Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

"De lo intuitivo a lo formal: La transición del cálculo al análisis"

TESIS

Que presenta:

WENDY XIOMARA CHAVARRÍA GARZA

Para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de tesis:

DR. LUIS ENRIQUE MORENO ARMELLA

Ciudad de México, México 4 de diciembre del 2018

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el Apoyo económico proporcionado para la realización de mis estudios de maestría que culminan con el presente trabajo de tesis de grado.

CVU: 783241

Resumen

La tesis aquí presentada nos muestra una investigación acerca de la transición que enfrentan los estudiantes del cálculo al análisis matemático, dejando en evidencia las dificultades que atraviesan los estudiantes al dejar de lado las ideas intuitivas y buscar la formalización de los conceptos. Los cuestionarios y exámenes fueron aplicados en estudiantes de maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Los datos obtenidos fueron analizados de manera descriptiva, creando categorías que consideramos relevantes para expresar de manera clara los resultados.

Abstract

The thesis presented here shows us an investigation about the transition that students face from the calculus to the mathematical analysis, leaving in evidence the difficulties that the students cross when leaving aside the intuitive ideas and looking for the formalization of concepts. The questionnaires and exams were applied to students of a master's degree in science with a specialty in educational mathematics from the *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*. The data obtained were analyzed in a descriptive way, creating categories that we consider relevant to clearly express the results.

Contenido

Introducción. 1
Capítulo 1 4
1.1 De las áreas a las órbitas planetarias 4
1.2 El cálculo como aparato simbólico del infinito 11
1.3 Cauchy: nueva reorganización conceptual 20
1.4 La aritmetización de las matemáticas. 25
Capítulo 2 30
2.1 La cognición humana 30
2.2 Carácter simbólico de la cognición matemática 37
2.3 El traslado del mundo material al mundo simbólico 39
2.4 El mundo de las matemáticas 41
2.5 La intuición del cálculo 43
2.6 Guiados por la intuición. 45
2.7 Rompimiento de la intuición 48
Capítulo 3 60
3.1 Aspectos metodológicos 60
3.1.1 Población. 60
3.1.2 Escenario. 61
3.1.3 Instrumentos de recolección de datos. 62
3.2 Evidencias, interpretación y resultados. 66
Capítulo 4 83
4.1 El cálculo y el análisis 83
4.2 Herencia matemática 85
4.2 Ideas finales 87
Referencias 89

Tabla de Ilustraciones.

Ilustración 1. Trayectoria Planetaria 4
Ilustración 2. Traslación del planeta 5
Ilustración 3. Órbita planetaria 5
Ilustración 4. Variación y acumulación 7
Ilustración 5. Aproximación por agotamiento 10
Ilustración 6. Cuerda Tensada 16
Ilustración 7. Recta tangente 31
Ilustración 8. Área bajo la curva 32
Ilustración 9. Traslado de punto P 37
Ilustración 10. Esto no es una pipa (René Magritte) 40
Ilustración 11. Logaritmo 45
Ilustración 12. Continuidad 48
Ilustración 13. Intuición de Recta dentro de triángulo 50
Ilustración 14. Escalera del Diablo 50
Ilustración 15. Segmentos conmensurables e inconmensurables 51
Ilustración 16. Gráfica recta tangente 52
Ilustración 17. Ejemplo de recta tangente 53
Ilustración 18. Gráfica Sen (1/x) 54
Ilustración 19. Conjunto de Cantor 55
Ilustración 20. Gráfica de para calcular integral 56
Ilustración 21. figura von Koch 58
Ilustración 22. Limite de figura de von Koch 59
Ilustración 23. Triangulo von Koch 59
Ilustración 24. Sucesión en triángulo 63
Ilustración 25. Estudiante I 66
Ilustración 26. Estudiante B 68
Ilustración 27. Estudiante B (2) 68
Ilustración 28. Estudiante I (2) 69
Ilustración 29. Estudiante B (3) 70

Ilustración 30. Estudiante B (4) 71
Ilustración 31. Estudiante B (5) 72
Ilustración 32. Estudiante G 72
Ilustración 33. Estudiante G (2) 73
Ilustración 34. Estudiante G (3) 74
Ilustración 35. Estudiante A 75
Ilustración 36. Estudiante G (4) 76
Ilustración 37. Estudiante D 76
Ilustración 38, Estudiante D (2) 77
Ilustración 39. Estudiante F. 78
Ilustración 40. Estudiante I (3) 78
Ilustración 41. Estudiante D 79
Ilustración 42 Estudiante I (4) 80

Introducción.

Durante muchos años hemos visto las dificultades que enfrentan los estudiantes para la resolución de problemas del cálculo, mismas que se les presentan en su transición hacia el análisis matemático. Este problema ha sido generado al tratar de comprender el cálculo como una versión adelgazada del análisis.

La conexión tan cercana que existe entre ambos, combinada con la a veces indetectable diferencia o transición del uno al otro, nos lleva al problema en cuestión; por lo cual es necesario tratar de definirlos de manera que podamos proponer caminos que consideramos para obtener una favorable transición entre ambas disciplinas, entendiendo dicha transición como la comprensión favorable de los conceptos claves entre ambas disciplinas, lo que les permitirá una apropiación favorable del conocimiento.

Para abordar esto, comenzaremos definiendo la epistemología de una disciplina como el estudio o análisis de los objetos propios de estudio y la definición de los métodos de validación (cómo justificamos las afirmaciones que formulamos sobre ellos). Al ser por naturaleza diferentes disciplinas, es lógico que las epistemologías del cálculo y el análisis sean diferentes.

Estas epistemologías se transforman a través del tiempo, ya que los criterios de validación se transforman de acuerdo con su entorno, esto no quiere decir que lo actual invalida lo que se ha hecho previamente, sino que lo entrelaza.

Los criterios de validación van impregnados de cada una de las culturas que han adherido aportaciones importantes para las matemáticas, las notaciones que actualmente utilizamos son resultado de años de cultura en el desarrollo de la materia.

Estas transformaciones nos generan nuevos aprendizajes, pero también acarrea dificultades, por lo cual haremos un recorrido a lo largo de la historia de las matemáticas, sin tomar un punto de vista de historiados, enfocándonos en la herencia que hemos recibido de todas estas transformaciones.

Diferentes autores se han enfocado en el estudio de estas disciplinas. Entre ellos Kidron (2014) quien explica que las dificultades en el cálculo son debido a errores en la comprensión de conceptos clave como lo son funciones, límite, tangente, derivada e integral. Atribuyendo estas dificultades al hecho de que las nociones les fueron presentadas de manera informal, se podría esperar que esas desaparecieran cuando los estudiantes aprendieran la definición formal de los conceptos; sin embargo, en la mayoría de los casos la idea intuitiva del estudiante entra en conflicto con la definición formal del concepto, como ocurre con la noción de límite, la cual utilizaremos como eje central de nuestra investigación.

Es aquí donde justificamos la importancia del traslado entre la intuición y un razonamiento formal. El pensamiento intuitivo, las intuiciones visuales y las descripciones verbales del concepto límite que preceden a su definición son necesarias para comprender el concepto. Lamentablemente como Kidron lo menciona existe una brecha entre la definición matemática del concepto límite y la forma en que uno lo percibe.

Tall y Vinner (1981) estudian esta misma problemática, etiquetando bajo otros nombres la misma idea, expresando que la imagen conceptual (concept image) difiere de la teoría formal y contiene factores que causan conflicto. Definiendo la imagen conceptual como toda la estructura cognitiva en la mente del individuo que está asociada con un concepto dado. Esto puede no ser globalmente coherente y puede tener aspectos que son bastante diferentes de la definición del concepto (concept definition).

Kidron afirma que los problemas en el aprendizaje del cálculo que están relacionados con procesos infinitos y la comprensión del concepto de límite pueden ser una consecuencia de la intuición que tienen los alumnos sobre el infinito.

Resaltando que la visión del proceso dinámico de los estudiantes en relación con conceptos tales como el límite y las sumas infinitas ayudan a los investigadores a comprender las dificultades cognitivas que acompañan el aprendizaje del concepto de límite.

En este texto nos enfocaremos en convergencia de sucesiones y series para comprender un poco más de las dificultades que enfrentan los estudiantes al tratar con el infinito y procesos infinitos, dejando en evidencia para nosotros los puntos en los cuales debemos enfocarnos y combatir cada una de estas problemáticas.

Capítulo 1

1.1 De las áreas a las órbitas planetarias

En el trabajo de Euler se puede apreciar una profunda transformación apoyado en el paso de la geometría (como sustrato del estudio de la variación y acumulación) al estudio basado en el campo algebraico, cuyo resultado más importante nos lleva a la obra de Newton.

La línea de argumentación de Newton en su obra Principia Matemática puede ser entendida como una "geometría dinámica". Al explicar que la trayectoria de un planeta es una elipse, el punto central de su argumentación es el siguiente: si el planeta no estuviera sometido a la fuerza de atracción del sol, su trayectoria sería una recta sobre la que se desplazaría a velocidad constante de acuerdo con el principio de inercia enunciado por Galileo. Pero imaginemos, siguiendo a Newton, que en el instante cuando el planeta se encuentra en el punto P sufre un "jalón gravitacional" hacia el sol. Entonces, la trayectoria a partir de P se desvía (ley del paralelogramo) hacia Q.

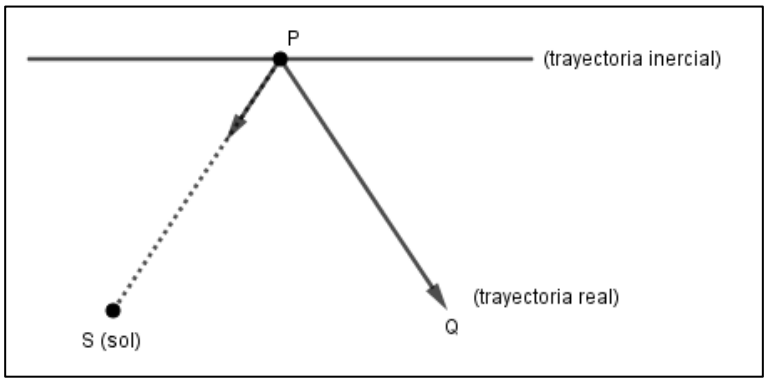


Ilustración 1. Trayectoria Planetaria

Si estos "jalones gravitacionales" ocurren cada cierto tiempo, la órbita del planeta alrededor del sol tiene una firma poligonal P-Q-R-T-... como se ilustra a continuación.

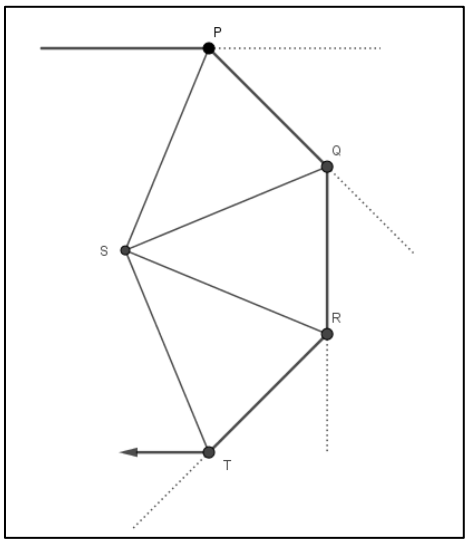


Ilustración 2. Traslación del planeta

Como el planeta no "se escapa" del sol, que sigue ejerciendo una atracción sobre el planeta cada cierto tiempo (en los puntos P-Q-R- esa "orbita" poligonal se cierra alrededor de S (el sol)).

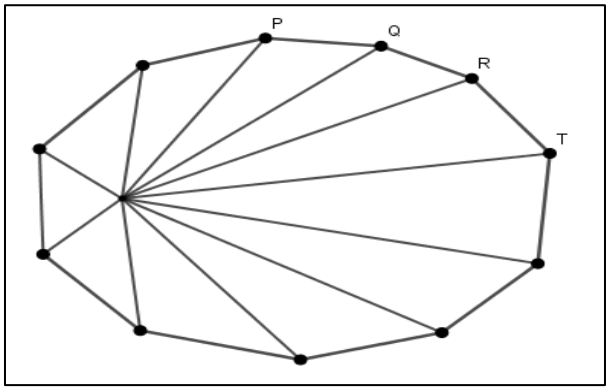


Ilustración 3. Órbita planetaria

Pero la órbita no es una poligonal. Entonces, ¿cómo pasar de este modelo poligonal a la órbita elíptica? La respuesta de Newton, en esencia, es la siguiente: en lugar de que haya una sucesión discreta de momentos en los que se producen los "jalones gravitacionales", se pasa a una fuerza de atracción hacia el sol que actúa continuamente sobre el planeta. Después hay que aplicar un conocimiento profundo de geometría (euclidiana) para llegar a la conclusión de que la órbita es

elíptica. Lo que aquí se quiere resaltar es que el marco conceptual newtoniano incorpora una especie de geometría euclidiana dinámica y la noción que dice que una curva se obtiene como límite de una sucesión de poligonales. Por ejemplo, la circunferencia se obtiene inscribiendo en ella polígonos con un número creciente de lados.

El marco euclidiano lleva a Newton a validar sus resultados como si fuesen un capítulo o un nuevo libro añadido a los trece libros de los Elementos de Euclides. El espacio se sigue concibiendo como euclidiano, pero ahora el movimiento se torna una componente fundamental de la representación del espacio.

Basta revisar solamente varios textos newtonianos para comprender que, a parte del marco euclidiano de sus Principia, él dedicó esfuerzos considerables al álgebra. Tal vez el teorema del binomio (para exponentes racionales) sea su resultado más importante. Por ejemplo, la expresión funcional $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ puede desarrollarse como una serie de potencias (Edwards, 1979). En general, Newton pudo establecer que $(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \cdots = \left[\sum_{(n=1)}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\right] + 1$ donde los coeficientes $\binom{\alpha}{n}$ se definen como

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Nos parece que el esfuerzo de Newton iba orientado a expresar las funciones con las que trabajaba el cálculo, como series de potencias. De esa manera, la derivada y la integral podrían obtenerse a partir de $(x^n)' = nx^{n-1}$ y $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ que ya eran conocidas. Ese método, por analogía plausible con lo que podía hacerse con un polinomio se sitúa como un antecedente de la forma de trabajar en la que nos sorprende Euler más adelante.

Como hemos mencionado no es este el lugar para una reconstrucción histórica del cálculo. Hemos querido señalar a través de algunas ideas básicas de Newton y Euler, un camino que parece según el desarrollo del cálculo: hay una primera fase que podemos denominar intuitiva que corresponde a un estado

organizado a partir de nuestras ideas sensoriomotoras. Por ejemplo, los cálculos de tangentes y áreas bajo curvas que preceden al trabajo de Newton y Leibniz.

Después, hay un estado formal donde los algoritmos se desarrollan y con ellas se exploran (mediante los recursos simbólicos) resultados que van más allá de los directamente conectados con nuestras percepciones. Demos un ejemplo de lo que intentamos establecer con estas ideas.

Las figuras emblemáticas de esa fase que hemos denominado intuitiva son:

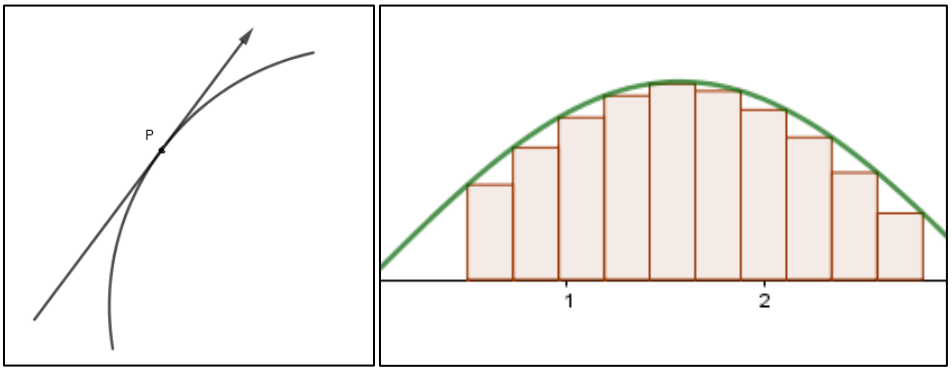


Ilustración 4. Variación y acumulación

Los cálculos de Newton con la serie binomial y los de Euler que hemos presentado en páginas anteriores, ilustran la fase formal. Esta fase revela una independencia relativa con respecto a esas intuiciones originales. Esto lo podemos observar, por ejemplo, en la solución de Euler al llamado "problema de Basilea" que consiste en hallar el valor numérico de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ya se sabía que esta serie era convergente cuando los Bernoulli intentaron infructuosamente hallar el valor numérico correspondiente. Euler trabajó con este problema entre 1735 y 1741. En esencia, su método consistió, primero, en expresar $\frac{sen\, x}{x}$ como una serie de potencias concebida como un polinomio de grado infinito:

$$(1) \quad \frac{sen(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Razonando por analogía, Euler "factoriza" este polinomio cuyas raíces son $\pm n\pi \quad n = 1,2,3 \ldots$ Queda entonces

$$(2)\quad \frac{sen(x)}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)x \ldots.$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)x^2 + \left(\frac{1}{9\pi^4}+\frac{1}{36\pi^4}+\cdots\right)x^4 + \cdots$$

Igualando los coeficientes de x^2 en (1) y (2) se obtiene que

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots$$

Esto es,

$$\frac{\pi^2}{6} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

La solución al Problema de Basilea trajo, para Euler, un amplio reconocimiento. Había procedido con una audacia inesperada y él mismo estaba consiente del larguísimo salto que había dado al tratar la serie de potencias de $\frac{sen\,x}{x}$ como un polinomio. Seguramente por eso dedicó esfuerzos adicionales prolongados a elaborar una base de sustentación para su solución. Nos interesa señalar aquí, que la manera de concebir entonces (mediados del siglo XVIII) las series infinitas era esencialmente distinta a la manera que se consolidaría durante el siguiente siglo. Para Euler, quien dejó su testimonio en su célebre obra Introductio in analysin infinitorum (1748) el tema era el estudio de una especia de álgebra del infinito, esta publicación sorprende por la ausencia de integrales.

Esta obra llevó hasta sus límites el razonamiento por analogía, sin embargo, las transformaciones posteriores de todo el andamiaje matemático no implicaron el abandono de esta manera de razonar.

Con cierta frecuencia suele pensarse que la presencia, más reciente, del ideal euclidiano de justificación deductiva ha logrado reemplazar aquellos razonamientos “descuidados” como el que acabamos de describir como el Problema de Basilea. Sin duda la exigencia de rigor trae apoyada una mayor claridad lógica. Sin embargo, como enfatiza Klein (1896) en su artículo, la intuición “tiene su provincia” en el territorio matemático. Esa tensión que se siente en el salón de clases entre lo puramente lógico (deductivo y estructurado) y los razonamientos

informales apoyados en la intuición, está en el núcleo de los problemas cognitivos que enfrentan los estudiantes cuando se les presenta el análisis matemático y su experiencia previa la constituye el cálculo.

Adelantándonos un poco a lo que argumentaremos más adelante, sostendremos que esa especie de "foso cognitivo" que se abre para los estudiantes al pasar del cálculo al análisis (cambio conceptual) tiene diversos orígenes. Uno de ellos tiene que ver con el hecho que el análisis matemático posee una organización conceptual muy distinta a la del cálculo (a pesar de que al ver los índices de un libro de cálculo coinciden con los de un texto de análisis). No solo se trata de una organización vista superficialmente, sino que corresponde a la naturaleza tanto de los "objetos" matemáticos en una y otra disciplina como a los procesos a los que son sometidos dichos objetos. De este doble juego de procesos y objetos dependen en gran medida, los criterios de validación que rijan en cada campo de exploración.

Lo que hemos presentado de Newton y Euler (aunque haya sido someramente) arroja un poco de luz sobre una parte importante de la dinámica de desarrollo del cálculo. Durante la primera parte del siglo XVII en manos de Fermat, Cavalieri, Wallis y otros, se pasó de los problemas de tangentes y áreas a una parte más algebraica. En ambas Newton fue pionero. Como hemos explicado previamente, al contexto geométrico lo convirtió en un contexto dinámico tornando entonces la geometría en un instrumento para modelar el sistema solar. De este modo logró una geometrización dinámica del espacio. Por otra parte, su trabajo sobre el binomio abrió la puerta a la transformación de funciones en series de potencias. Esas series de potencias fueron vistas por Euler como "polinomios de grados infinitos" y campo fértil para sus estrategias por analogía, que G. Pólya ha denominado "*razonamiento plausible*". En síntesis: el cálculo pasó de ser estudiado en contexto geométrico a ser estudiado a través de representaciones algebraicas… con consecuencias enormes.

Aparte de Newton, otros pensadores imaginaron una curva suave como un polígono con una infinidad de lados infinitesimales. Esta idea también fue reconocida como central en la obra del Marqués de L'Hopital de 1696 (los Principia

de Newton aparecieron en 1687) sobre el cálculo. Esta manera de concebir una curva suave (es decir, que tiene recta tangente en todos sus puntos) permitía imaginar una circunferencia como el límite de una sucesión de polígonos inscritos con cada vez mayor número de lados.

En el caso de la circunferencia, esa suposición (límite de polígonos inscritos) permite calcular con la precisión deseable, el área encerrada por dicha circunferencia.

Tal vez no corresponda a una narración histórica precisa, pero la génesis de una trayectoria didáctica podría estar en lo que sugieren las siguientes figuras:

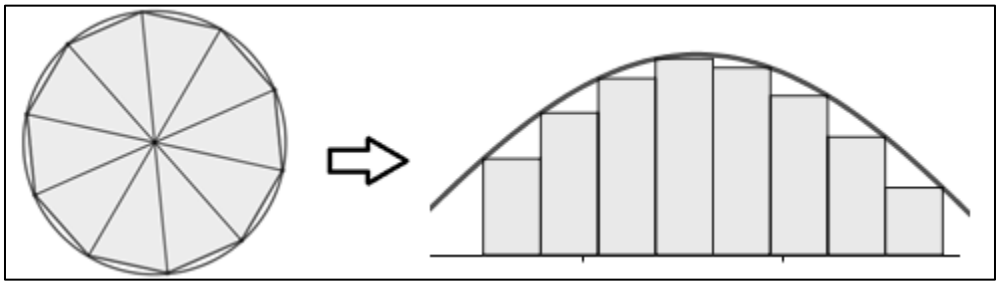


Ilustración 5. Aproximación por agotamiento

La sugerencia sería el diseño de una trayectoria basada en un método de aproximación por "agotamiento" del espacio libre que va quedando entre la curva y el polígono. Esta idea contiene los rasgos centrales del llamado "método exhaustivo" como fue explotado magistralmente por Arquímedes.

1.2 El cálculo como aparato simbólico del infinito

En el cálculo de Euler, más propiamente, en su "álgebra del infinito" va emergiendo con claridad la noción de función como central. Euler propone una definición de función en términos de las operaciones aceptables en su momento: "una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de contrastes" (1748). Esta es la definición que aparece en su obra Introducción al análisis del infinito, que como ya hemos mencionado se constituyó en el texto de referencia durante el siglo XVIII. Es importante aclarar aquí el sentido que Euler da a "expresión analítica" en la definición anterior. En efecto, ésta es una expresión compuesta de magnitudes simbólicas y números mediante operaciones algebraicas y/o operaciones trascendentes como tomar la exponencial o el logaritmo de una expresión. De modo breve: el tipo de expresión que generalmente podemos introducir en la pantalla de una calculadora para graficarla, calcular un valor numérico o tomar su derivada, lo cual es posible si la calculadora tiene CAS (programa que permite el cálculo simbólico).

En su obra ya mencionada, se pueden encontrar expresiones para, por ejemplo, las funciones trigonométricas:

$$sen\,(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Y dado el conocimiento que se tenía de estas funciones, lo que importaba era la expresión a la derecha, en serie de potencias, y no tanto si la serie era convergente (lo cual era "obvio" pues estas series correspondían a las funciones). Entonces, para hallar la derivada de $sen\,(x)$ bastaba derivar término a término la serie, por analogía con el caso de un polinomio. Visto desde esta perspectiva se aprecia mejor aún la intención de Newton con su trabajo sobre el *binomio de Newton*: transformar una expresión trascendente en una serie de potencias a la que se le puede aplicar término a término, las operaciones de derivar e integrar.

La analogía entre finito e infinito, aquí presente, juega, como ya hemos insistido, un papel esencial. Desde nuestra perspectiva actual hay aquí una "falta de rigor". Verlo así es pasar por alto que el rigor es una noción que va evolucionando con la cultura matemática. Ni siquiera podía compararse este análisis con el rigor de la geometría euclidiana pues este análisis trataba con ideas y procesos ajenos a la geometría de Euclides. Se trataba de trabajar con representaciones algebraicas y operaciones algebraicas y trascendentes que correspondían -aunque a veces no se notaba- a la modelación de la variación y la acumulación; a los fenómenos que incluían movimiento, no solo una representación estática. El cálculo como tal, basado en experiencias sensoriomotoras primero y luego desarrollado mediante las representaciones algebraicas (Leibniz, Bernoulli, Euler, entre otros) iba desarrollando las intuiciones matemáticas en un campo alejado conceptualmente de la geometría estática.

El estudio de las series infinitas y de las funciones representables como series de potencia fue uno de los motivos por los que se empezó a sospechar que algunas de las acciones cognitivas (sensoriomotoras y simbólicas) empezaban a "merodear" ejemplos que producían resultados inexplicables. Un ejemplo sencillo es el siguiente: Newton, y posteriormente Euler, obtuvieron expresiones (válidas) de diversas funciones como series de potencias. Ya hemos mencionado las funciones trigonométricas y la función exponencial. Sin embargo, la audacia de Euler y algunos de sus contemporáneos, los llamaron a incursionar en terreno donde ya no eran tan claras las explicaciones de aquello que iban encontrando en su afán de extender los resultados de su "algebra del infinito". Sin embargo, la confianza que sentían por sus logros ya obtenidos los impulsaba a avanzar por un territorio desconocido y extraer conclusiones que desafinaban el sentido común. Por ejemplo, a partir de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

(valido para $|x| < 1$), en lugar de x escriben $-x$ y entonces se llega a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Integrando término a término (acción que habría que justificar)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

En esta expresión, como serie de potencias para la función logarítmica, se hace ahora $x = 1$ y se obtiene:

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Esta expresión es correcta. Hay que reconocer que operaciones realizadas por analogía, pero con el sustento de una intuición profunda, Euler y muchos de sus contemporáneos obtuvieron resultados permanentes que han resistido los exámenes más severos. Aquí se plantea un problema que una y otra vez vemos tanto en el desarrollo histórico como en el aprendizaje (aunque las razones sean muy diferentes en uno y otro caso) y consiste en la presencia simultánea de un objeto mental (el objeto matemático) y las reglas válidas para operarlo, para transformarlo.

En la literatura leemos términos como contexto de descubrimiento y contexto de justificación para tratar de explicar lo que ocurre con el desarrollo histórico de la disciplina.

Debe ser aclarado que las parejas objeto mental/validación y contexto de descubrimiento/contexto de justificación, se refieren a situaciones distintas. Los contextos de descubrimiento y justificación se aplican al entendimiento del desarrollo histórico, en el sentido de la herencia recibida: una manera pues de interpretar, desde nuestro presente, lo que hemos recibido como herencia histórica. En cierta medida, eso es lo que hemos hecho (y hacemos) en este capítulo. De manera deliberada ignoramos la dimensión política y social de las comunidades dentro de las cuales tuvieron lugar los desarrollos matemáticos considerados. Eso no significa que veamos a Euler, por ejemplo, como una persona aislada de circunstancias sino, solamente que estaremos resaltando el resultado científico de todas las fuerzas culturales y sociales que convergieron en su obra.

Por otra parte, cuando nos referimos (y lo haremos más adelante con mayor detenimiento) a los objetos mentales y a la validación de las aseveraciones sobre

ellos, estamos pensando en el aprendizaje. Sin embargo, hay un espacio de encuentro entre el conocimiento que recibimos y las posibilidades de apropiación por parte del estudiante: es el encuentro de la cultura y la cognición.

Las reglas de validación no están establecidas para siempre. Cada periodo histórico va produciendo sus modos de "convencerse" de la legitimidad de su conocimiento. La crítica a esa manera de proceder proviene de una etapa posterior al periodo histórico que esté sometido a esa crítica. Muchos de los resultados obtenidos consiguen sobrevivir a la crítica pues el nuevo periodo crítico logra legitimarlos y casi siempre redefinirlos. Considere el ejemplo de la serie alternante para $\log(2)$:

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Si multiplicamos por $\frac{1}{2}$ obtendremos

$$\frac{1}{2}\log(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots$$

Y si sumamos:

$$\log(2) + \frac{1}{2}\log(2) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Como los sumandos a la derecha son los mismos que aparecen en la expresión de $\log(2)$ solo que en un orden distinto podríamos llegar a la conclusión errónea que

$$\log(2) = \frac{3}{2}\log(2)$$

Y, por lo tanto, $\log(2) = 0$. Una contradicción flagrante, así que no queda más remedio que aceptar que

$$\log(2) \neq \frac{3}{2}\log(2)$$

Pero esto lleva a una conclusión sorprendente: el orden de la suma de los términos que aparecen en $\log(2)$ pueden cambiar el resultado final cuando se suma una infinidad de términos. Esta situación no parecía explicable desde las matemáticas del siglo XVIII. Incluso un ejemplo más sencillo en apariencia como

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$$

Y, por otra parte:

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots = 1$$

Generaban paradojas, situaciones que no podían explicarse.

Las fronteras de validez de las manipulaciones en el seno del "algebra del infinito" no estaban claramente delineadas como ilustran los ejemplos anteriores. Por otra parte, sobre todo después del impacto profundo de la obra de Newton – y de Euclides con su organización de la experiencia del espacio físico – no había dudas que las matemáticas correspondían fielmente a la estructura del mundo material. ¿Se había ido demasiado lejos, acaso? Tal vez las últimas manipulaciones algebraicas, analíticas iban más allá de esa correspondencia fundamental…

Casi simultáneamente con la aparición de su obra sobre el Análisis del Infinito (1748), Euler entró en una polémica cuyos otros participantes iban a ser J. D'Alambert y Daniel Bernoulli. El problema que causó este evento decisivo en la historia del cálculo consistió en la determinación de la forma que tendría una cuerda vibrante que está fija en sus extremos. El problema dependía para su solución de la forma inicial que debería tener la cuerda al momento de soltarla para que vibrase ($t = 0$). Según D'Alambert (1747) si $y(x, t)$ es la forma que tiene la cuerda en el momento t, la forma inicial $f(x) = y(x, 0)$ debería ser una función expresada por una única expresión analítica. La ecuación diferencial que debía satisfacer la función $y(x, t)$ es:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = a^2 \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$$ ecuación de la cuerda vibrante

a es una constante. Euler objetaba que reducir la forma inicial de la cuerda a una sola expresión (según él había dado la definición de función) dejaba por fuera formas iniciales tan sencillas como

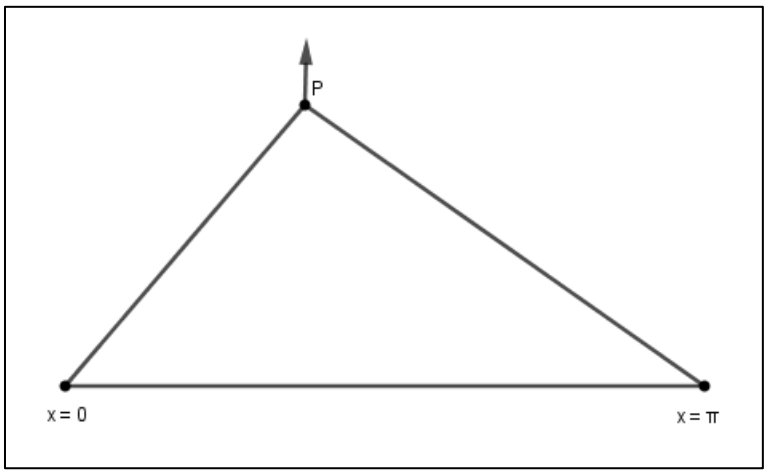


Ilustración 6. Cuerda Tensada

En la que la cuerda se tensaba por el punto P antes de soltarla. Según Euler, entonces, esta forma inicial debería ser aceptable, aunque su descripción requiriese más de una expresión analítica. El problema que esto planteaba era que la solución de la ecuación diferencial que gobernaba el movimiento de la curva tenía como solución una expresión de la forma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, Sen\,(nx)\, Cos\,(n\,a\,t)$$

Y como $y(x,0)$ debe coincidir con la forma original de la cuerda, tendremos que

$$f(x) = y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, Sen\,(nx)$$

La conclusión era perturbadora:
Una función arbitraria podía representarse como una serie infinita de combinaciones de funciones trigonométricas. Las únicas restricciones para f eran: $f(0) = f(\pi) = 0$.

Esta solución fue propuesta por D. Bernoulli. ¿Cómo era posible que una función prácticamente arbitraria pudiese expresarse de esta manera?
Tal vez la respuesta a este interrogante estaba en que la noción de función (como expresión analítica única) era insuficiente para los problemas que se estaban planteando en ese momento.

Arribar a esta conclusión, que la noción de función que se estaba manejando era insuficiente, para el análisis matemático de los nuevos problemas físicos que se estaban abordando; para D'Alambert la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, Sen\,(nx)$ era admisible si la forma inicial estaba dada por una sola expresión analítica. Esto restringía en exceso la forma inicial de la cuerda. Pero, por otra parte, la expresión trigonométrica para $f(x)$ podía representar "funciones" con más de una expresión analítica; no había salida más que aceptar una noción más amplia de la función… una que nos dice que una serie trigonométrica puede representar una función en un intervalo y representar a otra función (en el sentido original que Euler dio al término "función") en otro intervalo. Esto parecía difícil de aceptar. Pero en 1807, Fourier sometió a la consideración de la Academia de Ciencias de París, su primer manuscrito sobre la conducción del calor en un cuerpo. Su primera consideración (o restricción) es que el cuerpo fuese una lámina muy delgada y muy larga (estaba pensando en que fuese infinitamente larga). Los académicos de París y Berlín ya se preguntaban por una explicación al hecho "que muchos teoremas verdaderos pudiesen obtenerse de hipótesis contradictorias". Deseaban que alguien pudiese proporcionar un principio matemático que fuese un sustituto de la presencia del infinito. Esa era la atmosfera a la que iba a enfrentarse Fourier.

Para Fourier, las aplicaciones prácticas, aunque no tuviesen una utilidad inmediata, eran necesarias para el progreso de las matemáticas, pues daban lugar a preguntas que de otro modo uno no iba a plantearse. Ya para 1822 en su *Teoría Analítica del Calor*, sostiene que "las causas de los fenómenos están sujetas a leyes que pueden descubrirse mediante la observación. El estudio de estas leyes constituye la meta de la filosofía natural".

Fourier abunda en la visión newtoniana y recuerda que si bien hemos encontrado las leyes que gobiernan el sistema del universo a través de Newton, estas leyes no explican los fenómenos de transmisión del calor. Fourier sostiene que debe insistirse en el estudio de la naturaleza pues "el análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma".

Es clara la insistencia, por lo menos hasta las primeras décadas del siglo XIX, en la visión que sostenía que las matemáticas a través de la observación y con la guía de la naturaleza iba a encontrar una base de sustentación para esas matemáticas.

Ya desde 1807, Fourier había estremecido a sus contemporáneos al sostener, haciéndose eco del problema de la cuerda vibrante, que una función "arbitraria" podía expresarse como una combinación lineal de senos y cosenos. La cuerda vibrante y la transmisión del calor eran fenómenos físicos sin conexiones aparentes entre ellos, pero al modelarse matemáticamente el modelo parecía coincidir esencialmente. Es decir, fenómenos físicos diversos encontraban una identidad al ser traducidos a términos matemáticos.

Inicialmente, Fourier consideraba la búsqueda de una función $u(x, y)$ en la región $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0,$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Donde $\varphi(x)$ es la función que describe la temperatura en la base de la región (lámina). Bajo estas condiciones, Fourier encuentra que

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$$

Que coincide (matemáticamente) con la expresión que describe la forma inicial de la cuerda vibrante.

La coincidencia en la expresión matemática de fenómenos tan diversos revela, al menos, dos casos: primero que las expresiones matemáticas identifican en un nivel estructural, más abstracto, estos fenómenos físicos que pueden verse entonces como "ejemplos" de la solución a nivel matemático. Por otro lado, y muy vinculado a lo que acabamos de decir aquí, aquella coincidencia ejemplifica el carácter polisémico de las expresiones matemáticas.

Para Fourier lo que sostenía legítimamente los hechos matemáticos era, básicamente, la correspondencia con los hechos materiales. Para Euler, ese sostén

parecía provenir de una especie de continuidad de lo finito a lo infinito, en términos operativos. Lo que era legitimo en términos de polinomios, por ejemplo, se podía extender al ámbito de las series de potencias. Pero el infinito “se escapa” como hemos visto con las series alternantes que son condicionalmente convergentes.

Entonces, en medio de resultados extraordinarios, se manifestaban situaciones que no podían explicarse, o que eran francamente incorrectas: se estaba ante una crisis en los cimientos del cálculo.

1.3 Cauchy: nueva reorganización conceptual.

El comité de la Academia de París que leyó el trabajo de Fourier de 1807 estaba constituido por Laplace (1749 - 1827), Lagrange (1736 – 1813), Lacroix (1756 – 1843) y Monge (1746 – 1818). La reacción fue por demás poco entusiasta. Su empleo de las series trigonométricas era el foco de las objeciones. Sin embargo, en 1811 se anunció un premio que tenía por objeto "suministrar una teoría matemática para las leyes de la propagación del calor". Desde luego, Fourier participó y ganó el premio y a pesar de ello, no logró evadir las objeciones a su trabajo. Los jueces escribieron:

> "Este trabajo contiene las ecuaciones diferenciales que describen la transmisión del calor… observamos, sin embargo, que la manera en que el autor obtiene sus ecuaciones no está exenta de dificultades y el análisis que realiza para integrarlas deja algo que desear en cuanto a generalidad y rigor"

El trabajo de Fourier no se publicó sino en 1824. En ningún momento los miembros del jurado abandonaron sus dudas sobre el trabajo de Fourier. Era demasiado audaz para aquel momento asegurar que cualquier función definida en un intervalo [0,1] podía expresarse como una serie trigonométrica.
Fourier suministro un método para determinar los coeficientes.

Es importante remarcar que Fourier estaba modelando un fenómeno físico real. Su solución no podía rechazarse, aunque no se podía explicar a ciencia cierta porqué funcionaba. Por otra parte, nadie estaba dispuesto a abandonar el cálculo.

Esa situación confusa sobre la que se sabían los cómo pero no los porqués fue uno de los detonantes para revisión de los fundamentos del cálculo. Sobre todo, era el manejo del infinito lo que requería de mayor atención y corrección.

Agustín Cauchy (1789-1857) se ubica allí, en la frontera entre los métodos inductivos que se habían empleado hasta ese momento mayoritariamente y la necesidad sentida por parte de la comunidad sobre la pertinencia de reorganizar aquel cálculo sobre bases más ciertas.

En su curso de análisis (1821) Cauchy expresó con claridad lo que se proponía para transformar la disciplina; su propuesta incorporaba una ruptura con el paradigma euleriano:

> "Con respecto a los métodos, he buscado darles todo el rigor geométrico de modo que no haya que recurrir a explicaciones extraídas de las técnicas algebraicas… especialmente en cuestiones de convergencia y divergencia de series… que no pueden ser consideradas como heurísticas, que a veces sugieren la verdad pero que contribuyen un poco a la precisión que tanto se valora en las matemáticas"

Estaba claro pues que Cauchy proponía un regreso al rigor euclidiano que había sido abandonado a favor de los métodos heurísticos. El problema que esperaba respuesta era la convergencia de sucesiones (de potencias y trigonométricas). No era tan solo un plan para dejar en claro temas que se resistían a ser explicados desde el paradigma euleriano y desde la más reciente insistencia de Fourier sobre la correspondencia de la realidad material y las matemáticas. Para Fourier, insistamos, las matemáticas encontraban en la realidad material sus criterios de validación y al mismo tiempo con el instrumento para comprender la naturaleza.

En realidad, no había fundamentos matemáticos claros para las preguntas que empezaban a abundar. A parte de la convicción en la naturaleza como fuente de certeza, lo que se tenía por seguro para imaginar el comportamiento de las funciones se remitía a la familiaridad con la que eran conocidas las funciones elementales y algunas otras como la exponencial y el logaritmo. Entonces, aquí veía Cauchy la debilidad del modo de proceder por analogía.

¿Cómo garantizar las propiedades de una función definida por una serie de potencias o una serie de Fourier que no corresponde a ninguna función familiar dada de antemano? Preguntas que no tenían una respuesta clara desde el paradigma inductivo/analógico.

Cauchy no va a renunciar a los tesoros matemáticos heredados del siglo XVIII. Tal vez, puesto que era un profesor de matemáticas, su intención era rescatar esos tesoros para convertirlos en material de enseñanza. Para ello debía trazar un camino -artificial- que permite la reconstrucción de aquellos resultados sin que fuese necesario el genio de Euler, de Fourier, por ejemplo, para comprenderlos. Cauchy inicia sus lecciones de análisis definiendo qué debe entenderse por función continua y por límite de una variable. Cauchy dice:

> Cuando los valores sucesivos de una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo de modo que las sucesiones de valores de la variable difieran del valor fijo tan poco como se quiera, este valor fijo tan poco como se quiera, este valor fijo se llama el límite de los otros

Hoy en día nos parece que la definición de Cauchy es un poco "informal". En su momento, esta definición pretendía introducir más precisión a la idea intuitiva de límite. En realidad, se quedaba cerca, describirá mayor lo que era el límite, pero no proporcionaba una manera de operar con él.

Nos parece que lo importante de empezar con esta definición es la declaración de intención de parte de Cauchy: "El cálculo se va a reconstruir a partir de la noción de límite". Mas adelante, Cauchy presenta su definición de función continua en un intervalo. Lo que hace es describir con un lenguaje un poco más preciso la idea (informal) siguiente:

> Si dos valores de la variable independiente están cerca entonces los correspondientes valores de la función deberán estar cerca.

Nuestra experiencia con los estudiantes es que esta idea no es muy difícil de captar. Es los términos de Cauchy:

> Si cuando al valor de x de la variable (independiente) se le asigna un incremento infinitamente pequeño α la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ sería un valor infinitamente pequeño

Hay (casi) 50 años entre esta descripción de la continuidad de una función y la definición de Weierstrass:

> F es continua en x si dado $\varepsilon > 0$ podemos hallar un $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que si $0 < |x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

La geometría de Euclides tiene dos niveles: un primer nivel en el que se razona sobre los objetos a partir de las propiedades que vemos en ellos y más adelante, cuando ya tenemos acumulados un gran número de hechos sobre estos objetos se inicia la fase de sistematización. Se organiza el conjunto a través de la identificación de propiedades (que tomamos como axiomas) de las cuales podemos deducir el conjunto de teoremas que inicialmente fuimos obteniendo mediante organizaciones locales. En estas, por ejemplo, concentramos todos los resultados que vamos obteniendo sobre los triángulos; la suma de sus ángulos en 180°; si son rectángulos entonces vale el teorema de Pitágoras; todo triángulo tiene un incentro.

Los libros de Euclides revelan en su organización que primero se produjeron organizaciones locales (geometría del triángulo, geometría de la circunferencia, etc.) y sobre ellos se diseñó un sistema de axiomas aplicables a cada libro y a la posterior "red de puentes" entre esos libros.

Nos parece que Cauchy intentó algo similar con su organización conceptual del cálculo. Primero identificó la noción de límite como su primer principio organizador. Imaginemos un dialogo entre estas líneas;

- ¿Qué es una derivada? Un límite
- ¿Qué es una integral? Un límite
- Y ¿Qué es un límite? Un número real
- Y ¿Qué es un número real?

Esta última pregunta ya no la puede responder Cauchy. Intenta hacerlo cuando, después de ofrecernos su definición de límite nos dice, a modo de ejemplo, que un número irracional puede obtenerse como el límite de racionales mediante las aproximaciones que se producen mediante las representaciones decimales. Por

ejemplo, considerando $\sqrt{2}$ podemos obtenerlo como límite de la sucesión de aproximaciones: 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4141, …

Pero al responder de esta manera, hay una petición de principio: Cauchy supone dada la representación decimal. En ese caso los irracionales ya están dados, no hay que definirlos como límites de sucesiones de racionales. Otra cosa es que se puedan aproximar mediante racionales. Pero, insistimos, esto no los define.

Esto no es una crítica a Cauchy, más bien es una oportunidad para enfatizar que la organización que emprende Cauchy del cálculo supone que la continuidad debe ser entendida como la continuidad de la recta euclidiana.

Cauchy basó el desarrollo de su trabajo en la noción de límite como principio organizador y en la noción geométrica de continuidad. Visto así, su trabajo marca un cambio de dirección muy pronunciado al compararlo, en particular, con Fourier. El cambio radica en que Cauchy da el control del desarrollo al matemático quien es responsable de producir y organizar el conocimiento. Los orígenes de este conocimiento siguen estando en la experiencia sensoriomotora pero el nuevo trabajo está guiado por la lógica, por la deducción.

Siguiendo la estela de Euclides, el francés (Cauchy) busca las ideas (límite, continuidad, derivada, integral) y las reorganiza. Los libros de hoy siguen este nuevo orden. Pero debajo de este triunfo lógico hay un problema: lógica ≠ cognición.

1.4 La aritmetización de las matemáticas.

En la época de Klein fue muy notoria la aritmetización de las matemáticas, es por eso por lo que en su famoso artículo The aritmetizing of Mathematics, Klein (1895) muestra su posición al firmar "no respaldo que la ciencia aritmetizada sea la esencia de las matemáticas" (p.242). Con esto no pretendía sugerir que todo debería trabajarse a un nivel intuitivo o informal, más bien, ante la fuerza que había tomado en los últimos años del siglo XIX el programa de aritmetización liderado por Weiestrass, Dedekind y Cantor (entre otros), Klein pretendía alzar una voz de alerta para que no se olvidara el componente intuitivo en la relación. Por ello, continuaba Klein, "debo ser muy enfático al afirmar que no es posible tratar a fondo las matemáticas exclusivamente mediante el método deductivo, sino que aun hoy en día, la intuición tiene su provincia especial" (p. 242)

Este trabajo de Klein es muy revelador del estado de tensión intelectual que se vivía en los años a finales del siglo XIX cuando la llamada aritmetización introdujo (al tiempo que emergen las geometrías no euclidianas) un cambio en el estatuto epistemológico de las matemáticas. Klein insiste en su proyecto del no-abandono del punto de vista intuitivo al presentar ejemplos de trabajos matemáticos respetados desde el nuevo paradigma que, sin embargo, tienen raíces intuitivas profundas. Uno de sus ejemplos es la transformación del cálculo en lo que hoy llamamos análisis matemático. Siendo Hilbert un detonante de esta transformación.

Klein (1896) va más lejos, trata de presentar el pensamiento intuitivo como válido al mostrarlo como campo de investigación en la psicología experimental: "La psicología moderna distingue entre nuestras capacidades visuales, motoras y auditivas; la intuición matemática está más cercana a las capacidades visuales y motoras y el razonamiento lógico a lo auditivo" (p.247). La sensibilidad intelectual y didáctica mostrada por Klein ha encontrado eco en las investigaciones modernas relativas a la naturaleza encarnada (embodied) de las nociones matemáticas básicas (e.g. Lakoff & Nuñez, 2000).

Antes de entrar a consideraciones propias de este acercamiento cognitivo al pensamiento matemático, conviene el estudio del trabajo de J. Pierpont de 1899.

Allí, empieza advirtiendo que no hay criterio absoluto de rigor, que esto es un problema del desarrollo histórico de la disciplina. Y va más allá al advertir que en un campo donde las ideas ya estén esclareciendo, no hace falta ser pretencioso y tratar de ofrecer nuevos argumentos más rigurosos (p.395). Sin embargo, Pierpont argumenta que el programa de aritmetización ha producido el conocimiento más sólidamente establecido. Él deja ver que tenemos dos mundos: el accesible a nuestros sentidos y el mundo de los números (las matemáticas aritmetizadas) entre ellos muy diferentes, además sugiere que hay un puente entre ambos, lo que nosotros manejamos como péndulo. Pierpont hace explicito que, si bien la aritmetización de las matemáticas ha producido los conocimientos más consolidados, esto ha cobrado a un alto precio: la total separación del mundo de los sentidos. Es decir, se ha generado una escisión entre la intuición y la lógica, lo que podemos seguir observando que genera conflictos en los estudiantes de nuestra época.

Klein fue pionero en el estudio de la cognición matemática enfatizando la necesaria vinculación entre el entendimiento intuitivo y el formal derivado de la aritmetización de las matemáticas. Esto planteaba ya varios campos de investigación. Uno de ellos es orientado a la revisión de una epistemología que se transformaba ante la vista de una comunidad: se dejaba atrás el método inductivo/empírico como la fuente exclusiva del conocimiento matemático.

Lo que Klein exhibe en sus textos se ha organizado actualmente bajo el nombre de Conocimiento Matemático del Profesor (MKT por sus siglas en inglés), de acuerdo con Escudero, Flores y Carrillo (2012): “el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball, Jhames & Phelps, 2008) es un modelo analítico que ha cobrado relevancia a nivel internacional y cuyo propósito es diferenciar componentes para un tratamiento apropiado de las características del conocimiento matemático para la enseñanza.”. Su propuesta no era que los profesores (principalmente de nivel secundaria) aprendiesen temas nuevos de matemáticas, sino que profundizaran sus conocimientos sobre las matemáticas que debían enseñar. Ese es el sentido de la expresión “conocimiento matemático del

profesor": tener un conocimiento que se enseña controlado por un conocimiento del tema que permanece implícito (ante los ojos de los estudiantes) pero que es explícito para el profesor durante su trabajo didáctico.

Es importante resaltar lo que esto implica, a saber, que se trata de revalorar las matemáticas llamadas elementales como un campo de reflexión que lejos de ser superficial están orgánicamente vinculado con las matemáticas superiores. Klein desarrolla su concepción didáctica llamando la atención sobre los aspectos histórico-crítico y epistemológicos de las matemáticas básicas sin dejar de señalar lo que nosotros hoy llamaríamos el teorema de existencia del estudiante, en otros términos, la presencia gravitante de la cognición del estudiante durante el proceso de enseñanza/aprendizaje. Entonces, el conocimiento matemático del profesor debe fluir condicionado por su conocimiento didáctico.

