Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas

Tesis que presenta

Gerardo Josué Cruz Márquez

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Directora de la Tesis: **Dra. Gisela Montiel Espinosa**

Ciudad de México, febrero 2018

Dedicatoria

A mi familia y amigos,

por ser y estar… siempre.

Agradecimientos

Todo aquel que alguna vez ha emprendido un proyecto de este tipo sabe que no son fruto exclusivo del trabajo propio, sino son resultado acumulativo de una variedad de situaciones y personas. Detrás de este proyecto de investigación se encuentra...

*… **una familia**, que –incluso sin entender a cabalidad lo que hago– ha apoyado cada una de mis decisiones y proyectos, sin reparar en que eso implica sacrificar cualquier cantidad de tiempo juntos. A mis padres, Marleny y Gerardo, y mis hermanos, Harold y Sofía, gracias.*

*… **una gran asesora**, que consecuencia de pequeñas e ininterrumpidas acciones se ha ganado mi admiración y respeto como persona e investigadora. Gisela, por tu paciencia, tiempo y ejemplo, y con la mayor estima y admiración de la que soy capaz, gracias.*

*… **un grupo de amigos, compañeros y profesores**, que, durante una reunión, un seminario o un café fortuito –casi sin darse cuenta–, han hecho de un sueño, de una utopía, un proyecto concreto. A todos ustedes, que el espacio y mi destacada memoria no me permite nombrar si antes olvidar a alguno, gracias.*

*… **y un inmenso país**, no tanto por su extensión territorial –casi 18 veces la del mío– como por su gente, por su cultura y por sus tradiciones. A México, a los más de 120 millones de mexicanos que han hecho posible que este proyecto llegue quizá a buen puerto, gracias.*

En algún lugar,
entre las parcelas del norte de México
y las dunas del sur del Perú.

Gerardo Cruz Márquez

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el indispensable apoyo brindado para la realización de esta investigación. Gerardo Cruz Márquez – CVU 748062.

Mi especial agradecimiento al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), a cada una de las personas que lo componen, por brindarme la invaluable oportunidad de formar parte del mejor centro de investigación del país y quizá de Latinoamérica.

Finalmente, agradezco a la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM, Honduras) y la Universidad Autónoma de Baja California (UABC, México) por su confianza y colaboración en este proyecto.

Índice

RESUMEN ... **6**

ABSTRACT ... **7**

INTRODUCCIÓN ... **8**

1. CONSIDERACIONES INICIALES ... **10**

1.1. ANTECEDENTES ... 10

La trigonometría escolar ... *10*

Problemática asociada ... *13*

1.2. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN ... 22

1.3. DEFINICIÓN DE UN PROBLEMA, DE PREGUNTAS Y DE OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN ... 26

Preguntas de investigación ... *28*

Objetivos de investigación ... *28*

2. CONSIDERACIONES TEÓRICAS ... **30**

2.1. UNA POSTURA TEÓRICA ... 31

Cuatro principios ... *32*

Cuatro dimensiones ... *36*

2.2. ELEMENTOS TEÓRICOS PARTICULARES ... 39

Construcción social del conocimiento trigonométrico ... *39*

Un modelo ... *41*

3. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS ... **43**

3.1. SOBRE LA METODOLOGÍA ... 43

Historización de las nociones trigonométricas ... *45*

Dialectización de las nociones trigonométricas ... *52*

3.2. SOBRE EL MÉTODO ... 54

Historización de las nociones trigonométricas ... *54*

Dialectización de las nociones trigonométricas ... *62*

4. UNA HISTORIZACIÓN DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS ... **65**

4.1. ANÁLISIS CONTEXTUAL ... 65

Los hechos astronómicos empíricos ... *65*

De Sirio a Ptolomeo ... *68*

Una síntesis necesaria *101*

4.2. ANÁLISIS TEXTUAL 107

Un antecedente esencial *107*

Sobre nuestras unidades, códigos y categorías de análisis *111*

Análisis Textual del Almagesto *114*

4.3. ALGUNAS CONCLUSIONES 153

5. UNA DIALECTIZACIÓN DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS 156

5.1. LA POBLACIÓN OBJETIVO 156

El Profesorado en Matemáticas *157*

La Educación Media *159*

Una síntesis necesaria *162*

5.2. EL DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES DE AULA 164

5.3. PUESTA EN ESCENA 171

Sobre los participantes y el escenario *171*

Implementación de las actividades de aula *172*

Resultados *175*

5.4. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES 192

6. RESULTADOS 197

7. CONCLUSIONES 202

8. PROSPECTIVAS 203

REFERENCIAS 204

ANEXOS 212

ANEXO 1 212

ANEXO 2 213

Resumen

La presente investigación se enmarca en el estudio de la *Aritmetización de la Trigonometría*, fenómeno que alude al uso exclusivo de las nociones trigonométricas como herramientas técnicas y que acarrea la admisión de un significado lineal y la promoción de un significado aritmético para las mismas, así como la disociación de la geometría y el estudio de la trigonometría.

Para confrontar dicho fenómeno, se requiere de la introducción de nuevos usos de las nociones trigonométricas, usos que devengan en la construcción de significados más amplios y profundos, y en el desarrollo de un pensamiento matemático asociado a las mismas. Pero *¿qué usos le son propios a las nociones trigonométricas?*

Con el fin de atender esta cuestión, proponemos –desde la perspectiva que ofrece la Teoría Socioepistemológica– una *problematización de las nociones trigonométricas*. La primera etapa de esta, la *historización*, se lleva a cabo a través de un análisis de contenido del *Almagesto* de Ptolomeo y tiene como propósito acercarnos a los usos y significados germinales de las nociones trigonométricas. Mientras que la *dialectización*, la segunda etapa, pretende confrontar los resultados de nuestra historización con un escenario didáctico de formación inicial docente.

Como resultados, planteamos que la *medición indirecta de distancias en el contexto del círculo* constituye un entorno de significación natural para las nociones trigonométricas. Además, damos evidencia empírica de que el *trabajo geométrico* –en tanto sinergia de usos como herramienta de construcción, teórica y aritmético-algebraica– sobre nociones geométricas como el círculo, el triángulo rectángulo y la proporcionalidad (sus elementos, propiedades y relaciones) constituye una alternativa viable para la construcción de las nociones trigonométrica, especialmente la cantidad trascendente.

Abstract

This research is framed in the study of the *Arithmetization of Trigonometry*, a phenomenon that refers to the exclusive use of trigonometric notions as technical tools and entails the admission of a linear meaning and the promotion of an arithmetic meaning for them, as well as the dissociation of geometry and the study of trigonometry.

To confront this phenomenon, it is necessary to introduce new uses of trigonometric notions, uses that result in the construction of broader and deeper meanings, and the development of mathematical thinking associated with them. But *what uses are proper to trigonometric notions?*

In order to address this question, we propose –from the perspective offered by Socioepistemological Theory– a *problematization of the trigonometric notions*. The first stage of this problematization, the *historization*, is carried out through a content analysis of the Ptolemy's *Almagest* with the purpose of approaching the germinal uses and meanings of the trigonometric notions. While *dialectization*, the second stage, aims to compare the results of our historization with a didactic scenario of initial teacher training.

As a result, we propose that *indirect distance measurement in the context of the circle* constitutes a setting for the natural significance for trigonometric notions. In addition, we provide empirical evidence that *geometric work* –as a synergy of uses as a construction tool, theoretical tool and arithmetic-algebraic tool– on geometric notions such as the circle, the right triangle and proportionality (its elements, properties and relationships) constitutes a viable alternative for the construction of trigonometric notions, especially the transcendent quantity.

Introducción

No te preocupes si no puedes ver la escalera completa,

solo da el primer paso.

Martin Luther King

A mediados de la Educación Secundaria, los estudiantes emprenden el estudio de unas nociones diferentes, unos entes con apariencia extraña que no responden a las reglas algebraicas construidas a lo largo de toda su trayectoria académica. Ante este panorama, no asombra la gran cantidad de fenómenos reportados alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones trigonométricas.

En el Capítulo 1, denominado *Consideraciones Iniciales*, bosquejamos dicha problemática, perfilamos un problema de estudio y, en consecuencia, puntualizamos un grupo de preguntas y objetivos particulares para esta investigación.

El Capítulo 2, titulado *Consideraciones Teóricas*, se dedica exclusivamente a exponer los fundamentos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, perspectiva teórica desde la cual se posiciona el presente estudio, así como de algunas herramientas y constructos particulares que ella nos brinda y que serán de ayuda para abordar las preguntas y objetivos planteados.

Mientras que en el Capítulo 3, nombrado *Consideraciones Metodológicas*, posicionamos a la *problematización de la matemática* como nuestro principal andamiaje metodológico y explicitamos las decisiones metodológicas tomadas, así como los métodos puestos en juego a causa del presente estudio.

En el Capítulo 4 y 5, denominados *Una Historización de las Nociones Trigonométricas* y *Una Dialectización de las Nociones Trigonométricas*, respectivamente, presentamos los resultados de las dos etapas o fases principales de nuestra problematización de las nociones trigonométricas.

Por su parte, el Capítulo 6, que lleva por nombre *Resultados*, contiene los principales aportes del presente estudio, en tres sentidos: a nivel de disciplina, a nivel de teoría y a nivel de línea de investigación.

Finalmente, en los Capítulos 7 y 8, titulados *Conclusiones* y *Prospectivas*, respectivamente, incluyen las reflexiones finales de nuestra investigación y algunas interrogantes y precisiones que emergieron en el desarrollo de la misma, y que consideramos de suma importancia para posteriores estudios de la disciplina, de la teoría y/o la línea de investigación.

1. Consideraciones Iniciales

Si he logrado ver más lejos,
ha sido porque he subido a hombros de gigantes.
Isaac Newton

1.1. Antecedentes

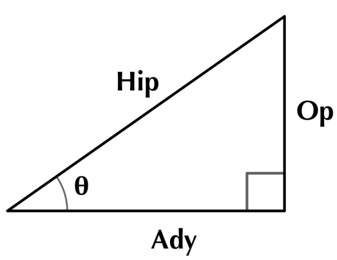
De manera general, y sin entrar en debate acerca de su profundidad y alcance, los resultados de los países latinoamericanos en las pruebas estandarizadas nacionales e internacionales traslucen una problemática en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles de educación formal. Esto parece agudizarse en la asignatura de Trigonometría, donde se ubican las primeras nociones de la matemática escolar que los estudiantes no pueden abordar mediante herramientas algebraicas (Weber, 2008).

