho de que no necesariamente fue la primera de las gotas (como señaló al final de la Actividad previa).

Alan indicó que "ahora teniendo el dato de la posición de una gota puedo encontrar donde están las demás debido a su diferencia de posición".

Con base en su exploración anterior (y los problemas técnicos que se suscitaron), Flor señaló que la información de la gota servía "para ubicar las demás diferencias en su posición de origen".

En el caso de Isaac, inició su respuesta señalando que "al colocar el gráfico en la posición que nos indica una de las gotas, entonces ya es posible conocer las del resto de gotas, pues las diferencias que tenemos ya como datos". Entonces, exploró nuevamente los Applets 2.2.2 y 2.2.3 (aunque, al restaurar el 2.2.2 se encontró con el problema técnico del bloqueo en el desplazamiento) y completó su respuesta indicando que dichos datos "indicarán donde encontrar las otras posiciones".

En el caso de Javier, en el Applet 2.2.2 ubicó al conjunto de diferencias ordenadas en cierto lugar específico y señaló, por ende, que sí le fue posible encontrar su lugar. Luego, tras interactuar con el Applet 2.2.3, respondió a la pregunta *c* que la información de la gota le fue útil "únicamente para ubicar un momento fijo y así localizar el resto de las gotas en ese momento". Este punto respecto al tiempo, como se mencionó anteriormente, tuvo una implicación importante durante la socialización de resultados.

[*ArgVar* | *NocFis*] (Pregunta *d*)

Al cuestionar qué información sería necesaria y suficiente para ubicar un conjunto mayor de gotas, el alumnado señaló lo siguiente:

M: "Si ya tenemos la información de sus diferencias ordenadas solo bastaría con conocer la posición de una sola gota para que en relación a esta gota pudiéramos encontrar la posición de las demás"

A: "como vimos en el diagrama, con una sola basta"

F: "Tal vez harían falta más para ubicar exactamente el lugar del que parten"

I: "Si se tienen las diferencias ordenadas, entonces no hace falta conocer la posición de más de una gota para poder encontrar el resto, pues solo hace falta tomar esta como punto inicial y solamente sumar las o restar las diferencias, sabiendo que en dichas posiciones están el resto de gotas."

En el caso de Flor muy probablemente el no identificar la necesidad y suficiencia de una gota para determinar la ubicación del conjunto de gotas se deba a la ocurrencia de los problemas técnicos antes descritos.

Actividad IV

[*EstDin*|*CIArr*] (Applet 2.2.4 y pregunta *e*)

Respecto a la ubicación del conjunto de cambios ordenados, María desplazó el conjunto para ubicarlo hasta abajo del reloj de agua.

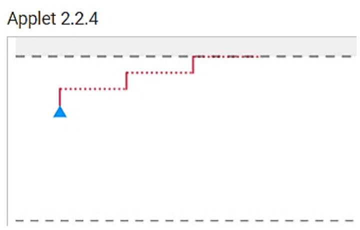
En el caso de Alan, él desplazó el conjunto hacia arriba, luego un poco más abajo y luego en un lugar de la zona superior.

Flor desplazó el conjunto de cambios ordenados hacia el área superior del reloj, luego lo subió un poco más y lo ubicó con el extremo derecho unido a la parte más alta.

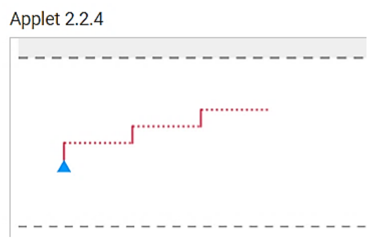
Por su lado, Isaac observó el ordenamiento de los cambios y luego los desplazo hacia la zona inferior del reloj, luego los movió un poco hacia el centro y ahí los dejó.

Los cuatro casos desplazaron el conjunto de cambios ordenados a cierta ubicación del reloj. Es decir, parece ser que, o no se anticipó la imposibilidad de ubicar el conjunto de cambios ordenados al no contar con un referente (pese a haber reconocido previamente la necesidad de un valor de referencia al ubicar el conjunto de diferencias ordenadas), o bien, que la exigencia didáctica usual de siempre dar una respuesta haya conducido a que el alumnado intentara encontrar un lugar específico para atender la indicación.

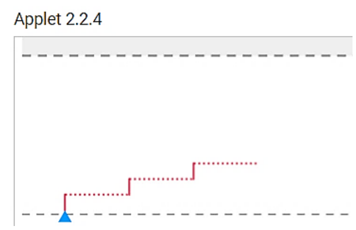
Considerando a las demás personas participantes, todas y todos modificaron la posición inicial de los cambios ordenados, dejándolos en algunas de las siguientes ubicaciones:



Flor
Raúl
Ramón



Alan
Isaac
Miguel
Román



María
Martha
Fausto
Javier

Aunque cabe señalar que este estado final no corresponde en todos los casos a su primera ubicación, pues, tras leer la pregunta consiguiente, hubo quienes la modificaron.

En el caso de Raúl, él primero ubicó al conjunto en la parte superior, luego, al leer la pregunta *f*, restauró el applet y colocó al conjunto donde se encontraba inicialmente. Entonces, ordenó los cambios y, con el movimiento de su cursor, describió la continuación escalonada del conjunto. Después, vio el Applet 2.2.5 y respondió. Eventualmente, colocó al conjunto donde lo había ubicado inicialmente, pero no todos hicieron lo mismo.

Fausto, por ejemplo, lo ubicó inicialmente en la parte superior también, pero, tras leer la pregunta consiguiente, trató de regresar al conjunto a su posición preestablecida. Algo similar ocurrió en el caso de Martha.

[*ArgVar*] (Pregunta *f*)

En cuanto a si notaron la necesidad de un valor de referencia para poder determinar la magnitud de las diferencias, las respuestas del alumnado fueron las siguientes:

M: Después de unos minutos escribió "pues si al igual necesitamos un punto de referencia". Entonces hizo una pausa, regresó al Applet 2.2.2 y revisó su respuesta en el inciso *b*. Tras otro par de minutos continuó: "es decir en que instante de tiempo esta pasando eso y ya a partir de ahí encontrar la posición de todos los demás”

A: “si, pues sin ese dato estamos perdidos”

F: “Si nuevamente seguimos los cambios en las diferencias podemos ubicar el lugar de origen”

I: “En efecto, si no tenemos ese valor de referencia, entonces no tenemos forma de ubicar los cambios de diferencias como los del gráfico para poder encontrar las diferencias en un instante dado.”

En el caso de Flor, con base en lo que vino señalando en cada pregunta, parece ser que implícitamente reconoce la necesidad de un punto de referencia pero que lo asocia con el origen de la caída de las gotas.

Respecto a las demás personas que participaron:

Raúl: “A pesar de que conocemos el valor del cambio de diferencias siento que necesitaré más información para determinar la posición de las gotas”

Fausto: “Se necesita un punto de referencia o inicial para saber de donde se va a partir y así poder obtener los datos faltantes.

Martha: “si en realidad tenemos que tener un sistema de referencia para poder determinar la magnitud de las diferencias ya que esta esta es diferente, lo que no es diferente es el cambio de dichas diferencias”

Javier: “no es posible calcular la magnitud de las diferencias teniendo como dato únicamente el valor del cambio en las diferencias”. Aunque esto lo expresó tras revisar los applets anteriores y analizar lo que había escrito hasta ese momento.

En este punto se reconoce que el haber redactado la pregunta en afirmativo fue inadecuado, pues es probable que su respuesta se haya visto forzada por la redacción de la pregunta.

Pese a ello, el contenido de las respuestas del alumnado, así como sus exploraciones dinámicas, sugieren el reconocimiento de la necesidad de un punto de referencia, ya sea el “origen” o algún otro referente respecto al cual se determine el conjunto.

Actividad V

[*EstDin*|*ArgVar*|*NocFis*] (Applet 2.2.5 y pregunta *g*)

Contando con la magnitud de una de las diferencias, María ubicó el lugar del conjunto de cambios alineados y señaló, respecto a la utilidad de la información proporcionada que "pues como un paso que ya se hizo con anterioridad como ya tenemos las diferencias ya igual las ponemos en un punto de referencia determinado y ya podemos obtener las posiciones finales de las gotas de agua en relación a esa posición de referencia". Con el final de su respuesta, parece ser que María no reconoció que el conjunto de segmentos ordenados correspondía al cambio en las diferencias y no a las diferencias.

Asimismo, Alan ubicó el lugar del conjunto de cambios ordenados e indicó únicamente que "si, es posible teniendo ese dato".

Contando con la magnitud de una de las diferencias, Flor señaló que dicha información le sirvió "para ubicar las posiciones de cada una de las gotas de agua de las que se conoce la diferencia de cambios". Es decir, reconoció que se trataba del cambio en las diferencias, pero no identificó que la *vuelta* era solo del cambio en las diferencias a las diferencias (y no del cambio en las diferencias a la posición de las gotas). Finalmente, tras leer el cierre del Momento 2, Flor regresó al Applet 2.2.3 y ubicó el conjunto de diferencias ordenadas para corresponder con la posición de la gota presentada.

En el caso de Isaac, él indicó que "al tener una posición como referencia, simplemente basta con colocar el gráfico en la posición dada y esto nos dará a conocer de forma muy simple el valor de las demás diferencias".

Respecto a las demás personas que participaron, Raúl, antes de responder, regresó al Applet 2.2.1 un par de veces y comparó los cambios ordenados presentados ahí con aquellos en el Applet 2.2.5; asimismo, revisó las diferencias ordenadas en el Applet 2.2.3 y reubicó en el Applet 2.2.4 los cambios ordenados hacia la parte superior (donde inicialmente los había colocado). Finalmente, señaló que "al conocer el cambio en la diferencia y una distancia podemos saber la magnitud de dicha diferencia".

Algo similar ocurrió en el caso de Javier, indicando finalmente que "conociendo el valor de una de la magnitud de una de las diferencias y teniendo ordenados los cambios en las diferencias seria posible encontrar el resto de las diferencias, ya que de esta forma podríamos trazar el resto de las diferencia”. Es decir, se reconoce la necesidad de un valor de referencia en el paso del cambio en las diferencias a las diferencias.

Momento 3

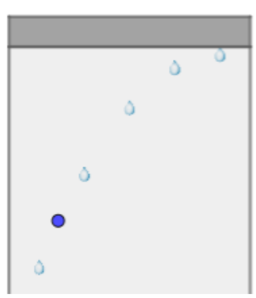
Actividad I

[*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*] (Applet 2.3.1 y preguntas *a* y *b*)

Con base en la cuantificación del tiempo entre la aparición de cada gota, María obtuvo la siguiente tabla:

	A	B
1		t
2	Gota 1	0
3	Gota 2	0.3
4	Gota 3	0.6
5	Gota 4	0.9
6	Gota 5	1.2

Y a partir de ella señaló que “cada 0.3 segundos aparece una gota nueva, dejan caer una gota en tiempo iguales”. Además, señaló que si una gota se dejara caer entre la primera y la segunda válvula, cuya caída comenzara a los $0.15\ s$, “yo considero que estaría ahí [donde se muestra en la siguiente imagen], ya que fue dejada caer a la mitad del tiempo establecido, pero tiene el mismo comportamiento de las demás gotas, estaría en medio de la posición de la primera y segunda gota pero al igual más alejada de la primera, por los comportamientos que ya hemos visto”. Esto sugiere que María reconoce el tipo de comportamiento creciente y cada vez mayor.



Alan obtuvo la misma tabla que María, con base en ella identificó que la gota cae “cada 0.3 segundos” y respecto al caso de la válvula entre la primera y la segunda, ubicó el punto en un lugar similar al de María y señaló que “la gota debería de estar arriba de la primera y abajo de la segunda. pues visto de manera fácil este es el patrón que sigue, es decir si de deja caer una gota después estará siempre arriba de la que se dejó caer antes”. En este punto, Alan explica el tipo de comportamiento (creciente) aunque no hace mayor énfasis en el tipo de comportamiento (cada vez mayor).

En el caso de Flor, ella empezó viendo la caída de las gotas en tiempo real y luego a un paso de tiempo más lento. A continuación, determinó los tiempos en los cuales apareció cada una de las gotas sin mucho detenimiento, es decir, con valores aproximados de tiempo en los cuales aparecieron; por lo tanto, obtuvo la siguiente tabla:

	A	B
1		t
2	Gota 1	0
3	Gota 2	0.34
4	Gota 3	0.65
5	Gota 4	0.93
6	Gota 5	1.27

Así, señaló que aparecen “aproximadamente cada 3 décimas de segundo”. Respecto a la ubicación de la gota intermedia, la ubicó en un lugar similar al de María y Alan y explicó que la colocó ahí “por las diferencias de tiempo entre ellas”. Es decir, parece que implícitamente Flor atribuye esto al comportamiento observado y a que dicho tiempo se encuentra entre el tiempo que aparecieron las primeras dos gotas. Sin embargo, en este punto existe la posibilidad de que el haber obtenido valores aproximados le impidiera ser más específica.

Por su lado, Isaac, al igual que Flor, empezó viendo la caída de las gotas en tiempo real y luego a un paso de tiempo más lento. A continuación, fue iniciando y parando la caída para determinar un tiempo aproximado en el cual iban apareciendo las gotas de agua; luego, cuando halló que la Gota 4 apareció en $t = 0.9\ s$, decidió verificar los anteriores tiempos que había determinado y corrigió hasta obtener una tabla con la de María y la de Alan. Hizo un seguimiento con su cursor de los valores en la tabla y entonces señaló que “una gota nueva aparece cada 0.3 segundos”. Tanto antes de responder esto como después, exploró lo que vendría más adelante en ese Momento.

Respecto a la ubicación de la gota caída de la válvula intermedia, Isaac indicó una ubicación similar a la señalada por María, Alan y Flor, y explicó que "considero que la gota se encontraría cerca del punto medio entre la primera y segunda válvula, pero un poco más ubicada en la zona superior de este punto intermedio, pues debe cumplirse que esta esté a una mayor distancia de la primera válvula que de la segunda", en este punto parece referirse a una mayor distancia de la gota de la primera válvula que de la gota de la segunda. Es decir, como María, Isaac reconoce que, además de ser creciente el comportamiento, dicho crecimiento va en aumento.

Actividad II

[*ArgVar* | *NocFis*] (Applet 2.3.2 y pregunta *c*)

Al contrastar la simulación del reloj de agua con la caída de la gota previamente analizada, el alumnado señaló lo siguiente:

M: "Que a tiempos iguales la gota recorre diferentes distancias, aún más mientras el tiempo va incrementando las distancias que va recorriendo son aún mayores".

A: "como en el inciso a se da cada 0.3 segundos. se debe a que el cambio de la velocidad con respecto al tiempo que experimenta cada gota es el mismo por lo tanto una gota arbitraria lo experimentara en algún punto (tomando en cuenta que se sueltan a distintos tiempos)"

F: "Son casi iguales, considero que se debe a que se relaciona con la aceleración"

I: "Noto que cada 0.3 segundos la gota alcanza una de las posiciones marcadas, considero que se debe a que, a pesar de dejar caer las gotas en diferentes instantes, todas se encuentran sometidas a la misma aceleración, y por lo tanto, cada una de ellas tarda el mismo tiempo en caer una determinada altura, pasando por los mismos puntos en los mismos instantes si se dejan caer a la vez"

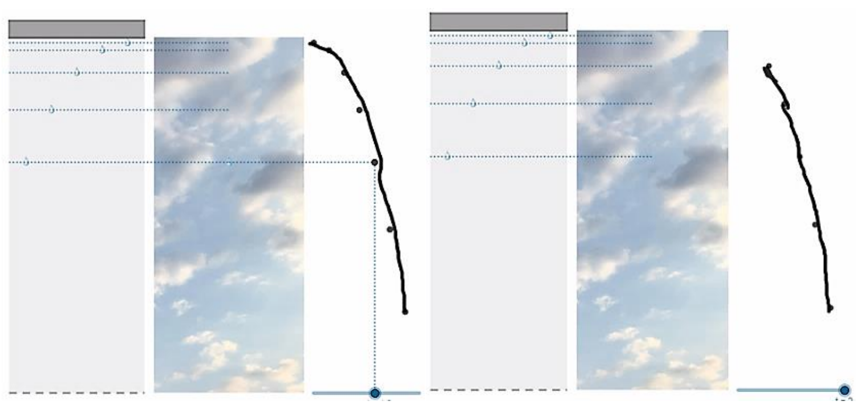
En el caso de Flor, ella colocó el deslizador t en los tiempos aproximados que determinó en el primer applet y fue comparando uno a uno entre ambos applets.

En el caso de Isaac, comenzó explorando con el deslizador de tiempo en el momento $t = 0.15\ s$ (el tiempo en el que iniciaba la caída de la gota a partir de la válvula planteada entre la primera y la segunda en la pregunta *b*). Después, se detuvo en cada una de las alturas en los tiempos $0.3\ s$, $0.6\ s$, $0.9\ s$ y $1.2\ s$ y con base en ello, respondió lo arriba citado. En los casos de Alan, Flor e Isaac, los tres justificaron lo observado a partir de una propiedad que se mantiene en ambas situaciones, correspondiente a un mismo factor físico: el de la aceleración.

Actividad III

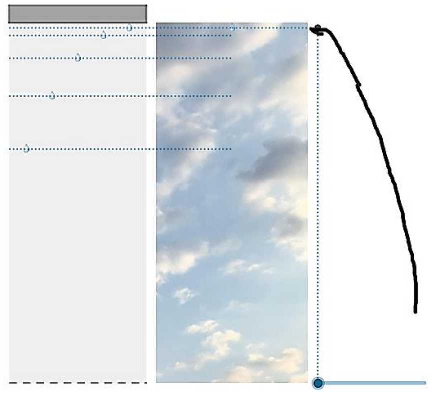
[*EstDin*] (Applet 2.3.3)

En cuanto al bosquejo de la gráfica de la posición de la gota de agua con respecto al tiempo, María exploró con el deslizador de tiempo el rastro de la altura correspondiente a intervalos de $0.3\ s$ y propuso el siguiente par de bosquejos:

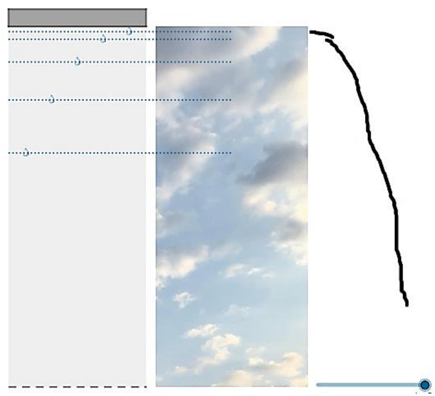


El de la izquierda fue su primer intento, luego, borró lo que tenía, volvió a marcar el rastro (aunque por la rapidez con la que lo hizo no se marcaron los puntos iniciales) y trazo el de la derecha. Particularmente, esto permitió ver la dependencia a los puntos de María, pues la indicación señalaba que se bosquejara dónde se encontrarían las demás posiciones correspondientes a todos los demás valores de t. Es decir, la estimación se redujo a los valores de tiempo entre los puntos y no hacia ambos extremos para completar el intervalo.

Alan igualmente se basó en los puntos y no se extendió todo el intervalo hasta la derecha:



Flor propuso el siguiente bosquejo tras observar el rastro en el intervalo preestablecido:



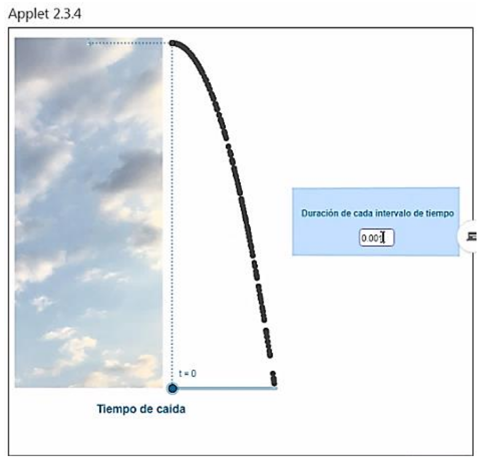
Particularmente, se observó que, tras realizar su trazo, Flor movió el deslizador hasta el extremo derecho y ajustó un poco más su bosquejo moviéndolo para coincidir con los puntos descritos. En su caso, como ocurrió con María y Alan, no extendió el trazo para cubrir todo el intervalo de tiempo mostrado.

Isaac no propuso un trazo, únicamente manipuló el deslizador de tiempo.

Actividad IV

[*ArgVar*] (Applet 2.3.4 y pregunta *e*)

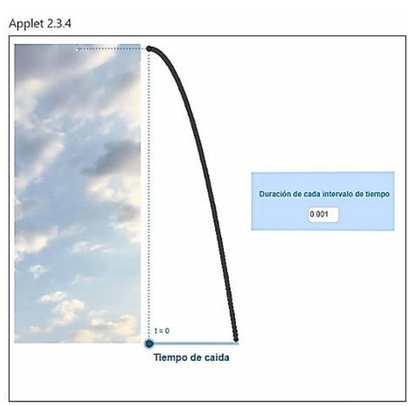
En este applet, María exploró el rastro de las alturas para los intervalos de tiempo sugeridos 0.15 y 0.075, luego, con uno que ella propuso 0.038, luego el más pequeño de los sugeridos 0.005 y de ahí siguió disminuyendo. Al parecer, María quería llegar a un punto en el que el rastro mostrara una continuidad, sin embargo, para ello era necesario hacerlo más lentamente (como se sugería), pues siguieron apareciendo "saltos":



Finalmente, tras comparar lo explorado en este applet con el bosquejo que anteriormente propuso, María comentó que "efectivamente, mi bosquejo se acercó al diagrama correspondiente, ya que entre cada tiempo la gotita va cayendo igual y pues podemos notar que en relación gráfica de las distancias y el tiempo se tiene una línea curveada". Es decir, ella reconoció la relación distancia–tiempo representada por el trazo curvo.

Alan exploró con los valores propuestos y señaló que "lo encontrado es una forma de parábola". Luego, regresó al Applet 2.3.1, leyó algunas de las preguntas y respuestas y exploró en el Applet 2.3.2 mediante el deslizador de tiempo, aumentando y disminuyendo lentamente sus valores. Después, antes de pasar al siguiente Momento, en el Applet 2.3.1 exploró también con el deslizador t.

En el caso de Flor, ella exploró lentamente (como se sugería) el deslizador de tiempo para ver el rastro correspondiente a los intervalos propuestos, culminando con el de $0.005\ s$ de duración. Así, obtuvo la siguiente representación continua de la posición con respecto al tiempo:



Con base en ello indicó que "dibujan ambos la misma línea y se puede ver que es una parábola".

En el caso de Isaac, él no propuso un bosquejo (quizá omitió la indicación), pero señaló en la última pregunta que "más allá de que todos los puntos coinciden dentro de una misma línea pues se tratan de un mismo fenómeno visto en distintos instantes, se puede reafirmar que la gráfica de la posición de la gota de agua en intervalos de tiempo t, nos indicaría exactamente las posiciones de las gotas de agua en un determinado instante si estas se liberan en intervalos iguales de tiempo t como en el arreglo planteado". Es decir, Isaac logró asociar la dimensión espacial en la simulación del reloj de agua con la dimensión temporal en la representación gráfica de la caída de la gota de agua, argumentando físicamente que ambos corresponden al mismo fenómeno y que el arreglo planteado corresponde a intervalos de tiempo iguales.

Momento 4

Actividad I

[*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*] (Applet 2.4.1 y 2.4.2 y pregunta *a*)

María exploró el Applet 2.4.1 aumentando y disminuyendo el valor de t. Luego, tras observar las diferencias entre los desplazamientos correspondientes a un segundo y dos segundos transcurridos, señaló que el comportamiento esperado de esas diferencias es "que tengan una proporción entre sí, aún más que la distancia de el origen al primer segundo es un cuarto de la distancia que hay entre el primer segundo al segundo segundo".

Por su lado, Alan exploró también el Applet 2.4.1 aumentando y disminuyendo el valor de t y, después, tras observar lo que se mostraba en el Applet 2.4.2, movió el cursor simulando la caída de la gota por encima de la gráfica de la posición. Entonces, avanzó al siguiente applet y determinó numéricamente el cambio en las diferencias. Acto seguido, señaló que esperaba que las diferencias se comportaran "linealmente".

En cuanto Flor, ella exploró lentamente algunos valores de t en el Applet 2.4.1. Después, exploró lo mostrado en el Applet 2.4.2 en tiempo real y con un paso de tiempo más lento. Entonces, indicó que esperaba que las diferencias "tengan entre ellas un patrón de diferencia".

Isaac revisó lo que vendría a lo largo de ese Momento y exploró el Applet 2.4.1 con el deslizador t, aumentando y disminuyendo sus valores un par de veces. Entonces observó la determinación gráfica de las diferencias en el Applet 2.4.2 tres veces con un paso de tiempo más lento y señaló que "se espera que conforme vaya avanzando el tiempo, las diferencias vayan creciendo (tal como se observa), pero que al registrar estas diferencias, el cambio en ellas se mantenga constante como se tenía en el arreglo anterior del reloj de agua".

Actividad II

[*ArgVar* | *NumGraf*] (Applet 2.4.3 y pregunta *c*)

Respecto a cuál es el cambio en las diferencias, María determinó inicialmente que su magnitud es de 9.81 (introduciendo en la casilla de entrada del Applet 2.4.3 la resta de las magnitudes de las diferencias); sin embargo, después modificó este valor para ajustarse a la magnitud de la primera diferencia (4.905) y, con base en ello, señaló que esperaba "que [lo que se desplace la gota entre el segundo 2 y el segundo 3] sea el triple de la diferencia del segundo 1 y el segundo 2". Esta es una de las respuestas que se sometió a discusión en la socialización de resultados.

El cambio en las diferencias que determinó Alan en el Applet 2.4.3 (introduciendo la resta de las diferencias en la casilla de entrada) fue de 9.81. Con base en ello, determinó cuánto se desplazaría la gota entre el segundo 2 y el segundo 3 indicando que sería "29.43". Lo que parece ser que hizo Alan fue sumar las primeras dos diferencias y a eso sumarle 9.81; sin embargo, el desplazamiento entre ambos segundos corresponde a la siguiente diferencia, por lo tanto, no fue adecuado considerar el primer sumando.

En el caso de Flor, ella colocó diferentes cantidades y restas en la casilla de entrada. En orden, estas fueron: 15, $5-8$, $7-7$, $14-4$ (valores aproximados de las diferencias), $10-28$, $18-6$, $25-9$, $16-1$, $16-6$, $4-1$, $3-2$, $1-.5$, $.5-.75=-0.25+1=0.75-.25=0.5+.5=1$ y entonces, como respuesta al inciso *c* indicó "aproximadamente 1.0". Después indicó en la pregunta *d* (respecto a si esto era consistente con lo que había respondido en el *a*) que "en cierto modo, existe un patrón de diferencias entre cada una de ellas". Luego, regresó al applet 2.4.1 y manipuló el deslizador t hacia el inicio y hacia el final, deteniéndose cerca de $t = 1\ s$. Acto seguido, pasó el curso por encima de la gráfica de la posición en el Applet 2.4.2. y regresó al Applet 2.4.3. En él, introdujo en la casilla de entrada: 14.5, hizo una pausa y luego escribió: $14.715 - 4.905$ obteniendo como resultado 9.81. Tras ello, le sumó a dicho resultado 14.715 y obtuvo 24.525. Entonces cambió su respuesta del inciso *c* por "aproximadamente llegará a 24.525 si le agregamos el cambio a la última medida", el cual es el valor correcto.

En el caso de Isaac, antes de iniciar este punto, se dio la pausa para comer. Al reanudar, Isaac examinó que es lo que había hecho previamente y entonces introdujo en la casilla de entrada del Applet 2.4.3 la resta de las diferencias, obteniendo 9.81. Con base en ello, indicó que "se espera que la distancia recorrida entre los segundos 2 y 3 sea de 24.525 m". Al igual que Flor, hizo la predicción adecuada.

[*NocFis*]

Acerca de si la predicción es consistente con lo que se respondió en la pregunta *a* (¿cómo se espera que se comporten las diferencias?), las respuestas del alumnado fueron las siguientes:

M: "si, porque hay una proporción, tal y como lo afirme pero de una tercera parte, no de una cuarta parte"

A: "Si"

F: "En cierto modo, existe un patrón de diferencias entre cada una de ellas"

I: "Sí, porque, como se había esperado, el cambio en las variaciones (que van en aumento) se mantiene constante (9.81)"

Algo que cabe señalar en este punto es que, en la introducción de la fase empírica, la investigadora propuso al alumnado que se comenzara resolviendo las primeras dos Tareas y, tras ello, se hiciera la pausa para comer. De acuerdo con el seguimiento en tiempo real que se hizo del trabajo de Flor, ella terminó antes que los demás las Tareas 1 y 2; sin embargo, no lo manifestó hasta que Alan señaló haber acabado [*Gen*].

TAREA 3

TIEMPO PROMEDIO DE RESOLUCIÓN: 1 hora 3 minutos

Momento 1

Actividad I

[*ArgVar*] (Applet 3.1.1 y pregunta *a*)

Tras observar la alineación de los segmentos correspondientes a las diferencias y a los cambios, María señaló que esto "no [es consistente con su predicción en la Tarea anterior], pero es verdad justamente ya lo habíamos hecho con anterioridad. ya sabíamos que la diferencia de las diferencias se mantenía constante y en este caso es de 9.81". Es decir, identificó la similitud entre ambos fenómenos y el significado de la constante calculada.

En el caso de Alan, tras observar las alineaciones en el Applet 3.1.1 indicó que su predicción "si, es consistente. pues el cambio en los datos del tiempo es lineal".

Flor también señaló que era consistente con su predicción "pues únicamente sume el cambio a las diferencias".

Al igual que Alan y Flor, Isaac afirmó que lo observado en el Applet 3.1.1 "sí corresponde a lo predicho, pues efectivamente existe un aumento en las diferencias que se puede apreciar como las líneas rojas en el gráfico, y este cambio de diferencias resultó ser el mismo, constante".

Actividad II

[*ArgVar* | *NumGraf*] (Imagen 3.1.1 y pregunta *b*)

Respecto a la comparación cualitativa y cuantitativa de las diferencias y los cambios correspondientes a intervalos de $0.5\ s$ y $1\ s$, el alumnado indicó lo siguiente:

M: "Podemos observar que el cambio de las diferencias sigue siendo constante, pero es otro escalar, y que es aún más pequeño, y ya que se toman cada 0.5 segundos hay más diferencias de las distancias y entonces sus diferencias es un número menor"

A: Luego de deslizar el cursor siguiendo una trayectoria lineal en las diferencias alineadas correspondientes a los intervalos de $0.5\ s$, señaló "lo que notamos a primera vista es que el cambio de las diferencias es constante a pesar de las de las particiones que se hagan (o al menos en estos dos casos)"

F: "Es menos de la mitad, es decir, si para 1 segundo tenemos que el cambio es de 9.81, probando ahora con la mitad de tiempo su diferencia entre ellos se hace más pequeña"

I: "Al tomarse intervalos de 0.5 segundos notamos que se obtiene una mayor cantidad de datos de diferencias y por tanto de cambios de diferencias. En los intervalos pequeños además observamos un cambio de diferencia de magnitud mucho menor que en los intervalos de 1 segundo, lo que nos hace pensar que al considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños, más pequeños serán también los cambios de diferencias."

En el caso de María, ella reconoce que al considerar intervalos menores, las diferencias en los desplazamientos son más y, a su vez, su magnitud es menor en comparación con intervalos mayores.

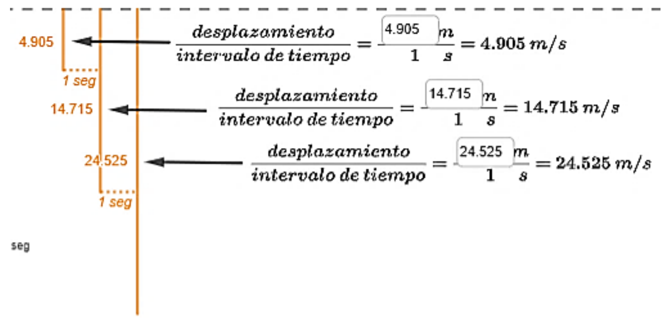
En cuanto a Flor, ella se enfocó únicamente en lo cuantitativo al describir las diferencias.

En el caso de Isaac, antes de responder, revisó un poco de lo que vendría más adelante en ese Momento.

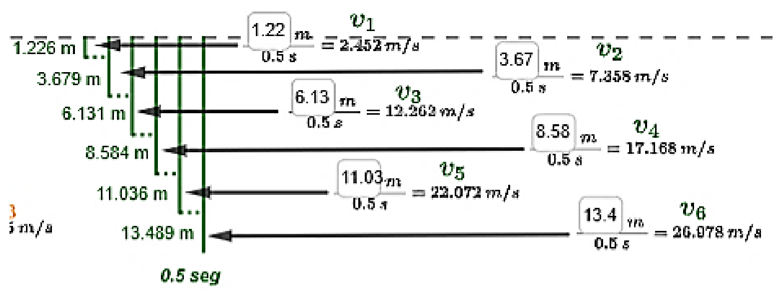
Actividad III

[*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*] (Applets 3.1.2 y 3.1.3 y preguntas *c*, *d*, *e* y *f*)

En el cálculo de las velocidades correspondientes a intervalos de $1\ s$, María obtuvo lo siguiente:



Tras lo anterior, María hizo una pausa para comer con el grupo. Después, en las velocidades correspondientes a intervalos de $0.5\ s$ obtuvo lo siguiente:



Con base en lo anterior, María comparó el primer valor de velocidad calculado en intervalos de $1\ s$ con los dos primeros calculados en intervalos de $0.5\ s$ y dedujo "que [la primera de intervalos de un segundo] es el doble de la velocidad v_1 de la primera de los intervalos de 0.5 segundos y que es un poco más de la mitad de la v_2"[35]. Es decir, ella basó su relación en buscar un factor entre las magnitudes aludidas.

Al cuestionarle respecto a si ello se mantenía en las siguientes triadas, María indicó que "no, en esta ocasión nos damos cuenta que v_2 esta intermedia a las otras dos velocidades, pero es el doble de la v_2 de los intervalos de 0.5 s, al igual que la v_3 es intermedia a esas velocidades y es el doble a la v_3 respectiva de ese intervalo". En este caso, el identificar que son "intermedias" es justamente lo que se pretendía destacar, que existe una relación de orden. Por otro lado, María encuentra una relación más, las velocidades calculadas para intervalos de $1\ s$ son, respectivamente, el doble de las de $0.5\ s$. Esto cobra sentido si se toma en cuenta que las velocidades medias tienen un incremento proporcional y,

[35] La notación de v_1 y v_2 la incluyó María empleando el editor de ecuaciones de la plataforma de GeoGebra.

como unidades de medida relativas, el factor hallado por María evidencia el tipo de crecimiento que ambos conjuntos de valores comparten.

En el caso de Alan, él obtuvo los mismos valores de velocidad en los Applet 3.1.3 y 3.1.4. Y, como María, identificó que en "ambos casos las diferencias son constantes pero en el intervalo de 1 segundo estas diferencias son el doble que en las de medio segundo". Luego, previo a responder la pregunta *f*, leyó la pregunta *g*. Entonces señaló que en los siguientes valores "si se mantiene la relación".

Flor también obtuvo los mismos valores de velocidad en los Applet 3.1.2 y 3.1.3. Luego, señaló que "la velocidad de los intervalos se incrementa rápidamente teniendo como aproximadamente 0.49 entre v1 y v1 y 0.66 entre v2 y v1 de cambio". Después indicó que dicha relación no se mantiene en los demás valores planteados pues "de hecho incrementan conforme pasa el tiempo transcurrido". En este punto, ella revisó qué vendría en todo el Momento.

Asimismo, Isaac revisó en este punto qué vendría más adelante en todo el Momento y obtuvo los mismos valores de velocidad en los Applets 3.1.2 y 3.1.3. Luego, antes de responder a la pregunta *e*, empleó la hoja de cálculo que se proporcionó como apoyo debajo de la pregunta *g*, calculando el promedio de v_1 y v_2 correspondientes a los intervalos de 0.5 segundos. Entonces indicó que "se observa que la velocidad v1 en intervalo de 1s tiene un valor que se encuentra justo entre los valores v1 y v2 de los intervalos de 0.5s", es decir, Isaac reconoció la relación de orden. Luego, señaló que "sí, efectivamente la relación dicha se mantiene en todos estos valores e intervalos".

Actividad IV

[*ArgVar*|*NocFis*] (Pregunta *g*)

Tras sugerir el cálculo de promedios, María señaló "que son iguales, el promedio de v_1 y v_2 [de los intervalos de 0.5 segundos] es igual al valor de v_1 de los intervalos de 1 seg. esto en términos físicos quiere decir que las velocidades que son tomadas en la mitad del tiempo de un intervalo es igual al promedio de estas de un intervalo completo". Con esto, María comienza a asociar el significado de la velocidad media con el valor promedio de las velocidades en el intervalo dependiendo de su longitud.

En el caso de Alan, antes de responder, observó el Applet 3.1.4, luego, regresó a la pregunta *f* y completó su respuesta con "la velocidad 4 menos la 3 es igual a la 2 similar para el otro caso". Entonces, exploró el Applet 3.1.4 modificando los valores del deslizador t y revisó lo que vendría más adelante en ese Momento. Acto seguido, indicó que "el promedio [de las v_1 y v_2 en los intervalos de 0.5 segundos] es igual a V1 [en los intervalos de 1 segundo]". Tras ello, borró lo que había completado en la respuesta a la pregunta *f*.

Flor empleó la hoja de cálculo que se incluyó como apoyo introduciendo en las celdas A1 y A2 los valores de v_1 y v_2 correspondientes a los intervalos de 0.5 segundos y en la celda A3 la operación para calcular su promedio: (A1+A2)/2, obteniendo como resultado 4.91. Con base en ello, señaló que este valor "es aproximadamente igual [al v_1 en intervalos de 1 segundo]". Después, calculó los demás promedios e indicó que "ocurre con los demás valores, se puede deber a que la aceleración influye con el tiempo, y la aceleración debe ser igual". Es decir, Flor asume que existe un parámetro físico que asocia las magnitudes, en este caso, que en ambos casos se tiene la misma aceleración.

Para dar respuesta a este punto, Isaac calculó (nuevamente empleando la hoja de cálculo proporcionada) el promedio de v_3 y v_4 correspondientes a los intervalos de 0.5 segundos. Con base en ello, señaló que "al obtener el promedio se obtiene exactamente v1. Supongo que esto se debe a que sin importar como se dividan los intervalos de tiempo, en todos los casos lo que estamos calculando una velocidad promedio que lleva el objeto en caída mientras recorre cierta distancia, en el caso del primer intervalo, esto se nota pues es claro que la velocidad en la primera mitad del segundo es menor que la velocidad en el otro medio segundo debido a la aceleración, pero ninguna de ellas representa el verdadero valor de la velocidad promedio en ese intervalo de tiempo, sino el promedio de estas". Con lo anterior, Isaac destaca que los valores promedio calculados corresponden a estimaciones sobre cómo se desplaza el objeto en determinados intervalos de tiempo.

Una observación particular es que Flor señala que los valores promedio son "aproximadamente" iguales a los valores de velocidad calculados para los intervalos de 1 segundo.

Actividad V

[*EstDin*|*ArgVar*|*NocFis*] (Applet 3.1.4 y pregunta *h*)

Al analizar el Applet 3.1.4 con base en las observaciones anteriores, las respuestas del alumnado fueron las siguientes:

M: "efectivamente notamos que si es el promedio de estas velocidades, la velocidad correspondiente cuando se trata de un intervalo de 1 segundo".

A: "podemos notar que justamente que Vn de los intervalos de 1 segundo es igual al promedio entre los valores de Vn-1 con Vn de los intervalos de medio seg"

F: Inició un par de veces la caída de la gota en el Applet 3.1.4 y entonces expresó que "aquí se observa claramente como el promedio de las velocidades en los intervalos de tiempo evaluado en 0.5 seg. son iguales a las velocidades en los intervalos de tiempo evaluados en 1 seg."

I: Inició varias veces la caída de la gota en el Applet 3.1.4 y comentó que "con base en lo siguiente [pues el applet se encuentra debajo de la pregunta] podemos concluir que ambas formas de dividir los intervalos de tiempo nos llevan a resultados correctos aunque a simple vista parezcan diferentes, y notamos que si se emplean intervalos de tiempo más pequeños entonces se tendrá una idea más clara de la velocidad que el objeto lleva en cada punto de su caída."

En este punto se reafirma el que las velocidades medias en intervalos de un segundo corresponden al promedio de las velocidades medias en intervalos de medio segundo.

En el caso de Isaac, nuevamente revisó lo que venía en lo que restaba de ese Momento antes de responder. Por otro lado, lo que expresa Isaac acerca de que, considerando intervalos de tiempo más pequeños, se tendrá una idea más clara de la velocidad que el objeto lleva, sugiere que, en el punto anterior, al señalar que ninguno de los valores promedio representa el "verdadero valor de la velocidad promedio", Isaac aludía realmente a la velocidad. Es decir, él concibe como "verdadera velocidad" a la velocidad instantánea.

Actividad VI

[*ArgVar*] (Applet 3.1.5 y pregunta *i*)

Al comparar lo que se presenta en el Applet 3.1.5 con lo analizado previamente, María indicó "que las velocidades de los intervalos de un segundo, si son intermedias a las que son tomadas en los intervalos de 0.5 segundos y además son el doble a las primeras tres velocidades de los intervalos de 0.5 segundos". Es decir, con esto confirma la relación de orden identificada, así como el factor proporcional entre ambos conjuntos de valores.

En el caso de Alan, él observa dos veces lo que se presenta en el Applet 3.1.5, regresa a lo que anteriormente describió y entonces señala que "podemos notar que efectivamente el promedio de las velocidades verdes nos dará la velocidad naranja en el intervalo correspondiente".

Tras observar lo que se presentó en el Applet 3.1.5, Flor regresó a ver los puntos anteriores y entonces respondió que aquello se relaciona con lo observado "en que efectivamente, por cada intervalo de tiempo la velocidad varía según se tome el tiempo".

Similar a Flor, Isaac observe lo presentado en el Applet 3.1.5, regresó a ver lo anterior e inició su respuesta indicando que "lo observado nos lleva a notar que, así como con la velocidad, las diferencias de posiciones tomando los intervalos de tiempos como se hizo anteriormente", vio nuevamente la graficación de las velocidades promedio en el Applet 3.1.5 y editó lo anterior agregando que "como mencionamos, las magnitudes de las velocidades considerando los dos distintos intervalos de tiempo son meramente velocidades promedio, y por ejemplo, los valores en intervalos de 1s son exactamente el promedio de ciertos valores tomando intervalos de 0.5 s".

[*EstDin*|*ArgVar*] (Applet 3.1.6 y pregunta *j*)

María exploró el Applet 3.1.6 disminuyendo rápidamente los valores del intervalo de tiempo y, luego, aumentándolo un par de veces. A partir de ello, señaló que "vemos que esto tiene una tendencia lineal y que entre el tiempo es menos las magnitudes de las líneas también disminuye considerablemente, se marca tan cual una línea recta, ya que en ese momento ya no son segmentos sino puntos". Esta observación respecto al paso de los segmentos a los puntos deja entrever el paso de lo discreto a lo continuo entre la velocidad continua y la instantánea.

Alan disminuyó la duración del intervalo en el Applet 3.1.6 hasta llegar al valor mínimo ("muy cercano a 0") e inició su respuesta a la pregunta *j* con "las velocidades promedio se comportan", luego, aumentó nuevamente la duración del intervalo un poco y la volvió a reducir hasta el mínimo, entonces completó su respuesta con "linealmente".

En el caso de Flor, ella disminuyó la duración del intervalo rápidamente, luego lo incrementó rápidamente y, finalmente, lo disminuyó lentamente. Entonces, señaló respecto a la representación de las velocidades promedio que "se van haciendo cada vez más pequeñas hasta que cuando se tiene un valor casi igual a 0 se obtiene una línea recta".

Isaac hizo una exploración del Applet 3.1.6 similar a la de Flor, disminuyendo la duración del intervalo rápidamente, luego incrementándola también de manera rápida y, finalmente, disminuyendo lentamente su valor. Con base en ello indicó que "existen diferencias que también se vuelven muy cercanas a cero. Las representaciones de las velocidades promedios tienden a volverse puntos". Es decir, como María, reconoció el paso de lo discreto a lo continuo gráficamente al pasar de las velocidades promedio a los puntos.

Actividad VII

[*EstDin ArgVar*|*NocFis*] (Applet 3.1.7 y preguntas *k* y *l*)

Primero, María inició un par de veces la caída de la gota en el Applet 3.1.7. Luego, sin mover los puntos correspondientes al tiempo inicial y al final, expresó que cuando ambos valores se acercaran tanto como fuera posible, "la línea que se genera va a ser tangente a la curva que se realizó en relación al tiempo y la distancia recorrida por la gotita". En este punto María asocia el llegar a la velocidad instantánea con la tangencia de la recta de la velocidad a la curva de la posición construida. Más aún, cuando se le pregunta sobre qué ocurriría en particular con la caída de la gota, María expresó que "es cada vez menor es decir es un video más corto hasta llegar a ser una imagen solamente".

Alan sí exploró modificando las posiciones del tiempo inicial y el tiempo final varias veces en el Applet 3.1.7, entones comentó que "podemos notar que deja de ser una delta para convertir en una d y esta da el valor de velocidad instantánea. además que solo existe un solo punto". Respecto a qué se aprecia en la gota, Alan expresó que "no le pasa nada".

Al igual que Alan, Flor exploró modificando las posiciones del tiempo inicial y el tiempo final varias veces en el Applet 3.1.7, iniciando la caída en cada intervalo explorado. Luego, fue acercando poco a poco los puntos correspondientes al tiempo inicial y al tiempo final, hasta ubicarlos tan cerca como fuera posible (hasta que solo hubiera un punto), haciendo esto en varias posiciones del intervalo de tiempo. Entonces comentó respecto a las representaciones gráficas y la notación que "va variando, es decir, se hace más pequeña la gráfica y como esta representa la velocidad promedio, entre mas cerca este un t1 de un t2 se acerca a la velocidad instantánea". En este punto, Flor asocia la diferencia gráfica con la velocidad promedio y, más aún, que entre más se acerca el tiempo inicial al tiempo final, se va aproximando a la velocidad instantánea.

Para la última pregunta, respecto a qué ocurre en la caída de la gota, Flor explora en el Applet 3.1.7 ubicando los puntos correspondientes al tiempo inicial y al tiempo final muy cerca, pero no en el mismo lugar, e iniciando la caída de la gota. Esto lo hace para tres intervalos de tiempo cada vez más pequeños, hasta que llega al momento en que ambos puntos se hallan en la misma posición e igualmente inicia la caída de la gota (la cual no se mueve). Entonces, separa nuevamente los puntos y ve una vez más la caída. A partir de ello, responde que la gota "se detiene en ese intervalo de tiempo". De ahí, antes de pasar al siguiente Momento, explora nuevamente el Applet 3.1.6 aumentando y disminuyendo la duración del intervalo.

En el caso de Isaac, él exploró este applet con diferentes intervalos de tiempo, algunos con una duración igual al intervalo presentado, después, colocando los puntos correspondientes al tiempo inicial y al tiempo final en la misma posición, alejándolos y acercándolos varias veces. Entonces, indicó que "los valores pasan de ser intervalos a puntos, por ejemplo, en el caso del tiempo, se vuelven instantes o momentos, en la notación se ve que se cambia del uso de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ a $\frac{dv}{dt}$"[36].

Respecto a qué ocurre en la caída de la gota, Isaac ubicó ambos puntos de tiempo en el mismo lugar y dio clic varias veces en iniciar. Después señaló "se muestra una imagen estática, un intervalo de tiempo tan pequeño que es imposible apreciar un cambio en su posición". Con su frase Isaac alude a que, si bien se torna imposible apreciarlo, en un intervalo de tiempo pequeño sigue habiendo un cambio.

Momento 2

Actividad I

[*ArgVar*] (Applet 3.2.1 y preguntas *a* y *b*)

En el caso de María, con base en los valores que determinó en el Applet 3.2.1 ($9.81\ m/s^2$ en ambos casos), señaló que lo que identifica en ellos es "que es el valor que nosotros asignamos a la gravedad".

Antes de interactuar con el applet y de responder las preguntas, Alan se detuvo en lo que vendría más adelante en este Momento. Después, obtuvo $9.81\ m/s^2$ para ambos valores de aceleración correspondientes a intervalos de $1\ s$ y $0.5\ s$, y con base en ello indicó que dichos valores "son iguales".

Flor obtuvo los mismos valores de aceleración y entonces comentó que "es el mismo valor de la aceleración sin importar que intervalo de tiempo se evalúe".

Por su lado, Isaac recorrió todo lo que vendría más adelante en este Momento. Tras ello, en el applet 3.2.1 obtuvo también $9.81\ m/s^2$ e indicó que "se trata del mismo valor, sin importar el intervalo de tiempo que se considere, el cambio en la velocidad es equivalente". Entonces, procedió a responder la siguiente pregunta y, luego de hacerlo, editó lo anterior insertando "con respecto al tiempo" luego de "la velocidad".

[*ArgVar*|*NocFis*] (Pregunta *c*)

---

[36] Él también empleó el editor de ecuaciones para expresar los cocientes referidos.

Respecto a qué esperaría encontrar si se consideraran intervalos de tiempo más cortos, el alumnado indicó que:

M: "múltiplos de la gravedad bueno en este caso como los tiempos son más cortos serian razones de la gravedad, por ejemplo si el tiempo es de 0.5 segundo se obtiene la mitad de la gravedad".

A: "espero encontrar 9.81 metros sobre segundo al cuadrado"

F: "El mismo valor en cada intervalo, sin importar que tan pequeño o que tan grande sea el mismo"

I: "Espero encontrar el mismo valor, pues habrá cambios en velocidad más pequeños pero divididos en intervalos también pequeños, así que se espera obtener 9.81m/s^2"

En el caso de María, en este punto parecer ser que ella se enfocó en la magnitud del cambio en las velocidad (unidad absoluta de los segmentos) y no en el valor de la aceleración de la gravedad (unidad relativa al tiempo).

Actividad II

[*ArgVar*] (Applet 3.2.2 y pregunta *d*)

Tras explorar el Applet 3.2.2 disminuyendo la duración del intervalo a su valor mínimo, María expresó que la aceleración promedio "es la misma [a la aceleración instantánea], no varía de alguna forma".

Alan exploró el applet disminuyendo la duración hasta llegar a $0.01\ s$ y entonces señaló que "es igual" la aceleración promedio a la instantánea.

Como María, Flor disminuyó la duración del intervalo hasta su valor mínimo y comentó que "ambas [aceleraciones] son iguales".

En el caso de Isaac, él disminuyó y aumentó rápidamente los valores de duración del intervalo en el Applet 3.2.2, luego los disminuyó lentamente y entonces señaló que la aceleración promedio "Es igual [a la aceleración instantánea], lo que nos lleva a pensar que en este fenómeno la aceleración es constante". Es decir, la interpretación de la gráfica llevó a Isaac a concluir la constancia en la aceleración en el fenómeno abordado.

Actividad III

[*EstDin*|*ArgVar*] (Applet 3.2.3 y pregunta *e*)

María aumentó y disminuyó la longitud del intervalo de tiempo en el Applet 3.2.3 acercando y alejando rápidamente los puntos correspondientes al tiempo inicial y al tiempo final hasta ubicarlos eventualmente en la misma posición. Entonces indicó que "podemos notar que efectivamente la gravedad permanece constante, no importa que tan pequeño sea el intervalo de tiempo que se tome". Es decir, si bien al inicio de este Momento María se había enfocado en el cambio de la velocidad, en este punto reconoce que, cuando dicho cambio se mide con respecto al tiempo, su valor se mantiene constante independientemente de la duración del intervalo. En particular, María parece estar empleando indistintamente el término gravedad como sinónimo de la aceleración causada por la fuerza de gravedad.

En el caso de Alan, él aumento y disminuyó lentamente la duración del intervalo, haciendo coincidir un par de veces a los puntos correspondientes al tiempo inicial y al tiempo final. Después, indicó que "similar que antes cambia de tener un delta a poner un "d" además que cuando se acercan tanto como es posible sólo se visualiza un punto".

En el caso de Flor, antes de iniciar este punto, se dio la pausa para comer. Al regresar, aumentó y disminuyó rápidamente la duración del intervalo en el Applet 3.2.2 (de la Actividad anterior) y entonces exploró el Applet 3.2.3 aumentando y disminuyendo un par de veces la duración del intervalo, aunque no se detuvo en algún momento en que los puntos de tiempo inicial y final coincidieran. Luego de esta exploración indicó que "Aquí podemos observar que mientras la velocidad cambia según los intervalos de tiempo, la aceleración se mantiene constante". Esta observación principalmente devino de comparar las gráficas de la velocidad y la aceleración.

Respecto a Isaac, él modificó la separación entre los puntos correspondientes al tiempo inicial y al tiempo final en el Applet 3.2.3 varias veces, cubriendo la totalidad del intervalo presentado, en intervalos más cortos y en el caso puntual. Con base en esta exploración, Isaac señaló que "sin importar qué tan grande sea el intervalo de tiempo, la aceleración, ya sea promedio o instantánea, no cambia de valor, sin embargo, la notación es modificada de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ a $\frac{dv}{dt}$".

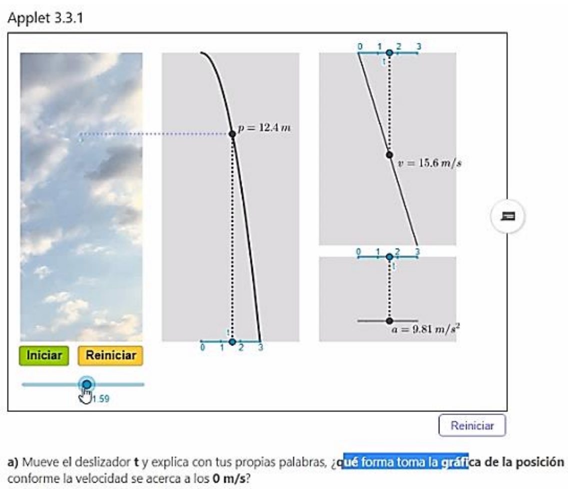
Momento 3

Actividad I

[*EstDin*|*ArgVar*|*NumGraf*] (Applet 3.3.1 y preguntas *a* y *b*)

María comenzó su exploración del applet iniciando y reiniciando la caída de la gota. Luego, respecto a la forma que toma la gráfica de la posición conforme la velocidad se acerca a los $0\ m/s$ señaló que "tiene una tendencia curvilínea, es decir una parábola, ya que en el resto de la grafica podría parecer tener una tendencia lineal”. Consecuentemente, su descripción acerca de la gráfica de la posición para valores de velocidad cada vez mayores fue que “pareciera que los demás puntos tienen una tendencia lineal, ya que la línea se curvea de una manera casi imperceptible”.

En el caso de Alan, su exploración del Applet 3.3.1 consistió primero en manipular el deslizador t aumentando y disminuyendo lentamente su valor hacia ambos extremos del intervalo un par de veces, luego, inició y reinició varias veces la caída de la gota. Tras esto, Alan leyó la pregunta que seguía, subrayó la parte de la pregunta alusiva a la “forma” de la gráfica y exploró más con el deslizador de tiempo:



Su exploración entonces se centró en la parte inicial del intervalo de tiempo. Después, revisó lo que se encontraba más adelante en este Momento y entonces preguntó a la investigadora qué quería decir “forma de la gráfica”. Ella le explicó que dicha expresión se refería a las cualidades de la curva correspondiente a la gráfica analizada, es decir qué observaba en la forma que tomaba la gráfica dependiendo del intervalo de tiempo considerado. Luego de esta explicación, Alan indicó que conforme la velocidad se acerca a los $0\ m/s$ la forma que toma la gráfica de la posición es “muy ‘circular’, ‘ovalado’" y que, al aumentar “tiende a tener la forma de una recta”.

Respecto a Flor, ella inició y reinició la caída de la gota de agua en el Applet 3.3.1 y, luego de leer el planteamiento de la pregunta a, exploró con el deslizador t en el mismo applet disminuyendo lentamente su valor, es decir, aproximándose a $t = 0\ s$. Tras ello, indicó que la gráfica de la posición, conforme la velocidad tiende a $0\ m/s$, “forma una parábola invertida puesto que conforme a cada posición que va tomando la velocidad disminuye". Y cuando adquiere valores mayores la velocidad "forma una parábola puesto que conforme a cada posición que va tomando la velocidad aumenta".

Antes de comenzar, Isaac revisó lo que vendría a lo largo de ese Momento. Luego, inició varias veces la caída de la gota en el Applet 3.3.1. Tras ello, empleó el deslizador t para explorar lentamente algunos tramos del intervalo de tiempo. Entonces, leyó la pregunta a y exploró los valores iniciales del intervalo. Con base en esto, indicó que "cuando la velocidad se acerca a cero, parece que la gráfica de la posición se torna curva, en este caso, que adopta la forma de una parábola". Mientras que "al aumentar la velocidad, la gráfica de la posición crece rápidamente, tanto que es posible afirmar que se asemeja a una recta". Con esto se aprecia una articulación entre las observaciones físicas, el comportamiento identificado y la representación gráfica.

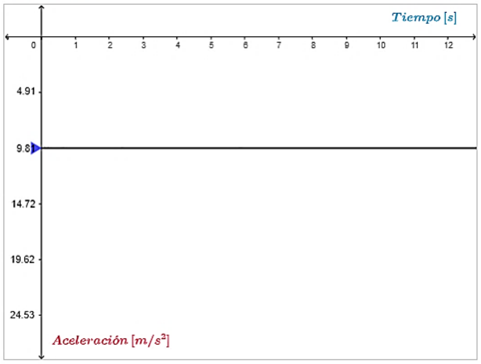
Tomando en cuenta a las demás personas que participaron, en este punto se encontraron en general dificultades por parte del alumnado para describir la forma de la gráfica en los intervalos señalados. Solo la cuarta parte identificó que la gráfica de la posición tenía una mayor curvatura al inicio y que después tendía a una recta. Las y los demás se limitaron a señalar que se trataba de una parábola en ambos casos. Particularmente, Martha indicó que cuando la velocidad tiende a $0\ m/s$, la gráfica de la posición "toma la forma de un solo punto" y, cuando la velocidad tiende a valores mayores, la forma de la gráfica de la posición corresponde a "una parábola que abre hacia abajo".

Actividad II

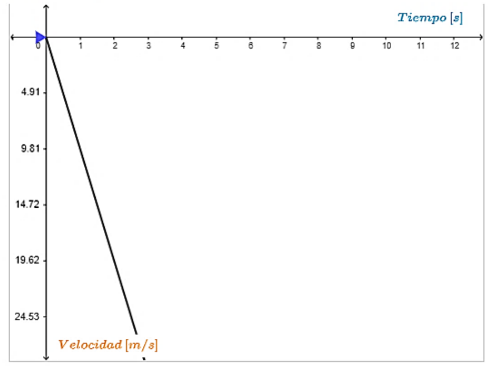
[*EstDin* | *CIArr*] (Applets 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 y 3.3.5 y preguntas *c* y *d*)

María vio el ordenamiento de los cambios de velocidad (traslapados al cambio de la gráfica de la aceleración a la de la velocidad) y de las diferencias en la posición (traslapadas al cambio de la gráfica de la velocidad a la de la posición) una vez cada uno. Luego, en los Applets 3.3.4 y 3.3.5 ubicó las gráficas de la aceleración y la velocidad, respectivamente, como se muestra a continuación:

Applet 3.3.4



Applet 3.3.5



En el caso de Alan, también vio el ordenamiento de los cambios de velocidad (traslapados al cambio de la gráfica de la aceleración a la de la velocidad) y de las diferencias en la posición (traslapadas al cambio de la gráfica de la velocidad a la de la posición) una vez cada uno. Respecto a su interacción con los Applets 3.3.4 y 3.3.5, inicialmente colocó la gráfica de la aceleración con ordenada igual a $4.91\ m/s^2$, luego, la de la velocidad la ubicó con su intersección al eje *y* en un punto entre los $0\ m/s$ y los $4.91\ m/s$. Después, la reubicó para que pasara por el origen. Tras ello, regresó al Applet 3.3.4 y ubicó la gráfica de la aceleración con ordenada igual a $9.81\ m/s^2$.

Flor también vio los ordenamientos en los Applets 3.3.2 y 3.3.3 una vez cada uno. Posteriormente, en los Applet 3.3.4 y 3.3.5, respectivamente, ubicó en un inicio tanto la gráfica de la aceleración como la de la velocidad con ordenada igual a $9.81\ m/s^2$. Luego, reubicó la de la velocidad con ordenada igual a $14.72\ m/s^2$ y expresó respecto a la información en la que se basó que fue "considerando que la aceleración es la misma (9.81) y que una de las velocidades es de 14.72". Tras ello, regresó al Applet 3.3.1 y exploró un poco con el deslizador de tiempo y reubicó la gráfica de la velocidad para que pasara por el origen.

Isaac comenzó viendo el ordenamiento de los cambios de velocidad (traslapados al cambio de la gráfica de la aceleración a la de la velocidad) en el Applet 3.3.2 y de las diferencias en la posición (traslapadas al cambio de la gráfica de la velocidad a la de la posición) en el Applet 3.3.3 varias veces cada uno. Luego, en el Applet 3.3.4, ubicó la gráfica de la aceleración con ordenada igual a $9.81\ m/s^2$ y, en el Applet 3.3.5, desplazó la de la velocidad de tal manera que pasara por el origen.

[*ArgVar* | *NumGraf* | *NocFis*] (Preguntas *e* y *f*)

Respecto a en qué información se basó María para ubicar las gráficas en el punto anterior, ella señaló que "en la de la aceleración, porque ya sabíamos que es el valor de la gravedad que es de 9.81" y que la gráfica de la velocidad "la puse en el origen porque sabemos que el tiempo inicial es cero". Con esto, María justifica el por qué su abscisa es cero, pero no el por qué su ordenada también lo es. De hecho, el haber bloqueado el movimiento a solo desplazamientos verticales implica que el tiempo de inicio siempre será cero, por lo tanto, al desplazar la gráfica hacia el origen María tuvo que haber considerado que la velocidad en el tiempo de inicio también era cero, aunque no lo reconociera explícitamente.

En el caso de Alan, expresó respecto a la gráfica de la aceleración que "me base en que la constante del cambio en la velocidad con respecto al tiempo es 9.81" y, respecto a la de la velocidad "tome que la velocidad inicial es 0 en este caso".

Tras las exploraciones que realizó Flor, señaló que ubicó las gráficas de aceleración y velocidad "considerando que la aceleración es la misma (9.81) y que la velocidad en t=0 es 0".

Isaac comentó que "en el primer caso fue sencillo pues sabemos que tenemos un valor constante de aceleración el cual conocemos". Respecto a la gráfica de la velocidad, indicó: "tomé como referencia la suposición de que el objeto en caída parte del reposo, es decir que cuando t es 0, también v es 0".

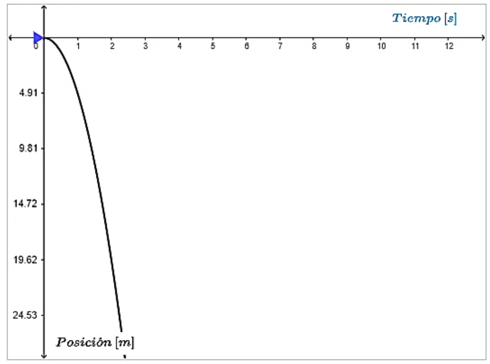
Dadas estas respuestas, se aprecia que los cuatro casos reconocieron (solo María lo hizo implícitamente) que para poder ubicar la gráfica de la velocidad es necesario conocer la velocidad inicial, pues fue el valor que tomaron como referencia.

Actividad III

[*EstDin* | *CIArr*] (Applets 3.3.6 y pregunta *g*)

María ubicó la gráfica de la posición como se muestra a continuación:

Applet 3.3.6



Similarmente, Alan, Flor e Isaac eligieron la misma ubicación.

[*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*] (Pregunta h)

Respecto a qué valor se tomó como referencia para poder ubicar la gráfica de la posición, el alumnado indicó lo siguiente:

M: "igual coloque el triangulo azul en el origen porque sabemos que las mediciones se empezaron a tomar en el tiempo igual a cero"

A: "que la posición inicial es 0"

F: "$t = 0$"[37]

I: "Al igual que en el inciso anterior, consideré el instante de tiempo 0, en el cual sabemos que la posición también será 0."

Tras responder este último elemento del Momento 3, Alan hizo su pausa para comer.

En el caso de María, el expresar que las mediciones "se empezaron a tomar en el tiempo igual a cero" parece indicar que su elección de ordenada corresponde a que las mediciones partieron de cero en el momento cero.

Es decir, al menos tres de los cuatro casos reconocen que para poder ubicar la gráfica de la posición es necesario un valor de referencia: la posición inicial del objeto.

[37] Aquí Flor empleó el editor de ecuaciones de la plataforma.

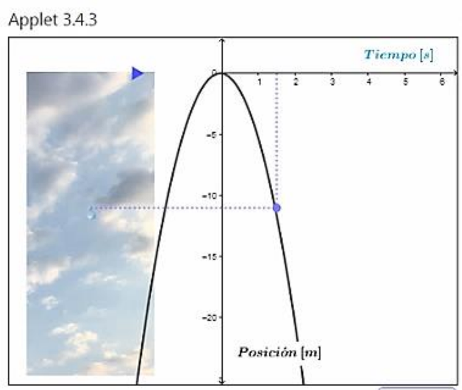
Momento 4

Las Actividades I y II de este Momento se centraron en la descripción de la notación diferencial y en la síntesis sobre las actividades realizadas hasta el momento con relación a dicha notación, por lo tanto, la selección de datos se retoma desde la Actividad III:

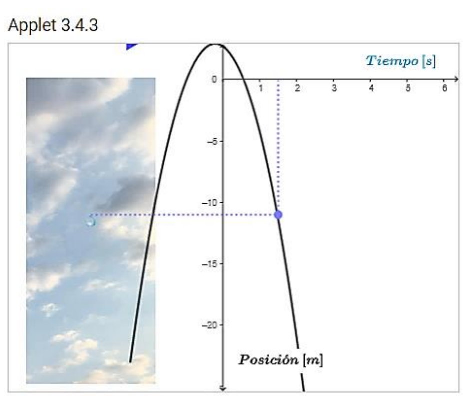
Actividad III

[*EstDin*|*CIArr*] (Applets 3.4.3)

María ubicó la gráfica de la posición como se muestra a continuación:

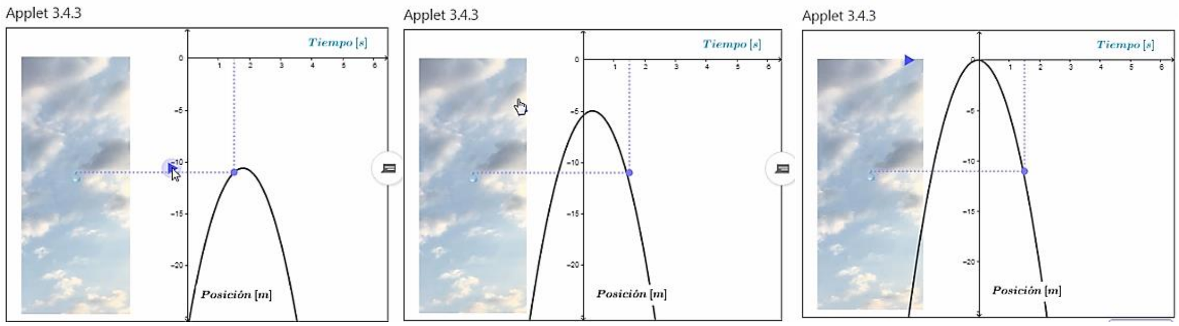


Alan igualmente ubicó su gráfica con el vértice en el origen. Luego, regresó a los puntos anteriores en el Momento y trató de ubicar la gráfica donde se encontraba inicialmente. Después la colocó nuevamente con vértice en el origen. Inició su respuesta al siguiente punto y reubicó la gráfica donde se muestra a continuación:

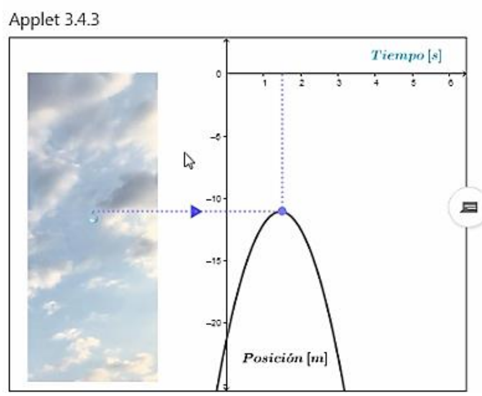


Flor inicialmente ubicó la gráfica con vértice en el origen. Luego, la desplazó para que su origen coincidiera con el punto mostrado y sin dejar de seleccionarla la regresó al origen.

