CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

EDUCANDO LA INTUICIÓN MATEMÁTICA EN ACTIVIDADES DE MEDICIÓN INDIRECTA POR ALUMNOS DE TERCER GRADO DE SECUNDARIA

TESIS

Que presenta:

MARÍA EVELIA CRUZ LÓPEZ

Para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de Tesis:

Dr. Ricardo Quintero Zazueta

MÉXICO, D. F. **OCTUBRE, 2014**

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología,

la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

Becario No. 081210031

Agradecimientos

A mi asesor de tesis:

Dr. Ricardo Quintero Zazueta

Por su tiempo, paciencia y dedicación para que pueda dar fin a este proyecto.

A los lectores:

Dra. Claudia Acuña y Dr. Hugo Mejía

Por el tiempo que le dedicaron a la lectura de está investigación y a sus observaciones realizadas para la mejora de este trabajo.

A mis profesores de Matemática Educativa:

Dra. Martha Elena Valdemoros.

Dra. Aurora Gallardo.

Dra. Teresa Rojano.

Dra. Sonia Ursini Legovich.

Dra. Mirela Rigo.

Dr. Simón Mochón Cohen.

Dr. Ricardo Quintero Zazueta.

Por haber compartido sus conocimientos con alegria y entusiasmo.

A mis compañeros del Cinvestav, con los cuales me aventure en este interesante y hermoso viaje, en especial a Bety, Herlinda, Ely, Paty y Marce.

A los alumnos de la Escuela Secundaria Técnica 55 " Benito Juárez" y a sus directivos, por otorgarme todas las facilidades de poder llevar a cabo las actividades que conforman ésta investigación

A las dos personas que:

Mi camino dibujaron en su mente, el cual
Avancé con su apoyo incondicional a cada pasó que di.
Mis aciertos y errores respetaron con sufrimiento
Ante todo, sus consejos me acompañan.

Peregrinar por el camino del conocimiento me mostraron.
A pesar de los sin fín de problemas
Paciencia, alegría y sobre todo con
Amor me demuestran que:

El trabajo con alegría es una muy buena medicina.

Amados padres Tere y Sergio, muchas gracias.

Dedicatorias

Al compañero que Dios me dio, con quien he compartido momentos felices y de angustia en este trajinar de la vida, **M. Antonio Garduño Hernández**. Amado esposo muchas gracias.
A mis hijos, Zabdi Ahastari y Sergio Antonio quienes me han dado alegria y mucho cariño en todo momento. Gracias amados hijos, me han obsequiado el mejor titulo y el más difícil de obtener, el de mamá.

A mis hermanos, Selene, Xóchitl, Tonatiuh y Rafael con quienes he compartido excelentes momentos de alegrias y tristezas, mostrandome su apoyo y amor en todo momento.

A mis sobrinos, Marie, Neftalí, Regina y Azarías.

A mis abuelas Chanita, Evelia y abuelo Don Leonardo. Los recuerdo con mucho cariño, sin olvidar las horas de agradables pláticas, de regaños y consejos, el mole, los tamales, el chocolate de agua y … todas esas delicias con las cuales fui consentida.

A Noemi, Gabriel e Irina, quienes forman parte importante en mi vida, han cuidado a mis hijos y me han dado a los mejores sobrinos.

A mis alumnos de la Escuela Secundaria Técnica No. 55 "Benito Juárez", quienes me han permitido aventurarme en este camino de la Investigación en Matemática Educativa para tratar de comprender las vías intrincadas de sus pensamientos al realizar trabajo matemático.

Índice

Capítulo 3

Metodología

Capítulo 4

Análisis de los Resultados

Resumen

Esta investigación que es de carácter cualitativo, responde a una inquietud para comprender el tipo de ideas intuitivas que aparecen en actividades de índole matemática, al realizar trabajo de medición indirecta. Estas ideas se desarrollan para educar la intuición de alumnos de tercer grado de secundaria, dentro de lo que Fischbein (1987) denomina intuiciones secundarias. Además se favorece el trabajo que es mencionado como razonamiento intuitivo en los Planes y Programas de Estudio 2011 que forman parte de la Educación Básica en México.

Esta tesis es el resultado de la puesta en práctica de cinco actividades de medición indirecta ejecutado por 55 alumnos. La primera actividad están constituidas por un cuestionario en el que se muestra un panorama sobre las ideas generales que los alumnos tienen sobre el concepto de medición, de la segunda a la cuarta actividad se hace uso de algún instrumento de medición para obtener ciertas magnitudes que ser operadas sirvan para el cálculo de una distancia inaccesible. En la última actividad se resuelven cinco problemas que involucran este contenido. Para fundamentar el pensamiento matemático del que hacen uso los alumnos en este nivel escolar (secundaria), se consideran los Estándares Curriculares de la NCTM (2000).

Con lo anterior se clasifican como aditivos o multiplicativos las diferentes estrategias que los alumnos realizan al resolver algunas actividades de medición indirecta, en donde la intuición y la proporcionalidad se hacen presentes. Los elementos intuitivos que los alumnos usan para dar solución a las actividades de medición indirecta son: representaciones esquemáticas que modelan alguna situación y el uso constante de la "regla de tres". Además se reportan algunas actitudes que mostraron los almnos al realizar actividades de campo y en papel y lápiz.

Este trabajo de tesis muestra que al avanzar los alumnos en el desarrollo de la idea de proporcionalidad con las actividades, su intuición se vuelve más educada, lo que consideramos tiene un valor para su posterior aprendizaje matemático.

Abstract

This investigation is from a qualitative character, wich is to response to comprehend intuition ideas of mathematics activities, to elaborate undirect measure. These opinions were thought to teach the intuition of third grade junior high school students, referring to Fischbein (1987) term. Also this benefits the Planes and Programas 2011 for basic Education in Mexico.

This thesis is the result of were fifty five students colaborated to do undirect measures activities, the first activity is build by quiz which shows general ideas of what students understand of the meaning of measure, From the second to the fourth activity is necessary to use an instrument to come out with certain magnitudes wich were done to calculate approach less distance. The fifth activity they did solved problems to prove the mathematics students thoughts it was unsider the Principles and Standards for School Mathematics (2000).

With the above the different strategies the students did to solve some undirect mesure activities were qualify as additive and multiplicative, in wich the intuition and the proportionality were always present. The students intuition elements are: schematic representations wich constantly use "the rule of three". Besides students report some attitudes to do outdoor work, paper and pencil.

This thesis assignment demostrates how students develop the intuition idea which turns more educated. We consider it will have an approach to their mathematics learning.

Para reconocer lo que es relevante se necesita una cierta cantidad de experiencia, más una cualidad indefinible, la intuición.

Ian Stewart (1984)

CAPÍTULO 1

PROBLEMA A INVESTIGAR

INTRODUCCIÓN

Un conjunto de ideas importantes, con relación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, que aparecen en los documentos de la Secretaría de Educación Pública (SEP) son: intuición, medida, proporcionalidad y pensamiento matemático.

En los Planes y Programas 2006 se establece que:

> *"la comprensión de los diversos conceptos matemáticos deberá sustentarse en actividades que pongan en juego la intuición, pero a la vez favorezcan el uso de herramientas matemáticas para ampliar, reformular o rechazar las ideas previas" (SEP, 2006:9).*

En los Planes y Programas 2011 de la SEP, la medida es un contenido que forma parte del eje temático denominado: Forma , espacio y medida y constituye uno de los nueve apartados que conforman la currícula en matemáticas.

La medida es uno de los contenidos que reclaman actividad teórica y práctica en matemáticas, en donde la geometría, las relaciones numéricas y la medición se apoyan una a otra, para el trazo y análisis de figuras, para la justificación de fórmulas que sirven para el cálculo de áreas y perímetros, así como en la construcción y transformación de figuras. En particular en este trabajo se está interesado en la medición de longitudes que no se pueden realizar de manera directa.

En las mediciones indirectas, la cuantificación de las características o propiedades físicas de los objetos no son de fácil acceso, para ello se tiene que hacer uso de ingeniosos instrumentos de medida que midan ciertas características accesibles en los objetos y luego, por medio de algún cálculo (uso de una fórmula) obtener otra característica no medible directamente. Por ejemplo: la velocidad, el área de un cuadrado, la distancia de la tierra al sol, la densidad de la luna.

Las diferentes experiencias de medición que los alumnos realicen en un trabajo experimental o de campo, son una oportunidad para propiciar el desarrollo de diferentes aspectos relacionados con el concepto de medición, como son la exactitud, la precisión, la estimación, las comparaciones entre magnitudes. Esta última nos lleva a establecer la idea de razón y proporción.

En los Planes y Programas 2011, de la SEP, los contenidos que involucran la palabra proporcionalidad, de manera explícita es el 24.2% del total del programa, pero en realidad se encuentra presente en los tres ejes temáticos; es decir, el estudio de la proporcionalidad, en secundaria, abarca lo numérico, lo algebraico y lo geométrico.

Por otro lado, pensar matemáticamente en la Educación Básica para Primaria y Secundaria es:

- *Formular y validar conjeturas.*
- *Plantearse nuevas preguntas.*
- *Comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución.*
- *Buscar argumentos para validar procedimientos y resultados.*
- *Encontrar diferentes formas de resolver los problemas.*
- *Manejar técnicas de manera eficiente.*

(Plan de Estudios, 2011:49)

Lo inmediato anterior, implica que el alumno, con los recursos y conocimientos previos de que dispone, debe convencerse, así mismo y al resto de los individuos que interactúan con él, sobre la apropiada resolución a una situación problemática o tarea planteada. El hacer evidente los conceptos previos hace que en los alumnos aparezcan ciertas ideas de carácter intuitivo de conceptos matemáticos no formalizados. En donde la resolución de problemas es un factor importante que ayuda a potenciar el pensamiento matemático mediante el uso de diversas estrategias.

"la solución debe construirse en el entendido de que existen diversas estrategias posibles y hay que usar al menos una. Para resolver la situación, el alumno debe usar sus conocimientos previos, mismos que le permiten entrar en la situación, pero el desafío consiste en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o para volver a aplicarlo en una nueva situación". *(Planes y Programas 2011, SEP, pág. 20)*

Por todo lo anterior, la presente investigación se interesa por hacer evidente en la medida de lo posible, algunos elementos intuitivos como parte del pensamiento matemático que muestran alumnos de secundaria al resolver una situación problemática de medición indirecta en donde el concepto de proporcionalidad está presente.

Acercarse a los procesos intuitivos para conocerlos, lo más que se pueda, es fundamental si se desea, de acuerdo a los objetivos de la enseñanza secundaria en matemáticas, avanzar en la formalización, aunque sea a nivel elemental en los conocimientos matemáticos; pues los elementos intuitivos pueden servir como un andamiaje en la construcción de los elementos formales.

Como un segundo punto, de manera colateral el trabajo se propone indagar el pensamiento matemático que muestran los alumnos, entendido como la capacidad al resolver problemas, establecer conexiones, utilizar representaciones, comunicar sus conocimientos y servirse del razonamiento y la prueba.

En esta investigación participan alumnos del nivel secundaria de tercer grado y se realiza, una serie de actividades que involucran a la medición indirecta con el propósito de potenciar el desarrollo del concepto de proporcionalidad. Las actividades realizadas son de campo (patio escolar) y dentro del aula. Los instrumentos utilizados en la investigación son cinco actividades de carácter exploratorio, en donde los alumnos observan, exploran, construyen y resuelven problemas.

La investigación consta de cuatro Capítulos, la Bibliografía y los Anexos. En el Capítulo 1 se da una introducción al problema de investigación, se plantea el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación y se expresan las preguntas de investigación. En el Capítulo 2 se realiza la revisión de literatura sobre la Intuición considerando él punto de vista de Efraim Fischbein, la medición, la proporcionalidad y el pensamiento matemático. En el Capítulo 3 se establece la metodología que siguió en ésta investigación. Para el Capítulo 4 se aborda el análisis de la información para finalmente generar las respuestas a las preguntas de investigación y realizar las reflexiones finales.

Por lo anterior, el presente trabajo se plantea los siguientes objetivos.

Objetivos de la Investigación.

Objetivo General:

La investigación pretende:

- Indagar cómo hacen uso de la intuición estudiantes de secundaria, al resolver problemas de medición indirecta de manera práctica y en papel y lápiz, dentro del contexto escolar, como parte del desarrollo del concepto de proporcionalidad.

Objetivos Específicos:

- Documentar las ideas que poseen los alumnos sobre el concepto de medición, de los instrumentos de medida y qué es la medición indirecta.
- Establecer cómo el alumno interpreta una serie de datos que al ser medidos con la ayuda de un instrumento y al operar con dichos datos, obtienen una medida mediante un procedimiento de medición indirecta.

- Tratar de establecer una clasificación de los enfoques y estrategias utilizados por los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad, que involucran dichas mediciones, en particular aquellas que muestran indicios de forma intuitiva de pensar. Además, documentar algunas características del pensamiento matemático que muestran.

Preguntas de investigación.

Para orientar la investigación se han planteado las siguientes preguntas:

- ¿Qué ideas poseen los alumnos sobre el concepto de medición, de los instrumentos de medición y de la medición indirecta?
- ¿Cómo un alumno interpreta y opera una serie de datos obtenidos con un instrumento de medición, con el propósito de obtener otras magnitudes, a través de un proceso de medición indirecta?
- ¿Cómo se presenta el pensamiento matemático en los alumnos de tercer grado de secundaria?
- ¿Qué ideas intuitivas tienen los alumnos de nivel secundaria, relacionados al concepto de proporcionalidad?
- ¿Qué papel juegan los instrumentos de medición que los estudiantes construyen?

> El objetivo primordial de la educación matemática debiera ser el desarrollo de la intuición, a fin de convertirla en una herramienta utilizable.
>
> Ian Stewart (1984)

CAPITULO 2

MARCO TEÓRICO

INTRODUCCIÓN

Fuera del campo educativo, una persona cotidianamente se enfrenta a un sinfín de problemas en los cuales su decisión depende de un proceso cognitivo simple o complejo. Es decir, al momento de dar solución a un problema, se pone en juego diversas habilidades como: formas de comunicación, organización de actividades en tiempos por grado de dificultad, invocación de la memoria para tratar de recordar elementos o datos que ayuden a dar solución a la tarea.

Por ejemplo, cuando conocemos a una persona por primera vez, siempre nos hacemos una retrato instantáneo de ella, en donde emitimos un juicio de valor de acuerdo a su forma de expresarse al hablar, por sus ademanes y expresiones faciales o simplemente por su forma de vestir. Ésta primera impresión cuando no tenemos la experiencia suficiente puede ser errónea, pero se vuelve más asertiva conforme pasa el tiempo y este ejercicio de reconocer la forma de ser de una persona considerando ciertas características lo realizamos continuamente y para poder hacer esto vamos creando estrategias de clasificación con las cuales podamos emitir un juicio de manera inmediata y asertiva, a esto usualmente se le ha denominado “intuición”, el cual es un concepto que es muy utilizado cuando nos enfrentamos a la resolución de un problema cotidiano o de otro estilo.

En este capítulo se desarrollan los elementos teóricos que intervienen en esta investigación: la noción de intuición, lo cual es nuestro objeto principal de estudio; la medición, la medición indirecta y la proporcionalidad como el contenido matemático que sirve de pretexto para tratar de evidenciar elementos intuitivos en alumnos de secundaria y los procesos matemáticos como la argumentación, las representaciones, las conexiones, la comunicación y la resolución de problemas que caracterizan el pensar matemático.

Intuición

A la intuición se le ha denominado de diferentes maneras, la cual depende del área o campo donde se esté trabajando. Es decir, pueden haber tantas definiciones como corrientes filosóficas existan. Para la psicología la intuición tiene su forma y estilo, así como para la economía, las ciencia y la matemática, etc.

Por ejemplo, para la Real Academia Española (2009) la intuición es:

1. f. Facultad de comprender las cosas instantáneamente, sin necesidad de razonamiento.
2. f. Resultado de intuir.
3. f. coloq. presentimiento.
4. f. *Fil.* Percepción íntima e instantánea de una idea o una verdad que aparece como evidente a quien la tiene.
5. f. *Rel.* visión beatífica. (plácido, sereno)

Otros autores, por ejemplo Beth y Piaget (1996), se refieren a la intuición como un concepto difícil de entender, pero determinan que para el matemático este término cubre todo lo no formal; David y Hersh (1981) lo expresan como lo que es opuesto a riguroso; Otte, (1994), como lo contrario a las matemáticas formales; Gödel (1947/1983), una forma de percepción que sirve para introducir la construcción de teorías físicas; Freudenthal (1983), la denominó "visión interna"; Tall (2001), como la primera instancia que tiene el sujeto para comprender y apreciar un razonamiento. Si consideramos la definición de la

Real Academia Española, y la comparamos con las anteriores vemos que concuerdan en sus puntos 1, 3 y 4. Aunque diversos autores han tratado de explicar y definir la intuición, es Fischbein (1987) quien en su libro Intuition in Science and Mathematics, no solamente la define, también la clasifica, argumentando el porqué de su importancia, además de reconocer sus límites hace referencia de cómo el hombre de ciencia hace uso de ella.

Para Fischbein (1987), la intuición es una concepción en la cual la incompletitud o vaguedad en la información, está enmascarada por mecanismos especiales que producen un sentido de inmediatez, coherencia y confianza. Tales mecanismos han sido descritos en la literatura de investigación, pero frecuentemente sin ninguna conexión aparente con una teoría de la intuición. Es un conocimiento intrínseco que aparece como evidente por sí mismo, directamente aceptable, es general, coercitivo (inhibitorio), de extrapolación y de aplicación. Un conocimiento intuitivo, se distingue de un conocimiento que tiene base analítica y lógica por el sentimiento de obviedad y de certeza intrínseca.

Por ejemplo, si tenemos las siguientes dos afirmaciones:

La suma de los ángulos de un triángulo es 180˚ y la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta.

La diferencia que hay entre ambas, es que, la primera afirmación conlleva una demostración matemática y en la segunda de un conocimiento intuitivo.

Al argumentar que la intuición es un forma particular de cognición, que se presenta en el pensamiento matemático de manera tácita, Fischbein ve en la intuición, un mecanismo útil para la adquisición de conocimiento, que puede aparecer inevitablemente gracias a la acción práctica o trabajo mental. Es decir, va a ser la experiencia diaria la que origine en el sujeto una herramienta para la solución de algún problema.

De manera general se acepta que tendemos a organizar e integrar nuestros conocimientos en estructuras eficientes y coherentes de comportamiento. De forma que hay un andamiaje de conocimientos que sirven para la construcción de unos y para la reformulación de otros que entran en conflicto cuando se habían establecidos. Una de las razones para este conflicto es nuestra limitada experiencia, por ejemplo, Tversky y

Kahneman (1982) proponen a dos grupos de alumnos que estimen el resultado para las siguientes operaciones,

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$$

y

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1,$$

en donde ambos grupos dan una respuesta incorrecta y muy por debajo de su resultado que tiene que ser 40320. Los autores argumentan que la creencia de los alumnos con el simple hecho de ver números pequeños y debido a su falta de experiencia en realizar estimaciones con operaciones numéricas, los lleva a los resultados erróneos de 512 y 2250 respectivamente.

A pesar de que las creencias pueden ayudar en la elaboración de representaciones internas sólidas, éstas pueden ser incongruentes con la realidad, haciendo que las operaciones mentales que integran la información no consideren ciertas características y reduzcan nuestro esfuerzo cognitivo a un proceso simple, en lugar de realizar un esfuerzo epistémico más sofisticado. Es decir, tendemos a confiar en la información que parece ser representativa de una clase, lo que nos lleva a trabajar de forma autónoma, y esto es a lo que Piaget (1976) denomina la capacidad operativa de la persona.

Fischbein, al tomar en cuenta los orígenes de la intuición, la clasifica en dos grupos, una primaria, la cual se forma en el hacer diario de una persona y aparece por sentido común; es decir, es adquirida en un contexto diferente al escolar.

El segundo grupo de intuiciones son las denominadas secundarias que son adquiridas o potenciadas en un aula. Estas, se basan en el uso de los conocimientos previos, los cuales son evocados y utilizados desde la memoria de los alumnos. Para este tipo de intuición, Fischbein realiza una sub-clasificación en donde considera las manifestaciones específicas que refleja; es decir, reflexiona sobre el papel que desempeña la intuición en la acción realizada y son:

1. **Intuiciones Afirmativas**.- Son representaciones o interpretación de varios factores aceptados como ciertos, por sí mismos, evidentes y estables. Este tipo de intuiciones a su vez se dividen en semántica, relacional y de inferencia.

Ejemplo de una intuición semántica:

Dos puntos determinan una línea recta.

Ejemplo de una intuición relacional:

El todo es más grande que cada una de sus partes.

Ejemplo de una intuición inferencial:

Si A = B y B = C

entonces A = C

2. **Intuiciones Conjeturales.-** Son las intuiciones que expresan una suposición acerca de eventos futuros o del curso de ciertos fenómenos.

Ejemplo: La siguiente anécdota muy conocida en el mundo de la matemática y la física nos muestra un ejemplo de éste tipo de intuición.

"*Hierón, exaltado a la regia protestas y con todos los asuntos en orden, quiso dedicar en cierto templo una corona votiva a los dioses inmortales; contrató la obra por un precio estipulado , y pesó la cantidad de oro para el contratista. Una vez hecha sutilmente y a mano la corona, la llevó en su tiempo al rey, y el peso de la corona pareció corresponder al contrapeso. Sin embargo, hubo indicios de que le habían quitado oro a la corona, y añadido una parte igual de plata. Indignado Hierón por la ofensa, y sin encontrar manera de reprender el hurto, rogó a Arquímedes que se dedicara a pensarlo. Mientras se ocupaba en esto Arquímedes, fue por azar al baño público y, al introducirse en la bañera, se dio cuenta que salía tanta agua fuera de la bañera como parte de su cuerpo había entrado. No se quedo así, sino que, saltando fuera de la bañera movido por la alegría, y yendo desnudo hacia su casa, gritaba diciendo que había encontrado lo que quería, Porque ,ientras corria clamaba, ¡eureka, eureka!*".

Tonda (2003)

Los dos tipos de intuiciones secundarias que faltan son importantes para ésta investigación, ya que sin las intuiciones que se hacen evidentes en la solución de problemas, y son:

3. **Intuiciones Anticipatorias.-** Este tipo de intuiciones representan lo capacidad de anticipar un resultado, es el conocimiento previo que tiene él sujeto, el cual es utilizado para dar la solución a un problema sin haber realizado ningún algoritmo o esquema.

4. **Intuiciones Concluyentes.-** Las intuiciones concluyentes, son la visión estructurada de las idea básicas en la solución de un problema.

Recordando la situación problemática propuesta por Tversky y Kahneman (multiplicar de manera ascendente y descendente los números del 1 al 8), vemos que los alumnos anticipan sus resultados por medio de una estimación, sin detenerse un poco a razonar que el 9 es cercano a 10, de manera que si ellos hubieran redondeado el 9 a 10, hubieran tenido:

$$10 \times 10 = 100$$

y si multiplicaban los cinco primeros números ascendentes tendrían 120 y esto a su vez se multiplica por 100, les hubiera resultado lo siguiente:

$$100 \times 120 = 12000$$

dé esta manera ellos podrían haberse dado cuenta que su resultado pre eliminar estaba por debajo de lo esperado. Por lo anterior, Fischbein establece lo que llama factores de inmediatez, los cuales son elementos que se presentan cuando resolvemos una tarea matemática y que forman parte de la intuición.

Factores de Inmediatez

En el problema de la multiplicación ascendente y descendente de los primeros diez números naturales (Tversky y Kahneman, 1982), pareciera que ambos grupos observaron números pequeños y como una de las condicionantes en la solución del problema era el tiempo, ellos emitieron un juicio de manera inmediata. Este resultado obtenido se da por diversas circunstancias debido a sus saberes previos, los cuales están a la mano y tienen algún valor para ellos. A esto Fischbein (1980) le denomina "factores de inmediatez" y son: la visualización, la disponibilidad, el anclaje y la representatividad, los cuales son descritos a continuación.

a) Visualización: Una imagen visual ofrece de manera relativamente estructurada parte de la información relacionada con alguna situación. Al mismo tiempo, una imagen visual podría ser más significativa del comportamiento estructural de un concepto. De acuerdo a Cantoral y otros (2000: 146),

"*... se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático, y más generalmente, científico*".

Si bien es cierto que la visualización es un factor que ayuda a tener inmediatez, la cual es una característica de la intuición, ésta no es una condición suficiente que produzca un conocimiento intuitivo; es decir, por una simple observación, no podemos llegar a establecer el teorema de Thales o establecer la relación entre dos razones, pero sí se puede ordenar la información de tal manera que alcanzamos a construir la semejanza de dos triángulos. Es aquí en donde la intuición funciona como un factor de un análisis y ordenamiento de la información.

b) Disponibilidad: Una solución puede aceptarse como verdadera, no porqué se ajuste objetivamente a los requisitos formales o a cálculos laboriosos, sino porque la obtención de su resultado se muestra como de fácil acceso. Por ejemplo, la estimación de distancias de un punto a otro, el tiempo de recorrido de una ciudad a otra.

c) Anclaje: Cierta característica destacada, puede llegar a ser decisiva en la interpretación intuitiva del individuo, no porque sea objetivamente categórica, sino porque simplemente es más relevante o se encuentra en su bagaje de conocimientos. Por ejemplo, cuando a un sujeto se le plantea un problema, el cual tiene tres datos y se le pide un cuarto, es probable que trate de resolverlo por una "regla de tres", Ya que es de su conocimiento que dados tres valores en donde se debe de encontrar un cuarto que es desconocido, el modelo de la regla de tres está bien arraigado en su memoria para problemas de este tipo. La diferencia que muestran en la tarea asignada es la forma de operar los datos.

d) Representatividad: En algunas ocasiones, los datos que solucionan al problema resultan ser representativos para el sujeto y esto puede anular el impacto que puedan tener otros factores que no han sido considerados cuando se da solución al problema y son dejados de lado.

Modelos Intuitivos

En alguna ocasión se pidió a los alumnos que mencionaran las medidas de su aula, se encontró que los alumnos dan dos medidas, que son el ancho y lo largo, olvidando que un aula está compuesta por tres dimensiones.

Si hacemos un recuento de los diferentes tipos de intuiciones que participan en la resolución de problemas y le sumamos sus "factores de inmediatez" que están presentes en dicha resolución, es posible encontrar procesos que se repiten con regularidad y tienen características parecidas, lo cual lleva a Fischbein a hablar de **modelos intuitivos**. Dicho de manera coloquial, un modelo intuitivo es una forma de razonamiento que posee características que son producto de una manera automática o deliberada para encontrar la solución a un problema. Tales modelos tácitos, son producidos de manera automática y con frecuencia determinan la construcción de estructuras intuitivas

Fischbein clasifica estos modelos en:

a) Modelo Analógico.- En palabras de Fischbein, dos sistemas son analógicos, si tienen características similares. Donde la situación original y el modelo pertenecen a dos sistemas diferentes, por ejemplo: realizar la semejanza del flujo de la corriente eléctrica con el flujo de un líquido a través de una manguera.

b) Modelo Paradigmático.- Es cuando el modelo proporciona patrones de una determinada categoría de objetos o fenómenos, la cual está definida más por su función que por sus cualidades intrínsecas, por ejemplo, para muchos niños el agua es un modelo que sirve para la definición e identificación de líquidos.

c) Modelo de la Primitiva Fenomenológica.- Cierto fenómeno que por su forma tenga cualidades fácilmente intuibles, puede ayudar a la comprensión de un fenómeno más complejo con el que esté relacionado. Por ejemplo: el comportamiento de un resorte, comprimido y que tiende a expandir de nuevo, puede conferir un sentido intuitivo a diversos fenómenos en los que la conservación y la transformación de la energía intervienen.

d) Modelos esquemáticos.- En este caso, hay varios tipos de representaciones gráficas, las cuales juegan un papel en este modelo. Los modelos esquemáticos son de importancia fundamental al traducir relaciones abstractas en representaciones intuitivas, por ejemplo, gráfica de funciones, diagramas de árbol, diagramas de Venn.

Algunos estudios realizados sobre la intuición.

Se han realizado diversos tipos de estudios sobre la intuición, los cuales se enfocan a tratar de definir a la intuición, cómo es o funciona, y su importancia en el pensamiento matemático.

En su escrito sobre educación, Bruner (1965), enfatiza la necesidad de estimular el pensamiento intuitivo en los niños, y apela a la comprensión intuitiva (en asociación con el pensamiento analítico) en el momento de improvisar la asimilación del conocimiento. Esta recomendación no es nueva. Ha sido formulada por matemáticos tan importantes como Félix Klein (1925), Poincaré (1914) y es repetida ahora por especialistas de la enseñanza matemática. Poincairé afirmaba que una verdadera actividad creativa no es posible en la ciencia y en matemáticas, sin la intuición.

Otros escritos como los de Bruner (1960), Bay (2000), Mulligan y Mitchelmore (1997), Dreyfus (1982), Wiliams y Bruels (2011), proponen una serie de actividades con contenido matemático particular específico y con ayuda de esos temas ven como la intuición se hace evidente en el pensamiento o tareas matemáticas asignadas.

Valdemoros (1993), en su tesis doctoral habla sobre el lenguaje y las formas de representación de las fracciones, es donde afirma que el concepto de fracción tiene una representación intuitiva en su significado de cociente, reconoce que las representaciones gráficas o pictóricas que realizan los alumnos en el papel, dan evidencia que la fracción puede resultar ser construida de manera intuitiva, apegada mucho a lo referido por Kieren (1988), quien señala que uno de los usos no formales del lenguaje, sitúa a las razones cuantitativas como uno de los constructos inicialmente intuitivos. Aunque Valdemoros señala que el análisis gráfico o pictórico de los alumnos no se analizó por no ser el objetivo, si se vieron otras características intuitivas que se hacen evidentes en la construcción de las diferentes connotaciones de las fracciones.

Organismos reconocidos como la NCTM (2000), afirma que los actuales programas de matemáticas ofrecen una visión muy restringida, que no favorece la intuición, el razonamiento matemático ni la resolución de problemas; sólo se estimula actividades mecánicas. Además, de que el razonar matemáticamente implica un hábito de la mente, éste debe de ser desarrollado coherentemente utilizando muchos contextos.

A continuación se muestra un breve panorama sobre la medición, la medición indirecta y la proporcionalidad.

Medición.

La medición, para la NCTM (2000), ha sido considerada como uno de los trece contenidos importantes que conforman a la matemática del quinto al octavo grado de enseñanza en los EEUU (último grado de primaria y los tres de secundaria en México), en donde los estudiantes deben aprender los conceptos fundamentales de la medición a través de experiencias concretas y ser capaces de:

1. Ampliar su comprensión del proceso de medición.
2. Hacer estimaciones, realizar mediciones y usar las medidas para describir y comparar fenómenos.
3. Seleccionar unidades y herramientas adecuadas a la medición al nivel de exactitud que se requiera en una situación concreta.
4. Entender la estructura y el uso de los sistemas de medida.
5. Ampliar su comprensión de los conceptos de perímetro, área, volumen, medida de ángulos, capacidad, peso y masa.
6. Adquirir los conceptos de proporción y de otras medidas derivadas e indirectas.
7. Desarrollar fórmulas y procedimientos para determinar medidas en la resolución de problemas.

De los siete puntos anteriores, es en el punto seis, donde la geometría junto con las relaciones numéricas y la medición se apoyan una a otra, para el trazo y análisis de figuras y, entonces, en la resolución de problemas, es necesaria la justificación del uso de ciertas fórmulas que contengan algún parámetro desconocido. Además, sí realiza alguna tarea fuera del aula que implique efectuar una medición indirecta, los alumnos no solamente tienen que hacer cálculos utilizando fórmulas ya establecidas, sino que también pueden aprender acerca de los errores instrumentales y humanos, así como de las variaciones en las condiciones ambientales y de la precisión en los instrumentos.

Los estudiantes pueden tener diferentes niveles de sofisticación concerniente al concepto de medida (Owens, 1992) ya que en ocasiones se le ha dado más importancia a lo simbólico que a las actividades realizadas de forma práctica. Las diferentes experiencias de medición que los alumnos tengan en un trabajo experimental o de campo, son oportunidades para el desarrollo de distintos aspectos relacionados con el concepto de medición, como lo es la exactitud, la precisión, la estimación pero, especialmente las comparaciones entre magnitudes que ayudan a establecer el concepto de razón y proporción.

La medida

La medida es una noción que se ha desarrollado desde hace miles de años por medio del sentido común y está presente cuando comparamos dos objetos en aspectos cuantitativos.

El proceso de comparación es fundamental ya que de acuerdo a Gate - Alonso (1996: 61):

"Si fijamos la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o estimar sus diferencias o semejanzas, lo que hacemos es una comparación".

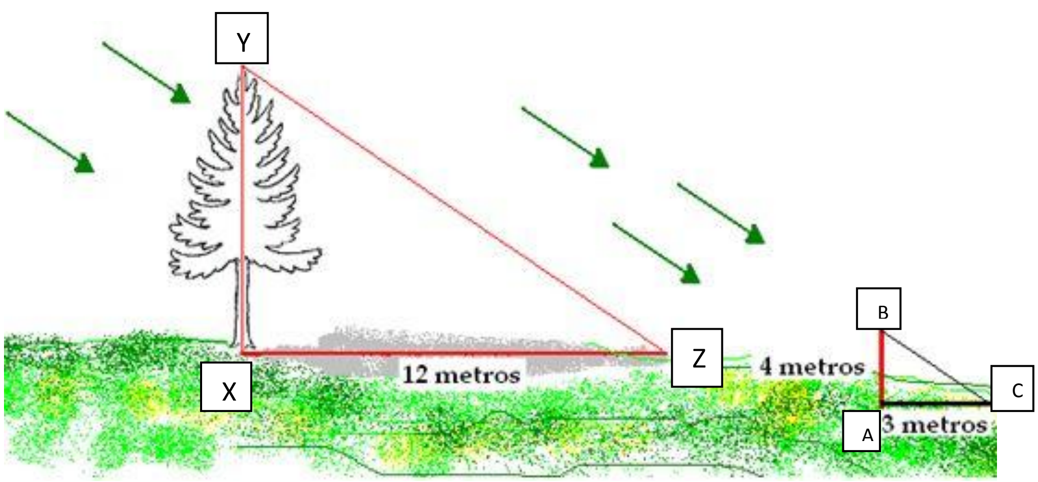
Podemos realizar comparaciones cualitativas o cuantitativas. Las cualitativas son cuando realizamos una clasificación u ordenación de los objetos considerando un criterio establecido, como sería el color, la belleza. Las cuantitativas son comparaciones en las cuales la magnitud y la unidad están incluidas. Por ejemplo la cantidad de gasolina que gasta un automóvil es tres veces más que la que usa una motocicleta, el Dólar vale más que el peso, pero vale menos que el Euro.

Existen dos tipos de mediciones cuantitativas, una conocida como medición directa y otra como medición indirecta. La primera es aquella en donde el hombre ha tenido que usar su talento y creatividad para inventar e ir afinando ingeniosos instrumentos de medición, tales como las reglas, los transportadores, los termómetros, las balanzas, el teodolito o tránsito, el inclinómetro, etc; los cuales son de gran ayuda para conocer cierta medida desconocida sin la necesidad de realizar algún cálculo, ya que lo único que se requiere es utilizar el instrumento de medición y realizar una lectura numérica en la escala que posee dicho instrumento.

La Medición Indirecta

Las mediciones indirectas, son aquellas que Gete-Alonso (1996), las define como el resultado del cálculo o cálculos obtenidos con base a la medida de otras magnitudes, por ejemplo: medir la altura de un árbol cuando su tamaño sea inaccesible de manera directa, calcular la cantidad de glóbulos rojos que hay en la sangre, medir la distancia de la tierra a la luna, la medición de áreas, etc. Es decir, las magnitudes numéricas que son necesarias para llegar a conocer una magnitud desconocida, en una medición indirecta se obtienen por un proceso de medición directa.

El ejemplo clásico de medición indirecta que se utiliza en la educación básica es el siguiente: supongamos que se desea conocer la altura de un árbol que no se puede o no sé quiere hacer de forma directa. En un día de sol, el árbol proyecta su sombra sobre el piso (la cual se puede medir de manera directa), por otro lado se tiene un palo de madera de altura conocida, dicho palo de madera tiene su propia sombra la cual también se puede medir de manera directa, a la misma hora que la del árbol. En la siguiente figura se representa la situación experimental.



En donde:

AB, es la altura del palo	4m
AC, la longitud de la sombra del palo	3m
XY, la altura del árbol	La longitud desconocida
XZ, la longitud de la sombra del árbol	12m

y por propiedad de triángulos semejantes podemos establecemos que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{XY}{XZ} \quad \ldots (a)$$

al sustituir los valores conocidos, tenemos: $\frac{4m}{3m} = \frac{XY}{12m}$

en donde $XY = 12m\left(\frac{4m}{3m}\right) = 16m$

Pero qué hay detrás de las relaciones obtenidas en el inciso ***a***. Si un alumno es enfrentado a un trabajo de campo para obtener la altura de un árbol utilizando la sombra de éste, hay que estar consciente del grado de abstracción de elementos ópticos - geométricos que implica obtener dichas relaciones entre las medidas involucradas.

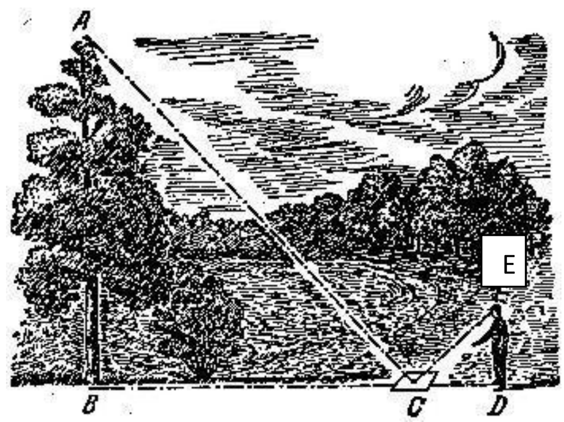
Elementos geométricos como los triángulos y la dirección de los rayos solares, marcados en el gráfico, en la realidad no se ven. El conocimiento del paralelismo de los rayos solares sobre un objeto a determinada hora del día, los triángulos rectángulos que se forman con dos rayos solares y la sombra del par de objetos, deben ser conceptos adquiridos en el entorno escolar. Otra fuente de dificultad es la introducción de la notación para designar a los objetos matemáticos. Sin embargo, establecer la relación $\frac{AB}{AC} = \frac{XY}{XZ}$ entre las diferentes magnitudes puede ser de índole intuitivo cuando ésta es esquematizada.