Por primera vez, de manera prolija, están expuestas en estos libros de Klein, los elementos de una pedagogía (nos atrevemos a pensar que, con alta probabilidad, Klein estaba concibiendo las líneas generales de una didáctica) que no ignora el carácter multidimensional de esta disciplina: nociones básicas de matemáticas articuladas con una reflexión sobre cómo llegar a ser en su desarrollo histórico sin pretender que así, mecánicamente, pueden ser trasladadas a la enseñanza. En ese momento hay que traer a la atención del profesor, un hecho central: que lo simple desde el punto de vista lógico no coincide necesariamente con lo familiar o natural desde el punto de vista intuitivo. Klein lo dice así: "Con frecuencia se escucha decir que las matemáticas consisten en extraer conclusiones de premisas explicitas, sin importar lo que estas puedan significar, bajo la condición, claro, que dichas premisas no sean contradictorias entre sí… quien así piensa está restringiéndose al aspecto cristalizado de las matemáticas". Continúa Klein explicando, en la práctica de las matemáticas, como la de cualquier otra ciencia, se recurre al razonamiento "inductivo auxiliado por la heurística. Uno puede dar multitud de ejemplos de matemáticas que han encontrado (descubierto) resultados de mayor importancia que no pudieron demostrar. Entonces, ¿debería uno rehusarse a consideras esto como un gran aporte?" (p.207, vol.1)

De este modo Klein rescata la inseparabilidad de los procesos heurísticos/inductivos del estado final de un desarrollo que se presenta organizado deductivamente, lógicamente. El reconocimiento de este estado de usar a nivel de actividad profesional de la investigación es análogo, no igual, enfatizamos, al aprendizaje de las matemáticas en las instituciones educativas. En estas, hay que visibilizar al contexto actual del salón de clases, conocimiento pedagógico del profesor y los procesos cognitivos y de comunicación que tienen lugar en este espacio que vemos como un centro neurológico de un sistema educativo.

Hay abundancia de pasajes en esta obra extraordinaria, sobre la pertinencia educativa del vínculo inducción/deducción y también descubrimiento/formalización. Sin embargo, la reconstrucción racional de la historia de la ciencia, en particular, de las matemáticas en manos de I. Lakatos (1982) ha promulgado la discusión entre la lógica del descubrimiento versus lógica de la justificación. De acuerdo con lo que hemos venido exponiendo en esta introducción, la separación y no la vinculación entre estos momentos (descubrimiento/justificación) resulta negativos desde la perspectiva educativa.

La investigación en matemática educativa no deja lugar a dudas cuando Klein escribió su obra, el carácter de esta señalaba la conveniencia de tomar en cuenta futuros estudios sobre la cognición con el fin de refinar sus intuiciones educadas sobre la naturaleza del proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas. El pasaje que presentamos a continuación ilustra el rumbo de su reflexión de Klein:

> Es justamente en el descubrimiento y el desarrollo del cálculo infinitesimal que el proceso inductivo, construido sin recurrir a pasos lógicos, juega un gran papel; la ayuda heurística se traduce aquí a menudo como percepción sensorial. Aquí quiero decir la percepción inmediata con inexactitudes como el imaginar una curva como un trazo con un ancho deformado en lugar de percibir en abstracto, allí donde se postula un decidido paso al límite porque produce una línea de dimensión uno.

Es oportuno mencionar que este análisis no pretende ser un estudio histórico, sino que se propone retomar algunos temas cuyo desarrollo ha alcanzado un nivel de información estable como para que podamos reflexionar sobre ellos, para que arrojen luz sobre posibles acontecimientos didácticos. Los temas a los que dedicaremos mayor atención: el paso del continuo geométrico al continuo aritmético. Hemos revisado los "llamados al orden" de Klein que se refieren principalmente a la articulación de los acercamientos intuitivos/geométricos y los más formales y aritméticos.

Al tratar de entender cómo lograr esta articulación, la dimensión cognitiva del problema se hace tangible, así como algunos pasajes propios del desarrollo histórico que pueden ser traído a una discusión didáctica.

El trabajo de Klein volcado sobre la educación matemática de los profesores de secundaria. En diferentes escritos (libros y conferencia de 1896) Klein hace esfuerzos notables por dar un sustento apreciable a dos estudios del aprendizaje matemático: uno, el que se refiere al aprendizaje "intuitivo" en el cual la persona recurre a las estructuras cognitivas que resultan de la organización y capacidades sensoriomotoras y perceptivas. Klein comprende – y lo hace explicito – que el cálculo, por ejemplo, ha sido organizado, recurriendo a nuestra comprensión del movimiento, de la variación. Pero la persona posee, a parte de su capacidad de percibir y ser sensible al movimiento, otra capacidad: la capacidad de representar simbólicamente sus experiencias.

Capítulo 2

2.1 La cognición humana

En una obra muy apreciada, Merlín Donald (2001) realiza un estudio sobre la cognición humana señalando tres fases: mimética, mítica y teórica. La primera llamada también mimesis que consiste en el desarrollo del control consciente de los movimientos del cuerpo. Cuando se ve esta capacidad desde una perspectiva educativa se comprende que su adquisición bien pudo ser la clave para el entrelazamiento social de nuestros ancestros y de allí los orígenes de la comunidad.

De acuerdo con Donald, a partir del control consciente de los movimientos del cuerpo (sobre todo el rostro y las manos) se pudo "cruzar el Rubión cognitivo". Esta expresión significa que fue posible emitir señales y gestos que tuvieron, eventualmente, significado para el otro. En otros términos, podría decirse que la mimesis constituyo el "cemento social", la condición que permitió constituirnos conscientemente en comunidades. Hoy en día la mimesis ha quedado integrada a la lengua oral. Cuando hablamos gesticulamos en mayor o menor grado, levantamos una ceja, enfocamos la mirada, etcétera. Toda nuestra gestualidad incluyendo en ella la lengua oral, es un articulador social y cognitivo.

La cognición humana tiene dos vertientes entrelazadas que le dan un carácter hibrido. Una de estas vertientes es resultado de una herencia y consiste en que en determinado momento evolutivo el desarrollo alcanzado por nuestro sistema nervioso (en realidad el de nuestros ancestros) hizo posible la producción consciente de señales corporales (gestos con manos, rostro…) que abrieron la comunicación con sus semejantes.

La experiencia que vamos adquiriendo por estar sometidos a la ley de la gravedad y demás condiciones del entorno material, se tornan una forma de conocimiento que contempla aquel otro conocimiento que absorbemos del medio sociocultural. Esta es una forma muy condensada de expresar que nuestro estilo cognitivo tiene dos vertientes y que estas se integran en nuestra cognición que tiene una naturaleza híbrida.

En el mundo natural, el estilo cognitivo de un sistema nervioso no emplea símbolos como palabras o números, sino que funciona mediante un reconocimiento holístico o analógico. Este mecanismo de reconocimiento le permite a una especie predadora identificar su presa. Esto es análogo a lo que nos ocurre hoy día cuando vemos una persona e instantáneamente sabemos quién es, digamos, mamá. Esta capacidad holística del reconocimiento de formas va acompañada de todo aquello que podemos comprender mediante el movimiento, que nos provee de la capacidad de exploración del espacio que nos rodea.

Ponemos en juego esta forma de cognición cuando al observar la gráfica de una función reconocemos características como que la función es continua y creciente. Que su recta tangente que "recorre" la gráfica tiene pendiente positiva, luego es horizontal y posteriormente es negativa. (basta ver la gráfica adjunta)

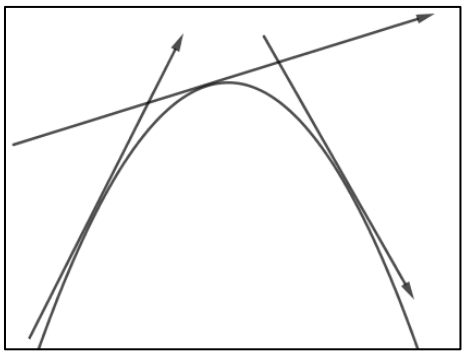


Ilustración 7. Recta tangente

También cuando vemos cómo aumenta el área bajo una curva a medida que la abscisa P se desplaza hacia la derecha. Estas imágenes (las gráficas) y las descripciones que hemos esbozado para acompañarlas explícitamente recurren a esa capacidad sensoriomotora que hemos descrito a partir de nuestra mimesis y de la capacidad de explorar el espacio mediante el movimiento real o imaginado.

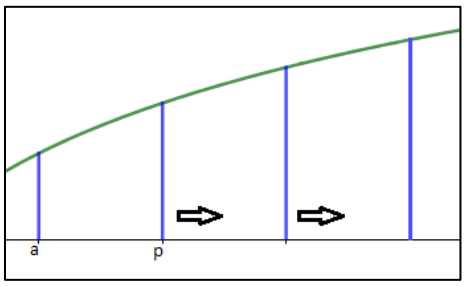


Ilustración 8. Área bajo la curva

Lo que empezó como una adquisición evolutiva se fue transformando profundamente en el contacto con la actividad en el seno de organizaciones socioculturales cada vez más complejas. Gradualmente nuestra inteligencia holística (nuestra capacidad cognitiva instalada a partir de la "mimesis dinámica") se fue fusionando con nuestra exclusiva capacidad de representación simbólica. Los ejemplos que acabamos de describir son muestra de cómo podemos poner en juego un movimiento que imaginamos (la tangente viajando sobre la curva) en una situación representada simbólicamente: una gráfica en un plano cartesiano.

Para describir esta naturaleza híbrida (sensoriomotora y simbólica) de nuestra cognición se han empleado términos como intuición y formalización casi como si fueran antagónicos. Sobre esto nos llamaba ya la atención F. Klein cuando alertaba sobre el desequilibrio que podía generarse en la enseñanza si adoptábamos un punto de vista que ignoraba el nivel de comprensión "intuitivo" (sensoriomotor, holístico, mimético, …) a favor de una representación simbólica (aritmética, en el caso descrito por él) controlada tan solo por su carácter operatorio, sintáctico olvidando el significado subyacente.

M. Donald ha descrito esta doble naturaleza o mejor, naturaleza hibrida de nuestra capacidad cognitiva (p. 155) sugiriendo que, en la intuición de una especie con el entorno, el universo esculpe sobre el sistema nervioso de aquella especie su propia imagen. Es decir, hay un dialogo entre el medio y la especie que finalmente los "sintoniza" y, en consecuencia, la especie debe su existencia (o su viabilidad) a esa sintonía con el entorno. Cuando vemos, por ejemplo, un águila pescadora

atrapando un pez en un lago, presenciamos ese largo proceso de adaptación entre el águila y el entorno. Lo que el águila es, es lo que el águila hace.

Nuestra especie también tiene una larga historia de diálogo con el medio, en realidad, con diversos medioambientes del planeta durante millones de años. De modo que también poseemos una forma de inteligencia holística (analógica) con rasgos propios de nuestra especie. No olvidemos que nuestra especie, muy temprano, inicio un proceso de diseño de herramientas para potenciar su acción sobre el entorno. La nuestra ha sido una evolución, con un alto grado de mediación instrumental. Esto significa que nuestros ancestros enfrentan un medio que no les favorecía, auxiliados con una serie de instrumentos de piedras primero, luego anzuelos, flechas y luego un invento estratégico para producir una mejor protección contra la inclemencia del clima.

En un libro anterior, Merlín Donald (1993) da cuenta de cómo pudo evolucionar la cognición humana siguiendo el registro de los instrumentos producidos a lo largo del tiempo. Hemos mencionado algunas herramientas para sustanciar nuestro relato, pero ahora enfaticemos un resultado crucial de la acción mediada (por instrumentos), a saber, no la adaptación pasiva al entorno sino la transformación del entorno para adaptarlo a nuestros deseos y metas.

A parte de los instrumentos para transformar directamente el entorno de nuestra especie ha diseñado instrumentos para transformar la naturaleza de su propia cognición. Son instrumentos simbólicos.

El universo platónico/pitagórico da un conocimiento ideal, independiente del ser humano. Allí hay objetos y hechos matemáticos atemporales ajenos a las personas nadie sabe cómo están hechos y, por lo tanto, en esta visión se privilegia el objeto sobre el proceso. En la visión platónica los objetos matemáticos genuinos existen en un universo ideal. En la visión pitagórica los objetos matemáticos están incrustados en el mundo material, en el mundo de la experiencia humana.

Opuesto a la visión platónica/pitagórica: visión que concibe las matemáticas como creación humana. Toda la capacidad cognitiva de las personas actúa y ha actuado a lo largo de la historia para producir el conocimiento matemático. Prácticamente todo el cálculo básico obtiene su significado primario a través de una colección de metáforas de movimiento. Estas metáforas controlan la notación (su significado se traslada a la notación). Así, escribimos $a_n \to L$ (a_n tiende a L) y usamos palabras como "converge", "creciente", "constante" y gráficas. Al hacer esto con el cálculo, generamos la ilusión de que todo el significado ha quedado instalado en el sistema simbólico. En gran medida así es, pero hay señales de alarma. Donald nos advierte:

> Los símbolos tienen tal impacto cristalizador sobre la experiencia (cómo se siente la experiencia) que nos crean la ilusión que ellos, los símbolos, son la fuente original de la experiencia. Pero no es así… lo que está codificado simbólicamente parece autónomo, pero en realidad adquiere su autonomía de nuestro lado holístico ("right-brained" cognition). (p.156)

Así aseguramos que el funcionamiento de nuestra cognición conecta dos mundos: somos cognitivamente híbridos mitad holísticos y mitad simbolizadores dentro de una red cultural. El sistema nervioso tiene un funcionamiento cognitivo holístico. Fue en el momento en que adquirimos capacidad simbólica a través de la mimesis (control consiente de los movimientos del cuerpo) que pudimos generar una comunicación gestual y se abrió entonces la puerta para que eventualmente alcanzáramos nuestra capacidad plenamente simbólica.

Durante el curso de nuestra evolución nuestra especie cruzó una especia de frontera que las demás especies no pudieron cruzar: la frontera que nos abrió la puerta al símbolo. La capacidad mimética sumada a la memoria, constituyo un aumento superlativo en los recursos de supervivencia de la especie nuestra. En efecto, la apertura de la comunicación con el otro que te mira establece la cooperación en sus primeros niveles. Lo que siguió en nuestra historia cultural, ya no la historia evolutiva.

La capacidad de entender el entorno holísticamente es algo que es fácil de mostrar. Vemos una persona conocida durante un instante y la reconocemos. Igual si vemos nuestra fruta favorita en un mercado. Podemos seguir sin mucho esfuerzo una escena en el cine. Allí, evidentemente, hacemos uso intenso de nuestra cognición hibrida. El significado de lo que estamos presenciando (aún si fuese cine mudo) depende de nuestra capacidad de decodificación. Como cuando vemos un mapa y podemos tener una idea del territorio allí presentado. En todas estas situaciones estamos empleando nuestra cognición hibrida.

Una larga historia nos lleva de ese momento crucial hasta hoy cuando estamos en plena posesión de gran diversidad de sistemas de representación simbólicas que han impactado y siguen impactando nuestro desempeño cognitivo. Por ejemplo, si se nos pide realizar una operación como 357 x 917 mentalmente, muy pronto caemos en cuenta de las dificultades que ese ejercicio impone sobre nuestra memoria biológica. Si pasamos a la realización de esa operación, pero con papel y lápiz, apreciamos la diferencia entre ambas exigencias cognitivas. La posibilidad de trasladar la tarea al medio escrito y sentir como ahora es posible su realización, ejemplifica un nivel que va más allá de las capacidades cognitivas que residen en nuestro cerebro, si puede decirse así. La representación del cerebro que, ayudado con los símbolos escritos, encuentra una capacidad numérica aumentada.

Lo que ocurre con el sistema numérico es análogo a lo que ocurre con la escritura. Capturamos ideas, recuerdos, reflexiones, a través de un medio estable. Tan estable que nos permite dialogar con personas no solo contemporáneas nuestras, sino que vivieron en siglos pasados.

Razonamos sobre la cantidad, la forma, la variación a través de re-descripciones simbólicas cuyo significado hemos interiorizado a partir de nuestras experiencias sensoriomotoras. Decimos entonces que ese conocimiento es incorporado. En el caso nuestro no es (necesariamente) un conocimiento inscrito en el sistema nervioso sino un conocimiento que hemos logrado organizar poniendo en juego experiencia sensoriomotora y sistemas de representación que

logran capturar por lo menos un fragmento significativo de aquella experiencia. Por ejemplo, cuando escribimos

$$a_n \to L$$

Y decimos que la sucesión $(a_n)_n$ tiende al límite L y lo indicamos mediante una flecha →, estamos siendo lo más fieles que es posible a la experiencia sensoriomotora de acercarse más y más a un determinado lugar. Esa experiencia también la trasladamos una representación como

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$$

Que sugiere que, paso a paso, los términos de esa sucesión se van acercando a $\sqrt{2}$.

Previamente ilustramos este tipo de concordancia con las figuras geométricas clásicas de la recta tangente y el área bajo una curva. Este nivel de discurso matemático revela lo que se conoce como conocimiento incorporado (embodied). Cuando Pierpoint afirmó que la reconstrucción aritmética del cálculo, si bien ha sido un gran avance, no deja de mencionar que el costo ha sido enorme: la total separación del mundo de los sentidos. Es decir, el análisis matemático en los primeros años de su reconstrucción en manos principalmente de Weiestrass, Dedekind y Cantor, abandona las interpretaciones incorporadas que comentamos previamente, renunciando a una semántica cercana a la experiencia sensoriomotora a favor de este enfoque pueden hallarse en Bolzano quien explícitamente expulsa al movimiento de las matemáticas (Moreno-Armella, 2014, p. 235). Si bien había razones para dar este paso, su traslado acrítico a la enseñanza ha dejado muchas víctimas en el camino.

2.2 Carácter simbólico de la cognición matemática

Al decir incorporar rescatamos su significado de acuerdo con su etimología como “unir a un conjunto para integrar como un todo”. Entonces, cognición incorporada lo vamos a entender como las maneras que tenemos para adquirir un conocimiento mediante los recursos sensoriomotores y perceptivos que poseemos. Pero esto no es todo, pues lo que queda incorporado se expresa ahora mediante una redescripción simbólica. Recuperemos un ejemplo:

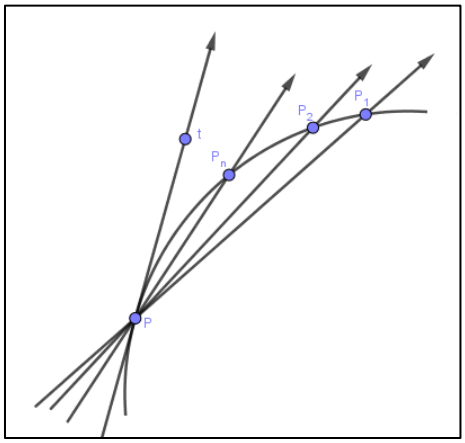


Ilustración 9. Traslado de punto P

Podemos imaginar (con nuestros recursos sensoriomotores) que al ir acumulando los puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ hacía P (sobre la curva) “al final” tendremos la recta tangente t a la curva en el punto P. Hemos puesto en juego varios recursos cognitivos a través de una representación simbólica. Los recursos de nuestra percepción y sensoriomotores no han permanecido inalterados a lo largo de nuestro desarrollo histórico. A partir de una adquisición de nuestro sistema biológico (la vista, por ejemplo) la inmersión en la cultura transforma esa capacidad del organismo.

La mirada de un pintor, de alguien dedicado a la microscopía, son “educadas” a través de sus oficios/profesiones. Un músico profesional asiste a un concierto y detecta, por ejemplo, que un violinista esta ligeramente desacompasado; ese hecho puede pasar desapercibido para los asistentes del concierto, no para el musico pues el oye de manera diferente: biológicamente su

oído es igual al del asistente al concierto, pero la cultura musical que ha interiorizado ha transformado desde donde escucha la música.

Sobre el termino incorporar (embody) también podemos decir que indica el hacer parte del cuerpo. Pero el incorporar no se reduce a hacer parte del cuerpo humano. También lo empleamos en un sentido más amplio cuando, por ejemplo, decimos que un poema encarna (embodies) o tiene incorporada la belleza.

D. Hilbert escribió que el arte de hacer matemáticas consistía en identificar el caso particular que contenía los gérmenes de la generalidad. Es decir, hallar un ejemplo que encarne/incorpore lo general. Es la literatura del campo de didáctica de las matemáticas se ha empleado el término abstracción situada (Noss – Hoyles) para referirse a una idea cercana a la de Hilbert. Se trata de un caso particular (digamos, un ejemplo) que refleje lo que todos los ejemplos comparten. Lo interesante aquí es ver la abstracción no como un proceso de extracción sino de reconocimiento de eso que se comparte. Algo así como un proceso de "abstracción aditiva".

Es posible que el lector haya tenido una experiencia de este tipo en un momento temprano de su formación: aprendió que la derivada de x^2 es $2x$, que la derivada de x^3 es $3x^2$ y con un poco de esfuerzo adicional comprende que la derivada de x^n es $n\,x^{n-1}$. Esto sería un ejemplo de cómo alcanzar lo general penetrando en la esencia de lo particular. Estamos aquí ante un conocimiento incorporado. Llamado dominio de abstracción por Hilbert.

La manera como desarrollamos nuestra geometría intuitiva, guiados por nuestra experiencia vivida del espacio, de su movimiento, nos lleva a una forma de conocimiento incorporado. Solo que ahora, insistamos en ello, trabajamos con representaciones simbólicas.

2.3 El traslado del mundo material al mundo simbólico

El ser humano vive en dos mundos: el mundo material y el mundo simbólico. El traslado que hacemos del mundo material al mundo simbólico lo hace posible nuestra capacidad de simbolización. Para comprender esto definiremos un símbolo como algo que toma el lugar de otra cosa. Todos los sustantivos del idioma español (en general, cualquier idioma) son símbolos.

Ejemplificando lo anterior, si decimos "perro", nos referimos a un animal en específico. La palabra (símbolo) "perro" crea una captura simbólica de todos los perros, sin necesidad de especificar señas particulares. Del mismo modo si decimos árbol, gato o manzana. En general, vamos generando una versión simbólica del mundo material, el cual se va complementando con características del objeto, como tamaño, color, forma, entre otras. Es así como el mundo simbólico se amplía creando también símbolos para las características que tienen las cosas materiales.

Alexander Luria (1984) escribió alguna vez que el ser humano tenía un mundo duplicado ya que mediante los símbolos lograba una segunda versión del mundo. Pero esta versión no solo incluye las cosas materiales y sus características físicas, pues los seres humanos tienen sentimientos, sueños, deseos, entre tantas cosas que, a pesar de no ser tangibles, son parte de nosotros. Es así como el mundo humano está formado por el mundo material y el mundo de las experiencias en el mundo social.

En los últimos años podemos ver que a pesar de que eso se maneja con naturalidad hasta en las películas, es difícil de comprenderlo. Un ejemplo muy sencillo, pues hace referencia a la obra del autor René Magritte (1898 – 1967) "esto no es una pipa".

Ilustración 10. Esto no es una pipa (René Magritte)

Esto es una clara muestra de los dos mundos, podemos ver que el autor hace un cambio entre el mundo material y el mundo simbólico, pues realiza el dibujo de una pipa que realmente no es una pipa, es una representación simbólica de lo que conocemos como pipa. En general, eso ocurre con todo lo que tenemos en el mundo físico y transmitimos al mundo simbólico, algunas veces con dibujos y otras veces con palabras. De manera que, al momento que una persona dibuja una pipa o escribe la palabra pipa, todos comprendemos de lo que se está hablando sin necesidad del objeto físico.

Este fenómeno ocurre con todas las cosas que tenemos en el mundo material, con este proceso creamos una versión simbólica, el cual se va extendiendo y nos permite no solo comprender objetos, nos permite crear mapas, comprender texturas con el simple hecho de describirlos con palabras, en general, vivir en un mundo sin necesidad de verlo. Pero esto solo es el comienzo, pues después de crear un mundo simbólico sobre lo tangible, tenemos que construir nuevas definiciones para describir las cosas que no pueden verse o no pueden tocarse (como la amistad, la voluntad, el amor, el rencor). Estas cosas que podemos describir con palabras o acciones que realiza el ser humano, pero no son tangibles forman parte de este mundo simbólico; Es así como una palabra involucra todo un concepto y no solo un objeto.

2.4 El mundo de las matemáticas

Esto mismo que vemos en el lenguaje, lo podemos apreciar en las matemáticas, ya que las matemáticas nacen de nuestra relación con el mundo material y de las interpretaciones que generamos a partir de nuestra relación con el mundo material. Si una persona no está familiarizada con las matemáticas, puede imaginarlas como un "juego con símbolos" que carece, en cierto sentido o de un significado en el mundo que ellos conocen.

Partimos de dos fenómenos básicos que percibimos a través de nuestro aparato decodificador del entorno: en sensorio humano. El primer fenómeno: la numerosidad, la percibimos visualmente o a través del tacto, es la base del número, pero el paso de la numerosidad al número oculta un camino difícil desde el punto de vista cognitivo y desde el traslado de una experiencia sensorial a su captura simbólica. El segundo fenómeno: la forma, está en el origen de la geometría. Por lo cual, podemos decir que tanto el número y la figura geométrica son nociones matemáticas que se producen desde nuestro sensorio, es decir, son nociones encarnadas (embodied).

Estas nociones se van desarrollando a lo largo de nuestra formación académica y una vez que llegamos hasta el nivel medio superior es donde por primera vez tenemos contacto con el cálculo diferencial y con el cálculo integral, ya en este punto se tiene la madurez intelectual suficiente para comprender su abstracción y pueden ser introducidos a los estudiantes mediante problemas que son intuitivos, como encontrar el área bajo la curva, encontrar los máximos y mínimos, o resolver problemas que están ligados a nuestro mundo material.

Este crecimiento en el lenguaje simbólico de las matemáticas nos va permitiendo crear nuevas formas de ver las matemáticas, pero estas siempre tratan de entrelazarse con el mundo material, dejando explícito su lado intuitivo, para mayor comprensión de estas. Cuando un estudiante ya conoce el cálculo entonces puede organizarse didácticamente una estrategia para transitar hacia el análisis.

Para esto hay que hacer una distinción entre el cálculo y el análisis, pues en ocasiones es común que se vea el cálculo como una versión adelgazada del análisis. La idea central del cálculo es que se basa en una noción de continuidad geométrica.

Allí se habla de una variable sobre la línea que se supone continua en términos intuitivos (así es percibida). El paso del análisis demanda un examen critico de esa idea de continuidad. “Gauss, asume la continuidad del espacio, no vacila al usar su intuición del espacio como base para sus pruebas” (Klein, 1896, p.241).

Al trasladarse del cálculo al análisis, se necesita la creación de una nueva intuición basada en las definiciones formales de los conceptos es por esto que los estudiantes comienzan a tener un problema de comprensión de los temas debido a la desvinculación que tiene el mundo simbólico con el mundo real, pero esto no es algo que se haya dado en la didáctica de nuestros tiempos, en el siguiente apartado podremos analizar problemáticas de matemáticos importantes que sufrieron esta aritmetización dejando de lado la primera intuición como apreciamos en la herencia que nos dejaron en todas sus obras.

2.5 La intuición del cálculo

El cálculo se puede desarrollar apoyándonos únicamente en nuestra experiencia sensoriomotora. Nuestra experiencia visual y motriz nos ayuda a describir lo que simbolizamos cartesianamente. Es así como atribuimos continuidad a la recta, ya que es algo razonable. Por esta razón al momento de ver una función definida en el intervalo $[a, b]$ de manera que $f(a)f(b) < 0$ aceptamos que esta función debe existir al menos un cero, aseguramos la existencia de un número c entre a y b que cumple $f(c) = 0$.

Gauss veía este resultado tan obvio que no consideraba necesario una demostración, el problema es que debemos definir bajo que marco conceptual es aceptable este resultado y bajo cuál es necesario demostrarlo. Va a depender de cómo estamos tratando el estudio de la continuidad.

En cierta forma, estos resultados son aceptables cuando asumimos una "posición cognitiva" sensoriomotora. El problema nace cuando al explorar estos resultados las consecuencias derivadas de ellos nos llevan a zonas conceptuales no muy claras. Esto ocurre, por ejemplo, cuando entramos de lleno en procesos infinitos donde límites no tienen un soporte dinámico o visual claro.

Más específico esto ocurre cuando pasamos de los objetos descritos intuitivamente (continuidad, derivada, tangente, integral como área) a otros que no se pueden describir así; incluso, que contradicen abiertamente nuestra intuición.

Entrar en contacto con estos objetos, en primera instancia confrontan radicalmente nuestra intuición. Y es natural que así sea (aunque didácticamente sea problemático) pues hemos sido "llevados de la mano simbólica" a un terreno donde las operaciones (simbólicas) ya no pueden ser controladas desde las intuiciones sensoriomotoras. Entonces hay que regresar a los inicios para ir reconstruyendo el edificio desde otros principios que permitan controlar la validez de lo que se afirma. Es por ello por lo que ocurre un cambio epistemológico que lleva a una visualización del cálculo como una versión adelgazada del análisis matemático.

En el desarrollo del cálculo se llegó a que las relaciones no eran exclusivamente entre cantidades geométricas, más bien entre cantidades en general. Por lo cual fue necesario crear la nueva versión del cálculo, pero es muy difícil hablar del primer trabajo que mostró este cambio.

2.6 Guiados por la intuición.

Después del trabajo de Gregorio de San Vicente (1584 – 1667) ya se sabía que las áreas bajo la curva de $y = \frac{1}{x}$ podía interpretarse como logaritmos. El cálculo de la base de estos logaritmos fue objeto de estudio para Euler.

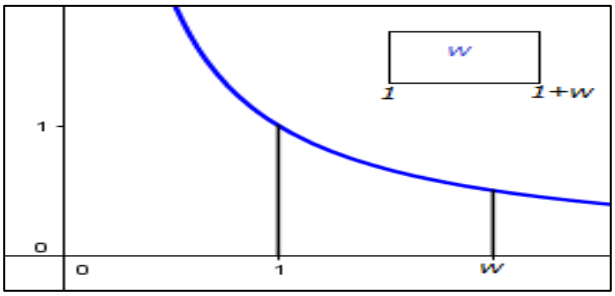


Ilustración 11. Logaritmo

Si tomamos w un numero infinitamente pequeño pero distinto de cero, entonces la gráfica entre 1 y 1+w, mirada a través de un microscopio muy poderoso se ve como un rectángulo. El área del rectángulo es w (base por altura) y también $\log(1 + w)$ por lo cual

$$w = \log(w + 1)$$

Si llamamos e a la base de estos logaritmos tendremos que $1 + w = e^w$. Como w es un numero infinitamente pequeño, podemos tomar $w = \frac{1}{N}$. Donde N es un "número infinitamente grande", también llamado "hipernatural". Entonces,

$$e = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

Desarrollando esta última expresión mediante el teorema del binomio se obtiene:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Conviene revisar lo que hemos tomado como "intuitivamente natural". Hemos introducido en la exposición números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. Hemos extendido las operaciones aritméticas al *sistema ampliado de números*, donde además de los números "ordinarios" ahora tenemos los números descritos anteriormente. Hemos garantizado que aún a "nivel

microscópico" la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ es continua. El comportamiento de la función se corresponde fielmente con el sistema numérico extendido. Cuando decimos que la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ entre 1 y $1 + w$ se "ve" como horizontal, nos estamos apoyando en un rango definitivo de la continuidad: a variación pequeñas de la variable independiente corresponder variaciones pequeñas de la variable dependiente.

Como mostraremos posteriormente, existen propiedades de las funciones que puede expresarse tanto en el lenguaje geométrico como en el aritmético y que tienen interpretaciones en ambos dominios que son, ambas, fácilmente interpretables como equivalentes. Ambas interpretaciones tienen una fuerte carga intuitiva. En el ejemplo precedente, la aceptación de números infinitamente grandes y pequeños y la extensión del comportamiento de la función $y = \frac{1}{x}$, de su grafica y de su dominio a una recta geométrica que contiene números infinitamente pequeños, es intuitivamente aceptable (por extrapolación a "dominios microscópicos" de la idea de cercanía).

El valor heurístico de esta aceptación es apreciable pues permite encontrar una razón de ser a la expresión $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ que está al alcance de un estudiante. La producción de argumento de validación cuando el resultado se localiza en un ambiente estrictamente numérico y en ausencia de números infinitamente grandes y pequeños, se torna de difícil acceso y comprensión. Estaríamos en este caso, tratando de producir un entendimiento de la situación a través de pasos poco naturales para el estudiante, aunque impecables desde un punto de vista lógico. De nuevo, una distancia nada despreciable entre lo formal – artificial para el estudiante inexperto – y lo razonablemente intuitivo.

Cuando Euler enseño sus acrobacias numéricas, seguramente sus contemporáneos quedaron estupefactos. Había logrado identificar, y calcular lo que era importante, la base de los logaritmos que corresponden a área bajo la $y = \frac{1}{x}$ a partir de x=1.

La intuición de Euler es una especie de guía segura, sus resultados hoy en día han resistido un examen riguroso, pero visto desde la perspectiva actual (en los últimos 120 años), no se podía justificar la presencia de un numero infinitamente grande o infinitamente pequeño, aunque llevara a resultados que intuitivamente aceptables. La necesidad de justificar los resultados de Euler se debe a que la matemática estaba cambiando.

A medida que la sociedad va desarrollando nuevos conocimientos, las matemáticas también van cambiando acorde a la época, así que la manera de hacer una demostración de algún problema depende de la manera en que es concebido, por lo cual depende de las concepciones que se tienen socialmente en cada periodo de tiempo, en la actualidad las matemáticas no son concebidas del mismo modo que Euler las comprendía o de la forma en que Euclides lo analizaba. Para ello debemos tener conocimiento de la epistemología de las matemáticas, con la cual podemos hacer afirmaciones válidas para cada época.

Hacia mediados del siglo XIX, había hecho aparición el escenario matemático la geometría hiperbólica y se pudo mostrar que esa geometría era contradictoria. Una geometría que iba en dirección opuesta a la geometría euclidiana que afirmaba que "por un punto exterior a una recta pasan más de una paralela a dicha recta en el plano determinado por esa recta y el punto exterior a ella". La conclusión tuvo el efecto de una explosión.

La intuición geometría euclidiana no nos decía todo sobre el espacio en que vivimos. Entonces si una disciplina tan intuitiva (en sus axiomas, por ejemplo) nos engañaba al decirnos que el único espacio posible era uno en que por un punto exterior a una recta solo había una única paralela, ¿qué podía esperarse del desarrollo matemático de las intuiciones sobre variación y cambio?

Además, como Euler había ido mucho más lejos con su audacia matemática al hablar y usar números infinitamente grande y también infinitamente pequeño, había que ser cuidadoso. Parecía que la intuición y la continuidad intuitiva en particular podía ser un poco tramposo.

2.7 Rompimiento de la intuición

Tenemos una idea (intuitiva) de continuidad muy vinculada a nuestra visión del espacio.

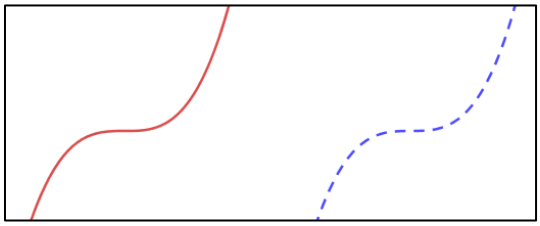


Ilustración 12. Continuidad

En la ilustración 12, la figura de la izquierda es continua, la de la derecha no. Nos resulta obvio. Hay pues, una cantidad considerable de conocimiento matemático que podemos llamar matemática incorporada.

El trabajo de Roh (2008) sobre límites exhibe argumentos que sostienen nuestra interpretación. No solo es conveniente sino incluso necesario permanecer en un contexto intuitivo en los inicios, recurrir a estrategias heurísticas, por ejemplo, considerar un modelo (geométrico) que facilite la comprensión contextual de un concepto antes de avanzar en la dirección de la abstracción. Klein consideraba que este enfoque era un principio pedagógico universal. Consideremos una situación a todas luces elemental pero que nos ponen frente al problema de la tensión inevitable entre lo intuitivo y lo formal - abstracto.

En la geometría analítica es usual afirmar – y así lo aceptamos – que a todo número real le corresponde biunívocamente un punto sobre la recta. Si dado el punto x tratamos de asociarle el número que representa su distancia al origen, entonces la naturaleza misma de la medición nos lleva inevitablemente a asociar con x número racional pues la medición es siempre aproximada. Un número irracional no corresponde a una medición – siempre aproximada – y por lo tanto no le correspondería ningún punto sobre la recta. Esto muestra que el principio de correspondencia entre números reales y puntos sobre la recta es de un carácter completamente abstracto, aunque cuando se presenta en la geometría analítica lo vemos intuitivamente aceptable.

Este ejemplo, como el de Euler y sus logaritmos tienen un carácter intuitivo claro, pero debajo de ellos yace una complejidad formal que no conviene hacer visible en un primer momento.

Como mencionan Courant y Robbins en su obra, aún las teorías más abstractas, como el formalismo al estilo de Hilbert, se basan en procedimientos intuitivos "De una u otra forma, la intuición constructiva sigue siendo el elemento vital en las matemáticas" (p. 116). Posición que está en resonancia directa con la impulsada por F. Klein.

La dimensión intuitiva o dimensión holística, resulta de la percepción global de una situación que tiene distintos elementos constituyentes, mientras que la dimensión analítica consiste en la capacidad de descomponer un todo en partes y estudiar cada una de ellas.

Al trabajar a nivel de una formalización se pueden establecer conexiones entre distintos resultados y de allí surgir conjeturas razonables sobre alguna propiedad que se vislumbra. Por ejemplo, lo que ocurre con un jugador experimentado de ajedrez. Aprendió formalmente cómo se mueve cada pieza es como un axioma, pero al ir adquiriendo experiencia desarrolla una visión holística de las posiciones sobre el tablero.

Podemos recordar como los Elementos de Euclides partían de axiomas que se definían como verdades evidentes por sí mismas y de allí se desarrollaba todo el edificio geométrico como un ejercicio deductivo. Toda la estructura formal podía interpretarse como una reorganización de un conocimiento originalmente producido a partir de hechos geométricos que resultaban evidentes o aceptables. Por ejemplo: una recta que pasa por un vértice de un triángulo y que no coincide con los lados adyacentes, necesariamente interseca al tercer lado. Nadie esperaría que una recta se enrollara dentro del triángulo. Hechos como este se suman a los axiomas de Euclides y van permitiendo la construcción de un edificio matemático hibrido, es decir, un edificio que entrelaza las nociones intuitivas y las definiciones formales además de los razonamientos inductivo y deductivo.

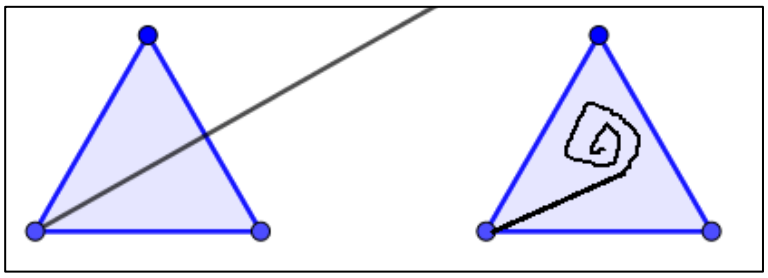


Ilustración 13. Intuición de Recta dentro de triángulo

Una muestra clara de diferencia entre esta intuición y la formalidad la podemos ver con la función de Cantor, en honor a Georg Cantor (1845 – 1918), que desafía la intuición al tener características que se contradicen con la idea que tenemos. Es continua en todos los puntos ($x, y \in [0,1]$), no tiene derivada en ningún punto del conjunto de cantor y su derivada fuera del conjunto de Cantor es cero.

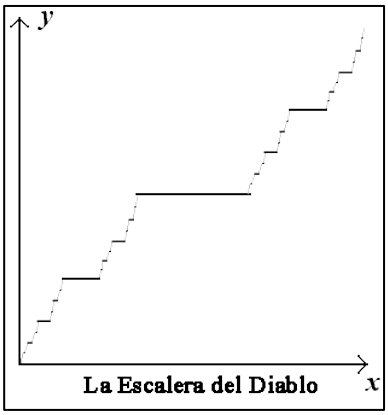


Ilustración 14. Escalera del Diablo

Veamos otro ejemplo, cuando consideramos un intervalo en la recta, digamos [0, 1] sabemos que dado x en [0, 1] siempre podemos encontrar un número racional en [0, 1], tan cercano a x como se quiera. Esta propiedad de los números racionales se llama densidad. A pesar de que los racionales del intervalo están tan pegado como se quiera a cualquier punto en [0, 1], si solo dejamos los racionales, queda entonces un intervalo lleno de agujeros. La única forma de recuperar la continuidad geométrica es regresando los irracionales a su lugar.

Esta situación muestra que nuestra percepción del espacio no es suficiente para permitirnos imaginar que un conjunto denso es insuficiente para producir la

continuidad. La consecuencia por tomar en cuenta para la enseñanza es: Los objetos de la geometría no pueden ser captados totalmente mediante la intuición. Una prueba rigurosa no puede, en consecuencia, basarse solamente en la intuición si no que debe basarse en la deducción lógica.

La discusión que acabamos de presentar para distinguir la densidad de la continuidad también podría ilustrarse considerando la distinción entre segmentos conmensurables e inconmensurables:

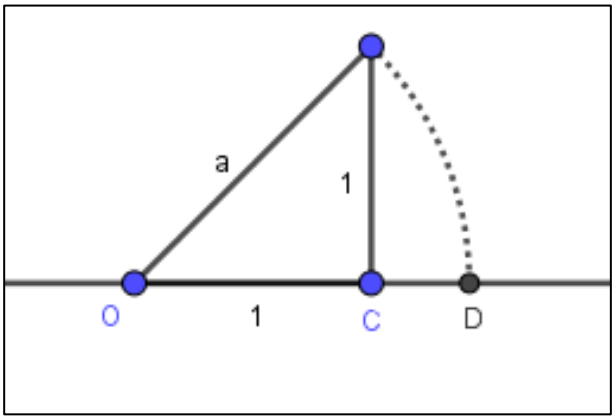


Ilustración 15. Segmentos conmensurables e inconmensurables

El segmento OD no es conmensurable con el segmento OC. El segmento OD corresponde a un número irracional $\sqrt{2}$. La distinción entre conmensurabilidad e inconmensurabilidad corresponde a un interés teórico. Es una distinción existente en el seno de las matemáticas teóricas.

Los conceptos no son solo reflejos (pasivos) de la realidad externa. Los conceptos están rodeados por nuestros cuerpos y mentes, especialmente por nuestro sistema sensoriomotor. Esta es una forma de decir que nuestros conceptos empiezan como conceptos incorporados. Así, los objetos básicos de la geometría tienen una raíz holística: provienen de nuestra percepción de la forma estática y dinámica. Lo que interiorizamos, como acabamos de decir; no es una imagen pasiva de las formas que nos rodean, sino que eso que se interioriza lo hace mediante nuestras acciones.

Podríamos explicarlo así: hemos tenido que ver muchos objetos redondos, haber construido una circunferencia, haber deslizado nuestra mano sobre el borde de un objeto redondo, para llegar a concebir la idea de circunferencia. Entonces $Percepción + sensoriomotor$ son la base de producción (inicial) de nuestros conceptos. En un primer momento ese concepto puede aparecer vago, pero al trasladarlo a una versión simbólica empieza a "tomar forma". Aquí conviene recordar un viejo artículo de Tall-Vinner sobre "concept-image" y "concept-definition".

La imagen conceptual (concept image) pertenece a nuestra intuición (percepción + sensoriomotor); es la forma como hemos entendido en un momento dado, la idea de tangente, por ejemplo.

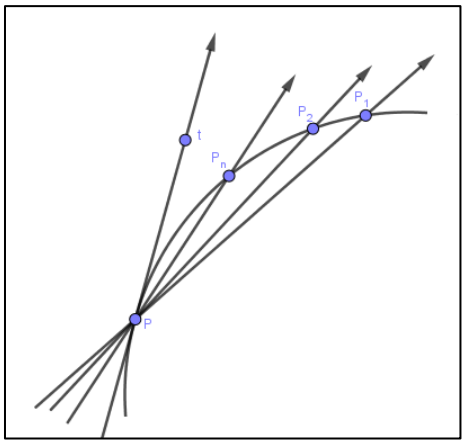


Ilustración 16. Gráfica recta tangente

Pero si esta es la imagen conceptual que tenemos de la tangente, entonces, ¿qué ocurre con un ejemplo como este:

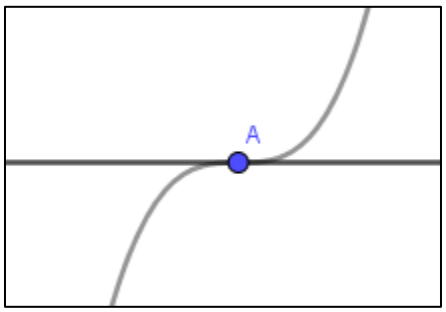


Ilustración 17. Ejemplo de recta tangente

¿Dónde la recta tangente atraviesa a la curva en A?

Este ejemplo muestra que la imagen conceptual de "tangente a una curva" no contiene todas las posibilidades desde el inicio. Gradualmente, a medida que vamos ganando experiencia (al ver un nuevo ejemplo que no se había considerado) nuestra imagen conceptual se va expandiendo.

La definición formal, en el caso del ejemplo de tangente sería:

$$f'(A) = \lim_{H \to 0} \frac{f(A+H) - f(A)}{H}$$

Siguiendo con el ejemplo: el camino que parece "más natural" es tener varios ejemplos que muestren distintas situaciones que pueden presentarse al explorar "informalmente" (intuitivamente) la noción de tangente y después intentar capturar estas situaciones mediante una definición formal (concept-definition). En este caso, la definición de derivada como un límite.

Pero una vez que empezamos a "manipular" (operar) la definición formal, llega el momento en que surgen situaciones "inesperadas" que obligan a extender nuestras ideas intuitivas. Por ejemplo, (la historia del cálculo y del análisis nos enseñan esto) después de explorar, guiadas por la definición van a surgir funciones continuas que no tienen derivadas.

Si nos quedamos al nivel de la imagen conceptual es muy difícil que lleguemos a pensar en funciones continuas que no se pueden graficar, precisamente porque la gráfica que se puede trazar sin levantar la mano forma

parte importante de nuestra imagen conceptual. Así nos imaginamos una función continua. Pensando un poco más detenidamente podemos ver que ya desde antes de que alguien (Bolzano, Riemann, Weiestrass) se le ocurriera que podía definir funciones continuas sin derivada, había ejemplos de funciones continuas (y hasta derivables) que no se podían graficar. Por ejemplo, si consideramos la función $y = Sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

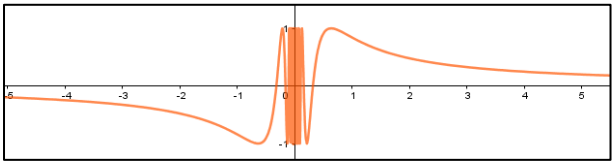


Ilustración 18. Gráfica Sen (1/x)

Vemos que al acercarnos a $x = 0$ (por el lado izquierdo) la función tiene una infinidad de oscilaciones y por eso, en honor a la verdad, no la podemos graficar excepto de manera aproximada.

Eso modifica nuestra "definición intuitiva" (concept image) de continuidad en el caso de las funciones. Nótese que esto se logró a partir de la definición formal. De otro modo no vemos que la función excepto en $x = 0$ es continua.

Como ya mencionamos en el análisis es común trabajar con el conjunto de Cantor y la forma de construirlo es muy interesante, tenemos un intervalo supongamos el intervalo [0,1] y lo dividimos en 3 partes iguales, del cual vamos a eliminar el intervalo abierto central. Luego, de cada uno de los intervalos, se hará exactamente lo mismo, de manera que lo que nos va a quedar sería de la siguiente forma:

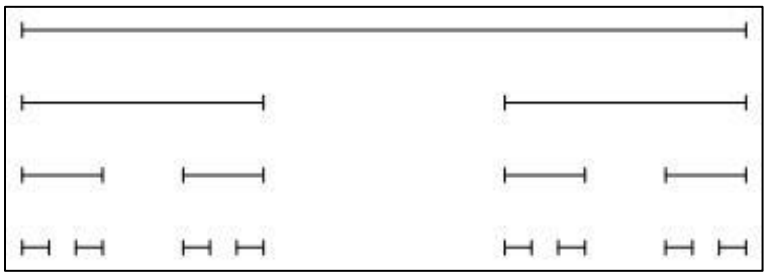


Ilustración 19. Conjunto de Cantor

Si observamos el conjunto, podemos analizar algebraicamente que se quitó:

$$\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+8\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=1$$

Esto quiere decir que todo lo que quedo en el conjunto tiene medida cero. Esto no significa que sean puntos aislados, pues los números racionales tienen medida cero y son densos. Pues para cualquier $r \in [0,1]$ existe un racional x, tal que $|x-r|<\varepsilon$. Por ejemplo, sea $r = 0.231428571112233\ldots.$ entonces $x = 0.231423142314$

Los números racionales son limitados o periódicos, por lo cual dado un ε podemos crear un número el cual tenga el periodo que nosotros queramos, de manera que estará tan cerca como nosotros queramos del número r. Si r es racional, pues ya es el racional que nosotros queremos, pero si no lo es, podemos crear el número racional periódico que nosotros deseemos.

Ejemplo. Por demostrar que $\frac{1}{4} \in Conjunto\ de\ Cantor$

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{2}{9-1}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right)=\frac{2}{9}\sum\left(\frac{1}{9}\right)^n=\sum\frac{2}{3^{2(n+1)}}$$

Es decir, cumple con la forma de elementos del conjunto de cantor:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

Para llegar a este resultado se tuvo que hacer un cambio de enfoque, dejando de lado la representación geométrica del planteamiento y convertirlo en un problema aritmetizado. Este no es el único ejemplo en el cuál la aritmetización nos permite llegar a resultados formales partiendo de un problema geométrico o un problema propio del cálculo, como veremos en el siguiente ejemplo.

Calcule la integral $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

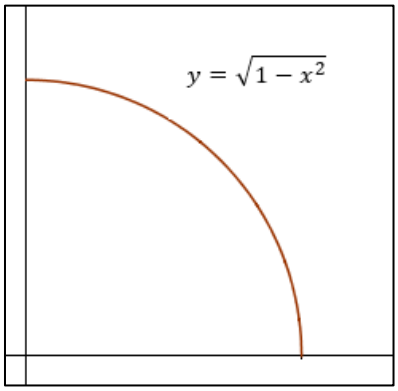


Ilustración 20. Gráfica de para calcular integral

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 Sen\,\alpha\, d(Cos\,\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen^2\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - Cos2\alpha)d\alpha$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,(2\alpha)d\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Al resolver este problema de esta forma, pensaríamos que el problema es puramente del cálculo y que no hay otra forma de abordarlo, pero Wallis decide buscar una generalización, como ya hemos visto, esto sería una forma de pensar como en el análisis.

Wallis busca $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ Definiendo $x = Cos\ u \quad dx = -Sen\ u\ du$

Llegamos a que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n\ u\ du = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}\ u\ du$, simplificando $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Con lo cual obtenemos que $I_{2n} = (\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k})(\frac{\pi}{2})$ mientras que $I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ lo que nos lleva a $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k*2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}$.

Esta igualdad es conocida como el producto de Wallis, aunque el problema en un momento era propio del cálculo, dejando de lado su naturaleza y realizando un cambio de enfoque al aritmetizarlo, es posible encontrar resultados que no serían posible al encasillarse en un solo contenido.

El infinito y sus procesos infinitos nos llevan a encontrar resultados muy maravillosos que muchas veces contradicen la intuición que teníamos acerca de esos conceptos; por ejemplo, a continuación vamos a mostrar la diferencia entre los elementos de la sucesión y su límite, ya que son de diferente naturaleza, aunque los elementos de la sucesión cumplan ciertas propiedades, el límite no necesariamente satisface lo mismo.

Esto es debido que al trabajar con el infinito es necesario hacer un salto de tiempo. Si tomamos elemento por elemento de la sucesión no podríamos alcanzar a ver todos los elementos debido a que nuestro tiempo es finito, es por eso que es necesario sacar a la sucesión del tiempo para llegar al límite.