En el caso de Isaac, las ubicaciones que propuso inicialmente fueron:



Luego, exploró el applet de la siguiente actividad sin responder a la pregunta *a* y, tras ello, modificó su última propuesta a:



Isaac restauró entonces el applet (para obtener la ubicación preestablecida de la gráfica) y, con el cursor, delineó su contorno desde el vértice hacia el brazo derecha de la parábola. Una vez hecho esto, regresó la gráfica a la ubicación anterior (con vértice en la posición inicial del punto) y respondió la pregunta *a*.

[*ArgVar* | *NocFis*] (Pregunta *a*)

Respecto a si el lugar preestablecido en el que se encontraba la gráfica era correcto, María señaló que "no, no estaba bien colocada, porque tenia que partir del punto 0, ya que es ahí cuando se empezaron a medir las posiciones de la gotita y ahí el punto podrá estar dentro de la gráfica". La posibilidad de desplazar la gráfica tanto vertical como horizontalmente, apoyó a que María justificara su elección tanto respecto al tiempo (abscisa) como respecto a la posición (ordenada), pues en este punto menciona que las posiciones se comenzaron a medir desde el origen.

En el caso de Alan, cuando ubicó la gráfica con vértice en el origen, señaló que "no es correcto [el lugar en el que se ubicaba la gráfica inicialmente] ya que para poder trazar esa gráfica la gota debería en algún momento subir". Luego, cuando la reubicó con el vértice por encima del eje *x*, añadió "una manera es poner la parábola en el origen".

Flor explicó que "el vértice de la parábola debe de ubicarse en el origen ya que se sabe que la gota se encuentra en caída libre en la posición t=0". En este punto se aprecia una imprecisión en el lenguaje de Flor pues, si bien la gota se encuentra en caída libre durante todo el recorrido, con su expresión parece referirse más bien a que a partir de ese momento inició la caída.

Como se mencionó previamente, antes de responder a esta pregunta, Isaac exploró el applet de la siguiente actividad y reubicó la gráfica del Applet 3.4.3 de tal forma que su vértice se encontrara en la posición inicial del punto. Entonces, señaló que "coloco la gráfica en esa posición suponiendo que la gota está partiendo del reposo, pues con el dato que se indica no basta para obtener más información sobre la gota".

Del total de participantes, además de Isaac, Raúl y Fausto identificaron que la ubicación correcta de la gráfica era con su vértice en la posición inicial del punto. La manera en la cual estos dos participantes lo llevaron a cabo se describe a continuación:

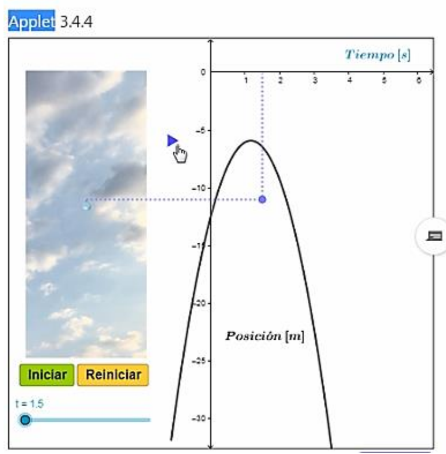
- Raúl:
    - Similar a Isaac, exploró con el applet de la siguiente actividad antes de responder e identificó que la trayectoria del punto corresponde a la gráfica con su vértice ubicado en la posición inicial del punto. Así, señaló que "se debe ubicar en el vértice de la parábola la posición inicial de la partícula"

- Fausto:
    - Su primera propuesta fue ubicar la gráfica con su vértice en la posición inicial del punto y con base en ello señaló que la ubicó ahí "porque el punto mas alto de la parábola corresponderia a nuestro punto inicial".

Actividad IV

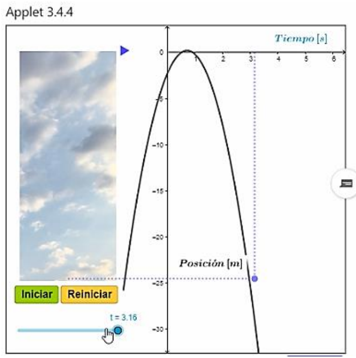
[*ArgVar* | *NocFis*] (Applets 3.4.4 y pregunta *b*)

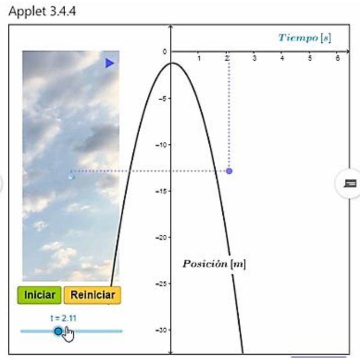
En el caso de María, previo a leer la indicación que acompañaba al applet: "ubica la gráfica en el lugar que decidiste era el correcto en el inciso anterior (si estabas de acuerdo con la posición, déjala donde está, si no, ubícala donde la colocaste)", inició la caída de la gota con la gráfica de la posición ubicada en el lugar preestablecido. Al ver que la trayectoria del punto no correspondía con la gráfica, la ubicó un poco más arriba del lugar preestablecido y reinició la caída. Nuevamente, al no coincidir con ésta, ubicó la gráfica en donde ella había pensado al inicio (con el vértice en el origen) y reinició la caída de la gota dos veces. Después, probó con la siguiente ubicación iniciando la caída de la gota también:

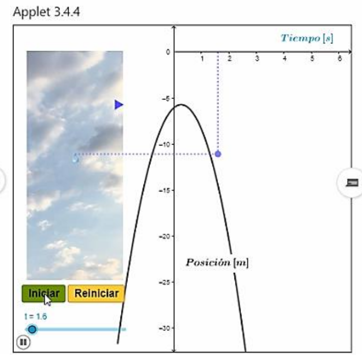


Reinició el tiempo y entonces desplazó la gráfica para que su vértice coincidiera con la posición inicial del punto. Entonces señaló que la ubicación que ella propuso inicialmente para la gráfica "no [era correcta], ya que me había confundido, pero además de la posición también necesitas el tiempo para poder ubicarla de una manera adecuada". Es decir, María reconoció que necesitaba más información además de la posición de la gota, pero en lugar de considerar la velocidad inicial como aquella otra información necesaria, consideró al tiempo.

Alan tampoco leyó la indicación de ubicar la gráfica en donde había señalado anteriormente e inició la caída de la gota en el Applet 3.4.4 con la gráfica en su ubicación preestablecida. Al ver que no coincidía la trayectoria del punto con esta, leyó la indicación y reinició la caída. Luego, ubicó la gráfica con su vértice en el origen y reinició la caída. Después intentó colocando la gráfica en las siguientes ubicaciones:



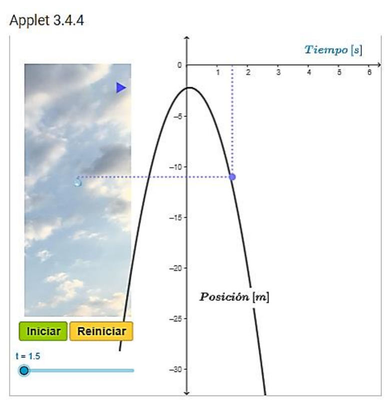




En los dos primeros casos, Alan empleó el deslizador t para observar la trayectoria del punto, aumentando y disminuyendo lentamente su valor. En el tercero inició la caída de la gota.

Posteriormente, Alan ubicó la gráfica nuevamente (como al final de la Actividad anterior) con su vértice por encima del eje x e inició la caída.

Finalmente, la ubicó como se muestra a continuación:

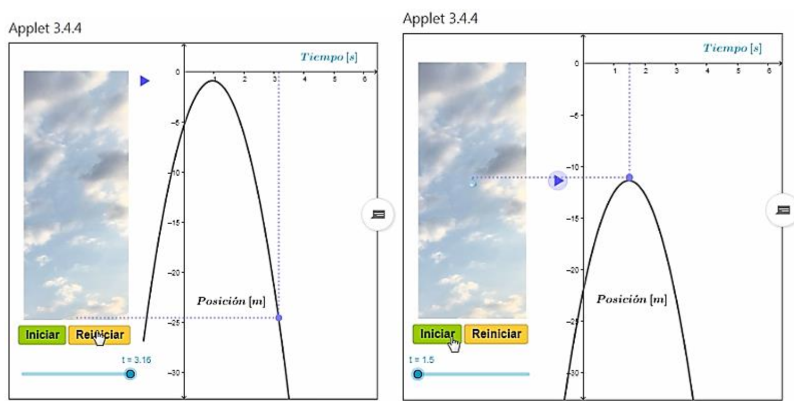


Y entonces señaló que la otra información que necesitaba a parte de la posición de la gota era “la ordenada al origen”.

Es decir, tanto María como Alan, al ver que la trayectoria del punto no coincidía con la gráfica de la posición en la ubicación que habían seleccionado, comenzaron a probar con otras posiciones, pero solo María llegó a la ubicación correspondiente a la caída.

En el caso de Flor, ella ubicó la gráfica con vértice en el origen (pues es el lugar que había elegido en el applet anterior) e inició la caída de la gota. Al ver que no coincidía la trayectoria del punto con la gráfica, la reubicó colocando el vértice sobre la posición inicial del punto. Tras ello, inició la caída de la gota y observó que la trayectoria del punto correspondiente a su altura con respecto al tiempo coincidía con la gráfica de la posición. Entonces señaló respecto a su respuesta anterior que "no [era correcta], ya que el tiempo es un factor indispensable para la gráfica".

Isaac inició la caída de la gota con la gráfica en su ubicación preestablecida, al ver que la trayectoria del punto no coincidía con esta, la reubicó como se muestra en la imagen de la izquierda a continuación. Luego, reinició el tiempo y observó que, desde ese momento, el punto no se hallaba sobre la curva, entonces propuso la ubicación de la derecha:



Después, inició la caída y observó que la trayectoria del punto coincidía con la gráfica. Tras esto, regresó al Applet 3.4.3, donde había ubicado la gráfica con vértice en el origen y volvió al Applet 3.4.4 para explorar con el deslizador de tiempo aumentando y disminuyendo su valor un par de veces. Entonces, respondió la pregunta *a* y después la pregunta *b*, en la cual señaló que la ubicación que él propuso en el applet anterior "fue correcta, sin embargo me fue necesario observar una ocasión la animación, pues al parecer, para poder ubicar la gráfica se necesita de dos puntos de posición respecto al tiempo o bien conocer el punto inicial, como se supuso que era el de este caso".

Respecto a las demás personas participantes, quienes no hallaron en el punto anterior la ubicación correcta de la gráfica de la posición señalaron que:

Miguel: “es necesaria la posición inicial de la gota, pues de otro modo, como lo hice intenté adivinar el lugar de inicio, el cual no fue correcto.”

Martha: “es necesario el tiempo”

Ramón: “debemos saber también de la posición a la que parte.”

Fausto: “el tiempo transcurrido hasta la posición dada.”

Juan: “es necesario el tiempo”

Román: “para ubicarla también se necesita como varia el tiempo y su posición.”

Es decir, quienes reconocen la necesidad de otro dato además de la posición de la gota en cierto tiempo, señalan que la otra información necesaria es el tiempo que ha transcurrido desde el inicio de la caída.

A continuación se describen algunos fragmentos de la *socialización de resultados* y de la *charla informal* con base en los registros recabados (audiovisuales y notas). Para su presentación se ha tomado en cuenta el orden en que fueron ocurriendo, aunque se describe primero lo correspondiente a la fase de socialización y luego lo relativo a la charla informal (que temporalmente se dio antes de la socialización).

En cuanto al formato de presentación, el *título* de cada fragmento alude al tema que se trata en él, mientras que los tiempos que se muestran entre corchetes [hh:mm:ss en la socialización y mm:ss en la charla informal] corresponden a los archivos audiovisuales.

Por otro lado, como se hizo anteriormente, en esta selección de datos se hace referencia a las preguntas de investigación utilizando la notación en corchetes: [*Var*], [*EstDin*], [*CIArr*], [*ArgVar*], [*NocFis*], [*NumGraf*], [*Gen*], [*Val*].

FRAGMENTOS DE LA SOCIALIZACIÓN

[00:00:00 – 00:01:30] *Impresiones*

Tras preguntar sobre cómo se sintieron, hubo quienes respondieron que "bien" o que "estuvo interesante". Particularmente, Alan propuso que Flor expresara qué es lo que habían comentado cuando hicieron una pausa en lo que los demás terminaban la Tarea 2. Ante ello, Flor propuso que fuera Martha la que lo hiciera y entonces Martha tomó la palabra [*Gen*].

Ella señaló que se les hizo un poco larga la actividad y que, en lo personal, ella no se esperaba que fueran a trabajar en la computadora. Respecto a la interacción con los applets, expresó que se le hizo muy interesante la parte del reloj de agua y analizar sus partes [*EstDin*].

[00:01:55 – 00:03:25] *La relación entre la física y las matemáticas*

La mayoría de participantes expresó que ya había cursado Física II, solo Flor manifestó que ella todavía no.

La investigadora cuestionó sobre cómo veían la relación entre la física y las matemáticas, a lo que Román respondió: "es que es muy interesante porque entre las dos se complementan… las matemáticas son como que muy abstractas, muy… como que mucha gente le tiene miedo, pero pues se complementa una con la otra y hacen como a la física muy bonita” [*NocFis*].

Después, la investigadora preguntó cómo percibían la relación entre los cursos de física y matemáticas en su universidad, a lo que Ramón indicó: “cuando entré a Física I fue como… esta es la definición de la velocidad instantánea y tenía un poco la idea de lo que era pero, por ejemplo, había ciertas paradojas como la de… bueno, un griego, decía que si tomábamos intervalos infinitamente pequeños, el objeto tenía una velocidad cero, ¿no? O cosas como esas que no las veía tan relacionadas a cálculo… o más bien, hablábamos de ellas en Cálculo pero no les veía una relación directa a la física y por ejemplo con esta actividad me quedó mucho más claro que… cómo se llega al concepto de velocidad instantánea y cómo se puede aplicar” [*NocFis* | *ArgVar*].

[00:03:35 – 00:05:00] *Los factores físicos asociados a la caída*

La presentación de las respuestas del alumnado inició con la pregunta acerca de los factores físicos asociados a la caída de la gota de agua (T1M1b). Cuando la investigadora introducía la pregunta, Alan intervino [*Gen*] y manifestó: “ah, esa pregunta es muy extraña”, explicando que “cuando vemos esa imagen, yo… pone factores físicos… yo, no sé, me imagino un tornado o cosas así, bueno lo único que podemos decir es la resistencia del aire [*NocFis*], pero como nos pintan las imágenes nos hacen pensar que están partiendo del reposo y nos llega la paradoja con Galileo, ¿no? Que ¡pum! Caen al mismo tiempo [deja caer sus manos de manera simultánea] entonces te pone a pensar, ah, si caen los dos del reposo, algo más está pasando y la única respuesta [*Val*]… bueno es confusa por eso”.

Ante ello, la investigadora le preguntó por el elemento que le hizo pensar que partían del reposo y Alan expresó: “pues porque empezaban desde el principio… aparecían y caían… como que al principio todas llevaban la misma velocidad” [*NocFis*]. Entonces la investigadora le planteó: “y si hubiera algo que estuviera cayendo afuera de un edificio y solo vieras la ventana [delimita con los brazos el marco de la ventana] el hecho de que empiece desde arriba, ¿te haría sentir que parte del reposo?”. María intervino expresando “sí te lo haría sentir, ¿no?” y Alan dijo: “Bueno… [asintiendo con la cabeza]” y concordaron en que esa sería la impresión, mas no necesariamente lo que ocurre.

A partir de ello, la investigadora añadió que en esa situación sería difícil identificar si partió de reposo la gota o si llevaba otra velocidad inicialmente dado que se encontraría cayendo en tiempo real, a lo que Alan agregó: “ya cuando lo unió [une sus manos], sí fue... fue cuando agarró un poco más de sentido la... pregunta” [*EstDin* | *NocFis*].

[00:05:00 – 00:05:10] *Los nombres en las respuestas*

La reacción del alumnado al ver que las respuestas mostradas en la presentación tenían los nombres de cada quien fue de sorpresa. Algunos rieron y hubo quien expresó “Ay Dios”.

La investigadora explicó que eso se implementó con la finalidad de discutir las respuestas proporcionadas de una manera más eficiente y parte del alumnado asintió.

[00:05:10 – 00:08:35] *La densidad del aire y la viscosidad del aire*

Las primeras respuestas a discutir fuero acerca del factor de la densidad del aire expresado por Flor y el de la viscosidad del aire manifestado por Miguel. La investigadora les preguntó qué platicarían al respecto. Miguel señaló: “lo primero que pensé fue que pudieran tener velocidades iniciales distintas pero si no la tenían entonces pensé que habría una resistencia entre la gota y el medio y pues... como ambos son fluidos, lo primero que pensé fue en viscosidad [*NocFis*]”. Flor lo escuchó pero no se manifestó al respecto [*Gen*], entonces la investigadora preguntó a Miguel su opinión sobre la respuesta de Flor y él dijo: “hm... la densidad del aire... bueno, creo que... la densidad del aire se mantenía... como... constante, pienso yo... pues no creo que hubiera afectado”. Justo en ese momento, Raúl intervino y dijo “tal vez se refirió mal a esa idea y no era densidad sino tal vez como resistencia o fricción del aire... tal vez solo anotó mal esa idea, no es tanto que tenga una explicación más lógica [*Val*]”. Flor asintió levemente y comenzó a voltear a ver a sus compañeros.

La investigadora asintió y decidió preguntar a Flor su opinión. Ella entonces expresó: “pues sí... creo que esa era la idea que tenía yo, pero colapsé en ese instante [risas] [...] exploté, pues [*Gen*]”.

Tras ello, la investigadora enfatizó la importancia de la discusión pues si solo se cuenta con la respuesta escrita, se podría decir “no o sí” sin conocer qué es lo que en realidad se estaba pensando cuando se expresó [*Val*]. Asimismo, destacó que Román había aludido también a la densidad y le preguntó si le había ocurrido algo similar a lo de Flor. Sobre ello, Román expresó que “no pues sí pues tenía esa idea como de si influye igual el aire y la gotita va cayendo, tienen diferentes densidades, uno tiende a subir y otra a bajar, entonces por eso dije a lo mejor y tiene algo de relación [*NocFis*]”.

Como cierre a esta pregunta, la investigadora leyó la respuesta de Isaac que indicaba como posible factor físico asociado el que las gotas se encontraran a diferente distancia de su altura inicial y le preguntó si eso fue lo primero en que pensó, a lo que Isaac respondió que “lo primero que me imaginé fue que todas eran gotas a lo mejor de la misma lluvia entonces no… no veía que hubiera diferencias en otros aspectos, entonces fue lo primero que se me ocurrió” [*NocFis*].

[00:08:35 – 00:14:35] *Las divisiones cada vez más pequeñas*

La primera respuesta que se presentó fue la de María, en la cual menciona que se llegaría a un punto en donde se tendrían tres imágenes, pero que igual la gota se movería. Sobre ello, la participante menciona que “si seguimos dividiendo vamos a obtener lo mismo, ¿no? Que la primera siempre cae más despacio y luego que la de en medio cae intermedio de esos dos y la última es la que cae más rápido… y así si vas dividiendo la de arriba así y así [con su mano señala divisiones] vas a obtener… pues ya solo obtendríamos como los… eh… pues las imágenes, ¿no?… de una gotita [une sus dedos índice y pulgar] como que casi no moviéndose nada pero así algo casi imperceptible ¿no?” [*ArgVar*|*NocFis*].

Tras ello la investigadora aludió a la respuesta de Isaac que también indicaba que llegaría un momento en que el cambio sería difícil de apreciar a simple vista y le preguntó acerca de cómo utilizó lo que sabía de física y matemáticas para saber qué ocurre en esos casos que no se pueden ver. Isaac preguntó entonces “¿tomando en cuenta ya que conozco el sistema completo?”, la investigadora asintió y él continuó “pues en ese caso ya podemos ayudarnos de las ecuaciones que conocemos, ¿no? Que rigen el movimiento de los cuerpos en caída libre [*Val*] […] de esa forma ya digamos en una división, si sabemos que esa división corresponde a una tal altura, bueno a la distancia recorrida por el cuerpo, a partir de ellas podemos pues ver a qué velocidad se estaba moviendo en ese punto pero no sé si, bueno, pueda a partir de eso siendo que estamos viendo desde cero”.

Después se retomaron las respuestas de Alan y Román: el primero aludía a que se trataba de un caso M.R.U.A. y el segundo a que "llegará un momento donde el tiempo sea infinitesimal". La investigadora entonces propuso que entre ellos discutieran su postura.

Alan expresó "lo que se está haciendo constante es el cambio del cambio [*ArgVar*] pero pues sí para darnos cuenta de eso necesitamos una diferencia, una diferencia muy muy pequeña y si pudiéramos verlo… una vista… pues seguiría siendo un cambio constante pero… sí, no sé… yo digo que sí, ¿no? [preguntando a la investigadora]". La investigadora entonces redirigió la pregunta a Román quien respondió "pues sí… pues sí" y el grupo rio. Entonces continuó: "como la diferencia va a ser… cada vez el intervalo más pequeño… entonces se va a notar que las gotas sí caen al mismo tiempo… que va a ser un cero pero muy pequeñito [*ArgVar*]… entonces siento que las gotas tendrían que caer… sí como dicen una aceleración constante [*NocFis*]".

Tras ello, se dio la siguiente discusión:

Inv.ª: ¿Entonces cómo conciben ustedes el instante? [Preguntando en general]

Alan: [Tomando de inmediato la palabra [*Gen*]] Como dicen los de física, tomamos una foto en que el tiempo se detiene en ese punto.

Inv.ª: Y sin embargo para conocer el movimiento no te basta con esa foto, ¿o sí?

Alan: ¿Cómo?…

Inv.ª: Para conocer el comportamiento que tiene el movimiento, ¿te bastaría con esa foto?

Raúl: Hm… No, precisamente necesitaríamos otros puntos del movimiento para saber [*ArgVar*].

Inv.ª: [Asiente] Entonces, lo curioso es que a pesar de ello sí nos referimos a una velocidad que está refiriéndose a un solo instante, a pesar de que necesitamos otros valores.

María: [Asintiendo] Hm.

Finalmente, la investigadora retomó la respuesta de Ramón donde mencionaba "mientras más pequeño es el intervalo de tiempo, más parece ser un valor concreto para la velocidad". Sobre ello, Ramón comentó: "ajá… me refería a que si tomamos dos puntos veríamos que… no sé, me imagino que tomamos el tiempo uno a 1 segundo y el tiempo dos a 2 segundos, sacamos el promedio como en la actividad y vemos que es un valor… am… algo… hm… bueno, un valor digamos y luego tomamos la mitad de ambos y vemos que es un valor que difiere mucho al que habíamos calculado primero, pero luego si tomamos la mitad de ese que sacamos, se va a parecer más al otro y luego si tomamos la mitad, más al otro, más al otro y así" [*ArgVar*].

La investigadora señaló "Como de particiones", Ramón asintió y la investigadora preguntó "¿entonces lo concreto lo verías como...?". Ramón: "Como un valor más... general, como al número al que nos aproximábamos" [*ArgVar*]. La investigadora asintió y continuó:

Inv.ª: ¿Ustedes también lo perciben similar? [Preguntando en general] A ver, Martha [parecía querer participar].

Martha: Hm... Sí... Es que no, no capté tu idea. [Dirigiéndose a Ramón]

Ramón: O sea, es como si fuera el límite de cuando en el intervalo el tiempo tiende a cero [Martha: "ajá"] es el valor para la velocidad [*NocFis*] que vamos a obtener cada vez...

Martha: Como la velocidad en un solo punto [*NocFis*].

Ramón: Ajá. La velocidad instantánea [*NocFis*].

[00:14:35 – 00:20:50] *La imposibilidad de mostrar las imágenes*

Inv.ª: Ahora esta pregunta... Primero, ¿qué les provocó?... Al principio. [Presenta en la pantalla las dos imágenes cuya factibilidad de ser mostradas se cuestionó]

Raúl: No supe ni qué pensar.

Javier: Yo pensé que sí se podría... Pero no... [El alumnado empieza a hablar a la vez]

María: Estuvo muy buena esa pregunta.

Javier: Sí. Yo pensé que sí se podría hacer la primera imagen con el reloj de agua, pero la segunda no entendía cómo podría elaborarse... Hasta que ya vi el video y vi que ah, no, pues sí... Pero no entendía cómo podrían hacer la segunda.

Inv.ª: ¿Pero sí habían entendido cómo funcionaba el reloj?

Javier: Ah, sí.

Inv.ª: Que era abriendo válvulas y así...

Javier: Sí.

Inv.ª: Porque alguien creo había dicho que se podría hacer con una diagonal.

Miguel: [Levantando su mano derecha y la izquierda debajo] Es que yo... Para la primera, pensé en... Bueno yo sabía que solo dejaban caer las gotas... entonces las dejan caer de cierta forma para que se forme algo... entonces también pensé que tal vez podrían darle cierta dirección en diagonal y por la misma razón que se va acelerando, pues al principio el movimiento se ve como que una curva más pronunciada y a medida que se acelera la partícula pues ya se ve más… cada vez más recta [*NocFis* | *ArgVar*]. Entonces sí pensé que tal vez sí se podría utilizar eso. De esa forma. De la otra… bueno, igual pensé que sí se podría utilizar eso.

Inv.ª: ¿Ustedes por ejemplo consideran que con ese método de la diagonal…?

María: No… Yo no entendí. [Risas]

Inv.ª: Ah, bueno, a ver explícale [dirigiéndose a Miguel].

Miguel: Am…. Solo tienes la partícula, pero en vez de dejarla caer, le das un pequeño empuje en diagonal…

María: ¿En ángulo?

Miguel: Ajá. Entonces ambas salen así [delimita con sus manos un par de curvas como las de la primera imagen] como en el inicio [señala la pantalla]. Entonces no va a ser como que van a caer en línea recta, sino por la misma aceleración, van a ir haciendo una curva y ya se va a formar el patrón que se ve ahí. [María: "Mm [haciendo ademanes de que comprende]"] Por eso también en la segunda no se ve perfectamente como que una diagonal, cuando ves el reloj se ve una curva [delinea con su mano derecha una curva decreciente] [*NocFis* | *ArgVar*].

La investigadora ahora retoma las respuestas de Javier para discutir la variable de la cantidad de agua, pues él respondió por escrito que la primera imagen sí se podría formar "por que lo único que se tendría que hacer es soltar una cantidad de agua mayor con forme el tiempo es más pequeño, y una cantidad menor de agua con un tiempo mayor". Sobre ello, se dio la siguiente discusión:

Javier: Ah, pues yo nada más decía que… Ah a ver, deje le leo [lee su respuesta en la pantalla]… Ah ok, lo único a lo que me refería es que una cantidad de agua mayor con respecto al tiempo es más pequeño debido a que al principio tendría que dejar una cantidad de agua más grande [une lentamente sus dedos índice y pulgar en cada mano]… o sea, digamos, dejarían caer esta cantidad de agua [muestra con sus dedos índice y pulgar un ancho que disminuye] que es lo que pasa en el reloj, dejan caer esa cantidad de agua y cada vez conforme el tiempo es más dejan caer, sueltan una cantidad más pequeña. [Dirigiéndose a sus compañeros] Entonces va reduciendo la cantidad de agua que sueltan las válvulas.

Inv.ª: Sí. ¿Sí le entendieron?

Raúl: A ver otra vez, ¿cómo?

Javier: Cuando el tiempo es cero, digamos… cuando el tiempo es muy pequeño, la cantidad de agua que sueltan es muy grande para soltar la parte de debajo de la imagen y cuando el tiempo es muy grande, dejan soltar una cantidad de agua muy pequeña para que se dibuje la parte superior de la figura [*NocFis*|*ArgVar*]. [Raúl asiente]

Inv.ª: Entonces con tiempo mayor y tiempo menor te referías al intervalo de tiempo que había transcurrido…

Javier: Ajá, entre una y otra y la cantidad que se soltaba.

Tras esto, la investigadora retoma la observación de Alan respecto a que "se estira el eje Z" y, al mencionarlo, el alumnado rio. La investigadora dijo "no, pero sí tiene sentido… bueno, que él nos explique a qué se refería".

Alan: Al caer una gota va a aparecer como se veía, como un círculo que después se empezó a estirar, debido al cambio de velocidad con respecto al tiempo, se va a comenzar a… estirar [*NocFis*|*ArgVar*].

[…]

Miguel: ¿En el eje *z*?

Alan: Sí, porque… Es que no sé como decirlo, pero yo supongo como que el eje *z* es este, ¿no? [señala con su dedo una línea vertical]. [Miguel y Martha: "Sí, sí"] Entonces pues eso, obviamente se va acelerando… estirar, ¿no? [sigue señalando con su dedo una línea vertical] pues ya…

Miguel: Ah sí.

Ramón: ¿Y por qué le pusiste eje *z*? [*Val*]

Alan: Ajá, ese es el punto… Yo le puse "el eje de la dimensión de la altura" pero no… obviamente no sabía cómo hacerlo [*Val*]… yo lo hice por la intuición que todos tendríamos que poner…. Porque realmente no sabía cómo decirlo.

Inv.ª: Y ahí por ejemplo, ¿por qué no elegiste *y*?

Alan: Ajá, es lo que dije porque yo… [*Nombre de profesora en su universidad*] nos dijo que el z era el bueno [*Val*].

Miguel: ¡Bueno! [Risas del grupo]

La investigadora entonces retomó la respuesta de Fausto, quien había señalado respecto a la segunda imagen que “no, [podría mostrarse en el reloj de agua] porque en esta imagen se aprecia un corrimiento sesgado de las figuras”.

Sobre ello, Fausto indicó que “pues no sé, que sesgado diagonal y corrimiento en que estaban desplazadas así [hace con su mano izquierda un desplazamiento horizontal] y dije no pues creo que no puede hacer eso el agua” y añadió “dije corrimiento sesgado porque como estaba así en diagonal, creí que el agua estaba como cortada así que dije no creo que pueda cortar el agua el reloj, entonces dije no pues no se va a poder hacer esa figura”. Se comentó entonces que luego del video él expresó que lo observado contradecía a lo que él había pensado.

Para cerrar, la investigadora leyó la respuesta de Martha donde explicaba que “la caída de la gota de agua tiene una velocidad y esta va aumentando conforme va cayendo, en el reloj de agua se hace más visible debido a que las figuras que salen se deforman y en el último caso produce un efecto visual de como aun hay gotas cayendo aun cuando el reloj ya no deja salir agua” [*NocFis* | *ArgVar*].

[00:20:50 – 00:24:00] *El comportamiento de las diferencias alineadas*

La investigadora leyó la respuesta de Flor, respecto a las 4 décimas de diferencia, y la de Isaac, respecto a que la diferencia en la diferencia es constante. Entonces pidió comentarios a Isaac y se dio la siguiente discusión:

Isaac: Bueno, ahí no habíamos usado todavía el concepto de cambio en la diferencia entonces no se me ocurrió otra forma de mencionar que era la diferencia de la diferencia entonces, básicamente lo único que dije es que… si nos imaginamos una gráfica de la velocidad contra el tiempo iba a ser una recta prácticamente y ya [*ArgVar* | *NumGraf*].

Inv.[a]: ¿Entonces tú ya desde el momento que viste las diferencias te imaginaste a la velocidad? [*NocFis*]

Isaac: Ajá, en ese caso sí.

Inv.[a]: Porque en ese caso solo veíamos las diferencias.

Isaac: Sí... am... a ver. Hm... porque en esa pregunta todavía estábamos en el reloj de agua me parece, ¿no? [La investigadora asintió] Entonces pues cuando sacamos las diferencias de... las primeras diferencias que había entre las distancias, lo primero que hice fue fijarme cuál era la diferencia de esas entonces me di cuenta de que esa diferencia no cambiaba [*ArgVar*], entonces por eso supuse que si se dejaban caer más gotas de agua con los mismos intervalos de tiempo, entonces pues, esa diferencia de la diferencia iba a ser igual [*ArgVar*].

Luego, la investigadora retomó la respuesta de Javier quien había señalado por escrito que "el patrón de cambio en las diferencias es el mismo" a lo que él comentó que "bueno, te pedían calcular no me acuerdo qué cosa entonces me di cuenta de que cada vez que lo hacía con distintos tiempos daba lo mismo, siempre era aproximadamente .392". En este punto se pudo haber profundizado para precisar a qué correspondía dicha constante.

Finalmente, la investigadora retomó la respuesta de Miguel quien había escrito "ya no se ve tanto como una curva, sino como un comportamiento lineal". Y él señalo: "bueno decía qué comportamiento notas en las diferencias alineadas entonces prácticamente solo eran líneas que las ordenaban ya a partir de un mismo punto entonces pues no vi la necesidad de ver números [*EstDin*] solo me di cuenta que como estaban al principio se notaba un comportamiento que daba una curva [forma la curva con su mano derecha] entonces después, al encontrar las diferencias, esas diferencias ya no eran como una curva sino ya se observaba un comportamiento lineal solamente [muestra con su mano derecha la recta decreciente] fue lo único que noté ahí" [*NumGraf*|*ArgVar*].

[00:24:00 – 00:38:00] *La imposibilidad de ubicar las diferencias ordenadas*

La investigadora habló un poco del problema técnico que se suscitó y comenzó a retomar respuestas del alumnado. Primero, la de Román, quien señaló por escrito que "moviendo el triángulo verde [a partir del cual se desplazaban las diferencias ordenadas], como las líneas naranjas indican la diferencia entonces en sus extremos se encuentran las gotas". La investigadora le preguntó sobre cómo decidió el lugar si no contaba con la información de una de las gotas, a ello Román dijo "ubiqué las líneas punteadas donde coincidieran con la gota", entonces la investigadora le aclaró que en ese punto se contaba con la gota así que cómo había hecho para decidir y Román expresó “¿ah no había gota? Yo sí vi una gota [risas]”. La discusión prosiguió como se muestra a continuación:

Inv.ª: ¿Sí notaron que en la primera no había gota? [Pregunta en general y la mayoría del alumnado señala que sí]

Javier: Pero sí podrías ubicarla, ¿no? [*CIArr*]

Flor: Sí.

Inv.ª: De que lo podrías ubicar sí podrías... Pero ¿cómo ubicarías al conjunto de gotas en ese instante de tiempo?

Javier: Pues no sé yo lo marqué como el triangulito justo en la base, justo cuando la primera gota que se había soltado había chocado en el piso y... como tienes todo lo demás ordenado, podrías ubicar en ese preciso instante, cuando la última toca el piso, las posiciones de las demás [*CIArr*].

Inv.ª: Ah, bueno, pues vamos a ver tantito esa... [Busca en la computadora el applet correspondiente (2.2.2) y la muestra al alumnado en la pantalla haciendo visible el deslizador de tiempo (que en el applet estaba oculto)]. Bueno, ustedes ya tenían las diferencias... Y lo que comentaba Javier era que independientemente tú ya sabías cómo estaban ordenadas porque ya tenías estas alineadas [refiriéndose a que estaban apiladas], ¿no?

Javier: Ajá.

Inv.ª: Pero cuando tú desplazaste el tiempo, cuando estaban todas alineadas, en ese momento cuando tú moviste el tiempo ¿cómo se comportaban? [manipula el deslizador en el Applet 2.2.1]

Javier: Pues se van haciendo más pequeñas.

Inv.ª: Ajá, pero su comportamiento, ¿cómo es?

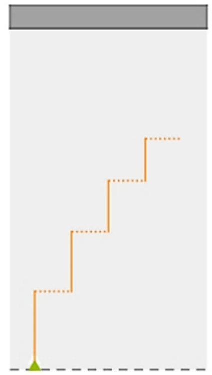
Javier: Pues similar, ¿no?... Bueno van creciendo...

Inv.ª: Ajá, bueno, ya teniendo que se comportan de esa manera, pues ahora sí ordenamos las diferencias [lo hace en el Applet 2.2.2]

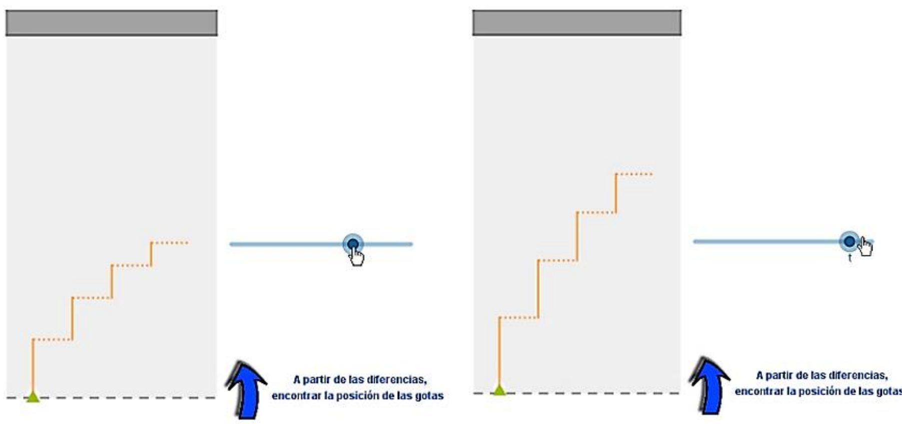
En eso, el desplazamiento queda bloqueado y la investigadora mejor abre el Applet 2.2.3, oculta la gota y hace visible el deslizador de tiempo. La discusión se retoma:

Inv.ª: Entonces tú dijiste que las colocaste, ¿aquí? [La investigadora desplaza las diferencias ordenadas]

Javier: No, hasta abajo [la investigadora las coloca en ese lugar], sí ahí.



Inv.ª: Pero, si uno desplaza el tiempo [manipula el deslizador de tiempo y se muestra estas variantes de manera continua:



]

Javier: La posición ya no es... ah.

Inv.ª: Porque... ah, bueno, explícame tú a ver por qué crees.

Javier: Porque la diferencia cada vez va... O sea, porque en el tiempo... porque en el tiempo más cercano a cero sería más o menos la posición cuando estaban hasta arriba las... las gotas, pero sin embargo, bueno, cuando ya está en el tiempo en lo máximo, pues ya es la diferencia de cuando ya la última gota está hasta al último, hasta el piso, básicamente [*ArgVar*|*NocFis*]... Pero si tú reduces el otro a tiempo muy similar a cero y lo elevas, ¿no puedes también ubicarlas? O sea, colocas la... Mira, pon todo en cero [desaparecen las diferencias]... Bueno, cercano [la investigadora lo hace y se aprecia solo la primera diferencia]... Y lo subes pegado al techo, ¿no también podrías ubicarlo así? [*CIArr*]

Miguel: Como que tendrías que estar bajando y subiendo el tiempo…

Inv.ª: [Dirigiéndose a Javier] A ver tú dime por qué no aparecen los demás.

Javier: Pues porque todavía no empiezan a caer las gotas.

Martha: Ajá, todavía no salen.

Inv.ª: Entonces en este momento solo hay una gota…

Javier: Ajá, en ese momento solo hay una gota.

Inv.ª: Ajá, entonces en ese momento con… tú podrías ubicar la gota digamos basándote en que, casi como el efecto foto, ¿no?… Podrías ponerla en cualquier lugar pero no sabrías cómo se comportan respecto al tiempo, ¿no? Entonces, por ejemplo, el hecho de modificar el paso del tiempo ya todo cambia.

[Reinicia el Applet 2.2.3]

Entonces, bueno, lo que ocurre es que cuando se modificaba el tiempo, las diferencias alineadas se van a bajar o se van a subir conservando esa forma, ¿no? Y sin embargo cuando modificamos el tiempo ya ordenadas, lo que provoca es que se vea más achatada o más estirada [hace los ademanes con sus manos]. Entonces van a tener esa misma forma, pero va estar más comprimida o más estirada, ¿no? Entonces, con base en eso, ¿tú cómo reformularías en ese caso tu respuesta? [dirigiéndose a Javier]. Sobre si la podrías ubicar o no.

Javier: Pues que solo con ciertas condiciones, ¿no? Con cierta condición de que ya sabes que la gota es la última que toca el piso pero si vas haciendo el tiempo más pequeño, eso se va haciendo más pequeño entonces es más complicado ubicar exactamente la posición de la gota [*CIArr*].

Alan: Pero pues ahí tienes el dato de la posición de una gota.

Javier: Mande…

Alan: Ahí [en el planteamiento de los tiempos] te estas forzando a tener el dato de la posición de una gota [*CIArr*].

Javier: Ajá… No, porque… Bueno sí, supongo.

Isaac: Porque tendrías la posición de la última [*CIArr*].

Alan: Yo no entendí esa cosa.

María: Sí, estaba medio confuso [*Gen*].

Alan: Es que yo no entendí, dije, ah no puedo mover eso entonces sí… Pero en un tiempo dado pues sí, tú lo puedes encontrar…

Raúl: Pero necesitabas una posición…

Alan: Ajá.

Raúl: Es que esa era la idea… La idea era ver si lo podías ubicar sin tener ninguna posición [*EstDin*].

A raíz de este comentario Javier compartió su opinión (a la izquierda) y, simultáneamente, se dio otra discusión (a la derecha):

Javier: Técnicamente si utilizas lo que yo dije de utilizar el tiempo cuando la gota toca el piso, pues sabes que la gota tocó el piso y que ahí fue la posición. Entonces, necesariamente tenías que saber la posición de una [*CIArr*].

Inv.[a]: Ajá, exacto.

María: Por eso, pero no entendió esa parte, o sea. Cómo lo va a hacer si no tenía…

Raúl: Solo era… como una observación. O sea, si puedes… Creo que lo que necesitabas era eso, o sea, tener una posición para poder determinar el lugar de las gotas [dirigiéndose a Alan] [*CIArr*].

Alan: Pero en realidad yo no entendí la pregunta [dirigiéndose a Raúl].

Al percatarse de la discusión que se estaba suscitando simultáneamente, la investigadora preguntó a Raúl, María y Alan sobre lo que estaban discutiendo.

Alan: [Tomó de inmediato la palabra [*Gen*]] Estamos discutiendo que sí, eso no se puede hacer…

Raúl: Bueno, sin la posición de una gota no se puede hacer…

Alan: Bueno, a lo mejor entonces yo no entendí la pregunta, yo entendí que sí era posible o que si es, bueno sí… Pero con solo mover no entendí [*EstDin* | *CIArr*]…

Raúl: Es que la pregunta decía si era posible acomodarlos sin tener ninguna posición, entonces bueno, pues teníamos que irlo modificando, ahora sí que a ver si era posible. Lo que teníamos que probar era si era o no era posible.

[…]

Inv.ª: Pero por ejemplo, ya después comentamos con Javier respecto a ese punto si se ordena o no, si se ubica en algún lugar o no… Entonces, ¿cuál sería su postura respecto a este análisis? O sigue sin quedarles claro qué fue lo que ocurrió…

Alan: O sea, sí entiendo el punto… lo que… lo que no entendí en su momento fue la pregunta… O sea, ya después de esto sí entiendo la respuesta y entiendo por qué no. El problema es que no entendí la pregunta en su momento… Dime, chécalo, a ver si lo puedes mover y yo… Ah, pues supongo que sí, ¿no? [*CIArr*]

María: Pues lo mueves, ¿no?

[…]

Alan: Porque en los diagramas anteriores sí venían las diferencias sin las gotas y ya justo cuando vemos, ah, ahora ubícalo pero con la gota entonces ya, ¡ah, sí! Se necesita la gota [*CIArr*].

Finalmente, la investigadora cierra con el comentario de Miguel, en el cual había expresado por escrito que "si las demás gotas siguen el mismo comportamiento de una de las gotas, entonces sí sería suficiente, sin embargo preferiría estudiar el comportamiento de más gotas, incluso si el comportamiento es el mismo, el análisis de más datos ayudaría a tener resultados un poco más precisos y acertados". A partir de ello, se dio la siguiente discusión:

Miguel: Sí, bueno, es que… Ahí entendí la pregunta como que nos daban esas diferencias que eran como cinco, creo, entonces… y entendí que si con eso y una gota ya podría por ejemplo predecir la posición de las demás [*ArgVar*]. Entonces pues dije que sí porque nada más como que encontramos el patrón cuando va aumentando y ya podríamos decir eso, pero, bueno, ahí también dije que preferiría analizar más porque por ejemplo esos datos se sacaron pero con cinco gotas, igual, no sé, tal vez cometimos un error y después de muchas tal vez mi posición quede aquí y la gota esté un poquito más abajo, entonces al analizar más gotas pues ya tendríamos como que unos resultados un poco más precisos [*NocFis*].

Inv.ª: Ajá, y respecto por ejemplo a la hipótesis, lo que se planteó desde el inicio era todas van a caer a una diferencia de tiempo constante entonces… eh… además de eso, sabiendo que se comportan de esa manera, ¿tú sentirías la necesidad de ver lo que pasa con más gotas?

Miguel: Eh… Hm no [*ArgVar*].

[00:39:25 – 00:41:50] *El cambio en las diferencias*

La investigadora retomó la respuesta de María donde ella expresaba que su predicción era que el desplazamiento entre el segundo dos y el segundo tres tendría una magnitud igual al triple del desplazamiento entre el segundo uno y el segundo dos. Sobre ello se discutió lo siguiente

María: Sí bueno, en esa yo me equivoqué cuando decía que cuál era la relación… ¡ah no! Que predecía entonces qué iba a pasar en el segundo tres, ¿algo así?

Inv.ª: Ajá. Que con base en este valor del cambio en los desplazamientos de la gota, cuánto se desplazaría entre el segundo dos y el segundo tres.

María: Sí, es que ahí me había equivocado… Pero es que pues sí, ¿no? Efectivamente, es una tercera parte de esto, entonces como que mi lado matemático dijo ah, pues es un patrón, ¿no? Se va a repetir [*ArgVar*] [inaudible] Pero ya después era como de ¡ah, sí es cierto! Que la diferencia de las diferencias se mantiene constante.

[…]

Inv.ª: ¿Sí les quedó claro cómo es que pensó ella? [Preguntando de manera general, la mayoría respondió que sí]

Luego, la investigadora retomó las respuestas de Javier ("9.81 metros") y Fausto ("24.525 unidades") para que se explicaran entre sí sus resultados. Fausto indicó que no recordaba qué era lo anterior que se decía y la investigadora explicó que se les pidió inicialmente calcular el cambio en las diferencias y que, con base en ello, indicaran cuánto se desplazaría entre el segundo dos y el segundo tres. Tras esto, la discusión se desarrolló como sigue:

Javier: Pues 9.81, ¿no? También es… porque se supone que el cambio es igual, ¿no?… [Varias personas le comienzan a responder a la vez]

Fausto: No, pero le sumarías 9.81 a la posición que ya tenías…

Flor: Pero tendrías que haberle sumado ese…

Ramón: Ah, a la posición…

Javier: Ah entonces por eso te salió 24 [dirigiéndose a Fausto]

Flor:	Ay este Javier… [risas]
Javier:	Sí… Bueno, yo me confundí entonces porque yo me refería a cuánto tendría que ser el cambio, pues tendría que ser constante, tendría que ser igual.
Inv.[a]:	¿Entonces ya ahorita viste cuál…?
Javier:	Sí, ya vi. Entonces sería sumarle eso a lo que ya se había desplazado [*ArgVar*].

[00:41:55 – 00:43:15] *La forma de la gráfica*

La investigadora inicia preguntando al alumnado sus impresiones sobre la pregunta relativa a la forma de la gráfica, mencionando que Alan preguntó en su momento a qué se refería. Javier señaló que “pues es más curva, ¿no? Es más curva. Y cuando la velocidad es cada vez más alta pues ya tienes una línea” [*NumGraf*].

Tras ello, en lo que la investigadora pasaba a la siguiente diapositiva, Flor le contaba a Fausto que ella había respondido que se tenía una “parábola invertida” y él le respondió que había señalado lo mismo.

Luego, la investigadora mostró las respuestas de Raúl y María. El primero había indicado que cuando la velocidad tomaba valores menores, la gráfica de la posición tomaba “una forma mas lineal” y que en valores mayores tomaba “la forma de un medio tiro parabólico”. Entonces al ver su respuesta, y tras haber oído el argumento de Javier, dijo: “sí yo lo puse al revés […] es que me equivoqué, lo puse al revés”. Entonces la investigadora corroboró si había entendido lo que comentó Javier y dijo que sí.

Respecto a María, ella había identificado que al inicio la gráfica de la posición tenía una tendencia curvilínea y al final tenía una tendencia lineal. Así que solo se presentó su respuesta al grupo y ella señaló que era lo mismo que indicó Javier.

[00:43:15 – 00:44:48] *La notación y el intervalo de tiempo tan corto como sea posible*

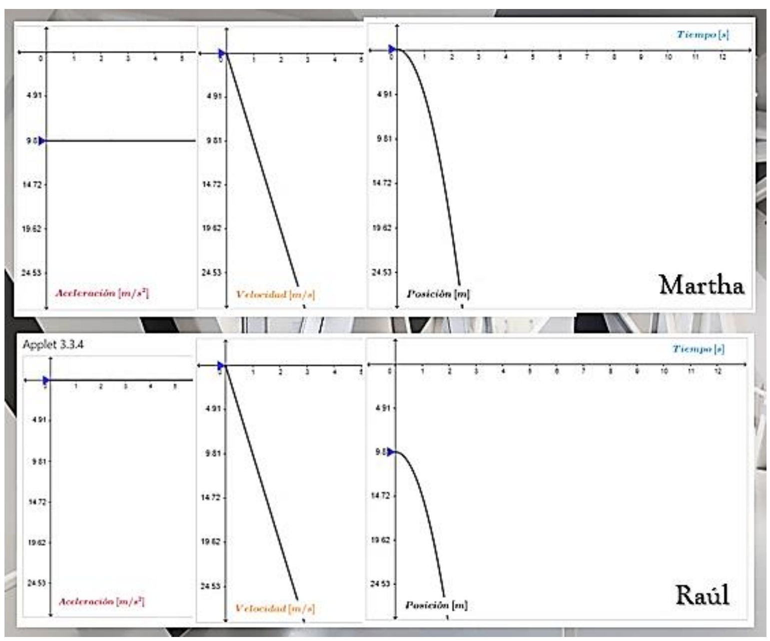
La investigadora preguntó en general al alumnado sus observaciones respecto a la notación. Asimismo, sobre qué pensaban de que el tiempo inicial y el tiempo final se acercaran tanto como fuera posible. Hubo quienes respondieron al mismo tiempo “un límite” [*ArgVar*]. Así que la investigadora retomó que justo eso se refería a cuando se consideraba un solo instante, de manera puntual.

Luego, la investigadora preguntó acerca de la notación incremental, si acaso la había usado en matemáticas y María asintió con la cabeza viendo a otros compañeros [*Gen*]. Luego, Raúl señaló que “cuando ocupamos derivadas... Para una derivada, para un cambio” y María asintió. La investigadora pidió aclarar entonces si para un *cambio* o para una *derivada*. Flor señaló que para un cambio y Raúl relató: “me acuerdo cuando me enseñaban la derivada, me pusieron en algún punto los deltas... así límite de delta *x* sobre delta *y* cuando *x* tiende a no sé cuánto y eso también representaba la derivada. Entonces ahí fue donde yo vi el valor de delta o de simplemente una derivada como el del otro caso” [*ArgVar*].

Tras este comentario, la investigadora preguntó en general cuál consideraban que era la derivada y todas y todos señalaron con la mano la que tenía diferenciales.

[00:44:50 – 00:46:35] *Las gráficas de posición, velocidad y aceleración*

Se presentan en pantalla las ubicaciones de las gráficas elegidas por Martha y Raúl:



Se les pide comentar al respecto entre sí. La discusión suscitada fue la siguiente:

Raúl: De entrada por qué las puse así pues porque todas deberían partir del mismo punto, ¿no? En teoría deberían partir todas del mismo punto, ¿no?

Javier: Pero la aceleración era constante y era de 9.81 [*NumGraf*|*NocFis*].

Raúl: Sí, la aceleración era de 9.81.

Javier: La velocidad sí porque partía de cero [*NumGraf* | *NocFis*]. Pero por ejemplo en la posición también partía de cero, ¿no? Con un tiempo cero la posición era cero [*NumGraf* | *NocFis*].

Raúl: [Al mismo tiempo que Javier sobre la gráfica de la posición] También partía de cero... [Cuando Javier terminó de responder] Ajá. Es que me equivoqué, después también regresé y modifiqué esa gráfica. De hecho... De hecho la aceleración sí la tenía ahí pero de hecho me regresé y no sé por qué la moví y ya la dejé así y ya no la volví a cambiar.

Inv.ª: Pero sí debe haber una razón, ¿qué te hizo pensar...?

Raúl: No... No me hizo pensar... O sea, sí sabía la aceleración es constante, es 9.81 y puse la velocidad también en cero, pero después la... No sé por qué la moví pero me regresé y la moví, pero no sé qué cosa estaba revisando y la moví y ya después no la volví a regresar a como estaba.

Inv.ª: Ok. Pero entonces, ¿tú dónde la ubicarías ahora?

Raúl: La aceleración pues va en 9.81, la velocidad parte de cero y conforme va avanzando pues va cambiando de forma constante y pues también la velocidad [quiso decir posición] cero pues el punto tiene que ser cero, la posición [aquí corrigió] tiene que ser cero [*NumGraf* | *NocFis*].

Es decir, al final María no participó en la discusión [*Gen*].

[00:46:35 – 00:51:00] *La ubicación de la gráfica de la posición sin restricciones en el arrastre (condiciones iniciales)*

La investigadora propone ahora discutir sobre la ubicación de la gráfica de la posición en los últimos applets. Al ver este punto, María dice a Alan “ay, en esa me equivoqué” y entonces la investigadora le cede la palabra.

María dice entonces “yo también en esa me equivoqué” y le pregunta a Alan “tú también, ¿no?” [*Gen*] y entre varias y varios comienzan a decir que se equivocaron y bromean un poco al respecto.

Raúl dijo "yo lo puse en el origen" y María dijo "sí, yo también". Igualmente Flor le dijo a Fausto eso y Fausto comenzó a hablar sobre lo que él hizo. Entonces la investigadora le cedió la palabra a Fausto. La discusión prosiguió como sigue:

Fausto: Ah bueno, yo... Esa parábola que se ve ahí, la ubiqué pues justo donde está el punto porque dije no pues el punto máximo debe ser como el inicial y entonces ya [hace el ademán con su mano de la cresta de la parábola] y ahí... supuse que debería estar justo el... como el centro de la parábola en el puntito que aparece ahí en la foto [*NumGraf*|*NocFis*].

[Hubo quienes hablaron al mismo tiempo y la investigadora cedió la palabra a Ramón]

Ramón: Yo pensé que primero la gota de agua podía ir subiendo [delinea con su mano el brazo izquierdo de la parábola], llegaba un punto en que la velocidad llega a cero [con su mano se detiene en lo que sería el máximo de la parábola y señala un punto] y volvía a bajar. Eso en un punto dado tenía el valor para la posición... bueno esa posición [la proporcionada] y... ajá, pues eso fue lo que pensé... primero subiendo y después bajaba [lo señala con su mano] [*NumGraf*|*NocFis*].

Inv.[a]: ¿Y este punto [el proporcionado] a qué foto o a qué momento correspondería?

Ramón: Sería... Después de que ya subió [llega con su mano al máximo] ya cuando empieza a bajar [*NumGraf*|*NocFis*].

Raúl: Lo viste como un tiro parabólico, ¿no?

Ramón: Ajá, algo así.

Alan: Sí, yo por eso lo puse... Ajá, yo supongo que la mitad de la parábola tiene que ser hacia acá [delinea con su mano el brazo derecho de la parábola], porque si no tendría que subir la gota [hace la seña con su mano]... y yo dije no.

Raúl: Yo como estaba viéndolo, pues como en la foto, ¿no? Puse el vértice ahí, ahí debe de estar, pero pues...

[El alumnado comienza a hablar al mismo tiempo y la investigadora cede la palabra a Isaac]

Isaac: Pues yo, me imaginé que ese punto era el punto inicial porque de otra forma decía yo que necesitaba por lo menos dos posiciones para poder poner la gráfica

[*ArgVar*|*NumGraf*|*NocFis*], pero si solo tenía uno pues supuse que lo más acertado era que fuera el punto inicial.

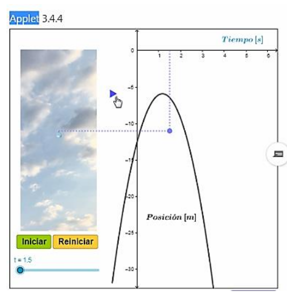
[La investigadora ahora le cede la palabra a María]

María: Yo pensé que ese [el origen] era parte de la parábola. Cuando la puse me di cuenta de que no que ni siquiera coincidía… Ajá y fue entonces como de que ah ok y entonces creo que aquí no va [*EstDin*], es como de hm… [se pone la mano en la barbilla].

Javier: No, pero cuando ponías la parábola en el origen, ese punto en particular sí coincidía [sí se encontraba sobre la parábola]…

María: Ah, no, sí es cierto, cuando no coincidía era cuando yo hacía la… [delinea con su mano la parábola]

[En este punto, María parece referirse a que, durante su exploración, intentó con esta ubicación:



Y el punto no se encontraba sobre la curva. No obstante, en ese momento, Javier volvió a hablar y la investigadora le prestó atención a él [*Gen*] y María también comenzó a escucharlo a él]

Javier: Por eso decía ah pues es parte ya de la caída.

María: Ándale ajá.

Javier: Ya está describiendo la caída de la gota [*NumGraf*|*NocFis*].

María: Pero ya cuando haces el video te das cuenta que no, que no recorre la parábola [*EstDin*|*NumGraf*|*NocFis*].

Flor: Ajá.

Javier: Ajá, ya hasta que le das *play* [*EstDin*].

Inv.ª: Digamos es como si tal cual hubiera ocurrido que si estuviera cayendo la gota de agua, le tomaran una foto y entonces les dijeran vean aquí está [hace como que enseña algo con sus manos] ¿cómo se mueve?

María: Ah [asintiendo y viendo a las demás personas participantes]…

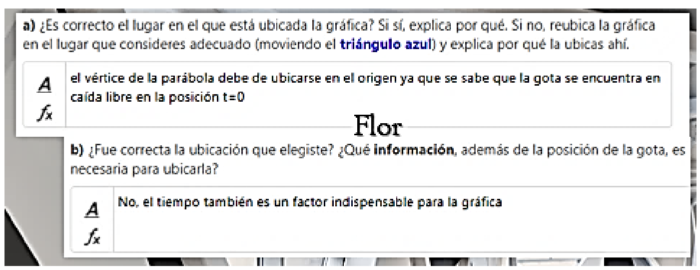
Inv.ª: Como lo que decíamos de la ventana, ¿no? Por ejemplo, en ese caso, como lo comentabas también [dirigiéndose a Alan], dijiste ah pues como parte desde arriba [con una mano delimita el marco superior de la ventana y con otra lo señala] ah pues asumo que ese va a ser mi origen, pero puede ser que empezó la caída desde arriba o así. Entonces, bueno, en ese caso, ¿algún otro la puso en otro lugar? Por ejemplo si la gota hubiera estado en cualquier otro lugar y dada su coordenada ahí en ese punto, ¿cómo habrían… habrían procedido de la misma manera?

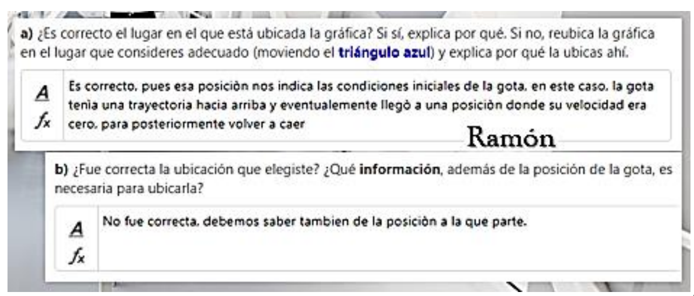
Javier: Pues en primera instancia, sí, ¿no?

Alan: No pues es que…

María: Necesitabas el tiempo o algo así…

Inv.ª: Porque, bueno, después están estas dos respuestas [se muestran estas:





]

Flor, explícanos…

Flor: Sí bueno es que lo puse en el origen porque lo tomé como si fuera un tiro vertical en caída libre y todo lo que comentaban… Entonces, pues sí llegué a un punto en que me confundí y yo dije en el tiempo cero tiene que estar en la posición cero…

Javier: Sí, yo también pensé lo mismo.

Flor: Sí, ¿verdad? O sea yo me dejé llevar por eso y a la hora que lo vi, a la hora de ver la animación [*EstDin*], pues ya fue como que no [risas]

Inv.ª: Y el de Ramón...

Ramón: Sí yo puse que la posición era esa parte.

[00:51:00 – 00:55:55] *El tiempo como referente absoluto*

La discusión se retoma desde lo anterior y continua como sigue:

Inv.ª: Aquí... eh... Flor dijo “algo que se necesita también es el tiempo”. ¿Sería el tiempo lo que necesitas?

Flor: Pues el tiempo y yo creo la posición.

Raúl: En física nos habían dicho que para ubicar la posición de una partícula [*NocFís*]...

Flor: Es indispensable el tiempo, ajá...

Raúl: Bueno, los problemas nos daban una posición y un tiempo determinado y pues a partir de ahí podíamos determinar nosotros el resto...

Flor: Entonces sabiendo la posición pues yo siento que en ese momento, por lo menos el tiempo era lo importante [*NocFís*].

Inv.ª: ¿Y cómo sabes desde qué momento se está contando ese tiempo?

Javier: Ajá, tal vez tendrías que tener en cuenta...

Flor: Bueno igual y tomando como en el primero, ajá...

Javier: Tener en cuenta el origen.

Flor: Ajá, tomando en cuenta el origen, pensando que desde arriba es el origen o al menos a mí lógica.

Inv.ª: Hm... A ver... [cediendo la palabra a Javier]

Javier: Bueno sí, por eso, pero también tendrías que tener...

María: Pues tu punto de referencia, ¿no?

Javier: Exacto...

Raúl: Y lo podrías marcar donde tú quisieras...

Javier: Un punto de referencia de dónde estás partiendo, porque lo que dibujaba la... Esta última donde te daban la gota más abajo, era que la caída empezaba desde ese punto y desde ahí yo empezaba a describirla. Sin embargo, lo que yo pensé, y yo creo lo que varios pensaron, fue que, no sé, podría describir desde el origen,

tomando en cuenta que la gota empezó a caer desde arriba con una velocidad cero [*NocFis*]. Entonces pues supongo que eso era lo que faltaba [*CIArr*].

Alan: Lo que yo pensé también fue, este… que podemos poner el vértice justamente en el eje de las *yes*, porque lo que nos está diciendo…

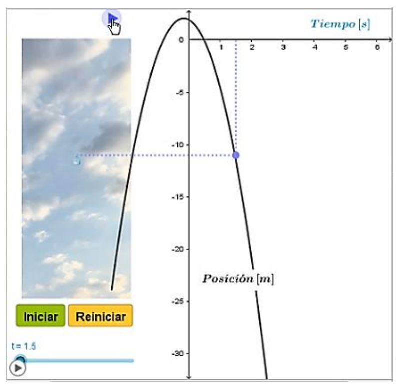
Inv.ª: ¿Cómo sería?

[El alumnado sigue platicando sobre el eje *y* y el eje *z* en lo que la investigadora busca el applet final]

Inv.ª: En este, entonces, ¿qué te imaginaste? Si quieres puedes pasar…

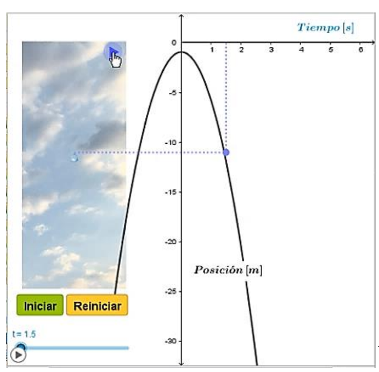
María: Sí, pasa…

Alan: [Se levanta y llega a la computadora desde la cual se estaban proyectando las respuestas] Mira aquí está esta cosa [ubica la gráfica con su vértice en el origen], ¿no? Yo pensaba que se podía mover así [muestra desplazamientos verticales de la gráfica con su vértice recorriendo el eje *y*], o sea dije pues aquí queda chido [muestra la siguiente ubicación:



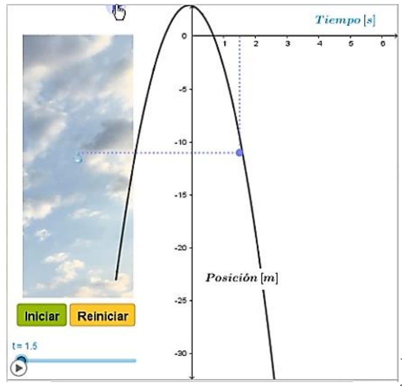
]

Aquí también queda chido, más o menos [muestra esta ubicación:



]

Entonces, también podemos ponerlo desde más arriba, ¿no? [mostrando:



]

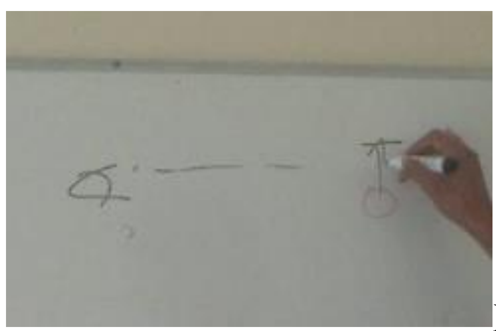
Suponiendo que luego partieras desde…

Raúl: Siempre y cuando pasara por la parábola, ¿no?

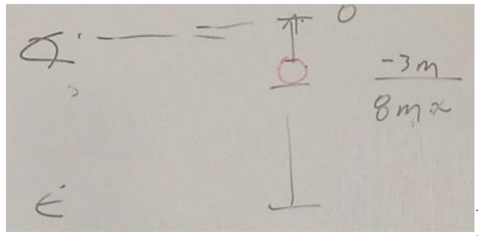
Alan: Ah, pues sí, pues tienes un punto… Pero lo que estoy diciendo es que el punto cero es… pues, en dónde va a empezar, ¿no? No sé, para mí mi marco de referencia está acá [señala a un lado de él] digo no pues está a tres metros de mí, ¿no? Tres metros para allá, ¿no?

[La investigadora sugiere a Alan explicar apoyándose en el pizarrón]

Alan: Supongamos que esta es la gota, ¿no? Y pues yo soy un chavo que lo está viendo desde acá [dibuja lo siguiente, a la izquierda el ojo y a la derecha la gota:

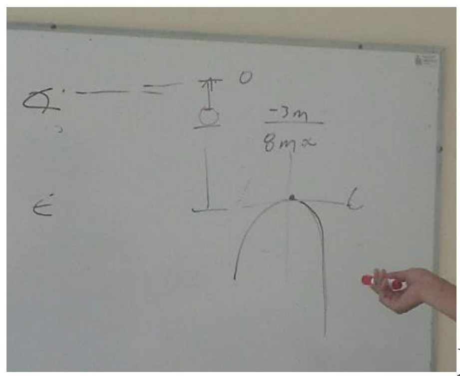

]

Lo estoy viendo desde acá, ¿no? Este es su ojito… Y yo lo veo de aquí para acá [dibuja la flecha], mi marco de referencia… son… cero, ¿no? [lo agrega]. Entonces para mí va a estar a -3, ¿no?… -3 metros, suponiendo que son en metros [los anota en el esquema]. Pero si… alguien está acá, va a estar a una distancia de 8 metros, échale [añade esta información al esquema:



]

Entonces, mi… para mí dónde va a empezar… va a decir la posición inicial yo la veo que cae desde aquí… para él va a empezar desde −3 metros y para mí va a empezar desde 8 metros [señalando cada uno de los casos]… Y entonces puedo pensar que parte del reposo y va a generar esta caída desde… pues la *x* con respecto a *t*, ¿no? [Traza la siguiente gráfica



]

Por eso es lo que yo pude ver… ¿no?

Javier: Suponiendo varios observadores…

Alan: No, no… Marcos de referencia más que observadores [*NocFis*].

Inv.ª: Pero tú hablabas de que siempre se deslizara por aquí [señalando el eje *y*]…

Alan: Ajá, pero ahorita lo estaba analizando y no, pues no.

Inv.ª: ¿Por qué no?

Alan: **Porque también depende de la velocidad inicial** [*CIArr*] y las… esa cosa, ¿no? Entonces, este, pues lo que nos está diciendo es donde está, la posición. Hm… A ver. Entonces yo digo que como está por una… por una cosa de la aceleración… La de la distancia para empezar es esta, ¿no? Ah… Ajá. Entonces no solo depende de cómo sea su distancia inicial que nos va a dar la ordenada al origen [*NumGraf*]… También depende qué tanto tenga de esto, ¿no? Y pues de esto [delinea la forma de la gráfica]… A lo que me refiero que esto también nos va

¡pum! Mover hacia acá. Si ya va acelerado, puede que no llegue hasta la distancia que ya es cero puede que… Pues no necesariamente el punto cero sea donde ya cambie de dirección, hacer esto [señala el máximo de la parábola]. No necesariamente pase eso y… por eso [*NumGraf*|*NocFis*].