Lo mismo sucede cuando se desea hallar la altura del árbol mediante el uso de otros artefactos con los cuales se puedan conocer algunas distancias y por medio de un modelo matemático ya establecido encontrar el valor desconocido. Tales instrumentos de medición, que son utilizados desde la antigüedad, como el clinómetro y el espejo, también tienen su propia teoría física - geométrica involucrada, la cual debe ser conocida con cierto detalle para ser utilizada en un medio escolar.

Un espejo, el cual no es de grandes dimensiones, de 5 x 10 cm. sirve para encontrar la altura de un árbol. El siguiente grafico muestra cómo debe estar colocado el espejo. Además del espejo se requiere la ayuda de alguna persona, que colocada sobre la línea que une al árbol con el espejo colocado en el suelo pero en la posición adecuada, de tal forma que pueda ver en el espejo el reflejo del árbol completo.

En la figura, la relación que existe entre la altura del árbol AB y la estatura del observador ED, es igual a la relación entre la distancia BC desde el espejo hasta el árbol y la distancia CD desde el espejo hasta el observador. El pie del árbol, el espejo y los pies del observador deben ser tres puntos alineados.

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD}$$



Nuevamente podemos observar que si un alumno de secundaria realiza mediciones con ayuda de un espejo, de antemano nuestro sujeto debe de ser consciente cómo fija el punto C y cómo se refleja el punto A en el espejo, de cómo la distancia (ED) debe ser tomada del piso a la altura de sus ojos, para enseguida poder realizar un esquema gráfico de la situación y así establecer las relaciones entre las magnitudes.

Estos instrumentos que parecen de “fácil” uso, construcción y manejo no tienen que ser subestimados, ya que sus propiedades geométricas, ópticas y su uso deben ser motivo de reflexión y análisis al momento de realizar mediciones directas con el fin de obtener la medida de una magnitud que no se puede realizar de manera directa.

En este punto podemos decir que los elementos involucrados en una medición indirecta, visibles o no, son: principios ópticos, ángulos, distancias, triángulos en el espacio, el significado de una visual, líneas paralelas y esquematizar. Estos elementos deben de considerarse con cuidado y tomarse en cuenta al momento de intentar llevar a cabo una experiencia como ésta. Observar el entorno físico y poder construir representaciones gráficas de él, presenta dificultades.

La realización de mediciones indirectas de forma práctica, utilizando diversos recursos ha sido objeto de investigación. Por ejemplo Maxwell (2006) utiliza un clinómetro para encontrar la altura de árboles muy altos en un bosque, midiendo una distancia y un ángulo y por medio de trigonometría encuentra la altura. Wong (2006), utiliza lo que llama el Método del Pulgar para realizar medidas indirectas, estableciendo como pre requisitos, el conocimiento geométrico de líneas paralelas, ángulos, triángulos semejantes, ángulos verticales.

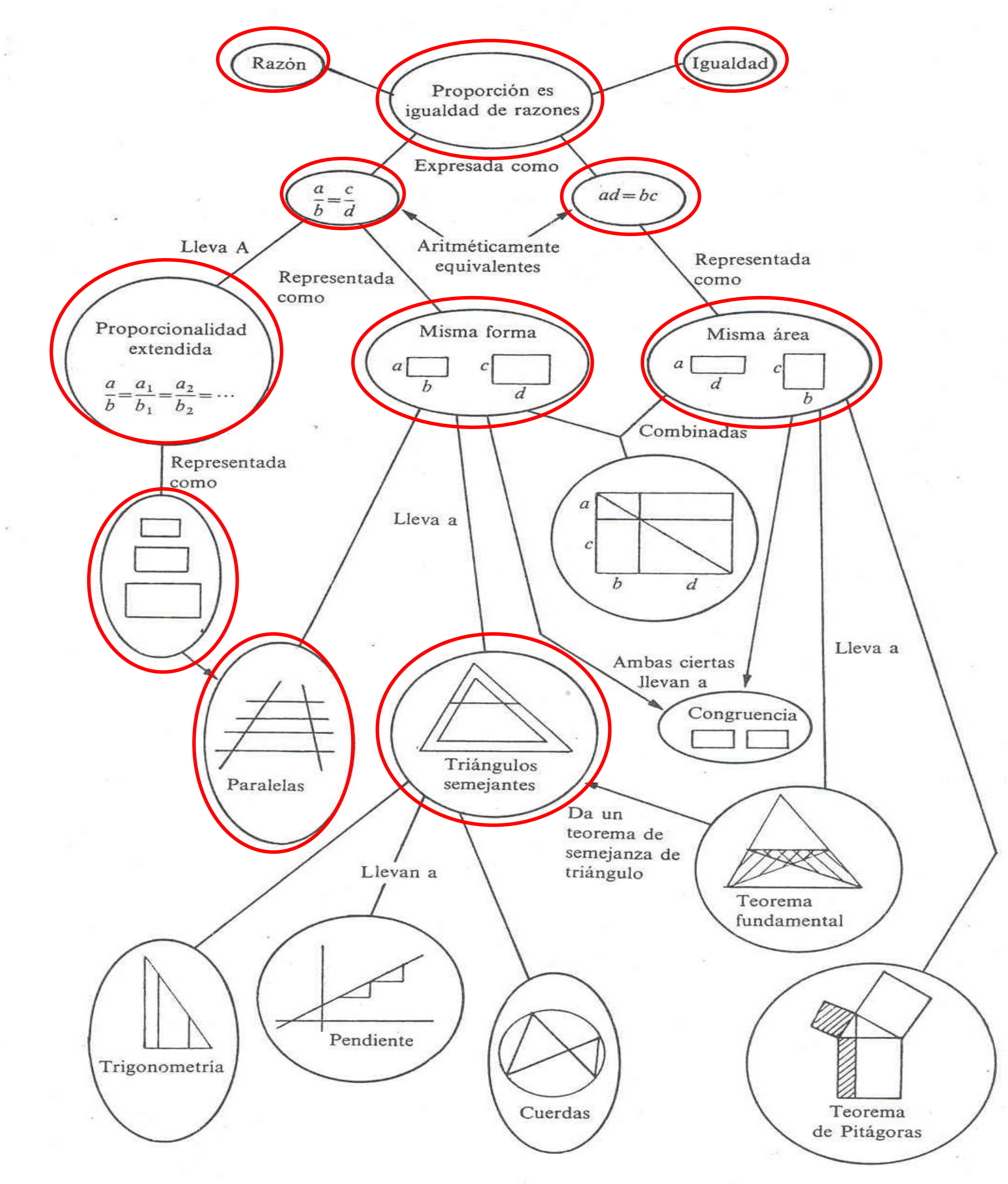
Proporcionalidad

Una razón es la comparación de dos magnitudes; es decir, una razón es una relación de la forma a : b , que se lee "a" es a "b".

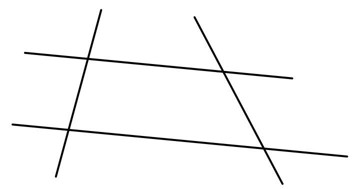
Por otro lado, el término de proporcionalidad - y como sustantivo proporción - se refiere a la igualdad de dos razones, la cual se expresa de manera algebraica como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Cañas y Novak (2006) argumentan que, desde sus orígenes, la proporcionalidad ha estado presente en el estudio del mundo que rodea al hombre, en donde éste, al no poder medir distancias de manera directa, ha ido buscando recursos y proponiendo métodos que den solución a su problema. Esta noción, aparece en sus inicios en ciencias como la Astronomía y la Agrimensura. Dicha relación $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ en sus elementos primigenios eran más de tipo geométrico como se muestra en el mapa conceptual de Solomon, (1987).

A continuación, en el diagrama de Solomon se han señalado con rojo lo elementos geométricos que para fines de este trabajo son de importancia.

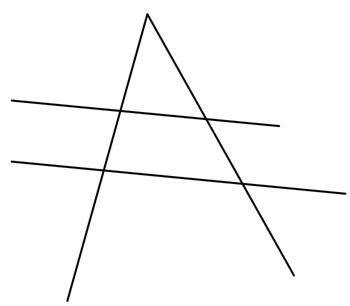
Por otro lado, siguiendo el diagrama de Solomon, tenemos que tales relaciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ pueden ser comparadas de dos maneras, la primera que llamaremos unidimensional, en donde geométricamente la figura conserva su forma de modo proporcional y la segunda denominada bidimensional, en donde las áreas son iguales, la cual está representada por la expresión $ad = bc$.



La forma unidimensional puede extenderse de manera infinita, es decir la podemos expresar como la igualdad de varias razones: $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\ldots$ a lo que Solomon denomina "proporcionalidad extendida" y la reconocemos como fracciones equivalentes en aritmética y en geometría como segmentos equivalentes, lo que va a dar sustento a figuras semejantes, con lados homólogos proporcionales entre sí, dando paso a poder establecer el Teorema de Thales: *"Si tres o más paralelas son cortadas por dos o más secantes, la razón de las longitudes de los segmentos determinados en una de las paralelas, es igual a la razón de las longitudes de los segmentos correspondientes determinados por las otras paralelas".*



Como un caso particular del Teorema tenemos que si prolongamos las dos rectas transversales que cortan a las paralelas hasta que se junten en un punto, lo que obtenemos son triángulos semejantes.



Importancia de la Proporcionalidad

La aplicación de la proporcionalidad puede dar solución a muy diversos problemas. Según Alan y Shirley (1988), esta diversidad abarca ámbitos como son: en las compras, cambios monetarios, en las recetas de cocina, al remodelar o mantener una casa, en el cambio de unidades de un sistema a otro, en las comparaciones físicas (cuatro clips por crayón; 800 pasos por cada ½ milla), en el uso de escalas (1: 1000), en la música, en la naturaleza (Razón áurea), en la probabilidad, en las variaciones (directa, indirecta y variación conjunta), en las gráficas, en las razones trigonométricas, en las palancas, etc. Por la variedad de contextos en que aparece este contenido, el tema de proporcionalidad ha sido ampliamente estudiado. A continuación se muestra un número limitado de trabajos realizados sobre el tema de proporcionalidad.

Algunas Investigaciones sobre la proporcionalidad

La proporcionalidad ha sido ampliamente investigada por la comunidad de educadores matemáticos. A continuación se mencionan algunos ejemplos. Trabajos como los de Lesh, Post y Behr (1988); Confrey y Harel (1994); Hart (1981); Kaput y West (1994); Lamon, (1995) muestran el cómo se representa de manera gráfica, aritmética o algebraica una proporción; qué habilidades o prerrequisitos son necesarios para la adquisición, desarrollo y comprensión de este tema; y las dificultades y errores frecuentes que se cometen al enfrentarse a un problema que involucren este contenido.

Lesh, Post y Behr, (1988) subrayan la importancia del tener una clara interpretación geométrica, algebraica, aritmética y gráfica de la proporcionalidad, ya que es útil para acceder a las matemáticas de orden superior o estudios superiores. Para autores como Alan y Shirley (1988); el razonamiento proporcional es generalmente considerado como uno de los componentes importantes del pensamiento matemático formal adquirido en la adolescencia. Es la base de las nociones de comparación y covariación. Porque el uso de las razones y de la proporcionalidad ocurre en muchas situaciones prácticas, es en la actividad escolar en donde las habilidades para dicho razonamiento pueden ser desarrolladas cuidadosamente en los programas escolares.

Behr (1987); Hart (1978); Karplus, Formisano y Paulson (1979); Kieren y Southwell (1979) y Noelting (1980), con sus estudios han demostrado que adolescentes y adultos muestran gran dificultad en la resolución de problemas que involucran los conceptos básicos de fracción, razón y proporción. Lamon (1995), sugiere realizar proyectos que involucren modelos y dibujos a escala como una introducción a la definición de razón.

En general, se ha demostrado que establecer de manera formal la relación $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, no es sencillo para alumnos de secundaria, primero por la diversidad de aplicaciones en donde la proporcionalidad está involucrada y en segundo lugar por la confusión que causa la representación de un número racional (fracción) y una razón.

Investigadores como Freudenthal (1983), han clasificado la manera en que los alumnos expresan una proporción, de acuerdo a la forma en que comparan las magnitudes, y obtiene dos casos. El primero son **las razones internas**, que son razones constituidas por la comparación de magnitudes de igual unidad, por ejemplo:

$$\frac{4\,personas}{20\ \ personas}$$

Lo anterior muestra un ejemplo de razones internas. Las razones internas es un número.

El segundo tipo de proporciones son las **razones externas**, las cuales son proporciones constituidas por razones de magnitudes de diferente unidad, por ejemplo:

$$\frac{4\,personas}{1\ \ carro} = \frac{20\,personas}{5\ \ carro}$$

Al igual que las razones internas, las razones externas presentan cuatro formas diferentes de representación entre diferentes elementos que conforman la proporción.

Hoffer (1988) también denomina a la razón interna cómo razón y a la razón externa como razón de cambio. En sus investigaciones, las cantidades relacionadas se pueden representar de la siguiente forma:

- Muestran correspondencia 402. 33 km → 3 horas
- Usan la notación 402. 33 km : 3 horas
- Par ordenado (402.33 m, 3h)

De las tres formas en que Hoffer representa una razón, vemos que la manera de par ordenado es una representación funcional de una relación; es decir, es una manera más abstracta de representación en comparación a la denominada como correspondencia.

Existen trabajos que dan crédito a resultados obtenidos y proponen una situación didáctica sobre el tema de proporcionalidad en diversos ámbitos:

Heinz y Sterba-Boatwright (2008), proponen resolver problemas que se puedan confundir con una variación proporcional, como el siguiente

Bill puede pintar una habitación de un nuevo hotel en 6 horas y María puede pintar el mismo cuarto en 4 horas. Si ellos trabajan juntos, ¿qué tiempo les tomará pintar el cuarto?

Miller y Fey (2000), afirman que los estudiantes de niveles medio- básicos utilizan el razonamiento aditivo en la mayoría de sus soluciones. Estos autores analizan cinco problemas que son aplicados a alumnos con diferentes experiencias curriculares sobre lo que ellos conocen de proporcionalidad.

Después de haber tratado de establecer algunos principios que se consideran útiles para los fines de ésta investigación, enseguida se tratará de establecer cuál es la relación entre la proporcionalidad y la intuición.

La Intuición y la Proporcionalidad

Consideremos el esquema que desarrolla Pozueta (2003), el cual señala el tránsito que hay de la razón, a la proporción y de ahí a la función. Podemos ver, por ejemplo que el concepto de "regla de tres" se deriva del de proporción.

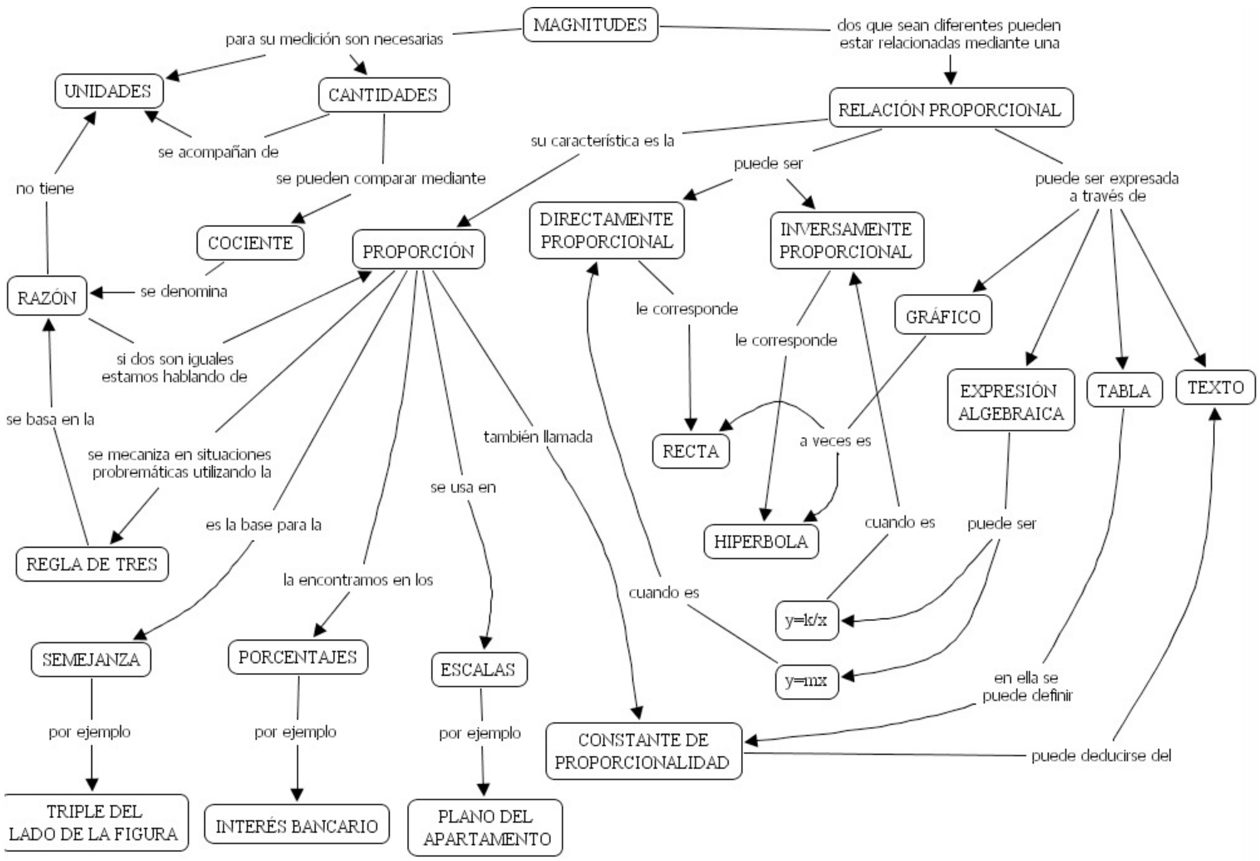


FIGURA 1. Mapa conceptual de referencia. (Pozueta, 2003)

Con relación al esquema de Pozueta, un aspecto fundamental en el presente trabajo son un conjunto de nociones básicas estrechamente relacionadas con el concepto de proporción, y que un alumno de secundaria, por su experiencia escolar conoce; nos referimos a las nociones siguientes: fracciones equivalentes, regla de tres, tanto por ciento y escalas. Por lo anterior, algunas flechas del mapa conceptual de Pozueta han sido cambiadas en su sentido y se marcan con rojo en el siguiente esquema, ya que al plantear problemas de proporcionalidad a los alumnos, se puede identificar a qué tipo de problemas nos estamos refiriendo.

Si consideramos que de acuerdo a Fischbein la intuición educada es producto, fundamentalmente, de la instrucción, un supuesto básico en el presente trabajo es que los alumnos de manera intuitiva, podrían recurrir a estos conceptos para abordar un problema de proporcionalidad.

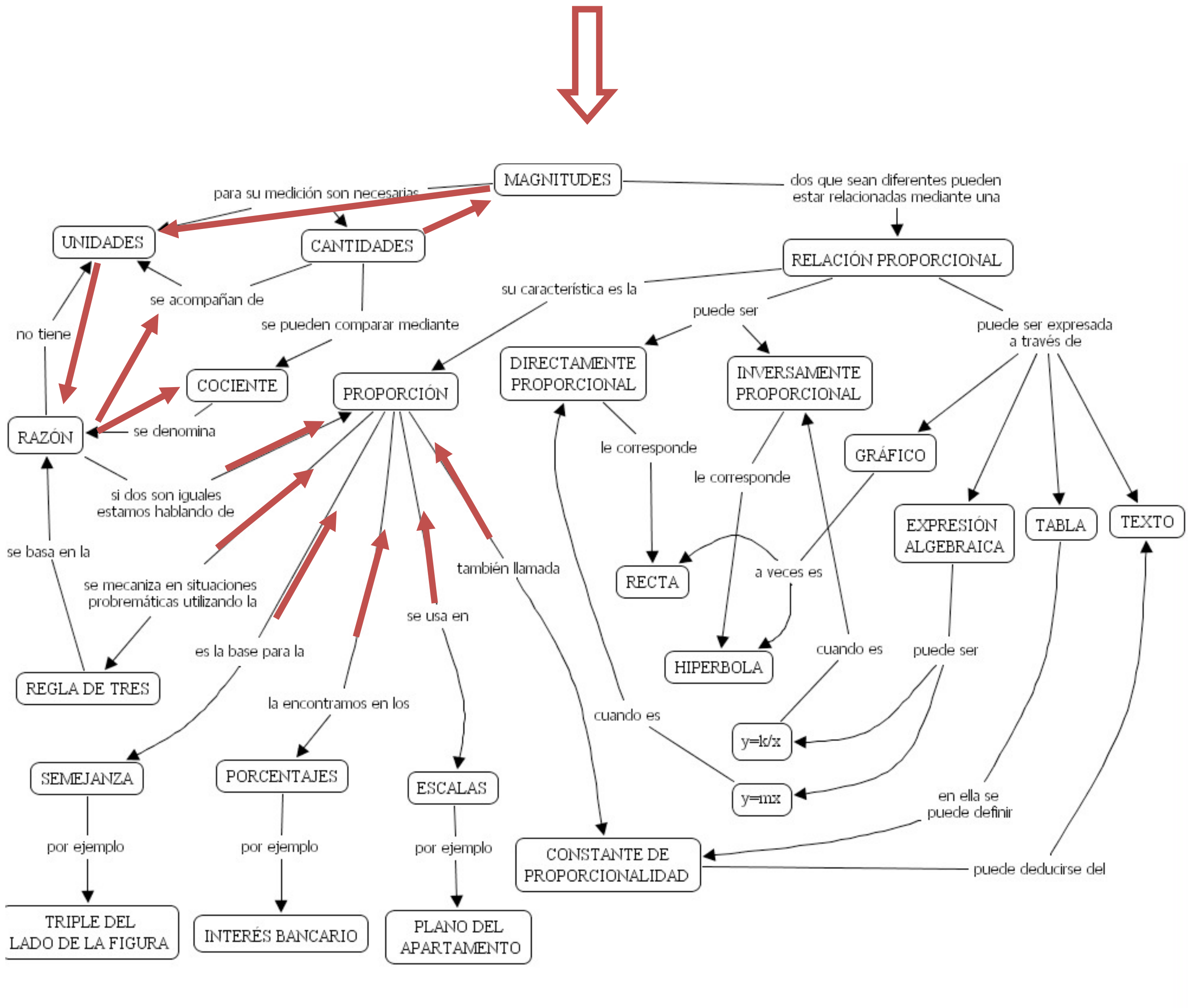


FIGURA 1. Mapa conceptual de referencia. (Pozueta, 2003)

Pero todo lo anterior, no hace sentido si no consideramos los procesos matemáticos que se involucran en toda tarea matemática que conlleva un proceso de enseñanza - aprendizaje. Estos procesos matemáticos son: la argumentación, la comunicación, la resolución de problemas, las formas de representar y las conexiones, los que se explican a continuación.

Procesos Matemáticos

Los procesos matemático enunciados por la NCTM (2000) que intervienen en toda tarea matemática son:

- Argumentación (Razonamiento).

  La argumentación es un razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición, la cual se funda en opiniones o en conjeturas, desarrolladas en una tarea matemática.

  Es importante para la toma de decisiones en el momento de resolver una situación problemática, útil para la demostración y la formulación de conjeturas, por lo cual es necesario que el alumno posea un gran número de experiencias en diversos contextos. El desarrollo del razonamiento está enlazado con la comunicación, en donde el razonamiento inductivo y deductivo participan en convencer acerca del resultado obtenido.
- Conexiones.

Casi siempre los contenidos matemáticos en el aula se tratan de manera aislada y dan la connotación de que no hay interacción con otras materias de la educación básica, por lo que, la realización de conexiones en matemáticas no solamente tiene que ser útil al alumno para la resolución de problemas, además debe de ser útil para reconocer el valor y uso de las matemáticas en nuestra vida. La diversidad de conexiones se puede ver en la estrategia que los alumnos utilizan para enfrentar una tarea matemática y no solamente las conexiones que se realicen entre conceptos matemáticos, sino también el enfrentar una tarea matemática dentro de un área diferente del conocimiento o de la ciencia. Hay que reconocer que lo extenso de la curricula en México hace que el docente sienta que no pude cubrirla en tiempo y forma, pero si analizamos algunas de las tareas con detenimiento y a profundidad, podremos darnos cuenta que un par o varios contenidos que conforman la curricula están conectados en los ejercicios.

- Representaciones.

Familiarizarse con múltiples representaciones ayuda al enriquecimiento y búsqueda de estrategias en la solución de una tarea matemática. Tales representaciones pueden ser simbólicas, gráficas, esquemáticas, verbales (escritas o habladas). El leer, explicar o interpretar una representación del tipo que sea, no es una tarea trivial, ya que esto involucra factores algorítmicos, lingüísticos y conceptuales para su correcta interpretación. Para una razón, las representaciones utilizadas pueden ser de lenguaje, con modelos concretos o de regiones. Decir 3 de cada diez es una representación de lenguaje para una razón.

- Resolución de problemas.

Un problema es una situación en la cual el sujeto que desea resolverlo no tiene a la mano los medios inmediatos para encontrar la solución (Schoenfeld, 1985). Es decir, se requiere de experiencias individuales previas, de conocimientos e intuición.

Las situaciones problemáticas deben surgir a partir de experiencias escolares y cotidianas, de tal forma que a medida que el niño avanza de nivel, debe encontrarse con tipos diversos y complejos de problemas.

En la resolución de problemas un aspecto importante son las estrategias a seguir. Las estrategia de resolución deben ser el ensayo y error; la elaboración de tablas y listas ordenadas, elaborar diagramas, buscar patrones, la reconstrucción de un problema, el trabajar con problemas que ocupen varios días de clase, representar datos y trabajar frecuentemente en grupos pequeños. Conforme transcurra el tiempo, las situaciones y los enfoques deben basarse en el lenguaje matemático que los estudiantes van adquiriendo, y ampliarlo, y deben ayudarles a desarrollar toda una gama de estrategias y enfoques.

Todo el conjunto de habilidades y destrezas se pueden desarrollar y potenciar desde lo simple a lo complejo, desde lo inductivo a lo deductivo, de manera colectiva o autónoma y viceversa. La NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) ha planteado en sus Principios y Estándares para las Matemática Escolares (2000), a la matemática como la asignatura que puede propiciar el desarrollo gradual de habilidades que se hacen presentes al momento de dar solución a un problema.

- Comunicación

La comunicación en matemáticas es importante, ya que involucra la habilidad de leer y escribir matemáticamente para interpretar significados e ideas y es la única manera que tienen los alumnos para poder expresar sus ideas al docente, y éste pueda tomar decisiones sobre el proceso enseñanza - aprendizaje que debe realizar. Los estudiantes deben de enunciar sus propias ideas sobre los diferentes conceptos matemáticos ya que es una manera de que ellos demuestren las conexiones que están realizando al realizar una tarea matemática. Dentro de las actividades propias de la comunicación encontramos el leer, escribir, escuchar y pensar matemáticamente las cuales tienen su manera, su forma de ser y hacer.

La intuición debiera ir por delante, para ser después respaldada por una demostración formal. Una demostración intuitiva permite comprender por qué un teorema debe ser cierto.

Stewart (1984)

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

INTRODUCCIÓN

En este Capítulo se describe el método utilizado en la investigación y el proceso de su validación, la escuela en donde se realizo el trabajo y los sujetos que participaron en ella; así como, la descripción y programación de las diferentes tareas, exponiendo sus propósitos de manera explícita.

El método utilizado en la investigación es de carácter cualitativo (Taylor y Bogdan, 1990), y tiene sus bases en la Sociología. Está forma de investigación es humanista, es decir, trata de conocer el porqué de las acciones de los sujetos; en otras palabras, intenta comprender los motivos que están detrás de las acciones, apoyándose en instrumentos como cuestionarios, relatorías, inventarios, audio grabaciones entre otros. Podemos afirmar que en las metodologías cualitativas es importante como recoger los datos para la indagación de las preguntas de investigación y en donde las palabras habladas o escritas y conductas observables de los sujetos son sometidas a un marco teórico de referencia.

La investigación cualitativa es sistemática, con procesos rigurosos, aunque no necesariamente estandarizados y refleja parte de la metodología propia del investigador ya que él mismo intenta conducir su estudio, siguiendo lineamientos orientadores, pero no reglas.

Elementos Metodológicos.

Recolección de Datos

La recolección de datos se realizó mediante tareas escritas, algunas entrevistas a los alumnos y por observaciones del investigador en el momento de la puesta en práctica de la tarea.

Las tareas escritas incluyen cuestionarios de indagación, descripciones de imágenes, realización de gráficos o esquemas y resolución de problemas con papel y lápiz.

Las entrevistas fueron audiograbadas y se realizaron de manera individual en algunas tareas.

Las observaciones del investigador se registraron en un diario de campo.

Análisis de los Datos

El análisis de los datos se realizó de la siguiente manera:

a) Con los resultados de cada tarea se construyeron clasificaciones

b) Cada una de las tareas realizadas por los alumnos fue revisada tomando en cuenta elementos establecidos en el Marco Teórico.

c) Los resultados encontrados se confrontaron con lo que aparece en la literatura.

Procedimiento de Validación.

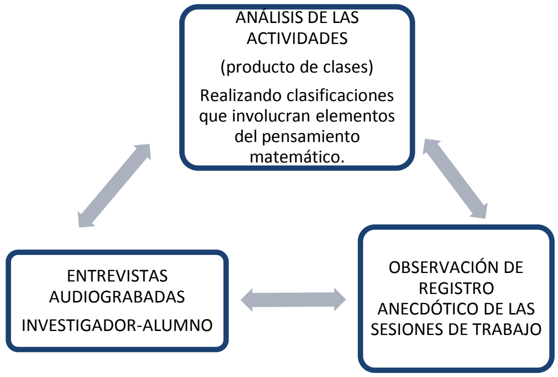
La triangulación puede definirse como el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano. El origen de este método proviene de una técnica de medición física utilizada por navegantes marinos, estrategias militares y topógrafos. Sus ventajas son principalmente dos: la cantidad de información que se produce es suficiente filtrando lo experimentado de manera selectiva dando confianza a los resultados obtenidos por la variedad de métodos utilizados en las investigaciones y el uso de este método ayuda a superar el problema de caer en prácticas viciadas por el uso de un sólo método.

La triangulación de datos implica diferentes niveles de análisis, por tanto diferentes tipos de triangulación. Las utilizadas en la investigación están resumidas en la siguiente tabla.

Tipo de Triangulación	Descripción
Niveles combinados de triangulación	Este tipo de triangulación usa más de un nivel de análisis de los tres niveles principales usados en las ciencias sociales, a saber: el individual, el interactivo y el colectivo.
Triangulación de teorías	Este tipo de triangulación utiliza las teorías alternativa o competitiva con preferencia, para manejar un solo punto de vista.
Triangulación metodológica	Este tipo usa: (a) el mismo método en diferentes ocasiones, o (b) métodos diferentes sobre el mismo objeto de estudio. Dentro de esta triangulación se identifica dos categorías: a) Triangulación dentro de los métodos, se refiere a la repetición de un estudio de comprobación de la fiabilidad y confirmación de la teoría. b) Triangulación entre los métodos, el cual comprende el empleo de más de un método en la persecución de un objetivo dado.

(Cohen y Manion, 1990)

Para la validez de los resultados se establece la siguiente triangulación:



Marco Referencial

Escuela Participante en la Investigación

La investigación se realizó en la Escuela Secundaria Técnica 55, que es de carácter público y se encuentra inmersa en los límites de las delegaciones Iztacalco e Iztapalapa en el D.F., México. La población estudiantil está conformada principalmente por dos niveles socio económicos, medio alto y medio bajo, aunque en general está clasificada como una escuela de características marginales.

La razón por la cual la investigación se realizó en la escuela arriba mencionada, es porque la investigadora forma parte del personal docente. Los directivos dieron libertad de acción, ya que muestran interés en que la investigación puede ayudar a mejorar el nivel educativo de los alumnos en cuanto a matemáticas se refiere.

La escuela fomenta la participación en diversos proyectos, eventos y concursos relacionados al ámbito educativo como son: Concurso de escoltas, Concurso de Primavera, Concurso instrumental, Concurso del Himno Nacional, Concurso de Confrontación Académica, Concurso de la Secu a la Antártica, Habilidades Matemáticas, etc.

Los Sujetos de la Experiencia Didáctica en la Investigación.

En seguida se da una breve descripción de la población estudiantil y las características que conforman la escuela. Esta información está documentada en el proyecto escolar del plantel, PECX (2012:10).

En lo que respecta a la comunidad estudiantil, podemos señalar que el plantel atiende a una población de 1301 en ambos turnos estudiantes, siendo 779 en su turno matutino.. Dentro de las características observadas en los estudiantes y las estudiantes, de tercer segundo grado se encontraron dificultades para tener una visión grupal y poder trabajar con sus compañeros, además se detectaron problemas para establecer compromisos personales y cumplir con los ya establecidos. Así mismo, caen fácilmente en la provocación de sus compañeros y como estrategias de solución utilizan conductas violentas. En cuestiones de aprendizaje, existe una marcada división en los grupos de compañeros que se esfuerzan mucho en sus trabajos y los que tienen total apatía hacia el aprendizaje escolar. Carecen de hábitos de estudio y habilidades para generar y controlar su propio aprendizaje.

La puesta en práctica de las actividades se llevó a cabo con 55 alumnos de tercer grado, pertenecientes al turno matutino, cuyas edades son de catorce y quince años. Un problema que presenta la escuela es el alto índice de ausentismo por parte de los alumnos.

La razón por la cual se escogieron alumnos de tercer grado es porque la investigadora funge como docente en este grado.

Descripción de las Tareas e Instrumentos Utilizados en la Investigación.

Para alcanzar y cubrir los objetivos de la investigación, se puso en práctica una serie de actividades de trabajo de campo y de resolución de problemas.

Con cada una de las siguientes actividades se espera evidenciar las ideas intuitivas y características del pensamiento matemático en mediciones indirectas en estrecha relación con el concepto de proporcionalidad.

Los instrumentos que utilizan en la investigación, son cuestionarios de respuesta abierta, hojas de trabajo de actividades prácticas de medición indirecta y una serie de cinco problemas que involucran diferentes aspectos de la proporcionalidad.

A continuación se describe cada una de las actividades y sus propósitos.

Actividad 1: "¿Qué es medir?"

La tarea consiste en contestar un cuestionario de ocho preguntas (Anexo 1). Esta actividad tiene como objetivo tratar las ideas que poseen los alumnos sobre el concepto de medición, de los instrumentos de medición y qué es la medición indirecta. El tiempo utilizado es de una sesión de cincuenta minutos.

A continuación se muestran los argumentos del porqué de cada pregunta. La justificación se basa en gran medida en los Estándares Curriculares de la NCTM (2000).

Pregunta	Concepto observado	Explicación
1.- Define qué es medir 2.- ¿Qué cosas se pueden medir? 3.- Menciona algunos instrumentos de medición que conozcas.	*Conocimiento sobre el concepto de medición.*	La medición muestra claramente la utilidad y la aplicación práctica de las matemáticas en la vida diaria. Ligadas con el desarrollo del concepto de medición están las experiencias con herramientas tales como reglas, balanzas, termómetros, etc. Un estudiante debe relacionar tanto la unidad como las herramientas adecuadas para hallar una medida.
4.- Imagínate que quieres medir un árbol muy grande ¿Qué método utilizarías para medirlo? 7.- ¿Cómo podrías medir el ancho de un río, si no tienes una lancha para cruzar de un lado a otro y es muy peligroso estar dentro de él?	*Forma o métodos para realizar una medición.*	Las actividades de medición deben exigir una interacción dinámica entre los estudiantes y su entorno. Hay que tener en cuenta que los estudiantes necesitan muchas experiencias con los conceptos de proporción en contextos de medición, haciendo uso de la semejanza de triángulos como característica presente en la medición de alturas o distancias de objetos inaccesibles utilizando la sombra y el reflejo de un espejo.
5.- En forma aproximada: ¿Cuáles son las medidas del salón de clases? 6.- En forma aproximada: ¿Cuánto mide el perímetro del pizarrón?	*Estimaciones*	Las actividades de estimación en el aula han de ayudar a los niños a desarrollar una estructura mental en la que puedan enjuiciar correctamente y razonar de forma lógica cuando tengan que tomar decisiones en la vida diaria.
8.- ¿Qué es una medición directa y qué es una medición indirecta?	*Diferencia entre las mediciones directas e indirecta*	Hay que considerar que las experiencias con medición constituyen un poderoso enlace entre temas del currículo matemático en el ciclo medio y otras materias según los estudios realizados por la NCTM.

Actividad 2: “Midiendo mis pasos”

Ésta actividad, se realiza en dos ámbitos diferentes, el primero en el patio escolar y el segundo en el aula. El trabajo es organizado en grupos pequeños y tiene una duración de dos sesiones de cincuenta minutos cada una.

Los propósitos de esta tarea son: explorar cómo es involucrado el pensamiento matemático fuera y dentro de un aula de clases, observar cómo se da la organización de los alumnos en la tarea asignada; documentar la forma de interpretar y realizar las mediciones, mostrar cómo se efectúa el llenado y análisis de los resultados de la tabla; así mismo, registrar, las diferentes maneras de cómo plasman sus ideas a través de un croquis, dibujos u otras representaciones de la actividad.

En la primera sesión, en donde se realiza el trabajo de campo, cada grupo recibe una hoja impresa (Anexo 2a), la cual consta de las instrucciones y el "material necesario" para su desarrollo. Los alumnos tienen que medir los pasos que da uno de sus compañeros y contestar la siguiente tabla.

No. de pasos caminados	**Distancia recorrida (m)**
4	
15	
100	

Se finaliza esta primera parte con la realización del dibujo de la actividad.

En la segunda sesión el alumno recibe otra hoja impresa en donde tiene que calcular cuánto mide uno y diecisiete pasos. Para contestarlas tiene que utilizar los datos obtenidos en la primera actividad, es aquí en donde se hace evidente lo indirecto de una medición, al tener que encontrar los valores desconocidos. Utilizando algunas mediciones directas y alguna proporción matemática.

Actividad 3: “Medición de la altura de la escuela por medio de un espejo”.