Ante esta situación, numerosas investigaciones en nuestra disciplina se han interesado en examinar los fenómenos presentes en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las nociones trigonométricas a diversos niveles escolares. Dentro de estas, son de nuestro especial interés –en primera instancia– aquellas que nos ayuden a comprender cómo viven las nociones trigonométricas en la escuela.

La trigonometría escolar

El estudio de la trigonometría en la escuela comienza a mediados de la Educación Secundaria (estudiantes entre 12 y 15 años) con la introducción de las razones trigonométricas, precedida –de forma general– por la definición, construcción y medición de ángulos, así como por el estudio de la proporcionalidad, la congruencia y la semejanza (Maldonado, 2005; Jácome, 2011; Montiel, 2011, 2013; Montiel y Jácome, 2014). En este punto, la trigonometría constituye un tópico de la clase de Geometría o de cursos propedéuticos al Cálculo, antes que un espacio pedagógico independiente (Bueno-Ravel y Gueudet, 2009; Lutzer, Maxwell y Rodi, 2007 en Mesa y Herbst, 2011; Mesa y Goldstein, 2016).

De forma habitual, la introducción de las razones trigonométricas se da mediante el método de enseñanza del triángulo rectángulo (Weber, 2008; Montiel y Buendía, 2013; Scholz, 2014; Montiel y Jácome, 2014), según el cual, se definen como relaciones existentes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo (Figura 1). Así, por ejemplo, el seno de un ángulo agudo queda determinado por el cociente entre la longitud del lado opuesto a dicho ángulo y la longitud de la hipotenusa del triángulo en cuestión.



$$\mathbf{sen}\,\theta = \frac{\mathbf{Op}}{\mathbf{Hip}} \quad \mathbf{cos}\,\theta = \frac{\mathbf{Ady}}{\mathbf{Hip}} \quad \mathbf{tan}\,\theta = \frac{\mathbf{Op}}{\mathbf{Ady}}$$

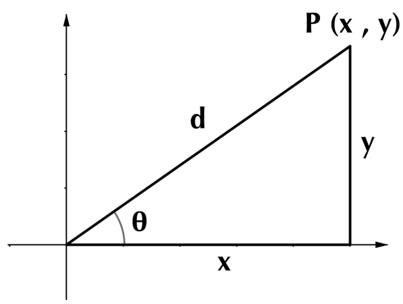
$$\mathbf{csc}\,\theta = \frac{\mathbf{Hip}}{\mathbf{Op}} \quad \mathbf{sec}\,\theta = \frac{\mathbf{Hip}}{\mathbf{Ady}} \quad \mathbf{cot}\,\theta = \frac{\mathbf{Ady}}{\mathbf{Op}}$$

***Figura 1*. Definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo**

Estas definiciones se suceden con frecuencia del uso de mnemotecnias, un ejemplo de ellas es SOHCAHTOA (Kendal y Stacey, 1998; Cavanagh, 2008; Steer, Vila y Eaton, 2009; Scholz, 2014), la que asocia de forma acróstica las definiciones aludidas para el seno, coseno y tangente de un ángulo agudo en el triángulo rectángulo.

Para dar por terminado el estudio de la trigonometría en la Educación Secundaria, se utilizan las definiciones de las razones trigonométricas y las mnemotecnias mencionadas para resolver triángulos rectángulos, esto es, calcular los lados o ángulos desconocidos de triángulos o familias de triángulos rectángulos, así como para resolver problemas de aplicación, como el cálculo de distancias inaccesibles (Weber, 2008; Cavanagh, 2008; Montiel, 2011; Scholz, 2014; Montiel y Jácome, 2014).

Posteriormente, durante la Educación Media Superior (estudiantes entre 16 y 18 años), y con el fin de ampliar el uso de las razones trigonométricas a ángulos no agudos, se introduce un sistema de ejes cartesianos (Maldonado, 2005; Montiel y Buendía, 2013), se definen las razones trigonométricas en esos términos (Figura 2) y se utilizan para resolver, por ejemplo, problemas de aplicación en los que intervienen ángulos de elevación o depresión.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{d} \qquad \cos\theta = \frac{x}{d} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{d}{y} \qquad \sec\theta = \frac{d}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

***Figura 2*. Definición de las razones trigonométricas en el plano cartesiano**

Hacia el final de este nivel educativo, se abordan las identidades trigonométricas y las leyes de seno y coseno, se pasa del uso del grado al radián como unidad de medida del ángulo, se introduce el círculo unitario y se definen las funciones trigonométricas como funciones reales de variable real (Maldonado, 2005; Montiel, 2013; Montiel y Buendía, 2013); dando por iniciado el tránsito entre la trigonometría clásica, vinculada al estudio de los triángulos rectángulos, y la trigonometría analítica, asociada al estudio de las funciones trigonométricas (Montiel, 2011).

Finalmente, en el transcurso de la Educación Superior (estudiantes mayores de 18 años), las nociones trigonométricas –en especial las funciones– son retomadas en cursos como Cálculo y Análisis Matemático en calidad de objetos susceptibles de ser operados, esto es, integrados, derivados, etcétera (Maldonado, 2005; Montiel, 2011).

En suma, el estudio de la trigonometría en la escuela comienza, de manera general, a mediados de la Educación Secundaria con la introducción de las razones trigonométricas, vistas como cocientes entre las longitudes de los lados de triángulos rectángulos. Concepción que se extiende posteriormente a ángulos no agudos mediante la introducción del plano cartesiano.

Durante la Educación Media Superior inicia el estudio de las identidades y las funciones trigonométricas, gracias a la introducción del círculo unitario y del paso del grado al radián como unidad de medida del ángulo. Finalmente, en el transcurso de la Educación Superior, las nociones trigonométricas son aprovechadas principalmente en calidad de objetos (Figura 3).

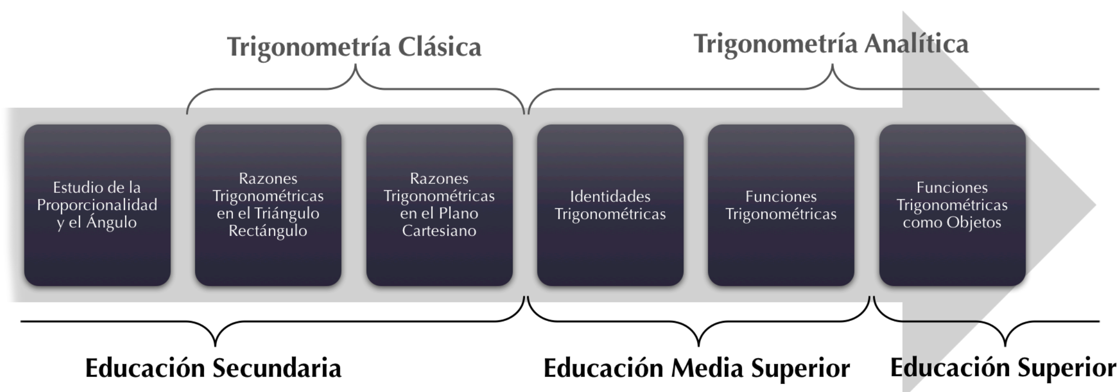


***Figura 3*. La trigonometría escolar**

El poseer esta visión genérica de cómo viven las nociones trigonométricas en la escuela nos lleva a planteamos una segunda cuestión: qué fenómenos se han reportado en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las mismas, dada esta organización.

Problemática asociada

La literatura especializada en Matemática Educativa ha reportado una amplia variedad de fenómenos ligados a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las nociones trigonométricas bajo el tratamiento escolar aludido, algunos de ellos son:

La inexplicable introducción del círculo unitario y del paso del grado al radián como unidad de medida del ángulo. El estudio de Brito y Barbosa (2004), cuyo objetivo principal es vincular la formación inicial de los profesores participantes con las dificultades que evidencian al enfrentar algunas tareas trigonométricas, observa que, si bien los participantes son conscientes de la utilidad y conveniencia de que el radio del círculo trigonométrico mida uno, no presentan una justificación precisa del porqué. Hecho que las autoras relacionan con la falta de una discusión explícita al respecto en los libros de texto usados en su formación.

De forma similar, pero al trabajar con estudiantes de Educación Media que enfrentan la construcción de una tabla trigonométrica con base en los tratados de Eratóstenes, Aristarco, Hiparco y Ptolomeo, Do Nascimento (2005) concluye que la justificación y uso del círculo unitario también constituye una dificultad para los participantes de su investigación.

En otro orden de ideas, Maldonado (2005), en un estudio que tiene como objetivo inferir la presencia de las nociones trigonométricas en la Educación Media Superior del sistema escolar mexicano, mediante el análisis de programas de estudio, libros de texto y el trabajo de estudiantes al resolver un cuestionario, señala que la transición entre grados, radianes y reales (T: G-R) en el tratamiento escolar actual de las nociones trigonométricas es al menos problemática.

Atendiendo esta situación, Díaz, Salgado y Díaz (2010) analizan las diversas interpretaciones y explicaciones que la literatura especializada en Matemática Educativa ha dado a la T: G-R, concluyendo que, "si bien es el propio conocimiento matemático el que impone la necesidad de la T: G-R, […] a través del propio conocimiento matemático puede ofrecerse una explicación plausible, y una forma natural de resolverla" (Díaz, Salgado y Díaz, 2010, p. 36). En consecuencia, la caracterizan como un obstáculo didáctico –antes que como obstáculo epistemológico o una convención matemática–, en tanto, a pesar de tener explicación matemática, esta no se hace explícita en los planes y programas de estudio, los libros de texto y el discurso escolar actual.

En síntesis, investigaciones como las aludidas evidencian que más allá de los niveles y planos educativos observados, la trigonometría escolar actual no incluye una explicación del porqué el paso del grado al radián como unidad de medida del ángulo, de igual manera, no contempla una justificación explícita sobre el porqué del círculo unitario y de su utilidad como mediador entre la razón y la función trigonométrica.

No identificación del ángulo como argumento. En el aludido estudio, Brito y Barbosa (2004) también observan que el ángulo no figura como un elemento determinante en el tratamiento que los profesores participantes dan a las nociones trigonométricas. Esto, según las autoras, podría ser una de las razones por las cuales es tan usual encontrar, por ejemplo, expresiones como $sen = a/b$, en lugar de $\operatorname{sen} \alpha = a/b$, para hacer alusión al seno de un ángulo α como cociente de las longitudes del lado opuesto (a) y la hipotenusa (b) en un triángulo rectángulo.