[00:55:55 – 01:02:32] *Ecuaciones Diferenciales, la integración y las condiciones iniciales*

La investigadora concluye comentando que entonces además de un punto por donde pase la curva se requiere saber cómo se pasa por dicho punto, lo cual corresponde a la velocidad inicial que señaló Alan.

Luego, la investigadora habla acerca de cómo se abordó el proceso de integración indefinida y el alumnado menciona las constantes de integración. La investigadora pregunta que entonces cuál sería la constante si se integra la aceleración y entre María y Flor respondieron que "la velocidad" y luego cuál sería si se integra la velocidad y entre Alan y otros compañeros señalaron que "la posición".

Después, la investigadora explica que en Ecuaciones Diferenciales cuando les pidan hallar la posición a partir de la velocidad o la aceleración, o bien, cuando les pidan una solución relativa a algo cambia con respecto a otra cosa, incluso sin contexto (María: "ahh"), en algunos casos les proporcionarán las *condiciones iniciales* que les permitan hallar una solución particular como lo hicieron. Mientras que si no se las dan, (como Román señaló) solo dejarían indicada la constante de integración.

Asimismo, aprovechando la pregunta de Miguel, se discutió acerca de la notación diferencial y su carácter social en cuanto se va consensuando entre la comunidad de quienes la usan.

[01:02:32 – 01:06:00] *Impresiones sobre la interacción y cierre*

Finalmente, la investigadora pregunta al alumnado sus impresiones acerca de la dinámica de socialización (el que se discutiera en grupo, el que se mostraran sus nombres en las respuestas para dialogar, etc.) y surgieron los siguientes comentarios:

María: Yo creo que estuvo bien… La neta yo creo que sí me gustó

Raúl: Te aclara varias dudas, que a lo mejor tenías y que te daba miedo preguntarle... Cuando lo están discutiendo pues ya otros te la aclaran así la duda... así, sin que tengas necesidad de preguntar

María: A mí sí me gustó...

Inv.ª: ¿Y de qué estén sus respuestas? [Con sus nombres]

María: A mí sí me gustó porque...

Raúl: No, no mucho...

María: A mí sí me gusto porque además puedes ver cómo pensaban las otras personas, ¿no? Es como de ah... él lo vio así, ¿no? Es como de ah oh... [*Val*]

Martha: Como que te abre tu idea, porque si estás tú solito no entiendes como el problema o ni siquiera entiendes lo que te preguntan, pero si otra persona te lo dice con palabras diferentes como que ya la cachas y ya entiendes, ah, pues así y así y complementas tu idea [*Val*]... Estuvo muy bien.

FRAGMENTOS DE LA CHARLA INFORMAL

[12:18 – 12:30] *Sobre su grupo*

La mayoría forma parte del mismo grupo en la universidad. Cuando el observador externo les preguntó si todos eran compañeros, respondieron que "casi todos" y Martha añadió "por transitividad".

[13:15 – 14:00] *Sobre la resolución de las Tareas*

La investigadora preguntó al alumnado sus impresiones hasta el momento y Fausto dijo: "Está padre la actividad".

Luego, la investigadora le dijo a Flor: "Tú ya habías terminado también, ¿verdad? Hasta la 9 [número de hoja dinámica]..." y Flor asintió. Entonces la investigadora le preguntó por qué no avisó, pues ya había terminado cuando Alan dijo que había acabado. Flor preguntó si era la parte donde ella había fallado y Martha le dijo que no, que la 9, entonces dijo "ah, sí ya había acabado". A ello, la investigadora preguntó si entonces se había quedado revisándola y Flor dijo que sí [*Gen*].

[14:20 – 15:00] *Sobre el uso del software*

La investigadora preguntó al alumnado si anteriormente habían usado el software alguna vez. La mayoría respondió que no. Alan señaló "no precisamente" y Martha dijo: "No así, pero... solo para hacer gráficas... para los exámenes [risas]". El observador complementó "para copiar..." y Martha explicó que en realidad "para comprobar" [*EstDin*]. Luego, Martha indicó que lo había usado desde prepa.

[19:45 – 22:00] *Sobre la línea que les gustaría seguir*

La investigadora preguntó al alumnado si ya sabía que línea querían seguir y si habían entrado con esa misma idea a la universidad. El alumnado fue respondiendo:

Ramón:	Física
Raúl:	Ingeniería Nuclear
María:	Mates [matemáticas] puras
Alan:	Mates puras
Miguel:	Física
Martha:	Matemáticas
Inv.ª:	¿Puras?
Martha:	Eh... Todavía no sé.
Inv.ª:	Ah, ya.
Martha:	Hm, qué miedo [risas].
Fausto:	Nuclear.
Inv.ª:	¿Nuclear también? [Fausto asiente]
Flor:	Física
Inv.ª:	Hm qué bien.
Javier:	Física
Román:	Igual física
Isaac:	También física
Inv.ª:	¿Ah, sí? Mira, son más...

En síntesis, de las mujeres: una a matemáticas puras (María: entró con ese interés desde el inicio), una a matemáticas (Martha) y una a física (Flor). De los hombres, cinco a física (Ramón, Miguel, Javier, Román e Isaac), dos a ingeniería nuclear (Raúl y Fausto) y uno a matemáticas puras (Alan). La plática se siguió desarrollando como sigue:

Alan: De hecho sí, cuando preguntaron primero quiénes querían física, todos levantaron la mano, como cuatro querían mate y de esos cuatro solo uno quería educativas.

Inv.ª: ¿Cuándo les preguntaron? ¿En primer semestre?

Martha: Sí, todos nos preguntaron.

Inv.ª: Sí pero uno va cambiando de parecer, de pronto…

Martha: Cuando entraste tú, ¿qué querías?

Inv.ª: Cuando yo entré, dije "quiero o física o matemáticas pero para nada nuclear ni educativa" […] nuclear dije que no me gustaba porque yo sentía qué tal si termino como Marie Curie, ¿no? Bueno igual, uno quisiera porque qué tal si termino con dos premios…

María: Nobel [*Gen*]

Inv.ª: ¿Verdad? La única persona que ha tenido [premio Nobel] en dos áreas distintas…

Después la investigadora explicó que no le gustaba la idea de nuclear por el material con el cual se trabajaba pero entonces relató que un egresado de esa universidad le había platicado que tenía compañeros que egresaron de Ingeniería Nuclear y que se dedicaba a dosificar la radiación en los tratamientos médicos. En ese sentido, explicó que a veces uno tiene cierta idea cerrada de a qué se dedica la gente en cierta línea y en realidad hay una amplia gama de posibilidades.

[24:20 – 33:43] *Sobre elegir una carrera fisicomatemática y no una ingeniería – Motivaciones*

Con el fin de indagar las motivaciones del alumnado, la investigadora preguntó abiertamente por qué prefirieron física y matemáticas y no una ingeniería. Ante ello, Alan señaló: "Decían que la ingeniería era de niñas y… [hace un ademán con la mano de desinterés]". El alumnado comenzó a reír y la investigadora preguntó: "¿de niñas?… ¿Qué significa que la ingeniería sea de niñas?".

El resto del alumnado entonces dijo: "uh…" y Alan continuó: "Bueno, tal vez suene muy machista, pero…". María dijo: "no es un insulto", como defendiendo a Alan; él le devolvió la mirada, negó con la cabeza y continuó: "No es algo machista, pero no, o sea, es algo que nos dijeron desde siempre… A lo que me refiero, que decían que era más fácil y, bueno, no está como que… en mi idea, estudiar ese tipo de cositas como de modelos matemáticos [inaudible] […] **Siempre me gustó como que más teoría**… más abstracto. Mi idea siempre fue como que matemáticas" [*Gen*]. Entonces la investigadora le preguntó sobre cómo le iba con Física y él dijo: "ah, bien [sonríe]… No, bien, en comparación… [ríe]".

Luego Flor relató: "Yo porque tenía **un profe** en la secundaria que era muy bueno de física y fue así como que mi inspiración y pues ya le pregunté y de hecho también es egresado de [nombre de la misma universidad]… Pero sí es así como que yo quería ser como él y entonces me dijo pues entra a [nombre de la universidad] y yo dije ¡bueno! Pero no sabía cómo era [risas]". Y comentó que seguía en contacto con él.

Isaac explicó: "No sé, creo que desde primero o segundo de secundaria… Ni siquiera había llevado Física pero ya había decidido que quería estudiarla… [la investigadora preguntó si por programas] Hm sí, pues por programas de televisión y… **astronomía** más que nada era lo que quería más que nada pero tenía que irme por la física, bueno, quería. Y de hecho en preparatoria la física que… como la llevamos ahí no me gustó mucho porque se… era nada más casi como que dar la fórmula y dar problemas para aplicar la fórmula y eso no me gustaba. Entonces, así en la escuela no me gustaban tanto las clases de física pero la física sí aquí [en la universidad] ya me gustó pues cómo se ve".

Javier también compartió que: "En el último semestre de preparatoria, tenía **una maestra** que sabía que me gustaba la física entonces **me puso a investigar mucho sobre la física moderna** y de hecho me puso a exponerla… Entonces investigué mucho sobre física moderna, me gustó demasiado y decidí entrar, pero era a aquí o en Toluca… entonces mi maestra me dijo que en Toluca no era muy buena y que lo mejor estaba en el [nombre de la institución de la cual forma parte la universidad]".

Román, por su lado, dijo que: "A mí me empezó a gustar como la física más que nada porque empecé a ver unos **libros de los científicos** que salieron en el periódico, así de Einstein, de Newton… Bueno, tengo varios… Los empecé a leer, ahora sí, como de su vida y de todo lo que empezaron a hacer, me llamó mucho la atención y dije por qué no estudio física".

Tras ello, la investigadora preguntó: "¿y qué les dijeron sus papás o sus familiares cuando ustedes les dijeron?" y a raíz de ello se generó el siguiente diálogo:

Raúl: Me dijeron que **estaba loco**.

Inv.ª: ¿Ah, sí? ¿Y cómo actuaste?

Raúl: No pues no dije nada… Sí, a lo mejor sí estoy loco pero eso no quita nada.

Inv.ª: Ah, está muy bien. ¿Y siguen con esa idea?

Javier: Sí… De ¿y **de qué vas a comer**?

Luego se retomaron los relatos y Miguel comentó: "Yo… también fue en la secundaria… Me robé **un libro** [risas del alumnado]… Bueno, no me lo robé… Todavía no lo he ido a devolver [risas]… Era sobre astronomía y entonces pues ya lo leí y me gustó… Y en la parte de atrás venía como que un texto de… del autor… y ahí decía que había estudiado física y ya sus doctorados y todo eso… Entonces pues dije 'voy a estudiar física' y ya desde ahí no se me quitó".

En cuanto a Ramón: "Yo pues por ejemplo en la secundaria… am… también la física y las matemáticas… pero, no sé, como que no me acababa de llamar, de hecho no me gustaba mucho, aunque, en mate no me iba tan mal, en física sí como que no, todavía no le agarraba la onda y no me gustaba mucho, pero después llegué a la voca [vocacional] y pues ya empecé a tener profesores… **tuve un profesor muy bueno**, le decíamos El Peque, porque nos decía a todos pequeñines… Ajá y bueno, **tenía un amigo**, éramos muy amigos pero competíamos en todo. Entonces dijo yo me quiero inscribir a [nombre de la carrera fisicomatemática] y yo tenía una idea de estudiar una ingeniería o algo así, pero era como… la [nombre de la carrera fisicomatemática] se ve más complicada, entonces, **no puedo dejar que me deje atrás**, entonces… Ah, pues entró apenas este semestre, entonces pues también, ahí vamos, ahí vamos… compitiendo". Respecto a su familia, Ramón comentó que: "Ah, pues, mi papá sí esperaba que estudiara algo como esto y pues… sí, sí me dicen que es un poco loco, pero que le eche ganas y que todo saldrá".

María contó que: "A mí igual me empezaron a gustar cuando iba en la secundaria… Me acuerdo que yo quería estudiar física y en la prepa **tuve una maestra** que era matemática, ahí de CU [Ciudad Universitaria, de la Universidad Nacional Autónoma de México], y me gustó mucho su clase y me gustó todo… todo lo que mencionaba y eso, y ya a partir de ahí me empezaron a gustar más las matemáticas y ya decidí estudiar". En cuanto a qué le dijo su familia, señaló que "nada, sí están de acuerdo".

Alan dijo que: “Mi papá quería que fuera abogado… Este, mi… Y cuando iba en la prepa, llevé sistemas digitales y yo en un punto dije ah, pues quiero ser mecatrónico, porque pues era lo chido, ¿no?… No, pues ni sabía, pero pues decía que **quería ser mecatrónico** y justo mi papá dijo que quería que fuera abogado o historiador pero pues nunca me llamó eso”. La investigadora entonces le preguntó por qué tenía su padre esa idea y Alan comentó que “porque a él le gustaba eso…”. María dijo “deseos frustrados de los padres” y Alan asintió. Y continuó “entonces quería que fuera historiador o abogado y cuando le dije ah, pá [papá], pues quiero ser mecatrónico dijo ‘ah, pues bueno… bueno está bien’ y después, como que al último momento dije ‘quiero estudiar matemáticas’ y dijo ‘no, estás bien mal, o sea, los inges [ingenieros] son los que ganan chido’ y pues sí, o sea, este, dijo ‘pues es tu problema, pues **es tu vida, es tu problema**’ y ya… voy a ser… bueno, estaría chido… yo no me veo como abogado, ¿tú sí me ves como abogado? [dirigiéndose a Flor]”, a lo que Flor respondió: “¿Cómo abogado? No… Te veo como físico [risas]”. Y María dijo “no, pues es un cerebro… es muy abstracto”.

Respecto a ese tipo de asignaturas como historia o geografía, el alumnado señaló que no les gustaba. Javier dijo “es que qué aburrido”.

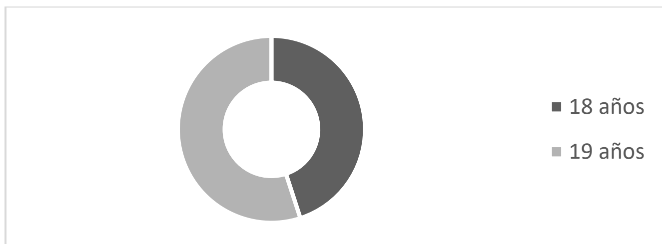
Luego, retomando el tema de las motivaciones, Fausto mencionó: “Yo pues en la voca [vocacional] decidí que quería física porque pues **nada más la armaba** [le iba bien] **en física** y es lo único que saqué bien en la voca y pues dije ‘sí, [nombre de la universidad], ahí voy a rifar [tener éxito]”. A lo que Flor dijo “ah, pero ahorita… [risas]”.

A Martha no se le preguntó porque justo en ese lapso fue al baño y, cuando regresó, el tema de la conversación había cambiado.

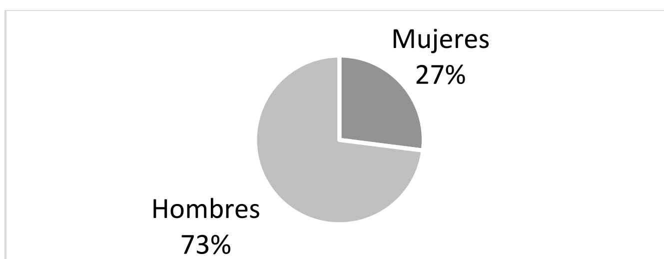
En este apartado se presenta parte de lo que el alumnado respondió en la encuesta sociocultural que les fue aplicada al final de la fase empírica del estudio. Para comenzar, en *Información grupal*, se presentan las respuestas a las preguntas cerradas de manera grupal y desagregadas por sexo. Posteriormente, en *Información individual*, se presentan las respuestas tanto a preguntas abiertas como a cerradas de los cuatro casos seleccionados.

Información grupal

Edad

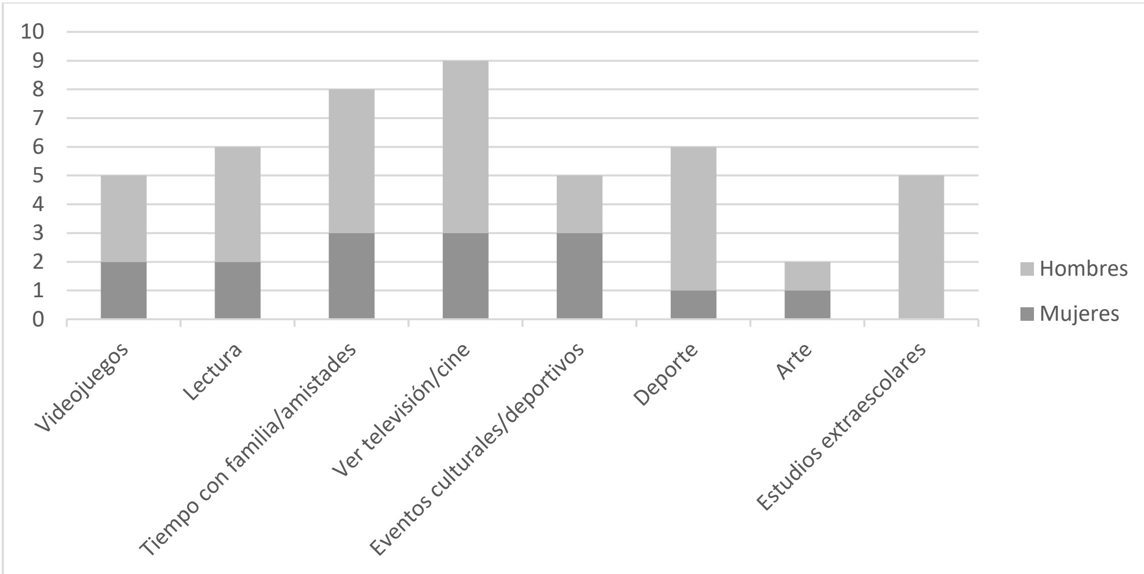


Sexo



Lugar de nacimiento

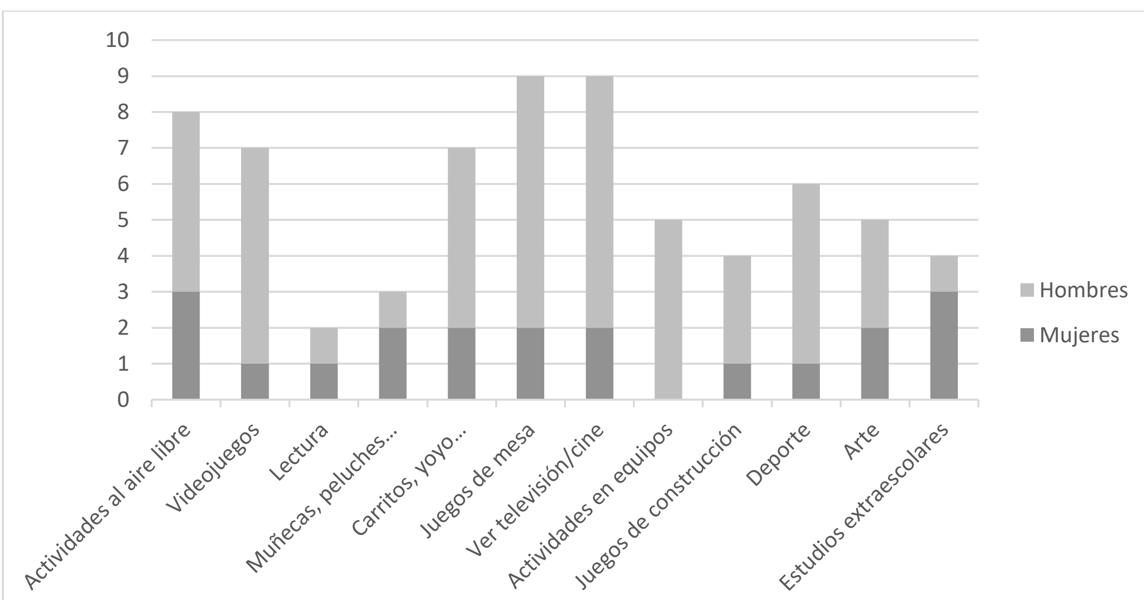
Pasatiempos actuales



Una observación particular de las respuestas es que ninguna de las mujeres indicó como pasatiempo actual el estudiar algo extraescolar.

Flor fue la única que señaló que practica deporte y María la única que practica arte.

Pasatiempos en la infancia



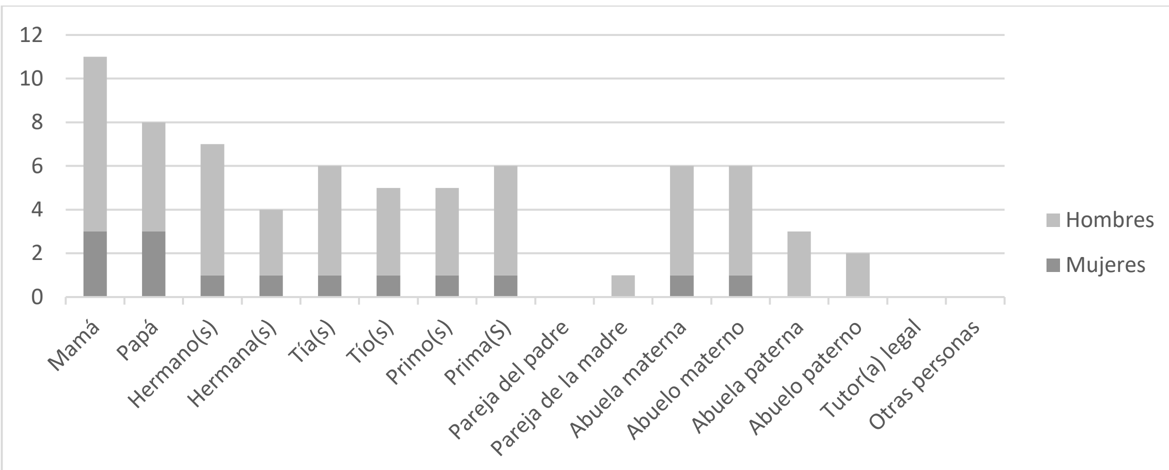
Isaac, quien fue uno de los hombres que indicaron que en su infancia practicaba artes, señaló que principalmente se trataba de instrumentos musicales.

Flor fue la única de las tres mujeres que indicó que jugaba videojuegos, juegos de construcción y que practicaba deporte durante su infancia.

Por otro lado, destaca el que, si bien entre los pasatiempos actuales manifestados por las mujeres no figuran los estudios extraescolares, durante su infancia las tres lo hacían.

Asimismo, destaca el que ninguna de las alumnas manifestó haber realizado actividades en equipos al aire libre durante su infancia.

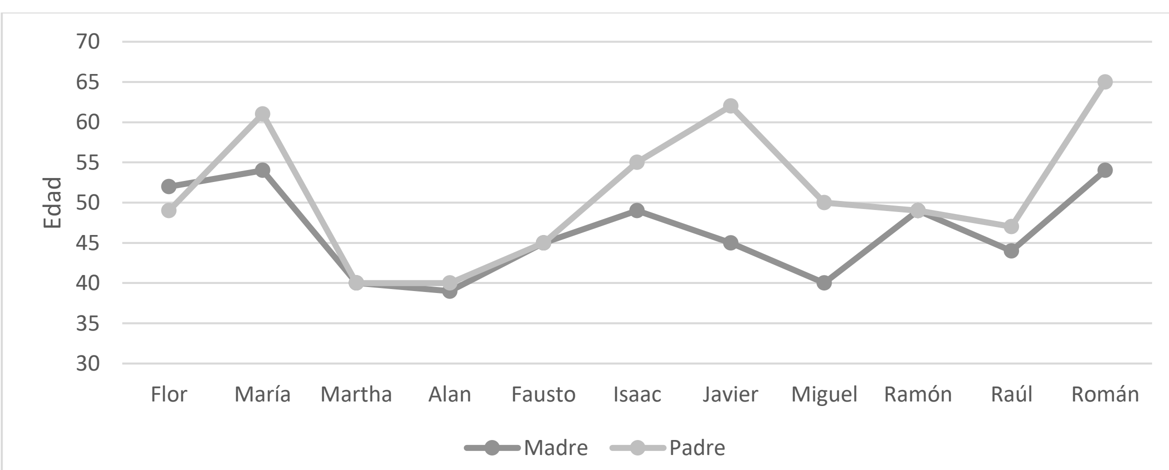
Composición familiar



Algunas observaciones particulares son que todas y todos crecieron con su madre y que todas las mujeres crecieron con su padre también.

Edades de padre y madre

Los datos se presentan por orden alfabético, primero mujeres y luego hombres:

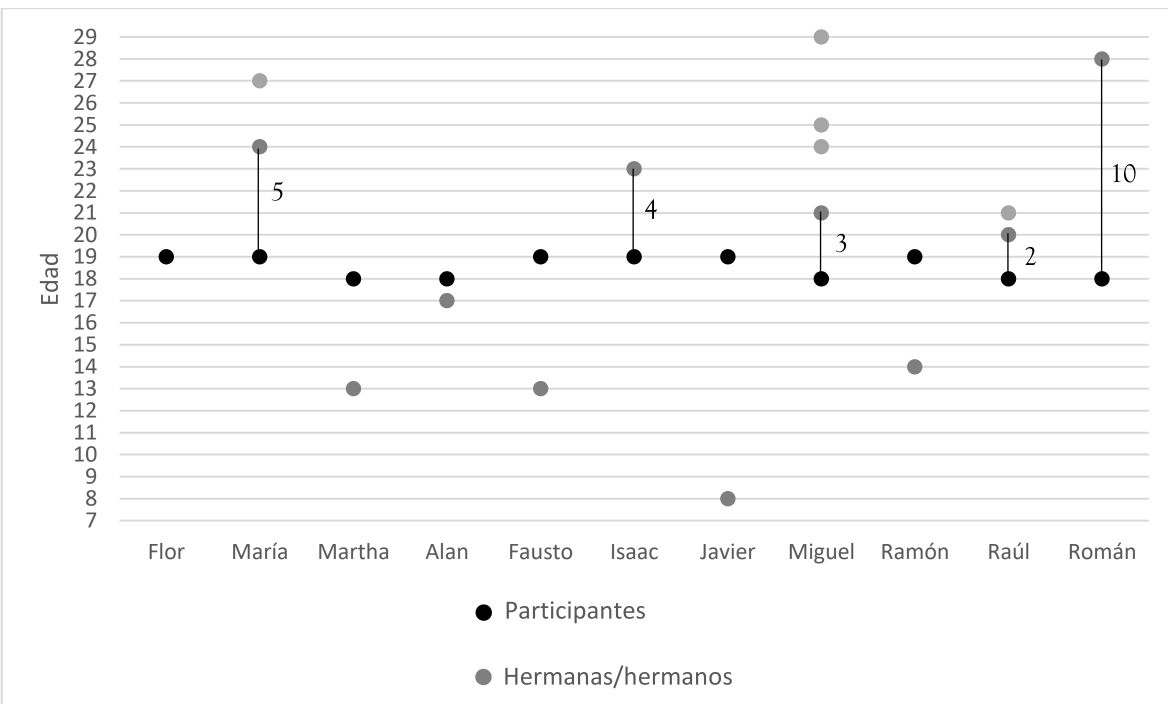


Edades de hermanas o hermanos

La manera en la cual se presentan las edades –comparando la edad de cada participante con la de su(s) hermana(s) o hermano(s)– responde a lo corroborado por Farfán y Simón (2016) respecto a la influencia del orden de nacimiento en el desarrollo de la personalidad de hijas e hijos, pues hallaron que más de la mitad de las y los participantes en la muestra que estudiaron dentro de un programa de niñas y niños talento eran primogénitas y primogénitos (p. 97).

Particularmente, las autoras citan la obra de García de León (2002), quien sugiere que el *capital afectivo* es uno de los elementos destacados entre las *élites* profesionales, especialmente acentuado en las élites femeninas, el cual está relacionado, entre otras cosas, con la *primogenitura*.

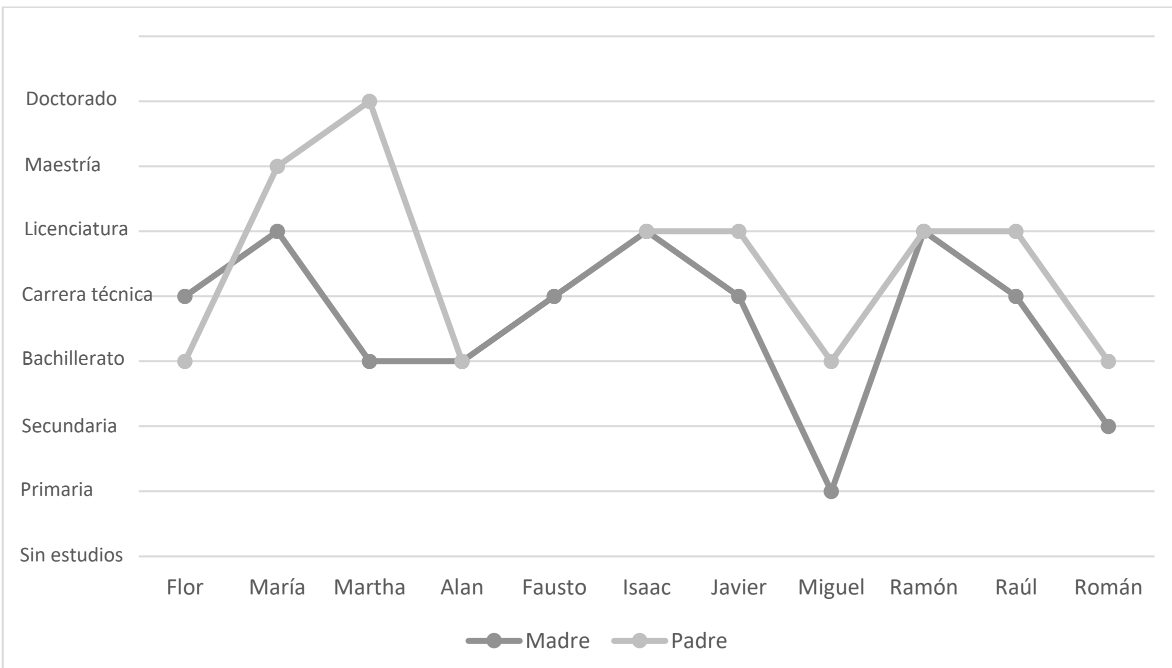
Una persona primogénita *de primer orden*, según describen las autoras antes citadas, es aquella que nació primero; mientras que lo es *de segundo orden* cuando su hermana o hermano inmediatamente mayor le lleva más de 6 años.



De acuerdo con los datos de la encuesta, dos de las tres participantes son primogénitas de primer orden, la otra no lo es, pero su hermana mayor le lleva una cantidad de años que le aproxima a ser primogénita de segundo orden. En el caso de los hombres, cuatro son primogénitos de primer orden y uno de segundo orden.

Por lo tanto, más de la mitad de quienes participaron comparten la característica de la primogenitura. Este es un factor relevante considerando la gran cantidad de estereotipos negativos que inhiben a hombres y a mujeres al momento de querer elegir una carrera fisicomatemática.

Escolaridad de madre y padre



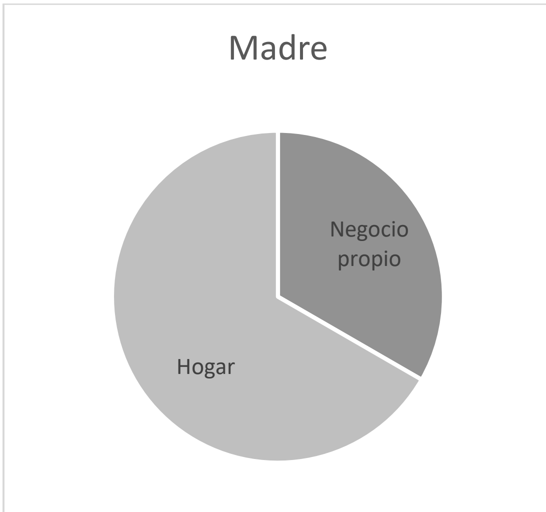
Fausto no indicó la escolaridad de su padre.

En general, se observa que la mayor parte del alumnado (8 de 11) tiene a un padre o a una madre cuyos estudios son de *carrera técnica* o superiores.

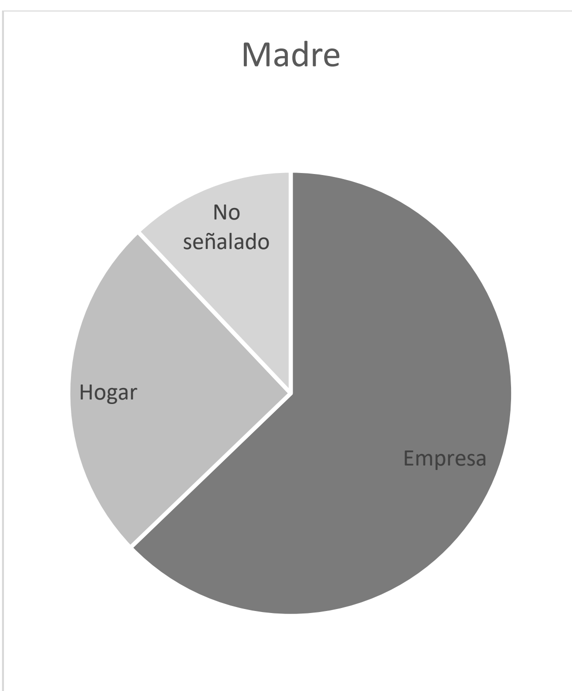
Respecto al género, los dos padres con estudios de posgrado son de dos de las mujeres participantes. Este aspecto es relevante considerando lo citado por Farfán y Simón (2016) respecto a “la importancia que tiene el nivel educativo de los padres en la elección por parte de las hijas de carreras relacionadas con matemáticas y ciencias naturales (Lee y Sriraman, 2011)” (p. 96).

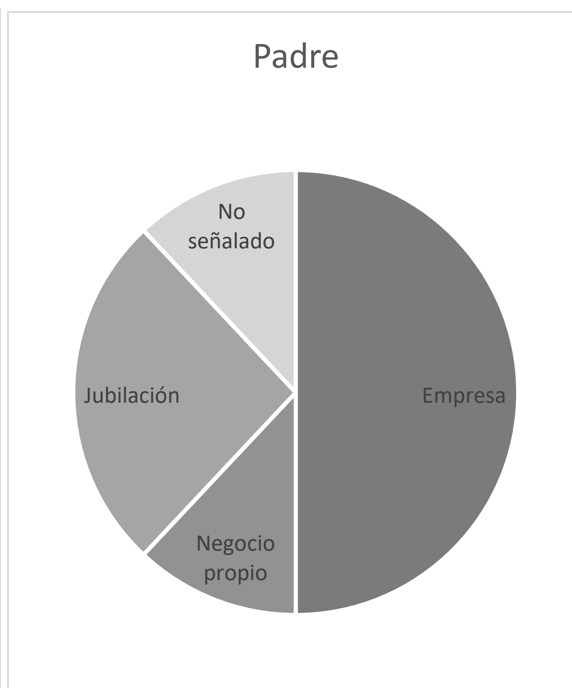
Ocupación de la madre y del padre

En el caso de las mujeres, dos de las madres se dedican al hogar y una tiene un negocio propio; mientras que dos de los padres trabajan en una empresa y uno está jubilado:

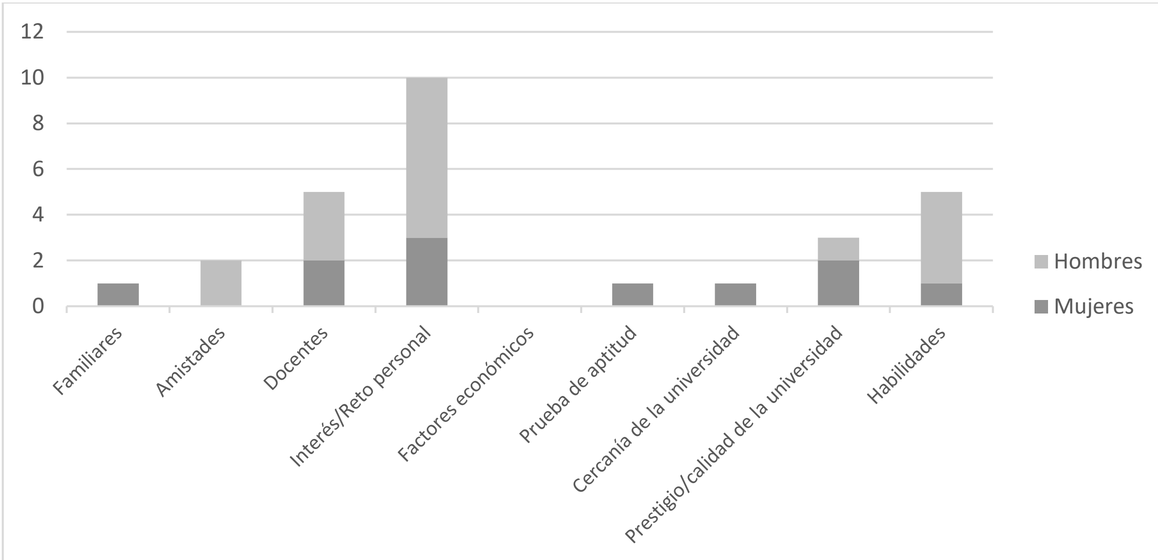


En el caso de los hombres, la tendencia se invierte en cuanto a sus madres, pues más de la mitad trabaja en alguna empresa y solo la cuarta parte se dedica al hogar; respecto a sus padres, la tendencia es similar a la de las mujeres, pues más de la mitad trabaja en una empresa o tiene un negocio propio y la cuarta parte está jubilada:





Motivaciones al elegir la carrera

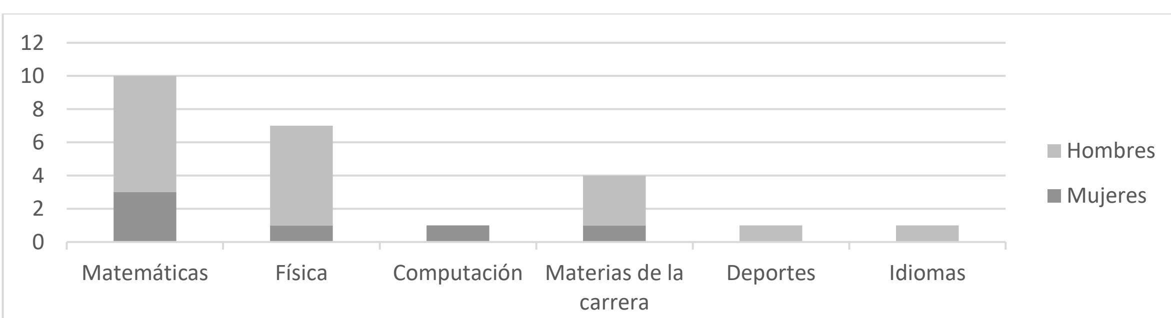


Algo que destaca es que ni un hombre ni una mujer señalaron como motivación los factores económicos. Este es un claro indicador de la imagen social que se tiene de las carreras de ciencias como profesiones de baja remuneración económica.

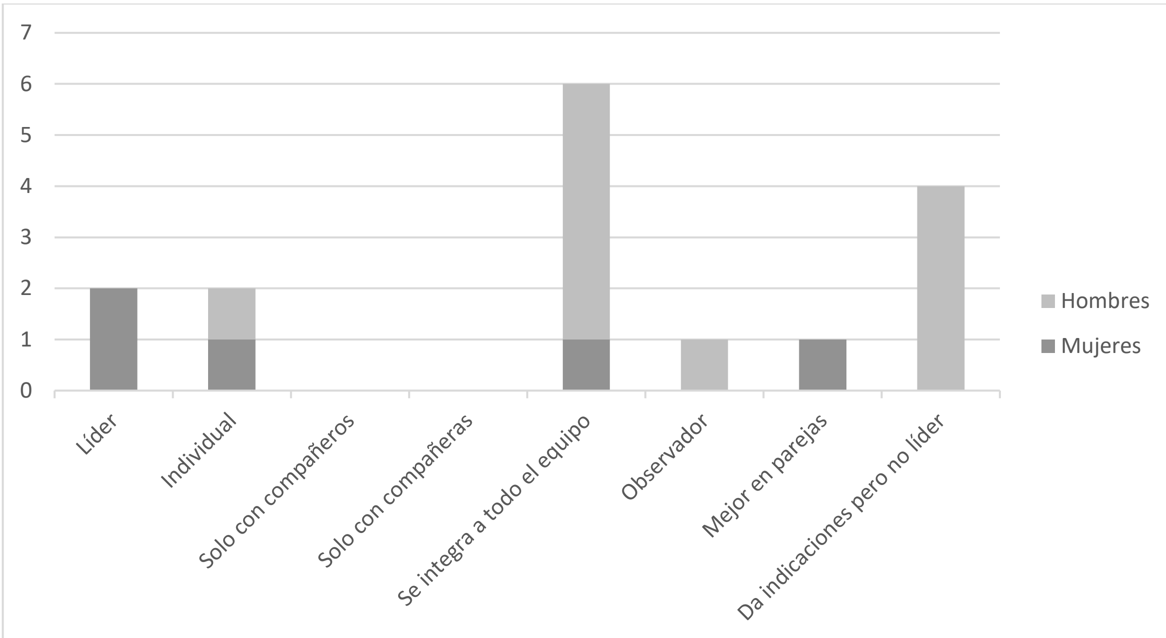
Por otro lado, el factor que fue señalado con mayor frecuencia por mujeres y hombres fue el de *interés o reto personal*. En este punto lo recomendable para aplicaciones futuras de la encuesta sería separar el *interés* del *reto*, pues implican aspectos cuya diferencia es importante desde la perspectiva de género. Asimismo, es de interés que solo una mujer señalara el factor de la habilidad como motivación mientras que cuatro hombres lo indicaron, ya que, de acuerdo con diversas investigaciones, las mujeres son menos propensas a reconocer sus habilidades.

Predilección de materias en la carrera

Tanto en hombres como en mujeres predomina una predilección por las matemáticas sobre la física.



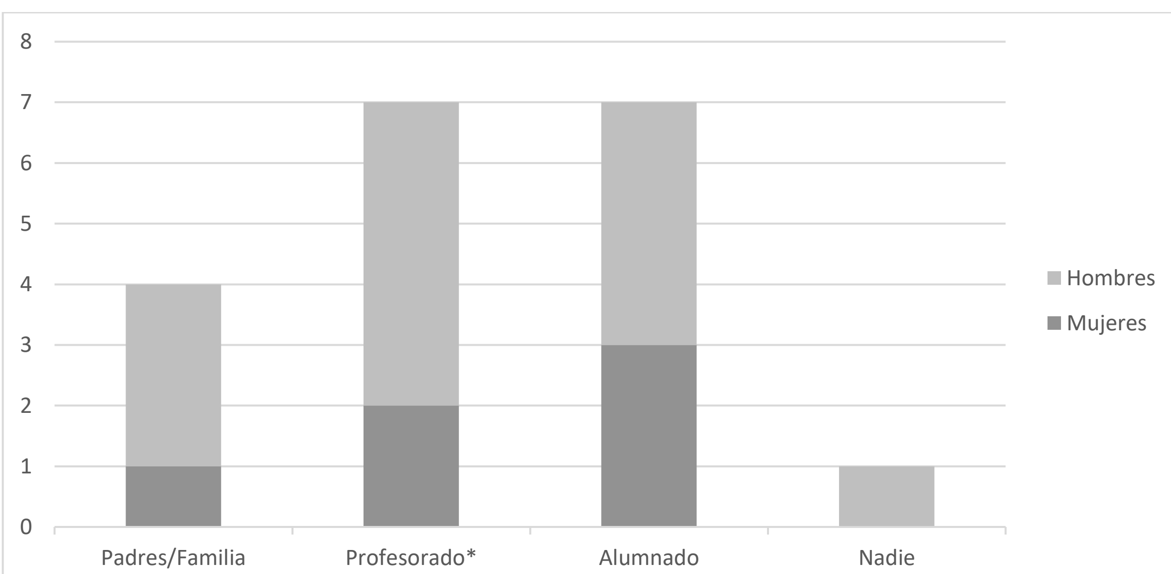
Trabajo en equipo



Un aspecto que llama la atención es que dos de las mujeres indicaron que suelen tomar el rol de líder al trabajar en equipo, mientras que ningún hombre eligió esa opción, al contrario, la mitad de ellos señaló que da indicaciones pero que no se considera líder.

Por otro lado, la mayoría de los hombres señaló que busca integrarse a todo el equipo cuando trabajan en esa modalidad, mientras que solo una de las mujeres eligió esta opción.

Apoyo en tareas



*Una de las mujeres que señaló como apoyo al profesorado aclaró que se trata de un profesor de la secundaria a la que fue.

La observación central respecto al apoyo en la resolución de tareas es que, en el caso de los hombres, el principal apoyo es el *profesorado*; mientras que, en el caso de las mujeres, el principal apoyo es el alumnado mismo.

Esto concuerda con lo observado previamente en estudiantes mujeres de la misma comunidad, en cuanto ellas limitaban el recurrir al profesorado de la universidad y tendían más a apoyarse en sus compañeros (Carranza–Rogerio, 2016).

Información por caso

A continuación se presentan las respuestas que proporcionaron María, Alan, Flor e Isaac en la encuesta a manera de prosa.

María

Mujer, 19 años, nacida en Puebla.

Sus pasatiempos actuales son: **jugar videojuegos**, pasar tiempo con la familia o amigos, ver televisión o cine, asistir a eventos culturales o deportivos y **practicar artes**; mientras que durante su infancia sus pasatiempos fueron: **practicar actividades al aire libre**, jugar con muñecas cocinita o peluches, **jugar con carritos, canicas, trompo o yoyo**, ver televisión o cine, practicar artes y **estudiar algo extraescolar**.

Creció con su **madre** (54 años, con **licenciatura**, dedicada al hogar), **padre** (61 años, con **maestría**, jubilado) y hermanos (24 y 27 años, una con licenciatura y otro con secundaria). Por los años que le lleva su hermana inmediatamente mayor podría considerarse la posibilidad de **primogenitura de segundo orden**.

Entre sus motivaciones al elegir la carrera fisicomatemática se encuentra el **apoyo de algún familiar**, la **motivación de algún docente**, el interés/reto personal que representaba la carrera, los resultados de una prueba de aptitudes, la cercanía de la universidad con su lugar de origen, el prestigio y calidad del programa, y sus **habilidades**.

Sus materias preferidas en la primaria fueron: Artes, Ciencias, Computación y Matemáticas; en la secundaria: Física, Matemáticas y Química; en el bachillerato: Computación, Dibujo técnico, Física y Matemáticas; mientras que en sus estudios profesionales son: Computación, Matemáticas y materias de su carrera. Es decir, **desde el nivel básico le agradaban las matemáticas, así como la ciencia y la computación**.

En cuanto al trabajo **en equipo se suele identificar como líder**, mientras que, respecto a la resolución de tareas, señala que **su apoyo principal ha sido el personal docente y sus amigos**.

Finalmente, **su expectativa** al concluir la carrera **es seguir estudiando**.

Alan

Hombre, 18 años, nacido en la Ciudad de México.

Sus pasatiempos actuales son: ver televisión o cine y **practicar artes**; mientras que durante su infancia eran: **practicar actividades al aire libre**, **jugar videojuegos**, leer, jugar con muñecas, cocinita o peluches, jugar con carritos, canicas, trompo o yoyo, jugar **juegos de mesa**, ver televisión o cine, **practicar actividades en equipos al aire libre**, **juegos de construcción**, practicar deporte y **estudiar algo extraescolar**.

Creció con su **madre** (39 años, con **bachillerato**), **pareja de la madre** (40 años, con **bachillerato**, empleado en una empresa), abuela y abuelo maternos (primaria como escolaridad máxima) y un hermano menor (17 años, estudiante de secundaria), es decir, es **primogénito de primer orden**.

Con su hermano, señala que jugaba a las **carreras**, con muñecos, a las **luchas** y **videojuegos**, entre otras cosas; con su madre, a las cosquillas; con su padre, futbol y a **volar papalotes**; y con su abuelo también al fútbol.

Entre lo que le incentivó a elegir la carrera fisicomatemática se encuentra la **motivación de amistades** y el interés/reto personal que representaba la carrera.

Sus materias preferidas en la primaria fueron: Ciencias, Español y Matemáticas; en la secundaria: Matemáticas y Química; en el bachillerato: **Taller de sistemas digitales**;

mientras que en sus estudios profesionales son las Matemáticas. Es decir, **desde el nivel básico ha tenido una predilección por las matemáticas**.

En cuanto al trabajo **en equipo suele tratar de integrarse al resto**, mientras que, respecto a la resolución de tareas, señala que **su apoyo principal han sido sus compañeros y el profesorado**.

Finalmente, **su expectativa** al concluir la carrera **es seguir estudiando**.

Flor

Mujer, 19 años, nacida en el Estado de México.

Sus pasatiempos actuales son: jugar videojuegos, leer, pasar tiempo con la familia o amigos, ver televisión o cine, asistir a eventos culturales o deportivos y **practicar deporte**; mientras que durante su infancia sus pasatiempos fueron: practicar actividades al aire libre, **jugar videojuegos**, jugar con muñecas cocinita o peluches, **jugar con carritos, canicas, trompo o yoyo**, **juegos de mesa**, ver televisión o cine, **juegos de construcción**, **practicar deporte**, **practicar artes** y **estudiar algo extraescolar**.

Creció con su **madre** (52 años, con **carrera técnica**, dedicada al hogar), **padre** (49 años, con **bachillerato**, empleado en una empresa), tías, tíos, primas, primos, abuela (dedicada al hogar) y abuelo (campesino). Al no tener hermanas o hermanos, es **primogénita de primer orden**.

Con su madre señala que jugaba a las muñecas, **juegos de mesa**, **juegos didácticos** y **videojuegos**; con su padre al **futbol**, **juegos de mesa**, **juegos didácticos** y **videojuegos**; mientras que con su abuelo materno jugaba a **dibujar**.

Entre lo que la incentivó al elegir la carrera fisicomatemática se encuentra la **motivación de algún docente** y el interés/reto personal que representaba la carrera.

Sus materias preferidas en la primaria fueron: Artes, Ciencias, Computación, Deporte, Historia y Civismo; en la secundaria: Biología, Computación, Deporte, **Física**, **Matemáticas** y Química; en el bachillerato: Computación, Física, Matemáticas, Química y **Taller automotriz**; mientras que en sus estudios profesionales son: Física y

Matemáticas. Es decir, **si bien al inicio del nivel básico no sentía predilección por las matemáticas, durante la secundaría adquirió gustó por ellas y por la física**.

En cuanto al trabajo **en equipo se suele identificar como líder**, a la vez que **se siente mejor trabajando individualmente**. Por otro lado, respecto a la resolución de tareas, señala que **su apoyo principal ha sido su madre, su padre, su profesor de física de la secundaria y sus amigos de la universidad**. Finalmente, **su expectativa** al concluir la carrera **es trabajar en una empresa, seguir estudiando y formar una familia**.

Isaac

Hombre, 19 años, nacido en el Estado de México.

Sus pasatiempos actuales son: **jugar videojuegos**, leer, ver televisión o cine, asistir a eventos culturales o deportivos y **estudiar algo extraescolar**; mientras que durante su infancia eran: jugar videojuegos, leer, jugar juegos de mesa, ver televisión o cine, **practicar actividades en equipos al aire libre** y practicar artes (uso de **instrumentos musicales**).

Creció con su **madre** (49 años, con **licenciatura**, **empleada en una empresa)** y hermano mayor (23 años, pasante y practicante de la **licenciatura en arqueología**), es decir, Isaac no es primogénito.

Con su hermano, señala que jugaba **videojuegos** y **juegos de cartas**; con su madre, **juegos de mesa**, **trivias**, **videojuegos** y, con su padre, deportes como el futbol.

Su principal motivación al elegir la carrera fisicomatemática fue el interés/reto personal que representaba la carrera.

Sus materias preferidas en la primaria fueron: Ciencias, Computación y Matemáticas; en la secundaria: Física y Matemáticas; en el bachillerato: Física, Historia, Matemáticas y Química; mientras que en sus estudios profesionales son la Física, las Matemáticas y las materias de su carrera. Es decir, **desde el nivel básico se ha sentido atraído hacia las matemáticas y la física y, en general, hacia el área STEM**.

En cuanto al trabajo **en equipo suele dar indicaciones pero no se considera líder**, mientras que, respecto a la resolución de tareas, señala que **su apoyo principal ha sido el profesorado, sus padres y sus compañeros**.

Finalmente, **su expectativa** al concluir la carrera **es trabajar en una empresa**.

7.2. Análisis de datos

En la presente sección se plantea un análisis a partir de los datos seleccionados en la sección anterior. El primer apartado (subsección *7.1*) se enfoca en el análisis de las resoluciones individuales para dar cuenta de la evolución de los cuatro casos elegidos. El segundo apartado (subsección *7.2.2*) retoma lo proveniente de la socialización de resultados principalmente e integra en su análisis parte de la información recabada durante la charla informal y la encuesta sociocultural.

7.2.1. Diseño

Para el análisis de las resoluciones del diseño (principalmente de los cuatro casos elegidos: María, Alan, Flor e Isaac) se retoma la trayectoria hipotética de aprendizaje planteada en el capítulo anterior. Esta se configuró con base en las preguntas de investigación y la unidad de análisis socioepistémica (*uase*), por lo tanto, para presentar el análisis se toman como referencia estos elementos.

En particular, el planteamiento de cada Actividad en las Tareas del diseño contempla ciertas preguntas de investigación y su trayectoria hipotética correspondiente contempla elementos específicos en la *uase*. Así, en el análisis de cada Actividad se presentan respuestas parciales a las preguntas de investigación planteadas con base en el contraste de lo esperado (teóricamente) y lo encontrado (empíricamente). Como en la sección anterior, para hacer referencia a cada pregunta, se retoma la notación en corchetes: [*Var*], [*EstDin*], [*CIArr*], [*ArgVar*], [*NocFis*], [*NumGraf*], [*Gen*], [*Val*].

Adicionalmente, algunas observaciones se comparten en ciertos puntos para profundizar o para extender el análisis.

Tarea 1

Momento 1

Actividad I

El recurso de la ralentización

En la exploración de la caída de las tres gotas de agua el alumnado recurrió a la *ralentización* del fenómeno para comparar. Es decir, si bien hubo quienes iniciaron su exploración manipulado el parámetro tiempo con el deslizador t, la estrategia final consistió en observar las tres caídas con un paso de tiempo más lento que el real [*EstDin*]. Esto sugiere que en la exploración de parámetros es necesaria una exploración continua uniforme del fenómeno ralentizándolo, es decir, no solo observando lo que sucede puntualmente en cada instante manipulando directamente el deslizador.

En concordancia con lo que sugiere Tall (2013), este recurso tecnológico permite una nueva forma de dar sentido a la noción *dinámica* de continuidad.

Elementos de comparación

Para explicar cuál de las tres gotas caía más rápidamente, María y Alan consideraron las variables *tiempo* y *distancia* [*Var*], de tal manera que la que cae más rápido es la que recorre la distancia en el menor tiempo [*ArgVar*]. En este caso, la conclusión se puede obtener tanto de la exploración manual del fenómeno como de su animación ralentizada [*EstDin*].

Para Flor y Martha la variable fue propiamente la *velocidad* [*Var*], pues identificaron cuál era la gota que caía más rápido a partir de observar su movimiento y contrastarlo con el de las demás gotas. Esta consideración de variables se ve particularmente enriquecida con el carácter dinámico del ambiente y su posibilidad de animación [*EstDin*], pues la comparación se basa en el *contraste de intensidades* [*ArgVar*].

La simulación digital como un manipulable concreto

En correspondencia con la conclusión de Sarama y Clements (2016) respecto a la concreción de los manipulables virtuales (digitales), la descripción que hicieron María e Isaac de la simulación como un *video* alude a su concepción de ésta como una escena del fenómeno físico. Es decir, el uso de este lenguaje *pseudo–concreto* (en términos de Rodríguez, 2010) alude a su concepción como un fenómeno *real*[38].

[38] Un tratamiento más detallado de esto se presenta en la Discusión.

Factores físicos asociados a la caída

Tras identificar una diferencia en las caídas, el principal argumento físico que emerge como explicación es que las tres caídas ocurren en *ambientes distintos* [*NocFis*], es decir, inicialmente su diferencia se atribuye a las características del medio (resistencia, dirección o temperatura del aire), o bien, a que las distancias que recorren no son las mismas, como expresó Isaac.

Factores como el tiempo de caída o la distancia al origen de esta y, más específicamente, la *fuerza de gravedad*, no figuran en general entre las primeras justificaciones de la diferencia.

El orden en la resolución y el género

Tanto Alan como Isaac se *adelantaron* a interactuar con el applet de la siguiente Actividad (con la unión vertical de las escenas) antes de sugerir los factores físicos a los cuales podría atribuirse la diferencia en las caídas. Dado esto, era de esperar que ambos incorporaran a su explicación el factor de la gravedad, ya sea aludiendo a la aceleración correspondiente (Alan) o al tiempo de caída (Isaac), pues la unión de las escenas lo sugiere. Similarmente, Javier explicó la diferencia en las caídas con base en las características del fenómeno de caída libre hasta después de haber interactuado con el segundo applet.

En cuanto a María y Flor, ellas resolvieron todo punto por punto, similar a como lo hizo la otra mujer participante (Martha) y los demás participantes hombres (Miguel, Raúl, Ramón, Fausto y Román). Solo Flor añadió a su respuesta anterior "y la gravedad" luego de haber interactuado con el applet de la siguiente Actividad pero, en este sentido, no se *adelantó*.

Si bien por el tamaño de la muestra no es pertinente –y por lo tanto tampoco se pretende– hacer una *generalización*, dada la perspectiva de género adoptada, en sintonía con la postura de Farfán y Simón (2016), se reconoce la necesidad de analizar el desempeño de las mujeres como *grupo social* cuyas características particulares permean la forma en que se construye conocimiento. Como señalan las autoras, el *currículo oculto de género*, conformado por constructos interiorizados y no visibles que rigen los comportamientos y formas de pensar en el aula, determina (en conjunto con la cultura) la construcción de roles para hombres y para mujeres.

En este sentido, Cheryan (2012) reporta que comportamientos como el cumplir con tareas, estudiar, ser organizado/a y disciplinado/a se consideran femeninos y, por tanto, las mujeres pueden ser más propensas a comportarse de esa manera y a que se les impulse a actuar de esa manera (p. 187).

Con base en lo anterior, el que tres de los participantes hombres se hayan adelantado y ninguna de las mujeres lo haya hecho [*Gen*] puede muy probablemente ser el resultado de una alienación cultural, cuyas implicaciones diferenciadas podrían conllevar a una evaluación inadecuada. Por ejemplo, el no haber contado con las grabaciones de las pantallas habría invisibilizado estos comportamientos y, consecuentemente, su evaluación habría sido distinta.

Actividad II

El efecto de la unión de las escenas y la identificación del cambio como variable

Hipotéticamente, se esperaba que el alumnado solo uniera una única vez las escenas; no obstante, se observó que las unieron y separaron varias veces e iniciaron la caída de la(s) gota(s) en cada caso. Esto sugiere una necesidad por reconocer la diferencia entre los tres tramos seleccionados (separación) como parte de un mismo *comportamiento* (unión) [*EstDin*].

Por otro lado, tras apreciar la unión vertical de las tres escenas, María, Alan, Flor e Isaac reconocieron como posible factor físico de la diferencia en las caídas el que se tratara de distintos tramos correspondientes a un mismo movimiento acelerado. Particularmente, Flor e Isaac hicieron referencia a la *gravedad* y Alan a tres *velocidades iniciales* distintas [*NocFis*].

Temporización en la descripción del comportamiento del cambio

Al identificar a las escenas como diferentes tramos en la caída de una misma gota, las descripciones del fenómeno se centraron en el comportamiento de la caída, ya sea señalando que se trata de un movimiento acelerado (María), o bien, que a mayor tiempo transcurrido, mayor velocidad tiene la gota (Alan e Isaac) [*ArgVar*|*NocFis*].

En el caso de Flor, si bien mencionó la influencia de la gravedad, indicó que la *aceleración* de la gota incrementa debido a ella (cuando es en realidad la *velocidad* la que incrementa). Esto puede corresponder a una confusión entre los conceptos físicos de velocidad y aceleración, pues es probable que los haya concebido teóricamente (como derivadas o pendientes, dado el análisis del libro de física presentado en la subsección *2.2.1*), mas no con un sentido variacional (como cambio y cambio del cambio, respectivamente) [*ArgVar*].

Momento 2

Actividad I

El recurso de la ralentización

Nuevamente en este punto, la *ralentización* del fenómeno fue crucial para reconocer una diferencia en las caídas de las gotas de agua en las tres secciones de escena. Particularmente, María y Flor volvieron a unir y a separar las secciones [*EstDin*].

Elementos de comparación

Como en el Momento 1, María y Alan consideraron las variables *tiempo* y *distancia* [*Var*], de tal manera que la que gota que cae más rápido es la que aparece menos tiempo en pantalla (María) o, equivalentemente, la que recorre la misma distancia en menos tiempo (Alan). La respuesta de Isaac a este punto sugiere que también consideró al *tiempo* como referente [*ArgVar*]. Mientras que para Flor y Martha la variable fue nuevamente la *velocidad* misma [*Var*], pues identificaron cuál era la gota que caía más rápido observando el tiempo y su velocidad (Flor), o bien, su movimiento en el tiempo (Martha) [*ArgVar*].

Predicción como paso puntual hacia la continuidad

Entendiendo la predicción como el anticipar un comportamiento puntual con base en el análisis de otros estados, el alumnado *predijo* que la tercera gota de cualquier nueva trisección de escena sería siempre la más rápida o veloz [*NocFis*].

En particular, Alan justificó su predicción señalando que se trataba de un caso de M.R.U.A., es decir, en lugar de basar su justificación en sus propias observaciones (como las características que había identificado previamente en el comportamiento de la caída de la gota), la basó en un *principio* físico. Esto podría ser el resultado de una costumbre didáctica que tiende a privilegiar ciertas argumentaciones, como las *conceptuales*, por sobre otras [*Val*].

Por otro lado, María e Isaac señalaron que se llegaría a un punto en que se obtendrían solo tres imágenes (María), con una diferencia muy difícil de apreciar a simple vista (Isaac), pero que aun en dicho caso habría un cambio en el desplazamiento entre las tres [*ArgVar*].

A partir de lo anterior se identifica que el movimiento es concebido por el alumnado como una evolución de estados sucesivos. Esto, de acuerdo con Romero y Rodríguez (2003), conlleva identificar una propiedad variable a través de la cual se dé cuenta de los diferentes estados de movimiento. En el caso particular de este Momento, la cualidad que emergió para dar cuenta de ello fue la *velocidad*, aunque no se mencionaron sus variantes promedio e instantánea [*NocFis*]. La consideración y contraste de dichas variantes serán de especial importancia en el paso de lo discreto a lo continuo mediante la *estimación*.

Momento 3

Actividad I

El recurso de la ralentización en la reproducción de un video

La opción de modificar la velocidad de reproducción de los videos (a la mitad o a la cuarta parte de su velocidad real) fue empleada por María, Alan e Isaac al analizar la forma de la figura creada por la cascada artificial conforme el agua caía [*EstDin*]. Los tres casos identificaron que la figura tendía a *alargarse* (María e Isaac) o *estirarse* (Alan) durante la caída [*ArgVar*]. En el caso de Flor, ella no ralentizó el video y solo señaló que la figura se iba deformando.

Una observación en este punto que será de especial importancia durante el análisis de la siguiente Actividad es que Isaac, además de un estiramiento, identificó un *estrechamiento*.

Factores físicos asociados a la caída

Alan e Isaac asociaron sus observaciones respecto a la forma de la figura con la *aceleración constante* que experimentan las gotas al encontrarse en caída libre (Alan), es decir, con el hecho de que *van ganando velocidad* conforme caen (Isaac) [*NocFis*]. En este punto, se observó que Isaac intentó inicialmente explicar su asociación con base en la idea de *estrechamiento*, mas luego la cambió por *alargamiento* al querer explicar el fenómeno a partir del hecho de que el agua es soltada progresivamente.

Si bien María igualmente asoció sus observaciones con el *movimiento acelerado* que tienen las gotas –las cuales, según expresa, parten de una velocidad que después aumenta–, durante su explicación menciona que en la parte superior de la figura la aceleración de las gotas es *lenta*. Similarmente, Flor explicó que, al acercarse al suelo, las gotas de agua *incrementan* su aceleración [*NocFis*]. Como se mencionó previamente, esto puede corresponder a una confusión entre los conceptos físicos de velocidad y aceleración al haber sido concebidos teóricamente sin un sentido variacional [*ArgVar*].

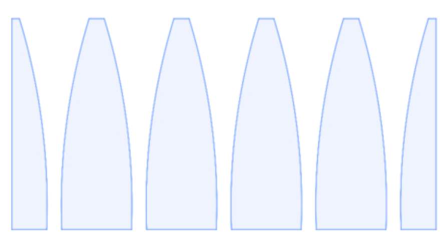
Actividad II

Aspectos cualitativos de la caída del agua

María, Alan y Flor señalaron que la primera figura sí podría mostrarse, pues bastaría con restringir progresivamente la caída del agua (María), ya que lo único que se modifica es la *altura* de la figura (Alan) [*ArgVar*]. Flor no dio detalles sobre cómo o por qué se podría.

Respecto a la segunda figura (que incluye una diagonal), María se enfocó en la intermitencia de las barras, por lo tanto señaló que sí sería posible mostrarla. Asimismo, Flor indicó que sería posible pero no dio detalles al respecto. Por el contrario, Alan señaló que no sería posible generar perfectamente la figura, ya que en la diagonal habría distintas *velocidades* deformándola [*ArgVar*|*NocFis*]. En particular, la explicación de Alan evidencia una articulación del *modelo* que planteó (alargamiento ⇔ aumento en la velocidad) con la *situación real* (lo *modelado*) correspondiente a las figuras mostradas en el reloj de agua.

En cuanto a Isaac, si bien en la Actividad I aparentemente propuso el mismo modelo que Alan, en la Actividad II, al asociar *modelo* y *modelado*, evidenció que en realidad el modelo que concibió fue *estrechamiento* ⇔ aumento en la velocidad, pues al explicar la imposibilidad de formar la primera de las figuras señaló que ésta sugiere que la altura entre las moléculas de agua se reduciría conforme la caída:



Es decir, asumió que el ensanchamiento en la parte inferior correspondería a una compresión vertical, lo cual, según expresa Isaac, es imposible pues implicaría una aceleración negativa [*ArgVar*|*NocFis*]. Igualmente, respecto a la segunda figura, señaló que no sería posible mostrarla pues no presenta un *estrechamiento* (al ser barras, su ancho siempre es el mismo).

Momento 4

Actividad I

La confrontación de los videos

Ver los videos resultó para el alumnado una oportunidad para confrontar sus conjeturas respecto al modelo que propusieron. En particular, Flor y María identificaron la deformación en la diagonal, pues se formaba una especie de curva (Flor), la cual María justificó por el hecho de que se trataba de un *movimiento acelerado* y Flor por la aceleración que tomaban las gotas al final de la caída (es decir, sigue considerando que la aceleración es variable) [*ArgVar*|*NocFis*].

Alan comprobó su modelo; sin embargo, Isaac, al observar que la primera figura sí podía formarse, atribuyó el hecho de no haberlo anticipado a que anteriormente consideraba que ninguna de las válvulas se podría apagar. En cuanto a la segunda, indicó que el *estrechamiento* no era visible o casi imperceptible [*NocFis*], es decir, el video no fue suficiente para confrontar su modelo.

El orden en la resolución y el género

Tanto Alan como Isaac vieron los dos videos antes de responder a las preguntas que seguían a cada uno, mientras que María y Flor procedieron punto por punto.

Tarea 2

Momento 1

Actividad I

El recurso de la ralentización

Nuevamente, en la exploración de parámetros se observó que el alumnado recurrió a la ralentización del fenómeno para apreciar la caída de las gotas en la simulación del reloj de agua. Particularmente, María y Flor [*EstDin*].

Aspectos cualitativos de la caída del agua, factores físicos asociados y género

Al cuestionar (de manera abierta) cómo es la caída de las gotas en la simulación del reloj de agua, se observó una diferencia sutil entre las respuestas de María y Flor y las de Alan e

Isaac. Esta diferencia radicó en que ellas incorporaron a su descripción aspectos *cualitativos* como la forma curva que describen las gotas (María) y el que unas caen antes que otras (Flor). Similarmente, la otra mujer participante, Martha, también aludió a aspectos cualitativos de la caída [*Gen*].

En el caso de Alan e Isaac, ellos se centraron en los factores físicos, aludiendo ambos a una diferencia en las velocidades de las gotas, sin descripciones acerca de la forma en que caen [*Gen*].