La tarea se registra en tres hojas de trabajo (Anexo 3), una para cada sesión. En las tareas se ponen en práctica algunos métodos de medida indirecta, utilizados desde la antigüedad. Esta tarea se desarrolla en el patio de la escuela y en el aula. El objetivo general es documentar los elementos del quehacer matemático que aparecen relacionados con la medición indirecta; es decir, con la proporcionalidad de triángulos semejantes basada en elementos geométricos no visibles. Algunos elementos son figuras tridimensionales y su representación bidimensional (en papel) es necesaria para el cálculo en la medición indirecta. La actividad se trabaja en grupos pequeños con una duración de tres sesiones de cincuenta minutos cada una. Aunque la actividad se realiza en grupos pequeños, cada alumno cuenta con su hoja impresa para registrar su actividad.

En la primera sesión, que es introductoria, el alumno se familiariza con el uso de un espejo utilizado como instrumento de medición en el patio escolar, en donde aprenderá a fijar puntos sobre los objetos y visuales en el espacio.

Los alumnos se apoya en el siguiente gráfico y tabla, el cual trata de reconocer en la escena real y lo toman en consideración para identificar lo que demanda la tabla anexa que tienen que llenar.

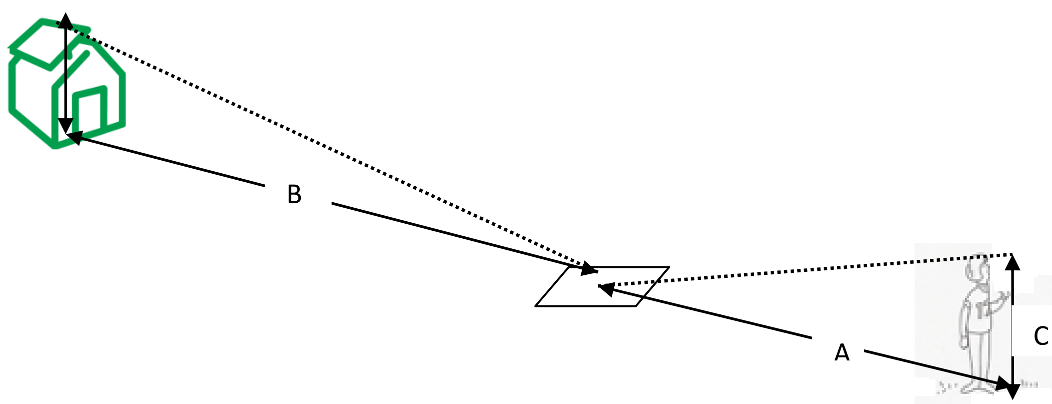


Fig.1

Nombre del observador	***A:** Altura del piso a los ojos del observador (m)*	***B:** Distancia entre el objeto y el espejo (m)*	***C:** Distancia entre el observador y el espejo (m)*	*Altura calculada (m)*

El alumno tendrá que visualizar en su mente los triángulos que se forma al usar el espejo. Este es un aspecto difícil de la actividad, ya que el alumno puede ver, en general, rectángulos, cuadrados y círculos en su entorno pero, reconocer triángulos en el espacio, sobre todo que sean rectángulos, requiere de cierto entrenamiento en el pensamiento matemático.

Para la segunda sesión de trabajo se cuenta con la Fig. 1 anterior y la tabla, con la diferencia que la figura ya no cuenta con las letras de referencia A, B, C. El alumno tiene que leer la tabla para saber dónde colocará los datos que se obtienen de la medición y realizar los cálculos que crea conveniente para la obtención de la altura del edificio escolar.

Para la sesión tres los alumnos cuentan con su hoja impresa con tres tablas como la siguiente:

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)

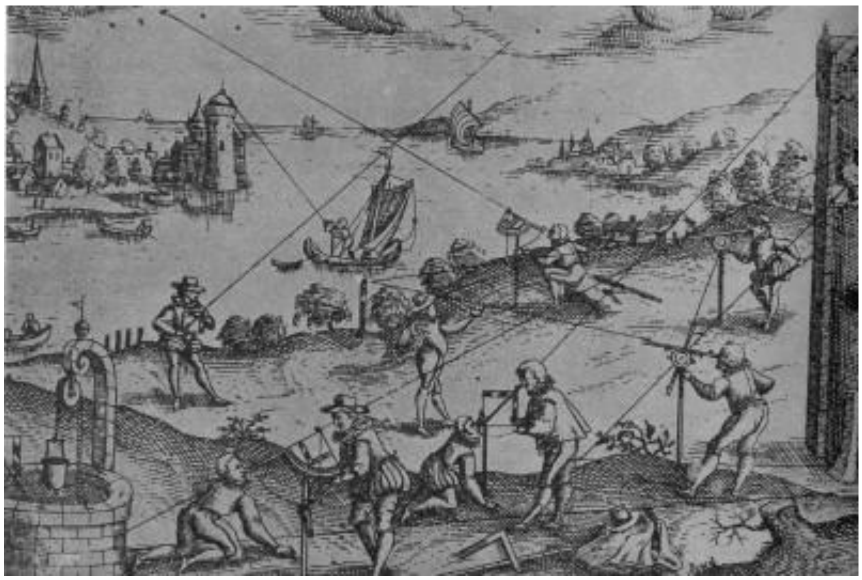
Los integrantes de cada grupo de trabajo deciden qué objeto, que esté dentro de la escena escolar desean medir; puede ser un árbol, una lámpara, la escuela que se encuentra a un lado de la secundaria, un poste, etc. Esta hoja de trabajo ya no cuenta con ningún tipo de gráfico con la finalidad de que los alumnos necesitan representar los elementos geométricos, diferentes a los que comúnmente utilizan (cuadrados, círculos y rectángulos) como son los triángulos y representar en un gráfico las medidas que realizan.

Actividad 4: “Uso del clinómetro para medir alturas”.

En esta actividad, el instrumento utilizado para registrarla fueron cuatro hojas impresas, en donde tres son para que el alumno conteste y hay una que es una escala que tiene ángulos y distancias que va ha ser utilizada para la construcción de un clinómetro (Anexo 4). Las tareas se desarrollan en cuatro sesiones de cincuenta minutos cada una de ellas.

El objetivo de esta serie de tareas es establecer, en la medida de lo posible, cómo el alumno interpreta una serie de datos que al ser medidos con la ayuda de un instrumento que ellos construyen, y al operar con dichos datos, obtienen una medida mediante un procedimiento de medición indirecta.

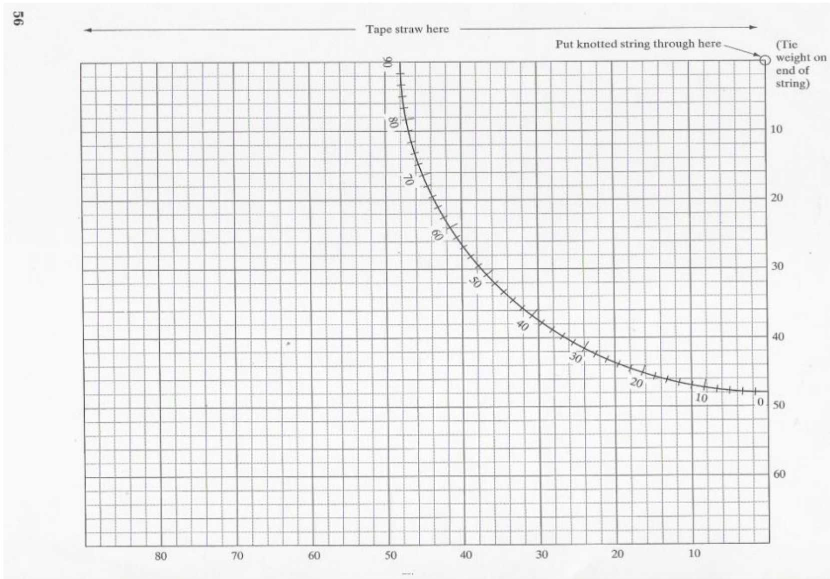
En la primera tarea, el alumno tiene que realizar una descripción de la siguiente ilustración de manera individual.



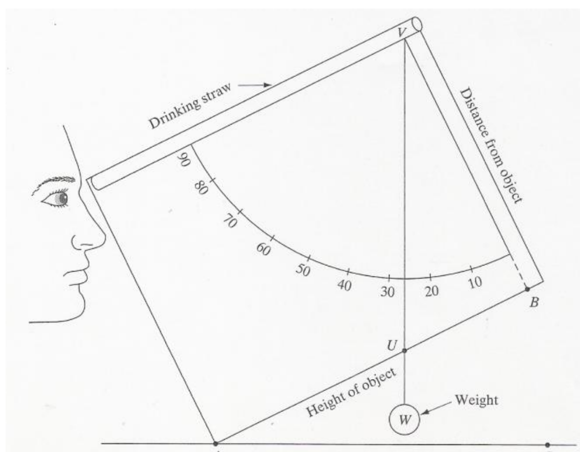
La descripción servirá para establecer qué conocimientos previos tienen los alumnos de cómo se han realizado mediciones y cuáles son algunos instrumentos utilizados por el hombre a lo largo de la historia, reconociendo que son el resultado de una actividad propiamente humana. Posteriormente se entrevista a algunos alumnos sobre su descripción, la cual se audiograba para su análisis.

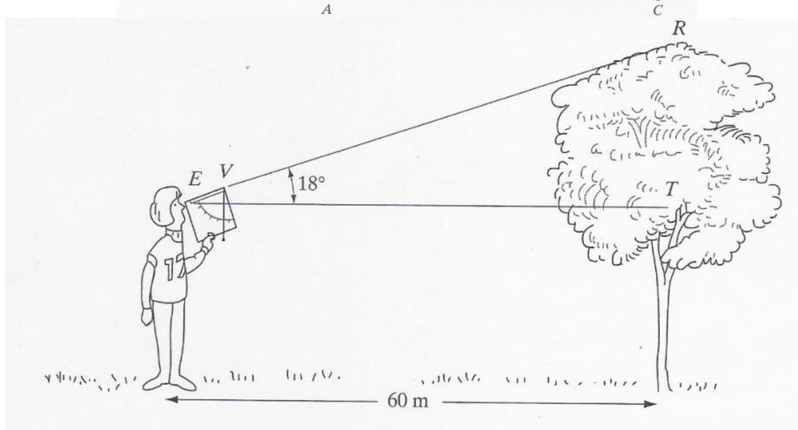
La segunda tarea es la construcción de un instrumento de medición que semeja al cuadrante y al sextante utilizados en la antigüedad. Para realizar lo anterior, el alumno cuenta con una hoja impresa con la siguiente escala pegada en un cartón para darle firmeza, una tuerca grande (la cual servirá de plomada), un popote (mirilla del instrumento) y unos 20cm de cordón rígido (cuerda de trompo o yoyo).

Escala para la construcción del clinómetro



Esta actividad se lleva a cabo en dos sesiones, ya que el alumno tiene que familiarizarse con él uso del instrumento.





Con dicho instrumento el alumno puede llegar a reconocer y/o dar sentido al funcionamiento de instrumentos de medición como lo son los teodolitos, distanciometros o telémetros, altímetros, etc., aún siendo más sofisticados, sus principios mecánico - ópticos y matemáticos son los mismos que los de siglos pasados (hoja 2 y 3 del instrumento, Anexo 4.b y 4.c). Hay que tener presente que al establecer los triángulos semejantes utilizando la escala, puede representar dificultades en la interpretación de los datos para los alumnos.

Para la sesión 4 los alumnos resolverán la hoja cuatro de esta actividad, utilizando su clinómetro y realizando las medidas que se piden en la actividad (Anexo 4.d).

Actividad 5: "Resolución de problemas de proporcionalidad".

Este instrumento está conformado con una serie de cinco problemas que involucran a la medición indirecta en diferentes contextos, su objetivo es el tratar de establecer una clasificación de los enfoques y estrategias utilizados por los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad que involucran dichas mediciones, en particular aquellas que muestran indicios de forma intuitiva de pensar.

Los cinco problemas fueron resueltos en una sesión de cincuenta minutos de manera individual por los alumnos. Los problemas son los siguientes:

1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

2.- En el centro de la plaza de mi pueblo hay un mástil del que ondea una bandera. Entre el mástil y yo coloco, en el suelo un espejo y me alejo de él hasta que vea en el espejo la punta superior del mástil. En ese momento mido: mi distancia al espejo que es de 230 cm, la distancia del espejo al mástil que es de 854 cm, y lo que yo mido, sólo hasta mis ojos, que es de 1.68 m. ¿Cuánto mide el mástil de la plaza?

3.- Una vela de 20 centímetros de largo dura encendida 10 horas:

1. *¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros?*
2. *¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros?*
3. *¿Y una vela de un centímetro?*

4.- Alicia quiere reducir una foto para insertarla en un trabajo de la escuela. La foto mide 15 cm de largo por 10 cm de ancho. Quiere ver cómo queda mejor. Si cambia el ancho a 6, a 8, ó a 9 cm, ¿de cuánto tendría que ser el largo en estos tres casos, para que se conserve la misma foto original?

5.- Un poste de tres metros de altura proyecta una sombra de un metro.

1. *¿Cuál es la altura de una torre cercana, que tiene una sombra de cuatro metros a la misma hora del día?*
2. *¿Cuál será la altura de un edificio de cuatro pisos cuya sombra mide seis metros a la misma hora?*

Tales problemas se analizaran bajo la luz de los estándares planteados por la NCTM (2000), sobre las cinco competencias matemáticas, resolución de problemas, razonamiento y demostración, representaciones, comunicación, conexiones que deben de ser desarrolladas en alumnos del nivel secundaria en su concepto de medición indirecta implicando a la proporcionalidad.

Se entiende por enfoque el punto de vista del alumno con el qué resuelve el problema y como estrategia el camino que se sigue para dar solución al problema. Es aquí en donde el análisis a los problemas nos indicaran si en los alumnos de este nivel existen ideas primigenias intuitivas que sirvan de base para el desarrollo de la noción de proporcionalidad. La duración de esta actividad fue de dos sesiones de cincuenta minutos y se trabajaron de manera individual. En el capítulo siguiente, se muestran los resultados del análisis realizado a las actividades .

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

INTRODUCCIÓN

En todo trabajo de investigación, el análisis y discusión de los elementos estudiados debe de ser de manera sistemática, rigurosa y profunda. Razón por la cual en el siguiente capítulo la discusión se realizara en dos momentos.

Como primer momento se considera el análisis general de las actividades; es decir, se toma en cuenta los elementos que conforman el pensamiento matemático presentes en cada actividad, de tal manera, que ayuden a dar respuesta a alguna de las preguntas de investigación.

En algunas actividades se pueden realizar ciertas clasificaciones de las respuestas, a fin de generar las conclusiones.

En el segundo momento, se muestran los elementos intuitivos (si los hay) encontrados en las actividades realizadas. Mostrando de que tipo son, si se pueden clasificar o establecer cierta semejanza con respecto a lo expuesto por Fischbein en el marco teórico.

Cuestionario de Medición.

En ésta actividad, cada alumno recibió un cuestionario impreso en hojas blancas, utilizando pluma para contestarlo, en donde el tiempo aproximado que utilizaron los estudiantes fue de veinticinco minutos.

Para el análisis de cuestionario, se realizaron listados de las respuestas que dan los 55 alumnos para cada pregunta, las cuales fueron clasificadas y conjuntadas en cuatro grupos que conforman la medición y fueron:

Conocimientos sobre el concepto de medición.

Este primer grupo, que está compuesto por las preguntas 1, 2, 3, del cuestionario. Nos muestra la noción que tienen los alumnos sobre el concepto de medición, con qué y qué se mide. En la diversidad de respuestas, para ellos,
Medir es:

- *Saber cuál es el largo, el alto y ancho de una cosa u objeto.*
- *Es cuando mides objetos utilizando m, mm, cm, millas, pulgadas.*
- *Es una forma de encontrar con una cantidad las dimensiones de alguna figura, objeto, persona o animal (casas, puertas, mesas, sillas, goma, lápiz).*
- *Un método para que sepas cuanto miden las cosas u objetos.*
- *Es calcular una cosa con un objeto (regla, flexómetro, vaso de licuadora,) de medición.*
- *Conocer la distancia que existe entre dos puntos.*
- *Exactitud*
- *Calcular el área o perímetro.*
- *Saber que altura o estatura tiene, se puede hacer con regla, escuadra y son cm, mm, etc.*

Qué se mide:

- *La distancia, la masa, el tiempo, la temperatura, el volumen, el peso, la densidad, las figuras geométricas*
- *Todas las cosas, ventanas, árboles, triángulos, cuadrados un tubo, un mueble, paredes, cancha de futbol, la madera, las mangueras.*

Con qué se mide:

- *Se utiliza la regla, el transportador, la escuadra, el termómetro, el escalimetro, el metro, el pluviómetro, el compás, el termómetro, la cinta métrica, la báscula, la regla L, la regla T, el pie de rey, con las manos, el pie, la cuarta, el brazo.*

De lo anterior podemos decir que los alumnos al definir qué es medir, para ellos implica solamente un hacer, que involucra otras cosas como lo es el uso de instrumentos de medición, al medir hay que encontrar algo que no se conoce (dimensiones), medir implica exactitud, algunos asocian a la medición con cálculos (áreas y perímetros), otros muestran la importancia de las unidades en la medición y unos en realizar un método cuando se mide, pero no hacen mención a como debe ser este método. Esto se atribuye a que la pregunta *Define qué es medir*, el verbo medir para los alumnos implica una acción.

Otra conclusión a la que se llega es que los alumnos son muy generales y parcos en sus explicaciones, por ejemplo en la pregunta dos, la cual está dirigida para que el alumno mencione que se puede medir, ellos contestan de manera breve de las siguientes maneras: Todo, casi todo, todas las cosas, o hacen mención a objetos que tienen a su alcance como los pupitres, los lápices, cuadernos, gomas, etc.

Por otro lado, al revisar la pregunta que hace referencia a la variedad de instrumentos de medición, la información que arroja el análisis nos muestra que los alumnos tienen poca experiencia en el uso de diversos instrumentos, es decir, únicamente un alumno hace referencia a la licuadora (para saber cuánto licuado uno prepara), cinco alumnos mencionan al transportador y algunos otros confunden a los instrumentos de medición con las unidades (km, dm, cm), ya que en general mencionan la regla, el escalímetro, la cinta métrica, las escuadras, como instrumentos de medición.

Después de que los alumnos entregaron el cuestionario se quiso precisar algunas de las respuestas anteriores con el fin de que los alumnos se dieran cuenta que conocen más instrumentos de medición, además de los que fueron mencionados en sus hojas de respuestas. Por lo que se llega a la conclusión, que si bien es cierto que esta actividad tenía como propósito de ayudar al investigador a sustentar en la medida de lo posible los antecedentes de los alumnos en la medición, se puede decir que las respuestas de los alumnos en el cuestionario fueron intuitivas, ya que al hacer la reflexión sobre los instrumentos de medición que se conocen, los alumnos se dan cuenta que conocen más allá de los instrumentos lineales (regla, flexómetro, escalímetro) por así decirlo. De tal manera que la lista de instrumentos de medición se fue incrementando de manera inmediata, es decir, se necesito que el profesor diera un ejemplo para que los alumnos reconocieran instrumentos que miden volúmenes, temperaturas, velocidades, corriente eléctrica (multímetro), el tiempo, etc.

Parece que la palabra medir evoca más medidas de longitud y por extensión de área y volumen.

Métodos o formas de realizar las mediciones.

Este análisis corresponde al segundo grupo formado por las preguntas 4 y 7 del cuestionario, en el cual se pide que describan un método que de solución a dos problemas planteados. El problema cuatro puede ser como un problema de su entorno, ya que en la escuela hay un jardín con muchos árboles y el problema 7 es de un contexto diferente al acostumbrado por los alumnos.

Las respuestas para ambas preguntas son muy similares, para la pregunta cuatro que responde al método que utilizarían para medir un árbol muy grande, algunos alumnos respondieron:

- *Subirme a la punta de un árbol y dejar caer un metro.*
- *Poner unas escaleras, que se suba otra persona, lanzarle una cinta métrica o un metro a la persona que este arriba, que lo agarre de lo principal y lo deje caer a lo largo.*
- *Medirlo con un metro, cinta métrica o hectómetro*
- *Utilizaría el método de metros.*
- *Me alargaría lo suficiente y con la regla lo mediría.*
- *Con varios metros.*
- *Midiéndolo base por altura.*
- *Con mm y km.*

Para la pregunta siete que pide el cómo se puede medir el ancho de un río, algunos respondieron:

- *Con un tronco de árbol.*
- *Con una cuerda o un metro.*
- *Calculando aproximadamente.*
- *Sacando una foto aérea y sacar la escala para poder tener una idea de cuánto mide.*
- *Tendría una cuerda amarrada en un extremo del río, me iría en una lancha hacia el otro lado y agarraría la cuerda y luego me regresaría, ya estando ahí si la mediría con un metro.*
- *Pues con un metro, "bueno si llega".*
- *Pues, amarraría con la punta de una cuerda larga una piedra, luego la lanzaría hasta el otro lado, después marcaría hasta donde llega la cuerda el río, después traería de regreso la cuerda con la piedra y lo que mide la cuerda desde donde está la piedra hasta donde marque que termina y ya fin.*

En estos dos planteamientos, el tipo de respuestas que dan los alumnos es de un método directo de medición. Es decir, la gran mayoría de ellos esperan dar solución a la situación planteada utilizando una cinta métrica, poniendo poca atención a las condiciones del problema en cuanto a la altura del árbol o es un río muy peligroso. Llama la atención que algunos alumnos, confunden las unidades de medición (mm, km, m) con el uso de un instrumento de medición. Pero ¿cuál es la causa de no mencionar más métodos? o ¿cuál es la causa para confundir las unidades de medición por una manera de medir? , para contestar a esta pregunta, parafraseo lo que dice Eduardo Averbuj (1981:12), en su libro*, Para medir, aparatos y métodos*:

"En la ciencia y en la vida, la experiencia es la evidencia. Experimentar nos permitirá conocer la validez del vuelo libre y primero de la fantasía, … experimentar será en sí mismo también un reto a la imaginación. ... la experimentación es un ritual más enriquecedor que la simple observación. Ritual activo en los hechos y activo en la reflexión".

Es decir, cambiar el sentido de una clase que se basa en definiciones y teoremas que pareciera ser que no dan significado al alumno por una de actividad real y paulatinamente llevarlo a enriquecer su bagaje de experiencias con relación a contendidos matemáticos, podría resultar un tanto más beneficioso en su formación básica en matemáticas.

Estimaciones.

Como se menciono anteriormente, la buena estimación ayuda al alumno de educación básica al desarrollo del razonamiento correcto al momento de emitir un juicio. Las preguntas 5 y 6 del cuestionario intentan indagar con respecto a éste punto ya que debían de establecer en forma aproximada cuáles son las medidas del salón de clases y cuánto mide el perímetro del pizarrón respectivamente.

Los métodos utilizaron los alumnos para las preguntas fueron: por estimación y por comparación. Antes de explicar cada método, hay que mencionar que las aulas tienen el mismo tipo de losetas en el piso, que son de forma cuadrada que miden 30 centímetros de lado, esto resulta relevante ya que algunos alumnos toman estas como referencia. Las medidas reales de las aulas son, 3m de alto, 7.30m de ancho y 6.70m de largo; las medidas reales del pizarrón son 2.40m de largo y 1.20m de ancho.

Los alumnos que encontraron las medidas del salón de clases por un método estimativo, lo realizaron viendo a "ojo" las medidas y emiten un resultado, el cual fue expresado de diferentes maneras, algunas formas en las cuales los alumnos expresaron este tipo de estimación visual se clasificaron en la siguiente tabla para ambas preguntas.

Formas de expresión	Medidas del salón de clases	Perímetro del pizarrón
a) Proporcionan una cantidad.	• Son seis metros. • $3m^2$	• 7mts aprox • 9m • Son como 3 mts. en total.
b) Dan dos medidas, mencionando largo y ancho.	• Alto: 3m y Ancho: 8m • 5m de largo y 5m de ancho o 30 pies de ancho por 35 de largo.	• Altura 1 metro y base 3 metros.
c) Proporcionan tres medidas sin especificar a que pertenecen.	• 7m x 7.5m x 3.5m	
d) Facilitan las tres	• De altura 3 metros, ancho 7m x 5 m	

medidas especificando a que pertenecen.	de largo.	
e) Dan dos medidas	• 10m x 10m	• 1.50 x 2.10m
f) Calculan		• El perímetro del pizarrón mide como un metro de 1.5m ancho y 2m de largo seria 6m de perímetro el pizarrón blanco.

La segunda forma de realizar la estimación fue por medio de una comparación, en la cual se observo el "proceso" que realizaron los alumnos, mostrando dos comportamientos diferentes, que son:

a) Con ayuda de una regla y en algunos casos un lápiz, los alumnos tratan de establecer de manera visual cuantas veces la regla cabe en un lado del aula (simulando una relación de proporción), el problema era que no consideraban la distancia a la cual se encontraban.

b) Los alumnos que realizaron comparaciones, midieron el tamaño de una loseta del aula y lo multiplicaron por el número de losetas, proporcionando como resultado el área del piso, algunos utilizaron la medida de las losetas y la cantidad de estas que abarcan la base del pizarrón para poder encontrar el perímetro.

Si tenemos en cuenta que el aula tiene tres dimensiones, podemos decir que son pocos los alumnos que mencionan las tres dimensiones del aula, en general los alumnos ven su aula como el área que ellos ocupan (largo y ancho) y no como un espacio de tres dimensiones (largo, ancho y alto), por lo que intuitivamente esperaríamos que al formular otra pregunta parecida ellos mencionen el largo y el ancho.

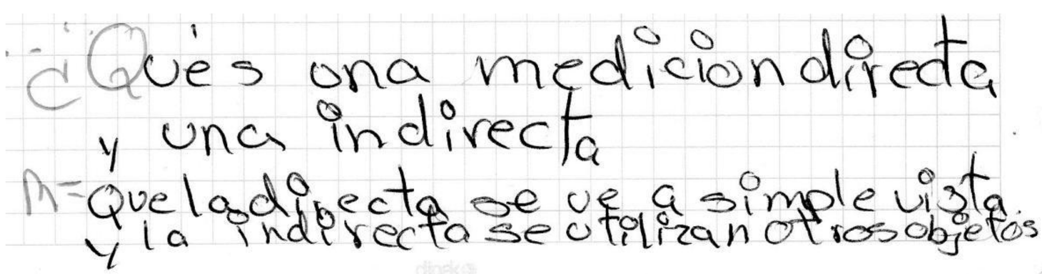
Para las respuestas a la pregunta seis, que hace referencia a una figura plana, como lo es el pizarrón, vemos que hay respuesta que no son congruentes a la pregunta, en lugar de perímetro, nos dan las dimensiones de la base y la altura, en donde además confunden una con la otra, cuando anotan a la altura como de tres metros. Algunos otros anotan las unidades de centímetros en lugar de metros. Los alumnos que expresan 1.10 x 2.0 como el perímetro, si ponemos atención al concepto anterior podemos darle dos significados uno de área y otro nos da las dimensiones del pizarrón.

Comparando los datos proporcionados por los alumnos con los reales, podemos ver que hay algunos que si realizan una estimación muy aproximada a la real.

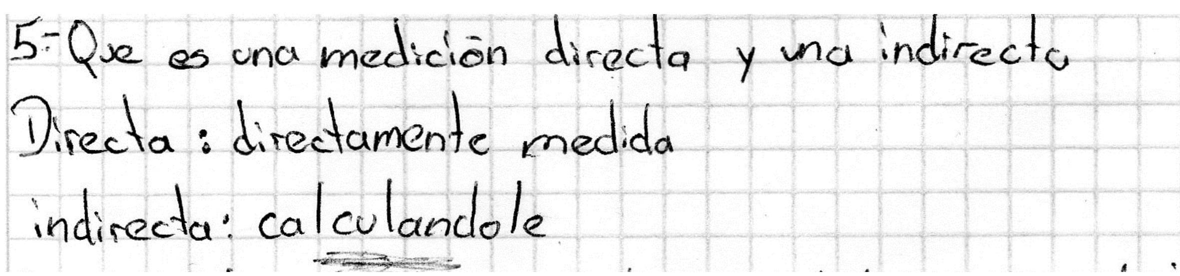
La medición directa y medición indirecta.

La última pregunta del cuestionario preliminar, fue: ¿qué es una medición directa y qué es una medición indirecta?. A continuación, se muestran algunas evidencias de lo escrito por los alumnos, como respuesta a esta pregunta:

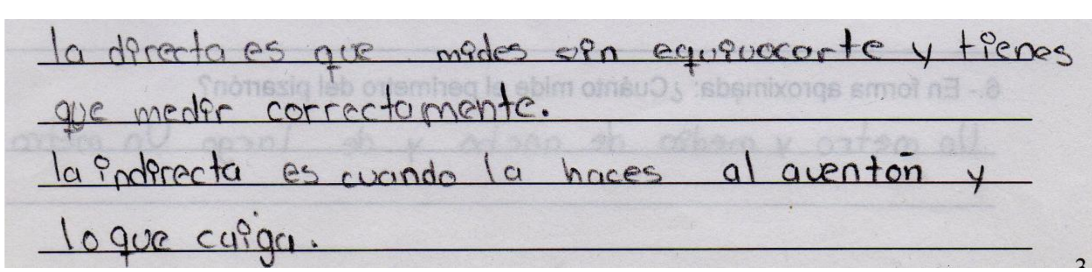
Alumno 1


¿Qués una medición directa y una indirecta
R= Que la directa se ve a simple vista y la indirecta se utilizan otros objetos

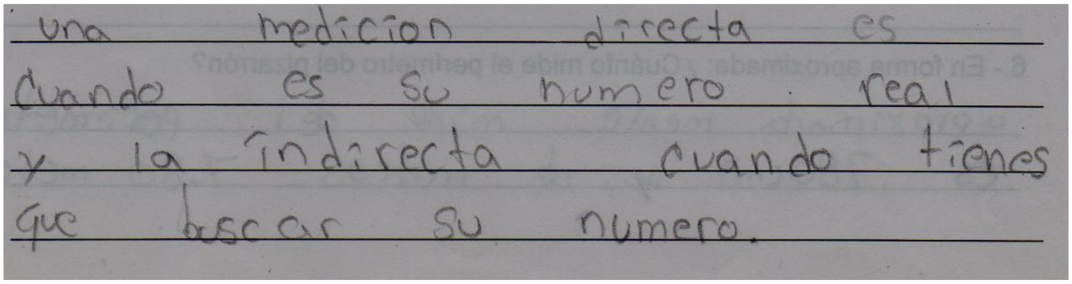
Alumno 2


5.- Que es una medición directa y una indirecta
Directa: directamente medida
indirecta: calculandole

Alumno 3


la directa es que mides sin equivocarte y tienes que medir correctamente.
la indirecta es cuando la haces al aventón y lo que caiga.

Alumno 4


una medicion directa es cuando es su numero real y la indirecta cuando tienes que buscar su numero.

Las respuestas que dieron los alumnos se organizaron en la tabla que se muestra a continuación.

Directa	Indirecta
• Es medir algo. • Mides algo con exactitud. • Es cuando se mide directamente. • Es cuando mides con algún instrumento de medición. • Es con una operación. • Es cuando mides de un lado hacia el punto exacto. • Que ya tiene los valores. • Es cuando ya sabes las medidas. • Cuando por ejemplo con una regla mides un árbol • Es cuando es su número real. • Cuando mides un objeto lo mides sin calcular su medida. • Es que mides sin equivocarte y tienes que medir correctamente.	• Es calcular algo. • Que no queda con exactitud. • Es cuando mides algo y todo lo calculas. • Es cuando algo se compara o se mide simultáneamente. • Cuando las medidas llevan algún proceso. • Que debes encontrar los valores faltantes. • Es cuando calculas el aproximado. • Es algo aproximado. • Es cuando haces muchas operaciones. • Cuando tienes que buscar su número. • Cuando calculamos una medida de un objeto. • Es cuando lo haces al aventón y lo que caiga.

Por las respuestas podemos apreciar que para cada tipo de medición, hay conceptos intuitivos que los alumnos muestran, los cuales aparecen en la siguiente tabla:

Características de la medición directa.	Características de la medición indirecta.
• Se necesita un instrumento para medir, por ejemplo, una regla. • Son representadas por un número real. • No se necesita de un cálculo. • Son de resultado inmediato.	• Hay necesidad de hacer cálculos (operaciones). • Es necesario un proceso.

Con lo anterior podemos afirmar que los alumnos no saben exactamente qué es una medición indirecta, pero muestran ideas que pueden considerarse intuiciones de la noción de medición indirecta. Si contrastamos la diversidad de respuestas que aparecen en la tabla anterior, vemos que reconocen que las mediciones indirectas implican cálculos y un proceso para encontrar la medida de un objeto (Gete Alonso y Del Barrio, 1996), mientras que las mediciones directas son exactas en cuanto que uno mismo efectúa la medición en el lugar.

Midiendo Mis Pasos

Los alumnos que participaron en las actividades de investigación, no han realizado trabajo matemático que sea fuera del aula, causa que, les costó trabajo organizarse en grupos pequeños y asignar a cada uno de los integrantes una función. Al lograrlo, la actividad la realizaron de manera participativa y entusiasta, se pudo observar que trabajaron con gusto.

Para ésta actividad, los alumnos realizaron algunas mediciones con cinta métrica (plástico o tela, la cual utilizan en corte y confección; ningún equipo utiliza una cinta métrica de metal, llamada flexómetro) en el patio de la escuela, en donde los datos encontrados fueron registrados en una tabla y como actividad de cálculo, deben de encontrar otros dos datos no considerados en la tabla, pero con los datos obtenidos en campo se pueden obtener.

El análisis de estos resultados se agruparon en tres partes; la primera para el análisis de las unidades (m, cm) y él cómo los alumnos leen e interpretan una tabla; la segunda parte consiste en el análisis y clasificación de las diversas maneras en que se obtuvieron los datos y se finaliza con la descripción de los diagramas o gráficos realizados por los alumnos.

Unidades

En cuanto a la revisión de unidades, los resultados pueden clasificarse en tres grupos:

a) El primer grupo reconoce y anota, que al medir los pasos tienen cierto número de metros y centímetros, con esta manera de escribir los datos en la tabla, los alumnos enfatizan cuales son los metros y cuales los centímetros.

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	2.30 m 230 cm
15	3.59 m 359cm
100	70m 700cm

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	2 metros 26 centimetros
15	9metros 62 centimetros
100	61 metros

b) Un siguiente grupo, pareciera que fue sumando los centímetros que miden con la cinta métrica, de tal manera que los centímetros los expresa en metros y anota en la tabla respectivamente, sin percatarse que el resultado que proporcionan no son metros sino centímetros.

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	122
15	993
100	2600 m

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	165 m
15	496 m
100	2500 m

c) En el tercer grupo, los datos son presentados como cantidades (1.38, 6.40, 28.98) respectivamente para cada valor que se pide en la tabla, con lo cual se asume que los alumnos entienden que son metros, ya que en el encabezado de la columna de datos para esta tabla se mencionan a la “m” como los metros.

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	1.38
15	6.40
100	28.98

Valores obtenidos, tanto en la medición como en los calculados.

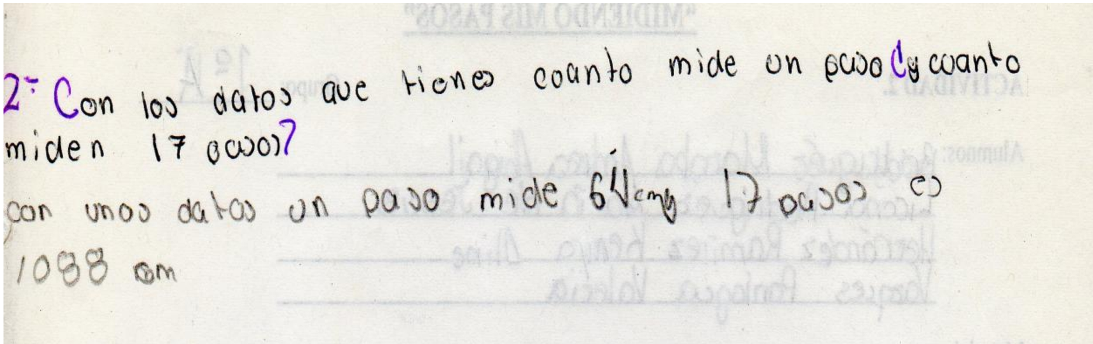
Los análisis fueron clasificados en cinco grupos.

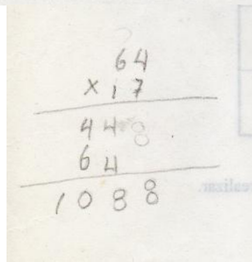
A) Midieron todos los pasos requeridos en la tabla, es decir, si se piden quince pasos, los contaron de manera física y luego con la cinta métrica los miden, lo mismo sucedió en el aula con la misma actividad. A los alumnos se les pidió que con los datos ya obtenidos calcularan cuánto mide uno y diecisiete pasos, ellos caminaron un paso y luego midieron, lo mismo sucedió con los diecisiete, contaron y midieron.

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	1.55 m
15	7.83 m
100	31.96 m

Nosotros hicimos 100 pasos

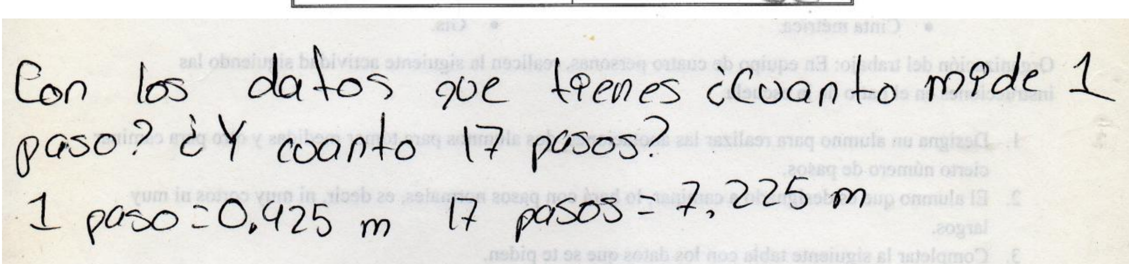
B) En el trabajo de campo midieron todos los pasos requeridos en la tabla de manera física. Cuando se pide calcular cuánto mide un paso con los datos obtenidos, vuelven a medir un paso y para los diecisiete multiplican lo de un paso por 17.


