Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Unidad Distrito Federal
Departamento de Matemática Educativa

El tratamiento de los mecanismos constructivos de la fracción en maestros en formación

Tesis que presenta

Marcela Iveth Carrillo Pérez

Para obtener el grado de Maestra en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Directora de tesis:

Dra. Marta Elena Valdemoros Álvarez

México, Distrito Federal Agosto 2014

Agradecimiento

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** por el apoyo que me brindó al otorgarme la beca para realizar estudios de Maestría en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Becario número: 219967

Mi más sincero agradecimiento a la **Dra. Marta Elena Valdemoros Álvarez** por compartir su experiencia y conocimientos, además de su apoyo incondicional durante el trayecto de esta investigación.

A mi Mami,

Porque eres y siempre serás el pilar y motivación en mi vida;

este gran esfuerzo es por las dos.

A Luis Ángel,

Por estar aquí siempre conmigo, apoyándome.

A Pati,

Por todo lo que he aprendido contigo, por tu apoyo,

pero sobre todo, tu amistad.

A Eli y Cristi

Por su amistad sincera, por tantas historias vividas,

y por las que están por venir.

ÍNDICE

EL TRATAMIENTO DE LOS MECANISMOS CONSTRUCTIVOS DE LA FRACCIÓN EN MAESTROS EN FORMACIÓN

Por lo común, la palabra fracción está relacionada con dividir un entero en partes iguales, pero su concepto va más allá de esta interpretación. Kieren (1988), desarrolló una red semántica acerca de la construcción del número racional donde muestra la articulación de diversos significados de las fracciones como estructura del Campo de Cocientes de los Números Racionales. En dicha construcción encontramos una herramienta básica; los mecanismos constructivos (Kieren, 1983) los cuales se relacionan con la enseñanza y la experiencia.

En nuestra interpretación, la importancia de las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición son los elementos necesarios que los maestros de primaria deben incorporar de manera cotidiana dentro del aula puesto que estos mecanismos son la base de constitución de todo el conocimiento relativo a las fracciones. Por lo anterior, determinamos que es de vital importancia explorar cómo es que los maestros en formación están desarrollando dichos mecanismos constructivos en su aprendizaje y su propia enseñanza.

Los instrumentos metodológicos que permitieron identificar dicho tratamiento fueron: resolución de cuestionarios *a priori* y *a posteriori* a la enseñanza recibida en la Normal (institución encargada en formar maestros), observación directa e indirecta de dicha instrucción, así como la instrucción desarrollada en aulas de la escuela primaria por parte de los maestros en formación, a través de la cual se seleccionó a dos sujetos para realizar *estudio de casos*. Dichos sujetos realizaron un diseño didáctico relativo a la enseñanza de la fracción, para el cual también realizamos un análisis.

Con los cuestionarios identificamos diversas estrategias de partición en todos continuos y discretos, asimismo, las relaciones de equivalencia desarrolladas en tareas ligadas a las relaciones parte-todo y parte-parte.

A través de la investigación observamos el vínculo que existe entre la enseñanza recibida en la Escuela Normal y el diseño didáctico para alumnos de educación primaria, con respecto a los mecanismos constructivos de la fracción.

TREATMENT OF THE CONSTRUCTIVE MECHANISMS OF THE FRACTION IN TEACHERS IN TRAINING

Usually, the word ‘fraction’ is related to dividing a whole into equal parts, but its concept goes beyond this interpretation. Kieren (1988) developed a semantic grid regarding the construction of rational numbers which shows the composition of various meanings of the fractions as the Quotient Field Structure of Rational Numbers. In such construction we find a basic tool: the ‘*constructive mechanism*’ (Kieren 1983) which are related to teaching and experience.

In our interpretation, the importance of the equivalence relations between fractions and the partition processes are the necessary elements which primary school teachers should incorporate daily in the classroom since these mechanisms are the basis to conform all knowledge about fractions. Therefore, we determine that is vital to explore how teachers in formation are developing such constructive mechanisms in their learning and their own teaching.

The methodological instruments that allowed us to identify this treatment were: *prior and post* resolution of questionnaires to the training received in the ‘Normal School’ (institution in charge of teacher formation), direct and indirect observation from such instruction, as well as the instruction developed in elementary school classrooms carried out by the pre-service teachers. Through this instruction two subjects were chosen to create a ‘Case Study’. Such Normal School students developed an instructional design related to the teaching of fractions, for which an analysis was also carried out.

With the questionnaires various partitioning strategies in continuous and discrete wholes were identified, as well as equivalence relations developed in tasks referred to part-whole and part-part relationships.

Through research we compare the received teaching in the Normal School and the instructional design for elementary education students regarding the constructive mechanisms of fractions.

INTRODUCCIÓN

La fracción es uno de los contenidos matemáticos con mayor complejidad en la currícula escolar de educación básica, específicamente en la educación primaria. Muestra de ello son las reformas educativas a través de los años en México. En estos cambios se propusieron enfoques distintos en relación a la enseñanza de las fracciones ya que ahí reside su aprendizaje, debido a su complejidad conceptual y al escaso contacto que existe con ellas en la vida cotidiana, en la que se plasman pocas experiencias de uso de dichos números.

En nuestra investigación tomamos en cuenta el Plan y Programas de Estudio 1993 para Educación Primaria debido a su vigencia durante el periodo del estudio; asimismo, el Plan de Licenciatura en Educación Primaria 1997. En esta reforma se planteó que la enseñanza de las fracciones estuviera centrada en la semántica de la fracción relativa a los significados de la misma, identificados por Kieren (1983), dejando de lado a la sintaxis sin sentido, es decir, a la ejecución de los algoritmos sin significado que se había llevado a la práctica por décadas.

Asimismo, en el desarrollo de la semántica de las fracciones, Kieren (1983) afirma que las herramientas básicas son los mecanismos constructivos, los cuales son elaborados a través de la instrucción. Con base en lo anterior, decidimos indagar sobre cómo es la enseñanza concerniente a las fracciones en la Escuela Normal, es decir, cómo es que les "enseñan a enseñar" a los maestros en formación. Cómo desarrollan este enfoque basado en el sentido y no en la sintaxis. Es aquí donde nuestra investigación adquiere relevancia, debido a la poca investigación que hay al respecto de la enseñanza de los maestros en formación, en el tratamiento de los mecanismos constructivos como herramientas básicas en la enseñanza y aprendizaje de la fracción.

El presente estudio se llevó a cabo en una escuela Normal muy importante de la Ciudad de México; cabe mencionar que las puertas de las asignaturas: “Matemáticas y su enseñanza” y “Observación y práctica docente” fueron abiertas a este estudio. Nuestro análisis estuvo centrado en el tratamiento que dan los maestros de educación primaria en formación a los mecanismos constructivos de la fracción tanto en su aprendizaje como en la instrucción que realizan con niños.

El informe final de esta investigación se organizó en cinco capítulos y un apartado destinado a las conclusiones, además de presentar un listado de las referencias más sólidas para nuestro estudio. También se muestran los apéndices necesarios para dar mayor claridad a nuestra investigación. A continuación describimos brevemente el contenido de todos los capítulos que integran este reporte final de investigación.

En el Capítulo 1 presentamos la justificación, objetivo y planteamiento del problema: “*El tratamiento de las relaciones de equivalencia entre fracciones y procesos de partición de todos continuos y discretos, en la formación de maestros de Educación Primaria”*, así como las preguntas de investigación. Además, en este apartado incorporamos las consideraciones teóricas sobre las que se sustenta nuestro estudio con respecto a las fracciones y su enseñanza.

En el Capítulo 2 describimos el escenario y los sujetos participantes en el estudio de campo. Asimismo, mostramos el esquema general de nuestro método a través de su diseño, a la par que desarrollamos ampliamente los objetivos y características de los instrumentos metodológicos empleados, así como la validación de nuestra investigación.

En el Capítulo 3 mostramos los resultados del Cuestionario 1, el cual fue resuelto por los maestros en formación *a priori* de la instrucción impartida por la Escuela Normal. En este apartado mostramos el análisis de las soluciones con respecto a las concepciones de los normalistas en relación a la fracción, las estrategias de partición de todos continuos y de todos discretos, las relaciones de equivalencia y los diseños de problemas elaborados por ellos mismos en vinculación con las fracciones.

En el Capítulo 4 detallamos los resultados obtenidos a través de la observación directa e indirecta de las clases impartidas a los maestros en formación, así como el análisis de los resultados del cuestionario, *a posteriori* de la enseñanza. Además, se realiza el contraste de los resultados de los cuestionarios.

El Capítulo 5 fue dedicado al estudio de casos, utilizando la entrevista como instrumento principal de indagación, la cual nos permitió identificar algunas estrategias de solución con respecto a los procesos de partición y relaciones de equivalencia; también presentamos la elaboración de un diseño didáctico con respecto a la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria. Además, en este apartado exponemos los resultados de la observación directa referente a la puesta en práctica del diseño elaborado por las maestras en formación mediante la entrevista. Por último, se realiza un contraste entre los casos de Norma y Marisol.

Seguidamente se presenta el apartado de Conclusiones de nuestra investigación, tanto de manera general, así como por instrumentos metodológicos y con respecto a las estrategias de solución de problemas empleadas por los maestros en formación. Asimismo, se da respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 1.

Por último, se muestra la lista de referencias, siendo éstas las más sólidas en el campo de estudio de las fracciones, identificando fuentes bibliográficas originales de dichos planteamientos. Además, se muestran los apartados que necesitan ser exhibidos para dar mayor claridad a nuestra investigación, mediante la presentación de los Apéndices. Cabe mencionar que el último consiste en el listado y la carta de aceptación de las publicaciones, nacionales e internacionales, relacionadas con este trabajo de investigación.

1. PROBLEMA Y FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE NUESTRA INVESTIGACIÓN

Uno de los contenidos matemáticos en la currícula de educación básica con mayor dificultad en su enseñanza y por consiguiente en su aprendizaje, son las fracciones, dado que la construcción de estos números es muy compleja, en contraste con los números naturales. Esta complejidad se debe entre otras cosas a su estructura multiplicativa, pero también, a que las fracciones son utilizadas con menor frecuencia en la vida diaria, no así los números naturales que se manejan en casi todas las actividades de nuestra experiencia cotidiana. Asimismo, el uso del lenguaje de los números fraccionarios, a temprana edad y sin el sentido preciso de su significado incrementan dicha complejidad (Perera, 2009).

En relación a lo anterior, Kieren (1988) menciona que la construcción de la fracción no se adquiere de manera intuitiva como se adquieren los números naturales. Además, su complejidad reside en las diversas uniones entre “constructos mentales humanos” y “hechos externos”.

Si bien la construcción de la fracción es compleja, su enseñanza presenta muchas dificultades debido a la naturaleza algebraica de su construcción formal y manipulación (Kieren, 1976). Por lo anterior, enfocamos nuestro interés en el aprendizaje y enseñanza de fracciones a nivel básico, en profesores de educación primaria en formación; es decir, queremos indagar el qué y el cómo “aprenden para enseñar” fracciones en educación básica.

La enseñanza de fracciones en las recientes reformas educativas de México

Se sabe que la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria ha sido rígida, sin sentido y basándose en modelos esquemáticos. Sin embargo, a través de los años, la educación de nivel básico, en México, ha planteado diversas reformas a la práctica de la enseñanza, en las que se proponen enfoques distintos, modificándose así la currícula escolar.

En 1972, en lo concerniente a las fracciones, el concepto de fracción se manejó como "una parte" o parte de un conjunto de varios objetos iguales, haciendo así uso del todo continuo y del todo discreto. Además, eran denominados "quebrados" como nomenclatura en su escritura. La propuesta didáctica se trató de que el alumno comprendiera que la fracción es una expresión a/b en donde el denominador indica las partes en las que está divido el todo y el numerador indica las partes que se toman del todo.

Se realizaban comparaciones de fracciones y el común denominador se trabajaba al identificar la equivalencia de fracciones y así realizar problemas de adición y sustracción de fracciones. Para representar relaciones de orden se utilizó la recta numérica. El algoritmo de la multiplicación y división de fracciones se trabajaba en los últimos grados de educación primaria.

La enseñanza en esta propuesta pedagógica (Secretaría de Educación Pública, 1972), no debía estar cargada de procesos algorítmicos por lo que el uso de planteamiento de problemas con situaciones de la vida cotidiana era una idea fundamental durante este enfoque didáctico. Se pretendía no apoyarse sólo en reglas y definiciones sino de llegar a ellas a través de la extensión de los procesos de los números naturales.

En la propuesta pedagógica de 1993, el trabajo con fracciones se organizó de manera distinta manera comenzando en tercer grado las relaciones y operaciones sencillas mientras que las operaciones más complejas, tales como la multiplicación y la división, se trasladaron a la educación secundaria. La nueva propuesta se basó en el uso de los significados de la fracción (Kieren, 1983) en situaciones de reparto y medición. El significado del uso de las fracciones como razón y operador se centraron en las actividades del segundo y tercer ciclo de la educación primaria.

La enseñanza estaba centrada en la resolución de problemas, donde los algoritmos y sus procedimientos de solución eran el medio para lograr el desarrollo de los propios significados del alumno, es decir el autor principal de su propio aprendizaje era el alumno (Secretaría de Educación Pública, 1993).

La actual Reforma Integral de Educación Básica (Secretaría de Educación Pública, 2009), tiene como enfoque didáctico que el alumno pueda resolver problemas de manera autónoma, transitando de procedimientos informales a convencionales a partir del razonamiento y la construcción de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones. Se propone que los números fraccionarios sean abordados con tareas que se basen en constructos de partición, equivalencia y unidades divisibles, así como el uso de los significados de la fracción como medida, razón, operador, cociente, relación parte- todo, fracciones decimales y fracciones como porcentaje. Plantear y resolver problemas que impliquen situaciones de reparto, sumar o restar fracciones con distintos procedimientos. Considera necesario insistir en identificar de manera constante la unidad de referencia. De igual forma que en los programas anteriores, plantea actividades de comparación entre fracciones y de ubicación en la recta numérica.

Cabe mencionar que el nombre de la reforma antes descrita no ha presentado ningún cambio, aunque si bien, en la actualidad se maneja el título de Reforma Educativa sólo está encaminada al cambio en el aspecto laboral del docente y no hacia los contenidos y enfoques del plan de estudios.

En las reformas educativas mencionadas se identificaron los cambios en relación a la enseñanza de las fracciones que se debe desarrollar con los alumnos de educación primaria, pero nos preocupamos ahora de qué pasa con la currícula, el aprendizaje y la enseñanza de los profesores en formación, con respecto a las matemáticas, específicamente las fracciones.

La reforma curricular de la educación básica que se inició en 1993 fue la base para elaborar un nuevo esquema de formación docente debido a que los cambios en los enfoques y los contenidos del currículum demandaban competencias docentes que no eran atendidas por el Plan de Estudios de Educación Normal de 1984. El plan de Estudios de Licenciatura de

Educación Primaria 1997 dio un giro importante al enfoque de la enseñanza de las matemáticas donde el rasgo central es el conocimiento sobre el desarrollo de las capacidades del pensamiento del niño, por lo que el profesor en formación debe desarrollar las mismas competencias que fomentará en sus alumnos, estableciendo una correspondencia entre el grado de complejidad de los contenidos educativos con los procesos cognitivos de los alumnos (Secretaría de Educación Pública 1997).

En el Plan de Estudios de Licenciatura 1997 se consideraron dos semestres para la asignatura "Matemáticas y su Enseñanza", la cual tenía como finalidad que los profesores en formación ampliaran y consolidaran sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos desarrollados en la escuela primaria, así como la comprensión del enfoque de la enseñanza de las matemáticas basado en la resolución de problemas como medio principal para la adquisición de nociones y procedimientos matemáticos; y buscaba que "*Profundicen y consoliden el conocimiento que tienen de las matemáticas, de manera que descubran el sentido y la estructura de los contenidos de esta asignatura que se trabajan en la escuela primaria*" (Secretaría de Educación Pública, 1997). Es importante mencionar que se tomará en cuenta el Plan de Licenciatura de 1997 debido a que la investigación se realizó estando éste vigente.

Con respecto a las fracciones, se trabajaban en la asignatura *"Matemáticas y su enseñanza II"* (Secretaría de Educación Pública, 1998) del Plan de Licenciatura en Educación Primaria 1997, en el bloque *"Los números racionales"*, teniendo como propósitos que los maestros en formación:

1. Conozcan los diferentes significados que puede tener una fracción y los problemas que se generan con ellos.
2. Utilicen adecuadamente las fracciones y los números decimales, al comunicar o interpretar cantidades o al operar con ellos.
3. Reflexionen sobre la estructura algebraica de los números racionales.
4. Conozcan los aspectos relativos a las fracciones y los decimales que se estudian en cada grado de la escuela primaria.
5. Conozcan, prevean y comprendan algunos errores frecuentes que cometen los niños al trabajar con las fracciones (p. 19).

El problema de investigación

Existen distintas aportaciones teóricas respecto a los procesos y conceptos fundamentales referidos a las fracciones. Para Kieren (1983 y 1988) las fracciones están constituidas por cuatro subconstructos elementales; medida, cociente, razón, operador, y un quinto, la relación parte-todo. Estos subconstructos se encuentran, como ya lo mencionamos anteriomente, en el Plan y Programas de Educación Primaria (1993) y actualmente en la Reforma Integral de la Educación Básica (2009); por consiguiente, están dentro del Programa de Licenciatura en Educación Primaria (1997) de la Escuela Normal.

Debido a los múltiples significados de la fracción es de vital importancia desarrollar herramientas básicas que permitan la construcción de los mismos. De acuerdo con Kieren (1983), estas herramientas son: la partición, la equivalencia y el reconocimiento de unidades divisibles (“*mecanismos constructivos”)***.**

Con base en la importancia que tienen en la enseñanza de fracciones, las relaciones de equivalencia y los procesos de partición, nuestra investigación está centrada en el siguiente problema:

> ***“El tratamiento de las relaciones de equivalencia entre fracciones y procesos de partición de todos continuos y discretos, en la formación de maestros de Educación Primaria”.***

Teniendo como objetivo general del estudio:

> ***Explorar y analizar qué es lo que algunos estudiantes de la Licenciatura en Educación Primaria conocen y aprenden para elaborar planes de clase orientados a enseñar las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición de todos continuos y discretos, en la primaria.***

Dada la importancia del problema de investigación y el objetivo de nuestra investigación, nos centraremos en dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ***¿Qué concepción tienen los maestros de primaria en formación acerca de las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición de todos continuos y discretos?***
- ***¿Cómo se aborda la equivalencia entre fracciones y los procesos de partición de todos continuos y discretos en las sesiones de enseñanza de la Escuela Normal?***
- ***¿Cómo diseñan tareas vinculadas a la relación de equivalencia y a los procesos de partición?***
- ***¿Qué tratamientos dan los maestros en formación a las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición, en vinculación con el todo continuo y el todo discreto, en el salón de clase de la primaria?***

Fundamentos teóricos

Existen diversos autores e investigaciones en matemática educativa dedicados a explorar y definir el campo semántico de las fracciones; en este apartado sólo mencionaremos aquellas que consideramos relevantes para nuestra investigación. Asimismo, abordamos algunos aspectos de formación docente.

Semántica de las fracciones

Por lo común, la palabra fracción está relacionada con dividir un entero en partes iguales, pero su concepto va más allá de esta interpretación dado que tras muchos estudios de investigación se han identificado diversos significados. Una fracción implica un número determinado de partes establecidas por la división (exhaustiva y equitativa) de un todo, continuo. Una fracción es una parte del todo inicial al mismo tiempo que cada una de las partes pueden ser divisibles nuevamente destacando las relaciones parte-todo y parte-parte (Piaget, Inhelder, Szeminska, 1966). Para Dienes (1967), la fracción puede ser considerada un estado o un operador que actúa sobre una unidad arbitraria y a partir de ella se generan las cadenas estado-operador-estado.

Para Freudenthal (1983), las fracciones son el *"recurso fenomenológico"* es decir, la expresión concreta, fácilmente identificable, para la que se hace presente intuitivamente el número racional. O sea, el todo puede ser cortado, coloreado, doblado en partes iguales para representar de manera concreta a la fracción. Además, identifica algunos usos atribuidos a la fracción, desarrollados a través del lenguaje habitual, tales como: *"comparador entre dos cantidades, la descripción de una cantidad, la formación de múltiplos, expresión de una cantidad y expresión de relaciones"*

Freudenthal (1983) identifica en la fracción tres interpretaciones: la fracción como "*fracturador"*, la fracción como *"comparador"* y la fracción como "*operado*r". La fracción como "fracturador" es utilizada al dividir el todo de manera "*reversible, irreversible o simbólica*" y en partes iguales. El todo puede ser "*discreto o continuo*". El todo continuo puede representarse con una figura geométrica, la relación de la parte con el todo es indicada por una fracción y provoca fracciones propias. El todo discreto es expresado como un conjunto, donde un subconjunto contenido en él se indica con una fracción (Hart, 1981).

La relación existente entre la fracción y la medida se manifiesta en la interpretación como *comparador,* donde se distingue el "*comparador directo"* cuando al observar o imaginar objetos, separados uno de otro se comparan, colocándolos juntos. Mientras que si la comparación se realiza a través de un tercer objeto, el cual puede ser un instrumento de medición que media al ser transferido entre ellos, pone de manifiesto el uso de la fracción como *"comparador indirecto"*.

La fracción como *operador* muestra tres formas distintas al realizar la acción de la operación sobre el objeto. Como *"operador fracturante"* se desarrolla la acción de romper objetos concretos en partes equivalentes, es dinámico, los objetos comparados son todo y parte. El "operador razón" surge de la comparación de cantidades y magnitudes como un transformador. Para definir formalmente el campo de los números racionales surge el "*operador fracción*" (Freudenthal, 1983).

Kieren (1983), puntualiza que las fracciones están constituidas por cuatro significados que él denomina *"subconstructos"*, dichos significados son*: "medida, cociente, razón, operador multiplicativo"*. Además reconoce un quinto subconstructo, el cual es definido como un todo cortado en partes iguales, "*la relación parte-todo*". Este último es el que origina el lenguaje de fracción; asimismo, puede relacionarse con cada uno de los otros por medio de la identificación de unidad apropiada a cada circunstancia; es decir, el conocimiento de fracciones es un conjunto de elementos que se interconectan. Valdemoros (2008) menciona que los distintos significados que se le atribuyen a las fracciones sientan las bases para tener una mejora en el desarrollo posterior de conceptos.

Respecto al significado de la relación parte-todo, Piaget, Inhelder y Szeminska (1966). (1966) aseveran que los niños, al dividir un todo en partes iguales, necesitan anticipar la relación entre el todo y las partes, la cual debe estar vinculada con la conservación del todo, sin importar las divisiones que hubiera sufrido. La relación parte-todo puede ser un esquema de pensamiento, teniendo como base la subdivisión de áreas.

La fracción como medida se refiere a cuántas veces cabe una unidad en otra. Para que un niño pueda construir esta noción, Kieren (1976) menciona necesarias dos estructuras cognitivas:

a) Admitir que la unidad puede ser dividida en el número de partes iguales que se desee. Reconocer a un todo como unidad y aceptar que ésta no ha sufrido cambios después de efectuar partición en ella.

b) El reconocimiento de las medidas equivalentes que surjan de la partición de la unidad.

La fracción como cociente representa el resultado de dividir un todo en un determinado número de partes; está asociada directamente a situaciones de reparto y la estructura cognitiva más importante en este subconstructo es la partición (Kieren , 1976, 1983, 1988). Asimismo, la fracción como razón indica la comparación numérica entre dos magnitudes. Esta comparación se realiza en la relación parte-todo y en la relación parte-parte (Kieren, 1988). Por último, la fracción como operador tiene la función de un operador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalentes. Esta transformación implica la ampliación o reducción de un todo a otra unidad de referencia (Kieren, 1976).

Mecanismos constructivos de la fracción

Kieren (1988), desarrolló una red semántica (Figura 1.1) acerca de la construcción del número racional. Esta red muestra cómo los constructos están relacionados e interconectados con los constructos mentales humanos y los hechos externos. Se puede pensar que ésta es una imagen ideal del conocimiento del número racional. Asimismo, propone que el conocimiento individual se estructura a partir de los constructos basados en los hechos humanos. Además sugiere que el conocimiento de los números fraccionarios se vaya construyendo a partir de los constructos relacionados con el plano de los hechos hasta los más abstractos. Esta red admite en el nivel más bajo a los constructos basados en "hechos" pasando por los constructos intuitivos "subconstructos" para luego llegar a los niveles más formales.

Idealmente, los constructos del nivel más alto están interconectados con constructos que están debajo de ellos y con los hechos humanos. Los hechos humanos están vinculados a los mecanismos mentales constructivos que están relacionados con la experiencia, éstos son el objetivo de la instrucción. Asimismo, Kieren (1983) propone dos tipos de herramientas o mecanismos mentales para la construcción del número racional: "*mecanismos constructivos y mecanismos mentales*".

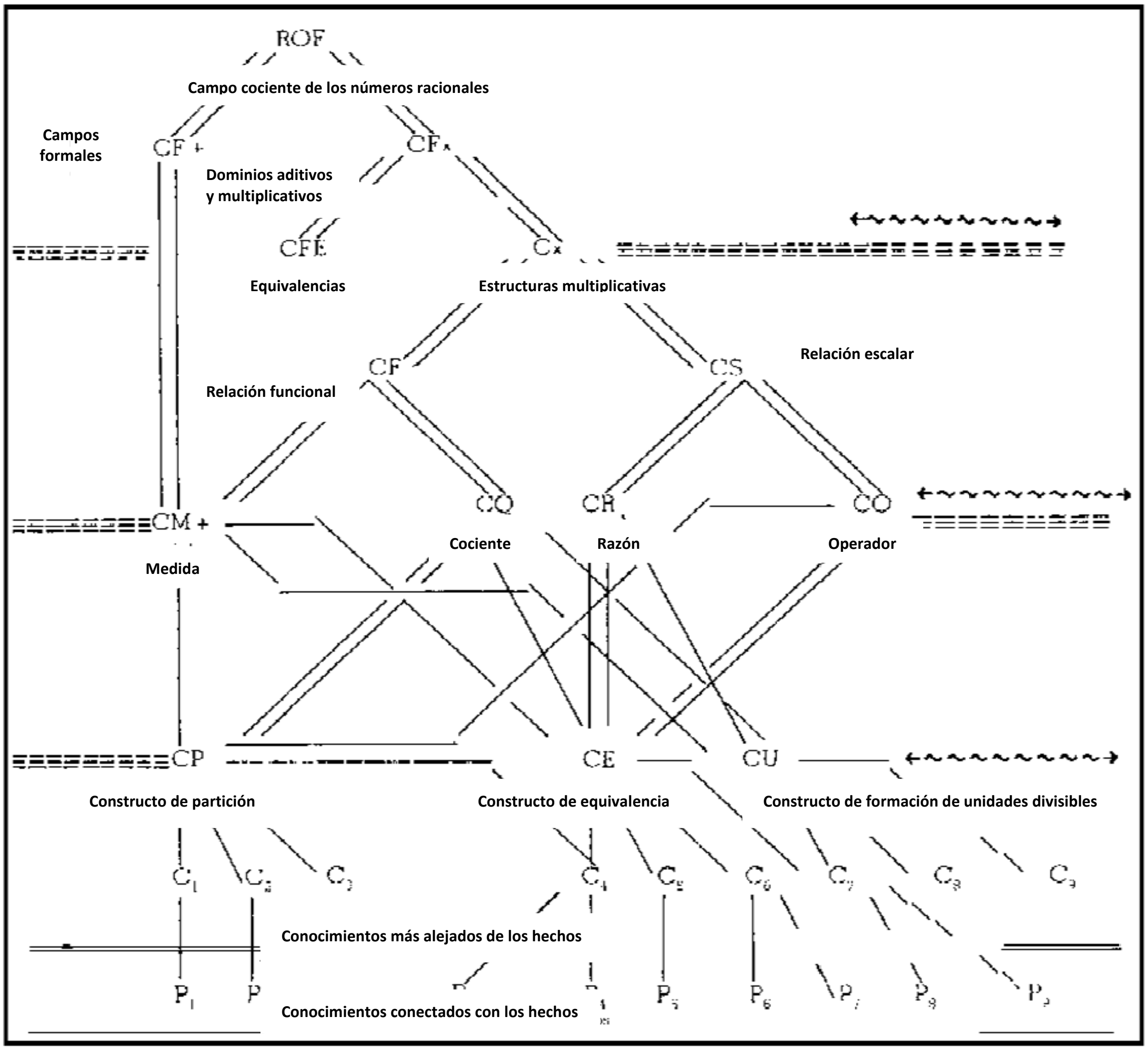


Figura 1.1 Red Semántica elaborada por Kieren (1988).

Los mecanismos constructivos son específicos, están relacionados con la experiencia y la enseñanza. En ellos , Kieren sitúa a la partición, la equivalencia y la formación de unidades divisibles. Los mecanismos de desarrollo son generales y están vinculados con la madurez mental, estos son la conservación del todo (Piaget, *et al.*, 1966), el razonamiento proporcional, la reversibilidad y la comparación simultánea (Kieren, 1983). En nuestra interpretación, la importancia de las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición son los elementos necesarios que los maestros de primaria deben incorporar de manera cotidiana dentro del aula puesto que estos mecanismos son la base de adquisición de todo el conocimiento relativo a las fracciones.

Kieren (1983,1988), señala y muestra en su red semántica que la partición, la equivalencia y la identificación de unidades divisibles son los mecanismos constructivos usados en el desarrollo de los cinco subconstructos elementales del número racional (relación parte-todo, medida, cociente, razón y operador multiplicativo). Los mecanismos constructivos pueden representarse por medio del lenguaje aditivo y además son la base del conocimiento de la fracción unitaria. Asimismo, Lamon (1996a), define a la partición como una operación que genera cantidad, la cual surge de actividades intuitivas y del conocimiento informal del alumno a través del reparto equitativo. Dicho reparto consiste en determinar porciones iguales.

El mecanismo constructivo de la partición (CP) está definido como la división de cantidades continuas o discretas en partes iguales (equidivisión), de forma exhaustiva (residuo cero); completando el todo al sumar partes sin superponerse. Esta equidivisión es la base para el lenguaje fraccionario de la relación parte-todo. La partición es una asignación o clasificación. Esta actividad, la acción de repartir, tiene una génesis social (Kieren, 1983).

El mecanismo constructivo de equivalencia (CE) surge en el sentido de “igualdad” o de “lo mismo”, donde la comprensión de ésta es uno de los fundamentos para los constructos de fracción (Kieren, 1988). En el plano intuitivo, consiste en la habilidad de identificar en pares de fracciones esa relación. Kieren (1983) define a la equivalencia como la relación entre magnitudes geométricas, numéricas o físicas, hace referencia a la misma cantidad numérica. Una noción de equivalencia menos formal es la equivalencia cuantitativa donde al sobreponer las partes, las áreas son congruentes. Asimismo, Kieren (1988) expresa que la comprensión de la equivalencia es fundamental para la adquisición del número fraccionario.

El constructo de formación de unidades divisibles (CU) está vinculado a la conservación del todo y a la reversibilidad ya que la fracción debe referirse siempre a un todo. La base para el aprendizaje de las fracciones está conformada por los constructos ya mencionados. La identificación de unidades divisibles, es el mecanismo que consiste en la habilidad de identificar una unidad como divisible y aceptar a las partes como nuevas unidades a ser divididas.

Lamon (1996a, 1996 b) sugiere que los procesos de formación de unidades y de partición construyen perspectivas diferentes y esenciales hacia la comprensión de las fracciones. La formación de unidades es la asignación cognitiva de una unidad de medida a una cantidad dada, refiriéndose al tamaño de la parte, además de ser un proceso cognitivo que favorece la conceptualización de la cantidad de un objeto a compartir antes, durante y después del proceso de partición. Para Lamon (1996 b) existe un nivel con mayor nivel cognitivo en este proceso denominado "unifizing", interpretado como la formación de unidades. Este es observado cuando el alumno utiliza unidades compuestas, es decir al realizar el reparto toma en cuenta la cantidad de piezas que no requieren cortarse y sólo realiza marcas y cortes en las piezas que si lo necesitan.

Estrategias de partición en todos continuos y discretos

Como mencionamos anteriormente, nuestra investigación está enfocada en explorar el tratamiento de los procesos de partición de todos continuos y discretos, así como las relaciones de equivalencia entre fracciones, en la formación de maestros de educación primaria, por lo que creemos es necesario mostrar algunas investigaciones que nos sirvan como base de análisis al respecto de la partición (reparto) y equivalencia. Cabe mencionar que no existen muchas investigaciones referentes a este tópico con maestros, y mucho menos con maestros en formación, por lo que expondremos investigaciones realizadas con niños. De León, y Fuenlabrada (1997) afirman que al no haber muchos estudios con docentes, al respecto de las fracciones, se toman en cuenta investigaciones desarrolladas con niños, relacionando la producción de éstos con las estrategias de los docentes mismos.

Piaget, *et al* (1966), aseveran que la dicotomía es la forma más fácil para la subdivisión. Para estos autores no existe una operación más elemental que el reconocimiento en dos partes de un todo, el cual no se altera ni por subdivisión ni por la separación de sus partes. Además, a partir de la reversibilidad y la composición lógica se identifica la relación parte-todo, tomando como elemento principal en la subdivisión de áreas la conservación del todo.

Kieren (1983), identifica algunos tipos de partición: 1) por separación, el conjunto es dividido en un número apropiado de subconjuntos; 2) partición avanzada, dada una partición transformarla añadiendo partes al número de subdivisiones, o bien, reduciendo su número (partición repetida). Valdemoros (1993) identifica las "particiones mixtas" donde algunas partes del todo se consideran como discretas y otras como continuas.

Lamon (1996 b) establece una clasificación de estrategias de partición de todos discretos utilizando el reparto:

a) Estrategia de piezas preservadas: es utilizada cuando una persona recibe más de una unidad, repartiendo unidades completas y las unidades sobrantes se dividen y cortan.
b) Estrategia de marcar todo: todas la piezas se marcan, inclusive aquéllas que no se partirán.
c) Estrategia de distribución:todas la piezas se marcan y cortan, y se reparten las piezas cortadas.
d) Estrategia de marcado económico: tiene relación con la equivalencia ya que al identificar que pueden repartir en tercios no hace falta usar sextos.

Figueras (1996) observa dificultades como la no equipartición, el asociar el número de partes con el número de cortes de las partes. Asimismo, clasifica tres grupos de estrategias de reparto: "reparto sin comparación evidente", "compara y compensa" y "mide y dobla".

Charles y Nason (2000), han identificado distintas estrategias al dar solución a problemas de reparto, teniendo en cuenta la relación entre el número de personas, la cantidad que se reparte y el nombre fraccionario asignado a cada parte. La primera es denominada "*Estrategia fundante del cociente partitivo*", donde el sujeto reconoce como primer elemento al número de personas, dicha cantidad con el nombre de la fracción y posteriormente parte el objeto en partes iguales a la cantidad de personas. Otra estrategia es "*del procedimiento del cociente partitivo*", consiste en reconocer el número de personas y el número de objetos para cuantificar la parte que corresponde a cada quien.

Mamede, Nunes y Bryant (2005), centran su investigación en el uso de fracciones en dos situaciones: parte-todo (todo continuo) y cociente (todo discreto). Los autores mencionan que en situaciones de cociente puede haber dos significados: la división y la cantidad que recibe cada persona. Los niños, al enfrentarse a situaciones parte- todo, tuvieron más éxito debido a que son situaciones más frecuentes. La correspondencia (la asociación de las partes con el número de personas utilizando la distribución) y el reparto son los procedimientos más utilizados por los niños,.

De León y Fuenlabrada (1997) exponen un trabajo con maestros de educación primaria donde reportan algunas estrategias empleadas en el reparto con fracciones. Los resultados encontrados son similares a las investigaciones con niños. Los maestros, al dar solución a los problemas, recurren a la "*conmensuración*", es decir, la estrategia consistente en juntar todas las partes involucradas y buscar las que son iguales yuxtaponiéndolas para comparar la longitud del todo (De León, 1998), representan dicha conmensuración con material o de manera numérica, con algoritmos de multiplicación y división.

Los maestros no anticipan el resultado del reparto a partir del análisis de datos. Los procedimientos utilizados son parecidos a los utilizados por los niños (De León y Fuenlabrada, 1997), la diferencia radica en la utilización del lenguaje simbólico de la fracción. Dichos autores concluyen que los maestros, como los niños, no utilizan el significado de cociente de forma explícita sino que se apoyan en su experiencia y recurren a procedimientos y esquemas de conocimientos que han utilizado en otras situaciones de reparto, expresando errores conceptuales.

Importancia de las fracciones en la formación docente

Debido a la importancia que tienen los mecanismos constructivos en el desarrollo del concepto de fracción, nos preguntamos cómo están adquiriendo, construyendo y llevando a la práctica los maestros en formación estos elementos esenciales. También, debido a que

Ernest (2000) y Contreras (1999), afirman que las actividades desarrolladas por los profesores están orientadas por sus propias concepciones.

De acuerdo con Martínez (2006), las concepciones son producto de la construcción cognitiva a través de la interacción con la información del entorno del sujeto, por lo que no sólo existen concepciones de objetos matemáticos en sí mismos, sino también concepciones del aprendizaje y la enseñanza de los mismos. Asimismo, según Nérici (1969), el profesor necesita saber el qué, el porqué, a quién y cómo enseñar para llevar a cabo su planeamiento didáctico.

Shulman (1986) señala que el docente debe poseer, como punto de partida el conocimiento del objeto de estudio enfocado a la enseñanza, es decir, debe adquirir un conocimiento de contenido pedagógico, entendiendo éste como la forma de representar y formular la materia que la haga comprensible a otros. De esta manera, Llinares y Sánchez (1998), mencionan que el tipo de tareas que selecciona y las representaciones que utiliza un profesor son determinadas por su propia comprensión de las matemáticas.