La forma de las gotas

En la pregunta abierta María aludió no solo a aspectos cualitativos, sino que incorporó en su descripción también el hecho de que las gotas no caían a *velocidad* constante [*NocFis*] por lo que, aunque se dejaran caer las gotas a tiempos iguales, no avanzarían distancias proporcionales y, por tanto, no podrían formar una línea recta (geometrización del cambio). Esta respuesta manifiesta una articulación entre *modelo* y *modelado*, donde, además del argumento físico de la *velocidad* y el aspecto cualitativo de las *formas* (curva y recta), se integra un argumento variacional respecto al tipo de comportamiento (*seriación*) de las posiciones: *no proporcional* [*ArgVar*]. En términos de Arrieta (2003), la relación entre variables se constituye estableciendo las formas.

Al cuestionar específicamente sobre la forma que describen las gotas, María, Flor e Isaac expresaron que se generaba una curva. Particularmente, Isaac señaló que solo se obtendría una recta si la velocidad de caída fuera *constante* (geometrización del cambio) [*NocFis* | *ArgVar*]. Alan y Flor indicaron que las gotas describen una parábola; en especial, Alan lo asoció con el tiro parabólico [*NocFis*].

Costumbre didáctica

El que Alan no mencionara la *curvatura* en la forma que describen las gotas y aludiera principalmente a un fenómeno físico específico (tiro parabólico), podría ser nuevamente el resultado de una costumbre didáctica que tiende a privilegiar ciertas argumentaciones, como las *conceptuales*, por sobre otras [*Val*].

Por otro lado, el que Isaac antepusiera la condición de “si se unen con una línea las gotas” a su apreciación de la forma del conjunto de gotas sugiere un escaso tratamiento cualitativo en el currículo tradicional (fenómeno con frecuencia reportado en la literatura), pues Isaac basa su apreciación en contar con una curva continua [*ArgVar*].

Actividad II

Seriación y numerización del cambio

El contar con las magnitudes de los desplazamientos de las gotas permitió, en el caso de María, Flor e Isaac, que la *seriación* se estableciera con base en el decrecimiento constante de sus valores numéricos (numerización del cambio) [*NumGraf*]. Particularmente Isaac recurrió a una hoja de cálculo para determinar la diferencia en los desplazamientos.

Alan señaló que los desplazamientos tenían un comportamiento *cuadrático* [*ArgVar*] sin mayor explicación; no obstante, tanto el observador externo como la investigadora notaron que este estudiante empleó su calculadora científica durante la resolución del diseño, por lo cual existe la posibilidad de que haya corroborado numéricamente su respuesta.

Al cuestionar sobre *cuánto* cambiaban los desplazamientos, el alumnado (a excepción de Isaac que lo había hecho ya previamente) empleó la hoja de cálculo sugerida para determinar los valores de las diferencias. Particularmente, Alan y Flor determinaron también el cambio en las diferencias con base en la tabla, él lo hizo introduciendo las restas correspondientes en la tercera columna, mientras que ella proporcionó un valor aproximado de casi 4 décimas (numerización del cambio) [*NumGraf*].

Isaac, como ya había explorado numéricamente las diferencias, ahora lo hizo con apoyo del applet, explorando diversos valores de tiempo con el deslizador. Con base en ello, identificó que las diferencias en los desplazamientos tenían un comportamiento *decreciente* (invariante) [*EstDin* | *ArgVar*].

El patrón en las diferencias y el cambio del cambio (La exactitud en las respuestas y el género)

Respecto a si se identificaba un *patrón* específico en las diferencias entre desplazamientos, María, Alan, Flor e Isaac decidieron basarse en “la diferencia de las diferencias”.

Es decir, buscaron describir la *cantidad* a partir de su *cualidad*, en el sentido de Oresme (como reporta Suárez, 2014) o de Galileo (como reportan Romero y Rodríguez, 2003) [*ArgVar*].

María, Alan y Flor proporcionaron un valor numérico: “4 unidades aproximadamente”, “0.392” y “casi 4 décimas”, respectivamente. Mientras que Isaac indicó que se puede notar que la diferencia entre las diferencias es *constante*. Tomaron como base la tabla [*NumGraf*].

Una observación particular respecto a estas respuestas relativa al género es la diferencia en los términos en que se manifiesta lo encontrado: mientras las mujeres sugieren un valor *aproximado*, los hombres proporcionan un valor *exacto* o determinante. De hecho, considerando a la otra mujer participante, Martha, también su respuesta en este punto fue que la diferencia de las diferencias es *aproximadamente* la misma [*Gen*].

Esta observación es consistente con los hallazgos de Farfán y Simón (2016), pues en su estudio identificaron que las mujeres tienden a elegir respuestas que planteen una solución *plausible*, mientras que los hombres tienden a elegir respuestas exactas o que ostenten una solución marcadamente matemática (p. 102).

Incluso una observación adicional respecto a la respuesta de María es que ella empleó el término “unidades” en lugar de *decenas*, lo cual refuerza la ambigüedad de la respuesta [*Gen*].

Por otro lado, el uso de la expresión *diferencias de las diferencias* por parte del alumnado da evidencia del análisis variacional que estaban realizando [*ArgVar*].

Orden de resolución y género

En este Momento se vio una recurrencia de Isaac por revisar e interactuar con lo que vendría más adelante en las Actividades planteadas [*Gen*]. Particularmente, para responder el punto anterior, Isaac exploró el applet con las diferencias gráficas alineadas propuesto en una Actividad posterior. Tras manipular el deslizador de tiempo en ese applet, aumentando y disminuyendo lentamente su valor varias veces, regresó a la tabla numérica y calculó el cambio en las diferencias [*EstDin*|*NumGraf*].

Este proceso sugiere una articulación entre las observaciones cualitativas de las diferencias alineadas y los valores numéricos correspondientes a las diferencias de las diferencias, pues el comportamiento lineal (invariante) identificado visualmente en las diferencias a través de la exploración del parámetro tiempo se asoció con una diferencia numérica constante en las diferencias.

Actividad III

La identificación de invariantes en el estudio del comportamiento de las diferencias

La observación anterior respecto a la articulación en el trabajo de Isaac se comprobó en este punto pues el estudiante menciona que el *significado* de la constancia de la diferencia en las diferencias identificada en el punto anterior se puede *observar* aquí en que los segmentos correspondientes a las diferencias *crecen al mismo ritmo* [*EstDin* | *NumGraf* | *ArgVar*].

En el caso de Alan, antes de que se le sugiriera [*Gen*], exploró con el deslizador de tiempo e identificó que las diferencias tienden a tener la *misma distancia entre ellas* (invariante) [*EstDin* | *ArgVar*].

Por su lado, María inicialmente solo identificó que las diferencias tenían un *decrecimiento*, mas no de qué tipo era (constante, cada vez menos, ...). Al explorar con el deslizador de tiempo (búsqueda de invariantes) y calcular numéricamente el cambio en las diferencias (lo cual era sugerido en este punto) identificó que el comportamiento del decrecimiento era constante (lo invariante) [*EstDin* | *NumGraf*]; sin embargo, respecto a las nociones físicas, señaló que lo anterior sugería que las diferencias se comportaban como una velocidad constante ya que la diferencia entre ellas lo era [*NocFis*]. En este sentido, si bien se logró una articulación entre lo cualitativo y lo numérico, el concepto de velocidad aún resultaba ambiguo.

En el caso de Flor, su grabación de pantalla sugiere que la exploración del parámetro de tiempo en el applet con las diferencias alineadas la realizó a la par que observaba la tabla numérica que construyó en el applet anterior (quizá suponiendo que ambas applets estaban vinculadas), por ende, parece ser que su identificación de invariantes se basó tanto en el comportamiento observado en los segmentos correspondientes a las diferencias como en la constancia en los valores de cambio en las diferencias registradas en su tabla [*EstDin* | *NumGraf*]. Esto evidencia una articulación entre lo cualitativo y lo numérico.

La exactitud en las respuestas y el género

Similar a lo observado en la Actividad anterior, en las respuestas del alumnado a esta Actividad se identificó también una diferencia en los términos en que ellas y ellos expresaron sus hallazgos. María y Flor nuevamente expresaron valores aproximados: “entre

0.392 o 0.393” (María) y “casi 4 décimas” (Flor). Asimismo, Martha expresó que guardaban “la misma relación”. Mientras que Alan e Isaac señalaron que el cambio en las diferencias “es constante” [*Gen*].

Actividad IV

La identificación de invariantes en el estudio del comportamiento de los cambios

María, Flor e Isaac exploraron diferentes valores de tiempo con el deslizador al analizar el comportamiento del cambio entre las diferencias y determinaron que éste era *constante* (siempre igual). Particularmente tanto Flor como María exploraron con el deslizador de tiempo antes de que les fuera sugerido [*EstDin*]. En contraste, Alan parece haber asumido que se trataba de lo mismo que se exploró en la Actividad anterior y solo señaló “lineal”.

Momento 2

Actividad I

Exploración de parámetros

María, Alan, Flor e Isaac exploraron con el deslizador de tiempo el applet que mostraba la simulación del reloj de agua simultáneamente con las diferencias entre desplazamientos alineadas y los cambios entre diferencias alineados [*EstDin*]. Posteriormente, Isaac regresaría a este applet durante la resolución de los siguientes puntos.

Actividad II

La imposibilidad de ubicar las diferencias ordenadas

En el applet de esta actividad se presentó un problema de tipo técnico pues tras ciertas acciones sobre el applet, el arrastre de las diferencias ordenadas quedaba bloqueado. Pese a esto, fue posible apreciar las suposiciones del alumnado respecto a la información necesaria para ubicar las posiciones del conjunto de gotas.

María y Flor identificaron la necesidad de un punto de referencia para ubicar las posiciones de las gotas a partir de las diferencias ordenadas. María señaló que con saber la posición de la primera gota se podría, mientras que Flor indicó que el referente sería el lugar del cual partieron [*CIArr*].

Alan igualmente identificó la necesidad de un referente; sin embargo, su respuesta sugiere que tal referente para él era el tiempo [*CIArr*]. Similar a la sugerencia de Flor, Isaac inicialmente intentó ubicar la posición de las gotas alineando el segmento superior de las diferencias alineadas con el extremo superior del reloj de agua [*CIArr*]. Tras ello, manipuló el deslizador de tiempo en el primer applet para hallar un momento en el que las diferencias que ahí se mostraban se asemejaran a aquellas en el segundo applet y ubicó en éste las diferencias alineadas en un lugar similar al de las otras [*EstDin*]. En este sentido, el arrastre le permitió identificar la necesidad de un referente; sin embargo, no reconoció que se trataba de la posición de una de la gotas de inmediato.

El orden en la resolución y el género

En este punto, Isaac se adelantó a explorar con el applet que contaba con la ubicación de una de las gotas y, tras ello, identificó la necesidad de esta información para determinar el lugar del conjunto de gotas [*Gen*].

El referente temporal, el referente espacial y el género

Una observación particular en esta Actividad que podría estar asociada al género es que, tanto en el caso de Alan como en el de Isaac, pese a que durante la exploración de las diferencias y sus cambios ordenados siempre se consideró un *mismo instante de tiempo*, ambos hicieron alusión a que este era uno de los referentes necesarios para ubicar al conjunto [*ArgVar*], mientras que María, Flor y Martha señalaron que el referente correspondía a un parámetro espacial (como Flor, Martha identificó que se necesitaba saber de qué punto se estaba partiendo).

Ello también podría corresponder con lo encontrado en *Aspectos cualitativos de la caída del agua, factores físicos asociados y género* (Tarea 2, Momento 1, Actividad I), pues las mujeres en este caso basaron su referente en un aspecto *cualitativo* del ambiente: referentes espaciales [*Gen*].

Aunque María también señaló que si bien con la información de una de las gotas podría saber la ubicación de las demás, no sabría a qué tiempo corresponden.

Actividad III

Tras explorar con el applet que contaba con la posición de una de las gotas, María, Alan, Flor e Isaac reconocieron la *necesidad* y *suficiencia* de esta información para localizar el conjunto, pues a partir de ella se podrían ubicar las demás gotas conociendo las diferencias [*CIArr*].

En el caso de Javier (cuyo caso fue analizado en este punto dada la discusión que más tarde se daría durante la socialización de resultados respecto al tiempo), él reconoció la necesidad de esta información pero no su *suficiencia*, pues aludió a que la posición de una de las gotas solo le serviría para encontrar la posición de las demás en un momento *fijo* [*CIArr*]; sin embargo, esta información es suficiente sin importar el tiempo que se considere, pues dependiendo de este, las diferencias proporcionarían los desplazamientos correspondientes a partir de la gota presentada.

Respecto a si un dato de posición era suficiente para hallar la ubicación de un conjunto mayor de gotas, María, Alan e Isaac señalaron que sí [*ArgVar*].

Flor indicó que tal vez requeriría más para ubicar de dónde parten las gotas, mas cabe destacar acerca de esta participante que durante la exploración de los applets tuvo varias dificultades técnicas, aunque no lo señaló; por ende, es probable que ello haya afectado su respuesta.

Actividad IV

La ubicación de los cambios ordenados

El que los cuatro casos intentaran ubicar al conjunto de *cambios ordenados* en algún lugar determinado sugiere dos posibilidades: que, pese a la exploración previa con las diferencias ordenadas, el alumnado no haya *anticipado* la necesidad de un valor de referencia, o bien, que como escolarmente suele exigirse una respuesta determinada, el alumnado haya intentado encontrar un lugar específico con el fin de atender la indicación [*CIArr*].

Por otro lado, si bien no fue posible profundizar sobre la necesidad de un referente pues la pregunta redactada en afirmativo propició que el alumnado indicara que sí notaron que era necesario un valor de referencia, las exploraciones dinámicas de las y los participantes sugieren que durante el arrastre del conjunto reconocieron la necesidad de un punto de referencia, ya sea el origen de las alineaciones de las diferencias o el origen de las alineaciones de los cambios [*CIArr*].

Actividad V

El referente en la ubicación de los cambios ordenados

Al contar con la magnitud de una de las diferencias, tanto María como Flor parecen haber considerado que el poder ubicar los *cambios* ordenados a partir de dicho dato les había permitido hallar la ubicación de las gotas y no, como en realidad era, la ubicación de las diferencias alineadas, es decir, se confundió el paso del cambio a las diferencias con el paso del cambio a los desplazamientos. En el caso de Alan e Isaac, ambos ubicaron el conjunto de cambios alineados e Isaac agregó que ello hizo posible determinar el valor de las demás diferencias [*CIArr*].

Momento 3

Actividad I

Predicción de una gota en un tiempo intermedio

María, Alan, Flor e Isaac predijeron que una gota soltada entre la primera y la segunda gotas, en la mitad del intervalo de tiempo transcurrido entre ambas, estaría en una altura intermedia también. Particularmente, el uso de la tabla numérica para analizar la simulación permitió reconocer al alumnado la regularidad en los tiempos en que eran soltadas las gotas [*NumGraf*]. Más aún, María e Isaac detallan que la gota se encontraría más cerca de la segunda gota que de la primera por el *comportamiento* identificado previamente respecto a la caída del agua [*ArgVar*].

Es decir, si bien los cuatro casos reconocieron el comportamiento creciente en los desplazamientos de las gotas, María e Isaac identificaron además que el crecimiento va *en aumento*.

Actividad II

Factores físicos asociados a la caída

Al comparar las gotas en el reloj de agua con la caída de la gota de agua analizada en la primera Tarea, Alan, Flor e Isaac identificaron que las gotas en el reloj (tomadas en un tiempo en donde la última gota acabara de salir) alcanzaban las *mismas altura*s que la gota tras *intervalos de tiempo constantes* [*EstDin*|*NumGraf*]. A partir de esa observación, señalaron como vínculo entre ambos fenómenos el factor de la *aceleración* [*NocFis*].

Por su lado, María se centró en que, en ambos casos, a *diferencias de tiempo iguales* los *desplazamientos son cada vez mayores* [*ArgVar*].

Este par de argumentos (el primero *físico* y el segundo *variacional*) fueron importantes para articular las observaciones sobre el comportamiento en la caída del agua con la representación gráfica de la posición respecto al tiempo.

Actividad III

Estimación en la construcción de la gráfica de la posición respecto al tiempo

Con base en los puntos identificados correspondientes a la caída de la gota de agua en intervalos de tiempo constantes, María, Alan y Flor propusieron un bosquejo de dónde se ubicaría la altura de la gota para los demás valores de tiempo. En este sentido, *estimaron* mediante un trazo continuo la posición de la gota para diferentes valores de tiempo [*NumGraf*].

Actividad IV

El rastro y la gráfica de la posición

A partir de rastro del punto correspondiente a la altura de la gota para diferentes valores de tiempo explorados por el alumnado (algunos valores sugeridos y otros propuestos) [*EstDin*], el alumnado comprobó su bosquejo anterior. Particularmente, Isaac no propuso un bosquejo en el punto anterior, sin embargo, describió la correlación entre ambas simulaciones (reloj de agua y caída de la gota) argumentando que la gráfica generada servía para describir el *mismo* fenómeno [*NumGraf*|*NocFis*].

María e Isaac reconocieron que el trazo generado correspondía a la gráfica de la posición con respecto al tiempo [*NumGraf*]. Adicionalmente, Alan y Flor señalaron que la gráfica obtenida correspondía a una *parábola*.

Momento 4

Actividad I

Asociación de la caída de la gota con la gráfica de su posición

En la asociación de la caída de la gota de agua con la gráfica el alumnado exploró el parámetro de tiempo con distintos valores varias veces [*EstDin*]. Particularmente, Alan delineó con el cursor el recorrido de la gota de agua sobre la gráfica de la posición.

Predicción acerca de las diferencias en los desplazamientos

Flor señaló que esperaba que las diferencias entre los desplazamientos tuvieran un *patrón* entre sí, mientras que Alan e Isaac señalaron que esperaban que se comportaran *linealmente* (Alan), con un *cambio constante* entre ellas (Isaac) [*ArgVar*]. En este punto nuevamente se aprecia una diferencia en los términos en que son expresadas las respuestas, pues la de ella es más ambigua que las de ellos [*Gen*]. Pese a esto, parece ser que los tres asumen que el comportamiento de las diferencias guardará una relación con lo analizado en el reloj de agua.

En cuanto a María, en esta ocasión ella sí señala un comportamiento específico: que la distancia del origen al primer desplazamiento es un cuarto de la distancia que hay entre el segundo uno y el segundo dos [*ArgVar*]. En este caso, ella basó su argumento en la comparación de los dos valores numéricos que apreció.

El orden en la resolución y el género

En el caso de Alan, él exploró el tercer applet antes de indicar que anticipaba que las diferencias en los desplazamientos se comportarían linealmente. Asimismo, Isaac revisó todo lo que vendría en este Momento antes de iniciar con su resolución [*Gen*].

Actividad II

La cuantificación del cambio en la predicción

Alan, Flor e Isaac identificaron que el cambio en las diferencias era de 9.81. Tanto Flor como Isaac se basaron en este resultado para predecir que entre el segundo dos y el segundo tres la gota se desplazaría lo que se había desplazado en el segundo anterior más el cambio calculado, es decir, 24.525 [*NumGraf*]. Nuevamente en este caso, Flor indicó que "aproximadamente llegará" a ese valor, mientras que Isaac señaló que ese sería el desplazamiento [*Gen*].

Por su lado, Alan sumó además el valor del primer desplazamiento, lo cual le condujo a obtener un valor distinto en la predicción.

En el caso de María, ella inicialmente había calculado 9.81; sin embargo, tras colocar en la casilla de entrada el primer valor de desplazamiento (4.905) parece haberse confundido en los valores y asumir que el desplazamiento entre el segundo uno y el segundo dos era de 9.81 y, dado que 4.905 es la mitad de esta magnitud, predijo que entre el segundo dos y el segundo tres el desplazamiento sería el triple de 4.905. Es decir, asumió que se trataba de un comportamiento lineal [*ArgVar*]. Por ende, no retomó sus observaciones previas.

Relación entre el comportamiento y la predicción

Alan, Flor e Isaac identificaron que existía una correspondencia entre el *comportamiento* que habían anticipado en las diferencias con la *predicción* del desplazamiento entre el segundo dos y el segundo tres. Especialmente, Isaac aclaró que el cambio en las diferencias (las cuales anticipó irían en aumento) era en efecto *constante* con valor de 9.81 [*ArgVar*].

En cuanto a María, ella no retomó sus observaciones en este punto sobre el comportamiento de la posición respecto al tiempo, pues afirmó que era *lineal* [*ArgVar*].

El género y el tiempo de resolución

El que Flor no señalara que había terminado la Tarea 2 (tras la cual se había sugerido hacer una pausa para comer) sino hasta que Alan manifestara haberlo hecho, sugiere una posible falta de confianza por parte ella [*Gen*]. Como Master y Meltzoff (2016) sugieren, una de las barreras sociales para las mujeres en STEM es una sistemática baja autoestima en ellas.

Tarea 3

Momento 1

Actividad I

Comprobación de la predicción

Al observar la alineación de las diferencias correspondientes a los primeros tres segundos de caída, María reconoció que su predicción no había sido adecuada y retomó (expresándolo explícitamente) lo que ya había observado anteriormente acerca de la *constancia en el cambio* entre diferencias. En cuanto a Alan, Flor e Isaac, los tres corroboraron el comportamiento *lineal* de las diferencias [*ArgVar*]. Particularmente Alan, quien no había obtenido el valor correspondiente en su predicción, asumió la consistencia pues, como se discutió más adelante durante la socialización de resultados, comprendía de qué manera debía haber hecho el cálculo e identificó que añadió un sumando extra.

Actividad II

Comparación en el comportamiento de las diferencias

Al comparar las diferencias correspondientes a intervalos de 0.5 segundos y 1 segundo, María y Alan identificaron como invariante el comportamiento *constante* del cambio entre las diferencias (cualitativo) [*ArgVar*].

Mientras que Flor e Isaac se centraron en que con intervalos de tiempo menores, las diferencias también lo eran (cuantitativo) [*ArgVar*].

Actividad III

Comparación entre diferencias

Al comparar los valores de velocidad correspondientes a los intervalos de 0.5 segundos con aquellos que correspondían a intervalos de 1 segundo, María e Isaac identificaron una *relación de orden* [*ArgVar*] (particularmente, Isaac se adelantó y empleó la hoja de cálculo que se proveía más adelante para calcular el promedio de los valores de velocidad en intervalos de medio segundo [*Gen*]), la cual se esperaba obtener con el fin de explorar en lo sucesivo el significado de la velocidad promedio a través de sus implicaciones gráficas y variacionales.

Además de ello, María identificó que los valores de velocidad promedio correspondientes a los intervalos de 1 segundo equivalían al *doble* de los valores correspondientes a intervalos de 0.5 segundos. Similarmente, Alan halló esta relación entre los valores de velocidad promedio [*ArgVar*]. Esta relación se podría profundizar en futuras intervenciones para abordar el concepto de velocidad media como unidad de medida relativa, es decir, partir del factor que asocia a las magnitudes de las velocidades promedio correspondientes a intervalos de medio segundo con las de un segundo para aludir a que al hacerse relativas delinean una misma *inclinación*.

Es decir, además de que se trata del mismo comportamiento creciente lineal, ahora tienen el mismo factor de crecimiento: con el doble de tiempo, doble velocidad media. E igualmente se podría emplear para partir de la *geometrización* y luego ir a su *numerización*. Como se mencionó, con el acercamiento propuesto, lo relativo en la *unidad de medida* se buscó introducir a partir de la noción de *promedio* para que, con base en ella, se configurara una representación visual que asociara los valores de velocidad promedio con la línea recta que sugieren.

En cuanto a Flor, ella también propuso una relación cuantitativa pero luego reconoció que no se satisfacía para valores mayores [*ArgVar*].

Actividad IV

Factores físicos asociados a la caída

María, Alan, Flor e Isaac identificaron que los valores de velocidad media en intervalos de un segundo correspondían (*aproximadamente* para Flor [*Gen*]) al promedio de las velocidades medias en sus mitades de tiempo respectivas. A partir de ello, María comenzó a asociar el valor de la velocidad media con la longitud del intervalo considerado [*ArgVar*|*NocFis*], mientras que Flor infirió que la asociación se debía a que en ambos casos la *aceleración* era la misma [*ArgVar*|*NocFis*], en este sentido, Flor asumió la existencia de un parámetro físico que asociaba ambas magnitudes (lo cual deviene de la relatividad en la unidad de medida).

Isaac profundizó en el hecho de que los valores promedio encontrados correspondían a estimaciones, pero que, no obstante, ellos no correspondían al valor de velocidad *verdadero*, asumido como el valor de la velocidad instantánea (continuo) [*NocFis*|*Val*].

Actividad V

Los intervalos de tiempo y las velocidades promedio

Al apreciar las velocidades promedio analizadas sobre la simulación del fenómeno, el alumnado corroboró la relación entre los valores correspondientes a intervalos de un segundo y medio segundo [*NumGraf*]. Particularmente, Isaac señaló que si bien considerar cualquiera de los intervalos lleva a aproximaciones correctas, con intervalos más pequeños se tendría una idea más clara de la velocidad que lleva el objeto en cada punto de su caída [*ArgVar*|*NocFis*]. En este sentido, Isaac comenzó a inferir la necesidad de una estimación puntual de la velocidad.

Actividad VI

La representación gráfica de las velocidades promedio

A partir de la representación gráfica de las velocidades promedio analizadas, María y Flor centraron su atención en el comportamiento de las velocidades, María aludiendo al factor (doble) que identificó previamente entre ambas y Flor a que la velocidad aumenta conforme pasa el tiempo [*NumGraf*|*ArgVar*].

Por su lado, Alan e Isaac se enfocaron en que a partir de la representación se apreciaba que el valor de unas correspondía al promedio de las otras [*NumGraf*|*ArgVar*].

En este sentido, la apreciación de María y Flor tendió más hacia lo *cualitativo*, mientras que la de Alan e Isaac tendió hacia lo cuantitativo [*Gen*].

En el caso de la otra mujer participante, su observación tendió, como en el caso de Alan e Isaac, a lo *cuantitativo*.

La exploración dinámica en el paso de lo discreto a lo continuo

Al explorar el parámetro correspondiente al intervalo de tiempo en la representación gráfica de la velocidad promedio, el alumnado pudo identificar el paso del caso discreto al continuo [*EstDin*]. Particularmente, María e Isaac reconocieron que la representación tendía a volverse *puntos* (y no *segmentos*, según María) [*NumGraf*].

Además, tanto María como Flor (similarmente la otra mujer participante, Martha) aludieron a que se obtenía una *línea recta*, mientras que Alan señaló "*linealmente*" e Isaac no hizo alusión a la forma lineal [*NumGraf*].

Actividad VII

Contraste de la situación real y la representación gráfica

Al cuestionar sobre las observaciones en la caída del agua con relación a la consideración de intervalos de tiempo más pequeños en la representación gráfica (exploración de parámetros) [*EstDin*], María e Isaac señalaron que de un *video* se pasaba a una *imagen* (María) donde se volvía *imposible* apreciar el cambio (Isaac) [*ArgVar*]. En este sentido, sus argumentos aluden al arribo a un momento estático como parte de un continuo.

Alan y Flor se centraron en que se pasaba de la *velocidad promedio* a la *velocidad instantánea* [*NocFis*].

Momento 2

Actividad I

El orden en la resolución y el género

Tanto Alan como Isaac revisaron lo que se vería más adelante en la Actividad [*Gen*].

La aceleración constante independientemente del tiempo

Tras calcular la aceleración correspondiente a intervalos de medio segundo y un segundo, María señaló que el valor obtenido de 9.81 correspondía a la *gravedad* [*NocFis*]. Mientras que Flor e Isaac señalaron que eso representaba que el valor de aceleración se mantenía *constante* independientemente del intervalo de tiempo considerado (María), es decir, que el cambio en la velocidad con respecto al tiempo era el mismo (Isaac) [*ArgVar*|*NocFis*]. Alan igualmente identificó que los valores de aceleración se mantenían iguales.

Es decir, al menos Alan, Flor e Isaac reconocieron la independencia de la aceleración respecto al tiempo.

En el caso de María, al cuestionar sobre qué ocurriría en intervalos de tiempo más cortos, señaló que se obtendrían múltiplos de la *gravedad*, por tanto se infiere que ella no reconoció la independencia de la aceleración respecto al tiempo.

En cuanto a Alan, Flor e Isaac, ellos señalaron que en intervalos de tiempo más cortos se esperaría hallar el mismo valor de aceleración. Particularmente Isaac añadió que habría cambios de velocidad más pequeños, pero divididos entre intervalos también pequeños, por lo que se esperaría la misma constante [*ArgVar*].

Actividad II

La aceleración promedio y la aceleración instantánea

Al explorar dinámicamente con la representación gráfica de la aceleración promedio considerando diferentes intervalos de tiempo [*EstDin*], el alumnado concluyó que la aceleración promedio y la aceleración instantánea tenían el mismo valor. Adicionalmente, Isaac señaló que esta igualdad era lo que llevaba a pensar que este fenómeno tiene una aceleración constante [*ArgVar*|*NocFis*]. Es decir, en este punto Isaac articuló la representación gráfica con las condiciones del fenómeno físico.

Actividad III

Confrontación de la gráfica de la velocidad con la gráfica de la aceleración

El análisis simultáneo de las gráficas de velocidad y aceleración le permitió a María reconocer que la *gravedad* se mantenía constante independientemente del intervalo de tiempo considerado [*NumGraf*]. En el caso de Flor, la exploración de estas representaciones gráficas le permitió concluir que mientras la velocidad es variable, la aceleración permanece constante [*NumGraf*]. Isaac corroboró la independencia de la aceleración respecto al tiempo.

Momento 3

Actividad I

Confrontación de la gráfica de la posición con la gráfica de la velocidad

Al explorar el parámetro tiempo en las representaciones gráficas vinculadas de posición, velocidad y aceleración [*EstDin*], María, Alan e Isaac identificaron que, conforme la *velocidad* tendía a valores menores, la forma de la gráfica de la posición tendía a hacerse *curva*, mientras que en valores mayores tendría a una *recta* [*NumGraf*]. Particularmente Isaac asoció este comportamiento con el hecho de que la velocidad crece rápidamente [*ArgVar* | *NocFis*].

Alan tuvo inicialmente cierta dificultad para interpretar el sentido de *forma* en el planteamiento de la pregunta y pidió asesoría a la investigadora. En general, se encontraron dificultades por parte del alumnado para abordar este planteamiento, pues la mayoría de participantes señaló que en ambos casos había una parábola [*NumGraf*]. Este fue el caso de Flor.

Actividad II

El arrastre y la ubicación de las gráficas de aceleración y velocidad

Para ubicar la gráfica de la aceleración con respecto a los ejes coordenados, María, Alan, Flor e Isaac tomaron como referencia el valor numérico que ya se había determinado previamente [*CIArr* | *NocFis*].

En cuanto a la gráfica de la velocidad, Alan, Flor e Isaac indicaron que su referente para ubicar la gráfica fue la *velocidad inicial* del fenómeno [*CIArr* | *NocFis*].

María señaló que su referente al ubicar la gráfica de la velocidad fue el *tiempo inicial* igual a cero. En este caso, pese a que el arrastre se restringió a solo desplazamientos verticales (y por tanto el tiempo inicial de la gráfica siempre correspondería a cero), María no reconoció explícitamente que había considerado también como cero el valor de la velocidad inicial [*CIArr* | *NocFis*]. Esto es similar a una de las dificultades por parte del alumnado que identificó Arrieta (2003) en su estudio, en cuanto hubo quienes confundían el origen físico del movimiento con el origen de la gráfica distancia–tiempo. En el caso de María la confusión parece radicar en no distinguir entre el inicio del tiempo y el origen de la gráfica.

Actividad III

El arrastre y la ubicación de la gráfica de la posición

María, Alan, Flor e Isaac ubicaron la gráfica de la posición de tal manera que al tiempo cero esta pasara también por la ordenada cero. Alan e Isaac mencionaron que tomaron como referencia el que la posición inicial de la gota correspondía a cero, mientras que María señaló que eligió esa ubicación pues las mediciones se empezaron a tomar en el tiempo cero [*CIArr* | *NocFis*].

Flor indicó que su referente fue el tiempo igual a cero [*CIArr* | *NocFis*]. Como en el caso de las otras gráficas, el arrastre en esta también se restringió a solo desplazamientos verticales por lo que el tiempo de inicio siempre correspondería a cero. Es decir, pese a que en el arrastre tuvo que haber considerado que la posición inicial también era cero (o alternativamente que desde ese momento se comenzaron a tomar las medidas), no lo reconoció de manera explícita.

Momento 4

Actividad I

La ubicación de la gráfica de la posición sin restricciones en el arrastre

Al ubicar el lugar correspondiente a la gráfica de la posición contando con la información de la altura de la gota para cierto momento, el alumnado realizó diversas exploraciones. La mayoría tendió a ubicar la gráfica con vértice en origen; no obstante, intentaron también otras ubicaciones donde la gráfica pasara por el punto correspondiente [*CIArr*]. Flor propuso temporalmente (pues mantuvo seleccionada la gráfica) que el vértice se encontrara en el punto mostrado; sin embargo, finalmente lo regresó al origen.

En este sentido, le arrastre libre permitió al alumnado reconocer la necesidad de otro valor de referencia además del punto mostrado, pues sus exploraciones así lo evidencian [*CIArr*]; sin embargo, no pudieron identificar a qué valor correspondería dicho referente, pese a la exploración previa de la forma de la gráfica de la posición con respecto a los valores de velocidad que el objeto en caída libre iba adquiriendo y a pesar de haber identificado ciertos referentes como necesarios para ubicar las gráficas de posición, velocidad y aceleración.

Factores físicos asociados a la caída

María tomó como referente que la gráfica debía tener su vértice en el origen pues a partir de ahí se había comenzado a medir las posiciones. Sin embargo, no reconoció explícitamente que además consideró la *velocidad inicial* de la gota, pues su elección de colocar el vértice en el origen evidencia esta aseveración [*CIArr* | *NocFis*].

Alan señaló que esa gráfica de posición no sería posible ya que implicaría que en algún momento la gota *tendría que subir* (pues se presentaba el brazo izquierdo de la parábola) [*NumGraf*]. A ello añadió que una opción sería colocarla en el origen (probablemente su vértice); sin embargo no aclaró por qué esa sería su elección [*CIArr*|*NocFis*]. En este sentido, se evidenció una articulación entre el fenómeno físico y la representación gráfica, aunque no se reconoció explícitamente el referente de la velocidad inicial implícito en la ubicación de la gráfica con vértice en el origen.

En el caso de Flor igualmente hubo una articulación entre el fenómeno físico y la representación gráfica, pues señaló que la gráfica debía ubicarse con su vértice en el origen pues “la gota se encuentra en caída libre en la posición t=0”, lo cual se interpreta como que Flor identificó que en el tiempo cero la gota comienza a caer (por ende, tiempo inicial cero y posición inicial cero) [*CIArr*|*NocFis*]. En este sentido, tampoco reconoció explícitamente que tuvo haber que considerado también una velocidad inicial cero, pues la gráfica podría pasar por el origen no necesariamente con el vértice.

Respecto a Isaac, si bien inicialmente también propuso como ubicación de la gráfica el que estuviera colocada con su vértice en el origen, tras explorar la simulación de la siguiente Actividad [*Gen*] propuso que la gráfica se ubicara con vértice en el punto mostrado. En particular, la exploración de la simulación y su contraste con la gráfica le permitió identificar que era necesario considerar que la gota *partía de reposo*, pues el dato proporcionado no era suficiente para obtener *más información* de la gota [*CIArr*|*NocFis*]. Así, si bien no menciona explícitamente la *velocidad inicial* como el otro dato necesario, sí reconoce la necesidad de conocer el comportamiento de la gota además de una de sus posiciones para determinar la gráfica correspondiente.

La simulación y el ajuste en la estructura

Al confrontar la *estimación* realizada en el punto anterior, respecto a la ubicación de la gráfica de la posición, con la simulación del fenómeno el alumnado actuó de diferentes maneras. Particularmente en este punto se evidenció la estrategia dinámica de ajuste en la estructura, en cuanto se exploraron diversas ubicaciones en paralelo con la simulación de la caída de la gota [*EstDin*].

Tanto María como Isaac intentaron un par de ubicaciones antes de proponer que la gráfica se encontrara con su vértice en el punto proporcionado. Flor solo vio una vez la simulación y ello le bastó para reconocer la gráfica correspondiente.

En el caso de Alan, él intentó diferentes posiciones pero no llegó a ubicar la gráfica en su lugar correspondiente.

El tiempo como referente absoluto

Como resultado de la confrontación de la simulación con la gráfica y la identificación del lugar correspondiente a la caída de la gota, el alumnado reconoció la necesidad de más información además de la posición de la gota; sin embargo, no reconoció que se tratara de la *velocidad inicial* explícitamente. Equivalentemente, reconocieron la necesidad de conocer la posición inicial de la gota o el tiempo transcurrido desde el inicio de la caída [*NocFis*]. En particular, a partir de estos valores es posible determinar la velocidad inicial del objeto para el punto dado, pero la intención de que se identificara como dato extra este valor a partir de la forma de la gráfica de la posición con relación a la velocidad del objeto no se logró. De ahí que este fuera uno de los puntos principales a discutir durante la socialización de resultados.

7.2.2. Socialización

Para el análisis de la socialización se consideraron los fragmentos seleccionados a partir de las grabaciones (presentados en la subsección *7.1.2*), las notas de la investigadora (inv.[a]) y del observador externo (O.E.) (con base en el cuaderno de notas presentado en la subsección *6.2.2*), así como la información recabada a través de la encuesta sociocultural (las respuestas del alumnado se muestran en la subsección *7.1.3*).

En principio, a partir de lo que compartieron los cuatro casos elegidos (María, Alan, Flor e Isaac) durante la charla informal y la encuesta se configuraron los siguientes perfiles:

María

Creció con su madre, su padre, una hermana y un hermano. Tanto su madre como su padre tienen estudios superiores, ella de licenciatura y él de maestría. Como se mencionó previamente, este factor es relevante pues la literatura sugiere que la escolaridad de los padres es un factor de gran influencia en la elección, por parte de las hijas, de carreras relacionadas con las matemáticas. Respecto a sus ocupaciones, su padre es jubilado y su madre se dedica al hogar. Además, por los cinco años que le lleva su hermana inmediatamente mayor podría considerarse la posibilidad de primogenitura de segundo orden.

Entre sus pasatiempos actuales y de la infancia se encuentran algunas actividades estereotípicamente masculinas como el jugar videojuegos, practicar actividades al aire libre y jugar con carritos, canicas, trompo o yoyo. Aunado a ello, reportó que durante su infancia uno de sus pasatiempos era estudiar algo extraescolar.

Por otro lado, manifestó sentir un agrado por las matemáticas y las ciencias desde niveles básicos y que parte de su motivación para elegir una carrera fisicomatemática provino del apoyo de algún familiar; de hecho, mencionó que al momento de tomar la decisión contó con el apoyo total de su familia. Asimismo, el haber tenido una profesora matemática en la secundaria se convirtió en un importante aliciente al momento de su elección. Tan es así que desea seguir la especialidad en matemáticas puras durante su carrera y continuar sus estudios tras concluirla.

Respecto al trabajo en equipo, se suele identificar como líder, mientras que en la resolución de tareas señaló que su apoyo principal es el profesorado y sus amigos.

En conjunto, en términos de García de León (2002), estos factores dan cuenta de un fuerte capital afectivo en María.

Alan

Creció con su madre y la pareja de ella (tanto ella como él alcanzaron el nivel de bachillerato), así como con sus abuelos maternos y un hermano menor. Al no tener más hermanos, Alan es primogénito de primer orden.

Entre sus pasatiempos actuales y de la infancia se encuentran el practicar artes y actividades al aire libre, jugar videojuegos, juegos de mesa, juegos de construcción, practicar deporte y estudiar algo extraescolar. Además, señaló que en su infancia jugaba con su hermano y su padre a las carreras, las luchas, videojuegos, futbol y a volar papalotes.

En cuanto a sus intereses, desde el nivel básico ha tenido una predilección por las matemáticas, aunque particularmente relató la influencia que tuvo un taller de sistemas digitales que cursó en el bachillerato para declinar el deseo de su padre, quien anhelaba que él estudiara para abogado o historiador. En este sentido, relató que inicialmente quería seguir una carrera mecatrónica y que su padre lo aprobó, pero que, cuando decidió de último momento estudiar matemáticas, su padre le dijo que estaba mal porque los ingenieros eran los que ganaban bien, mas que, al final, ese era su problema. Es decir, no contó con su apoyo al momento de elegir la carrera.

Durante la charla informal, Alan mencionó una de las razones por las cuales desistió en seguir una carrera mecatrónica, aludiendo a que las ingenierías eran "de niñas" –pues eran más fáciles– y él quería algo más "abstracto". Este comentario refleja los fuertes estereotipos incorporados al lenguaje que asocian lo femenino con lo trivial, en este caso para referirse despectivamente a una ingeniería.

Respecto al trabajo en equipo, suele tratar de integrarse al resto, mientras que en la resolución de tareas señaló que su apoyo principal son sus compañeros y el profesorado.

Finalmente, tras concluir la carrera le gustaría seguir estudiando.

Flor

Creció con su madre y su padre (ella con una carrera técnica, dedicada al hogar y él con bachillerato, empleado en una empresa), así como con sus tías, tíos, primas, primos, abuela (dedicada al hogar) y abuelo (campesino). Además, al no tener hermanas o hermanos, es primogénita de primer orden.

Entre sus pasatiempos actuales y de la infancia se encuentran algunas actividades estereotípicamente masculinas como el practicar deportes, jugar videojuegos y juegos de construcción. Aunado a ello, reportó que durante su infancia uno de sus pasatiempos era practicar artes y estudiar algo extraescolar, y que con su madre jugaba a las muñecas, juegos de mesa, juegos didácticos y videojuegos.

En su elección de carrera, una motivación importante provino de un profesor de física que tuvo en la secundaria, pues señala que ella quería ser como él y que él le recomendó la universidad con la carrera fisicomatemática en la que se inscribió. En este sentido, se confirma lo sugerido por Master y Meltzoff (2016) en cuanto proponen que un modelo de rol para las alumnas puede bien ser un hombre o una mujer. De hecho, tomando en cuenta lo que Flor indicó en la encuesta acerca de sus materias predilectas en distintos niveles educativos, se puede identificar el papel significativo del profesor durante la secundaria, pues si bien ella señaló que en la primaria no sentía preferencia por las matemáticas, a partir de la secundaria las materias de física y matemáticas se incorporaron a su lista de predilección.

Aun así, desde niveles básicos se puede apreciar una inclinación de Flor hacia el área STEM (pues indicó sentir predilección por las asignaturas de Ciencias y Computación). Dicha preferencia se mantuvo durante el bachillerato; particularmente, en una asignatura que se suele asociar culturalmente con lo masculino: Taller Automotriz.

Respecto al trabajo en equipo, se suele identificar como líder, a la vez que se siente mejor trabajando individualmente. Además, en cuanto a la resolución de tareas, señala como apoyo principal a sus padres, su profesor de física de la secundaria y sus amigos.

Finalmente, tras concluir la carrera le gustaría trabajar en una empresa, seguir estudiando y tener una familia.

Como en el caso de María, en Flor se identifica un fuerte capital afectivo.

Isaac

Creció con su madre y su hermano mayor. Su madre alcanzó el nivel de licenciatura y trabaja como empleada en una empresa, mientras que su hermano mayor se dedica a la arqueología. Por los años que le lleva su hermano, Isaac no comparte la primogenitura con la mayoría de quienes participaron.

Entre sus pasatiempos actuales y de la infancia se encuentran el jugar videojuegos, leer, practicar actividades en equipos al aire libre, tocar instrumentos musicales y estudiar algo extraescolar. Asimismo, señaló que durante su infancia jugaba con su hermano videojuegos y juegos de carta; con su madre: juegos de mesa, trivias y videojuegos; y con su padre: futbol.

Su motivación para estudiar una carrera fisicomatemática surgió de ver programas de televisión y de su gusto por la astronomía. En ese sentido, señaló que desde niveles básicos se sintió atraído hacia las matemáticas y la física y, en general, hacia el área STEM; sin embargo, aclaró que en la preparatoria no le gustó la manera en la cual se abordaba la física, pues se recurría solamente a fórmulas y a datos para aplicar dichas fórmulas. En la universidad señaló que sí le agrada la manera en la cual se ve la física y desea seguir esa especialidad durante su carrera.

Respecto al trabajo en equipo, señaló que suele dar indicaciones pero que no se considera líder, mientras que, en cuanto a la resolución de tareas, indicó que su apoyo principal ha sido el profesorado, sus padres y sus compañeros.

Finalmente, a lo que aspira al concluir la carrera es a trabajar en una empresa.

Ahora bien, con base en la información que proveyó en general el alumnado durante la charla informal y la encuesta, se determinaron los siguientes aspectos socioculturales sobre su comunidad:

- Personales:
    - La totalidad de quienes participaron en la fase empírica crecieron con sus madres. Además, todas las mujeres participantes crecieron también con sus padres.
    - La mayoría de participantes (7 a 8 de 11) comparte como característica la *primogenitura*: dos mujeres en primer orden, una cercana a serlo en segundo orden, cuatro hombres en primer orden y uno en segundo orden.
    - En general, la mayor parte del alumnado participante tiene un padre o una madre con estudios técnicos o superiores. Además, en promedio, los padres (hombres) de las mujeres tienen un nivel de escolaridad mayor que el de los padres de los hombres.
    - Las madres de dos de las tres participantes mujeres se dedican al hogar, mientras que la mayor parte de las madres de los participantes hombres trabajan en una empresa. En cuanto al padre, tanto en el caso de hombres como en el de mujeres, la mayoría se dedica a trabajar en una empresa o en un negocio propio.
    - Los factores económicos no fueron señalados como motivación al momento de elegir la carrera fisicomatemática. De hecho, en algunos comentarios respecto al apoyo de los padres surgió el aspecto económico como un factor negativo al querer seguir una carrera científica ("¿y de qué vas a comer?").
    - En dos de las tres mujeres participantes, la influencia de una profesora y un profesor, respectivamente, durante su educación básica fue la principal fuente de motivación al momento de elegir la carrera. Esto concuerda con lo reportado por Kim (2018) respecto al significativo papel que tiene el profesorado en el entorno social de las mujeres durante su juventud para que puedan desarrollar una

identidad en el área STEM (p. 18). En el caso de los hombres, la influencia del profesorado no fue significativa en su elección, pues sus respuestas aludieron más al interés en la materia (Alan, Isaac, Javier, Román, Miguel), a su habilidad (Fausto) o al deseo de competencia (Ramón).

- Si bien parece ser que la mayor parte del alumnado participante reconoce que es inapropiado el uso de la expresión "es de niñas" para referirse a algo que es fácil (pues así sugieren las expresiones de las y los estudiantes luego de que Alan empleara esta frase para referirse despectivamente a la ingeniería), María negó que se tratara de un insulto, es decir, ella ha naturalizado el uso de dicha expresión para el contexto referido.
- Ramón señala que las matemáticas se suelen concebir como algo que da miedo.
- Los grupos en su universidad suelen estar conformados mayoritariamente por hombres.
- La mayoría de quienes participaron compartían grupo en la universidad o eran amigas y amigos (al menos "por transitividad"). Esto, en concordancia con lo apreciado por el observador externo, contribuyó a generar un ambiente de confianza durante la discusión, al igual que el intercambio de experiencias que hubo durante la charla informal entre la investigadora, el observador y quienes participaron.

- Escolares:
  - El alumnado en general indicó una mayor predilección por las asignaturas de matemáticas que por las de física, pese a que más de la mitad manifestó querer seguir la especialidad de física. Esto responde a que, quienes señalaron una preferencia por la física, indicaron también un agrado por las matemáticas; mientras que no todas las personas que señalaron preferencia por las matemáticas indicaron un agrado por la física.
  - En cuanto al trabajo en equipo, dos de las tres mujeres señalaron que se identifican como líderes, mientras que más de la mitad de los hombres indicaron que buscan integrarse a todo el equipo y ninguno se identificó como líder.
  - El principal apoyo en la resolución de tareas en el caso de los hombres es el profesorado; mientras que, en el caso de las mujeres, lo es el alumnado mismo.

En conjunto, los perfiles de los cuatro casos elegidos y los aspectos socioculturales identificados sobre su comunidad proporcionaron un panorama desde el cual se observaron las interacciones sociales analizadas.

Como en la subsección anterior, el análisis se presenta por *temas*, siguiendo principalmente el orden en que éstos fueron emergiendo durante la socialización de resultados. Asimismo, se retoma la notación en corchetes: [*Var*], [*EstDin*], [*CIArr*], [*ArgVar*], [*NocFis*], [*NumGraf*], [*Gen*], [*Val*] para hacer referencia a aspectos que atienden a alguna o algunas de las preguntas de investigación planteadas.

La participación de las mujeres[39]

Al iniciar la fase de socialización mediante una pregunta abierta por parte de la investigadora, Alan sugirió a Flor que hablara y ella, a su vez, sugirió a Martha que expresara su opinión [*Gen*].

La iniciativa de Alan y el no querer participar por parte de Flor coincide con las observaciones que se hicieron previamente sobre la interacción usual en el aula en una comunidad de estudiantes de esa universidad (Carranza-Rogerio, 2016), pues se encontró que las mujeres tendían a limitar su participación durante las clases, o bien, a hacerlo a través de un compañero hombre.

En lo sucesivo se identificó que los hombres siempre tomaron la iniciativa para responder a las preguntas abiertas que planteaba la investigadora. Cuando las mujeres participaban, generalmente lo hacían después de ellos, o bien, de manera simultánea cuando varios y varias hablaban a la vez.

Impresiones sobre la interacción dinámica

Martha expresó que se le hizo muy interesante el analizar las partes del reloj de agua. Particularmente, durante la charla informal, ella señaló que había trabajado previamente con el software GeoGebra, pero solamente para gráficas, con el fin de hacer *comprobaciones* [*EstDin*].

La relación entre la física y las matemáticas

La física y las matemáticas se conciben como complementarias (Román) [*NocFis*], aunque dicha complementariedad no se refleja en el tratamiento del currículo escolar (Ramón).

Particularmente, Ramón señaló que, si bien lo que vio en Física I acerca de la velocidad instantánea se asocia con los intervalos infinitamente pequeños vistos en Cálculo, él no les veía una relación directa y que, con el diseño, le "quedó mucho más claro [...] cómo se llega al concepto de velocidad instantánea y cómo se puede aplicar" [*NocFis*|*ArgVar*]. Este era justamente uno de los objetivos del diseño, el lograr una articulación entre las nociones físicas

[39] En ciertos casos, los títulos de los temas no coinciden con los de la sección *7.1.2*.

y los argumentos variacionales asociados al cambio y la variación en la descripción del movimiento.

Los factores físicos asociados a la caída

Esta fue la primera de las respuestas específicas del diseño que se abordaron durante la socialización. Particularmente, Alan señaló que la expresión “factores físicos” se puede entender como “factores ambientales”, lo cual podría explicar el por qué –como se identificó en el análisis de las resoluciones del diseño (subsección *7.2.1*) – la diferencia en las caídas se atribuyó principalmente a las características del medio y no a factores relacionados con la gravedad [*NocFis*].

La presentación de las escenas

De acuerdo con María y Alan, el mostrar la gota en la parte superior de la escena sugería que esta partía de reposo y, por tanto, el cambio en las caídas habría de deberse a una condición física diferente [*NocFis*].

Esto da cuenta, en primer lugar, del sentido *concreto* con el cual es asimilada la simulación (en términos de Sarama y Clements, 2016); en segundo lugar, dado el siguiente comentario de Alan acerca del applet con la unión de las escenas, se evidencia el rol de las representaciones dinámicas en la focalización de la atención hacia el comportamiento del cambio en el movimiento [*EstDin* | *NocFis*], pues cada escena mostraba dinámicamente un comportamiento diferente.

Sobre la validez de las respuestas

La crítica de Alan al primer Momento (respecto a la presentación de las escenas y al uso de la expresión “factores físicos”) sugiere la escasa flexibilidad de las evaluaciones a las cuales está acostumbrado [*Val*]. Es decir, confrontó el hecho de querer encontrar una “única respuesta”.

La participación y el género en la selección de respuestas

Como se mencionó anteriormente, similar a lo que se observó en un estudio previo con mujeres de la misma comunidad, las mujeres participantes en este estudio limitaban inicialmente su participación ante las preguntas abiertas a aquellos momentos en los cuales todo el alumnado hablara, o bien, luego de que otro alumno se expresara.

Previendo que ello podría suceder durante la socialización de resultados, se tomó la decisión de llevar a cabo dos acciones en la selección de las repuestas: (1) incluir el nombre de cada participante en las respuestas seleccionadas e (2) incorporar en todas las discusiones la respuesta de al menos una mujer.

La primera de estas acciones se basó en lo reportado por Huffaker y Calvert (2003, como se citó en Hegedus y Moreno–Armella, 2013), acerca de que el enlace del trabajo privado (individual) de una manera matemáticamente significativa a través de redes, mostrando los aportes de todo el trabajo de la clase (sus integrantes), promueve potencialmente la habilidad metacognitiva del alumnado para reflexionar respecto a su propio trabajo con relación al de las y los demás (p. 51). Así, se seleccionaron respuestas variadas a partir de los puntos principales de conflicto identificados durante la prueba piloto.

Asimismo, en cuanto al género, dicha acción tuvo como finalidad el promover que las mujeres participaran, ya que la dinámica consistía en que, quienes vieran su repuesta proyectada en la pantalla ante el grupo, explicaran a qué se referían con ella y discutieran entre sí.

En la misma dirección se encuentra la razón de la segunda acción, en cuanto diversas investigaciones sugieren al *sentido de pertenencia* como uno de los elementos clave para la participación y permanencia de las mujeres en las carreras STEM (Dasgupta y Stout, 2014; Master y Meltzoff, 2016). En este sentido, se buscó activamente que las mujeres se integraran a la discusión dada la relevancia de ésta en la construcción social de conocimiento.

Como se mencionó líneas arriba, la discusión de las respuestas comenzó con el tema de los factores físicos asociados a la caída de la gota, momento en el cual Alan *intervino* (mientras la investigadora introducía la pregunta) y manifestó no haber comprendido inicialmente el término “factores físicos”. Esta actitud asertiva se observó predominantemente en los hombres.

De hecho, el observador externo también identificó esto, pues observó que todas y todos participaron, pero que los hombres lo hacían de una manera más *activa*: pasando al pizarrón, haciendo mayores ademanes al explicar y tomando la palabra con mayor frecuencia [*Gen*].

Ahora bien, la acción por sí sola de incorporar las respuestas de las mujeres a la discusión no hizo que ellas participaran de inmediato, como lo evidencia el episodio de Miguel y Flor, cuyas respuestas fueron las primeras en ser proyectadas:

> Él empezó a explicar su respuesta, particularmente, el por qué consideró el factor de la *viscosidad del aire*.
>
> Flor lo escuchó.
>
> Luego, Miguel comenzó a analizar (a petición de la investigadora) la respuesta de Flor –quien había señalado como factor la *densidad del aire*– y señaló que él consideraba que dicho factor probablemente no afectaba.
>
> Ella siguió sin intervenir.
>
> Entonces, otro de sus compañeros, Raúl, abogó por Flor ante Miguel explicando que tal vez ella solo había anotado mal la idea y que no se refería a la *densidad*, sino tal vez a la *resistencia* o a la *fricción*
>
> Flor asintió levemente pero siguió sin manifestarse.
>
> La investigadora entonces le preguntó directamente a Flor su opinión y ella respondió que sí, que tal vez eso (lo que sugirió Raúl) era lo que había sucedido, pero que ella "colapsó" en ese instante.

Lo anterior concuerda con la frecuentemente reportada *confianza baja* por parte de las mujeres al momento de participar, así como de los también frecuentemente reportados *altos niveles de ansiedad* por parte de las mujeres durante las pruebas (por el sentimiento de *colapso*) [*Gen*].

En cambio, Román –quién también había señalado como un posible factor de diferencia a la densidad– explicó que había empleado ese término pues el aire y la gota tienen diferentes densidades y ello podría influir en que uno tendiera a subir y otro a bajar [*NocFis*].

En el caso de Isaac, él aludió a que se imaginó inicialmente que todas eran gotas de la misma lluvia, en ese sentido, se evidencia el papel de la simulación como soporte concreto [*EstDin*].

Sobre la validez de las respuestas

El argumento que usó Raúl para proporcionar una posible explicación de la respuesta de Flor alude a un reconocimiento de la cualidad contextual de la racionalidad, pues más allá de no haber usado los términos adecuados, aludió a las razones por las cuales ella los pudo haber empleado [*Val*].

Las divisiones cada vez más pequeñas

Para la discusión sobre las divisiones cada vez más pequeñas de la caída, una de las respuestas seleccionadas fue la de María y, con el fin de que ella tomara un rol más activo en la discusión [*Gen*], la investigadora le cedió la palabra para que comenzara con su explicación.

La explicación de María se basó en el comportamiento observado de la gota, aludiendo a que eventualmente se obtendrían tres imágenes "casi no moviéndose". Esto evidencia una articulación entre el fenómeno físico y la concepción continua del cambio [*ArgVar*|*NocFis*].

Sobre la validez de las respuestas

Isaac también identificó que llegaría un momento en que el cambio sería difícil de apreciar a simple vista, entonces la investigadora le pidió explicar cómo utilizó lo que sabía de física y matemáticas para saber qué ocurre en esos casos que no se pueden ver. La respuesta de Isaac se centró en el uso de las ecuaciones (fórmulas) que ya se conocen y "que *rigen* el movimiento de los cuerpos en caída libre".

Es decir, en lugar de basarse en el comportamiento que ya había identificado, se basó en lo que escolarmente se tiene concebido (leyes y fórmulas), lo cual podría ser nuevamente el resultado de una costumbre didáctica que tiende a privilegiar ciertas argumentaciones, como las *conceptuales*, por sobre otras [*Val*].

La concepción del instante

La discusión de Alan y Román refleja la concepción del movimiento con una evolución continua de estados, donde, para una diferencia muy pequeña, se seguiría teniendo un cambio del cambio (Alan) o una aceleración (Román) constante [*ArgVar*|*NocFis*]. Esto da cuenta de una articulación entre las nociones físicas y el sentido variacional del cambio de posición.

Lo mismo refleja el comentario de Alan acerca de que el *instante* se puede pensar como una fotografía en la cual se detiene el tiempo. Más aún, se reconoce que contar solo con la fotografía de ese instante no bastaría para identificar el comportamiento que tiene el movimiento, pues se requeriría de otros puntos (Alan) [*ArgVar*|*NocFis*].

Por otro lado, Ramón retomó la noción de *promedio* para explicar que considerando intervalos de tiempo cada vez menores se conseguiría una mejor aproximación (mediante velocidades promedio) al valor "concreto" de velocidad (*instantánea*) [*ArgVar*|*NocFis*]. Esto evidencia una articulación entre la noción física de *velocidad* y el sentido variacional del cambio en la posición.

Además, la alusión al valor "concreto" por parte de Ramón da cuenta de la concepción del movimiento como una evolución continua de estados, pues indica que dicho valor (velocidad instantánea) correspondería a un valor más general al cual se está aproximando (con la velocidad promedio) [*ArgVar* | *NocFis*]. Esto concuerda con lo que indicó Isaac en su resolución.

Las implicaciones de la discusión

Como anteriormente se mencionó, la discusión del alumnado permite la reflexión respecto al trabajo individual con relación al de las y los demás.

En el caso de Ramón, él explicó su respuesta inicialmente usando solo el término de velocidad y no sus modalidades *promedio* e *instantánea*, mas cuando Martha expresó no haber entendido lo que explicó, incorporó a su explicación la noción de *límite* (cuando el intervalo de tiempo tiende a cero) y de *velocidad instantánea*, con lo cual Martha entendió que se refería a la "velocidad en un solo punto" [*NocFis*].

La imposibilidad de mostrar las imágenes

En este punto, nuevamente, la investigadora comenzó con una pregunta abierta y un hombre (Raúl) tomó la palabra, luego Javier y después María [*Gen*].

Eventualmente, Miguel explicó su respuesta y señaló, respecto a la posibilidad de formar la primera imagen, que "tal vez podrían darle cierta dirección en diagonal y, por la misma razón que se va acelerando, pues al principio el movimiento se ve como que una curva más pronunciada y a medida que se acelera la partícula pues ya se ve más... cada vez más recta" [*NocFis* | *ArgVar*]. Este argumento da cuenta del análisis variacional que se hace de la caída del agua con relación a su aceleración. Asimismo, del cómo se emplea para explicar por qué la segunda imagen tampoco podría mostrarse.

La deformación de una figura de agua durante su caída

La asociación entre la aceleración del agua y el *estiramiento vertical* de las figuras mientras caen es otra evidencia de la asociación de la aceleración (o del cambio gradual de la velocidad) con el análisis variacional de la posición de la gota durante su caída [*NocFis* | *ArgVar*].

Sobre las convenciones

Cuando Alan explicaba su respuesta ("se estira el eje Z"), Ramón le cuestionó por qué le puso "eje *z*". Esta pregunta se convirtió en una oportunidad para explorar su racionalidad, pues Alan señaló que él inicialmente iba a usar "el eje de la dimensión de la altura", pero que en realidad no sabía cómo hacerlo [*Val*]. Tal incertidumbre por parte de Alan da cuenta de la poca familiaridad que tiene con las descripciones cualitativas, o bien, del escaso tratamiento de lo cualitativo en el aula tradicional, pues quiso intuir lo que "todos tendríamos que poner".

De hecho, cuando la investigadora le preguntó por qué no eligió el eje y, Alan señaló que una de sus profesoras de la universidad decía que el eje z "era el bueno".

El comportamiento de las diferencias alineadas

La exploración del comportamiento de las diferencias alineadas permitió a Isaac reconocer [*EstDin*], con el apoyo de la hoja de cálculo, la *constancia* del cambio en las diferencias y, más aún, anticipar que la gráfica de la velocidad contra el tiempo tendría la forma de una recta [*ArgVar* | *NumGraf*].

Particularmente, se observa el recurso de describir la *cantidad* a partir de su *cualidad* pues Isaac explica que, tras haber determinado las diferencias entre las distancias, lo primero que hizo fue fijarse en cuál era la diferencia entre ellas, identificando que dicha diferencia no cambiaba [*ArgVar* | *NumGraf*].

Asimismo, estas observaciones le permitieron *predecir* que si se dejaban caer más gotas de agua con los mismos intervalos de tiempo, dicho cambio en la diferencia iba a ser igual [*ArgVar*].

Por otro lado, cuando se retomó la respuesta de Miguel, se identificó que la exploración dinámica de las diferencias alineadas fue suficiente para reconocer un comportamiento lineal. En palabras de este estudiante, "no vi la necesidad de ver números" [*EstDin* | *ArgVar* | *NumGraf*]. Asimismo, en su explicación oral se identificó una asociación entre los niveles de variación y sus representaciones gráficas, pues aludió a que, si bien al inicio identificó un comportamiento "que daba una curva", al encontrar las diferencias (y alinearlas), su comportamiento ya no era como una curva, sino que se observaba un "comportamiento lineal" solamente [*ArgVar* | *NumGraf*].

La imposibilidad de ubicar las diferencias ordenadas

Pese al problema técnico ya descrito en este applet, se generó una fructífera discusión acerca de si sí era posible o no ubicar las diferencias ordenadas.

En esta discusión Javier ocupó un papel central [véase el fragmento de la discusión en 00:24:00 – 00:38:00, presentado en la subsección *7.1.2*], particularmente, porque él creía que contar con las diferencias ya ordenadas bastaría para ubicar al conjunto de gotas, es decir, sin el referente de una condición inicial sobre la posición (la ubicación de una de las gotas) [*CIArr*].

Para discutir esta idea se recurrió al applet con las diferencias ordenadas y se verificó que funcionara correctamente el desplazamiento. Entonces, se manipuló el tiempo transcurrido y dicha modificación provocó que las diferencias ordenadas tomaran otra forma [*EstDin*]. A partir de ello, Javier identificó que la posición de las gotas ya no sería la misma.

Entonces, a petición de Javier, se exploró con un tiempo muy cercano a cero y se reconoció que en ese caso solo se tendría una gota [*EstDin*].

Tras ello, la investigadora sintetizó lo que se había explorado: que al modificar el tiempo, la curva que delineaban las diferencias se comprimía o se estiraba, y preguntó a Javier cómo reformularía su respuesta (acerca de si se podría o no hallar el lugar del conjunto de gotas) considerando esta nueva información.

Javier señaló que se necesitaban ciertas *condiciones*, que si se sabía que la primera gota había tocado el piso, las demás gotas se ubicarían considerando las diferencias (que ya se tenían ordenadas) entre los desplazamientos [*CIArr*], pero que si el tiempo era más pequeño, sería más difícil ubicar exactamente la posición de la gota (de referencia).

Es decir, hasta este punto, Javier parece reconocer, al menos implícitamente, la necesidad de una gota de referencia.

En ese momento, las intervenciones de Alan e Isaac fungieron un papel determinante, pues ellos le indicaron a Javier justamente que, en dichos casos, estaba ocupando la información de una gota (la que tocó el piso o alguna otra).

Sin embargo, Alan redirigió la discusión pues señaló no haber entendido esa sección (María lo secundó señalando que también se le hizo algo confusa; nuevamente, lo expresó hasta después de que su compañero lo dijera [*Gen*]). Ante ello, Raúl señaló que la idea era ver si se podría ubicar al conjunto sin tener ninguna posición [*EstDin*], pues él se dio cuenta de que con una de ellas bastaba para poder determinar el lugar de las gotas.

Entonces, Javier retomó la discusión y comentó que, con lo que él había señalado respecto al tiempo, necesariamente se tenía que saber la posición de una de las gotas [*CIArr*], es decir, Javier finalmente reconoció de manera explícita la necesidad de una posición para poder ubicar al conjunto.

En el caso de Alan, él señaló que “con solo mover” no entendió, es decir, el *arrastre* no le fue suficiente para reconocer la necesidad de un punto de referencia [*EstDin*|*CIArr*]; sin embargo, aclaró que solo en su momento fue que no entendió y que ya después de lo discutido entendía la respuesta y entendía el por qué no se podía. Más aún, señaló explícitamente que se dio cuenta de la necesidad de una gota para ubicar a las demás.

En cuanto a Miguel, su respuesta da cuenta del soporte concreto que puede constituir la simulación en el análisis físico del movimiento, pues él señaló que con solo las diferencias proporcionadas (ordenadas), si bien la posición de una de las gotas le era suficiente para hallar la ubicación de las demás, para *predecir* con precisión dónde se ubicaría una gota más, preferiría contar con más información, pues era posible que durante la medición de las diferencias con las que se contaba se hubiera cometido un error [*NocFis*]. Aun así, señaló que sabiendo de antemano que las diferencias siguen un comportamiento determinado, la posición de una gota le sería suficiente para hallar la ubicación de las demás [*ArgVar*].

El cambio en las diferencias

Al *predecir* el desplazamiento que tendría la gota de agua entre el segundo dos y el segundo tres, María propuso una respuesta que se basaba en un comportamiento *lineal* de la posición, pese a que previamente había reconocido que no se comportaba de esa manera. Al explicar por qué lo hizo, ella señaló que salió su “lado matemático”, tratando de encontrar un patrón [*ArgVar*]. En este punto, el observar nuevamente las diferencias alineadas, según expresa, le permitió retomar que lo que se mantenía constante era la diferencia de las diferencias [*NumGraf*].

Por otro lado, la *predicción* de Javier (cuya respuesta también se proyectó) permitió al alumnado (Javier, Fausto, Flor y Ramón) discutir el significado del *cambio en las diferencias*, pues inicialmente Javier lo había concebido como el cambio en el desplazamiento, por lo cual había predicho que el desplazamiento entre el segundo dos y el segundo tres sería de 9.81. Es decir, sabía que el cambio era constante, pero le faltaba reconocer a qué se refería el cambio [*ArgVar*]. Tras la discusión, Javier concluyó que era necesario sumar al desplazamiento anterior dicho cambio.

La forma de la gráfica

La intervención de Javier refleja una articulación entre el aspecto cualitativo de la gráfica de la posición y los valores de velocidad [*NumGraf*|*NocFis*], pues señaló que al inicio (cuando la velocidad era menor) la gráfica de la posición era más *curva* y que cuando la velocidad era cada vez mayor se tendría a una *línea*.

La notación y el intervalo de tiempo tan corto como sea posible

El que los puntos correspondientes al tiempo inicial y al tiempo final se acercaran tanto como fuera posible fue asociado por el alumnado con la noción de *límite* [*ArgVar*].

Respecto a la notación incremental, María asintió cuando se preguntó abiertamente si la habían empleado antes, pero no se manifestó al respecto [*Gen*]. Raúl fue quien tomó la palabra y describió que cuando le enseñaron la derivada, en algún punto le presentaron un cociente de deltas cuyo límite representaba la derivada. Sin embargo, al momento de expresar la definición existieron algunas imprecisiones en su descripción, pues mencionó que el *delta x* se encontraba en el numerador y que tendía a "no sé cuánto". En este punto se pudo haber profundizado durante la discusión para articular la definición que Raúl mencionaba con lo que había explorado en el diseño.