2:- Con los datos que tienes cuanto mide un paso ¿y cuanto miden 17 pasos?
con unos datos un paso mide 64cm 17 pasos es
1088 cm


$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 17 \\ \hline 448 \\ 64 \\ \hline 1088 \end{array}$$

C) Los valores en la tabla fueron cada uno medidos con la cinta métrica, pero al momento de pedir los cálculos para 1 y 17 pasos, estos fueron realmente calculados por medio de una división y una multiplicación (los alumnos dan evidencia de los cálculos).

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	1m 7cm
15	4m 3cm
100	48m 86cm


Con los datos que tienes ¿Cuanto mide 1 paso? ¿Y cuanto 17 pasos?
1 paso = 0.425 m 17 pasos = 7,225 m

D) Dejan inconclusa la actividad: realizan la medición física de los valores de la tabla, miden sus valores y al calcular un paso, dividen la longitud encontrada para cuatro pasos entre cuatro y encuentran un paso, el cálculo es correcto, pero para los17 pasos ya no hay resultado.

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	1.57
15	6
100	35.113

2 Con los datos q^e tienen
¿Cuanto mide un paso?
¿Y cuanto 17 pasos?
R= 0.3925

E) Muestran un proceso más multiplicativo. Por ejemplo, en el momento de completar la tabla requerida, los alumnos miden una cierta cantidad de pasos y luego por medio de multiplicaciones obtienen el resultado de la tabla, es decir no cuentan la cantidad de pasos solicitados para después medirlos.

Para los alumnos que realizan algún proceso multiplicativo, los datos analizados se clasificaron en tres grupos:

E.1) Los alumnos cuentan diez pasos y los miden con la cinta métrica, su resultado lo multiplican por diez para obtener los cien pasos.

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	2.46m
15	8. 98
100	59.10 60

Ñosotros medimos 10 Pasos y*10 multiplicamos po 10

- Realiza un croquis, dibujo o esquema que represente la actividad que acaban de realizar.

E.2) La medición de cuatro pasos la dividen para obtener la medida de un paso y el resultado es multiplicado por quince y 100 pasos.

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	2m
15	7.50
100	50 m

E.3) Cuenta cincuenta pasos, los mide y multiplica por dos para obtener la medida de los cien pasos.

No. de pasos caminados	Distancia recorrida (m)
4	2.57
15	10.5
100	73.0

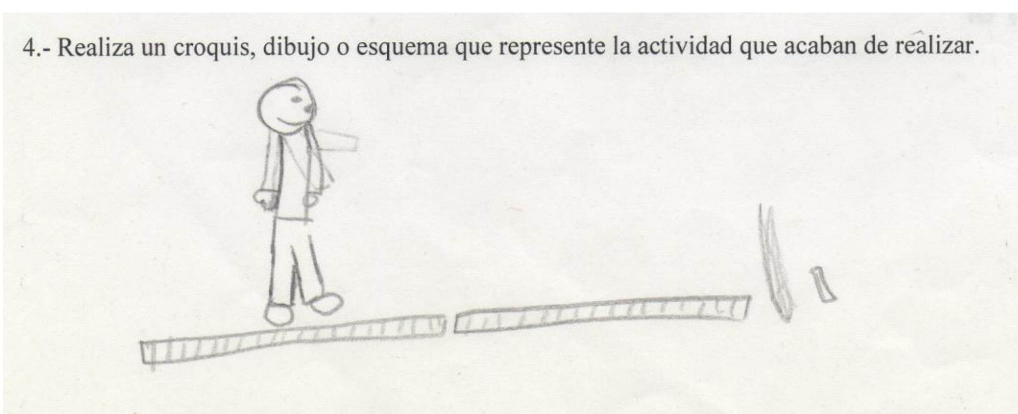
36.5
x2
73.0

nosotros medimos 50 pasos y los otros 50 los calculamos

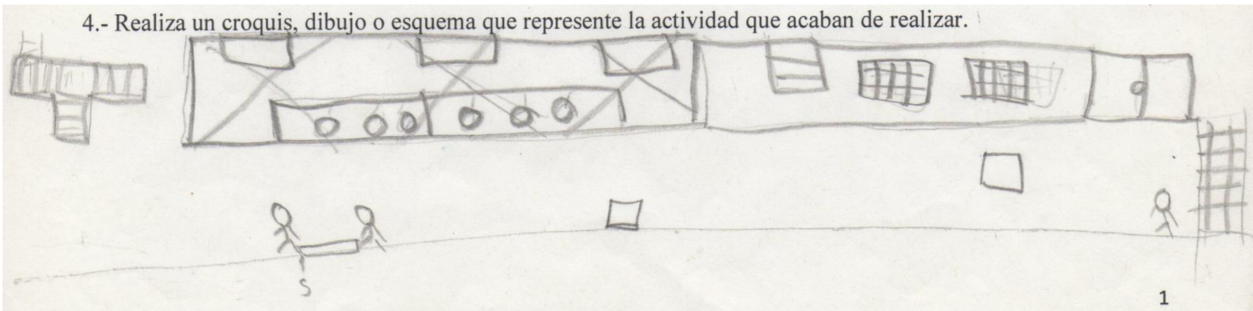
4.- Realiza un croquis, dibujo o esquema que represente la actividad que acaban de realizar.

Dibujo, croquis o esquema de la actividad

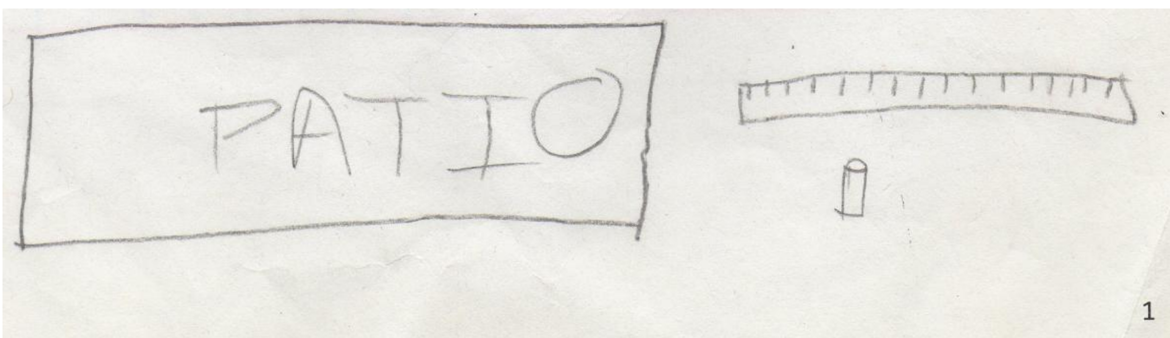
La mayoría de los alumnos muestran de alguna manera, la representación de una escala numérica (cinta métrica). Otros muestra que un sujeto está caminando sobre una escala numérica, aunque el diagrama muestra poca precisión sobre la manera en que son medidos los pasos, como se muestra en el siguiente ejemplo.



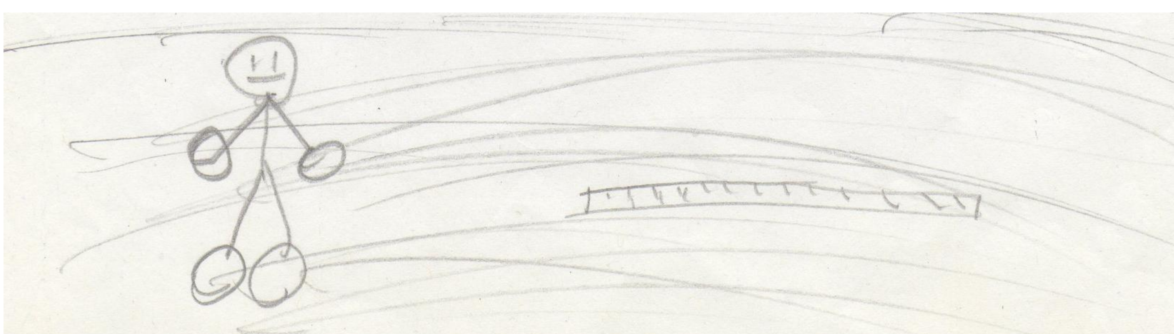
Otros hacen una descripción (dibujo) de como se encuentra distribuidos los diferentes objetos en la escuela, ubicando el área donde se realizaron las mediciones, aun así, su dibujo tiene poco detalle.



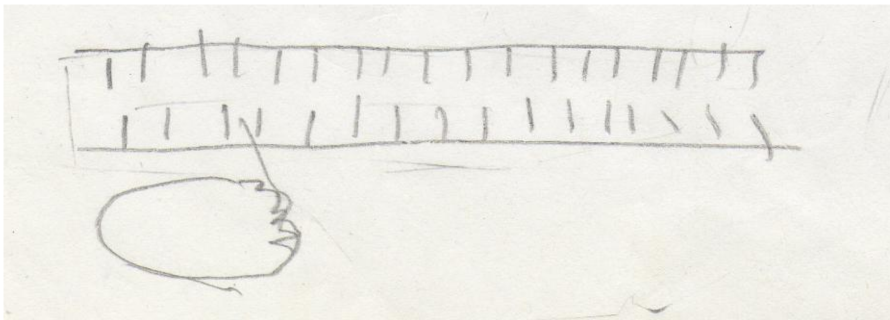
Dibujan una serie de objetos que intervinieron en la actividad de manera aislada, es decir, identifican una cinta métrica por un lado, el patio de la escuela por otro, el gis con el cual marcaron en el piso por otro, etc.



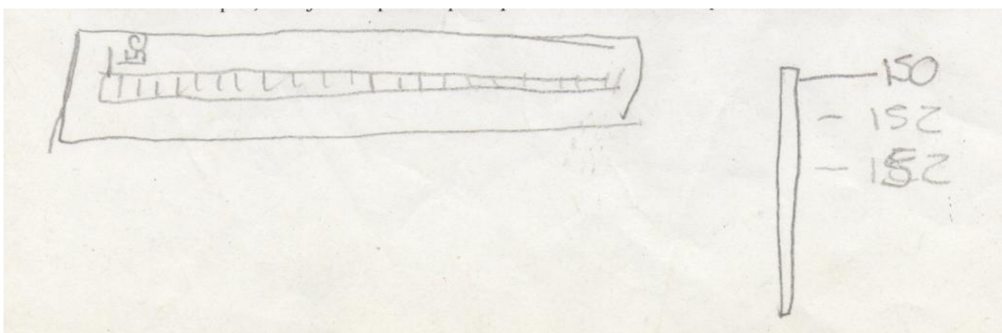
Dibujan al sujeto que camina por el patio y a la cinta métrica por separado como entidades ajenas entre sí.



Dibuja un pie en relación con una escala numérica, pero sin precisar más sobre la acción realizada en el patio, cabe señalar que la mayor parte de escalas numéricas dibujadas por los alumnos carecen de números, es decir muestran una regla con divisiones nada más.



Tratan de explicar cómo era esa escala numérica poniendo algunos números en ella, un solo equipo anota las unidades en la escala.



Es importante que los niños **conecten** las ideas entre sí y entre las diversas áreas de la matemática. Se debe de disponer de una gran cantidad de modelos concretos y pictóricos de conceptos y procedimientos, y los niños han de crear relaciones entre ellos y determinar las posibles representaciones simbólicas de cada uno de ellos.

Considerando que el **razonamiento** matemático no puede desarrollarse de manera aislada. … la capacidad de razonar constituye un proceso que surge a partir de experiencias repetidas, por medio de las cuales las matemáticas van adquiriendo significado para los niños.

La **geometría** es un componente importante del currículo, porque el conocimiento, la intuición y las relaciones geométricas resultan útiles en las relaciones cotidianas y tienen conexiones con otros temas matemáticos y otras materias escolares.

De acuerdo con la NCTM (2000). El sentido espacial es una precepción intuitiva del entorno propio y de los objetos que hay en él, en donde ellos pueden dibujar un diagrama, para expresar una idea o punto de vista, haciendo que el niño se centre en las características esenciales de una situación. Por otro lado, una estrategia primaria de resolución de problemas es hacer un dibujo o un diagrama, lo cual es en muchos casos, una representación geométrica del problema. Tomando en cuenta lo anterior, vemos que esta habilidad en los alumnos ha sido poco desarrollada.

En general, los alumnos muestran variedad en sus representaciones, en la manera de abordar la tarea, pero, la forma que analizan el problema es superficial, definir que es un paso o cómo toman en cuenta qué es un paso, podría ser de importancia en un análisis más complejo. Para el propósito del trabajo, lo realizado por los alumnos es más que significativo, ya que la inmediatez de la intuición es lo que realizan los alumnos.

Los niños deben de entender tanto el atributo que va a medirse como el significado mismo de la medida. Antes de poder entender las dos cosas, tienen que experimentar con diversas actividades que se centren en la comparación directa de objetos, la asignación de unidades y el recuento de unidades. Si se usan prematuramente instrumentos o fórmulas, los niños no llegan a adquirir las estructuras conceptuales que hacen falta para resolver problemas de medición, NCTM (2000).

Calculando alturas con un espejo. "Método del espejo"

La actividad se realizó en el patio de la escuela. La altura de la escuela fue la primera que se calculo con el espejo, el edificio escolar está conformado con planta baja y dos pisos, su altura oscila entre 8.825m y 9.1m. Antes de que los estudiantes realizaran la actividad, la investigadora calculo la altura. En una segunda sesión los alumnos escogieron otros tres objetos diferentes, con los cuales calcularon su altura.

Algo evidente que se presentó en ésta actividad fue el hecho que a los alumnos les tomó menos tiempo organizarse, mostrando diferentes habilidades matemáticas al realizar las mediciones y esquematizar la actividad. Por lo que el análisis para ésta actividad se divide en tres partes; en la primera se realiza una descripción en la manera que los alumnos trabajaron las mediciones en el patio; para la segunda parte se hace un análisis de los datos obtenidos y el cálculo de las alturas y por último se analizan los tipos de esquemas que realizaron.

Las mediciones en el patio.

De las primeras mediciones que realizaron los alumnos fue medir la distancia de sus pies a la altura de sus ojos, su primer procedimiento que utilizaron fue el acostarse en el piso, lo cual llama la atención del profesor generando la siguiente conversación:

(P): *Profesor*
(A): *Alumno*
P: *¿Qué hacen?*
A: *midiendo su estatura.*
P: *¿y por qué acostado?*
A: *Para mayor exactitud.*

Los alumnos hacen evidente su noción intuitiva de lo que significa para ellos exactitud, sobre todo muestran que en una medición la exactitud es importante.

Un segundo método fue pisar la cinta con el pie en el origen y desenrollarla hasta aproximarla a la altura de los ojos, con lo cual dan evidencia de una aproximación intuitiva, en la cual no preocupa mucho la exactitud.

Una tercera forma que mostraron los alumnos fue; pararse sobre una pared y con un lápiz hacer una marca a la altura de sus ojos y midieron de la base de los pies a la marca. Con estas tres maneras diferentes para realizar una medición, podemos decir que los alumnos presentan una variedad de métodos con los cuales pueden enfrentar una tarea matemática.

Al realizar las mediciones del objeto al espejo y del observador al espejo, los alumnos se acercaron al profesor y preguntaron:

A: *¿hasta donde tenemos que poner la cinta sobre el espejo para contar la distancia?.*

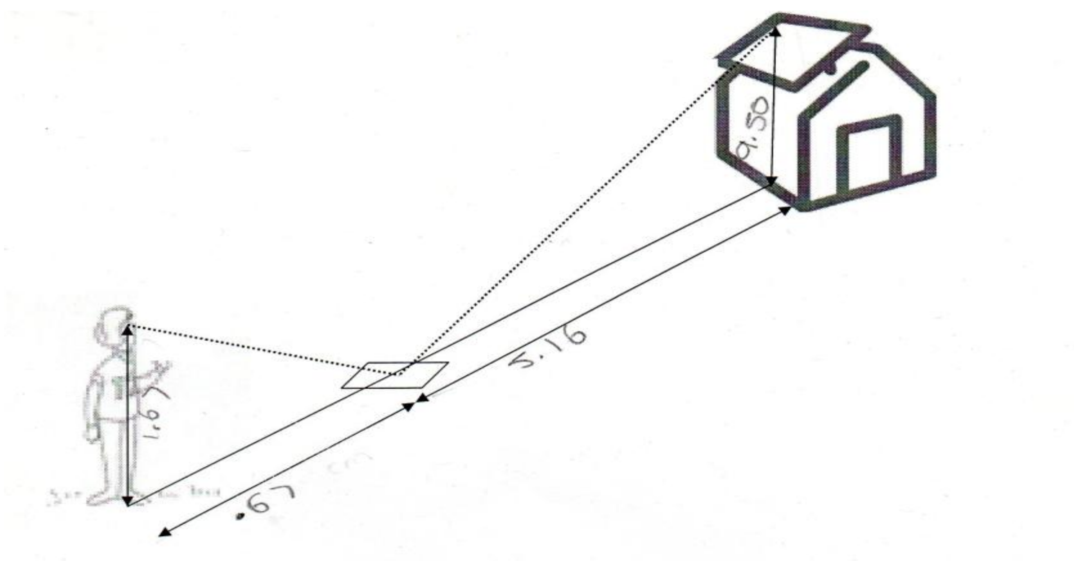
P*: Midan a partir del punto donde observen el objeto en el espejo.*

El espejo utilizado por los alumnos fue de 11 x 5.5 cm, si se analiza el grafico para esta actividad (Anexo 3), se esperaba que los alumnos se dieran cuenta que se puede tomar como referencia el centro del espejo, el cual de manera ideal debería de estar marcado para ser tomado como una referencia (la actividad no indica que debe ser el centro). Es decir, al fijar un punto en el espejo en donde se ve reflejada una imagen que es vista por el ojo humano, se da sentido real a la geometría óptica que existe (triángulos semejantes, reflexión de una visual) en este tipo de mediciones y que involucra a la proporcionalidad matemática, no es cosa sencilla de ver para el alumno.

Datos obtenidos y cálculo de la altura.

Las dos primeras actividades de la actividad, que era la introductoria al uso del espejo y tomar las medidas que pide la tabla interpretando el gráfico, podemos decir que algunos alumnos no colocaron los datos en el gráfico y no contestaron cual era la altura del edificio escolar; algunos otros estimaron la medida del edificio, ya que sus hojas no presentan ningún tipo de cálculo y además con los datos obtenidos de algunas mediciones, si calculamos la altura del edificio con los datos que tomaron, podemos darnos cuenta que la altura aproximada no se acerca a la que se puede calcular, por lo cual se deduce que no hubo una buena toma de datos y /o una aplicación del método de cálculo adecuado.

Al revisar las tablas se puede notar el cuidado que tuvieron algunos alumnos al indicar las medidas tomadas en el dibujo y en la tabla (ver el ejemplo siguiente).



Observa el siguiente dibujo y con ayuda de la siguiente tabla anota la relación entre la tabla y el dibujo.

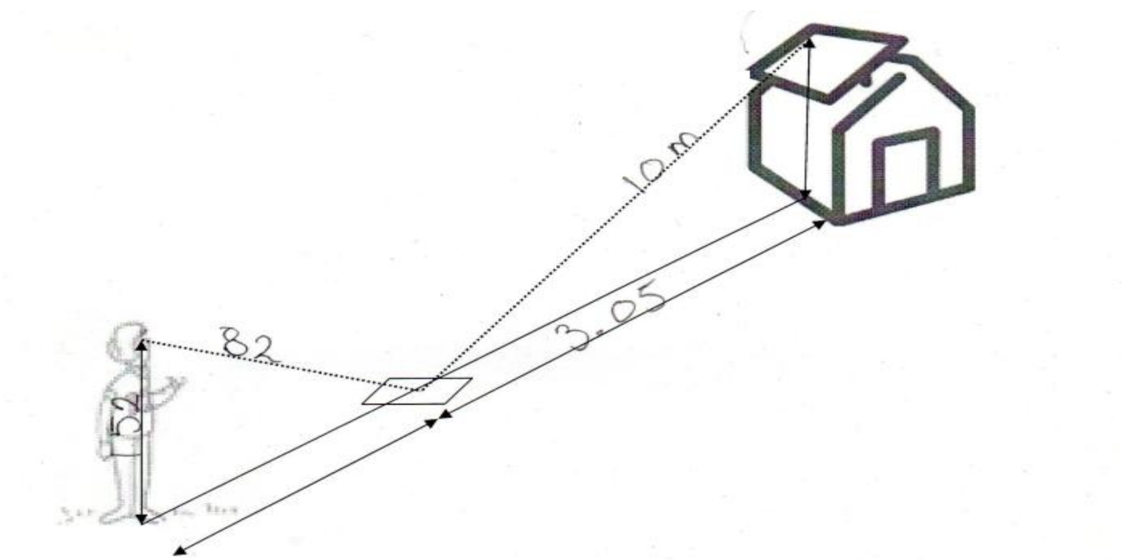
Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Frida	1.67	5.16	.67 cm	9.50

En este ejemplo, al revisar la altura calculada con los datos obtenidos en campo y al no encontrar evidencia de algoritmos, se pregunta a los alumnos, el cómo obtuvieron la altura de la escuela, ellos contestaron que aproximaron las veces que más o menos el alumno cabe en la altura del edificio escolar. Es decir, estimaron la altura.

Si calculamos la altura con los datos obtenidos en la medición, el resultado debería de ser de 12.86 m, resultado muy aproximado a los 9.50 m escritos en la tabla.

Otra observación es que hace una buena escritura de los números decimales.

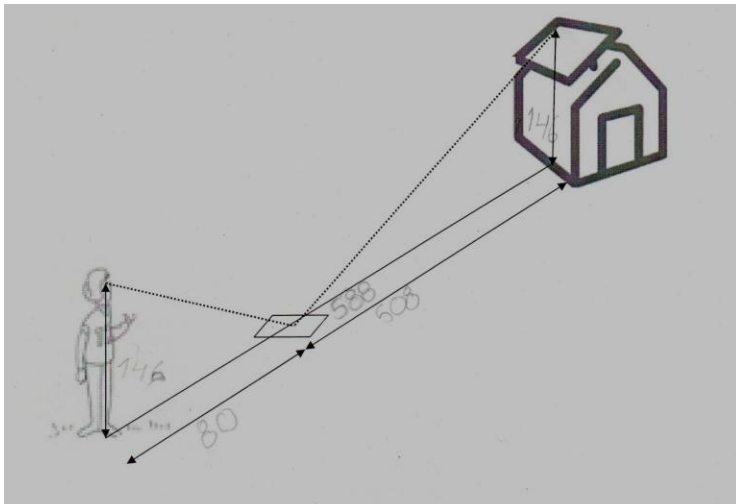
Otros alumnos anotan de forma correcta las medidas en la tabla, pero en el dibujo son anotadas de manera incorrecta.



Observa el siguiente dibujo y con ayuda de la siguiente tabla anota la relación entre la tabla y el dibujo.

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Arely	1.52 cm	3.05cm	82 cm	10 m

Algunos alumnos utilizan medidas en centímetros y las anota en la tabla y dibujo, que si se leyera utilizando las unidades que indica el encabezado de la tabla se mal interpretan las mediciones.



Observa el siguiente dibujo y con ayuda de la siguiente tabla anota la relación entre la tabla y el dibujo.

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Saray	146	508	80	1,022

Para la parte final del trabajo, los alumnos participaron en la toma de datos para encontrar de manera indirecta la altura de tres objetos diferentes, algunos escogieron la altura de la escuela, el de una lámpara, un árbol o la portería de la cancha de fútbol.

Analizando el siguiente grupo de objetos tenemos.

a

Aro de Basquet b

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Zori	1.53 m	3.83 m	1.12 m	5.23

b

Arbol

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Kimberly	1.59 m	3.27 m	7.19	7.23

c

Escuela

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Jessica	1.56m	3.46cm	10.16m	14.78

Las primeras operaciones son para encontrar la altura de la cancha de basquetbol y son:

$$\frac{distancia\ entre\ el\ observador\ y\ el\ espejo}{distancia\ entre\ el\ objeto\ y\ el\ espejo} = \frac{altura\ del\ piso\ a\ los\ ojos\ del\ observador}{altura\ de\ la\ cancha\ de\ basquetbol}$$

$$\frac{1.12}{3.83} = \frac{1.53}{x}$$

$$0.292 = \frac{1.53}{x}$$

$$0.292x = 153$$

$$x = \frac{1.53}{0.292} = 5.23$$

b

$$\frac{7.19}{3.27} = \frac{1.59}{X}$$

$$2.198 = \frac{1.59}{X}$$

$$2.198X = 1.59$$

$$X = \frac{1.59}{2.198} = 7.23$$

c

$$\frac{10.16}{3.46} = \frac{1.56m}{x}$$

$$2.93 = \frac{1.56}{x}$$

$$x = \frac{2.93}{1.56}$$

Si la altura de una cancha de basquetbol es de 3m hasta la canasta y de 4m contando el tablero, podemos observar que el margen de error en la medición al realizar el cálculo es de 1m.

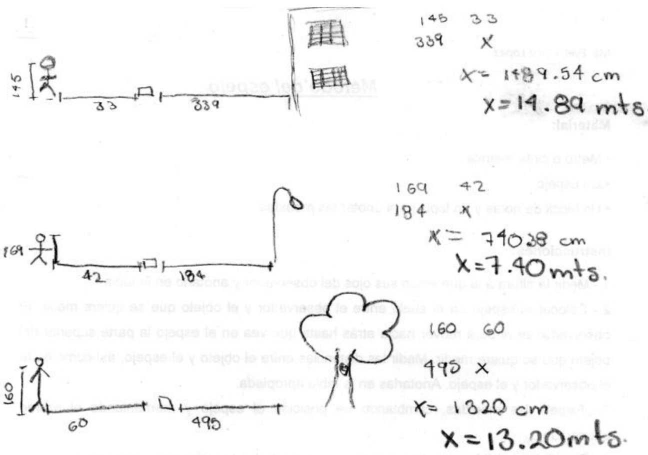
Después de operar con los datos de la tabla, los resultados no son los correctos, para el ejemplo del árbol y la escuela, tales resultados deberían de ser 0.72m y 0.53m respectivamente. Por lo que se puede decir, que los alumnos son conscientes en cierta parte del trabajo, ya que reportan 7.23m para la altura del árbol y 14.78m para la escuela, es decir, tratan de que sus resultados sean "reales". Por otro lado, no asumen que hay un error en sus resultados o realmente no saben cómo resolver una división.

Para el siguiente ejemplo,

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Martha	145	339	33	

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Viri	167	184	42	

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Monica	160	495	60	

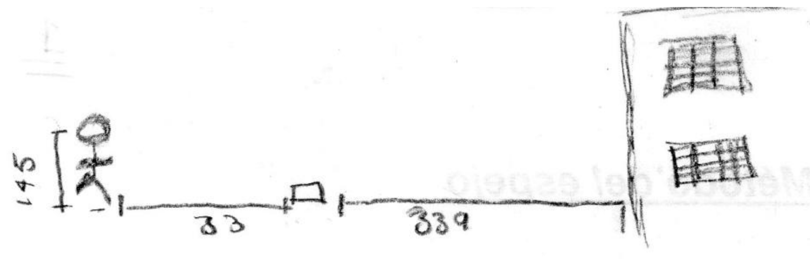


Los datos de las tres tablas anteriores están en centímetros (aún cuando se pide en metros), cada una de las tablas tienen su propia representación gráfica con los valores anotados en cada una de ellas y la forma de encontrar las alturas para cada objeto fue por medio de una "regla de tres".

Si se analiza con detenimiento la primer tabla de datos tenemos:

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)
Martha	145	339	33	

El gráfico que las describe es:



La primera relación que se establece es la altura del sujeto a la distancia del sujeto-espejo y está representada por:

145 33

en ese mismo sentido debe de ser para la altura del objeto a la distancia del objeto-espejo, pero con un poco de atención, se observa que son establecidas de manera contraria; es decir, la distancia se anota la relación de la distancia del objeto-espejo a la altura del objeto quedando como:

339 X

Lo que da como resultado la siguente expresión:

145 33
339 X

Del análisis anterior podemos afirmar que algunos alumnos no dan importancia en la manera en que son establecidas las comparaciones, las razones y en consecuencia la proporción, estamos hablando de un conocimiento un tanto intuitivo, ya que no se asocia de manera correcta los datos con un concepto de semejanza necesaria en un problema de medición indirecta.

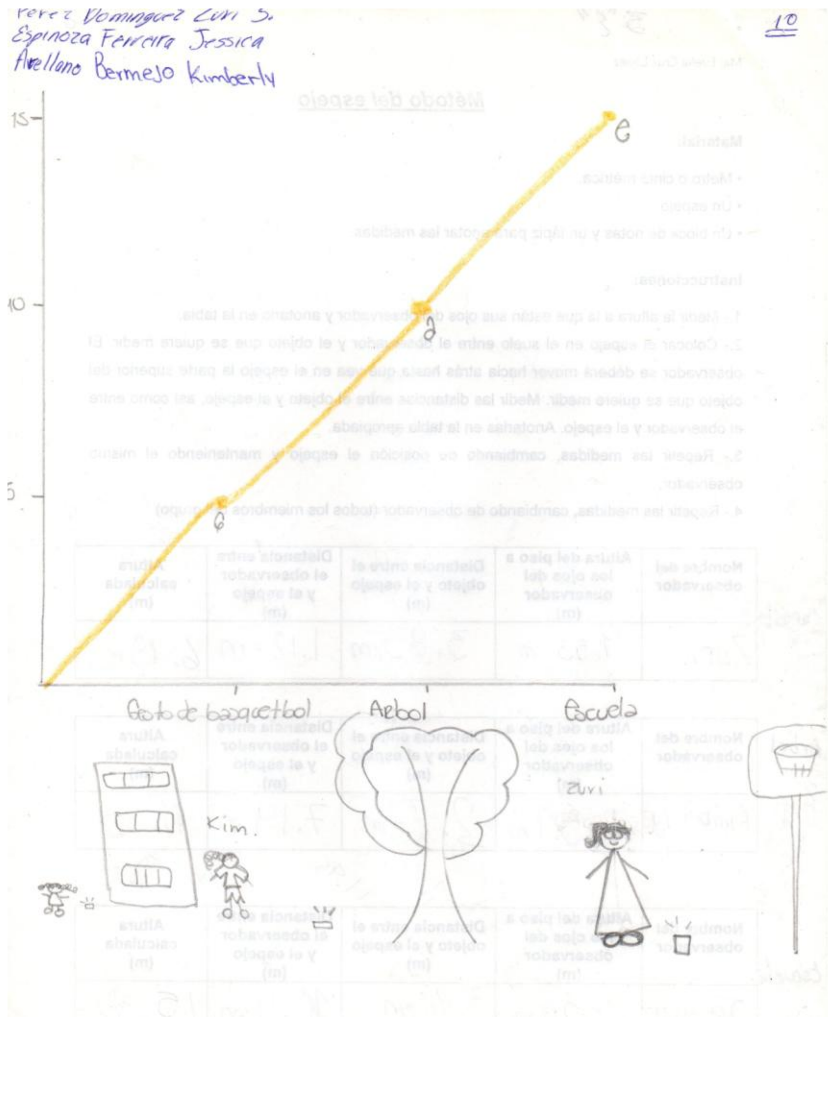
Por otro lado, de acuerdo al ejemplo anterior, podemos decir, que los alumnos muestran una gran variedad de conexiones, que abarcan lo geométrico, lo algebraico y aritmético del pensamiento matemático

Representaciones

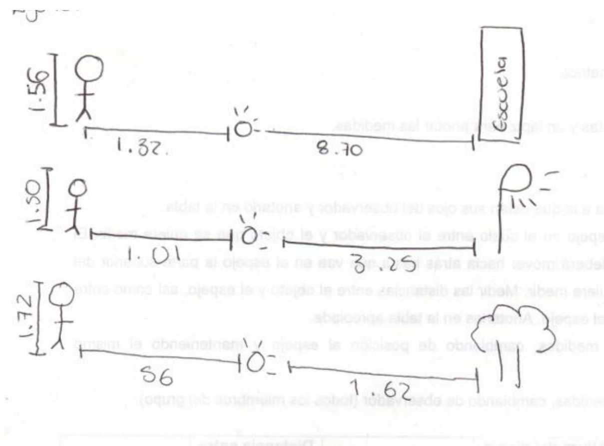
Para finalizar el análisis de ésta actividad, del total de alumnos, algunos realizaron cierto tipo de esquema, dibujo o planteamiento geométrico, otros no presentan algún tipo de representación.

Los diferentes tipos de esquemas que presentan los alumnos, se clasificaron en cuatro grupos:

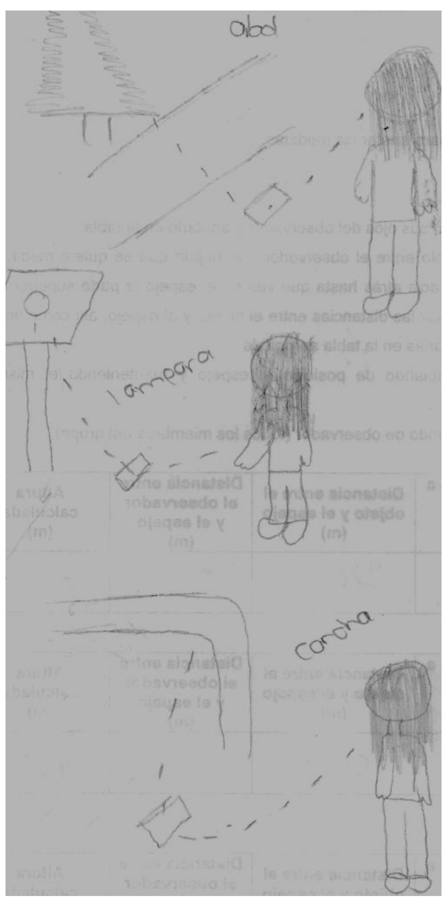
a) Plano cartesiano, en el cual se gráfica en el eje "x" los objetos, en el eje "y" la altura de cada objeto.



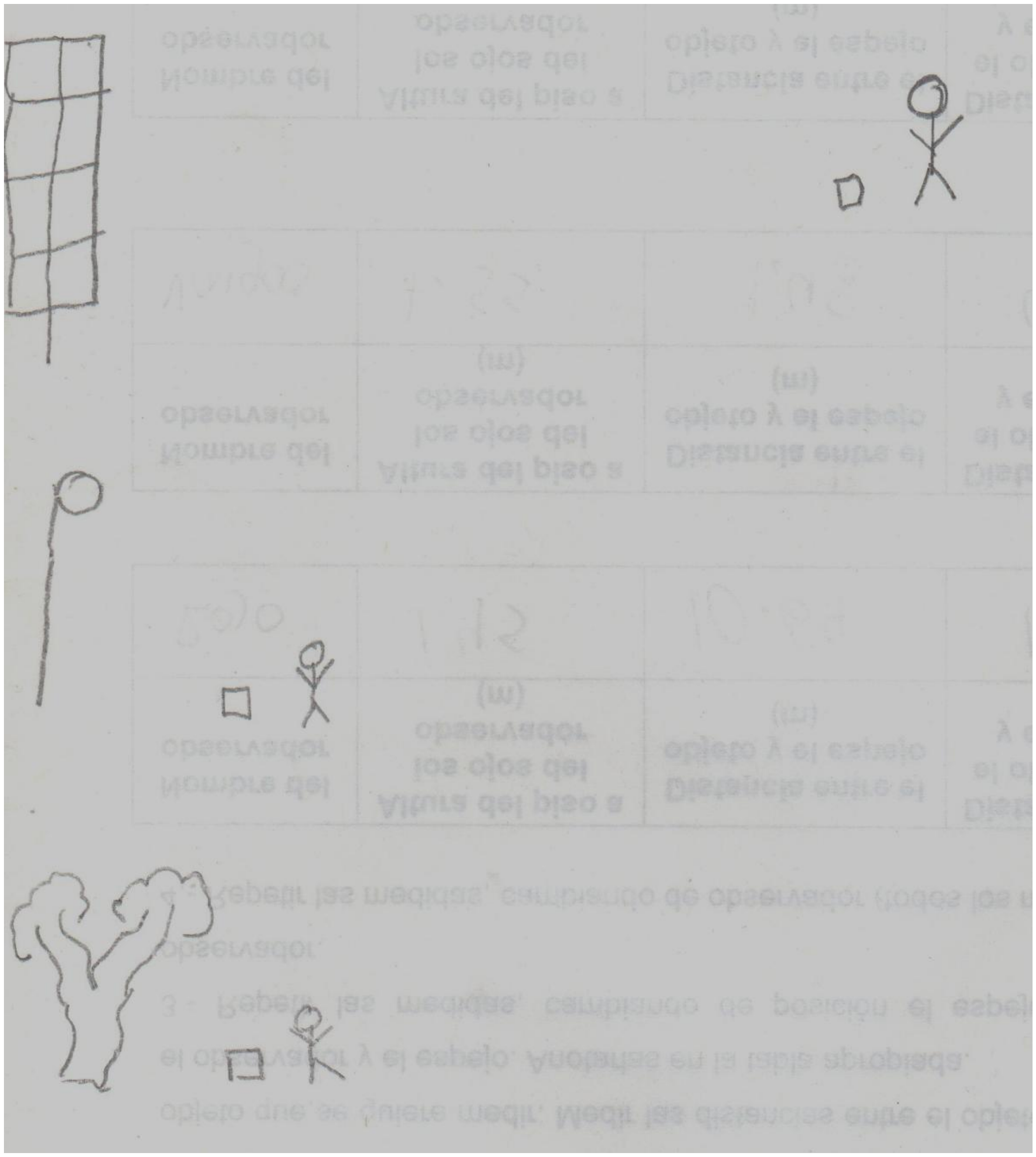
b) Se presentan datos ordenados congruentes con la tabla y se nota una estructura geométrica, pero sin llegar a plantear dos triángulos congruentes.



c) Se ejemplifica un dibujo tridimensional, en el cual los datos medidos no son colocados, si se ven representadas las líneas imaginarias que salen de los ojos al espejo y del espejo al objeto, pero no aparecen los datos medidos registrados en el esquema.



d) La última forma de representar la actividad fue enunciando por medio de dibujos los objetos que se midieron, mostrando la posición entre el sujeto, el espejo y el objeto.



Uso de un Clinómetro para Calcular Alturas.