Y aún más importante, Llinares y Sánchez (1998) así como Monereo, Castelló, Clariana, Palma y Pérez (2007) nos mencionan que un docente puede ampliar su comprensión y apropiación de los conocimientos disciplinares y procedimentales, a través de la relación del conocimiento matemático con el contenido de las formas, al profundizar en una determinada representación relacionada con un contenido matemático.

Para Bruner (1963), profundizar en la comprensión de las ideas básicas de las ciencias o las matemáticas propicia su dominio y el uso de éstas en forma eficaz. Dicho propósito requiere comprender la *estructura de la materia* para establecer en la enseñanza una relación significativa con la materia donde se establezcan secuencias para que conduzcan al estudiante a descubrir por sí mismo, el uso de conceptos y procedimientos formales. Este proceso requiere un *plan de estudios en espiral* donde la enseñanza se base en la captación intuitiva de las ideas y su uso en situaciones cercanas y cotidianas al estudiante, girando de forma progresiva a niveles superiores con ideas más complejas y términos más formalizados.

Kieren (1988), describe la construcción individual del conocimiento matemático como un todo representado en forma de anillo e integrado en varios niveles (véase Figura 1.2).

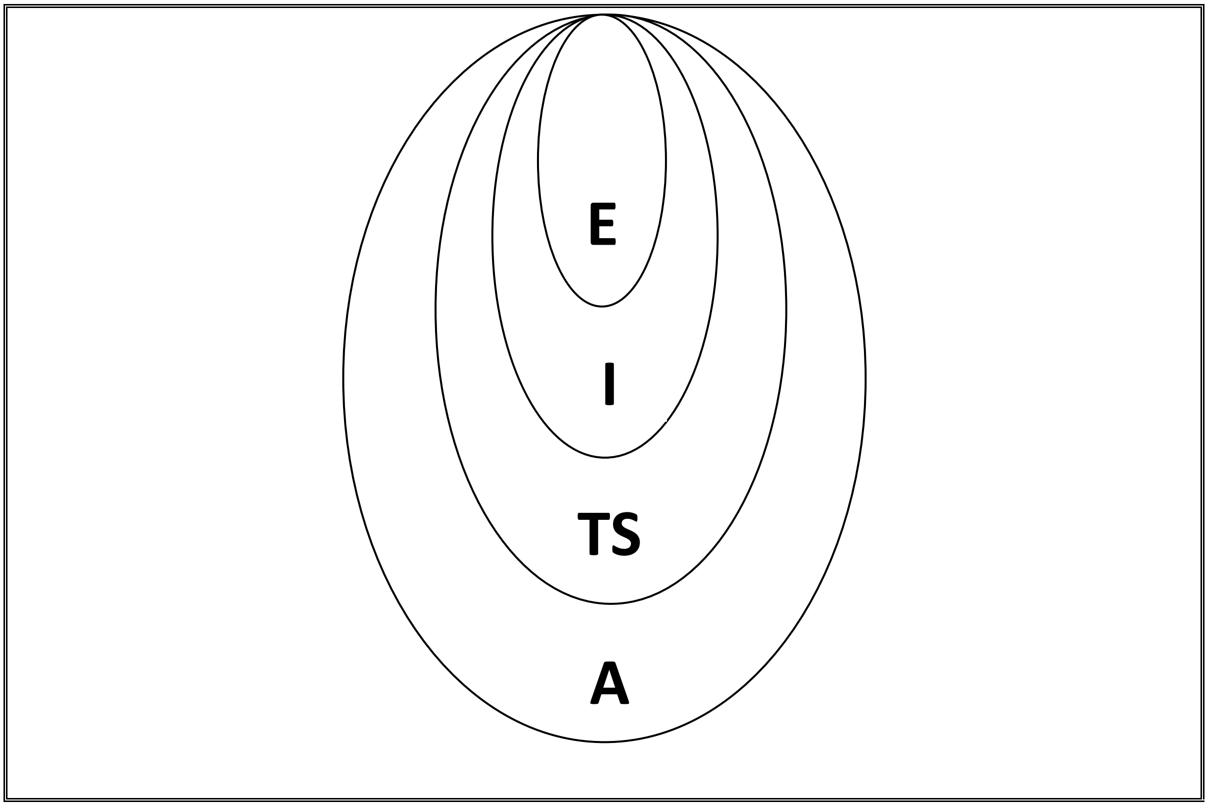


Figura 1.2 Modelo de construcción del conocimiento matemático (Kieren, 1998).

El centro del modelo se denomina conocimiento "*etnomatemático*" (E, Figura 1.2) y se refiere a las experiencias cotidianas que tiene el individuo. En este nivel, resolver problemas está limitado a la toma de decisiones basadas en el lenguaje y acciones de reparto, para el caso de las fracciones.

El nivel "*intuitivo*" (I, Figura 1.2) es un conocimiento enseñado, escolar y vincula la imagen, la herramienta del razonamiento y el uso informal del lenguaje. Aquí se ubican los constructos de partición, equivalencia y la identificación de unidades divisibles; la resolución de problemas se basa en la toma de decisiones basadas en el lenguaje, la acción y la imaginación asociadas a los constructos mencionados.

El conocimiento "*técnico simbólico*" (TS) es construido por medio del uso del lenguaje convencional de las notas y los algoritmos, puede haber generalizaciones. El último y más grande nivel es el del conocimiento "*axiomático*" (A, Figura 1.2) el cual implica el conocimiento formal del número racional como campo de cocientes.

Entre el conocimiento matemático del docente y los elementos pedagógicos, Freudenthal (1983) menciona que debe haber una relación didáctica donde emplee el uso del entorno, identifique con precisión el grado adecuado para establecer estrategias de acercamiento. Propone modelos didácticos adecuados para la enseñanza de las fracciones, sugiere modelos de área y longitud como medios naturales para visualizar magnitudes y recomienda su uso de manera manipulable. El modelo que plantea para el operador- razón es la amplificación o reducción de una figura dada. Asimismo, plantea una secuencia didáctica instruccional para la aritmética de fracciones, integrada por una variedad de actividades de simplificación de fracciones, la fracción como fracturador.

Streefland (1993) pone énfasis en el uso de situaciones reales para la enseñanza de las fracciones sin el empleo de frases o palabras distractoras para el niño que no le permitan enfocarse al contenido que se está tratando. Propone el uso del lenguaje cotidiano y el planteamiento de situaciones problema.

Existe una relación estrecha entre el tipo de aprendizaje que el docente promueva y las intenciones que guían su actuación en cualquier situación de enseñanza - aprendizaje. La función principal del docente es generar alumnos que aprendan a partir de un proceso estratégico capaz de elegir y recuperar los conocimientos que necesita para complementar una determinada demanda u objetivo. Un alumno que toma decisiones conscientes e intencionales durante su proceso de aprendizaje desarrolla la autorregulación y puede indentificar los elementos que tiene para realizar una tarea determinada (Monereo, Castelló, Clariana, Palma y Pérez, 2007).

El profesor debe tomar decisiones en relación a la forma en que va a enseñar los contenidos que deberán ser aprendidos después de la selección adecuada sobre la parte del conocimiento de una materia, para ello debe tomar en cuenta que lo que le es más fácil aprender a él por ciertos procedimientos, no será así para el alumno (Monereo, Castelló, Clariana, Palma y Pérez, 2007). El educador comparte una responsabilidad en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya que él debe enseñar a aprender al alumno, es por eso que debe fortalecerse su formación inicial y permanente en relación a estrategias de aprendizaje. El profesor debe tener habilidades que le permitan regular lo planificado, monitorear su proceso de guía durante la enseñanza y evaluar sus procesos cognitivos durante el aprendizaje que realizará de los contenidos que posteriormente enseñará.

Kamii (1994) señala que el enfoque constructivista para la enseñanza de la aritmética se basa en una pedagogía en la cual los maestros asumen la enseñanza desde la perspectiva de cómo aprenden los niños y cómo llegan a comprender un contenido escolar, en vez de hacerlo desde el punto de vista de cómo se comportan los niños, sea cual sea la naturaleza de dicho comportamiento.

También Kamii (1994) propone que, de acuerdo con el constructivismo, los niños aprendan modificando sus ideas anteriores, en vez de almacenar sólo información. En este enfoque los alumnos aprenden interiorizando conocimientos y el papel del maestro se limita a corregir errores y a facilitar respuestas correctas. Asimismo, señala que en la enseñanza constructivista, el maestro debe fomentar el cambio de ideas, con el fin de estimular al niño a pensar y defender sus propios argumentos.

El profesor propone "ayudas" pedagógicas que no deben utilizarse de forma mecánica o repetitiva sino de forma reguladora o reflexiva (Monereo, Castelló, Clariana, Palma y Pérez, 2007).

Es de vital importancia hacer hincapié en el propósito en la Licenciatura en Educación Primaria, Plan 1997 (recordando que se tomó en cuenta este plan debido a que la investigación se llevó a cabo estando éste vigente), especialmente el propósito de la asignatura de "Matemáticas y su enseñanza II", el cual dice que los profesores en formación ampliarán y consolidarán sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos desarrollados en la escuela primaria, así como la comprensión del enfoque de la enseñanza de las matemáticas basado en la resolución de problemas como medio principal para la adquisición de nociones y procedimientos matemáticos, logrando que *"Profundicen y consoliden el conocimiento que tienen de las matemáticas, de manera que descubran el sentido y la estructura de los contenidos de esta asignatura que se trabajan en la escuela primaria"* (Secretaría de Educación Pública 1997, p.72).

La formación docente, como bien lo dice el párrafo anterior, está encargada de acrecentar y consolidar conceptos y contenidos matemáticos y a su vez, dichos conceptos deben ser comprendidos a través del enfoque didáctico que desarrollarán en breve los normalistas, con niños de educación primaria. Es por todo esto que nuestros fundamentos teóricos se sitúan en aspectos cognitivos del alumno, tomando en cuenta la enseñanza.

Desarrollado el problema y fundamentos teóricos de nuestra investigación, en el próximo capítulo detallamos nuestro diseño general que se llevó a cabo, así como los instrumentos metodológicos para realizar dicha exploración. Asimismo, se especifica nuestro modelo de análisis.

2. EL PROCESO DE INVESTIGACIÓN Y SU ESQUEMA GENERAL

Nuestra investigación de corte cualitativo estuvo encaminada a realizar estudio de casos y fue de suma importancia plantear dónde, con quiénes y cómo se llevaría a cabo la indagación que dio respuesta a las preguntas planteadas anteriormente. En este capítulo exponemos el diseño general de nuestra investigación, así como el conjunto de instrumentos metodológicos diseñados para explorar y analizar qué es lo que algunos maestros de primaria en formación conocen y aprenden para elaborar planes de clase orientados a enseñar las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición de todos continuos y discretos, en la primaria. Asimismo, presentamos a los sujetos y la institución donde fue realizado nuestro estudio de campo, finalizando con la descripción de la validación de nuestra investigación.

Diseño general de la investigación

El estudio que llevamos a cabo es de carácter cualitativo, ya que tiene como propósito investigar exhaustivamente los elementos y procesos involucrados en nuestro problema de investigación. Además, según planteamientos etnográficos de Rockwell (1987) *se da cuenta de forma descriptiva y analítica* de las ideas, conocimientos y estrategias que emplean los maestros en formación con respecto a los mecanismos constructivos de la fracción tanto en su propio aprendizaje como en la enseñanza de los mismos en un grupo de educación primaria. Nuestra investigación se llevó a cabo en el medio donde se desenvuelven los docentes en formación y está encaminada a desarrollar dos estudio de casos. Cabe mencionar que en nuestro estudio estuvo enfocado en dos aspectos: “el aprendizaje y la enseñanza” de un mismo sujeto. Es decir, nos interesó saber si se modificaron las concepciones del maestro en formación al recibir instrucción por parte de la Normal y si este “aprendizaje” se ve reflejado al impartir “enseñanza” en la escuela primaria.

Por lo anterior, el desarrollo general de nuestra investigación estuvo integrado por tres fases, las cuales se desarrollaron en momentos distintos para observar si existían cambios en las concepciones de los maestros en formación después de recibir enseñanza. Asimismo, mirar cómo se refleja esto en la impartición de enseñanza en un grupo de primaria.

La Fase 1 consistió en delimitar los fundamentos teóricos que serían la base de nuestra investigación, la cual nos permitió identificar a los “*mecanismos constructivos de la fracción*” (según Kieren, 1983) como elemento primordial en el aprendizaje de los números racionales. Por lo tanto, para nosotros era necesario observar cómo dichos mecanismos son tratados en la enseñanza de los maestros en formación y además si la instrucción recibida modifica de alguna manera las concepciones acerca de las fracciones. Para lograr este propósito se diseñaron dos cuestionarios, los cuales se pilotearon con sujetos con las mismas características que los sujetos de nuestra investigación. Dichas características se detallan más adelante.

La Fase 2 consistió en tres actividades principales. La primera fue la aplicación del Cuestionario 1, el cual se resolvió antes de recibir cualquier tipo de instrucción, referente a la fracción, por parte de la Normal. En esta misma fase se observó, de manera directa, la enseñanza recibida por los maestros en formación al estar presente en dos ocasiones en las sesiones relacionadas con las fracciones, debido a que sólo se nos permitió asistir a las sesiones acordadas con el Profesor a cargo de la asignatura de “Matemáticas y su Enseñanza II”. Para comparar y observar más acerca de la enseñanza impartida por parte de la Normal, se observó indirectamente a través de los registros de clase de los alumnos normalistas.

La Fase 3 es la etapa más compleja de nuestra investigación debido a que consistió en la resolución del Cuestionario 2, elección del estudio de casos, realización de la entrevista semi-estructurada y observación directa en la escuela primaria. Durante esta fase se compararon y analizaron los resultados de ambos cuestionarios para identificar cambios de concepciones (aprendizajes) en los maestros en formación, al recibir instrucción. De esta manera se seleccionó a Norma y Marisol como nuestros casos. Posteriormente, se realizó una entrevista de "*corte didáctico*" (Valdemoros, 1993 y Valdemoros, Ruiz, 2008) a cada una de ellas con la finalidad de elaborar una secuencia didáctica en relación a la fracción. Para cerrar nuestra investigación, se observó de forma directa la puesta en práctica del diseño de dicha secuencia en un grupo de 5° de la escuela primaria, es decir, mirar la impartición de docencia.

En la Figura 2.1 se distingue la organización de cada fase de nuestra investigación, pero también nos permite identificar la relación que hay entre cada una de ellas.

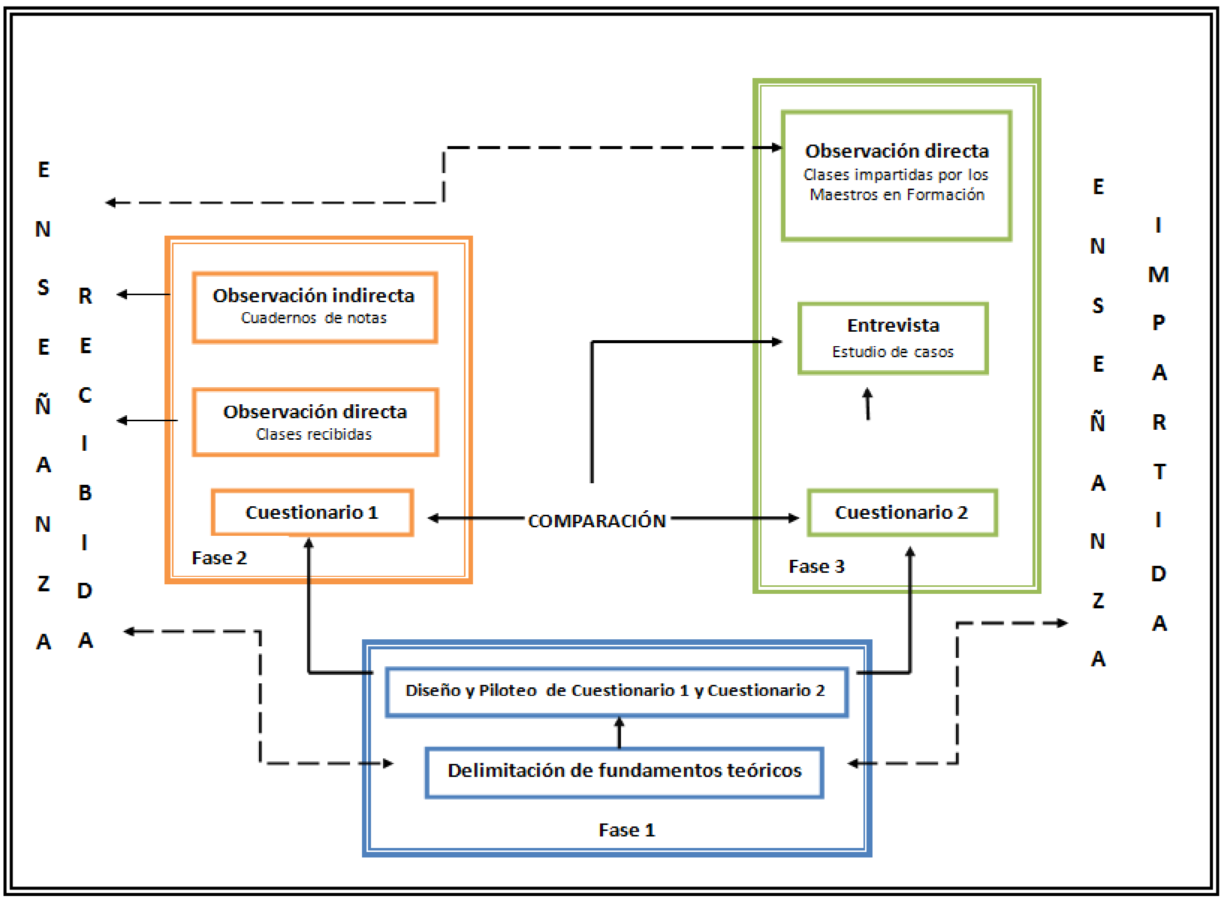


Figura 2.1 Diseño general de la investigación desarrollada.

Los estudiantes normalistas y su ámbito institucional de formación

La investigación se realizó durante el ciclo escolar 2009-2010 en una institución pública de educación superior en la Cd. de México dedicada a formar, únicamente, profesores de Educación Primaria. Nuestros sujetos de investigación fueron alumnos del Tercer Semestre de Licenciatura en Educación Primaria, Plan 1997, el cual estaba vigente a la fecha de nuestro estudio. Se eligieron alumnos de este nivel académico debido a que durante este semestre se desarrollaba el contenido de Fracciones en la asignatura Enseñanza de las Matemáticas II; además, en dicho período los maestros en formación cuentan con dos temporadas de práctica, en las cuales diseñan y efectúan planes de clase de matemáticas en escuelas primarias públicas del Distrito Federal. Actualmente, es durante el Primer Semestre cuando se da tratamiento a las fracciones en el Plan de Licenciatura en Educación Primaria.

El grupo de estudio estuvo integrado por 25 estudiantes, 18 mujeres y 7 hombres, cuyas edades fluctúan entre los 18 y 27 años. Cabe señalar que no es un grupo homogéneo en relación a la educación media superior recibida, ya que la mayoría de sus integrantes son egresados de escuelas técnicas no especializadas en enseñanza; siguiendo bachilleratos generales y sólo dos alumnos tienen formación encaminada a la docencia. Cabe mencionar que dos maestros en formación tienen estudios de licenciatura en contabilidad y una maestra tiene la licenciatura en pedagogía. En relación a las prácticas educativas con alumnos de primaria todos han impartido enseñanza con respecto a las matemáticas pero ninguno, relacionado al tratamiento de fracciones.

Los soportes instrumentales de este estudio

Los instrumentos metodológicos utilizados en nuestro estudio fueron: a) Cuestionario 1, b) Cuestionario 2, c) Observación directa, d) Observación indirecta, en distintas fases de la investigación y e) Entrevista "*semi- estructurada*" y de "*corte didáctico*". Dichos elementos fueron diseñados para responder las preguntas de investigación mencionados en el capítulo anterior.

La indagación inicial a través del Cuestionario 1

El Cuestionario 1 fue un instrumento exploratorio y tuvo como propósito conocer las concepciones, conceptos y estrategias de enseñanza que tenían los maestros en formación con respecto a la fracción en general y, más profundamente el tratamiento de "la partición y equivalencia". La primera parte de dicho instrumento consistió en la hoja de datos que nos permitió recabar información en relación a su formación y práctica docente. A continuación presentamos dicha hoja de datos (Figura 2.2).

HOJA DE DATOS GENERALES

Fecha: ____________________

Nombre: ____________________ **Edad:** __________

¿Dónde realizó sus estudios de bachillerato? ____________________

¿Tiene otros estudios de Nivel Superior? ¿Cuáles? ____________________

Grados en los que ha practicado enseñanza: ____________________

¿Qué contenidos matemáticos ha trabajado en sus prácticas docentes? ____________________

¿Qué libros usa para diseñar una clase de matemáticas? ____________________

¿Cómo han sido sus clases en la Normal acerca de la Enseñanza de las Matemáticas? ____________________

¿Qué considera que le hace falta a dicha clase: ____________________

Figura 2.2 Hoja de datos generales.

Este instrumento nos permitió saber la situación en la que se encontraban todos los maestros en formación, participantes en nuestro estudio, respecto a las fracciones y específicamente, en relación a la participación y equivalencia, antes de recibir instrucción por parte de la Normal. El Cuestionario 1 estuvo diseñado para que el docente efectuase las siguientes indicaciones:

a) Elabore dos tareas con diferentes significados de fracciones.
b) Resuelva las tareas diseñadas.
c) Justifique por qué lo resolvió de esa manera.
d) Identifique el contenido matemático correspondiente a cada tarea.
e) Resuelva la misma tarea de manera distinta.

Asimismo, el Cuestionario 1 estuvo diseñado mediante cuatro apartados:

1. Preguntas abiertas para explorar concepciones acerca del concepto de fracción y la enseñanza de estos números.

2. Diseño de problemas verbales para indagar los conocimientos acerca de la fracción.

3. Partición de todos continuos (rectángulos del mismo tamaño) de cuatro maneras distintas de medios, tercios y cuartos.

4. Resolución de maneras diferentes de dos tareas vinculadas a las relaciones parte-todo y parte- parte, para identificar estrategias de partición y equivalencia.

El primer apartado consistió en tres preguntas abiertas (Figura 2.3), con el propósito de conocer de manera directa las concepciones acerca del aprendizaje y enseñanza de las fracciones, porque de acuerdo con Martínez (2006), las concepciones son producto de la construcción cognitiva, por lo que no sólo existen concepciones de objetos matemáticos en sí mismos, sino también concepciones del aprendizaje y la enseñanza de los mismos. Es por ello que indagamos en el qué y cómo aprendieron, a través de su experiencia académica, este tipo de números.

1. ¿Qué piensa de las fracciones?

2.- ¿Qué conoce de las fracciones?

3.- ¿Cómo le enseñaron fracciones en la escuela primaria?

Figura 2.3 Primer apartado del Cuestionario 1.

Para obtener más elementos con respecto a las concepciones de la fracción, específicamente con los subconstructos de la misma (Kieren, 1983); así como de su enseñanza, se les solicitó en el apartado 2 del Cuestionario 1 (Figura 2.4) que redactaran dos problemas verbales para niños de primaria con la consigna que las fracciones se utilizaran de manera distinta. Asimismo, se les solicitó que resolvieran sus propias tareas diseñadas de dos formas distintas, para observar sus procedimientos de solución y las formas de representación de la fracción que manejaban antes de recibir instrucción. Además, se solicitó que redactaran cómo resolvieron dichas tareas. Esta justificación tenía por objeto observar cómo explicarían sus desarrollos del problema.

1. **Elabore dos problemas donde las fracciones sean utilizadas de manera distinta. Asimismo, resuélvalos de dos formas distintas.**

PROBLEMA 1

a) **Justifique sus respuestas.**

____
____
____

¿Cuál es el contenido matemático que utilizó en la elaboración del problema?

____
____

¿Cuál es el uso de la fracción en este problema? ¿Por qué?

____
____

Figura 2.4 Segundo apartado del Cuestionario 1.

Se solicitó el diseño de dos tareas diferentes con el propósito de observar si identificaban que la fracción tiene distintos usos y si los empleaban en sus diseños. Las preguntas referentes al contenido matemático y a los subconstructos tenían el propósito de explorar qué sabe, cómo diseña tareas y cómo es que un alumno las resolvería al solicitársele diversidad de respuestas. Esta consigna nos permite observar lo que según Nérici (1969), el profesor necesita saber el qué, el porqué, a quién y cómo enseñar para llevar a cabo su planeamiento didáctico.

El tercer apartado estuvo enfocado a identificar los procesos de partición en todos continuos y si estas particiones son equitativas y exhaustivas. Para ello se solicitó que dividieran en medios, tercios y cuartos, dieciséis rectángulos iguales en tamaño, es decir dividir de cuatro formas distintas las fracciones solicitadas. Se diseñó con rectángulos porque es la figura más convencional para dividir y se solicitó distintas maneras para observar distintas estrategias de partición.

El Cuestionario 1 concluyó con la resolución de dos tareas de reparto, la primera (Figura 2.5) consistió en repartir un todo discreto, con formas distintas y nuevamente la figura geométrica de apoyo es un rectángulo. De igual manera, en el diseño de tareas se solicita que el maestro en formación identifique el uso de la fracción así como la diversidad de estrategias de reparto. Además, cada tarea se complementa con la redacción de justificaciones.

III. Responda las siguientes tareas y lo que se le pide.

Tarea 1. Tres niños se quieren repartir cuatro chocolates, de tal manera que a cada uno le toque lo mismo.

Realice el reparto correspondiente y diga cuánto le toca a cada uno.
____
____

Justifique su respuesta: ____________________________
____

Realiza el reparto de distinta manera

En los últimos dos repartos ¿cuánto chocolate le corresponde a cada niño? ____________________________________
____

¿Por qué? ____________________________________
____

a) ¿Cuál es el contenido matemático que se está utilizando en toda la tarea?____________________________________

b) ¿Cuál es el uso de la fracción en esta tarea? ¿Por qué?
____

Figura 2.5 Tarea para identificar partición y equivalencia en un todo discreto.

La última tarea del Cuestionario 1 tuvo como objetivo explorar la relación parte-todo y parte-parte de un todo continuo y, al igual que la tarea anterior, se observa la diversidad de estrategias de partición y el uso de equivalencias. Asimismo, no dejamos de lado los conocimientos sobre didáctica de las fracciones como en tareas anteriores. En la Figura 2.6 se muestra la tarea 2 descrita anteriormente.

Tarea 2. Un granjero tiene un rancho el cual decide distribuir de la siguiente manera:

- La cuarta parte es para las caballerizas.
- La mitad de la mitad del rancho es para el establo.
- En una cuarta parte de la mitad se encuentra la casa
- El resto del rancho es huerta.

Indique el nombre y la fracción:
¿Qué ocupa la menor parte del rancho? ____
¿Qué ocupa la mayor parte del rancho? ____

En los siguientes dibujos marque de manera distinta la distribución del rancho e indique el nombre y la fracción que le corresponde a cada lugar.

Justifique sus repartos: ____
____
____
____

a) ¿Cuál es el contenido matemático que se está utilizando en toda la tarea?
____
____

b) ¿Cuál es el uso de la fracción en esta tarea? ¿Por qué?
____
____

Figura 2.6 Tarea para identificar partición y equivalencia en relación parte-parte.

Los avances cognitivos de los normalistas registrados en el Cuestionario 2

El Cuestionario 2 se realizó después de que los Maestros en Formación recibieron instrucción con respecto a las fracciones, un mes aproximadamente después de la solución del primer cuestionario. El propósito general de este instrumento fue comparar si las concepciones, conceptos y estrategias tuvieron algún cambio. Es decir, nos permitió comprobar si hubo aprendizaje por parte de los normalistas. Para realizar dicho contraste, el diseño de este cuestionario es similar al primero pero se distribuyeron de manera distinta los cuatro apartados, agregando un mayor grado de complejidad en las tareas al utilizar figuras geométricas distintas al rectángulo y el empleo de quintos, sextos y octavos.

Los cuatro apartados del Cuestionario 2 fueron los siguientes:

1. Partición de todos continuos utilizando figuras distintas al rectángulo. Se solicitó se partieron en quintos, sextos y octavos de cinco maneras distintas por lo que se les otorgaron dos cuadrados, un círculo y dos polígonos regulares (pentágonos, hexágonos y octágonos) para cada caso.

2. Resolución de maneras diferentes de dos tareas ligadas al reconocimiento de relaciones con parte - todo y parte - parte, para identificar estrategias de partición y equivalencia.

3. Diseño y solución de problemas verbales con distintos usos de la fracción.

4. Preguntas abiertas para explorar concepciones acerca del concepto de fracción y la enseñanza de estos números.

El primer apartado de este cuestionario consistió en ver las estrategias de partición de todos continuos en quintos, sextos y octavos. Las figuras geométricas empleadas fueron cuadrados, círculos y polígonos regulares, relacionando la fracción con el número de lados.

Es decir se utilizaron pentágonos regulares para partición quintos, hexágonos regulares para sextos, y octágonos regulares para octavos (Figura 2.7).

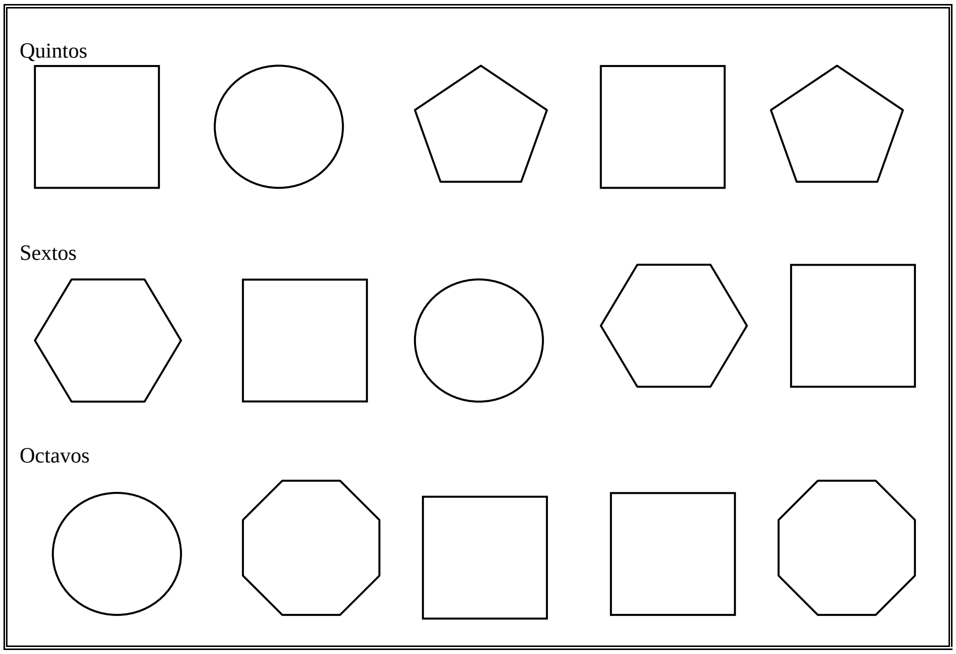


Figura 2.7 Partición de todos continuos en el Cuestionario 2.

El cuestionario fase 2 tuvo dos tareas proporcionadas por el investigador donde se solicitó que el maestro en formación:

a) Resuelva dichas tareas.
b) Justifique sus respuestas.
c) Identifique el contenido matemático en la tarea.
a) Reconozca qué significado de fracción se está usando.
b) Justifique cuál es el contenido semántico del problema.
c) Resuelva de manera distinta.
d) Elabore una tarea diferente, con ese significado, para sus estudiantes.
e) Resuelva esta última.

La primera tarea de solución tuvo que ver con la relación parte- todo y parte- parte, al repartir un todo continuo. A diferencia del Cuestionario 1, la figura de apoyo para repartir es un romboide, además de utilizar fracciones equivalentes. Asimismo, como en toda tarea de solución se les solicitó diversas estrategias de reparto, también que justificaran su respuesta e identificaran el contenido matemático desarrollado, así como al “subconstructo” asociado a la fracción (Ver Figura 2.8).

Tarea 1. Resuelva lo que se le pide.

En un terreno como el siguiente se quiere construir un pequeño kínder; repártelo como se indica y responde:

- La mitad del terreno y de manera equitativa es para tres salones.
- la mitad del resto es para el patio de juegos.
- de lo que sobra, las dos terceras partes son para lo sanitarios.
- el resto del terreno es para el jardín

Indique el nombre y la fracción de:

¿Qué ocupa la mayor parte del terreno? ______________________

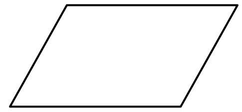
¿Qué ocupa la menor parte del terreno? ________________________

Indica la fracción con respecto al terreno de:

Salón: ____________________ Sanitarios: ________________

Jardín: ____________________ Patio de juegos: _____________

Realiza el reparto de manera distinta al anterior e indica nuevamente, el nombre y la fracción que le corresponde a cada área.



Salón: ____________________ Sanitarios: ________________

Jardín: ____________________ Patio de juegos: _____________

a) ¿Cuál es el contenido matemático que se está utilizando en esta tarea?____

____

b) ¿Cuál es el significado de la fracción en esta tarea? ¿Por qué?

____

____

____

Figura 2.8 Cuestionario 2, tarea de relación parte-todo y parte-parte.

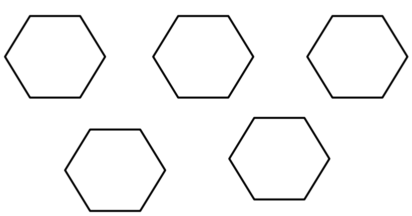
La segunda tarea de solución (véase Figura 2.9) consistió en repartir un todo discreto; a diferencia del Cuestionario 1, fue mayor el número de elementos del conjunto a repartir, es decir se emplearon cinco objetos para repartir entre cuatro y la figura geométrica de apoyo fue un hexágono. Cabe mencionar que también se solicitaron diversas estrategias de reparto, justificación de respuestas y la identificación didáctica de la tarea.

Tarea 2. Una señora debe hacer cuatro ollas de atole, por lo que necesita repartir las siguientes tablillas de chocolate de igual manera para que el sabor sea el mismo. ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada olla?

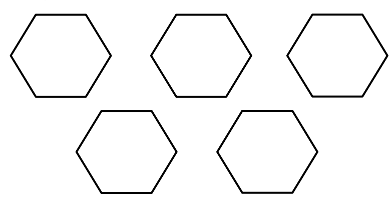
Respuesta:____

____

Realice el reparto:



Realice el reparto de manera distinta:



¿Cuánta tablilla de chocolate contiene cada olla de atole?

____

¿Por qué?____

Justifique su reparto:

____

a) ¿Cuál es el contenido matemático que se está utilizando en toda la tarea?____

b) ¿Cuál es el significado de la fracción en esta tarea? ¿Por qué?

____

Figura 2.9 Cuestionario 2, tarea de relación parte-todo y parte-parte.

La observación directa del aula de formación de maestros y el del aula de primaria

La investigación de corte cualitativo, como la desarrollada en esta tesis, necesita un instrumento metodológico indispensable: la observación. En nuestro estudio realizamos observación participante (Taylor y Bogdan, 1990) en dos momentos y escenarios distintos. El carácter participante reside en la presencia dentro del medio natural donde se desempeña el sujeto. Cabe mencionar que nos incorporamos en diversos momentos a las actividades cotidianas de la Normal para construir el *rapport* (Taylor, y Bogdan, 1984), pero no tuvimos alguna intervención de enseñanza con los maestros en formación.

Se realizó observación directa en dos momentos y con dos propósitos distintos. El primer momento fue dentro de las aulas de la Normal, al presenciar dos sesiones de instrucción referente a la fracción, acordadas con el Profesor responsable de la asignatura "Las Matemáticas y su Enseñanza II". El propósito de esta observación fue explorar cómo es el tratamiento que se les da a las fracciones en la formación de profesores de educación primaria. El registro fue semi-estructurado (Cohen y Manion, 2002) debido a que el mismo estuvo abierto a la clase.

El segundo momento donde realizamos observación directa y participante fue al asistir al período de práctica de los maestros en formación en la escuela primaria, teniendo como propósito mirar a Norma y Marisol impartir instrucción relativa a las fracciones. Para realizarla se utilizó como guía la secuencia didáctica elaborada en la entrevista desarrollada antes de la observación, no perdiendo de vista el significado de la fracción abordado, el tratamiento que se les da a los mecanismos constructivos, las figuras geométricas empleadas, actividades realizadas y el material empleado.

La observación indirecta de los alumnos normalistas

Para contrastar lo observado directamente en las clases de la Normal decidimos explorar los cuadernos de notas de los maestros en formación para indagar más sobre los procesos de enseñanza cotidianos que no se hacen evidentes durante la *observación directa*

(Anguera, Arnau, Ato, Martínez, Pascual, y Vallejo, 1998). Identificamos el tipo de tareas, los materiales empleados y el contenido trabajado en relación a las fracciones.

El diálogo en profundidad con algunos normalistas

Se realizaron entrevistas individuales a las maestras en formación Norma y Marisol. Ellas fueron seleccionadas a partir de los cambios manifestados entre los Cuestionarios 1 y 2, así como por el contenido a desarrollar con los alumnos de primaria, es decir, los maestros responsables de los grupos de primaria, específicamente de quinto grado, les solicitaron que prepararan su intervención didáctica con respecto al tratamiento de fracciones.