Si tenemos la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ podemos ver que todos sus elementos tienen propiedades que el límite no cumple, ya que el cero no es elemento de la sucesión. Del mismo modo cuando tomamos una serie de elementos racionales que convergen a un número irracional. Por ejemplo:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1.4$$

$$a_3 = 1.41$$

$$a_4 = 1.414$$

$$\vdots$$

$$a_n = \sqrt{2}\ cuando\ n \to \infty$$

Cada uno de los elementos es racional, pero al llegar al límite de la sucesión, en el infinito, este elemento es irracional. Esto es algo que va en contra de nuestra intuición natural, ya que nos lleva a preguntarnos en qué momento se da ese cambio entre las naturalezas de los objetos.

Cada que tratamos con el infinito podemos toparnos con situaciones que van en contra de nuestra intuición natural, por lo que es necesario crear esa nueva intuición basada en las formalidades que nos permitan llegar a conclusiones matemáticas correctas, aunque choquen con nuestras creencias corporizadas.

Vamos a ilustrar esto con la curva de von Koch, la cual consiste en ir produciendo copias cada vez más pequeñas de una figura como ésta (ilustración 21):

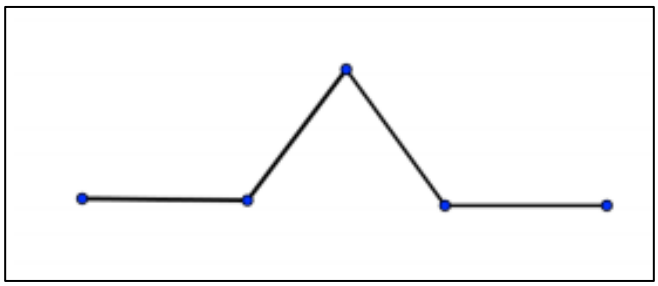


Ilustración 21. figura von Koch

Una buena aproximación se puede observar en la ilustración 22, con lo que podemos observar que tenemos una curva continua, pero en ningún punto tiene recta tangente, es decir, carece de derivada.

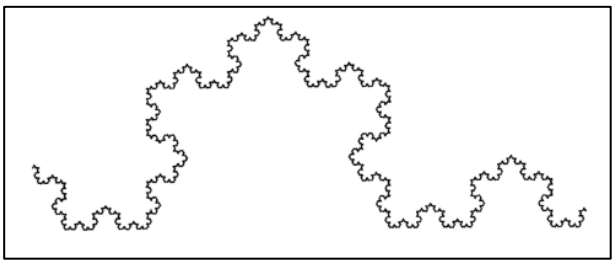


Ilustración 22. Limite de figura de von Koch

Si creamos un triángulo que cada lado sea esta curva y que este contenido en una circunferencia unitaria, podemos observar cómo se comenzará a crear esta figura de perímetro infinito, pero al estar contenida en una circunferencia, su área es finita, como es mostrado en la ilustración 23.

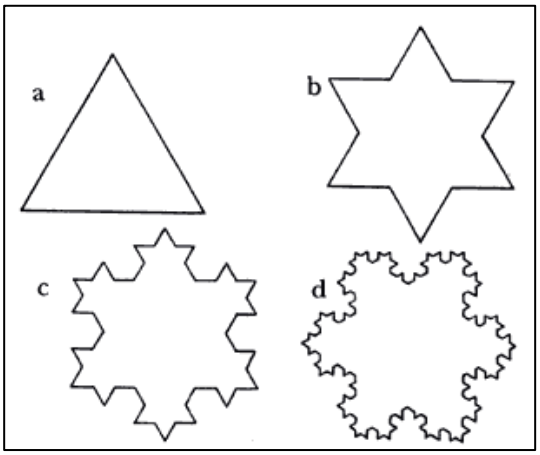


Ilustración 23. Triangulo von Koch

Este mismo proceso de puede crear con áreas infinitas que contengan un volumen finito, este tipo de objetos nos dejan en claro que los elementos de las sucesiones no tienen la misma naturaleza de los límites, los cuales muchas veces pueden contradecir nuestra intuición.

Capítulo 3
Separación de lo intuitivo y lo formal

En esta sección se mostrará la evidencia de cómo los estudiantes enfrentan problemas relacionados con el cálculo y el análisis matemático, observando como se relaciona con la separación de la formalidad y la intuición. Así mismo detallaremos las condiciones en que se llevó a cabo el trabajo experimental. Recordando la diferencia que existe en las epistemologías del cálculo y el análisis, dejando en claro que las diferencias entre ambas disciplinas generan conflictos cognitivos.

3.1 Aspectos metodológicos

Se pretende observar las dificultades que enfrentan los estudiantes al trasladarse de lo intuitivo a lo formal en temas del cálculo y el análisis matemático. Explorando las metodologías que utilizan los estudiantes para resolver problemas del cálculo y del análisis, particularmente la convergencia de sucesiones y series. Estudiando como los estudiantes se trasladan de las ideas intuitivas a la justificación formal de los conceptos.

3.1.1 Población.

Durante el semestre II-2017 y el semestre I-2018 observamos a un grupo de estudiantes que cursaban su primer y segundo semestre, respectivamente, de maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa en el Centro de investigación y de estudios avanzados el Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), durante un seminario semestral que trataba temas de cálculo y análisis matemático.

Como se muestra en la siguiente tabla los estudiantes tienen formación en matemáticas o carreras afines. Los etiquetamos con letras mayúsculas del abecedario para evitar exponer sus identidades.

Estudiante	Licenciatura o Ingeniería
A	Lic. en Matemáticas Aplicadas
B	Lic. en Matemáticas
C	Ing. Matemático
D	Ing. Mecatrónica
E	Lic. Ciencias Físico Matemáticas
F	Ing. Industrial
G	Lic. En Enseñanza de las Matemáticas
H	Ing. Matemático
I	Ing. Químico Industrial

3.1.2 Escenario.

De acuerdo con el programa que puede ser obtenido en la página del departamento (https://www.matedu.cinvestav.mx) el objetivo de la maestría en ciencias con especialidad en Matemática Educativa es formar investigadores y docentes especializados capaces de proponer alternativas de solución a problemas educativos en el ámbito de las matemáticas en los distintos niveles del sistema educativo nacional. Por lo cual, los egresados de este programa serán capaces de ejercer la docencia especializada en el área, así como de asesorar a las instituciones y organismos encargados de diseñar los planes y programas educativos de matemáticas en todos los niveles del ámbito educativo nacional; serán capaces de investigar sobre los procesos de la enseñanza de las matemáticas, de su aprendizaje y de los medios en los que se producen; de realizar propuestas, críticas y asesorías acerca de situaciones específicas de la educación matemática; de diseñar estrategias de enseñanza y, de formar y dirigir grupos de trabajo.

El objetivo de los seminarios es tratar temas relacionados con el cálculo y el análisis matemático de manera que los estudiantes puedan detectar los cambios de epistemología que hay entre las disciplinas mencionadas y comprendan la manera óptima de abordar cada problemática. El primer seminario consiste en tres horas

cada semana. En el cual se trataron temas relacionados a cálculo de áreas, derivada, métodos e integración, cálculos con infinitesimales, funciones trigonométricas, exponencial, logaritmo y polinomios, regla de la cadena, teorema fundamental del cálculo, series de potencias, máximos y mínimos, resultados y métodos clásicos de cálculo y de geometría, sin que se proporcionaran definiciones formales de los conceptos tratados. Los temas de análisis como límite de una sucesión, criterios de convergencia de series, teoremas de continuidad, propiedad arquimediana se abordaron de manera formal, enunciando teoremas y algunas definiciones; pero también de manera intuitiva, visual y operativa.

3.1.3 Instrumentos de recolección de datos.

A lo largo de cada semestre, analizamos los exámenes y los cuestionarios que eran aplicados durante el seminario a los estudiantes como parte de su evaluación.

Los cuestionarios eran breves intervenciones que se hacían durante los seminarios; a diferencia de los exámenes éstos se empleaban durante el seminario, lo cual les permitía estar contextualizados, por lo que les en un aproximado de 15 minutos podían responder, siendo estos evaluados como trabajo en clase; consistían preguntas y problemas breves, por ejemplo: determinar si una función era continua, cuál era el límite de algunas sucesiones, explicar qué es la derivada, explicar qué significa el límite de una sucesión, determinar si una serie es convergente, etc. que son conceptos estudiados comúnmente en los cursos tradicionales de cálculo. Ya que durante el curso se calculaban limites cuando la variable deseada tiende a infinito, los estudiantes interpretaban los limites solicitados como límites al infinito debido a la contextualización realizada.

Cuestionario 1. Si $a > b$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$

Cuestionario 2. Si $a_{n+1} - a_n \to 0$ ¿es a_n convergente?

Cuestionario 3. Se tiene que $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$. Demuestre que es convergente y determinar el límite.

Cuestionario 4. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Cuestionario 5. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Cuestionario 6. Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{n}{(1.01)^n}$

Cuestionario 7. Calcular el límite de $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

Cuestionario 8. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$

Cuestionario 9. Calcular el límite de la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

Los exámenes, en cambio, eran sobre temas abordados durante el seminario y generalmente contenían problemas tomados del libro Apostol (2001). Consideramos las respuestas de los estudiantes en los exámenes como producto de un repaso en los temas, ya que se les avisaba con anticipación y su calificación dependía de sus resultados.

Examen 1.

1. El triángulo original es equilátero de área 1. Calcular el área total de la sucesión de triángulos sombreados (¡una infinidad!). Esta sucesión es de triángulos equiláteros.

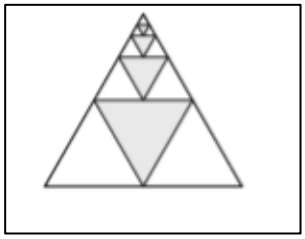


Ilustración 24. Sucesión en triángulo

2. Sin usar integrales pruebe que el volumen del sólido de rotación (generado por $y = \frac{1}{x}$) donde hasta infinito, es un volumen finito.

3. Encuentre (explique cuidadosamente) la fracción (decimal) correspondiente a: $\alpha = 0.313131\ldots$ (31 se repite infinitamente)

Examen 2

1. A) Probar que la sucesión $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$ es decreciente

   B) Calcule el límite de $b_n = 2a_n$

   C) ¿Por qué sabe que el límite existe?

2. A) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, probar que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$

   B) Si $r = \lim_{n\to\infty} |a_n|$, podrá afirmarse que la sucesión $\{a_n\}_n$ es convergente.

3. Si $a_n \to L$ y cada $a_n \in \mathbb{N}$ ¿Qué puede decirse del límite L?

Examen 3

1. ¿Qué significa que la sucesión sea convergente?

2. Qué se puede asegurar de los límites de una sucesión si sus elementos:

a) son números naturales, ¿por qué?

b) se encuentran en un intervalo [a, b] y la sucesión es monótona. ¿Por qué?

3. Calcular el límite de $a_n = \frac{n-1}{n}$

4. Diremos que una sucesión $(a_n)_n$ es de Cauchy si dado un $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para todos los números naturales $m, n > N$, se cumple que $|a_m - a_n| < \varepsilon$ Demuestre que, si una sucesión es convergente, entonces es de Cauchy.

Examen 4

1. Dada la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. ¿Cero es elemento de la sucesión?
2. Escriba verdadero o falso. En caso de ser verdadero, justifique. En caso de ser falso, de un contraejemplo.

a) Toda sucesión acotada es convergente.

b) Las sucesiones monótonas siempre son acotadas.

Examen 5

1. Probar que si $\sum a_n$ es convergente ($a_n > 0$) entonces $\sum a_n^2$ es convergente.
2. Si $\sum a_n^2 < \infty$ entonces $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

Examen 6

1. Si $a_n \to 0$ Demuestre que la serie $\sum \frac{a_n}{{a_n}^2+n^2}$ es convergente
2. Si para todo n se cumple que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ¿qué puede decir de la serie $\sum a_n$?
3. ¿La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{20}{7}\right)^n \frac{n!}{(n+1)^n}$ es convergente o divergente?
4. Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. ¿Converge o diverge?

Debido a que la cantidad de exámenes y cuestionarios aplicados es abundante, solamente iremos desglosando algunas partes de estos que consideremos necesarias en las siguientes secciones. Pero todas las respuestas obtenidas de los estudiantes podrán ser observadas junto con las transcripciones en los anexos adjuntos al documento.

3.2 Evidencias, interpretación y resultados.

Las respuestas de los estudiantes ante problemas que son comunes en cálculo y análisis dejan al descubierto las dificultades de interpretación en la transición de lo intuitivo a la formal y la necesidad de ir refinando la intuición hacia el pensamiento matemático superior.

Las categorías descritas a continuación nos permiten realizar una clasificación de los resultados obtenidos en los cuestionarios y exámenes, con la finalidad de facilitar al lector la comprensión de las ideas principales en nuestro análisis de datos.

- **Intuición y simbolismo sin formalidad.**

En la pregunta 4 del examen 3, demuestre que si una sucesión es convergente entonces es de Cauchy, podemos observar como el estudiante I no hace una demostración formal del problema, pero utiliza su intuición mediante gráficas que le permiten externar las ideas que tiene interiorizadas.

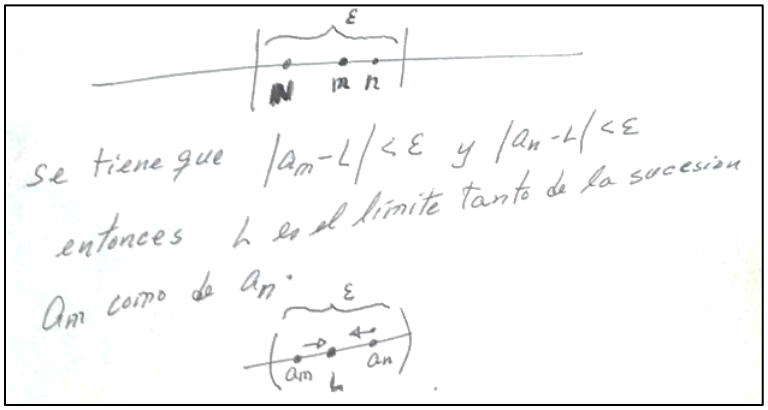
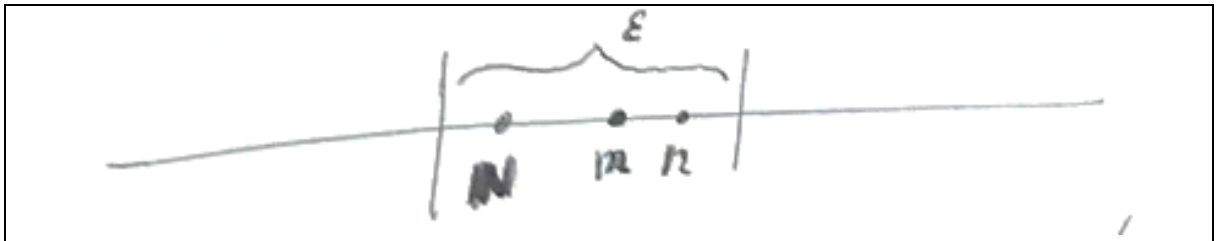
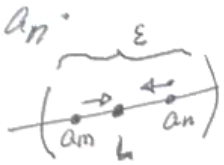


Ilustración 25. Estudiante I



Se tiene que $|a_m - L| < \varepsilon$ y $|a_n - L| < \varepsilon$ entonces L es el límite tanto de la sucesión a_m como de a_n.



Al realizar los dibujos el estudiante demuestra tener una imagen conceptual acertada y que su intuición es correcta, pero eso no le es suficiente para concretar una demostración formal del problema, dejando una gran distancia entre su resultado y la definición formal del concepto.

Al momento de analizar el dibujo podemos asegurar que comprende la idea básica de ambos conceptos, pero claramente podemos ver que eso no le es suficiente para expresar con palabras lo que comprende, dejando claro que la conceptualización o demostración de un concepto no es únicamente tener una idea de la problemática a la que nos enfrentamos.

El estudiante interpreta la definición de límite y puede realizar dibujos sobre las ideas que fueron generadas bajo esa comprensión, pero ese conocimiento no le permite llegar a demostraciones formales, dejando un simbolismo sin formalidad.

- **Necesidad de una idea corporizada**

En el cuestionario 1, podemos ver como el estudiante B, busca la manera de comprender el problema ejemplificando un caso particular, el cual, a pesar de no llevarlo a una resolución del problema, podemos apreciar como el primer acercamiento es buscar una comprensión intuitiva del problema sustituyendo valores cercanos al cero, los cuales son fácil de comprender, buscando la relación entre lo conocido previamente y el nuevo conocimiento que está interpretando.

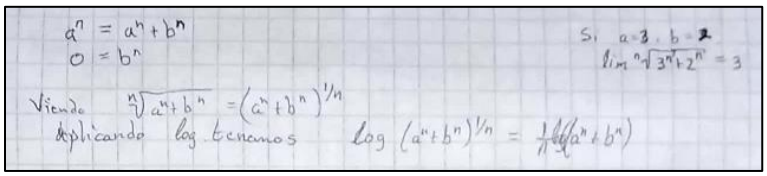


Ilustración 26. Estudiante B

$a^n = a^n + b^n$

$0 = b^n$

$Si\ a = 3\ ,\ b = 2$

$lim \sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3$

Viendo $\sqrt[n]{a^n + b^n} = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$

Aplicando log tenemos $log(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} log(a^n + b^n)$

En el momento en el que observa que el ejemplo particular no le ha permitido concluir claramente, busca otros métodos conocidos como aplicar logaritmos para simplificar el problema, quedando nuevamente en algo difícil de interpretar bajo los conocimientos obtenidos con anterioridad.

Nuevamente, en el cuestionario 9, podemos ver como el estudiante vuelve a abordar el problema de manera similar, tratando de encontrar el término general en la sucesión, llegando una vez más a una idea difícil de reinterpretar.

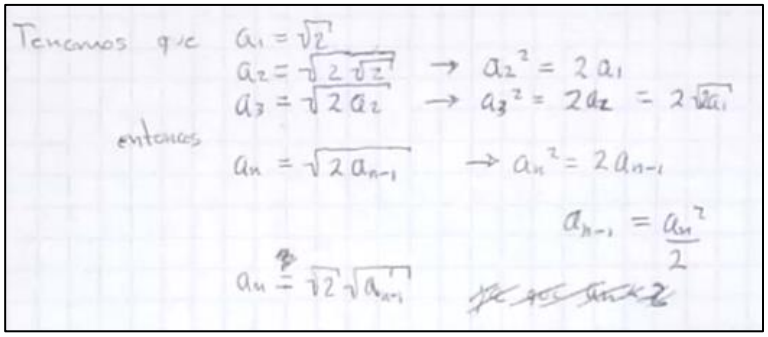


Ilustración 27. Estudiante B (2)

Tenemos que

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} \rightarrow a_2^2 = 2a_1$$

$$a_3 = \sqrt{2a_2} \rightarrow a_3^2 = 2a_2 = 2\sqrt{2a_1}$$

Entonces

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \rightarrow a_n^2 = 2a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n^2}{2}$$

$$a_n = \sqrt{2}\sqrt{a_{n-1}}$$

A pesar de que no llega al resultado esperado en estos dos problemas, podemos ver que el estudiante utiliza esta metodología para abordar las problemáticas a las que se enfrenta, buscando la manera de relacionar el problema con conceptos conocidos.

El estudiante I, nos demuestra que la búsqueda de ideas conocidas no es exclusiva del estudiante B, pues al momento de abordar el problema busca generalizar el termino n-ésimo igual que su compañero de manera que pueda encontrar una solución del problema.

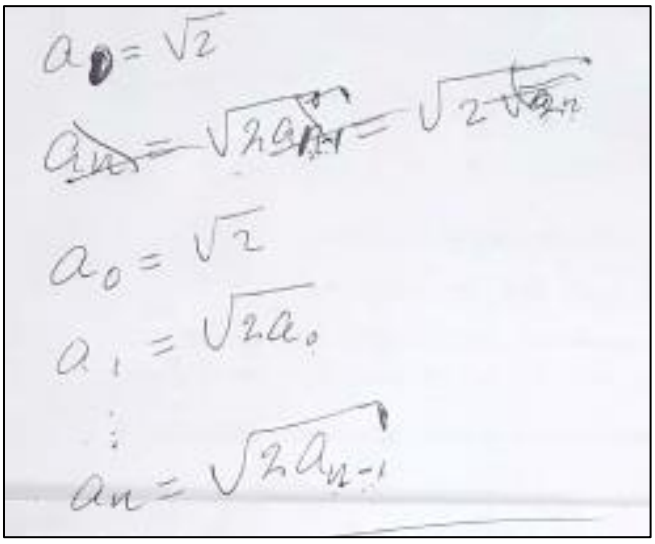


Ilustración 28. Estudiante I (2)

$a_1 = \sqrt{2}$

$$a_0 = \sqrt{2}$$

$$a_1 = \sqrt{2a_0}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$$

Vimos como en la primera sección este mismo joven hizo el intento por expresar el concepto de manera gráfica para poder interpretarlo, en esta ocasión la manera de abordarlo es buscando la generalización del término, pero nuevamente teniendo una deficiencia para concluir.

- **Búsqueda de la formalidad.**

En la figura se muestra como el estudiante B responde el Cuestionario 3, comienza abordando la demostración mediante el teorema: toda sucesión creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) de números reales es convergente. Dicho teorema nos permite imaginar la demostración sin necesidad de un gran proceso matemático, pues involucra la intuición que el ser humano ya tiene adherida. Por lo cual, continúa tratando de asegurar que la sucesión descrita cumpla las premisas del teorema para asegurar su convergencia. Es aquí donde vemos como el estudiante busca la forma de los primeros elementos para llegar a la generalización del n-ésimo término.

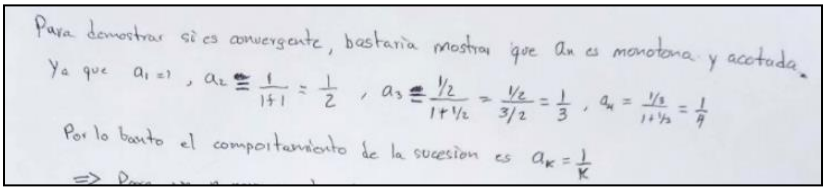

Para demostrar si es convergente, bastaría mostrar que a_n es monotona y acotada.
Ya que $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1/3}{1+1/3} = \frac{1}{4}$
Por lo tanto el comportamiento de la sucesion es $a_K = \frac{1}{K}$
=> Para

Ilustración 29. Estudiante B (3)

Para demostrar si es convergente, bastaría mostrar que a_n es monótona y acotada.

Ya que $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$

Por lo tanto el comportamiento de la sucesión es $a_k = \frac{1}{k}$.

Nuevamente este estudiante aborda el problema buscando una sucesión conocida, pero en esta ocasión si fue obtenida, trabajando ahora con la sucesión equivalente. Una vez que concluye que la sucesión es decreciente y está acotada determinan que implica que la sucesión es convergente, al hacer uso directamente del teorema que hemos mencionado con anterioridad como vemos en la ilustración 29.

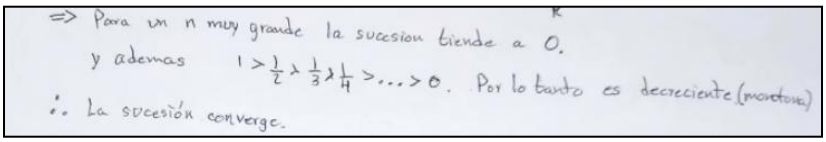


Ilustración 30. Estudiante B (4)

Entonces para un n muy grande la sucesión tiende a 0. Y además $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > 0$. *Por lo tanto es decreciente (monótona)*

∴La sucesión converge.

Consideraríamos que una vez que el estudiante hizo uso del teorema, el problema ha concluido, pero como vemos en la ilustración 30, el estudiante no queda satisfecho con el uso del teorema, el cual a pesar de ser intuitivo tiene una demostración formal, lo cual debería generar al estudiante una seguridad al utilizarlo. Pero al ver que el estudiante por buscar una formalidad en la demostración termina haciendo doble trabajo en este problema, dejándonos claro que la mecanización del teorema no le ha permitido una apropiación del conocimiento.

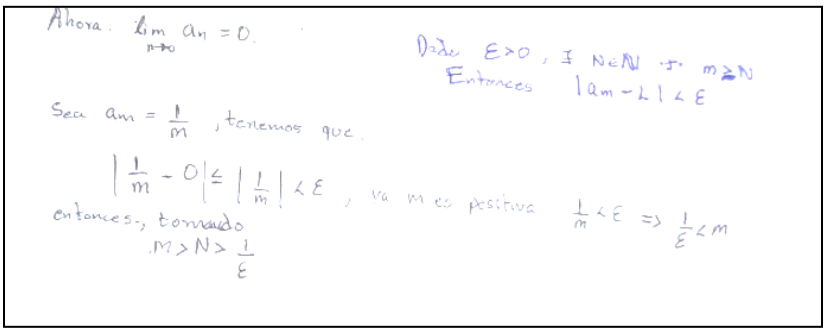


Ilustración 31. Estudiante B (5)

Ahora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *Dado* $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \geq N$ *entonces* $|a_m - L| < \varepsilon$

Sea $a_m = \frac{1}{m}$, *tenemos que* $\left|\frac{1}{m} - 0\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| < \varepsilon$, *ya que m es positiva* $\frac{1}{m} < \varepsilon$ *entonces* $\frac{1}{\varepsilon} < m$ *entonces, tomando* $m > N > \frac{1}{\varepsilon}$

- **Comprensión total de la definición formal**

Es posible que el uso de demostraciones formales está ligada directamente a la comprensión de las definiciones formales. A los estudiantes se les aplico un cuestionario el cual contenía dos preguntas. Examen 3, pregunta 1: ¿Qué significa que una sucesión a_n sea convergente? Y Examen 3, pregunta 2: ¿Qué se puede asegurar del límite de una sucesión si sus elementos son números naturales? Podemos ver que la respuesta del estudiante G a la primera pregunta es una clara idea de la definición de convergencia.

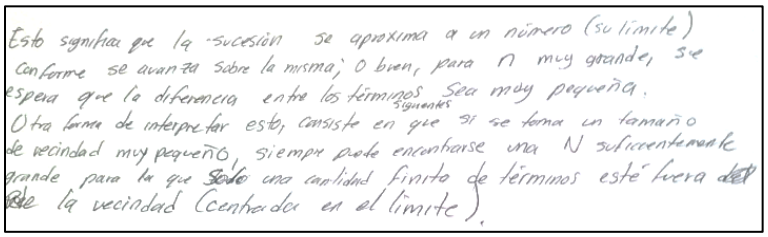
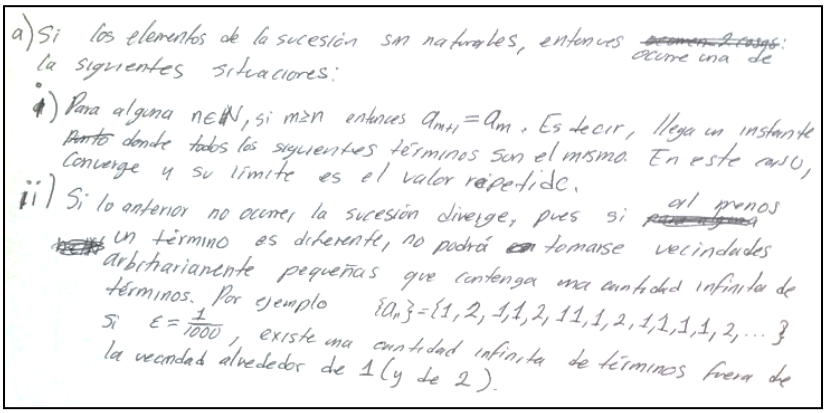


Ilustración 32. Estudiante G

Esto significa que la sucesión se aproxima a un número (su límite) conforme se avanza sobre la misma; o bien, para n muy grande, se espera que la diferencia entre los términos siguientes sea muy pequeña. Otra forma de interpretar esto, consiste en que, si se toma un tamaño de vecindad muy pequeño, siempre puede

encontrarse una N suficientemente grande para la que solo una cantidad finita de términos este fuera de la vecindad (centrada en el límite).

Y de esta forma al contestar la segunda pregunta la respuesta está relacionada con la anterior, dejando claro que el formalismo de su justificación consiste en la comprensión de la definición formal de convergencia.


a) Si los elementos de la sucesión son naturales, entonces ocurre una de la siguientes situaciones:

i) Para alguna $n \in \mathbb{N}$, si $m \geq n$ entonces $a_{m+1} = a_m$. Es decir, llega un instante donde todos los siguientes términos son el mismo. En este caso, converge y su límite es el valor repetido.

ii) Si lo anterior no ocurre, la sucesión diverge, pues si al menos un término es diferente, no podrá tomarse vecindades arbitrariamente pequeñas que contenga una cantidad infinita de términos. Por ejemplo $\{a_n\} = \{1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, \ldots\}$ Si $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, existe una cantidad infinita de términos fuera de la vecindad alrededor de 1 (y de 2).

Ilustración 33. Estudiante G (2)

Entonces ocurre una de las siguientes situaciones:

i) Para algún $n \in \mathbb{N}$, si $m \geq n$, entonces $a_m + 1 = a_m$. Es decir, llega un instante donde todos los siguientes términos son el mismo. En este caso, converge y su limite es el valor repetido.

ii) Si lo anterior no ocurre, la sucesión diverge, pues si al menos un término es diferente, no podrá tomarse vecindades arbitrariamente pequeñas que contenga una cantidad infinita de términos. Por ejemplo $\{a_n\} = \{1,2,1,1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,2, \ldots\}$ si $\varepsilon = \frac{1}{100}$, existe una cantidad infinita de términos fuera de la vecindad alrededor de 1 (y de 2)

La interpretación que observamos en el estudiante al dar ejemplos tan claros, nos permite ver la apropiación del concepto, generando una interpretación propia de los conceptos establecidos, por lo cual puede abordar diferentes tipos de problemática.

- **Uso de resultados conocidos**

En el cuestionario 5, el estudiante G, recurre al uso de la integral para comprobar la convergencia de la serie dada, realizando gráficas que nos permiten ver como el estudiante recurre a la visualización para la interpretación de su resultado.

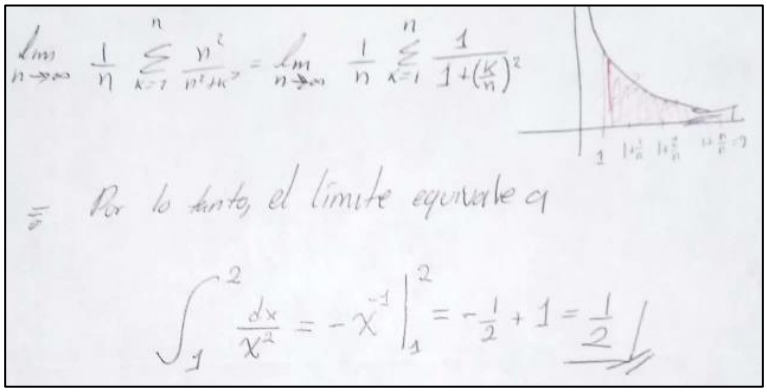
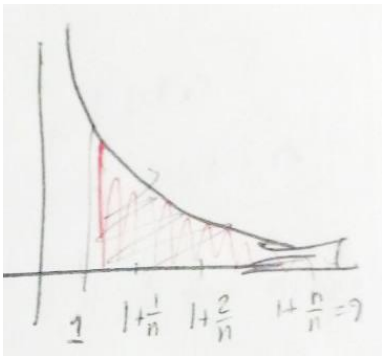


Ilustración 34. Estudiante G (3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$



Por lo tanto, el límite equivale a

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -x^{-1}|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

El aprovechar los conocimientos previos, permiten al estudiante realizar vínculos entre lo aprendido y el nuevo conocimiento, de manera que la comprensión de los conceptos es mayor, con ello obtiene una comprensión máxima del objeto de estudio.

- **Buena intuición sin formalización**

El estudiante A, en el cuestionario 7, trata de buscar mediante la intuición el límite de la sucesión, dejando en claro cómo debería realizarse una definición formal del problema, pero sin poder llevarlo a cabo.

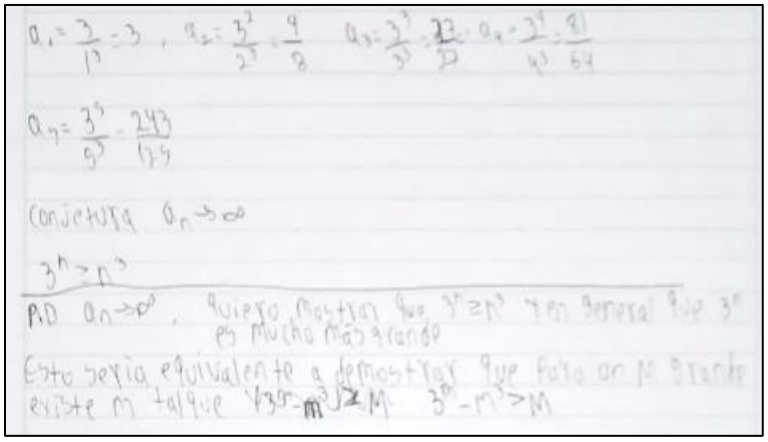


Ilustración 35. Estudiante A

$a_1 = \frac{3}{1^3} = 3 \quad a_2 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} \quad a_3 = \frac{3^3}{3^3} = \frac{27}{27} \quad a_4 = \frac{3^4}{4^3} = \frac{81}{64} \quad a_5 = \frac{3^5}{5^3} = \frac{243}{125}$

Conjetura $a_n \to \infty$

$3^n \geq n^3$

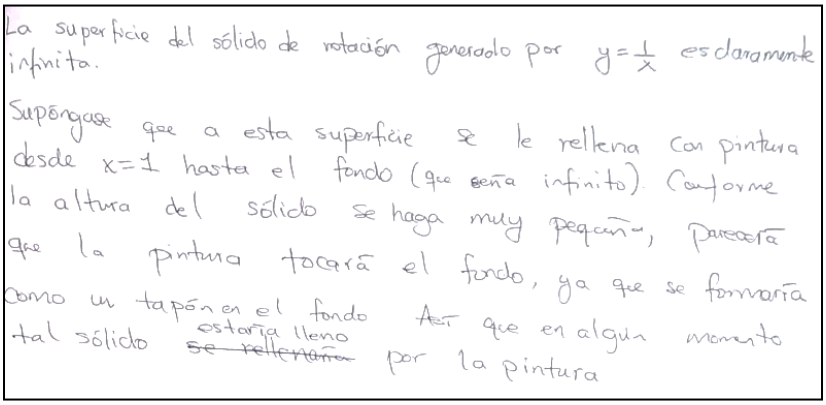
P.D. $a_n \to \infty$ *quiero mostrar que* $3^n \geq n^3$ *y en general que* 3^n *es mucho más grande*

Esto sería equivalente a demostrar que para un M grande existe m tal que $3^m - m^3 > M$.

El concepto imagen que tiene el estudiante es correcta, pero eso no le permite llegar a la demostración mediante la definición formal, es por ello por lo que podemos ver que el tener una intuición buena acerca del problema no nos permite concluir si no tenemos una apropiación de las definiciones formales.

En el examen 1, pregunta 2, podemos observar como a pesar de que el estudiante no hace alguna demostración matemática para comprobarlo, asegura que, en lugar de tener una superficie infinita, el volumen sería finito, explicando

que en el fondo se crearía un tapón que haría que en caso de llenar esto de pintura, sería una cantidad finita la necesaria.


La superficie del sólido de rotación generado por $y=\frac{1}{x}$ es claramente infinita.

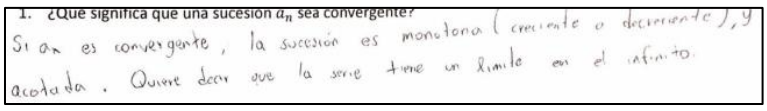
Supóngase que a esta superficie se le rellena con pintura desde $x=1$ hasta el fondo (que sería infinito). Conforme la altura del sólido se haga muy pequeña, parecería que la pintura tocará el fondo, ya que se formaría como un tapón en el fondo. Así que en algún momento tal sólido estaría lleno de pintura.

Ilustración 36. Estudiante G

La superficie del sólido de rotación generado por $y = \frac{1}{x}$ es claramente infinito. Supóngase que a esta superficie se le rellena con pintura desde $x = 1$ hasta el fondo (que sería infinito). Conforme la altura del sólido se haga más pequeño, parecería que la pintura tocara fondo, ya que se formaría como un tapón en el fondo. Así que en algún momento tal sólido estaría lleno de pintura.

Con lo cual podemos asegurar que tiene una intuición correcta del problema, pero no logra formalizarla.

El Estudiante D, al contestar la pregunta de convergencia, enuncia el teorema conocido sobre monotonía y acotamiento, pero no describe la definición formal del límite, lo cual nos hace pensar que el estudiante aborda los problemas únicamente con esta intuición sobre el problema sin concluir formalmente.


1. ¿Qué significa que una sucesión a_n sea convergente?

Si a_n es convergente, la sucesión es monotona (creciente o decreciente), y acotada. Quiere decir que la serie tiene un límite en el infinito.

Ilustración 37. Estudiante D

Si a_n es convergente, la sucesión es monótona (creciente o decreciente), y acotada. Quiere decir que la serie tiene un límite en el infinito.

Lo cual comprobamos más adelante en ese mismo examen, al contestar la pregunta 4. Donde vemos que, al comienzo de la demostración, en lugar de acudir a la definición para comprobar si la sucesión es de Cauchy, enuncia el teorema.

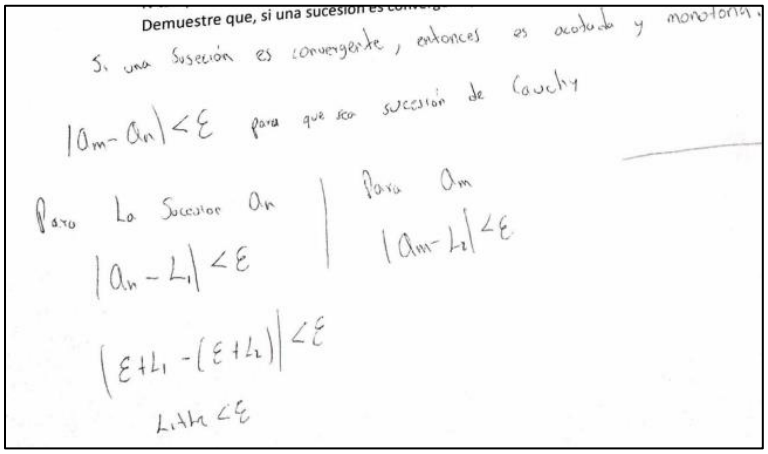


Ilustración 38, Estudiante D (2)

Si una sucesión es convergente, entonces es acotada y monótona.
$|a_m - a_n| < \varepsilon$ *para que sea sucesión de Cauchy*
Para la sucesión a_n *Para* a_m
$|a_n - L| < \varepsilon$ $|a_m - L| < \varepsilon$

$|\varepsilon + L_1 - (\varepsilon + L_2)| < \varepsilon$
$L_1 + L_2 < \varepsilon$

- **Intuición divergente.**

La intuición muchas veces nos puede llevar a caminos que no podrían ser acertados, pues en temas como los de análisis matemático, es necesario desarrollar una *nueva intuición*, definiendo esta nueva intuición como aquella que se desarrolla a partir de las definiciones formales que nos permiten comprender un límite de manera conceptual y no vincularlo con una "barrera" o algo que en algún momento se detendría, como vemos con la ilustración 38, pues al preguntarle al estudiante en el examen 2, pregunta 3: ¿Qué puede decir del límite de una sucesión

si sus elementos son naturales?, llega a la conclusión que si la sucesión es decreciente, se detendría en el cero.

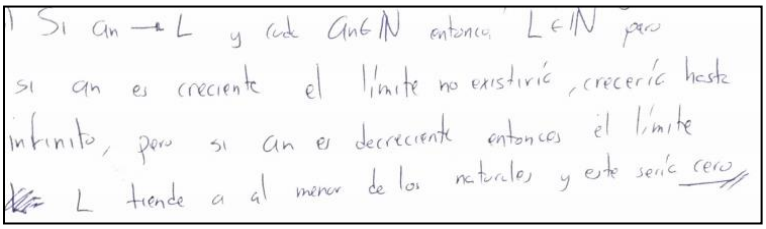


Ilustración 39. Estudiante F.

Si $a_n \to L$ y con $a_n \in \mathbb{N}$, entonces $L \in \mathbb{N}$ pero si a_n es creciente el limite no existirá, crecerá hasta infinito, pero si a_n es decreciente entonces el límite L tiende al menor de los naturales y este será cero.

El estudiante I en el cuestionario 2, partiendo de una intuición, en este caso errónea, trata de dar solución, tratando de justificar sus ideas iniciales con la definición formal.

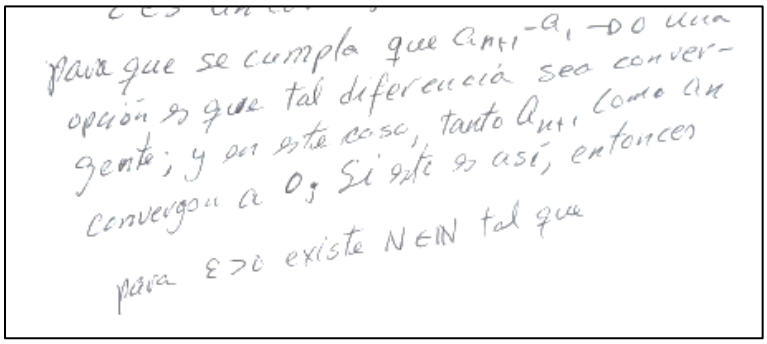


Ilustración 40. Estudiante I

Para que se cumpla que $a_{n+1} - a_n \to 0$ una opción es que tal diferencia sea convergente; y en este caso, tanto a_{n+1}como a_n convergen a 0, si esto es así, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

Tras el análisis de los cuestionarios descritos, fueron seleccionados dos estudiantes, los cuáles consideramos presentaban mayor dificultad que los otros estudiantes para realizar el traslado del cálculo al análisis, por lo cual se analizará a continuación alguna de la evidencia recaudada.

¿La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{20}{7}\right)^{n}\frac{n!}{(n+1)^{n}}$ es convergente o divergente?

El estudiante D utiliza el criterio conocido como criterio del cociente, con el cual decide abordar el problema formalmente sin describir alguna intuición sobre el problema.

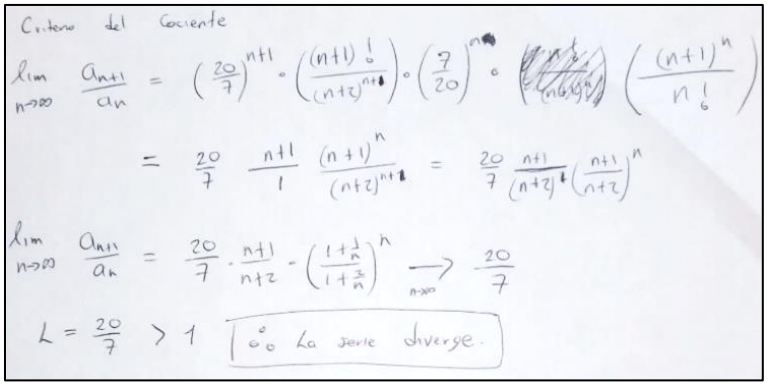


Ilustración 41. Estudiante D

Criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{20}{7}\right)^{n+1}\left(\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\right)\left(\frac{7}{20}\right)^{n}\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{\frac{20}{7}\frac{n+1}{n}(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}=\frac{20}{7}\frac{n+1}{(n+2)^1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{20}{7}\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n\to\frac{20}{7}$$

$$L=\frac{20}{7}>1 \quad \therefore \textit{La serie diverge}$$

Mientras que el Estudiante I, utiliza el criterio de la raíz, de la misma manera de su compañero abordando el problema de manera formal, sin intuir de alguna otra forma sobre el problema.

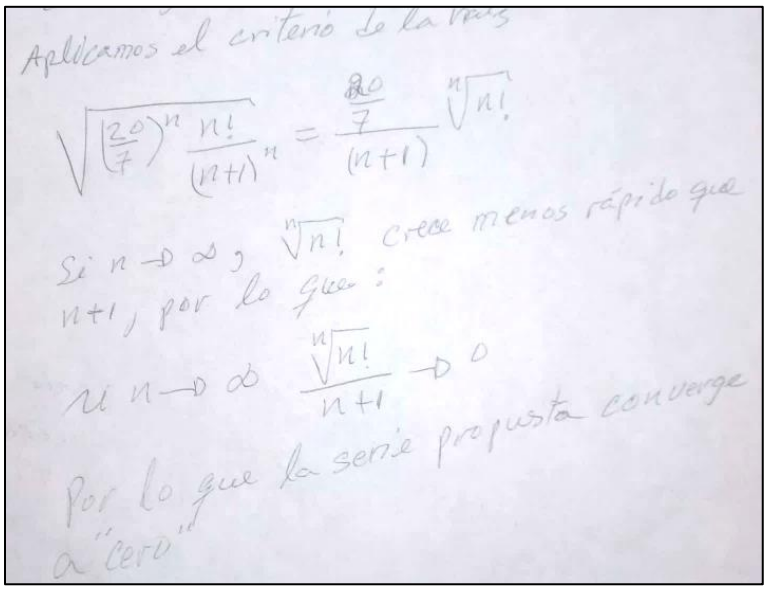


Ilustración 42 Estudiante I

Aplicamos el criterio de la raíz

$$\sqrt{\left(\frac{20}{7}\right)^n \frac{n!}{(n+1)^n}} = \frac{\frac{20}{7}}{n+1} \sqrt[n]{n!}$$

Si $n \to \infty$, $\sqrt[n]{n!}$ *Crece menos rápido que* $n+1$ *, por lo que: si* $n \to \infty$ $\quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \to 0$

Por lo que la serie propuesta converge a "cero"

De esta forma, los resultados obtenidos por estos dos jóvenes fueron similares, abordaron los problemas de manera metodológica, sin darle una interpretación clara a los problemas, lo que en muchas ocasiones los llevaba a resultados incorrectos.

El análisis de estos estudiantes de posgrado, los cuáles buscan la formación de investigador o profesor, nos lleva a la conclusión que tienen dificultades al realizar el traslado del cálculo al análisis, pues al no comprender la formalidad que se exige en las demostraciones, se llegan a ideas erróneas de los conceptos, las cuales son concebidas debido a la intuición que el ser humano desarrolla a partir de sus experiencias, por lo cual, es necesario desarrollar una segunda intuición a partir de

la formalidad que las matemáticas requieren, de manera que podamos explotar al máximo los conceptos de la disciplina.

Esto nos lleva a pensar en la generalización en la historia del cálculo, no desde el punto de vista de un historiador, sino desde el punto de vista de alguien interesado en la herencia recibida de los matemáticos del pasado, encontramos que aspectos observados hace años, siguen presentes en nuestros estudiantes de hoy en día.

Como Kidron menciona el traslado entre lo sensoriomotriz y su formalidad genera una problemática debido a la concepción que tienen los estudiantes sobre el infinito. Pues muchas veces ven un simple límite como una barrera en la cuál en las evidencias presentadas pudimos observar diferentes dificultades que explicaremos a continuación.

- Dificultad para llegar a una formalización a partir de las intuiciones que tenían sobre los problemas, con lo cual podemos deducir que hay un obstáculo de comprensión conceptual para transformar las intuiciones en formalismos. Como el caso del estudiante que podía dar una interpretación geométrica al concepto de límite, pero tenía deficiencias para realizar una formalización.
- Dificultad para darle una interpretación coherente a las definiciones formales de los conceptos, este caso es muy común en diferentes conceptos, al observar como estudiantes repiten metodológicamente una definición formal sin encontrar una reinterpretación correcta, llevándolo a resultados carentes de sentido al no tener un contexto correcto en su aplicación.

La intuición de los estudiantes en los temas relacionados con el cálculo, al ser una disciplina que está conectada a nuestro sistema sensoriomotor, les permite hacer una interpretación intuitiva mediante sus conocimientos corporizados, sin embargo, al momento de atravesar por temas del análisis matemático esta intuición es inservible ya que no son problemas que se puedan abordar bajo la misma

intuición, pues ya mencionamos las diferentes epistemologías que existen entre ambas disciplinas. Por lo cual, es necesario realizar una vinculación con las definiciones formales, de manera que los estudiantes puedan apropiarse de la definición como si fuera algo adherido a su sistema y poder utilizarlo como herramienta al abordar problemas que no son tan análogos a nuestra realidad.

En nuestra población observamos que a pesar de crear este curso para combatir las deficiencias que enfrentan los estudiantes en el traslado entre las intuiciones y las formalidades, los aprendientes no lograron dar el salto necesario para llegar a la transformación de sus ideas corporizadas en mecanismos formales.

Por lo cual, podemos afirmar que no pudieron pasar del cálculo al análisis. El curso de pensamiento matemático permitió a los jóvenes tener una introducción a los temas que serían vistos en análisis y esto no fue suficiente para concluir la transición entre ambas disciplinas.

Se considera que la manera en que son abordados estos temas, a partir de la reorganización que Cauchy realizó en las matemáticas, no es un camino favorable para la adquisición del conocimiento, como criticó Klein, esta algebrización que ocurrió en las matemáticas hace que los estudiantes dejen de lado esa apropiación de los problemas mediante la intuición lo que los lleva a problemas al querer formalizar los conceptos.

Capítulo 4

4.1 El cálculo y el análisis

Como expresamos a lo largo del escrito, la diferencia de las epistemologías del cálculo y del análisis nos lleva a diferentes problemáticas ya que a pesar de que ambas disciplinas estudian objetos en común, la forma de visualizarlos es totalmente diferente.

Observar un objeto mediante las definiciones del cálculo es muy diferente que observar el mismo con la formalidad del análisis, la diferencia de las epistemologías permite que cada una lo describa de manera distinta, ampliando nuestro conocimiento sobre cada objeto de estudio.

El cálculo, tanto diferencial como integral, puede traducirse y comprenderse mediante nuestro aparato sensoriomotor, lo que nos permite crear una mayor apropiación del conocimiento al incorporarlo con las vivencias que hemos tenido a lo largo de nuestras vidas, caso contrario a lo que se vive en el análisis matemático.

Durante los cursos impartidos en los semestres mencionados, se hizo el intento por permitir a los jóvenes transitar de una manera más fácil entre estas disciplinas. En algunos casos pudimos observar como los estudiantes no solo podían responder los problemas por los cuáles fueron cuestionados, también podíamos observar una clara apropiación del concepto, con lo cuál vemos que el cambio entre las ideas fue bien recibido y aprendido.

En otros casos, los que consideramos más interesantes en esta investigación, son aquellos los cuáles pese a tener todas las herramientas disponibles a su alcance, les fue imposible aprender análisis matemático.

Esta deficiencia no solamente fue cuestión de incomprensión en la definición formal de los conceptos. Es una gran dificultad a la que se enfrentan los estudiantes al no poder manejar conceptos en los cuales es involucrado el concepto de infinito, el cual queda fuera de nuestra intuición humana, ya que como personas estamos atrapadas en un mundo de tres dimensiones en un tiempo limitado de vida, por lo cual, es muy difícil dejar de lado esa idea finita y tridimensional que

dificulta nuestras comprensión de un espacio de dimensiones mayores, para lo cual debemos desarrollar la *nueva intuición* que mencionamos con anterioridad.