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración

El incidente que le ocurrió a Raúl (cuya respuesta se proyectó junto a la de María) al ubicar las gráficas de la aceleración y la posición permitió al alumnado discutir los *referentes* necesarios para su ubicación. Particularmente, Javier tomó la palabra [*Gen*] cuando Raúl señaló que en principio todas deberían partir del mismo punto. El argumento que empleó Javier para contradecirlo se basó en las observaciones físicas realizadas y las representación gráficas construidas [*NumGraf*|*NocFis*], pues señaló que la aceleración era *constante* y tenía valor de *9.81*, y que la velocidad partía de *cero*, como la posición.

La discusión se cerró cuando Raúl corroboró la afirmación de Javier, señalando que la aceleración debía estar en 9.81, que la velocidad debía partir de cero y que aumentaba de forma constante [*ArgVar*], y que la posición tenía que partir de cero [*NumGraf*|*NocFis*].

La participación y el género en la selección de respuestas

En el punto anterior cabe destacar que, aunque simultáneamente se mostraron las gráficas propuestas por María y eran adecuadas para el fenómeno descrito, ella no participó durante la discusión con Raúl [*Gen*]. Esto nuevamente respalda el hecho de que mostrar sus respuestas no es suficiente para integrarlas a la discusión.

La ubicación de la gráfica de la posición sin restricciones en el arrastre (condiciones iniciales)

Si bien, al inicio, cuando María expresó que en este punto ella se había equivocado, la investigadora le cedió la palabra, ella redirigió la discusión a Alan [*Gen*] y a partir de ahí se dispersó la discusión.

Eventualmente, la investigadora cedió la palabra a Fausto, quien fue el único que propuso de inicio que la gráfica se ubicara con su vértice en el punto proporcionado. Él explicó que la ubicó en ese punto pues consideró que la posición de la gota proporcionada correspondía al inicio de su caída. Es decir, Fausto articuló la forma de la gráfica de la posición –cresta o "centro de la parábola"– con el momento en que la velocidad era nula (al inicio de la caída) [*NumGraf* | *NocFis*].

Similarmente, esta articulación entre el fenómeno y la representación gráfica se apreció en el argumento de Ramón, pues señaló que el brazo izquierdo de la parábola correspondería a un ascenso de la gota de agua, su cresta a la altura máxima donde la velocidad sería nula y el brazo derecho de la parábola a su caída. Además, indicó que la gráfica debía contener al punto proporcionado y que, de acuerdo con lo discutido, ese punto correspondería a un momento de su caída [*NumGraf* | *NocFis*].

En este punto, tanto Fausto como Raúl (quien intervino luego de Ramón) aludieron a la simulación pausada como una *foto* del fenómeno (*soporte concreto*).

En el caso de Isaac, él señaló que *si solo se contaba con un punto*, la ubicación de la gráfica tendría que corresponder a considerar que en ese punto inició la caída (es decir, al menos implícitamente, se reconoce la necesidad de conocer la velocidad de la gota en ese punto) [*ArgVar* | *NumGraf* | *NocFis*]. En su respuesta se articulan los referentes necesarios (*condiciones iniciales*), la forma de la gráfica y los factores físicos asociados a la caída (velocidad).

El ajuste en la estructura

Cuando María explicó su experiencia al ubicar la gráfica destacó el papel de la simulación para determinar su ubicación (ajuste en la estructura), pues señaló que, cuando se veía el video (*soporte concreto*), se comparaba la trayectoria del punto con la posición de la parábola propuesta. Es decir, esta exploración dinámica le permitió articular el fenómeno con su representación gráfica dada la información proporcionada [*EstDin* | *NumGraf* | *NocFis*]. Flor describió lo mismo.

La participación y el género

En este episodio, al analizar la interacción, se identificó que durante la explicación de María, Javier la interrumpió y tanto ella como la investigadora le prestaron atención a él [*Gen*].

El tiempo como referente absoluto

La discusión de Raúl y Flor dejó entrever que, dada la estructura usual de los problemas en la clase de Física, el *tiempo* siempre es considerado el referente respecto al cual se determinan todos los demás valores [*NocFis*].

Cuando la investigadora cuestionó a Raúl y a Flor sobre cómo sabrían desde qué momento se está contando el tiempo, Javier se incorporó a la discusión, señalando que se tendría que tomar en cuenta el *origen*. Luego, cuando María mencionó que además se necesitaba un *punto de referencia*, Javier estuvo de acuerdo e indicó que se necesitaba saber desde qué punto se estaba partiendo. Particularmente, Javier retomó lo que se discutió previamente acerca de las diferencias ordenadas para señalar la necesidad y suficiencia de una gota para describir a partir de ella la caída en general [*CIArr*].

Mas lo que él explica alude a que no solo se considera el origen, sino también el estado de movimiento en ese punto, pues señala que "tomando en cuenta que la gota empezó a caer desde arriba con una velocidad cero. Entonces pues supongo que eso era lo que faltaba" [*NocFis*|*CIArr*]. Es decir, aquí Javier parece reconocer la necesidad de saber con qué *velocidad* partía la gota además del *lugar* del cual partía.

El análisis que después realizó Alan [véase el fragmento de la discusión en 00:51:00 – 00:55:55, presentado en la subsección *7.1.2*] corroboró lo que Javier acababa de decir justamente, que la velocidad en el punto era el otro valor faltante, "pues no necesariamente el punto cero sea donde ya cambie de dirección" [*NocFis*|*NumGraf*]. Para concluir esto, un concepto físico fundamental fue el de *marco de referencia* [*NocFis*], pues la dependencia de la medición a la persona que mide (como muestra su ejemplo de dos personas que observan el mismo fenómeno) deviene en que la ubicación de la gráfica dependa de otros factores más allá del origen coordenado: de su *cualidad*.

7.3. Limitaciones

Durante la observación de las interacciones del alumnado con los applets se identificaron algunos problemas de tipo técnico, tales como el que los deslizadores se pudieran mover de lugar y el que objetos como el fondo gris de la simulación del reloj de agua se pudieran mover y modificar. Ambos problemas fueron solventados por el alumnado, reubicando los objetos en su sitio o configuración inicial; sin embargo, lo ideal sería fijar la ubicación en pantalla de los elementos en el applet que no se pretende sean movidos, pues GeoGebra tiene una opción que permite fijar la ubicación de cualquier elemento.

Otra limitación fue de tipo técnico también pero su efecto en la resolución del diseño tuvo una mayor repercusión. El Applet 2.2.2 implicaba la ubicación de un conjunto de segmentos a partir de su desplazamiento; sin embargo, de acuerdo con los comentarios del alumnado (en la fase de socialización), no les fue posible en su mayoría realizar el desplazamiento pues el applet no lo permitía. Al observar la grabación de sus pantallas, resulta que luego de "Restaurar" el applet, el desplazamiento dejaba de ser posible; es decir, sin presionarlo sí era posible.

En cuanto al diseño, en el mismo punto, para la exploración dinámica del cambio en las diferencias se aprecia que habría convenido cuestionar si fue posible ubicar los cambios ordenados en lugar de asumir que había sido identificada la necesidad de un valor de referencia pues, de acuerdo con las grabaciones de pantalla, los cuatros casos analizados en las resoluciones individuales ubicaron al conjunto de cambios y luego señalaron que sí se dieron cuenta de la necesidad de un valor de referencia. Por ende, se torna difícil reconocer si se identificó o no dicha necesidad.

Una posible mejora técnica para los últimos applets sería el que la gráfica no se desplazara a partir de seleccionar un punto exterior a ella, sino a partir de un punto en ella.

8. Discusión

En este capítulo se discuten inicialmente (sección 8.1) los resultados obtenidos considerando las *preguntas de investigación* planteadas y el análisis descrito en la sección 7.2. Posteriormente, con base en esta discusión, en la sección 8.2 se comparten algunas observaciones acerca de la *unidad de análisis socioepistémica* definida y, en la sección 8.2, se perfila una postura ante la *hipótesis epistemológica* establecida.

8.1. Sobre las preguntas de investigación

Si bien las preguntas de investigación se plantearon considerando que algunas se explorarían únicamente durante ciertas etapas en la resolución del diseño, o bien, solo durante la socialización de resultados, se encontraron aspectos asociados a cada una tanto en espacios esperados como en otros diferentes. Por tal motivo, los hallazgos se han organizado con base en estas preguntas, pues permiten describir de manera transversal los resultados, aunque igualmente se pueden hallar aspectos asociados a una pregunta en la descripción de otra.

[*Var*]

¿Qué variables se consideran en la exploración inicial del fenómeno?

En la exploración inicial del fenómeno de caída libre, para determinar cuál de las tres gotas presentadas caía más rápido, se consideraron las variables: *distancia*, *tiempo* y *velocidad*.

Cada variable fue considerada dependiendo del tipo de *comparación* realizada:

Comparación de relaciones	Comparación de intensidades
qué distancia *en qué tiempo*	*qué comportamiento (velocidad)*
Cae más rápido la gota que recorre la misma distancia en menos tiempo	Cae más rápido la gota que se mueve con mayor velocidad (promedio)

La primera de estas comparaciones contempla la consideración de dos *unidades de medida absolutas*: la distancia y el tiempo, donde la segunda funge como la *unidad de referencia* respecto a la cual se establece cada relación.

Es decir, se compara qué distancia recorre una gota en cierto tiempo con la distancia que recorre otra gota en otro tiempo.

En el segundo tipo de comparación (entre comportamientos), la cualidad *dinámica* del ambiente fue esencial, pues consistió en la observación del *movimiento* mismo de las gotas. En este sentido, la simulación de las caídas (representación dinámica) permitió considerar una *unidad de medida relativa* (velocidad) con respecto a la *unidad de referencia* tiempo.

Es decir, se compara la intensidad con la que se mueve una gota en cierto tiempo con la intensidad con la que se mueve otra en otro tiempo.

[*EstDin*]

¿Emergen las estrategias dinámicas perfiladas? ¿De qué manera se exploran?

A continuación se describen los principales hallazgos asociados a cada una de las estrategias dinámicas perfiladas:

Exploración de parámetros

Los tipos de comparación descritos en la pregunta anterior emergieron de la *exploración del parámetro* tiempo en la simulación de la caída de las gotas de agua.

A partir de las interacciones del alumnado con los applets se identificó que dicha exploración ocurrió en dos modalidades:

	Manipulación directa	Ralentización
Herramienta	Deslizador t (tiempo)	Deslizador r (paso de tiempo)
Posibilidades	Apreciar el efecto *puntual* de cada modificación del parámetro tiempo (unidad de referencia)	Apreciar el efecto *continuo* de la modificación del parámetro tiempo (unidad de referencia)

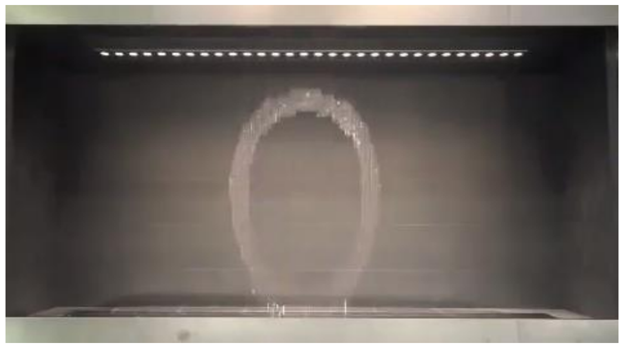
Usos	Cuál termina antes el recorrido	Cuál tiene mayor velocidad (promedio)

La segunda modalidad tiene la virtud de mantener el *comportamiento* del cambio (en la posición de la gota), es decir, permite una exploración continua uniforme del parámetro tiempo (unidad de referencia). Si bien con la primera modalidad también es posible apreciar el efecto continuo de la modificación del parámetro, la dificultad para mantener un movimiento manual regular obstaculiza su apreciación. De ahí que prácticamente la totalidad del alumnado culminara su exploración con la segunda modalidad.

Para el reconocimiento de las tres escenas mostradas como parte de una misma caída, la animación de la *unión* de las escenas fue central, aunque también lo fue la de su *separación*. Como se describió en el análisis, se esperaba que el alumnado uniera las escenas, pero no necesariamente que las volviera a separar; sin embargo, en sus interacciones con el applet se observó que el alumnado unió y separó varias veces las escenas, iniciando en cada caso la caída de la(s) gota(s).

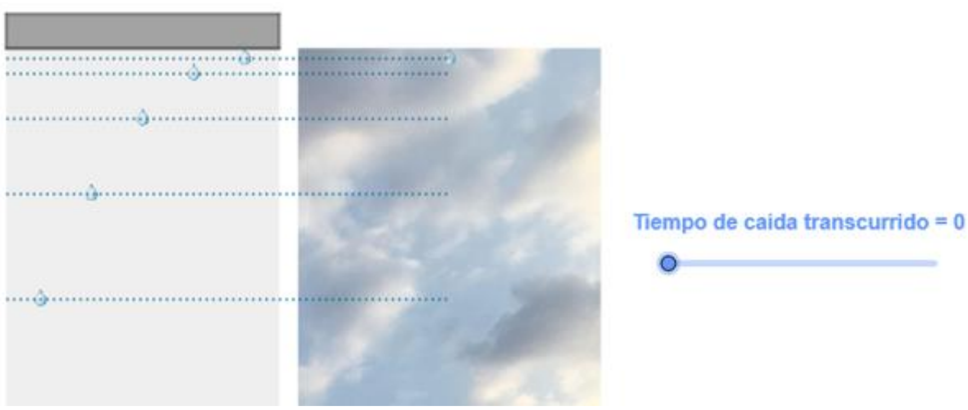
En este sentido, el alumnado *exploró el parámetro* tiempo (en sus dos modalidades) con dos finalidades distintas pero relacionadas: para comparar las tres caídas y para apreciar el comportamiento de la caída una vez unidas las tres escenas. La relación se encuentra justamente en que en el análisis de la caída de la gota con las escenas unidas se busca apreciar el cambio entre intensidades (velocidades promedio) observado en la escenas por separado. Es decir, se busca apreciar el *todo* a partir de las *partes*:

En el caso del análisis de la figura circular mostrada en el reloj de agua, el recurso de la *ralentización* en la *exploración del parámetro* tiempo también fue empleado para apreciar las cualidades de la figura conforme el agua caía (es decir, el efecto *continuo* de la modificación del tiempo). En dicho caso, la ralentización se logró modificando la velocidad de reproducción (equivalente al deslizador que controlaba el paso de tiempo en los applets).

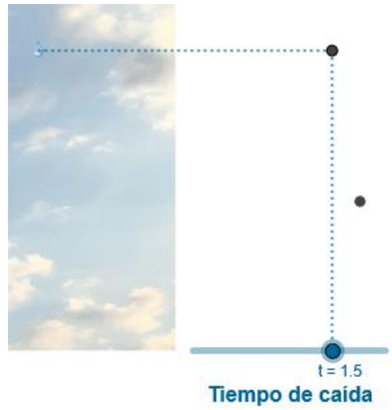


Similarmente, en otros applets se empleó la *ralentización* para apreciar la caída del agua a un paso de tiempo más lento que el normal pero manteniendo su comportamiento.

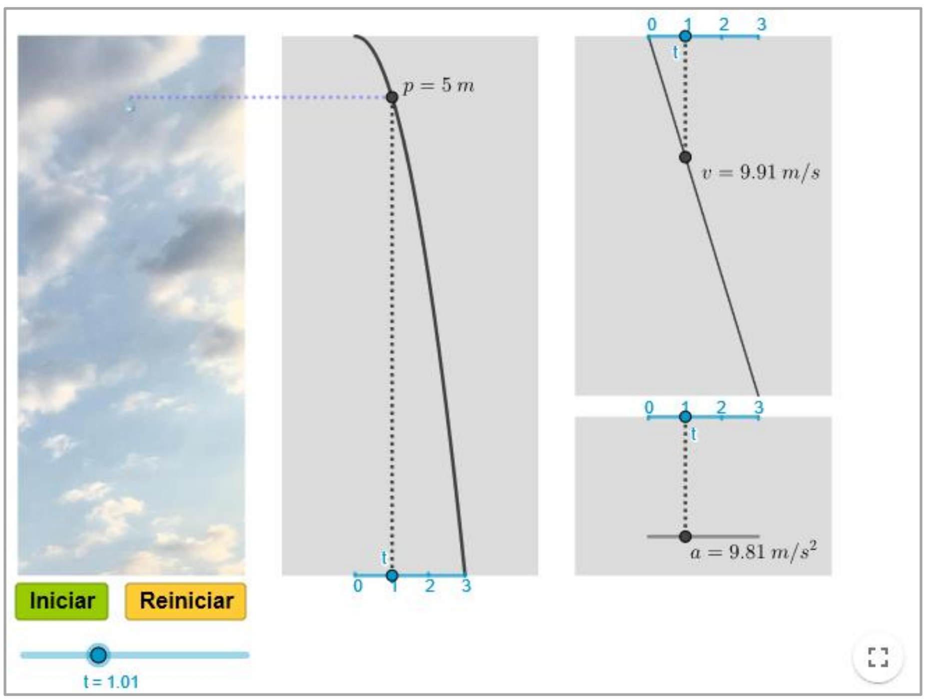
Por otro lado, la *manipulación directa* en la *exploración del parámetro* tiempo se empleó también en la asociación de las observaciones sobre las gotas en el reloj de agua y la caída de la gota analizada inicialmente:



Asimismo, la *manipulación directa* en la *exploración del parámetro* tiempo fue empleada por el alumnado para corroborar su *estimación* de la gráfica de la posición (con respecto al tiempo) mediante el rastro visible del punto correspondiente a la posición de la gota en distintos tiempos:

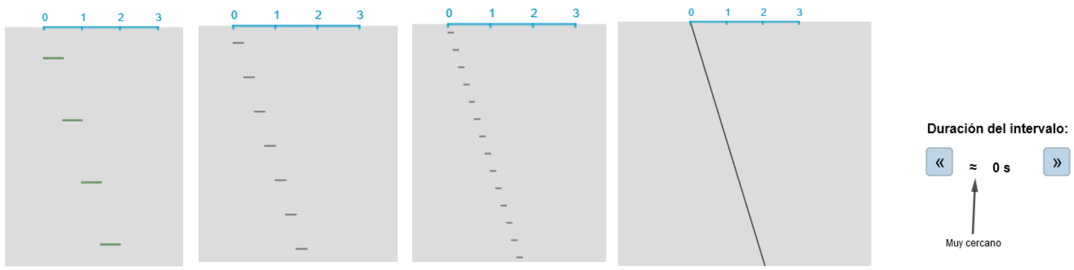


En el mismo sentido se empleó esta estrategia en su modalidad de *manipulación directa* para articular la simulación del fenómeno con sus modelos gráficos:

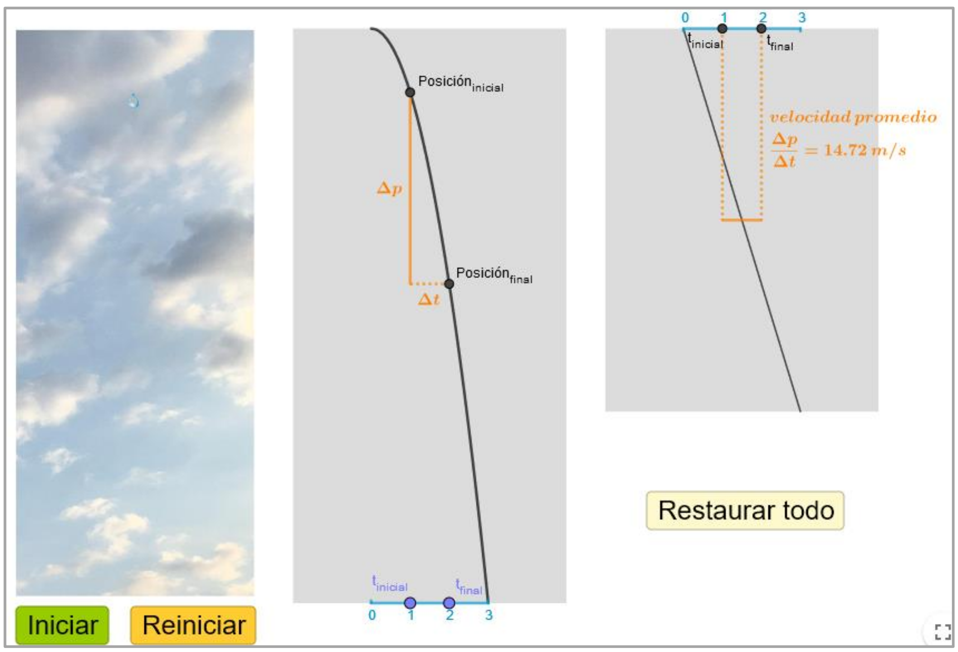


Particularmente, la exploración anterior permitió vincular la *forma* de la gráfica de la posición con los valores de velocidad que iba adquiriendo la gota en cada momento.

La *exploración del parámetro intervalo* de tiempo en el paso de la velocidad promedio (discreta) a la velocidad instantánea (continua) fue distinta a las anteriores descritas, pues en este caso la exploración tuvo como finalidad apreciar los efectos de la longitud del intervalo considerado en la representación gráfica de la velocidad con respecto al tiempo:



Una estrategia que combina el tipo de exploración anterior con la modalidad de *manipulación directa* se presentó durante la modificación de los valores de tiempo inicial y final para analizar la caída de la gota de agua por lapsos:

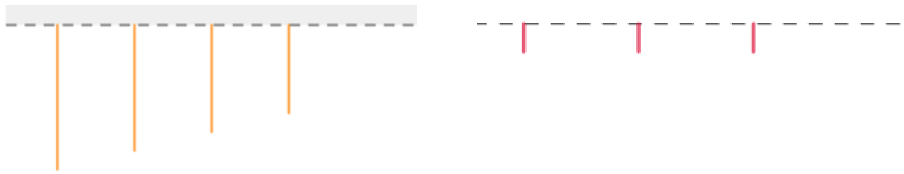


Particularmente, favoreció la asociación entre un punto de la gráfica y una *fotografía* del fenómeno.

Búsqueda de invariantes

Esta estrategia se empleó principalmente en el análisis del comportamiento de las *diferencias* entre desplazamientos y de los *cambios* entre dichas diferencias para distintos tiempos, es decir, durante la *seriación*.

Mediante la exploración del parámetro tiempo se identificó un *invariante* en cada uno: comportamiento *lineal* (decreciente) y comportamiento *constante*, respectivamente.



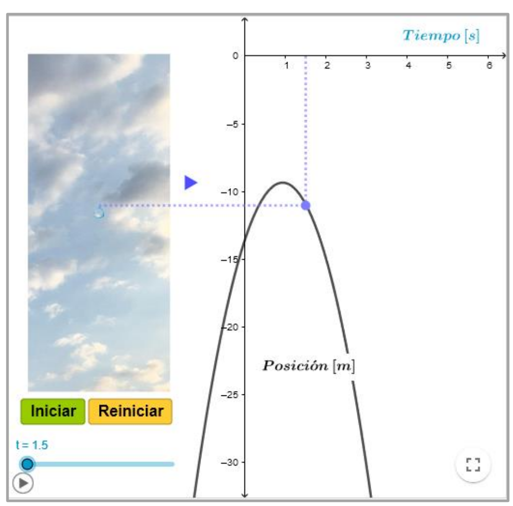
Un comentario que cabe destacar respecto a esta estrategia con relación a la *visualización* es lo manifestado por Miguel, en cuanto la exploración dinámica de las diferencias alineadas le fue suficiente para reconocer un comportamiento lineal como *invariante*; en sus palabras: “no vi la necesidad de ver números”.

Ajuste en la estructura

Esta estrategia emergió cuando el alumnado analizó la ubicación de la gráfica de la posición (con arrastre libre) en correspondencia con la simulación de la caída de la gota.

El *ajuste* consistió en que, al contrastar la ubicación propuesta –con base en su *estimación* del fenómeno (*temporización*)– con la trayectoria del punto dado (correspondiente a la altura de la gota en los tiempos señalados) y apreciar una discrepancia, el alumnado iba proponiendo otra u otras ubicaciones que se ajustaran mejor al fenómeno.

Eventualmente, el ajuste culmina cuando se obtiene una estructura (modelo) congruente con el fenómeno.



De los casos analizados, solo uno concluyó sin obtener la estructura correspondiente tras el ajuste. En dicho caso, la socialización permitió profundizar en el ajuste.

[*CIArr*]

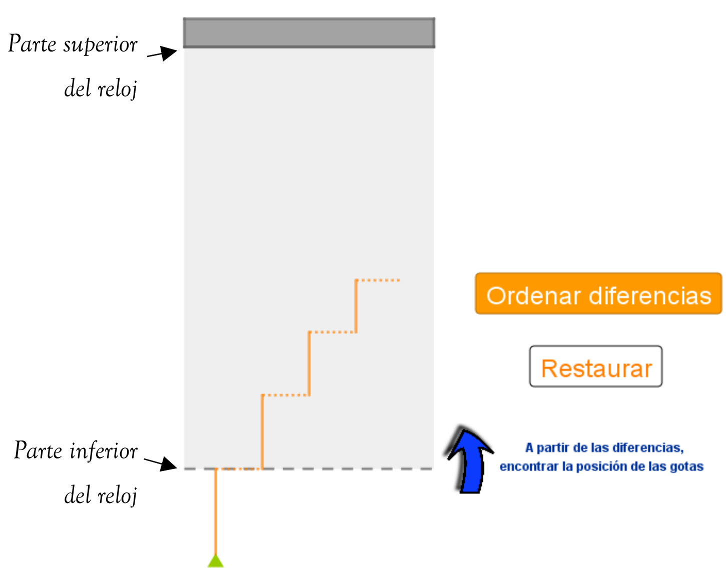
¿Cómo actúa el alumnado ante las relaciones $f \leftrightarrow f'$ *y* $f \leftrightarrow f''$ *en el arrastre de las representaciones gráficas? ¿Emerge la necesidad de condiciones iniciales a través del arrastre?*

Esta estrategia emergió tanto durante la ubicación de las *diferencias ordenadas* y los *cambios ordenados*, como en la ubicación de las gráficas de *posición*, *velocidad* y *aceleración*.

En este sentido, las relaciones $f \leftrightarrow f'$ y $f \leftrightarrow f''$ se exploraron tanto con *unidades de medida absoluta* (diferencias entre desplazamientos y cambios entre dichas diferencias) como con *unidades de medida relativa* (velocidad y aceleración), tomando en ambos casos como *unidad de referencia* al tiempo.

Es decir, si bien en sentido estricto f' y f'' aluden, respectivamente, a la primera y la segunda derivada (unidades de medida relativas: velocidad y aceleración instantáneas), para su análisis se partió del caso *discreto*, respectivamente: diferencia y cambio en la diferencia (unidades de medida absolutas).

Durante la ubicación de las *diferencias ordenadas* mediante el *arrastre* (restringido verticalmente), el alumnado en general reconoció la *necesidad* de un *referente* para poder hallar el lugar del conjunto de gotas. Hubo quienes reconocieron que se trataba de la posición de una de las gotas, pero también hubo quienes asumieron que dicho referente era o la parte superior o la parte inferior del reloj de agua:

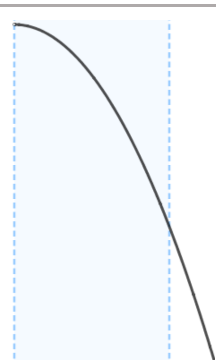
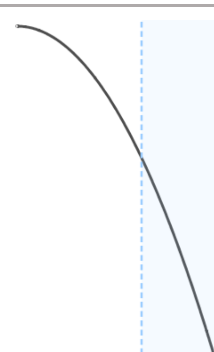


La discusión durante la socialización permitió profundizar en este hecho y reconocer que en realidad el referente necesario era la *posición* de una de las gotas.

Un comentario que cabe destacar respecto a este punto es lo señalado por Alan, pues indicó que, al momento de interactuar con el applet, "con solo mover" no había reconocido la necesidad de un punto de referencia, ya que, a fin de cuentas, él había encontrado un lugar "en un determinado tiempo". En ese sentido, señaló que el siguiente applet con la *posición* de una de las gotas es lo que le permitió percatarse de la necesidad de ésta.

Asimismo, destaca la discusión que se generó con Javier, pues permitió profundizar en el fenómeno analizado y en el por qué tanto él como Alan consideraron haber hallado la ubicación del conjunto de gotas *en un tiempo determinado*.

Básicamente, lo discutido radicó en que, dependiendo del tiempo transcurrido, la forma que describen las gotas en el reloj de agua es distinto. A continuación se muestra esquemáticamente esto considerando un intervalo de tiempo en el que ya ha salido la última de las gotas:

	Última gota acaba de salir	Última gota salió hace tiempo	Última gota salió hace más tiempo
Gotas en el reloj de agua			
Gráfica de la posición de la caída de una gota			

De esto se concluye que tener las *diferencias ordenadas* implica que se *conoce* no solo el tipo de comportamiento (pues en los tres casos mostrados se tiene el *mismo* comportamiento: *cuadrático*), sino también la velocidad de la última gota que salió (equivalentemente, la velocidad inicial del fenómeno en la gráfica de la posición, donde el inicio lo marca el comienzo de la región sombreada en azul).

La restricción del arrastre a solo *desplazamientos verticales* se halla estrechamente relacionada con lo anterior, pues implica justamente que se *conoce* la velocidad de la gota en un tiempo particular. Si no se supiera, el arrastre tendría que admitir también desplazamientos *horizontales*, pues, en términos de la gráfica de la posición, el intervalo de movimiento considerado (región sombreada en azul) podría ser cualquiera.

Por ende, la información faltante es la *posición* de una de las gotas, pues se conoce el comportamiento de las gotas y, al menos *implícitamente*, la velocidad de una de las gotas.

La dificultad para identificar cuál es el referente que falta radica entonces en el no reconocimiento de las consideraciones que implícitamente se asumen.

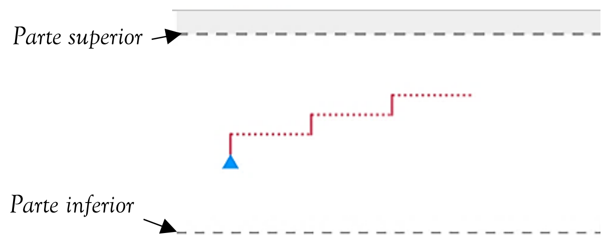
Por ejemplo, en el caso de Javier, expresar que: "justo cuando la primera gota que se había soltado había chocado en el piso y… como tienes todo lo demás ordenado, podrías ubicar en ese preciso instante […] las posiciones de las demás" implica considerar a la gota referida en un espacio (en la *parte inferior* del reloj) y tiempo (la *primera en llegar* a la parte inferior) determinados. Al final, estas consideraciones las pudo reconocer explícitamente tras lo que discutió con Alan, Isaac y Raúl; es decir, reconoció que estaba considerando la posición de la gota en un momento específico.

Lo anterior da cuenta de que el *arrastre* por sí solo no necesariamente hace emerger la necesidad de las condiciones iniciales correspondientes (en este caso, la posición de una gota en cierto tiempo), sino que demanda además de un reconocimiento explícito de las consideraciones que se están asumiendo durante el desplazamiento.

Tras identificar la *necesidad* de la posición de una de las gotas en un determinado tiempo, su *suficiencia*, considerando una mayor cantidad de gotas, fue asumida con mayor facilidad.

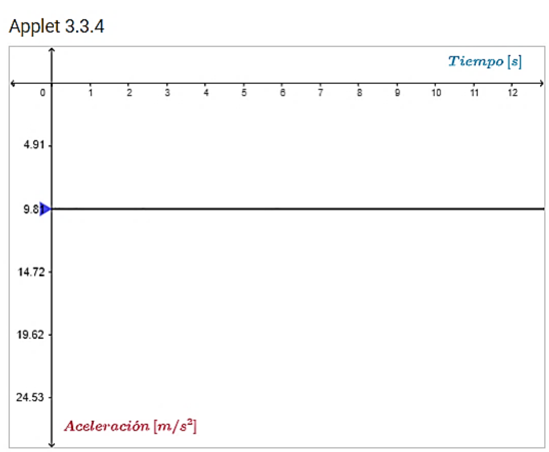
Respecto a la ubicación de los *cambios ordenados*, el que el alumnado intentara ubicarlos en algún lugar sugiere dos posibilidades: que, pese a la exploración previa con las diferencias ordenadas, el alumnado no haya *anticipado* la necesidad de un valor de referencia, o bien, que como escolarmente suele exigirse una respuesta específica, el alumnado haya intentado encontrar un lugar con el fin de atender la indicación.

Como haya sido, la observación de su interacción con el applet sugiere que reconocen la necesidad de un referente pero, como en el caso de las diferencias ordenadas, hubo quienes tendían a asumir que dicho referente era la parte superior o inferior:



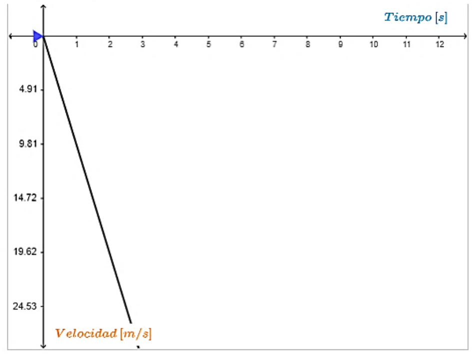
Pese a lo anterior, el applet con la *magnitud de una de las diferencias* permitió al alumnado reconocer la necesidad de este valor como referente.

En cuanto a la ubicación de la gráfica de la *aceleración*, el referente fue claro: el valor constante que previamente se había determinado:



Durante la ubicación de la gráfica de la *velocidad* se presentó un fenómeno similar a lo ocurrido con las diferencias ordenadas: hubo quienes reconocieron la necesidad de considerar la *velocidad inicial* del fenómeno (nula en este caso), pero también hubo quienes asumieron que el referente considerado había sido el tiempo.

Applet 3.3.5

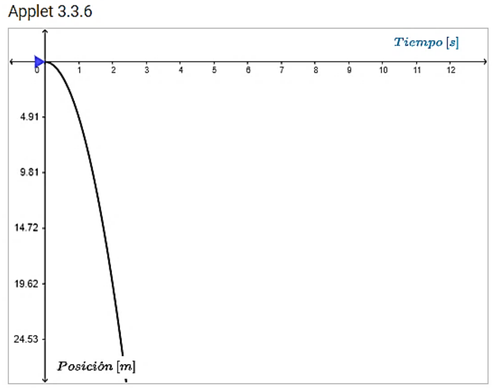


Como se mencionó para el caso de las diferencias ordenadas, la restricción del *arrastre* a solo *desplazamientos verticales* implica que ya se conoce el comportamiento de la velocidad (*lineal*), por lo que la información faltante consiste en la velocidad de la gota en un determinado tiempo (equivalentemente, la ordenada al origen de la recta).

La socialización permitió al alumnado discutir y reconocer esta necesidad.

Ahora bien, en cuanto a la gráfica de la *posición*, nuevamente se presentó este fenómeno, pues hubo quienes no reconocieron la necesidad de conocer el valor de una posición en un determinado tiempo para ubicar la gráfica, aludiendo a que el valor considerado como referente había sido el tiempo. Como en los casos anteriores, la restricción del *arrastre* a solo *desplazamientos verticales* implica que ya se conoce el valor de *una velocidad en un determinado tiempo* además del comportamiento de la posición (*cuadrático*).

Applet 3.3.6



La socialización nuevamente permitió hacer explícitas estas consideraciones.

Finalmente, en cuanto a la relación $f \leftrightarrow f''$, el liberar el arrastre de la gráfica de la posición (tanto vertical como horizontalmente) permitió al alumnado identificar la necesidad de otro referente además de la posición de la gota en un determinado tiempo.

Dada la exploración previa relativa a la forma de la gráfica de la posición para distintos valores de velocidad, se esperaba que el alumnado reconociera que el otro dato necesario consistía en aquel que permitiera identificar *de qué manera la gráfica pasaba* por el punto mostrado, es decir, en la *velocidad* que llevaba la gota en dicho momento.

Sin embargo, como en los casos anteriores, hubo dificultad para reconocer aquél otro referente necesario, pues tendió a considerarse el *tiempo transcurrido* como dicho valor, o bien, la *posición* de la gota *en otro momento*.

Analizando estas dos posibilidades resulta que, si bien en principio ambos valores satisfacen el requisito planteado (hallar una solución adecuada), en los dos subyace la *velocidad en un punto determinado* como referente:

- En el caso del *tiempo transcurrido* desde que inició la caída, el alumnado recurre indirectamente a considerar una posición (la inicial) y su velocidad (nula).
- En el caso de la *posición en otro momento*, algebraicamente se tendría un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 + x_0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + v_0t_2 + x_0$$

  Físicamente, este sistema corresponde a conocer las dos posiciones x_1 y x_2 (la dada y la que se asume como faltante) en dos instantes de tiempo determinados t_1 y t_2, así como el valor de la aceleración (constante) a. Lo que subyace son las incógnitas x_0 y v_0, las cuales corresponden a la *posición* de la gota en un determinado tiempo y a su *velocidad* en dicho momento, respectivamente.

Por tanto, en el análisis de esta relación también se concluye que, si bien el *arrastre* permite reconocer la necesidad de uno o más referentes, se requiere hacer explícitas las consideraciones asumidas durante el desplazamiento para determinar las *condiciones iniciales* necesarias.

El análisis de las relaciones $f \leftrightarrow f'$ y $f \leftrightarrow f''$ se extiende en la sección 8.2 como parte de la discusión de la *uase*.

Finalmente, una aclaración que cabe hacer respecto a las estrategias dinámicas es que se consideran como tal *estrategias* cuando se llevan a cabo con una intención específica. Es decir, por si solos, los procedimientos realizados en un ambiente dinámico podrían definirse como *acciones dinámicas* (*valor pragmático*), las cuales, si se emplean con un objetivo específico asociado a la noción matemática abordada (*valor epistémico*) se transforman en *estrategias dinámicas*.

Asimismo, como se puede apreciar, las estrategias dinámicas no tienen por qué presentarse con el orden establecido, pues depende de los objetivos de exploración que se tengan en cada caso.

[*ArgVar*]

¿Qué argumentos variacionales se emplean? ¿De qué naturaleza son (gráficos, numéricos, algebraicos)?

Como se describió en las secciones 4.1 y 4.5, los *argumentos variacionales* aluden al análisis *cualitativo* y *cuantitativo* del cambio. Particularmente, en el diseño elaborado, el estudio del cambio consistió en el análisis del movimiento del agua durante su caída.

En dicho análisis, las estrategias variacionales *comparación*, *seriación*, *predicción* y *estimación* fungieron un importante papel, así como las articulaciones entre los niveles de variación y los conceptos físicos de *posición*, *velocidad* y *aceleración*. Esto último se discute más adelante en la pregunta referente a las nociones físicas; por lo que, por ahora, se discute lo primero.

Anteriormente, en la pregunta alusiva a las variables consideradas durante la exploración inicial del fenómeno, se describió que la *comparación* se llevó a cabo de dos maneras: entre relaciones y entre intensidades. A continuación, se describe sintéticamente la manera en la cual se llevaron a cabo las otras estrategias (seriación, predicción y estimación) durante las exploraciones subsecuentes.

Para fines de presentación, la discusión se ha organizado con base en dichas estrategias y, dentro de cada una, se ha seguido el orden en que fueron emergiendo.

Seriación

- En el análisis de la forma de las gotas en la simulación del reloj de agua, el alumnado reconoció que su posición *no tenía un comportamiento lineal* o proporcional, sino *curvo*.

Hubo quienes incluso señalaron que era de tipo *cuadrático* pero sin justificar por qué. Uno de los participantes señaló que solo se obtendría un comportamiento *lineal* si la *velocidad* fuera *constante*.

- Como se mencionó previamente, la exploración del parámetro tiempo en el análisis de las diferencias alineadas permitió identificar un comportamiento *lineal decreciente* como invariante. Equivalentemente, se describió como un *crecimiento constante* o *con la misma diferencia entre ellas*. Asimismo, se identificó un comportamiento *constante* en los cambios (entre las diferencias) alineados.
- El alumnado recurrió al cálculo de las *diferencias de las diferencias* para describir el comportamiento de las diferencias entre los desplazamientos. Es decir, se recurrió a la *cualidad* (cambio en las diferencias) para describir la *cantidad* (diferencias).
- Una de las estudiantes reconoció que las gotas en el reloj de agua y la gota explorada inicialmente debían tomar las mismas alturas a diferencias de tiempo iguales pues en ambos casos los desplazamientos eran *cada vez mayores*.
- En la comparación de los comportamientos de las diferencias alineadas correspondientes a dos longitudes de intervalo distintas, parte del alumnado reconoció que ambos compartían como invariante la *constancia del cambio entre las diferencias*. Hubo quienes se centraron más en lo cuantitativo y señalaron que las diferencias correspondientes a una de las longitudes tenían una magnitud menor que las correspondientes a la otra longitud de intervalo.
- En la comparación de los valores de velocidad correspondientes a dos longitudes de intervalo distintas, parte del alumnado identificó una relación de orden y otra parte identificó una relación de proporción. Esta última se podría profundizar en futuras intervenciones para abordar el concepto de velocidad media como unidad de medida relativa, es decir, partir del factor que asocia a las magnitudes de las velocidades promedio correspondientes a cada intervalo para aludir a que al hacerse relativas delinean una misma *inclinación*. La primera, la relación de orden, es la que se esperaba que encontraran, pues lo relativo en la *unidad de medida* se buscó introducir a partir de la noción de *promedio* para que, con base en ella, se configurara una representación visual que asociara los valores de velocidad promedio con la línea recta que delimitan.

Predicción

- En la predicción de la posición de una gota que se dejara caer entre la primera y la segunda válvula en el reloj de agua en la mitad del tiempo en que caía la segunda gota después de la primera, el alumnado *predijo* su lugar considerando el comportamiento de las demás. Particularmente, hubo quienes señalaron que la gota debía ubicarse más cerca de la segunda que de la primera pues el comportamiento era *creciente y en aumento*.
- A partir de la exploración con el reloj de agua, parte del alumnado *predijo* que en el caso de una sola gota, el comportamiento de las diferencias entre los desplazamientos debía ser *lineal* o con un *cambio constante entre ellas*.
- Pese a las exploraciones previas con el reloj de agua, una de las estudiantes *predijo* que el desplazamiento de la gota de agua tendría un comportamiento lineal. Durante la socialización, ella señaló que salió su "lado matemático" queriendo encontrar un patrón (lineal), pero que con el análisis posterior de la gráfica de la posición retomó sus observaciones anteriores acerca de la *constancia en el cambio* entre diferencias.
- El alumnado asocio el comportamiento *anticipado* acerca de las diferencias entre los desplazamientos con la constante hallada de 9.81.

Estimación

- En el análisis de la caída de la gota de agua cuando las tres escenas fueron unidas, el movimiento se describió a partir de su comportamiento continuo: *acelerado* o *con mayor velocidad cada vez*.
- En el caso límite de subdivisiones de las escenas, se consideró que se llegaría a tres *imágenes* con un cambio difícil de apreciar, pero que existiría aun así. Es decir, el movimiento se asume como una *evolución continua de estados sucesivos*.
- En el análisis cualitativo de la figura circular conforme caía en el reloj de agua, se identificó que la figura tendía a *alargarse* o estirarse verticalmente, lo cual se asoció con una *velocidad creciente*. Sin embargo, uno de los alumnos, en lugar de estiramiento vertical, apreció un *estrechamiento* horizontal.
- Respecto a las posibilidad de mostrar en el reloj de agua las imágenes planteadas, la mayor parte del alumnado no anticipó la imposibilidad de mostrar una diagonal, pero,

tras ver el video correspondiente, se asoció la *deformación* apreciada con el *movimiento acelerado* del agua.

- Habiendo determinado el valor de la aceleración a partir de los valores de velocidad promedio, el alumnado estimó que en intervalos de tiempo más pequeños (con los cuales la velocidad promedio cambiaba), la aceleración se mantendría constante.
- Los niveles de variación se asociaron al reconocer que el comportamiento *curvo* de la gráfica de la posición se podría describir mediante el comportamiento *lineal* de sus diferencias entre desplazamientos.
- Conociendo el comportamiento de la posición con respecto al tiempo de las gotas en caída libre, se reconoció la necesidad y suficiencia de una gota para determinar la ubicación de las demás.

Como se puede apreciar, la naturaleza de los argumentos variacionales proporcionados por el alumnado integró principalmente aspectos gráficos y numéricos, así como las nociones físicas de velocidad y aceleración. Si bien inicialmente se apreció cierta dificultad para describir la *forma* o la cualidad de las representaciones gráficas (lo cual se esperaba dado el tratamiento didáctico usual), a lo largo de las resoluciones del diseño y de la socialización se identificó una mayor facilidad por parte del alumnado al recurrir a las *cualidades* en la descripción del movimiento y su cambio.

[*NumGraf*]

¿De qué manera se recurre a las tablas numéricas y a las gráficas para argumentar respecto al fenómeno? ¿Se integran diferentes sistemas?

A través de estas preguntas se apreciaron los procesos de *numerización* y *geometrización* del cambio. A continuación se describen los principales hallazgos asociados a cada uno:

Numerización

- El que las magnitudes de los desplazamientos se mostraran permitió que la *seriación* se estableciera con base en el decrecimiento constante de sus *valores numéricos*.
- Al cuestionar sobre cuánto cambiaban las diferencias, parte del alumnado *calculó*, además de dicho cambio, *el cambio del cambio*, proporcionando un *valor* aproximado de

la constante encontrada. Para ello consideraron la *tabla* que construyeron en la hoja de cálculo proporcionada.

- Uno de los estudiantes decidió calcular el cambio del cambio en la hoja de cálculo al reconocer un invariante (comportamiento lineal creciente) en las diferencias alineadas durante la exploración dinámica del parámetro tiempo. Esto da cuenta de una articulación entre las observaciones cualitativas de las diferencias alineadas y los valores numéricos correspondientes a las diferencias de las diferencias, pues el *invariante identificado visualmente* se asoció con una *diferencia numérica constante* en las diferencias.
- En la comparación de las alturas de las gotas en el reloj de agua con aquellas de la gota durante su caída, el uso de la *tabla* numérica permitió al alumnado reconocer la regularidad en los tiempos en que eran soltadas las gotas.
- La *cuantificación* del cambio entre las diferencias en los desplazamientos permitió al alumnado *predecir numéricamente* un desplazamiento futuro.
- La *numerización* del cambio y su relativización respecto al tiempo permitió a parte del alumnado reconocer una *relación proporcional* entre las velocidades promedio correspondientes a diferentes longitudes de intervalo.

Geometrización y graficación

- Un estudiante señaló que el significado de la constancia de la diferencia en las diferencias identificada se podía *observar* en que los segmentos correspondientes a las diferencias *crecían al mismo ritmo* y, más adelante, con base en ello anticiparía que la gráfica de la velocidad contra el tiempo tendría la forma de una recta. En general, el alumnado asoció la *constante* hallada con el *comportamiento* del cambio (diferencias alineadas).
- El alumnado *estimó* mediante un *trazo continuo* la posición de la gota de agua que caía para diferentes valores de tiempo. Una parte señaló que el trazo correspondía a la *gráfica* de la posición con respecto al tiempo.
- La asociación de la forma descrita por las gotas en el reloj de agua con la representación gráfica de la posición con respecto al tiempo de la gota que caía se estableció a partir

de su cualidad *curva* y de la regularidad en la caída de las gotas en el reloj identificada a partir de la *tabla* construida.

- El apreciar *gráficamente* las magnitudes de las velocidades promedio correspondientes a intervalos de un segundo de manera simultánea a las correspondientes a intervalos de medio segundo permitió a parte del alumnado reconocer que las primeras correspondían a los promedios de las segundas. Asimismo, permitió al alumnado en general *anticipar* un comportamiento *constante* en el caso continuo.
- El análisis simultáneo de las *gráficas* de velocidad y aceleración permitió a una de las estudiantes reconocer que la *gravedad* (uso ambiguo) se mantenía constante independientemente del intervalo de tiempo considerado. En cuanto a la otra estudiante, la exploración de estas representaciones *gráficas* le permitió concluir que mientras la velocidad es variable, la aceleración permanece constante.
- El análisis simultáneo de las *gráficas* de posición y velocidad permitió al alumnado reconocer que, conforme la *velocidad* tendía a valores menores, la forma de la gráfica de la posición tendía a hacerse *curva*, mientras que en valores mayores tendría a una *recta*. Aunque, como se mencionó previamente, se encontró dificultad en la mayoría para hacerlo.
- El análisis de la gráfica de la posición permitió al alumnado cualificar al fenómeno con respecto al tiempo (*temporización*). En particular, permitió a un par de estudiantes explorar las implicaciones físicas de considerar el brazo izquierdo de la parábola, así como del significado físico del punto máximo.
- Como anteriormente se señaló, uno de los estudiantes manifestó durante la socialización que la exploración dinámica de las *diferencias alineadas* le fue suficiente para reconocer un *comportamiento lineal*, por lo que no vio la necesidad de *ver números*.
- En la ubicación de las *gráficas* respecto a los ejes coordenados el alumnado consideró las variables involucradas y la condiciones físicas del fenómeno analizado, aunque se apreció una dificultad para reconocer *todas* las condiciones que se asumían.

Con base en esto se concluye que hubo un constante ir y venir entre las representaciones gráficas y valores numéricos asociados al fenómeno (ya sea considerando los desplazamientos, sus diferencias, los cambios entre dichas diferencias, o bien, su posición, velocidad y aceleración) y el fenómeno mismo.

El no contar inicialmente con valores numéricos permitió al alumnado profundizar en la cualidad de los comportamientos mediante la visualización, mientras que el uso de las tablas numéricas más adelante permitió corroborar algunas de esas apreciaciones.

[*NocFis*]

¿Qué nociones físicas se incorporan a la argumentación?

En la exploración inicial del fenómeno, llamó la atención que el alumnado recurriera principalmente a las condiciones del ambiente (resistencia, dirección o temperatura del aire) para explicar la diferencia en las caídas y no al propio comportamiento de las gotas (acelerado, velocidad inicial distinta, etc.). Una explicación posible de esto la sugirió uno de los participantes al señalar que el que la caída de las gotas iniciara en el extremo superior de cada escena le hizo pensar que todas partían de reposo, por lo que la diferencia entre las caídas tenía que deberse a un factor distinto a la velocidad inicial de cada gota.

En ese sentido, el applet con la unión de las caídas permitió focalizar la atención en los comportamientos, en cuya descripción, el alumnado recurrió a los conceptos de *velocidad* y *aceleración*.

Dado lo que se exploró en el libro de física (subsección 2.2.1) y lo que expresaron un par de estudiantes durante la socialización, los conceptos de velocidad y aceleración suelen abordarse considerando que el alumnado posee ya una concepción de la derivada como razón de cambio, de lo diferencial como caso límite y del Teorema Fundamental del Cálculo como vínculo entre la derivada y su integral; asimismo, se asume que las y los estudiantes han trabajado previamente con la interpretación geométrica de la derivada para analizar el crecimiento, decrecimiento, concavidad, máximos y mínimos de una función; sin embargo, el tratamiento de esto en el nivel medio superior no suele ser tan profundo y, como se expuso en la subsección *4.6.1*, el currículo de la carrera establece que todo ello se aborde hasta después de Física I.

Esta desarticulación del currículo podría explicar el por qué inicialmente parte del alumnado empleó ambos conceptos con relativa ambigüedad: como descriptores del cambio, pero sin una distinción entre sus órdenes de variación.

Particularmente, de entre los cuatro casos elegidos, las mujeres tendieron más a dicho uso ambiguo. Sin embargo, conforme avanzaron en su resolución y durante la socialización, se observó una mejora en este sentido, en cuanto emplearon con mayor precisión ambos conceptos.

Ahora bien, respecto a cómo se hizo uso de estos conceptos en la descripción del cambio y la variación, en la siguiente tabla se resumen algunos ejemplos:

Velocidad	Caso	Aceleración
A mayor tiempo, mayor velocidad	Comportamiento de la caída	*Movimiento acelerado*
Siempre será más rápida o veloz	Predicción del comportamiento de cada tercera gota	
La figura se alarga porque las gotas parten a una velocidad que después aumenta/en la parte superior la aceleración es más lenta (uso ambiguo)	Descripción de la figura circular de agua	*La figura se estira pues las gotas tienen aceleración constante* *En la parte inferior incrementan su aceleración* (uso ambiguo)
En la diagonal habría distintas velocidades deformándola	Deformación en la diagonal del reloj de agua	
	Forma de los triángulos curvos en el reloj de agua	*El ensanchamiento inferior implicaría una aceleración negativa* *Si al agua se da cierta dirección en diagonal, al principio se apreciaría una curva y, a medida que se acelera, se vería cada vez más una recta*
La curva que describen las gotas se debe a que no caen a velocidad constante *Solo se obtendría una recta si cayeran a velocidad constante*	Forma de las gotas en la simulación del reloj de agua	
Se comportan como una velocidad constante (uso ambiguo)	Descripción de las diferencias alineadas	
	Comparación del reloj de agua con la caída de una sola gota	*Alcanzan las mismas alturas a diferencias de tiempo constante pues tienen la misma aceleración*

La velocidad media depende de la longitud del intervalo	Descripción discreta del cambio en la posición mediante una unidad de medida relativa	*La relación de promedio entre las velocidades medias se debe a que en ambos casos se tiene la misma aceleración* *La aceleración es independiente del intervalo (se concibe como una unidad de medida relativa)*
Las velocidades promedio son estimaciones, pero el valor "verdadero" es la velocidad instantánea *Con intervalos más pequeños se tendría una idea más clara de la velocidad que lleva el objeto en cada punto de su caída* *Cuando el intervalo de tiempo se hace tan corto como es posible se pasa de la velocidad promedio a la instantánea*	Paso de lo discreto a lo continuo en el análisis de la velocidad	
La constante hallada implica que el cambio en la velocidad con respecto al tiempo es el mismo	Constancia de la aceleración independientemente del intervalo de tiempo considerado	*El valor constante hallado 9.81 corresponde a la gravedad* (uso ambiguo) *En intervalos más cortos se obtendrán múltiplos de la gravedad* (uso ambiguo)
	Igualdad entre la aceleración promedio e instantánea	*Lleva a pensar que el fenómeno tiene aceleración constante*
Con intervalos de tiempo cada vez menores se conseguiría una mejor aproximación al valor "concreto" de velocidad (velocidad instantánea) *En el límite, cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, se tiene la velocidad en un solo punto, la velocidad instantánea*	Concepción del instante	*Para una diferencia de tiempo muy pequeña, se seguiría teniendo un cambio del cambio o una aceleración constante*
La tendencia lineal en la curva se debe a que la velocidad crece rápidamente *Cuando la velocidad es menor, la gráfica es más curva y, cuando es mayor, tiende a una línea*	Análisis de la gráfica de la posición con respecto al tiempo	

La velocidad parte de cero y aumenta de manera constante, por tanto la recta debe partir del origen *El centro de la parábola (máximo) corresponde al momento en que su velocidad es nula*	Ubicación de las gráficas	*La aceleración tiene siempre velocidad de 9.81, por lo tanto su ordenada al origen es esa*

En general, como se puede apreciar en la tabla anterior, existieron diferentes manifestaciones de una articulación entre las nociones físicas y los argumentos variacionales, particularmente para la descripción y *vinculación* de los niveles de variación analizados, así como para la descripción de las cualidades apreciadas en las simulaciones y en las gráficas.

De hecho, uno de los estudiantes señaló que, si bien lo que vio en Física I acerca de la velocidad instantánea se asocia con los intervalos infinitamente pequeños vistos en Cálculo, él no les veía una relación directa y que, con el diseño, le "quedó mucho más claro [...] cómo se llega al concepto de velocidad instantánea y cómo se puede aplicar".

Adicionalmente, tanto durante la resolución del diseño como durante la socialización se aludió al fenómeno físico de *tiro parabólico* para explicar la *forma curva* de las gotas que se dejaban caer a diferencias de tiempo constante en el reloj de agua y de la gráfica de la posición con respecto al tiempo de la gota de agua en caída libre.

Por otro lado, un obstáculo que se identificó asociado al tratamiento usual de los problemas en la clase de física fue la consideración del tiempo no solo como *unidad de referencia*, sino también como *la* condición inicial necesaria para determinar las ubicaciones de las gráficas.

Dicho aspecto se discute con mayor profundidad en la sección 8.2, así como la noción de *marco de referencia*, la cual fungió un papel importante en el reconocimiento de la dependencia de los ejes *espacial* y *temporal* a *quien observa* el fenómeno.

Finalmente, destacó el que la simulación en efecto puede constituir un soporte concreto para el alumnado, en cuanto aludieron a ella como un *video* del fenómeno o, en el caso estático, como una *fotografía* de éste. Asimismo, permitió que se cuestionaran si las gotas pertenecían a la misma lluvia, si las condiciones ambientales eran diferentes en cada caso o si en las mediciones realizadas no se había cometido algún error; es decir, aspectos que se pensaría solo entrarían a discusión durante la experimentación directa también se dieron en su modalidad digital.

[Gen]

¿Qué aspectos asociados al género (cultural) se observan?

Algo que cabe destacar respecto a esta pregunta es que inicialmente se había formulado considerando que se exploraría el uso de argumentos asociados a la *funcionalidad* del saber por parte de las mujeres y los hombres participantes (dados los hallazgos con relación al género en la línea socioepistemológica); sin embargo, el diseño se elaboró con la finalidad de propiciar el uso de dichos argumentos, por lo que sería difícil identificar una diferencia por género.

Así, la pregunta se reformuló en términos más amplios, buscando mantener una perspectiva de género transversal durante la implementación y el análisis de los datos recabados.

Respecto a la implementación, en principio, el buscar propiciar el uso de argumentos funcionales responde justamente a la problemática de género identificada; por otro lado, el mostrar los nombres de las y los participantes en sus respuestas durante la socialización de resultados, así como el incluir en cada pregunta a discutir la respuesta de alguna mujer, tuvo como objetivo el fomentar la participación de las mujeres durante la discusión, en cuanto se ha reportado con frecuencia una reticencia por parte de ellas a participar y considerando que la interacción social es parte esencial de la construcción de conocimiento matemático.

En cuanto al análisis, a continuación se presentan los principales hallazgos asociados al género:

- Se observó una diferencia significativa entre el *orden de resolución* seguido por las mujeres y el seguido por los hombres, en cuanto ellos tendían a adelantarse a explorar otros applets antes de responder o a modificar respuestas anteriores, mientras ellas siguieron siempre el orden establecido. Esto puede muy probablemente ser el resultado de una alienación cultural, cuyas implicaciones diferenciadas podrían conllevar a una evaluación inadecuada. En este sentido, el no haber contado con las grabaciones de las pantallas habría invisibilizado estos comportamientos y, consecuentemente, su análisis habría sido distinto.
- En algunas actividades, principalmente cuando se preguntó de manera abierta, se observó una tendencia en las mujeres a incorporar argumentos *cualitativos* en sus respuestas, a diferencia de los hombres, quienes tendían más a incorporar argumentos físicos, temporales o cuantitativos. Por ejemplo, cuando se cuestionó cómo es la caída de las gotas en la simulación del reloj de agua (de manera abierta), se observó que ellas incorporaron argumentos *cualitativos* en su respuesta, mientras ellos se centraron en los

factores físicos asociados. Para tener un punto más de contraste, se analizó la respuesta de la otra mujer participante y se encontró que igualmente ella incorporó argumentos *cualitativos*. En este sentido, cuando las preguntas se establecieron explícitamente para abordar el análisis cualitativo, no se apreciaron diferencias significativas.

- En varias actividades en las que se cuestionaba sobre valores numéricos, se observó una diferencia significativa en los términos en que las respuestas eran manifestadas por las mujeres y por los hombres. Ellas consistentemente incluían en sus respuestas calificativos que denotaban la *plausibilidad* de los valores que proponían: “casi” o “aproximadamente”, mientras que ellos referían haber encontrado un valor *exacto* o determinante.
- Durante la socialización se observó una constante renuencia por parte de las mujeres a participar. Los hombres fueron los que generalmente tomaron la iniciativa ante las preguntas abiertas que planteaba la investigadora, las mujeres generalmente respondían después de ellos o cuando varias y varios hablaban a la vez. Incluso cuando se les invitaba a participar, algunas redirigían la discusión a otro compañero.
- Asimismo, durante la socialización de resultados se identificó que incluir la respuesta de una mujer en cada pregunta a discutir no fue suficiente para que se integraran a la discusión, pues tendían más a escuchar que a hablar, incluso cuando la discusión era solo entre dos. Esto concuerda con la frecuentemente reportada *baja confianza* por parte de las mujeres al momento de participar.
- Otro fenómeno frecuentemente reportado en la literatura y que se apreció durante la socialización fue respecto a los *altos niveles de ansiedad* por parte de las mujeres durante las pruebas, pues una de las participantes manifestó que durante la resolución del diseño sintió que “colapsó”.
- Finalmente, durante cierta interacción en la socialización, una de las mujeres participaba cuando un hombre la interrumpió y tanto la investigadora como la estudiante prestaron atención al compañero. De momento ello no se reconoció, pero el registro audiovisual permitió identificarlo. Esto evidencia que aun cuando se realizaron diversas acciones conscientemente para incorporar a las mujeres estudiantes en la discusión, lo cultural prevaleció a través de ciertas acciones de forma inconsciente.

Para mayores detalles y ejemplos se puede consultar la sección 7.2.

[*Val*]

¿Qué argumentos emergen respecto a la validez de los modelos generados (gráficas, tablas, fórmulas)? ¿Qué postura se adopta respecto a la racionalidad contextualizada durante la construcción de consensos?

Los principales hallazgos asociados a estas preguntas se describen a continuación:

- En la justificación de algunas respuestas, pese a las exploraciones realizadas y la caracterización de comportamientos, algunos estudiantes recurrían a conceptos escolares (físicos o matemáticos). Ello podría ser el resultado de una costumbre didáctica que tiende a privilegiar ciertas argumentaciones, como las *conceptuales*, por sobre otras.
- La alusión de un par de estudiantes a que el valor de velocidad instantánea era el valor *verdadero* o *concreto* parece responder a que las respuestas exactas se validan por sobre las aproximaciones.
- El argumento que usó uno de los estudiantes para proporcionar una posible explicación de la respuesta de una de sus compañeras evidenció un reconocimiento de la *cualidad contextual de la racionalidad*, pues más allá de no haber usado los términos adecuados, él aludió a las razones por las cuales ella pudo haberlos usado.
- La dificultad de uno de los estudiantes para referirse al eje vertical y el buscar una manera correcta de hacerlo refleja la rigidez del tratamiento matemático tradicional.

8.2. Sobre la unidad de análisis socioepistémica

Respecto a la *unidad de análisis socioepistémica* definida (esquematizada en la ILUSTRACIÓN 4-10 y en la LUSTRACIÓN 4-11), la mayoría de sus elementos y los hallazgos asociados a cada uno se discutieron en la sección anterior.

En el presente apartado se discute particularmente acerca de las relaciones $f \leftrightarrow f'$ y $f \leftrightarrow f''$, el papel de las *condiciones iniciales* en sus procesos de *ida y vuelta*, y la noción física de *marco de referencia*.

Para comenzar, obsérvese la siguiente tabla:

Expresión general	*Representación gráfica*	*Eje*
$y = a$		*Variacional*
$y = at + b$		
$y = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$		*Espacial*
Eje	*Temporal*	

El *eje espacial* y el *eje temporal* son elecciones que dependen de quien observe el fenómeno, es decir, esa persona puede elegir en qué momento empezar a medir y dónde definir el cero de su medición.

El *eje variacional* depende de lo que se describa en el eje espacial. Siguiendo el análisis del diseño $f \to f' \to f''$:

Comenzando con la posición de la gota (cantidad)	
Se describe su cambio (cualidad)	
Y en su descripción se recurre al cambio del cambio (cualidad de la cualidad)	

El llegar a un comportamiento constante en el segundo orden de variación permite comenzar a caracterizar el movimiento, pues se determina una primera constante específica: a.

A partir de ello, el *regreso* de la "ida y vuelta" radica en hallar más constantes que caractericen unívocamente al fenómeno con respecto al tiempo, lo cual corresponde a la ubicación de las gráficas mediante el *arrastre*.

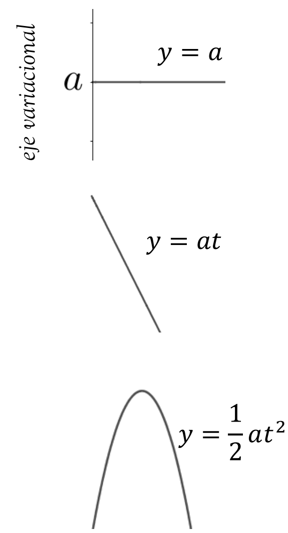
Partiendo de la primera constante hallada: a

- Determina la inclinación de la recta: at

  Físicamente, determina el sentido de la velocidad (con su signo) y la magnitud del cambio de la velocidad.

- Determina la curvatura[40] de la parábola: $\frac{1}{2}at^2$

  Físicamente, determina la magnitud del cambio en la posición.



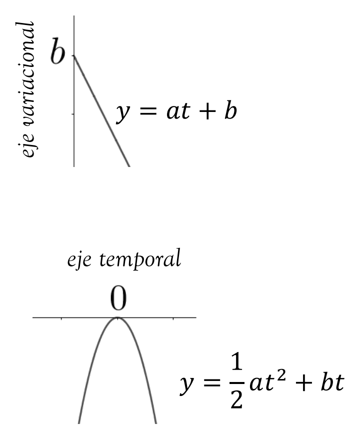
La segunda constante: b

- Determina la ordenada al origen de la recta

  Físicamente, se define a partir de un valor específico (para cierto momento) de velocidad.

- Determina qué forma (curvatura) tiene la curva de posición en algún momento específico

  Físicamente, podría corresponder a saber que la gota parte del reposo.

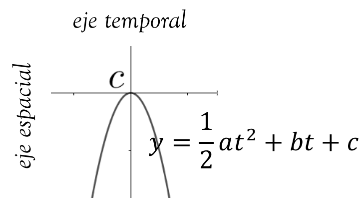


[40] A través del concepto *curvatura* de geometría diferencial es posible mostrar que su magnitud queda determinada por a, pues: $k(x) = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{[1+(ax+b)^2]^{3/2}}$. El valor de b solo determina desplazamientos horizontales.

La tercera constante: c

- Determina la ordenada al origen de la parábola

  Físicamente, se define a partir de donde se empieza a medir el desplazamiento.



En el caso de la primera constante hallada, nótese cómo la recta y la parábola carecen de ejes, eso implica que el valor de la aceleración determina el tipo de cambio que describe (lineal con un crecimiento específico) y a su vez el comportamiento de lo que dicho cambio describe (cuadrático con curvatura específica).

La segunda constante, además de definir la ubicación de la recta con respecto al eje variacional (el cual se señalaba al inicio depende de lo que se describa en el eje espacial, pues si se trata del movimiento de una gota en caída libre, el valor de la ordenada al origen de la recta corresponderá a la velocidad inicial del objeto), determina de qué manera pasa la curva de posición por un punto específico.

A su vez, el que la curvatura ya esté determinada por la primera constante e, igualmente, con la segunda constante, la forma en la que pasa la curva por algún punto definido, implica que la siguiente constante (la tercera) podrá definir únicamente un desplazamiento horizontal de la curva de posición.

Lo que se acaba de describir y lo que se presenta en el cuadro anterior representa las relaciones $f'' \to f' \to f$. En el paso de un nivel a otro, el arrastre queda restringido a desplazamientos verticales pues cada nueva constante corresponde a una ordenada al origen. En cambio, si se tiene la relación $f'' \to f$, las dos constantes que faltan por determinar (considerando que la constante a ya está determinada) conllevan un consecuente desplazamiento horizontal (cuando se determina de qué manera pasa la curva de posición por algún momento específico) y vertical (cuando se determina desde dónde se comienza a medir) de la curva de posición, por lo tanto el arrastre queda libre de restricciones.

Si bien con el alumnado se discutieron estos puntos durante la socialización, se podría extender más el tratamiento gráfico de la variación con base en las consideraciones descritas para profundizar en la necesidad y suficiencia de las condiciones iniciales.

Finalmente, como se puede apreciar, los elementos en la *uase* no se plantean como una secuencia lineal, sino con diversas interrelaciones. La dimensión social queda particularmente patente a través de la funcionalidad en la modelación de un fenómeno real (concreto) donde la variación adquiere un significado relativo al fenómeno, a la vez que las consideraciones de los ejes responden a lo modelado y a quien modela.