Las entrevistas diseñadas fueron "semi-estructuradas" (Cohen y Manion, 2002) ya que contenían textos breves con las indicaciones para resolver las tareas y un guión de preguntas en torno a ellas. Asimismo, en esta entrevista se solicitó que prepararan el diseño didáctico que llevarían a cabo con los niños de quinto grado de Educación Primaria. Este instrumento fue en profundidad (Taylor, y Bogan, 1984) y de "*corte didáctico*" ya que la retroalimentación lograda sobre bases constructivistas es un logro sustancial de dicho método de investigación (Valdemoros, 1998, 2008). Debido a todo ello, se formularon preguntas que condujeron al diálogo con la finalidad de profundizar en los objetivos específicos de nuestra investigación.

Las entrevistas se realizaron en una sola sesión y de forma individual. Cada una tuvo una duración de cincuenta minutos y se encuentran grabadas en audio. Cabe mencionar que las tareas diseñadas para las entrevistas fueron con base en las dificultades encontradas en los Cuestionarios 1 y 2. Estas tareas consistieron en partir en tercios de manera distinta cuatro rectángulos, debido a que Norma y Marisol en sus resultados del cuestionario sólo resolvieron dos de las cuatro soluciones solicitadas empleando únicamente estrategias comunes. Asimismo, se solicitó que partieran en quintos, sextos, y octavos en figuras empleadas en el Cuestionario 2. Posteriormente, se solicitó resolvieran la tarea del Cuestionario 1 relacionada con la relación parte-todo y parte-parte debido a que su solución fue errónea. Cabe mencionar que en la entrevista se dio mayor tiempo a la elaboración del diseño didáctico que desarrollarían en la escuela primaria.

La validación de todo este proceso de investigación

Los procedimientos de validación empleados en nuestro estudio consistieron en el piloteo de instrumentos metodológicos y su triangulación. Para validar los instrumentos metodológicos diseñados se realizó el piloteo de los Cuestionarios 1 y 2 a finales del ciclo escolar 2008-2009, con alumnos de cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria.

Como se mencionó anteriormente, en el Plan 1997 sólo se daba tratamiento a las fracciones durante el tercer semestre; debido a la fecha del piloteo (marzo 2009), los alumnos que nos apoyaron para este fin cursaban el cuarto semestre. Estos sujetos ya habían trabajado el contenido de fracciones en un semestre anterior, lo que permitió pilotear ambos cuestionarios. Cabe mencionar que los resultados fueron similares a los obtenidos con el grupo de estudio aún en el caso del Cuestionario 1 al realizarse *a priori* a recibir instrucción por parte de la Normal.

El Cuestionario 1, en la etapa de piloteo, contenía una tarea que radicaba en repartir líquidos de una jarra. Las respuestas observadas se apoyaban en el uso de números decimales por lo que se determinó sustituirla debido a que no nos arrojaba los datos necesarios con respecto a los mecanismos constructivos de la fracción.

En el Cuestionario 2, en la tarea que desarrolla la partición de todos continuos, la figura geométrica de apoyo era el rectángulo, al igual que en el Cuestionario 1, así que decidimos aumentar el grado complejidad, cambiando el rectángulo por polígonos regulares en dicha tarea para observar datos diferentes al Cuestionario 1. Apoyándonos en pentágonos para quintos, hexágonos en particiones de sextos y octágonos para octavos; además de agregar dos cuadrados y un círculo en cada caso.

Para validar nuestra investigación se contrastaron los resultados del Cuestionarios 1 y Cuestionario 2 con la observación directa e indirecta de la enseñanza recibida por los maestros en formación. Para efectuar el análisis de dicha triangulación de métodos se compararon y confrontaron los datos recopilados en los cuestionarios, las observaciones realizadas y las secuencias diseñadas en las entrevistas.

En este capítulo presentamos de manera detallada los instrumentos metodológicos involucrados en nuestra investigación, los elementos que se tomaron en cuenta para su diseño, aplicación y aspectos considerados en su análisis. En el siguiente capítulo abordamos los resultados del Cuestionario 1 con respecto a las concepciones de los maestros en formación en torno al aprendizaje y enseñanza de los mecanismos constructivos de la fracción.

3. RESPUESTAS DE LOS MAESTROS EN FORMACIÓN, PREVIAS A LA ENSEÑANZA: CUESTIONARIO 1

En este capítulo presentamos los resultados del Cuestionario 1, instrumento principal que permitió hacer la exploración de ideas, nociones y concepciones, estrategias de partición en todos continuos y discretos, el uso de equivalencia y el diseño de tareas propias para alumnos de educación primaria, del grupo de los maestros en formación, participantes de nuestra investigación, con respecto a la fracción previo a recibir enseñanza por parte de la Normal. El análisis del Cuestionario 1 está basado en cuatro secciones: concepciones, estrategias de partición, uso de equivalencia, y diseño de tareas con fracciones.

Comenzaremos identificando categorías elaboradas a partir de las ideas, nociones y concepciones respecto a la fracción. Posteriormente, expondremos las estrategias de partición de todos continuos. Luego, mostramos los procesos desarrollados en tareas con relación a la equivalencia así como la partición de todos discretos y por último exponemos el diseño de tareas con respecto a la fracción elaboradas por los normalistas.

Aplicación del Cuestionario 1

Con posterioridad al piloteo y al ajuste de los instrumentos metodológicos, aplicamos el Cuestionario 1 (Ver APÉNDICE A), al principio del tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria Plan 1997, cerciorándonos de que los normalistas no hubiesen recibido ninguna instrucción en torno a las fracciones.

La resolución del cuestionario fue de manera individual, con una duración de un poco más de una hora, se llevó a cabo en la primera sesión del mes de septiembre de la clase "Matemáticas y su Enseñanza II". En ella participaron 25 normalistas de entre 18 y 27 años y con formaciones distintas, lo cual se mencionó en el capítulo precedente. Cabe mencionar que en este cuestionario se solicitaron datos generales tales como: edad, estudios realizados, grados y contenidos en los que se había impartido enseñanza y la percepción de cómo habían recibido instrucción, en el semestre anterior.

Concepciones acerca del significado de fracción

En el primer apartado del Cuestionario 1 se solicitó que los normalistas respondieran abierta y detalladamente tres preguntas, las cuales se diseñaron con la finalidad de conocer sus concepciones acerca de las fracciones y de su formación con respecto a ellas. La primera y segunda preguntas (Ver APÉNDICE A), están encaminadas a las concepciones del objeto matemático, las fracciones, y la tercera está en función del cómo han abordado durante su vida académica este concepto, la cual se retomará en el apartado del diseño de tareas.

Con respecto a la pregunta: *"¿Qué piensas de las fracciones?"* surgieron diversas respuestas por lo que nos dimos a la tarea de organizarlas en categorías, para que así sea posible contrastar los resultados del Cuestionario 1 y 2 a través de éstas.

A continuación exponemos la Tabla 3.1, donde se presentan las 6 categorías globales elaboradas para su análisis posterior.

Tabla 3.1 Categorías globales de las Concepciones del Cuestionario 1

Número de normalistas que presentaron coincidencia en sus respuestas	Maestros en formación	Categoría
7	Rodrigo Nancy Jessica Carolina Nancy Karina Francisco Gerardo	**Reparto**
4	Ángela Oscar Alberto Carol Ana Lidia	**Equidivisión**
3	Verónica Alma Diana	**Conjunto de números**
2	Aída Leonardo	**Representación de números decimales**
3	Norma Marisol Thalía	**Ejemplificación de la división**
6	Lucía Carlos Abraham Sonia Cinthia Osvaldo	**Algoritmos con fracciones**

Esta tabla nos indica las categorías de concepciones relativas a la fracción, así como el número de normalistas que coinciden en éstas, y el nombre de los maestros en formación, dato que creemos importante para la contrastación de los Cuestionarios 1 y 2.

En la categoría con mayor número de coincidencias es la denominada ***"Reparto"*** donde identifican a la fracción como representación de las partes en las que se ha partido y repartido cualquier tipo de objeto, es decir expresan una cantidad o una parte de "algo", con respecto a una presunta distribución de lo que fue fragmentado.

Siguiendo el orden del número de coincidencias surge la categoría denominada ***"Equidivisión"***, en donde cuatro normalistas concuerdan que el significado más común de la fracción es dividir un entero en partes iguales; esto último es lo que da origen el nombre de la categoría ya que hacen hincapié en la equitatividad de la partición. Asimismo, utilizan el término "entero" y no el de "objeto" como en la categoría anterior.

La categoría ***"Conjunto de números racionales"*** es denominada recuperando las respuestas textuales de los normalistas. En este grupo encontramos que tres normalistas identifican el concepto de número racional como un conjunto numérico, donde la fracción es considerado un subconjunto de dicho conjunto, sin embargo ninguno de ellos tiene clara la concepción matemática de los racionales como conjunto numérico. Cabe mencionar que sólo un integrante de esta categoría hace referencia que los números enteros se consideran parte de este conjunto numérico debido a que pueden expresarse también como un número fraccionario, además de mostrar ejemplos tales como $3 = 3/3$ ó $10 = 10/10$.

También las fracciones son consideradas como la representación de los números decimales, es por ello que en la categoría con el mismo nombre, ***"Representación de números decimales",*** tomamos en cuenta esta concepción debido a que identifican a los decimales como fracciones, pero no muestran ningún elemento que desarrolle alguna explicación como en el caso anterior.

Las dos últimas categorías nos permiten identificar una concepción clara de la fracción por parte del normalista, debido a que hacen énfasis en los algoritmos. La categoría ***"Ejemplificación de la división"*** identifica a la fracción como el ejemplo de una división, es decir recurren a la operación de división con números naturales para que surja matemáticamente una fracción. Mientras que en la categoría ***"Algoritmos con fracciones"*** sólo mencionan que existen algoritmos con fracciones tales como adición, sustracción, multiplicación y división.

Con estas categorías de clasificación identificamos las concepciones que han desarrollado los normalistas acerca de la fracción; a través de su vida académica en la primaria, secundaria y bachillerato. Estas categorías son las que utilizaremos para analizar si existen cambios de concepciones por parte de los maestros en formación después de que recibieron instrucción por parte de la Normal para así determinar si ha existido un aprendizaje relevante y de qué manera estos cambios han modificado su práctica de enseñanza.

A continuación detallamos los resultados obtenidos en la partición de todos continuos en medios, tercios y cuartos, debido a que estas fracciones son las más elementales en la enseñanza de la escuela primaria, además de permitir el uso de equivalencias en las estrategias de partición.

Partición de todos continuos

En este apartado exponemos los resultados obtenidos por los maestros en formación en el Cuestionario 1 acerca de las particiones realizadas en todos continuos, específicamente, rectángulos de igual tamaño en medios, tercios y cuartos, dentro de sus posibilidades, puesto que no tenían instrumentos de medición que les permitiera hacerlo de manera estricta. Cabe mencionar que la consigna consistió en partir de cuatro maneras distintas cada fracción mencionada anteriormente.

Partición en medios

Las particiones más comunes en los maestros en formación se muestran en la Figura 3.1 donde se observa claramente el empleo de estrategias comunes, entendiendo esto cómo las más empleadas en los ejemplos de enseñanza y en libros de texto de educación primaria.

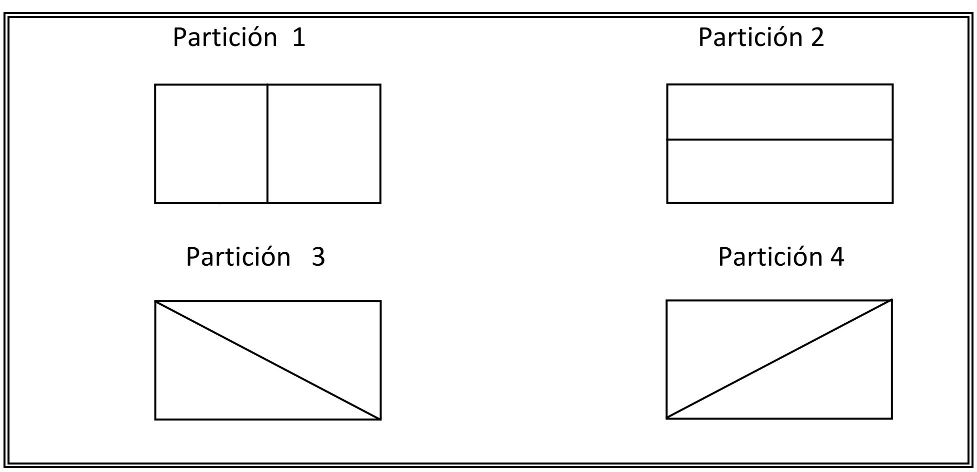


Figura 3.1 Particiones frecuentes en medios.

Las particiones más comunes en relación a los medios muestran claramente equidivisiones simples. En la Partición 1 y 2 se observa claramente el uso de la bipartición**.** Los normalistas localizan el centro del lado horizontal del rectángulo y trazan un segmento que llega a la otra línea horizontal; utilizan luego el mismo procedimiento pero en las lados verticales del rectángulo, dando origen a la partición 2 mostrada en la Figura 3.1. Al respecto Piaget, Inhelder y Szeminska (1966), aseveran que la dicotomía es la forma más fácil para la subdivisión. Para dichos autores no existe una operación más elemental que el reconocimiento en dos partes de un todo

En las particiones 3 y 4 utilizan la congruencia al tomar en cuenta que al realizar las particiones de los rectángulos a través de una diagonal, las figuras resultantes son iguales. Cabe mencionar que la mayoría de los maestros en formación realizaron las particiones arriba elaboradas, puesto que veinte de los veinticinco normalistas registran estas soluciones en distinto orden de ejecución pero con los mismos resultados.

Existe una partición, en medios, basada en la congruencia, al realizarse dos trapecios semejantes, es decir, con la misma área; tal y como se muestra en la partición 5 de la Figura 3.2.

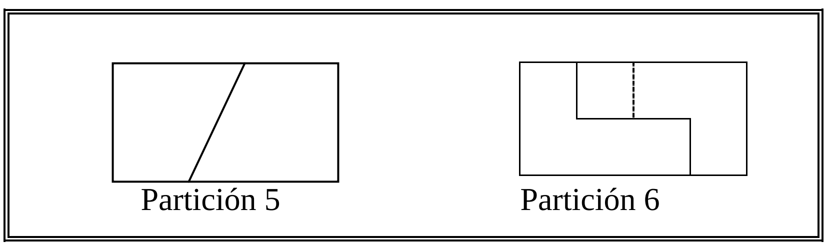


Figura 3.2 Partición en medios basada en la congruencia de áreas.

La partición 6 del la Figura 3.2, es la identificada por Gerardo, donde al partir en medios se observa el peso que le da a la congruencia dando origen a dos hexágonos irregulares, a través de una equivalencia numérica que amplía los valores dados**,** es decir existe de manera muy sutil "**equidivisión compleja**" (Carrillo y Valdemoros 2011b)

En este proceso identificamos que Gerardo ubica la mitad del rectángulo, línea punteada y posteriormente realiza "*particiones avanzadas*" (biparticiones repetidas), para identificar octavos y así llegar a la equivalencia de 4/8 =1/2 para elaborar sus hexágonos.

Particiones en tercios

Con respecto a los tercios hubo muchas dificultades puesto que cerca de la mitad del grupo de normalistas sólo pudieron realizar dos particiones de las cuatro requeridas. Los veinticinco maestros en formación de nuestra investigación tuvieron en común dos particiones mostradas en el Figura 3.3, las cuales tienen **congruencia y equidivisión** dentro de las posibilidades de los maestros en formación debido a que no tenían instrumentos de medición que les permitiera hacerla de manera estricta.

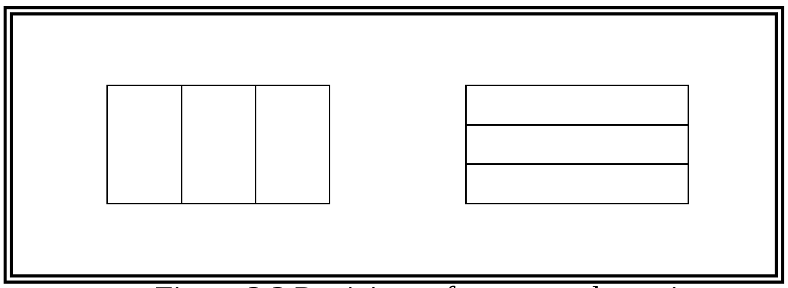


Figura 3.3 Particiones frecuentes de tercios.

Algunos maestros dieron origen a respuestas erróneas al subdividir en tres partes desiguales, véase Figura 3.4, lo cual nos muestra que no tienen identificada claramente la noción de equidivisión y compensación de áreas. A continuación desglosamos las particiones contenidas en dicha figura.

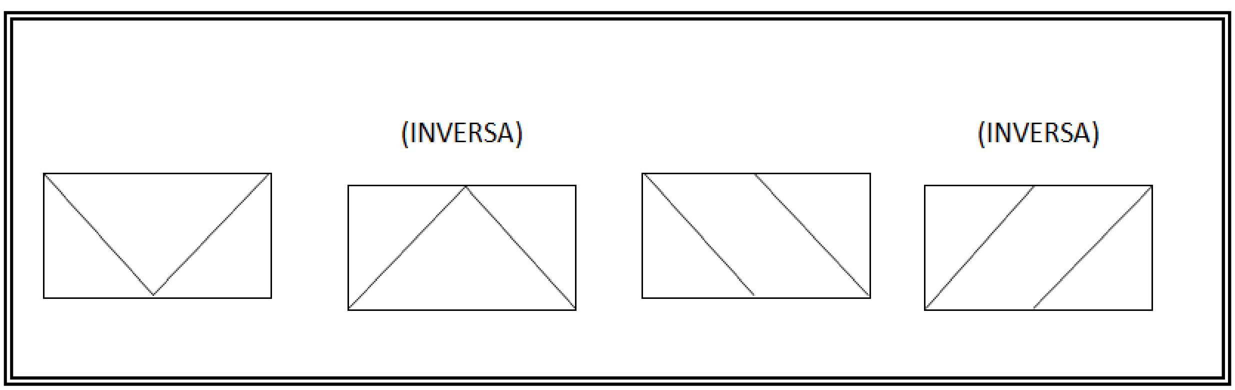


Figura 3.4 Particiones en tres partes desiguales.

En el primer rectángulo de la Figura 3.4 se trazó una línea desde los vértices superiores al centro de la base del rectángulo y a la inversa, como ahí se muestra. Con este tipo de partición observamos que los profesores no toman en cuenta la igualdad de área, sólo identifican la formación de tres triángulos rectángulos pero sólo dos de ellos son iguales.

En el tercer rectángulo observamos que la partición se realiza considerando los vértices opuestos hacia el centro de los lados horizontales del triángulo dando origen a dos triángulos rectángulos y un romboide. Asimismo, también produjeron la inversa de dicha partición.

La solución de Leonardo va en la dirección del tercer y cuarto rectángulo mostrados en la Figura 3.4, arriba mencionada, pero él hace uso de la compensación de área, por lo que no se va del vértice al centro de lado horizontal, sino un poco más, mostrando así la importancia que le da a la compensación.

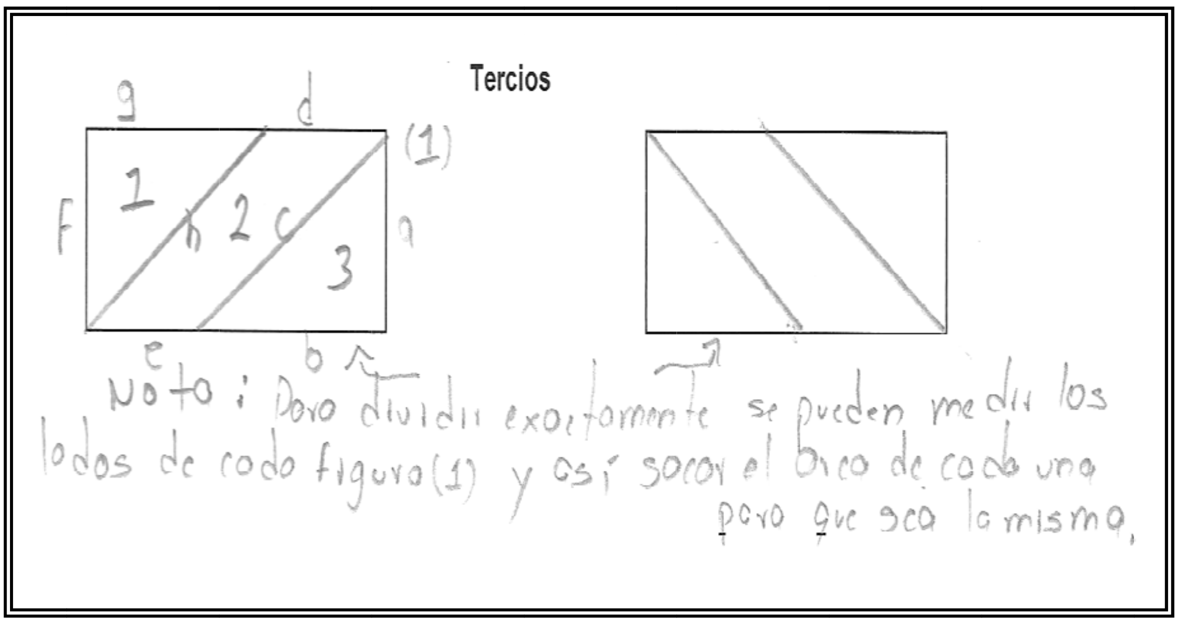


Figura 3.5 Solución de Leonardo empleando congruencia de áreas.

Él realiza anotaciones en su partición donde expone la igualdad de área través de fórmulas para su comprobación (véase Figura 3.5). Cabe mencionar que no realiza la comprobación pero lo deja mencionado en sus anotaciones. La otra partición la realiza a través de la inversa de la figura mostrada pero sin las anotaciones y el cuidado de la primera, dejando implícito que el procedimiento es el mismo.

Existen dos casos particulares donde encontramos más claramente el ejemplo de "***equidivisión compleja***" (Carrillo y Valdemoros, 2011b), véase al respecto la Figura 3.6 y la Figura 3.7, donde Nancy y Gerardo respectivamente, nos muestran este tipo de estrategia en la partición de todos continuos.

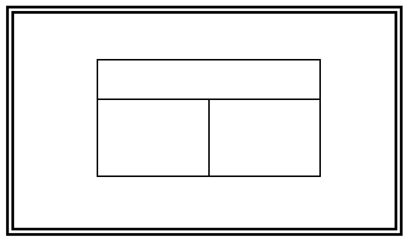


Figura 3.6. Partición de Nancy, utilizando "*equidivisión compleja*".

Interpretando la solución de la Figura 3.6, Nancy se apoyó en lo que denominamos "equidivisión compleja" puesto que se apoya en el uso de una equivalencia numérica. Para lograr esto suponemos que realizó la partición mental (no hay nada escrito que lo indique) en sextos y realizó la equivalencia donde cada tercio está compuesto por dos sextos.

Gerardo (véase Figura 3.7) nuevamente, nos muestra de manera más detallada el empleo de lo que nosotros denominamos "*equidivisión compleja*", utilizando equivalencia numérica en la partición de los rectángulos, cuadriculado con líneas tenues. El primer rectángulo lo divide en doceavos, determinando 4/12 para cada tercio y el segundo en quinceavos otorgando 5/15 para cada tercio.

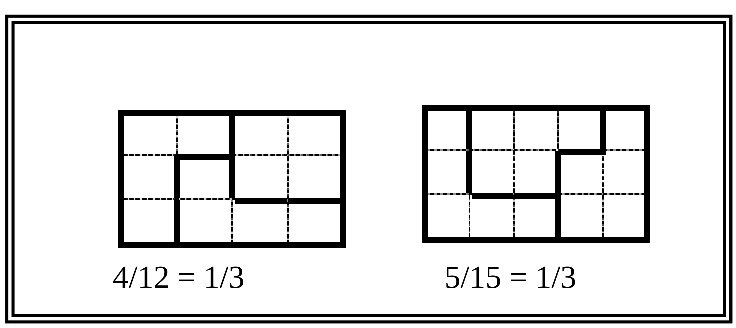


Figura 3.7 Particiones en tercios, empleando "*equidivisión compleja*".

Particiones en cuartos

En esta tarea, los maestros en formación muestran claramente la bipartición puesto que parten en medios lo que anteriormente ya estaba a la mitad. Todos los normalistas de nuestra investigación tienen en común dos particiones (Figura 3.8), las cuales podríamos llamar elementales, puesto que son las maneras más intuitivas de partir en cuartos.

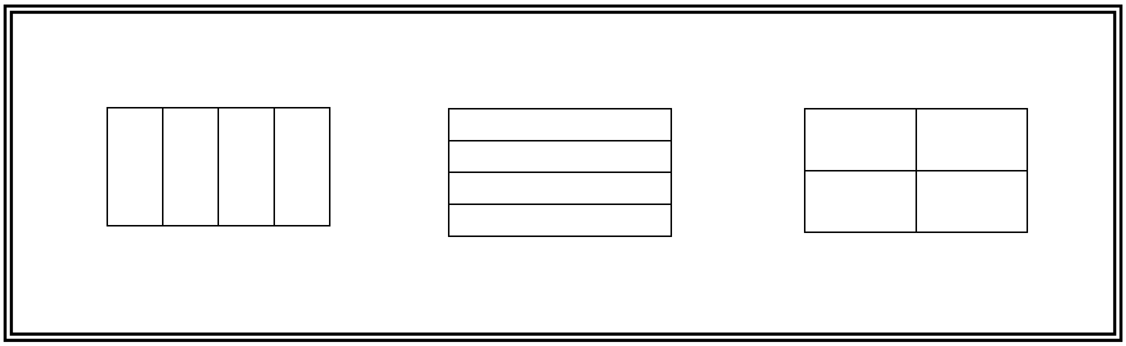


Figura 3.8 Particiones frecuentes en cuartos.

En nuestra investigación la mayoría de los normalistas realizan estas tres particiones, por lo que la partición del rectángulo restante da origen a las siguientes dos figuras.

La Figura 3.9 consiste en una partición basada en dos particiones en medios**,** las cuales dan origen a una igualdad de áreas que no se observa claramente pero que se intuye, puesto que es conocido que al partir a la mitad una mitad da origen a los cuartos. Es por ello que utilizan la bipartición del rectángulo a través de los vértices, es decir surgen cuartos al realizar "*partición avanzada*", dada una partición transformarla añadiendo al número de particiones o bien reduciendo su número, es decir el empleo de "*particiones repetidas*" (Kieren, 1983) aunque no sean a la vista partes idénticas.

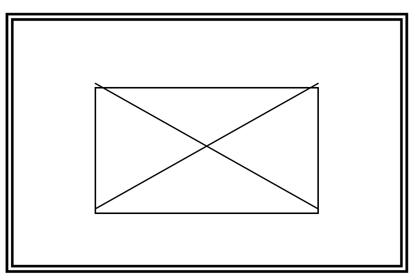


Figura 3.9 Partición en cuartos utilizando particiones repetidas.

Existe una partición en cuartos empleando la estrategia anterior pero en ésta se perciben idénticas las partes (veáse Figura 3.10). En estos rectángulos se realiza una primera partición a la mitad a través de una línea que corta lados horizontales de la figura; Posteriormente cada mitad se considera un entero, en el cual se realiza una bipartición más.

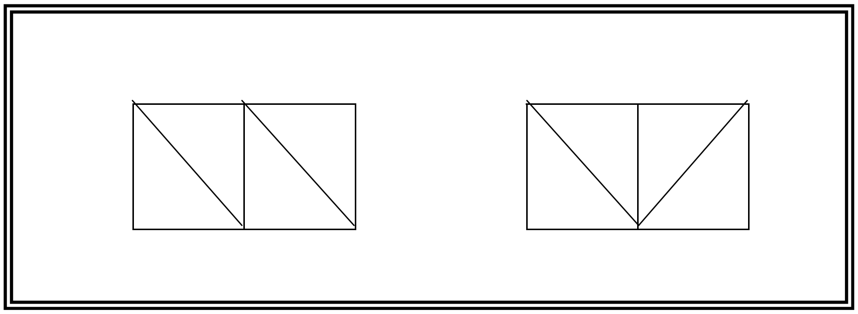


Figura 3.10. Particiones en cuartos utilizando particiones avanzadas.

En la Figura 3.10 mostramos estas particiones basadas en procedimientos iguales, donde se emplea la "*dicotomía*" del rectángulo dando origen a dos medios para posteriormente a través de "*particiones avanzadas*" cada medio sea partido a la mitad, surgiendo así dos cuartos en cada medio del entero. En ambos casos se realiza el mismo procedimiento pero el sentido de la diagonal es inverso en las particiones.

Una vez efectuado la descripción y análisis de cada una de las particiones de todos continuos en medios, tercios y cuartos del Cuestionario 1, desarrollamos el análisis de las tareas de reparto donde interviene la equivalencia.

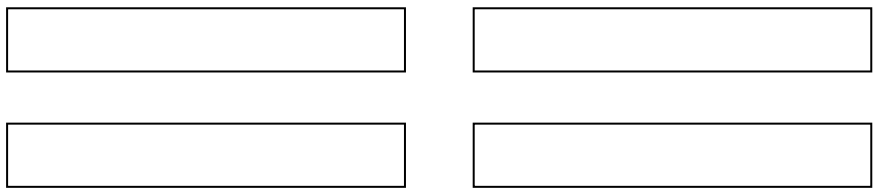
Resolución de tareas empleando relaciones de equivalencia

El Cuestionario 1 estuvo integrado por dos tareas específicas considerando el reparto de todos discretos, la relación parte-todo y parte-parte, ambos vinculados con la equivalencia de fracciones.

Tarea 1. Reparto de todos discretos y relaciones de equivalencia

Tres niños se quieren repartir cuatro chocolates, de tal manera que a cada uno le toque lo mismo.

- *Realice el reparto correspondiente y diga cuánto le toca a cada uno.*



- *Justifique su respuesta.*
- *Realice el reparto de distinta manera.*
- *Nuevamente, intente repartirlos de manera distinta.*
- *En los últimos repartos, ¿cuánto chocolate le toca a cada niño?*

En cuanto a esta tarea encontramos que sólo dos personas del grupo de veinticinco normalistas no proporcionaron ninguna solución. Las veintitrés personas restantes desarrollaron soluciones correctas pero es aquí donde distinguimos el empleo de distintas estrategias de reparto y el empleo de equivalencia entre el todo y la parte. En la Tabla 3.2 se concentran los resultados de dicha tarea.

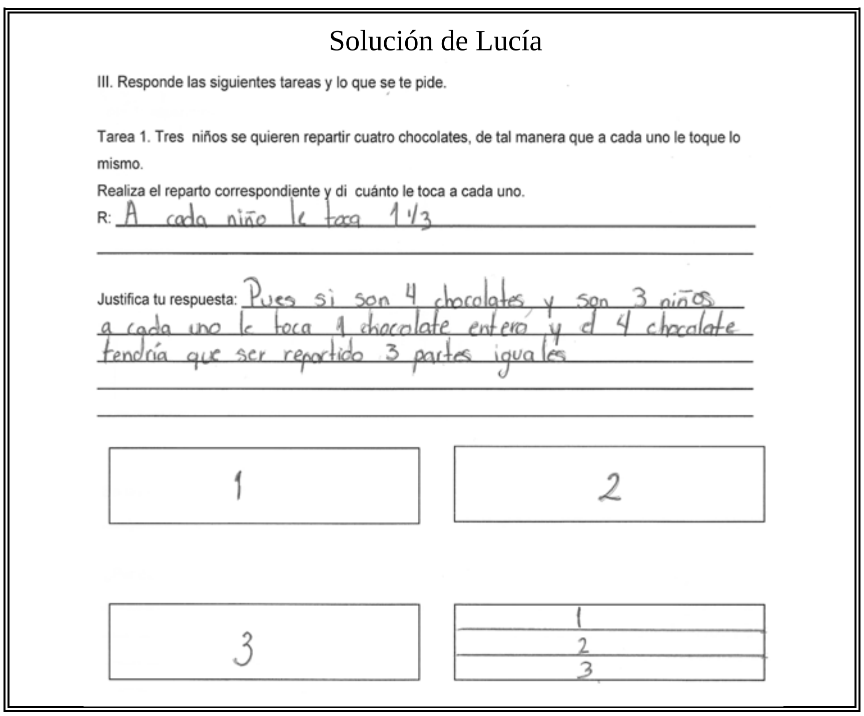
Tabla 3.2. Concentrado de soluciones correctas de la tarea de reparto del todo discreto

Soluciones Correctas	***Correspondencia 1 a 1 entre las partes y el receptor de éstas, y el otro objeto que se reparte***	***Correspondencia 1 a 1 entre la parte y el receptor de ésta (1)***		***Relación explícita de equivalencia entre las partes***
		Partición en mitades	*Partición según el número de receptores*	
Normalistas	Lucía Diana Cinthia Verónica Ángela	Rodrigo Francisco Carlos Omar Jessica	Ana Lidia Sonia Abraham Leonardo Thalía Osvaldo Alma Carol Aída	Nancy Karina Oscar Norma Angélica Marisol Gerardo
Normalistas en cada grupo	5/23	*4/23*	*9/23*	5/23

(1) *Receptor:* son los sujetos u objetos entre los cuales se reparte el todo discreto.

Para el análisis de dichas soluciones hemos categorizado en tres grupos generales, en los cuales se distinguen las *"particiones mixtas"* (Valdemoros, 1993), como lo hemos señalado en el marco teórico éstas expresan distintos modos de interpretar la unidad (como continua y discreta) y de indicar su correspondiente subdivisión.

En *la Tabla 3.2* encontramos que cinco normalistas emplean cómo única solución la Categoría I denominada como ***"Correspondencia 1 a 1 entre las partes y el receptor de éstas, y el otro objeto que se reparte",*** tal como su nombre lo indica, es evidente la correspondencia biunívoca entre objetos a repartir y sujetos receptores además de fraccionar el elemento que sobra en el número de partes relacionadas con el número de receptores. Lamon (1996 b) designa a esta estrategia como "*piezas preservadas*, la cual es empleada cuando una persona recibe más de una unidad del conjunto, repartiendo unidades completas y las unidades sobrantes se cortan en el número necesario de partes. Dicha estrategia también es reconocida por Olguín (2009) como "*Reparto de unidades a cada persona y divide en fracciones lo que sobra"*. En la Figura 3.11 se muestra la respuesta de Lucía quien ejemplifica claramente esta categoría.


Solución de Lucía

III. Responde las siguientes tareas y lo que se te pide.

Tarea 1. Tres niños se quieren repartir cuatro chocolates, de tal manera que a cada uno le toque lo mismo.
Realiza el reparto correspondiente y di cuánto le toca a cada uno.
R: A cada niño le toca 1 1/3

Justifica tu respuesta: Pues si son 4 chocolates y son 3 niños a cada uno le toca 1 chocolate entero y el 4 chocolate tendría que ser repartido 3 partes iguales

Figura 3.11 Solución en relación a la "*Correspondencia 1 a 1 entre las partes y el receptor de éstas, y el otro objeto que se reparte*".

Cabe mencionar que en esta categoría los normalistas realizan sólo dos de los tres repartos solicitados empleando en el "objeto que sobra" únicamente particiones elementales de tercios, esto es partir en forma vertical y horizontal (Carrillo y Valdemoros, 2009).

La categoría principalmente empleada por los normalistas es la denominada "***Correspondencia 1 a 1 entre la parte y el receptor de ésta***", la cual es análoga a la categoría anterior con el agregado de dos formas distintas de partición; la primera, los objetos que se asignaron por correspondencia 1 a 1 entre objetos y sujetos del reparto son partidas en mitades y el objeto restante lo fraccionan entre los sujetos del reparto. Ejemplo de esta partición es la solución de Thalía (véase Figura 3.12). Cabe mencionar que Olguín (2009) identifica esta estrategia como "*divide en mitades cada unidad y lo que sobra lo divide nuevamente.*" La segunda estrategia de partición de esta categoría y la más desarrollada por los maestros en formación es la reconocida por Empson, Junk, Domínguez y Turner (2005) como "*coordinación de un solo artículo*" donde cada unidad del todo discreto se divide en un número de piezas igual al número de personas entre quienes se va a repartir, es decir, se agranda la colección de objetos, para posteriormente repartir la colección. Para ejemplificar esta categoría se muestra la solución de Aída en la Figura 3.12.

Solución de Thalía | Solución de Aída

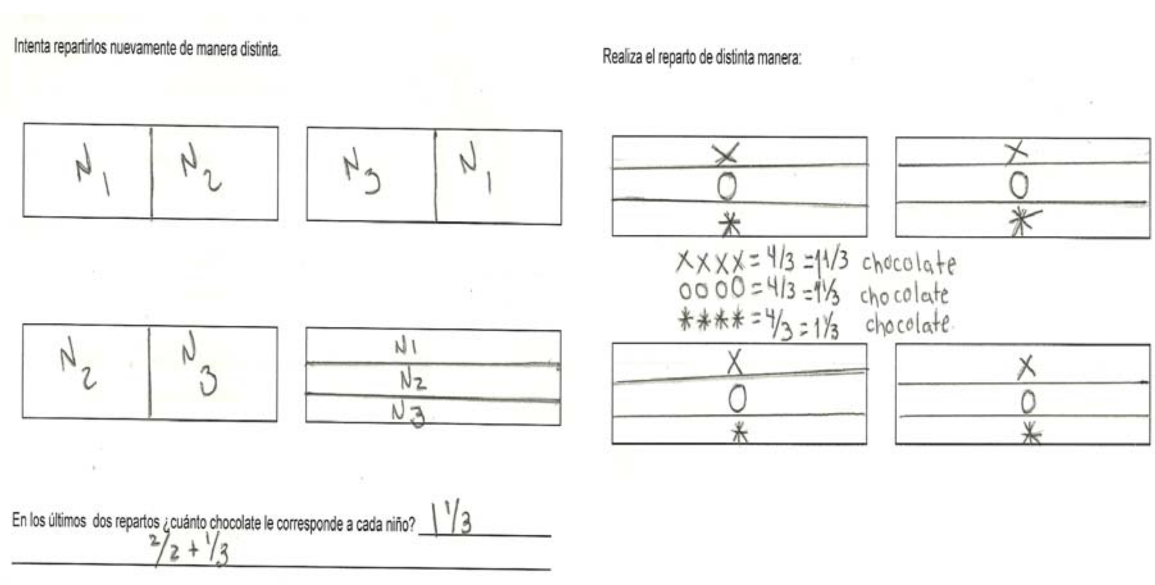


Figura 3.12 Soluciones en relación a la "*Correspondencia 1 a 1 entre la parte y el receptor de ésta*".