Estudios posteriores, como los realizados por Thompson (2008) y Wongapiwatkul, Laosinchai y Panijpan (2011), quienes analizan la 'incoherencia de significados' asociados a las nociones trigonométricas en la Educación Secundaria de EUA y una secuencia didáctica para estudiantes de Educación Secundaria en Australia, respectivamente; no solo coinciden con la observación llevada a cabo por Brito y Barbosa (2004), sino que apuntan al empleo del método del triángulo rectángulo como un factor determinante para la emergencia de este fenómeno.

Las nociones trigonométricas como herramientas técnicas. Maldonado (2005) –en el estudio mencionado–, enfatiza el carácter de herramienta que el tratamiento escolar actual promueve para las nociones trigonométricas, en ese sentido, repara que "se definen razones trigonométricas (razones de los lados) de un triángulo rectángulo, únicamente para utilizarlas como medios de solución" (Maldonado, 2005, p. 15). De forma similar, pero respecto a la función trigonométrica, considera que la trigonometría escolar actual promueve el simple conocimiento de la misma y su uso técnico –en carácter de herramienta u objeto– en cursos posteriores, “puesto que ésta sólo es utilizada sin necesidad de ser comprendida” (Maldonado, 2005, p. 68).

De forma semejante, Weber (2005), en una investigación cuyo fin es estudiar la comprensión de las nociones trigonométricas en estudiantes de Educación Superior en el sistema escolar estadounidense, concluye que –producto de la ‘enseñanza tradicional’– los participantes perciben a las nociones trigonométricas como operaciones externas, esto es, como una “prescripción mecánica paso a paso que es relativamente sin sentido para ellos y que solo puede ser aplicada en respuesta a una indicación externa” (Weber, 2005, p. 103, [Traducción nuestra]).

Respecto a esta situación, Araya, Monge y Morales (2007) y Mesa y Herbst (2011) concluyen que, actualmente, la única justificación para la existencia curricular de las nociones trigonométricas es constituir herramientas técnicas que sean útiles en asignaturas como el Cálculo y el Análisis Matemático, u otros espacios correspondientes a áreas como la Ingeniería y la Arquitectura. Misma observación que realiza Scholz (2014) en su estudio llevado a cabo con estudiantes de Educación Secundaria que enfrentan la resolución de una situación-problema de medición de distancias en el contexto del círculo.

En conclusión, la literatura especializada enfatiza el carácter de herramienta técnica atribuido a las nociones trigonométricas, y a la trigonometría escolar en general, bajo el tratamiento escolar actual. Ahora, si bien es cierto que –como hemos mencionado– este uso las convierte en una herramienta esencial para muchas aplicaciones en arquitectura, astronomía y física, un antecedente indispensable para el estudio del cálculo diferencial e integral, y una pieza importante en el estudio de la geometría analítica (Montiel 2011), no asegura una comprensión robusta de las mismas (Weber, 2005) ni el desarrollo de un pensamiento trigonométrico ante el manejo del triángulo, sus elementos y las relaciones entre estos (Montiel y Jácome, 2014).

Indistinción de las nociones trigonométricas. En el aludido estudio, Maldonado (2005) también observa que para los estudiantes del nivel Medio Superior participantes en el cuestionario "es indistinto el tratamiento que se da en cuanto a razón trigonométrica [...] y a función trigonométrica" (Maldonado, 2005, p. 71). Misma observación que realizan De Kee, Mura y Dionne (1996), en su estudio sobre la comprensión de las nociones seno y coseno bajo los métodos de enseñanza del triángulo rectángulo y del círculo trigonométrico con estudiantes de Secundaria en Canadá.

Este fenómeno, al igual que los mencionados anteriormente, se ha identificado en un amplio abanico de planos educativos. Montiel y Buendía (2013), en un estudio cuya intención es ejemplificar lo que institucionalmente se asume como conocimiento trigonométrico en la Educación Media Superior del sistema escolar mexicano, observan en la competencia declarada para la unidad de Trigonometría –"Emplea las funciones trigonométricas en la solución de triángulos [...]" (IPN, 2008 en Montiel y Buendía, 2013, p. 172)– de uno de los planes estudio analizados que, incluso a nivel curricular, "no hay distinción entre la naturaleza de los distintos objetos matemáticos en juego: razón, ecuación y función, trigonométricas" (Montiel y Buendía, 2013, p. 171).

En un estudio posterior, llevado a cabo con profesores en servicio del nivel Medio Superior que enfrentan una situación-problema de medición de distancias inaccesibles, Montiel y Jácome (2014) identifican en los reportes escritos de los participantes que, quienes utilizan la razón trigonométrica tangente como herramienta matemática para resolver la situación-problema, "hablan de función trigonométrica, función tangente, procedimiento trigonométrico, relación tangente, razones trigonométricas o, simplemente, fórmula tangente" (Montiel y Jácome, 2014, p. 1194), dejando entrever el mismo fenómeno.

Finalmente, Montiel (2014), mediante el análisis de algunos de los libros de textos utilizados en la Educación Media Superior, cuya intención es identificar las posibles condiciones escolares relacionadas con los significados que poseen los profesores participantes alrededor de las nociones trigonométricas, identifica el mismo fenómeno de indistinción en un libro de texto (Figura 4), y lo asocia al énfasis puesto en el procedimiento matemático más que en el concepto *per se*.

La trigonometría se aplica en áreas donde se requieren medidas de precisión: por ejemplo, se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	
Fundamentales	**Recíprocas**
$\text{sen } x = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}}$	$\csc x = \dfrac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}}$
$\cos x = \dfrac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}}$	$\sec x = \dfrac{\text{hip.}}{\text{cat. ady.}}$
$\tan x = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}}$	$\cot x = \dfrac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}}$

En la tabla se resumen las seis funciones trigonométricas para cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

***Figura 4*. Tomada de Filloy, Rojano, Ojeda, Zubieta y Figueras (2009) en Montiel (2014, p. 1774)**

En síntesis, las investigaciones aludidas evidencian que, sin importar el nivel o plano educativo analizado, la trigonometría escolar actual no promueve la identificación de la naturaleza y usos particulares de las distintas nociones trigonométricas que la integran.

Disociación entre geometría y Trigonometría. Los trabajos de Patricio, García y Arrieta (2005), Navarro y Villalva (2009), Jácome (2011) y Montiel (2007, 2014) hacen énfasis en la utilidad y pertinencia de acercar la construcción geométrica, así como el estudio de la proporcionalidad, el triángulo, el círculo y el ángulo, a la introducción y desarrollo de las nociones trigonométricas en la escuela. No obstante, también es ampliamente reportada la separación existente entre las nociones y procedimientos geométricos y la trigonometría escolar actual. Navarro y Villalva (2009), por ejemplo, mediante el análisis de libros de texto utilizados en Educación Media Superior, observa que la proporcionalidad queda abandonada al terminar el estudio de la geometría y, a pesar de su estrecha relación matemática, no es retomada en la introducción de las nociones trigonométricas.

Por su parte, Montiel (2014), en su aludido estudio sobre libros de texto, menciona que, en las tareas trigonométricas habituales (Figura 5), incluso en los denominados 'problemas de aplicación' (Figura 6), las construcciones geométricas –al igual que su proporcionalidad– constituyen condiciones de partida y, como resultado, no son susceptibles de ser analizadas y puestas en tela de juicio.

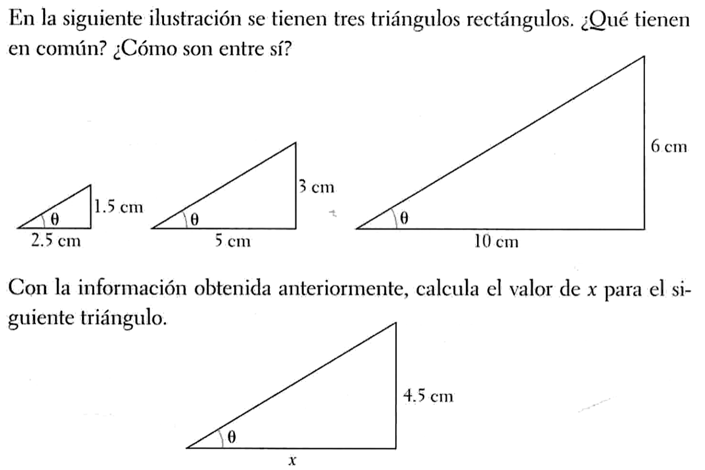


***Figura 5*. Tarea trigonométrica habitual. Tomada de Briseño, Carrasco, Martínez, Palmas, Struck y Verdugo (2008) en Montiel (2014, p. 1776).**

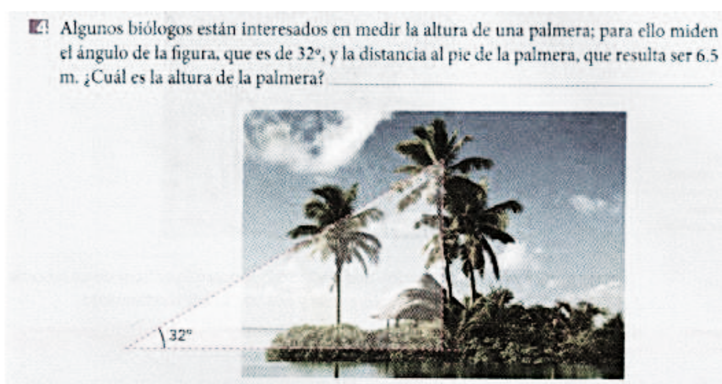


***Figura 6*. Problema de aplicación. Tomada de Filloy, Rojano, Ojeda, Zubieta y Figueras (2009) en Montiel (2014, p. 1777).**

En consecuencia, concluye que, producto de esta disociación entre las nociones y procedimientos geométricos y la Trigonometría, se reduce el trabajo del educando a elegir la 'fórmula trigonométrica' adecuada, sustituir los valores conocidos y realizar los procedimientos aritméticos-algebraicos pertinentes para calcular el dato que resuelve el problema. Afirmación que comparten los referidos estudios de Brito y Barbosa (2004), Weber (2005), Díaz, Salgado y Díaz (2010) y Mesa y Herbst (2011).

Admisión de un significado lineal y promoción de un significado aritmético. Finalmente, el mencionado estudio realizado por Montiel y Jácome (2014), llevado a cabo con 42 profesores de Educación Media Superior que se enfrentan a una situación-problema de medición de distancias inaccesibles, concluyen que el tratamiento escolar actual que reciben las nociones trigonométricas permite que se les asocie –además del significado como técnica referido– un significado lineal y un significado aritmético.