8.3. Sobre la hipótesis epistemológica

La hipótesis establecida consistió en que: *La noción de variación en la ecuación diferencial surge de modelar un fenómeno de variación (como el movimiento) a partir de su naturaleza dinámica*; para la cual se consideró que la *naturaleza dinámica de la variación* se constituye a partir de la correlación de variables, independientemente del contexto desde el cual se aprecien (físico, gráfico, numérico, algebraico), en donde la caracterización funcional de la relación se establece en la identificación de invariantes a partir de la variación continua de parámetros.

Con base en lo que se describió en las dos secciones anteriores, se concluye que, en efecto, el contexto del movimiento es significativo para el análisis variacional, en cuanto permite apreciar y describir (modelar) el comportamiento a través de sus niveles de variación. En dicho proceso, igualmente se reconoce la importancia del ambiente dinámico pues permitió establecer una comparación entre comportamientos y una caracterización de invariantes relevantes para la modelación del fenómeno.

Sin embargo, se destaca que una representación dinámica por sí sola no conlleva el reconocimiento explícito de todas las consideraciones que se asumen durante la exploración a través de ciertas estrategias dinámicas. Por ejemplo, para el reconocimiento explícito de las consideraciones tomadas en cuenta durante el arrastre fue necesario discutir la dependencia del eje espacial y temporal respecto a quien observa (y mide) el fenómeno, confrontando la consideración del tiempo como referente absoluto.

Así, se propone que en el análisis del fenómeno de caída libre, así como en fenómenos de variación afines, la atención se centre en la forma relativa que guardan entre sí las gráficas correspondientes a los distintos niveles de variación, incorporando poco a poco los ejes a través de la necesidad que responde a su uso en la descripción del movimiento. Fijar desde un inicio los ejes implica que ya se han asumido ciertas condiciones respecto al fenómeno y limita a su vez la concepción de lo que determina un nivel de variación acerca de otro.

9. Conclusiones

Con base en los resultados obtenidos, se respalda la necesidad de propiciar una construcción de conocimiento matemático centrada *tanto en* el uso que le da sentido a dicho conocimiento *como en* la comunidad que lo construye.

En múltiples ocasiones, el papel del género se obvia o se considera un mero accesorio; sin embargo, las implicaciones de cómo nos identificamos culturalmente (de forma consciente o inconsciente) se entremezclan de manera intricada y difusa en nuestro día a día. La experiencia en el aula no es, por supuesto, hermética a tales efectos, como se ha comprobado en este estudio. De ahí la relevancia de seguir invitando a la comunidad educativa para sumar esfuerzos en la lucha por una equidad de género: el profesorado, el alumnado, las autoridades… todas y todos podemos hacer algo al respecto.

En particular, dados los hallazgos de la presente investigación, se sugiere al profesorado considerar con especial importancia el fenómeno de la escasa participación de las mujeres en el aula. Iniciativas como el mostrar las respuestas de las y los alumnos con sus nombres sugieren una línea de acción, pero, tal como se evidenció, ello por sí solo no es suficiente: si bien la participación de las mujeres ha de ser *propiciada*, no ha de ser *forzada*. La confianza generada en el aula y la atención a los comentarios estereotípicos que puedan emerger son estrategias que sin duda contribuirán a favorecer el sentimiento de pertenencia de las mujeres estudiantes.

Por otro lado, respecto a la *funcionalidad del saber*, los resultados de la fase empírica del estudio sugieren que las simulaciones en un ambiente digital pueden ser consideradas por el alumnado como un soporte concreto, tan *real* como sus contrapartes físicas, por lo que representan una alternativa viable (bajo ciertas condiciones socioeconómicas, claro está) para la experimentación en el aula.

Asimismo, la experimentación *digital* permite analizar directamente el comportamiento del movimiento desde el fenómeno mismo, al encontrarse la simulación en el mismo ambiente que sus representaciones matemáticas. En ese sentido, *modelo* y *modelado* conviven a través de vínculos que se pueden *dinamizar*.

La articulación entre disciplinas se interpreta entonces desde la *modelación*, aunque, como se señaló con anterioridad, el énfasis se realizó en la parte matemática. Particularmente, se cuestiona el proceso didáctico tradicional *datos–fórmula–sustitución* en los cursos de Ecuaciones Diferenciales y se replantea el tratamiento en términos de un análisis variacional que parta de una descripción cualitativa del fenómeno para una posterior geometrización, numerización y temporización, donde se discuta la necesidad y suficiencia de las condiciones *iniciales* para determinar una solución. De este modo se aportan elementos para fortalecer el puente entre las matemáticas escolares y el "*mundo real*", crucial en el caso de una carrera fisicomatemática.

10. Prospectivas

A partir de la investigación desarrollada se perfilan algunas posibles líneas para investigaciones futuras:

- La *comparación de intensidades* en el análisis variacional: Haciendo uso de las representaciones dinámicas, se puede profundizar en la comparación con base en las intensidades de cambio apreciadas en dos estados o intervalos de un mismo fenómeno, como ocurrió en este estudio a partir del contexto de movimiento. Asimismo, se podría estudiar la comparación de intensidades entre dos estados o intervalos de fenómenos diferentes con el fin de contrastar sus comportamientos respectivos. En términos de Arrieta y Díaz (2016), se podría contrastar, por ejemplo, lo lineal con su *otredad* mediante el contraste de movimientos con velocidad constante y variable.
- El uso de *estrategias dinámicas* en el análisis variacional: Dependiendo de la noción matemática que se desee abordar, se puede propiciar el uso de las estrategias dinámicas caracterizadas (*exploración de parámetros*, *búsqueda de invariantes*, *ajuste en la estructura* y *arrastre con base en condiciones iniciales*) en otros contextos estudiando su pertinencia a partir de sus valores pragmáticos y epistémicos (en el sentido de Artigue, 2002), e incluso, se podría explorar la existencia de otras estrategias dinámicas.
- Incorporación paulatina de los *ejes coordenados* en el análisis variacional: Retomando lo discutido en la sección 8.2, se podría ahondar en la exploración gráfica de las relaciones del tipo $f \leftrightarrow f' \leftrightarrow f'' \leftrightarrow \cdots f^{(n)}$ con base en las cualidades que asocian a los diferentes niveles de variación, particularmente, en cuanto a la forma relativa que guardan entre sí sus gráficas correspondientes. Es decir, analizar la incorporación paulatina de los ejes coordenados a través de la necesidad que responde a su uso en la descripción cualitativa y cuantitativa del fenómeno de variación abordado.
- El *género* y el *orden de resolución*: Dada la consistente diferencia hallada entre mujeres y hombres en cuanto al orden que tendieron a seguir en la resolución de las tareas planteadas (ellas siguiendo el orden establecido y ellos adelantándose o regresándose), se podría profundizar en las razones de este comportamiento diferenciado, o bien, en las implicaciones que pudiera tener en su aprendizaje y en su evaluación.

Referencias

A continuación se presenta una lista con las referencias que fueron citadas a lo largo del escrito.

De acuerdo con la sexta edición de las normas de la Asociación Americana de Psicología (APA, por sus siglas en inglés), en esta lista se ha de indicar el *apellido* de las personas autoras y las *iniciales* de su nombre; sin embargo, las iniciales por sí solas impiden reconocer el trabajo científico que fue realizado por mujeres.

Por tal motivo, dada la *perspectiva de género* adoptada, se decidió incorporar en las referencias el *nombre de pila completo* de las y los autores citados:

Allagnat, Ludivine; **Berghmans**, Stephane; **Falk-Krzesinski**, Holly J.; **Hanafi**, Shereen; **Herbert**, Rachel; **Huggett**, Sarah; y **Tobin**, Stacey. (2017). *Gender in the global research landscape*. Elsevier. doi:10.17632/bb3cjfgm2w.2

Arrieta, Jaime. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Arrieta, Jaime; y **Díaz**, Leonora. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19-48. doi:10.12802/relime.13.1811

Arrieta, Jaime; y **Díaz**, Leonora. (2016). Lo lineal y su otredad. En Jaime Arrieta y Leonora Díaz (Coords.), *Investigaciones latinoamericanas en modelación: Matemática Educativa* (pp. 17-57). México: Gedisa.

Arthur, Richard T. W. (1995). Newton's fluxions and equably flowing time. *Studies in History and Philosophy of Science*, *26*(2), 323-351. doi:10.1016/0039-3681(94)00037-A

Artigue, Michèle. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97–140). Bogotá, Colombia: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, Michèle. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

Boyce, William E.; y **DiPrima**, Richard C. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4.ª ed.). México: Editorial Limusa/Grupo Noriega Editores.

Buendía, Gabriela; y **García**, Carlos. (2002). Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales. En Cecilia R. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *15*(1), 109-114. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Caballero-Pérez, Mario; y **Cantoral**, Ricardo. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Rebeca Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*, 1195-1203. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caballero-Pérez, Mario; y **Cantoral**, Ricardo. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *30*, 1057-1065.

Cantoral, Ricardo. (2013a). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública-Subsecretaría de Educación Media Superior.

Cantoral, Ricardo. (2013b). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, Ricardo; **Molina**, Juan Gabriel; y **Sánchez**, Mario. (2003). Socioepistemología de la predicción. En Javier Lezama, Mario Sánchez y Juan Gabriel Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, Ricardo; **Moreno-Durazo**, Angélica; y **Caballero-Pérez**, Mario. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, *50*(1–2), 77-89. doi:10.1007/s11858-018-0922-8

Cantoral, Ricardo; **Reyes-Gasperini**, Daniela; y **Montiel**, Gisela. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Carranza-Rogerio, Brenda. (2016). *Caracterización de la relación entre género y desempeño académico en estudiantes de álgebra abstracta: Estudio de casos* (Tesis de maestría inédita). Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cheryan, Sapna. (2012). Understanding the paradox in math-related fields: Why do some gender gaps remain while others do not? *Sex Roles*, *66*, 184-190. doi:10.1007/s11199-011-0060-z

El **Colegio de México**. (2018). *Desigualdades en México*. México: Autor/Red de Estudios sobre Desigualdades. **Conway**, Jill K.; **Bourque**, Susan C.; y **Scott**, Joan W. (1987). Introduction: The concept of gender. *Daedalus – Journal of the American Academy of Arts and Sciences*, *116*(4), XXI–XXX. doi:10.2307/200251207

Cordero, Francisco. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: El eslabón de la matemática y el cotidiano. En Jaime Arrieta y Leonora Díaz (Coords.), *Investigaciones latinoamericanas en modelación: Matemática Educativa* (pp. 59-88). México: Gedisa.

Cordero, Francisco; **Cen**, Claudia; y **Suárez**, Liliana. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214.

Cordero, Francisco; **Solís**, Miguel; **Buendía**, Gabriela; **Mendoza**, E. Johanna; y **Zaldívar**, José David. (2016). *El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales: Una argumentación gráfica*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, Francisco; **Suárez**, Liliana; **Mena**, Jaime; **Arrieta**, Jaime; **Rodríguez**, Ruth; **Romo**, Avenilde; **Cârsteanu**, Alin; y **Solís**, Miguel. (2009). La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *22*, 1717-1726.

Cruz-Amaya, Melvin. (2019). *Linealidad y angularidad en la esfera. Un nuevo escenario de trabajo geométrico* (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Dasgupta, Nilanjana; y **Stout**, Jane G. (2014). Girls and women in science, technology, engineering, and mathematics: STEMing the tide and broadening participation in STEM careers. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, *1*(1), 21-29. doi:10.1177/2372732214549471

Drijvers, Paul; **Kieran**, Carolyn; **Mariotti**, Maria-Alessandra; **Ainley**, Janet; **Andresen**, Mette; **Chan**, Yip Cheung; **Dana-Picard**, Thierry; **Gueudet**, Ghislaine; **Kidron**, Ivy; **Leung**, Allen; y Meagher, **Michael**. (2010). Integrating technology into Mathematics Education: Theoretical perspectives. En Celia Hoyles y Jean-Baptiste Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 89-132). Nueva York, Estados Unidos: Springer Science + Business Media. doi:10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Edwards, C. Henry; y **Penney**, David E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4.ª ed.). México: Pearson Educación.

Elsgoltz, Lev. (1969) *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Moscú, Rusia: Editorial MIR.

Fallas-Soto, Rodolfo. (2015). *Existencia y unicidad: Estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden* (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. doi:10.13140/RG.2.1.1265.6485

Farfán, Rosa María. (2012). *Socioepistemología y ciencia: el caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Gedisa.

Farfán, Rosa María; y **Simón**, María Guadalupe. (2016). *La construcción social del conocimiento: El caso de género y matemáticas*. México: Gedisa.

Francis, Becky; **Archer**, Louise; **Moote**, Julie; **DeWitt**, Jen; **MacLeod**, Emily; y **Yeomans**, Lucy. (2017). The construction of physics as a quintessentially masculine subject: Young people's perceptions of gender issues in access to physics. *Sex Roles*, *76*, 156-174. doi:10.1007/s11199-016-0669-z

García de León, María Antonia. (2002). *Herederas y heridas: Sobre las élites profesionales femeninas*. España: Ediciones Cátedra/Universitat de València/Instituto de la Mujer.

Good, Catherine; **Aronson**, Joshua; e **Inzlicht**, Michael. (2003). Improving adolescents' standardized test performance: An intervention to reduce the effects of stereotype threat. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *24*, 645-662. doi:10.1016/j.appdev.2003.09.002

Good, Catherine; **Aronson**, Joshua; y **Harder**, Jayne Anne. (2008). Problems in the pipeline: Stereotype threat and women's achievement in high-level math courses. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *29*, 17-28. doi:10.1016/j.appdev.2007.10.004

Gray, Eddie; y **Tall**, David. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. *Proceedings of the International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, *25*, 65-72.

Guevara, Carlos Alberto. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación* (Tesis de maestría inédita). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Halliday, David; **Resnick**, Robert; y **Walker**, Jearl. (2009). *Fundamentos de Física* (Vol. 1, 8.ª ed.). México: Grupo Editorial Patria.

Hegedus, Stephen J.; y **Moreno-Armella**, Luis. (2013). Intersecting representation and communication infrastructures. En Stephen J. Hegedus y Jeremy Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 47-62). Dordrecht, Holanda: Springer Science + Business Media. doi:10.1007/978-94-007-5696-0_4

Hernández, A. (1995). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinaras* (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Hinojos, Jesús Eduardo y **Torres-Corrales**, Diana. (2018). *Encuesta del entorno sociocultural del estudiante de ingeniería* [Formulario de Google]. Recuperado de https://goo.gl/forms/pTbE9yiFgHoYzaxo2

Joubert, Marie. (2017). Revisiting theory for the design of tasks: Special considerations for digital environments. En Allen Leung y Anna Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies* *in designing Mathematics Education tasks* (pp. 17–40). Suiza: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-43423-0_2

Kaput, James J.; y **Roschelle**, Jeremy. (2013). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. En Stephen J. Hegedus y Jeremy Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 13-26). Dordrecht, Holanda: Springer Science + Business Media. doi:10.1007/978-94-007-5696-0_2

Kim, Ann Y.; **Sinatra**, Gale M.; y **Seyranian**, Viviane. (2018). Developing a STEM identity among young women: A social identity perspective. *Review of Educational Research*, *20*(10), 1-37. doi:10.3102/0034654318779957

Kuhn, Thomas S. (2013). *La estructura de las revoluciones científicas* (4.ª ed.). México: Fondo de Cultura Económica.

Lamas, Marta. (2013). Usos, dificultades y posibilidades de la categoría "género". En Marta Lamas (Comp.), *El género: La construcción cultural de la diferencia sexual* (pp. 327–366). México: Universidad Nacional Autónoma de México/Programa Universitario de Estudios de Género/ Miguel Ángel Porrúa.

Lindberg, Sara. M.; **Hyde**, Janet Shibley; **Petersen**, Jennifer L.; y **Linn**, Marcia C. (2010). New trends in gender and mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *136*(6), 1123-1135. doi:10.1037/a0021276

López Díaz, José Antonio. (2013). Domingo de Soto: Teórico de la dinámica. *Asociación Meteorológica Española Boletín*, (40), 28–31.

Marciuc, Daly; y **Miron**, Cristina. (2014). Technology integration of GeoGebra software in interdisciplinary teaching. En Ion Roceanu (Ed.), *Proceedings of the 10th international scientific conference "eLearning and Software for Education"* (Vol. 3, pp. 280-287). Bucharest, Rumania: Editura Universitatii Nationale de Aparare "Carol I". doi:10.12753/2066-026X-14-184

Martínez, Alfredo; **Pluvinage**, François; y **Montaño**, Luis Manuel. (2017). El concepto de la derivada en el contexto de la enseñanza de la física, recursos para el uso de diferenciales y las tecnologías de información y comunicación. *El cálculo y su enseñanza, enseñanza de las ciencias y la matemática*, *8*, 1-17.

Master, Allison; y **Meltzoff**, Andrew N. (2016). Building bridges between psychological science and education: Cultural stereotypes, STEM, and equity. *Prospects*, *46*(2), 215-234. doi:10.1007/s11125-017-9391-z

Mendoza, E. Johanna; y **Cordero**, Francisco. (2012). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad. En Rebeca Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *25*, 1023-1030. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

OECD. (1999). *Development Assistance Committee guidelines for gender equality and women's empowerment in development co-operation.* Francia: Autor.

Parada, Sandra-Evely; **Conde**, Luis-Alexander; y **Fiallo**, Jorge. (2016). Mediación digital e interdisciplinariedad: Una aproximación al estudio de la variación. *Bolema*, *30*(56), 1031-1051. doi:10.1590/1980-4415v30n56a10

Perdomo, Josefa. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Números – Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *78*, 113-134.

Pérez, Juan José; y **Sols**, Ignacio. (1994). Domingo de Soto en el origen de la ciencia moderna. *Revista de Filosofía, 3.ª época*, *7*(12), 455-475.

Plaza, Luis Fernando. (2015). Perspectivas en la enseñanza aprendizaje del modelamiento matemático en ingeniería. Caso ecuaciones diferenciales. *Páginas de Ingeniería*, *3*(1), 35-39.

Plaza, Luis Fernando. (2016). Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. *Revista Científica*, *2*(25), 176-187. doi:10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a1

Reyes-Gasperini, Daniela. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología: Un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas*. Barcelona, España: Gedisa.

Riegle-Crumb, Catherine; y **Humphries**, Melissa. (2012). Exploring bias in math teachers' perceptions of students' ability by gender and race/ethnicity. *Gender and Society*, *26*(2), 290-322. doi:10.1177/0891243211434614

Rodríguez, Ruth. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: El caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-1), 191-210.

Rodríguez, Ruth; y **Bourguet-Díaz**, Rafael Ernesto. (2015). Building bridges between mathematics and engineering: Identifying modeling practices through Differential Equations and Simulation. *American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition*, *122*. Recuperado de https://www.asee.org/public/conferences/56/papers/13153/view

Rodríguez, Ruth; y **Quiroz**, Samantha. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99-124. doi:10.12802/relime.13.1914

Romero, Ángel; y **Rodríguez**, Dary. (2003). La formalización de los conceptos físicos: El caso de la velocidad instantánea. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 57-67.

Romero-Fonseca, Fabián W. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier: Pautas para un diseño de intervención en el aula* (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Roschelle, Jeremy; y **Hegedus**, Stephen. (2013). Introduction: Major themes, technologies, and timeline. En Stephen J. Hegedus y Jeremy Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 5-11). Dordrecht, Holanda: Springer Science + Business Media. doi:10.1007/978-94-007-5696-0_1

Roth, Wolff-Michael. (2014). Interdisciplinary approaches in Mathematics Education. En Steve Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 317-320). Dordrecht, Holanda: Springer Science + Business Media. doi:10.1007/978-94-007-4978-8

Rubio, Leonela M.; **Prieto**, Juan Luis; y **Ortiz**, José. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation*, *2*, 90-111.

Rubio-Pizzorno, Sergio Andrés. (2018). *Integración digital a la práctica del docente de geometría* (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Salinas, Patricia. (2013). Approaching calculus with SimCalc: Linking derivative and antiderivative. En Stephen J. Hegedus y Jeremy Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 383-399). Dordrecht, Holanda: Springer Science + Business Media. doi:10.1007/978-94-007-5696-0_21

Sanders, Mark. (2009). STEM, STEM Education, STEMmania. *The Technology Teacher*, *68*(4), 20-26.

Sarama, Julie; y **Clements**, Douglas H. (2016). Physical and virtual manipulatives: What is "concrete"? En Patricia S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7, pp. 71-93). Suiza: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-32718-1_4

Simmons, George F. (1993). *Ecuaciones diferenciales: Con aplicaciones y notas históricas*. Madrid, España: McGraw-Hill/Interamericana de España.

Simon, Martin. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Soto, Daniela; y **Cantoral**, Ricardo. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema*, *28*(50), 1525-1544. doi:10.1590/1980-4415v28n50a25

Spelke, Elizabeth S. (2005). Sex differences in intrinsic aptitude for mathematics and science? A critical review. *American Psychologist*, *60*(9), 950-958. doi:10.1037/0003-066X.60.9.950

Spiegel, Murray R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Steele, Claude M. (1997). A threat in the air: How stereotypes shape intellectual identity and performance. *American Psychologist*, *52*(6), 613-629.

Steinthorsdottir, Olof Bjorg; y **Herzig**, Abbe. (2014). Cultural influences in mathematics education. En Steve Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 129-132). Dordrecht, Holanda: Springer Science + Business Media. doi:10.1007/978-94-007-4978-8

Suárez, Liliana. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. México: Díaz de Santos.

Tall, David. (2013). The evolution of technology and the mathematics of change and variation: Using human perceptions and emotions to make sense of powerful ideas. En Stephen J. Hegedus y Jeremy Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 449-461). Dordrecht, Holanda: Springer Science + Business Media. doi:10.1007/978-94-007-5696-0_25

Talley, Kimberly Grau; y **Martinez Ortiz**, Araceli. (2017). Women's interest development and motivations to persist as college students in STEM: A mixed methods analysis of views and voices from a Hispanic-Serving Institution. *International Journal of STEM Education*, *4*(5). doi:10.1186/s40594-017-0059-2

Villa-Ochoa, Jhony Alexander; y **Ruiz**, Mauricio. (2010). Pensamiento variacional: Seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3), 514-528.

Zill, Dennis G. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: International Thomson Editores.

Zubieta, Judith; y **Herzig**, Mónica. (2016). *Participación de las mujeres y niñas en la educación nacional y en el sistema de ciencia, tecnología e innovación en México: Evaluación nacional con base en el marco de indicadores de equidad de género en la sociedad del conocimiento*. México: Women in global science and technology-Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Anexos

Anexo A. Carta de autorización

Ciudad de México, a 26 de junio de 2018

Yo, ____,

acepto participar en la actividad "Modelación-Simulación digital: Ecuaciones diferenciales", enmarcada en un proyecto de investigación de Maestría desarrollado por la Lic. Brenda Carranza Rogerio (ORCID 0000-0003-4114-533X) bajo la supervisión de la Dra. Rosa María Farfán Márquez (http://www.matedu.cinvestav.mx/rfarfan/presentacion.php), llevada a cabo en las instalaciones del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Autorizo que los registros tomados durante la actividad y los productos derivados se utilicen exclusivamente con fines académicos, bajo las normas éticas del manejo de datos personales en la investigación científica, entendiendo que mi nombre jamás aparecerá en los reportes.

Deseo acceder a los reportes técnicos emanados de la investigación:

☐ SÍ ☐ NO

Enviarlos a la cuenta de correo electrónico: ____________________________

____

Nombre y firma

Anexo B. Cuaderno de notas

CUADERNO DE NOTAS

MODELACIÓN - SIMULACIÓN DIGITAL: ECUACIONES DIFERENCIALES
EXPERIMENTACIÓN VIRTUAL DE UN FENÓMENO FÍSICO

Descripción

Este instrumento tiene por objetivo guiar la observación de la implementación de un diseño enmarcado en un proyecto de investigación de Maestría desarrollado por la Lic. Brenda Carranza-Rogerio, bajo la dirección de la Dra. Rosa María Farfán Márquez, sobre la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria (EDO) a partir de la modelación de un fenómeno físico mediante la integración de tecnología digital a través de la simulación y graficación en un ambiente de matemática dinámica con perspectiva de género.

Objetivos de la implementación

En cuanto a las y los estudiantes, dado que en su siguiente semestre cursarán la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, se pretende introducir la noción de EDO de manera dinámica e interactiva con base en la experimentación virtual de un fenómeno físico que simula la caída de una gota de agua, y de un conjunto de gotas, de tal manera que construyan un modelo descriptivo y predictivo del fenómeno partiendo de lo cualitativo, retomando significados contextuales, gráficos y numéricos, para concluir con la notación convencional del cambio y la variación con el fin de darle significado.

En cuanto a la investigación, se busca explorar la hipótesis epistemológica que sustenta el diseño respecto a que *la ecuación diferencial surge de un fenómeno de variación a cuya naturaleza dinámica se puede acceder a través de software de matemática dinámica*; por ende, la implementación misma tiene por objetivo recabar datos para dicha exploración.

Aplicación

Las y los participantes son 11 estudiantes de Nivel Superior (universidad) que acaban de cursar la asignatura de Cálculo I: 3 mujeres y 8 hombres provenientes de una carrera fisicomatemática.

El diseño consta de tres *tareas* divididas en 4 *momentos* cada una, más una tarea de introducción a las herramientas del software (GeoGebra).

La implementación se planea para dos sesiones de 2 horas cada una, llevadas a cabo el mismo día con un receso entre ambas para comer:

- **Sesión 1**: Introducción (Tarea 0), Tarea 1 y Tarea 2.
- **Sesión 2**: Tarea 3, encuesta sobre el entorno sociocultural del estudiante de ingeniería elaborada por Hinojos y Torres-Corrales (2018) basada en la obra de Farfán y Simón (2016) sobre el caso de género y matemáticas en la construcción social del conocimiento, y cierre con una etapa de metacognición-socialización.

Durante ambas sesiones, además de las notas vaciadas en este instrumento, se tomará registro de audio y video del aula en general, y se grabará la pantalla de cada participante con el fin de analizar posteriormente las estrategias dinámicas que ponen en juego durante la resolución del diseño. Además, todas las respuestas, incluyendo el estado final de cada applet, quedarán registradas en línea, en el grupo GeoGebra creado para este fin.

Los registros tomados durante la implementación y los productos derivados serán utilizados exclusivamente con fines académicos, bajo las normas éticas del manejo de datos personales en la investigación científica y bajo el consentimiento previo de las y los participantes.

<table>
<tr><th colspan="4">DATOS GENERALES</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Fecha: 26 de junio 2018
Horario Sesión 1: ___:___ hrs. a ___:___ hrs.
Horario Sesión 2: ___:___ hrs. a ___:___ hrs.
Lugar: Laboratorio de Cómputo, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, CDMX.
Participantes: _____ Mujeres _____ Hombres</td><td rowspan="2">Descripción del espacio físico:</td><td rowspan="2">Proceso de elección de lugares de las y los estudiantes:</td><td>Tareas o actividades abordadas en la Sesión 1:</td></tr>
<tr><td>Tareas o actividades abordadas en la Sesión 2:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Otros:</td></tr>
<tr><th colspan="4">PROCESO GENERAL</th></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué tareas realizó la investigadora?</td><td colspan="2">¿Cómo fue la interacción entre la investigadora y el alumnado?</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué tareas realizaron las y los estudiantes?</td><td colspan="2">¿Cómo fue la interacción entre las y los estudiantes?</td></tr>
<tr><td colspan="4">Otros:</td></tr>
</table>

DIMENSIÓN DIDÁCTICO-PEDAGÓGICA		
¿El alumnado comprende las indicaciones y preguntas expresadas de forma oral por la investigadora?	¿El alumnado presenta dificultades en la manipulación del equipo de cómputo o del software empleado?	¿Qué aspectos didácticos son posibilitados o fomentados por el uso del software (*applets dinámicos interactivos* y observación en tiempo real de las respuestas a través de la *función Evaluación del Grupo GeoGebra*)?
¿El alumnado manifiesta tener dificultades en la comprensión de algunos puntos específicos del diseño? Especificar cuáles:	¿De qué manera interviene la investigadora durante el proceso de resolución de las Tareas ante las dificultades identificadas?	*Otros*:

CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS		
¿Qué nociones matemáticas emergen en las intervenciones del alumnado o de la investigadora?	¿Las nociones que emergieron se asocian con las posibilidades dinámicas del software (*exploración continua de la simulación del fenómeno*, *ralentización del tiempo*, *variación de parámetros*, *visualización simultánea de gráficas y fenómeno*, *animaciones: ordenar diferencias/cambios y alinear diferencias/cambios*, *identificación de tendencias* o *convergencias*, etc.)?	¿Se hace referencia a aspectos *cualitativos* del fenómeno o de sus representaciones gráficas para abordar alguna noción matemática? De ser el caso, ¿cuáles y para qué noción?
¿De qué *naturaleza* (dinámica, gráfica, numérica, algebraica) son los argumentos matemáticos puestos en juego?	¿Son asociados entre sí argumentos matemáticos de más de una *naturaleza*?	O*tros*:

CONOCIMIENTO INTERDISCIPLINARIO Y DEL CONTEXTO	
¿Qué nociones físicas emergen en las intervenciones del alumnado o de la investigadora?	¿Qué relaciones se manifiestan entre nociones matemáticas y físicas?
¿Se hace referencia a las posibilidades dinámicas del software en la argumentación física (*exploración continua de la simulación del fenómeno*, *ralentización del tiempo*, *variación de parámetros o condiciones iniciales*, etc.)?	¿Cómo es interpretada la simulación digital en las argumentaciones físicas (*aproximación de la realidad*, *modelo de la realidad*, etc.)?
Otros:	

<table>
<tr><th colspan="3">ACONTECIMIENTOS DE LA COMUNIDAD</th></tr>
<tr><td>¿Se presentó alguna situación que favoreciera o impidiera la discusión del tema?</td><td>¿La investigadora priorizaba de alguna manera la atención a las estudiantes o a los estudiantes?</td><td>Otros:</td></tr>
<tr><th colspan="3">ACTITUDES</th></tr>
<tr><td>¿Cuál fue el comportamiento y/o actitud general del alumnado?</td><td>¿Cuál fue el rol de la investigadora?</td><td>¿Cuál fue el rol del alumnado en general?</td></tr>
<tr><td>¿Hubo estudiantes que participaban más que otras u otros?</td><td>¿Hubo estudiantes que no intervinieron o que lo hicieron mínimamente?</td><td>Otros:</td></tr>
</table>

REGISTROS COMPLEMENTARIOS		
¿Cuál fue la actitud del alumnado ante las *herramientas de grabación*: video, audio y pantalla?	¿Cuál fue la actitud del alumnado hacia el *observador externo*?	*Otros*:
Comentarios adicionales:		

Basado en el cuaderno de notas de Cruz-Amaya (2018).

Anexo C. *Libro GeoGebra* del diseño

Nota: El libro se puede consultar en: https://www.geogebra.org/m/DswwUSzJ

Cascada artificial

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

Diseño para significar la noción de *ecuación diferencial ordinaria* a partir de un fenómeno físico.

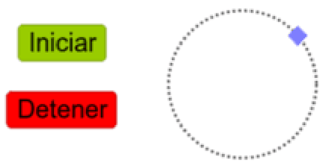


Tabla de contenidos

Anexo C.a. *Tarea 0 del diseño*

Nota: Dado que esta es una representación estática de la *Hoja dinámica*, se han añadido descripciones (sombreadas) de los efectos dinámicos de algunos applets.

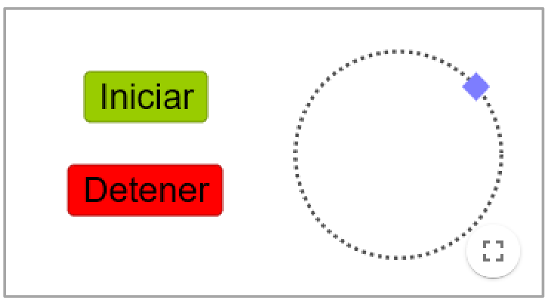
Conociendo GeoGebra

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

Para empezar, veamos cuáles son las herramientas que serán utilizadas a lo largo de esta actividad y exploremos cómo funcionan:

Botón

Para activar la función de cada **botón**, basta con dar clic sobre él:

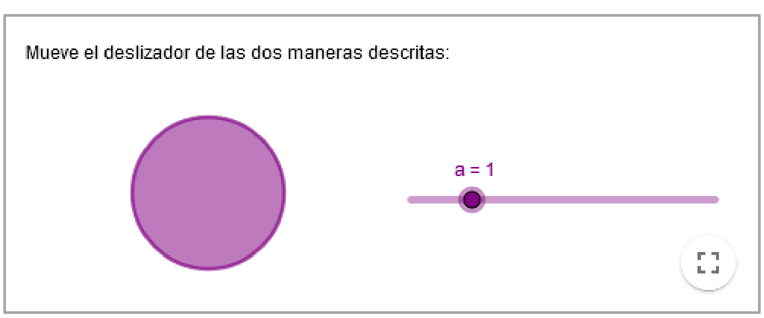


Al hacer clic en [Iniciar], *el cuadro azul comienza a desplazarse sobre la circunferencia punteada. Con* [Detener] *se pausa su desplazamiento.*

Deslizador

El **deslizador** sirve para explorar valores en un intervalo.

Una manera de hacerlo es seleccionar el punto sobre el segmento y deslizarlo. La otra manera, si se requiere ***mayor precisión***, es seleccionar el punto y moverlo con las flechas de dirección del teclado.



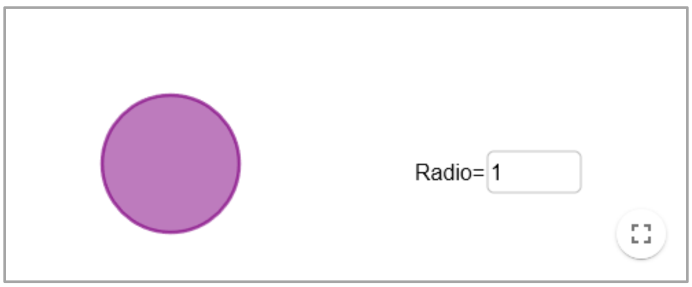
Al mover el deslizador, el radio del círculo se modifica en correspondencia con el valor de a.

Casilla de visibilidad

Para mostrar u ocultar algo, la **casilla** se activa o desactiva haciendo clic sobre ella:

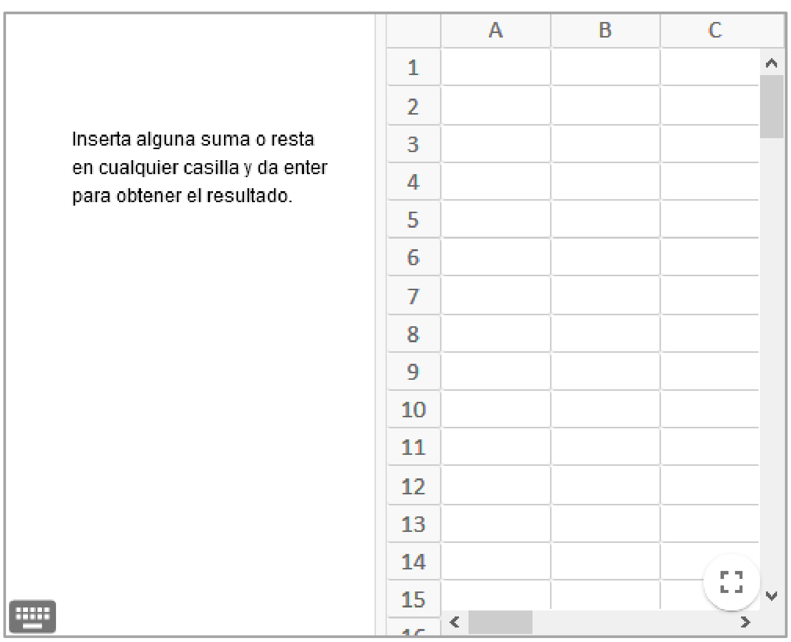
Casilla de entrada

Para introducir un valor en una **casilla de entrada**, basta con dar clic sobre ella, escribir el valor y dar enter:



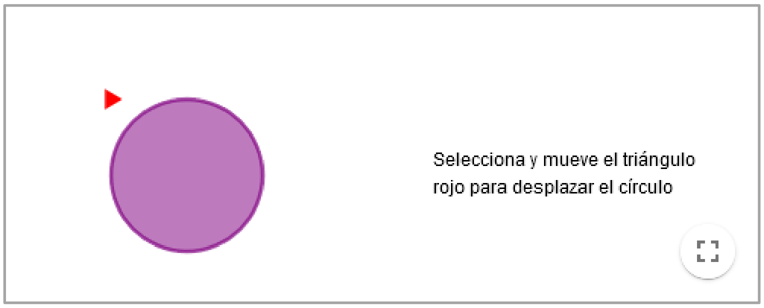
Hoja de cálculo

En las celdas de esta **hoja de cálculo** se pueden introducir valores y operaciones. Para las operaciones, basta con escribir la operación y dar enter para ver el resultado:



Mover un objeto

En ciertas partes de la actividad se te pedirá ubicar algún objeto. Para ello, sólo sigue las indicaciones:



Puntero, Punto y Lápiz

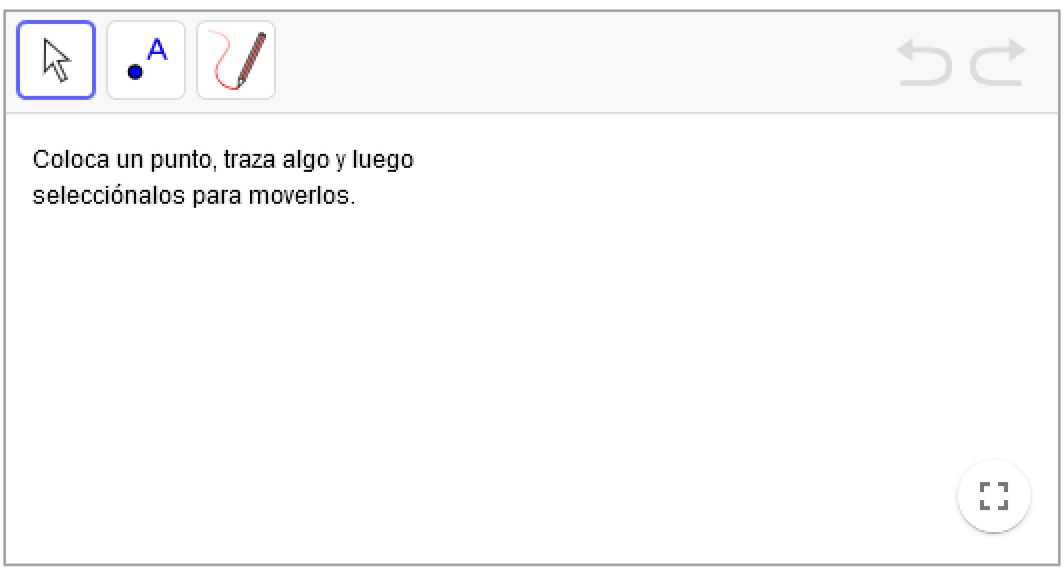
Estas herramientas sólo se activarán para ciertas actividades.

Con la herramienta **punto** puedes colocar un punto en donde desees.

Con la herramienta **lápiz** puedes trazar algo en la pantalla libremente.

Con la herramienta **puntero** puedes seleccionar algo en la pantalla (es como volver a la función normal).

Si quieres ***deshacer*** o ***rehacer*** alguna acción, utiliza las flechas que están en la esquina superior derecha.



Anexo C.b. Tarea 1 del diseño

Nota: Dado que esta es una representación estática de la *Hoja dinámica*, se han añadido descripciones (sombreadas) de los efectos dinámicos de los applets, o bien, de otros elementos que tengan movimiento.

Tarea 1: Gota de agua

Momento 1: Viendo al cielo

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

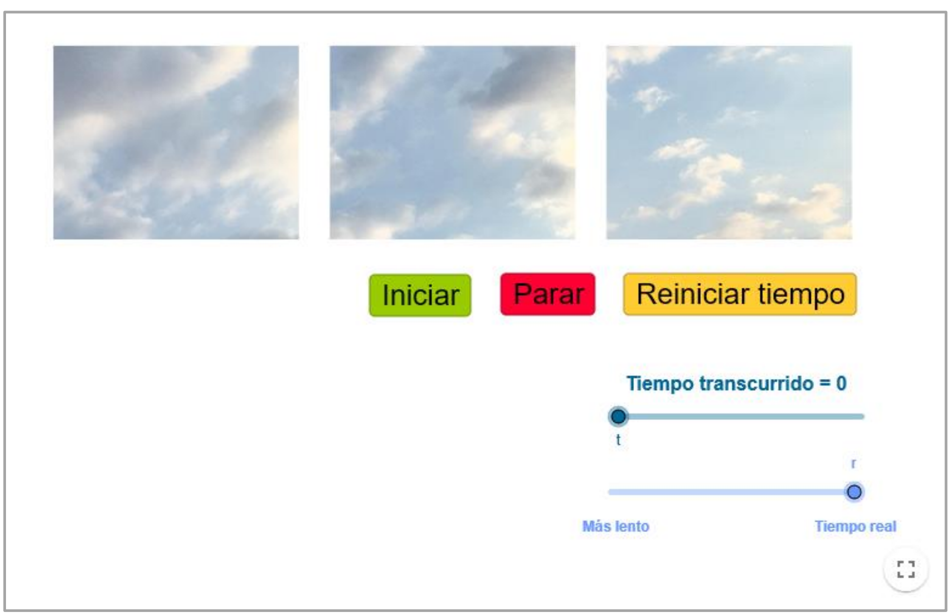
A continuación se muestra la **caída simultánea de tres gotas de agua**. La función de cada elemento en el applet es la siguiente: Botones:

- [**Iniciar**] comienza la caída de las gotas de agua
- [**Parar**] detiene el tiempo
- [**Reiniciar tiempo**] reinicia toda la animación

Deslizadores:

- **t** controla el paso del tiempo
- **r** modifica el paso del tiempo *(hacia la izquierda es **más lento** y a la derecha tiende al **tiempo real**)*

Applet 1.1.1



Al hacer clic en [Iniciar] *se muestra la caída de una gota de agua en cada imagen de cielo. De izquierda a derecha, cada gota cae más rápidamente que la anterior.* [Parar] *pausa las caídas y* [Reiniciar tiempo] *asigna a* t *el valor de* 0.

Al mover el deslizador de [Tiempo transcurrido] *se puede observar la posición de cada gota en cada valor de* t *seleccionado.*

El deslizador que va de Más lento *al* Tiempo real *permite ralentizar la animación.*

a) Con base en lo que acabas de observar, ¿**cuál de las tres gotas de agua cae más rápido**? ¿**En qué te fijaste** para determinarlo?

---

b) ¿A qué **factores físicos** podría deberse la diferencia en las caídas?

Ahora, se muestran las mismas tres escenas pero se agrega una nueva opción: [**Unir**]. Presiona el botón con esa leyenda y observa lo que sucede. Luego, presiona el botón [**Iniciar**] y responde las preguntas.

Applet 1.1.2

Al hacer clic en [Unir], *las tres escenas de cielo se alinean: la segunda se coloca debajo de la primera y la tercera debajo de la segunda. Con* [Separar de nuevo] *se vuelve al estado original. Con* [Iniciar] *se muestra la caída de una gota de agua que comienza en la primera escena y termina en la tercera.*

c) ¿Qué puedes decir ahora sobre la **caída de la gota de agua conforme transcurre el tiempo**?

d) ¿Se relaciona esto con alguno de los factores que mencionaste en el inciso **b)**? ¿**En cuál y por qué**?
Nota: Puedes ver de nuevo las tres escenas separadas en esta animación con el botón [**Separar de nuevo**].

Momento 2: Viendo más de cerca

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

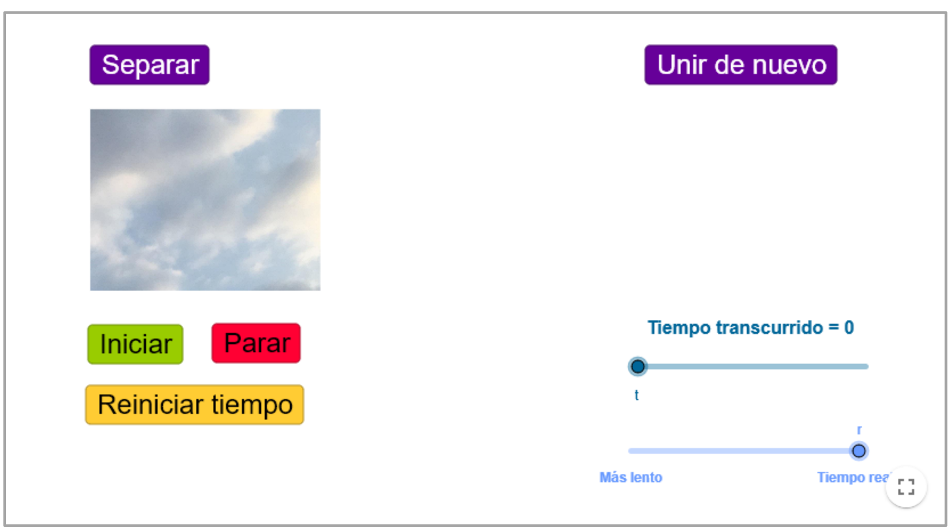
Ahora consideremos solo la primera de las tres partes de la caída. Presiona el botón [**Separar**] y observa lo que ocurre. La función de los demás elementos en este applet es como en los casos anteriores: Botones:

- [**Iniciar**] comienza la caída de las gotas de agua
- [**Parar**] detiene el tiempo
- [**Reiniciar tiempo**] reinicia toda la animación

Deslizadores:

- **t** controla el paso del tiempo
- **r** modifica el paso del tiempo (*hacia la izquierda es **más lento** y a la derecha tiende al **tiempo real***)

Applet 1.2.1



Con [Separar], *la escena se separa en tres secciones horizontales; la primera se queda a la izquierda, la segunda se coloca en el centro y la tercera se ubica hasta la derecha. Con* [Iniciar], *se muestra la caída de tres gotas de agua, una en cada sección. De izquierda a derecha, cada gota cae más rápidamente que la anterior.*

Haz clic en [**Iniciar**] y responde las preguntas.

a) ¿Cuál de las tres gotas de agua **cae más rápido**? ¿**En qué te fijaste** para determinarlo?

---

b) Si **dividiéramos nuevamente la primera** parte en tres etapas, ¿qué esperarías que ocurriera en cuanto a la diferencia en las caídas?

---

c) Y si siguiéramos **dividiendo en más partes**, ¿qué esperarías que ocurriera? Detalla lo más que puedas tu respuesta.

Momento 3: Reloj de agua

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

Observa ahora el siguiente video[41] de un reloj de agua en Osaka:

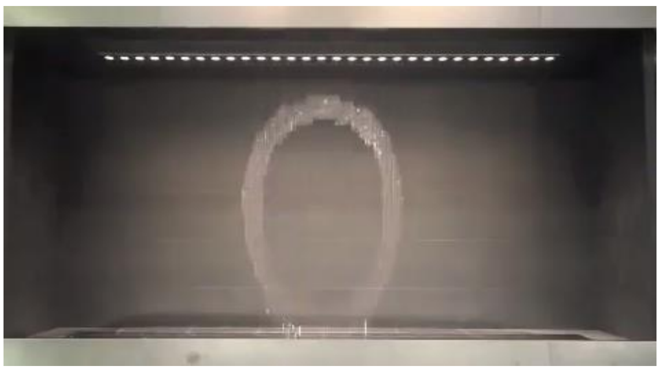
Video 1.3.1

[41] Todos los videos que aparecen en esta Tarea son fragmentos de un video titulado "Waterfall Graphic Print [Osaka Station City] 1" subido a YouTube por el usuario ゴリモン, recuperado el 8 de mayo de 2018 de https://www.youtube.com/watch?v=gusJeslMbLc

El video muestra números ("19:49", la hora) y diversas figuras que se forman con la caída de agua regulada.

El funcionamiento de este reloj se basa en la caída del agua. Las válvulas en su parte superior dejan caer cierta cantidad de agua en determinados momentos para ir formando los números y figuras que observaste. A continuación se muestra una de las figuras que aparecen en el mismo reloj de agua. Observa detenidamente su forma y responde las preguntas.

Video 1.3.2



El video muestra una figura circular descendiendo.

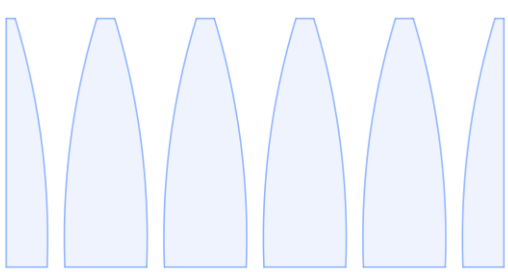
a) ¿Qué notas en la forma de la figura conforme va cayendo? *Nota: Si lo deseas, puedes dar clic en la configuración* [imagen de engrane] *del video y modificar su velocidad para ver más lentamente la caída del agua.*

---

b) ¿En qué se asocia tu respuesta anterior con las observaciones que hiciste sobre la caída de la gota de agua en los **Momentos 1** y **2**?

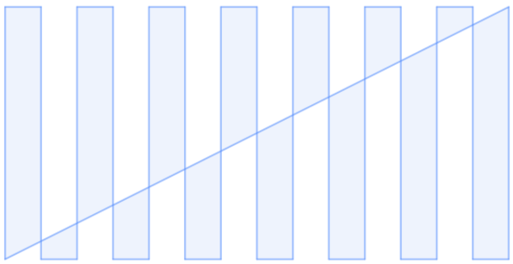
Ahora observa el siguiente par de imágenes y responde las preguntas sobre ellas:

Imagen 1.3.1



c) ¿Consideras que esta figura podría mostrarse en el reloj de agua? ¿**Por qué**?

Imagen 1.3.2



d) Y esta figura, ¿podría mostrarse en el reloj de agua? ¿**Por qué**?

Momento 4: Figuras en movimiento

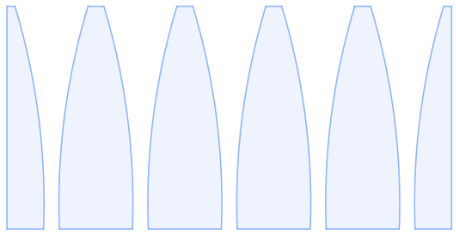
Autor: Brenda Carranza-Rogerio

Observa ahora los siguientes videos y responde las preguntas correspondientes.

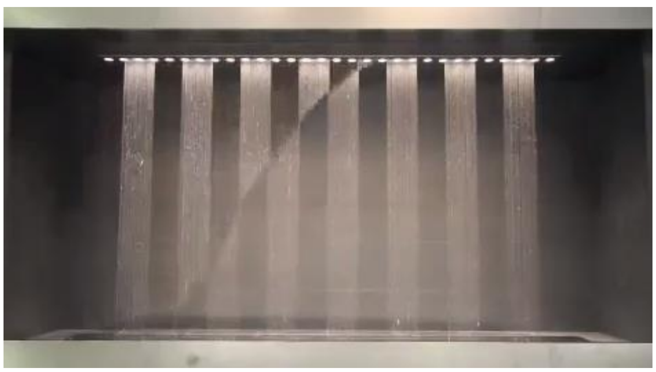
Video 1.4.1

El video muestra esta figura en movimiento formada por la caída de agua.

a) ¿Cómo se relaciona este video con lo que respondiste en el inciso **c)** del **Momento 3** respecto a si la figura se podría mostrar en el reloj de agua? Detalla lo más que puedas tu respuesta. *Nota: Debajo de esta pregunta se encuentra la figura que analizaste en dicho inciso.*

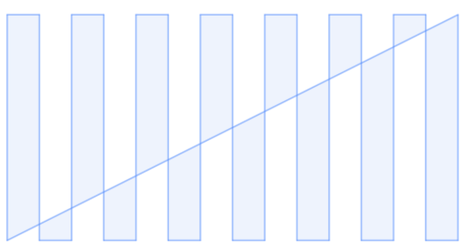


Video 1.4.2



El video muestra esta figura en movimiento formada por la caída de agua en transiciones de barras alternantes.

b) Y en cuanto a este video, ¿cómo se relaciona con lo que respondiste en el inciso **d)** del **Momento 3**? Detalla lo más que puedas en tu respuesta. *Nota: Debajo de esta pregunta se encuentra la figura que analizaste en dicho inciso.*



c) ¿Qué concluyes respecto a la caída de la gota de agua, el tiempo que tarda en caer y las características de las figuras en el reloj?

Anexo C.c. Tarea 2 del diseño

Nota: Dado que esta es una representación estática de la *Hoja dinámica*, se han añadido descripciones (sombreadas) de los efectos dinámicos de algunos applets.

Tarea 2: Más gotas de agua

Momento 1: Simulación

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

A continuación se muestra la caída de varias gotas de agua simulando lo que hace el reloj que vimos en la tarea anterior. Para permitir la caída de las gotas, cada válvula en el mecanismo se va abriendo de izquierda a derecha **a diferencias de tiempo iguales**. La función de los elementos en el applet es como en casos anteriores: Botones:

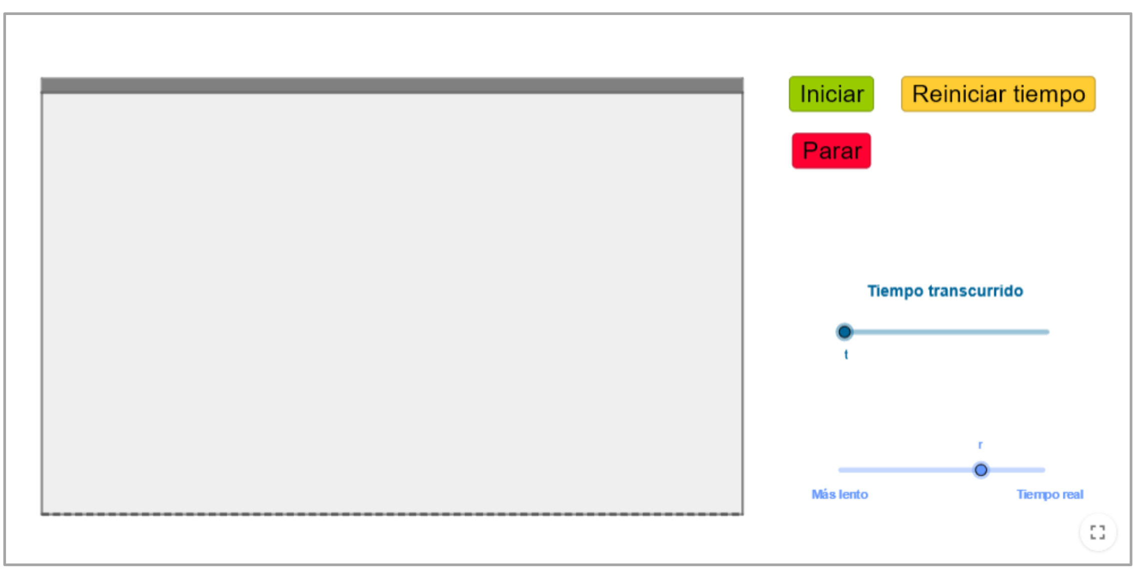
- [**Iniciar**] comienza la caída de las gotas de agua
- [**Parar**] detiene el tiempo
- [**Reiniciar tiempo**] reinicia toda la animación

Deslizadores:

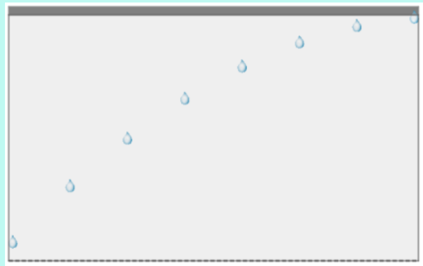
- **t** controla el paso del tiempo
- **r** modifica el paso del tiempo *(hacia la izquierda es **más lento** y a la derecha tiende al **tiempo real**)*

Da clic en el botón [**Iniciar**] y observa lo que ocurre. Luego, responde las preguntas.

Applet 2.1.1



Al [Iniciar] *la animación se observa la caída de un conjunto de gotas que se van "liberando" una por una de izquierda a derecha a diferencias de tiempo constantes. De tal forma que luego de cierto tiempo se observa lo siguiente:*



a) ¿Cómo es la caída de las gotas conforme pasa el tiempo de izquierda a derecha?

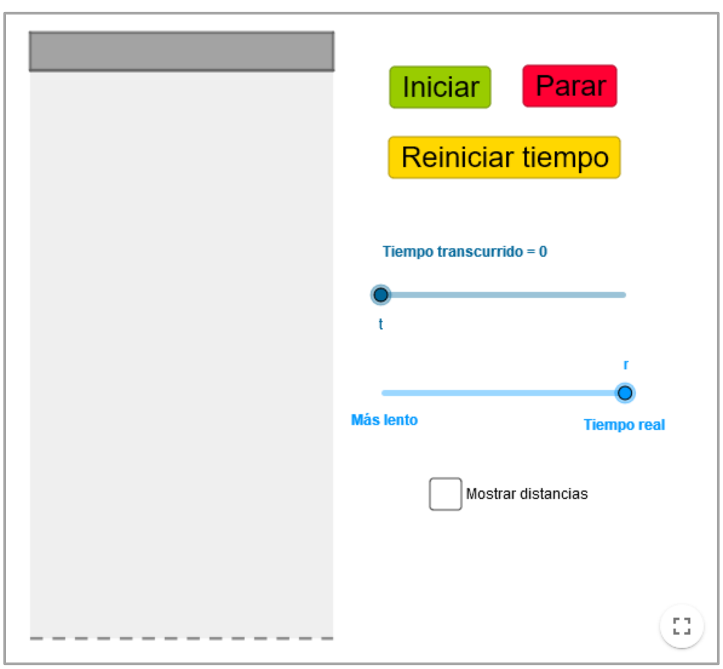
---

b) Busca un momento (con el botón [**Parar**] o con el deslizador **t**) en el applet en el cual **todas las gotas aparezcan**. ¿Qué observas en la ***forma*** que describen las gotas **de manera general**?

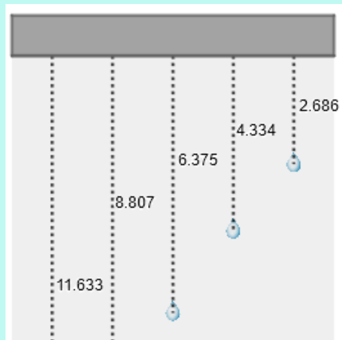
¡Momento de medir! En el siguiente applet se muestra una construcción similar a la anterior, pero ahora hemos hecho más ancha y mucho más alta la construcción (por ello verás que la caída de las gotas en **Tiempo real** se verá más lenta).

Haz clic en [**Iniciar**] y observa la caída de las gotas de agua. Luego, responde las preguntas que vienen a continuación.

Applet 2.1.2



Al [Iniciar] *se muestra una animación similar a la del* Applet 2.1.1, *solo que en esta ocasión el número de gotas se reduce y se agrega la opción de* [Mostrar distancias] *que, al ser activada, permite ver la medida de la distancia de cada gota a la válvula de la cual fue liberada:*

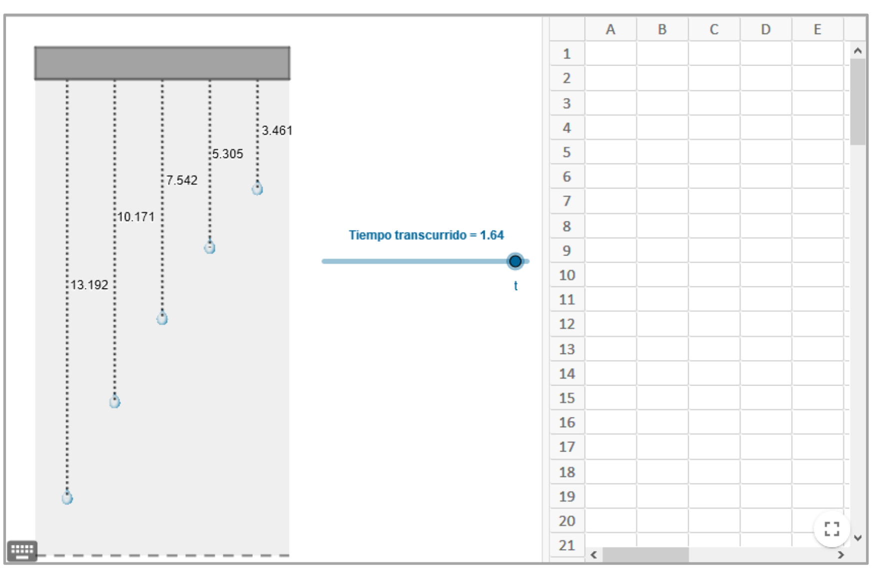


c) Ubícate en el tiempo **1.64** y activa la casilla con la leyenda "**Mostrar distancias**". Se mostrarán las distancias entre cada válvula y la gota que dejó caer. ¿**Cómo cambian** las distancias **desde la primera** gota (izquierda) **hasta la última** (derecha)?

---

d) ¿Y **cuánto cambian**? Para responder esta pregunta **registra los valores de cada distancia** en la ***fila 1*** de la tabla que aparece en el siguiente applet. Luego, **calcula las diferencias entre esas distancias** y registra los valores en la ***fila 2***. *Nota: Puedes calcular las diferencias de manera inmediata introduciendo en la celda la resta correspondiente, por ejemplo:* A1-B1.

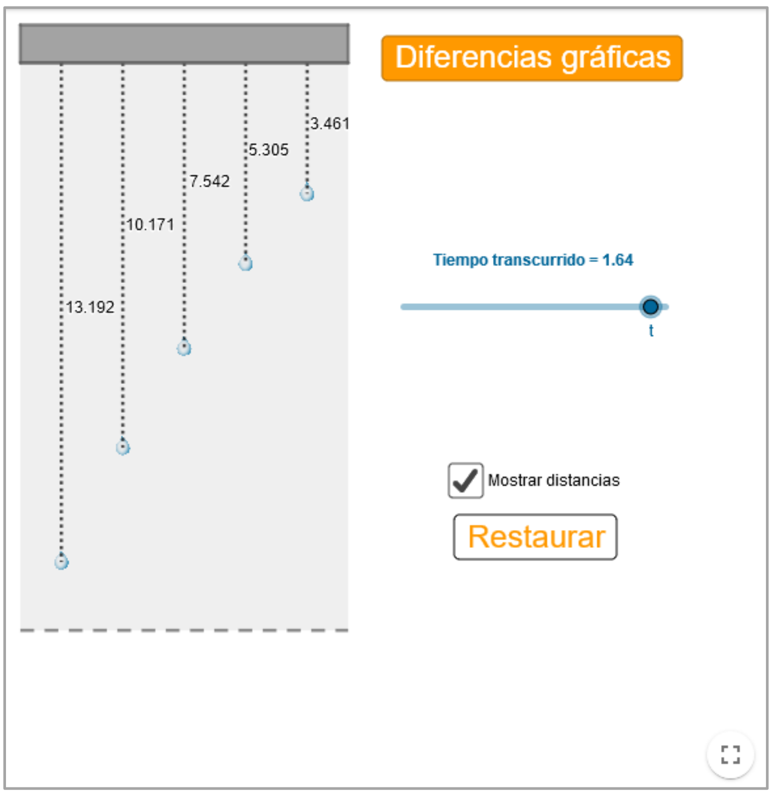
Applet 2.1.3



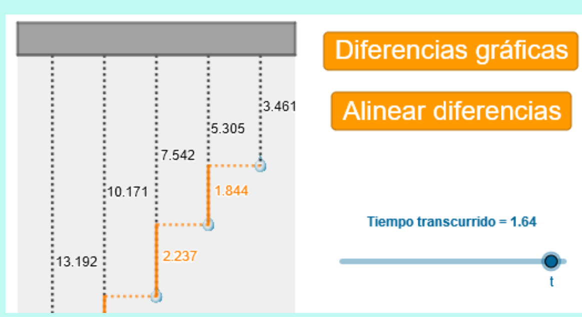
e) ¿Notas algún **patrón** en específico en las diferencias? De ser el caso, ¿**cuál** y **cómo lo encontraste**?

A continuación se muestra una forma gráfica de determinar las diferencias. Haz clic en el botón [**Diferencias gráficas**] para ver este procedimiento. Luego, presiona el botón [**Alinear diferencias**] que aparecerá y observa lo que sucede.

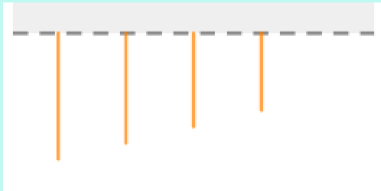
Applet 2.1.4



Al hacer clic en [Diferencias gráficas] *se muestra de manera animada la diferencia gráfica y numérica entre las distancias.*



Luego de ello, aparece el botón [Alinear diferencias]. *Al hacer clic en él, los segmentos correspondientes a las diferencias se desplazan hacia abajo y se alinean en su extremo superior:*



f) ¿Qué **comportamiento** notas en las **diferencias** alineadas en la parte inferior?

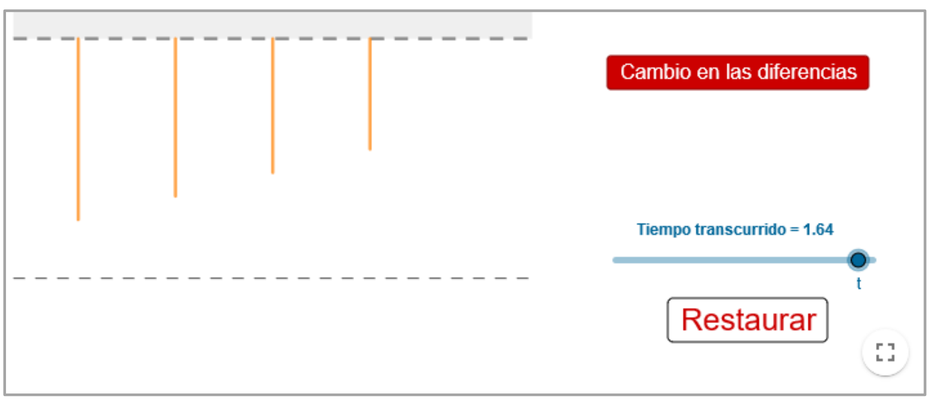
---

g) Manipula el tiempo con el deslizador **t** y observa el comportamiento de las **diferencias** (segmentos color naranja en la parte inferior) conforme cambia el tiempo. ¿**Qué patrón identificas en las diferencias**? Compara tu respuesta con lo que contestaste en los incisos **e)** y **f)**, y comparte tus observaciones. *Sugerencia: Calcula el **cambio en las diferencias** en la* **fila 3** *del* **Applet 2.1.3**.

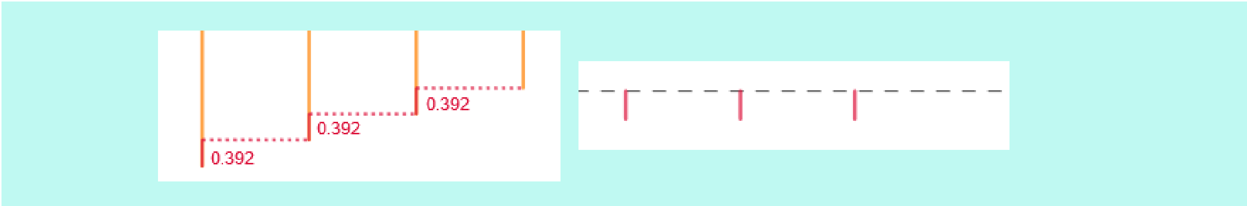
Lo que acabamos de encontrar es una representación que permite identificar **cómo cambian las diferencias** en las distancias de gota en gota.

Para seguir analizando este tipo de **cambio**, haz clic en [**Cambio en las diferencias**] en el siguiente applet y observa cómo se determina de forma gráfica. Posteriormente, presiona el botón [**Alinear cambio de las diferencias**] que aparecerá para observar **cómo y cuánto cambian las diferencias**.

Applet 2.1.5



Al hacer clic en [Cambio en las diferencias] *se muestra de manera animada el cambio entre las diferencias gráficas y aparece el botón* [Alinear cambio en las diferencias]. *Al hacer clic sobre este último se muestra una simulación similar a la del* Applet 2.1.4, *solo que esta se alinean los segmentos correspondientes al cambio entre las diferencias:*



h) ¿Qué **comportamiento** notas en el **cambio** de las **diferencias**?

i) ¿Cómo es este **comportamiento** al manipular el tiempo **t**?