Los normalistas integrados en la última categoría denominada como “***Relación explícita de equivalencia entre las partes***” expresan las distintas modalidades de reparto de los mismos objetos representando pictórica y numéricamente fracciones equivalentes, es decir distinguen relaciones de equivalencia más complejas a las de la categoría anterior, sin embargo, es esta última la que les permite acceder a una fracción equivalente afirmando así que los procesos de partición están íntimamente ligados a las relaciones de equivalencia. En la Figura 3.13 se muestra la solución de Nancy donde se observa claramente el desarrollo de esta estrategia así como su justificación en relación a la equivalencia entre 4/3 =8/6 y1 1/3. En esta categoría se observa la estrategia reconocida por reconocida por Olguín (2009) como “*Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias*”.

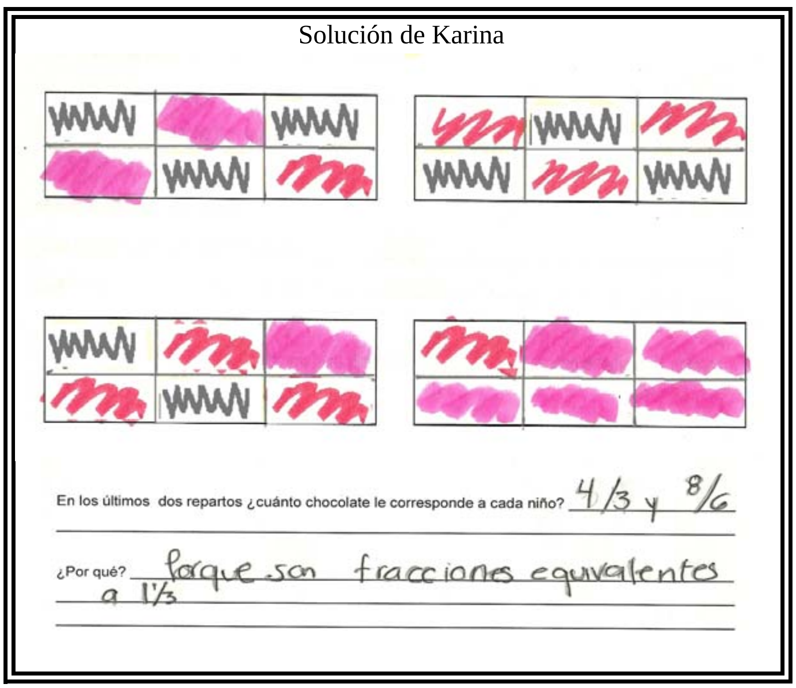


Figura 3.13 Solución de la categoría “*Relación explícita de equivalencia entre las partes*”.

Para Valdemoros (2004) los procesos de traducción de un sistema de representación a otro facilitan el desarrollo de una estrategia de partición, pero si el resultado es escrito numéricamente se logra una equivalencia. En conclusión, el diseño de la Tarea 1 fue sencilla, aunque nos permitió identificar algunas estrategias de reparto y partición de todos discretos, así como el tratamiento que le dan los maestros en formación a las relaciones de equivalencia.

Tarea 2. Relación parte – todo y relación parte – parte

A continuación exponemos el análisis de la Tarea 2, la cual está enfocada en distinguir el desarrollo que tienen los normalistas respecto a la relación parte-todo y parte-parte, las cuales tienen de manera implícita el tratamiento de la equivalencia.

Tarea 2

Un granjero tiene un rancho el cual decide distribuir de la siguiente manera:

- *La cuarta parte es para las caballerizas.*
- *La mitad de la mitad del rancho es para el establo.*
- *En una cuarta parte de la mitad se encuentra la casa*
- *El resto del rancho son huerta.*

¿Qué ocupa la menor parte del rancho? ________________________________

¿Qué ocupa la mayor parte del rancho? ________________________________

En los siguientes dibujos marque de manera distinta la distribución del rancho e indique el nombre y la fracción que le corresponde a cada lugar.

- *Justifica tu respuesta*

Esta tarea presentó la mayor dificultad de todo el cuestionario, ya que la relación parte-todo y parte-parte, representan un conflicto cognitivo con respecto al reconocimiento de la unidad, debido a que requieren la identificación de la parte en un todo, la subdivisión en partes iguales, la partición y distribución exhaustiva del todo (si se trata de situaciones de reparto).

A continuación, se presenta la Tabla 3.3 donde se concentran los resultados de los veinticinco maestros en formación con respecto a la Tarea 2 del Cuestionario 1.

Tabla 3.3. Concentrado de resultados de la Tarea 2

	Sin solución	***Solución errónea en reparto gráfico y con numeral***	***Solución correcta en reparto gráfico***	***Solución correcta reparto y empleo de fracción***
Normalistas	Norma A. Abraham	Rodrigo Carolina Carol Gerardo Carlos Marisol Nancy Yazmin Ana lidia	Sonia Lucía Oscar	Verónica Nancy Karina Leonardo Thalía Diana Jessica Ángela Francisco Osvaldo Chintia Alma Aída
No. de Normalistas en cada grupo	***2/25***	***8/25***	***3/25***	***12/25***

Esta tabla nos indica que la Tarea 2 tuvo mayor número de soluciones equivocadas con respecto a la Tarea 1. Las soluciones son erróneas debido a que no identifican a la parte de un todo como una unidad dentro de la unidad de referencia, a consecuencia del poco manejo de las relaciones de equivalencia. Algunos resultados de estas soluciones consisten en partir el todo en cuartos, ya que la primera consigna hace referencia a esta fracción. Otro error frecuente fue asignarle la mitad del todo al establo sin tomar en cuenta que la consigna menciona la mitad de la mitad.

Quince de veinticinco normalistas, lograron desarrollar una respuesta correcta. Cabe mencionar que dentro de estas quince soluciones correctas encontramos dos categorías distintas; la primera, donde se desarrolla la solución a través del reparto gráfico pero sin la identificación de la fracción con un numeral en relación al todo. Además de ser necesario partir el todo en partes iguales para determinar qué ocupa la menor y la mayor parte del rancho.

Mientras que los normalistas que desarrollan una solución correcta y establecen la medida de cada parte con respecto al todo tienen diversas estrategias de partición donde escriben sin ningún problema las fracciones 1/4 y 1/8 identificando que una es mayor que otra.
Al solicitar que lo distribuyeran de una manera distinta nos muestran una vez más que la “partición repetida” es la más empleada, al partir a la mitad de la mitad.

Es necesario mencionar que en las dos tareas descritas y analizadas anteriormente se realizaron dos preguntas con respecto a la didáctica de la fracción. A continuación mostramos dichas preguntas.

a) ¿Cuál es el contenido matemático que se está utilizando en toda la tarea?
b) ¿Cuál es el uso de la fracción en esta tarea? ¿Por qué?

Dichas preguntas, en su mayoría no fueron contestadas debido al nulo conocimiento al respecto ya que aún no recibían enseñanza de la didáctica de las fracciones. Cabe mencionar que las pocas respuestas encontradas estuvieron en función del término "fracciones" sin ninguna otra concepción.

Diseño de tareas con respecto a la fracción

La consigna de esta actividad se desarrolló con la finalidad de que estructuraran dos problemas utilizando fracciones, sin embrago, el uso de éstas debía ser diferente en cada aplicación. Además del diseño, se solicitó la respuesta a los problemas de dos maneras distintas. Es necesario mencionar que esta parte del cuestionario se encontraba al principio del mismo para que las tareas que resolvieron después no viciaran sus respuestas. De igual manera que en las tareas analizadas anteriormente se les solicitó que mencionaran el contenido matemático abordado y el uso de la fracción a desarrollar. Dicha información no fue contestada.

Para el análisis de esta información se organizó el total de respuestas en tres grupos, a consecuencia de cómo empleaban los números para llegar al uso de las fracciones, surgiendo así tres grandes categorías: *uso de números naturales, uso de número fraccionarios y uso de números enteros y fraccionarios*; las cuales se subdividen en categorías dependiendo el uso que se le da a la fracción cómo tal. Además, cada problema tenía un significado diferente.

A continuación exponemos este análisis a través de las tres categorías de respuestas mencionadas anteriormente y mostramos los elementos que tiene cada una de ellas determinadas por el uso que se le da a la fracción dentro del problema.

Uso de los números naturales en el diseño de problemas con fracciones

Dentro de este grupo encontramos el uso de los números naturales en la redacción de los problemas, pero la solución a ellos recae en la utilización de fracciones. Cabe mencionar que en los problemas encontramos algunos de los subconstructos determinados por Kieren, y es a partir de éstos últimos que realizamos la categorización.

- **La fracción como *"relación parte-todo"***

En esta clasificación se desarrolla la acción de romper objetos concretos en partes equivalentes, "*operador fracturante*" (Freudenthal, 1983), además de usar la idea de fracción para cuantificar la relación que existe entre el todo y un número designado de partes (Kieren, 1983). En el diseño de estos problemas se manejó el todo continuo y el todo discreto. Algunos ejemplos de este tipo de problemas son:

- *En una fiesta hay* ***1*** *pastel y* ***6*** *invitados. ¿Cuánto le toca a cada quien?*
- *Cuatro niños tienen 10 donas y quieren repartirlas de tal modo que a cada niño le toque la misma cantidad*

- **La fracción como *"razón"***

La consideración de la fracción como "razón" se hace a partir de la comparación numérica entre dos magnitudes, relacionada con la noción de par ordenado. En los diseños elaborados encontramos dos ejemplos:

- *En una bolsa tengo 8 paletas, si saco 5 paletas, ¿qué parte de las paletas quedó dentro de la bolsa?*
- *¿Qué probabilidad hay de que caiga un número par en un dado?*

Uso de los números fraccionarios en el diseño de problemas

A diferencia del grupo anterior, en la redacción de estos problemas verbales los normalistas utilizan los números fraccionarios y no los números naturales. El uso de los números fraccionarios en el diseño por parte de los maestros en formación tiene como finalidad realizar algoritmos tales como la suma y la resta.

Como se piensa comúnmente, un problema escolar, empleando números naturales, está basado en los algoritmos de la adición y sustracción. En esta concepción didáctica errónea, recae esta categoría, debido a que sólo cambian el tipo de números con el que se va a operar pero en esencia es la misma finalidad, unir cantidades. Además, las fracciones que se utilizan son muy sencillas. En seguida mostramos algunos ejemplos de este tipo de problemas:

- *Una mamá compró un pastel para su hijo. Si el niño se comió ¼ del pastel y la mamá ½. ¿Cuánto comieron entre los 2?*
- *Luis compró ¾ kg de queso y Paco compró un ½ kg. ¿Cuánto queso compraron entre los dos?*
- *Juan y María compraron una pizza, Juan se comió ½ de pizza y María ¼ . ¿Cuánto pizza comieron juntos?*

Con respecto a la respuesta a dichos problemas podemos mencionar que son correctas, pero no identificamos el proceso del algoritmo debido a que las fracciones empleadas son muy sencillas además de utilizar pictogramas para su solución.

Uso de números naturales y fraccionarios en el diseño de problemas

En este grupo de problemas encontramos dentro de la redacción el uso tanto de número naturales como de fraccionarios, distinguiendo dos apartados importantes.

- **El número fraccionario como complemento de un problema**

En la redacción de estos problemas aparecen las fracciones como elemento auxiliar, es decir, sólo otorgan información para llegar a la solución, aunque implícitamente dentro de ellos se emplea el significado de la fracción parte-todo de la fracción.

A continuación mostramos algunos ejemplos de esta clasificación

- *Martha tenía $100, compró ½ de jitomate y ¼ de aguacate. ¿Cuánto dinero le sobra?*

Cabe mencionar que los precios son mostrados en una tabla externa.
¼ jitomate $7.50
¼ aguacate $10

- *Juan fue al tienda a comprar jamón, si kg ¼ cuesta $15, ¿cuánto cuesta el kg de jamón?*
- *En un avión hay **300** pasajeros. Para la cena tienen ¼ de comida vegetariana y ¾ de comida con carne. ¿A cuántos les corresponde la comida vegetariana y cuántos con carne?*

- **Los números naturales y fraccionarios para el uso de la división de fracciones**

Solo existen dos problemas en esta clasificación y para la solución de estos problemas es necesaria la división de fracciones (cuantas veces cabe) ya sea de manera intuitiva o con algoritmo. En ambos problemas encontramos el uso de todos discretos. En la Figura 3.14 mostramos los problemas y la solución desarrollada por los normalistas.

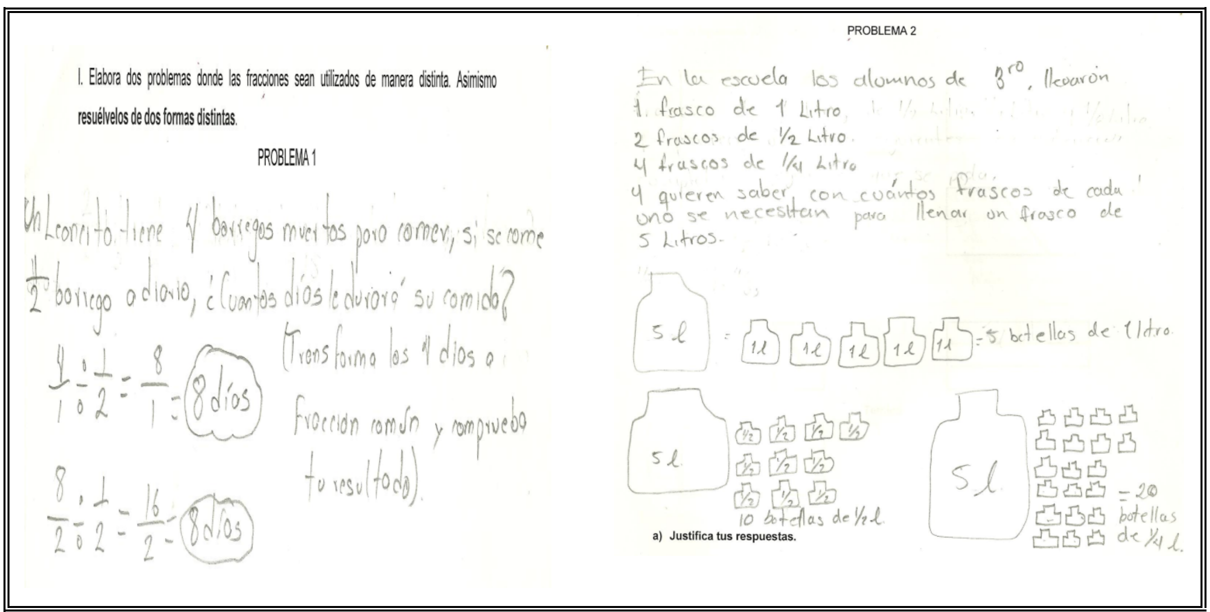


Figura 3.14 Problemas donde se usan los número naturales y fraccionarios.

En el primer problema está claramente identificado por el normalista el uso de la división de fracciones y es con el algoritmo de la división de fracciones como resuelve dicha tarea, transformando el número natural a numero fraccionario para así operar con ambos; mientras que en el segundo problema el normalista realiza gráficamente su solución identificando equivalencias entre litros (unidad) y la capacidad de los frascos.

A través de la solución del Cuestionario 1 observamos y analizamos las concepciones que tienen los maestros en formación referente a las fracciones, previo a recibir instrucción por parte de la Escuela Normal. Además identificamos estrategias de partición, reparto y relaciones de equivalencia utilizadas en la solución de tareas específicas diseñadas para nuestra investigación. Entre las estrategias de partición más destacadas en nuestra investigación, encontramos la "*equidivisión compleja*" donde se utiliza la equivalencia numérica para realizar repartos. Asimismo, en este capítulo, observamos el diseño de problemas verbales para alumnos de primaria. Todos estos elementos serán comparados con los resultados del Cuestionario 2, el cual se aplicó *a posteriori* de recibir instrucción con respecto a las fracciones para así comprobar si existe un cambio en sus concepciones, estrategias y diseños didácticos.

4. OBSERVACIÓN DE LA ENSEÑANZA RECIBIDA Y SUS RESULTADOS POSTERIORES: CUESTIONARIO 2

Después de realizar el análisis de los resultados el Cuestionario 1 y siguiendo con el diseño de nuestra investigación, en este capítulo detallamos aspectos importantes en torno a las observaciones realizadas tanto de forma directa como indirecta efectuadas con referencia a la enseñanza recibida por los maestros en formación, dando así por terminada la Fase 1 del diseño de nuestra investigación. Posteriormente, se expondrán y analizarán de manera cualitativa los resultados del Cuestionario 2, el cual se realizó *a posteriori* de la enseñanza impartida por los maestros de la Normal.

Consideramos necesario tener acceso directo al salón de clase donde los maestros en formación reciben instrucción con respecto a las Matemáticas y su enseñanza en la escuela primaria, específicamente sobre las fracciones. Es por ello que escogimos la observación de clases, en calidad de participante, como un recurso metodológico pertinente; para identificar algunos contenidos y la manera en cómo son abordadas las fracciones para su enseñanza en la escuela primaria.

Observación de la enseñanza recibida

En esta investigación se consideró importante hacer observaciones de clase, con el fin de conocer las estrategias de enseñanza utilizadas por el maestro de la Normal encargado de la asignatura "Las Matemáticas y su enseñanza II" con respecto a las fracciones, además de obtener información sobre la importancia que se le dan a los procesos de partición y a las relaciones de equivalencia en dichas clases, debido a que estos *mecanismos constructivos* son la base de la enseñanza de las fracciones según Kieren (1983).

Durante el tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, Plan 1997, estuvo programado revisar el contenido de número racional**,** en tres sesiones semanales de dos horas cada una. Por esta razón y con apoyo del docente titular de la Normal se realizó observación directa de dos de seis sesiones programadas para este contenido. Complementando el análisis de la enseñanza con observación indirecta a través del cuaderno de notas de algunos maestros en formación.

Para llevarla a cabo se empleó una guía de observación, la cual permitió obtener un registro conveniente con respecto a lo sucedido en cada una de las sesiones. En la guía se especificó el contenido específico trabajado, el significado de la fracción abordado, las actividades realizadas, la didáctica a desarrollar con los alumnos de la primaria, los recursos didácticos empleados y el tipo de participación de los normalistas.

Observación directa de la enseñanza impartida a los Normalistas

Para esta investigación se realizaron sólo dos sesiones de observación directa y participante, debido a que fueron las permitidas por el Maestro titular, encargado de impartir la asignatura "Matemáticas y su Enseñanza II" en un grupo de normalistas. Ambas sesiones fueron totalmente distintas; en la primera sesión observada se desarrolló una clase con materiales concretos utilizando como contenido el algoritmo de la división con fracciones. Mientras que en la segunda se abordaron equivalencias entre décimos, centésimos y milésimos a través de la resolución de lecciones del libro de texto gratuito Matemáticas 5°, Plan 1993.

- **Primera sesión de observación directa y participante**

En la primera sesión de observación directa y participante, el contenido a trabajar fue **la división de fracciones,** cabe mencionar que en sesiones anteriores se trabajaron adición, sustracción y multiplicación de fracciones.

La primera actividad de la sesión consistió, apoyándose en un acetato, en mostrar el algoritmo:

½ / ¼ =

A este algoritmo, el profesor titular lo denominó como una **situación problemática.** Además, solicitó que resolvieran de manera individual dicha "situación" y comentaran cómo podrían explicar el resultado a niños de primaria, sin especificar el grado de este nivel. Los maestros en formación resolvieron el algoritmo dando como resultado **4/2 =2**. Al pedir al grupo que explicaran porqué la respuesta a este problema fue 2, Ángela, comentó "*… cómo Ud. nos lo ha dicho Profesor… el significado de la división está relacionado a cuántas veces cabe."*

Es con esta afirmación que el profesor ejemplificó con dibujos, refiriéndose a un frasco de ½ litro y de ¼ litro, preguntando a los estudiantes: "***¿cuántos frascos de ¼ caben en el frasco de ½? Y a la inversa, ¿con ½ litro de leche cuántos frascos de ¼ se llenan?"***

Cabe mencionar que durante toda la sesión, el profesor hacía hincapié sobre los algoritmos inversos tales como la multiplicación es inversa de la división y viceversa.

Posteriormente el profesor explicó el procedimiento de resolución del algoritmo inicial de división (véase Figura 4.1).

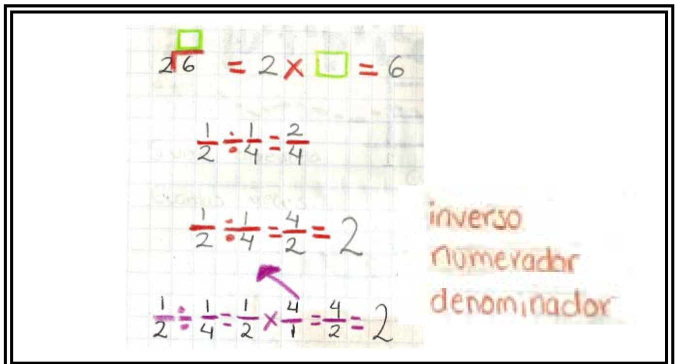


Figura 4.1 Explicación de la resolución del algoritmo de la división con fracciones.

La explicación consistió en emplear los productos cruzados, la cual desarrolló en el pizarrón haciendo hincapié en la multiplicación como inversa de la división. Es necesario comentar que el profesor toma como base la resolución de algoritmos con números naturales y después los traslada a las fracciones sin hacer ninguna distinción. Es decir, desarrolla algoritmos con fracciones empleando procedimientos de algoritmos con números naturales sin distinción del conjunto numérico.

En cuanto a la didáctica de las matemáticas que los normalistas deben adquirir para trabajar con alumnos de primaria, el profesor hacía insistencia en trabajar las "situaciones problemáticas" en tres niveles a los cuales él denominaba **etapas.**

> *" … **Etapa concreta** consiste en llenar los frascos físicamente de ½ l y ¼. Posteriormente la **Etapa gráfica;** la cual consistiría en representar con dibujos los frascos que anteriormente utilizaron para llenarlos; y por último la **Etapa abstracta** donde se hace uso de algoritmos…"*

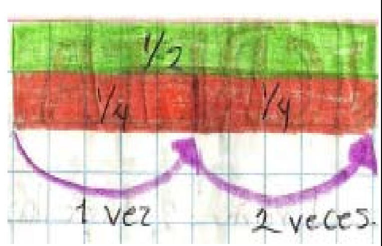
Suponemos que el profesor en estas etapas hace uso de las ideas de Bruner (1987) con respecto a la "*representación de la actuación, representación icónica y representación simbólica*" pero sin mencionar a los alumnos el autor de dichas representaciones. En la Figura 4.2, se muestran las tres etapas que los normalistas deben desarrollar al impartir una clase de matemáticas.

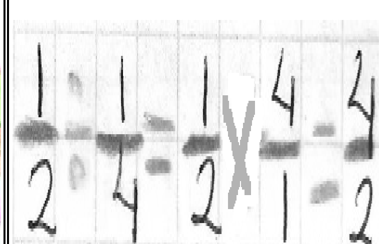
<table>
<tr><th>ETAPA CONCRETA</th><th>ETAPA GRÁFICA</th><th>ETAPA ABSTRACTA</th></tr>
<tr>
<td>Se le puede dar a un niño dos botellas, la primera de 1/2 litro de capacidad y se le pregunta

¿ Cuántas veces cabe el contenido de la jarra de 1/4 de litro en la de 1/2 litro ?

Cabe 2 veces


</td>
<td>Ahora se le pide que trace una regleta de 1/2 cm y otra de 1/4 cm y se le pregunta ¿ Cuántas veces cabe la regleta de 1/4 cm en la de un 1/2 cm ?

Cabe 2 veces


</td>
<td>Para terminar el niño concluye que la división es la inversa de la multiplicación.


</td>
</tr>
</table>

Figura 4.2 Etapas didácticas para impartir una clase de matemáticas.

En la segunda actividad, de esta sesión observada, el profesor pidió que los maestros en formación resolvieran el siguiente problema: *Una jarra está 2/3 de su capacidad, al añadirle ½ l de leche llega hasta ¾ de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total de la jarra?.*

Los alumnos comenzaron a resolver el problema utilizando los elementos que anteriormente habían sido enseñados (suma, resta y multiplicación de fracciones), pero no tuvieron éxito puesto que no comprendían el problema. Algunos alumnos comentaban que la jarra estaba llena a 2/3 de su capacidad, entendiendo capacidad como un litro, por lo que el problema no tenía respuesta debido a que a la jarra "*no le cabría más de su propia capacidad*", es decir, no identificaban la diferencia entre las dos unidades: la jarra y el litro. Otros alumnos comenzaron a operar con las cantidades dadas (sumar) dando como resultado números mixtos que no tenían sentido para ellos como respuesta al problema.

El profesor a cargo comenzó a presionar a los maestros en formación para la respuesta del problema puesto que el tiempo pasaba y ninguno de los alumnos obtenía la respuesta correcta. Carlos, un maestro en formación, expuso que su resultado era 4.5 litros, así que el maestro titular comentó que se estaba acercando a la respuesta. El ejercicio seguía sin éxito, por lo que el profesor sugirió que utilizaran álgebra al despejar **"c"** y escribió la siguiente ecuación:

2/3 c + 1/2 = 3/ 4 c n [sic]*

Cabe mencionar que el enunciado algebraico lo realizó el profesor titular y está copiado de la misma manera com él lo desarrolló. Después de un par de minutos Ángela encontró la respuesta al problema exclamando "*la capacidad de la jarra es de 6 litros"*. Sus compañeros, al obtener la respuesta, ya no hicieron más por trabajar con el problema; el profesor titular pidió que relacionaran la ecuación con la respuesta de Ángela para que ellos pudieran explicar el procedimiento a niños de primaria. La mayoría de los maestros normalistas perdió el interés, así que Ángela pasó a exponer su solución en el pizarrón. A continuación, mostramos su explicación:

2/3 c +1/ 2 = 3/ 4c n [sic]
1/ 2 = 3/ 4c – 2/3 c
1/2 = 3/ 4 – 2/ 3 = 9/12 – 8 /12 = 1/12 = 1/ 2 l [sic]
Entonces si 1/12 es igual a 1/ 2 l de leche, se necesitan 6 litros para llegar a los 12/12.

*Aplicando el manual de APA con [**sic]** estamos indicando que exactamente lo escribió así el profesor en el pizarrón.

Observamos claramente el uso de algoritmos con fracciones sin desarrollar el sentido inherente a tales números; debido a esto, los maestros en formación pierden el interés en la clase, ya que no entienden el desarrollo de su compañera. Al término de la explicación de Ángela el profesor resolvió nuevamente el problema utilizando el dibujo de la jarra reiterando las tres etapas con las que deben trabajar con los niños**.**

La última actividad del profesor titular consistió en repartir un tangram de plástico por cada dos alumnos. Les pidió que armaran un cuadrado con las siete piezas del rompecabezas chino, para que posteriormente ordenaran las piezas de mayor a menor con respecto a su tamaño. Con base en esta última indicación comentó que los dos triángulos mayores representaban la mitad del cuadrado original, entonces preguntó "*cuánto representaban cada triángulo mayor con respecto al cuadrado?*". El mismo profesor titular expuso que ambos triángulos mayores son iguales y que cada uno representa la cuarta parte porque usando nuevamente el algoritmo expuso:

$$\boldsymbol{1/4 + 1/4 = 1/2}$$

Así continúo con las cinco piezas restantes y los alumnos comparaban e identificaban a través de la superposición de piezas qué fracción correspondía a cada pieza tomando en cuenta la dicotomía de la fracción, es decir tomando en cuenta que una pieza es la mitad de otra (cuadrado 1/8, romboide 1/8, triángulo mediano 1/8 y los dos triángulos más pequeños 1/16 cada uno).

Para dar por terminada la sesión les pidió a los maestros en formación que calcularan el área del cuadrado formado con el tangram, posteriormente armaron un triángulo, rectángulo y romboide con las siete piezas y calcularon el área, la cual era igual que la del cuadrado.

Con respecto a los recursos didácticos empleados por el profesor titular observamos que utilizó diversos materiales concretos tales como: fraccionómetros de foami, regletas de madera, tangramas y nos comentó que él utilizaba mucho material (concreto) puesto que él exigía a sus alumnos emplearlo cuando asisten a su prácticas de enseñanza. Cabe mencionar que la sesión observada tiene mucho manejo del algoritmo sin tomar en cuenta el significado de la fracción, además se dio mayor importancia al uso de todos continuos**,** dando muy poca o nula utilidad al todo discreto.

- **Segunda sesión de observación directa y participante**

En la segunda sesión de observación directa y participante notamos que la dinámica de la clase fue totalmente distinta con respecto al material empleado. La clase consistió en resolver las páginas 66, 67, 80 y 81 del libro de texto gratuito Matemáticas 5° (2000). Dichas páginas se encuentran en el APÉNDICE B.

En dicha actividad el contenido a trabajar fue la **equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos**. Este contenido está encaminado a desarrollar el significado de los números decimales en vinculación con las fracciones. La dinámica en esta sesión fue el trabajo en equipos de dos personas para resolver las páginas antes mencionadas. Cabe mencionar que son dos lecciones distintas con respecto al mismo tema. La primera estuvo encaminada a resolver preguntas de reflexión para identificar la equivalencia entre 1/10, 10/100 y 100/ 1000. Además de hacer uso de rectángulos divididos en décimos, centésimos y milésimos los cuales son llamados *rectángulos-unidad* (Ver Figura 4.3). La segunda lección continúa con dicha temática pero concluye en la escritura del número cómo decimal y como fracción, a través del uso de la calculadora.

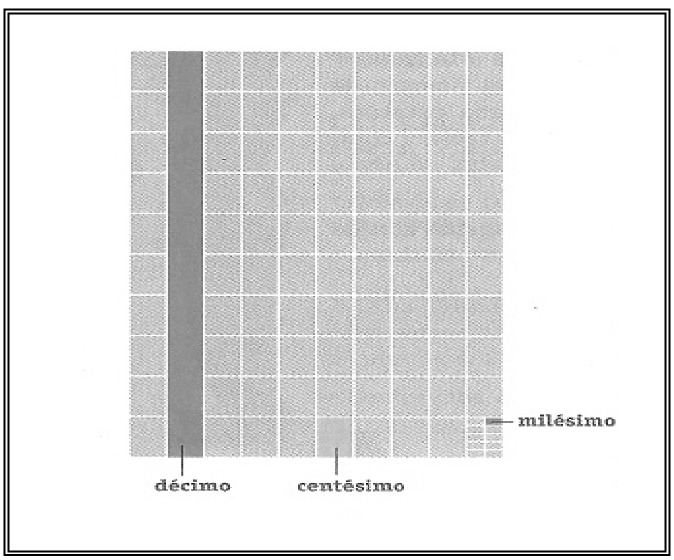


Figura 4.3.*Rectángulo-unidad* utilizado para equivalencia de decimales.

El papel del maestro titular fue diferente al de la primera sesión, en esta actividad sólo les dijo que resolvieran y él observaba el trabajo de los maestros en formación. Al término de la clase se expusieron los resultados sin poner atención en los procesos de solución.

En cuanto a la didáctica de las matemáticas se les sugirió, a los maestros normalistas, que revisen y resuelvan las lecciones del libro de manera anticipada a los alumnos de primaria para identificar las dificultades que puedan surgir en esta resolución. El recurso didáctico empleado en esta sesión fue únicamente el libro de texto. Y el significado de fracción empleado es el de las relación parte-todo, haciendo hincapié en la equivalencia.

Observación indirecta sobre de enseñanza impartida a los Normalistas

Este tipo de observación se realizó a través de la exploración de los cuadernos de notas de los maestros en formación, el cual nos permitió reestructurar los procesos de enseñanza cotidianos que no se hacen evidentes durante la observación directa (Anguera, Arnau, Ato, Martínez, Pascual, y Vallejo, 1998). Identificamos el tipo de tareas que realizan los alumnos de manera constante, el contenido trabajado en relación a las fracciones y los recursos didácticos empleados.

En los cuadernos de notas con respecto a las fracciones inferimos que la enseñanza recibida estuvo basada en la escritura de conceptos y en la resolución de algoritmos tales como: adición, sustracción, multiplicación y división. Además, el bloque referente a las fracciones es denominado: números racionales. Con respecto a este tenor, dicho bloque comienza con la clasificación de los números racionales, tal como lo muestra la Figura 4.4.

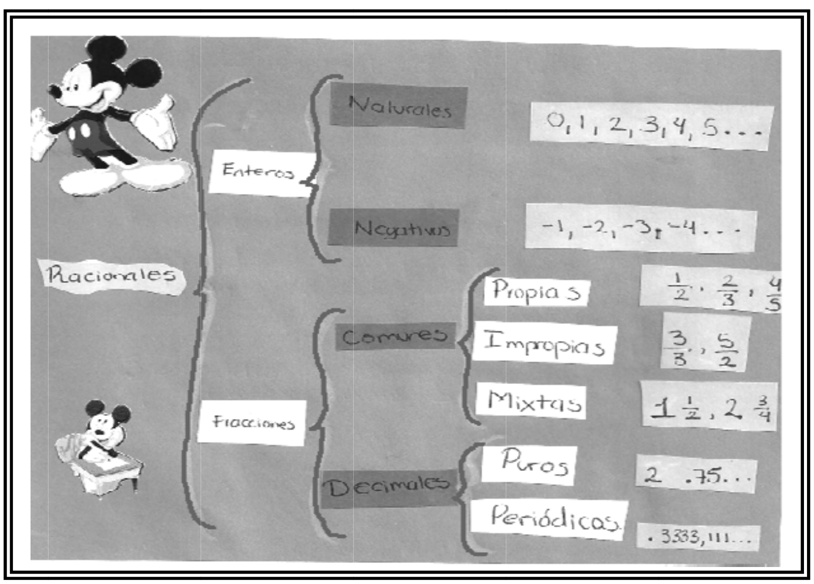


Figura 4.4 Clasificación dada en la Normal acerca de los números racionales.

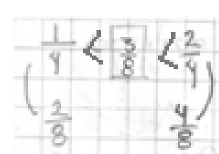
Durante la primera sesión que tuvieron al respecto de las fracciones, escribieron en su cuaderno de notas las definiciones de este tipo de números a través de un cuadro sinóptico, mostrado en la Figura 4.4. En este mismo esquema clasifican a las fracciones en "*propias, impropias y mixtas*". En sus notas también se encuentran definiciones sobre los **"***procesos de: partición, extracción, reducción-ampliación, medición, coordinado lineal*" y la "*medida de la probabilidad de un evento, razón interna y razón externa*"; dichas notas se encuentran en el APÉNDICE C de este documento**.**

Además en esta primera sesión se encuentra el ejemplo de un "fraccionómetro" como elemento didáctico de la fracción. Éste es viejo recurso de los maestros consistente en una "regla" o "tira de cartón" que vincula distintas fracciones.

En las sesiones posteriores encontramos, primeramente, el desarrollo del algoritmo de la adición, empleando regletas como recurso didáctico ya que sirven para encontrar la equivalencia de fracciones de manera concreta y así poder sumar y restar sin problema alguno. Posteriormente se desarrollan los algoritmos de la multiplicación y división, la conversión de fracciones impropias a mixtas utilizando la "*etapa gráfica*" a través de pictogramas que den sentido al algoritmo; a través de arreglos cuadrangulares, los cuales se emplean en la construcción de multiplicación con número naturales llevando dicho apoyo a las fracciones donde los maestros en formación observan que cuando dos fracciones se multiplican se obtiene una fracción menor. Posterior a este "explicación gráfica" se utiliza a la "*etapa abstracta*", es decir el algoritmo en si.

Asimismo, se encuentra la definición de la densidad de fracciones la cual dice:

> " *La densidad entre dos números racionales siempre va a ser otro número racional. Esta propiedad no lo tienen los números naturales*".



Cabe mencionar que no hay ningún otro desarrollo relacionado a este concepto. Finalmente, con respecto a los números racionales, trabajan los números decimales a través de la conversión de fracciones comunes en base al algoritmo de la división de número naturales; donde 1/2 = $2\overline{)1}$ = 0.5.

Con respecto a los mecanismos constructivos de la fracción encontramos actividades que solamente les permite ejercitarlos sin darle sentido a esta herramienta fundamental (véase la Figura 4.5).

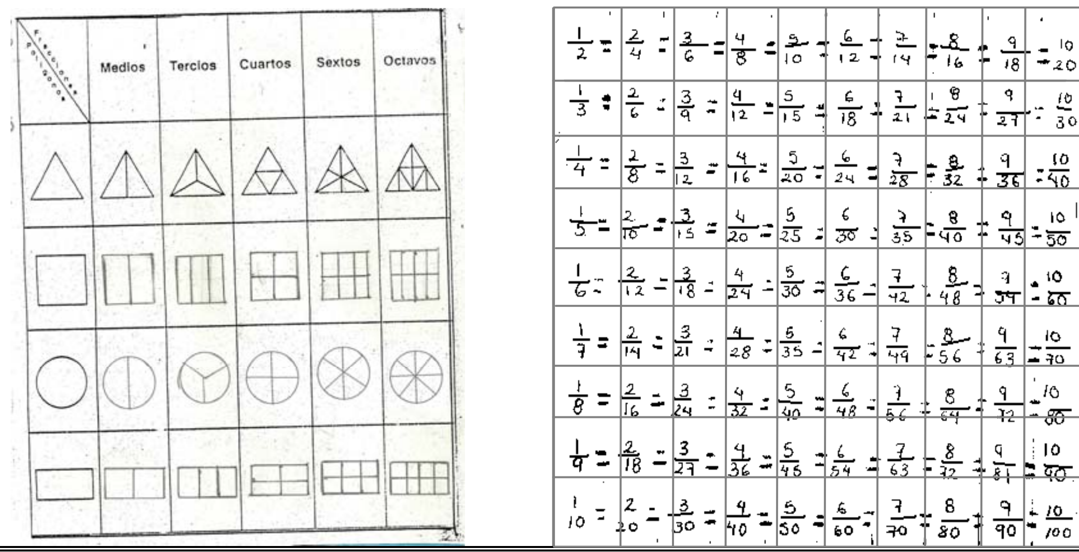


Figura 4.5 Actividades empleando partición y equivalencia.