El primero de ellos refiere a la concepción y tratamiento lineal que la trigonometría escolar admite para la relación ángulo-longitud en el triángulo rectángulo, producto del inexistente análisis sobre dicha relación. A manera de ejemplo, en el estudio referido, al construir una representación de la situación-problema mencionada, más de la mitad de los profesores participantes muestran bosquejos en los cuales coexisten decrementos constantes del ángulo de elevación con crecimientos constantes del lado adyacente del mismo (Figura 7).

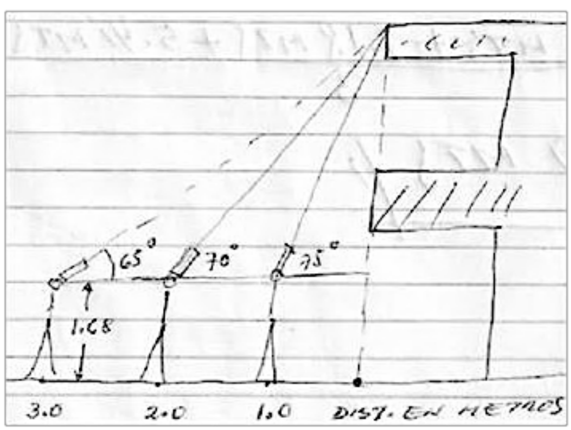


***Figura 7*. Modelo propuesto por un participante. Tomada de Jácome (2011, p. 102).**

Por otro lado, el significado aritmético refiere a la centración que la trigonometría escolar tiene sobre el dominio aritmético de las nociones trigonométricas. Así, en el estudio aludido, pese a la explicita solicitud de construir un modelo a escala de la situación-problema, ninguna de las representaciones fabricadas por los participantes constituye un modelo geométrico a escala *stricto sensu*, en tanto no guardan proporción con la realidad (Figura 8), y, en consecuencia, no funge como mediador entre la situación-problema y su solución.

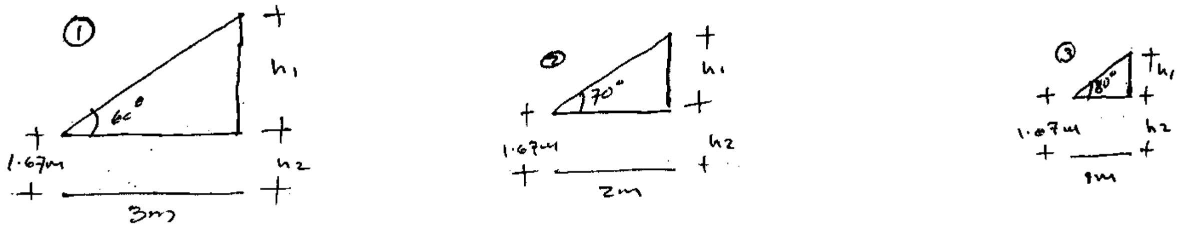


Figura 8. **Bosquejos propuestos por un participante. Tomada de Montiel y Jácome (2014, p. 1211).**

A manera de conclusión, los estudios referidos durante este apartado evidencian la pluralidad de fenómenos que la literatura especializada en Matemática Educativa ha reportado respecto al tratamiento escolar que reciben las nociones trigonométricas en la actualidad. Entre ellos, nos es de utilidad destacar el uso exclusivo como herramienta técnica que reciben las mismas, la disociación existente entre las nociones y procedimientos geométricos y la Trigonometría, y el significado lineal y aritmético que se asocia a las nociones trigonométricas fruto del tratamiento escolar que reciben. Además, consideramos pertinente subrayar que los estudios mencionados evidencian la transversalidad de estos fenómenos respecto a los niveles y los planos educativos analizados.

1.2. Problemática de investigación

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, o simplemente Teoría Socioepistemológica, sostiene que, en tanto el saber matemático se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción en el sistema educativo –dado su valioso papel en la formación ciudadana– obliga a un proceso de transposición didáctica. Esto es, la matemática (en tanto saber humano) se somete a un conjunto progresivo de modificaciones que permiten seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos que son incluidos en la Matemática (en tanto espacio escolar) (Reyes-Gasperini, 2016). Al sistema de razón que determina estas modificaciones –y, en consecuencia, la configuración de la Matemática– es lo que, desde esta perspectiva teórica, se denomina discurso Matemático Escolar (dME) (Figura 9).

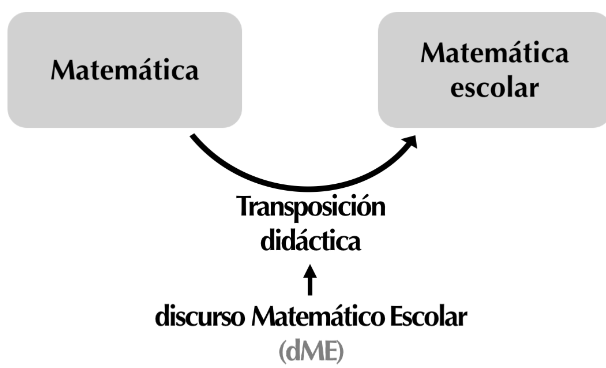


***Figura 9*. Matemática, matemática escolar y discurso Matemático Escolar**

Este discurso, en tanto sistema de razón que norma la forma de presentar y tratar didácticamente los objetos matemáticos en clase, se manifiesta de forma natural a través de los distintos planos educativos, como pueden ser planes y programas de estudio, el discurso escolar, los libros de texto, y las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general (Montiel y Jácome, 2014). Así, más de dos décadas de investigación alrededor de estos planos educativos son los que han permitido identificar algunas de las características del dME vigente (Soto, 2010), como ser:

La atomización de conceptos. Refiere a la manifiesta disociación existente entre las nociones matemáticas escolares y los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.

El carácter hegemónico. Alude a la supremacía de algunas argumentaciones, significados y procedimientos, sobre otras que el dME promueve.

La matemática como un conocimiento acabado y continúo. Se entiende a la matemática como un cuerpo de objetos, preexistentes a la experiencia humana, que siguen un estricto orden lineal, esto ha generado que su enseñanza se reduzca a la mecanización de procesos y memorización de los conceptos matemáticos.

El carácter utilitario. Apunta a la preponderancia de la utilidad del conocimiento por encima de cualquiera de sus restantes cualidades, incluida su funcionalidad –entendida como la posibilidad de integrar tal conocimiento a la vida cotidiana, con la intensión de transformarla–.

La falta de marcos de referencia. Se ha desatendido el hecho de que la matemática responde también a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

Volviendo al caso que ahora nos compete, la perspectiva planteada nos permite reinterpretar lo mencionado hasta el momento sobre la Trigonometría y sus fenómenos asociados. Es así como, advertimos –en primer lugar– a la *trigonometría escolar* (Figura 3) como producto de la ***visión de la matemática***, como cuerpo de objetos prexistentes y ordenados linealmente, que el dME vigente promueve. Además, reconocemos a este afán por organizar linealmente la trigonometría escolar como una de las posibles causas para la *inexplicable introducción del círculo unitario*, en tanto su única función en la Trigonometría es hacer posible el tránsito entre la razón y la función trigonométrica.

De igual manera, señalamos a la *disociación existente entre la trigonometría escolar y la geometría* –que históricamente hizo posible su origen y cuyo estudio la precede de forma general en los planes y programas escolares– como fruto de la ***ausencia de marcos de referencia*** *y la* ***atomización de conceptos*** que fomenta el dME actual. Al mismo tiempo, concebimos que producto de esta disociación, específicamente de la falta de construcción y análisis geométrico que ella implica, se reúnen las condiciones necesarias para la emergencia del *significado lineal* asociado a la relación ángulo-longitud en el triángulo rectángulo referido, así como para la *no identificación del ángulo como argumento*.

De forma homóloga, vinculamos el ***carácter utilitario*** que el dME fomenta con el *uso exclusivo como herramienta técnica* que reciben las nociones trigonométricas. Además, ubicamos como producto de este uso, y de la centración en el tratamiento aritmético que conlleva, a la promoción del *significado aritmético* asociado a las mismas. También, consideramos a este uso característico como un factor determinante en la *indistinción de las nociones trigonométricas*, ya que –como hemos mencionado– esta falta de claridad entre la naturaleza de una y otra noción es "provocada por el énfasis puesto en el procedimiento matemático más que en el concepto" (Montiel, 2014, p. 1774).

Finalmente, asociamos el **carácter hegemónico** del dME con la supremacía y/o totalitarismo que el *uso como herramienta técnica* y los *significados lineal y aritmético* ejercen sobre cualquier otro uso y significado que las nociones trigonométricas pudieran tener.

En síntesis, hasta este punto, hemos reconocido que, producto de la visión de la matemática, la ausencia de marcos de referencia, la atomización de conceptos, y el carácter utilitario y hegemónico que determina al dME vigente, la trigonometría escolar se presenta como un conocimiento acabado y ordenado linealmente, completamente desvinculado de las nociones y procedimientos geométricos, y cuya única utilidad es servir como herramienta técnica de cálculo de un valor faltante (Tabla 1).

Discurso Matemático Escolar (dME)	Fenómenos asociados
Visión de la matemática	Trigonometría escolar
Atomización de conceptos – Falta de marcos de referencia	Disociación geometría-Trigonometría
Carácter utilitario	Uso como herramienta técnica
Carácter hegemónico	Supremacía del significado lineal y aritmético

***Tabla 1*. Discurso Matemático Escolar y sus fenómenos asociados en Trigonometría**

Configuración que promueve, en primer lugar, una centración en el tratamiento aritmético de las nociones trigonométricas y, en consecuencia, un *significado aritmético* asociado a las mismas. Además, al tribuir un carácter ilustrativo a la construcción geométrica y soslayar los procesos de reflexión sobre los elementos geométricos y sus relaciones –especialmente la establecida entre un ángulo y las longitudes que subtiende–, se establecen las condiciones ideales para la emergencia de un *significado lineal* asociado a la relación ángulo-longitud en el triángulo rectángulo.