Las mediciones realizadas en el patio de la escuela se llevaron a cabo en equipos, pero cada uno de los alumnos construyo su propio clinómetro consiguiendo los materiales necesarios, lo único que se les proporciono fue una copia de la escala para el instrumento de medición y las instrucciones con las cuales se realizo la actividad.

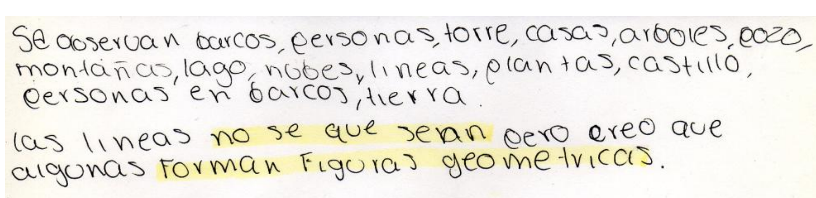
Hay que tener en cuenta que las actividades de campo que se han llevado a cabo fuera del aula, han propiciado una buena participación, el único inconveniente es que si la actividad es de más de tres sesiones (es muy larga), los alumnos van perdiendo interés. Es decir, ellos no consideran que un problema puede durar varios días, ellos esperan una tarea matemática con solución inmediata.

El análisis de ésta actividad se divide en dos partes. En primer lugar, se realiza una breve descripción de la manera en que los alumnos argumentan un dibujo que constituye la actividad uno y las observaciones obtenidas en el momento de la construcción del instrumento de medición. En segundo lugar se analizan las actividades realizadas en campo y en la medida de lo posible los cálculos realizados en ésta actividad.

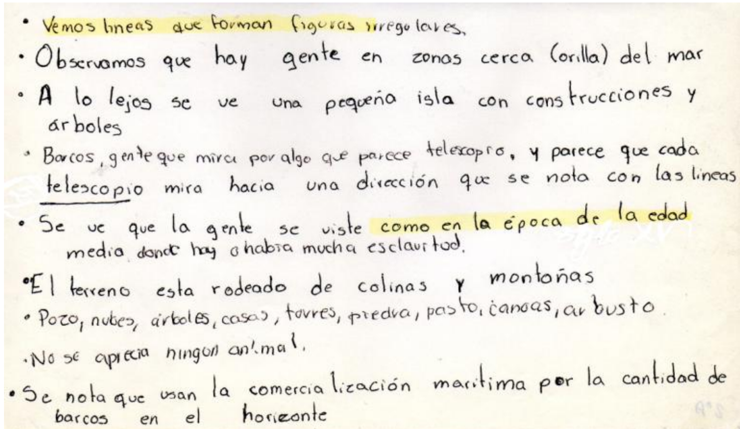
Elementos matemáticos presentes en la forma de describir un dibujo

La primera actividad consistió en hacer una descripción de un dibujo, en el cual, las personas están realizando mediciones. En donde uno de los propósitos centrales es que los alumnos den cuenta de algunos elementos que intervienen en el momento de realizar una medición. La diversidad de descripciones proporcionadas por los alumnos, presentan ciertas cualidades o características generales que se plasman de la siguiente manera:

a) Los alumnos realizan una descripción del dibujo a modo de lista de los objetos que componen el dibujo, la que está enunciada de manera horizontal o vertical, en algunos casos se dan a la tarea de realizar un conteo de cuantos objetos comunes hay.

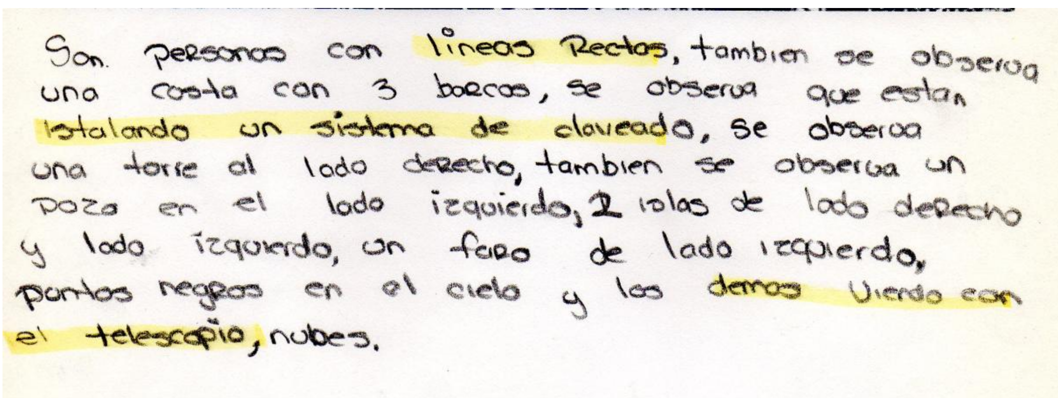

Se observan barcos, personas, torre, casas, arboles, pozo, montañas, lago, nubes, lineas, plantas, castillo, personas en barcos, tierra.
las lineas no se que sean pero creo que algunas forman figuras geometricas.

b) Algunos otros lo hacen a modo de oraciones.



- Vemos lineas que forman figuras irregulares.
- Observamos que hay gente en zonas cerca (orilla) del mar
- A lo lejos se ve una pequeña isla con construcciones y árboles
- Barcos, gente que mira por algo que parece telescopio, y parece que cada telescopio mira hacia una dirección que se nota con las lineas
- Se ve que la gente se viste como en la época de la edad media donde hay o habia mucha esclavitud.
- El terreno esta rodeado de colinas y montañas
- Pozo, nubes, árboles, casas, torres, piedra, pasto, canoas, arbusto.
- No se aprecia ningun animal.
- Se nota que usan la comercialización maritima por la cantidad de barcos en el horizonte

c) Otros realizan un conteo de los objetos.



Son personas con lineas Rectas, tambien se observa una costa con 3 barcos, se observa que estan istalando un sistema de claveado, se observa una torre al lado derecho, tambien se observa un pozo en el lado izquierdo, 2 islas de lado derecho y lado izquierdo, un faro de lado izquierdo, puntos negros en el cielo y los demas viendo con el telescopio, nubes.

Los alumnos tratan de situar en la época (tiempo), donde se desarrollan algunas las actividades realizadas por las personas que están en el dibujo. Entre los elementos matemáticos que son mencionados en la redacción, los cuales son de carácter geométrico se mencionan, los triángulos, las líneas (paralelas y perpendiculares), el punto, ángulos. Además se hace alusión a el uso de algunos artefactos, telescopios, catalejos o instrumentos con los cuales se están observando las estrellas o al enemigo.

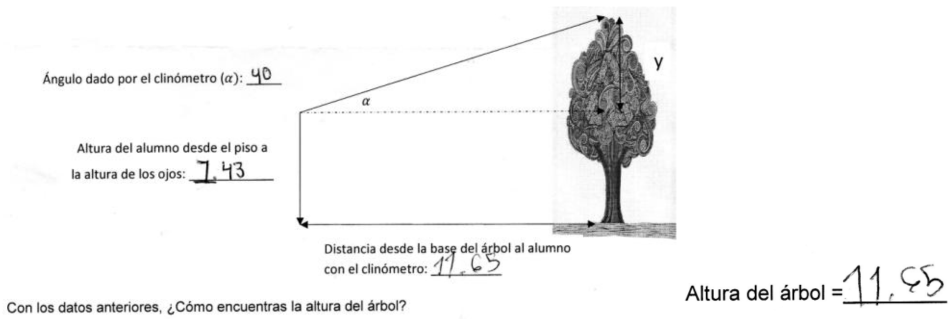
Después de utilizar el clinómetro.

Uno de los principales problemas que tuvo esta actividad, fue la finura, por así decirlo, con la cual los alumnos realizaron las mediciones, ya que para lograr un ángulo realmente significativo, los alumnos tenían que desplazarse de manera horizontal una distancia realmente considerable. Además, como el instrumento no es fijo como un tránsito, los alumnos tienen que desplazarlo y la medición es muy inexacta. Un ejemplo del clinómetro construido por los alumnos es el siguiente:

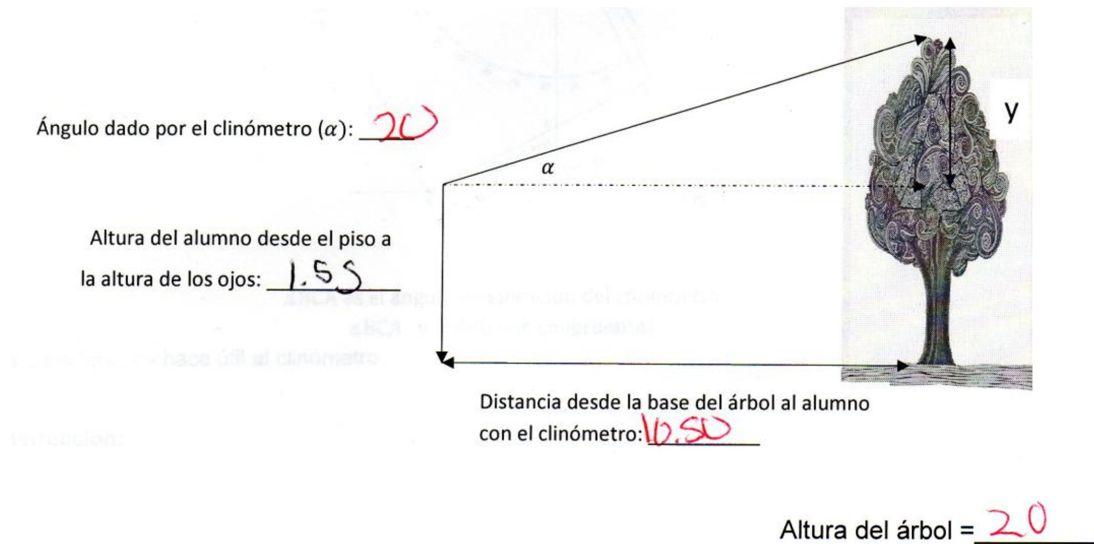
Lo bondadoso del instrumento es que demanda del alumno una buena dosis de paciencia y a través de realizar muchos intentos logra tener una buena aproximación.

La actividad careció de una hoja de instrucciones más claras, por ejemplo, al alumno se le pide encontrar la altura del árbol, se esperaba que los alumnos con los datos medidos realizaran algunos cálculos para encontrar el dato faltante, por lo que al revisar las evidencias, no hay rastro de algún cálculo. Cabe mencionar que los alumnos no han visto el contenido de trigonometría. A continuación se muestran algunos trabajos realizados por los alumnos.

En éste primer ejemplo, la distancia que hay desde la base del árbol al alumno que sostiene el clinómetro es la misma que dan para la altura del árbol, el ejercicio carece de algún tipo de algoritmo.



En un segundo ejemplo, el ángulo dado por el clinómetro es lo que mide la altura del árbol, al igual que el ejemplo anterior , se carece de alguna operación.



En general, fue la actividad que tuvo sus aciertos y desaciertos. Dentro de sus puntos favorables, a la mayoría de los alumno les gustó construir el clinómetro, hacer mediciones en el patio escolar y a diferencia de la primera actividad "Midiendo mis pasos", la organización de la actividad se realiza con un poco de más orden. Un factor que se observo, es el hecho de que a los alumnos les gusta "apurarse" con la actividad, para tener un poco de tiempo libre.

Otro hecho importante es que no se tuvo la comprensión suficiente del instrumento, sobre todo de la matemática que en él está inmersa. El artefacto la saben utilizar (eso parece) pero luego no saben cómo emplear esas mediciones.

Cinco problemas de proporcionalidad.

Problema 1.

A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

Los alumnos tienen su propia concepción de lo que es y cómo se resuelve un problema, es decir, ellos mismos organizan la solución apoyándose en una representación gráfica, algorítmica o algebraica.

Cuando el alumno muestra la solución del problema, se puede decir que él tiene cierta interpretación o significado del problema; sin embargo, no se puede asegurar si en realidad se hace sentido "real" del significado con el resultado obtenido, a menos que se le cuestione sobre el asunto.

En cuanto a la forma de dar solución a éste primer problema, se presentaron tres enfoques diferentes de solución, los cuales pueden agruparse en uso de procesos aditivos, procesos multiplicativos.

Los alumnos que usan procesos aditivos son 29/55 y son los siguientes:

a) Plantean una ecuación de primer grado para dar solución al problema

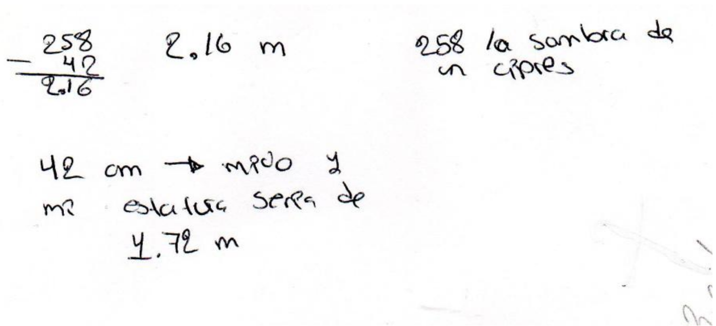
$$172 - X = 42$$
$$-(x) = 42 - 172$$
$$X = 1.30$$

$$\begin{array}{r} 258 \\ -130 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$R = 1.28\,m$$

b) Realizan diferencias (restas)

- *Sombra del árbol - mi sombra = R*



$$\begin{array}{r} 258 \\ -\ 42 \\ \hline 2.16 \end{array}$$

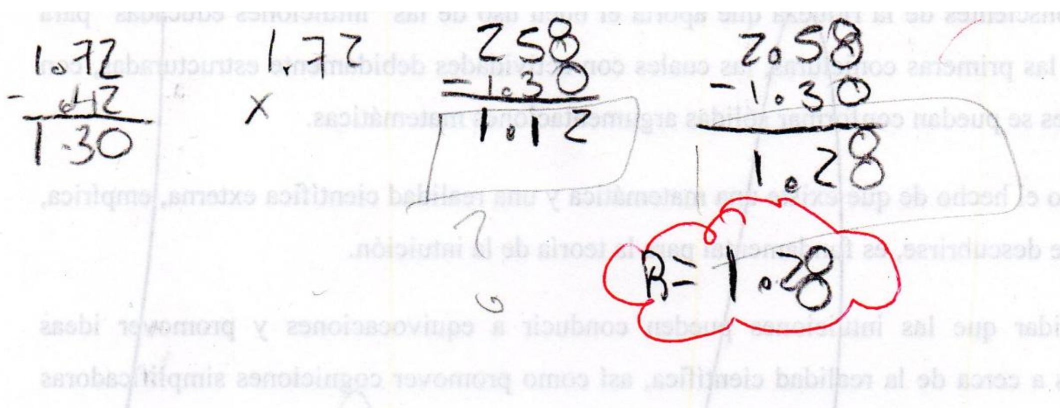
2.16 m

258 la sombra de un cipres

42 cm → mido y mi estatura sería de 4.72 m

- *Mi estatura - mi sombra = 1.30*

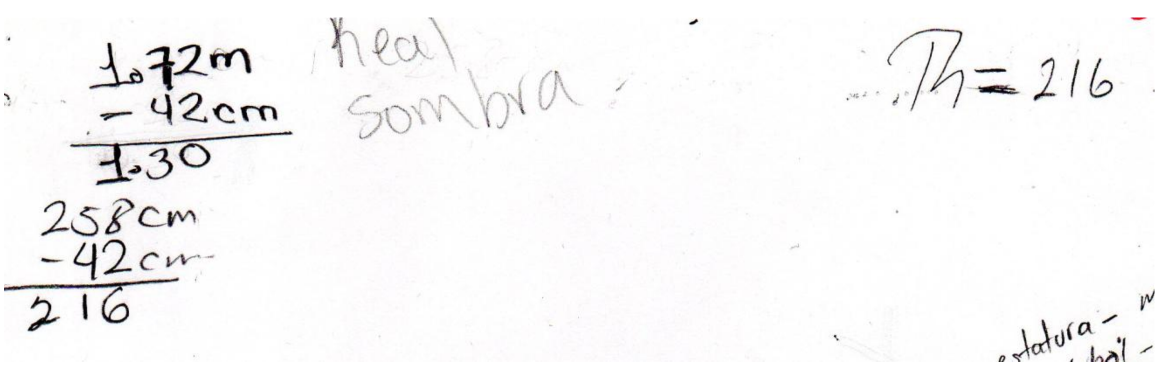
  Sombra del árbol - 1.30 = R



$$\begin{array}{r} 1.72 \\ -\ .42 \\ \hline 1.30 \end{array} \qquad 1.72 \ \times \qquad \begin{array}{r} 258 \\ -1.30 \\ \hline 1.12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.58 \\ -1.30 \\ \hline 1.28 \end{array}$$

R = 1.28

- *Mi estatura - mi sombra = R*
  sombra del árbol - mi sombra = R



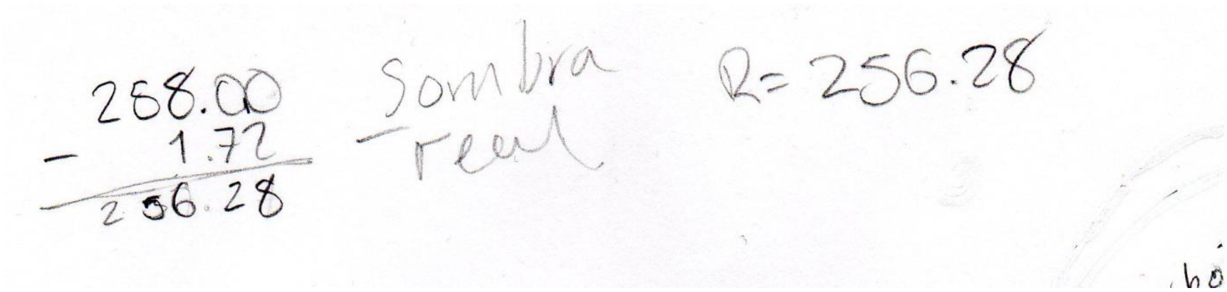
$$\begin{array}{r} 1.72m \\ -\ 42cm \\ \hline 1.30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 258cm \\ -\ 42cm \\ \hline 216 \end{array}$$

real sombra

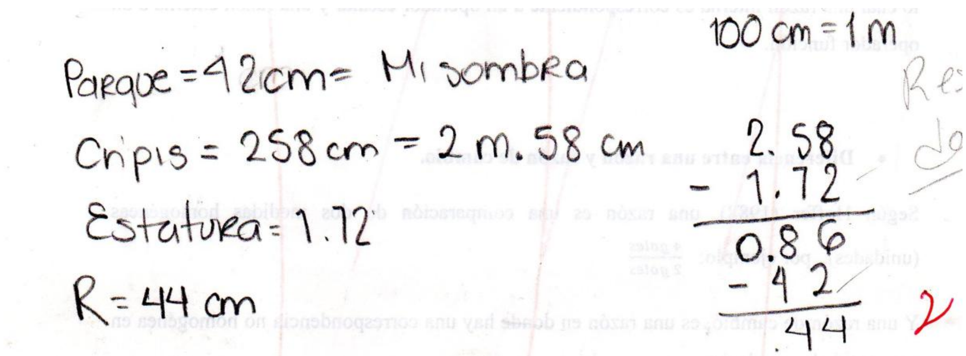
R = 216

estatura -

- *Sombra del árbol - mi estatura = R*



- *Sombra del árbol - mi altura - mi sombra = altura del ciprés*

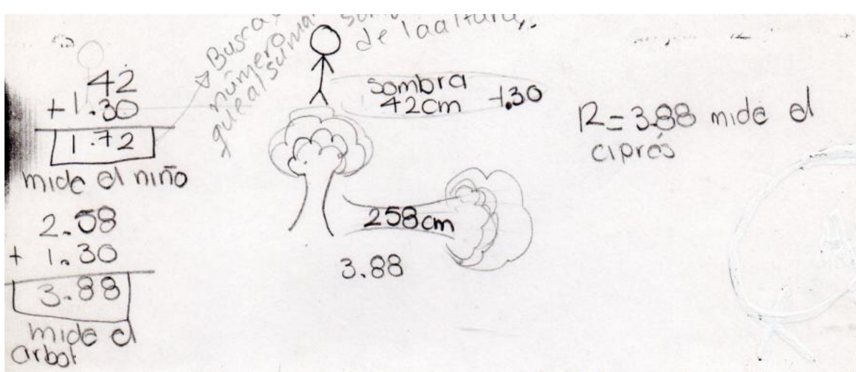


c) Usan sumas:

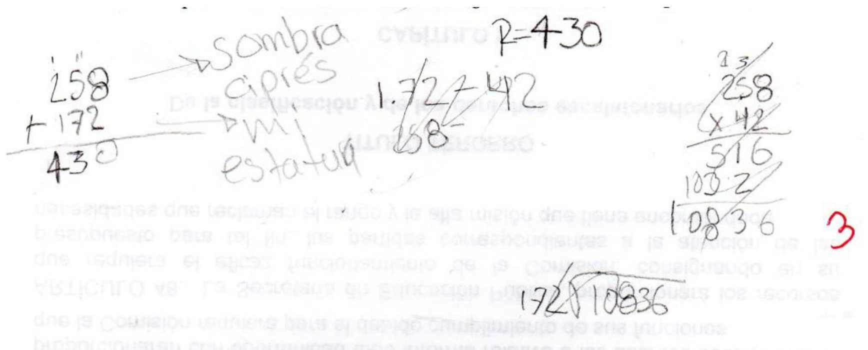
➢ *Algunos alumnos realizan el siguiente proceso aditivo*

$\boxed{\quad\quad}$ + mi sombra = mi estatura

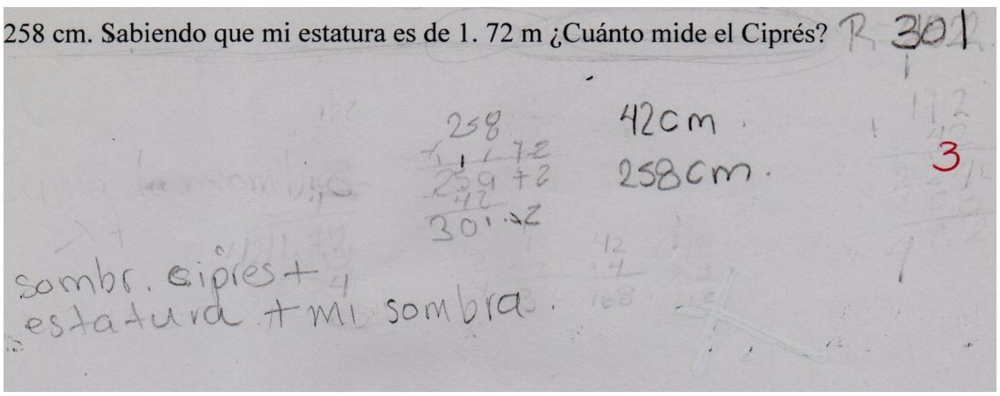
$\boxed{1.30}$ + sombra del árbol = altura del ciprés



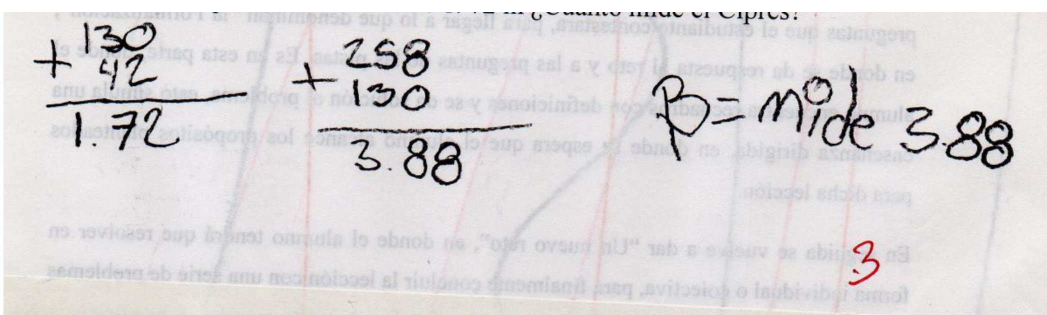
- Suman la *sombra del ciprés   + mi altura = Altura del ciprés*



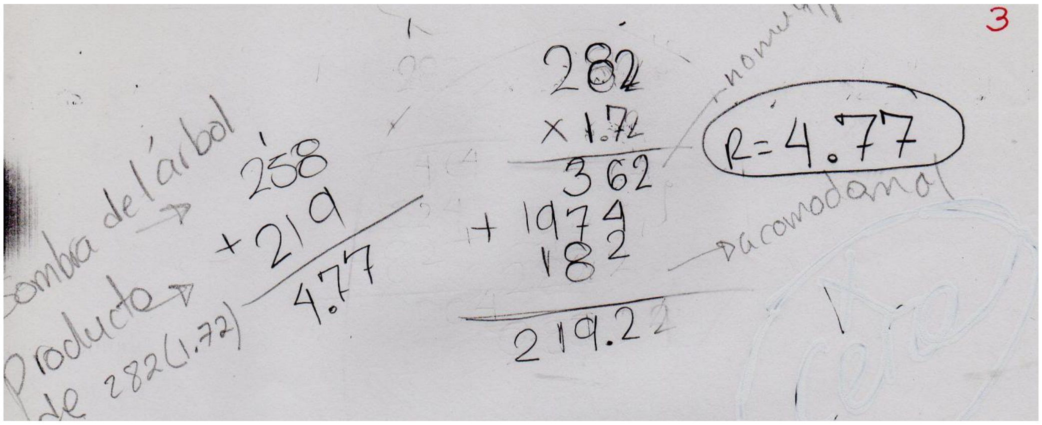
- (*sombra del ciprés + mi sombra) (mi estatura) = altura del ciprés*



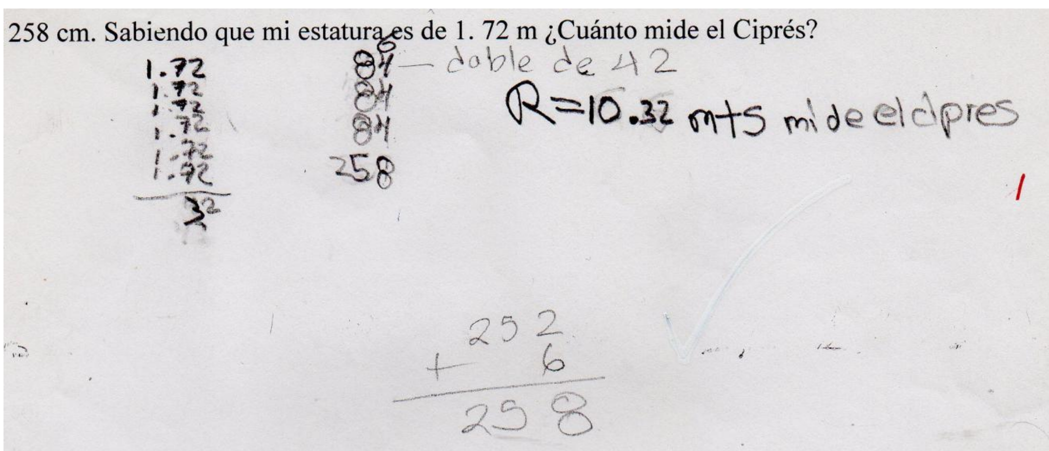
- *Sombra del ciprés + mi sombra + mi altura = altura del ciprés*



➢ *Sombra del árbol + (mi estatura) (282) = altura del ciprés*



➢ *Realizan sumas interadas cómo buscando un factor aditivo*



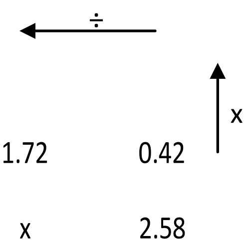
Los que usan procesos multiplicativos son 26 alumnos y son:

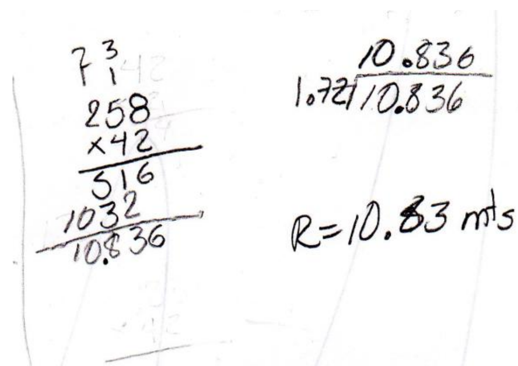
a) Regla de Tres

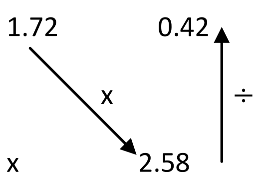
La estructura de la regla de tres es conservada por los alumnos, pueden relacionar las cuatro cantidades involucradas, la diferencia está en la manera de ser operada.

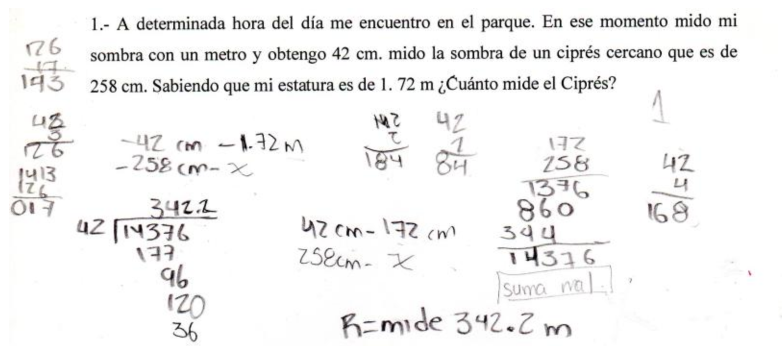
Es un método muy recurrente la "regla de tres", la cual presentó tres variantes, en donde se aprecia que los alumnos la resuelven de manera incorrecta o la plantean mal, ya que no toman en consideración cómo los datos están siendo comparados.

La forma de solución está dada por las flechas en los siguientes dos esquemas para la regla de tres:

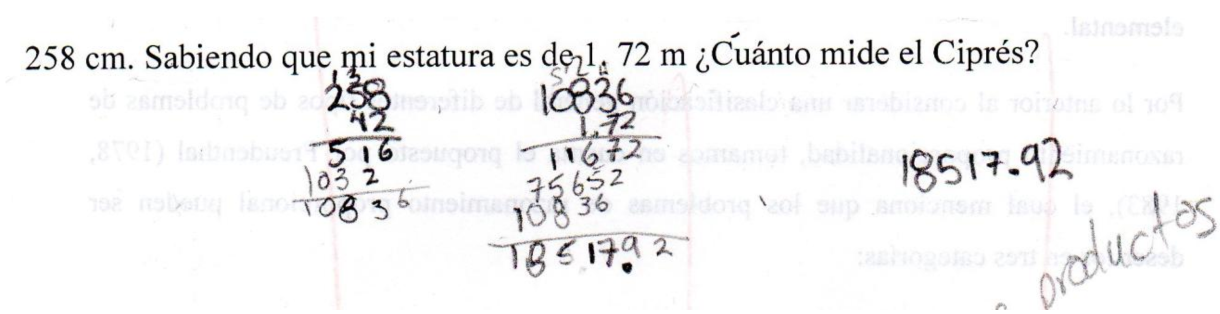






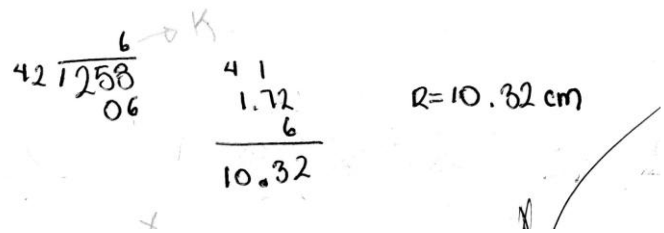

1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

b) Multiplican los tres datos para obtener el resultado

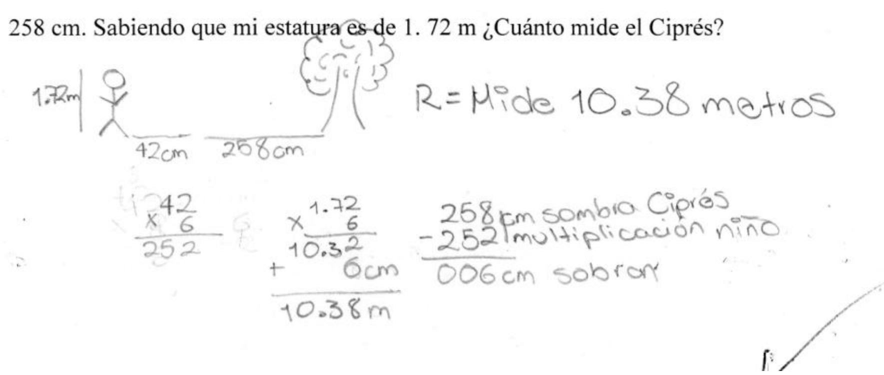

258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

c) Factor multiplicativo:

- Dividen 258 ÷ 42 esto nos da un factor de proporcionalidad "k"



- Por medio de la prueba y error tratan de encontrar un factor que multiplique y se acerque a los datos dados en el problema.



Nota: Se toma como elementos intuitivos el método de resolución al problema cuando los alumnos buscan un factor multiplicativo y/o utilizan un factor aditivo.

Algunos alumnos realizan dibujos para interpretar el problema, pero la mayoría no realiza algún tipo de representación geométrica como ayuda en la solución del problema, pero si dan indicio de relaciones numérica que hay entre los objetos. Si hemos considerado a la visualización como un factor de inmediatez, la cual es una característica de la intuición, las pocas representaciones geométricas que los alumnos realizan, tienen la función de analizar y ordenar la información, entonces podemos afirmar que la intuición está en juego en la solución de este problema.

A continuación se muestran dos ejemplos de representación esquemática (Fig.1 y Fig.2).

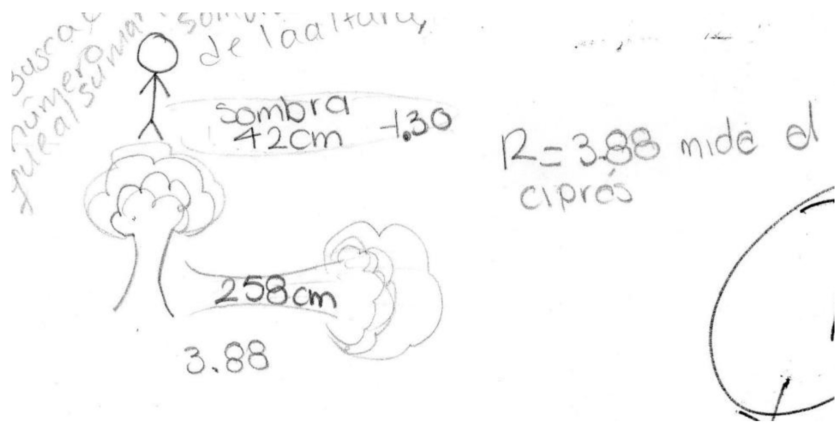
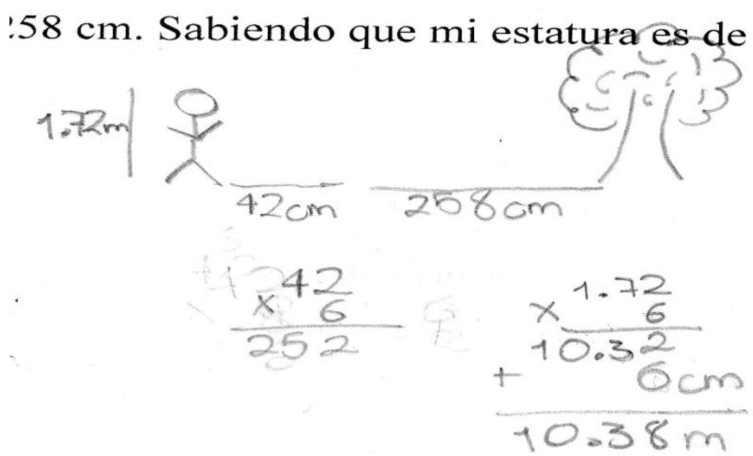


Fig. 1

Con éstos dos ejemplo, se muestra la relación numérica con los objetos que se describen en el problema, en algunos las relaciones numéricas están relacionadas con una incógnita como se muestra en la "regla de tres".



suman lo que les sobro

Fig. 2

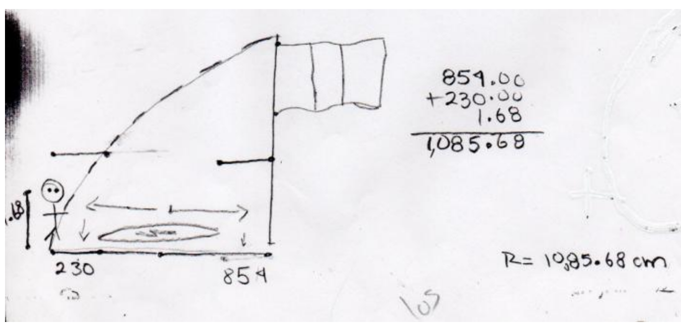
Problema 2.

En el centro de la plaza de mi pueblo hay un mástil del que ondea una bandera. Entre el mástil y yo coloco, en el suelo un espejo y me alejo de él hasta que vea en el espejo la punta superior del mástil. En ese momento mido: mi distancia al espejo que es de 230 cm, la distancia del espejo al mástil que es de 854 cm, y lo que yo mido, sólo hasta mis ojos, que es de 1.68 m. ¿Cuánto mide el mástil de la plaza?

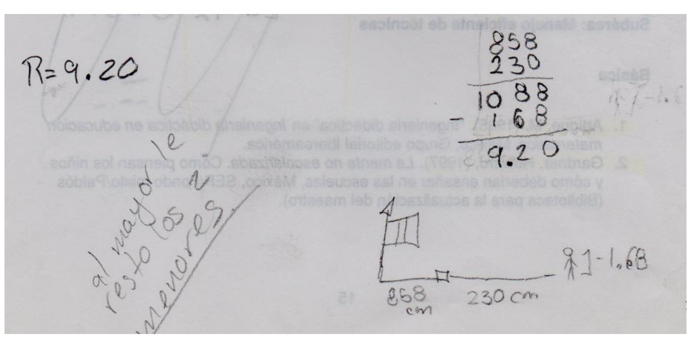
En este segundo problema, los enfoques de solución se clasificaron nuevamente en dos grupos; estos dos grupos principalmente se catalogan de acuerdo al tipo de operaciones que realizaron (multiplicación, suma, resta o combinada), regla de tres, porcentaje y uso de un factor de proporcionalidad.