Para poder calcular el límite de una serie o de una sucesión cuando la variable tiende a infinito, es necesario "sacarla" del tiempo para poder llegar al límite, pero en muchas ocasiones nos quedamos atrapados en la idea de nuestra naturaleza humana, lo cual nos dificulta comprender claramente.

Como observamos en el capitulo 2, existen casos donde nuestra intuición ya no nos sirve para resolver el problema, lo que nos genera una dificultad para poder interpretarlo, ya que nuestro sentido común nos indica que, si en una cantidad finita de pasos un objeto cumple con ciertas características, entonces siempre las va a cumplir.

El desvincularnos de esta idea y desarrollar una *nueva intuición* a partir de los conceptos matemáticos y no de nuestra intuición sensoriomotora es un proceso difícil de enfrentar, pero como matemáticos este es el paso que necesitamos dar para dominar cada una de estas disciplinas.

4.2 Herencia matemática

El ser humano busca la manera de adquirir nuevos conceptos creando vínculos con el conocimiento que ha sido adquirido a lo largo de su existencia.

Como sociedad hemos sufrido ese mismo fenómeno, en el cual cada idea matemática que tenemos en la actualidad está impregnada de conocimientos previos que han sido desarrollado por matemáticos en nuestra historia.

A lo largo de este documento visualizamos los cambios que consideramos relevantes para esta investigación a lo largo del tiempo, pero esta visualización no fue vista como un historiador, fue vista como el origen de las ideas que hasta hoy en día guían nuestra forma de interpretar las matemáticas.

La algebrización de las matemáticas, es un acontecimiento que aún estamos viviendo, puesto que en la mayoría de las ocasiones nos aferramos a una demostración cargada de formalización y pretendemos que nuestra mente adhiera esas ideas de manera natural cuando esta simbología no es tan fácil de traducir para nuestro aparato sensoriomotor sin una contextualización favorable.

Podemos leer un gran número de libros de cálculo en los cuáles se repiten una y otra vez definiciones cargadas de simbología en lugar de mostrar una idea clara con concepto básicos como la acumulación y la variación.

Se propone nuevamente tratar el cálculo de esa manera intuitiva que permita a nuestro aparato decodificador generar una vinculación entre esas definiciones y simbologías, con ideas claras que sean posibles comprender mediante la habilidad sensoriomotriz que poseemos como seres humanos.

Muchos jóvenes en la actualidad tienen un miedo a las matemáticas por la cantidad de simbología que hemos adherido a ideas que serían fácil de aprender si las vinculamos con procesos que son fáciles de decodificar para el ser humano.

La idea que tenemos de cada concepto debe coincidir con la definición formal que se tiene del concepto; de esta forma podemos ir creando un péndulo entre intuiciones y formalismos, lo que permitiría a cada estudiante apropiarse de las

ideas y utilizarlas de manera correcta al momento de enfrentarse a un problema matemático.

Como docentes y matemáticos, esperamos que cada estudiante pueda comprender las definiciones que conocemos, permitiéndoles una apropiación del conocimiento, lo que le permitirá solucionar de manera óptima los ejercicios que aplicamos en clase, resolver los problemas dentro de un examen y en general enfrentar de manera favorable cualquier problema matemático que se le presente a lo largo de su vida; siendo esto una evidencia clara de que el estudiante desarrollo esta nueva intuición que le permitió manejar de manera favorable cada concepto del cálculo y el análisis.

El tránsito entre intuiciones y formalismos no es fácil, pero debemos estar conscientes de que es un camino que se debe recorrer, para que de esta forma los estudiantes puedan transitar con la misma facilidad entre las diferentes disciplinas de la materia.

4.2 Ideas finales

En el trabajo de Dávila-Araiza (2015) podemos observar la similitud que hay en los resultados obtenidos, pese al tiempo transcurrido entre ambas investigaciones, podemos asegurar que esta dificultad a la que se enfrentan los estudiantes no es cuestión de la época en la que fueron aplicados los cuestionarios.

La dificultad para concebir un limite no es exclusiva de nuestra investigación y debido a la formación diversa en nuestros estudiantes sabemos que tampoco es cuestión del lugar donde están siendo aplicados estos cuestionarios. Esta dificultad que ya ha sido detectada por otros autores es un problema la que nos enfrentamos una y otra vez, por lo cuál es necesario seguir investigando para crear un camino de mejor acceso a estos temas.

El estudio del cálculo y el análisis, así como el estudio de la intuición y el formalismo, son fundamentales para la comprensión de las matemáticas, debido a que estas son ramas muy utilizadas en la materia.

La aplicación de nuevas formas de enseñanza, mediante el uso de tecnología, contextualización de los problemas o vinculación sensoriomotriz, son diferentes métodos que nos permitirán descartar o agregar nuevos caminos que nos permitan un transito favorable entre el cálculo y el análisis matemático.

Una aportación importante que se podría hacer para una mejor comprensión en estos temas es el uso de softwares de geometría dinámica en problemas del cálculo que permitan una visualización de los problemas de manera intuitiva, delimitando así su naturaleza sensoriomotora, separándolo del análisis; por ejemplo, el calcular el área bajo una curva por agotamiento (ilustración 5) o el caso de las rectas tangentes (ilustración 7).

El uso de retratos digitales para objetos como los fractales, ha sido de gran ayuda para la comprensión de estos, a pesar de ser algo complejo, al generar un apoyo visual que permite al estudiante una adquisición de conocimiento corporizado. Se espera que un mayor número de profesores tomen en cuenta las

deficiencias que existen en el aprendizaje de estos conceptos, al no tener un buen enlace entre la formalización de los conceptos y su intuición, de manera que analicen a mayor profundidad las maneras de combatirlo.

Se desea seguir explorando diferentes caminos para crear una mayor relación entre las ideas que tienen los estudiantes de algún problema, pues nos interesa que los estudiantes dominen esta transición entre ambas disciplinas, teniendo un control sobre la adquisición de conocimientos, de manera que nos permitan desarrollar de una manera más adecuada estos temas y así crear propuestas de enseñanza para facilitar el aprendizaje de los conceptos claves del cálculo y el análisis, como lo es el límite.

Al ser un trabajo que abarca un tema muy importante en las matemáticas, podríamos sugerir diferentes ideas que permitan realizar trabajos a futuro. Sería interesante realizar estos ejercicios analizados con el uso de tecnologías digitales, de manera que los softwares de geometría dinámica nos permitan realizar una interpretación más comprensible de los objetos teóricos que son observados en estas disciplinas, y poder delimitar los problemas propios de cada una de ellas.

Como segunda idea, se podría continuar estudiando como los estudiantes proceden al resolver problemas de otros conceptos diferentes del cálculo y el análisis, para encontrar similitudes en la forma que los estudiantes actúan al enfrentarse a una problemática.

Con esta idea, no se busca diseñar una propuesta didáctica, se pretende trazar el camino que profesores pueden tomar para aplicarlo en la enseñanza de estos conceptos, y con ello, en algún momento llegar a que los estudiantes tengan menos dificultades en el aprendizaje de los conceptos claves de estas disciplinas.

Referencias

Courant, R y Robbins, H. (1941/2002). ¿Qué son las matemáticas? México: FCE

Davila-Araiza, T. (2015). Intuición y Rigor como mediadores cognitivos.

Donald, M. (1993). Origins of the modern mind. Cambridge, Mass. Harvard Univ. Press.

Donald, M. (2001). A mind so rare: The evolution of human consciousness. New York: W. W. Norton & Company.

Edwards, C. H. (1979). The Historical Development of the Calculus, Nueva York, SpringerVerlag.

Euler, L. (1988) Introduction to Analysis of the Infinite. (J. D. Blanton, Trans) New York: Springer-Verlang

Fourier, J. (1822). Teoría análitica del calor.

Kidron, I. (2014) Calculus Teaching and Learning. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 69 – 75. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8.

Klein, F. (1896), "The arithmetizing of mathematics", Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 2, núm. 8, pp. 241-249.

Lakatos, I. (1982) Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales. Madrid, Tecnos.

Lakoff, G. y Núñez, R. E. (2000), Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, Nueva York, Basic Books.

Luria, A. (1984) Conciencia y Lenguaje. Madrid: Visor.

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. ZDM - The international journal on mathematics education,46(4), 621-633. doi:10.1007/s11858-014-0580-4.

Pierpont, J. (1899), "On the arithmetization of mathematics", Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 5, núm. 8, pp. 394-406.

Polya, G. (1966). Cómo plantear y resolver problemas. Madrid: Tecnos.

Roh, K. H. (2008), “Students’ images and their understanding of definitions of the limit of a sequence”, Educational Studies in Mathematics, vol. 69, pp. 217-233.

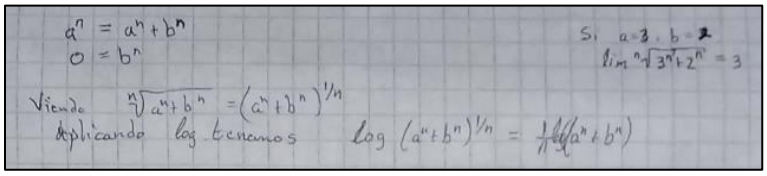
Sosa, L., Flores, E. y Carrillo, J. (2016) Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. Educación Matemática [en linea] 2016, 28 (Mayo-Agosto). ISSN 1665-5826

Tall, D. y Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics, *Educational Studies in mathematics*, 12, pp. 151 - 162.

ANEXO A

Cuestionario 1: Sea $a > b$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$

Estudiante B.



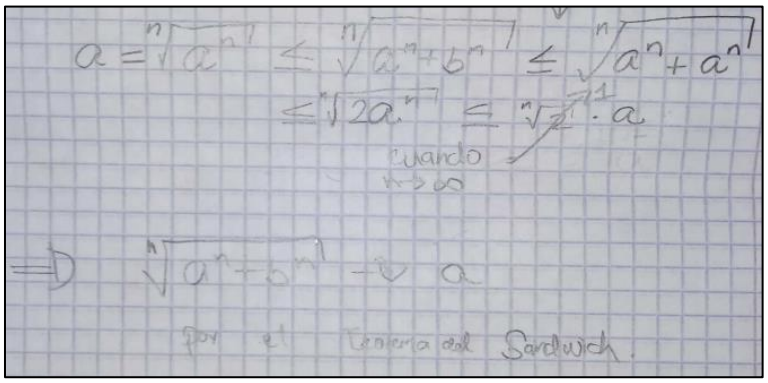
$a^n = a^n + b^n$
$0 = b^n$

Si $a = 3$, $b = 2$
$lim\sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3$

Viendo $\sqrt[n]{a^n + b^n} = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$

Aplicando log tenemos $log(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} log(a^n + b^n)$

Estudiante E.

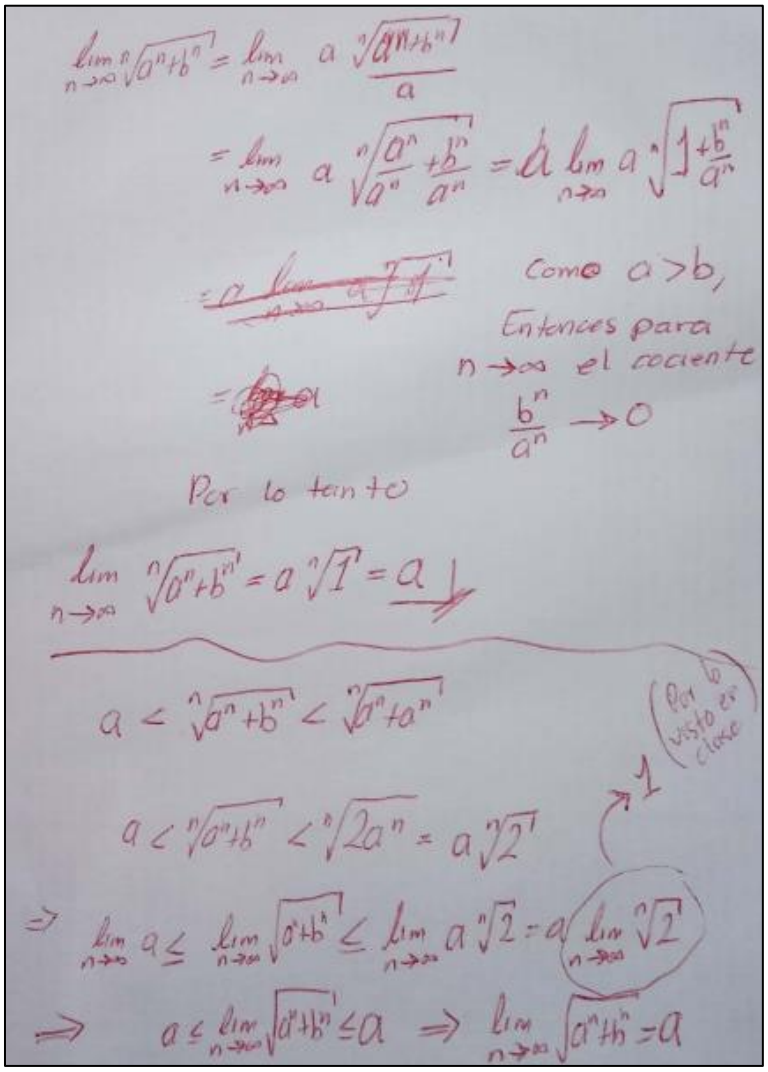


$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + a^n} \leq \sqrt[n]{2a^n} \leq \sqrt[n]{2}a \to a$

Cuando $n \to \infty$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a^n + b^n} \to a$ *por el teorema del Sándwich*

Estudiante G.



$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\sqrt[n]{a^n+b^n}}{a} = \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{\frac{a^n}{a^n}+\frac{b^n}{a^n}} = a\lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{1+\frac{b^n}{a^n}}$$

Como $a > b$. *Entonces para* $n \to \infty$ *el cociente* $\frac{b^n}{a^n} \to 0$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \le a\sqrt[n]{1} = a$$

$$a < \sqrt[n]{a^n+b^n} < \sqrt[n]{a^n+a^n}$$

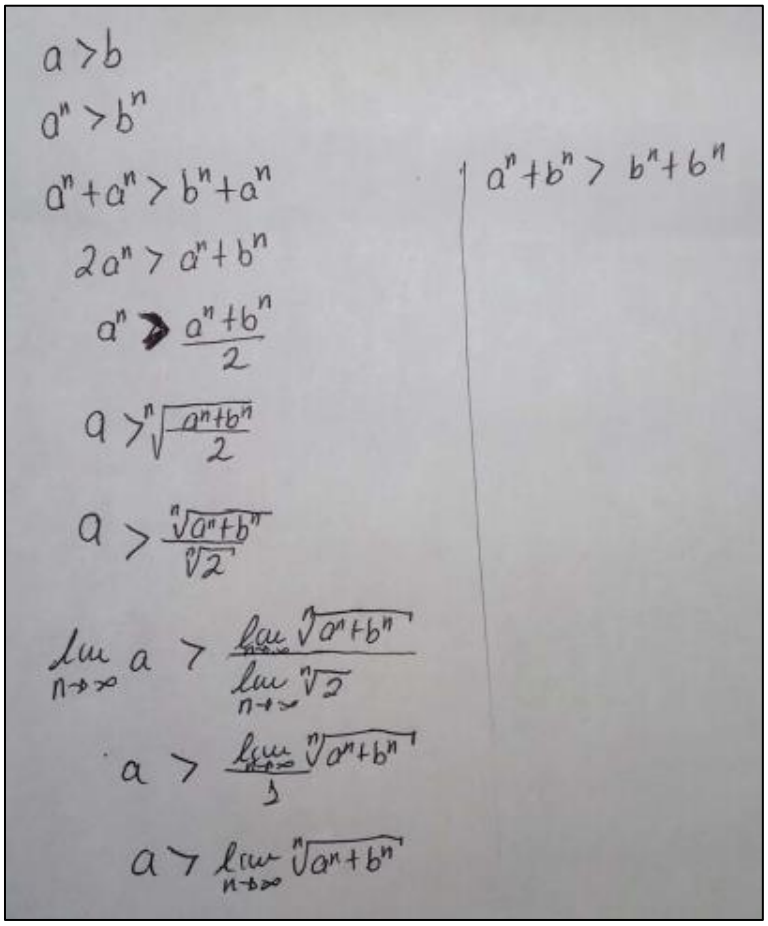
$$a < \sqrt[n]{a^n+b^n} < \sqrt[n]{2a^n} = a\sqrt[n]{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a \le \lim_{n\to\infty} \sqrt{a^n+b^n} \le \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{2} = a\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \to 1 \ (por\ lo\ visto\ en\ clase)$$

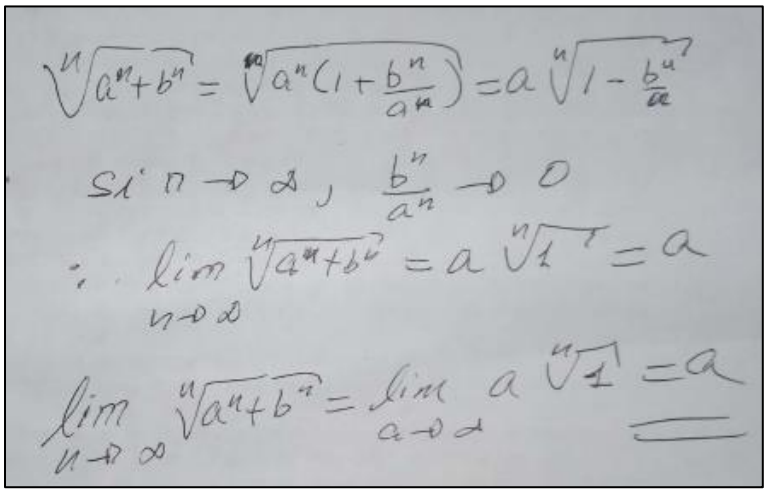
$$\Rightarrow a \le \lim_{n\to\infty} \sqrt{a^n+b^n} \le a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a^n+b^n} = a$$

Estudiante H.



$$a > b$$
$$a^n > b^n$$
$$a^n + a^n > b^n + a^n$$
$$2a^n > b^n + a^n$$
$$a^n > \frac{a^n + b^n}{2}$$
$$a > \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$
$$a > \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{2}}$$
$$\lim_{n\to\infty} a > \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}}$$
$$a > \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}}{1}$$
$$a > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$$
$$a^n + b^n > b^n + b^n$$

Estudiante I.



$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{a^n\left(1 + \frac{b^n}{a^n}\right)} = a\sqrt[n]{1 - \frac{b^n}{n}}$$

$Si\ n \to \infty, \frac{b^n}{a^n} \to 0$

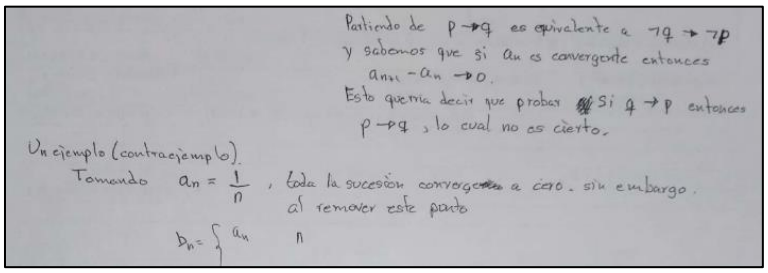
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a\sqrt[n]{1} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{a\to\infty} a\sqrt[n]{1} = a$$

ANEXO B

Cuestionario 2: Si $a_{n-1} - a_n \to 0$. ¿Es a_n convergente?

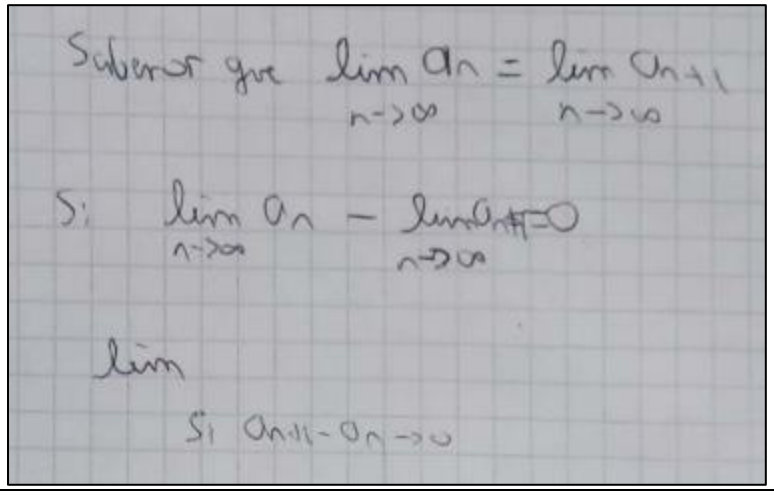
Estudiante B.



Partiendo de $p \to q$ es equivalente a $\neg q \to \neg p$ y sabemos que si a_n es convergente entonces $a_{n+1} - a_n \to 0$. Esto quería decir que probar si $q \to p$ entonces $p \to q$, lo cual no es cierto.
Un ejemplo (contraejemplo)
Tomando $a_n = \frac{1}{n}$, toda la sucesión converge a cero. Sin embargo, al remover este punto.

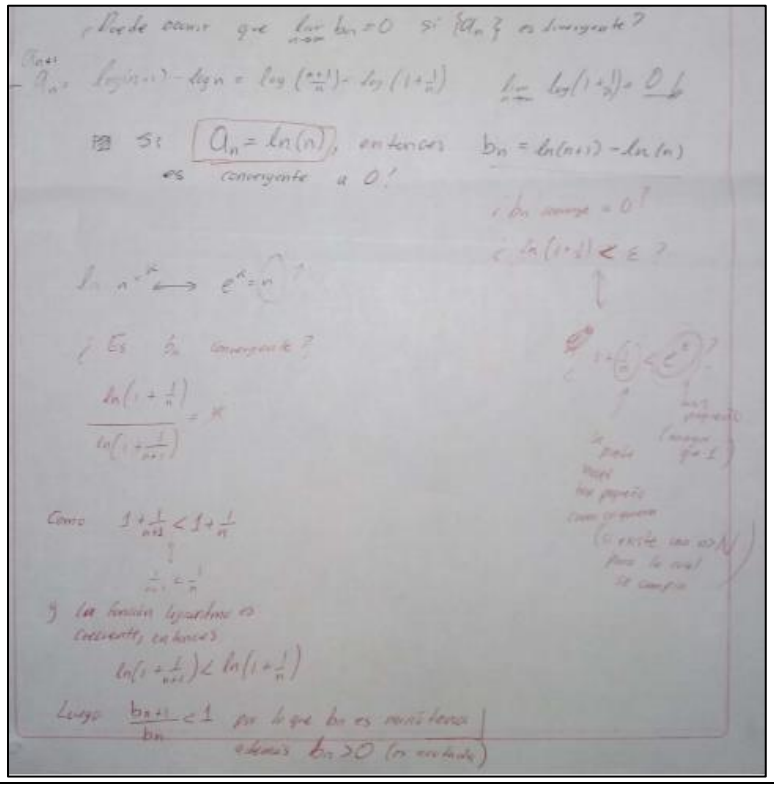
$$b_n = \{a_n \quad n$$

Estudiante F.



Sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$
Si $\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$
lim
Si $a_{n+1} - a_n \to 0$

Estudiante G.



¿Puede ocurrir que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *si* $\{a_n\}$ *es divergente?*

$$a_{n+1} - a_n = log(n+1) - log\, n = log\left(\frac{n+1}{n}\right) = log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

Si $a_n = ln\, n$*, entonces* $b_n = ln(n+1) - ln\, n$ *es convergente a 0?*

$ln\, n = k \leftrightarrow e^k = n$

¿Es b_n *convergente?*

$\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = k$ *Como* $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

Y la función logaritmo es creciente, entonces

$ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

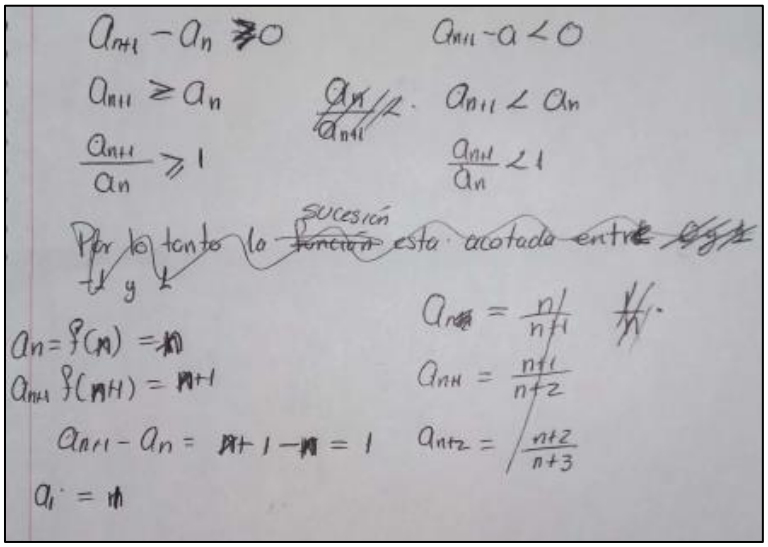
Luego $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ *por lo que* b_n *es monótona, además* $b_n > 0$ *(es acotada)*

¿b_n *converge a 0?* *¿*$ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \varepsilon$*?* $1+\frac{1}{n} < e^{\varepsilon}$

$\frac{1}{n} \rightarrow$ *se puede hacer tan pequeño como se quiera (si existe* $n > N$ *para la cual se cumpla)*

$e^{\varepsilon} \rightarrow$ *muy pequeño (mayor que* 1*)*

Estudiante H.



$a_{n+1} - a_n \geq 0$ $\qquad$ $a_{n+1} - a < 0$

$a_{n+1} \geq a_n$ $\qquad$ $a_{n+1} < a_n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\qquad$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

~~*Por lo tanto, la función sucesión esta acotada entre 0 y 1. -1 y 1*~~

$a_n = f(n) = n$

$a_{n+1} = f(n+1) = n+1$

$a_{n+1} - a_n = n+1-n = 1$

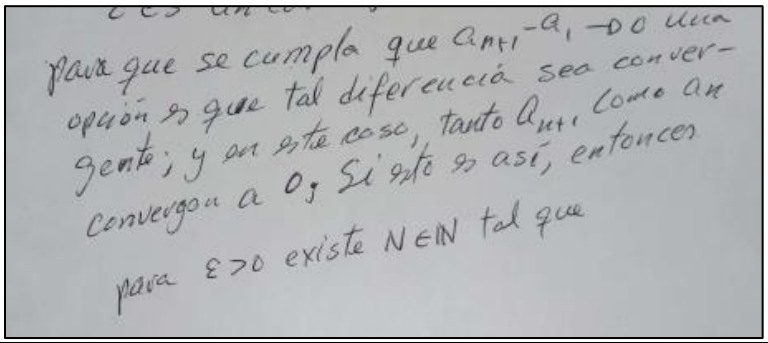
$a_1 = 1$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$a_{n+2} = \frac{n+2}{n+3}$$

Estudiante I.

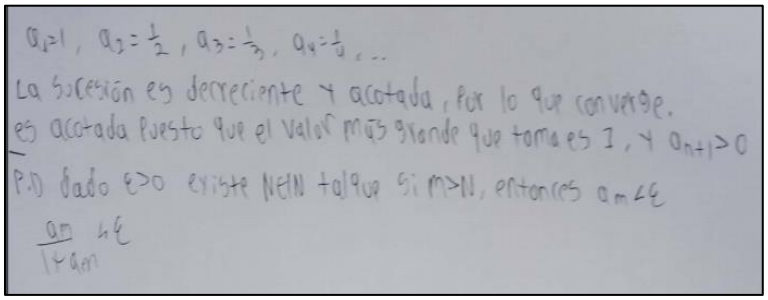

Para que se cumpla que $a_{n+1} - a_1 \to 0$ una opción es que tal diferencia sea convergente; y en este caso, tanto a_{n+1} como a_n convergen a 0, Si esto es así, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

Para que se cumpla que $a_{n+1} - a_n \to 0$ una opción es que tal diferencia sea convergente; y en este caso, tanto a_{n+1}como a_n convergen a 0, si esto es así, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

ANEXO C

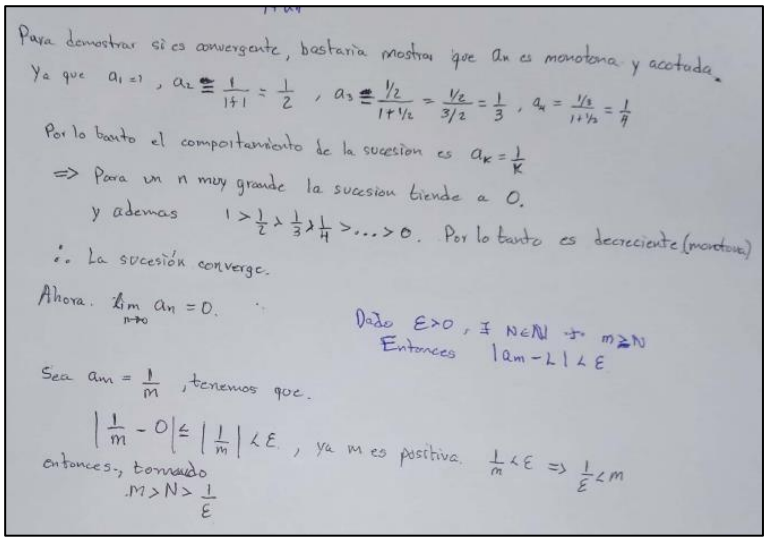
Cuestionario 3: Sea $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$. Demuestre que es convergente y su límite

Estudiante A.



$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$,...
La sucesión es decreciente y acotada, por lo que converge. Es acotada puesto que el valor más grande que toma es 1, y $a_{n+1} > 0$.
P.D. dado $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m > N$ *entonces* $a_m < \varepsilon$
$\frac{a_m}{1+a_m} < \varepsilon$

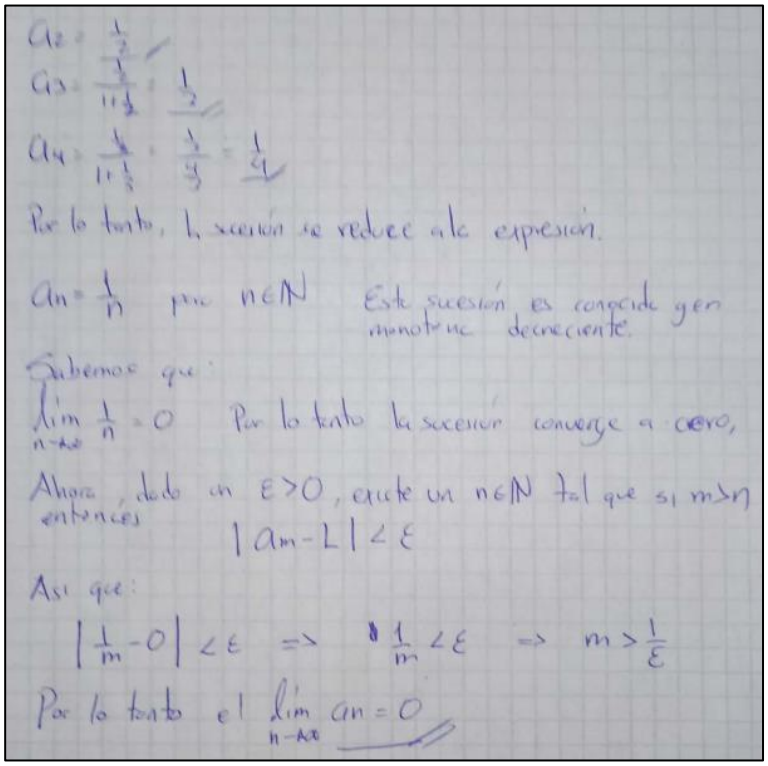
Estudiante B.



Para demostrar si es convergente, bastaría mostrar que a_n *es monótona y acotada.*
Ya que $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$
Por lo tanto el comportamiento de la sucesión es $a_k = \frac{1}{k}$.
Entonces para un n muy grande la sucesión tiende a 0. Y además $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > 0$. *Por lo tanto es decreciente (monótona)*
∴La sucesión converge.
Ahora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *Dado* $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \geq N$ *entonces* $|a_m - L| < \varepsilon$

Sea $a_m = \frac{1}{m}$, tenemos que $\left|\frac{1}{m} - 0\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| < \varepsilon$, ya que m es positiva $\frac{1}{m} < \varepsilon$ entonces $\frac{1}{\varepsilon} < m$ entonces, tomando $m > N > \frac{1}{\varepsilon}$

Estudiante C.



$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$

Por lo tanto, la sucesión se reduce a la expresión.

$a_n = \frac{1}{n}$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *Esta sucesión es conocida y es monótona decreciente*

Sabemos que:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *Por lo tanto la sucesión converge a cero,*

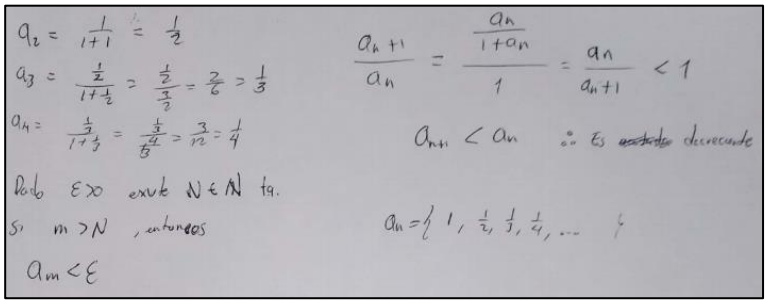
Ahora, dado un $\varepsilon > 0$, *existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m > n$ *entonces* $|a_n - L| < \varepsilon$

Así que:

$\left|\frac{1}{m} - 0\right| < \varepsilon$ *entonces* $\frac{1}{m} < \varepsilon$ *entonces* $m > \frac{1}{\varepsilon}$

Por lo tanto el $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Estudiante D.



$$a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}$$

Dado $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m > N$ *entonces* $a_m < \varepsilon$

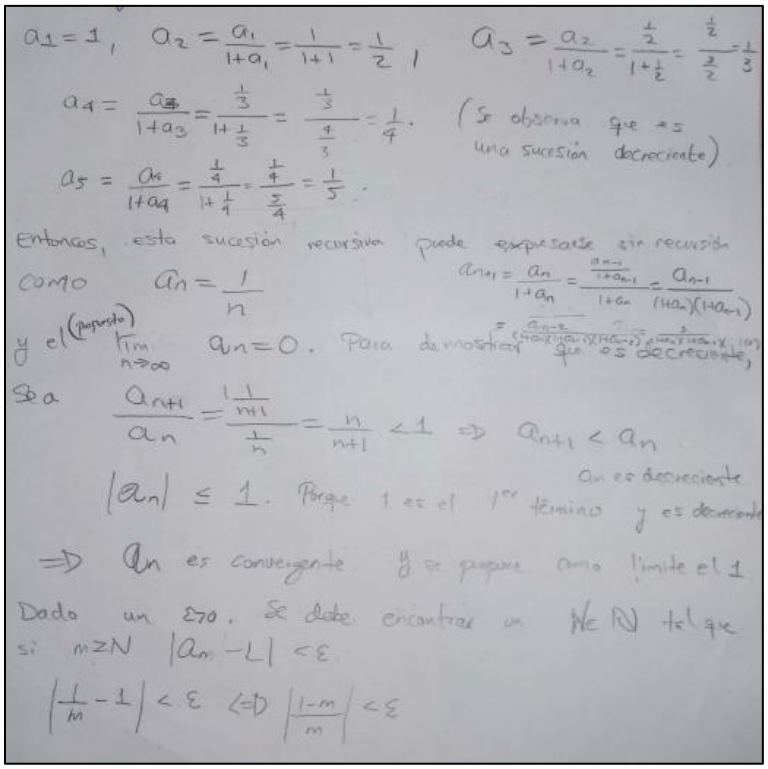
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{1} = \frac{a_n}{1+a_n} < 1$$

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\therefore \textit{es decreciente}$$

$$a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$$

Estudiante E.



$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_2}{1+a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3},$

$a_4 = \frac{a_3}{1+a_3} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4},$

$a_5 = \frac{a_4}{1+a_4} = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}$

(se observa que es una sucesión decreciente)

Entonces, esta sucesión recursiva puede expresarse sin recursión como $a_n = \frac{1}{n}$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}}{1+a_n} = \frac{a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} = \frac{a_{n-2}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})(1+a_{n-2})}$$

$$= \frac{1}{(1+a_n)(1+a_{n-1})(\quad)(2)}$$

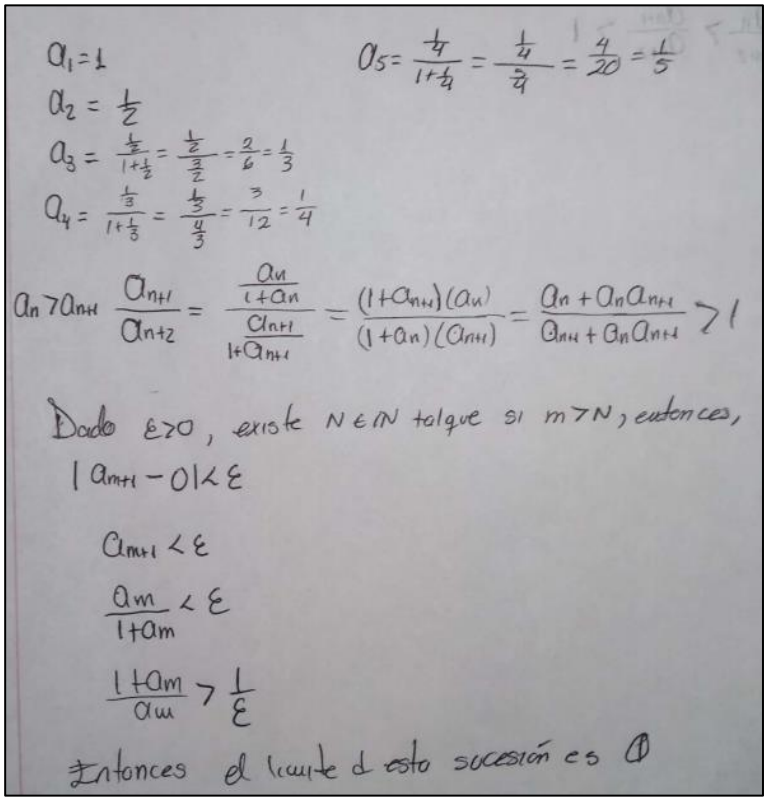
Y el (propuesto) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Para demostrar que es decreciente, Sea*

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$ *entonces* $a_{n+1} < a_n$

$|a_n| \leq 1$. *Porque 1 es el 1[er] término y es decreciente, entonces* a_n *es convergente y se propone como límite el 1*

Dado un $\varepsilon > 0$ *se debe encontrar un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\left|\frac{1}{m} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1-m}{m}\right| < \varepsilon$

Estudiante H.



$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$a_5 = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

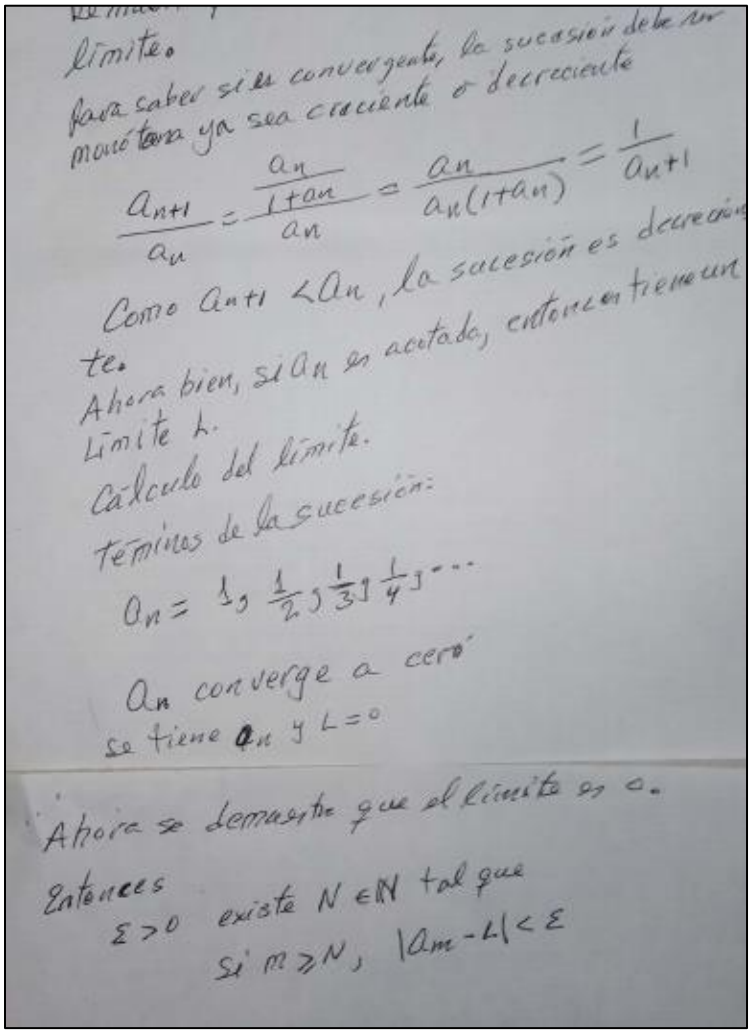
$$a_n > a_{n+1} \quad \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{\frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}}} = \frac{(1+a_{n+1})(a_n)}{(1+a_n)(a_{n+1})} = \frac{a_n + a_n a_{n+1}}{a_{n+1} + a_n a_{n+1}} > 1$$

Dado $\varepsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m > N$, *entonces,* $|a_{m+1} - 0| < \varepsilon$

$$a_{m+1} < \varepsilon$$
$$\frac{a_m}{1+a_m} < \varepsilon$$
$$\frac{1+a_m}{a_m} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Entonces el límite de esta sucesión es 0.

Estudiante I.



Para saber si es convergente la sucesión debe ser monótona ya sea creciente o decreciente

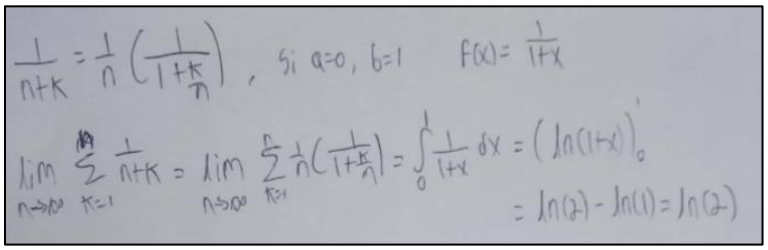
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n(1+a_n)} = \frac{1}{a_n+1}$$

Como $a_{n+1} < a_n$, la sucesión es decreciente.
Ahora bien, si a_n es acotada, entonces tiene un límite L.
Calculo del límite.
Términos de la sucesión:
$a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
a_n converge a cero
Se tiene a_n y $L = 0$
Ahora se demuestra que el límite es 0.
Entonces
$\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m \geq N$, $|a_m - L| < \varepsilon$

ANEXO D

Cuestionario 4: Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

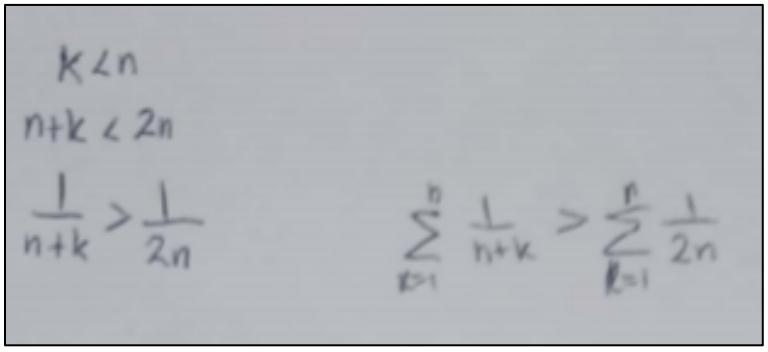
Estudiante A.



$\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$ *si* $a = 0, b = 1 \qquad f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left(Ln(1+x)\right)_0^1 = Ln\,2 - Ln\,1 = Ln\,2$$

Estudiante B.

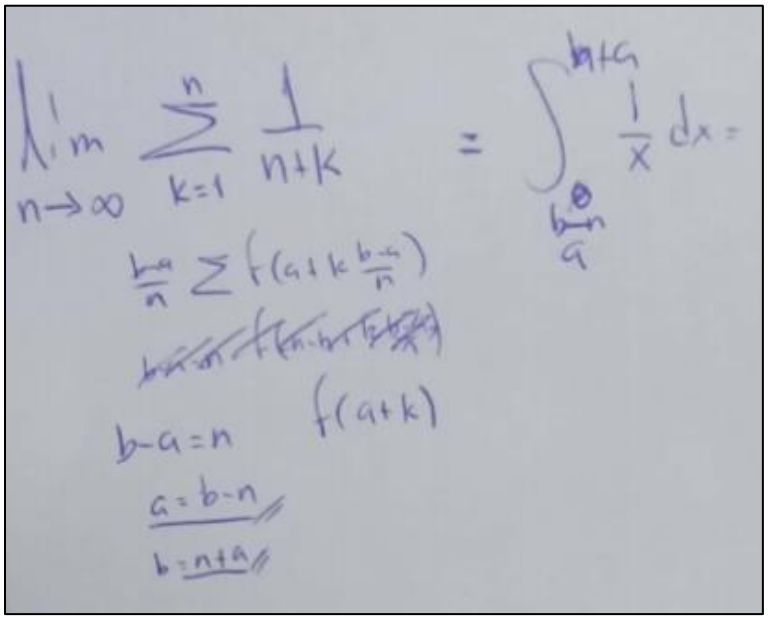


$k < n$

$n + k < 2n$

$\frac{1}{n+k} > \frac{1}{2n} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n}$

Estudiante C.



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_{b-n}^{n+a}\frac{1}{x}dx$$

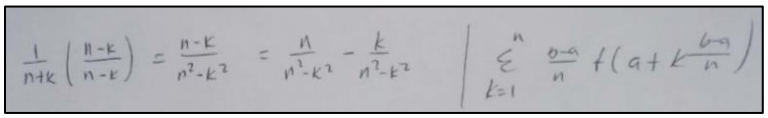
$$\frac{b-a}{n}\sum f(a+k\frac{(b-a)}{n}$$

$b-a=n \qquad f(a+k)$

$a=b-n$

$b=n+a$

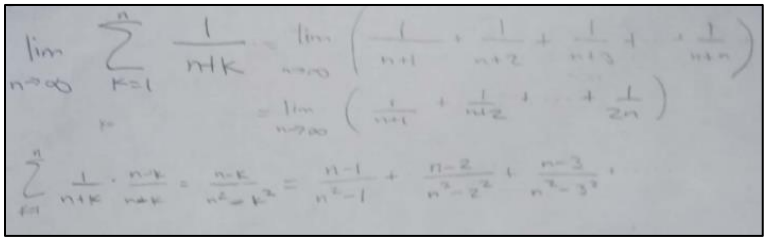
Estudiante D.



$$\frac{1}{n+k}\left(\frac{n-k}{n-k}\right)=\frac{n-k}{n^2-k^2}=\frac{n}{n^2-k^2}-\frac{k}{n^2-k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

Estudiante E.

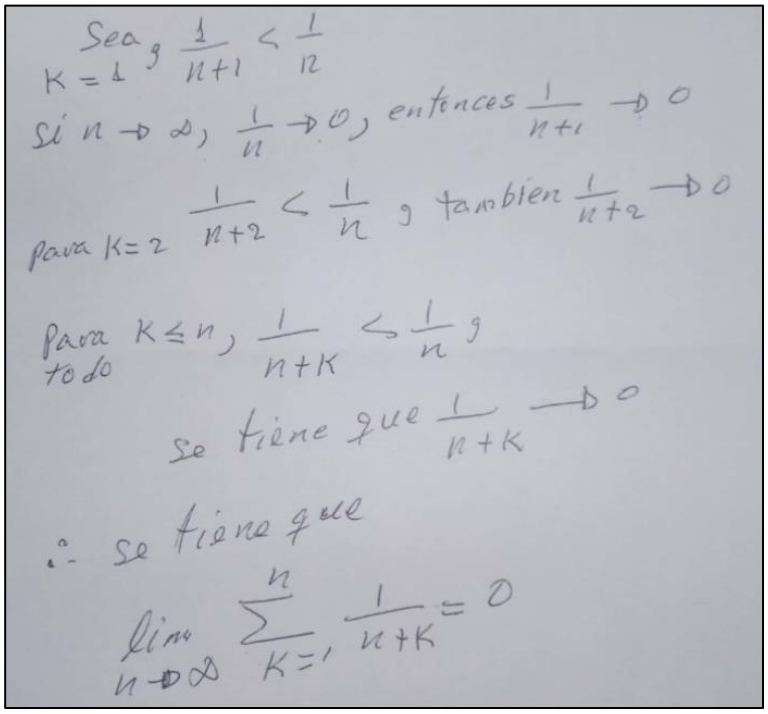


$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}*\frac{n-k}{n-k}=\frac{n-k}{n^2-k^2}=\frac{n-1}{n^2-1}+\frac{n-2}{n^2-2^2}+\frac{n-3}{n^2-3^2}+\cdots$$

Estudiante I.



Sea k=1 $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

Si $n\to\infty$, $\frac{1}{n}\to 0$, *entonces* $\frac{1}{n+1}\to 0$

Para k=2

$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n}$, *también* $\frac{1}{n+2}\to 0$

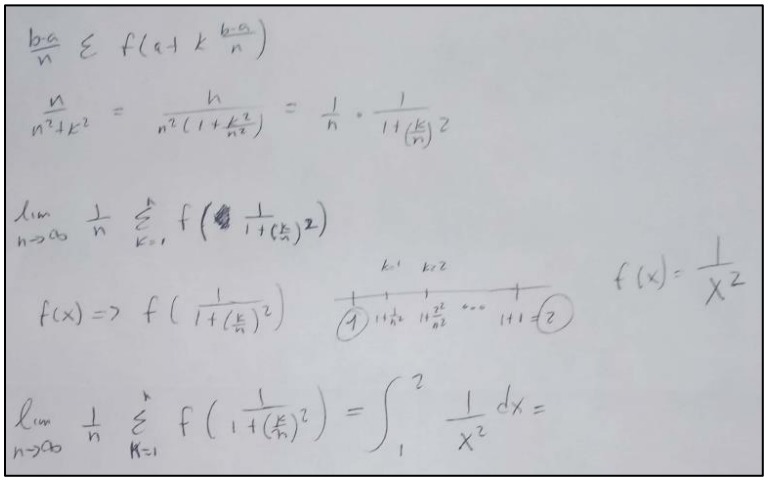
Para $k\le n$, $\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n}$ *se tiene que* $\frac{1}{n+k}\to 0$

$$\therefore \textit{se tiene que } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=0$$

ANEXO E

Cuestionario 5: Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Estudiante D.



$$\frac{b-a}{n}\sum f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{n}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}=\frac{1}{n}*\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

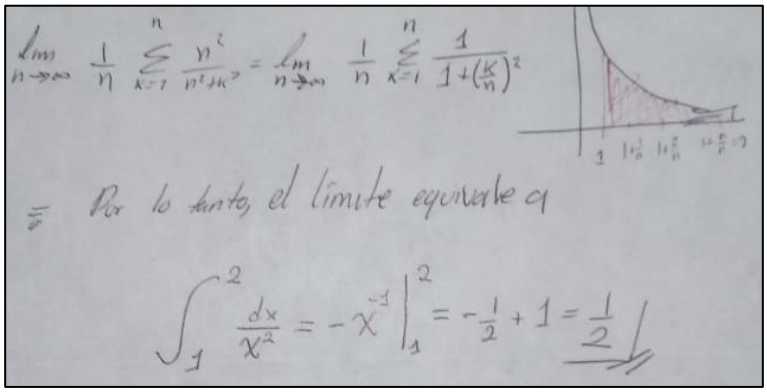
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$$

$$f(x)\to f\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$$

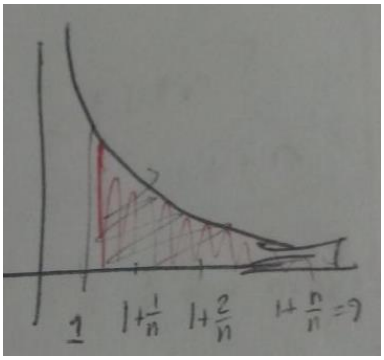
$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)=\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$$

Estudiante G.