1.3. Definición de un problema, de preguntas y de objetivos de investigación

Como ha quedado expresado anteriormente, los estudios sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje realizados en las últimas décadas acentúan la separación existente entre el estudio de la trigonometría y la geometría en la escuela, así como el uso exclusivo como herramienta técnica que reciben las nociones trigonométricas. Al respecto, las investigaciones de Montiel (2005, 2011) y Montiel y Jácome (2014) consideran que producto de esta ausencia de los procesos de construcción geométrica y falta de análisis sobre la naturaleza de la relación ángulo-longitud en el triángulo rectángulo, aunado al uso exclusivo como herramienta técnica que el dME vigente promueve para las nociones trigonométricas, se configura el fenómeno didáctico denominado *Aritmetización de la Trigonometría*.

Mismo que tiene como principales resultados la promoción de un significado aritmético para las nociones trigonométricas, así como la admisión de un significado lineal asociado a las mismas (Figura 10).

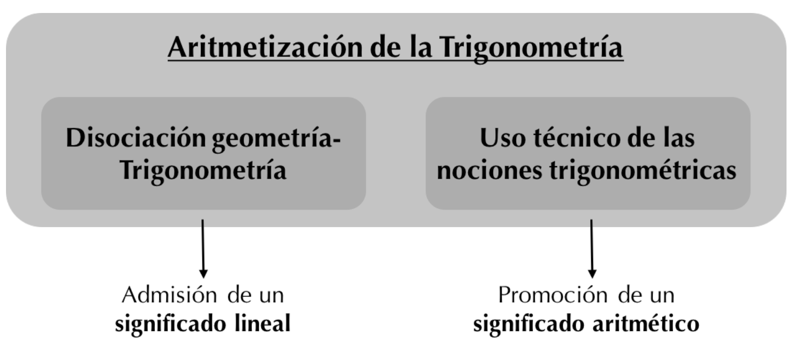


***Figura 10*. Fenómeno de Aritmetización de la Trigonometría**

En consecuencia, instan a suplir el tratamiento escolar actual con uno que reconcilie las nociones y procedimientos geométricos con la introducción y desarrollo de las nociones trigonométricas, un tratamiento "donde objetos como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos sean herramientas en la construcción de modelos geométricos (estáticos), donde surja la *cantidad trascendente trigonométrica*" (Montiel, 2011, p. 124).

Ya existen propuestas de innovación didáctica en el marco de nuestra disciplina con el afán de reducir la brecha entre la geometría y la Trigonometría y sus fenómenos consecuentes. Dentro de ellas destacamos los estudios de Weber (2005, 2008), en los cuales se construye y pone en práctica un método experimental de introducción de las nociones trigonométricas, con la intensión de estudiar la comprensión de las mismas con estudiantes de Educación Superior del sistema escolar estadounidense. Dicho método, que tiene como fondo teórico las propuestas de Gray y Tall (1994) y Tall, Thomas, Davis, Gray y Simpson (2000), parte de la idea de que las operaciones trigonométricas pueden ser entendidas como *procesos geométricos*.

A manera de ejemplo, el proceso geométrico para calcular el seno de un ángulo es construir un círculo unitario en un plano cartesiano, usar un transportador para dibujar un rayo que parta del origen de dicho plano –de tal suerte que el ángulo entre la parte positiva del eje X y el rayo sea el ángulo deseado–, localizar el punto de intersección entre el rayo y el círculo unitario, y determinar la ordenada o altura de esa intersección (Weber, 2008).

Como resultados, dichos estudios concluyen que la puesta en escena de estos procesos geométricos, seguidos de reiteración y reflexión sobre los mismos –como articulación de partes y como un todo–, ha evidenciado promover "una fuerte comprensión de las funciones trigonométricas" (Weber, 2005, p. 108), en tanto los participantes son capaces de aproximarse a los valores de las expresiones trigonométricas básicas requeridas, determinar las propiedades de las funciones trigonométricas y justificar por qué estas tienen las propiedades que tienen (Weber, 2005).

No obstante, concebimos que, si bien la propuesta aludida pone en juego ciertos elementos de construcción geométrica, estos solo constituyen un método de introducción del círculo unitario y un medio para justificar geométricamente un procedimiento métrico o numérico de cálculo de las razones trigonométricas básicas. En otras palabras, estimamos que –de forma similar a los 'métodos tradicionales' de introducción de las nociones trigonométricas– este tipo de propuestas no afrontan el fenómeno de *Aritmetización de la Trigonometría*, ya que, al no centrar su atención en ningún momento en la naturaleza de la relación ángulo-longitud y no ampliar el uso exclusivo como herramienta técnica atribuido a las nociones trigonométricas, no están en condiciones de confrontar y ampliar los significados construidos alrededor de las mismas.

En consecuencia, nos planteamos un estudio que se centre en la construcción social de las nociones trigonométricas, cuya hipótesis implícita de partida es que al ampliar los usos de las nociones trigonométricas y aminorar la brecha existente entre las nociones y procedimientos geométricos y el estudio de la trigonometría, es posible confrontar el fenómeno de Aritmetización de la Trigonometría que el dME promueve.

Con esto en mente, nos proponemos –en primera instancia– atender las siguientes preguntas y objetivos de investigación:

Preguntas de investigación

- ¿Qué usos le son propios a las nociones trigonométricas, en especial la razón?

- ¿Cómo acercar las nociones y procedimientos geométricos a la introducción y evolución de las nociones trigonométricas?

- Más aún, ¿qué nociones y procedimientos geométricos son pertinentes a la introducción de las nociones trigonométricas?

Objetivos de investigación

- Identificar usos y significados germinales de las nociones trigonométricas que se han perdido en su introducción en el sistema educativo.

- Identificar algunas de las nociones y procedimientos geométricos que son pertinentes a la construcción social de las nociones trigonométricas.

- Esbozar la construcción social de las nociones trigonométricas, específicamente la cantidad trascendente.

2. Consideraciones Teóricas

Una teoría no es una llegada, es la posibilidad de una partida.
Una teoría no es una solución, es la posibilidad de tratar un problema.
Edgar Morin

En cualquier disciplina científica, ante un conjunto de fenómenos concretos, de datos empíricos, se plantean cuerpos teóricos que sean capaces de describir, explicar, predecir y/o modificar los mismos. Estos cuerpos de conceptos e hipótesis son puestos a prueba directa o indirectamente al confrontarlos –mediante procedimientos validados– con nueva evidencia empírica.

En el caso particular de la Matemática Educativa, pasamos paulatinamente del uso de cuerpos teóricos y de métodos provenientes de ciencias como la psicología, la pedagogía y la sociología a construir teorías y métodos propios para el estudio de los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Montiel, 2011), fenómenos que nos competen en tanto disciplina científica.

Es evidente entonces, que para atender los fenómenos, preguntas y objetivos que hemos planteado en el capítulo anterior, nos son necesarios cuerpos teóricos que sostengan nuestras hipótesis específicas, así como métodos adecuados y validados para carearlas con la realidad. En los próximos dos capítulos nos daremos a la tarea de explicitar, respectivamente, algunos elementos teóricos y metodológicos que nos permitan atender el problema planteado.

2.1. Una postura teórica

Una gran cantidad de estudios de corte histórico nos muestra que las matemáticas no se inventaron para ser enseñadas, sino que su construcción es fruto de su uso ante diversas problemáticas, algunas propias de la matemática misma, muchas otras de ámbitos profesionales y cotidianos. Es decir, la matemática, en tanto saber humano, se ha construido socialmente en ambientes y con propósitos no escolares.

Con esta consideración como núcleo, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se propone el estudio de la *construcción social de conocimiento matemático y su difusión institucional* (Cantoral, 2013). Tres acotaciones son necesarias al respecto, la primera es que el término *social* "no sólo refiere a una idea *vigotskiana* donde el conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura" (Reyes-Gasperini, 2017, p. 31), sino que –como profundizaremos más adelante– hace alusión a *lo social* del conocimiento matemático mismo.

En segundo lugar, respecto al conocimiento matemático, esta postura teórica concibe al saber como conocimiento puesto en uso. En este sentido, admite que la humanidad utiliza el conocimiento matemático de incontables formas y, en consecuencia, reconoce la legitimidad de cualquier forma de saber humano, sea este culto, técnico o popular (Cantoral, 2013).

Finalmente, el adjetivo *institucional* no hace referencia –como puede ser evidente después de las anotaciones anteriores– únicamente a las instituciones educativas formales, ya que, al ampliar la concepción del conocimiento matemático, es menester ampliar las instituciones en las que este se difunde a cualquier organización en donde se generen interacciones que promuevan conocimiento (Reyes-Gasperini, 2016), esto es, a instituciones como las familias, las comunidades y los grupos de colegas.

Cuatro principios

Toda teoría posee un grupo de primeras hipótesis y principios relativos a los objetos o campos de aplicación de los que trata, y la Teoría Socioepistemológica no es la excepción. Así, toda investigación que tome esta perspectiva como base teórica, parte de cuatro principios:

Principio de Racionalidad Contextualizada. La visión formalista o tradicional de la racionalidad señala que "ser racional reside únicamente en pensar y actuar de acuerdo con reglas abstractas y universalmente aplicables, como las reglas lógicas, probabilísticas, matemáticas, etc." (Xiang, 2008, p. 103), sin embargo, a partir de la década de los 60, son cada vez más las investigaciones que cuestionan esta imagen de la racionalidad.

Dentro de estos estudios, quizá el que más polémica e investigación ha detonado es el llamado 'problema de la selección de tarjeta'. El experimento consiste en colocar frente a cada uno de los participantes del estudio cuatro tarjetas, de las cuales solo pueden ver una cara; cada una de las tarjetas contiene una letra y un número en el reverso. Ahora bien, se plantea –a manera de hipótesis– la regla *si hay una A en un lado, hay un 4 en el reverso*, el problema es entonces ¿a cuál de las cuatro tarjetas, que muestran "A" "M" "4" "7", se le debe dar vuelta para decidir si la regla es verdadera o falsa? Los resultados obtenidos en el estudio muestran que, a pesar de que siguiendo los principios de la lógica se deduce 'fácilmente' que la única manera de responder correctamente el problema es girando la tarjeta "A" o la tarjeta "7", solo el 5% de los sujetos resuelven el problema (Wason y Johnson-Laird, 1972 en Xiang, 2008).

Este tipo de experimentos comenzaron a agrietar la visión tradicional de la racionalidad, puesto que evidencian que las personas no siempre piensan y realizan acciones racionales con base en las reglas lógicas, probabilísticas y matemáticas. Más aún, la ola de estudios posteriores comenzó a delinear una perspectiva distinta de la racionalidad, una que consideraba elementos contextuales como la limitación biológica de nuestra capacidad cognitiva, los contextos espaciales y temporales, nuestros propósitos prácticos y los contextos sociales como factores determinantes al realizar una inferencia.