En conclusión al respecto de la enseñanza impartida a los maestros en formación podemos mencionar que tiene más peso la algoritmia con fracciones que darle sentido y significado a la fracción, tanto en el reconocimiento del número como en el cálculo asociado a la resolución de problemas.

Aplicación del Cuestionario 2

Como se menciona en el diseño general de nuestra investigación, durante la Fase 3 y posterior a la enseñanza recibida, se aplicó el Cuestionario 2 a los veinticinco maestros en formación para así poder contrastar las respuestas de los cuestionarios 1 y 2.

Al igual que el Cuestionario 1, la resolución fue de manera individual, con una duración de un poco más de una hora, y se llevó a cabo durante el mes de octubre del 2009. Las tareas que conformaron este instrumento metodológico fueron muy similares a las del primer cuestionario pero se agregó mayor complejidad al emplear, quintos, sextos y octavos, así como figuras distintas al rectángulo para partir todos continuos.

El análisis de resultados de este segundo cuestionario lo realizamos con respecto, primeramente a las particiones del todo continuo en quintos, sextos y octavos. Posteriormente realizamos el contraste de las concepciones, uso de equivalencia y diseño de tareas con fracciones para identificar cómo influyó la enseñanza recibida por parte de la Normal.

Partición de todos continuos en quintos, sextos y octavos

El Cuestionario 2 incluía la tarea de realizar particiones en quintos, sextos y octavos. A diferencia de la tarea similar del Cuestionario 1, las figuras a fracturar eran distintas, así que se pidió que partieran dos cuadrados y un círculo en cada caso (quintos, sextos y octavos), además de dos polígonos acordes a la partición requerida, es decir, dos pentágonos para quintos, dos hexágonos para sextos y dos octágonos para octavos.

Partición del cuadrado

En cuanto a la partición del cuadrado como todo continuo en quintos, sextos y octavos, los normalistas en su mayoría, con respecto a las particiones en quintos, tuvieron en común la congruencia de áreas y equidivisión dentro de las posibilidades de los maestros en formación puesto que no tenían instrumentos de medición que les permitiera hacerla de manera estricta. Para las particiones en sextos son pocos alumnos que utilizan la bipartición de manera sutil en estas figuras puesto que no identifican al sexto como la mitad del tercio.

En el caso de los octavos es más evidente el uso de la bipartición debido a que es muy común identificar un octavo como la mitad de un cuarto.

A continuación se presentan en el Figura 4.6 las particiones empleadas en la mayoría de los normalistas donde se observa claramente la equidivisión, congruencia de áreas y bipartición.

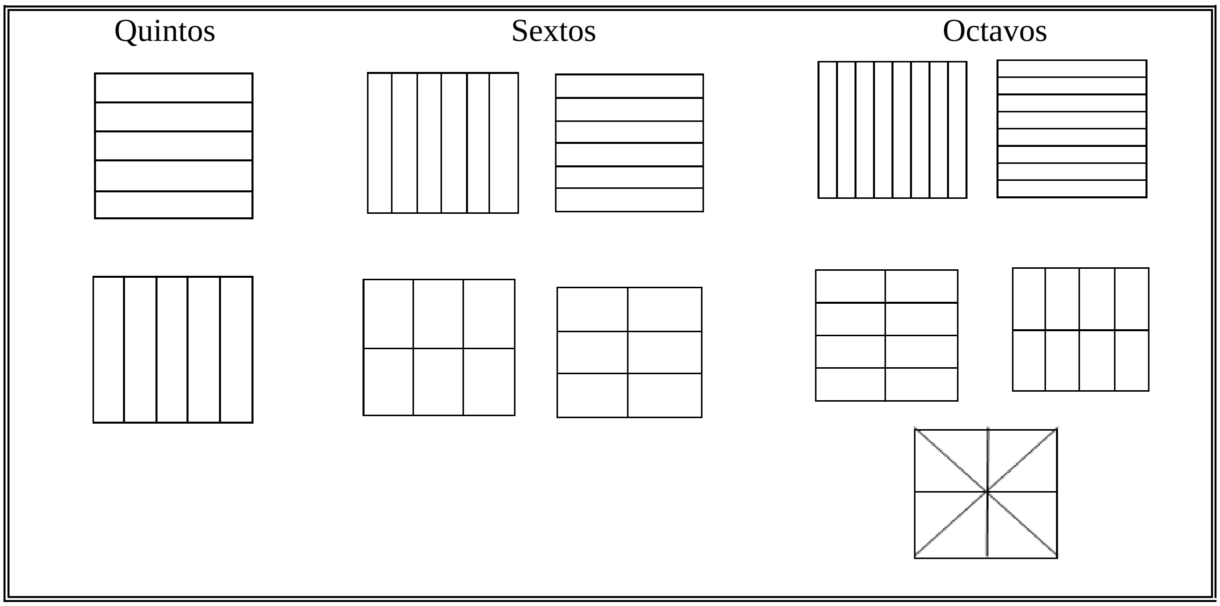


Figura 4.6 Particiones comunes en quintos, sextos y octavos

En la Figura 4.7 encontramos dos casos particulares e incorrectos. En el caso de Alma, con respecto a quintos, en nuestra interpretación, ella realizó la partición del cuadrado con el mismo procedimiento del círculo ya que identificó el centro del cuadrado y colocó líneas semejantes a los radios que dibujó en el círculo. En el caso de la partición en sextos es incorrecta, debido a que observamos que realiza biparticiones tanto horizontales como verticales y en diagonal; y al terminar de hacer esta partición corrobora que haya partido en seis partes como se le había indicado, pero descubre que tiene ocho partes, así que decide borrar la línea horizontal (línea punteada) sin tomar en cuenta la congruencia de áreas ni la equidivisión.

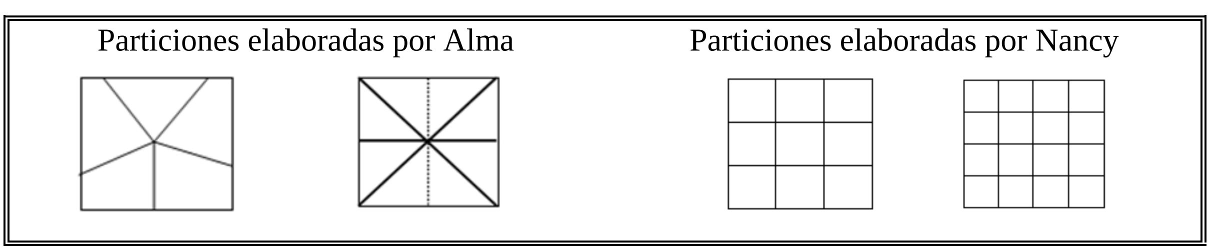


Figura. 4.7 Particiones incorrectas utilizando el cuadrado.

Las particiones elaboradas por Nancy se muestran en la Figura 4.7, donde observamos partió en novenos y no en sextos. En nuestra interpretación ella partió en tercios de manera aislada puesto que primero parte la unidad en tercios de manera horizontal tomando en cuenta la equidivisión y la congruencia. Asimismo, pero de manera vertical, parte la unidad en tercios por lo que surgen novenos y no sextos. En este caso observamos que sus particiones son aisladas e invertidas pero tienen sentido para ella, al reconocer que un tercio es equivalente a dos sextos y por ello que parte en tercios de dos maneras aisladas, en el mismo entero, ya que 3 + 3 = 6, pero no comprueba su partición. Corroborando nuestra interpretación de particiones aisladas, Nancy muestra nuevamente el procedimiento anterior al partir en octavos, donde ella identifica que dos octavos son equivalentes a un cuarto por lo que fracciona la unidad en cuartos de manera vertical y posteriormente en forma horizontal, dando como resultado 4 + 4 = 8 pero no percibe que partió en dieciseisavos.

Partición del círculo

Las particiones elaboradas por los maestros en formación, con respecto a los quintos, consistió mayoritariamente en encontrar el centro del círculo y dividir en cinco partes, tomando en cuenta la congruencia de áreas. Para dividir en sextos la solución más común fue en primera instancia la bipartición del círculo y después cada mitad fue partida en tercios con apoyo de la congruencia de áreas. Otro procedimiento encontrado fue similar al de la partición en quintos, ya que localizaron el centro y después fueron repartiendo con ayuda de la congruencia de áreas.

La partición en octavos de la mayoría de los normalistas se llevó a cabo a través de biparticiones, es decir partieron a la mitad, para después partir en cuartos (mitad de la mitad) y posteriormente partieron a la mitad cada cuarto, a través de líneas inclinadas. Al igual que en la partición de quintos y sextos, algunos de los maestros en formación encontraron el centro del círculo para después partir, con ayuda de la congruencia de áreas, en octavos.

Es necesario señalar que las particiones a través del centro del círculo fueron apoyadas por la partición del polígono que tenía cada tarea, puesto que los radios están colocados en el mismo sentido que las líneas que parten a dichos polígonos.

En esta tarea también existieron respuestas no correctas donde identificamos la falta de equidivisión y congruencia de áreas**,** en la Figura 4.8 mostramos las soluciones erróneas que dos normalistas elaboraron.

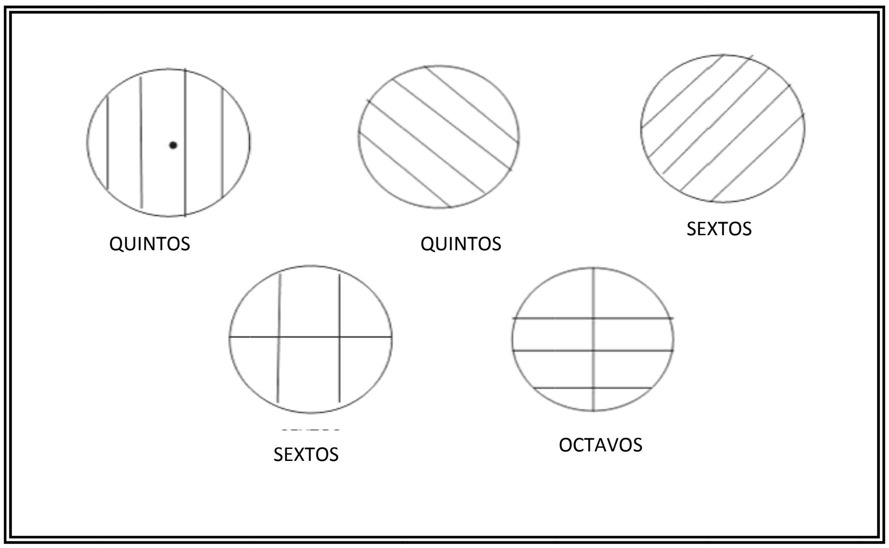


Figura 4.8 Soluciones incorrectas de particiones en quintos, sextos y octavos.

Partición de polígonos regulares

La tarea solicitada pedía partir de manera distinta en quintos dos pentágonos, en sextos dos hexágonos y en octavos dos octágonos iguales. La partición elaborada por casi todos los normalistas fue realizada buscando el centro de la figura para después unir los vértices con el punto central. Con este procedimiento, los alumnos observaron la congruencia de áreas por lo que determinaron que había equidivisión. No todos los alumnos lograron partir el segundo polígono en el número de partes solicitadas, pero quienes lo hicieron se apoyaron en la partición del primer polígono, es decir, en lugar de utilizar los vértices de la figura utilizaron el centro de cada lado del pentágono y éstos fueron unidos al centro del mismo. En este caso los normalistas no observan claramente la equidivisión, pero intuyen la congruencia de áreas porque siguieron el mismo procedimiento que en el polígono anterior (véase Figura 4.9).

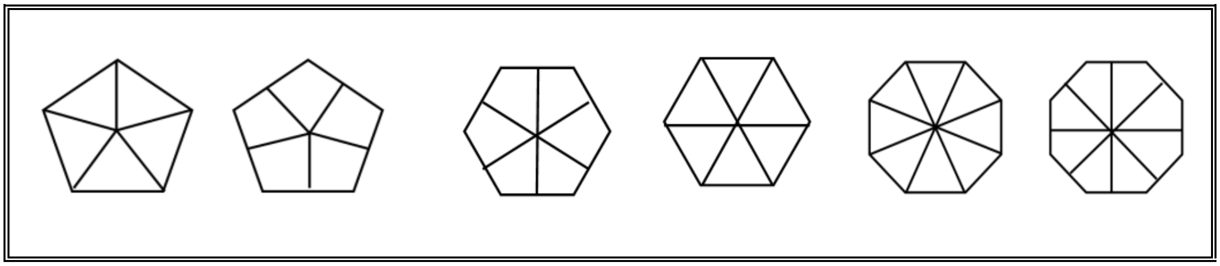


Figura 4.9 Particiones correctas en quintos, sextos y octavos.

Fue en esta tarea donde se encontró el mayor número de errores (véase Figura 4.10) debido a que algunos alumnos no muestran equipartición y congruencia de áreas, ellos no ponen interés en estos dos últimos aspectos ya que sólo parten sin tener algún sentido de igualdad en ningún polígono. En la partición del hexágono y octágono utilizan la bipartición al partir la figura a la mitad, pero las siguientes particiones no son las adecuadas puesto que no existe equidivisión ni congruencia de áreas.

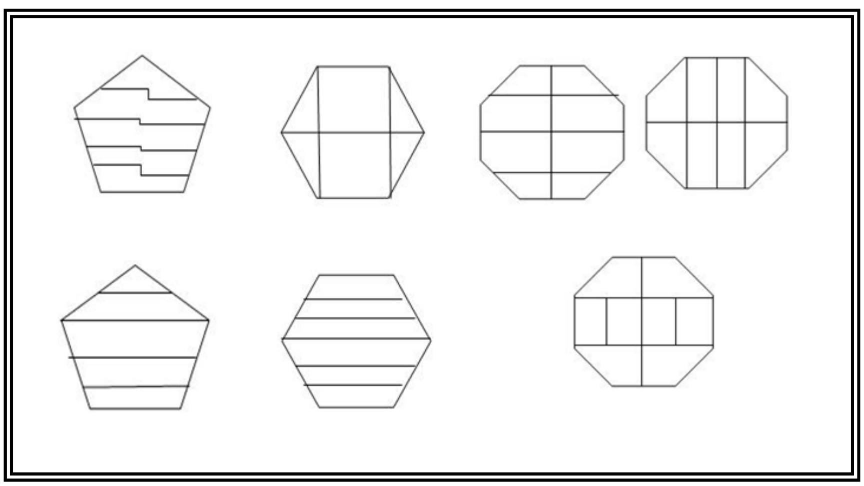


Figura 4.10 Partición incorrecta de polígonos regulares.

Para Piaget, Inhelder y Szeminska (1966), la noción de fracción depende de dos relaciones fundamentales: la relación de la parte con el todo (exahustividad) y la relación de parte a parte, donde los tamaños de todas las partes son comparadas con la de la primera parte (equidad). A través de la comparación de los resultados de los Cuestionarios 1 y 2, podemos identificar una carencia en la enseñanza (Carrillo y Valdemoros, 2011), debido a que los maestros en formación no modificaron sus concepciones acerca de la equitatividad y el papel que juega la partición en la construcción de las fracciones.

Contraste de respuestas de los Cuestionarios 1 y 2

En este apartado contrastamos las respuestas de los Cuestionario 1 y 2 de los maestros en formación al respecto de sus concepciones sobre las fracciones y el uso de equivalencia. Para ello se retomarán las categorías construidas en el capítulo anterior.

Dicho contraste tiene como objetivo destacar si el tratamiento de las fracciones en la Normal, a través de las estrategias de enseñanza desarrolladas con los maestros en formación, son adecuadas para el desarrollo de concepciones, la resolución de problemas y el reconocimiento de la equivalencia.

Contraste de Concepciones acerca del significado de fracción

Con respecto al significado de fracción analizamos que no surgieron categorías distintas a las del Cuestionario 1, pero los maestros en formación cambiaron de categoría, siendo muy pocos los que permanecieron en el mismo grupo. En la Tabla 4.1 se muestra este análisis comparativo.

Las categorías sobres las concepciones son las siguientes: ***Reparto,*** donde la fracción es identificada como una representación con respecto a una presunta distribución de lo que fue fragmentado. ***Equidivisión,*** cuando un entero es divido en partes iguale, haciendo hincapié en la equitatividad de la partición. ***Conjunto de números racionales,*** la cual es denominada de esta manera por los propios normalistas, pero no presentan ningún concepto claro en relación a conjunto de números. ***Representación de números decimales¸*** donde identifican a los decimales como fracciones. La categoría *Ejemplificación* ***de la división*** identifica a la fracción como el ejemplo de una división; y ***Algoritmos con fracciones*** en relación a los algoritmos con fracciones.

Tabla 4.1 Categorías globales de Concepciones sobre la fracción

Cuestionario 1	**Categoría**	Cuestionario 2	
		Sin cambio de categoría	Con cambio de categoría
Rodrigo Nancy Jessica Carolina Nancy Karina Francisco Gerardo	**Reparto**	Gerardo Nancy Carolina	Lucía Thalía Osvaldo
Ángela Oscar Alberto Carol Ana Lidia	**Equidivisión**	Carol	Marisol Leonardo Nancy karina Norma Francisco Verónica Diana
Verónica Alma Diana	**Conjunto de números**		Jessica
Aída Leonardo	**Representación de números decimales**	Aida	
Norma Marisol Thalía	**Ejemplifican la división**		Carlos Ángela
Lucía Carlos Abraham Sonia Cinthia Osvaldo	**Algoritmos con fracciones**	Abraham	Sonia Cinthia Gerardo Ana Lidia Rodrigo Alma

Con respecto a la categoría *"Reparto"* encontramos que tres personas se mantuvieron en dicha concepción donde la fracción es identificada como la representación de una parte del todo. Además, se incorporan a este grupo tres personas. Con lo anterior podríamos afirmar que la enseñanza modificó un poco su concepción al admitir que la fracción "representa algo" y no sólo es un número con el que se realizan algoritmos. Cabe mencionar que es notorio el cambio con respecto a la semántica de la fracción, aunque dicho avance aún lo consideramos elemental; debido al peso que se le da en la enseñanza a la sintaxis de fracciones.

La categoría que mostró un mayor número de cambio en las concepciones de los normalistas, fue en la que hemos denominamos *"Equidivisión"*, en la que a diferencia de la categoría anterior prevalece, de manera implícita, el concepto de igualdad entre las partes, equitatividad, así como la exhaustividad del entero. Con base en lo anterior afirmamos que la enseñanza modificó las concepciones de algunos normalistas hacia el desarrollo del significado, básico, de fracción, sin dejar de lado la sintaxis de la misma.

En la categoría de *"Conjunto de números"* se identificó que ninguno de los maestros en formación ubicados en dicho grupo del Cuestionario 1, reiteró dicha concepción. Jessica en el Cuestionario 2 identifica a la fracción como un conjunto de números y no sólo como la parte de algo. Cabe mencionar que a pesar de que ella considera a la fracción como un conjunto de números, es decir que los identifica distintos a los números naturales, no muestra concepción alguna de las propiedades que tiene la fracción como conjunto numérico.

Con respecto a la concepción de la fracción como la representación de los números decimales, Aída identifica la misma concepción, pero es importante señalar que esta representación es determinada a través del algoritmo entre números naturales. Una vez más, reconocemos que el tratamiento que se le da a las fracciones recae en su sintaxis y no en su semántica. En relación a la categoría de *"Algoritmos con fracciones"* se incorporan cuatro personas y tres continúan con la concepción de que las fracciones no representan nada, no es ningún conjunto de números pero que sí se puede operar a través de los algoritmos.

En conclusión, podemos decir que la enseñanza de la Normal con respecto a la fracción está basada en la resolución de algoritmos, si bien es desarrollado el sentido de cada algoritmo no se observa el desarrollo del significado, ni mucho menos los usos que se le da a la fracción según Kieren (1983), los cuales están planteados en el Plan de Licenciatura en Educación Primaria 1993; así como en la planeación del Curso "Matemáticas y su Ensñanza II" (Ver APÉNDICE D). Asimismo, identificamos que la enseñanza de las fracciones a través de su sintaxis desarrolla, en algunos normalistas, una semántica elemental del conjunto numérico en cuestión donde les permite identificar a la fracción como un recurso de los racionales.

Contraste al respecto de las relaciones de equivalencia

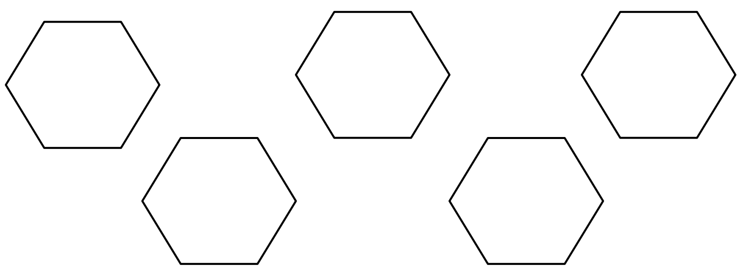
Se consideraron dos tareas con respecto a las relaciones de equivalencia de fracciones en el Cuestionario 2, el cual estuvo integrado por dos tareas específicas considerando el reparto de un todo discreto, la relación parte- todo y parte-parte, al igual que en el Cuestionario1, pero con la diferencia en el uso de figuras geométricas al emplear romboides y hexágonos sustituyendo los rectángulos trabajados en el cuestionario anterior. Además, las fracciones contempladas en las tareas diseñadas a diferencia de las anteriores fueron sextos y doceavos.

La tarea en relación con el todo discreto consistió en repartir cinco chocolates en cuatro ollas de atole. A continuación mostramos dicha tarea.

Tarea 4. Una señora debe hacer cuatro ollas de atole, por lo que necesita repartir las siguientes tablillas de chocolate de igual manera para que el sabor sea el mismo. ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada olla?

*Respuesta:*____

Realiza el reparto:



Al igual que en el Cuestionario 1 se solicitó que justificaran su respuesta, y realizaran el reparto de dos maneras distintas. Los resultados obtenidos se muestran a continuación en la Tabla 4.2 en la cual se comparan ambos cuestionarios, con respecto a las tareas de reparto del todo discreto.

Tabla 4.2 Comparación de respuestas al respecto del reparto del todo discreto

<table>
<tr><td>CUESTIONARIO 1</td><td>Carolina
Nancy J.</td><td>Ángela
Cinthia
Lucía
Diana
Verónica</td><td>Thalía
Carol</td><td>Ana Lidia
Alma
Aída
Osvaldo
Abraham
Sonia
Francisco
Carlos Omar
Leonardo
Rodrigo
Jessica</td><td>Nancy Karina
Marisol
Oscar
Norma A.
Gerardo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">TIPOS DE SOLUCIONES</td><td rowspan="3">INCOMPLETA</td><td colspan="4">CORRECTAS</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Correspondencia 1 a 1 entre las partes y el receptor de éstas, y el otro objeto que se reparte</td><td colspan="2">Correspondencia 1 a 1 entre la parte y el receptor de ésta</td><td rowspan="2">Relación explícita de equivalencia entre las partes</td></tr>
<tr><td>Particiones en medios</td><td>Partición según el número de receptores</td></tr>
<tr><td>CUESTIONARIO 2</td><td>Carolina
Rodrigo</td><td>Ángela
Cinthia
Lucia
Diana
Leonardo
Nancy J.</td><td>Carlos Omar</td><td>Ana Lidia
Alma
Aída
Osvaldo
Abraham
Sonia
Francisco
Thalía
Norma A.
Oscar
Gerardo
Verónica
Carol
Jessica</td><td>Nancy Karina
Marisol</td></tr>
</table>

En este análisis comparativo entre el Cuestionario 1 y el Cuestionario 2 identificamos las mismas categorías de resolución de la tarea, pero como podemos observar, surge una nueva categoría en la que existe equivalencia con respecto a la unidad pero sólo utilizando numerales. Más adelante detallaremos dicha categoría.

En la categoría de "*Solución Incompleta*" organizamos a las respuestas que no llegan a una solución concreta del mismo, es decir, sólo parten la figura en la cantidad requerida pero sin mostrar equidivisión, además de no identificar el nombre de manera convencional de la fracción surgida en este reparto. En este grupo, observamos que Carolina no desarrolló ningún cambio con respecto a la partición de todos discretos ni aún después de recibir instrucción por parte de la Normal. En dicha categoría encontramos a Rodrigo, quien en esta tarea no pone cuidado en la equipartición del todo.

Con respecto a las soluciones correctas de la tarea con respecto a la repartición de cinco tablillas de chocolate en cuatro ollas de atole, identificamos nuevamente la "partición mixta (Valdemoros , 1993) debido a que en el todo discreto existe mayor número de elementos a repartir que el número de receptores, en este caso las ollas.

En la categoría denominada ***"Correspondencia 1 a 1 entre las partes y el receptor de éstas, y el otro objeto que se reparte"*** que consiste en emplear la estrategia "*piezas preservadas*" (Lamon 1996b) donde se reparten unidades completas y las unidades sobrantes se cortan en el número necesario de partes (véase Figura 4.11), fue empleada al menos una vez por las mayoría de los maestros en formación, pero en esta categoría sólo se incorporan 6 normalistas debido a que fue su única solución. En este grupo no sufrió cambios significativos al permanecer la mayoría de los maestros en formación en el empleo de esta solución. Además, identificamos que Leonardo sólo desarrolló esta estrategia y no las realizadas en el Cuestionario 1.

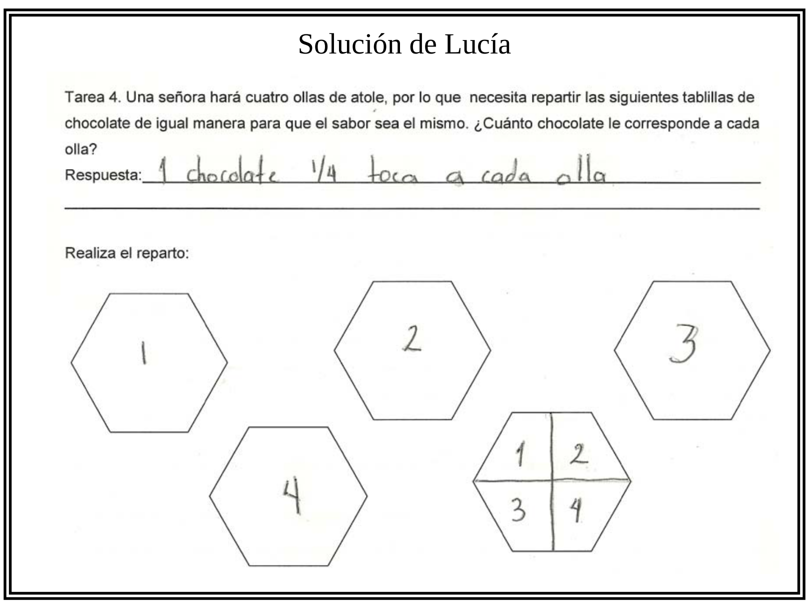


Figura 4.11 Solución de la categoría "*Correspondencia 1 a 1 entre las partes y el receptor de éstas, y el otro objeto que se reparte*".

Como ya se mencionó, la estrategia anterior da origen a la siguiente categoría, la cual es denominada como ***"Correspondencia 1 a 1 entre la parte y el receptor de ésta".*** En esta categoría nuevamente se encuentran dos estrategias de reparto (véase Figura 4.12) la primera identificada por Olguín (2009) como "*divide en mitades cada unidad y lo que sobra lo divide nuevamente*" mostrada únicamente en la solución de Carlos. Así como la estrategia "*coordinación de un solo artículo*" (Empson, Junk, Domínguez y Turner, 2005) mostrada en la solución de Aída.

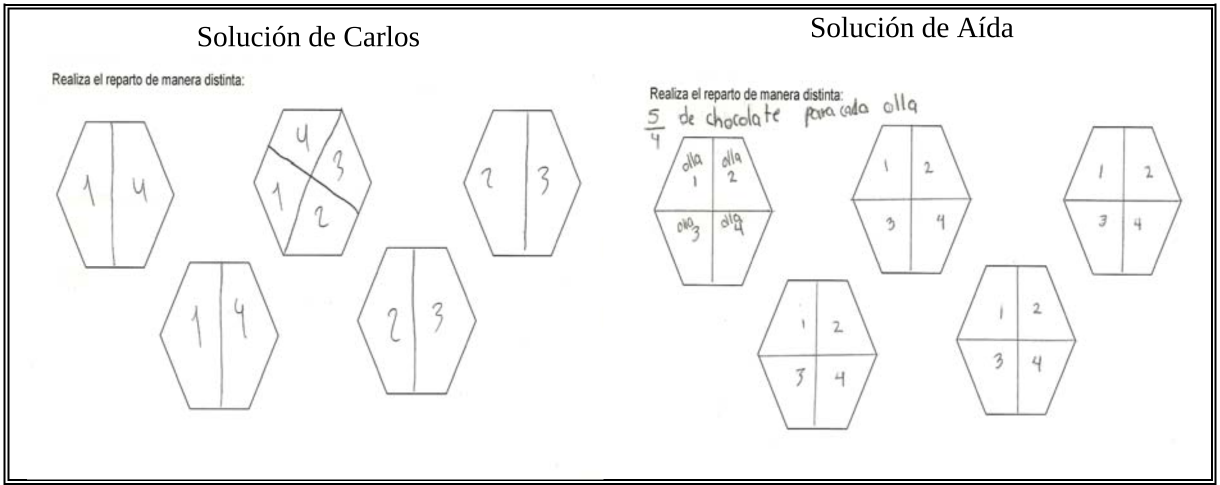


Figura 4.12 Solución de la categoría "*Correspondencia 1 a 1 entre la parte y el receptor de ésta*".

En esta categoría se identificaron dos estrategias donde se emplea el reparto gráfico y que de éste surja una fracción expresada con numerales. Además, es el grupo donde coincide el mayor número de respuestas de los maestros en formación. A través del análisis comparativo realizado podemos dar cuenta de que la enseñanza que recibieron los normalistas no desarrolló muchos cambios en sus concepciones con respecto a las relaciones de equivalencia ya que no distinguimos avance alguno en cuanto al desarrollo de sus estrategias.

Con respecto a la última categoría ***"Relación explícita de equivalencia entre las partes"*** donde se distinguen relaciones de equivalencia más complejas que en la categoría anterior, empleando la estrategia de reparto "*partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias*" reconocida por Olguín (2009), encontramos nuevamente a Nancy Karina y Marisol. En el caso de Nancy, emplea la misma secuencia de estrategias para sus soluciones, es decir, en el primer reparto emplea cuartos para posteriormente repartir a través de colores un entero, en partes, en cada olla. En el segundo reparto emplea la misma estrategia pero el entero es dividido en doceavos. Además identifica que 5/4 de tablilla de chocolate es equivalente a 15/12 (véase Figura 4.13).

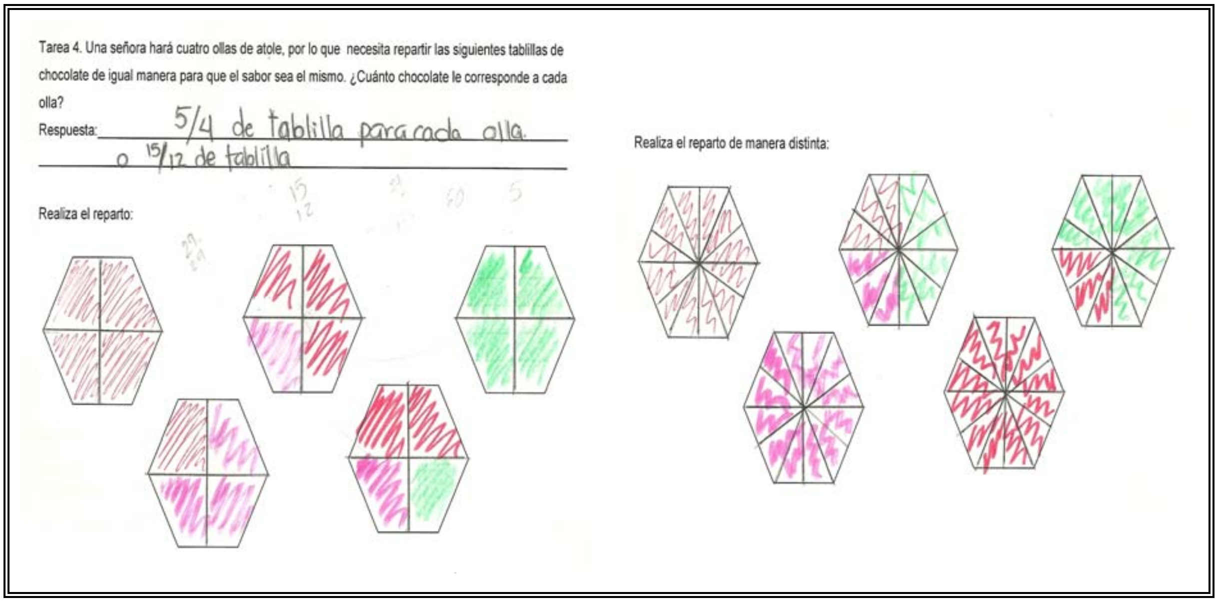


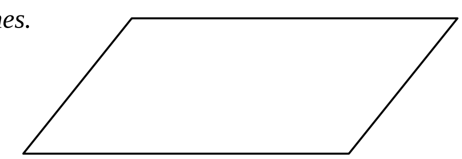
Figura 4.13 Solución de la categoría *Relación explícita de equivalencia entre las partes”.*

En el caso de Marisol distinguimos una estrategia distinta identificada por nosotros como “**relación equivalente en una misma colección**”, donde emplea fracciones equivalentes para partir las unidades del conjunto. Esta estrategia se desarrolla ampliamente en el estudio de casos, en el Capítulo 5.

La tarea ligada a la relación parte–todo y parte- parte consistió en repartir un terreno al igual que en Cuestionario 1, con la diferencia de que la figura a trabajar es un romboide. A continuación mostramos dicha tarea.

En un terreno como el siguiente se quiere construir un pequeño kínder; repártelo como se indica y responde:

- *La mitad del terreno y de manera equitativa es para tres salones.*
- *La mitad del resto es para el patio de juegos.*
- *De lo que sobra, las dos terceras partes son para lo sanitarios.*
- *El resto del terreno es para el jardín.*



Responde lo siguiente e identifica la fracción con respecto a:

¿Qué ocupa la mayor parte a todo el terreno? ___________________________

¿Qué ocupa la menor parte a todo el terreno? ___________________________

Indica la fracción con respecto a todo el terreno de:

Salón: __________ *Sanitarios:* _________ *Jardín:* _________ *Patio de juegos:* _________

En la Tabla 4.3 se muestra en análisis comparativo entre los Cuestionarios 1 y 2 con respecto al uso de equivalencias en la relación parte- todo y parte –parte.

Tabla 4.3 Análisis comparativo de la tarea respecto a la parte-todo y parte-parte

CUESTIONARIO 1	Norma A. Abraham	Rodrigo Carolina Carol Gerardo Carlos Marisol Nancy Y. Ana Lidia	Sonia Lucía Oscar	Verónica Nancy Karina Leonardo Thalía Jessica Aída Ángela Francisco Osvaldo Alma Diana Cinthia
	Sin solución	***Solución errónea en reparto gráfico y con numeral***	***Solución correcta en reparto gráfico***	***Solución correcta en reparto gráfico y empleo de fracción***
CUESTIONARIO 2		Rodrigo	**Sin numeral** Diana Cinthia Carolina **Numeral erróneo** Ángela Francisco Osvaldo Alma Nancy Y. Abraham Carlos	Verónica Nancy Karina Leonardo Thalía Jessica Aída Lucía Oscar Carol Marisol Gerardo Ana Lidia Norma A.

El análisis de esta tarea nos muestra un avance en cuanto a la solución de la partición de un todo continuo donde existe relación entre la parte y el todo, así como la relación de la parte con la parte. Observando los resultados, identificamos que solamente un normalista de veinticinco, desarrolló una respuesta errónea debido a que no identifica a la parte de un todo como una unidad dentro de la unidad a consecuencia del poco manejo de las relaciones de equivalencia. En cuanto a las soluciones correctas, se clasificaron en quien lo realizó solamente con el apoyo de la figura y quien pudo escribir el número de la parte en relación al todo.

Con respecto a la *"Solución correcta en reparto gráfico"* de la tarea 4 del Cuestionario 2, se identifican dos grupos, quien no expresa la fracción con numeral y quien lo hace incorrectamente. Cabe mencionar que las respuestas con numeral son incorrectas debido a que no logran identificar el tamaño de la parte en el todo, mientras que al hacerlo con apoyo de la figura les es mucho más sencillo identificar la relación parte-parte con respecto al todo.

En cuanto a la *"Solución correcta en reparto y empleo de fracción"* de la tarea 4 del Cuestionario 2, observamos que fue consistente la solución en algunos alumnos, mientras que en otros se ubicaron en la categoría del numeral erróneo. Pero también identificamos que algunos normalistas respondieron correctamente en el Cuestionario 2. Creemos que el avance que se tuvo en esta tarea se debe al mismo desarrollo de la investigación a través de la resolución de los Cuestionarios 1 y 2, ya que fue el recurso donde más emplearon la partición de todos continuos de maneras diversas. Además, fueron los únicos elementos, que les permitieran desarrollar la relación parte-parte con respecto a un todo.