Fueron 32 alumnos de cincuenta y cinco los que realizaron algún proceso de tipo aditivo. Son los siguientes:

a) Suma de datos: Suman dos o tres de los datos dados en el problema para encontrar la solución.

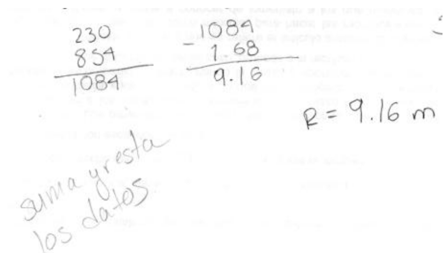


b) Resta de datos, al dato mayor (distancia del espejo al mástil) le resta los dos datos menores (mi distancia al espejo y mi altura).

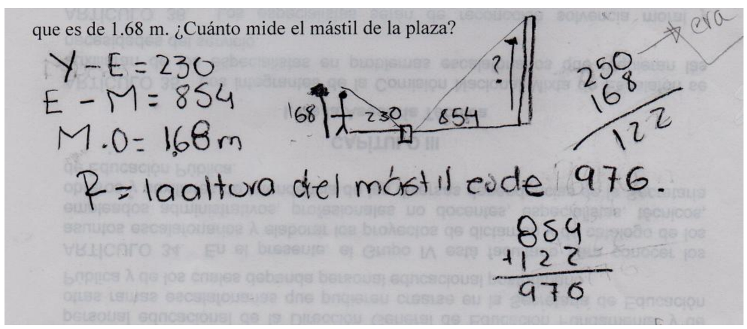


c) Operaciones combinadas: Los alumnos realizan sumas, resta, multiplicaciones y divisiones utilizando los datos proporcionados en el problema, sin llegar a la solución y sin ser una regla de tres o un porcentaje. A continuación se enlista la manera en que fueron realizando las operaciones.

- Suma y resta

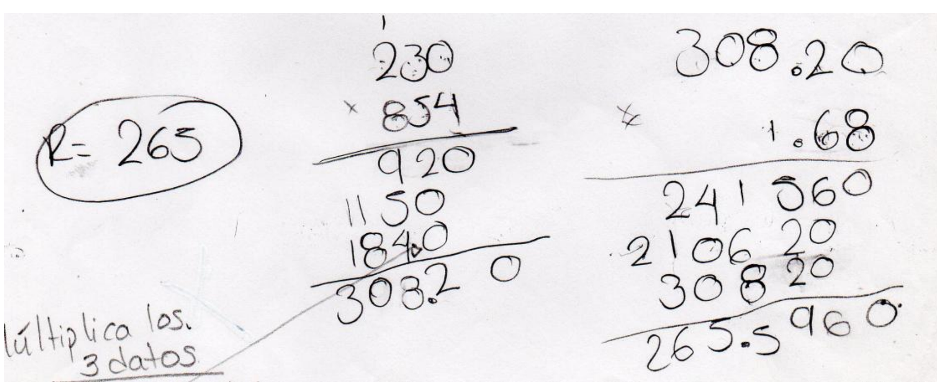


- Resta y suma



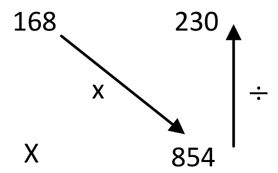
De los cincuenta y cinco alumnos, solamente 8 alumnos realizaron algún proceso multiplicativo, lo que se muestra a continuación.

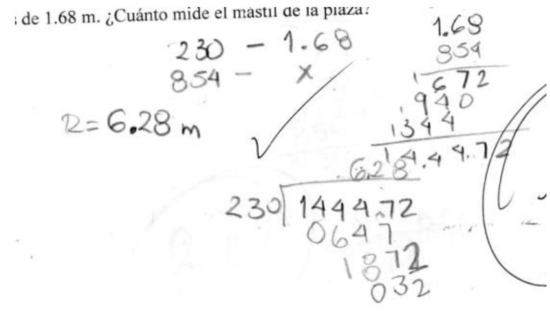
a) Multiplicación de datos: Los alumnos multiplican dos o tres de los datos del problemas, cinco alumnos realizan este método.



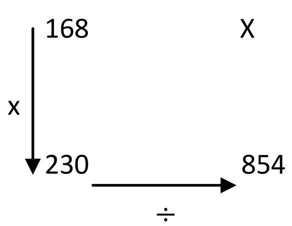
b) Regla de tres.

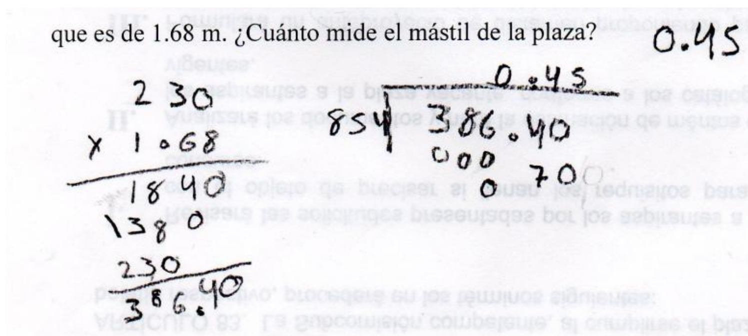
Los alumnos muestran diferentes formas de operar y plantear la "regla de tres".



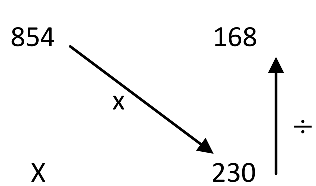


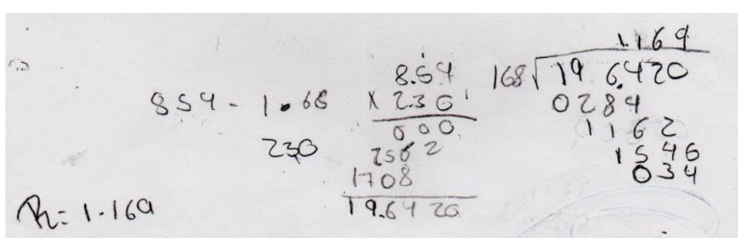
b.1





b.2



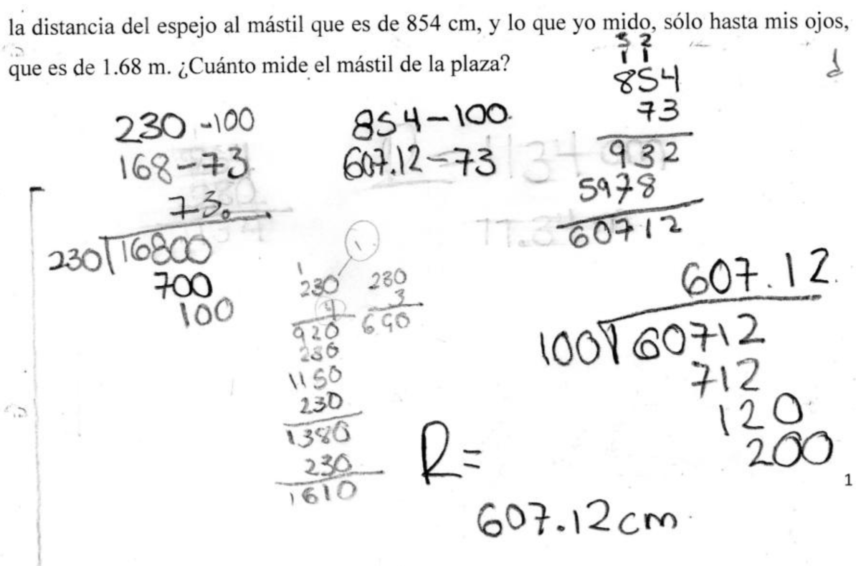


La "regla de tres" no ha estado bien planteada

b.3

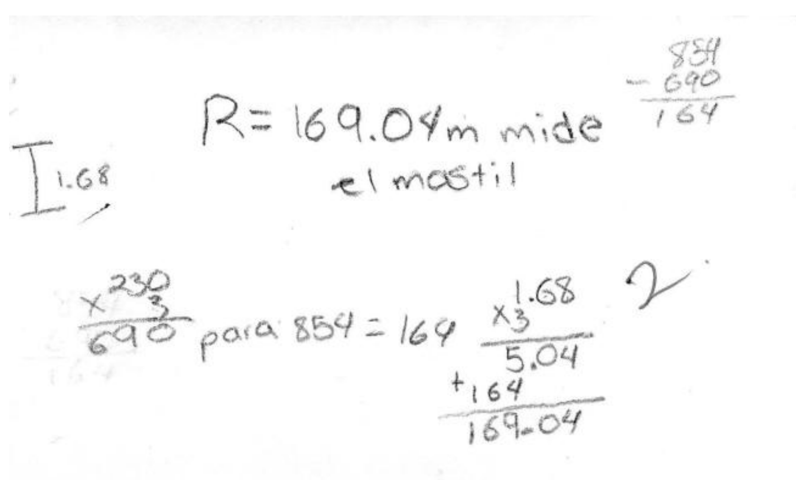
c)Porcentaje

Un alumno resuelve el problema por medio de una regla de tres, utilizando porcentajes.

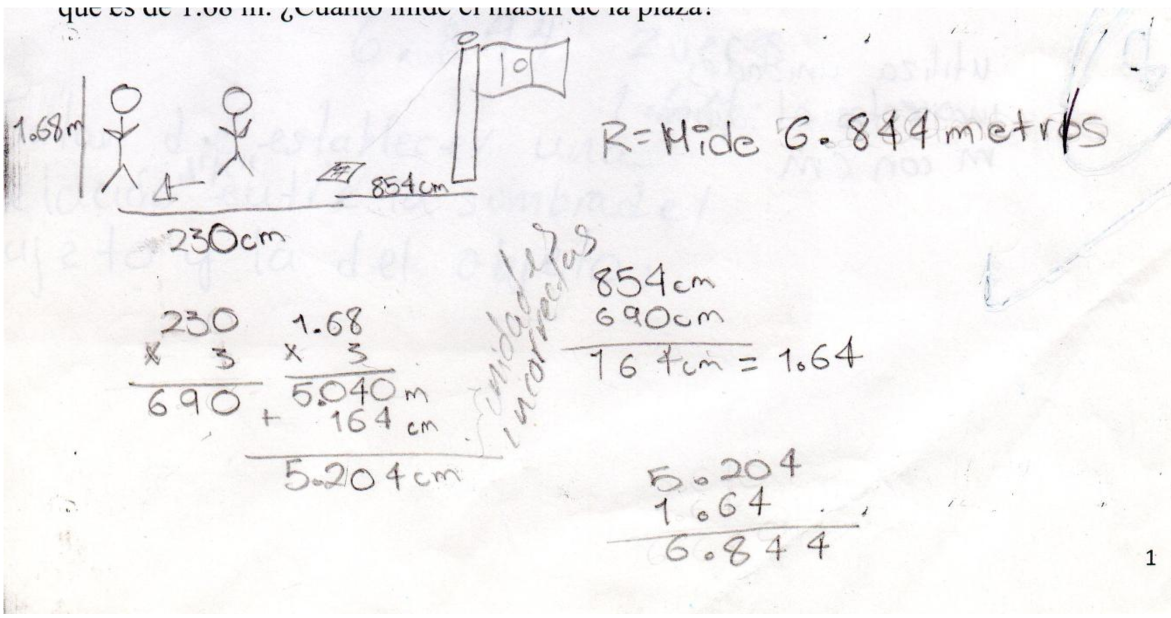


d) Algunos alumnos tratan de hallar un factor de proporcionalidad "K". Los dos casos siguientes son muy similares.

Para éste primer alumno, multiplica la distancia del espejo al sujeto por tres (690), el resultado se lo resta a la distancia del espejo al mástil (164). A la altura del sujeto la multiplica por tres y al resultado le suma lo obtenido en la resta y concluye que esa es la altura del mástil.

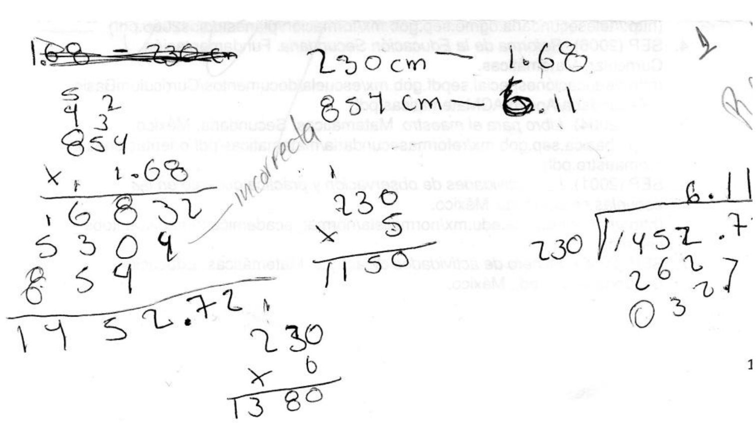


En el siguiente caso, Multiplica la altura y la distancia que hay entre el espejo y el sujeto por tres, obteniendo 5.040 y 690 respectivamente. A la distancia que hay entre el mástil y el espejo le resta 690, obteniendo 164 cm. Estos 164 cm se suman a 5.040 resultando 5.204 cm. Finalmente a éste último resultado le suma nuevamente 1.64 obteniendo 6.844 metros, los cuales son asignados como la altura del mástil.



Observaciones:

En general para este problema, los alumnos muestran errores al realizar los algoritmos: sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, así como al trabajar con el punto decimal y las unidades. Los alumnos modelan las situaciones utilizando representaciones pictóricas, gráficas y en algunos casos algebraicas.



Hay algunos alumnos que realizan un gráfico para explorar el problema y describe sus resultados utilizando modelos gráficos o geométricos y representaciones numéricas (fig.1).

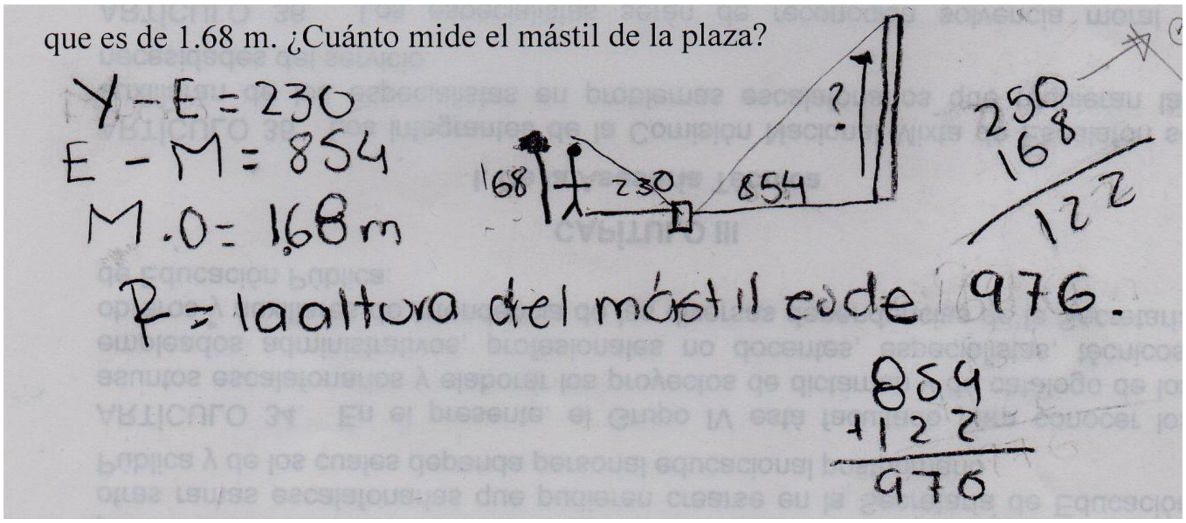


Fig.1

Pero en su mayoría, se basan en lo algorítmico como en la figura 2.

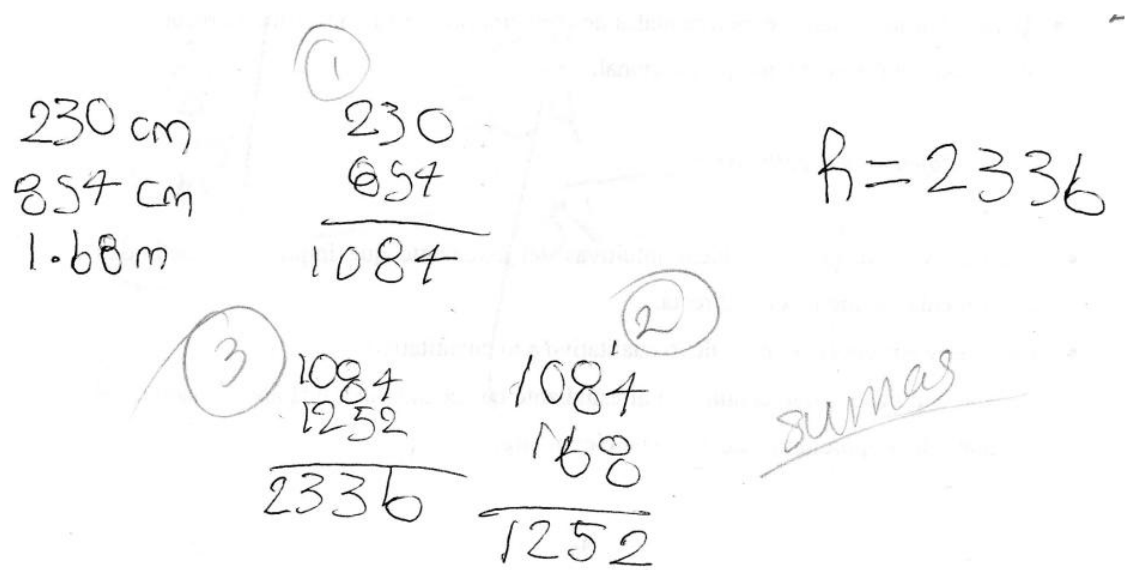
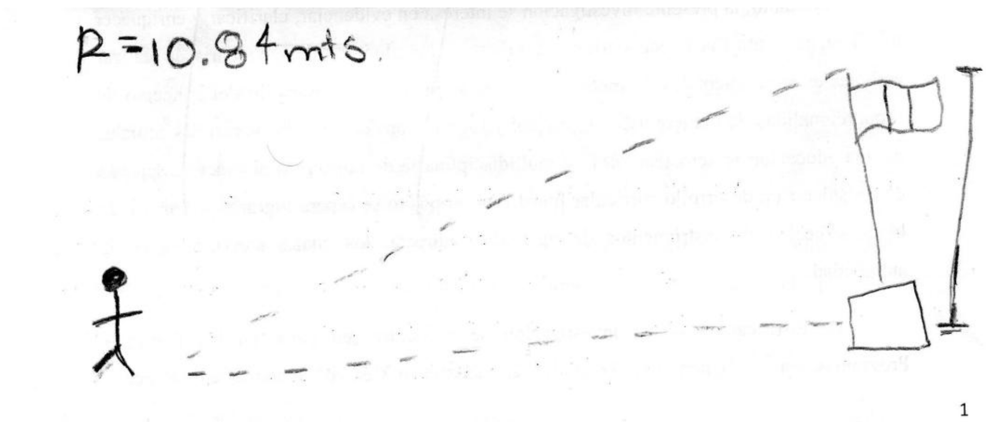


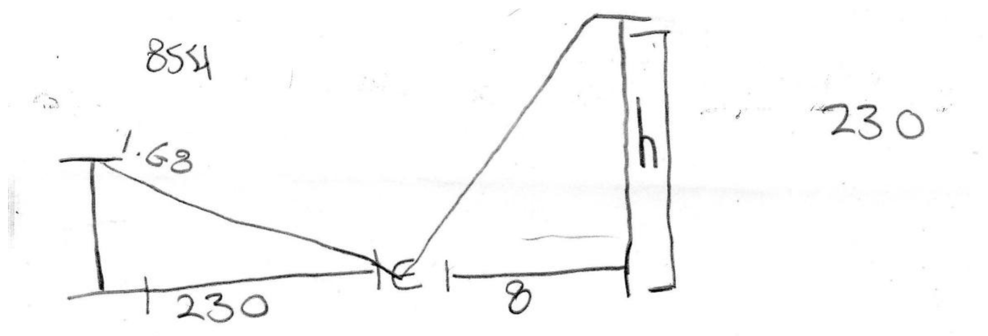
Fig.2

Algunos alumnos utilizan representaciones de carácter geométrico cómo son los casos siguientes:

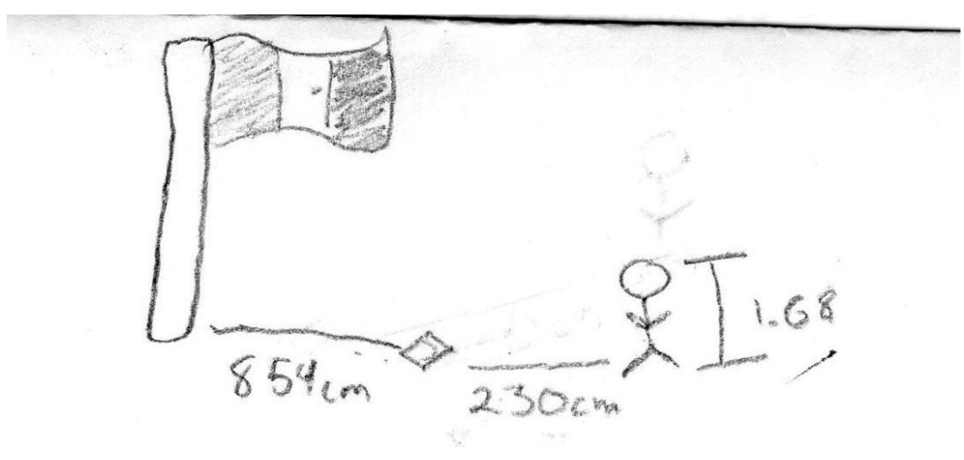
- Diagramas incompletos muestran un sólo triángulo



- Semejanza de triángulos



- Diagrama o dibujo.



Problema 3.

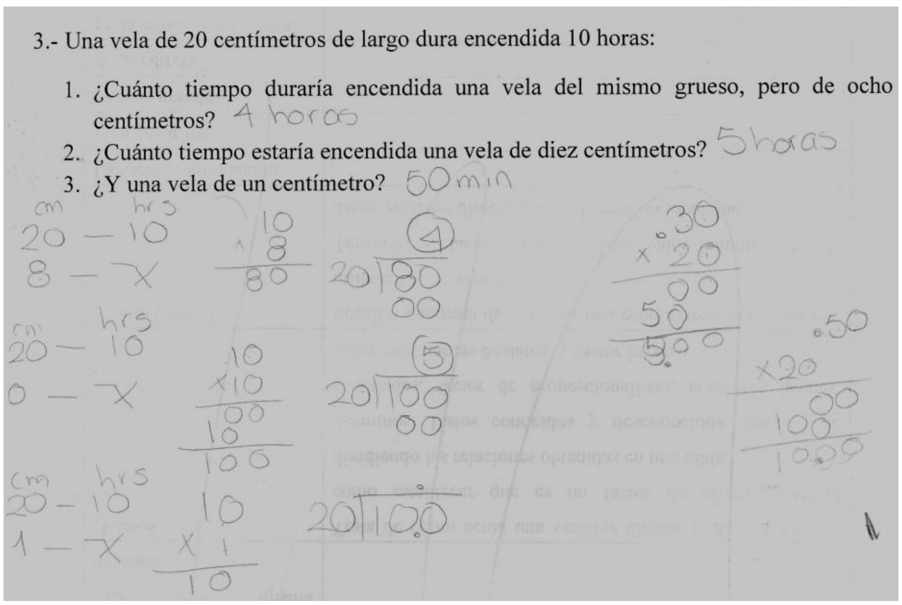
Una vela de 20 centímetros de largo dura encendida 10 horas:

1. *¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros?*
2. *¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros? ¿Y una vela de un centímetro?*

Los enfoques utilizados en la resolución de este problema son los siguientes.

Procesos multiplicativos, realizado por 22 alumnos de 55.

a) Regla de tres.

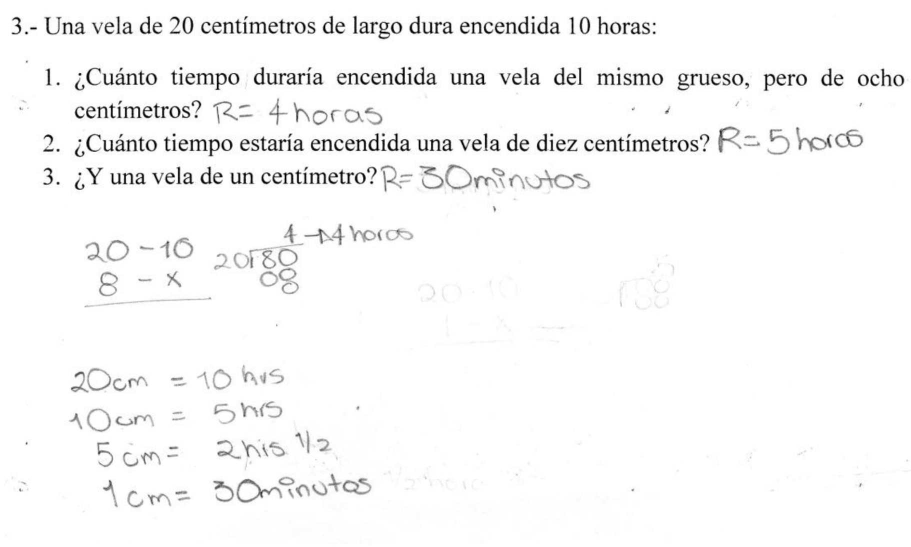

3.- Una vela de 20 centímetros de largo dura encendida 10 horas:

1. ¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros? 4 horas
2. ¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros? 5 horas
3. ¿Y una vela de un centímetro? 50 min

cm hrs
20 — 10
8 — x

cm hrs
20 — 10
10 — x

cm hrs
20 – 10
1 — x


3.- Una vela de 20 centímetros de largo dura encendida 10 horas:

1. ¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros? R= 4 horas
2. ¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros? R= 5 horas
3. ¿Y una vela de un centímetro? R= 30 minutos

20 – 10
8 – x

4 – 4 horas

20cm = 10 hrs
10cm = 5 hrs
5 cm = 2 hrs 1/2
1 cm = 30 minutos

b) Escalar las cantidades, obtienen múltiplos de los datos o la unidad, para obtener los valores necesarios.

Ejemplo 1

3.- Una vela de 20 centímetros de largo dura encendida 10 horas:

1. ¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros?
2. ¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros?
3. ¿Y una vela de un centímetro?

R=

20 - 10 hora
8 - 4 hora
10 - 5 hora
1 - .5 = media hora

$20\overline{)80}$ 4

$20\overline{)100}$ 000
00

Ejemplo 2

1. ¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros? R= 4 hrs
2. ¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros? R= 5 hrs
3. ¿Y una vela de un centímetro? R = 50 minutos

20 cm - 10 hrs
10cm - X = 5hrs
8cm - X
1cm - X

10 cm = 5 hrs
5 cm = 2:30 hrs

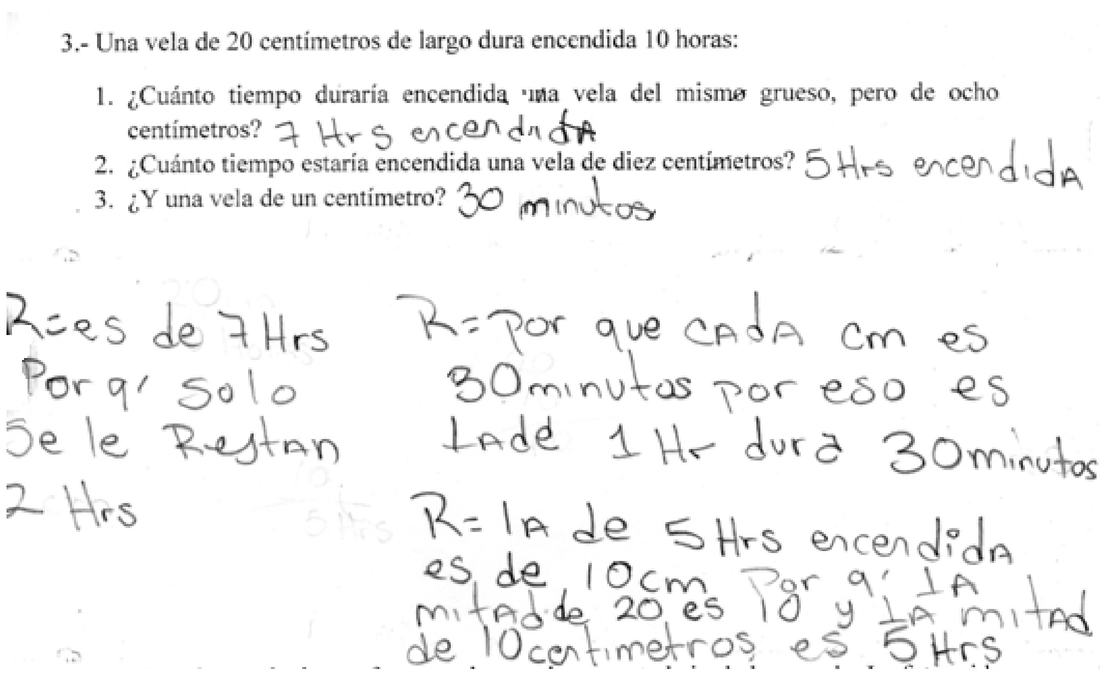
20 cm = 10 hrs

$2\overline{)8}$ 4
0

$2\overline{)20}$ 10
0

$2\overline{)10}$ .50
0

Éste es un problema en el cual la mayoría de los alumnos comunican de manera numérica el proceso de solución, algunos lo expresan con un dibujo, pero es solamente un alumno que en forma de narración trata de explicar sus resultados.


3.- Una vela de 20 centímetros de largo dura encendida 10 horas:

1. ¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros? 7 Hrs encendidA
2. ¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros? 5 Hrs encendidA
3. ¿Y una vela de un centímetro? 30 minutos

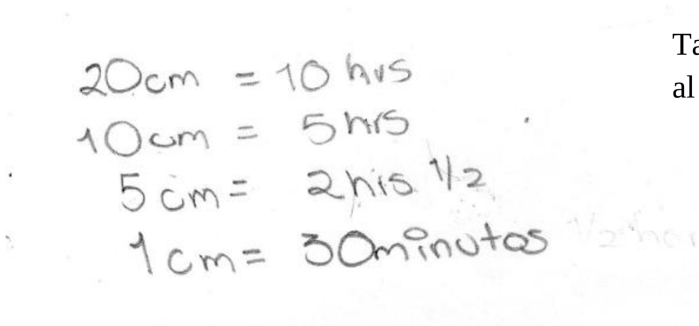
R= es de 7 Hrs Por q' solo se le Restan 2 Hrs

R= Por que cADA cm es 30 minutos por eso es LAde 1 Hr dura 30 minutos

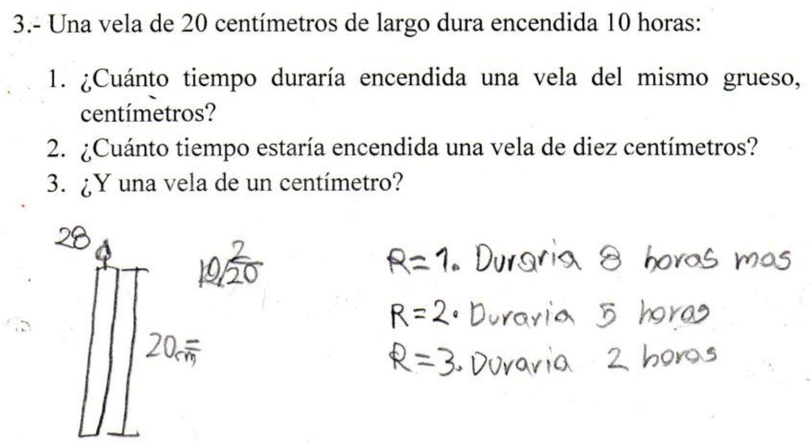
R= lA de 5 Hrs encendida es de 10 cm Por q' lA mitad de 20 es 10 y lA mitad de 10 centimetros es 5 Hrs

Al analizar el tipo de conexiones que los alumnos realizan en este problema, no se encuentra ningún caso en el cual lo algebraico, geométrico y numérico este interconectado, es decir, se presentan dos elementos matemáticos o uno sólo. Para aclarar un poco. Si el alumnos hace un esquema, inmediatamente pasa a lo numérico. En caso de hacer una "regla de tres" e incluir a la "x" como incógnita, hace operaciones, pero no un gráfico. Posiblemente esto sea a que el grado de dificultad de solución en el problema no es muy alto.

Las representaciones que los alumnos utilizan en este problemas son el uso de tablas para los datos y resultados y dibujos de la situación problemática. Los dibujos son muy semejantes a la realidad, es decir los alumnos dibujan las velas, como a continuación se muestra.



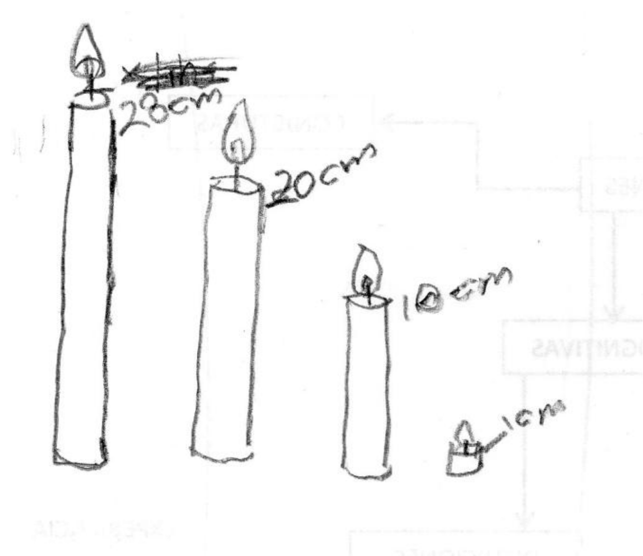
Tablas con los datos y la solución al problema.



3.- Una vela de 20 centímetros de largo dura encendida 10 horas:

1. ¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros?
2. ¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros?
3. ¿Y una vela de un centímetro?

Dibujos que representan la solución al problema.



Dibujos que representan la solución al problema.

Problema 4.

Alicia quiere reducir una foto para insertarla en un trabajo de la escuela. La foto mide 15 cm de largo por 10 cm de ancho. Quiere ver cómo queda mejor. Si cambia el ancho a 6, a 8, ó a 9 cm, ¿de cuánto tendría que ser el largo en estos tres casos, para que se conserve la misma foto original?

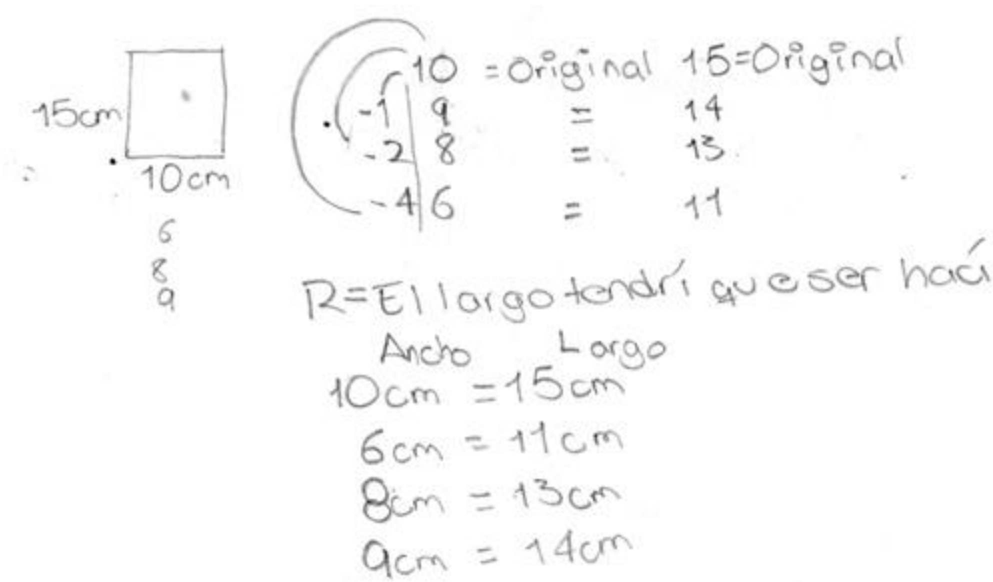
Los enfoques fueron clasificados en procesos aditivos y multiplicativos como se muestra enseguida.

Un proceso aditivo fue utilizado por 25 alumnos y estos son:

a) Disminución de los datos

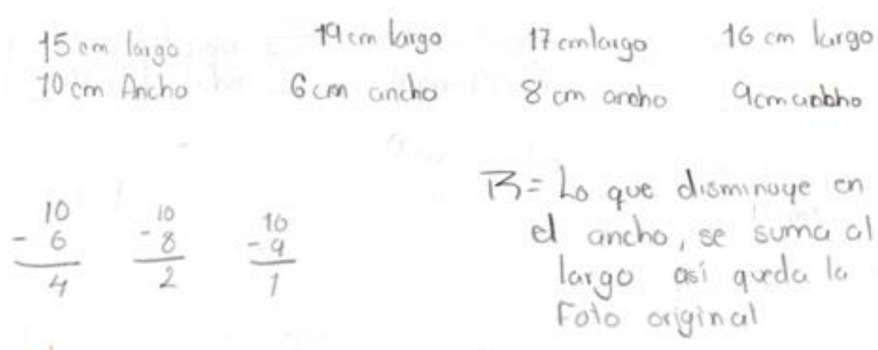
Algunos alumnos ven cuanto disminuye al ancho de la fotografía y es lo que tienen que disminuirle al largo para obtener el nuevo tamaño de fotografía. Si ponemos atención al siguiente ejemplo, vemos que el ancho original de la fotografía es 10, para obtener 9 se le disminuye uno, al 8 disminuye dos y al seis se resta cuatro del tamaño original, entonces, siguiendo ésta lógica, al 15 le disminuye uno resultando 14; nuevamente al 15 le resta dos y obtiene 13 y para el último valor le resta 4 al 15 reflejando 11. El siguiente ejemplo es lo realizado por el alumno.