La Teoría Socioepistemológica, al igual que otros enfoques socioculturales, comparte ampliamente esta concepción contextualizada de la racionalidad, en tanto parte –como hemos mencionado– de que la base de la construcción y significación de las nociones y procedimientos matemáticos reside en su uso cultural, histórica e institucionalmente situado, esto es, reconoce que el escenario sociocultural "influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita" (Crespo, 2007 en Cantoral, 2013, p. 159).

Principio de Relativismo Epistemológico. De aceptar que las formas en que las personas piensan y construyen conocimiento se configuran en función de aspectos socioculturales, deviene el que no pueda existir un criterio de validez universal para el mismo. En este sentido, la Teoría Socioepistemológica admite que "la validez del saber es relativa a la epistemología de partida, tanto del individuo como del grupo cultural y su contexto" (Cantoral, 2013, p. 158).

Ahora bien, esta postura, también compartida por enfoques socioculturales como la Etnomatemática (Peña-Rincón, Tamayo-Osorio y Parra, 2015), es opuesta a la visión tradicional u objetivista, en la cual el conocimiento "es un conocimiento sin conocedor; es conocimiento sin sujeto cognoscente" (Popper, 1979 en Chalmers, 1990, p. 169), y –en correspondencia– existen de criterios de validez únicos, universales y ahistóricos para el mismo.

No obstante, tampoco debe asumirse este principio al nivel de un relativismo radical en el cual no exista valor de verdad, la Teoría Socioepistemológica "concibe que el saber es, de hecho, una multitud de saberes –popular, técnico y culto–, con verdades relativas" (Cantoral, 2013, p. 160), esto es, la validez de un conocimiento es juzgada en relación con los criterios de la comunidad en la que este se gesta o como diría un filósofo de la ciencia, respecto a la validez del conocimiento "no hay ninguna norma superior a la aprobación de la comunidad correspondiente" (Kuhn, 1962 en Chalmers, 1990, p. 152).

Principio de la Significación Progresiva. Por otro lado, al partir de que la significación y construcción del conocimiento matemático proviene de su uso situado, y que las culturas, las disciplinas científicas y la Matemática en particular utilizan el conocimiento matemático de distintas formas (Reyes-Gasperini, 2017), la Teoría Socioepistemológica acepta, no solo que una noción matemática puede poseer un amplio abanico de significados, sino que el sujeto, individual o colectivo, "a causa de la propia evolución de la vida […] y su interrelación con diversos contextos" (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015a, p. 16), significará progresivamente cierto conocimiento matemático, esto es, de forma continua pondrá en funcionamiento una pieza de conocimiento matemático en nuevas situaciones, lo que le permitirá construir nuevos significados para la misma (Cantoral, 2013).

Principio de Normativo de la Práctica Social. Finalmente, la Teoría Socioepistemológica sostiene –fruto de décadas de investigación empírica– que transversal a los usos situados desde los cuales se construye cierto conocimiento matemático es posible identificar invariantes, esto es, lo que fundamentalmente está normando la construcción del conocimiento matemático, a lo que denomina *práctica social* (Reyes-Gasperini, 2017). En este sentido, las prácticas sociales "son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, en las generadoras del conocimiento" (Cantoral, 2013, p. 155).

Una acotación es importante en este punto, a diferencia de otras posturas teóricas de la disciplina, la Teoría Socioepistemológica concibe a la práctica social como un emergente social, es decir, como una normativa de la actividad humana, antes que como las acciones concretas y observables que las personas realizan. Es en este sentido que la frase 'la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o grupo, sino lo que les hace hacer lo que hacen' cobra sentido.

En síntesis, al partir de que la construcción y significación de las nociones y procedimientos matemáticos es fruto de su uso situado –antes que de su declaración o representación (Cantoral, 2011)–, la Teoría Socioepistemológica requiere del reconocimiento de un *principio de racionalidad contextualizada* (pRC), que admita que, producto de su desigual uso, los sujetos –individuales y colectivos– construyen y significan desigualmente las nociones y procedimientos matemáticos; un *principio de relativismo epistemológico* (pRE), que valide el conocimiento matemático construido por distintas comunidades y que, sin soslayar el saber culto, reivindique el saber técnico y popular; un *principio de significación progresiva* (pSP), que admita que la significación de una noción o procedimiento matemático es, también consecuencia de su pluralidad de usos situados, un proceso continuo e inagotable; y el *principio de normativa de la práctica social* (pNP), que coloque a la práctica social como ente que coacciona y norma la producción del conocimiento matemático (Figura 11).

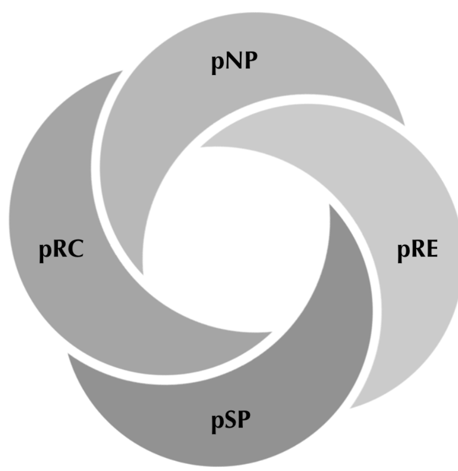


***Figura 11*. Principios de la Teoría Socioepistemológica**

Cuatro dimensiones

Las investigaciones fundacionales de la Teoría Socioepistemológica, realizadas entre la segunda mitad de los 80 y la primera de los 90 (Cantoral, 1990; Cordero, 1994; Farfán, 1993), pusieron su atención en el estudio del papel que juega el contexto social y cultural en la formación de significados matemáticos, con esto, plantaron la bases del programa socioespistemológico.

Casi tres décadas despues, la Teoría Socioepistemológica se autodetermina como un enfoque teórico centrado –como hemos mencionado– en los fenómenos de *construccion social del conocimiento y de su difusión institucional*, pariendo de una perspectiva múltiple y sistémica que auna cuatro dimensiones:

Dimensión Epistemológica. Se encarga del estudio de la naturaleza del saber matemático en juego. Si bien este tipo de análisis tradicionalmente se ha limitado a la actividad matemática, es decir, al examen de los conceptos y procedimientos matemáticos, su coherencia, génesis y evolución (Soto, 2010), la Teoría Socioepistemológica, en tanto concibe al conocimiento como una construcción social, centra su atención –sin ignorar lo anterior– en el estudio detallado de las circunstancias socioculturales que permitiron la emergencia de la pieza de conocimiento matemático en cuestión.

Dimensión Cognitiva. Como podría resultar evidente en este punto, la Teoría Socioepistemológica parte de una visión diametralmente opuesta de la cognición como evocación o redescubrimiento de objetos preexistentes, al caracterizarla como la capacidad de *construir significados* a traves de la interacción dialéctica y continuada entre actores y un medio ambiente, físico y cultural. La *Dimensión Cognitiva* atiende, entonces, estos procesos situados de “apropiación y significación progresiva que experimenta quien se encuentra en situación de construcción de conocimiento” (Cantoral, 2013, p. 148).

Dimensión Didáctica. Se encarga del estudio de los procesos de difusión institucional del conocimiento matemático, sin soslayar aspectos didáctico-pedagógicos asociados a la dinámica profesor-estudiante como pueden ser tareas, formas de interacción didáctica y respuestas de los estudiantes (Reyes-Gasperini, 2016). Valga rememorar que al adjetivo 'institucional' no hace referencia solo a instituciones educativas formales, por el contrario, la *Dimensión Didáctica* se encarga del estudio exhaustivo de la naturaleza del saber "como objeto institucional dirigido en los procesos de enseñanza a los aprendizajes, tanto en el ámbito escolar como no escolar" (Cantoral, 2013, p. 146).

Dimensión Social. Como se ha mencionado, a diferencia de otras posturas teóricas, en las que *lo social* se ubica al nivel de interacciones sociales –entre individuos y con el medio– que afectan a la acción de educar matemáticamente, la Teoría Socioepistemológica lo incorpora como el elemento principal en la explicación de la construcción de conocimiento matemático (Reyes-Gasperini, 2016). En otras palabras, esta postura amplía la visión de *lo social* al considerar la funcionalidad del conocimiento en la comunidad y situación donde este se usa y se resignifica (Soto, 2014). En consecuencia, la *Dimensión Social* "se ocupa de los usos del saber en situaciones específicas" (Cantoral, 2013, p. 149).

A manera de síntesis, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se encarga del estudio de los fenómenos asociados a la *construcción social del conocimiento matemático y su difución institucional* desde una "perspectiva múltiple de naturaleza sistémica al incorporar a su estudio las interacciones entre epistemología, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza" (Cantoral, 2013, p. 143) (Figura 12).

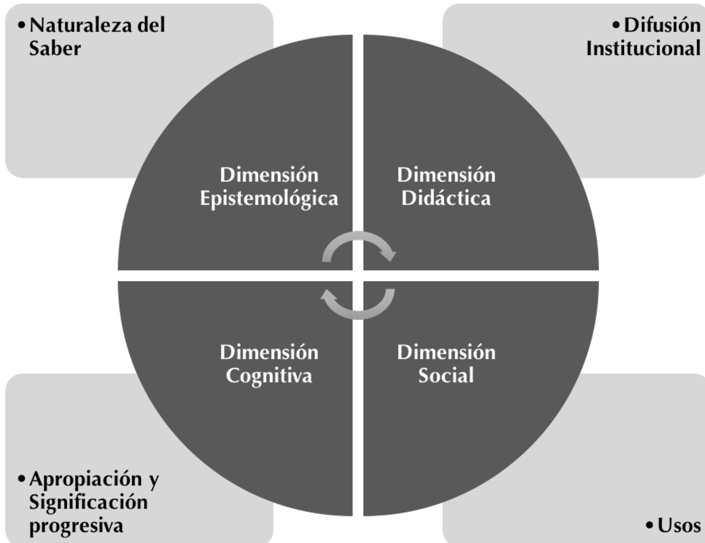


Figura 12. **Dimensiones del saber. Con base en Soto (2014, p. 64).**

Una acotación es relevante respecto a las dimensiones mencionadas y es que, a diferencia de otras posturas teóricas en las que en cada dimensión suele hacerse preguntas aisladas, la Teoría Socioepistemológica concibe que el análisis en profundidad sobre un conocimiento matemático específico requiere de 'una simbiosis' de las cuatro dimensiones (Reyes-Gasperini, 2017). Esta condición de codeterminación es la que pretende resaltar el adjetivo 'sistémico' atribuido a la caractetización de las dimensiones del saber matemático desde una perspectiva socioepistemológica. Sin embargo, pese a esta coderminación, no resulta inusual encontrar el análisis de un conocimiento matemático particular desde sus diversas dimensiones de forma disjunta, esto por cuestiones de método (Cantoral, 2013).