$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$



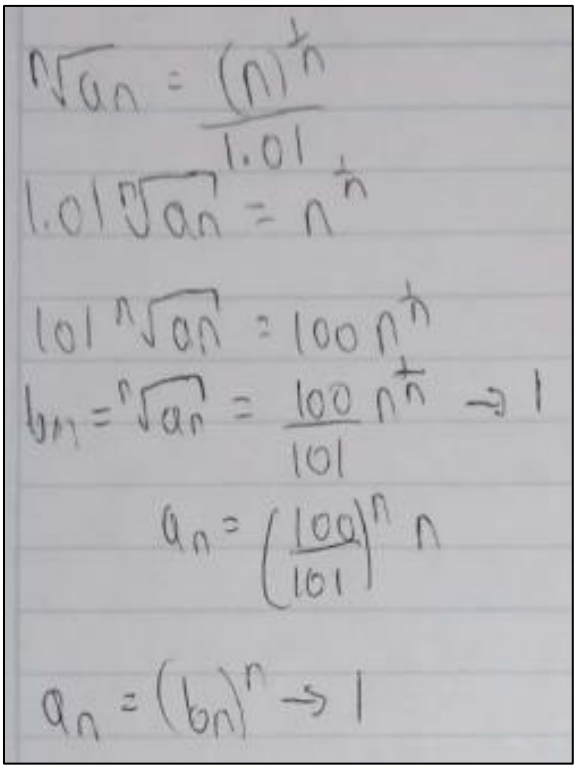
Por lo tanto, el límite equivale a

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -x^{-1}|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

ANEXO F

Cuestionario 6: Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1.01)^n}$

Estudiante A.



$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{1.01}$$

$$1.01\sqrt[n]{a_n} = n^{\frac{1}{n}}$$

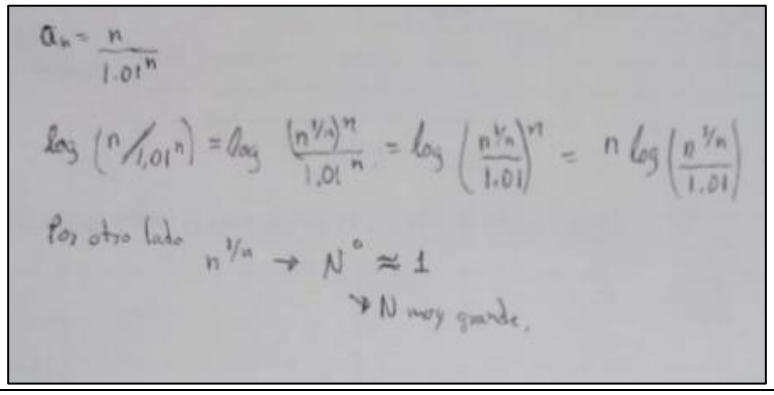
$$101\sqrt[n]{a_n} = 100n^{\frac{1}{n}}$$

$$b_n = \sqrt[n]{a_n} = \frac{100}{101} n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

$$a_n = \left(\frac{100}{101}\right)^n n$$

$$a_n = (b_n)^n \to 1$$

Estudiante B.



$a_n = \frac{n}{1.01^n}$

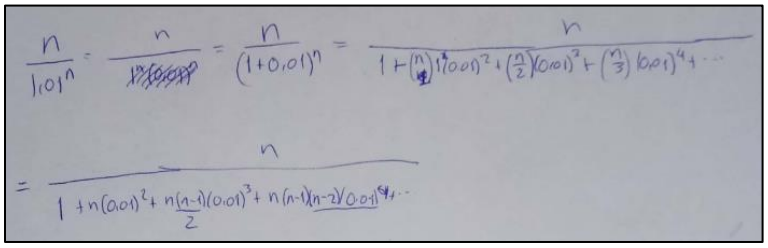
$$log\left(\frac{n}{1.01^n}\right) = log\frac{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1.01^n} = log\left(\frac{n^{\frac{1}{n}}}{1.01}\right)^n = n\,log\left(\frac{n^{\frac{1}{n}}}{1.01}\right)$$

Por otro lado

$$n^{\frac{1}{n}} \to N \approx 1$$

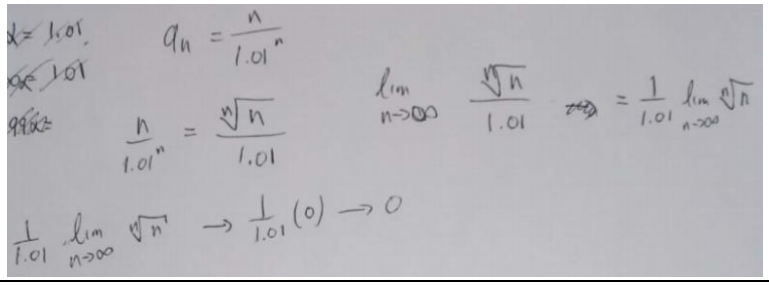
N muy grande

Estudiante C.



$$\frac{n}{1.01^n} = \frac{n}{(1+0.01)^n} = \frac{n}{1+\binom{n}{1}1(0.01)^2+\binom{n}{2}(0.01)^3+\binom{n}{3}(0.01)^4+\cdots}$$
$$= \frac{n}{1+n(0.01)^2+n\frac{(n-1)}{2}(0.01)^3+n(n-1)(n-2)(0.01)^4+\cdots}$$

Estudiante D.



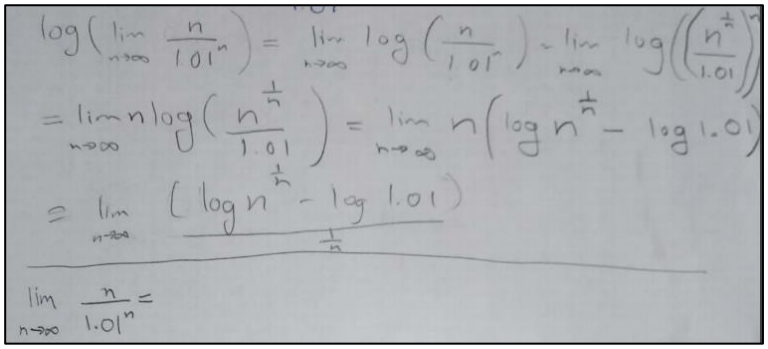
$$a_n = \frac{n}{1.01^n}$$

$$\frac{n}{1.01^n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{1.01}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1.01} = 1.01 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

$$\frac{1}{1.01} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to \frac{1}{1.01}(0) \to 0$$

Estudiante E.



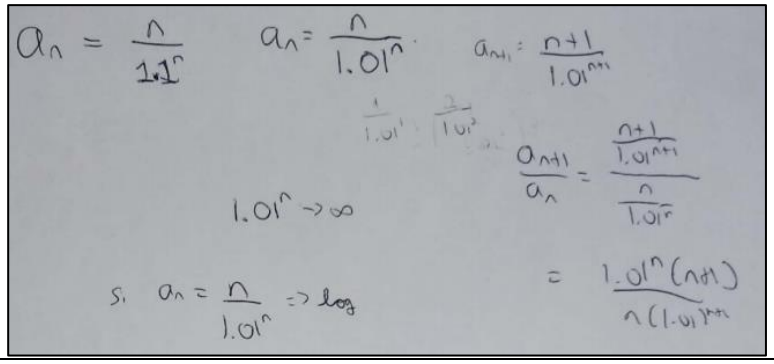
$$log\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1.01)^n}\right) = \lim_{n\to\infty} log\left(\frac{n}{1.01^n}\right) = \lim_{n\to\infty} log\left(\left(\frac{n^{\frac{1}{n}}}{1.01}\right)^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\, log \frac{n^{\frac{1}{n}}}{1.01} = \lim_{n\to\infty} n\,(log\, n^{\frac{1}{n}} - log\, 1.01)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(log\, n^{\frac{1}{n}} - log\, 1.01\right)}{\frac{1}{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1.01^n} =$

Estudiante F.



$a_n = \frac{n}{1.1^n}$ $a_n = \frac{n}{1.01^n}$ $a_{n+1} = \frac{n+1}{1.01^{n+1}}$

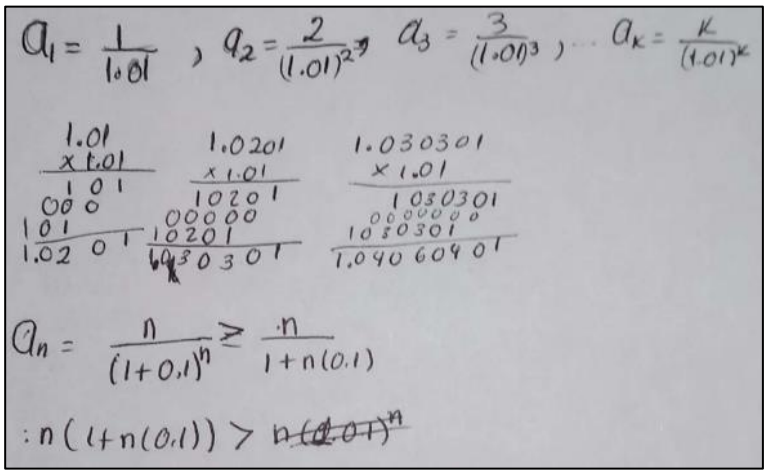
$$\frac{1}{1.01^1}, \frac{2}{(1.01)^2},$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{1.01^{n+1}}}{\frac{n}{1.01^n}} = \frac{1.01^n(n+1)}{n(1.01)^{n+1}}$

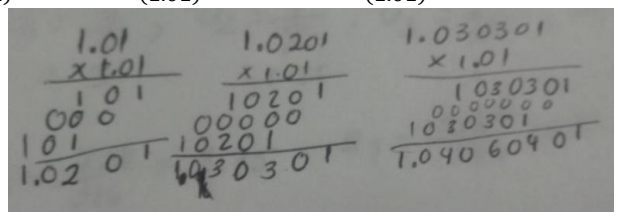
$1.01 \to \infty$

Si $a_n = \frac{n}{1.01^n} \Rightarrow log$

Estudiante H.



$a_1 = \frac{1}{1.01}$, $a_2 = \frac{2}{(1.01)^2}$, $a_3 = \frac{3}{(1.01)^3}$, ... $a_k = \frac{k}{(1.01)^k}$



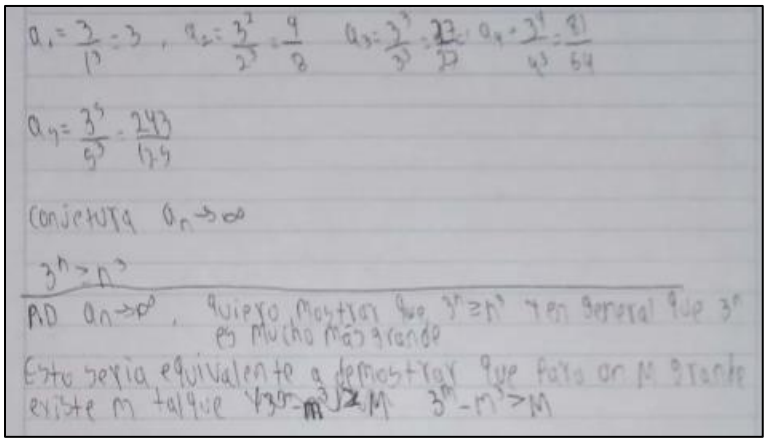
$a_n = \frac{n}{(1+0.1)^n} \geq \frac{n}{1+n(0.1)}$

$n(1 + n(0.1)) > \sout{n(1.01)^n}$

ANEXO G

Cuestionario 7: Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^3}$

Estudiante A.



$a_1 = \frac{3}{1^3} = 3 \quad a_2 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} \quad a_3 = \frac{3^3}{3^3} = \frac{27}{27} \quad a_4 = \frac{3^4}{4^3} = \frac{81}{64} \quad a_5 = \frac{3^5}{5^3} = \frac{243}{125}$

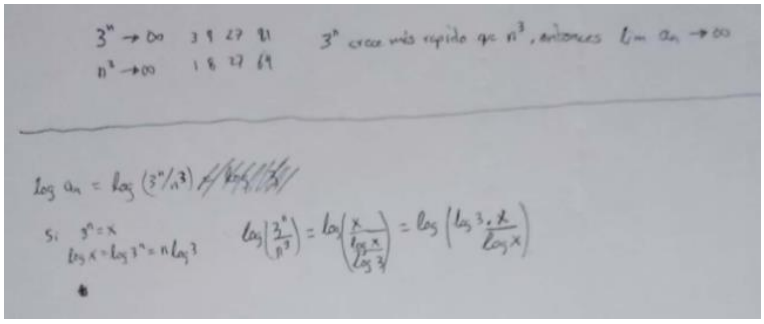
Conjetura $a_n \to \infty$

$3^n \geq n^3$

P.D. $a_n \to \infty$ *quiero mostrar que* $3^n \geq n^3$ *y en general que* 3^n *es mucho más grande*

Esto sería equivalente a demostrar que para un M grande existe m tal que $3^m - m^3 > M$.

Estudiante B.



$3^n \to \infty$ *3 9 27 81*

$n^3 \to \infty$ *1 8 27 64*

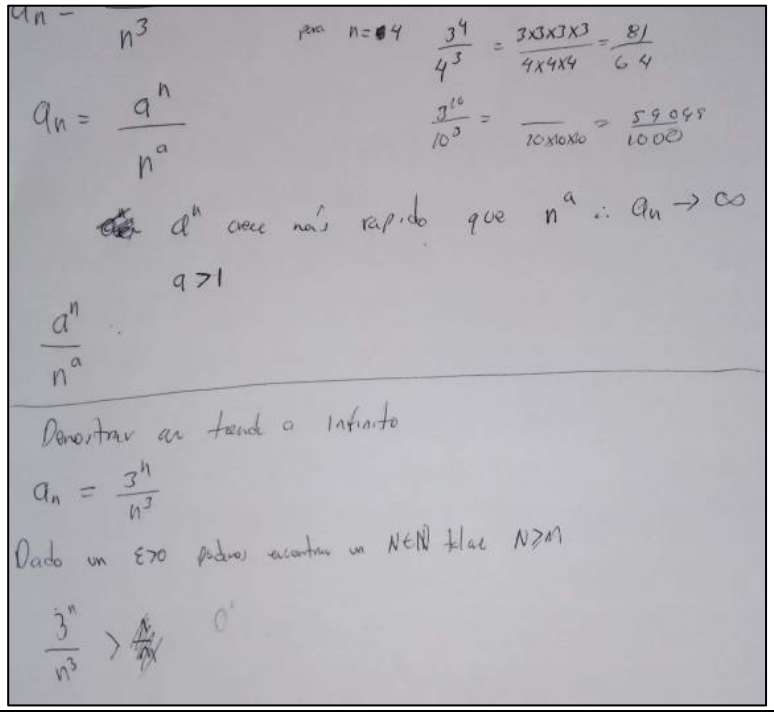
3^n *crece más rápido que* n^3, *entonces lim* $a_n \to \infty$

$$log\, a_n = log\left(\frac{3^n}{n^3}\right)$$

Si $3^n = x$

$$log\, x = log\, 3^n = n\, log\, 3$$

Estudiante D.



Para $n = 4$

$$\frac{3^4}{4^3} = \frac{3 * 3 * 3 * 3}{4 * 4 * 4} = \frac{81}{64}$$

$$\frac{3^{10}}{10^3} = \frac{}{10 * 10 * 10} = \frac{59049}{1000}$$

$a_n = \frac{a^n}{n^a}$

a^n *crece más rápido que* n^a $\therefore a_n \to \infty$

$$a > 1$$

$\frac{a^n}{n^a}$

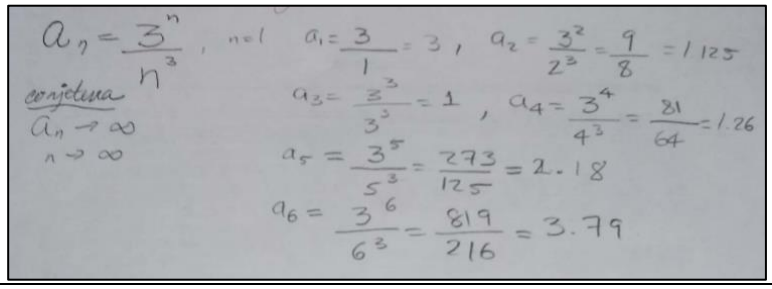
Demostrar que tiende a infinito

$$a_n = \frac{3^n}{n^3}$$

Dado un $\varepsilon > 0$ *podemos encontrar un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $N \geq n$

$$\frac{3^n}{n^3} >$$

Estudiante E.



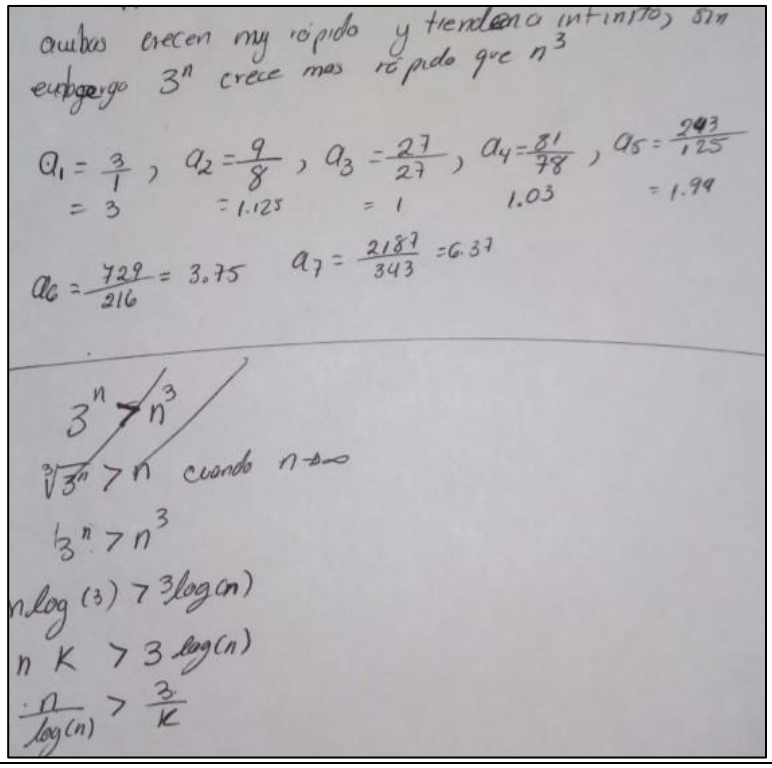
$a_n = \frac{3^n}{n^3}$ $n = 1$ $a_1 = \frac{3}{1} = 3$ $a_2 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} = 1.125$

Conjetura $a_3 = \frac{3^3}{3^3} = 1$ $a_4 = \frac{3^4}{4^3} = \frac{81}{64} = 1.26$

$a_n \to \infty$ $a_5 = \frac{3^5}{5^3} = \frac{273}{125} = 2.18$

$n \to \infty$ $a_6 = \frac{3^6}{6^3} = \frac{819}{216} = 3.79$

Estudiante H.



Ambas crecen muy rápido y tienden a infinito, sin embargo 3^n crece más rápido que n^3

$a_1 = \frac{3}{1}$ $a_2 = \frac{9}{8}$ $a_3 = \frac{27}{27}$ $a_4 = \frac{81}{78}$ $a_5 = \frac{243}{125}$ $a_6 = \frac{729}{216}$ $a_7 = \frac{2187}{343}$

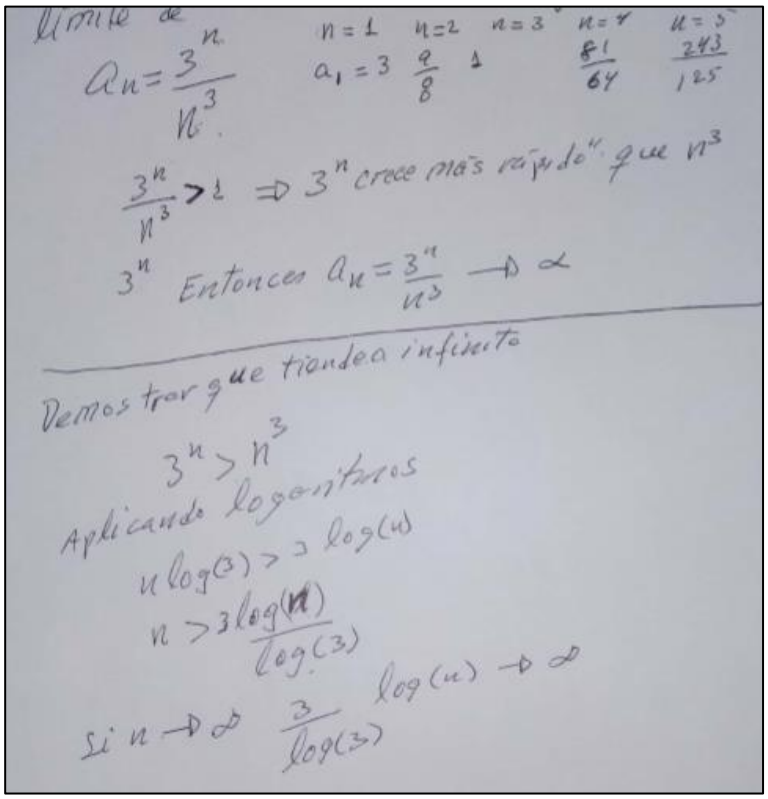
$= 3$ $= 1.125$ $= 1$ $= 1.03$ $= 1.94$ $= 3.75$ $= 6.37$

~~$3^n > n^3$~~

~~$\sqrt[3]{3^n} > n$ cuando $n \to \infty$~~

$3^n > n^3$
$n\,log(3) > 3\,log(n)$
$n\,k > 3\,log\,n$
$\frac{n}{log(n)} > \frac{3}{k}$

Estudiante I.



Límite de $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = 3$	$\frac{9}{8}$	1	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{125}$

$\frac{3^n}{n^3} > 1$*entonces* 3^n*crece más rápido que* n^3

3^n *Entonces* $a_n = \frac{3^n}{n^3} \to \infty$

Demostrar que tiende a infinito

$$3^n > n^3$$

Aplicando logaritmos

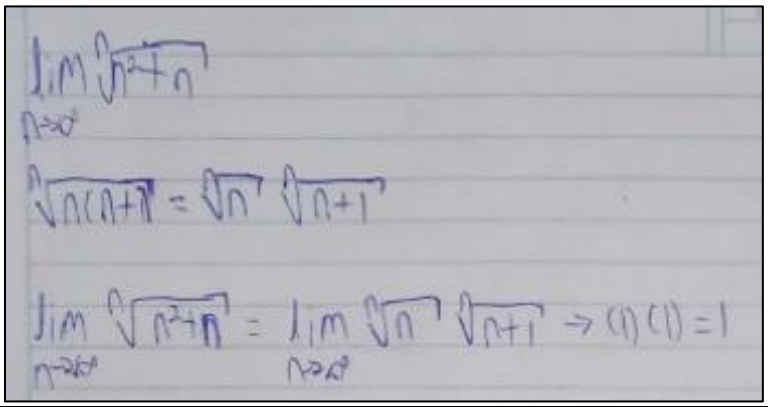
$$n\,log\,3 > 3\,log\,n$$
$$n > \frac{3\,log\,n}{log\,3}$$

Si $n \to \infty$ $\frac{3}{log\,3} log\,n \to \infty$

ANEXO H

Cuestionario 8: Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$

Estudiante A.

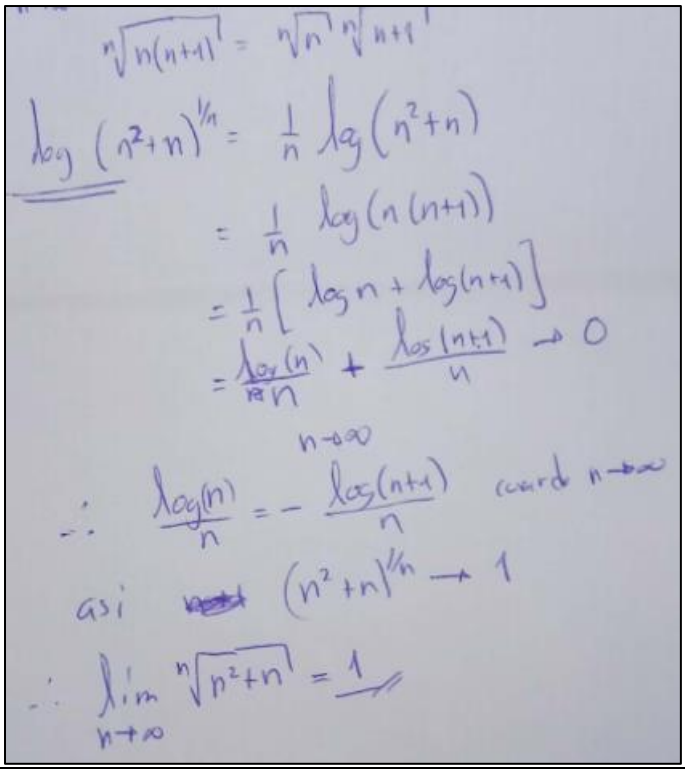


$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$

$\sqrt[n]{n(n+1)} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n+1} \to (1)(1) = 1$

Estudiante C.



$$\sqrt[n]{n(n+1)} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n+1}$$

$$\log(n^2+n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log(n^2+n)$$

$$= \frac{1}{n}\log\big(n(n+1)\big)$$

$$= \frac{1}{n}[\log n + \log(n+1)]$$

$$= \frac{\log n}{n} + \frac{\log(n+1)}{n} \to 0$$

$$n \to \infty$$

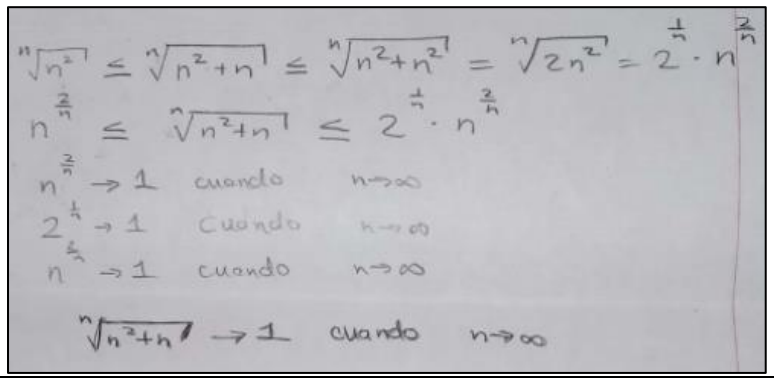
$$\therefore \frac{\log n}{n} = -\frac{\log(n+1)}{n}$$

Cuando $n \to \infty$

Así $(n^2+n)^{\frac{1}{n}} \to 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$$

Estudiante E.



$\sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+n} \le \sqrt[n]{n^2+n^2} = \sqrt[n]{2n^2} = 2^{\frac{1}{n}} * n^{\frac{2}{n}}$

$n^{\frac{2}{n}} \le \sqrt[n]{n^2+n} \le 2^{\frac{1}{n}} * n^{\frac{2}{n}}$

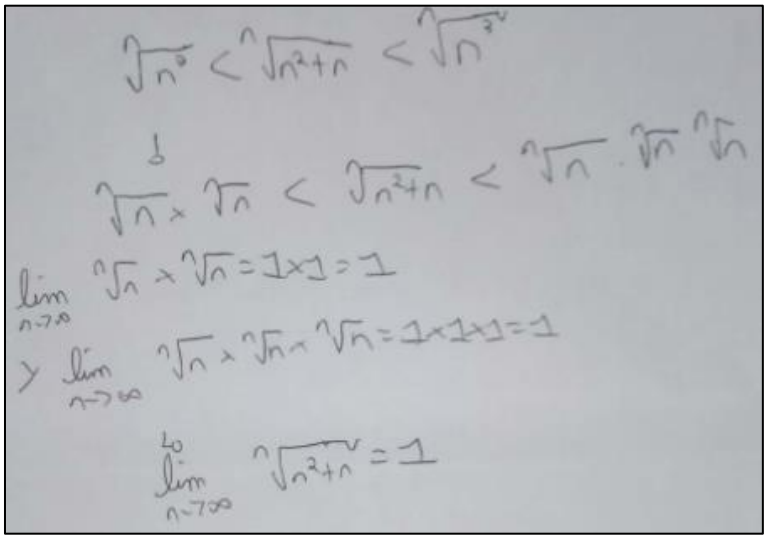
$n^{\frac{2}{n}} \to 1$ *cuando* $n \to \infty$

$2^{\frac{1}{n}} \to 1$ *cuando* $n \to \infty$

$n^{\frac{2}{n}} \to 1$ *cuando* $n \to \infty$

$\sqrt[n]{n^2+n} \to 1$ *cuando* $n \to \infty$

Estudiante F.



$n^2 < n^2 + n < n^3$

$\sqrt[n]{n^2} < \sqrt[n]{n^2+n} < \sqrt[n]{n^3}$

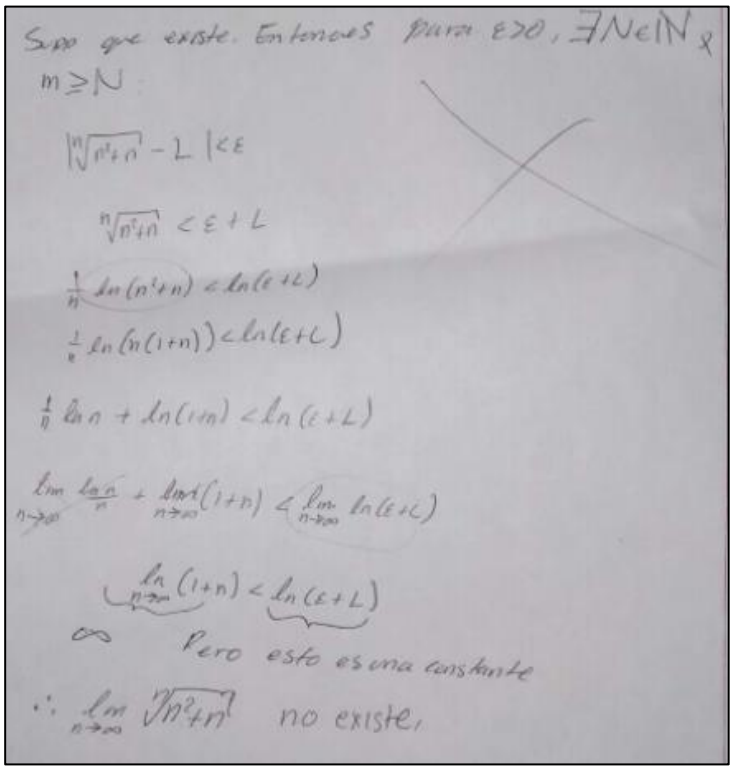
$\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n^2+n} < \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} = 1 * 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} = 1 * 1 * 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$$

Estudiante G.



Supp que existe. Entonces para $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ t\ m \geq N$

$$\left|\sqrt[n]{n^2+n} - L\right| < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{n^2+n} < \varepsilon + L$$

$$\frac{1}{n} ln\, n^2 + n < ln(\varepsilon + L)$$

$$\frac{1}{n} ln\big(n(1+n)\big) < ln(\varepsilon + L)$$

$$\frac{1}{n} ln\, n + ln(1+n) < ln(\varepsilon + L)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} + \lim_{n\to\infty} (1+n) < \lim_{n\to\infty} ln(\varepsilon + L)$$

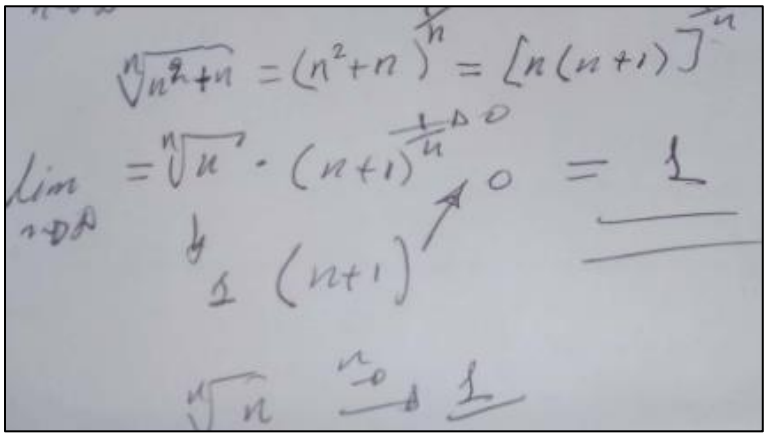
$$ln_{n\to\infty}(1+n) \qquad < ln(\varepsilon + L)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\infty \qquad \textit{Pero esto es una constante}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}\ \textit{no existe}$$

Estudiante I.



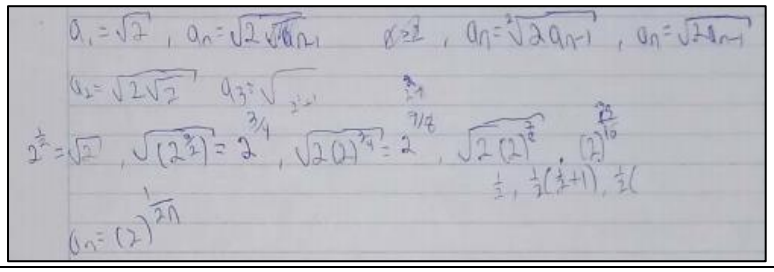
$\sqrt[n]{n^2+n} = (n^2+n)^{\frac{1}{n}} = [n(n+1)]^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} = \begin{matrix} \sqrt[n]{n} \\ \downarrow \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (n+1)^{\frac{1}{n}} \\ (n+1) \to 0 \\ \sqrt[n]{n} \to 1 \end{matrix} = 1$$

ANEXO I

Cuestionario 9: Calcular el límite de la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

Estudiante A.



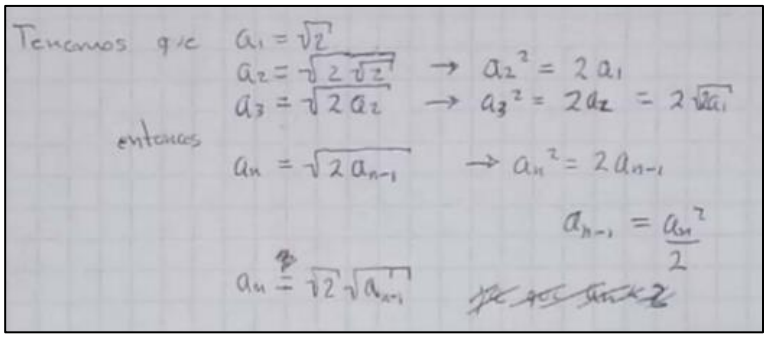
$a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2\ a_{n-1}}$

$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{\ }$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}}, \sqrt{2(2^{\frac{3}{4}})} = 2^{\frac{7}{8}}, \sqrt{2(2^{\frac{7}{8}})} = 2^{\frac{15}{16}}$

$a_n = 2^{\frac{1}{2n}}$

Estudiante B.



Tenemos que

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} \rightarrow a_2^2 = 2a_1$$

$$a_3 = \sqrt{2a_2} \rightarrow a_3^2 = 2a_2 = 2\sqrt{2a_1}$$

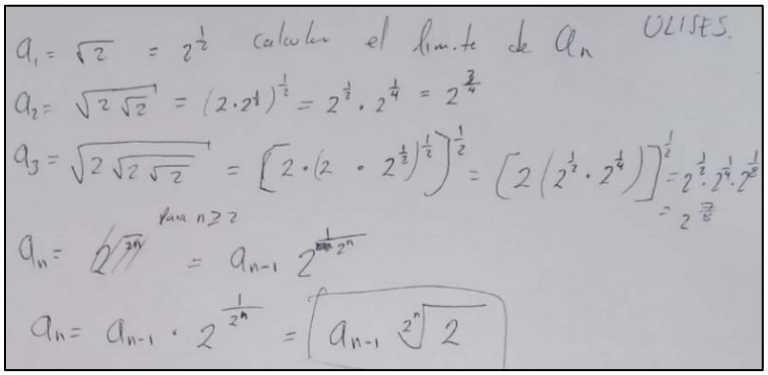
Entonces

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \rightarrow a_n^2 = 2a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n^2}{2}$$

$$a_n = \sqrt{2}\sqrt{a_{n-1}}$$

Estudiante D.



$a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ *Calcular el limite de* a_n

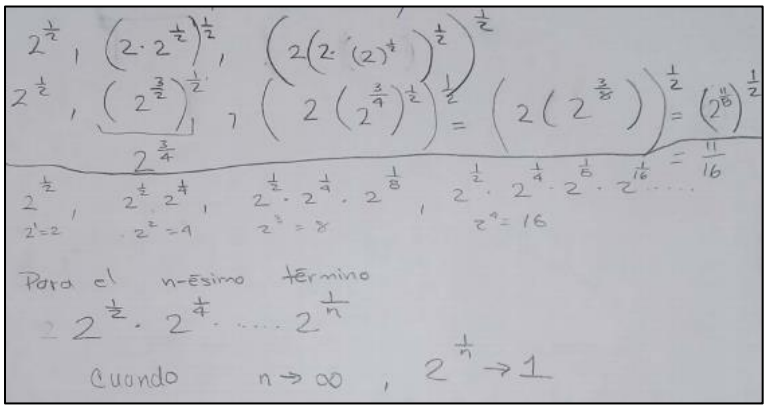
$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \left(2 * 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \left[2\left(2 * 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\left(2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{4}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{4}} * 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$$

$$a_n = a_{n-1} 2^{\frac{1}{2n}}$$

$$a_n = a_{n-1} * 2^{\frac{1}{2n}} = a_{n-1}\sqrt[2n]{2}$$

Estudiante E.



$$2^{\frac{1}{2}}, \left(2 * 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(2\left(2(2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{1}{2}}, \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(2\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\left(2^{\frac{3}{8}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{11}{8}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{1}{2}}, \quad 2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{4}}, \quad 2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{4}} * 2^{\frac{1}{8}}, \quad 2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{4}} * 2^{\frac{1}{8}} * 2^{\frac{1}{16}},$$

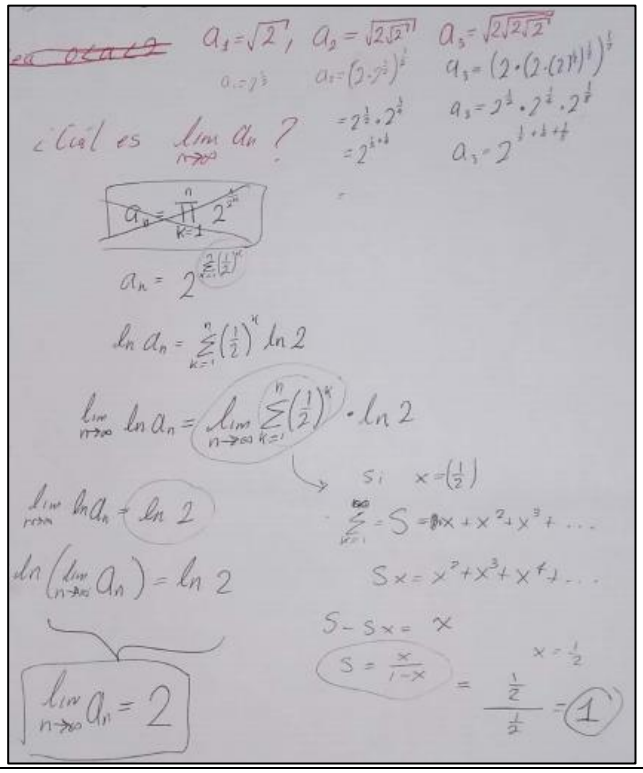
$$2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16$$

Para el n-ésimo término

$$2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{4}} * \ldots * 2^{\frac{1}{n}}$$

Cuando $n \to \infty$, $2^{\frac{1}{n}} \to 1$

Estudiante G.



$a_1 = \sqrt{2}$ $\quad a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$ $\quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

$a_1 = 2^{\frac{1}{2}}$ $\quad a_2 = \left(2 * 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad a_3 = \left(2 * \left(2 * 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$a_2 = 2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{4}}$ $\quad a_3 = 2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{4}} * 2^{\frac{1}{8}}$

$a_2 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ $\quad a_3 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$

¿Cuál es $\lim_{n\to\infty} a_n$*?*

~~$a_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{2n}}$~~

$$a_n = 2^{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \ln 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k * \ln 2$$

$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln 2$ $\quad$ *Si* $x = \left(\frac{1}{2}\right)$

$ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = ln\, 2$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

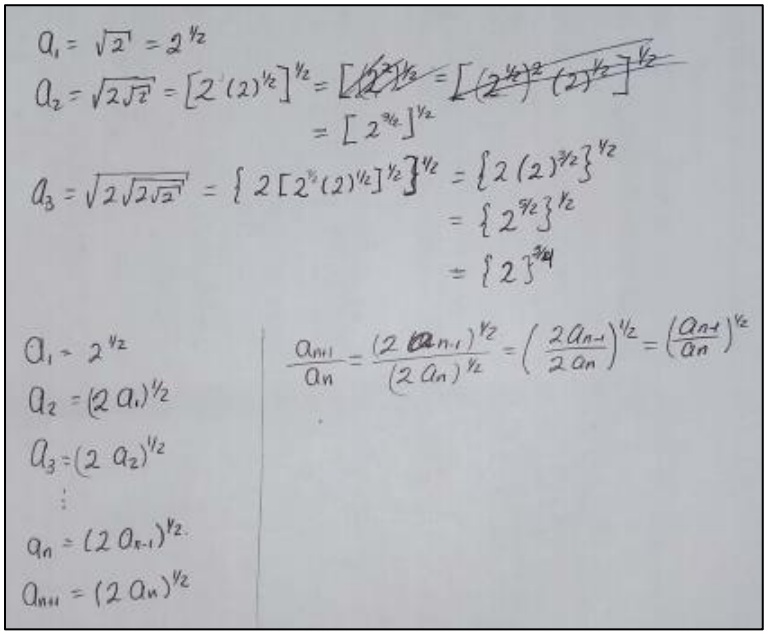
$\sum_{k=1}^{\infty} = S = x + x^2 + x^3 + \cdots$

$Sx = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

$S - Sx = x$

$S = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Estudiante H.



$a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

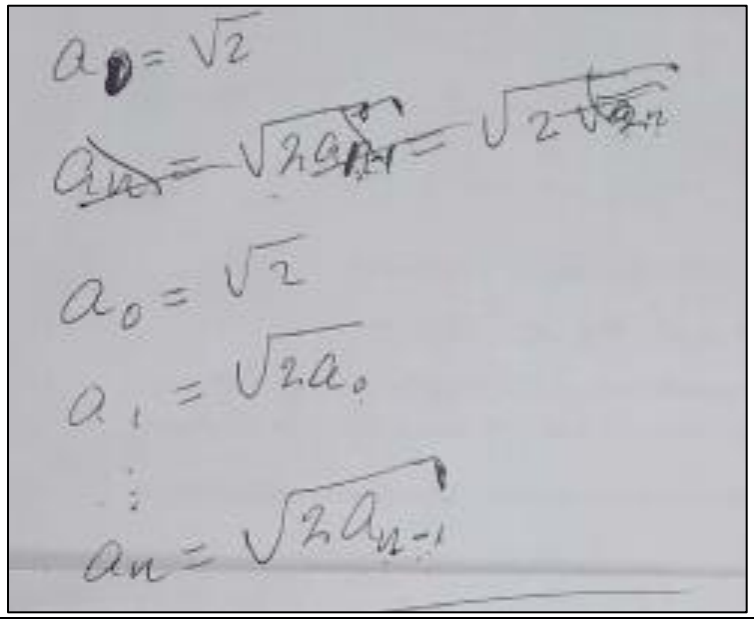
$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \left[2(2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \left\{2\left[2^{\frac{2}{2}}(2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{2(2)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{2^{\frac{5}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \{2\}^{\frac{5}{4}}$

$$a_1 = 2^{\frac{1}{2}}$$
$$a_2 = (2a_1)^{\frac{1}{2}}$$
$$a_3 = (2a_2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\vdots$$
$$a_n = (2a_{n-1})^{\frac{1}{2}}$$
$$a_{n+1} = (2a_n)^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2a_{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(2a_n)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2a_{n-1}}{2a_n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}$

Estudiante I.



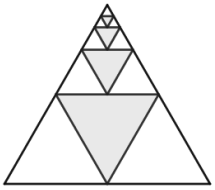
$a_1 = \sqrt{2}$

$$a_0 = \sqrt{2}$$
$$a_1 = \sqrt{2a_0}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$$

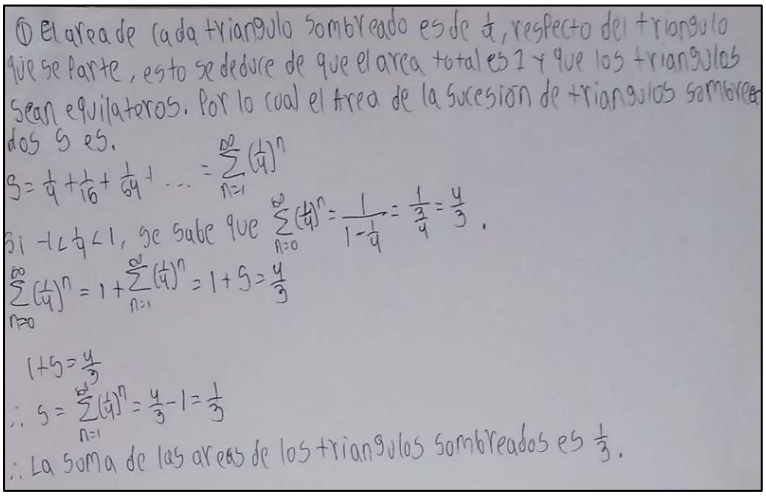
ANEXO J

Examen 1. Pregunta 1.

El triángulo original es equilátero de área 1. Calcular el área total de la sucesión de triángulos sombreados (¡una infinidad!). Esta sucesión es de triángulos equiláteros.



Estudiante A



El área de cada triangulo sombreado es de $\frac{1}{4}$ *respecto del triángulo que se parte, esto se deduce de que el área total es 1 y que los triángulos sean equiláteros. Por lo cual el área de la sucesión de triángulos sombreados S es.*

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Si $-1 < \frac{1}{4} < 1$ *se sabe que* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

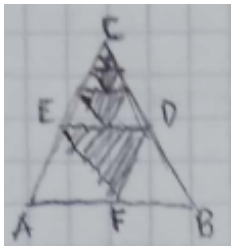
$1 + S = \frac{4}{3}$

$\therefore S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$\therefore$ *La suma de las áreas de los triángulos sombreados es de* $\frac{1}{3}$

Estudiante B

Intuitivamente, tenemos una representación geométrica de la suma $\frac{1}{2^k}$ *con* $k \in N$*, no después de observar cuidadosamente es* $\sum \frac{1}{4^k}$.



Podemos demostrar que (y siempre que el Δ *anterior situé sus vértices en los puntos medios de los lados del* Δ *original) la sucesión enunciada es* $\sum \frac{1}{4^k}$

Etiquetando los puntos, tenemos que el área de $\Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$ *y, de forma iterativa los* $\Delta's$ *interiores son* $\frac{1}{4}$ *del área del anterior y de ahí el área buscada es* $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

La prueba consiste en, ya que ED es paralelo a AD y E y D son puntos medios de AC y CB entonces ED es $\frac{1}{2}$ *de AB, por lo tanto FB=AF=AD y como* ΔABC *es equilátero, obtenemos 4 triángulos equiláteros de la misma área* $\left(\frac{1}{4}\right)$*, de los cuales, el central esta sombreado.*

Ahora fijándonos solo en el de arriba, por el mismo razonamiento tenemos 4 triángulos equiláteros que tienen la misma área ($\frac{1}{4}$ *de área del analizado), que al mismo tiempo es* $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$ *del área del triángulo ABC.*

Entonces tenemos que el área sombreada es

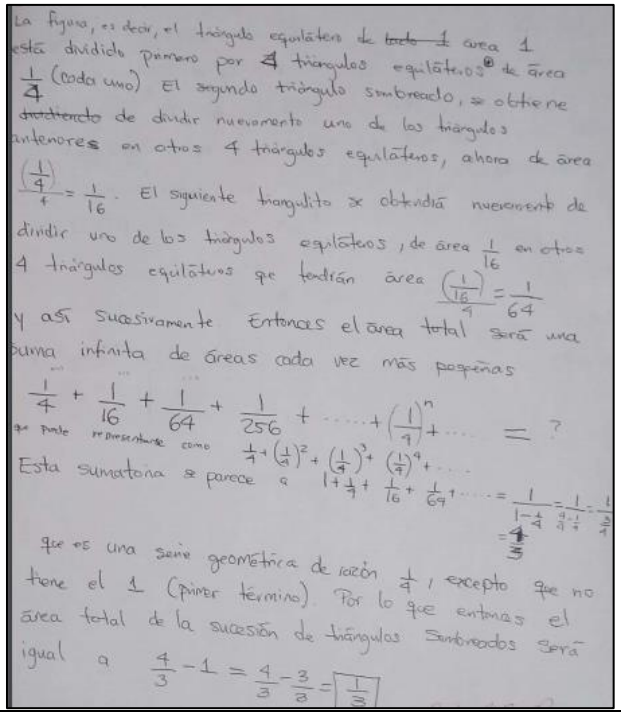
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

Pero $\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n} * \frac{1}{2^n}$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} * \frac{1}{2^n}\right) = Area$

Sin embargo $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} * \frac{1}{2^n}\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} * \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

Recordando $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k!}$

Estudiante E



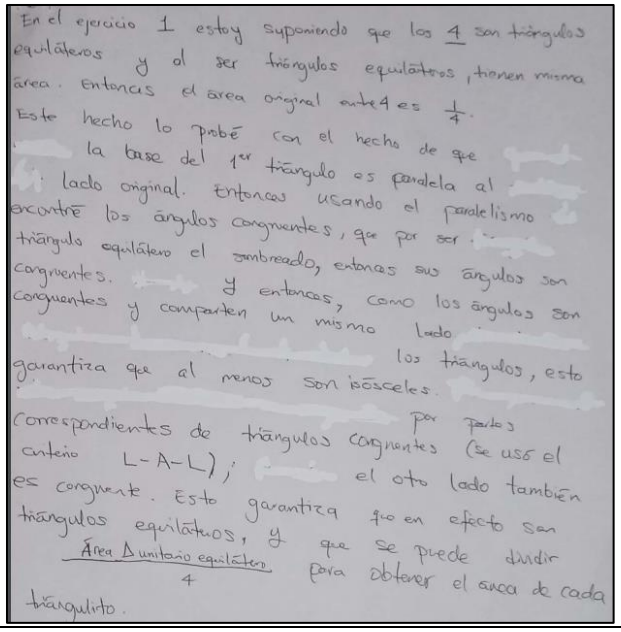
La figura, es decir, el triángulo equilátero de área 1 está dividido primero por 4 triángulos equiláteros de área* $\frac{1}{4}$ *(cada uno) El segundo triángulo sombreado, se obtiene de dividir nuevamente uno de los triángulos anteriores en otros 4 triángulos equiláteros, ahora de área* $\frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}$*. El siguiente triangulito se obtendrá nuevamente de dividir uno de los triángulos equiláteros, de área* $\frac{1}{16}$ *en otros 4 triángulos equiláteros que tendrían área* $\frac{\frac{1}{16}}{4} = \frac{1}{64}$*. Y así sucesivamente. Entonces el área total será una suma infinita de áreas cada vez más pequeñas.*

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots = ?$$

Que puede representarse como $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots$

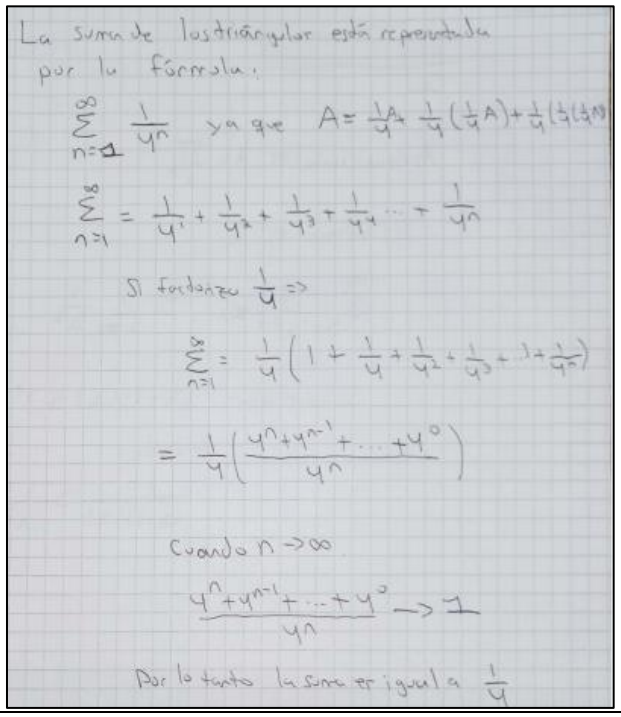
Esta sumatoria se parece a $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{4}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

Que es una serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$ *excepto que no tiene el 1 (primer término). Por lo que entonces el área total de la sucesión de triángulos sombreados será igual a* $\frac{4}{3} - 1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$.