Ancho	10	9	8	6
Largo	15	14	13	11

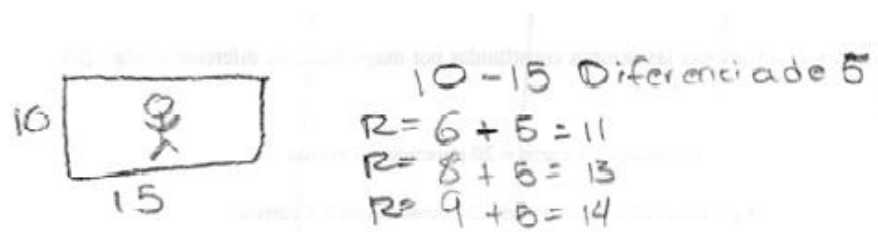


Lo que disminuye el ancho se le suma a lo largo.

Ancho	10	9	8	6
Largo	15	16	17	19



Algunos alumnos argumentan que la diferencia entre lo largo y lo ancho es cinco, entonces al nuevo largo (6,8,9) le suman los cinco para obtener el ancho.

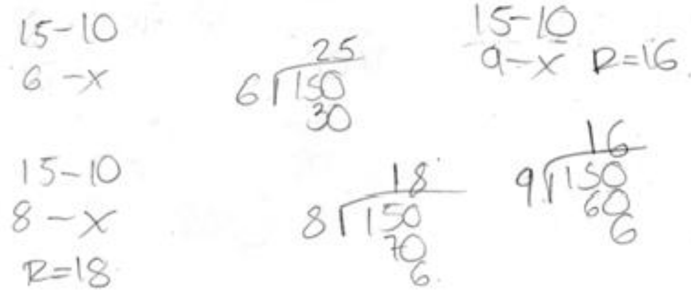


Por otro lado, un total de once alumnos utilizaron procesos multiplicativos y son las siguientes:

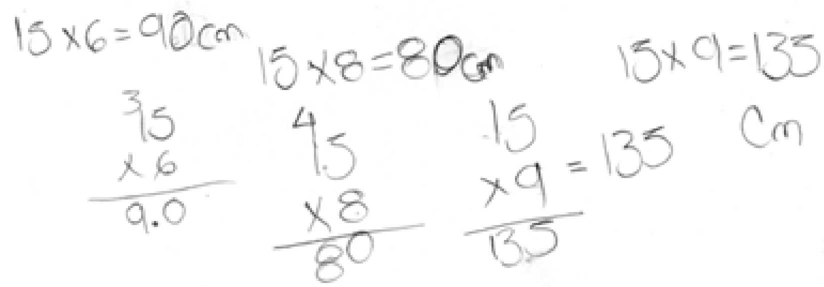
a) Áreas

1.- Calcula el área de la fotografía original y lo dividen entre el ancho pedido. También se muestra que establece una "regla de tres", aunque las relaciones están mal establecidas.

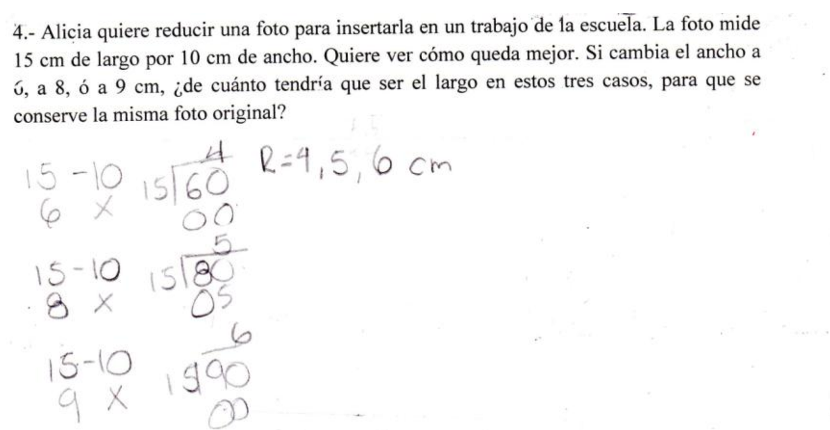
$\frac{150}{9} = 16$ $\frac{150}{8} = 18$ $\frac{150}{6} = 25$



2.- Calcula el área del rectángulo multiplicando el largo dado por el ancho que se necesita, el resultado es el largo de la nueva fotografía.

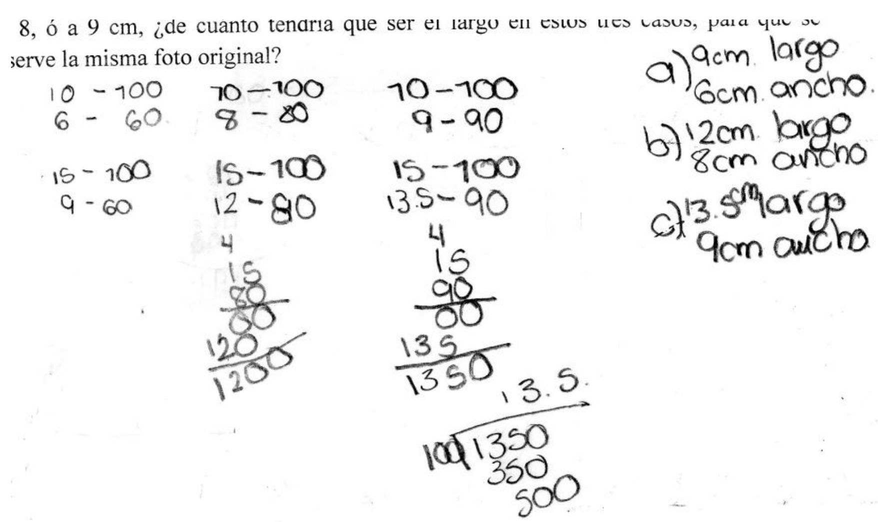


b) Regla de tres



4.- Alicia quiere reducir una foto para insertarla en un trabajo de la escuela. La foto mide 15 cm de largo por 10 cm de ancho. Quiere ver cómo queda mejor. Si cambia el ancho a 6, a 8, ó a 9 cm, ¿de cuánto tendría que ser el largo en estos tres casos, para que se conserve la misma foto original?

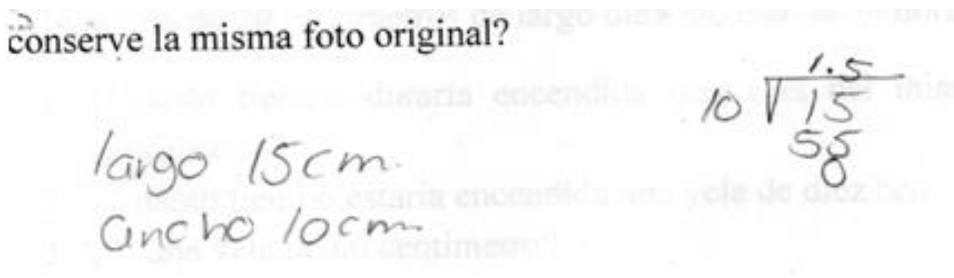
c) Porcentaje



8, ó a 9 cm, ¿de cuanto tendría que ser el largo en estos tres casos, para que se
serve la misma foto original?

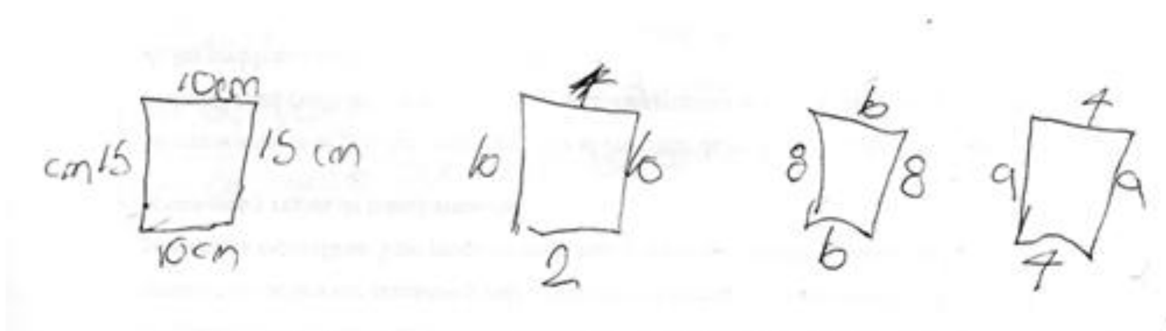
d) Hallar constante de proporcionalidad:

$$K = \frac{15}{10} = 1.5$$

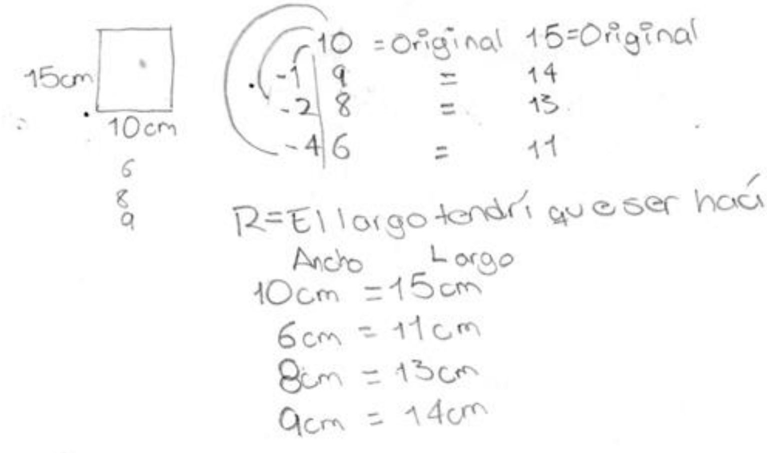


Por otro lado, algunas de las representaciones gráficas expuestas para este problema son variadas aunque escasas, pero las que se presentaron iban acompañadas de elementos algebraicos y geométricos, otras de geometría y aritmética, y otras eran tablas, como las siguientes:

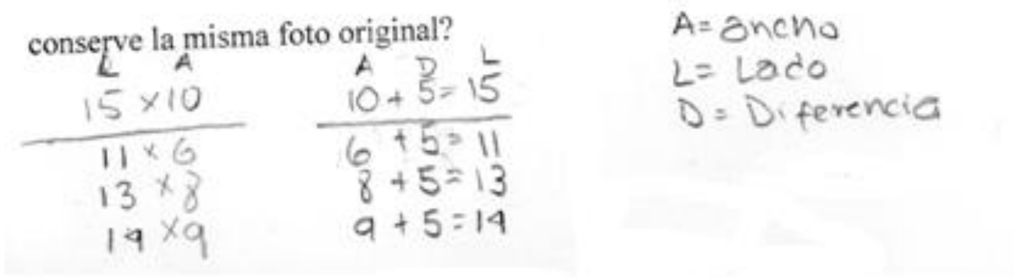
- Representación geométrica : La representación fue realizada por medio de rectángulos, en donde la línea horizontal esquematiza el ancho y el largo una línea vertical . Es importante mencionar el sentido de largo y ancho, ya que comúnmente el largo y ancho son representados de forma contraria.



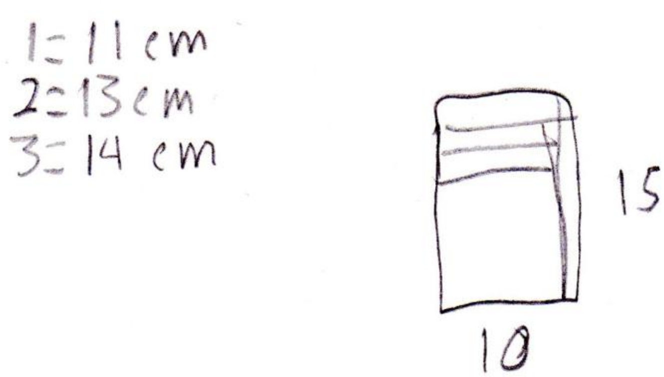
- Representación gráfica y tabla



- Representación por medio de una tabla



- Solamente una representación da indicios de ser rectángulos proporcionales, en donde el rectángulo de mayor tamaño es la medida de la fotografía original y los rectángulos de adentro son más pequeños debido a la variación del ancho.



Problema 5.

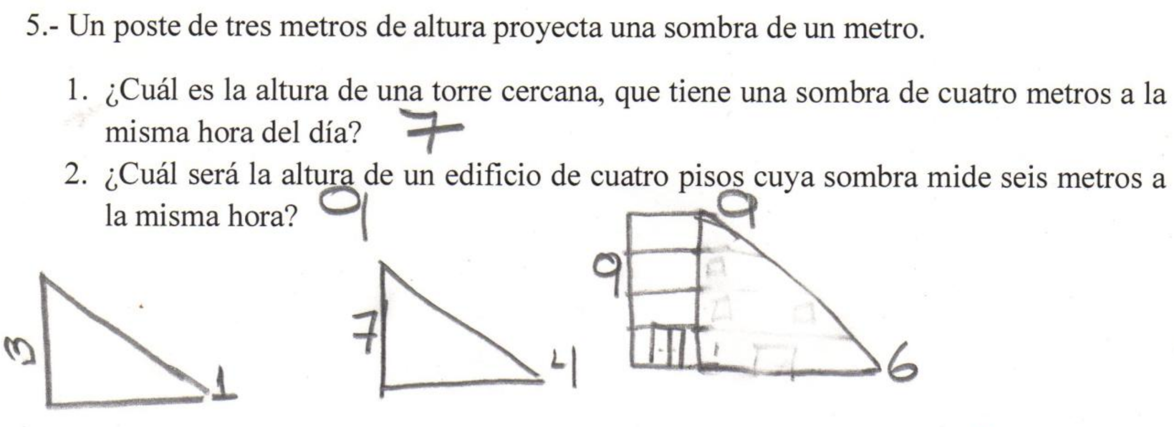
Un poste de tres metros de altura proyecta una sombra de un metro.

1. *¿Cuál es la altura de una torre cercana, que tiene una sombra de cuatro metros a la misma hora del día?*
2. *¿Cuál será la altura de un edificio de cuatro pisos cuya sombra mide seis metros a la misma hora?*

Los enfoques que dieron solución al último problema encontrados son:

a) Solución por medio de procesos aditivos (12/55).

a.1) Diferencia entre la sombra y la altura: si el valor de la base es uno y la altura tres, lo que hace el alumno es a la base sumarle el tres; es decir, si ahora la base vale cuatro, la nueva altura es cuatro más tres resultando siete, este ejercicio es mostrado a continuación. Si a la sombra es de seis, entonces la altura resulta ser de seis más tres, igual a nueve.


5.- Un poste de tres metros de altura proyecta una sombra de un metro.

1. ¿Cuál es la altura de una torre cercana, que tiene una sombra de cuatro metros a la misma hora del día? 7
2. ¿Cuál será la altura de un edificio de cuatro pisos cuya sombra mide seis metros a la misma hora? 9

a.2) Diferencia entre la sombra y la altura: primero, observamos que el alumno cometió una equivocación en su planteamiento, el asume que:

$$3 = 1$$

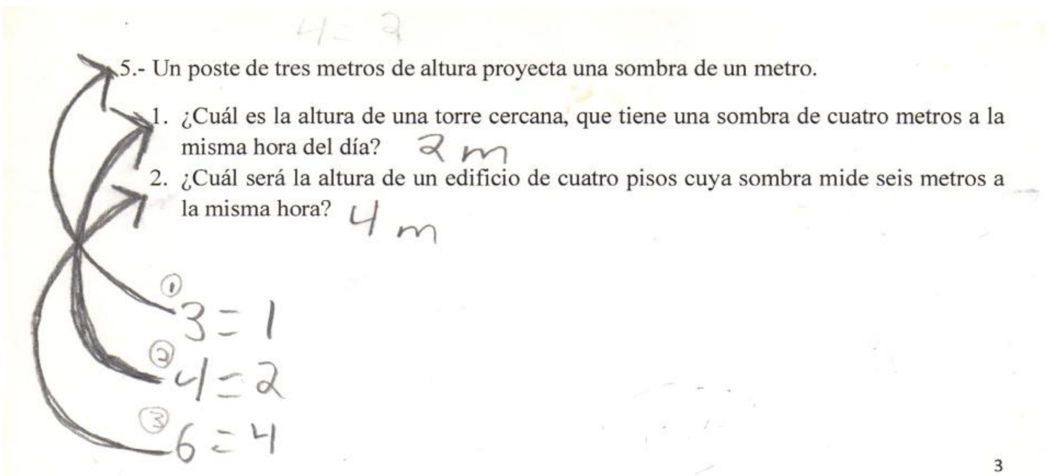
el 3 es el valor de la altura del edificio y el 1 es la longitud de la sombra.

Para $$4 = 2$$

el cuatro es el valor de la sombra y el 2 la altura del edificio, lo mismo hace cuando establece

$$6 = 4.$$

El proceso que utiliza es aditivo, si a 3 le corresponde 1, entonces, a 4 que tiene una unidad de diferencia con el 3, le corresponde un dos de altura. Por eso, si entre 4 y 6 hay una diferencia de dos, al dos de altura le corresponde un 4. Como se muestra a continuación:



4 = 2

5.- Un poste de tres metros de altura proyecta una sombra de un metro.

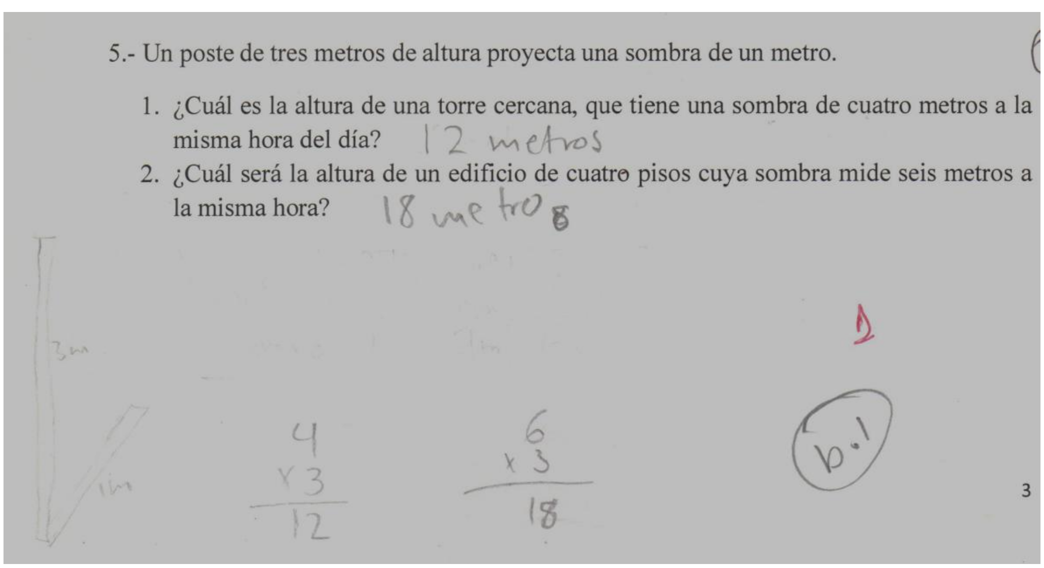
1. ¿Cuál es la altura de una torre cercana, que tiene una sombra de cuatro metros a la misma hora del día? 2 m
2. ¿Cuál será la altura de un edificio de cuatro pisos cuya sombra mide seis metros a la misma hora? 4 m

① 3 = 1
② 4 = 2
③ 6 = 4

3

b) Proceso multiplicativo (33/55):

b.1) Factor constante



5.- Un poste de tres metros de altura proyecta una sombra de un metro.

1. ¿Cuál es la altura de una torre cercana, que tiene una sombra de cuatro metros a la misma hora del día? 12 metros
2. ¿Cuál será la altura de un edificio de cuatro pisos cuya sombra mide seis metros a la misma hora? 18 metros

3m

1m

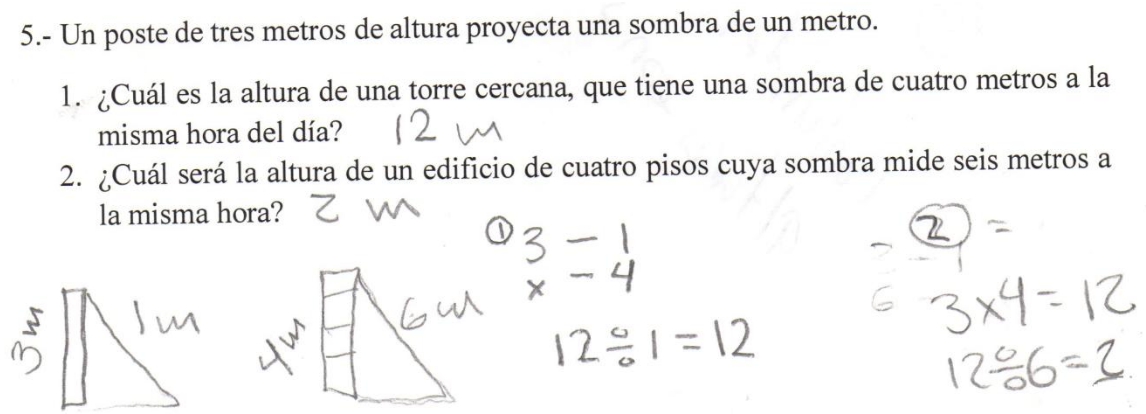
$4 \times 3 = 12$

$6 \times 3 = 18$

b.1

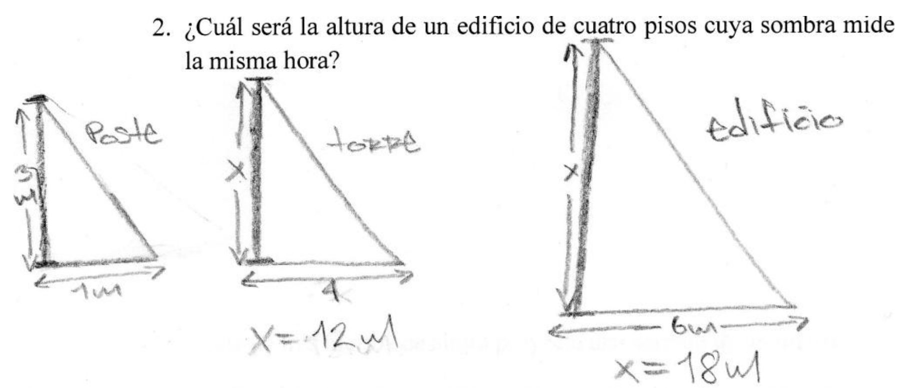
3

b.2) Regla de tres

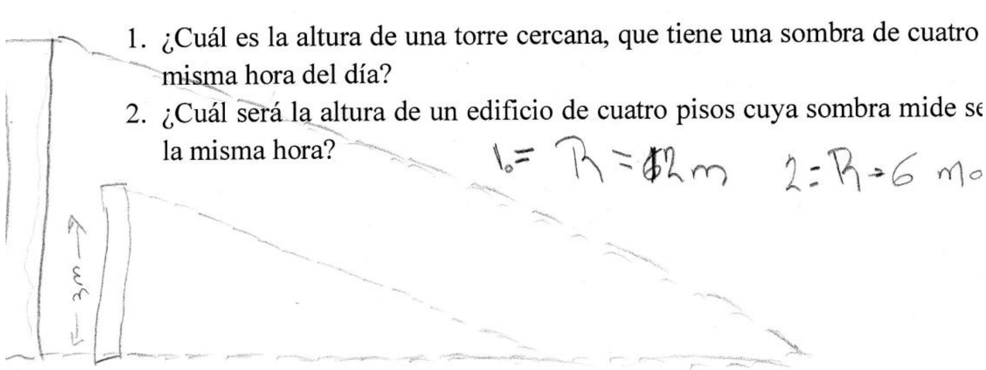


En cuanto al tipo de representaciones utilizada por los alumnos, apreciamos los de connotación geométrica, algebraica y aritmética.

En ésta primera representación, se hace notorio los triángulos semejantes, el uso de una incógnita representada por una letra "x".



b) Superposición de triángulos semejantes



En general para los cinco problemas se obtuvieron cuatro tipos de representaciones, las cuales son:

b) Pictóricas: realizan un dibujo antes de dar solución al problema para comprenderlo.
c) Gráficas: Realizan una representación que tiene elementos pictóricos y simbólicos.
d) Simbólicas: Representación que presenta elementos geométricos.
f) Mentales: Posiblemente la realicen los alumnos que únicamente muestran operaciones o algoritmos en la solución del problema.

Además de:

Los alumnos utilizan diversas estrategias en la resolución de los problemas, considerando lo aritmético, lo geométrico y lo algebraico.

Prácticas erróneas que los alumnos han adquirido, por ejemplo; el manejo del punto decimal en una división tanto en el divisor como en el dividendo.

Para finalizar, la segunda parte del análisis muestra algunas características que pueden ser consideradas intuitivas que presentan los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad que sirvan de apoyo para construir ir construyendo la idea formal de proporcionalidad.

ANÁLISIS DE RESULTADOS QUE MUESTRAN IDEAS GERMINALES HACIA LA NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD LINEAL.

A continuación se presentan los casos de resolución de problemas en que aparecen ideas primarias que se pueden considerar germinales en el desarrollo del pensamiento proporcional.
Estas ideas se pueden clasificar en las siguientes:

1) Identificación y cálculo de la constante de proporcionalidad.

En la siguiente resolución, no se aprecian de manera clara la relaciones de proporcionalidad para dar solución al problema, pero al realizar la división entre las sombras, se encuentra un factor de proporcionalidad llamado "K", el cual es multiplicado por "mi estatura" obteniendo el resultado que es correcto, hay que hacer mención que el resultado de la constante "K" encontrada es un número entero ya que la alumna no calcula la división con decimales.

Alumno: Kenya de Jesus Reza Grupo: 3°F

1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

42 ⟌258 = 6, residuo 06

1.72 × 6 = 10.32

R= 10.32 cm

Dos alumnos divide 258 ÷ 42 = 6.14 que es el factor de proporcionalidad "k", pero no saben qué hacer con "K". Como el siguiente ejemplo.

4.- Alicia quiere reducir una foto para insertarla en un trabajo de la escuela. La foto mide 15 cm de largo por 10 cm de ancho. Quiere ver cómo queda mejor. Si cambia el ancho a 6, a 8, ó a 9 cm, ¿de cuánto tendría que ser el largo en estos tres casos, para que se conserve la misma foto original?

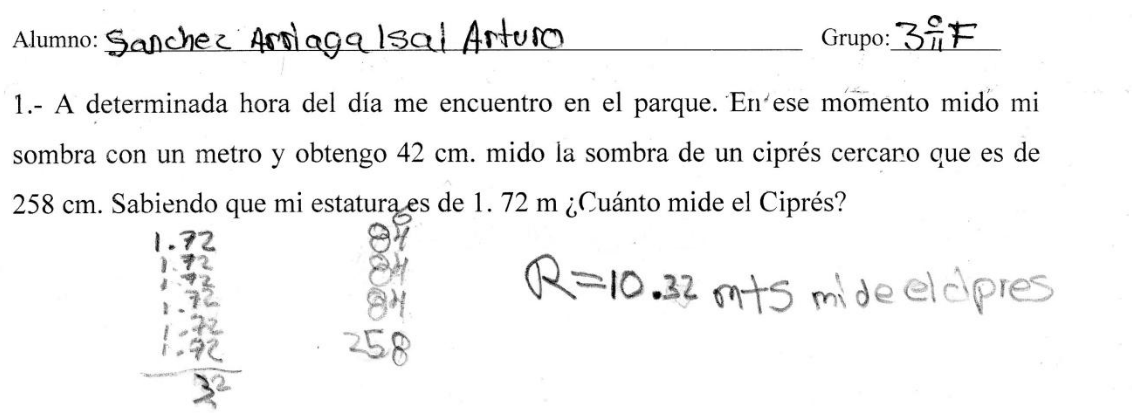
largo 15cm.
Ancho 10cm

10 ⟌15 = 1.5
58
8

Se obtiene correctamente "K", pero ya no se sabe cómo utilizar este valor.

2) Sumas iteradas como un factor aditivo.

El alumno suma tantas veces "mi sombra" hasta acercarse a la sombra del árbol, así mismo suma las mismas veces (son seis) "mi estatura" que es igual a 1.72 para obtener la altura del Ciprés, en los resultados obtenidos por el alumno se puede apreciar que para llegar a la medida de la sombra del árbol hace falta 6 cm. la cual es una parte de "mi sombra" (fracción) proporcional a cada parte de la sombra del Ciprés. Es decir, 6 cm es la séptima parte de mi estatura, la cual representa 0.24 cm más a la altura del Ciprés, por lo que a 10.32 le faltó aumentar los 0.24 cm al Ciprés.


Alumno: Sanchez Arriaga Isal Arturo Grupo: 3° 11 F

1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

3) En busca de un factor multiplicativo por prueba y error

Esta manera de encontrar un factor multiplicativo que de solución a la serie de cinco problemas se ha utilizado de diversas maneras, que por ser consideradas intuitivas tienen cierto grado de validez, pero por la manera en que se procede al utilizar este método, estas indican que no hay una comprensión clara de lo que se hace al tratar de igualar los valores a un número común. A continuación se muestran tres maneras diferentes de proceder utilizando este método.

3.1) La alumna trata de encontrar un factor "K" que multiplicado por la sombra se aproxime a la sombra del árbol, primero establece la relación de 42 cm que mide "ni sombra" con la estatura correcta de 1.72 m. Se observa que la alumna multiplica dos veces

42 x 6 = 252

42 x 7 = 294

42 x 8 = 336

así mismo, se nota una aproximación entre 6 y 7 que es la multiplicación de

42 x 6.5 = 273

En una segunda relación se establece:

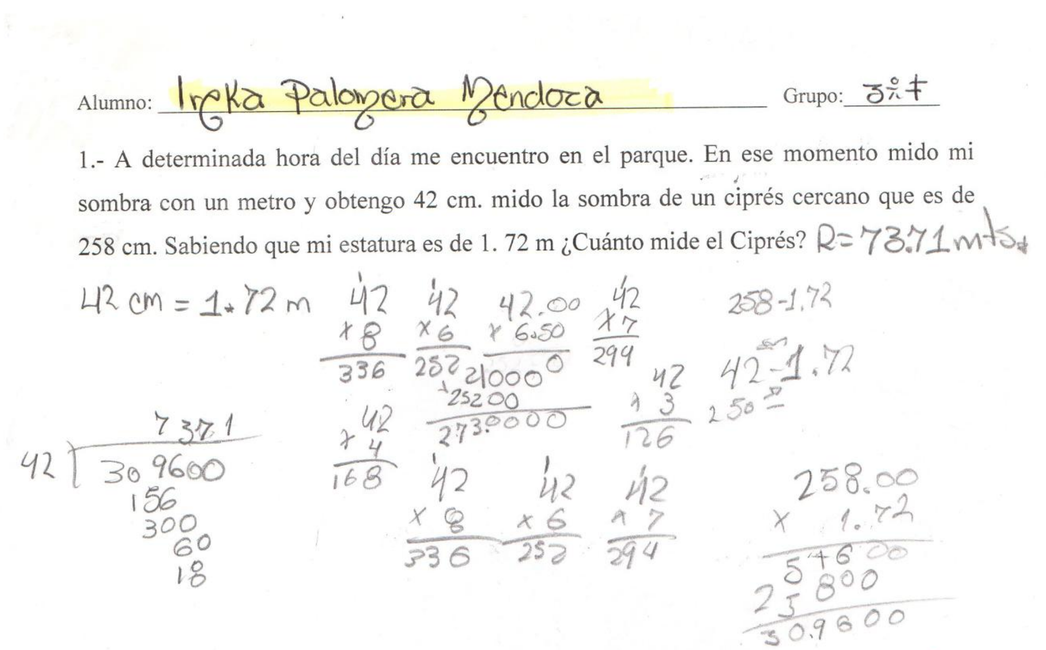
258 ----- 1.72

42 ----- 1.72

Abajo del número 42 anota el número 250 el cual es muy cercano al 258 cm de la sombra del árbol, en realidad abajo del 42 debería de ir el número 252. De esta manera se establece que si para 42 x 6 = 252, las siguientes operaciones

258 x 1.72 = 30.9600   3096 ÷ 42 = 7371

dan evidencia que no se sabe qué hacer con el seis encontrado, sin embargo la multiplicación y la división planteada podría resolver correctamente el problema, pero al realizar el algoritmo de la multiplicación se olvida multiplicar el número siete dando resultados incorrectos.


Alumno: Ireka Palomera Mendoza Grupo: 3°7

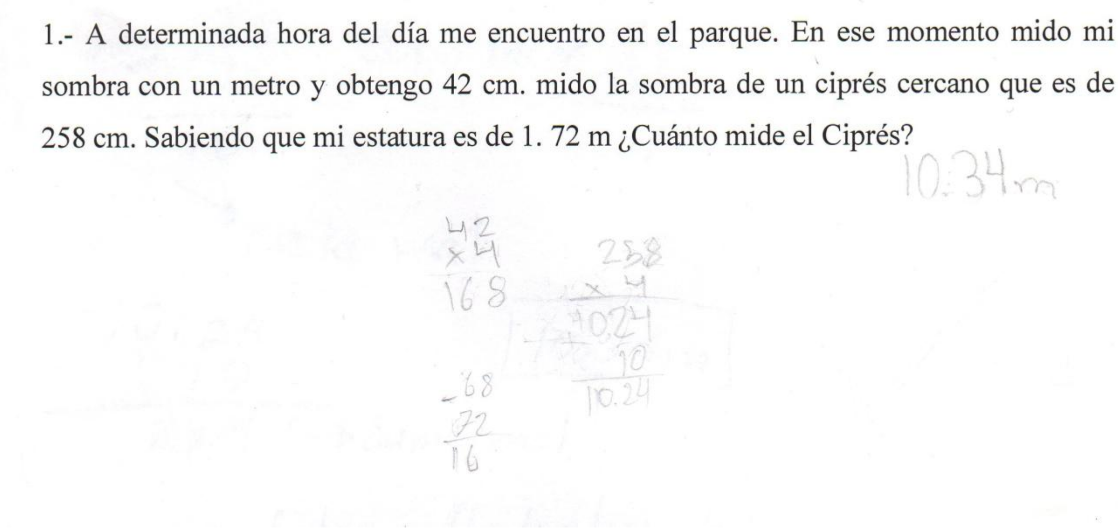
1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés? R= 73.71 mts.

42 cm = 1.72 m

3.2) Otro caso muy similar al anterior, se utiliza el factor multiplicativo igual a cuatro y este lo multiplica por el valor de "mi sombra" y por el de la sombra del Ciprés obteniendo

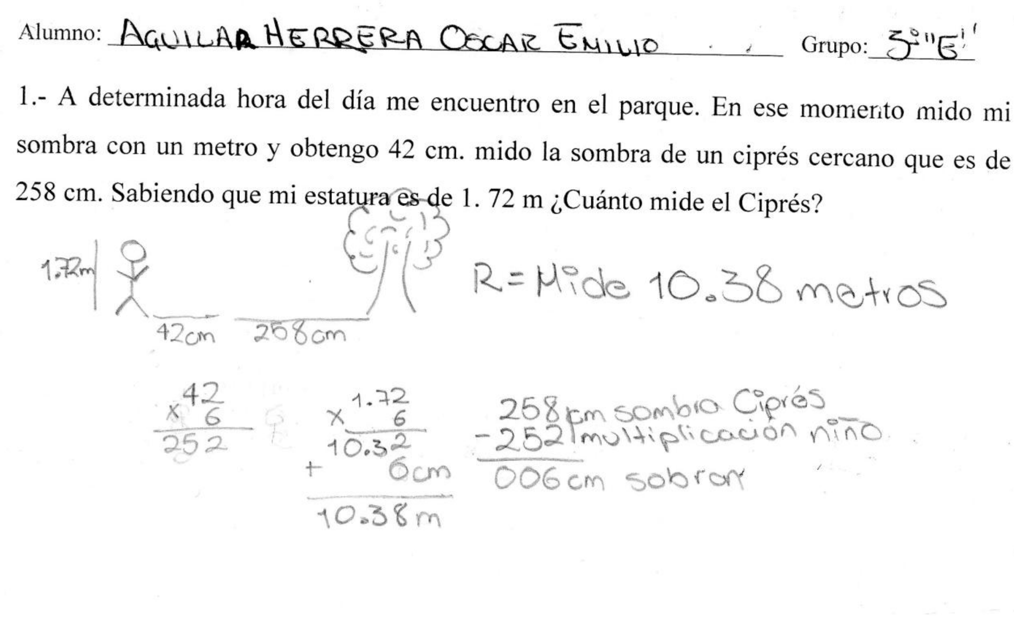
42 x 4 = 168   y   258 x 4 = 10.24

al resultado de 42 x 4 = 1.68 le resta mi estatura que es de 1.72, utilizando únicamente la parte decimal, esta operación es expresada por 68 - 72 = 16, este resultado se lo suma a el resultado de 258 x 4, para obtener finalmente 10.34 m. (suma mal).



1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

3.3) En el siguiente ejemplo, el alumno encuentra que "K" = 6 ya que al multiplicar mi sombra, obtengo casi la sombra del árbol, enseguida él resta, la sombra del árbol menos el resultado de la multiplicación de mi sombra por seis, al resultado de la resta que es seis centímetros, se al resultado de la multiplicación de mi estatura por seis, para lo cual obtiene 10.38 cm.



Alumno: AGUILAR HERRERA OSCAR EMILIO Grupo: 3° "E"

1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

4) Porcentaje

Un alumno resuelve cuatro de los cinco problemas por medio de una regla de tres, utilizando porcentajes. El porcentaje está representado utilizando "mi estatura" como el 100% y desea conocer qué porcentaje es "mi sombra" de "mi estatura". por lo cual establece:

$$\begin{array}{lcl} 172 & \text{———} & 100 \\ 42 & \text{———} & 24.4 \end{array}$$

obteniendo que la sombra del árbol representa el 24.4 % y con este valor se pretende encontrar el 100% pero de la altura del árbol por lo que se plantea que:

$$\begin{array}{lcl} 24.4\ \% & \text{———} & 258 \\ 100\% & \text{———} & \boxed{} \end{array}$$

el valor dado al Ciprés es de 10.2 m lo cual representa una buena aproximación de su valor real, ya que al revisar los algoritmos hay errores al realizar las operaciones.

El siguiente ejemplo es del alumno que resolvió cuatro problemas de los cinco utilizando el porcentaje.

Alumno: Pérez Torres Marco Antonio Grupo: 3°F

1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

172 - 100
42 - 24.4

258 - 24.4
70.2 - 100

R= El cipres mide 70.2 m. de alto.