Cabe mencionar que en la tarea 4, del Cuestionario 2, tenía la consigna de realizar el reparto de dos maneras distintas, los cuales fueron muy similares en casi todos los casos; es decir, si se había repartido el terreno de forma horizontal, en el siguiente reparto se realizó de esta misma forma pero ubicando en distinto lugar. Pero también identificamos el caso de Norma, quien emplea la equivalencia de fracciones al dividir el primer entero en doceavos para hacer su reparto y en la figura siguiente emplea veinticuatroavos a través del uso de biparticiones.

Después de haber efectuado el contraste entre ambos cuestionarios fue necesario reflexionar acerca de lo que la instrucción hacia los maestros en formación aportó al desarrollo del concepto de fracción, tanto en su aprendizaje como en los elementos de enseñanza a desarrollar posteriormente con los alumnos de primaria:

- La clases en la Normal están asentadas en el desarrollo de la sintaxis de la fracción y no en su semántica, por lo que no se observaron avances significativos en el cambio de concepciones de los maestros en formación.

- Con respecto a la didáctica de la fracción, se les hace hincapié a los normalistas que este contenido se debe abordar en tres "etapas": concreta, gráfica y abstracta, teniendo como base un problema. Suponemos que dichas etapas están en relación a las ideas de Bruner (1987) con respecto a la "*representación de la actuación, representación icónica y representación simbólica*" , las cuales se desarrollan para crear sentido.

- A través de la comparación de los resultados de los Cuestionarios 1 y 2, podemos identificar una carencia en la enseñanza debido a que los maestros en formación no identifican claramente el papel que desarrolla la equitatividad a través de la partición y las relaciones de equivalencia en la construcción del concepto de fracción.

En este capítulo presentamos el tratamiento que se da a las fracciones en la escuela Normal, a través de la información recabada mediante observación directa e indirecta. Asimismo, realizamos un análisis comparativo entre los resultados de los Cuestionarios 1 y 2 con respecto a la partición de todos continuos, las concepciones de los maestros en formación y las soluciones empleadas en las tareas de reparto y relación parte-todo y parte-parte, con respecto a las relaciones de equivalencia. Dicho análisis nos permitió seleccionar los casos con quienes se observó a profundidad la relación aprendizaje-enseñanza de dos maestras en formación. Este último será presentado en el próximo capítulo.

5. ESTUDIO DE CASOS

En el presente capítulo efectuamos el seguimiento de dos casos, donde el estudio de la particularidad y la complejidad de un caso diferente a otro dado, conducen a la comprensión de las actividades dentro de un conjunto de factores significativos (Blake,1999). Primero, presentamos los aspectos fundamentales de cada uno de ellos mostrando los resultados obtenidos del Cuestionario 1 y del Cuestionario 2. Posteriormente, mostramos los resultados de las entrevistas realizadas donde resolvieron tareas planteadas y diseñaron una clase para niños de 5° de primaria, con respecto a las fracciones.

Cabe mencionar que el recurso metodológico básico para el estudio de casos fue la entrevista individual, destacando su diseño específico para cada uno de éstos con respecto a la resolución de tareas relativas a los procesos de partición y a las relaciones de equivalencia. Nuestra entrevista, semiestructurada, nos dio la apertura y flexibilidad para las propuestas, ideas y reflexiones que nos proporcionara mayor información acerca de los maestros en formación permitiendo que Norma y Marisol, plantearan una secuencia didáctica con respecto al tema de fracción en la escuela primaria, específicamente, para niños de quinto grado.

Dicho diseño se observó puesto en práctica con alumnos de la primaria; es por este aspecto que se eligió a Norma y Marisol para realizar nuestro estudio de casos debido a que ambas desarrollaron el mismo contenido matemático con respecto a las fracciones, en grupos distintos de alumnos de quinto grado de educación primaria; la confrontación de casos es mostrado al final de este capítulo.

El caso de Norma

A continuación presentamos el primero de los dos casos que conformaron nuestra investigación: el caso de Norma. Mostramos la forma en que la maestra en formación realizó cada una de las tareas asignadas en el Cuestionario 1 y el Cuestionario 2, la entrevista efectuada donde dio solución a algunas tareas y realizó un diseño didáctico con respecto a la equivalencia de fracciones donde nos enfocamos en el propósito, secuencia de actividades, evaluación y recursos empleados . Además, detallamos la observación directa que se llevó a cabo con la puesta en práctica del diseño antes mencionado. Cabe mencionar que el caso siguiente está organizado de la misma manera.

Norma es una estudiante de la Licenciatura en Educación primaria de 19 años (edad de la joven durante la investigación), egresada de una preparatoria oficial estatal. Ha realizado prácticas docentes en 3° de educación primaria. Norma fue elegida en nuestro estudio porque sus resultados son representativos a los de la mayoría, al identificar sólo particiones tradicionales y utilizar equivalencias de forma sintáctica, además de realizar práctica docente en un grupo de quinto grado en la escuela primaria con el contenido "Equivalencia de fracciones con base en el resultado de un reparto".

Resultados del Cuestionario 1 y Cuestionario 2

Con respecto a la concepción sobre el concepto de fracción, en el Cuestionario 1 se ubicó en la categoría ***"Ejemplificación de la división"*** debido a que identifica a la fracción como el ejemplo de una división, es decir; recurre al algoritmo de la división con números naturales para identificar a una fracción. En palabras textuales, ella explica que una fracción "*ejercita y ejemplifica la división*". Con respecto al Cuestionario 2 se observa una pequeña modificación con respecto al concepto de fracción al identificar a la equidivisión de la unidad como parte fundamental pero no distingue a la fracción como un conjunto de números distinto al de los naturales.

En cuanto al conocimiento de las fracciones, se enfoca en los elementos técnicos de dicho número, tales como sus componentes: numerador y denominador, o bien, su clasificación: propia, impropia y mixta, tanto como sus operaciones básicas.

Con respecto a la partición de todos continuos a través de figuras geométricas observamos que Norma sólo realiza particiones convencionales al partir en medios, tercios, cuartos, quintos, sextos y octavos, tal como se muestra en la Figura 5.1.

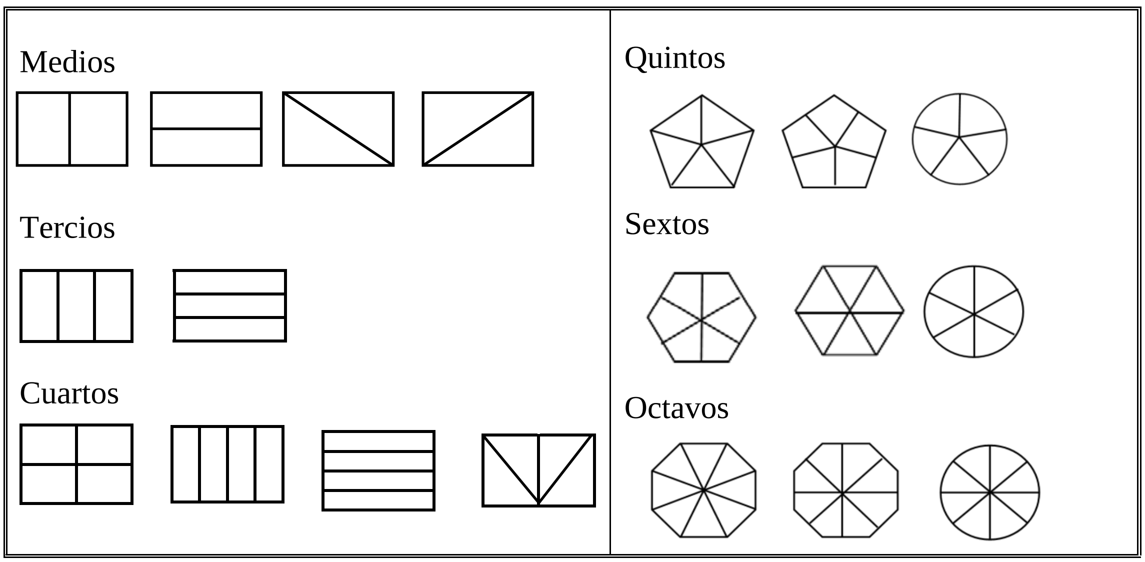


Figura 5.1 Particiones comunes del todo continuo, por parte de Norma.

Cabe mencionar que se les solicitó, en el Cuestionario 1, partir de cuatro maneras distintas en cada fracción mencionada anteriormente, pero ella, con respecto a los tercios sólo pudo realizar las dos particiones más convencionales del rectángulo.

La tarea concerniente al reparto de un todo discreto del Cuestionario 1, se muestra a continuación:

Tres niños se quieren repartir cuatro chocolates, de tal manera que a cada uno le toque lo mismo.

- *Realice el reparto correspondiente y diga cuánto le toca a cada uno.*

Identificamos que Norma en el Cuestionario 1 desarrolla la equivalencia de fracciones con respecto a los tercios, además de ser capaz de expresar dicha equivalencia con números fraccionarios. Cabe mencionar que al inicio de su solución emplea el algoritmo de la división con números naturales, obteniendo el resultado de 1 1/3, ya a partir de este resultado reparte los chocolates con distintas estrategias. En la Figura 5.2 mostramos las soluciones a esta tarea por parte de Norma.

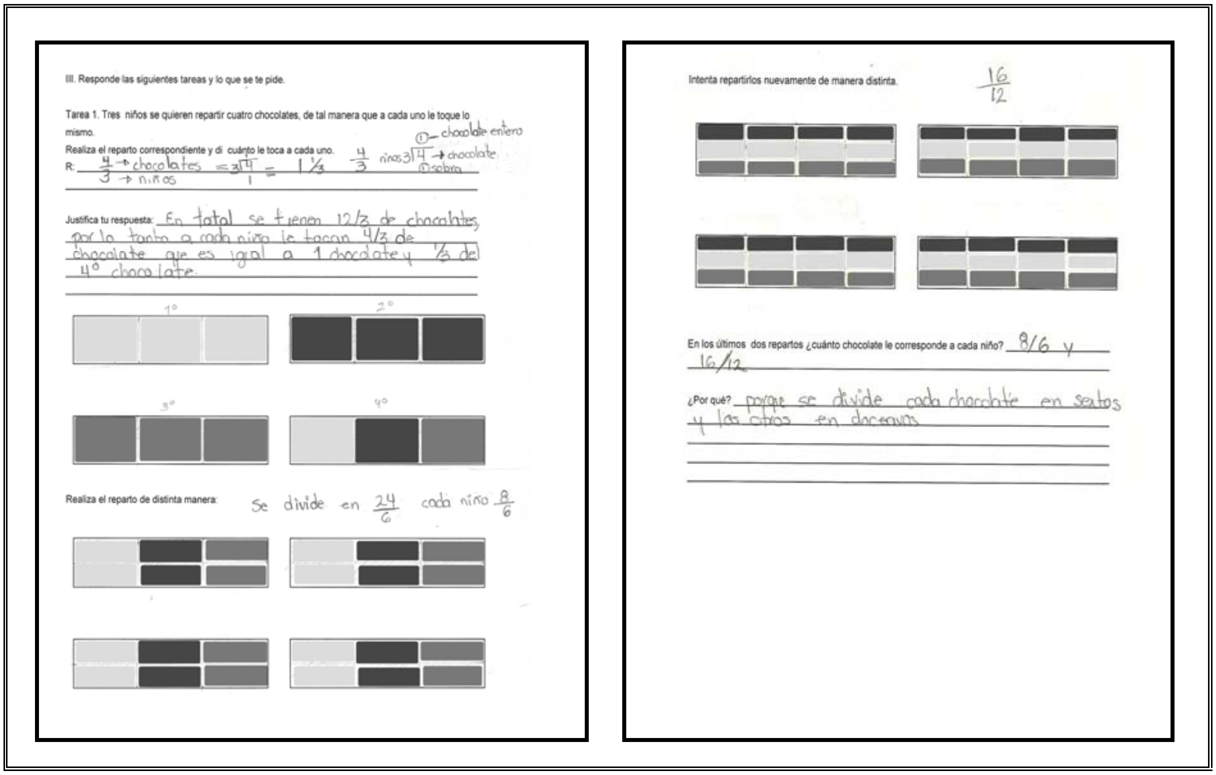


Figura 5.2 Solución de Norma con relación al reparto.

Es importante recordar que en el Cuestionario 1, Norma identificaba a la fracción como ***"Ejemplificación de la división"*** (entre números naturales), por lo que interpretamos que en su solución le otorga un peso mayor al algoritmo, el cual le sirve para poder realizar los repartos posteriores. Identifica a los tercios de cada chocolate como elemento de un conjunto, es decir, de tener un conjunto de cuatro chocolates enteros, se convierte en un conjunto de doce tercios, debido a que cada chocolate es divido en tercios. En su primer reparto ella escribe " *en total se tienen 12/3 de chocolates, por lo tanto a cada niño le tocan 4/3 de chocolate, que es igual a 1 chocolate y 1/3 del cuarto chocolate"*.

Una vez más, en esta tarea del Cuestionario 1, distinguimos el empleo de números naturales donde los doce tercios son repartidos entre tres niños, resultando cuatro tercios del conjunto a los tres niños. Además de incluir la estrategia reconocida por Empson, Junk, Domínguez y Turner (2005) como *"coordinación de un solo artículo"*, donde cada elemento del todo discreto se divide en un número de piezas igual al número de personas entre quienes se van a repartir.

Para las siguientes soluciones identificamos que emplea bipartición de cada tercio por lo que el conjunto se extiende en número de pedazos de chocolate, obteniendo veinticuatro sextos. Para esta solución, Norma reparte los 24 trozos entre los tres niños dando como resultado ocho pero identifica que cada chocolate está dividido en sextos, por lo que indica como respuesta 8/6. En la última solución, a esta tarea, divide en doceavos cada chocolate, repartiendo un tercio de los doceavos, ella utilizas colores distintos representando a cada niño al que se le repartirá chocolate, por lo que sumando cuatro doceavos de cada chocolate que reparte a cada niño obtiene como respuesta 16/12 (véase Figura 5.2). Cabe mencionar que identifica la equivalencia entre sextos y octavos al justificar su respuesta.

En el Cuestionario 2, con respecto a repartir cinco tabletas de chocolate entre cuatro ollas, Norma emplea la equivalencia sólo con respecto a la unidad. En la primera solución emplea la estrategia de Lamon (1996b) "piezas reservadas" donde se reparten unidades completas y las que sobran se parten tomando en cuenta el número en el que se va a repartir. Mientras que en la segunda solución cada entero se parte en cuartos, repartiendo así ¼ de cada chocolate. Así, establece que 1 1 /4 y 5/4 pueden ser fracciones para determinar dicha respuesta.

Con respecto al Cuestionario 1, en lo referente a la relación parte-todo y parte- parte donde se solicita repartir un rancho en áreas detrminadas (ver ÁPENDICE A) identificamos que Norma no contestó dicha tarea. Mientras que en el Cuestionario 2, referente a estas relaciones, se solicitó repartir un terreno de la siguiente manera: *la mitad del terreno y de manera equitativa es para tres salones; la mitad del resto es para el patio de juegos, de lo que sobra, las dos terceras partes son para lo sanitarios y el resto del terreno es para el jardín.*

Sus respuestas, con respecto a esta tarea, fueron correctas tanto en el reparto como en el empleo de numerales. En su solución se distingue claramente el uso de equivalencia entre veinticuatroavos, doceavos, sextos y cuartos, dividiendo, en la primera solución, el terreno en doceavos mientras que en la segunda solución divide todo el terreno en veinticuatroavos en el esquema presentado del terreno. Además la equivalencia numérica es clara, tal y cómo se distingue en la Figura 5.3; identificando 2 /12 equivalente a 1/6 y 3/12 equivalente a 1/4. Para la segunda solución realiza, en esta tarea, bipartición de doceavos surgiendo veinticuatroavos donde Norma distingue numéricamente 2/24 equivalente a 1/12 por lo que 6/24 = 3/12 = 1/4.

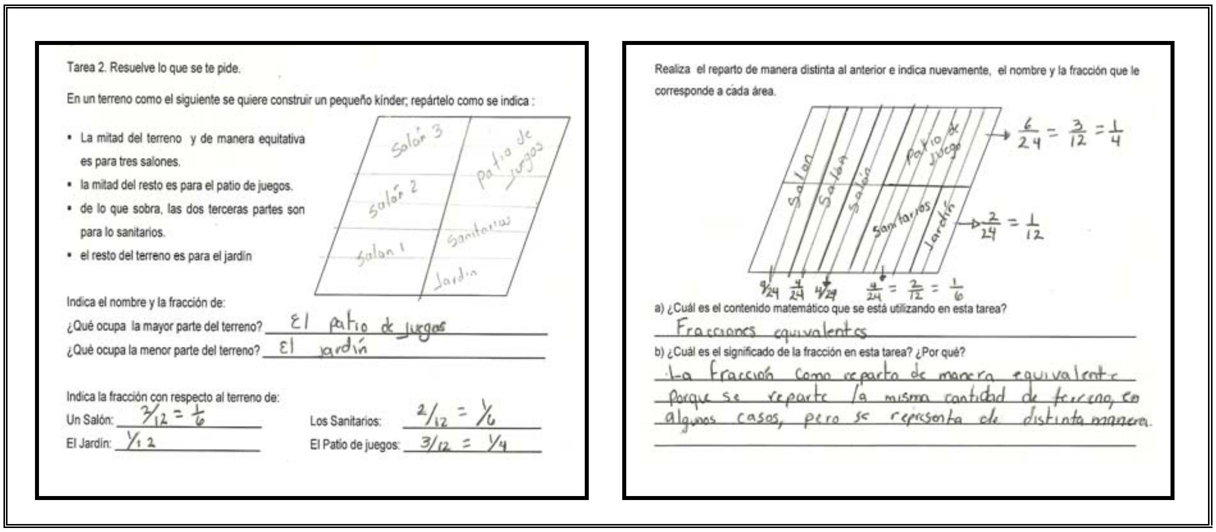


Figura 5.3 Solución de Norma con relación parte-todo y parte-parte del Cuestionario 2.

Piaget *et al.* (1966) al respecto del significado de la relación parte-todo, aseveran que los niños al dividir un todo en partes iguales necesitan anticipar la relación entre el entero y las partes, y esta anticipación debe estar vinculada con la conservación del todo sin importar las divisiones que hubiera sufrido. La relación parte-todo tiene como base la subdivisión de áreas. Si bien estos autores mencionan el resultado de los niños podemos afirmar que con los maestros en formación no es diferente este proceso según los resultados analizados.

Con el análisis de los resultados de los Cuestionarios 1 y 2 identificamos un cambio en cuanto a las concepciones del significado de fracción donde Norma identifica la equidivisión del todo continuo y la relación de equivalencia entre el todo y la parte y la parte de parte.

Resultados de la entrevista y el diseño didáctico

La entrevista consistió en el caso de Norma en la solución de dos tareas en las cuales se identificaron problemas en los Cuestionarios 1 y 2. Además del diseño didáctico para la enseñanza a alumnos de la primaria referente a la equivalencia de fracciones.

La primera tarea consistió en dividir en tercios cuatro rectángulos de maneras distintas debido a que en el Cuestionario 1 Norma sólo realizó dos particiones. La solución a esta tarea no presentó ningún cambio dividiendo sólo dos de los cuatro rectángulos de manera conocida, es decir, realizando líneas verticales en una figura geométrica, así como líneas verticales en otra figura y tomando en cuenta en ambas soluciones la equidivisión entre una línea y otra. Asimismo, dentro de esta tarea se le solicitó que representara de dos maneras distintas un tercio; dando como solución un círculo y un rectángulo mucho más largo semejando una regleta dividido en tercios. En la figura 5.4 mostramos los resultados de dicha tarea y posteriormente exponemos un fragmento de la transcripción de su entrevista.

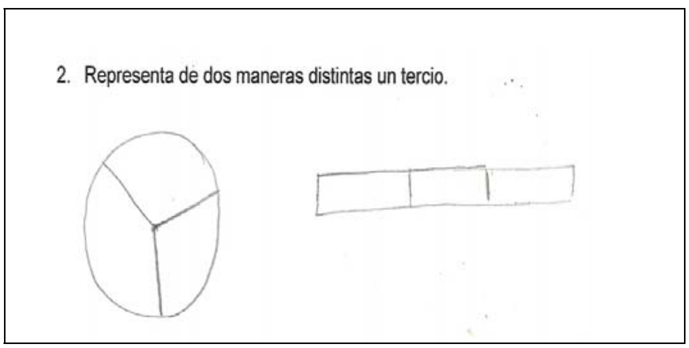


Figura 5.4. Solución de la entrevista referente a la partición del todo continuo.

E: Existirá otra manera distinta de partir el rectángulo en tercios.
N: No, son las únicas porque si no las partes no serían iguales y no se partirían en tercios.
E: ¿Y si utilizas la estrategia que empleaste en el círculo?
N: No, las partes no serían iguales como en el círculo. No, no hay otra manera. Son las únicas que conozco para el rectángulo.

Con la actividad anterior identificamos que Norma reconoce que para partir un todo continuo la igualdad entre las partes es fundamental, sin tomar en cuenta la congruencia de áreas. Asimismo, se solicitó dividir en sextos y octavos cuatro rectángulos de manera distinta. En estas tareas no hubo problema debido al uso de las biparticiones, considerando la igualdad del tamaño de la parte. Al pedirle que representara un sexto y un octavo, Norma empleó sólo todos continuos, mediante el uso del círculo en ambos casos, hexágono para sextos y cuadrado para octavos.

Con respecto a la relación parte-todo y parte- parte se proporcionó la tarea que no resolvió en el Cuestionario 1, donde se solicitaba repartir un rancho en las siguientes áreas: l*a cuarta parte es para las caballerizas; la mitad de la mitad del rancho es para el establo, en una cuarta parte de la mitad se encuentra la casa y el resto del rancho para la huerta.*

La solución fue correcta, a través de la partición apoyada en una figura donde Norma identificó y relacionó la parte con el todo y con las partes. A continuación se muestra un fragmento de su entrevista con respecto a la solución de esta tarea donde se distingue que sin el apoyo del pictograma no hubiese podido dar una respuesta correcta.

N: La cuarta parte son las caballerizas; la mitad de la mitad es otro cuarto.

E: ¿Otro cuarto de qué?

N: Otro cuarto del terreno, porque dos cuartos hacen la mitad, entonces la mitad de la mitad es un cuarto del terreno y es el establo.

E: Entonces, ¿la casa qué cantidad de terreno ocupa?

N: Dice que la cuarta parte de la mitad (parte la mitad en cuartos)***; son octavos, entonces un octavo es para la casa y lo que sobra es la huerta.***

E: ¿Qué es lo que sobra?

N: Tres octavos son para el establo.

E: Entonces, ¿ qué ocupa la mayor y la menor parte del rancho?

N: La casa la menor y el establo la mayor parte del terreno, la caballeriza y el establo ocupan lo mismo, una cuarta parte del rancho.

Posterior a la solución de tareas, Norma desarrolló el diseño didáctico con respecto al contenido a trabajar en la primaria con un grupo de quinto año. La lección a trabajar (libro de texto, matemáticas 5°, Plan 1993), se titula "*Repartos de galletas*". Al preguntarle sobre el propósito a desarrollar comentó que sería "la equivalencia de fracciones con base en el resultado de un reparto", el cual también está estipulado en la lección antes señalada.

Para su diseño determinó que trabajaría dos sesiones para desarrollar este propósito. En cada sesión contempló los tres momentos utilizados en su clase de matemáticas, denominados por el maestro de la Normal como: *etapa concreta, etapa gráfica y etapa abstracta.* Durante la primera sesión y con respecto a la etapa concreta decidió emplear el material recortable del libro de texto (fraccionómetro de papel), en cuanto a la etapa gráfica consistiría en escribir los resultados de buscar fracciones equivalentes a 2/3, 1/4 y 1/5 a través del fraccionómetro recortado. Para llegar a la etapa abstracta se basó en el análisis de los resultados anteriores para que el alumno identifique la "fórmula" de las fracciones equivalentes. Es decir, el empleo del algoritmo de la multiplicación *"donde se multiplica el numerador y el denominador por un número cualquiera"*. Por último, terminó la sesión practicando dicha fórmula.

La segunda sesión que diseñó, referente a la etapa concreta, consistió en un ejercicio diseñado por ella donde solicitó colorear una figura para representar así fracciones equivalentes, además de solicitar la fracción ligada a dicha representación (véase Figura 5.5).

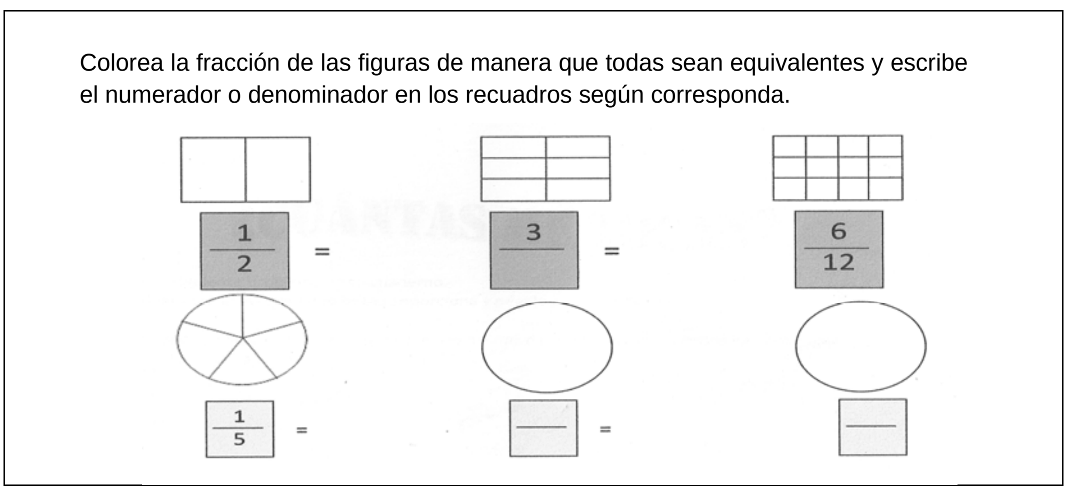


Figura 5.5. Ejercicio de la "Etapa concreta" de la clase desarrollada por Norma.

Para la etapa gráfica decidió emplear tres pentágonos de papel para que los alumnos lo repartieran en quintos y así responder el siguiente problema:

Si quiero dividir para repartir 3 pentágonos entre 5 niños de tal manera que a todos les toque igual y que no sobre, ¿cuánto le tocará a cada niño?

- *Lo que le tocó a cada niño ¿es más o menos que un pentágono? ¿Por qué?*
- *Si son ocho niños ¿cuántos pentágonos se necesitan para que a cada niño le toque ½ pentágono?*
- *Represéntalo de forma gráfica en tu cuaderno.*

Para la etapa abstracta y como evaluación diseñó dos problemas verbales donde los niños emplearían el reparto y posteriormente escribirían una equivalencia de ese resultado.

Como podemos observar existe una fuerte influencia de la manera en que Norma desarrolla su clase en la primaria con respecto a las clases de la Normal. Shulman (1986) señala que el docente debe poseer como punto de partida el conocimiento del objeto de estudio enfocado a la enseñanza, es decir, debe adquirir un conocimiento de contenido pedagógico, entendiendo éste como la forma de representar y formular la materia que la haga comprensible a otros. Sin embargo, debido a los pocos elementos que la Normal desarrolla en los maestros en formación con respecto al conocimiento matemático y a la didáctica provoca que éstos, en su práctica docente, realicen lo que en su experiencia como estudiantes llevaron a cabo.

El diseño didáctico estuvo basado en las etapas *concreta, gráfica, y abstracta,* sin que se observe una coherencia con el propósito de la lección. Además, en la clase se desarrolló la ejercitación de la "fórmula" (es decir, la sintaxis para obtener fracciones equivalentes) y una mínima intervención para darle sentido a la equivalencia. Con lo anterior, observamos que Norma emplea representaciones y tareas determinadas por su propia comprensión matemática, tal como lo menciona Llinares y Sánchez (1998).

La clase desarrollada por Norma

Para concluir el estudio de caso se observó de forma directa la clase desarrollada por Norma en un grupo de quinto grado de educación primaria con el diseño elaborado en la entrevista realizada con anterioridad.

La primera sesión comenzó con la identificación de las fracciones empleadas en el fraccionómetro de papel del libro de texto, así como sus equivalencias. Una vez identificadas se escribió la fracción correspondiente a cada regleta para posteriormente recortarlas. En esta actividad se perdió mucho tiempo y distracción de los alumnos. Además de que consideramos que el material no fue adecuado debido a que los alumnos se llenaron de pedazos de papel que dificultaban la actividad de identificar fracciones equivalentes.

Para atraer de nuevo la atención de los alumnos, la maestra en formación con ayuda de un fraccionómetro más grande mostró al grupo la equivalencia de 2/3 con 6/9 y con 4/6, estableciendo la igualdad entre 2/3= 6/9= 4/6, para poder reflexionar al respecto de la equivalencia y llegar al empleo del algoritmo, la "fórmula" de las fracciones equivalentes. Por lo que los alumnos comenzaron a usarla para escribir la equivalencia a 1/4 y 1/5 sin el uso del material de apoyo, dando por terminada la primera sesión.

Para la segunda sesión, se comenzó con la actividad mostrada en la Figura 5.5, la cual, causo mucha confusión en los alumnos con respecto a la partición de las figuras ya que nunca se hizo hincapié en la equitatividad del todo y no podían distinguir a través del pictograma la equivalencia de fracciones. Además de que el círculo no es la figura más adecuada para encontrar fracciones equivalentes a 1/5 y 1/8. Es en esta actividad donde se fue el tiempo de la clase sin llegar a solucionar los problemas diseñados para la evaluación.

Con respecto a la observación realizada consideramos que al darle tanto peso a la "etapas" de construcción en las sesiones, Norma perdió de vista el propósito de la sesión donde el reparto era el puente para identificar la equivalencia de fracciones. Además de darle mucha importancia al algoritmo mucho más que al sentido, tal como ocurrió en sus clases de la

Normal. Cabe mencionar que identificamos el empleo de figuras distintas al rectángulo para la partición del todo continuo, empleando círculos y pentágonos, aunque como mencionamos con anterioridad las fracciones utilizadas para partir el círculo no fueron las adecuadas. El recurso empleado fue el fraccionómetro, el cual ha sido un recurso didáctico comúnmente usado por los docentes, aunque, realmente no desarrolla sentido con respecto a la fracción, sino sólo permite al alumno "observar" y comparar el tamaño de las fracciones para resolver ejercicios.

El caso de Marisol

Marisol es una estudiante de Licenciatura en Educación primaria de 21 años (durante la investigación), egresada de una preparatoria oficial estatal con inicios en la enseñanza. Ha realizado prácticas docentes en 3° de educación primaria. Norma fue elegida para el estudio de casos porque sus resultados en cuanto a la tarea de reparto muestra equivalencia al partir pero pierde de vista la unidad. Además de realizar práctica docente en un grupo de quinto grado en la escuela primaria, al igual que en el caso de Norma, con el contenido "Equivalencia de fracciones con base en el resultado de un reparto". Elemento que nos permitió un contraste en cuanto al tratamiento que dan los maestros en formación a las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición en vinculación con el todo continuo y el todo discreto, en el salón de clase de la primaria.

Resultados del Cuestionario 1 y Cuestionario 2

En el Cuestionario 1, con respecto a la concepción sobre el concepto de fracción, Marisol, se ubicó en la categoría ***"Ejemplificación de la división"*** ¸ en palabras textuales explica que una fracción es aquélla que "*ayuda a simplificar la división de proporciones*". Asimismo, ella identifica "a las proporciones" como una parte del entero, es decir son asumidas como partes de algo, porciones; a lo largo de su cuestionario escribe porción en lugar de proporción. En el Cuestionario 2 se observa un cambio en cuanto al concepto de fracción ya que identifica la equidivisión de la unidad como elemento imprescindible de la relación parte-todo comentando que las fracciones son "*porciones de un todo en partes iguales*"; además, distingue que existen usos diferentes de las fracciones tales como facturador y comparador. Cabe mencionar que el tratamiento del uso de las fracciones no se llevó a cabo en las clases impartidas por la Normal, sino que llevaron a un estudiante de Doctorado de nuestro Centro de Investigación a impartir una conferencia sobre este tenor y es ahí donde Marisol identifica que las fracciones tienen distintos usos.

En cuanto a las particiones del todo continuo tanto en el Cuestionario 1 y el Cuestionario 2 presenta las particiones estándar, además de presentar errores en la partición de tercios y octavos; en la Figura 5.6 se muestran las particiones realizadas en ambos cuestionarios.

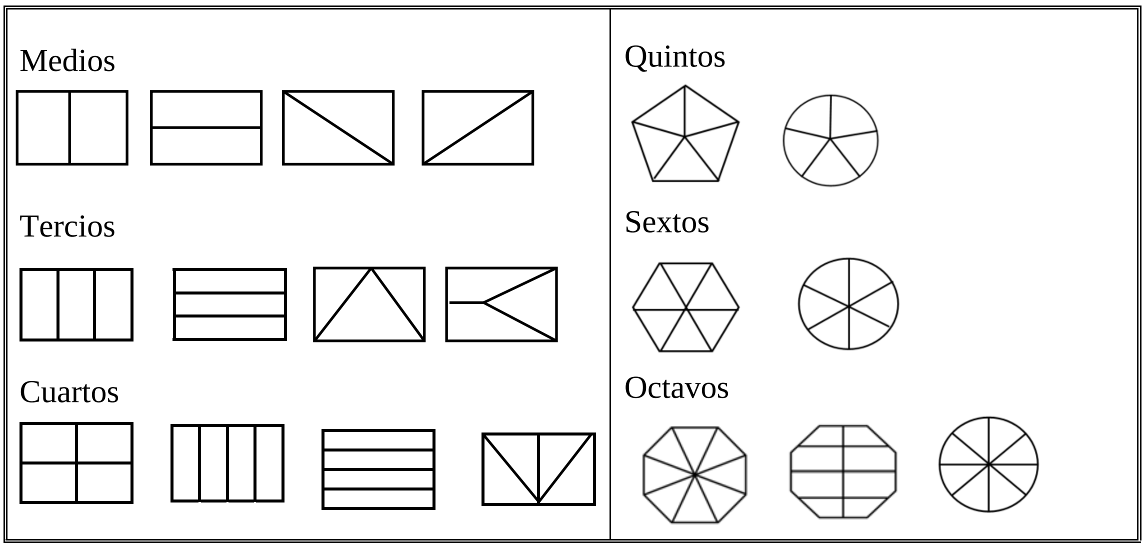
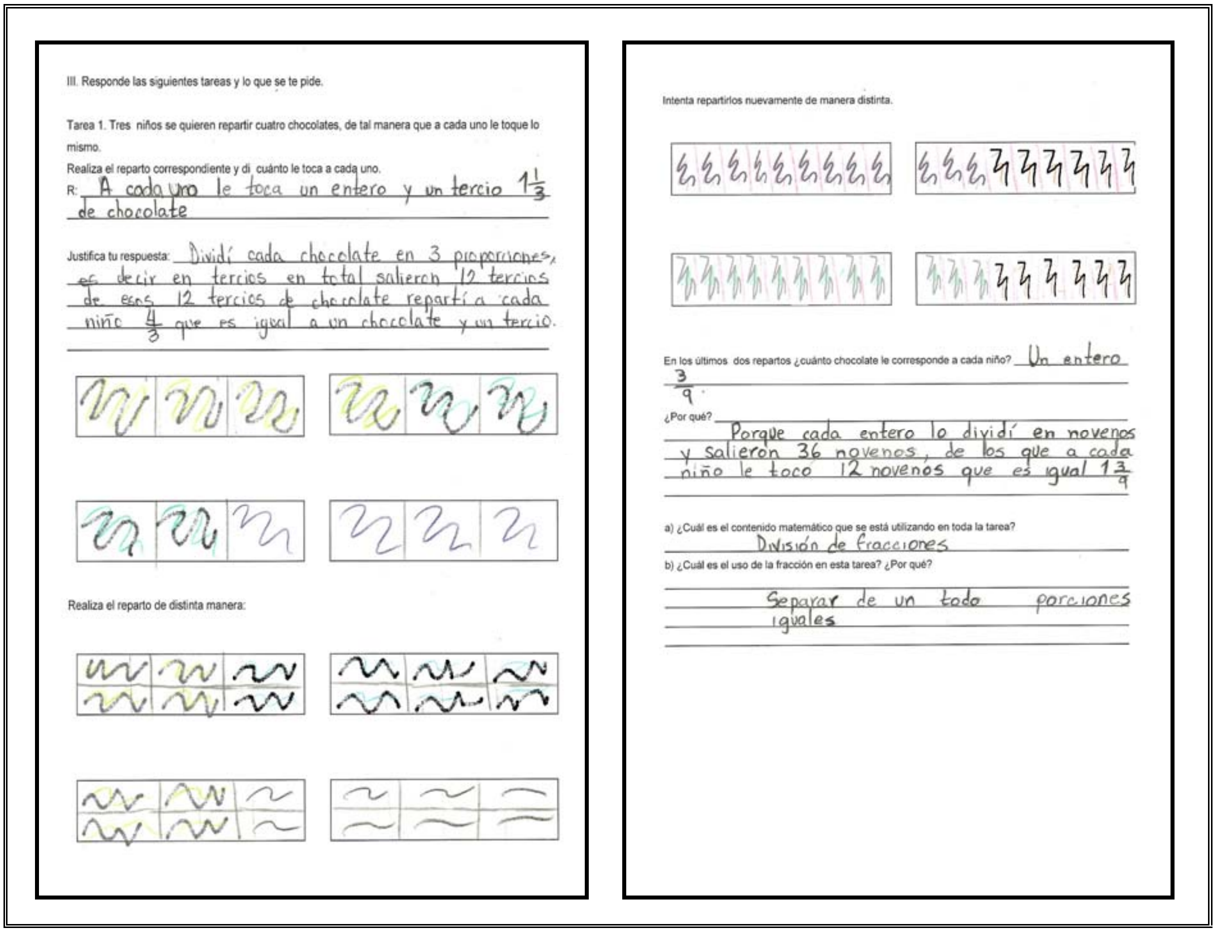


Figura 5.6 Particiones comunes del todo continuo en el caso de Marisol.