En el ejercicio 1 estoy suponiendo que los 4 son triángulos equiláteros y al ser triángulos equiláteros, tienen misma área. Entonces el área original entre 4 es $\frac{1}{4}$.
Este hecho lo probé con el hecho de que la base del 1er triángulo es paralela al lado original. Entonces usando el paralelismo encontré los ángulos congruentes, que por ser triángulo equilátero el sombreado, entonces sus ángulos son congruentes. Y entonces, como los ángulos son congruentes y comparten un mismo lado los triángulos, esto garantiza que al menos son isósceles por partes correspondientes de triángulos congruentes (se usó el criterio L-A-L), el otro lado también es congruente. Esto garantiza que en efecto son triángulos equiláteros, y que se puede dividir $\frac{\text{Área } \Delta \text{unitario equilátero}}{4}$ para obtener el área de cada triangulito.

** En el ejercicio 1 estoy suponiendo que los 4 son triángulos equiláteros y al ser triángulos equiláteros, tienen misma área. Entonces el área original entre 4 es $\frac{1}{4}$. Este hecho lo probé con el hecho de que la base del 1er triángulo es paralela al lado original. Entonces usando el paralelismo encontré los ángulos congruentes, que por ser triángulo equilátero el sombreado, entonces sus ángulos son congruentes. Y entonces, como los ángulos son congruentes y comparten un mismo lado los triángulos, esto garantiza que al menos son isósceles por partes correspondientes de triángulos congruentes (se usó el criterio L-A-L); el otro lado también es congruente. Esto garantiza que en efecto son triángulos equiláteros. Y que se puede dividir $\frac{\text{Área } \Delta \text{unitario equilátero}}{4}$ para obtener el área de cada triangulito.*

Estudiante F



La suma de los triángulos está representada por la fórmula:

$\sum_{(n=1)}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ *ya que* $A = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}A\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}A\right)\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$$

Si se factoriza $\frac{1}{4} \rightarrow$

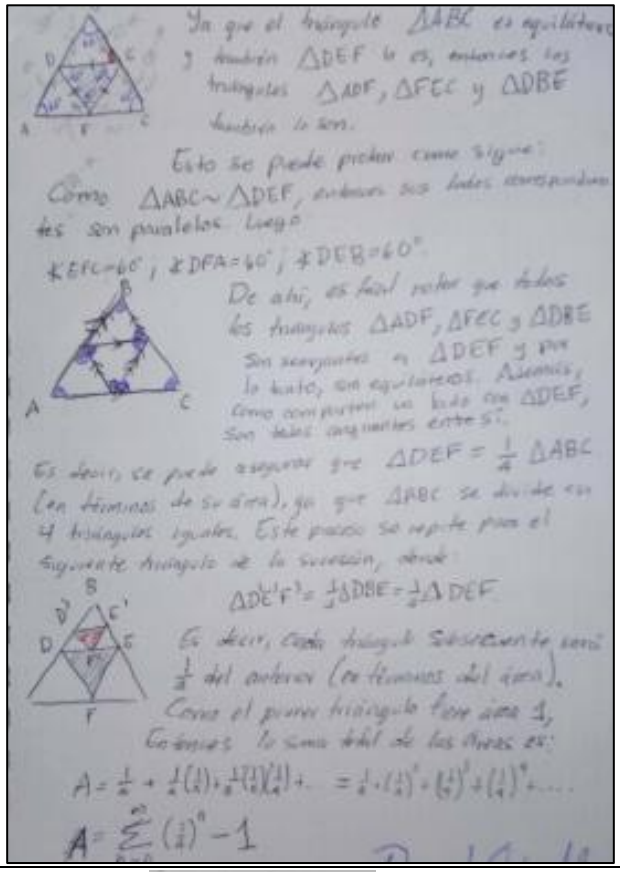
$$\sum_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} \;\; = \frac{1}{4}\left(\frac{4^n + 4^{n-1} + \cdots + 4^0}{4^n}\right)$$

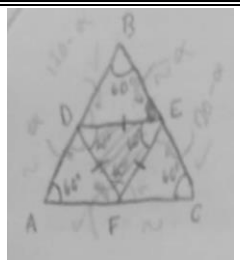
Cuando $n \to \infty$

$$\frac{4^n + 4^{n-1} + \cdots + 4^0}{4^n} \to 1$$

Por lo tanto la suma es igual a $\frac{1}{4}$.

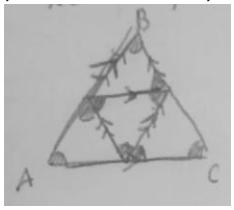
Estudiante G





Ya que el triángulo ΔABC es equilátero y también ΔDEF lo es, entonces los triángulos ΔADF, ΔFEC y ΔDBE también lo son.
Esto se puede probar como sigue:
Como $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, entonces sus lados correspondientes son paralelos, luego:

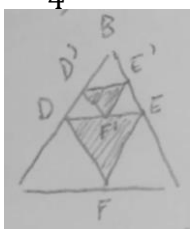
$$\measuredangle EFC = 60° \; ; \; \measuredangle DFA = 60° \; ; \; \measuredangle DEB = 60°$$



De ahí, es fácil notar que todos los triángulos ΔADF, ΔFEC y ΔDBE son semejantes a ΔDEF y por lo tanto, son equiláteros. Además, como comparten un lado con ΔDEF, son todos congruentes entre sí.

Es decir, se puede asegurar que $\Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$. *(en términos de su área), ya que* ΔABC *se divide en 4 triángulos iguales. Este proceso se repite para el siguiente triángulo de la sucesión, donde:*

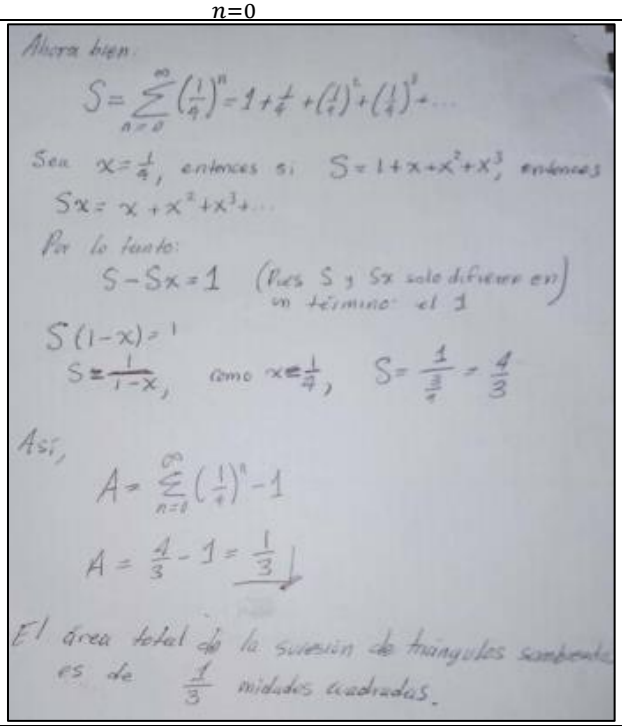
$$\Delta D'E'F' = \frac{1}{4}\Delta DBE = \frac{1}{4}\Delta DEF$$



Es decir, cada triángulo subsecuente será $\frac{1}{4}$ *del anterior (en términos del área). Como el primer triángulo tiene área 1, entonces la suma total de las áreas es:*

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1$$



Ahora bien

$$S = \sum_{(n=0)}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$$

Sea $x = \frac{1}{4}$, *entonces si* $S = 1 + x + x^2 + x^3$, *entonces* $Sx = x + x^2 + x^3 + \cdots$
Por lo tanto $S - Sx = 1$ *(pues S y Sx solo difieren en un termino: el 1)*
$S(1 - x) = 1$

$S = \frac{1}{1-x}$ *como* $x = \frac{1}{4}$, $S = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

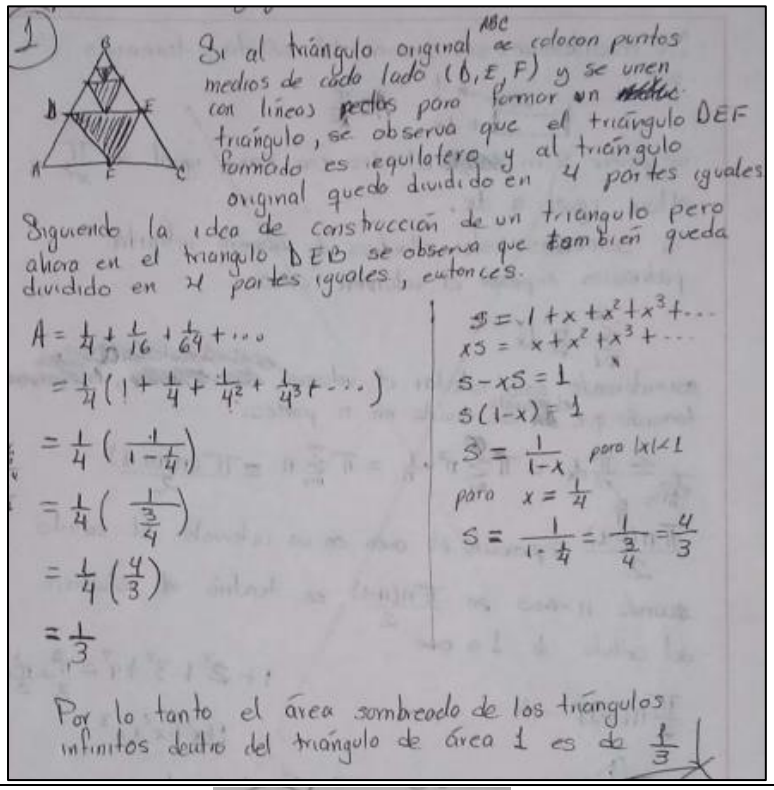
Así,

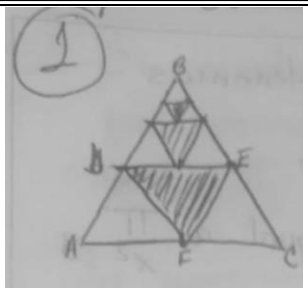
$$A = \sum_{(n=0)}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1$$

$$A = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

El area total de la sucesion de triangulos sombreados es de $\frac{1}{3}$ *unidades cuadradas.*

Estudiante H





Si al triángulo original ABC se le colocan los puntos medios de cada lado (D, E, F) y se unen con líneas rectas para formar un triángulo, se observa que el triángulo DEF formado es equilátero y al triángulo original queda dividido en 4 partes iguales.
Siguiendo la idea de construcción de un triángulo, pero ahora en el triángulo DEB se observa que también queda dividido en 4 partes iguales, entonces.

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

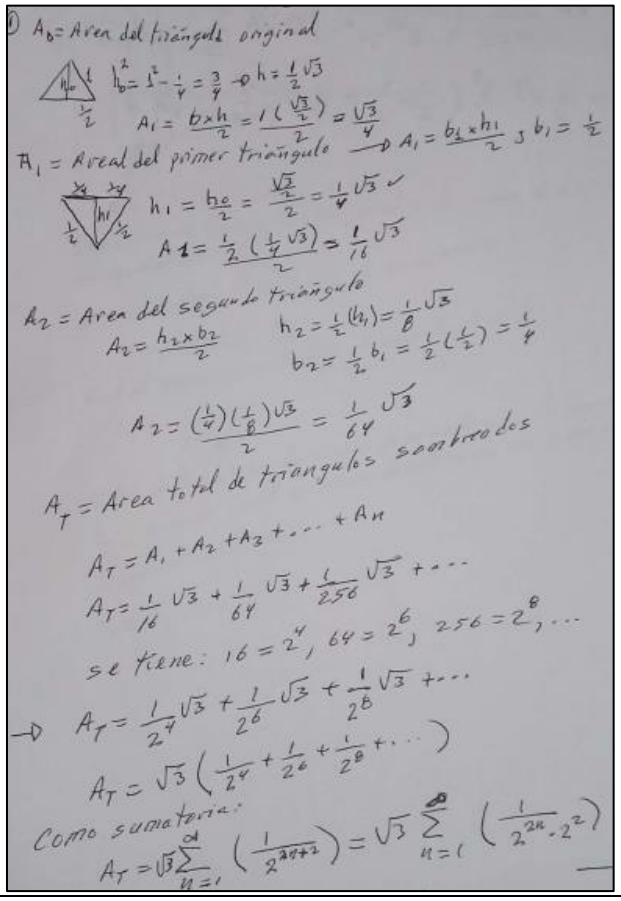
$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
$$xS = x + x^2 + x^3 + \cdots$$
$$S - xS = 1$$
$$S(1-x) = 1$$
$$S = \frac{1}{1-x} \qquad pero \qquad |x| < 1$$

Para $x = \frac{1}{4}$

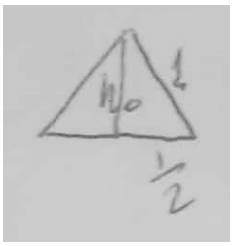
$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto el área sombreada de los triángulos infinitos dentro del triángulo de área 1 es de $\frac{1}{3}$.

Estudiante I



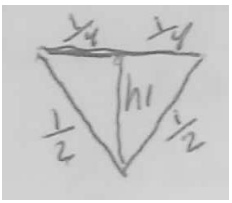
$A_0 =$ *área del triángulo original*



$$h_0^2 = 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$A_1 = \frac{b * h}{2} = \frac{1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 = \acute{a}rea\ del\ primer\ tri\acute{a}ngulo \rightarrow A_1 = \frac{b_1 * h_1}{2}\ y\ b_1 = \frac{1}{2}$$



$$h_1 = \frac{h_0}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

$$A_1 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{1}{16}\sqrt{3}$$

$A_2 = \acute{a}rea\ del\ segundo\ tri\acute{a}ngulo$

$$A_2 = \frac{b_2 * h_2}{2} \qquad h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{8}\sqrt{3} \qquad b_2 = \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{64}\sqrt{3}$$

$A_T = \acute{a}rea\ total\ de\ tri\acute{a}ngulos\ sombreados$

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$$

$$A_T = \frac{1}{16}\sqrt{3} + \frac{1}{64}\sqrt{3} + \frac{1}{256}\sqrt{3} + \cdots$$

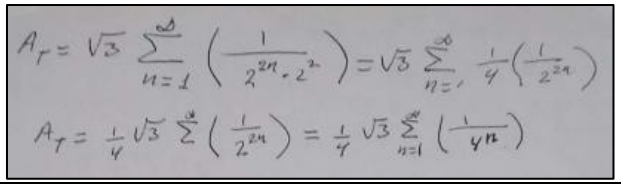
Se tiene $16 = 2^4, 64 = 2^6, 256 = 2^8, \ldots$

$$\rightarrow A_T = \frac{1}{2^4}\sqrt{3} + \frac{1}{2^6}\sqrt{3} + \frac{1}{2^8}\sqrt{3} + \cdots$$

$$A_T = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots\right)$$

Como sumatoria

$$A_T = \sqrt{3}\sum_{(n=1)}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}} = \sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^{2n}2^2}$$



$$A_T = \sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n}\cdot 2^2}\right) = \sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

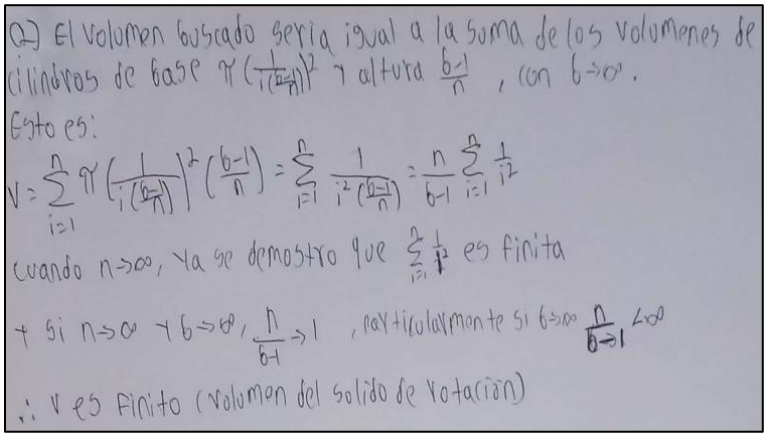
$$A_T = \frac{1}{4}\sqrt{3}\sum^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

ANEXO K

Examen 1. Pregunta 2.

Sin usar integrales pruebe que el volumen del sólido de rotación (generado por $y = \frac{1}{x}$) donde hasta infinito, es un volumen finito.

Estudiante A



El volumen buscado sería igual a la suma de los volúmenes de cilindros de base $\pi\left(\frac{1}{i(b-1)}\right)^2$ *y altura* $\frac{b-1}{n}$*, con* $b \to \infty$

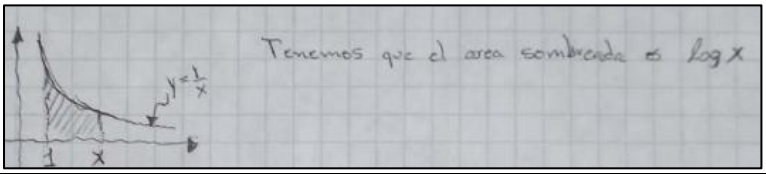
Esto es:

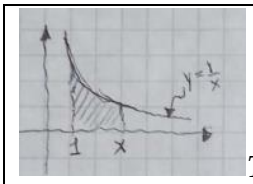
$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi \left(\frac{1}{i\left(\frac{b-1}{n}\right)} \right)^2 \left(\frac{b-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{i^2(b-1)}{n}} = \frac{n}{b-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

Cuando $n \to \infty$ *y* $b \to \infty$, $\frac{n}{b-1} \to 1$, *particularmente si* $b \to \infty$, $\frac{n}{b-1} < \infty$

∴ V es finito (volumen del sólido de rotación.

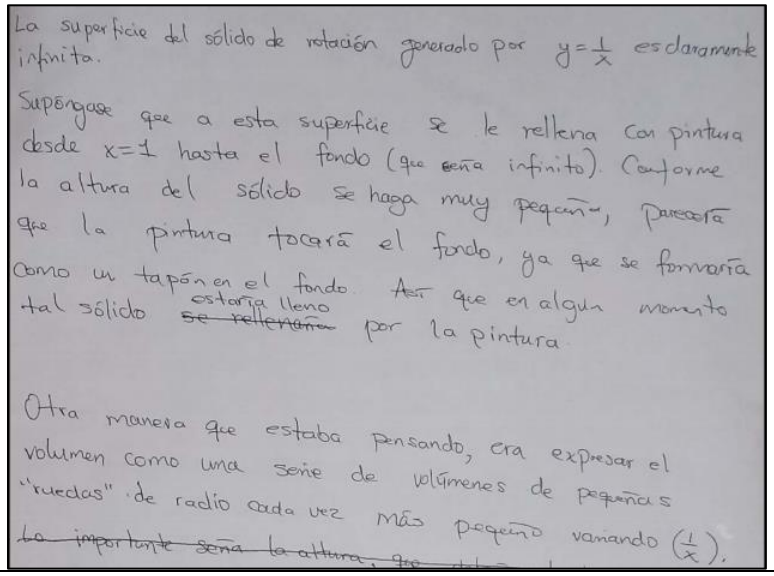
Estudiante B





Tenemos que el área sombreada es $Log\ x$

Estudiante E

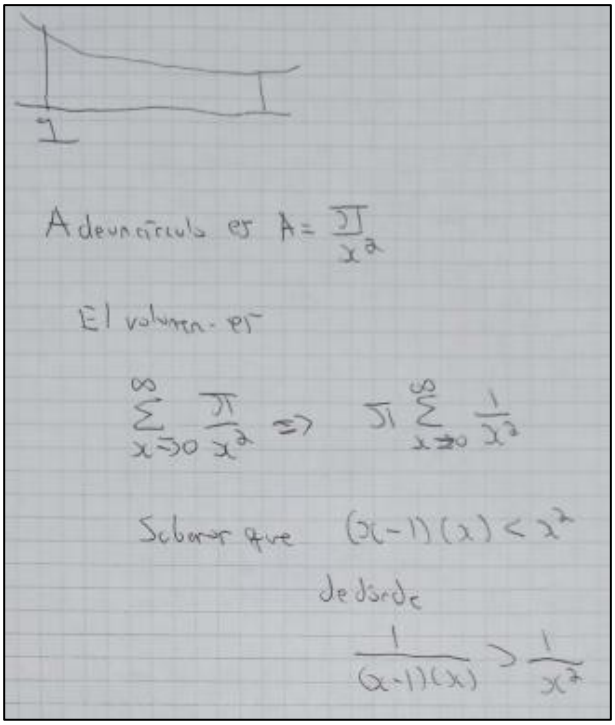

La superficie del sólido de rotación generado por $y=\frac{1}{x}$ es claramente infinita.

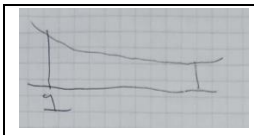
Supóngase que a esta superficie se le rellena con pintura desde x=1 hasta el fondo (que sería infinito). Conforme la altura del sólido se haga muy pequeña, parecería que la pintura tocará el fondo, ya que se formaría como un tapón en el fondo. Así que en algún momento tal sólido estaría lleno por la pintura.

Otra manera que estaba pensando, era expresar el volumen como una serie de volúmenes de pequeñas "ruedas" de radio cada vez más pequeño variando $\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) La superficie del sólido de rotación generado por $y=\frac{1}{x}$ es claramente infinita.
Supóngase que a esta superficie se le rellena con pintura desde $x=1$ hasta el fondo (que sería infinito) Conforme la altura del sólido se haga muy pequeño, parecería que la pintura tocará el fondo, ya que se formaría como un tapón en el fondo. Así que en algún momento tal solido estaría lleno por la pintura.
Otra manera que estaba pensando, era expresar el volumen como una serie de volúmenes de pequeñas "ruedas" de radio cada vez más pequeño variando $\left(\frac{1}{x}\right)$.

Estudiante F



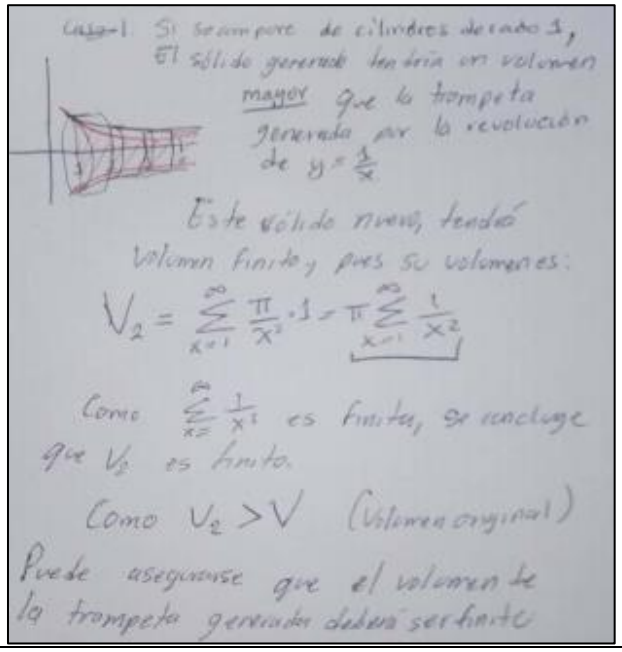


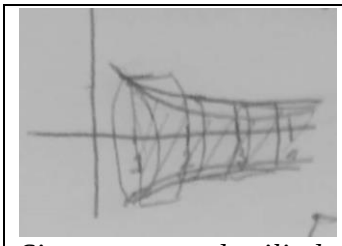
A de un circulo es $A = \frac{\pi}{x^2}$

El volumen es $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\pi}{x^2} \rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^2}$

Sabemos que $(x-1)(x) < x^2$ *de donde* $\frac{1}{(x-1)(x)} > \frac{1}{x^2}$

Estudiante G





Si se compone de cilindros de radio 1, El sólido tendría un volumen <u>mayor</u> que la trompeta generada por la revolución de $y = \frac{1}{x}$.

Este sólido nuevo, tendrá volumen finito, pues su volumen es:

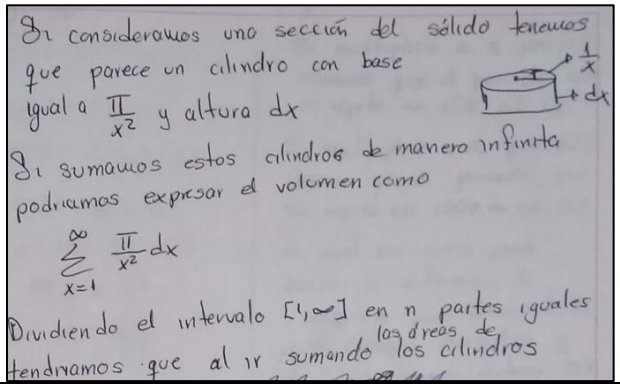
$$V_2 = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\pi}{x^2} * 1 = \pi \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

Como $\sum_{x=}^{\infty} \frac{1}{x^2}$ *es finita, se concluye que* V_2 *es finita.*

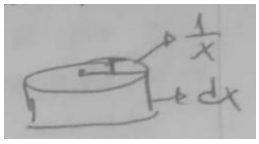
Como $V_2 > V$ *(volumen original)*

Puede asegurarse que el volumen de la trompeta generada deberá ser finita.

Estudiante H



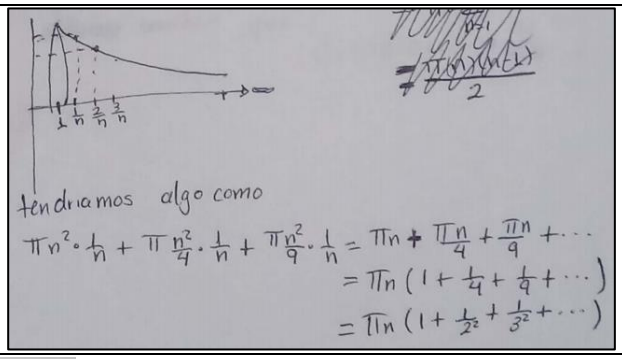
Si consideramos una sección del sólido tenemos que parece un cilindro con base igual a $\frac{\pi}{x^2}$ *y altura dx*

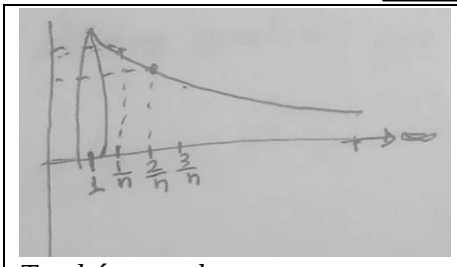


Si sumamos estos cilindros de manera infinita podríamos expresar el volumen como

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\pi}{x^2} dx$$

Dividiendo el intervalo $[1,\infty]$ *en n partes iguales tenemos que al ir sumando las áreas de los cilindros*

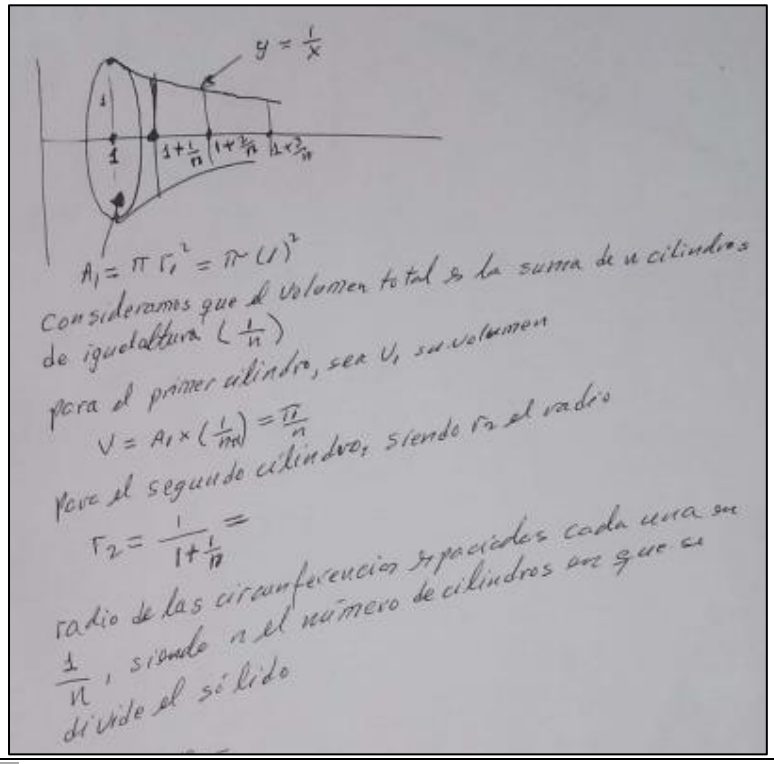


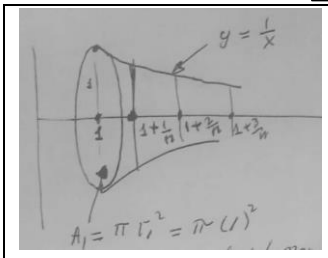


Tendríamos algo como

$$\pi n^2 * \frac{1}{n} + \pi \frac{n^2}{4} * \frac{1}{n} + \pi \frac{n^2}{9} * \frac{1}{n} = \pi n + \frac{\pi n}{4} + \frac{\pi n}{9} + \cdots$$
$$= \pi n \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = \pi n \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

Estudiante I





Consideremos que el volumen total es la suma de un cilindro de igual altura $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Para el primer cilindro, sea v*, su volumen.*

$$v = A_1 * \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{n}$$

Para el segundo cilindro, siendo r_2 *el radio.*

$$r_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} =$$

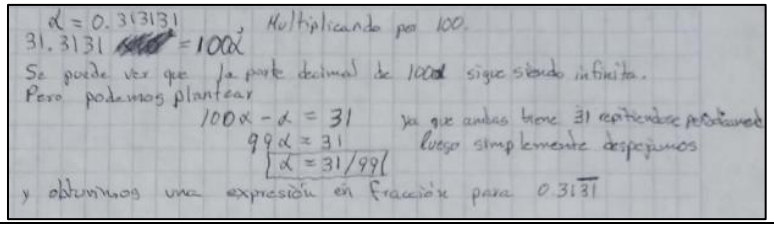
Radio de las circunferencias espaciadas cada una en $\frac{1}{n}$*, siendo n el número de cilindros en que se divide el sólido.*

ANEXO L

Examen 1. Pregunta 3.

Encuentre (explique cuidadosamente) la fracción (decimal) correspondiente a: $\alpha = 0.313131$ ...
(31 se repite infinitamente)

Estudiante B

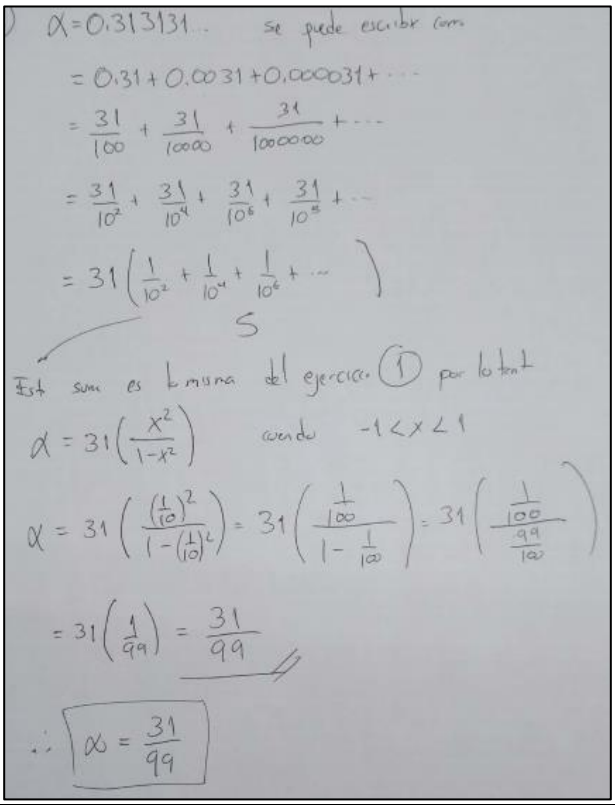


$\alpha = 0.313131$, *multiplicado por 100*
31.3131 = 100α
Se puede ver que la parte decimal de 100α *sigue siendo infinita.*
Pero podemos plantear

$$100\alpha - \alpha = 31 \qquad \textit{ya que ambas tienen 31 repitiéndose periódicamente}$$
$$99\alpha = 31 \qquad \textit{luego simplemente despejamos}$$
$$\alpha = \frac{31}{99}$$

Y obtuvimos una expresión en fracción para $0.31\overline{31}$

Estudiante C



$\alpha = 0.313131$ *se puede escribir como*

$$= 0.31 + 0.0031 + 0.000031 + \cdots$$

$$= \frac{31}{100} + \frac{31}{10000} + \frac{31}{1000000} + \cdots$$
$$= \frac{31}{10^2} + \frac{31}{10^4} + \frac{31}{10^6} + \frac{31}{10^8} + \cdots$$
$$= 31\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right)$$

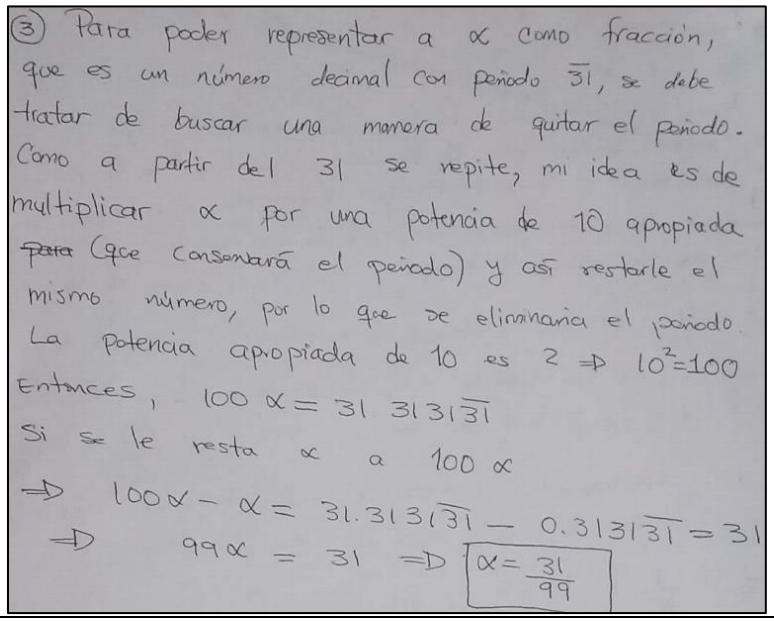
Esta suma es la misma del ejercicio 1 por lo tanto

$\alpha = 31(\frac{x^2}{1-x^2})$ *cuando* $-1 < x < 1$

$$\alpha = 31\left(\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}\right) = 31\left(\frac{\frac{1}{100}}{1-\left(\frac{1}{100}\right)}\right) = 31\left(\frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}}\right) = 31\left(\frac{1}{99}\right) = \frac{31}{99}$$

$$\alpha = \frac{31}{99}$$

Estudiante E



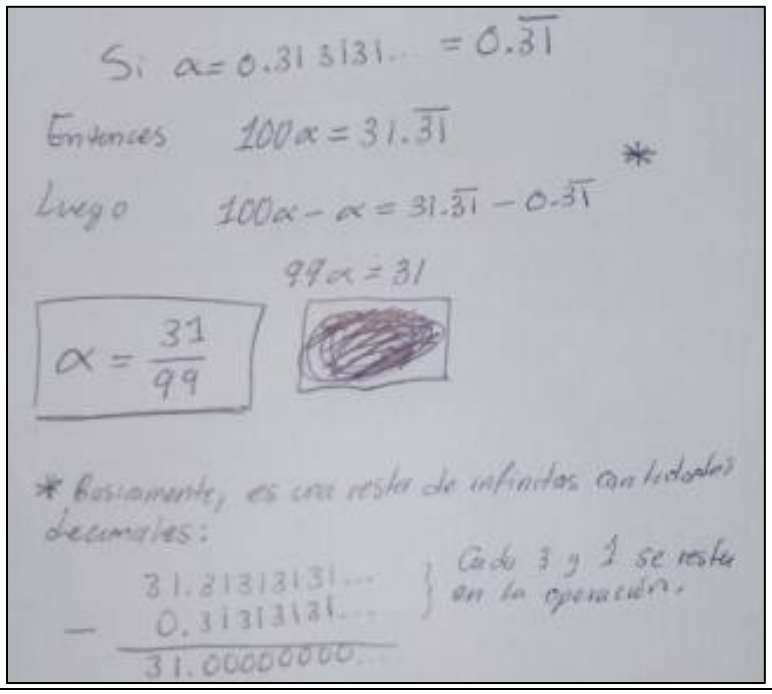
1) *Para poder representar a α como fracción, que es un numero decimal con periodo* $\overline{31}$*, se debe tratar de buscar una manera de quitar el periodo. Como a partir del 31 se repite, mi idea es de multiplicar α por una potencia de 10 apropiada (que conservará el periodo) y así restarle el mismo número, por lo que se eliminaría el periodo. La potencia apropiada de 10 es 2* → $10^2 = 100$.

Entonces, $100\,\alpha = 31.313\overline{31}$ *si se le resta α a* 100α

→ $100\alpha - \alpha = 31.313131\overline{31} - 0.313131\overline{31}$ *=31*

→ $99\alpha = 31$ → $\alpha = \frac{31}{99}$.

Estudiante G



Si $\alpha = 0.313131 \ldots = 0.\overline{31}$

Entonces $100\alpha = 31.\overline{31}$

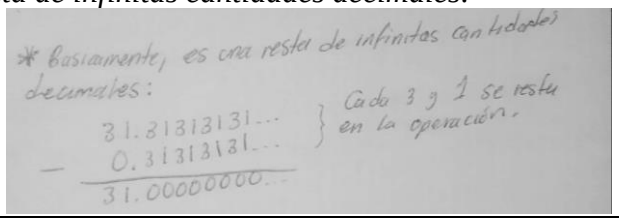
Luego

$$100\alpha - \alpha = 31.\overline{31} - 0.\overline{31}$$

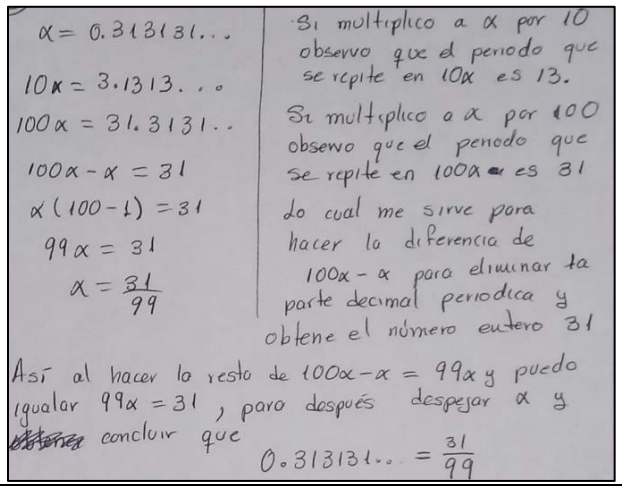
$$99\alpha = 31$$

$$\alpha = \frac{31}{99}$$

**Básicamente es una resta de infinitas cantidades decimales:*



Estudiante H



$$\alpha = 0.313131 \ldots$$
$$10\alpha = 3.1313 \ldots$$
$$100\alpha = 31.3131 \ldots$$
$$100\alpha - \alpha = 31$$
$$\alpha(100 - 1) = 31$$
$$99\alpha = 31$$
$$\alpha = \frac{31}{99}$$

Si multiplico a α por 10 observo que el periodo que se repite en 10α es 13.
Si multiplico a α por 100 obsero que el periodo que se repite en 100α es 31
Lo cual me sirve para hacer la diferencia de $100\alpha - \alpha$ para eliminar la parte decimal periódica y obtener el número entero 31.
Así al hacer la resta de $100\alpha - \alpha = 99\alpha$ y puedo igualar $99\alpha = 31$, para después despejar α y concluir que $0.313131 \ldots = \frac{31}{99}$.

ANEXO M

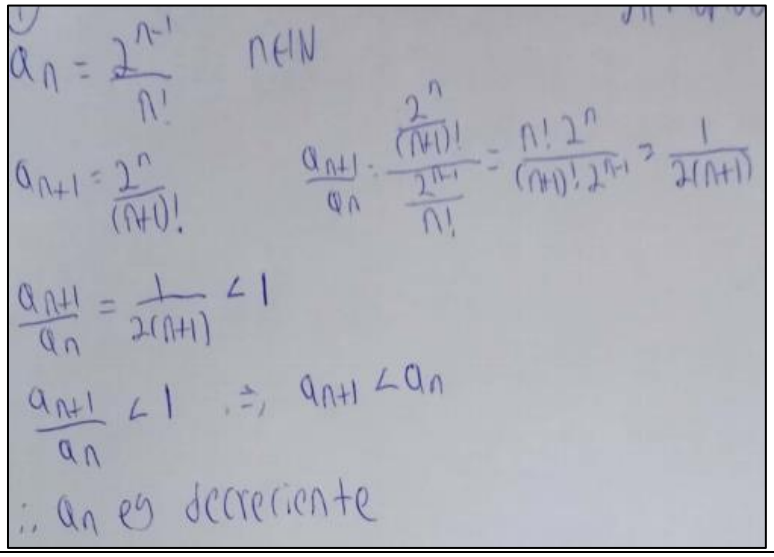
Examen 2. Pregunta 1.

A) Probar que la sucesión $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$ es decreciente

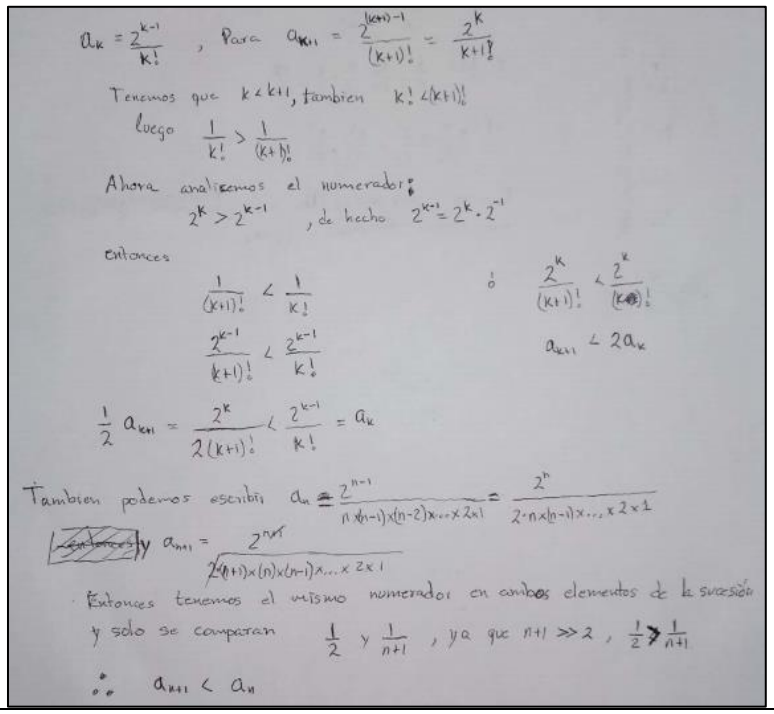
B) Calcule el límite de $b_n = 2a_n$

C) ¿Por qué sabe que el límite existe?

Estudiante A



Estudiante B



$a_k = \frac{2^{k-1}}{k!}$, *Para* $a_{k+1} = \frac{2^k}{k+1!}$

Tenemos que $k < k+1$, *también* $k! < (k+1)!$

Luego $\frac{1}{k!} > \frac{1}{(k+1)!}$

Ahora analizaremos el numerador:

$2^k > 2^{k-1}$, *de hecho* $2^{k-1} = 2^k * 2^{-1}$

Entonces

$\frac{1}{(k+1)!} < \frac{1}{k!}$ *O* $\frac{2^k}{(k+1)!} < \frac{2^k}{k!}$

$\frac{2^{k-1}}{(k+1)!} < \frac{2^{k-1}}{k!}$ $a_{k+1} < 2a_k$

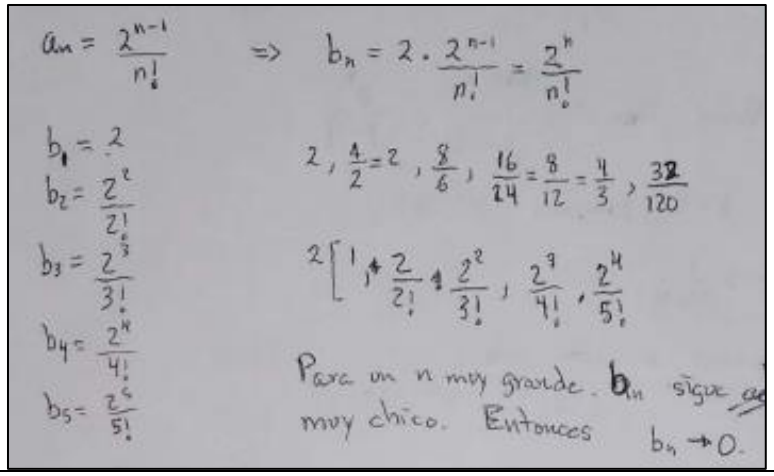
$\frac{1}{2} a_{k+1} = \frac{2^k}{2(k+1)!} < \frac{2^{k-1}}{k!} = a_k$

También podemos escribir $a_n = \frac{2^{n-1}}{n(n-1)*(n-2)*...*2*1} = \frac{2^n}{2*n*(n-1)*...*2*1}$

Y $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2*(n+1)*(n)*(n-1)*...*2*1}$

Entonces tenemos el mismo numerador en ambos elementos de la sucesión y solo se comparan $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{1}{n+1}$, *ya que* $n+1 \gg 2$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{n+1}$

$\therefore a_{n+1} < a_n$



$$a_n = \frac{2^{n-1}}{n!} \quad \Rightarrow \quad b_n = 2 * \frac{2^{n-1}}{n!} = \frac{2^n}{n!}$$

$b_1 = 2$

$b_2 = \frac{2^2}{2!}$ $\qquad 2, \frac{4}{2} = 2, \frac{8}{6}, \frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{3}, \frac{32}{120}$

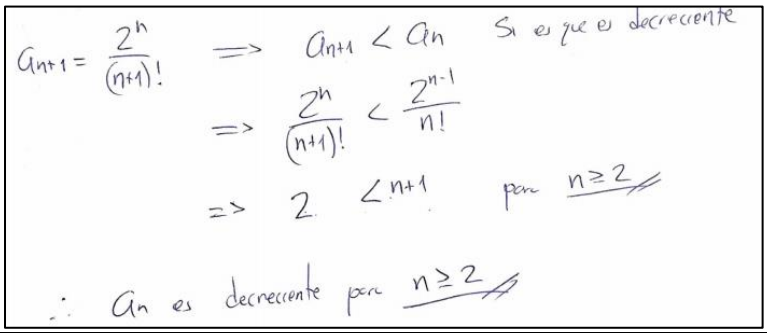
$b_3 = \frac{2^3}{3!}$ $\qquad 2[1, \frac{2}{2!}, \frac{2^2}{3!}, \frac{2^3}{4!}, \frac{2^4}{5!}$

$b_4 = \frac{2^4}{4!}$

$b_5 = \frac{2^5}{5!}$

Para un n muy grande b_n sigue haciéndose muy chico. Entonces $b_n \to 0$

Estudiante C

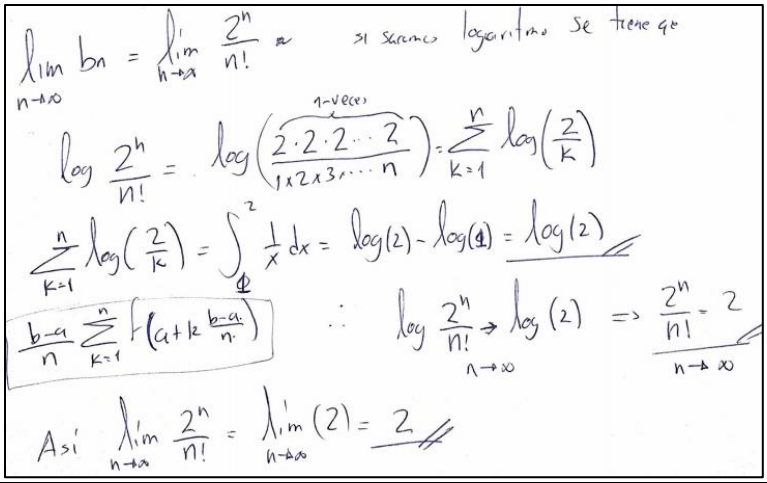


a) $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!} \Rightarrow a_n < a_n$ *si es que es decreciente*

$\Rightarrow \frac{2^n}{(n+1)!} < \frac{2^{n-1}}{n!}$

$\Rightarrow 2 < n + 1$ *para* $n \geq 2$

$\therefore a_n$ *es decreciente para* $n \geq 2$



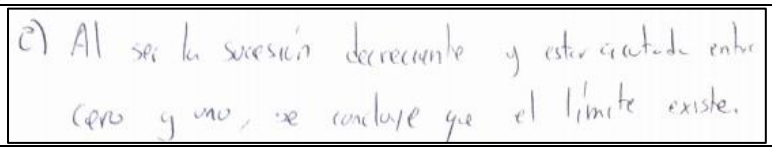
b) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ *si sacamos logaritmo se tiene*

$$log\frac{2^n}{n!} = log\left(\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdots}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right) = \sum_{k=1}^{n} log\left(\frac{2}{k}\right)$$

$\sum_{k=1}^{n} log\left(\frac{2}{k}\right) = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = log(2) - log(1) = log(2)$

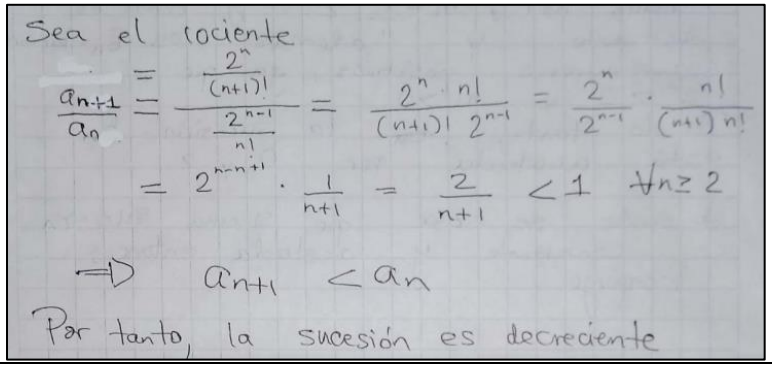
$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{a-b}{n}) \therefore log\frac{2^n}{n!} \to log(2) \Rightarrow \frac{2^n}{n!} = 2$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$

Así el $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$



c)Al ser la sucesión decreciente y estar acotada entre cero u uno, se concluye que el límite existe.