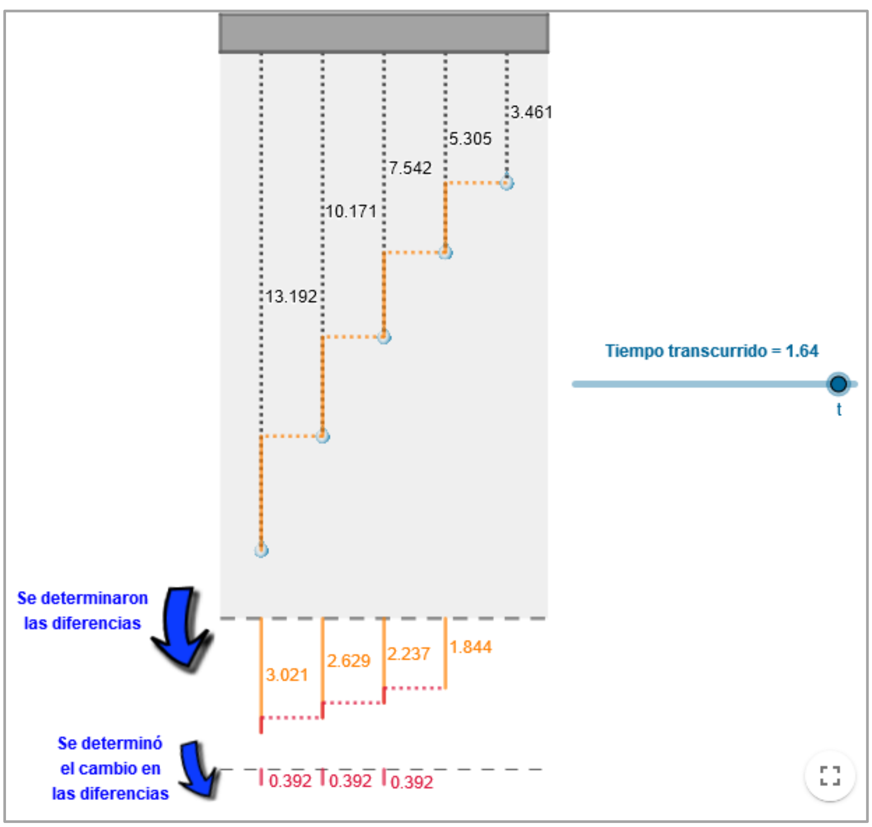
Momento 2: Ida y vuelta

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

Hasta el momento nos hemos concentrado en partir de la posición de las gotas de agua y describir cómo son sus **diferencias** (y cómo **cambian** estas diferencias).

Este **camino** se ejemplifica en el siguiente applet:

Applet 2.2.1



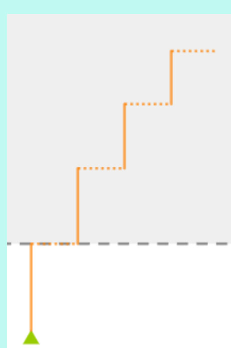
Ahora, nos concentraremos en el **camino opuesto**: partir de las **diferencias** y su **cambio** para descubrir en qué posición se encuentran las gotas.

Primero lo haremos partiendo de las **diferencias**:

a) Utiliza el siguiente applet para hallar en qué lugar se encuentra el **conjunto de gotas** partiendo de las diferencias ordenadas. Para ello, primero presiona el botón [**Ordenar diferencias**] y luego desplaza el **triángulo verde** para determinar el lugar del conjunto de gotas.

Applet 2.2.2

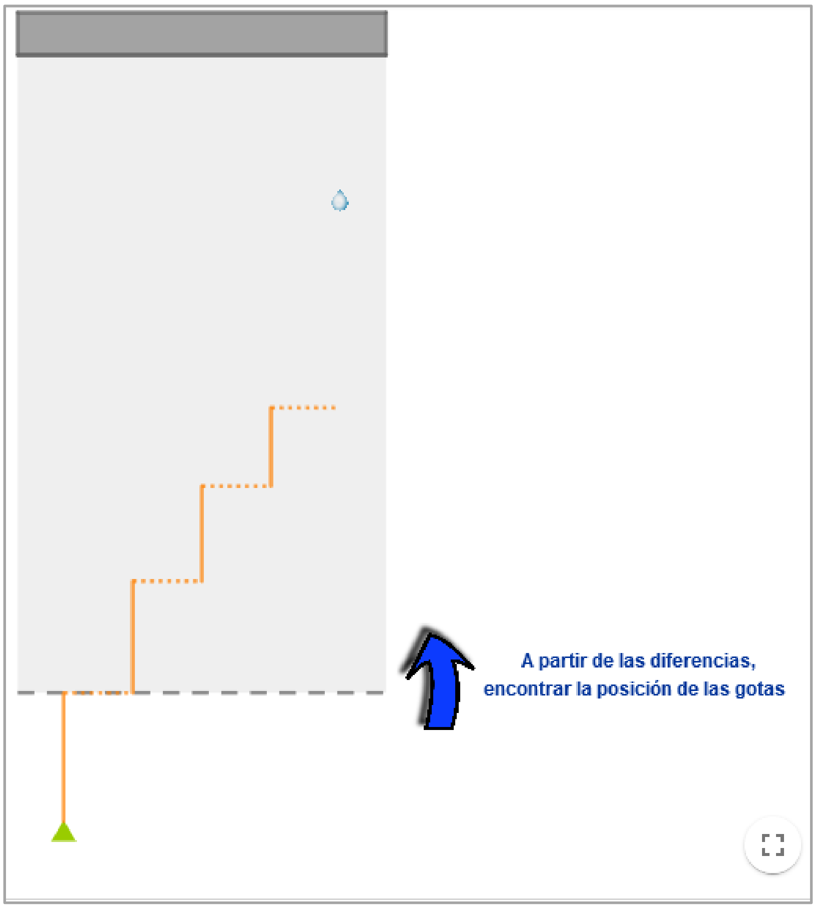
Al hacer clic en [Ordenar diferencias] *se muestra de manera animada una reorganización de los segmentos correspondientes a las diferencias. El extremo inferior de cada uno se alinea con el extremo superior del segmento que tiene a su izquierda:*



b) ¿Pudiste encontrar el lugar de las gotas? Comparte **por qué sí** o **por qué no** lo pudiste determinar.

El siguiente applet es similar al anterior, solo que ahora se muestra la posición de una de las gotas:

Applet 2.2.3



c) Desplaza las **diferencias** ordenadas moviendo el **triángulo verde**. ¿De qué manera te sirve esta nueva información (posición de una de las gotas) para encontrar el lugar del conjunto de gotas?

---

d) Si consideráramos más gotas, pero tuvieras también todas sus diferencias ordenadas como acabamos de ver, ¿te sería **suficiente** la información de una de las gotas para conocer el lugar de todo el conjunto de gotas, o **necesitarías** la información de más gotas para determinarlo? Comparte por qué lo consideras así.

Ahora vayamos al siguiente *nivel*, partiendo del **cambio** en las **diferencias**.

Para ello, seguiremos un procedimiento similar al anterior, solo que en esta ocasión partiremos del **cambio** en las diferencias para determinar **cómo se comportan las diferencias y qué magnitudes tienen**, es decir, dónde se encuentran las diferencias *alineadas*.

e) Utiliza el siguiente applet para determinar lo anterior. Primero, presiona el botón [**Ordenar cambios en las diferencias**] y luego desliza el **triángulo azul** para ubicar los cambios y encontrar el lugar de las diferencias:

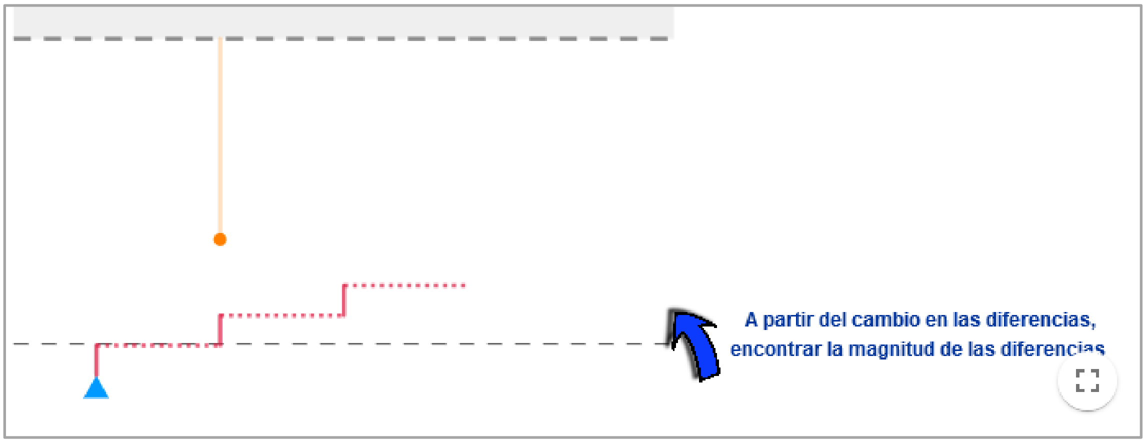
Applet 2.2.4

Al hacer clic en [Ordenar cambios en las diferencias] *se muestra de manera animada una reorganización de los segmentos que corresponden a los cambios de manera similar a como ocurrió en el* Applet 2.2.3.

f) ¡Lo notaste!, ¿cierto? Nuevamente necesitamos un valor de **referencia** para poder determinar la magnitud de las **diferencias** (y ubicar el **triángulo azul** en una posición). Comparte tus observaciones al respecto:

En el siguiente applet se muestra la **magnitud** de una de las diferencias (observa que la hemos determinado a partir de la distancia del extremo de la **diferencia** —el punto naranja— a la reja inferior en el reloj de agua —los **guiones gruesos**—).

Applet 2.2.5



g) Utiliza el **triángulo azul** para desplazar los **cambios** *ordenados* y determinar la magnitud de las demás diferencias. ¿De qué manera te sirve esta nueva información (magnitud de una de las **diferencias**) para encontrar la magnitud de las demás diferencias?

Esto significa que para avanzar en el camino de abajo hacia arriba es necesario **un dato** (***posición de una gota***, en el primer caso, o ***magnitud de una diferencia***, en el segundo) que nos sirva de referencia para determinar el conjunto (***posición de las demás gotas*** o ***magnitud de las demás diferencias***). Por lo tanto, para pasar de los **cambios** a la **posición** de las gotas serían necesarios **dos datos**: primero **una** ***magnitud de alguna diferencia*** para ubicar todas las diferencias y luego **una** posición de alguna de las gotas para ubicar todas las posiciones.

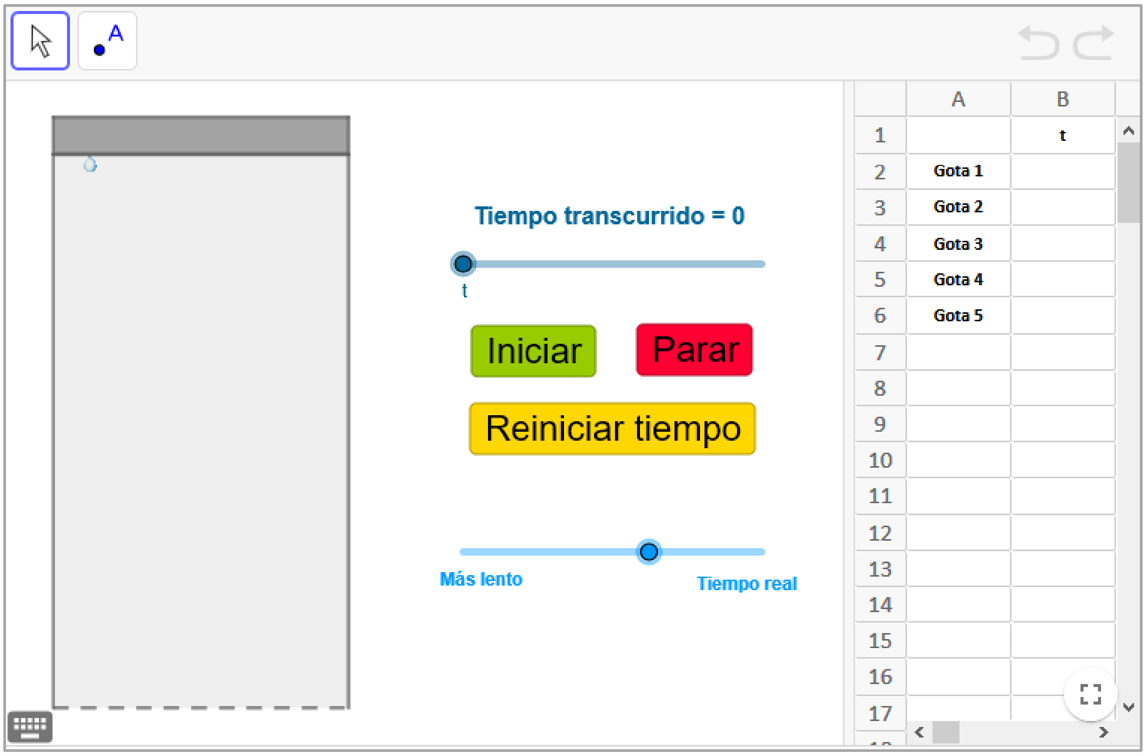
Momento 3: Viendo al cielo de nuevo

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

Luego de haber medido **distancias** en el momento anterior, ahora mediremos el **tiempo** que transcurre entre la caída de cada gota.

Para ello, utiliza el siguiente applet y registra en qué momento **t** aparece cada gota de agua en el reloj de agua. *Sugerencia: Utiliza el deslizador **t** para identificar estos momentos.*

Applet 2.3.1



a) Con base en los valores que registraste para cada gota, ¿**cada cuánto tiempo** aparece una gota nueva? (Considerando al tiempo medido en *segundos*.)

---

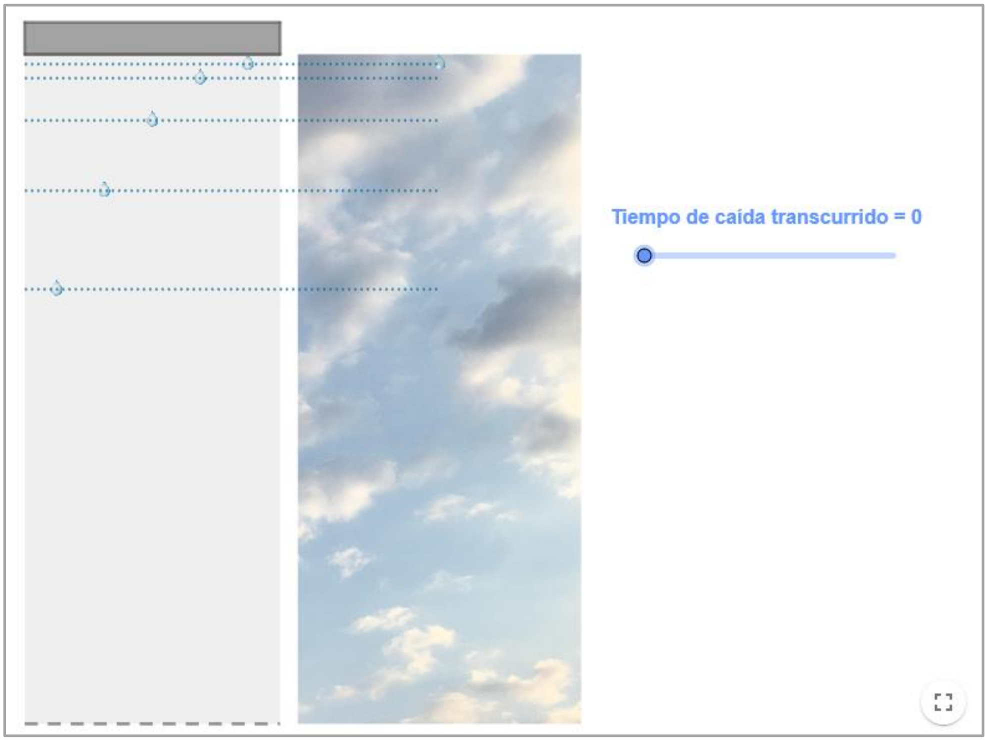
b) Ubícate en el momento en que han transcurrido **1.2 segundos** en el applet. Si se colocara una válvula más, justo **a la mitad** entre la primera y la segunda, y se dejara caer una gota de ella en **t=0.15 segundos**, ¿en qué posición esperaríamos que estuviera esta gota luego de transcurrir los **1.2 segundos**? Coloca (con la herramienta **Punto**) un punto en el applet donde consideres que estaría aproximadamente dicha gota y comparte a continuación **por qué** consideras que estaría ahí.

¡Volvamos a ver hacia el cielo!

Hemos traído de nuevo a escena la gota que analizamos en la **Tarea 1** para comparar dicho fenómeno con el reloj de agua. Para ello, hemos hecho que ambos tengan la misma altura.

Utiliza el deslizador **t** para identificar en qué ***momento*** (en qué valor de **t**) la altura de la gota que cae es igual a la altura de alguna de las gotas en el reloj de agua. Para apoyar la identificación de estos ***momentos***, hemos detenido el tiempo en la caída de las gotas del reloj de agua de tal forma que justo acabara de aparecer la última de las gotas y, a su vez, hemos colocado líneas punteadas para señalar la altura de cada una.

Applet 2.3.2



El efecto dinámico de este applet es que, conforme se mueve el deslizador, la gota va descendiendo.

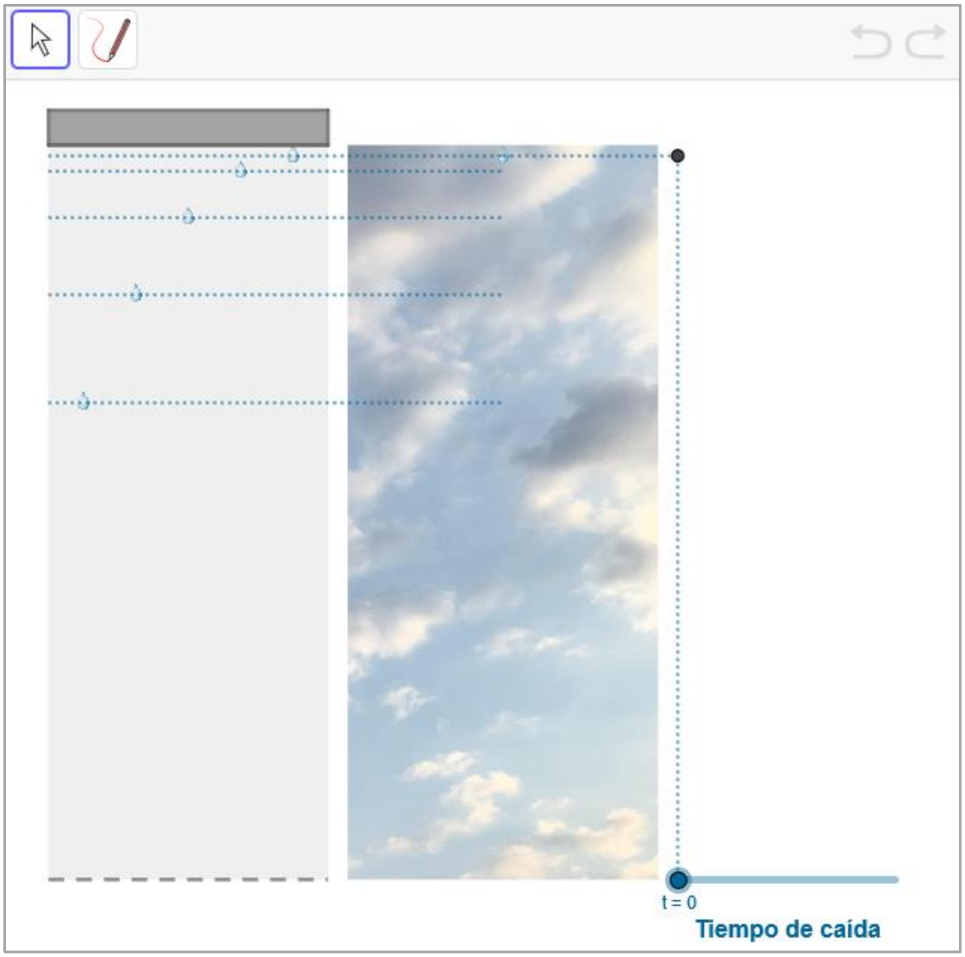
c) Compara los valores que hayas determinado aquí con los que encontraste en el inciso **a**. ¿**Qué notas** y **a qué consideras que se debe**?

¿Y qué hay de los demás valores de t? Si bien las gotas en el reloj de agua permiten ver de manera general **cómo** van cambiando las posiciones en **ciertos *momentos***, nos preguntamos ¿qué ocurre en los demás valores de **t**?

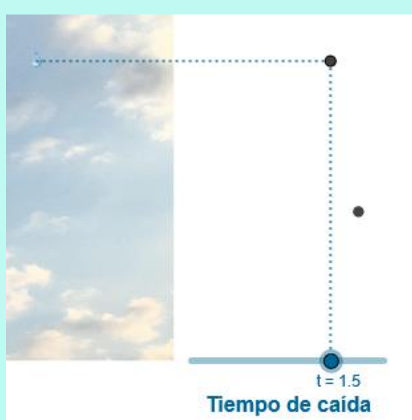
En el siguiente applet, el deslizador **t** se ha programado para dar saltos de 3 segundos y se habilitado el ***rastro*** del punto que señala la posición de la gota con respecto al **tiempo** (indicado debajo a la derecha con el deslizador).

d) Mueve el deslizador **t** en el siguiente applet para que se muestren las alturas correspondientes a los tiempos **0 s**, **0.3 s**, **0.6 s**, **….** Luego, bosqueja (con la herramienta de **Lápiz**) dónde se encontrarían las posiciones correspondientes a todos los demás valores de **t**:

Applet 2.3.3

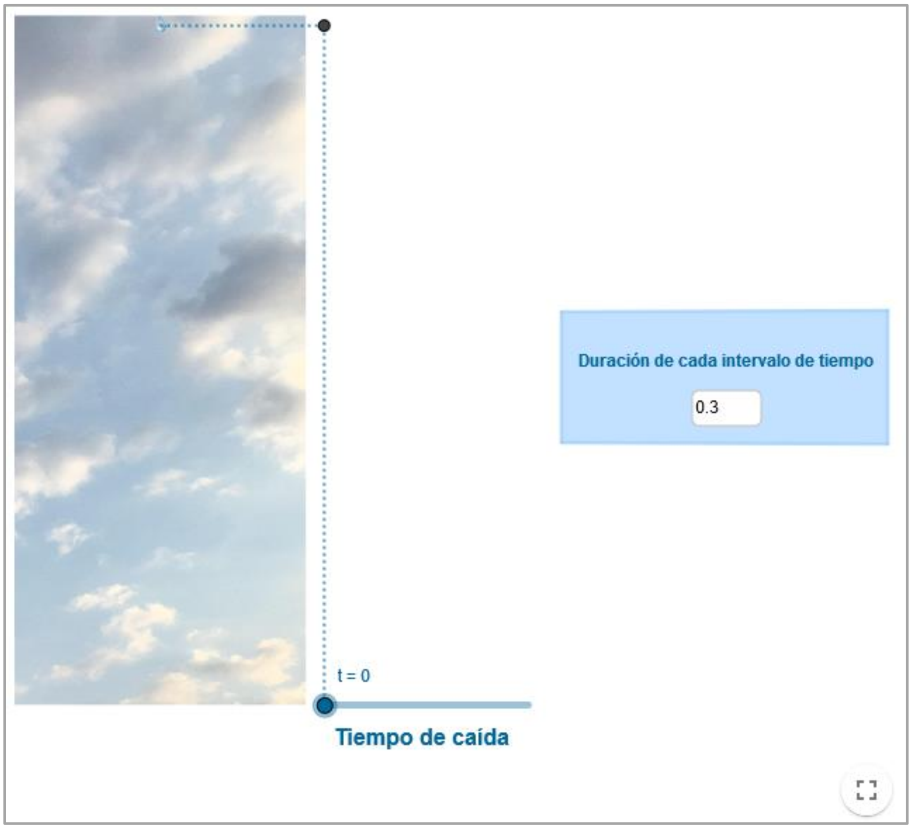


El deslizador se puede desplazar en "saltos" de 0.3 s y al moverlo se muestra el rastro del punto que concuerda con la altitud de la gota y el tiempo que ha transcurrido:



En el siguiente applet puedes cambiar la duración de los intervalos de tiempo. Introduce los valores: **0.15**, **0.075** y **0.005** para observar el ***rastro*** para estos momentos. Recuerda mover el deslizador **t** para que se muestre su rastro. Te recomendamos que el movimiento sea lento para que se marquen todos los puntos.

Applet 2.3.4



Similar al applet anterior, solo que en este caso se puede modificar el "salto" en la casilla de entrada.

e) Compara tus observaciones con tu bosquejo y comparte aquí lo que identificaste:

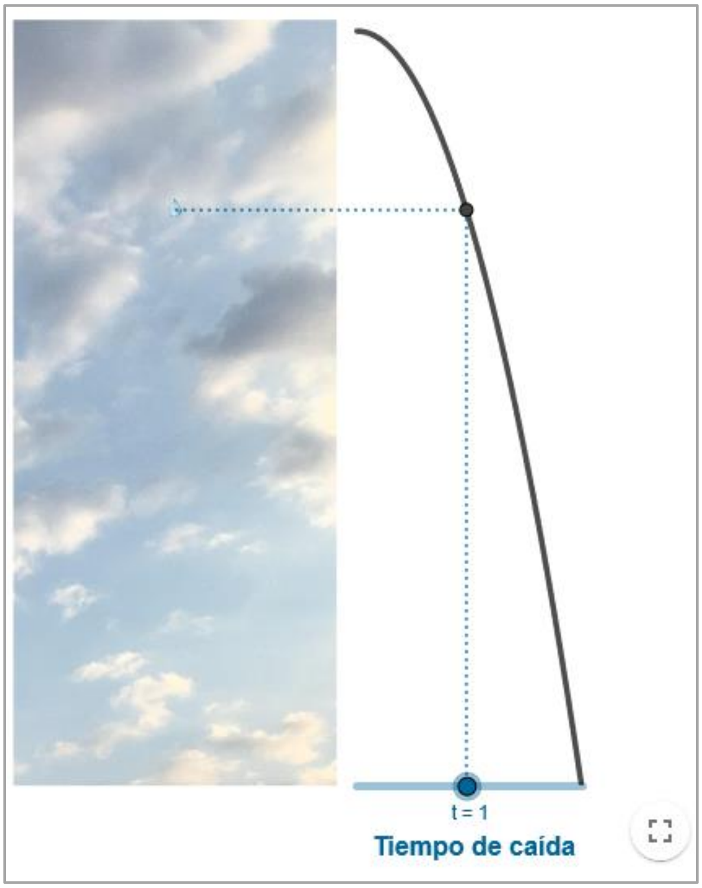
Momento 4: Todos los valores de t

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

En el momento anterior exploramos una forma gráfica de representar la posición de la gota de agua con respecto al tiempo.

En el siguiente applet se muestra la representación que construimos para todos los valores de **t** desde que cae la gota hasta que llega a la parte inferior:

Applet 2.4.1



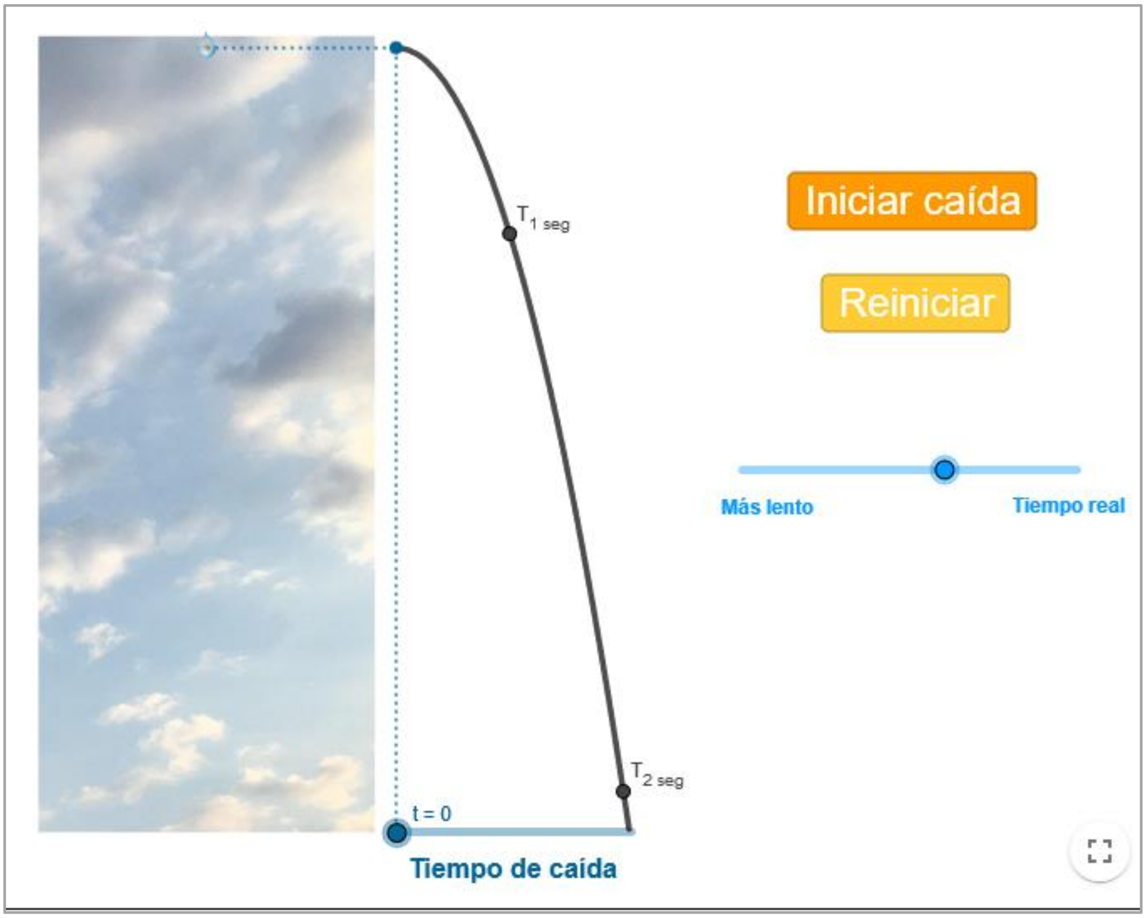
Al mover el deslizador t, *el punto se desplaza sobre la curva y la gota acompaña el movimiento.*

¿Y qué hay con las diferencias? Anteriormente, determinamos ciertas diferencias entre las posiciones de las gotas en el reloj de agua.

Ahora exploraremos con el fenómeno de la gota de agua que cae: cuáles son las **diferencias** en su altura dados distintos tiempos y **cómo cambian** estas diferencias en cada uno. Esto lo haremos también con base en la **gráfica** que obtuvimos para la posición de la gota.

Para empezar, en el siguiente applet hemos destacado dos puntos en la gráfica: los que corresponden al **segundo 1** y al **segundo 2**. Haz clic en [**Iniciar caída**] y observa lo que ocurre.

Applet 2.4.2



Al hacer clic en [Iniciar caída] *se muestra la trayectoria de la gota conforme va cayendo y, en* $T_{1\ seg}$ *y* $T_{2\ seg}$*, la caída se pausa para desplazar el segmento de trayectoria recorrido a la curva:*

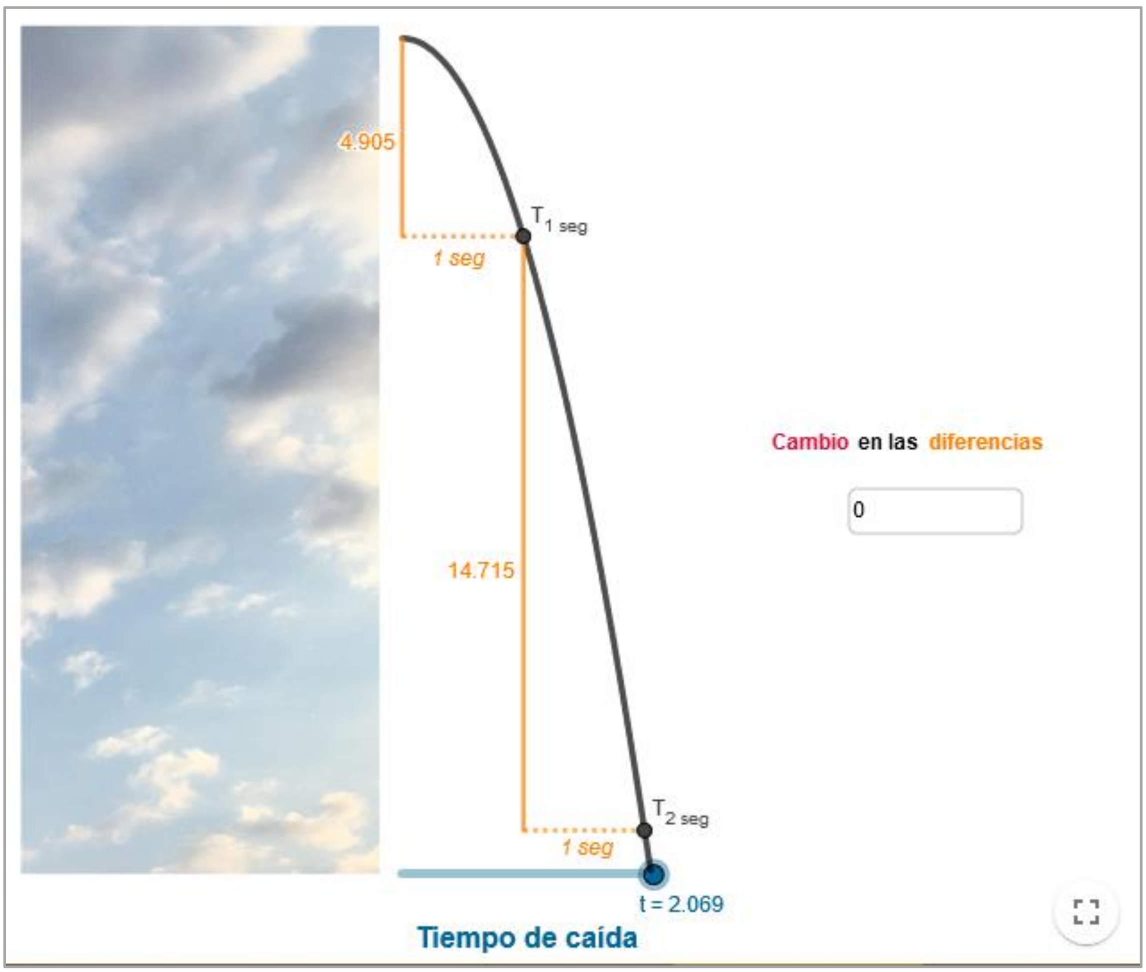
El estado final de este proceso se puede apreciar en el Applet 2.4.3.

a) Con base en todo lo que hemos explorado respecto a la caída del agua, ¿cómo esperas que se comporten las **diferencias**?

En el siguiente applet hemos colocado las magnitudes de las **diferencias** (medidas en **metros**).

b) Registra en la casilla la diferencia entre ambas para determinar su **cambio**. *Nota: Puedes introducir la resta y al dar enter aparecerá el resultado.*

Applet 2.4.3



c) Con base en este valor del **cambio**, ¿cuánto esperas que se desplace la gota entre el **segundo 2** y el **segundo 3**?

---

d) ¿Es consistente esto con lo que respondiste en el inciso **a**? Comparte tus observaciones:

Anexo C.d. *Tarea 3 del diseño*

Nota: Dado que esta es una representación estática de la *Hoja dinámica*, se han añadido descripciones (sombreadas) de los efectos dinámicos de algunos applets.

Tarea 3: Simulando y graficando

Momento 1: Diferencias para todo t

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

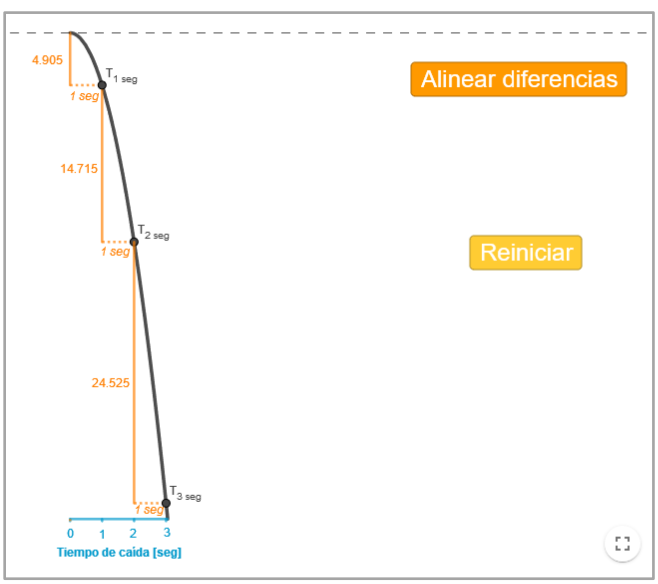
En las tareas anteriores exploramos formas para representar la manera en la cual cambia la **posición** de la caída de una gota de agua.

Luego, a través de las **diferencias** en las posiciones y el **cambio** de tales diferencias, se **predijo** la posición de la gota en otros tiempos. No obstante, sólo lo hicimos para ciertos valores de t.

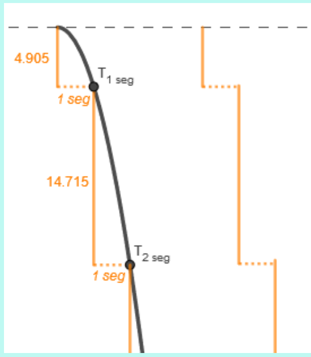
En este **Momento 1** y en el **Momento 2** de esta **Tarea 3**, construiremos representaciones **que tomen en cuenta los demás valores de tiempo** (**t**), de tal forma que en el **Momento 3** podamos predecir la posición de la gota para **cualquier** tiempo **t**.

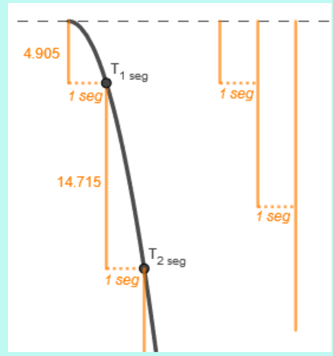
Para empezar esta exploración, en el siguiente applet haz clic en [**Alinear diferencias**] y luego en [**Alinear cambio en las diferencias**].

Applet 3.1.1



Al hacer clic en [Alinear diferencias], *los segmentos de las diferencias se desplazan hacia la derecha y se alinean en sus extremos superiores:*





Luego, aparece el botón [Alinear cambios] *con el cual ocurre algo similar a lo anterior, sólo que en este caso se desplazan y alinean los cambios en las diferencias.*

a) ¿Lo que acabas de observar es consistente con tus predicciones en la Tarea anterior? Explica por qué.

¿Y si consideramos lapsos de 0.5 segundos? En la siguiente imagen, a la derecha se muestran:

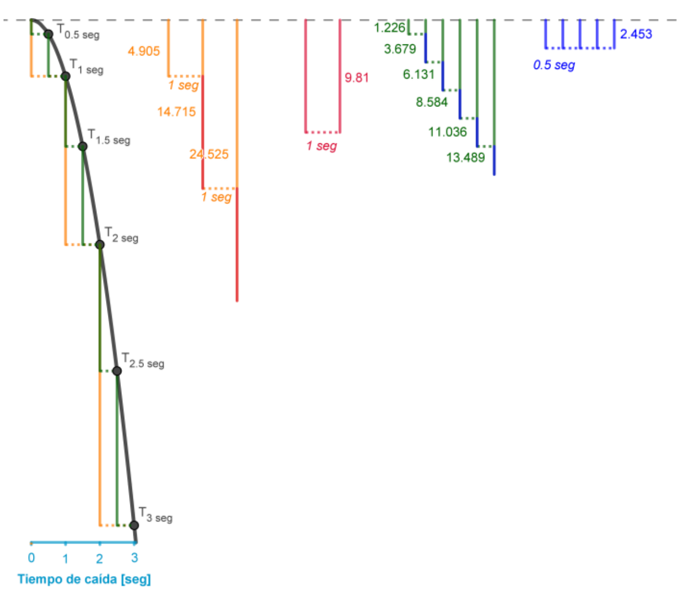
En naranja, las **diferencias** para cada intervalo de 1 segundo.

En rojo, el **cambio** entre dichas diferencias.

En verde, las **diferencias** para cada intervalo de 0.5 segundos.

En azul, el **cambio** entre dichas diferencias.

Imagen 3.1.1



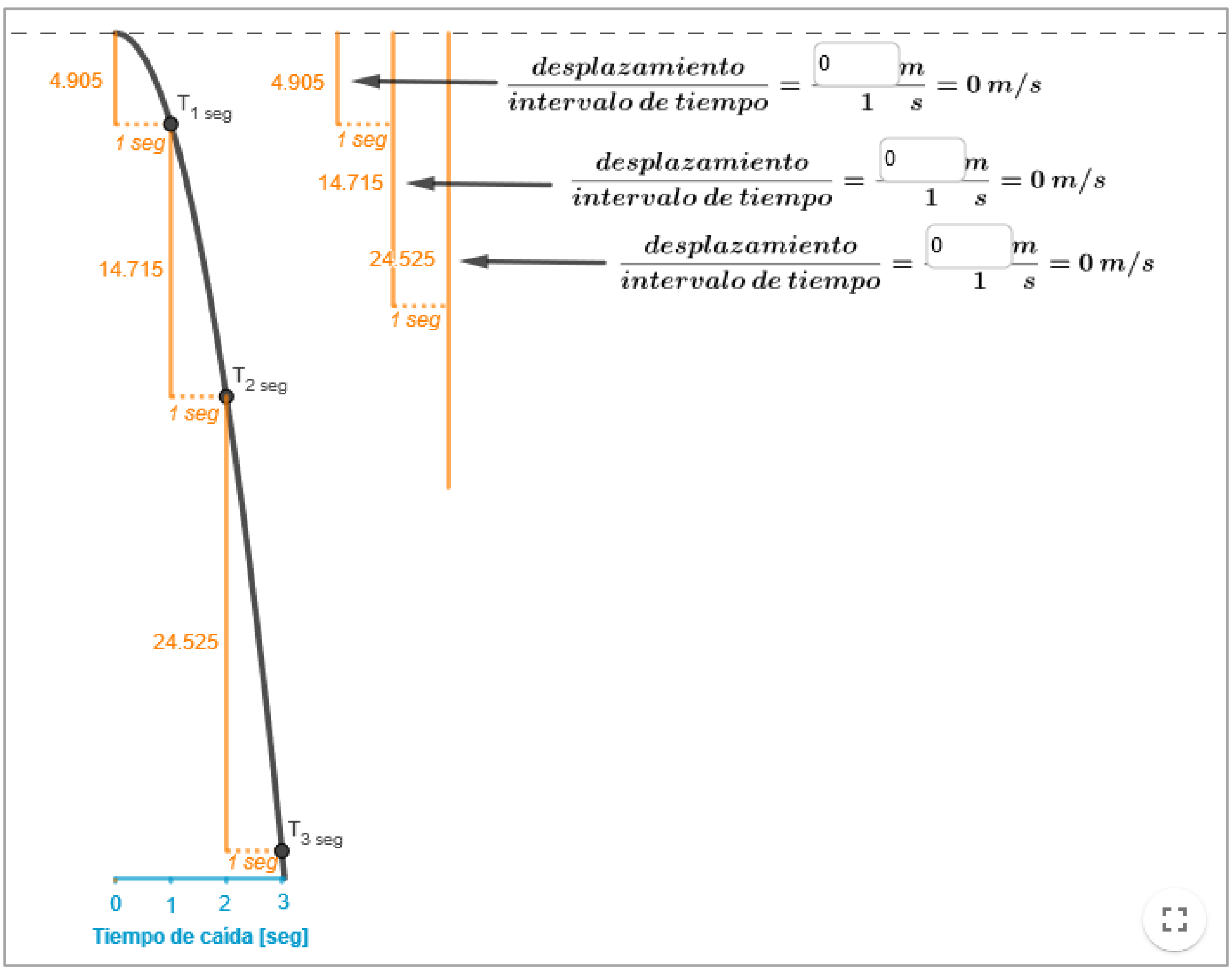
b) ¿Qué **similitudes** y **diferencias** (*cualitativas* o *cuantitativas*) observas al comparar las **diferencias** y **cambios** en intervalos de 1 s con las **diferencias** y **cambios** en intervalos de 0.5 s?

¿Y qué hay de las unidades de medida? Hasta el momento, tanto la posición, las diferencias, como sus cambios, los hemos medido en **metros**.

Ahora tomaremos en cuenta **con respecto a qué** estamos midiendo y ello nos conducirá a considerar algo más en nuestras unidades.

c) Para ello, en el siguiente applet introduce los valores correspondientes en cada casilla y observa lo que resulta en cada caso:

Applet 3.1.2

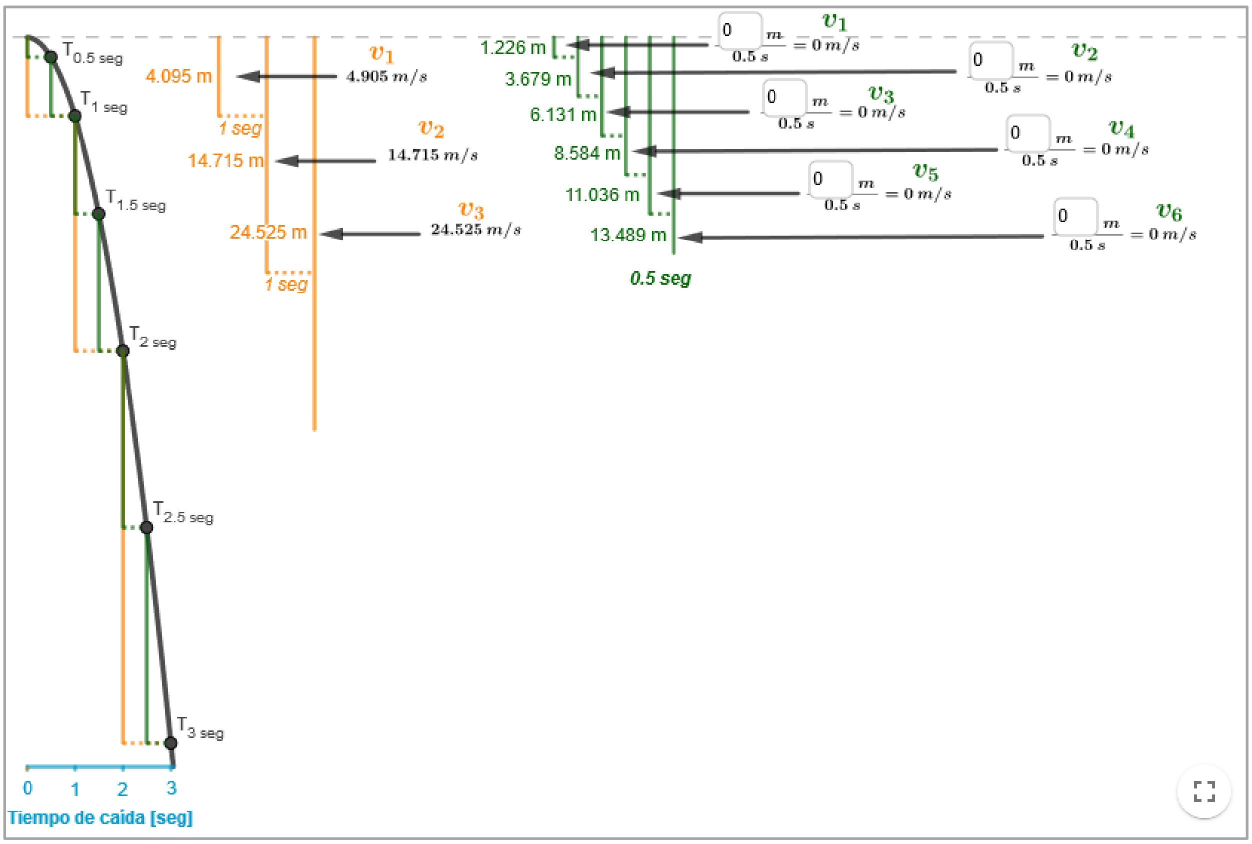


Por cada valor introducido, se muestra el resultado de la división correspondiente.

Las unidades anteriores (**m/s**) corresponden a lo que en física se conoce como **velocidad**: una relación que se establece entre la distancia que recorre un objeto y el tiempo que tarda en hacerlo. En nuestro caso, nos será de gran utilidad para saber **con respecto a qué** estamos midiendo el desplazamiento.

d) Para continuar explorando lo anterior, en el siguiente applet introduce los valores correspondientes en cada casilla para obtener la velocidad correspondiente a cada intervalo de **0.5 segundos**:

Applet 3.1.3



Por cada valor introducido, se muestra el resultado de la división correspondiente.

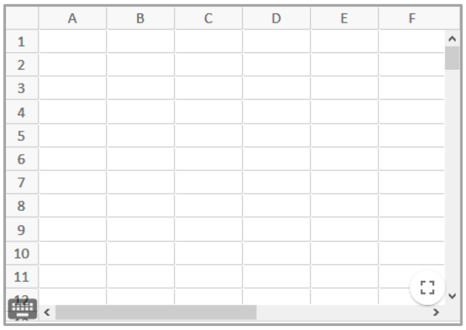
e) ¿Qué relación observas entre la primera velocidad en intervalos de 1 s (**v_1**) y las primeras dos velocidades en intervalos de 0.5 s (**v_1 y v_2**)?

---

f) ¿Se mantiene esta relación entre la velocidad **v_2** y las velocidades **v_3** y **v_4**? ¿Y entre la velocidad **v_3** y las velocidades **v_5** y **v_6**?

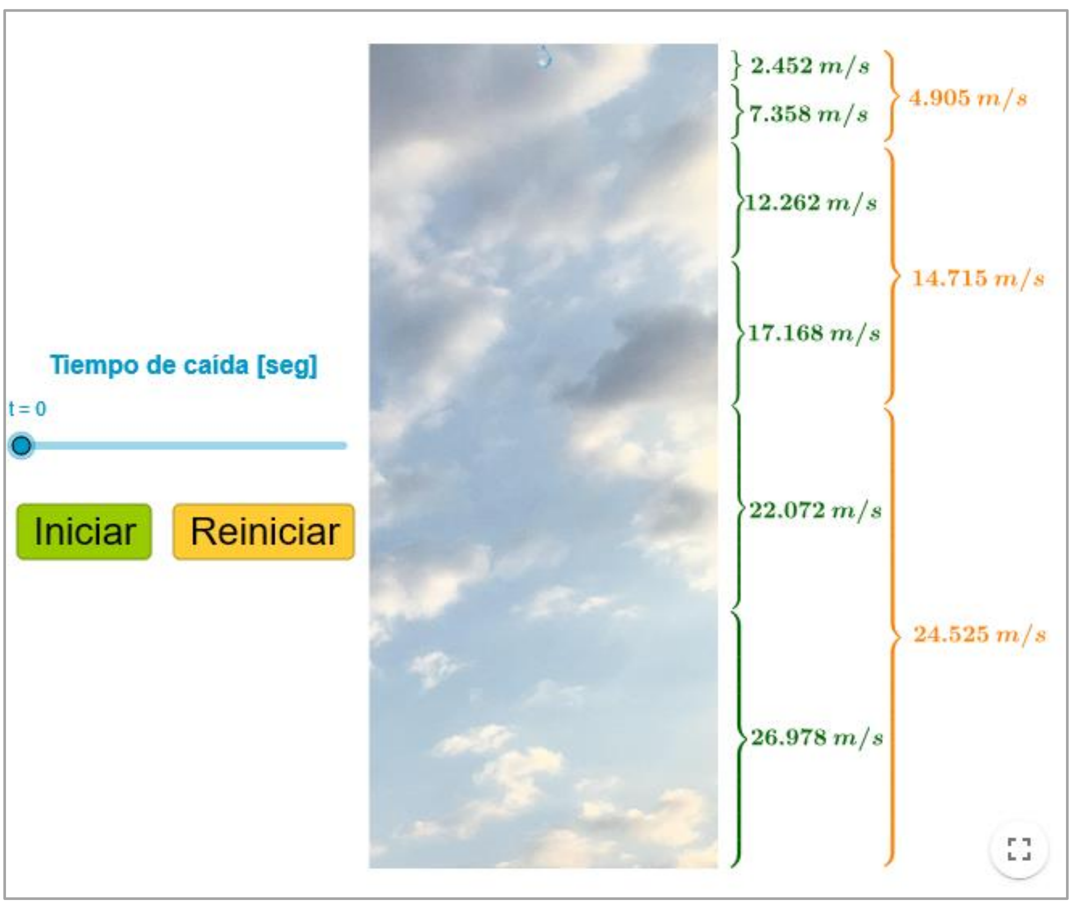
---

g) Calcula el **promedio** de v_1 y v_2 y compáralo con el valor de v_1, ¿qué identificas? ¿Ocurre esto con los demás valores? **En términos del fenómeno físico**, ¿a qué puede deberse? *Nota: Si lo requieres, puedes usar la siguiente hoja de cálculo para realizar las operaciones.*



h) En el siguiente applet se han introducido los **valores promedio de velocidad** correspondientes a cada intervalo. Analízalo con base en lo anterior y comparte tus observaciones:

Applet 3.1.4



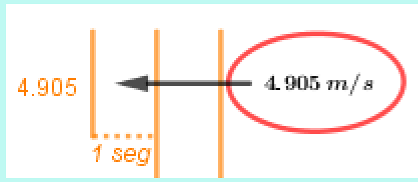
Al [Iniciar] se muestra la caída de una gota de agua.

Ahora haz clic en [**Iniciar**] en el siguiente applet y observa lo que ocurre:

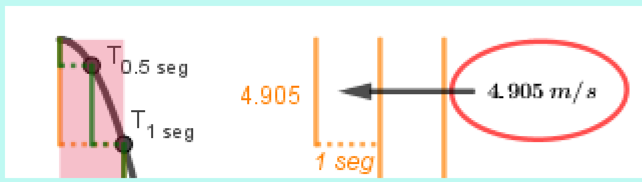
Applet 3.1.5

Este applet muestra la siguiente secuencia al hacer clic en [Iniciar]:

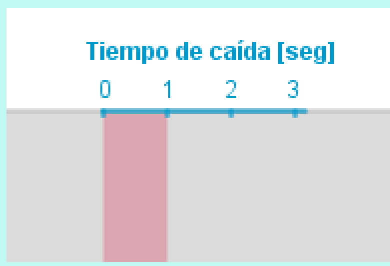
1. Se destaca un valor de velocidad:



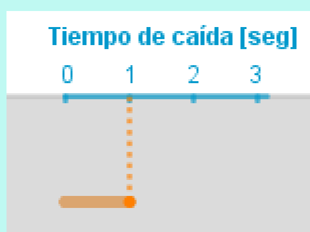
2. Se sombrea el intervalo de tiempo al cual corresponde dicha velocidad:



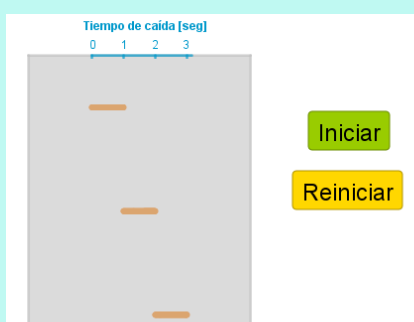
3. Se sombrea el mismo intervalo en el recuadro gris:



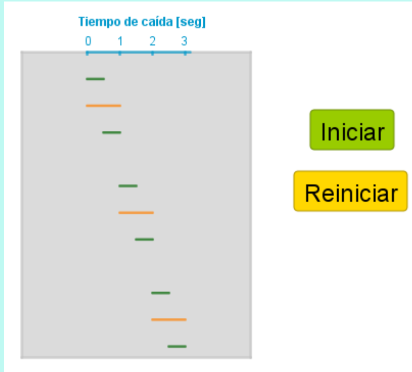
4. Se muestra el trazo de un segmento cuya distancia al eje del tiempo corresponde a la magnitud de la velocidad señalada:



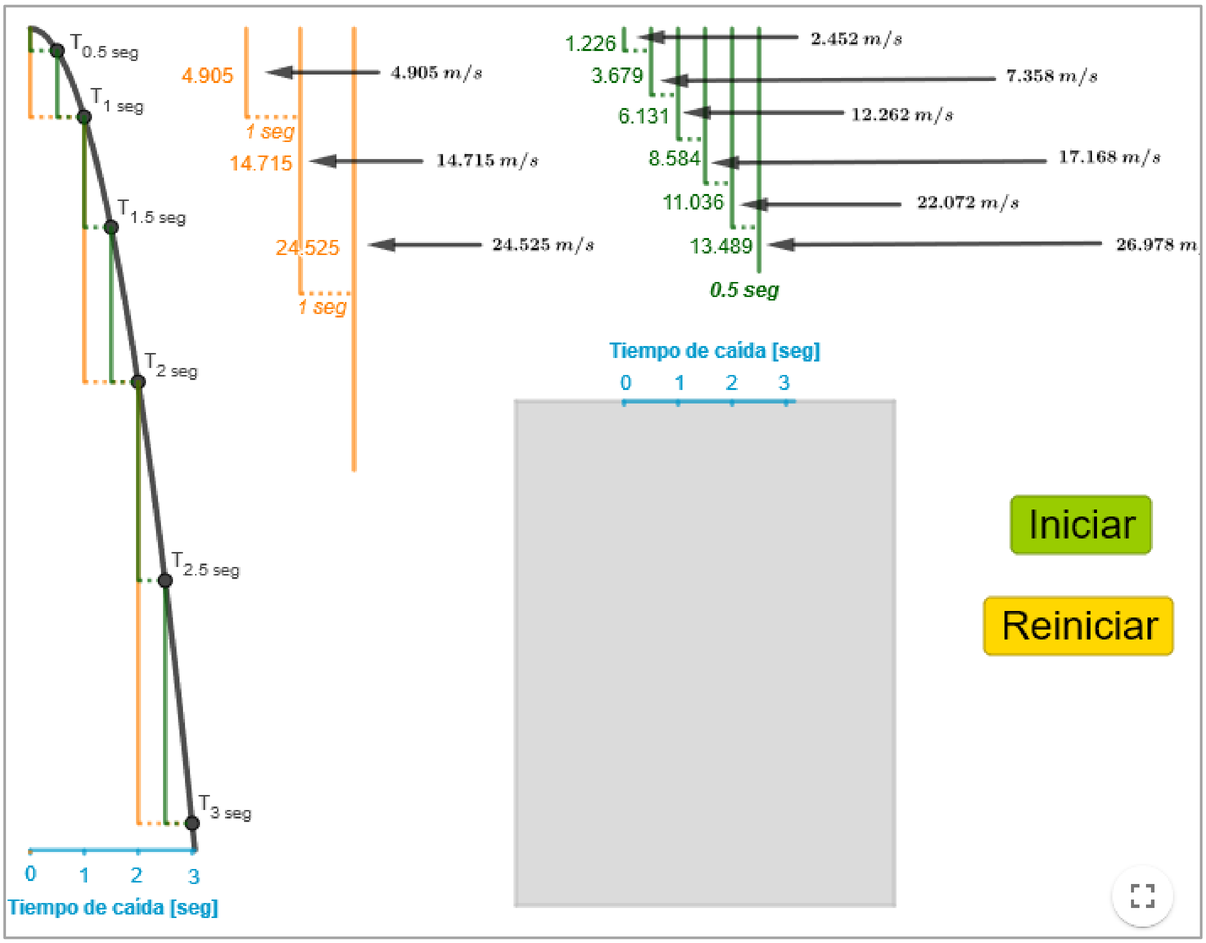
5. Los tres puntos anteriores se repiten para cada valor de velocidad. Cuando se concluye el proceso para todos los valores correspondientes a los intervalos de 1 s *se obtiene la siguiente representación:*



Y cuando se concluye el proceso para los valores correspondientes a los intervalos de 0.5 s, se obtiene:



El applet completo en su estado inicial se muestra a continuación:



i) ¿De qué manera se relaciona lo que acabas de observar con lo que identificaste en los incisos **e** y **f**? *Sugerencia: considera la magnitud de las velocidades.*

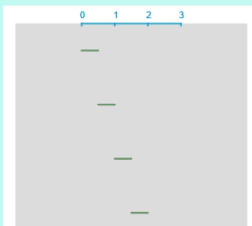
Los "escalones" de los segmentos muestran las **velocidades promedio** correspondientes a cada intervalo de tiempo.

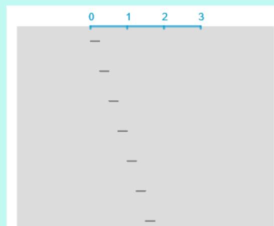
¿Qué ocurrirá si consideramos intervalos de tiempo más cortos? A continuación, exploraremos esto.

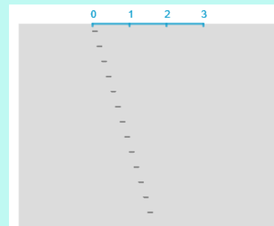
En el siguiente applet, presiona los botones [«] y [»] para disminuir o aumentar la duración del intervalo:

Applet 3.1.6

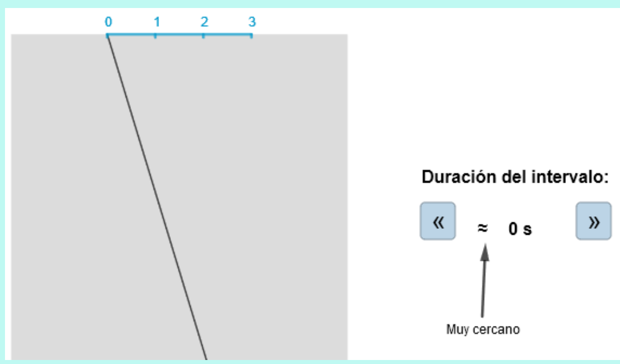
Cada vez que se presiona el botón [«], aparece una nueva representación. Algunas de ellas son las siguientes:



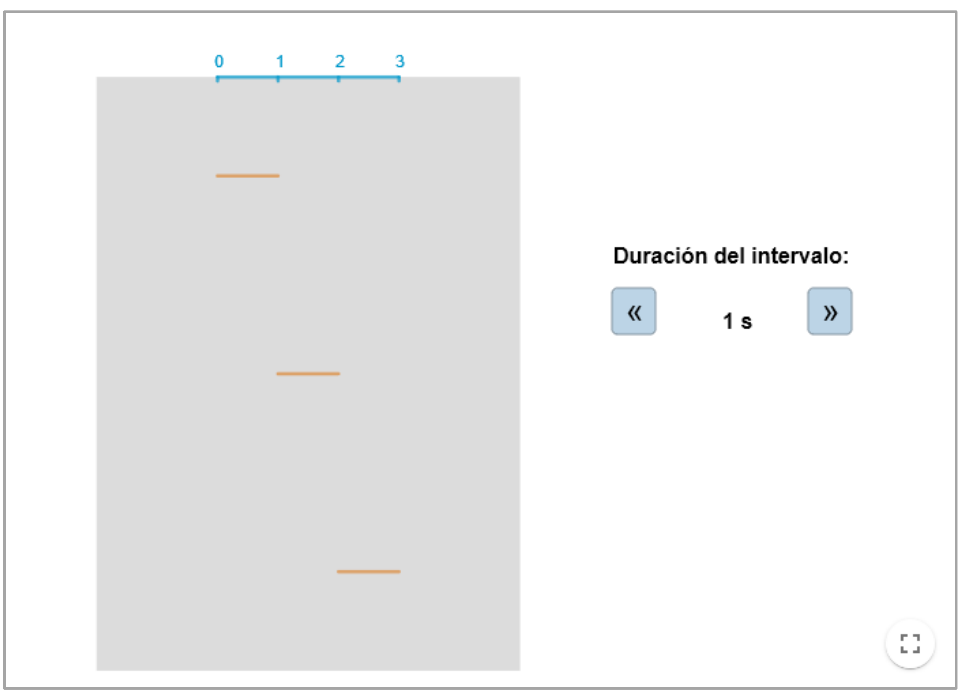




La última que se muestra aparece con el cambio de signo = a ≈ acompañado de la leyenda "Muy cercano":



Al presionar [»], se muestran las representaciones en sentido inverso.



j) ¿Qué ocurre con la representación de las **velocidades promedio** conforme se consideran intervalos de tiempo más pequeños? ¿Y cuando se alcanza un valor **muy cercano** a cero?

Al hacer la duración del intervalo cada vez más cercana a cero, obtenemos una aproximación de la **velocidad instantánea** para cada valor de **t**.

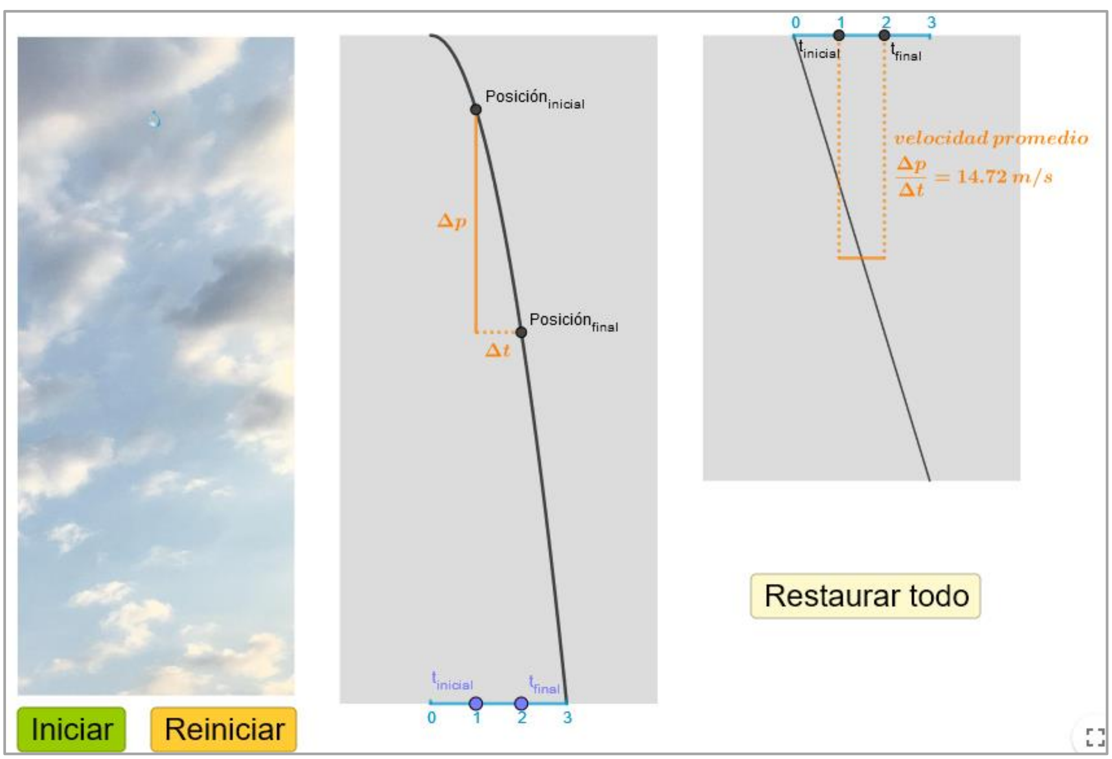
Como su nombre lo indica, la velocidad instantánea muestra un valor de velocidad para cada "instante" de tiempo.

De este modo, a partir de la velocidad instantánea, **hemos construido una representación gráfica de la velocidad para todo valor de t**, la cual corresponde a la recta observada.

En el siguiente applet puedes explorar lo anterior con la **notación** acostumbrada. Desliza los **puntos** ($t_{inicial}$ y t_{final}) en la parte inferior de la gráfica de la posición para observar los valores de la **velocidad** en cada intervalo.

Para cada intervalo de tiempo, puedes hacer clic en [**Iniciar**] para ver cómo cae la gota de agua en el intervalo de tiempo que hayas seleccionado. Pulsa [**Reiniciar**] para que la gota se reubique al inicio del recorrido en dicho intervalo.

Applet 3.1.7



Al hacer clic en [Iniciar] *se muestra la caída de la gota en el intervalo de tiempo seleccionado.*

k) ¿Qué cambios notas tanto en las **representaciones gráficas** como **en la notación** cuando el *tiempo inicial* ($\mathbf{t_{inicial}}$) y el *tiempo final* ($\mathbf{t_{final}}$) se acercan tanto como sea posible?

---

l) ¿Qué ocurre con la **animación de la caída** de la gota de agua (a la izquierda de las gráficas) cuando el *tiempo inicial*($\mathbf{t_{inicial}}$) y el *tiempo final* ($\mathbf{t_{final}}$) se han acercado tanto como es posible?