Cabe mencionar que sólo realizó una partición en los polígonos regulares para el caso de quintos y sextos; en los octavos realizó una partición errónea al no identificar la congruencia de áreas.

En cuanto a la tarea de reparto del Cuestionario 1, donde se debían repartir cuatro chocolates entre tres niños, ella reparte cada chocolate en tercios, formando una colección de 12 tercios por lo que a cada niño le repartió cuatro tercios e identificó la igualdad entre $4/3 = 1\ 1/3$, donde se observa el uso de la estrategia "*coordinación de un solo artículo*" (Empson, Junk, Domínguez y Turner , 2005), consistente en quecada elemento del todo discreto se divide en un número de piezas igual al número de personas entre quienes se va a repartir, para posteriormente racionar la colección. En la Figura 5.7 se muestra la solución de esta tarea.


III. Responde las siguientes tareas y lo que se te pide.

Tarea 1. Tres niños se quieren repartir cuatro chocolates, de tal manera que a cada uno le toque lo mismo.

Realiza el reparto correspondiente y di cuánto le toca a cada uno.

R: A cada uno le toca un entero y un tercio $1\frac{1}{3}$ de chocolate

Justifica tu respuesta: Dividí cada chocolate en 3 proporciones, es decir en tercios en total salieron 12 tercios de esos 12 tercios de chocolate repartí a cada niño $\frac{4}{3}$ que es igual a un chocolate y un tercio.

Realiza el reparto de distinta manera:

Intenta repartirlos nuevamente de manera distinta.

En los últimos dos repartos ¿cuánto chocolate le corresponde a cada niño? Un entero $\frac{3}{9}$.

¿Por qué? Porque cada entero lo dividí en novenos y salieron 36 novenos, de los que a cada niño le toco 12 novenos que es igual $1\frac{3}{9}$

a) ¿Cuál es el contenido matemático que se está utilizando en toda la tarea?

División de fracciones

b) ¿Cuál es el uso de la fracción en esta tarea? ¿Por qué?

Separar de un todo porciones iguales

Figura 5.7 Solución de Marisol con relación al reparto del Cuestionario 1.

Posteriormente, parte los chocolates en sextos, los cuales reparte a través de colores. En esta solución no escribe con numeral la respuesta, pero emplea la estrategia identificada por nosotros como "**relación equivalente en una misma colección**", donde con base en el primer reparto emplea fracciones equivalentes al partir los tercios en sextos, ampliando la colección a 24/ 6. Por último, reparte en novenos cada chocolate con lo que la colección se convierte en 36/9, los cuales reparte y otorga a cada niño 12/9, identificando la igualdad entre 12/9 = 1 3/9.

En el Cuestionario 2, referente la tarea de reparto (cinco tablillas de chocolates a cuatro ollas de atole), Marisol emplea la estrategia de "partición avanzada" identificada por

Kieren (1983), donde una partición se transforma al añadir otras particiones. En la primera solución parte cada chocolate en doceavos obteniendo así una colección de 60/60, es decir, identifica a cada porción de chocolate como parte de un conjunto, donde todas las piezas son iguales y deben ser repartidas en las cuatro ollas. En nuestra interpretación, Marisol muestra una "lectura mixta" (Valdemoros, 1993) donde identifica primeramente a cada elemento del conjunto como un todo discreto para su partición, para luego recuperar cada "porción" como parte de un todo discreto. En la Figura 5.8 se muestra las soluciones a esta tarea.

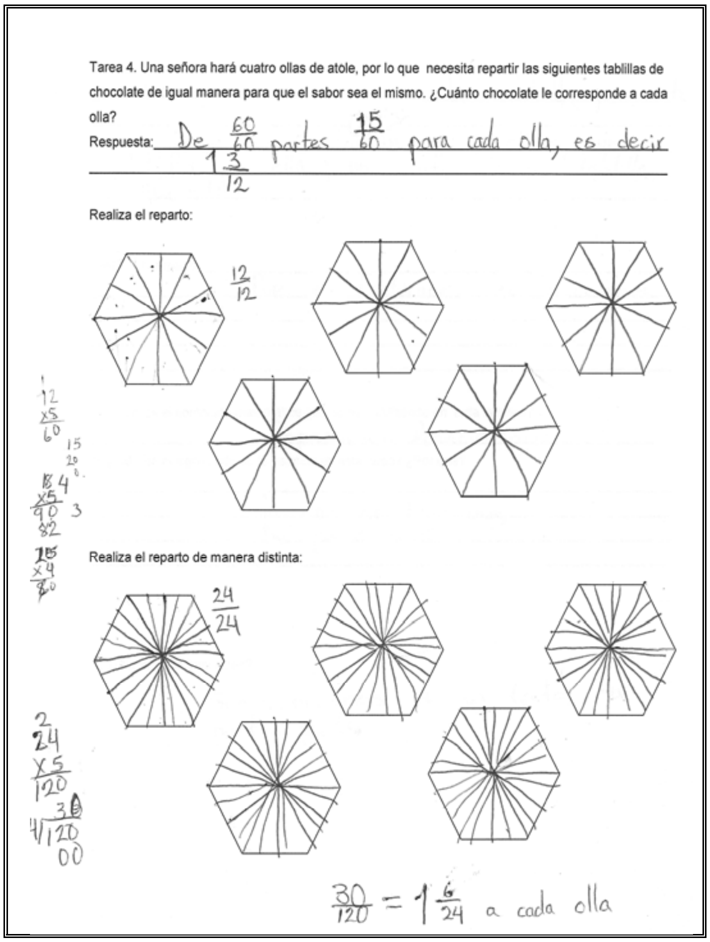


Figura 5.8 Solución de Marisol con relación al reparto del Cuestionario 2.

A través de esta lectura del todo discreto, refiere que 15 partes de 60, 15/60, es la solución a esta tarea, igualando a 1 3/12. Es aquí donde observamos que no identifica con claridad cuál es su unidad de referencia, si el conjunto de 60/60 o el conjunto de cinco chocolates.

Se solicitó que realizara un reparto distinto a la misma tarea, la cual se observa en la Figura 5.8, en dicha solución emplea nuevamente la estrategia “**relación equivalente en una misma colección**”, donde cambió el uso de doceavos de la primera solución a veinticuatroavos, convirtiéndose así el conjunto de cinco chocolates en 120/120 porciones de chocolate. En este apartado de la solución es evidente el uso de algoritmos con números naturales tales como la multiplicación y división (véase Figura 5.8) ya que decide multiplicar las veinticuatro partes de un chocolate por cinco, para posteriormente dividir el resultado entre el número de ollas a repartir, mencionando como solución 30/120 = 1 6/24 a cada olla. Además, emplea la igualdad de la misma manera que en la primera solución a esta tarea.

En la tarea referida a las relaciones parte-todo y parte-parte del Cuestionario 1, donde se solicitó repartir un terrero rectangular en consideración a las siguientes especificaciones:

Un granjero tiene un rancho, el cual decide distribuir de la siguiente manera:

- *La cuarta parte es para las caballerizas.*
- *La mitad de la mitad del rancho es para el establo.*
- *En una cuarta parte de la mitad se encuentra la casa.*
- *El resto del rancho es huerta.*

Marisol resolvió esta tarea de manera errónea, al no identificar correctamente la relación parte-parte, al distribuir cada área (caballerizas, establo, casa y huerta) en partes iguales, asignado un cuarto del terreno a cada lugar del rancho. En la Figura 5.9 se da cuenta de ello.

Cuestionario 1

Figura 5.9 Solución referente a la relación parte-todo y parte-parte del Cuestionario 1.

En la tarea del Cuestionario 2 con referencia a dichas relaciones, la consigna fue:

En un terreno como el siguiente se quiere construir un pequeño kínder; repártelo como se indica y responde:

- *La mitad del terreno y de manera equitativa es para tres salones.*
- *La mitad del resto es para el patio de juegos.*
- *De lo que sobra, las dos terceras partes son para lo sanitarios.*
- *El resto del terreno es para el jardín.*

La solución a esta tarea fue correcta en el reparto y en el empleo de numerales. En la Figura 5.10 se muestra el resultado de Marisol con respecto a las relaciones parte-todo y parte-parte del Cuestionario 2.

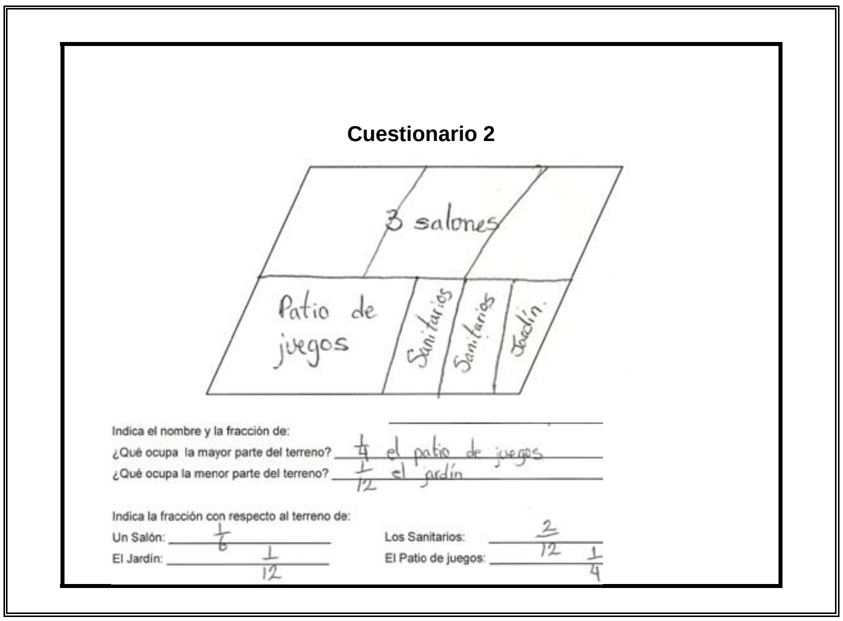


Figura 5.10 Solución referentes a la relación parte-todo y parte-parte en los Cuestionarios 1 y 2.

En sus soluciones se observa el empleo del apoyo gráfico, rectángulo en el Cuestionario 1 y el romboide en el Cuestionario 2. En este último se distingue la partición según las indicaciones solicitadas. Asimismo, se solicitó indicar la fracción respecto al terreno de cada uno de los lugares mencionados: salón, sanitarios, jardín y patio de juegos. Marisol resolvió sin ningún problema debido a que identifica las equivalencias de las fracciones sin externarlas en el papel.

Con el análisis de los resultados de los Cuestionarios 1 y 2 identificamos en el caso de Marisol un cambio en cuanto a los significados de fracción donde la equidivisión está presente como elemento particular de la fracción. Sin embargo, en el caso del todo continuo no distingue a la congruencia, ni la compensación de áreas como apoyo en el reparto.

En cuanto al todo discreto desarrolla la estrategia "**relación equivalente en una misma colección**", la cual se lleva a cabo cuando se parten los elementos de una colección en fracciones equivalentes, ampliando el número de porciones del conjunto que se reparten como elementos de un conjunto con un mayor número de piezas; todo lo anterior apoyándose en la "lectura mixta". Dicha estrategia origina dos resultados correctos, el reparto del conjunto original y el reparto de la colección resultante, sin embargo no son equivalentes numéricamente. Es decir, si la colección consta de 5 elementos a repartir entre 4 y cada elemento es repartido en cuartos surgen dos soluciones: la primera 11/4 , pero si se toma en cuenta cada una de las porciones obtenidas en la partición los cinco elementos originales se convierten en 20 /20 y el reparto de dicho conjunto sería igual a 5/ 20. Esto último deriva de dos interpretaciones distintas de la fracción, esto es, la de fracción como expresión del cociente resultante de un reparto y la segunda, la de la fracción como cuantificación de la relación parte- todo, planteándose entre ellas un cambio de la unidad de referencia.

Resultados de la entrevista y el diseño didáctico

La entrevista, en el caso de Marisol, consistió en la solución de dos tareas en las cuales se identificaron algunas dificultades en los Cuestionarios 1 y 2. Además del diseño didáctico para alumnos de la primaria referente a la equivalencia de fracciones.

La primera tarea consistió en partir cuatro rectángulos y dos círculos en tercios, sextos y octavos, con la consigna de que las particiones fueran distintas entre sí. Recordando los resultados a esta tarea en el Cuestionario 1, Marisol sólo dividió correctamente en tercios dos rectángulos, empleando las estrategias más comunes mientras que los dos rectángulos restantes fueron divididos de manera incorrecta, al tomar en cuenta la congruencia de áreas.

En la entrevista utiliza las mismas estrategias con respecto a los tercios, donde parte de forma horizontal y vertical el rectángulo, tomando en cuenta la equidivisión. Marisol trata de partir un rectángulo más en tercios identificando que no es correcta la solución. En la Figura 5.11 se muestra la solución mencionada anteriormente, precedida de un fragmento de entrevista con respecto al error identificado por Marisol.

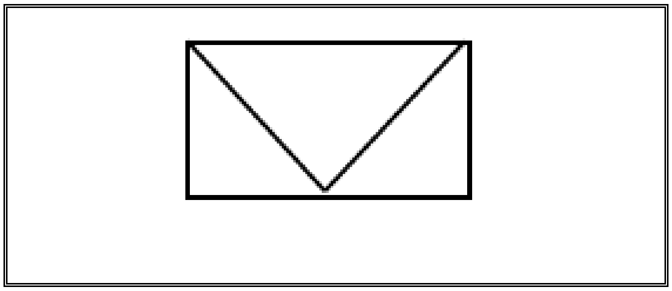


Figura 5.11 Solución de la entrevista referente a la partición del todo continuo.

M: Creo que no es correcta (refiriéndose a su partición***) porque el del medio sería más grande***

E: Entonces, ¿no son iguales?

M: No, porque me saldrían cuatro, o sea, cuartos.

E: En los anteriores si son iguales, ¿por qué?

M: Sí, son iguales porque tienen la misma proporción, pero éste no.

E: ¿Y tú crees que podrías compensar la proporción de triángulo más grande?

M: Podría hacerlo más chiquito , pero no serían iguales….No, no se puede. Mejor borro éste.

Marisol, en cuanto a la partición de todos continuos, no distingue a la compensación de áreas como elemento de la equitatividad; es decir, si las figuras resultantes de la partición no son idénticas, no asevera que existe una fracción. Cabe mencionar que en las tareas de entrevista se solicitó que partiera dos círculos, de distinta manera, en tercios, sextos y octavos, identificó sólo una solución en la partición argumentando que no existe otra manera porque las partes ya no serían iguales.

Referente a la tarea de la relación parte-parte y parte-todo que resolvió de manera incorrecta en el Cuestionario ,1 se le presentó nuevamente en la entrevista. Al leer la tarea observa que hay un rectángulo como apoyo para la partición del terreno por lo que comenta: “*primero voy a dividir el rectángulo que simboliza el rancho*”.

En dicha solución Marisol va leyendo con cuidado y realizando la distribución indicada en la tarea donde se observa que identifica la relación parte-todo y la parte-parte, identificando la fracción de forma verbal y con numeral. A continuación se muestra un fragmento de la entrevista con respecto a esta tarea.

M: Primero parto a la mitad para el establo.

E: Puedes leer nuevamente la consigna para el establo.

M: La mitad de la mitad del rancho es para el establo..¡ahh! entonces es un cuarto. Y la otra cuarta parte es para las caballerizas. Entonces son iguales, tienen la misma proporción (para ella la palabra proporción es sinónimo de porción, de parte).

Una cuarta parte de la mitad es para la casa…… es un octavo. Y un cuarto, que es lo que sobra, es huerta.

E: ¿Te sobra un cuarto de terreno?

M: Ah, no, me sobra un cuarto más un octavo, entonces son tres octavos porque un cuarto tiene dos octavos.

Con respecto a la solución anterior, se le solicitó repartir otro rectángulo donde distribuyera las áreas del rancho de manera distinta a su primera solución. Nuevamente se observó que para ella es fundamental visualizar la igualdad de las partes sin tomar en cuenta la compensación de áreas. En su segunda solución dividió el rectángulo en dos mitades a través de una línea vertical. Posteriormente, mediante el trazo de una diagonal dividió una mitad en dos cuartos, con respecto a todo el terreno, los cuales indicó como áreas de caballerizas y el establo. Pero la mitad siguiente, la cual debía partir en octavos para ubicar la casa y la huerta, la partió empleando líneas horizontales debido a que intentó indicar la partición a través de una diagonal, pero al distinguir que las partes no eran iguales, decidió borrarla sustituyéndola por una partición que le permitiese indicar la igualdad de las partes.

Posterior a la solución de tareas, Marisol desarrolló el diseño didáctico con respecto al contenido a trabajar en la primaria, con un grupo de quinto año. El tema a desarrollar en su diseño didáctico fue fracciones equivalentes. El propósito a desarrollar, comentó, sería que los alumnos comprendan el uso de las fracciones equivalentes. Su primera actividad consistiría en realizar el juego “tripas de gato” en el pizarrón, a través de tarjetas donde los niños identificaran una fracción con su equivalente, para poder unirlas. Esta actividad

Marisol la consideró como su actividad de inicio, sin comentar nada acerca de la finalidad del juego en la clase de matemáticas, por lo que interpretamos que fue para atraer la atención de los niños.

Posteriormente, a cada niño le proporcionaría cinco popotes para emplearlos como regletas, ya que se partiría un popote en tercios, en cuartos, en medios, y en sextos, dejando uno sin partir para que fuese su unidad de referencia. Así, realizarían algunos problemas sencillos con apoyo del fraccionómetro construido con popotes. Mientras que para la actividad de cierre se trabajaría la lección del libro de texto. Para su evaluación realizaría un cuadro de equivalencias donde el alumno identificase qué es equivalente a cuartos a través de una "representación gráfica", es decir, que el alumno demostrase a través de pictogramas dicha equivalencia.

Cabe mencionar que estas actividades Marisol las diseñó para trabajarse en dos sesiones, sin distinguir el término de la primera y el inicio de la segunda. Ella identifica que las clases se deben organizar en inicio, desarrollo y cierre, donde el inicio consiste en una actividad en la que el alumno se interese por el tema, durante el desarrollo se emplea el material concreto y en el cierre se llevan a cabo ejercicios para observar que empleen correctamente lo "aprendido", entendiendo "aprendizaje" como lo que se enseñó. Además de tener presente únicamente la "etapa concreta" a la que se le hizo referencia dentro del aula de la Normal.

La clase desarrollada por Marisol

Para validar nuestro estudio de caso se realizó observación directa de la ejecución del diseño didáctico elaborado en la entrevista precedente. Dicho diseño se llevó a cabo en un grupo de quinto grado de educación primaria.

La primera actividad realizada fue el juego "tripas de gato", consistente en pegar tarjetas en el pizarrón, las cuales contenían un pictograma representando una fracción así como su numeral: 20/10 = 10/5. La actividad permitió visualizar la equivalencia a través de apoyos gráficos; sin embargo, al ser un grupo muy numeroso (30 alumnos de primaria) se perdió el interés del juego debido a la poca posibilidad de participación de todos los alumnos.

Posterior a esta actividad, Marisol pidió que escribieran en su cuaderno la definición de lo que era una fracción equivalente, así que ella dictó lo siguiente:

> *" Las fracciones equivalentes: son aquellas fracciones que tienen el mismo valor aunque se expresen de forma diferente"*

Esta actividad es común para ella debido a que la enseñanza recibida ha tenido ha tenido mucho de tradicional, donde el maestro es quien otorga el conocimiento, la cual fue observado de manera directa e indirectamente a través de las clases de la Normal.

La actividad siguiente consistió en que los alumnos observaran en el pizarrón cómo con ayuda de un fraccionómetro Marisol demostraba la equivalencia entre un medio, dos cuartos, tres sextos, cuatro octavos y cinco décimos. Además de mostrarles la manera "fácil" para identificar fracciones equivalentes empleando algoritmos. Al término de esto les entregó 5 popotes, los cuales se partirían en medios, tercios, cuartos y octavos con la finalidad de que fueran el apoyo concreto para identificar fracciones equivalentes a 1 /4, 2/6, 6/ 8, 1/3, y 3/6. Los alumnos realizaron dicha actividad con un poco de dificultad, ya que los popotes no fueron una buena opción debido a que se revolvían y no distinguían si se trataba de un cuarto o un tercio de popote. Con esto dio por terminada la primera sesión.

La segunda sesión consistió en resolver problemas verbales, con ayuda de pictogramas para que ellos representaran las fracciones empleadas. A continuación se presentan los problemas que Marisol diseñó para su clase referente a la equivalencia de fracciones.

- *Jaime ocupó 1/ 2 pliego de papel para forrar su libro, Pedró usó 2/4 y Andrés 4/8. ¿Quién ocupó más cantidad de papel?*
- *El maestro Oswaldo quiere repartir dos roscas de reyes entre sus seis alumnos. ¿Cuánto le tocará a cada uno?*

Posteriormente, los alumnos elaboraron un cuadro de equivalencias el cual resolvieron mediante el algoritmo empleado para identificar fracciones equivalentes. Cabe mencionar que esta actividad se realizó dentro del aula de la Normal, con los maestros en formación.

A través de la observación realizada consideramos que Marisol emplea sólo los recursos utilizados por ella en el aula de la Normal, con la finalidad de emplear el algoritmo más que crear algún significado de fracción y, por lo tanto, de equivalencia. El recurso empleado fue: el fraccionómetro, el cual ha sido un recurso didáctico empleado desde hace mucho en la escuela primaria el cual permite comparar el tamaño de una fracción con otra; otro recurso empleado fueron los libros de texto los cuales “deben” ser resueltos dentro del aula.

De acuerdo con Martínez (2006) existen concepciones tanto del objeto matemático así como de su enseñanza, entendiendo éstas como producto de la construcción cognitiva a través de **la interacción con la información del entorno** del sujeto, es por ello que observamos que Marisol realiza como estrategia de enseñanza lo que ha practicado en su experiencia como estudiante.

Contraste de los casos de Norma y Marisol

Para llevar a cabo el contraste entre las dos maestras en formación entrevistadas, identificamos los aspectos comunes tanto en sus concepciones, particiones del todo continuo y del todo discreto, así como las relaciones de equivalencia. Además de comparar sus diseños didácticos y el tratamiento de este diseño.

Uno de los rasgos fundamentales para elegir como casos, en la presente investigación, a Norma y Marisol fue que ambas efectuarían práctica referente a fracciones equivalentes en el mismo grado de educación primaria, lo que permitió identificar los elementos didácticos con que cuentan para llevar a cabo la enseñanza e tales números.

En cuanto a las concepciones presentadas en el Cuestionario 1 identificamos que las dos consideran que la fracción sirve para ejemplificar la división entre números naturales. O sea, no distinguen a las fracciones como un conjunto distinto del que conforman los números naturales. Después de recibir enseñanza con respecto a las fracciones en la Escuela Normal, en el Cuestionario 2, ambas evidencian un pequeño cambio en su concepción al identificar a la equidivisión como elemento imprescindible en la concepción de fracción; además de distinguir que las partes resultantes de la división conforman un todo, una unidad. Es decir, comienzan a identificar características propias de las fracciones sin distinguir aún que son un conjunto de números. Este cambio puede atribuirse a que durante las clases recibidas se trabajó con fraccionómetros los cuales permiten observar la equidivisión en fracciones sencillas. No obstante, es desarrollado un concepto de fracción del nivel "*intuitiv*o" (Kieren, 1988) donde el conocimiento se vincula a la imagen, la resolución de problemas consiste en la toma de decisiones basadas en el lenguaje, la acción y la imaginación. Además de no emplear los mecanismos de la fracción como herramienta básica para el desarrollo en la construcción de dicho concepto.

Con respecto a la partición de todos continuos, ambas desarrollan las estrategias más comunes en cuanto a la partición de medios, tercios, cuartos, quintos, sextos y octavos en rectángulos. Sin embargo, no les fue posible partir en tercios, de cuatro maneras distintas, ya que sólo realizaron dos soluciones correctas a este respecto. Esta tarea fue llevada a entrevista para ambas, sin embargo no distinguen a la congruencia de áreas como parte de la equitatividad de la fracción. Esta dificultad la atribuimos a que durante sus clases se desarrolló mucha más sintaxis que semántica de la fracción. Cabe mencionar que con respecto a la partición de polígonos regulares, Marisol no identificó dos estrategias distintas en la partición debido a que ella basa su comparación de igualdad en la observación de las partes de un entero.

Referente al reparto del todo discreto, Norma y Marisol emplean las mismas estrategias; apoyándose en la *lectura mixta* del todo, realizaron particiones avanzadas (Kieren 1983) en cada elemento del conjunto. Con respecto a la unidad de referencia, Norma no la pierde de vista, mientras que Marisol identifica dos soluciones que a nuestro parecer son correctas; una es con respecto al conjunto original de elementos y la otra, al conjunto de partes que surgen a través de la "**relación equivalente en una misma colección**", sin que estos resultados correspondan a fracciones equivalentes porque se han reconocido unidades de referencia distintas.

En cuanto a sus diseños didácticos, las dos desarrollaron un plan de clase donde identifican como propósito el uso de fracciones equivalentes. Pero cada una eligió una secuencia didáctica distinta, donde se observan elementos en común. Entre estos elementos encontramos el uso del fraccionómetro, recurso didáctico empleado por ellas en sus clases de la Normal. Además, el empleo del algoritmo como finalidad de la enseñanza, debido a que su diseño didáctico se encaminó a que el alumno "identificara" la "fórmula" para obtener fracciones equivalentes sin identificar el sentido de porqué 2/5 es equivalente a 2/10. Como podemos observar, existe una fuerte influencia sobre los recursos empleados en la escuela primaria por los propios normalistas así como de las actividades realizadas dentro de su aula de aprendizaje.

En el caso de Norma, dio importancia al empleo de las "tres etapas", trabajadas durante su clase en la Normal sin que se observe una coherencia con el propósito de la lección. Mientras que Marisol le da peso a los momentos didácticos de la clase: inicio, desarrollo y cierre en correspondencia al propósito de la lección. Sin embargo, en ambos diseños y prácticas de enseñanza predomina la ejercitación de la "fórmula", es decir, una vez más la sintaxis prevalece a la semántica.

CONCLUSIONES

Considerando que nuestra investigación ha involucrado diversos aspectos hemos retomado los más relevantes, organizando las conclusiones en tres rubros:

- Las concepciones de los maestros en formación confrontadas con la enseñanza recibida
- Estrategias utilizadas en la solución de los cuestionarios
- Estrategias de enseñanza en su diseño didáctico

Las concepciones de los maestros en formación confrontadas a la enseñanza recibida

El objetivo principal de nuestra investigación tenía como propósito explorar qué es lo que los maestros en formación conocen y qué es lo que aprenden con respecto a las fracciones, como contenido matemático, pero además sobre la didáctica de las mismas.

Para observar esto decidimos aplicar dos cuestionarios, los cuales fueron resueltos en tiempos y con finalidades distintas. El Cuestionario 1 nos permitió indagar acerca del saber que los normalitas evidenciaban antes de recibir enseñanza con respecto a las fracciones, para posteriormente identificar si la instrucción abordada por la Normal promovió algún cambio significativo en sus concepciones, manifiestos en el Cuestionario 2.

Notamos a través de observación directa e indirecta de las clases desarrolladas en el aula de la Normal que la enseñanza impartida a los maestros en formación se dio de modo tradicional, es decir, la asignatura correspondiente a las matemáticas y su enseñanza estuvo encaminada siempre a la resolución de problemas sólo que contenían carga algorítmica. Si bien se trató de dar sentido al procedimiento algorítmico a través de estrategias diseñadas para alumnos de primaria, no identificamos el desarrollo de importantes significados de fracción. Por lo tanto, las concepciones de los maestros en formación no mostraron un cambio considerable con respecto a sus saber previo, pero sí se identificó el desarrollo del concepto de equitatividad como elemento primordial.

Al respecto, retomamos a Martínez (2006), quien comenta la importancia de reconocer las concepciones de los docentes, debido a que son el producto de su construcción cognitiva, siendo además el soporte de la didáctica desarrollada por los maestros; no sólo influyen en el proceso educativo las concepciones de los objetos matemáticos, sino también las concepciones referidas al aprendizaje y la enseñanza de los mismos. Es por ello que nos interesaba sobremanera conocer cómo eran tratadas las fracciones en la escuela Normal.

En cuanto a la didáctica de las matemáticas, la Normal presenta a los maestros en formación tres etapas de intervención: "*concreta*", "*gráfica*" y "*abstracta*". Tales etapas deben llevarse a cabo en ese orden para lograr que los alumnos de la primaria otorguen sentido a los conceptos matemáticos. En el diseño didáctico elaborado por las normalistas que participaron en nuestro estudio de casos, observamos una fuerte influencia en ese aspecto, utilizando los apoyos didácticos abordados dentro del aula de la Normal, además del empleo de los libros de texto de la SEP.

Estrategias utilizadas en la solución de los cuestionarios

En cuanto a las estrategias identificadas con respecto a la partición de todos continuos y discretos encontramos que los maestros en formación emplean diversas estrategias. En el caso de particiones de todos continuos en medios, tercios y octavos de maneras distintas se emplearon estrategias tales como "*la dicotomía*", "*la separación*", "las *particiones avanzadas*", tomando en cuenta la congruencia en las figuras resultantes. Cabe señalar que sus particiones fueron las más comunes, entendiendo esto como las más empleadas en los ejemplos de enseñanza y en libros de texto de educación primaria. Debido al pobre tratamiento de particiones en la enseñanza, con respecto a los tercios encontramos pocas soluciones correctas distintas a los ejemplos comunes (partir de forma vertical y horizontal un rectángulo). Entre las estrategias correctas identificamos la compensación de áreas y la denominada por nosotros como "***equidivisión compleja***" (Carrillo y Valdemoros, 2011) donde se emplea la equivalencia numérica para realizar la partición.

En cuanto a las particiones de quintos, sextos y octavos en figuras tales como cuadrados, polígonos regulares y círculos, encontramos en estos últimos que la mayoría de los maestros en formación identificaron el centro de la figura para así dividir en partes, tomando en cuenta la congruencia de áreas. Asimismo, esta estrategia se empleó en los polígonos regulares. Además, se observaron biparticiones en el caso de sextos y octavos.

Con respecto a los repartos de todos discretos identificamos diversas estrategias de distribución de partes tales como las "particiones mixtas" (Valdemoros, 1993), "*marcar todo*" (Lamon,1996b), "estrategia de coordinación de un solo artículo" desarrollada por Empson, Junk, Dominguez y Turner (2005), reconocida también por Olguín (2009).

En vinculación con las relaciones de equivalencia identificamos que los normalistas emplean dos tipos: "equivalencia con respecto a la unidad", donde a cada entero lo fraccionan para determinar su igualdad; es decir, al repartir cuatro chocolates a tres niños determinan que $1\ 1/3 = 4/3$ debido a que $3/3 + 1/3 = 4/3$. Y, además, la "*relación explícita de equivalencia entre las partes*" donde identifican equivalencias para cada parte, estableciendo que: $4/3 = 8/6 = 1\ 1/3$.

Diseño didáctico de una clase para la educación primaria

La entrevista forma parte importante en nuestra investigación ya que este instrumento metodológico nos permitió desarrollar el estudio de casos, profundizando el reconocimiento de estrategias utilizadas en sus cuestionarios, además de ser el espacio idóneo para la elaboración del diseño didáctico de Norma y Marisol.

A través de la entrevista identificamos que en el caso de la partición no distinguen la equitatividad de la subdivisión del todo en relación a la congruencia de áreas, dando mayor peso a la percepción visual en el reconocimiento de la igualdad de tamaño de las partes.

La entrevista permitió que las maestras en formación, Norma y Marisol, diseñaran sus propias estrategias de enseñanza. Ambos diseños consistieron en dos sesiones; Norma organizó cada sesión desarrollando las etapas "*concreta, gráfica y abstracta*" trabajadas en la Normal y perdiendo de vista el propósito de su clase. En el caso de Marisol, su diseño se organizó en torno al inicio, desarrollo y cierre de la clase donde empleó de manera menos estricta las etapas concreta, gráfica y abstracta.

Los recursos empleados fueron, en ambos casos, los *“fraccionómetros”*. Por su parte, Norma empleó el material recortable del libro de texto, mientras que Marisol elaboró material concreto con los alumnos, utilizando popotes. Es necesario señalar que el recurso empleado se trabajó dentro del aula de la Normal, con la finalidad de llegar a la deducción de la forma algorítmica para obtener fracciones equivalentes. Esto fue desarrollado luego en la clase de la escuela primaria.

Respecto a la evaluación identificamos que las maestras en formación aún no dan importancia a este elemento primordial de la enseñanza; para ellas basta que los niños resuelvan correctamente y por sí solos los ejercicios donde se utilice la "fórmula aprendida” en el terreno de la equivalencia de fracciones.

Conclusiones generales

Dando respuesta a nuestras preguntas de investigación, podemos concluir que:

- Los maestros de primaria en formación no reconocen a los procesos de partición y las relaciones de equivalencia como herramientas básicas en la construcción del número fraccionario.
- En la enseñanza de la Escuela Normal las fracciones son abordadas a través de su sintaxis, sin desarrollar sentido del porqué de los procedimientos algorítmicos y dejando de lado la semántica de las fracciones. Debido a lo anterior, los mecanismos constructivos de dichos números no son tomados en cuenta con la importancia que requieren.

- Las tareas diseñadas por los maestros en formación, respecto a las fracciones, están encaminadas a la resolución de algoritmos empleados con los números naturales. Con relación a los procesos de partición, sólo los utilizan como apoyos en la solución de problemas; lo que no pueden expresar con lenguaje lo ejemplifican con pictogramas. Mientras que las relaciones de equivalencia se desarrollan a través de "formulas" (según sus propias expresiones).

- Los maestros en formación, en sus diseños didácticos para la clase de primaria utilizan las estrategias y recursos abordados en su clase de la Normal, incorporando materiales manipulables y dibujos, para llegar a la aplicación de un algoritmo.

Si bien es cierto que el Plan de la Licenciatura en Educación Primaria con el que se desarrolló esta investigación no está vigente en la actualidad, es necesario recomendar que el estilo de enseñanza que reciban los maestros en formación sea congruente a lo explicitado en los enfoques didácticos de la escuela primaria y al establecido a su plan de estudios, tratando los significados de la fracción con diversidad de actividades donde se comparen soluciones y se realicen conjeturas.

Asimismo, se **sugiere** realizar nuevas investigaciones centradas en los conceptos abordados en la educación básica y las concepciones de los maestros en formación en torno a los conceptos matemáticos y a las estrategias de enseñanza y aprendizaje de los alumnos.

En investigaciones futuras consideramos pertinente analizar la enseñanza impartida a los maestros en formación bajo el enfoque de la reforma actual para implementar un programa de enseñanza donde la semántica de la fracción juegue el papel principal.

Referencias

Anguera, M. T., Arnau, J., Ato, M., Martínez, R., Pascual, J. y Vallejo, G. (1998). *Métodos de investigación en Psicología.* Madrid, España: Síntesis, Pp. 523 - 536.

Bruner, J. (1963). El proceso de la educación. *Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana*. México, D. F.

Bruner, J. S. (1987). *Desarrollo cognitivo y educación.* Madrid, España:Morata, P.p. 45-71

Carrillo, M. y Valdemoros, M. (2009). Aprendizaje y Enseñanza de fracciones que desarrollan los Maestros de Primaria en formación. En G. Buendía y A. Castañeda (Eds) *Memoria de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa.* México: Red-Cimates. Pp . 354 - 366.

Carrillo, M. y Valdemoros , M. (2011). Partición de todos continuos por maestros de primaria en formación. En Lestón, P. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 24. México, D.F: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Pp. 1009 - 1017.

Charles, K. & Nasn, R. (2000). Young children´s partitioning strategies studies in mathematics. *Journal for research in Mathematics Education,*43. Pp. 191 - 221.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla. Pp. 377 - 409.

De León, H. & Fuenlabrada(1997), I. Obstáculos epistemológicos para comprender el significado de cociente de las fracciones: experiencia con profesores. *IV Congreso Nacional de Investigación Educativa,* 1(2). Pp. 268 - 282.

De León, H. (1998). Procedimientos de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática,* 1(2). Pp. 5 - 28.

Empson, S., Junk, D., Dominguez, H. y Turner, E. (2005). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: across- sectional study of children´s thinking. *Educational Studies in Mathematics education,* 63. Pp. 1 - 28.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno, 23,* Pp. 9 - 28.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. D*ordrecht, Holanda: D. Reidel.

Hart, K. (1981). *Fractions, and Children's Understandings of Mathematics*, London: Murray, Pp. 1 - 16.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement*, Columbus, Oh:, ERIC/SMEAC. Pp. 101 - 149.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. En: W. Zwang (Ed), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Boston, E. E. U.U. : Birkhauser. Pp. 506 - 508.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development, En J. Hiebert y M. Behr (Ed), *Number concepts and operations in the middle grades 2*, Reston, E.E.U.U.: National Council of Teachers of Mathematics. Pp. 162 - 181.

Lamon, S. (1996 a). Partitioning and unitizing. *Proceeding of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,*3. Pp. 233 - 239.

Lamon, S. (1996 b). The Developmental of unitizing: its role in children´s partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (2). Pp. 170 - 193.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. En L. Rico y M. Sierra (Eds) *Actas I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. SEIEM: Granada, Pp. 15 - 26.

Mamede , E., Nunes, T., & Bryant, P.(2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. *Proceeding of the 29th Conference of the nternational Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3. Pp. 281 - 288.