2.- En el centro de la plaza de mi pueblo hay un mástil del que ondea una bandera. Entre el mástil y yo coloco, en el suelo un espejo y me alejo de el hasta que vea en el espejo la punta superior del mástil. En ese momento mido: mi distancia al espejo que es de 230 cm, la distancia del espejo al mástil que es de 854 cm, y lo que yo mido, sólo hasta mis ojos, que es de 1.68 m. ¿Cuánto mide el mástil de la plaza?

230 - 100
168 - 73

854 - 100
607.12 - 73

R= 607.12cm

1

En general el resultados del análisis a los cinco problemas de proporcionalidad que los alumnos resolvieron, se muestra que se puede recurrir a conceptos como la "regla de tres", el porcentaje, la semejanza, a encontrar una constante de proporcionalidad y de las escalas como elementos intuitivos que sirvan de andamiaje para ir formalizando el concepto de proporcionalidad, según lo mostrado en el esquema de Pozueta.

CONCLUSIONES

En esta tesis se trató de comprender el tipo de ideas matemáticas intuitivas que aparecen al realizar trabajo de medición indirecta. Estas ideas se desarrollaron para educar la intuición de alumnos de tercer grado de secundaria, para favorecer el trabajo que es mencionado como razonamiento intuitivo en los Planes y Programas de estudio 2011, usando un marco derivado de los planteamientos de Fischbein. En el trabajo se pusieron en práctica cinco actividades de medición indirecta ejecutados por 55 alumnos. A continuación exponemos las conclusiones de los análisis realizados en el capítulo precedente, organizadas alrededor de las preguntas de investigación.

Respuestas a las Preguntas de Investigación

¿Qué ideas poseen los alumnos sobre el concepto de medición, de los instrumentos de medición y de la medición indirecta?

En principio, los alumnos no tienen una idea clara de lo que significa medir, ya que explican con ejemplos el cómo se efectúa una medición, en donde la palabra (medir) evoca más una medida de longitud y por extensión área y volumen, generando que los instrumentos de medición se centralice en aquellos que miden longitudes lineales (regla, flexómetro y cinta métrica). Si bien, es cierto que los alumnos no tienen una imagen completa de lo que significa una medición indirecta, si poseen ideas parciales o aproximadas de lo que significa este tipo de mediciones. En general muestran a una medición indirecta como aquella en la que necesariamente hay que realizar un cálculo y seguir una fórmula ya establecida.

Al realizar los alumnos un poco de reflexión sobre los diversos instrumentos de medición que existen pueden reconocer más instrumentos que van más allá de la regla y transportador.

¿Cómo un alumno interpreta y opera una serie de datos obtenidos con un instrumento de medición, con el propósito de obtener otras magnitudes, a través de un proceso de medición indirecta?

Antes que nada, a los alumnos les gusta salir a trabajar al patio, ya que es una actividad poco realizada en la materia de matemáticas. En cuanto a la interpretación de datos obtenidos con el instrumento, si al alumno se le proporciona una hoja impresa de la actividad con un gráfico, con cierta facilidad puede establecer una conexión entre lo real y lo impreso, pero realmente el vínculo entre lo que está pasando en el espacio tridimensional al bidimensional y viceversa, no se muestra al momento de obtener las distancias inaccesibles, ya que no hacen los cálculos correspondientes y en la mayoría de los casos estiman la distancia.

¿Cómo se presenta el pensamiento matemático en los alumnos de tercer grado de secundaria?

Como parte del pensamiento matemático, los alumnos describen, representan y explican sus resultados a una tarea matemática asignada utilizando diferentes métodos o estrategias. Sus representaciones en algunas ocasiones no contienen elementos matemáticos, es decir, representan los objetos que intervienen en una actividad, de manera aislada; sin establecer las relaciones que existen entre ellos. En general, sus representaciones pueden ser de índole geométrico, algebraico, aritmético e icónico, en donde algunas veces se presentan de manera individual o en diferentes combinaciones de las cuatro.

En cuanto a sus descripciones escritas de una actividad, frecuentemente son pobres en conceptos matemáticos. Pocas veces escriben más de la mitad de una hoja tamaño carta para una descripción. Estas pueden ser de dos tipos, realizando una lista de los objetos que intervienen en la actividad o construyendo enunciados simples.

En lo que se refiere a la resolución de problemas, presentan una diversidad de métodos en la solución de los problemas de proporcionalidad, en donde los más frecuentes se pueden clasificar en procesos aditivos como sumas y restas; procesos multiplicativos como "regla de tres" y encontrar un factor constante.

En cuanto a las conexiones que los alumnos pueden realizar sobre los contenidos matemáticos de la proporcionalidad en las mediciones indirectas, vemos que establecen relaciones esquemáticas con lo aritmético o en algunas ocasiones con el álgebra y la geometría.

¿Qué ideas intuitivas tienen los alumnos de nivel secundaria, relacionados al concepto de proporcionalidad?

Las ideas intuitivas que presentan los alumnos sobre el concepto de proporcionalidad, son aquellas que se refieren a los factores de inmediatez, como lo son la visualización, ya que los alumnos presentan cierto nivel de habilidades representativas y de comunicación, tanto de manera oral como escrita. De manera escrita, al dar solución a los problemas o tareas planteadas por medio de un gráfico, un algoritmo o una ecuación; de manera oral, al explicar con sus propias palabras este concepto. Otros factores presentes son el anclaje y la representatividad, ya que hay contenidos matemáticos que los alumnos traen muy arraigados en su bagaje pre conceptual y cultural como lo es la regla de tres.

En consecuencia, los alumnos hacen uso de modelos esquemáticos que representan al problema y ayudan a la comprensión y solución del mismo. Sus modelos paradigmáticos serían el uso de la "regla de tres", ya que para la mayoría de los alumnos problemas de índole proporcional o de medición indirecta se solucionan de ésta manera.

Resultados que muestran ideas intuitivas encaminadas hacia la noción de proporcionalidad lineal.

Estas ideas son las siguientes:

1) Los alumnos utilizan la regla de tres, las escalas, establecen algunas relaciones de semejanza e identifican una constante, como algunas de las estrategias para resolver problemas de proporcionalidad que involucran la medición indirecta.

2) Algunas veces no se aprecia de manera clara las relaciones de proporcionalidad para dar solución al problema.

3) En otras ocasiones se obtiene correctamente una constante pero no se sabe cómo se utiliza o que significa.

4) Los alumnos hacen uso de un proceso aditivo para obtener valores desconocidos, los cuales se aproximan primero a los valores que son dato, y después son sumados tantas veces como sea necesario para encontrar el valor faltante.

5) Los alumnos buscan un factor multiplicativo a base de prueba y error.

6) En algunas actividades se hace uso de la estimación y de la aproximación en las medidas.

7) Otras veces se utilizan la combinación de tres operaciones que involucren la resta, la suma, la multiplicación o la división.

8) Los procesos multiplicativos utilizados para dar solución al problema son los menos utilizados.

¿Qué papel juega la construcción de los instrumentos de medición que los estudiantes construyen?

Construir un instrumento de medición (clinómetro) para algunos alumnos puede ser una actividad entretenida y fuera de lo común en la materia de matemáticas. El problema aparece cuando se tiene la idea que el instrumento va a facilitar la comprensión de cierto contenido matemático, lo cual, en nuestro caso, puede ser un obstáculo, sobre todo para poder apreciar los elementos intuitivos que los alumnos exhiben. Esto no significa que el instrumento no sea útil, sino que hay conceptos implícitos dentro de éste y con los cuales el alumno tiene que estar consciente para poder comprender su funcionamiento.

Uno de los propósitos de que el alumno construya su propio instrumento, no solamente es encaminarlo al cálculo de una medición, sino que, tenga la oportunidad de sentir o experimentar en la medida de lo posible, el hecho de que muchos de los instrumentos de medición han sido construcciones creativas, reformadas una y otra vez hasta ser con el tiempo más sofisticados.

Otros propósitos, es que el alumno experimente de manera real y no ficticia, un trabajo matemático que involucra nociones de física y matemática, y que trabaje en equipo, en donde los factores de empatía, organizacionales y de responsabilidad son factores necesarios para la obtención de resultados medianamente correctos. Estas últimas características, que tienen que ver más con la parte social del alumno, son de importancia al tratar de resolver una tarea.

Parece ser que en el aprendizaje significativo de conocimientos nuevos desempeña un papel importante el capital cultural previo con que cuenta el aprendiz y que esté relacionado con lo nuevo por aprender. Por capital cultural entendemos el cúmulo de experiencias de vida, de manera amplia, que ha tenido un individuo; en particular las relacionadas con el área cognitiva, la actitudinal, y de habilidades y destrezas.

En este sentido, si se está interesado en el aprendizaje de nuevos conocimientos relacionados con la noción de proporcionalidad utilizando la medición indirecta, es deseable que el alumno tenga, dentro de sus experiencias, experiencias de vida relacionadas con la medición indirecta.

La medición indirecta, cuando se lleva a cabo de manera práctica, involucra tanto saberes procedimentales como conceptuales. Para el caso que nos ocupa, los aspectos procedimentales (saber en el sentido de "cómo") involucrados en la medición indirecta de distancias está el conocimiento de la construcción y el uso de diferentes dispositivos prácticos para realizarla: en un caso un espejo y en el otro un clinómetro.

Saber usar el espejo conlleva utilizar de manera práctica algunos principios de la óptica geométrica que sirven para establecer la posición en que se colocará el espejo dependiendo de la posición relativa del objeto por medir y del observador que utilizará el espejo o de la posición del observador si es que el espejo se coloca en un lugar fijo de antemano. Saber utilizar "visuales" definidas por la posición del ojo del observador, la del espejo y uno de los puntos que determinan la longitud por medir.

En la medición indirecta, es difícil abordar los aspectos matemáticos (la teoría matemática, lo conceptual matemático) sin experiencias prácticas de las cuales lo conceptual es representación, simbolización o modelo. Manipular en un espacio de tres dimensiones un sistema de objetos que constituyen un aparato para medir y después representarlo en una hoja de papel mediante objetos y símbolos matemáticos es un proceso complejo.

Experimentar con objetos materiales como lo son un espejo, un árbol, una persona un clinómetro con su escala, péndulo, mirilla y superficie en que se montan estos elementos y entrecerrar un ojo y el otro colocarlo en la mirilla y orientar ésta en la dirección deseada y registrar el ángulo que determina el péndulo, casi todo al mismo tiempo, realizado utilizando ambas manos, demanda conductas psicomotrices "finas" que sólo con entrenamiento se alcanza. Esta experiencia práctica es el principio de lo que después será concepto, idea, constructo mental. La tarea no es simple. La práctica en sí no es concepto, para que se trasmute en esto hay que usar mediadores como la palabra, la representación, la simbolización y el modelo, pero que sin la experiencia práctica tendría escasos referentes para anclarse en la cognición de un alumno de 13 años.

Reflexiones finales.

De acuerdo a los resultados obtenidos, es posible afirmar que, en general, los alumnos de tercer grado de secundaria presentan características intuitivas, relacionadas con la intuición educada, correspondiente a concepto de proporcionalidad, las cuales pueden servir para construir resultados más general como el Teorema de Thales y/o la expresión algebraica de la proporcionalidad.

En la medida de lo posible, se ha dado respuesta a las preguntas de investigación, pero es necesario mejorar los instrumentos utilizados en la investigación, tratando lo que se documente, muestre de manera más clara y evidente rastros de comportamiento intuitivo.

Por otro lado, se debe mejorar la construcción y uso de los instrumentos de medición y definir con mayor claridad su papel, dentro de los objetivos de trabajo de investigaciones futuras que se orienten hacia la indagación sobre el papel de la intuición en el proceso de enseñanza- aprendizaje en la matemáticas en el nivel de secundaria.

Bibliografía.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1991). *Materiales para Construir la Geometría. España*: Síntesis.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1995). *Invitación a la Didáctica de la Geometría. España*: Síntesis.

Arenas, J.,Infante, C. (1998). *Geometría y Experiencias*. (pp.44-79). México: Pearson Educación.

Averbuj, E. (1981). *Para Medir, Aparatos y Métodos*. Barcelona: Laia.

Barbera, V. (1980). *Didáctica de las Ciencias Naturales en la Enseñanza Básica*. Madrid: Narcea.

Battista, M. (2007). *The Development of Geometric and Spatial Thinking*. In Frank K. Lester, Jr. (Ed). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp. 843-904). USA: IAP.

Beakman, R. (2006). *One, Some, or None: Finding Beauty in Ambiguity*. Mathematics Teaching in the Middle School. Vol. 11 (7). Pp. 324 – 327

Behr, M., Harel, G., Post, T. and Lesh, R. (1992). *Rational Number, Ration, and Proportion*. In Douglas. A. Grouws (Ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp. 296-331). New York: MacMillan Pu. Co.

Ben-Chaim, D.; Fey, J.; Fitzgerald, W. Benedetto, C,; and Miller, J. (1998). *Proportional Reasoning Among 7th Grades Students With Different Curricular Experience*. Educational Studies in Mathematics. 36 Pp. 247 – 273.

Boyer, C. (1946). *Proportion, Equation, Function: Three Steps in the Development of a Concept.* Scripta Math 12, Pp. 5-13.

Chiu, M. (1996). Exploring the Origins, Uses and Interactions of Students Intuitions Comparing The Lengths of Paths. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 27 (4), Pp. 478-504.

Collete, J. (2000). *Historia de las Matemáticas I*. México: Siglo XXI.

Criado, A., del Cid. R., García, A. (2007). *La Cámara Obscura en la Clase de Ciencias: Fundamento y Utilidades Didácticas.* Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, Vol. 4(1), 123-140.

D´Amore, B. (2005). *Bases Filosóficas, Pedagógicas, Epistemológicas y Conceptuales de la Didáctica de las Matemáticas*. México: Reverté.

Davis, J. (2008). *Connecting Students´ Informal Languaje to More Formal Definitions.* Mathematics Teacher. Vol. 101 (6). Pp. 446 – 450

Descartés, R. (1974). *Discurso del Método: Para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias.* Madrid: Revista de Occidente.

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número*. España: Síntesis.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. USA: D. Reidel Pu. Co.

Fischbein, E. (1987). Intuition *in Science and Mathematics: An Educational Approach. Holland*: D. Reidel Pu. Co.

Flores, A. (2007). *Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato*. Educación Matemática. Vol. 19(1), pp. 63-98.

Gay, D. (1998). *Geometry by Discovery*. (pp. 52-58). USA: John Wiley and Sons.

Geddes, D., et al. (1995). *Measurement in the Middle Grades*. USA: NCTM.

Gette-Alonso, J. y del Barrio, V. (1996). *Medida y Realidad*. (pp.61- 96). México: Pearson Educación.

Hanna, G. (1996). *The Ongoing Value of Proof*. España, Valencia: PME. Vol. 1.

Hanna, G. (1996). *Proof and Proving*. In Bishop, A. et al, International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 877-908.

Hanna, G. (2008). *Beyond verification: Proof can teach new methods*. http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG1/Papers/HANNA.pdf

Heinz, K. and Sterba-Boatwright, B. (2008). *The When and Why of Using Proportions.* Mathematics Teacher. Vol. 101 (7). Pp. 528 – 533

Hoffer, A. (1998). *Ratios and Proportional Thinking*. In Thomas R. Post. (Ed). Teaching Mathematics in Grades K-8. (pp.285-313). USA: Allyn and Bacon, Inc.

Jiménez, K. (2008). *Building Intuitive Arguments for the Triangle Congruence Conditions*. Mathematics Teacher. Vol. 101 (6). Pp. 463 – 466

Johsua, S. (2005). *Introducción a la Didáctica de las Ciencias y la Matemática*. Argentina: Colihue.

Kahneman, D. (2002). *Maps of Bounded Rationality: A Perspective on Intuitive Judgement and Choice*. Princeton: Princeton University, Departament of Psychology.

Lamon, S. (2007). *Rational Numbers and Proportional Reasoning*. Toward a Theorical Framework for Research. In Frank K. Lester, Jr. (Ed). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp. 629-666). USA: IAP.

Lannin, J. Barker, D. and Townsend, B. (2006). *Why, Why Should I Justify?* Mathematics Teaching in the Middle School. Vol. 11 (9). Pp. 438 – 443

Lanius, C and Williams, S. (2003). *Proportionality: A Unifying Theme For The Middle Grades*. Mathematics Teaching in the Middle School. 8 (8).

Madden, S. and Díaz, R. (2008). *Spatial Reasoning and Polya´s Five Planes Problem*. Mathematics Teacher. Vol 102 (2). Pp. 128 – 132.

Manual de las Unesco para la Enseñanza de las Ciencias. (1966). Buenos Aires: Sudamericana.

Maxwell, S. (2006). *Measuring Tremendous Trees: Discovery in Action.* Mathematics Teaching in The Middle School. 12 (3). Pp. 132-139

NCTM, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

Osorio, L. (2003). *Si No Demuestro…¿Enseño Matemáticas?*. Educación Matemática. 15(2), 163-178.

Oliva, J. (2008). *Qué Conocimientos Profesionales Deberíamos Tener los Profesores De Ciencias Sobre el Uso de Analogías*. Eureka. Vol.5, pp. 15-28.

Perraudeau, M. (2001). *El inconsciente cognitivo. Piaget hoy*. México: FCE. pp. 128 - 136.

Post, T., Cramer, K. and Currier, S. (1992). *Learning and Teaching Ratio and Proportion*: *ResearchImplications*. In Douglas T. Owens (Ed). Research Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics. (159-178). New York: MacMillan Pu. Co.

Quinn, R. and Ball, T. (2007). Explore*, Conjeture, Connect, Prove: The Versatility of a Rich Geometry problem.* Mathematics Teacher. 101 (1). Pp. 8-11

Rubel, L. and Zolkower, B. (2007). On Blocks, Stairs, and Beyond Learning About the Significance of Representations. Mathematics Teacher. 101 (5). Pp. 340 – 344

Ruiz, E. (2002). *Estudio de Estrategias de Solución y Una Propuesta Para la Enseñanza de Razón y Proporción*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav.

Sánchez. M. (2008). *¿Con Qué Saboreamos?: Tareas y Experiencias para un Taller de Ciencias.* Revista Eureka. Vol. 5(2), pp. 200-211.

Santiago, J y Cante, F. (2009). *Intuición, Sesgos y Heurística en la Elección*. Cuadernos de Economía. 28(50), pp.1-31.

SEP. (2006). *Planes y Programas de Estudio*. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

SEP. (2011). *Planes y Programas de Estudio*. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

Siu, M. (1995). *Euler and Heuristic Reasoning. In Learn From the Masters*. (pp. 145 - 60) USA: The Mathematical Association of America.

Smith, D. (1958). *History of Mathematics.* (pp. 344-377). USA: Dover.

Solomon, A. (1987). *Proportion: Interrelations and Meaning in Mathematics.* For the Learning of Mathematics. 7(1), pp.14-22.

Treagust,D., Chittleborough, G., and Mamiala, T. (2002). *Students´ Understanding of the Role of Scientific Models in Learning Science*. International Journal of Science Education, 24(4),357-368.

UNESCO. (2005). ¿Cómo Promover el Interés por la Cultura Científica?. Chile: Andros Impresores.

Valdemoros, M. (1993). *La Costrucción del Lenguaje de las Fracciones y de los Conceptos Involucrados en él*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Waldegg, G; Villaseñor, R; García, V. y Montes, D. (2008). *Matemáticas en Contexto 1*. México: Esfinge.

Waldegg, G; Villaseñor, R; García, V. y Montes, D. (2008). *Matemáticas en Contexto 2*. México: Esfinge.

Waldegg, G; Villaseñor, R; García, V. y Montes, D. (2008). *Matemáticas en Contexto 3*. México: Esfinge.

Weston, A. (1999). *Las Claves de la Argumentación*. Barcelona: Ariel.

Williams, D. (2007). *The What, Why, and How of Contextual Teaching in a Mathematics Classroom*. Mathematics Teacher. 100 (8). Pp. 572 – 575

ANEXO 1

E.S.T 55

ALUMNO: ____

CUESTIONARIO SOBRE MEDICIÓN.

1.- Define qué es medir *Conocimiento de la medición*

____

____

2.- ¿Qué cosas se pueden miden? *Conocimiento de la medición*

____

____

3.- Menciona algunos instrumentos de medición conozcas.

Conocimiento de la medición

____

4.- Imagínate que quieres medir un árbol muy grande ¿Qué método utilizarías para medirlo? *Forma o métodos de medición*

____

____

5.- En forma aproximada: ¿Cuáles son las medidas del salón de clases?

Estimaciones

____

6.- En forma aproximada: ¿Cuánto mide el perímetro del pizarrón?

Estimaciones

____

7.- ¿Cómo podrías medir el ancho de un río, si no tienes una lancha para cruzar de un lado a otro y es muy peligroso estar dentro de él?

Forma o método de medición

____

8.- ¿Qué es una medición directa y qué es una medición indirecta?

Diferencia entre las mediciones directas y las indirectas

____

ANEXO 2

<u>“MIDIENDO MIS PASOS”</u>

ACTIVIDAD 2. Grupo: ______________

Alumnos:

Material:

- Hoja de trabajo.
- Cinta métrica.
- Lápiz.
- Gis.

Organización del trabajo: En equipo de cuatro personas, realicen la siguiente actividad siguiendo las instrucciones en el patio de la escuela.

1. Designa un alumno para realizar las anotaciones, dos alumnos para tomar medidas y otro para caminar cierto número de pasos.
2. El alumno que es designado a caminar, lo hará con pasos normales, es decir, ni muy cortos ni muy largos.
3. Completar la siguiente tabla con los datos que se te piden.

No. de pasos caminados	**Distancia recorrida (m)**
4	
15	
100	

4.- Realiza un croquis, dibujo o esquema que represente la actividad que acaban de realizar.

Parte 2 **En clase**: Organizados en equipos, contesten las siguientes preguntas.

1.- Imaginen que desean conocer cuánto miden uno y diecisiete pasos de su compañero de equipo y no tienen manera de regresar a medir fuera del salón, ¿qué tienen que hacer? (Describe el procedimiento que realizarían)

Anexo 3

Método del espejo

Material:

• Metro o cinta métrica.

• Un espejo.

• Un block de notas y un lápiz para anotar las medidas.

Instrucciones:

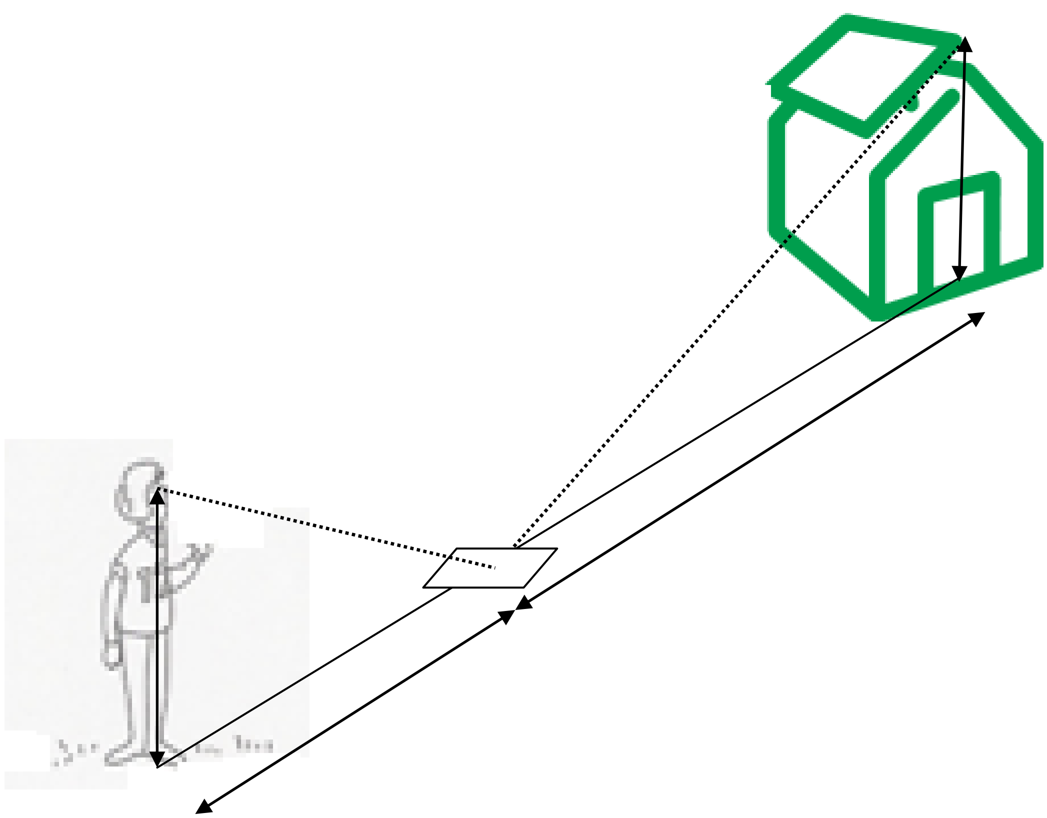
1.- Medir la altura a la que están sus ojos del observador y anotarlo en la tabla.

2.- Colocar el espejo en el suelo entre el observador y el objeto que se quiere medir. El observador se deberá mover hacia atrás hasta que vea en el espejo la parte superior del objeto que se quiere medir. Medir las distancias entre el objeto y el espejo, así como entre el observador y el espejo. Anotarlas en la tabla apropiada.

3.- Repetir las medidas, cambiando de posición el espejo y manteniendo el mismo observador.

4.- Repetir las medidas, cambiando de observador (todos los miembros del grupo)

Observa el siguiente dibujo y con ayuda de la siguiente tabla anota la relación entre la tabla y el dibujo.



Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)

Actividad tres. Obtén los datos (medición) que completen la tabla, realiza el gráfico para cada tabla y calcula la altura del objeto desconocido. No olvides anotar de que objeto se trata.

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)

Nombre del observador	Altura del piso a los ojos del observador (m)	Distancia entre el objeto y el espejo (m)	Distancia entre el observador y el espejo (m)	Altura calculada (m)

Anexo 4

Clinómetro.

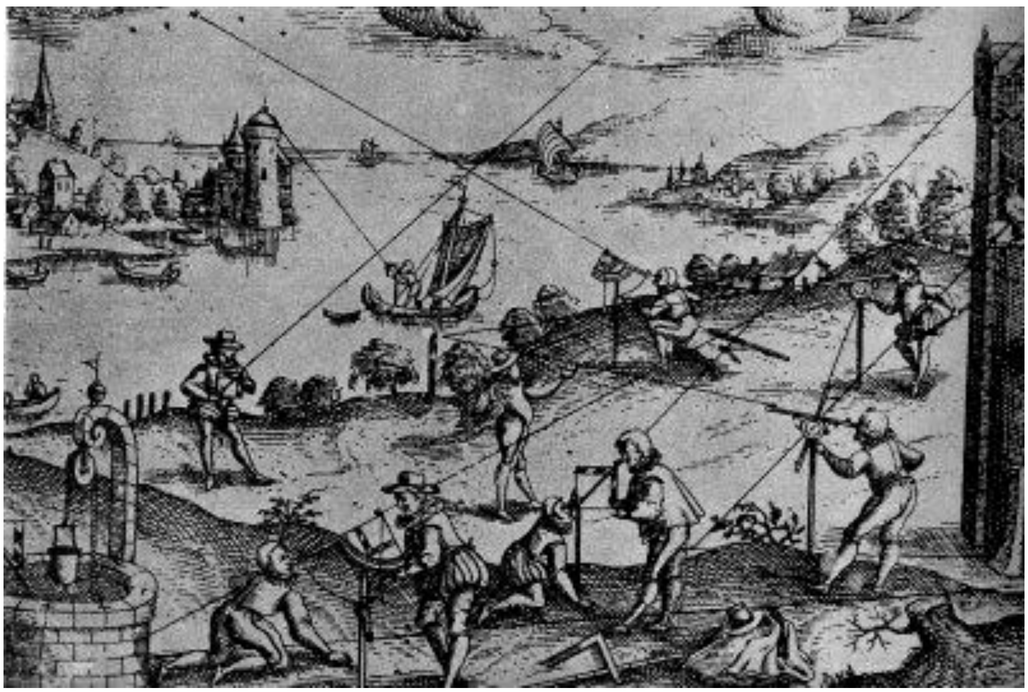
Alumnos: ____ No. De Equipo: _______

____

____

____

Observen el siguiente dibujo, graben y describan lo observado.



Construcción y uso del clinómetro.

Material:

- Un transportador de plástico.
- Una tuerca.
- Un trozo de hilo cáñamo de 15 cm.
- Silicón líquido.
- Un popote o el barril de una pluma.
- Madera de fibracel de 20 x 20 cm.
- Copia de escala angular para el clinómetro.
- Pegamento blanco.

Antecedentes:

Un clinómetro es una versión simplificada de un cuadrante y un sextante. Un cuadrante es un instrumento medieval que sirve para medir distancias y un sextante, un instrumento para localizar la posición de un barco. Este dispositivo es usado para medir la altura de construcciones, montañas y árboles, así como ángulos de inclinación desde 0^o a 90º.

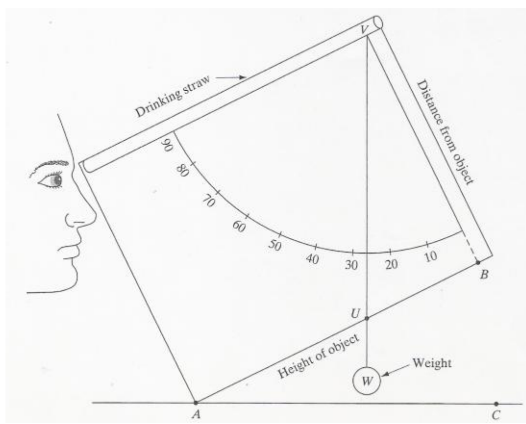


Fig. 1

∡BCA es el ángulo de elevación del clinómetro.

∡BCA y ∡BVU son congruentes.

Esta característica hace útil al clinómetro

Construcción:

Para la construcción del clinómetro observen la figura 1 y sigan los pasos.

1.- Con el resistol blanco pega la copia del clinómetro en la madera de fibracel.

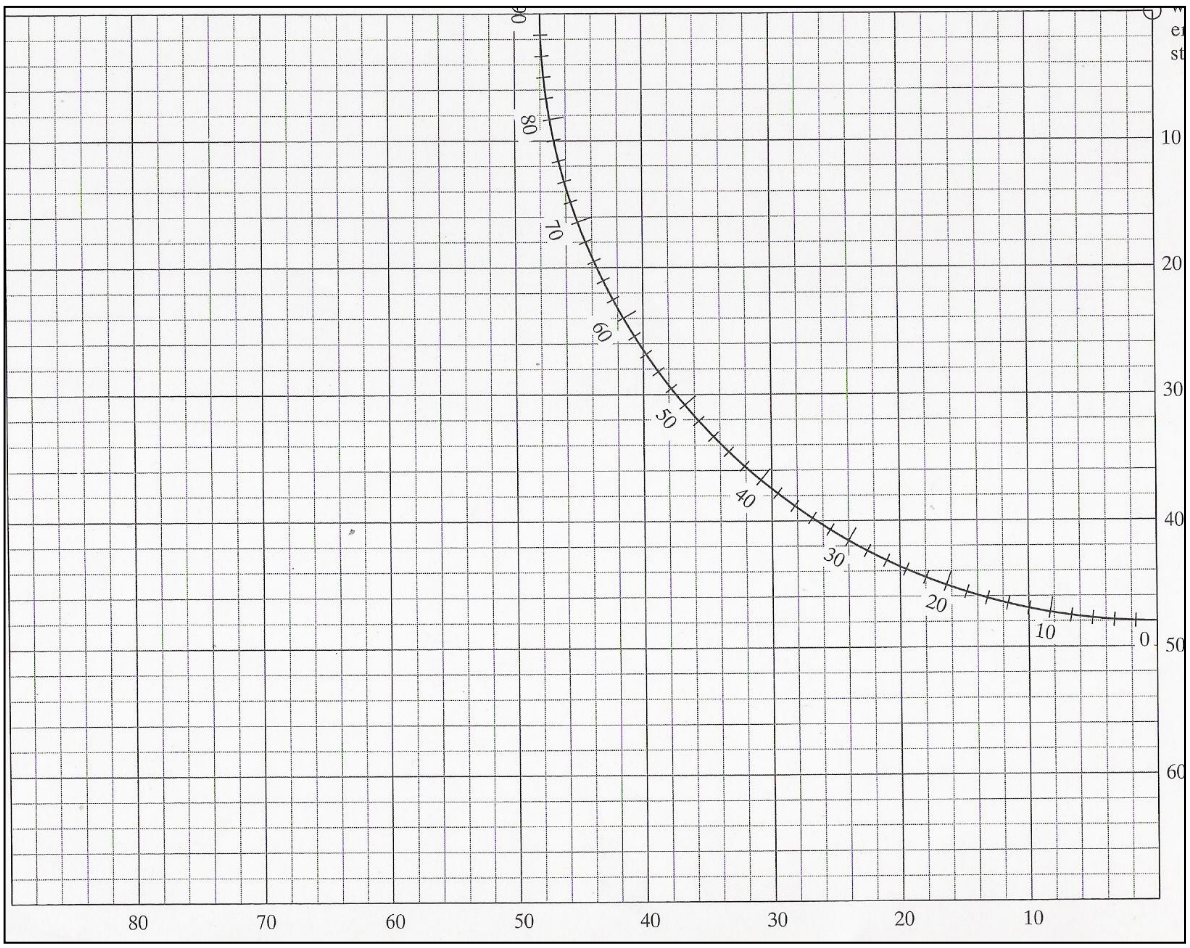
2.- El popote se pega en la parte superior de la madera.

3.- Amarra el hilo cáñamo en la tuerca.

4.- Viendo de frente la escala del clinómetro, pega en la parte superior derecha el extremo contrario del hilo que sujeta a la tuerca.

5.- Analiza con detenimiento el clinómetro y describan todo lo que observan.

Escala para el clinómetro.



Problema

Se desea encontrar la altura de un árbol de la escuela, como se muestra en la siguiente imagen.

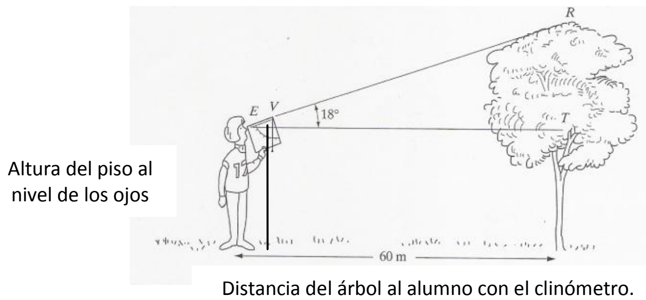


Fig.2

Material:

Para realizar la actividad de medición, necesitaran el clinómetro y una cinta métrica.

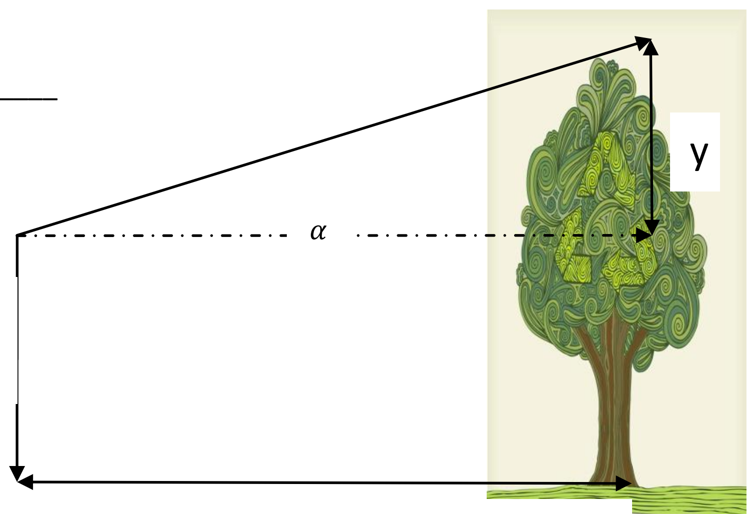
Desarrollo:

1.- En equipo de cuatro alumnos, elijan un alumno que tome los datos en papel, otro que utilice el clinómetro y dos para medir las distancias.

2.- Midan la estatura del alumno que va a utilizar el clinómetro desde el piso a la altura de los ojos.

3.- En el siguiente dibujo, hacen falta algunas medidas, encuéntralas utilizando la cinta métrica y el clinómetro.

Ángulo dado por el clinómetro (α): _____



Altura del alumno desde el piso a la altura de los ojos: ____________

Distancia desde la base del árbol al alumno con el clinómetro: __________

Alumnos:

Con los datos anteriores, ¿Cómo encuentras la altura del árbol?

ANEXO 5

Problemas de Proporcionalidad

Alumno: ____ Grupo:_________

1.- A determinada hora del día me encuentro en el parque. En ese momento mido mi sombra con un metro y obtengo 42 cm. mido la sombra de un ciprés cercano que es de 258 cm. Sabiendo que mi estatura es de 1. 72 m ¿Cuánto mide el Ciprés?

2.- En el centro de la plaza de mi pueblo hay un mástil del que ondea una bandera. Entre el mástil y yo coloco, en el suelo un espejo y me alejo de él hasta que vea en el espejo la punta superior del mástil. En ese momento mido: mi distancia al espejo que es de 230 cm, la distancia del espejo al mástil que es de 854 cm, y lo que yo mido, sólo hasta mis ojos, que es de 1.68 m. ¿Cuánto mide el mástil de la plaza?

3.- Una vela de 20 centímetros de largo dura encendida 10 horas:

1. ¿Cuánto tiempo duraría encendida una vela del mismo grueso, pero de ocho centímetros?
2. ¿Cuánto tiempo estaría encendida una vela de diez centímetros?
3. ¿Y una vela de un centímetro?

4.- Alicia quiere reducir una foto para insertarla en un trabajo de la escuela. La foto mide 15 cm de largo por 10 cm de ancho. Quiere ver cómo queda mejor. Si cambia el ancho a 6, a 8, ó a 9 cm, ¿de cuánto tendría que ser el largo en estos tres casos, para que se conserve la misma foto original?

5.- Un poste de tres metros de altura proyecta una sombra de un metro.

1. ¿Cuál es la altura de una torre cercana, que tiene una sombra de cuatro metros a la misma hora del día?
2. ¿Cuál será la altura de un edificio de cuatro pisos cuya sombra mide seis metros a la misma hora?