2.2. Elementos teóricos particulares

Los expuestos constituyen los principios básicos de la postura teórica asumida, adicionalmente, para atender nuestro problema de investigación, requeriremos de un par de constructos teórico-metodológicos un tanto más específicos:

Construcción social del conocimiento trigonométrico

En el marco de la Teoría Socioepistemológica, una investigación es referente respecto a la construcción social del conocimiento trigonométrico y el desarrollo del pensamiento matemático asociado, lo que la convierte en base fundamental de nuestro estudio, la realizada por Montiel (2005, 2011).

En ella, y fruto del estudio detallado de la literatura especializada, así como de una revisión de libros de texto y planes y programas de estudio de Educación Secundaria, Media Superior y Superior del sistema escolar mexicano, la autora parte identificando tres fenómenos didácticos asociados a la Trigonometría: la *Aritmetización de la Trigonometría*, que –como hemos hecho explícito en el capítulo anterior– refiere a la separación existente entre la geometría y la introducción de las nociones trigonométricas en la escuela; la *Extensión geométrico-analítica*, que alude a la construcción de la función trigonométrica como simple extensión de la razón trigonométrica; y la *Indiferencia a la fundamentación analítica*, asociado al papel de objeto matemático que adquieren las nociones trigonométricas en la Educación Superior, sin remediar en las explicaciones analíticas que problematizan la longitud de arco, la conveniencia o necesidad del uso del radián, entre otros.

Así, su estudio tiene como objetivo principal ampliar las explicaciones que la disciplina ha dado a dichos fenómenos, específicamente busca establecer elementos que fundamenten propuestas de rediseño del discurso Matemático Escolar asociado a la Trigonometría, que a la postre permitan confrontar los fenómenos aludidos. Para ello, la autora realiza un análisis del conocimiento trigonométrico en un ambiente histórico, que la acerque a los contextos, las circunstancias y las situaciones en las que dicho conocimiento se construye, tiene uso y sentido.

Como resultado del estudio, la investigadora propone tres momentos históricos de construcción social del conocimiento trigonométrico: la matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia de calor. En el primero de ellos –de especial interés para nuestro estudio–, ubica a la Anticipación como la *práctica social* que normal y orienta las *actividades* asociadas a la *práctica de referencia* de matematización de la astronomía y, por ende, a la emergencia de la cantidad trigonométrica (Figura 13).

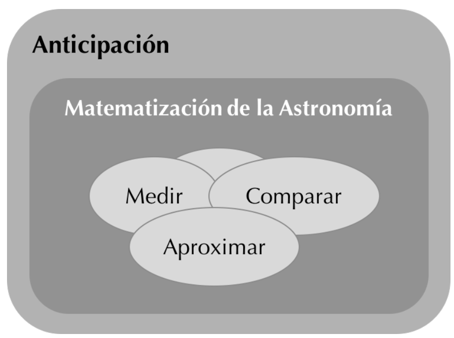


***Figura 13*. Primer momento de construcción del conocimiento trigonométrico. Con base en Montiel (2011, p. 111).**

Además, en este primer momento de construcción social del conocimiento trigonométrico, la autora reconoce que la construcción de 'modelos a escala' de la esfera celeste, propia de la astronomía de la época en cuestión, promueve el tránsito de lo macro a lo micro, espacio en el que la proporcionalidad condiciona la precisión del modelo, así como su utilidad como herramienta explicativa y anticipatoria.

La siguiente tabla sintetiza de muy buena manera los principios básicos que rigen el primer momento de construcción social del conocimiento trigonométrico:

Practica Social	Anticipación
Práctica de referencia	Matematización de la astronomía

Contexto	Estático-proporcional
Lenguaje	Geométrico-numérico
Racionalidad	Helenística-euclidiana
Herramientas	Razón trigonométrica
Variables	sen μ (longitud) μ ángulo (en grados)
Escala de Tiempo	Finita

***Tabla 2*. Principios básicos para la construcción social del conocimiento trigonométrico en un escenario histórico. Con base en Montiel (2011, p. 123).**

Dada la problemática y a la luz de estos hallazgos, la autora propone un rediseño del discurso Matemático Escolar que reconcilie el estudio de la trigonometría con la geometría y la proporcionalidad, esto es, que nociones geométricas como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos sean herramientas en la construcción de modelos geométricos, en los que emerja la cantidad trascendente trigonométrica.

Al mismo tiempo, sugiere investigación que se centre en elementos particulares del desarrollo del pensamiento y la construcción del conocimiento ligado a las nociones trigonométricas, así como a nociones y procedimientos matemáticos asociados (ángulo, triángulo, etc.), como antecedente para el diseño de secuencias didácticas que busquen construir y dar significado a dichos conceptos entre los estudiantes.

Un modelo

El aludido esquema presentado por Montiel (2005, 2011) para explicar los tres momentos de la construcción social del conocimiento trigonométrico, que articula *actividades - prácticas de referencia - prácticas sociales*, además de constituir un referente teórico para nuestro estudio, es un antecedente importante para un modelo más reciente, denominado *modelo de anidación de prácticas* (Figura 14).

Figura 14. **Modelo de anidación de prácticas. Con base en Cantoral (2013, p. 334)**

Este modelo, pretende explicar empírica y teóricamente la construcción del conocimiento matemático como resultado de la "coordinación activa de acciones, actividades y prácticas intencionales y normadas" (Cantoral, 2013, p. 78). En consecuencia, parte de las *acciones* directas del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio (en tres acepciones: material o *entorno*, organizacional o *contexto*, social o *normativo*), estas se organizan como *actividades* humanas (situadas socioculturalmente), para perfilar una *práctica* (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia* que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), las que a su vez son normadas por la *práctica social* (Cantoral, 2013).

Este modelo, que es base para las decisiones metodológicas tomadas en el transcurso del presente estudio, permite observar con suma claridad que la práctica social, en tanto norma del conocimiento matemático, constituye una de las principales contribuciones de este enfoque teórico y quizá el principal eslabón del funcionamiento de la misma (Cantoral, 2013).

3. Consideraciones Metodológicas

Caminante, son tus huellas el camino y nada más;
Caminante, no hay camino, se hace camino al andar.
Antonio Machado

La Teoría Socioepistemológica no posee un método que guíe todas las investigaciones que ella sustenta, pues ello, para una postura teórica que se reconoce contextualizada, relativista, pragmática y funcional, podría ser hasta contradictorio (Cantoral, 2013). En contraparte, este enfoque teórico sostiene que la configuración de una metodología y un método depende del fenómeno particular de estudio y del escenario contextual en que este se ubique.

El presente apartado tiene la intención de esbozar, respectivamente, las decisiones metodológicas tomadas, así como los métodos puestos en juego a causa del presente estudio.

3.1. Sobre la metodología

Como ha quedado expresado hace algunas páginas, nuestro gran propósito es contribuir con el rediseño del discurso Matemático Escolar asociado a la trigonometría, que provoca –entre otros– el fenómeno de Aritmetización de la Trigonometría. Para ello, desde la perspectiva que ofrece la Teoría Socioepistemológica, se requiere como punto de partida el cuestionamiento sistemático, no solo de cómo enseñamos trigonometría, sino de qué trigonometría enseñamos.

También hemos enfatizado que, el estudio de la naturaleza de una pieza del saber matemático, desde esta postura teórica, no se limita al análisis de la actividad matemática, al examen de los conceptos y procedimientos matemáticos; sino que es necesario anteponer –sin ignorar lo anterior– el análisis detallado de las circunstancias socioculturales que permitiron la emergencia de la pieza de conocimiento en cuestión. En otras palabras, desde esta perspectiva teórica, para el análisis del saber, éste debe *problematizarse* –historizarse y dialectizarse– (Cantoral, 2013).

La problematización del saber matemático, en tanto metodología empleada para estudiar la articulación de las dimensiones (epistemológica, cognitiva, didáctica y social) de un saber matemático específico (Reyes-Gasperini, 2016), persigue la identificación de aquellos usos y significados que le son propios al saber en cuestión y que se han diluido, transformado o perdido en su introducción a la matemática escolar (Montiel y Buendía, 2012), con la intensión de utilizarlos como herramientas de confrontación, intervención didáctica y transformación educativa. Esto la convierte en una herramienta *ad hoc* para atender nuestras preguntas y objetivos de investigación.

Así, como primera fase de nuestra problematización de las nociones trigonométricas, llevamos a cabo un análisis minucioso de la naturaleza de las nociones trigonométricas en un escenario histórico, esto es, una *historización de las nociones trigonométricas*. En la segunda fase, construimos actividades de aula con base en los resultados de nuestra historización y las implementamos en un centro de formación inicial docente con la intención de confrontar los resultados de nuestra historización con un escenario didáctico, esto es, una *dialectización de las nociones trigonométricas en un escenario didáctico* (Figura 15).

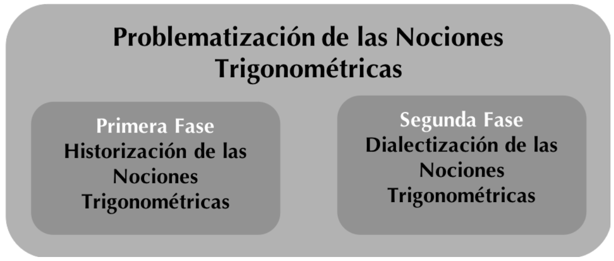


Figura 15. **Problematización de las nociones trigonométricas**

En los apartados venideros precisaremos, respectivamente, las decisiones metodológicas tomadas durante la realización de cada una de estas fases de la problematización.

Historización de las nociones trigonométricas

En nuestra disciplina, los estudios de corte histórico-epistemológico no suelen incluir las construcciones mentales, ni las obras didácticas u originales pertenecientes a otras áreas del saber, ya que no advierten en ellas valor matemático. Sin embargo, la Teoría Socioepistemológica parte del planteamiento diametralmente opuesto al afirmar que "el pensamiento humano posee una herencia" (Cantoral, 2013, p. 105).