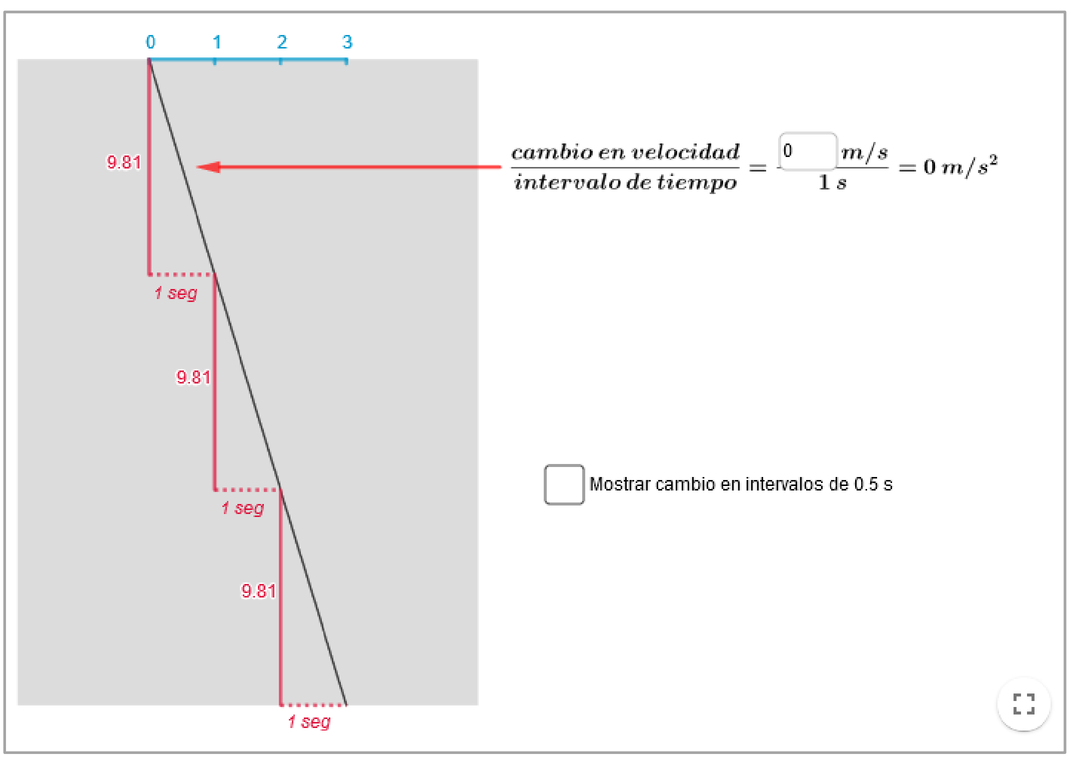
Momento 2: Cambio para todo t

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

Ahora exploraremos el **cambio** de la velocidad **con respecto al tiempo**. Para ello, nos basaremos en la **representación gráfica** de la **velocidad instantánea** que construimos en el **Momento** anterior.

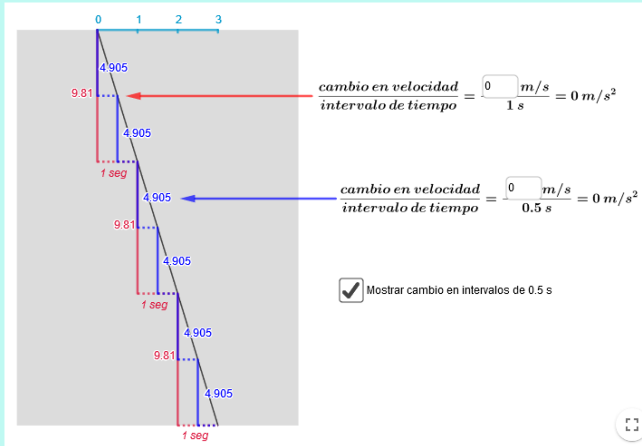
a) Para comenzar, en el siguiente applet introduce los valores correspondientes en las casillas. Primero considerando el cambio en **intervalos de 1 s** y luego considerando el cambio en **intervalos de 0.5 s** activando la casilla para mostrarlo.

Applet 3.2.1



Al introducir un valor en la casilla de entrada, aparece el resultado de la división correspondiente.

Al activar la casilla de visibilidad, aparecen los cambios correspondientes a intervalos de 0.5 s:



b) ¿**Qué identificas en los valores** que obtuviste en cada división?

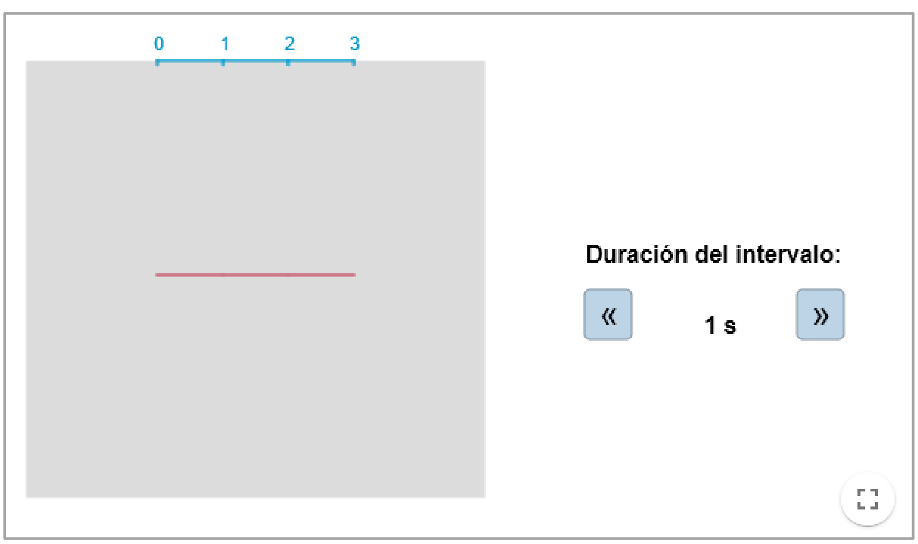
---

c) Y si consideráramos intervalos de tiempo **más cortos**, ¿qué valores esperas encontrar?

Los valores que determinaste en el inciso **a** corresponden a la **aceleración promedio** en cada intervalo de tiempo.

Como en el caso de la velocidad, en el siguiente applet puedes explorar qué ocurre cuando se consideran intervalos de tiempo más cortos:

Applet 3.2.2



En este applet, al presionar los botones [«] y [»], se muestra la misma representación, únicamente cambian los colores para cada intervalo: en el de 1 s, es de color rojo, en el de 0.5 s, es azul, y en los demás es color negro.

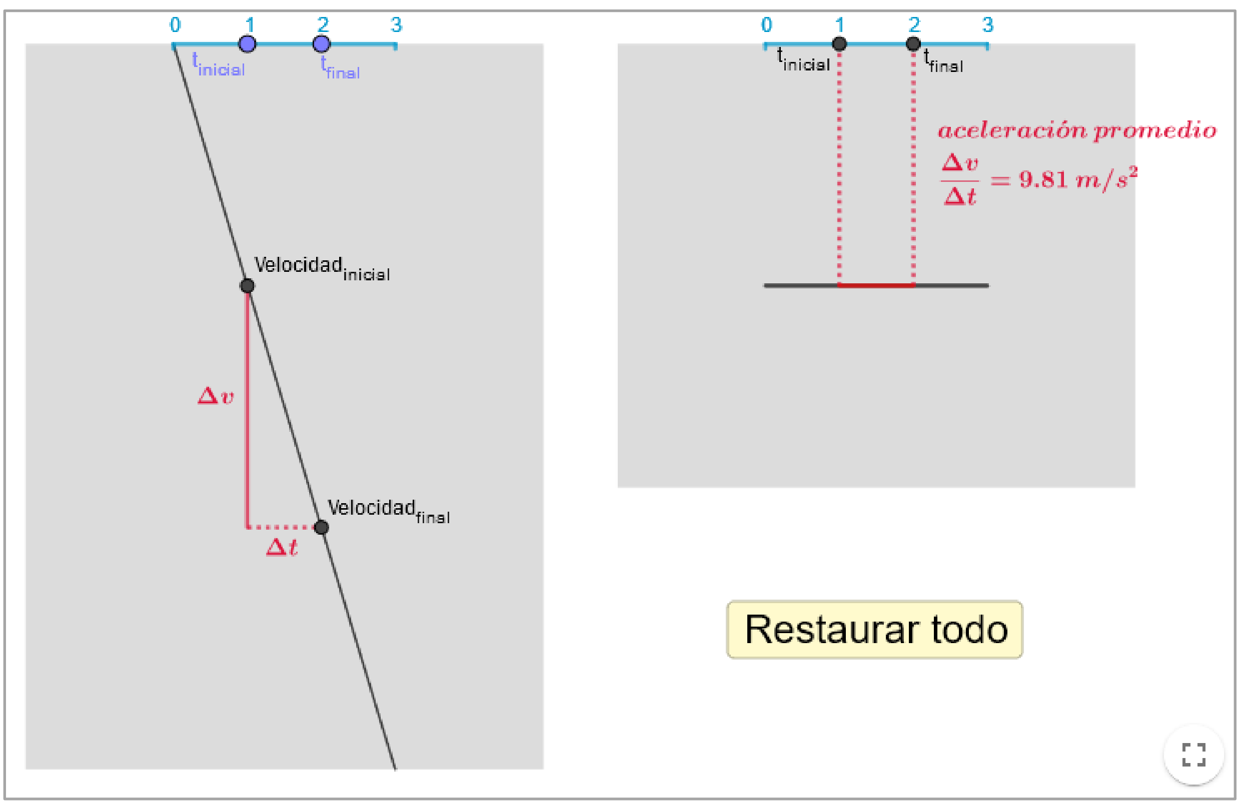
Al hacer la duración del intervalo cada vez más cercana a cero, el valor obtenido tendía a la **aceleración instantánea** correspondiente a cada valor de **t**, es decir, a cada "instante" de tiempo.

d) Para este caso, ¿cómo es la **aceleración promedio** respecto a la **aceleración instantánea**?

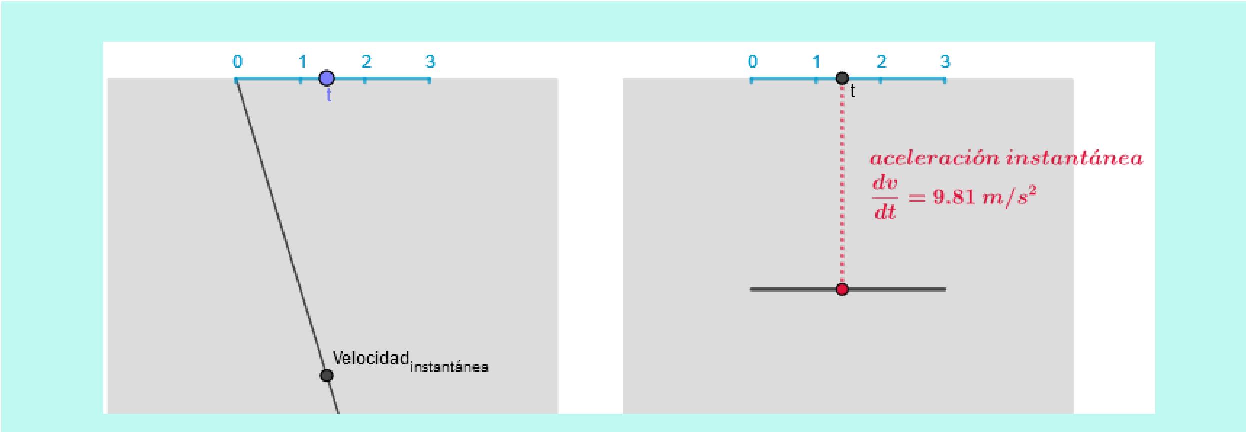
En el siguiente applet puedes experimentar con la notación acostumbrada a partir de la representación gráfica de la **aceleración** que acabamos de construir **para todo tiempo t**.

Desliza los **puntos** (**$t_{inicial}$** y **t_{final}**) en la parte superior de la gráfica de la **velocidad instantánea** para observar los valores de la **aceleración** en cada intervalo e identificar qué ocurre con la notación cuando **$t_{inicial}$** y **t_{final}** se acercan tanto como sea posible:

Applet 3.2.3



Cuando el punto $t_{inicial}$ y el punto t_{final} se colocan en la misma posición, se producen los siguientes cambios:

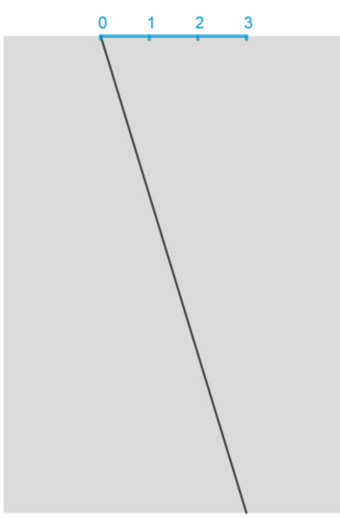


e) Comparte tus observaciones respecto a los cambios que identificaste tanto en las **representaciones gráficas** como en la **notación** cuando $\mathbf{t_{inicial}}$ y $\mathbf{t_{final}}$ se han acercado tanto como es posible:

Por lo tanto, en el **Momento 1** y en este **Momento 2**, hemos construido las representaciones que buscábamos:

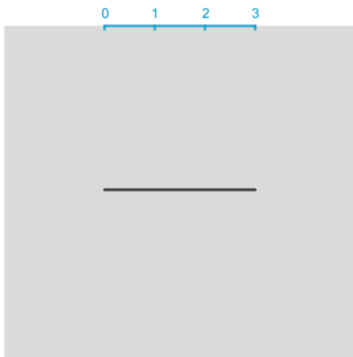
La ***gráfica de la velocidad instantánea*** (para todo valor de **t**), es decir, una representación de la diferencia en la posición con respecto al tiempo:

Imagen 3.2.1



La ***gráfica de la aceleración instantánea*** (para todo valor de **t**), es decir, una representación del cambio en la velocidad con respecto al tiempo:

Imagen 3.2.2



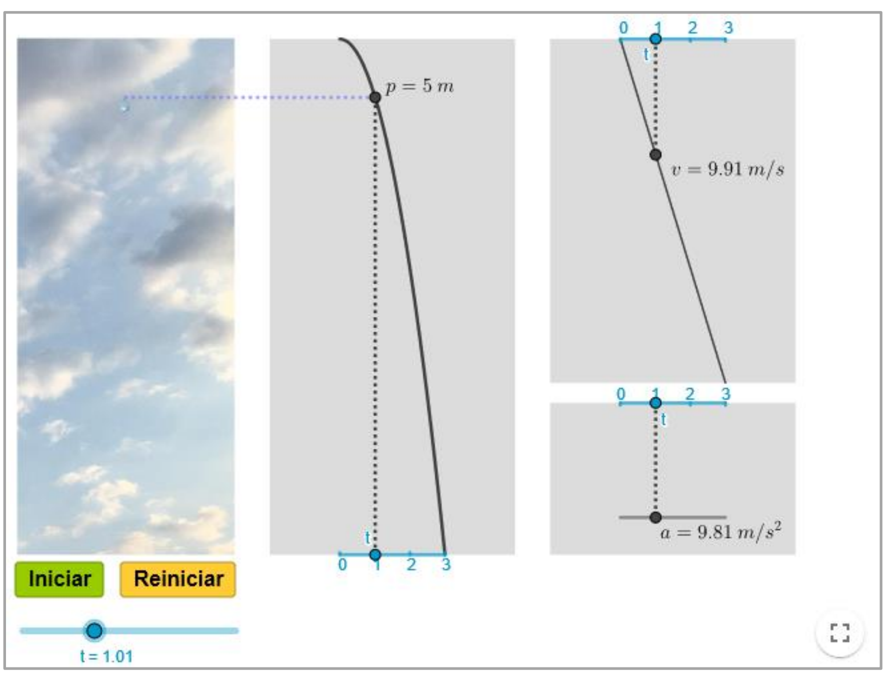
Momento 3: Ida y vuelta

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

Hasta el momento, hemos construido las representaciones gráficas de la **posición**, la **velocidad instantánea** y la **aceleración instantánea** de la caída de la gota de agua. En el siguiente applet se muestran las tres gráficas y el fenómeno que describen.

Puedes mover el deslizador **t** o dar clic en [**Iniciar**] y [**Reiniciar**] para ver la animación de la caída de la gota de agua y los valores correspondientes de posición, velocidad instantánea y aceleración instantánea de la gota para cada instante:

Applet 3.3.1



Al hacer clic en [Iniciar], *inicia la caída de la gota de agua y los puntos sobre las gráficas de la posición, velocidad y aceleración se desplazan de manera correspondiente al tiempo transcurrido* t.

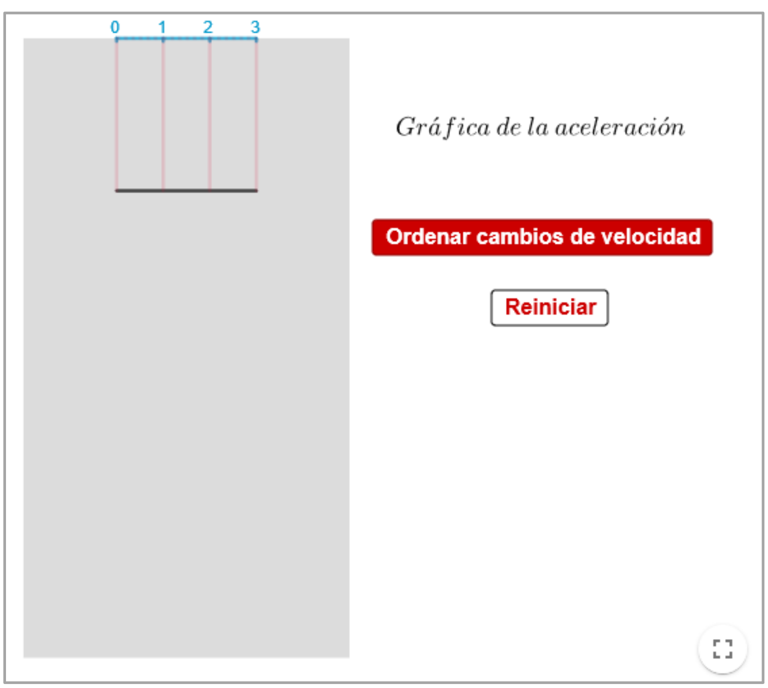
a) Mueve el deslizador **t** y explica con tus propias palabras, ¿**qué** forma toma la **gráfica de la posición** conforme la velocidad se acerca a los **0 m/s**?

b) Y, nuevamente con tus propias palabras, ¿**qué** forma adquiere la **gráfica de la posición** cuando la velocidad va tomando valores cada vez mayores?

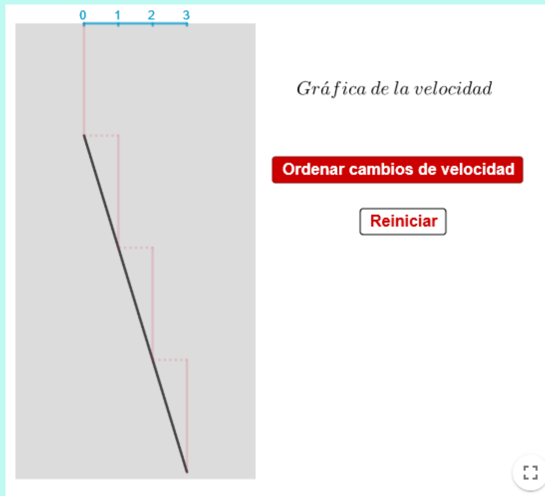
Ahora, tal como exploramos en la simulación del reloj de agua, partiremos de la información de la gráfica de la **aceleración** para obtener la de la **velocidad** y la de la **posición**.

¿Recuerdas cómo en el estudio del reloj de agua pudimos [Ordenar cambios]? Ahora, en el siguiente applet "ordenaremos" los cambios de velocidad, es decir, los valores de la aceleración. Para ello, hemos dejado como referencia los valores correspondientes a los intervalos de 1 s. Haz clic en [**Ordenar cambios de velocidad**] para verlo:

Applet 3.3.2



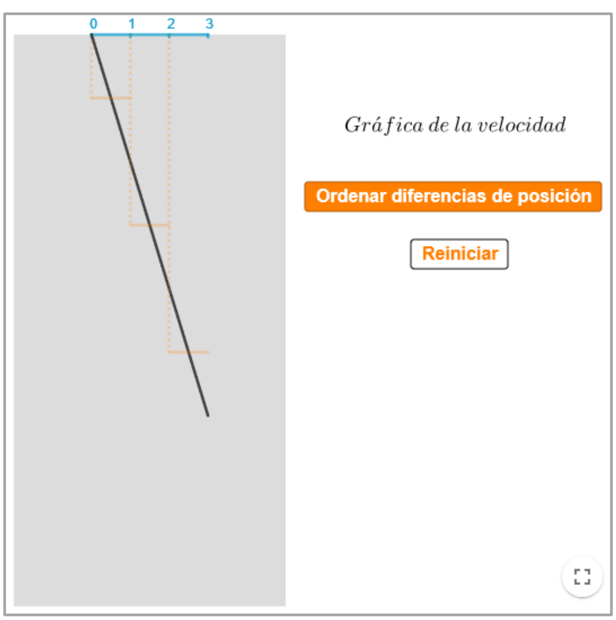
Al hacer clic en [Ordenar cambios de velocidad], *los segmentos correspondientes a los cambios se desplazan hacia abajo, de tal manera que el extremo superior de uno esté a la misma altura que el extremo inferior del segmento a su izquierda; de manera correspondiente, el segmento en negro se inclina, produciendo la siguiente representación, en la cual el texto cambia a "Gráfica de la velocidad":*



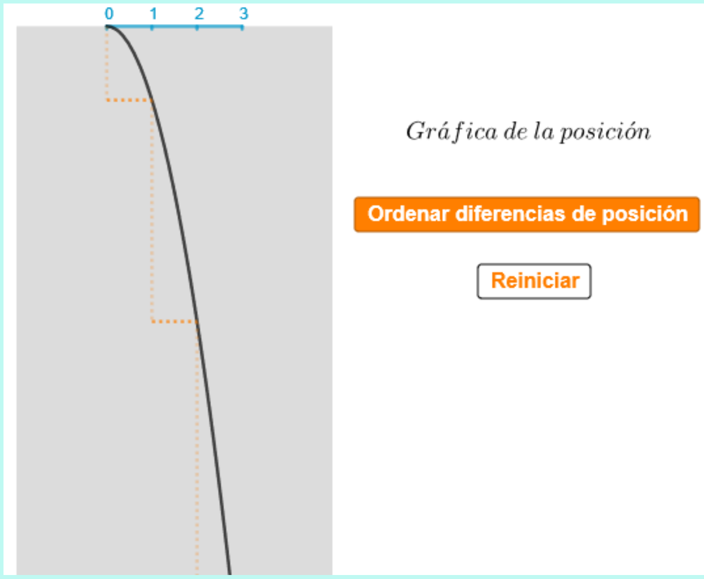
De manera similar, en la representación gráfica que construimos de la **velocidad instantánea**, podemos ordenar la diferencia en las posiciones con respecto al tiempo, es decir los valores de la velocidad.

En el siguiente applet puedes explorar esto haciendo clic en [**Ordenar diferencias de posición**]. Nuevamente, dejamos señalados algunos valores de velocidad para tener una referencia de cómo se ordenan:

Applet 3.3.3



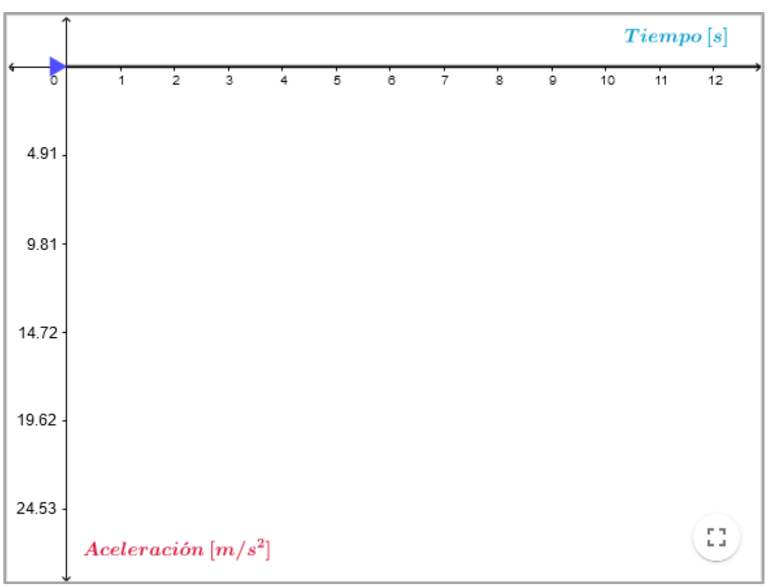
Al hacer clic en [Ordenar diferencias de posición], *los segmentos correspondientes a las diferencias se desplazan hacia abajo, de tal manera que el extremo superior de cada uno se encuentre a la misma altura que el extremo inferior del que tiene a su izquierda; la gráfica pasa de ser un segmento de recta a ser un tramo de una parábola cóncava hacia abajo, asimismo, el texto cambia a "Gráfica de la posición":*



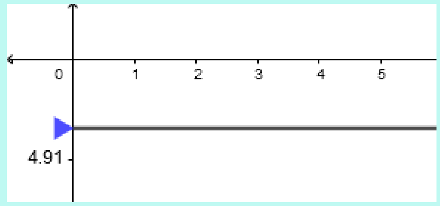
¡Ahora, ubiquemos en los ejes!

c) En el applet a continuación mueve el **triángulo azul** para ubicar la gráfica de la **aceleración** tomando en cuenta la graduación de los ejes:

Applet 3.3.4

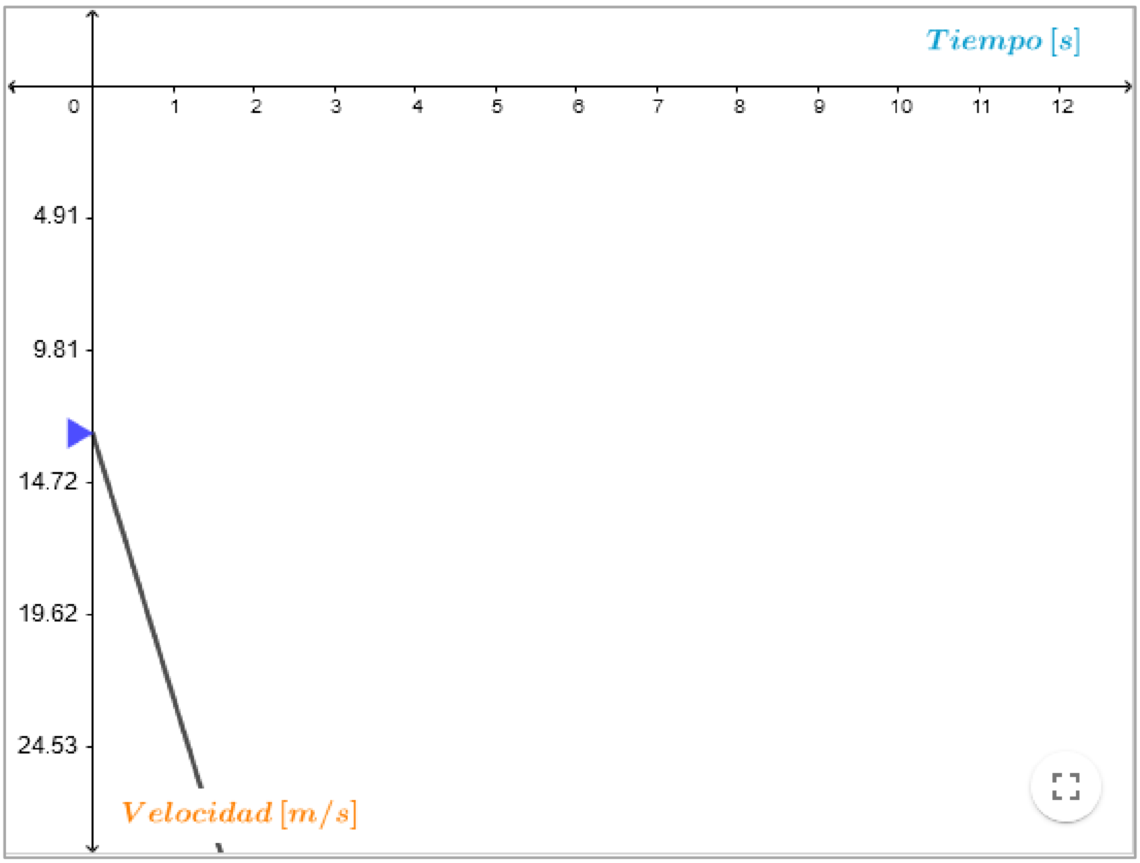


Al seleccionar y mover el triángulo azul, se desplaza un segmento de recta horizontal:



d) Ahora, en el siguiente applet mueve el **triángulo azul** para ubicar la gráfica de la **velocidad** respecto a los ejes:

Applet 3.3.5



Al seleccionar y mover el triángulo azul, se desplaza un segmento de recta inclinada.

e) ¿Pudiste ubicar la gráfica? ¿En qué información te basaste para poder ubicarla?

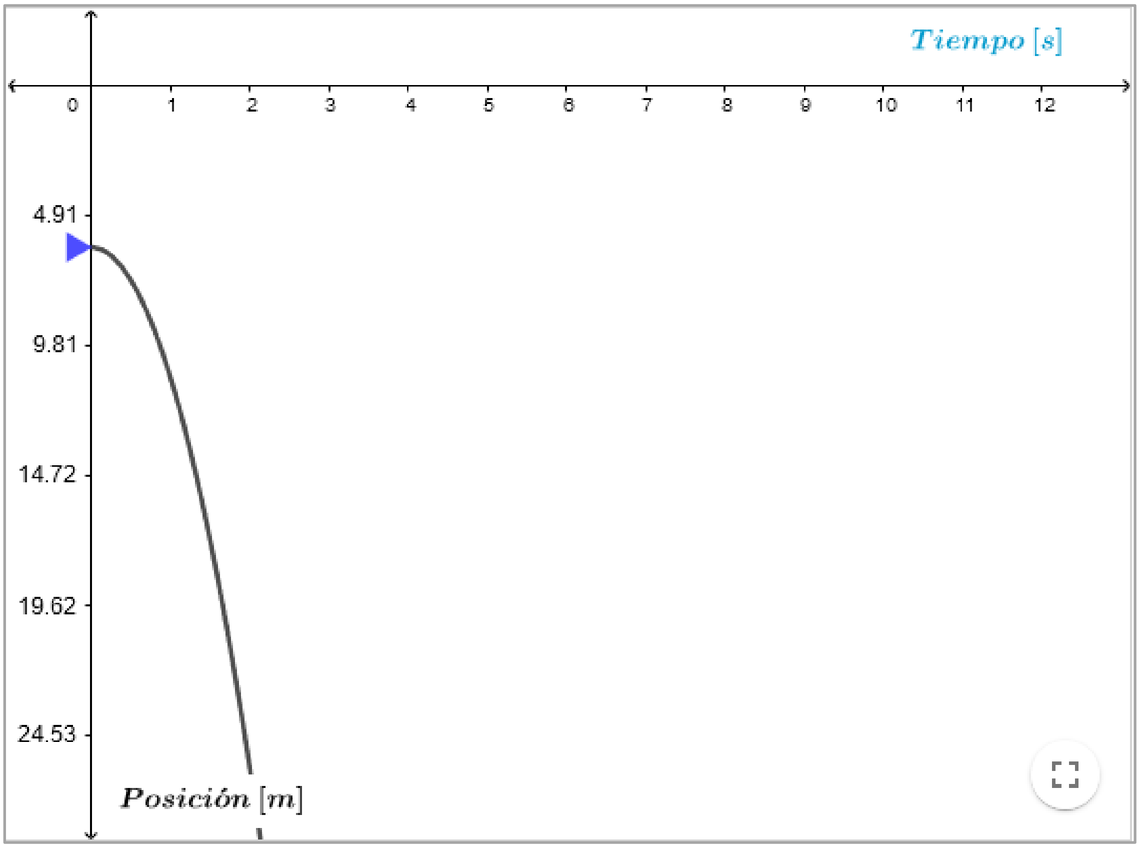
En caso de no haberla podido ubicar, explora el **Applet 3.3.1** (al inicio de esta hoja) para obtener más información sobre la velocidad.

f) ¿Qué valor tomaste como referencia para poder ubicar la gráfica de la velocidad?

---

g) Ahora, ubica la gráfica de la **posición** con el **triángulo azul** respecto a los ejes en el siguiente applet:

Applet 3.3.6



Al seleccionar y mover el triángulo azul, se desplaza el tramo de parábola.

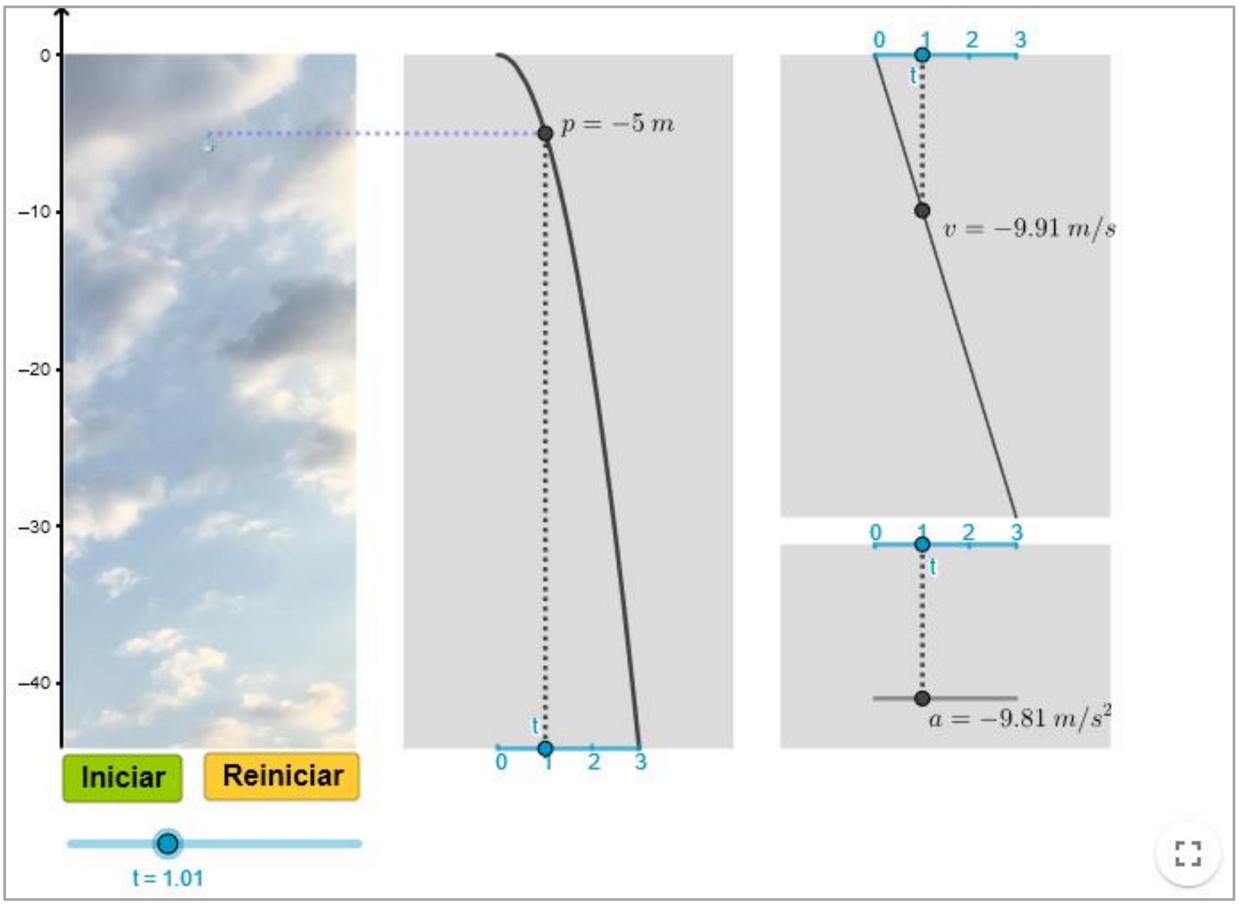
h) ¿Qué valor tomaste como referencia para poder ubicar la gráfica de la posición?

¿Y pueden ser negativas la velocidad y la aceleración?

Como habrás notado, en las tres gráficas, el eje vertical (***y***) estaba graduado con **valores positivos**. Esto es consistente con las medidas que hemos realizado de la **posición**, pues siempre consideramos las magnitudes (valores positivos) de las **diferencias de posición** y, consecuentemente, de los **cambios de las diferencias**.

Si en lugar de ello, hubiéramos considerado con valor de **0 m** el punto desde el cual cae la gota de agua y **valores negativos** para los metros de descenso (como se muestra en el siguiente applet), entonces la **velocidad** y la **aceleración** habrían "adquirido" estos signos; es decir, en cada caso indicarían que la ***dirección*** del movimiento, de las diferencias y de los cambios en las diferencias, son medidos **hacia abajo**.

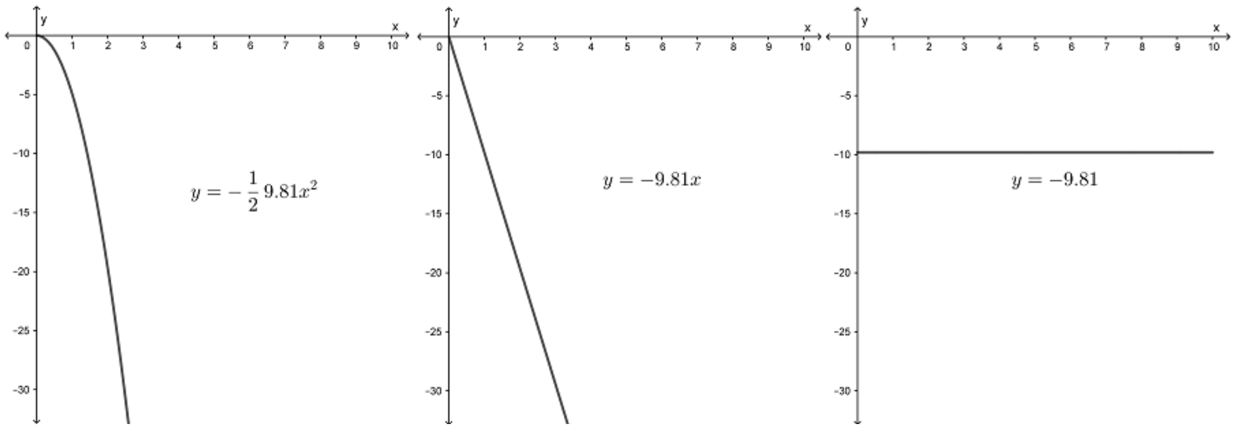
Applet 3.3.7



El comportamiento de este applet es similar al del Applet 3.3.1, *el cambio está en que aquí se muestran las magnitudes con signo negativo.*

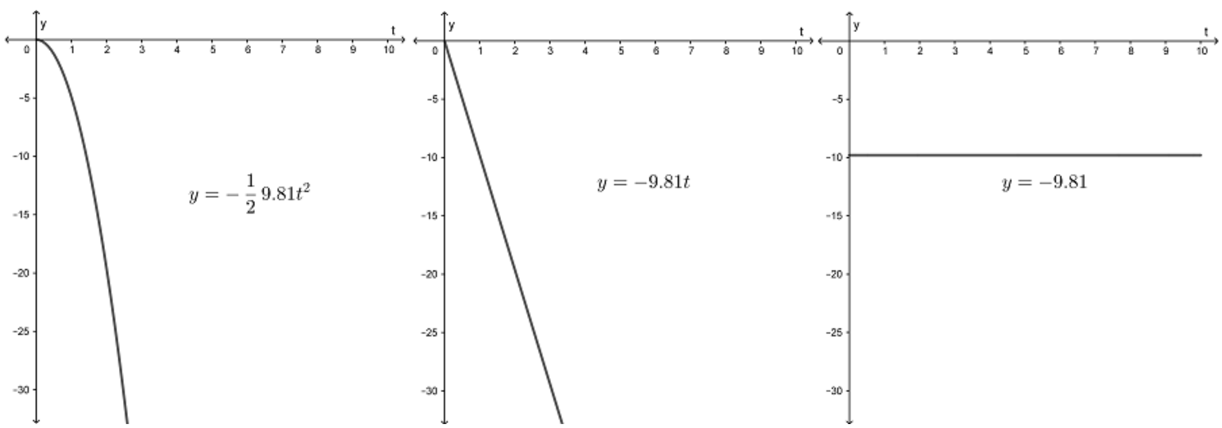
Tomando en cuenta la dirección del movimiento y, como usualmente se denotan, el eje vertical "***y*** " y el eje horizontal "***x*** ", entonces cada gráfica tiene las siguientes expresiones:

Imagen 3.3.1



No obstante, de acuerdo a lo que exploramos en el fenómeno, sabemos que el eje "***x*** " corresponde al tiempo, por lo cual, las expresiones serían:

Imagen 3.3.2



¿Pero cómo identificamos que las tres están relacionadas? Sabemos que **la segunda gráfica representa el cambio con respecto al tiempo de la primera**, y que **la tercera gráfica representa el cambio con respecto al tiempo de la segunda**, ¿cómo lo podemos incorporar en la notación?

La notación que se ha adoptado para denotar lo anterior ha sido:

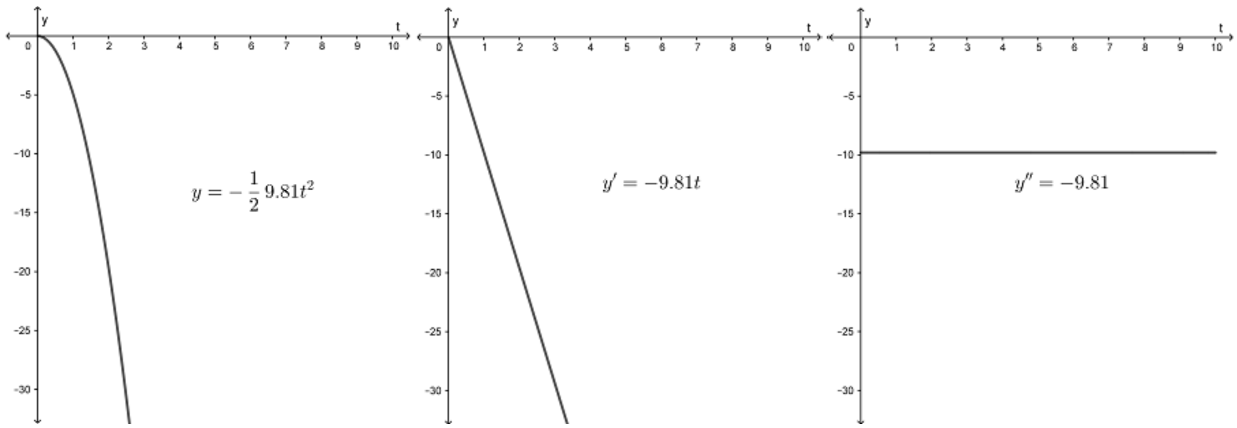
y para la **función** que se estudia (**posición**, en nuestro caso)

y' para su **cambio** con respecto a la variable independiente (diferencias en la posición con respecto al tiempo: **velocidad**, en nuestro caso)

y'' para el **cambio del cambio** con respecto a la variable independiente (cambio de velocidad con respecto al tiempo: **aceleración**, en nuestro caso).

Y así, sucesivamente, se van denotando los cambios con respecto a la variable independiente, sólo que como resulta impráctico seguir agregando *apóstrofos* ('), en los demás cambios se utiliza la notación: $y^{(n)}$. De este modo, se tienen las siguientes expresiones:

Imagen 3.3.3



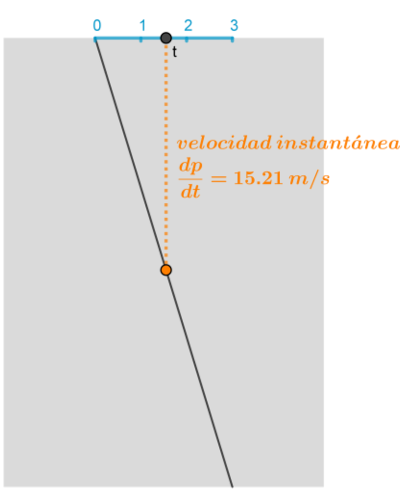
Momento 4: Retomando los diferenciales

Autor: Brenda Carranza-Rogerio

¿Y qué hay de los diferenciales?

Como exploramos en los **Momentos 1**, **2** y **3**, las gráficas construidas para la **velocidad instantánea** y la **aceleración instantánea** surgieron de ver cuánto cambiaba la ***posición*** con respecto al tiempo (para la *velocidad*) y cuánto cambiaba la ***velocidad*** con respecto al tiempo (para la *aceleración*), es decir:

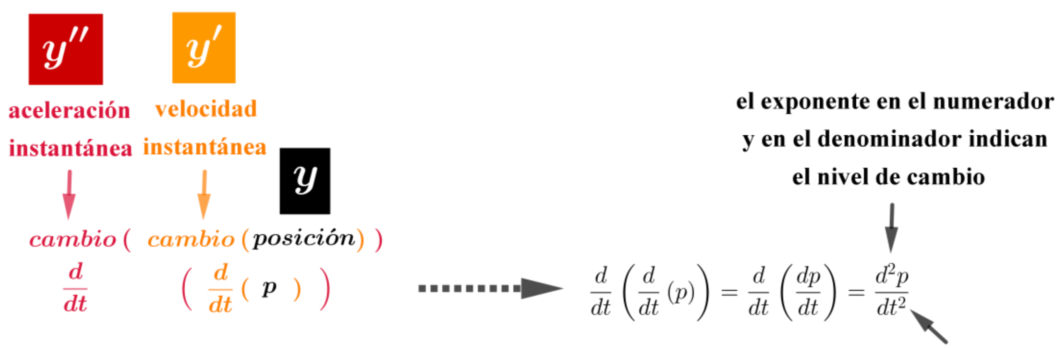
Imagen 3.4.1



La notación acostumbrada para describir el "**cambio con respecto al tiempo**" es: $\frac{d}{dt}$. En general, esta notación permite identificar **con respecto a qué** medimos.

De la misma manera que los *apóstrofos* indican un primer orden de cambio (') o un segundo orden de cambio (''), dependiendo de cuántas veces se utilice $\frac{d}{dt}$, se indica si nos referimos al **cambio**, o al **cambio del cambio**:

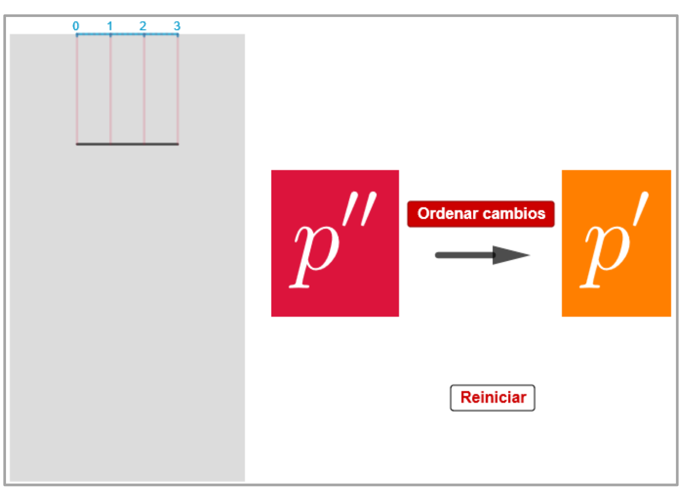
Imagen 3.4.2



¿Y cuál es la solución?

Depende de qué nos interese encontrar. Si sabemos que la gota de agua se mueve con **aceleración constante**, podríamos estar interesados en conocer entonces su **velocidad** en cada instante de tiempo, lo cual correspondería a lo que hacíamos en el "Ida y vuelta" cuando *ordenamos cambios*:

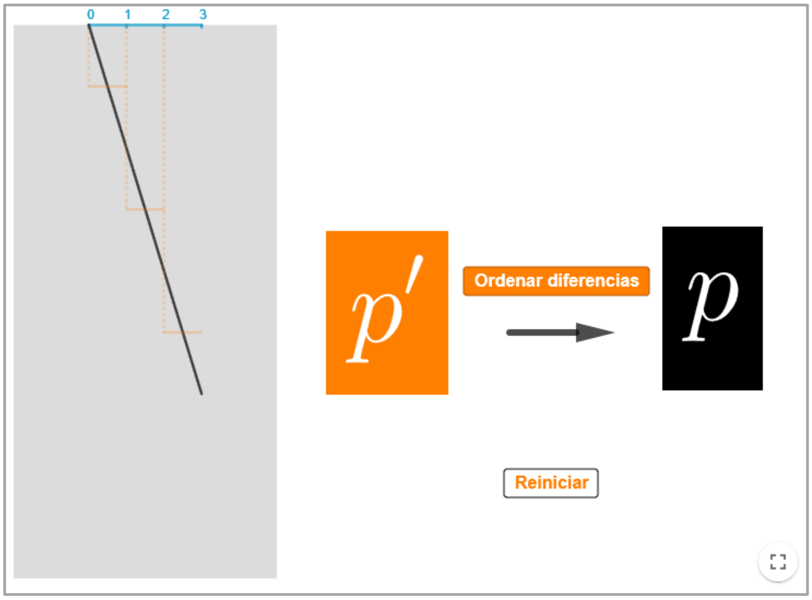
Applet 3.4.1



Al hacer clic en [Ordenar cambios] *se muestra la misma animación que en el* Applet 3.3.2.

Y si conocemos la **velocidad instantánea** y deseamos conocer la **posición**, entonces correspondería a cuando *ordenamos diferencias*:

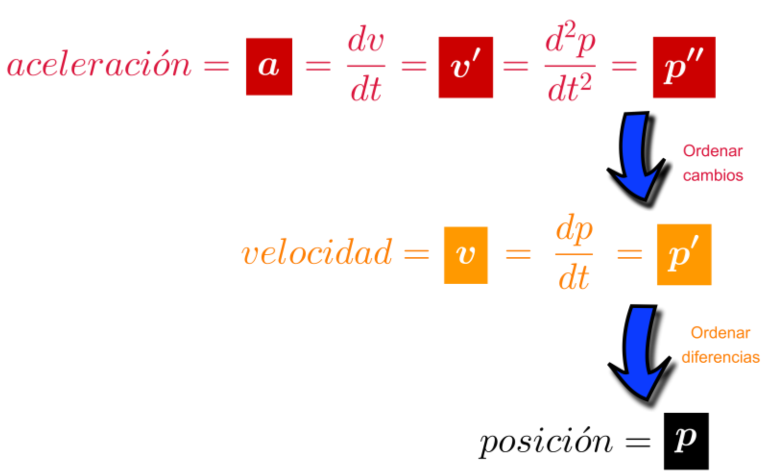
Applet 3.4.2



Al hacer clic en [Ordenar cambios] *se muestra la misma animación que en el* Applet 3.3.3.

Estos procesos corresponden a su vez a **integrar** la función de la cual partimos:

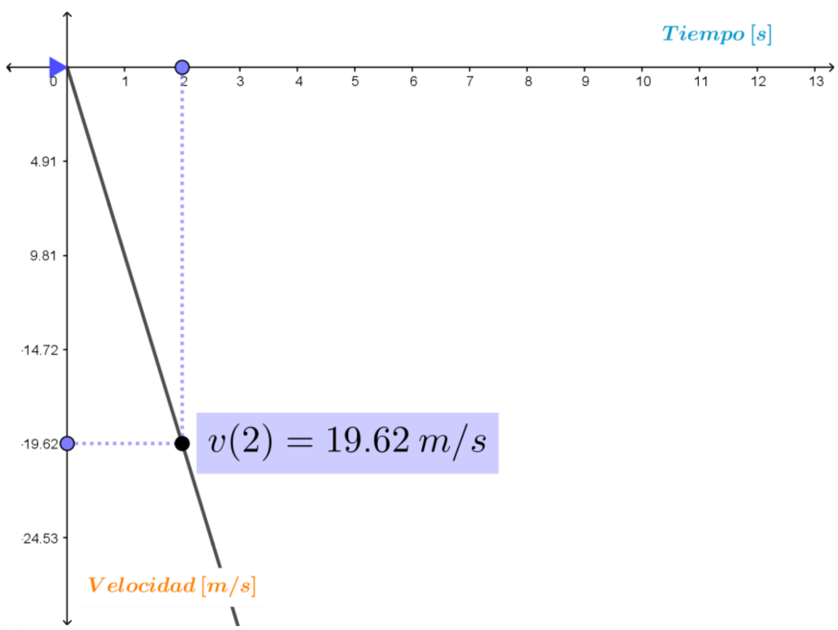
Imagen 3.4.3



Como recordarás, en cada paso necesitamos de un valor de referencia para poder **ubicar** la gráfica respecto a los ejes. Estos valores se denominan ***condiciones iniciales*** y justamente se llaman así porque nos proveen de información inicial sobre las condiciones del fenómeno en algún instante de tiempo específico.

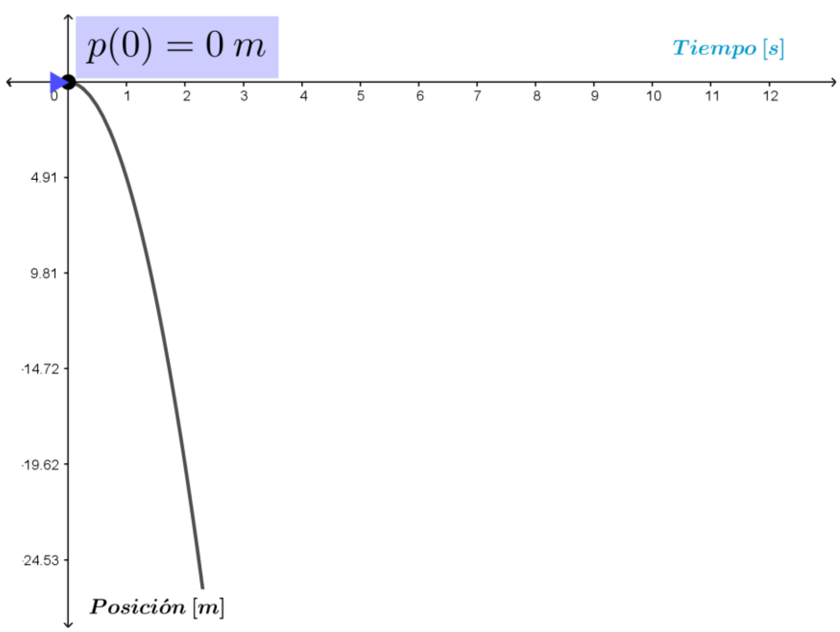
Cuando pasamos de la **aceleración (p'')** a la **velocidad (p')**, necesitamos **algún valor de la velocidad** en cierto tiempo para poder ubicar su gráfica, por ejemplo, que a los 2 segundos de caída tenía una velocidad de **-19.62 m/s**, es decir:

Imagen 3.4.4



Similarmente, cuando pasamos de la **velocidad (p')** a la **posición (p)**, necesitamos **alguna posición** para poder ubicar la gráfica, por ejemplo, saber que la gota inició su recorrido en **0 m**, es decir:

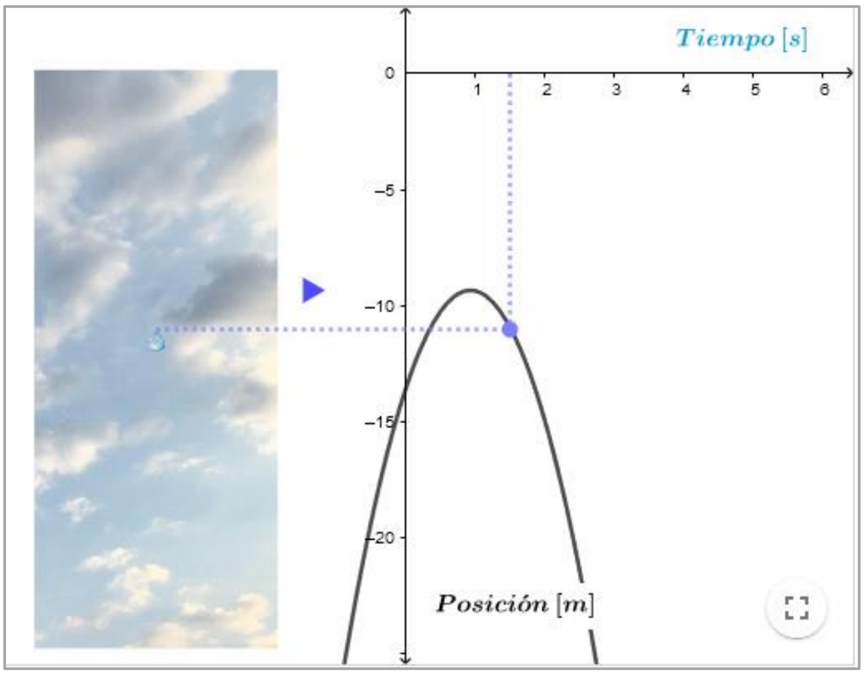
Imagen 3.4.5



¿Y si queremos pasar de la aceleración a la posición?

Para cerrar, exploremos esto a continuación. En el siguiente applet se muestra la posición de la gota en un determinado tiempo y la **gráfica de la posición** que se ha obtenido al ordenar las diferencias y luego los cambios:

Applet 3.4.3

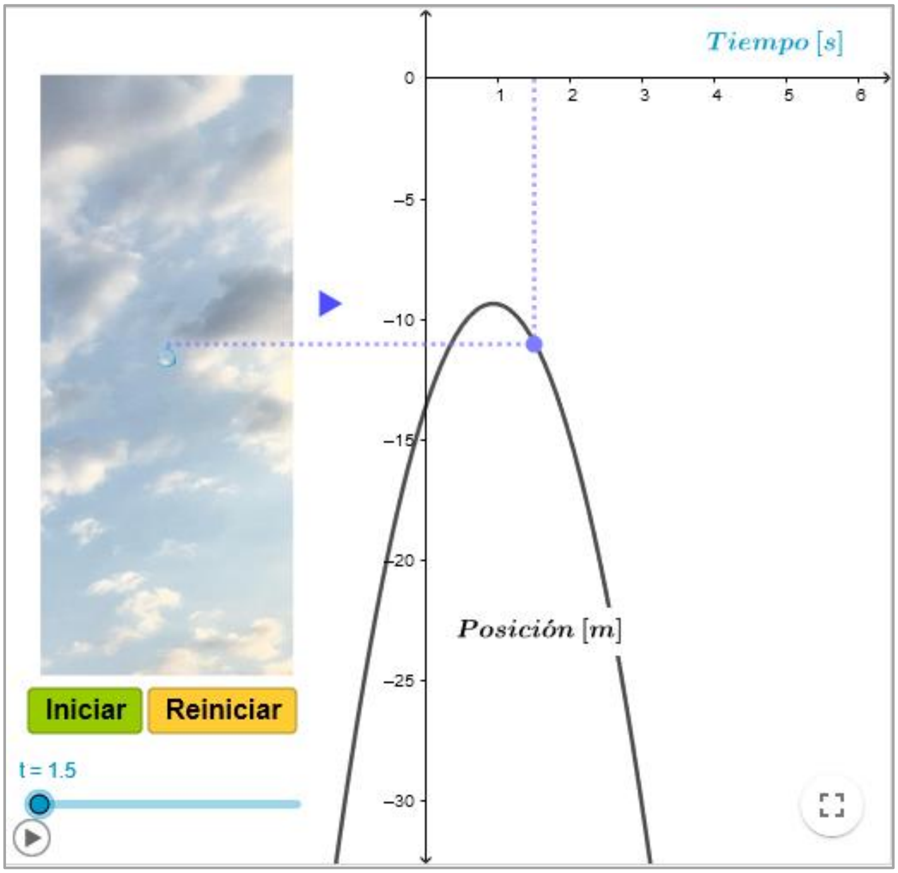


Al seleccionar y mover el triángulo azul, se desplaza el tramo de parábola al lugar donde se elija.

a) ¿Es correcto el lugar en el que está ubicada la gráfica? Si sí, explica por qué. Si no, reubica la gráfica en el lugar que consideres adecuado (moviendo el **triángulo azul**) y explica por qué la ubicas ahí.

Ahora, en el siguiente applet, ubica la gráfica en el lugar que decidiste era el correcto en el inciso anterior (si estabas de acuerdo con la posición, déjala donde está, si no, ubícala donde la colocaste). Luego, haz clic en [**Iniciar**] para ver la animación:

Applet 3.4.4



En este applet, además de que, al seleccionar y mover el triángulo azul, se desplaza el tramo de parábola al lugar donde se elija, con el botón [Iniciar] *se muestra la caída de la gota de agua, comenzando su recorrido en la posición que se muestra al inicio y concluyéndolo en la parte inferior de la escena.*

Durante la caída de la gota, el punto azul se desplaza en el plano a la misma altura que la gota y con la coordenada de tiempo correspondiente. La trayectoria que el punto sigue corresponde al brazo derecho de la parábola con su vértice colocado en la posición inicial del punto, es decir, ni en la ubicación preestablecida ni con su vértice en el origen se tiene la ubicación de la gráfica correspondiente a la caída de la gota.

b) ¿Fue correcta la ubicación que elegiste? ¿Qué **información**, además de la posición de la gota, es necesaria para ubicarla?

Anexo D. Encuesta del entorno sociocultural (Hinojos y Torres–Corrales, 2018).

Nota: El aumento de sangría indica que las preguntas aparecen en caso de que la respuesta anterior sea afirmativa y los asteriscos (*) indican que es necesario responder la pregunta para continuar.

Datos personales

Nombre completo (opcional)

Edad (años cumplidos) *

Sexo

☐ Hombre

☐ Mujer

Lugar de nacimiento (localidad, estado y país) *

Indique cuáles son sus pasatiempos actuales *

Puedes seleccionar varias opciones.

☐ Jugar videojuegos

☐ Leer por entretenimiento

☐ Pasar tiempo con mi familia y/o amigos

☐ Ver televisión o cine

☐ Asistir a eventos culturales, artísticos o deportivos

☐ Practicar deporte (ej. fútbol, béisbol, tenis, karate…), favor de especificar

☐ Practicar artes (ej. música, canto, baile, pintura, dibujo…), favor de especificar

☐ Estudiar algo extraescolar (ej. idiomas, cocina, costura, reparación…), favor de especificar

☐ Otro…

Indique cuáles eran sus pasatiempos en la infancia *

Puedes seleccionar varias opciones.

☐ Practicar actividades al aire libre (brincar cuerda, correr, jugar)

☐ Jugar videojuegos

☐ Leer por entretenimiento

☐ Jugar con juguetes como muñecas, cocinita, peluches, otro

☐ Jugar con carritos, canicas, trompo, yoyo, otro

☐ Jugar juegos de mesa (rompecabezas, turista, otros)

☐ Ver televisión o cine

☐ Practicar actividades en equipos al aire libre

☐ Juegos de construcción (lego, mecano, fichas, otros)

☐ Practicar deporte (ej. fútbol, béisbol, tenis, karate…), favor de especificar

☐ Practicar artes (ej. música, canto, baile, pintura, dibujo…), favor de especificar

☐ Estudiar algo extraescolar (ej. idiomas, cocina, costura, reparación…), favor de especificar

☐ Otro…

Acerca de tus familiares

Señala los integrantes de tu familia con los que creciste *

☐ Mamá

☐ Papá

☐ Hermano(s)

☐ Hermana(s)

☐ Tía(s)

☐ Tío(s)

☐ Primo(s)

☐ Prima(s)

☐ Pareja del padre

☐ Pareja de la madre

☐ Abuela materna

☐ Abuelo materno

☐ Abuela paterna

☐ Abuelo paterno

☐ Tutor(a) legal

☐ Otra(s) persona(s) (favor de especificar)

☐ Otro…

Edad de tu madre

Edad de tu padre

Edad de tus hermanos o hermanas *

Si no tienes hermanos o hermanas, por favor escribe “No tengo”.

Escolaridad máxima de:

De tu padre y madre, o su respectiva pareja.

	Padre	Madre
No fue a la escuela	☐	☐
Primaria	☐	☐
Secundaria	☐	☐
Bachillerato	☐	☐
Carrera técnica	☐	☐
Licenciatura	☐	☐
Maestría o especialidad	☐	☐
Doctorado	☐	☐

Ocupación actual (o última) de:

De tu padre y madre, o su respectiva pareja.

	Padre	Madre
Empleado en una empresa	☐	☐
Negocio propio	☐	☐
Jubilado	☐	☐
Dedicado al hogar	☐	☐
Estudiante	☐	☐
Trabajo eventual	☐	☐
Nunca ha trabajado	☐	☐

Escolaridad máxima y ocupación actual de tus hermanos o hermanas *

Favor de indicar el número de hermano al indicar su escolaridad máxima y ocupación, si no tienes hermanos favor de escribir "No tengo".

Pregunta Opcional: Escolaridad máxima y ocupación actual (o última) de tus abuelos y abuelas:

Si desconoces la respuesta, favor de escribir "No lo sé".

¿Jugabas con tus hermanos o hermanas en tu infancia? *

☐ Sí

☐ No

¿Qué tipo de juegos jugabas con tus hermanos? *

¿Qué tipo de juegos jugabas con tus hermanas? *

¿Jugabas con tus padres (o sus parejas) en tu infancia? *

☐ Sí

☐ No

¿Qué tipo de juegos jugabas con tu mamá? *

¿Qué tipo de juegos jugabas con tu papá? *

¿Jugabas con tus abuelos en tu infancia? *

☐ Sí

☐ No

¿Qué tipo de juegos jugabas con tus abuelos? *

Favor de indicar abuelo paterno o materno según sea el caso.

¿Qué tipo de juegos jugabas con tus abuelas? *

Favor de indicar abuela paterna o materna según sea el caso.

Acerca de tu carrera

Nombre de la carrera y semestre que cursas actualmente *

¿Trabajas actualmente? *

☐ Sí

☐ No

¿En qué trabajas actualmente? *

☐ Autoempleo

☐ En algo relacionado a mi carrera

☐ Otro…

¿La carrera que elegiste fue tu primera opción de formación profesional?

☐ Sí

☐ No

¿Cuáles fueron tus principales motivaciones para elegir tu carrera profesional? *

Puedes elegir varias opciones.

☐ Por motivación de algún familiar

☐ Por motivación de amistades

☐ Por motivación de docentes

☐ Porque me pareció interesante o un reto personal

☐ Por factores económicos

☐ Por los resultados de una prueba de aptitudes

☐ Por la cercanía de la universidad a mi lugar de origen

☐ Por el prestigio y calidad del programa o universidad

☐ Por mis habilidades

☐ Otro…

¿Por qué no estudiaste la carrera que fue tu primera opción? *

Puedes elegir varias opciones.

- ☐ Por influencia de algún familiar
- ☐ Por influencia de amistades
- ☐ Por influencia de docentes
- ☐ Por el resultado del examen de admisión
- ☐ Por factores económicos
- ☐ Por los resultados de una prueba de aptitudes
- ☐ Por la lejanía de la universidad a mi lugar de origen
- ☐ Porque el perfil de la carrera no era adecuado a mi género
- ☐ Por mis habilidades
- ☐ Otro...

Cuando estaba en primaria, mis materias favoritas eran: *

Puedes elegir varias opciones.

- ☐ Artística
- ☐ Ciencias
- ☐ Computación
- ☐ Deporte
- ☐ Español
- ☐ Geografía
- ☐ Historia y Civismo
- ☐ Idiomas
- ☐ Matemáticas
- ☐ Taller (favor de especificar)
- ☐ Otro...

Cuando estaba en secundaria, mis materias favoritas eran: *

Puedes elegir varias opciones.

- ☐ Artística
- ☐ Biología
- ☐ Computación
- ☐ Deporte
- ☐ Español
- ☐ Física

☐ Geografía

☐ Historia/Formación Cívica

☐ Idiomas

☐ Matemáticas

☐ Química

☐ Taller (favor de especificar)

☐ Otro…

Cuando estaba en bachillerato, mis materias favoritas eran: *

Puedes elegir varias opciones.

☐ Ciencias sociales (filosofía, lógica, ética, comunicación)

☐ Computación

☐ Educación física

☐ Dibujo técnico

☐ Física

☐ Historia

☐ Idiomas

☐ Lectura y redacción

☐ Matemáticas

☐ Química

☐ Taller (favor de especificar)

☐ Otro…

En mis estudios profesionales, mis materias favoritas son: *

Puedes elegir varias opciones.

☐ Artes

☐ Ciencias Sociales

☐ Computación

☐ Deportes

☐ Física

☐ Idiomas

☐ Matemáticas

☐ Química

☐ Materias de mi carrera

☐ Otro…

Cuando realizo un trabajo en equipo me identifico con: *

Por favor, seleccione solo una respuesta.

☐ Me identifico como líder y guío al equipo

☐ Me siento mejor trabajando individualmente

☐ Me reúno solo con compañeros

☐ Me reúno solo con compañeras

☐ Trato de integrarme a todo el equipo

☐ Solo observo y hago lo que me indiquen

☐ Me siento mejor trabajando en parejas

☐ Doy indicaciones, pero no me considero líder

Al terminar mi carrera, ¿cuáles son mis expectativas? *

Puedes elegir varias opciones.

☐ Trabajar en una empresa

☐ Trabajar por cuenta propia (autoemplearme)

☐ Seguir estudiando

☐ Dedicarme al hogar

☐ Formar una familia

☐ Emprender un negocio

☐ Otro...

Cuando lo has necesitado, ¿quién te ha apoyado a hacer tus tareas?

Puedes indicar varias personas.