Estudiante E

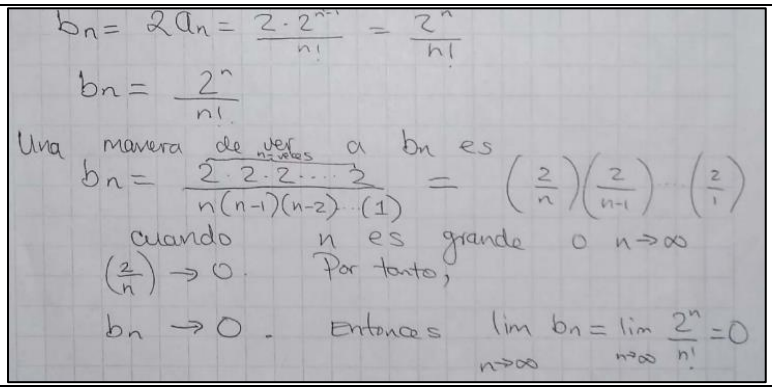


a) Sea el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^n}{(n+1)!}}{\frac{2^{n-1}}{n!}} = \frac{2^n\, n!}{(n+1)!\ 2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} * \frac{n!}{(n+1)\, n!} = 2^{n-n+1} * \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1} < 1 \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

Por tanto, la sucesión es decreciente.



b) $b_n = 2a_n = \frac{2*2^{n-1}}{n!} = \frac{2^n}{n!}$

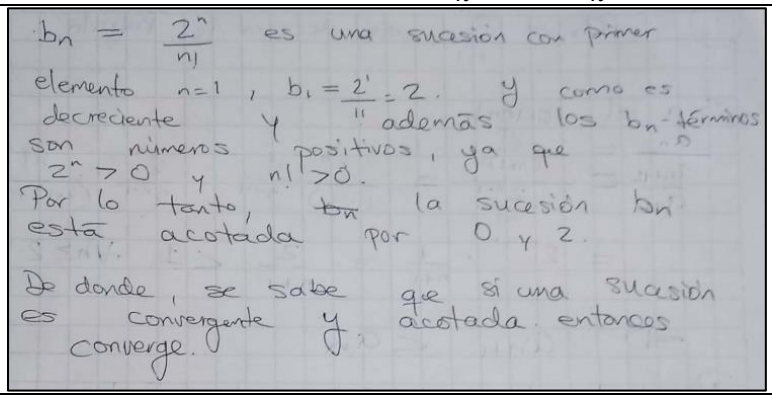
$b_n = \frac{2^n}{n!}$

Una manera de ver a b_n *es:*

$$b_n = \frac{2 * 2 * 2 * \ldots * 2}{n(n-1)(n-2)\ldots(1)} = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n-1}\right)\ldots\left(\frac{2}{1}\right)$$

Cuando n es grande o $n \to \infty$

$\left(\frac{2}{n}\right) \to 0$ *Por tanto,* $b_n \to 0$. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

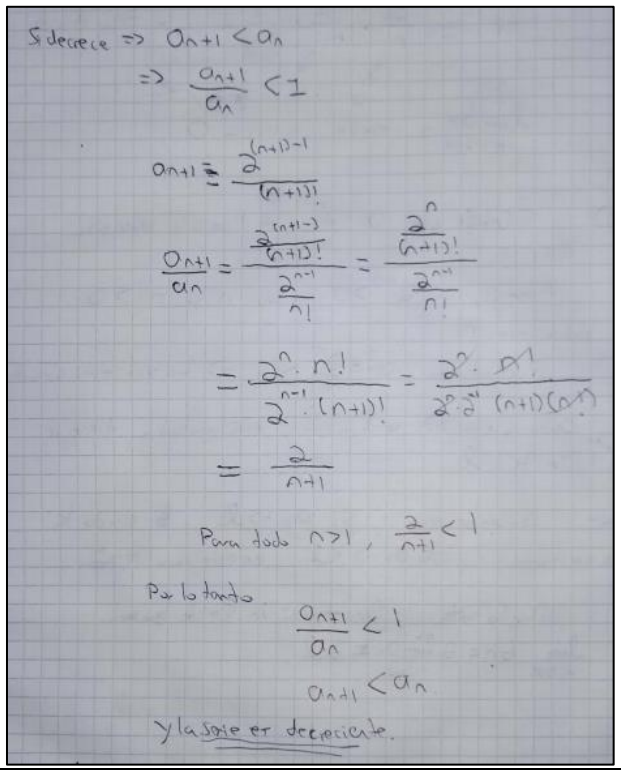


$b_n = \frac{2^n}{n!}$ *Es una sucesión con primer elemento* $n = 1$, $b_1 = \frac{2^1}{1!} = 2$ *y como es decreciente y además los* $b_n - términos$ *son números positivos, ya que* $2^n > 0$ *y* $n! > 0$.

Por lo tanto, la sucesión b_n *esta acotada por 0 y 2.*

De donde, se sabe que si una sucesión es convergente y acotada entonces converge.

Estudiante F



$a)$ *si decrece* $\Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)-1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{2^n n!}{2^{n-1}(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

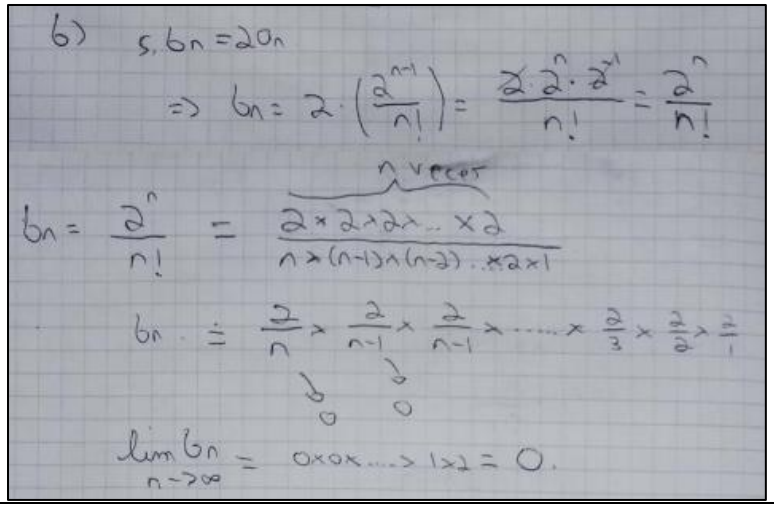
Para todo $n > 1$, $\frac{2}{n+1} < 1$

Por lo tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$a_{n+1} < a_n$$

Y la serie es decreciente



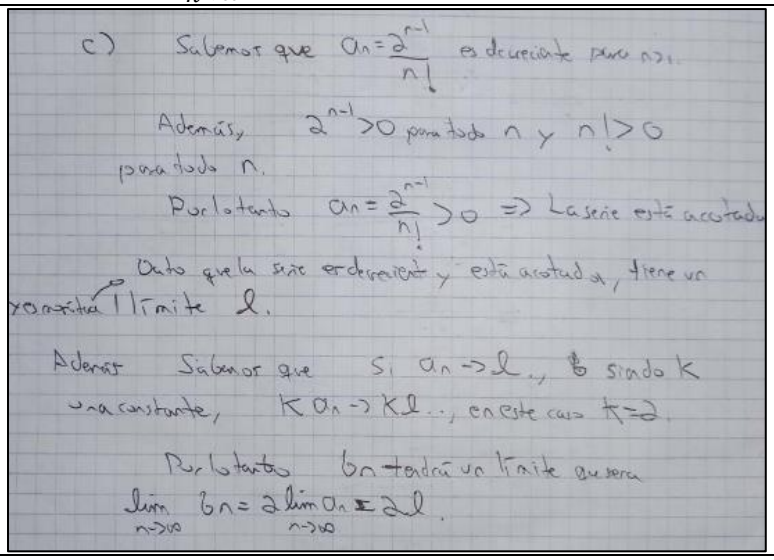
b) $b_n = 2a_n$

$$\Rightarrow b_n = 2\left(\frac{2^{n-1}}{n!}\right) = \frac{2 \cdot 2^n \cdot 2^{-1}}{n!} = \frac{2^n}{n!}$$

$b_n = \frac{2\times2\times\ldots\times2}{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1}$ $n\ veces$

$$b_n = \frac{2}{n}\times\frac{2}{n-1}\times\ldots\times\frac{2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0\times0\ldots\times1\times2 = 0$$



c) Sabemos que $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$ es decreciente para $n > 1$

Además, $2^{n-1} > 0$ para todo $n\ y\ n! > 0$

Para todo n

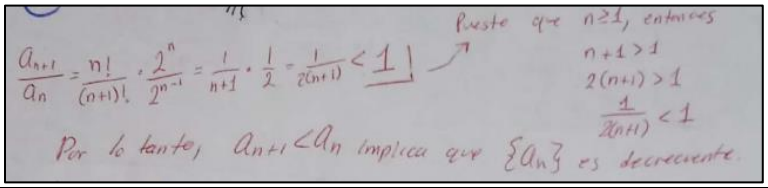
Por lo tanto $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!} > 0 \Longrightarrow La\ serie\ esta\ acotada$

Dato que la serie es decreciente y está acotada y es monótona, tiene un límite L

Además, sabemos que si $a_n \longrightarrow L$, siendo k una constante, $ka_n \longrightarrow kL$, en este caso k=2

Por lo tanto b_n tendrá un límite que será $b_n = 2\lim_{n\to\infty} a_n = 2L$

Estudiante G

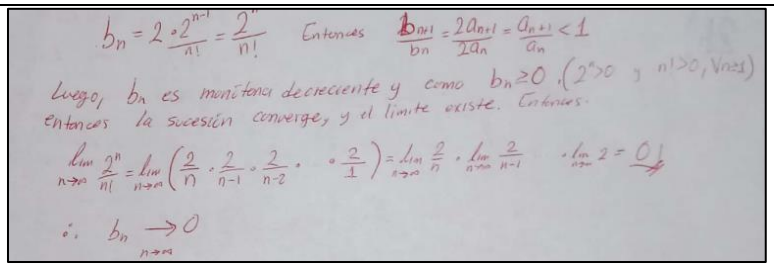


$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{2^n}{2^{n-1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2(n+1)} < 1$$

Puesto que $n \geq 1$, entonces -L

$$n+1 > 1$$
$$2(n+1) > 1$$
$$\frac{1}{2(n+1)} < 1$$

Por lo tanto, $a_{n+1} < a_n$ implica que $\{a_n\}$ es decreciente



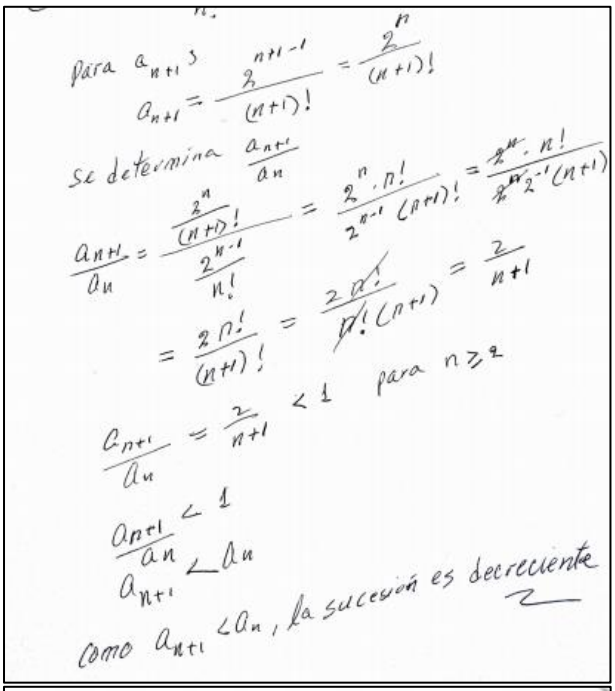
$b_n = 2 \cdot \frac{2^{n-1}}{n!} = \frac{2^n}{n!}$ *entonces* $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2a_{n+1}}{2a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

Luego b_n *es monótona decreciente y como* $b_{n>0}$, $(2^n > 0$ *y* $n! > 0, \forall n \geq 1)$ *entonces la sucesión converge y el límite existe. Entonces.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty} 2 = 0$$

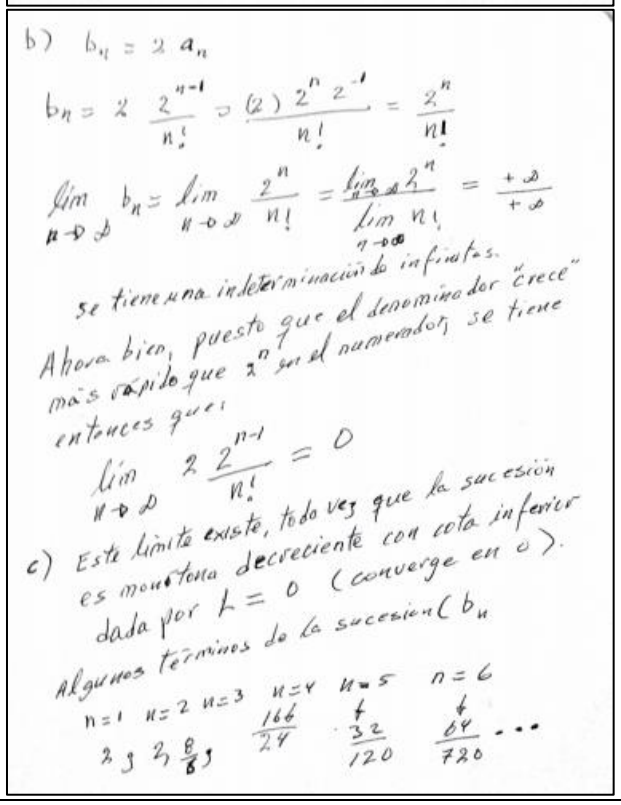
$$\therefore\ b_n \to 0$$

Estudiante I



Para a_{n+1} $a_{n+1} = \frac{2^{n+1-1}}{(n+1)!} = \frac{2^n}{(n+1)!}$

Se determina $\frac{a_{n+1}}{a_n}$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^n}{(n+1)!}}{\frac{2^{n-1}}{n!}} = \frac{2^n - n!}{2^{n-1}(n+1)!} = \frac{2^n n!}{2^n 2^{-1}(n+1)!} = \frac{2n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n!\,(n+1)}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} < 1$ *para* $n \geq 2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$a_{n+1} < a_n$$

Como $a_{n+1} < a_n$ *la sucesión es decreciente*

b)$b_n = 2a_n$ | |

$$b_n = 2\frac{2^{n-1}}{n!} = \frac{(2)2^n 2^{-1}}{n!} = \frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2^n}{\lim_{n\to\infty} n!} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Se tiene una indeterminación de infinitos.

Ahora bien, puesto que el denominador "crece" más rápido que 2^n *en el numerador, se tiene entonces que:*

$$\lim_{n\to\infty} 2\frac{2^{n-1}}{n!} = 0$$

c) Este límite existe, toda vez que la sucesión es monótona decreciente con cota inferior dada por L=0 (convergente en cero).

Algunos términos de la sucesión b_n

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
2	*2*	$\frac{8}{6}$	$\frac{164}{24}$	$\frac{32}{120}$	$\frac{64}{720}$

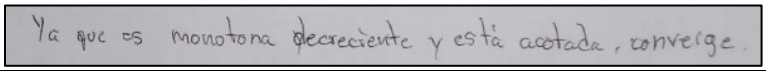
ANEXO N

Examen 2. Pregunta 2.

A) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, probar que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$

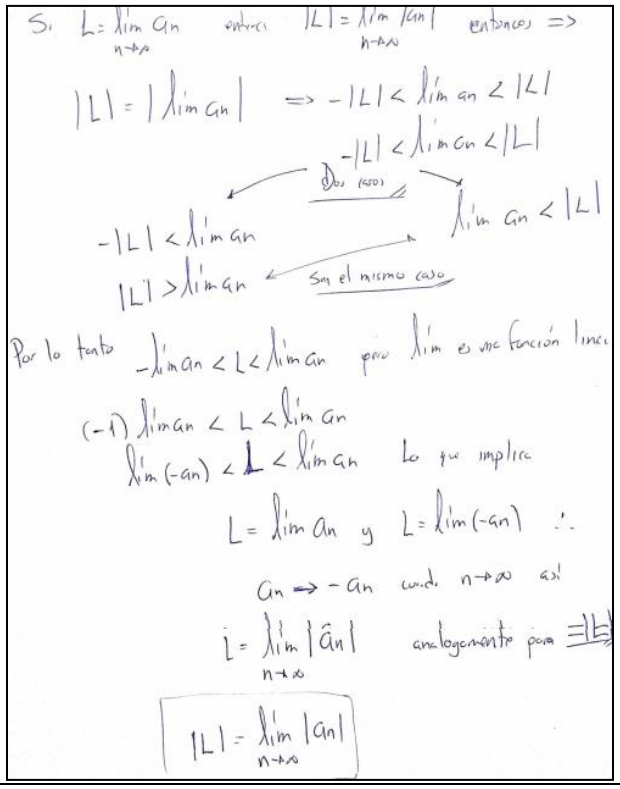
B) Si $r = \lim_{n\to\infty} |a_n|$, podrá afirmarse que la sucesión $\{a_n\}_n$ es convergente.

Estudiante B



b) ya que es monótona decreciente y está acotada, converge.

Estudiante C



a) Si $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ *,entonces* $|L| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$

$|L| = \lim_{n\to\infty} |a_n| \Rightarrow -|L| < lima_n < |L|$

(dos casos)

$-|L| < lima_n$ $\quad lima_n < |L|$

$|L| < lima_n$ $\quad \leftarrow$ *son el mismo caso* $\rightarrow$ $\quad lima_n < |L|$

Por lo tanto $-lim\, a_n < L < lim\, a_n$ *pero el límite es una función lineal*

$(-1) lim\, a_n < L < lim\, a_n$

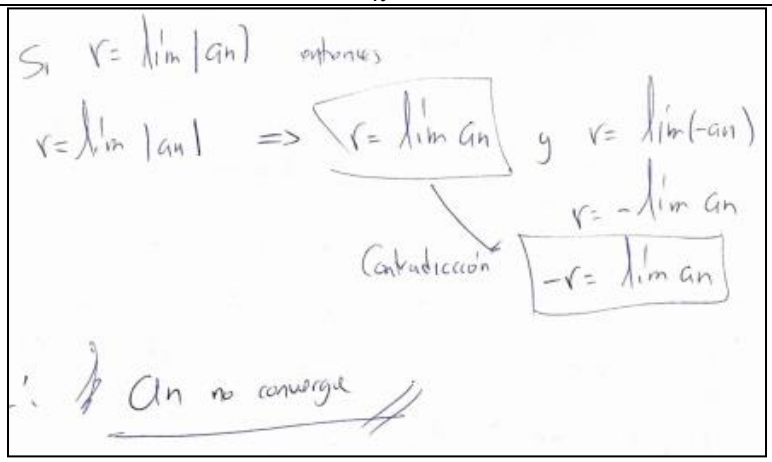
$lim(-a_n) < L < lim\, a_n$ *lo que implica*

$L = lim\, a_n$ *y* $L = lim(-a_n)$

$a_n \rightarrow -a_n$ *cuando* $n \rightarrow \infty$ *así*

$L = \lim_{n\to\infty} |a_n|$ *análogamente para* $-|L|$

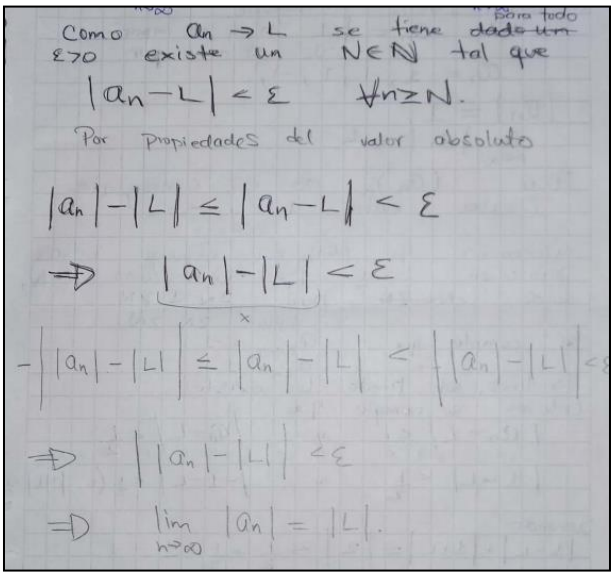
$$|L| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$$



b) Si $r = lim|a_n|$ *entonces*

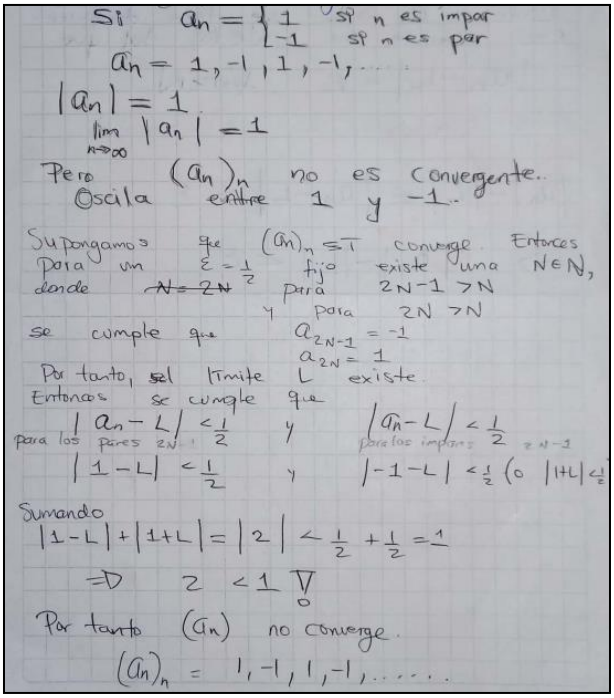
$$r = lim|a_n| \Rightarrow r = lima_n \, y \, r = lim(-a_n)$$
$$r = -lim\, a_n$$
$$-r = lim\, a_n \text{ contradicción}$$
$$a_n \text{ no converge}$$

Estudiante E



a) Como $a_n \to L$ *se tiene para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n - L| < \varepsilon \; \forall n \geq N$.
Por propiedades del valor absoluto

$$|a_n| - |L| \leq |a_n - L| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |a_n| - |L| < \varepsilon$$
$$-\big||a_n| - |L|\big| \leq |a_n - L| < \big||a_n| - |L|\big| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \big||a_n| - |L|\big| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$$



b) Si $a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es impar} \\ -1 \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$

$$a_n = 1, -1, 1, -1, \ldots$$

$|a_n| = 1$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$

Pero $(a_n)_n$ *no es convergente. Oscila entre 1 y -1*

Supongamos que $(a_n)_n$ *si converge. Entonces para un* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *fijo existe un* $N \in \mathbb{N}$, *donde para* $2N - 1 > N$ *y para* $2N > N$ *se cumple que,* $a_{2N-1} = -1$ *y* $a_{2N} = 1$.

Por tanto, el límite L existe.

Entonces se cumple que

$|a_n - L| < \frac{1}{2}$ *y* $|a_n - L| < \frac{1}{2}$

Para los pares 2N *Para los impares 2N-1*

$|1 - L| < \frac{1}{2}$ *y* $|-1 - L| < \frac{1}{2}$ $\left(o\ |1 + L| < \frac{1}{2}\right)$

Sumando

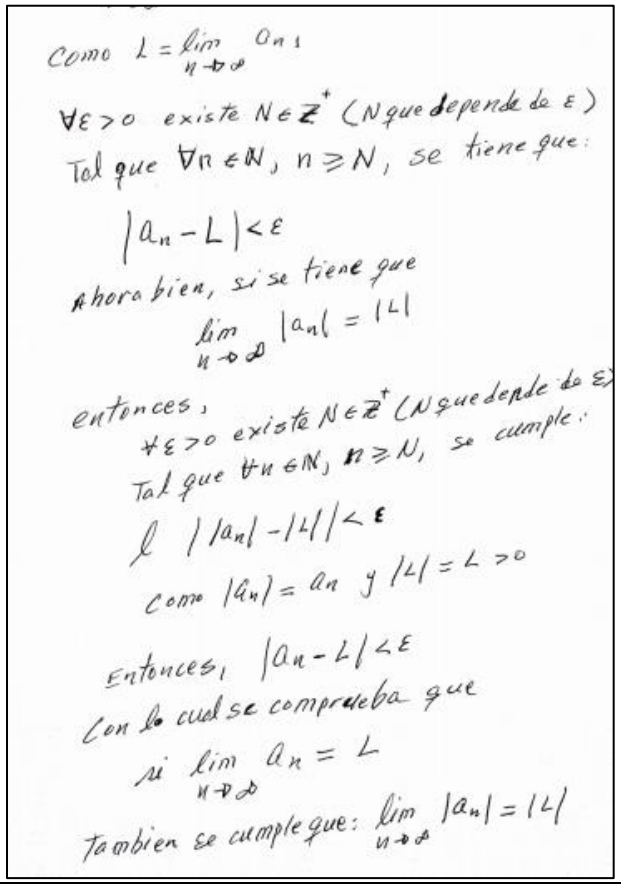
$$|1 - L| + |1 + L| = |2| < |2| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2 < 1!$$

Por tanto (a_n) *no converge*

$$(a_n)_n = 1, -1, 1, -1, \ldots$$

Estudiante I



Como $L = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\forall \varepsilon > 0$ *existe* $N \epsilon \mathbb{Z}^+$ (N *que depende de* ε) *tal que* $\forall n \epsilon \mathbb{N}$, *se tien que* $|a_n - L| < \varepsilon$

Ahora bien, si se tiene que

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$

Entonces,

$\forall \varepsilon > 0$ *existe* $N \epsilon \mathbb{Z}^+$ (N *que depende de* ε) *tal que* $\forall n \epsilon \mathbb{N}$, *se cumple*

$$\big||a_n| - |L|\big| < \varepsilon$$

Como $|a_n| = a_n$ *y* $|L| = L > 0$

Entonces $|a_n - L| < \varepsilon$

Con lo que se comprueba que si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

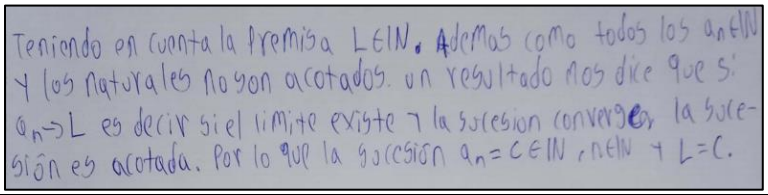
También se cumple que: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$

ANEXO Ñ

Examen 2. Pregunta 3.

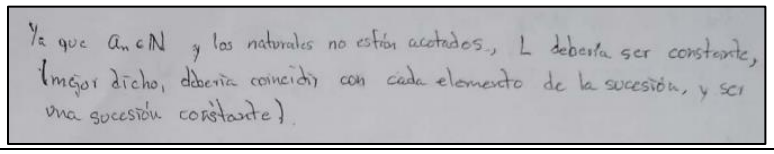
Si $a_n \to L$ y cada $a_n \epsilon \mathbb{N}$ ¿Qué puede decirse del límite L?

Estudiante A



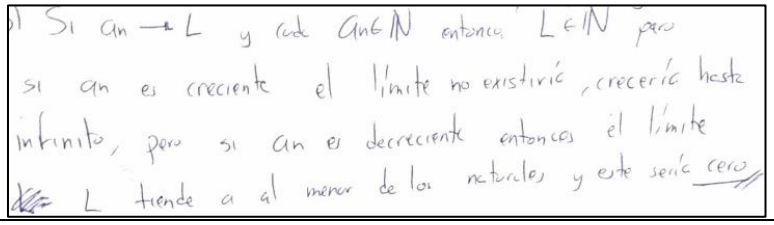
Teniendo en cuenta la premisa $L \in \mathbb{N}$. Además, como todos los $a_n \in \mathbb{N}$ y los naturales no son acotados. Un resultado nos dice que si $a_n \to L$ es decir si el límite existe y la sucesión converge, la sucesión es acotada. Por lo que la sucesión $a_n = c \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ y $L = c$.

Estudiante B



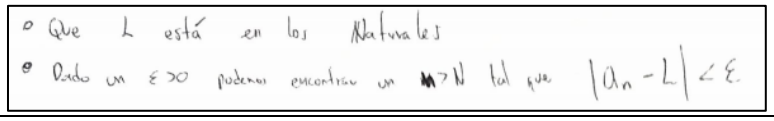
Ya que $a_n \in \mathbb{N}$ y los naturales no están acotados, L debería ser constante, (mejor dicho, debería coincidir con cada elemento de la sucesión, y ser una sucesión constante).

Estudiante C



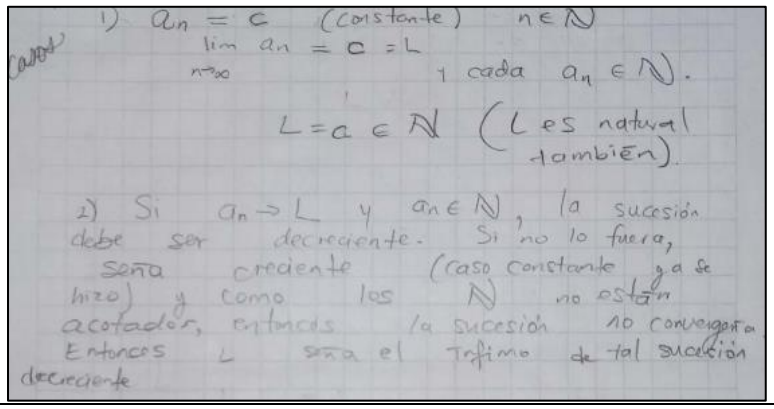
Si $a_n \dashrightarrow L$ y cada $a_n \epsilon \mathbb{N}$ entonces $L \epsilon \mathbb{N}$ pero si a_n es creciente el límite no existiría, crecería hasta infinito, pero si a_n es decreciente entonces el límite L tiende al menor de los naturales y este sería cero.

Estudiante D



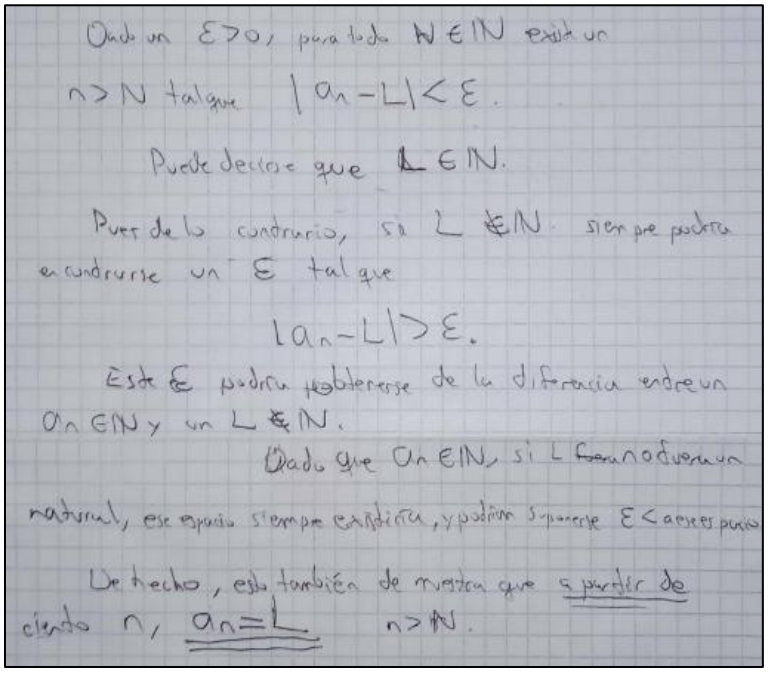
- *Que L está en los Naturales*
- *Dado un $\mathcal{E} > 0$ podemos encontrar un $n > N$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$*

Estudiante E



Casos
1) $a_n = c$ *(constante)* $n \in \mathbb{N}$
$\lim_{n\to\infty} a_n = c = L$ *y cada* $a_n \in \mathbb{N}$
$L = c \in \mathbb{N}$ *(L es natural también)*
2) Si $a_n \to L$ *y* $a_n \in \mathbb{N}$*, la sucesión debe ser decreciente. Si no lo fuera, sería creciente (caso constante ya se hizo) y como los* $\mathbb{N}$ *no están acotados, entonces la sucesión no convergería. Entonces L será el ínfimo de tal sucesión creciente.*

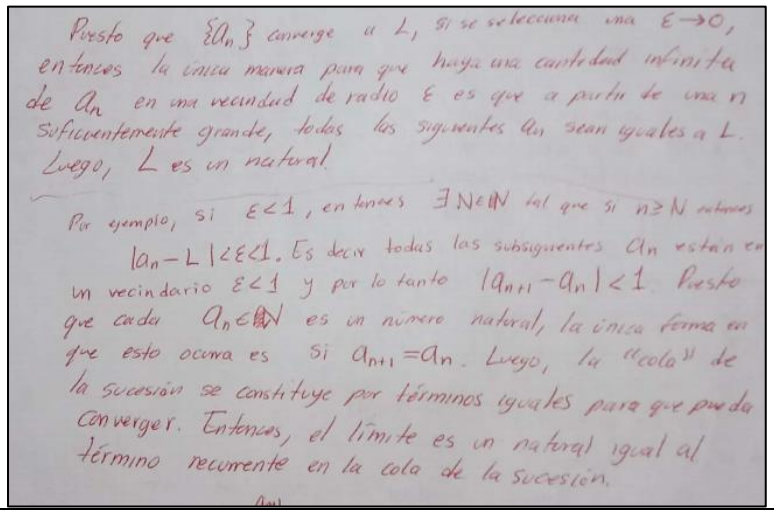
Estudiante F



Dado un $\varepsilon > 0$*, para todo* $N \varepsilon \mathbb{N}$ *existe un* $n > N$ *tal que* $|a_n - L| < \varepsilon$
Puede decirse que $L \epsilon \mathbb{N}$ *siempre podrá encontrarse un* $\mathcal{E}$ *tal que* $|a_n - L| < \varepsilon$
Este ε *podría obtenerse de la diferencia entre un* $a_n \epsilon \mathbb{N}$ *y un* $L \notin \mathbb{N}$
Dado que $a_n \epsilon \mathbb{N}$*, si L no fuera natural, ese espacio siempre existiría y podría suponerse* $\varepsilon <$ *a ese espacio*

De hecho, esto también muestra que a partir de cierto n $a_n = L \quad n > N$

Estudiante G

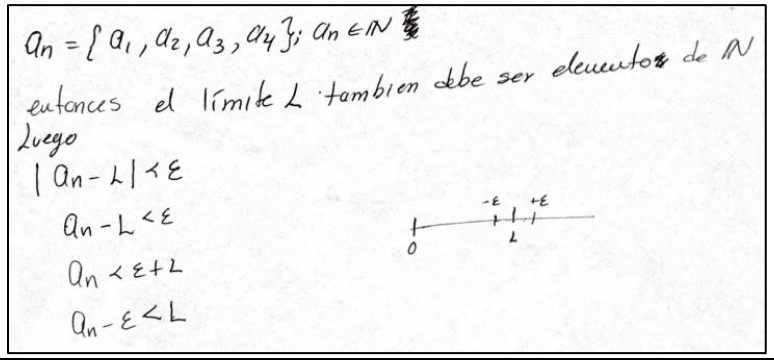

Puesto que $\{a_n\}$ converge a L, si se selecciona una $\varepsilon \to 0$, entonces la única manera para que haya una cantidad infinita de a_n en una vecindad de radio ε es que a partir de una n suficientemente grande, todas las siguientes a_n sean iguales a L. Luego, L es un natural

Por ejemplo, si $\varepsilon < 1$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon < 1$. Es decir todas las subsiguientes a_n estan en un vecindario $\varepsilon < 1$ y por lo tanto $|a_{n+1} - a_n| < 1$. Puesto que cada $a_n \in \mathbb{N}$ es un número natural, la única forma en que esto ocurra es si $a_{n+1} = a_n$. Luego, la "cola" de la sucesión se constituye por términos iguales para que pueda converger. Entonces, el límite es un natural igual al término recurrente en la cola de la sucesión.

Puesto que $\{a_n\}$ *converge a Lsi se selecciona una* $\varepsilon \to 0$*, entonces la única manera para que haya una cantidad infinita de* a_n *en una vecindad de radio* ε *es que apartir de un a n suficientemente grande, todas las siguientes* a_n *sean iguales a L, luego, L es un natural.*

Por ejemplo, si $\varepsilon < 1$*, entonces* $\exists N \epsilon \mathbb{N} tal\ que\ si\ n \geq entonces\ |a_n - L| < \varepsilon < 1$*. Es decir, todas las subsiguientes* a_n *están en el vecindario* $\varepsilon < 1$ *y por tanto* $|a_{n+1} - a_n| < 1$*. Puesto que cada* a_n *es un numero natural la única forma en que esto acurra es si* $a_{n+1} = a_n$ *. Luego, la "cola de la sucesión se construye por términos iguales para que pueda converger. Entonces el límite de un natural igual al termino recurrente en la cola de la sucesión.*

Estudiante H

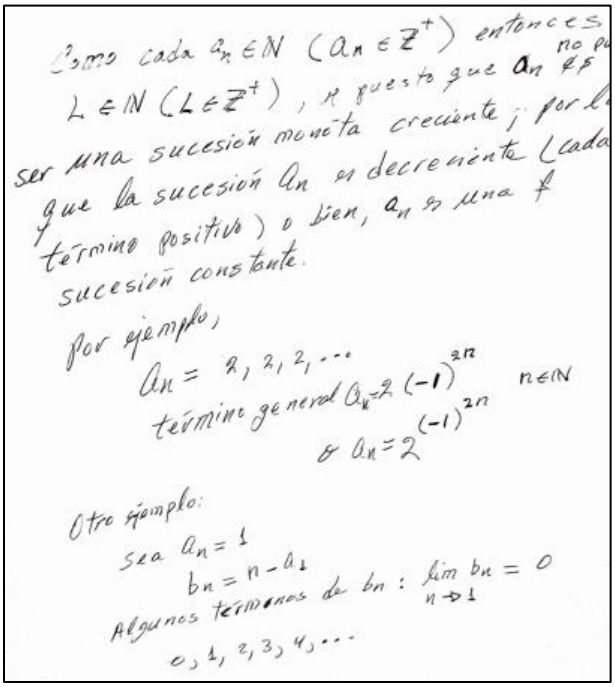


$$a_n = \{a_1, a_2, a_3, a_4\};\ a_n \epsilon \mathbb{N}$$

Entonces el límite L también debe ser elemento de $\mathbb{N}$ *luego*

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
$$a_n - L < \varepsilon$$
$$a_n - L < \varepsilon$$
$$a_n < \varepsilon + L$$
$$a_n - \varepsilon < L$$

Estudiante I



Como cada $a_n \epsilon \mathbb{N}$ $(a_n \epsilon \mathbb{Z}^+)$ entonces $L \epsilon \mathbb{N}$ $(a_n \epsilon \mathbb{Z}^+)$ y puesto que a_n no puede ser una sucesión monótona creciente (cada termino positivo) o bien a_n es una sucesión constante.
Por ejemplo

$$a_n = 2, 2, 2, \ldots$$

Termino general $a_n = 2(-1)^{2n}$ $n \epsilon \mathbb{N}$
O $a_n = 2(-1)^{(-1)^{2n}}$
Otro ejemplo:
Sea $a_n = 1$

$$b_n = n - a_1$$

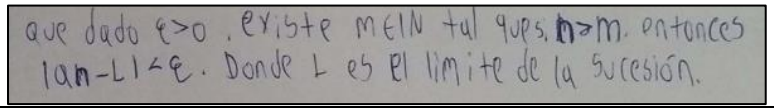
Algunos términos de $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$
0,1,2,3,4,…

ANEXO O

Examen 3. Pregunta 1.

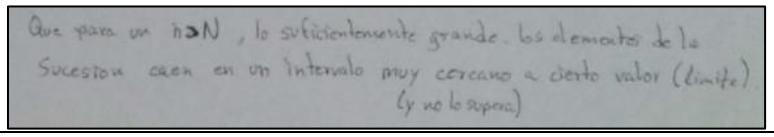
¿Qué significa que una sucesión a_n sea convergente?

Estudiante A



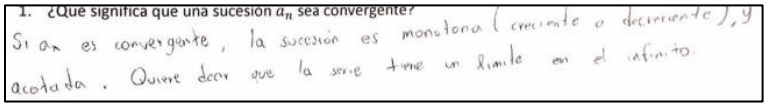
Que dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n > m$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$. Donde L es el límite de la sucesión

Estudiante B



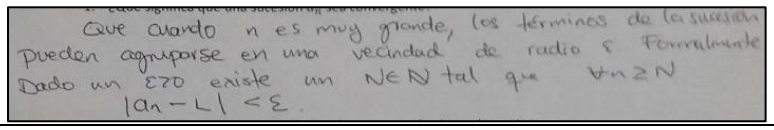
Que para un $n \in \mathbb{N}$, lo suficientemente grande los elementos de la sucesión caen en un intervalo muy cercano a cierto valor (límite) (y no lo supera)

Estudiante D



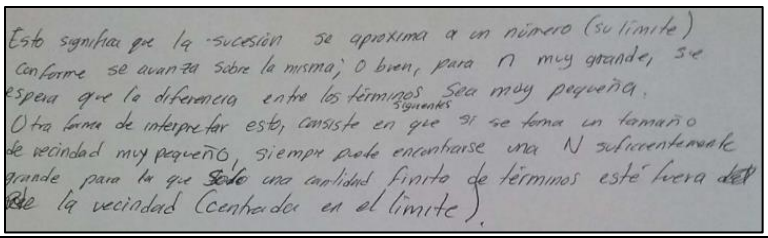
Si a_n es convergente, la sucesión es monótona (creciente o decreciente), y acotada. Quiere decir que la serie tiene un límite en el infinito.

Estudiante E



Que cuando n es muy grande, los términos de la sucesión pueden agruparse en una vecindad de radio ε. Formalmente Dado un $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$. $|a_n - L| < \varepsilon$.

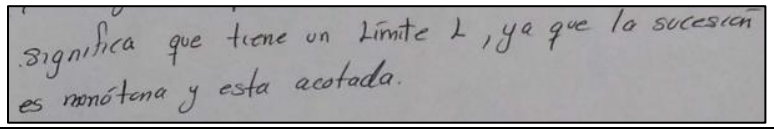
Estudiante G



Esto significa que la sucesión se aproxima a un número (su límite) conforme se avanza sobre la misma; o bien, para n muy grande, se espera que la diferencia entre los términos siguientes sea muy pequeña. Otra forma de interpretar esto, consiste en que, si se toma un tamaño de vecindad

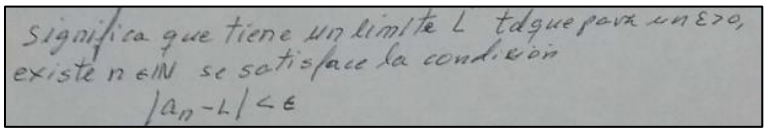
muy pequeño, siempre puede encontrarse una N suficientemente grande para la que solo una cantidad finita de términos este fuera de la vecindad (centrada en el límite).

Estudiante H



Significa que tiene un límite L, ya que la sucesión es monótona y esta acotada.

Estudiante I



Significa que tiene un límite "L" tal que para un $\varepsilon > 0$*, existe un* $n \in \mathbb{N}$ *se satisface la condición* $|a_n - L| < \varepsilon$

ANEXO P

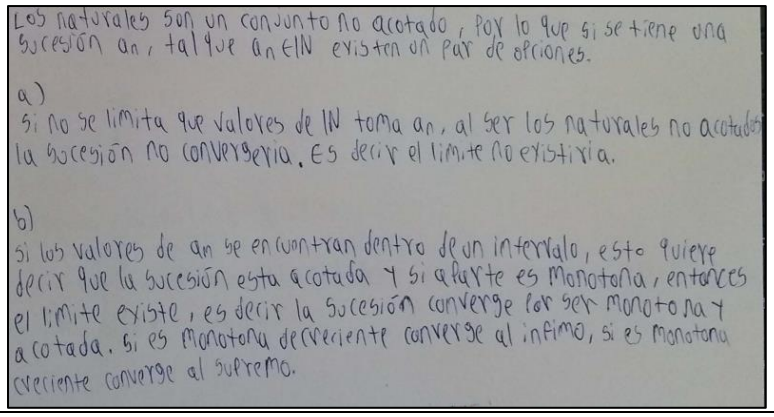
Examen 3. Pregunta 2.

Qué se puede asegurar de los límites de una sucesión si sus elementos:

a) son números naturales, ¿por qué?

b) se encuentran en un intervalo [a, b] y la sucesión es monótona. ¿Por qué?

Estudiante A

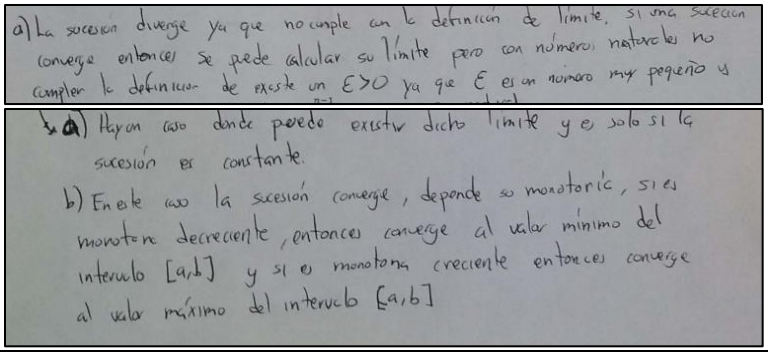

Los naturales son un conjunto no acotado, por lo que si se tiene una sucesión an, tal que an∈N existen un par de opciones.

a)
Si no se limita que valores de N toma an, al ser los naturales no acotados la sucesión no convergería. Es decir el límite no existiría.

b)
Si los valores de an se encuentran dentro de un intervalo, esto quiere decir que la sucesión esta acotada y si aparte es monotona, entonces el límite existe, es decir la sucesión converge por ser monotona y acotada. Si es monotona decreciente converge al infimo, si es monotona creciente converge al supremo.

Los naturales son un conjunto no acotado, por lo que si se tiene una sucesión a_n tal que $a_n \in \mathbb{N}$ existen un par de opciones
a) Si no se limita que valores de $\mathbb{N}$ toma a_n, al ser los naturales no acotados la sucesión no convergería. Es decir, el límite no existiría.
b) Si los valores de a_n se encuentran dentro de un intervalo, esto quiere decir que la sucesión está acotada y si aparte es monótona, entonces el límite existe, es decir, la sucesión converge por ser monótona y acotada. Si es monótona decreciente converge al ínfimo, si es monótona creciente converge al supremo.

Estudiante C


a) La sucesión diverge ya que no cumple con la definición de límite, si una sucesión converge entonces se puede calcular su límite pero con números naturales no cumplen la definición de existe un $\varepsilon > 0$ ya que ε es un número muy pequeño y

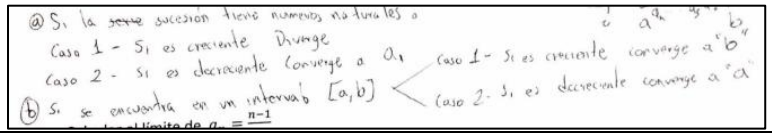
b) a) Hay un caso donde puede existir dicho límite y es solo si la sucesión es constante.
b) En este caso la sucesión converge, depende su monotonía, si es monotona decreciente, entonces converge al valor mínimo del intervalo [a,b] y si es monotona creciente entonces converge al valor máximo del intervalo [a,b]

a) La sucesión diverge ya que no cumple con la definición de límite, si una sucesión converge entonces se puede calcular su límite, pero con números naturales no cumplen la definición de existe un $\varepsilon > 0$ ya que ε es un número muy pequeño y no es natural

a) Hay un caso donde puede existir dicho límite y es solo si la sucesión es constante

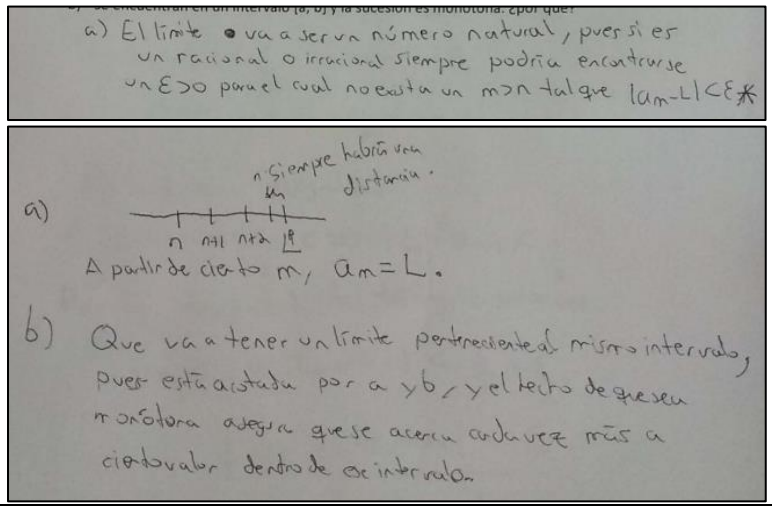
b) En este caso la sucesión converge, depende su monotonía, si es monótona decreciente, entonces converge al valor mínimo del intervalo $[a, b]$ *y si es monótona creciente entonces converge al valor máximo del intervalo* $[a, b]$

Estudiante D

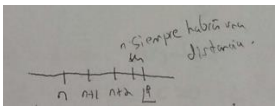


a) Si la sucesión tiene números naturales:
Caso 1 – Si es creciente diverge
Caso 2 – Si es decreciente converge a a_1
b) Si se encuentra en un intervalo $[a, b]$
Caso 1 – si es creciente converge a "b"
Caso 2 – si es decreciente converge a "a"

Estudiante F



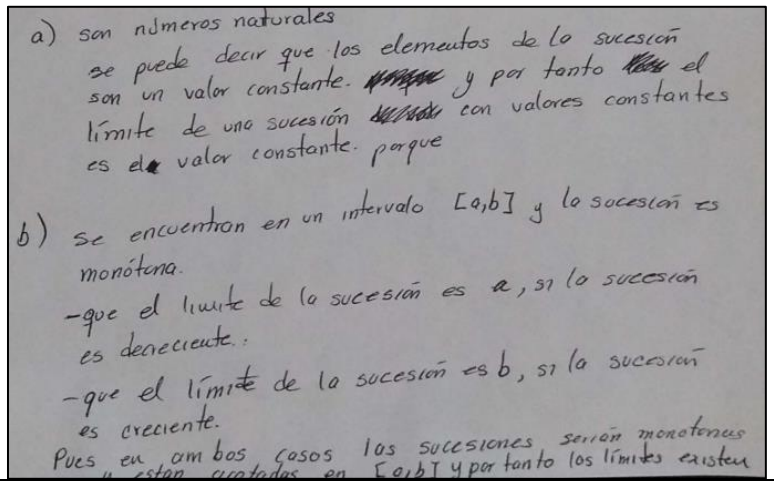
a) El límite va a ser un número natural, pues si es un racional o irracional siempre podría encontrarse un $\varepsilon > 0$ *para el cual no exista un* $m > n$ *tal que* $|a_m - L| < \varepsilon$



A partir de cierto m, $a_m = L$

b) *Que va a tener un límite perteneciente al mismo intervalo, pues está acotada por a y b, y el hecho de que sea monótona asegura que se acerca cada vez más a cierto valor dentro de ese intervalo.*

Estudiante H


a) son números naturales
se puede decir que los elementos de la sucesión son un valor constante. y por tanto el límite de una sucesión con valores constantes es el valor constante. porque

b) se encuentran en un intervalo [a,b] y la sucesión es monótona.
-que el límite de la sucesión es a, si la sucesión es decreciente.
-que el límite de la sucesión es b, si la sucesión es creciente.
Pues en ambos casos los sucesiones serían monotonas y están acotadas en [a,b] y por tanto los límites existen

a) Son números naturales. ¿Por qué?