Martínez, M. (2006). *Educación Matemática para todos Vol. 1*. México: Comité Regional Norte de Cooperación con La UNESCO. Pp. 54 - 87.

Nérici, I. (1969). *Hacia una didáctica general dinámica.* Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Olguín, M. (2009). Estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas de reparto de fracciones. Tesis de Maestría, no publicada. México: Cinvestav-Matemática. Educativa.

Perera, P. (2009). *Una experiencia de enseñanza experimental de las fracciones en primaria*. Tesis Doctoral, no publicada. México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1966). *The child´s conception of geometry*, London, England: Routledge and Keagan Paul.

Rockwell, E. (1987). *Reflexiones sobre el proceso etnográfico (1982-1985)*. Departamento de Investigaciones educativas. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Secretaría de Educación Pública. (1972). *Matemáticas, Quinto grado, Auxiliar didáctico*. México.

Secretaria de Educación Pública. (1993). *Plan y programas de estudio de educación básica primaria.* México, México.

Secretaría de Educación Pública (1997). *Plan de estudios para la Licenciatura en Educación Primaria*, México, México.

Secretaría de Educación Pública (1998). *Matemáticas y su enseñanza II. Programa y materiales de estudio.* México, México.

Secretaría de Educación Pública (2000). *Matemáticas. Quinto grado.* México, México.

Shulman, L. S. (1986): "Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching". *Educational Researcher*, 15 (2). Pp. 4 - 14.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid, España: Morata

Taylor, S. J. Y Borgan, R. (1984). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Buenos Aires: Paidós.

Taylor S. J. y Bogdan R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. *La búsqueda de significados*. Ed. Paidos, México. Pp. 49 - 99.

Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él*. Tesis Doctoral, no publicada.. México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones. Estudio de caso. En: F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II.* México: Editorial Iberoamericana. Pp. 465 - 481.

Valdemoros, M. y Ruiz, E.F.(2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. En R*evista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 11(1). Pp. 127 - 157.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7(3), Pp. 235 - 256.

APÉNDICE A

CUESTIONARIO 1

En este apartado presentamos el cuestionario que resolvieron los maestros en formación del Tercer Semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, Plan 1997, antes de recibir enseñanza con respecto a las fracciones.

HOJA DE DATOS GENERALES

Fecha: ____

Nombre_______________________________________ **Edad:** _____________

¿Dónde realizó sus estudio su bachillerato?

____

____

¿Tiene otros estudios de Nivel Superior? ¿Cuáles?

____

____

Grados en los que ha practicado enseñanza:

____

____

¿Qué contenidos matemáticos ha trabajado en sus prácticas docentes?

____

____

____

¿Qué libros usa para diseñar una clase de matemáticas?

____

____

¿Cómo han sido sus clases en la Normal acerca de la Enseñanza de las Matemáticas?

____

____

____

¿Qué considera que le hace falta a dicha clase:

____

____

____

I. Responda ampliamente las siguientes preguntas

1. ¿Qué piensa de las fracciones?

____
____
____
____
____
____

2.- ¿Qué conoce de las fracciones?

____
____
____
____
____
____

3.- ¿Cómo le enseñaron fracciones en la escuela primaria?

____
____
____
____
____
____

II. Elabore dos problemas donde las fracciones sean utilizados de manera distinta. Asimismo, resuélvalo de dos formas distintas.

PROBLEMA 1

a) Justifique sus respuestas.

___

___

___

¿Cuál es el contenido matemático que utilizó en la elaboración del problema?

___

___

___

¿Cuál es el uso de la fracción en este problema? ¿Por qué?

___

___

___

III. Parta los siguientes rectángulos en medios, tercios y cuartos, de cuatro maneras distintas.

Medios

Tercios

Cuartos

IV. Responda las siguientes tareas y lo que se le pide.

Tarea 1. Tres niños se quieren repartir cuatro chocolates, de tal manera que a cada uno le toque lo mismo.

Realice el reparto correspondiente y diga cuánto le toca a cada uno.

____

____

Justifique su respuesta: ____

____

____

Realice el reparto de distinta manera

Intente repartirlos nuevamente de manera distinta.

En los últimos dos repartos ¿cuánto chocolate le corresponde a cada niño?

¿Por qué?

a) ¿Cuál es el contenido matemático que se está utilizando en toda la tarea?

b) ¿Cuál es el uso de la fracción en esta tarea?

Tarea 2. Un granjero tiene un rancho el cual decide distribuir de la siguiente manera:

- La cuarta parte es para las caballerizas.
- La mitad de la mitad del rancho es para el establo.
- En una cuarta parte de la mitad se encuentra la casa
- El resto del rancho es huerta.

Indique el nombre y la fracción:

¿Qué ocupa la menor parte del rancho? ____

¿Qué ocupa la mayor parte del rancho? _______________________________________

En los siguientes dibujos marque de manera distinta la distribución del rancho e indique el nombre y la fracción que le corresponde a cada lugar.

Justifique sus repartos: ____

____

____

____

a) ¿Cuál es el contenido matemático que se está utilizando en toda la tarea?

____

____

b) ¿Cuál es el uso de la fracción en esta tarea? ¿Por qué?

____

____

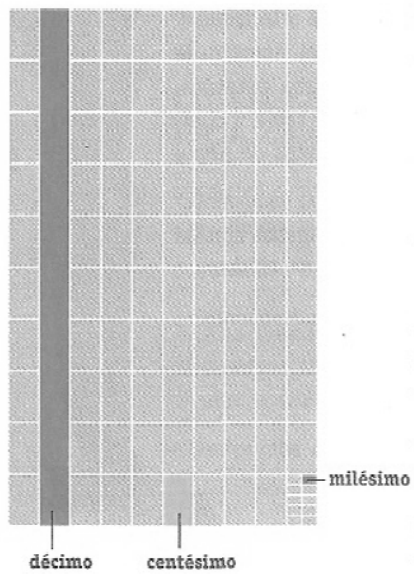
APÉNDICE B

RECURSO EMPLEADO EN LA CLASE DE FRACCIONES EN LA ESCUELA NORMAL

En este apartado presentamos las páginas: 66, 67, 80 y 81 del Libro, para el alumno de primaria, "Matématicas. Quinto grado (2000)", las cuales fueron el recurso didáctico empleado durante una clase referente a las fracciones para los maestros en formación.

LECCIÓN 28 ¿Cuántos centésimos y milésimos?

Tú ya conoces los números decimales desde cuarto año. En esta lección aprenderás algo más sobre ellos.



1. Responde las siguientes preguntas. Si necesitas, apóyate en el rectángulo verde que aparece a la izquierda. Considera que representa una *unidad*.

¿Qué es más grande, un décimo o un centésimo?

____

¿Cuántas veces cabe un centésimo en un décimo?

____

¿Cuántas veces cabe un décimo en la unidad? __________
¿y un centésimo? __________
¿y un milésimo? __________

¿Qué parte de un décimo es un centésimo?

____

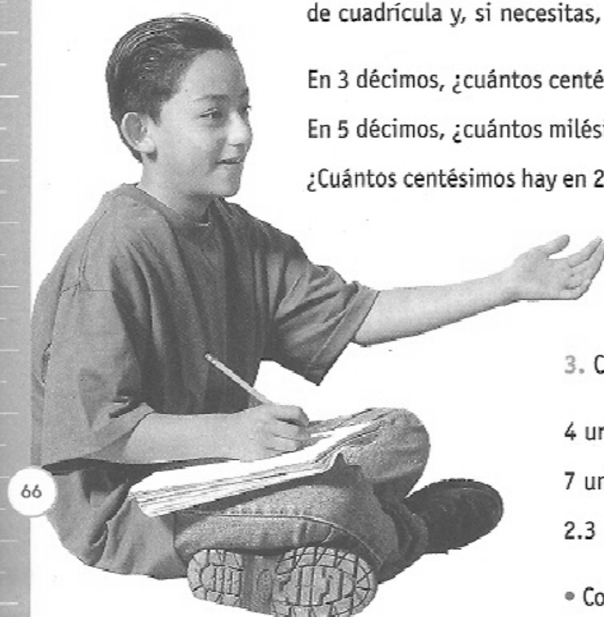
¿Qué parte de un centésimo es un milésimo? __________
¿y de un décimo? __________

2. Responde las siguientes preguntas. Haz varios *rectángulos-unidad* en una hoja de cuadrícula y, si necesitas, apóyate en ellos para obtener las respuestas.

En 3 décimos, ¿cuántos centésimos hay? ________ ¿Y en 4 décimos? ________

En 5 décimos, ¿cuántos milésimos hay? ________ ¿Y en 7 décimos? ________

¿Cuántos centésimos hay en 25 décimos? ________ ¿Y en 30? ________



3. Calcula cuántos décimos hay en...

4 unidades ________ 1 unidad ________

7 unidades ________ 1.5 unidades ________

2.3 unidades ________ 4.4 unidades ________

- Comprueba tus respuestas utilizando tu *rectángulo-unidad*.

4. Calcula cuántos centésimos hacen falta para completar las siguientes cantidades.

5 décimos ____________ 7 décimos ____________ 1 unidad ____________

2 unidades ____________ 3.5 unidades ____________ 8.5 décimos ____________

5. Trabaja con un compañero. Él te dice un número y tú le dices cuántos milésimos hay en ese número. Luego, tú le preguntas y él responde. Haz esto unas cinco veces. Puedes comprobar tus respuestas utilizando tus *rectángulos-unidad*.

6. Junto con tu maestro y tus compañeros, completa el cuadro siguiente.

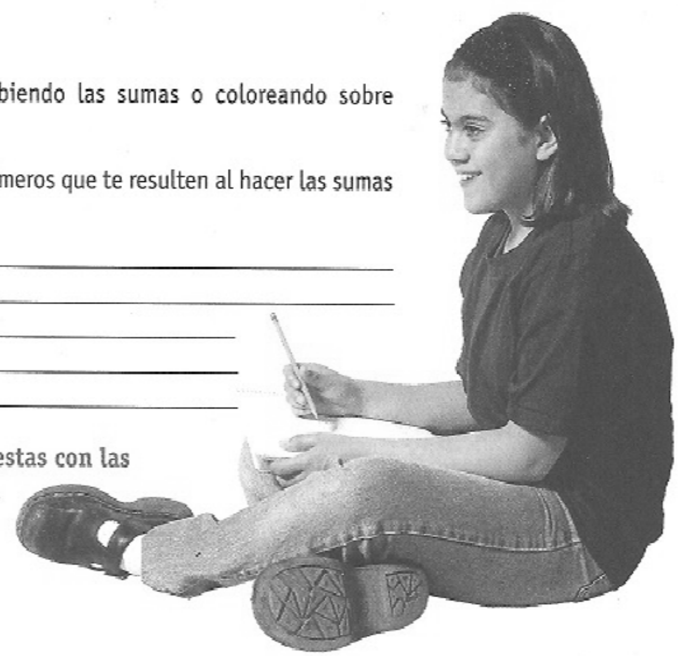
Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades	Décimos		Milésimos
1 x 10 x 10 x 10		1 x 10	1		$\frac{1}{100}$	

7. En cada pareja de sumas, subraya la que creas que tendrá un resultado mayor.

$4 + \frac{30}{100} + \frac{25}{100}$ o $4 + \frac{4}{10} + \frac{20}{100}$

$2 + \frac{25}{100} + \frac{1}{10}$ o $2 + \frac{2}{10} + \frac{45}{100}$

$5 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$ o $5 + \frac{3}{10} + \frac{450}{1000}$



- Comprueba tus resultados, escribiendo las sumas o coloreando sobre un *rectángulo-unidad*.
- Ordena, del menor al mayor, los números que te resulten al hacer las sumas de este ejercicio.

____

____

____

____

____

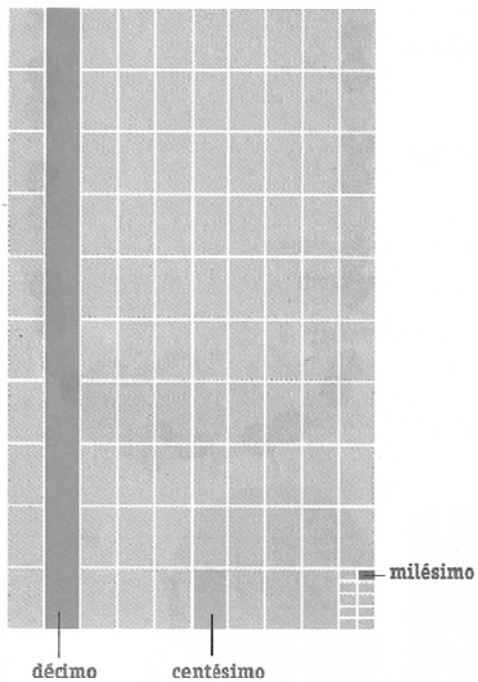
Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

67

Equivalencia entre fracciones con denominador 10, 100 y 1000 y su escritura utilizando el punto decimal

LECCIÓN 35

Más sobre los decimales



En esta lección continuarás aprendiendo sobre los decimales. También necesitarás tus *rectángulos-unidad* que utilizaste en la lección 28.

1. Juan coloreó las cantidades siguientes en sus *rectángulos-unidad*:

$$\frac{75}{100},\ \frac{40}{10}\ \text{y}\ \frac{10}{1000}$$

Paula coloreó lo siguiente:

$$\frac{4000}{1000},\ \frac{10}{10}\ \text{y}\ \frac{10}{1000}$$

¿Quién coloreó más? ______________________

Rosa coloreó esto en sus *rectángulos-unidad*:

$$\frac{1000}{1000},\ \frac{50}{100}\ \text{y}\ \frac{10}{10}$$

Pedro coloreó esto:

$$\frac{500}{1000},\ \frac{10}{10}\ \text{y}\ \frac{100}{100}$$

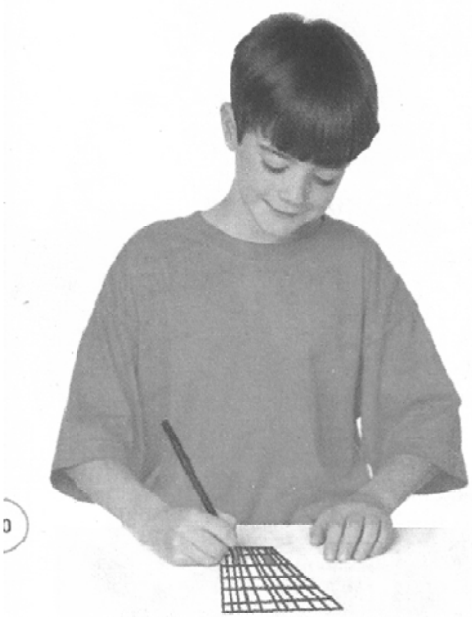
¿Quién coloreó menos? ______________________
¿Cómo lo sabes?

Coméntalo con tus compañeros y tu maestro.

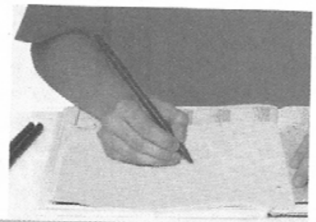
2. José dijo: Yo coloree $\frac{78}{100}$ y $\frac{10}{10}$. Joel dijo: Yo coloree $\frac{80}{100}$, $\frac{2}{10}$ y $\frac{1500}{1000}$.

¿Alguien coloreó más de dos *rectángulos-unidad*? ______________ ¿Quién? ______________

¿Alguien coloreó menos de un *rectángulos-unidad*? ______________ ¿Quién? ______________



- **Representa,** coloreando en tus *rectángulos-unidad,* un número mayor que el que representó José y un número menor que el que representó Joel. Luego escríbelos en tu cuaderno.



3. Une con una línea los números que representan lo mismo.

.50	$1 + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000}$
1.66	$\frac{5}{100}$
1.066	$\frac{5}{10}$
.05	$5 + \frac{5}{1000}$
5.005	$1 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100}$

30. 3	$4 + \frac{40}{1000}$
30.303	$4 + \frac{400}{1000}$
30.03	$30 + \frac{3}{100}$
4.040	$30 + \frac{3}{10}$
4.400	$30 + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}$

4. Completa la primera columna y luego utiliza tu calculadora para llenar la tabla, siguiendo las indicaciones de la columna central.

Tienes	Tecleas	Te resulta
$\frac{7}{100}$	7 ÷ 100 =	0.07
$\frac{12}{10}$	12 ÷ 10 =	
$\frac{8}{1000}$	8 ÷ 1000 =	
$\frac{345}{100}$	345 ÷ 100 =	
	18 ÷ 10 =	
	72 ÷ 10 =	
	144 ÷ 100 =	
	3 ÷ 1000 =	

• ¿Puedes sacar alguna conclusión de este ejercicio?

Coméntalo con tu maestro y tus compañeros.

5. Contesta en tu cuaderno. Para cada pregunta anota, al menos, tres respuestas:
Tienes **0.5** en la pantalla de tu calculadora, ¿qué podrías haber tecleado?
Tienes **3.4** en la pantalla de tu calculadora, ¿qué podrías haber tecleado?
Tienes **0.001** en la pantalla de tu calculadora, ¿qué podrías haber tecleado?

Comenta tus respuestas con tu maestro y tus compañeros.

81

APÉNDICE C

DEFINICIONES DE FRACCIONES EN EL AULA DE LA NORMAL

En este apartado presentamos el cuaderno de notas de una maestra en formación, donde se muestran las definiciones abordadas en la escuela Normal con respecto a las fracciones.

Fracciones Propias

$\frac{a}{b}$ si $a < b$ propia

Fracciones Impropias

$\frac{a}{b}$ si $a \geq b$ impropias

El conjunto de números que se obtiene de la expresión $x = \frac{x}{b}$ (racionales)

Fracciones Mixtas

$N \frac{a}{b}$ Fracciones mixtas.

Fracciones no es partir pastel.

El conjunto de los números racionales contiene a los números enteros, por tal motivo un número entero puede expresar se con un número racional.

Un número racional $8 = \frac{8}{1}$ donde 8 y 1 son enteros números

Proceso de partición

Es la interpretación más común; se refiere al hecho de partir o dividir un entero en partes iguales y utilizar un número de esas partes.

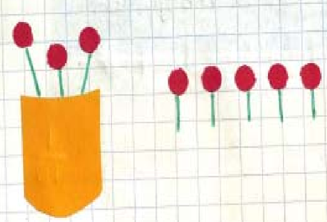
Se partió una naranja en 4 partes y Erik se comió 3

Puede ser Pizza, pastel.

Proceso de extracción

Si se tiene un número de elementos y se va a extraer alguno de ellos, esto se puede expresar como el cociente de dos números naturales.

En un bote había 8 paletas y Araceli sacó 5



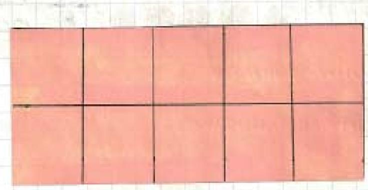
$\frac{5}{8}$ cinco octavos

Proceso de reducción - ampliación

Tiene su aplicación en los dibujos a escala.

Proceso de reducción

Un arquitecto hizo un plano a escala 1:10 es decir su dibujo en

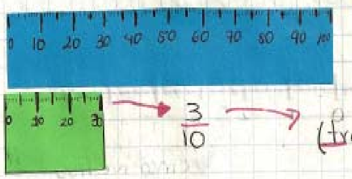


$\frac{1}{10}$

Proceso de medición

Cuando tomamos una unidad para medir una longitud.

La regla mide 3 decimetros de un metro.



$\rightarrow \frac{3}{10} \rightarrow$ (tres décimos)

Proceso de coordinado lineal

El cociente de dos números enteros como coordinado lineal, se refiere a considerar puntos intermedios entre los enteros en la recta numérica.

cinco medios

coordinación lineal.

Medida de la probabilidad de un evento

El cociente de dos números naturales también puede ser interpretado como la probabilidad de que ocurra un evento.
El concepto de probabilidad clasica nos dice que la probabilidad de que suceda un evento es:

$$P = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos}}$$

Dados: La probabilidad de que al lanzar un dado caiga el número 5 en la cara de arriba.

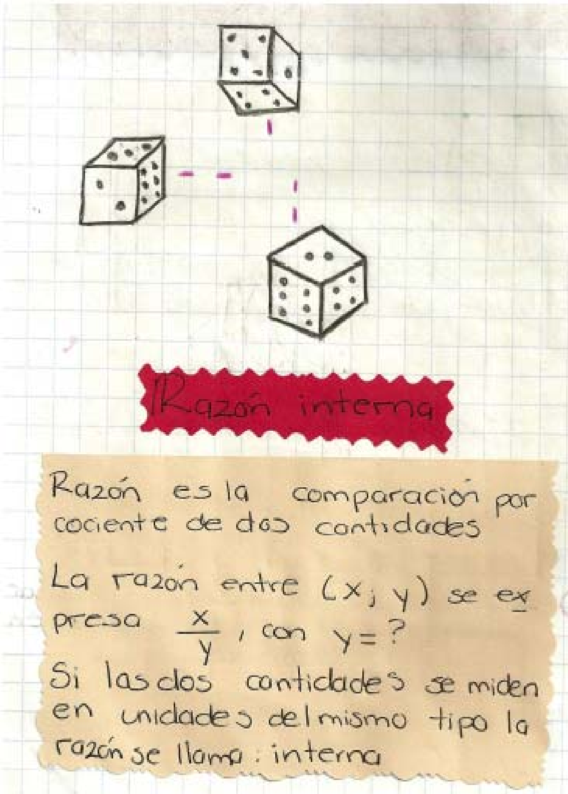
Dado usamos fracciones?

Proceso de coordinado lineal

El cociente de dos números enteros como coordinado lineal, se refiere a considerar puntos intermedios entre los enteros en la recta numérica.

cinco medios

coordinación lineal.

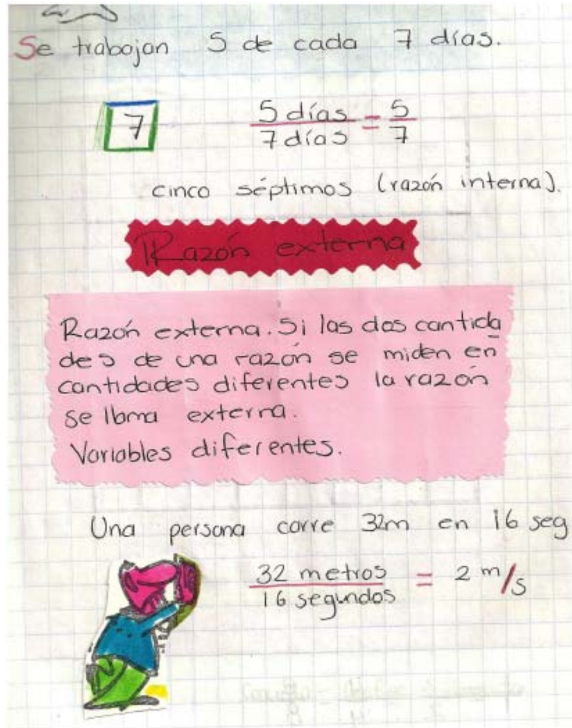


Razón interna

Razón es la comparación por cociente de dos cantidades

La razón entre $(x; y)$ se expresa $\frac{x}{y}$, con $y = ?$

Si las dos cantidades se miden en unidades del mismo tipo la razón se llama: interna



Se trabajan 5 de cada 7 días.

$\boxed{7}$ $\qquad \frac{5 \text{ días}}{7 \text{ días}} = \frac{5}{7}$

cinco séptimos (razón interna).

Razón externa

Razón externa. Si las dos cantidades de una razón se miden en cantidades diferentes la razón se llama externa.

Variables diferentes.

Una persona corre 32m en 16 seg.

$\frac{32 \text{ metros}}{16 \text{ segundos}} = 2\, m/s$

APÉNDICE D

PLAN DE LA NORMAL EN RELACIÓN A LAS FRACCIONES

En este apartado presentamos el Plan interno de Trabajo de la Normal, en el cual se puntualiza el trabajo a realizar con respecto a las fracciones durante el Tercer Semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, 1997.

AFSEDF
ADMINISTRACIÓN FEDERAL DE SERVICIOS EDUCATIVOS EN EL D.F.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
SEP

BENEMÉRITA ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS

SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA

ÁREA DE DOCENCIA

PLANEACIÓN

COLEGIO DE MATEMÁTICAS Y SU ENSEÑANZA

CURSO: MATEMÁTICAS Y SU ENSEÑANZA II

AÑO ESCOLAR 2008 – 2009

SEMESTRE I

BENEMÉRITA
ESC. NAL. DE MTROS.
2008 SEP 5

PROPÓSITOS GENERALES DEL CURSO DE MATEMÁTICAS Y SU ENSEÑANZA II

Los propósitos del curso son que los estudiantes:

a) Adquieran el dominio de los contenidos matemáticos fundamentales de la educación primaria, así como su vinculación con los contenidos de la escuela secundaria, a partir de los problemas y de los contextos en los que cobren significado.

b) Conozcan algunas características relevantes de distintos enfoques didácticos para la enseñanza, el estudio y el aprendizaje de las matemáticas. En particular, las que destacan son la construcción del conocimiento mediante la resolución de problemas.

c) Conozcan y apliquen aspectos propios de los recursos didácticos implicados en los contenidos matemáticos, para analizar situaciones de estudios de los distintos temas considerados en las currícula, en particular las propuestas didácticas contenidas en los materiales que la SEP ha puesto a disposición de los maestros.

d) Conozcan la evolución de ciertas nociones matemáticas en los niños, al interpretar los procedimientos que usan para resolver problemas.

e) Adquieran los conocimientos necesarios para planear y conducir las actividades en un grupo escolar.

CONTENIDOS DEL CURSO

El curso de Matemáticas y su Enseñanza II es continuación del anterior, Matemáticas y su Enseñanza I: con el mismo enfoque. Los contenidos son: medición, números racionales, procesos de cambio, tratamiento de la información, predicción y azar, con los que se abordan los seis ejes temáticos, en los que se organiza el curso de matemáticas de la educación primaria.

EL PAPEL DE LOS ALUMNOS.

Se trata de lograr que los estudiantes desarrollen las habilidades de buscar diferentes estrategias para resolver los problemas propuestos, validar ante sí mismos, para después compararlas y discutirlas con los demás compañeros.

LA ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO.

La teoría didáctica y la experiencia de muchos docentes señalan que aunque el acto de conocer es un hecho individual, el estudio de las matemáticas en el aula, rinde mejores frutos por medio del trabajo grupal. El intercambio de ideas que se produce cuando los alumnos tienen la posibilidad de poner en juego sus propios recursos, sin lugar a dudas, es mucho más formativo que el estilo docente donde el maestro explica y los alumnos simplemente lo escuchan, tratando de comprenderlo. Por supuesto que hay casos en los que es necesario trabajar individualmente.

EL CONOCIMIENTO FUNCIONAL.

El enfoque didáctico actual sugiere que los conocimientos que adquieran los alumnos les sirvan para resolver problemas cada vez más complejos y que además planteen nuevos problemas. Este propósito deja de lado el estilo de conocer que apela fundamentalmente a la memoria.

BLOQUE II

LOS NÚMEROS RACIONALES

28 HORAS (aproximadamente)

PROPÓSITOS

1. Conozcan los diferentes significados que puede tener una fracción, y los problemas que se generan con ellos.
2. Utilicen, adecuadamente, las fracciones comunes y decimales, al comunicar o interpretar cantidades, y al operar con ellas.
3. Reflexionen sobre la estructura algebráica de los números racionales.
4. Conozcan los aspectos relativos a las fracciones y los decimales que se estudian en cada grado de la escuela primaria.
5. Conozcan, prevean y comprendan algunos errores frecuentes que cometen los niños, al trabajar con las fracciones.

TEMAS

- Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas.
- Los decimales como expresiones de medidas.
- Las fracciones como resultado de una división.
- Fracciones decimales como operadores multiplicativos.
- Los contenidos de fracciones comunes y decimales a lo largo de la escuela primaria.
- Dificultades, procesos y errores frecuentes; noción de obstáculos epistemológicos.
- Análisis de situaciones didácticas.
- Sesión de observación y práctica.

ACTIVIDADES DEL BLOQUE II.

Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas	➢ Manejo del fraccionómetro ➢ Doblado de hojas de papel en forma tradicional y no tradicional para obtener partes iguales ➢ Manejo del tangrama desde el punto de vista entero y fraccionario ➢ Manejo de dados. ➢ Manejo del dominó.	Paquete didáctico 2ª parte, páginas 18-27 y 31-52. Hojas de papel tamaño carta, papel cartoncillo, libros de texto de 2° a 6° grado. Libro recortable, libro juega y aprende matemáticas, libros de texto de matemáticas, los resaques, los fraccionómetros, regletas y dominó.
Los decimales como expresiones de medida	➢ Las especificaciones en los paquetes didácticos. ➢ Uso de la cinta métrica. ➢ Uso de la calculadora.	Paquete didáctico 2ª parte, páginas 55 –59 y 63 – 67, cartoncillo, recta numérica, el metro, la regleta, cinta métrica, los bloques multibase, libro recortable.
Las fracciones como resultado de una división	➢ Manejo del tangrama. ➢ Manejo de fraccionómetro. ➢ Manejo de Regletas.	Paquete didáctico 2ª parte, páginas 87-96. Libros de texto de matemáticas de la Escuela Primaria. Tangrama, fraccionómetro y regletas.
Fracciones y decimales como operadores multiplicativos, y su representación en la recta numérica	➢ Las marcadas en el paquete didáctico ➢ Resolución de problemas	Paquete didáctico 2ª parte, páginas 87-96.
Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria	➢ Juegos que se proponen en los materiales de la SEP.	Paquete didáctico 2ª parte, páginas 87-96. Libros de texto de matemáticas de la Escuela Primaria.

Dificultades, procesos y errores frecuentes; noción de obstáculos epistemológicos. (con respecto a las fracciones)	➢ Análisis y reflexión de la lectura "El reparto y las fracciones"	Paquete didáctico 2ª parte lecturas páginas 159-175. Antología elaborada por el Colegio de Matemáticas y su Enseñanza II
Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos de las fracciones.	➢ Localizar y analizar los temas de práctica en los libros de texto	Paquete didáctico 2ª parte páginas 96-97, programa, libro del maestro. Libros de texto, ficheros.
Sesión de observación y práctica en las escuelas primarias.	➢ Informe de la observación de las prácticas en las escuelas primarias.	Libros de texto. Plan y programas.

APÉNDICE E

PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN

A continuación se muestra el listado de Publicaciones, Nacionales e Internacionales, derivadas de esta investigación. Asimismo, se presentan las cartas de aceptación de dichas publicaciones como muestra de que éstas han sido sometidas a un estricto arbitraje, impactando luego en la elaboración de este tesis.

Publicaciones

Nacionales

Carrillo, M. y Valdemoros, M. (2009a). Aprendizaje y Enseñanza de fracciones que desarrollan los Maestros de Primaria en formación. *En Libro de resúmenes, Escuela de Invierno en Matemática Educativa XII.* Tampico, México: Red-Cimates. Pp.167-168.

Carrillo, M. y Valdemoros, M. (2009b). Aprendizaje y Enseñanza de fracciones que desarrollan los Maestros de Primaria en formación. En G. Buendía y A. Castañeda (Eds) *Memoria de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa.* México: Red-Cimates. Pp. 354 -366.

Carrillo, M- y Valdemoros, M. (2010b). Fracciones, partición y equivalencia reconocidas por maestros de primaria en formación. *En Memorias XLIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*. Chiapas, México. Resumen ejecutivo.

Carrillo, M. y Valdemoros, M. (2010c). Fracciones, partición y equivalencia reconocidas por maestros de primaria en formación. *En Memorias XLIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*. Chiapas, México. Comunicación mayor. Pp. 214-215.

Internacionales

Carrillo, M- y Valdemoros, M. (2010a). Equivalencia de fracciones y partición reconocidos por maestros de primaria, en formación. En *Programa y libro de resúmenes. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 24*. Guatemala, Guatemala: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. P. 73.

Carrillo, M- y Valdemoros, M. (2011a). Partición y equivalencia en maestros en formación: el caso de Norma. En *Programa general y resúmenes. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 25.* Camaguey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. P.81.

Carrillo, M. y Valdemoros , M. (2011b). Partición de todos continuos por maestros de primaria en formación. En Lestón, P. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 24. México, D.F: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Pp. 1009 – 1017.

Red Cimates

XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.
23 de Septiembre de 2009.

CONSTANCIA DE ACEPTACIÓN

MARCELA IVETH CARILLO PÉREZ Y DRA. MARTA ELENA VALDEMOROS ÁLVAREZ
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
PRESENTES

Por medio de la presente les notificamos que su propuesta de AVANCE DE INVESTIGACIÓN:

APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE FRACCIONES QUE DESARROLLAN LOS MAESTROS DE PRIMARIA EN FORMACIÓN

ha sido aceptada para presentarse durante las actividades académicas de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa a celebrarse del 13 al 17 de Diciembre en el Instituto Tecnológico de Ciudad Madero en Tamaulipas.

Les sugerimos consultar la página del evento (www.red-cimates.org.mx) a fin de continuar con su proceso de Inscripción y consultar la información actualizada respecto a su presentación y al evento mismo.

Gracias por su participación.

ATENTAMENTE

POR LA COMISIÓN DE EVALUACIÓN DE PONENCIAS DE XII EIME

MIGUEL SOLÍS ESQUINCA
CIMATE - UNACH

SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

México, D. F., 2 de Septiembre de 2010.

Marcela Carrillo
CINVESTAV-IPN

Estimado(a) Marcela Carrillo:

Me es grato informarle, en relación con su solicitud de participación para presentar una ponencia durante el XLIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, a efectuarse del 1 al 5 de noviembre del 2010 en la Universidad Autónoma de Chiapas, en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chis., que su trabajo:

"FRACCIONES, PARTICIÓN Y EQUIVALENCIA RECONOCIDAS POR MAESTROS DE PRIMARIA EN FORMACIÓN"

ha sido aceptado dentro del área Matemática Educativa; de esta forma, su ponencia se ha programado para el Martes 2 de 16:50-17:10 hrs.

Asimismo, aprovecho la presente para realizar las siguientes consideraciones:

1) El Comité Organizador le proporcionará pizarrón y cañón para la exposición de su plática; si necesita algún otro apoyo, le rogamos ponerse en contacto con su coordinador de Área para saber si se está en posibilidad de cumplir con su petición.

2) Es importante mencionar que requerimos del pago oportuno de su cuota de inscripción al Congreso, ya que para la Sociedad Matemática Mexicana, éste representa una de las principales formas de obtener recursos para el óptimo funcionamiento del Congreso.

3) Esta carta de aceptación no es una constancia oficial de participación en el Congreso.

Agradeciendo su colaboración, me despido de usted aprovechando la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente,

Dr. Isidoro Gitler
Presidente

TELEFONO 56 22 44 81/82 | FAX 56 22 44 79 | E-MAIL smm@smm.org.mx

Guatemala, 3 de mayo de 2010

Estimadas Marcela Iveth Carrillo Pérez y Marta Elena Valdemoros Álvarez

Es para el *Comité Organizador* de la *Vigésimo Cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, RELME 24, un gusto comunicarle que su propuesta:

Equivalencia de fracciones y partición reconocidas por maestros de primaria, en formación

ha sido aceptada para ser presentada como **reporte de investigación** en dicha reunión a que se llevará a cabo del **5 al 9 de julio** en la Universidad Galileo, Ciudad de Guatemala.

Estamos seguros de que su participación contribuirá al desarrollo de un evento de calidad, que fortalezca nuestra identidad latinoamericana en el ámbito de la Matemática Educativa.

Para fines organizativos, solicitamos confirmar su asistencia antes del **15 de mayo** enviando un mensaje a: claudialaragalorelme@gmail.com

Por otro lado, por favor tramite y complete su inscripción lo antes posible.

En espera de su participación, enviamos un cordial saludo,

Dra. *Cecilia Crespo Crespo*
Presidenta Comité Latinoamericano de Matemática Educativa - *Clame*
presidencia@clame.org.mx
crccrespo@gmail.com

Licda. *Claudia María Lara Galo M.A.*
Comité organizador - Relme 24
claudialaragalorelme@gmail.com
claudialaragalo@gmail.com

relme 25 Cuba 2011 — Vigésimo Quinta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

07 de Mayo de 2011

Estimadas Marcela Iveth Carrillo Pérez y Marta Elena Valdemoros Álvarez

Distinguidas colegas:

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) organiza la Vigésima Quinta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa **RELME 25**, a llevarse a cabo en la Ciudad de Camagüey, Cuba del 11 al 15 de julio del presente año, siendo responsable de su sede la Universidad de Camagüey.

El comité organizador de la **RELME 25** tiene el placer comunicarles la aceptación del Reporte de investigación

Partición y equivalencia en maestros en formación: El caso de Norma

La RELME funciona como una exitosa expresión de autogestión de una organización social, el CLAME, razón por la que le solicitamos su autofinanciamiento para participar en RELME 25, así como para el traslado y hospedaje en la ciudad de Camagüey.

Esperando poder contar con su participación, le expresamos nuestros agradecimientos y consideración.

Muy atentamente

Clame — Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ra. Olga Lidia Pérez González
ecretaria del CLAME
liembro de la comisión organizadora
ternacional

Dra. Milagros Gutiérrez Álvarez
Presidenta Comité Organizador Local

Dr. Ramón Blanco Sánchez
Presidente del Comité Académico

Clame

Buenos Aires, 01 de junio de 2011

Marcela Carrillo y
Marta Valdemoros

Estimadas colegas,

Por la presente nos complace comunicar que su trabajo:

"Particiones de todos continuos elaboradas por maestros de primaria en formación"

ha sido aceptado para la publicación en el ALME 24 (Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, volumen 24), correspondiente al año 2011, publicación anual del CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, www.clame.org.mx).

Atentamente,

Dra. Patricia Lestón
Comité de Edición de ALME 24