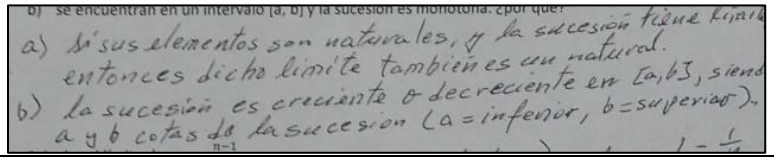
Se puede decir que los elementos de la sucesión son un valor constante. Y por tanto el límite de una sucesión con valores constantes es el valor constante. Porque

b) Se encuentran en un intervalo $[a, b]$ y la sucesión es monótona. ¿Por qué?

- *Que el límite de la sucesión es a, si la sucesión es decreciente.*
- *Que el límite de la sucesión es b, si la sucesión es creciente.*

Pues en ambos casos las sucesiones serán monótonas y están acotadas en $[a, b]$ *y por tanto los límites existen.*

Estudiante I


b) se encuentran en un intervalo [a, b] y la sucesión es monótona. ¿por qué?
a) si sus elementos son naturales, y la sucesión tiene límite entonces dicho límite también es un natural.
b) la sucesión es creciente o decreciente en [a,b], siendo a y b cotas de la sucesion (a=inferior, b=superior).

a) Si sus elementos son naturales, y la sucesión tiene límite, entonces dicho límite también es un natural.

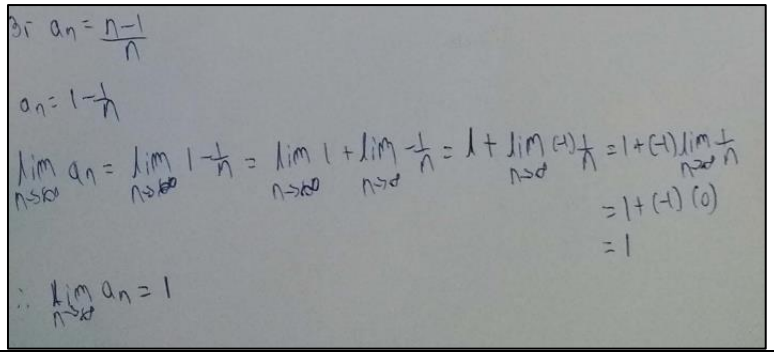
b) La sucesión es creciente o decreciente en $[a, b]$*, siendo a y b cotas de la sucesión (a= inferior, b=superior).*

ANEXO Q

Examen 3. Pregunta 3.

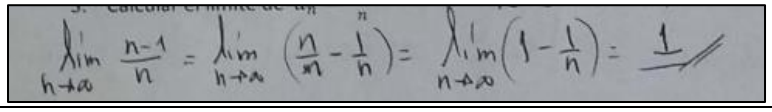
Qué se Calcular el límite de $a_n = \frac{n-1}{n}$

Estudiante A



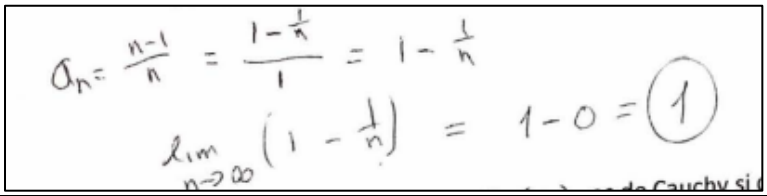
$$a_n = \frac{n-1}{n}$$
$$a_n = 1 - \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)1}{n} = 1 + (-1)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + (-1)0 = 1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Estudiante C



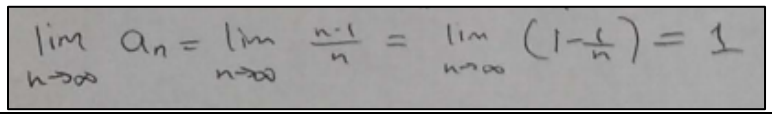
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Estudiante D



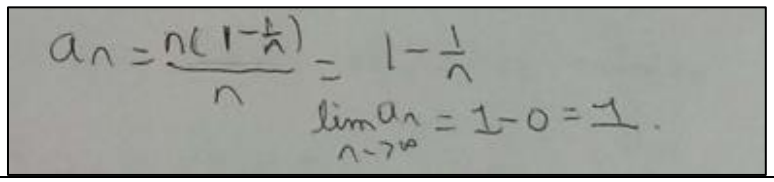
$$a_n = \frac{n-1}{n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1} = 1 - \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1$$

Estudiante E



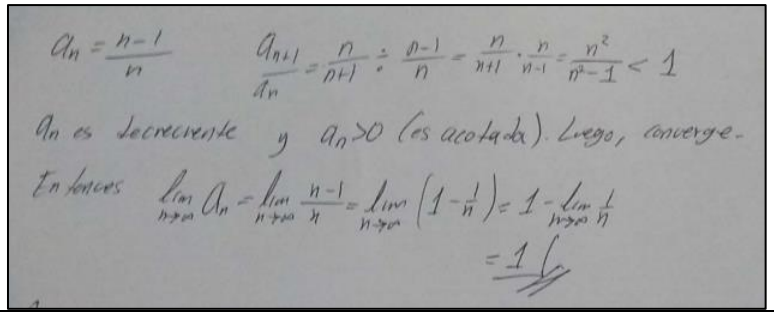
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

Estudiante F



$$a_n = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n} = 1-\frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1-0=1$$

Estudiante G

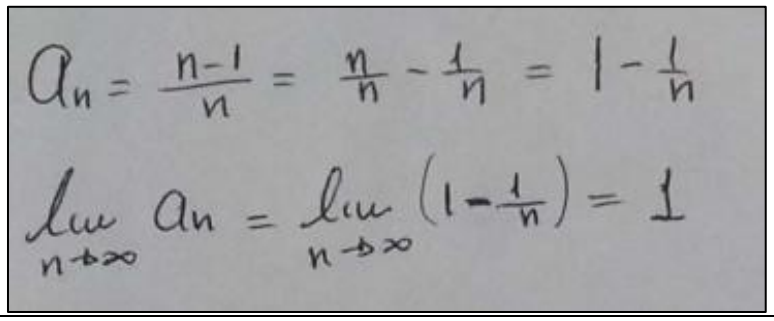


$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \div \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n+1} * \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n^2-1} < 1$$

a_n es decreciente y $a_n > 0$ (es acotada). Luego, converge.

Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$

Estudiante H



$$a_n = \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

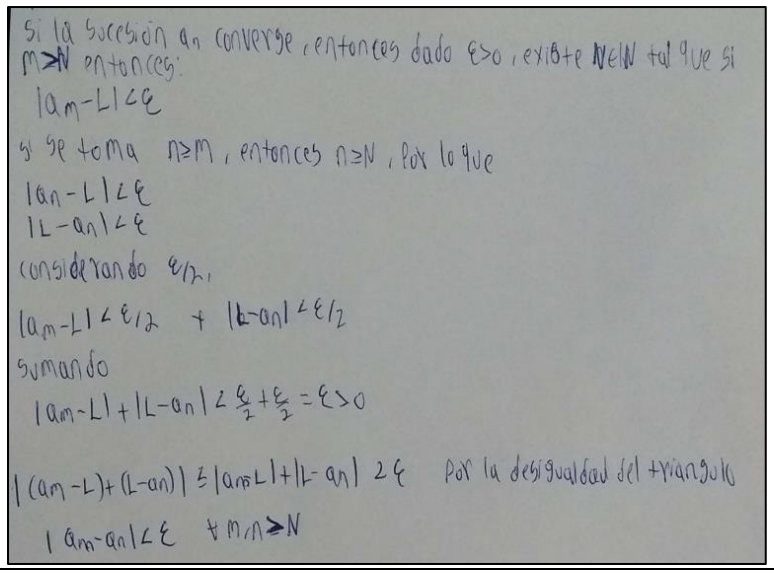
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

ANEXO R

Examen 3. Pregunta 4.

Diremos que una sucesión $(a_n)_n$ es de Cauchy si dado un $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para todos los números naturales $m, n > N$, se cumple que $|a_m - a_n| < \varepsilon$ Demuestre que, si una sucesión es convergente, entonces es de Cauchy.

Estudiante A



Si la sucesión a_n converge, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > N$ entonces:

$$|a_m - L| < \varepsilon$$

Si se toma $n \geq m$, entonces $n \geq N$, por lo que

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
$$|L - a_n| < \varepsilon$$

Considerando $\frac{\varepsilon}{2}$

$|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ *y* $\quad |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

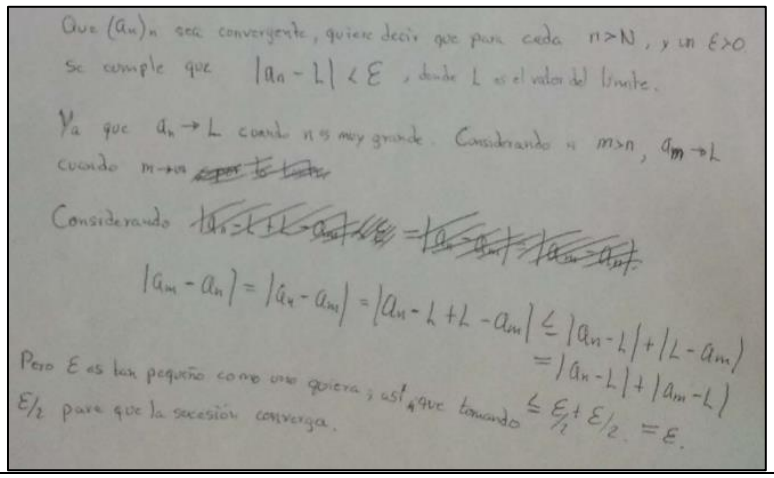
Sumando

$$|a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon > 0$$

$|(a_m - L) + (L - a_n)| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \varepsilon$ *por la desigualdad del triángulo*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n < N$$

Estudiante B

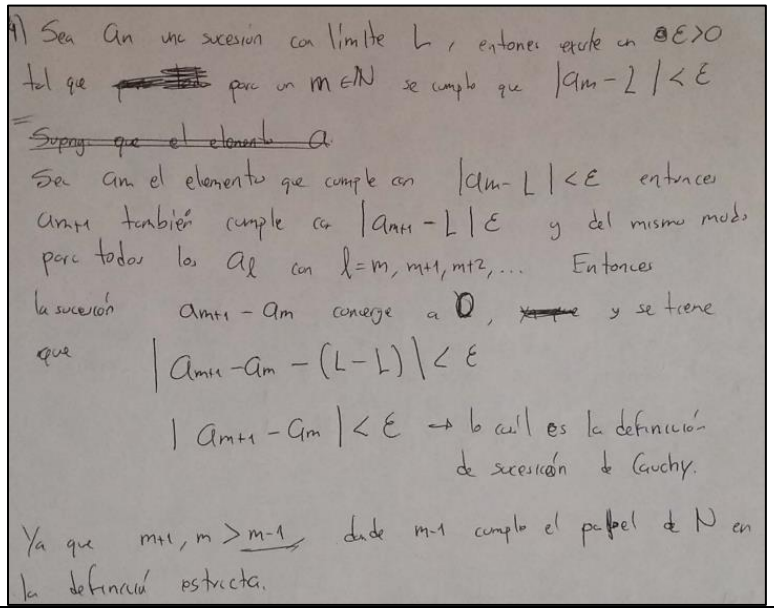


Que $(a_n)_n$ sea convergente, quiere decir que para cada $n > N$, y un $\varepsilon > 0$ se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$, donde L es el valor del límite.
Ya que $a_n \to L$ cuando n es muy grande. Considerando a $m > n$, $a_m \to L$ cuando $m \to \infty$
Considerando

$$|a_m - a_n| = |a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| = |a_n - L| + |a_m - L|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pero ε es tan pequeño como uno quiera, así que tomando $\frac{\varepsilon}{2}$ para que la sucesión converga.

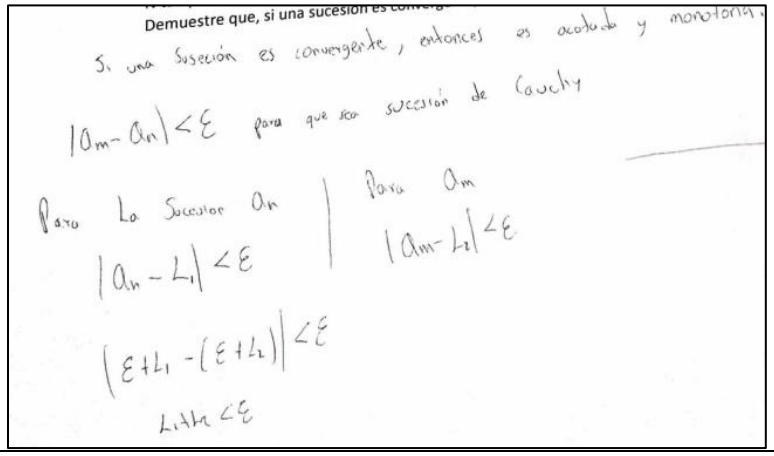
Estudiante C



Sea a_n una sucesión con límite L, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para un $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $|a_m - L| < \varepsilon$
Sea a_m el elemento que cumple con $|a_m - L| < \varepsilon$ entonces a_{m+1} también cumple con $|a_{m+1} - L|\varepsilon$ y del mismo modo para todos a_l con $l = m, m+1, m+2, \ldots$ Entonces la sucesión $a_{m+1} - a_m$ converge a 0, y se tiene que $|a_{m+1} - a_m - (L - L)| < \varepsilon$
$|a_{m+1} - a_m| < \varepsilon$ → lo cual es la definición de sucesión de Cauchy.

Ya que $m+1, m > m-1$ donde $m-1$ cumple el papel de N en la definición escrita.

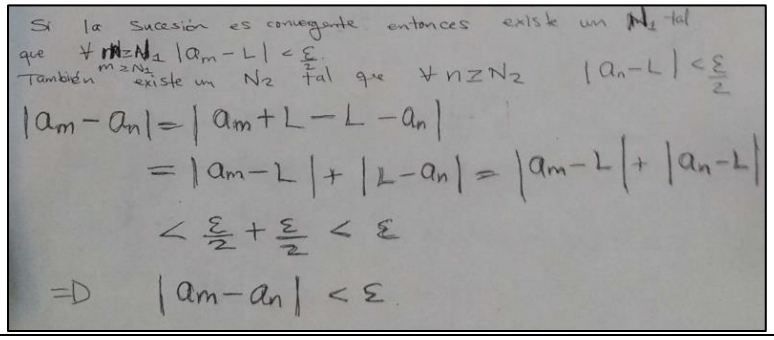
Estudiante D



Si una sucesión es convergente, entonces es acotada y monótona.
$|a_m - a_n| < \varepsilon$ para que sea sucesión de Cauchy
Para la sucesión a_n *Para a_m*
$|a_n - L| < \varepsilon$ $|a_m - L| < \varepsilon$

$|\varepsilon + L_1 - (\varepsilon + L_2)| < \varepsilon$
$L_1 + L_2 < \varepsilon$

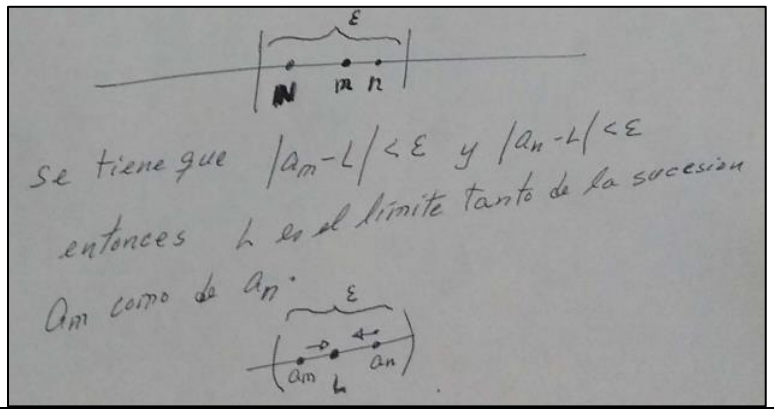
Estudiante E



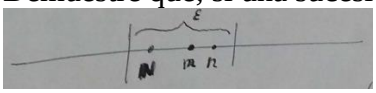
Si la sucesión es convergente entonces existe un N_1 tal que $\forall m \geq N_1$ $|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$
También existe un N_2 tal que $\forall n \geq N_2$ $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|a_m - a_n| = |a_m + L - L - a_n| = |a_m - L| + |L - a_n| = |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

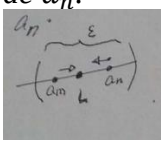
Estudiante I



Demuestre que, si una sucesión es convergente, entonces es de Cauchy.



Se tiene que $|a_m - L| < \varepsilon$ *y* $|a_n - L| < \varepsilon$ *entonces L es el límite tanto de la sucesión* a_m *como de* a_n.

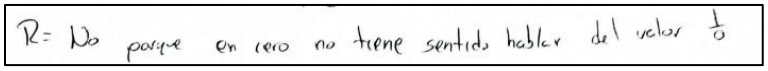


ANEXO S

Examen 4. Pregunta 1.

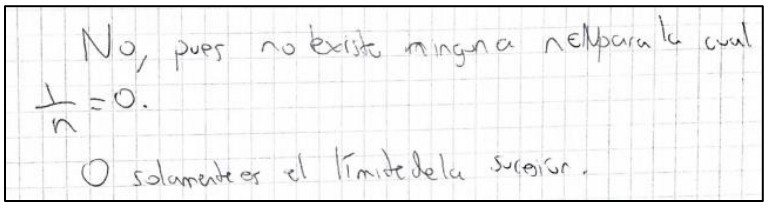
Dada la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. ¿Cero es elemento de la sucesión?

Estudiante C



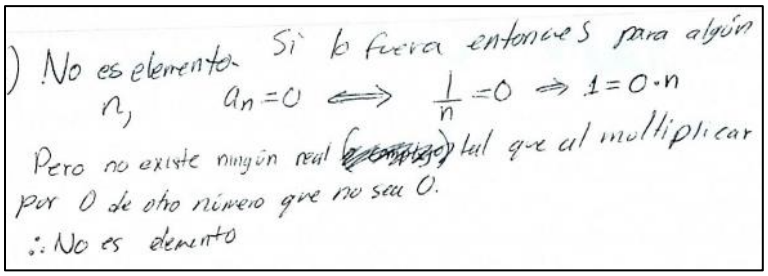
R= No porque en cero no tiene sentido hablar del valor $\frac{1}{0}$

Estudiante F



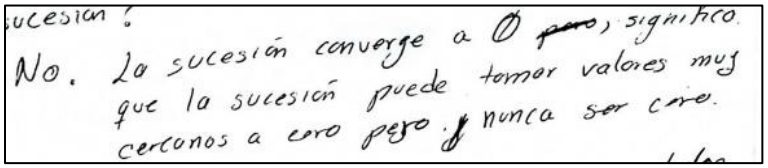
No, pues no existe ninguna $n \in \mathbb{N}$ *para la cual* $\frac{1}{n} = 0$
0 solamente es el límite de la sucesión.

Estudiante G



No es elemento. Si lo fuera entonces para algún n, $a_n = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 * n$
Pero no existe ningún real tal que al multiplicar por 0 de otro número que no sea 0.
$\therefore$ *No es elemento*

Estudiante H



No. La sucesión converge a 0, significa que la sucesión puede tener valores muy cercanos a cero, pero nunca ser cero.

ANEXO T

Examen 4. Pregunta 2.

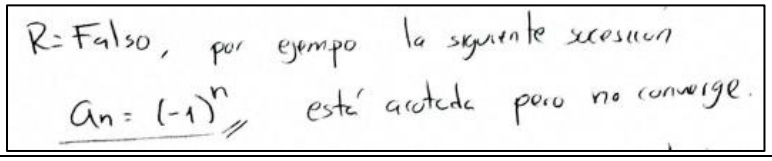
Escriba verdadero o falso. En caso de ser verdadero, justifique. En caso de ser falso, de un contraejemplo.

A) Toda sucesión acotada es convergente

B) Las sucesiones monótonas siempre son acotadas.

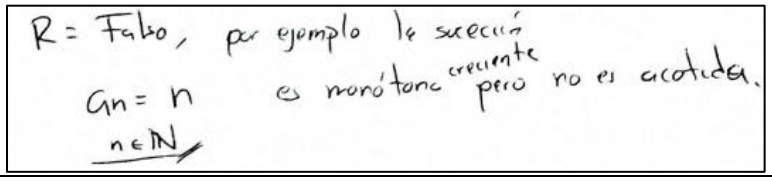
Estudiante C

A)



R= Falso, por ejemplo, la siguiente sucesión $a_n = (-1)^n$ está acotada pero no converge.

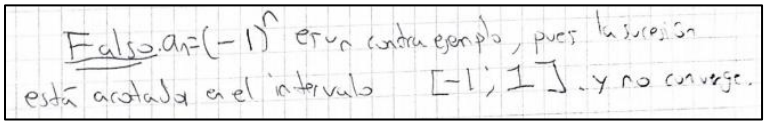
B)



R= Falso, por ejemplo, la sucesión $a_n = n, n \in \mathbb{N}$ es monótona creciente pero no es acotada.

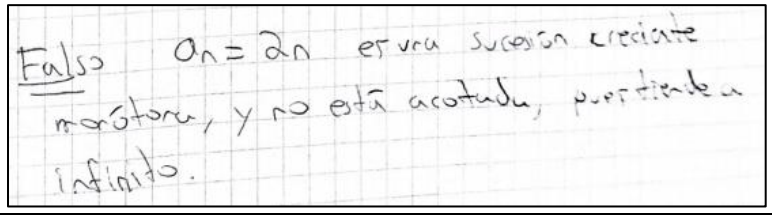
Estudiante F

A)



Falso, $a_n = (-1)^n$ es un contraejemplo, pues la sucesión está acotada en el intervalo $[-1, 1]$ y no converge.

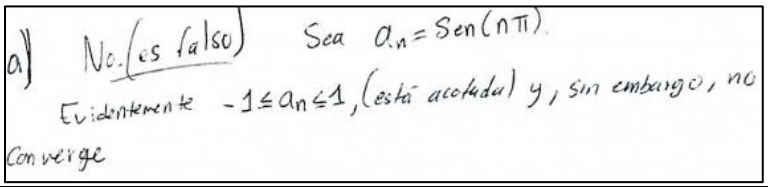
B)



Falso, $a_n = 2n$ es una sucesión creciente monótona, y no está acotada, pues tiende a infinito.

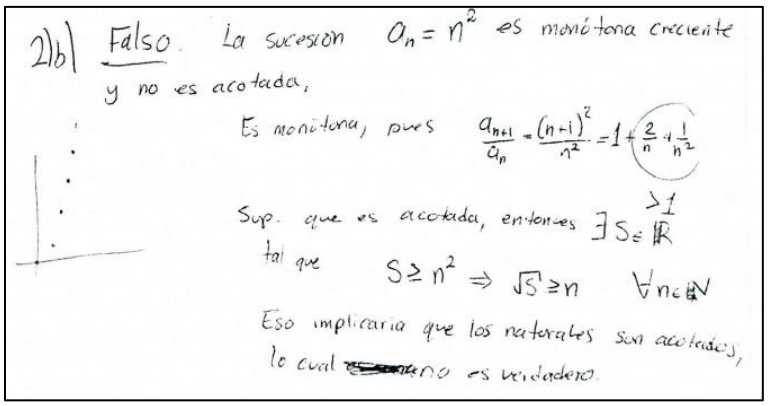
Estudiante G

A)



No, (es falso) Sea $a_n = sen(n\pi)$. Evidentemente $-1 \leq a_n \leq 1$, (está acotada) y, sin embargo, no converge.

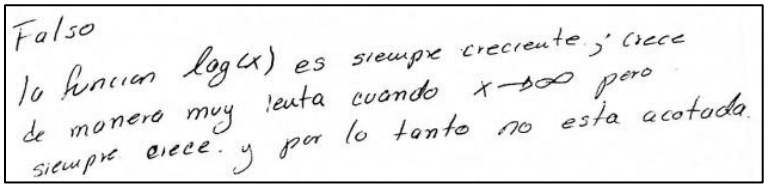
B)



Falso. La sucesión $a_n = n^2$ es monótona creciente y no es acotada.
Es monótona, pues $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > 1$
Sup. Que es acotada, entonces $\exists S \in \mathbb{R}$ tal que $S \geq n^2 \Rightarrow \sqrt{S} \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Eso implicaría que los naturales son acotados, lo cual no es verdadero.

Estudiante H

B)



Falso

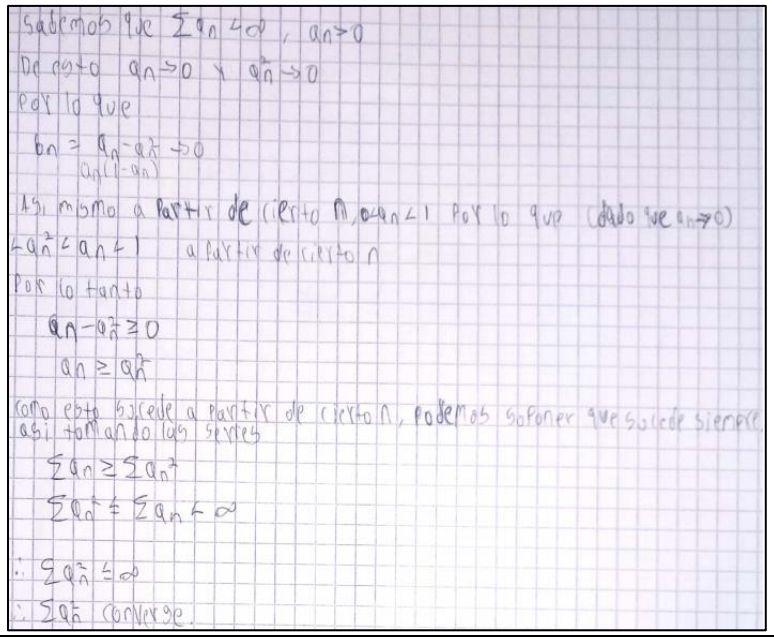
La función $\log(x)$ *es siempre creciente; crece de manera muy lenta cuando* $x \to \infty$ *pero siempre crece y por lo tanto no esta acotada*

ANEXO U

Examen 5. Pregunta 1.

Probar que si $\sum a_n$ es convergente ($a_n > 0$) entonces $\sum a_n^2$ es convergente.

Estudiante A



Sabemos que $\sum a_n < \infty$, $a_n > 0$
De esto $a_n \to 0$ *y* $a_n^2 \to 0$
Por lo que

$$b_n = a_n - a_n^2 \to 0$$
$$a_n(1 - a_n)$$

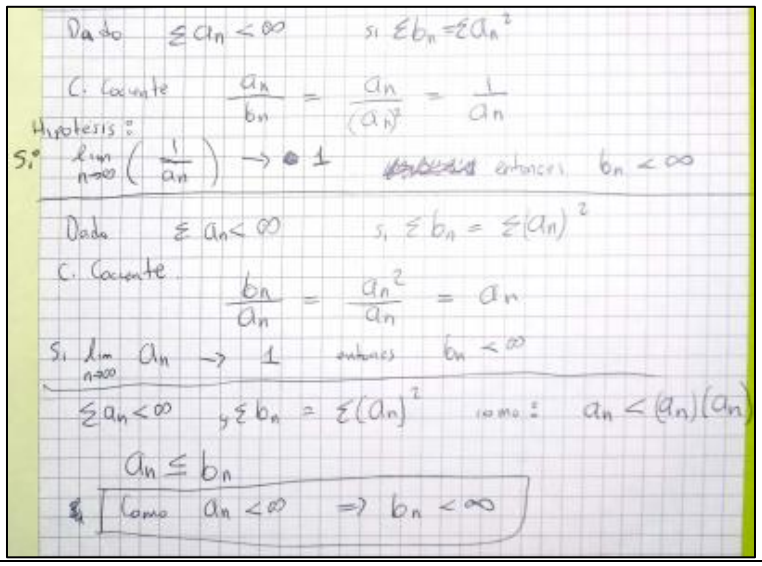
Así mismo a partir de cierto n, $0 < a_n < 1$ *por lo que (dado que* $a_n \to 0$*)*
$0 < a_n^2 < a_n < 1$ *a partir de cierto n*
Por lo tanto

$$a_n - a_n^2 \geq 0$$
$$a_n \geq a_n^2$$

Como esto sucede a partir de cierto n, podemos suponer que sucede siempre
Así tomando las series

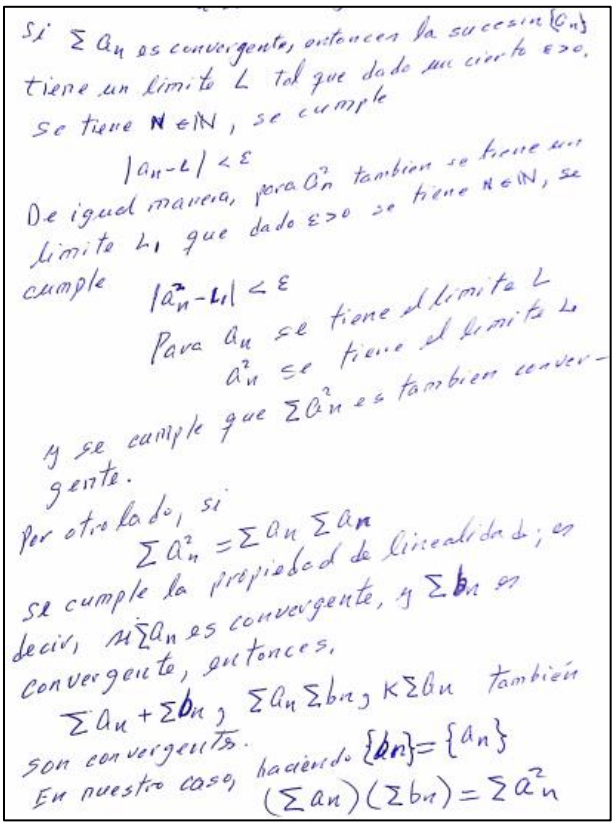
$$\sum a_n \geq \sum a_n^2$$
$$\sum a_n^2 \leq \sum a_n < \infty$$
$$\therefore \sum a_n^2 \leq \infty$$
$$\therefore \sum a_n^2 \; converge$$

Estudiante D



Dado $\sum a_n < \infty$ *si* $\sum b_n = \sum a_n^2$
C. cociente $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{a_n^2} = \frac{1}{a_n}$
Hipótesis: Si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \to 1$ *entonces* $b_n < \infty$
Dado $\sum a_n < \infty$ *si* $\sum b_n = \sum a_n^2$
C. cociente $\frac{b_n}{a_n} = \frac{a_n^2}{a_n} = a_n$
Hipótesis: Si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \to 1$ *entonces* $b_n < \infty$
$\sum a_n < \infty$ *y* $\sum b_n = \sum a_n^2$ *como* $a_n < (a_n)(a_n)$
$a_n \leq b_n$
Como $a_n < \infty \Rightarrow b_n < \infty$

Estudiante I


Si $\sum a_n$ es convergente, entonces la sucesión $\{a_n\}$ tiene un límite L tal que dado un cierto $\varepsilon > 0$, se tiene $N \in \mathbb{N}$, se cumple

$|a_n - L| < \varepsilon$

De igual manera, para a_n^2 también se tiene un límite L_1 que dado $\varepsilon > 0$ se tiene $N \in \mathbb{N}$, se cumple $|a_n^2 - L_1| < \varepsilon$

Para a_n se tiene el límite L

a_n^2 se tiene el límite L_1

y se cumple que $\sum a_n^2$ es también convergente.

Por otro lado, si

$\sum a_n^2 = \sum a_n \sum a_n$

se cumple la propiedad de linealidad; es decir, si $\sum a_n$ es convergente, y $\sum b_n$ es convergente, entonces,

$\sum a_n + \sum b_n$, $\sum a_n \sum b_n$, $k\sum a_n$ también son convergentes.

En nuestro caso, haciendo $\{b_n\} = \{a_n\}$

$(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum a_n^2$

Si $\sum a_n$ es convergente, entonces la sucesión $\{a_n\}$tiene un límite L tal que dado cierto $\varepsilon > 0$, se tiene $N \in \mathbb{N}$, se cumple $|a_n - L| < \varepsilon$
De igual manera, para a_n^2 también se tiene un límite L_1 que dado $\varepsilon > 0$ se tiene $N \in \mathbb{N}$, se cumple $|a_n^2 - L_1| < \varepsilon$
Para a_n se tiene el límite L
a_n^2 se tiene el límite L_1
Y se cumple que $\sum a_n^2$ es también convergente.
Por otro lado, si $\sum a_n^2 = \sum a_n \sum a_n$
Se cumple la propiedad de linealidad; es decir, si $\sum a_n$ es convergente, y $\sum b_n$ es convergente, entonces, $\sum a_n + \sum b_n$, $\sum a_n \sum b_n$ y $k\sum a_n$ también son convergentes.
En nuestro caso, haciendo $\{b_n\} = \{a_n\}$

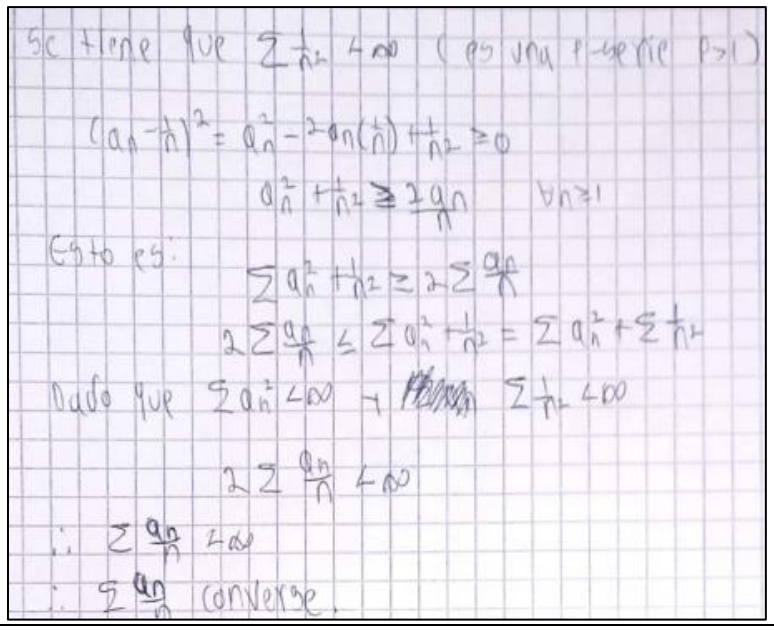
$$(\sum a_n)(\sum (b_n) = \sum a_n^2$$

ANEXO V

Examen 5. Pregunta 2.

Probar que si $\sum a_n^2 < \infty$ entonces $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

Estudiante A



Se tiene que $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ *(es una p-serie* $p > 1$*)*

$$\left(a_n - \frac{1}{n}\right)^2 = a_n^2 - 2a_n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$a_n^2 + \frac{1}{n^2} \geq \frac{2a_n}{n} \quad \forall n \geq 1$$

Esto es:

$$\sum a_n^2 + \frac{1}{n^2} \geq 2\sum \frac{a_n}{n}$$

$$2\sum \frac{a_n}{n} \leq \sum a_n^2 + \frac{1}{n^2} = \sum a_n^2 + \sum \frac{1}{n^2}$$

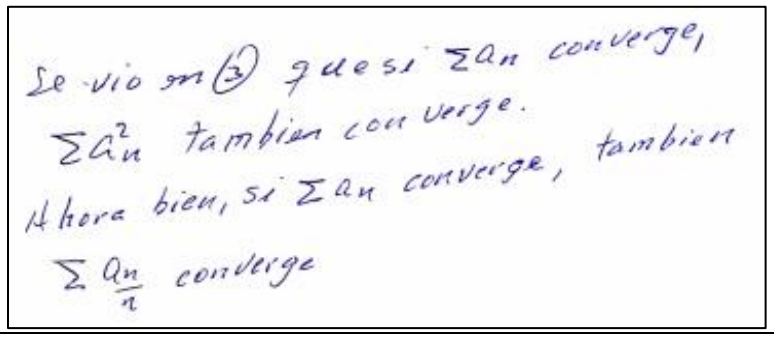
Dado que $\sum a_n^2 < \infty$ *y* $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$

$$2\sum \frac{a_n}{n} < \infty$$

$$\therefore \sum \frac{a_n}{n} < \infty$$

$\therefore \sum \frac{a_n}{n}$ *converge*

Estudiante I



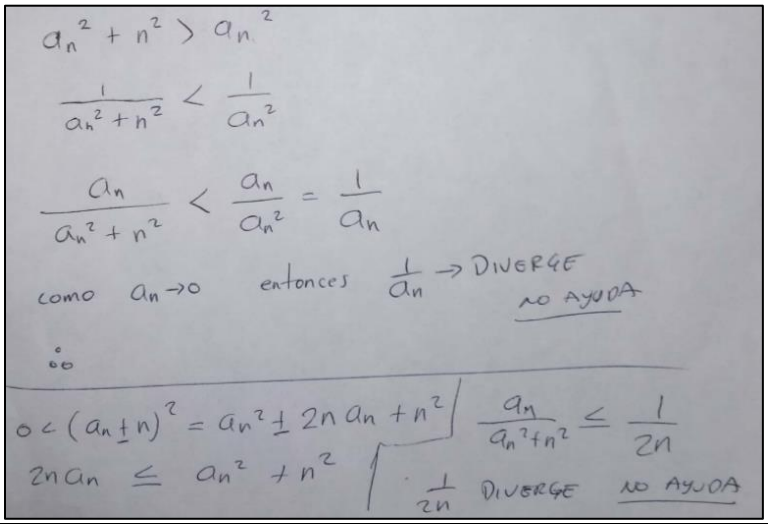
Se vio en 3) que si $\sum a_n$ converge, $\sum a_n^2$ también converge. Ahora bien, si $\sum a_n$ converge, también $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

ANEXO W

Examen 6. Pregunta 1.

Si $a_n \to 0$ Demuestre que la serie $\sum \frac{a_n}{{a_n}^2+n^2}$ es convergente

Estudiante D



$$a_n^2 - n^2 > a_n^2$$

$$\frac{1}{a_n^2 - n^2} < 1/a_n^2$$

$$\frac{a_n}{a_n^2 + n^2} < \frac{a_n}{a_n^2} = \frac{1}{a_n}$$

Como $a_n \to 0$ *entonces* $\frac{1}{a_n} \to$ *DIVERGE* <u>*NO AYUDA*</u>

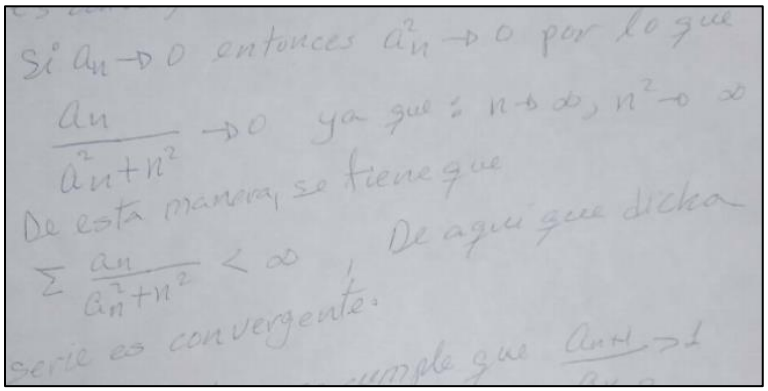
$$0 < (a_n \pm n)^2 = a_n^2 \pm 2na_n + n^2$$

$$2na_n \leq a_n^2 + n^2$$

$$\frac{a_n}{a_n^2 + n^2} \leq \frac{1}{2n}$$

$\frac{1}{2n}$ *DIVERGE* <u>*NO AYUDA*</u>

Estudiante I



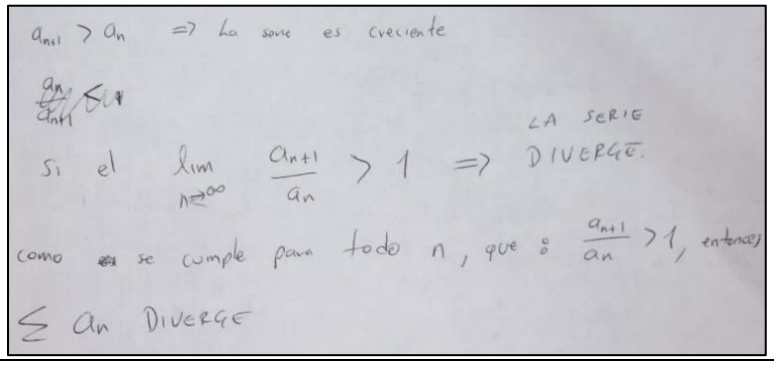
Si $a_n \to 0$ *entonces* $a_n^2 \to 0$ *por lo que* $\frac{a_n}{a_n^2+n^2} \to 0$ *ya que:* $n \to \infty, n^2 \to \infty$. *De esta manera, se tiene que* $\sum \frac{a_n}{a_n^2+n^2} < \infty$. *De aquí que dicha serie es convergente.*

ANEXO X

Examen 6. Pregunta 2.

Si para todo n se cumple que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ¿qué puede decir de la serie $\sum a_n$?

Estudiante D

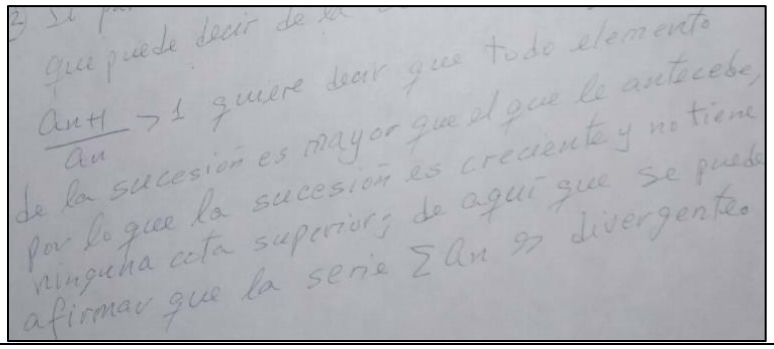


$a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ *La serie es creciente*

Si el $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ *LA SERIE DIVERGE*

Como se cumple para todo n, que : $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *entonces* $\sum a_n$ *DIVERGE*

Estudiante I



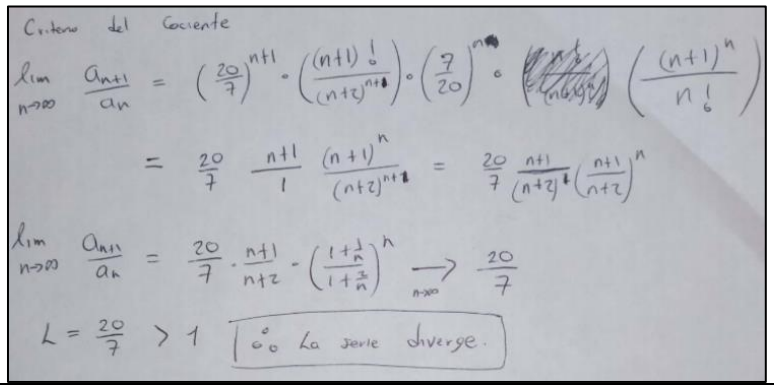
$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *quiere decir que todo elemento de la sucesión es mayor que al que le antecede, por lo que la sucesión es creciente y no tiene ninguna cota superior; de aquí que se puede afirmar que la serie* $\sum a_n$ *es divergente.*

ANEXO Y

Examen 6. Pregunta 3.

¿La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{20}{7}\right)^n \frac{n!}{(n+1)^n}$ es convergente o divergente?

Estudiante D



Criterio del cociente

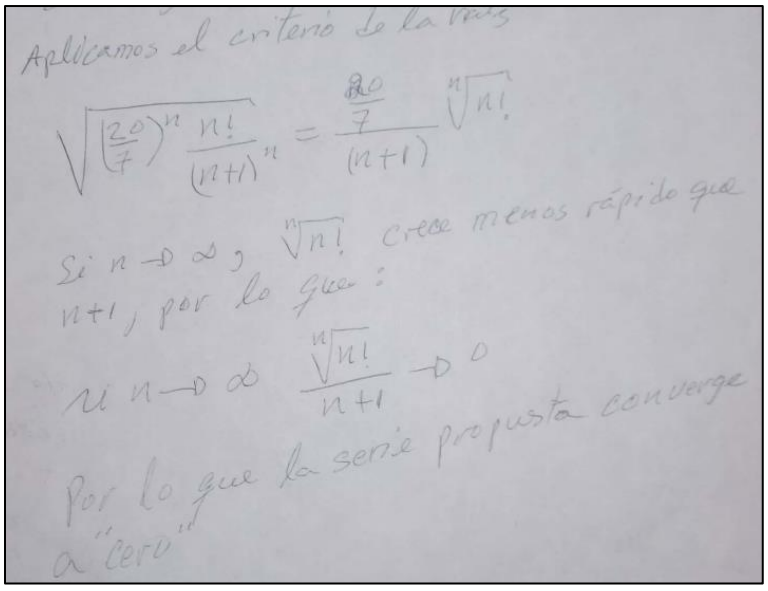
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{20}{7}\right)^{n+1}\left(\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\right)\left(\frac{7}{20}\right)^{n}\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{\frac{20}{7}\frac{n+1}{n}(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}=\frac{20}{7}\frac{n+1}{(n+2)^1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{20}{7}\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n\to\frac{20}{7}$$

$L=\frac{20}{7}>1$ *∴La serie diverge*

Estudiante I



Aplicamos el criterio de la raíz

$$\sqrt{\left(\frac{20}{7}\right)^n \frac{n!}{(n+1)^n}} = \frac{\frac{20}{7}}{n+1} \sqrt[n]{n!}$$

Si $n \to \infty$, $\sqrt[n]{n!}$ *Crece menos rápido que* $n+1$ *, por lo que: si* $n \to \infty$ $\quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \to 0$

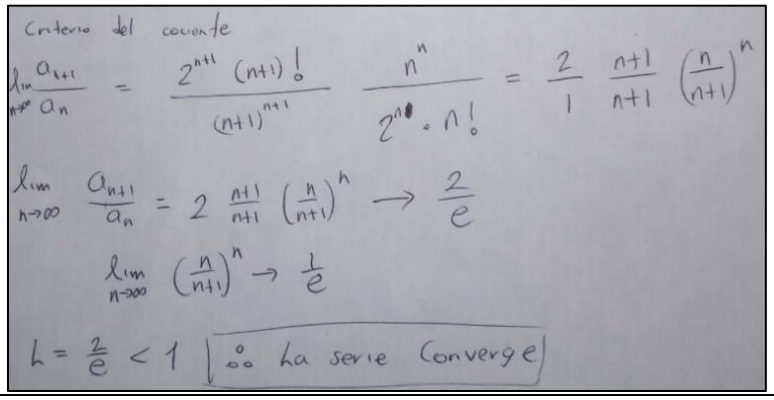
Por lo que la serie propuesta converge a "cero"

ANEXO Z

Examen 6. Pregunta 4.

Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. ¿Converge o diverge?

Estudiante D



Criterio del cociente

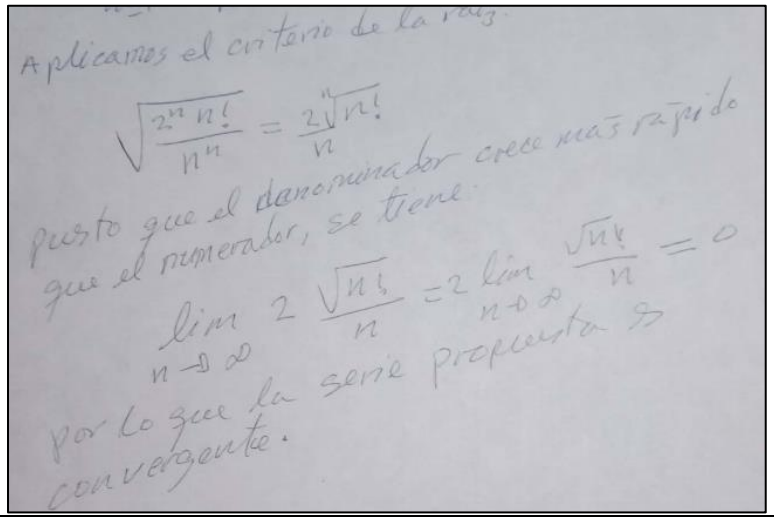
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{1} \frac{n+1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \frac{n+1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{2}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

$$L = \frac{2}{e} < 1 \qquad \therefore \textit{La serie converge}$$

Estudiante I



Aplicamos el criterio de la raíz

$$\sqrt{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2}{n} \sqrt[n]{n!}$$

Puesto que el denominador crece más rápido que el numerador, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} 2\frac{\sqrt{n!}}{n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n} = 0$$

Por lo que la serie propuesta es convergente.