En otras palabras, desde esta perspectiva teórica, más que historiar, nos interesa *historizar* el conocimiento matemático, esto es, nos importa "no sólo la relatoría de hechos históricos, sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático" (Montiel y Buendía, 2012, p. 68).

En consecuencia, para realizar un análisis histórico-epistemológico de las nociones trigonométricas, requerimos de una herramienta metodológica que nos permita analizar no solo la comunicación específica en la que estas emergen, sino las condiciones socioculturales que rodean la producción y difusión de la misma, la "racionalidad contextualizada con la que fue concebida en su tiempo y espacio" (Reyes-Gasperini, 2017, p. 54). El análisis de contenido, en tanto herramienta sociológica para el análisis de las comunicaciones relativo a las condiciones de producción/recepción de las mismas (Bardin, 1996 en Cáceres, 2003), se convierte, entonces, en una opción pertinente a nuestro propósito.

El análisis de contenido

Si bien la interpretación de textos sagrados y misteriosos es muy antigua, el primer caso medianamente documentado del uso de esta herramienta metodológica tuvo lugar en Suecia, alrededor del 1640 (Andréu, 2000). Sus aplicaciones iniciales, ligadas al análisis cuantitativo de material religioso, rápidamente se extendieron a ambientes como medios de prensa y literatura, y a ramas de la ciencia como la sociología y la política.

Es a mediados de 1900, y producto de su enorme aplicación en ramas sociales como la psicología, la ciencia política, la sociología, la literatura, la historia, la antropología y la lingüística, que aflora la disputa entre el análisis cuantitativo y el cualitativo de contenido.

> Para los partidarios del análisis cuantitativo lo que sirve de la información es la frecuencia de la aparición de ciertas características de contenido. Para los analistas cualitativos es la presencia o ausencia de una característica de contenido dada, o de un conjunto de características, en un cierto fragmento de mensaje que es tomado en consideración. (Andréu, 2000, p. 7)

Este cambio o ampliación de enfoque favorece la obtención de resultados integrales, profundos e interpretativos más allá de los aspectos léxico-gramaticales (Pérez, 1994 en Cáceres, 2003). En consecuencia, a partir de este punto histórico, el análisis de contenido comienza un paulatino tránsito de ser una herramienta metodológica utilizada exclusivamente para el estudio descriptivo de las diversas comunicaciones, a un aparato metodológico cuya función o meta principal es la inferencia.

Una interpretación moderna y amplia del análisis de contenido, desde un enfoque netamente cualitativo, lo caracteriza como "una aproximación empírica, de análisis metodológicamente controlado de textos al interior de sus contextos de comunicación, siguiendo reglas analíticas de contenido y modelos paso a paso, sin cuantificación de por medio" (Mayring, 2000 en Cáceres, 2003, p. 56).

Esta definición resalta la trascendencia del contexto de producción y recepción de una comunicación para la comprensión e inferencia del mensaje transmitido por la misma (Mayring, 2015). Además, permite entrever una de las características más importantes del análisis de contenido, la premisa de que toda comunicación puede ser interpretada de una forma directa, mediante el contenido manifiesto o explícito de la misma, y de forma indirecta, a través de su contenido latente o implícito.

Tanto el contenido manifiesto como el latente cobran sentido y pueden ser captados dentro de un contexto específico. En este sentido, el contexto se convierte en un marco de referencias que contiene toda aquella información que el lector puede conocer de antemano o inferir a partir del texto mismo, con el fin de captar el contenido y el significado de todo lo que se dice en el texto. Así, "texto y contexto son dos aspectos fundamentales en el análisis de contenido" (Andréu, 2000, p. 2).

Además de la atención al contexto, Mayring (2015) señala otros 'puntos centrales' para el análisis de contenido, como la necesidad de proveer un 'modelo de procedimiento' que esboce las fases o etapas del análisis; definir unidades de análisis; establecer y explicitar un sistema de códigos y categorías; conservar a los antecedentes, propósitos de análisis y posicionamiento teórico como referentes para cualquier decisión metodológica a tomar; y mantener un constante 'pilotaje' y –de creerse necesario– ajuste de los códigos y categorías de análisis construidas.

Cáceres (2003), con base en los aportes de Mayring (2000), ilustra lo dicho hasta el momento sobre el análisis de contenido con un diagrama genérico de la puesta en escena de esta herramienta metodológica (Figura 16).

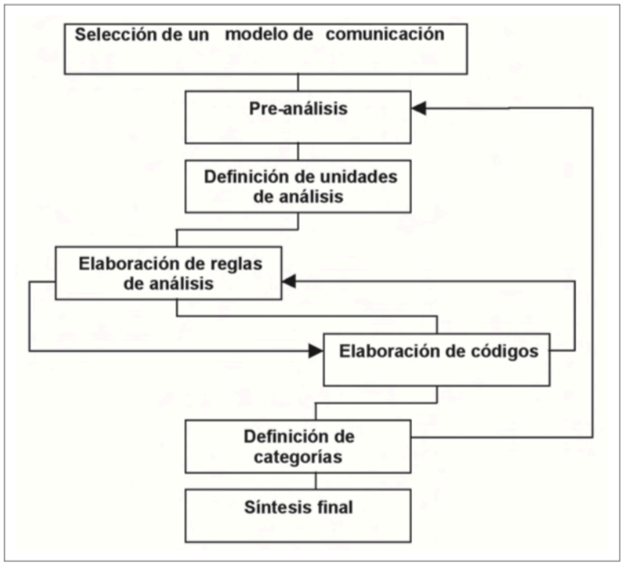


Figura 16. **Procedimiento general de la técnica de análisis cualitativo de contenido. Tomada de Cáceres (2003, p. 58).**

Más allá de estudiar a detalle las etapas propuestas en este diagrama, ahora nos interesa subrayar que este refleja de buena manera algunas de las características principales del análisis de contenido en su vertiente cuantitativa: un amplio rango de flexibilidad, propia de las propuestas metodológicas adscritas a enfoques cualitativos (Cáceres, 2003), que –como mencionamos– tienen como punto de anclaje a los antecedentes, la postura teórica y el propósito del análisis de contenido en cuestión. Así como la objetividad y sistematización, que redundan en la reproducibilidad deseada para un instrumento de investigación científica (Andréu, 2000).

Además, deja en evidencia que el núcleo de análisis cualitativo de contenido radica en la definición de unidades, códigos y categorías de análisis. Las primeras refieren a bloques de contenido significativos dentro de la comunicación en cuestión que servirán para extraer resultados (Briones, 1988 en Cáceres, 2003) y que en principio pueden ser estudiados de forma aislada. Esta primera fragmentación del contenido se realiza de diversas maneras, siempre en correlación con la naturaleza de la comunicación y del propósito mismo del análisis. Así, por ejemplo, en la grabación de un discurso pueden establecerse unidades de análisis con base en intervalos de tiempo, mientras que en un periódico puede tomarse como referencia sus diferentes secciones.

Los códigos, por su parte, son índices numéricos y/o alfabéticos útiles para etiquetar segmentos de contenido dentro de las unidades de análisis, "agregando información al texto a través de un proceso que abstrae las características del contenido agrupado y la sintetiza en un solo concepto o símbolo" (Cáceres, 2003, p. 64). En este sentido, la codificación refiere al proceso por el cual los datos brutos se transforman sistemáticamente en unidades que permiten una descripción precisa de las características de su contenido (Hostil, 1969 en Andréu, 2000).

Finalmente, podemos entender a las categorías como los cajones o casillas en donde el contenido previamente codificado se ordena y clasifica –con base en un criterio claro y explícito– de modo definitivo (Cáceres, 2003). Es decir, la categorización "es una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por analogía, a partir de criterios previamente definidos" (Bardin, 1996 en Andréu, 2000).

En suma, la médula del análisis de contenido radica en la división del contenido en grandes secciones que –a criterio del investigador– pueden ser estudiados inicialmente de forma aislada, la identificación y 'etiquetación' de características relevantes en el contenido, y la clasificación y distribución de estas características. Como hemos reiterado, la determinación de las unidades, códigos y categorías de análisis, al igual que el resto de decisiones metodológicas, está sujeta al propósito de análisis y la postura teórica del estudio, así como por la naturaleza de la comunicación de interés.

Nuestro análisis de contenido

En nuestro caso, dados los antecedentes y problemática aludida en el Capítulo I, el posicionamiento teórico expuesto en el Capítulo II, y nuestro propósito de análisis –acercarnos a los usos y significados germinales de las nociones trigonométricas, en pro de esbozar su construcción social–, y considerando lo expuesto por Andréu (2000), Cáceres (2003) y Mayring (2015), estructuramos una configuración particular de análisis cualitativo de contenido. De forma general, este se encuentra compuesto por seis etapas (Figura 17).

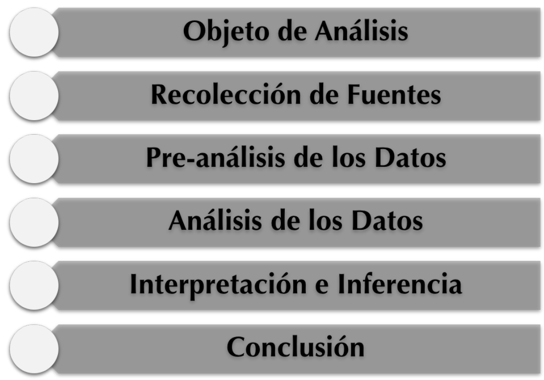


***Figura 17*. Etapas de nuestro análisis de contenido**

La primera de ellas tiene como objetivo principal la selección de un *objeto de análisis*, que puede ser un fenómeno o una comunicación concreta. En esta etapa es trascendental la existencia de un propósito de análisis claro, la revisión bibliográfica alrededor del tópico de interés, y una postura teórica, disciplinar o profesional sobre el mismo (Cáceres, 2003).

La segunda etapa, la recolección y selección de fuentes, tiene como fin hacernos de entrevistas, discursos, protocolos de observación, documentos, videos y cualquier otro tipo de comunicación que pueda representar una fuente de datos para nuestro propósito de análisis. La postura teórica es concluyente en esta etapa del estudio, pues será un referente para discriminar posibles fuentes de datos. Por ejemplo, aun cuando sus análisis tomen como objeto de estudio a la misma comunicación, la correspondencia de un matemático del siglo pasado puede no ser de interés para un encuadre teórico centrado en el examen de los conceptos y procedimientos matemáticos; no obstante, puede representar una valiosa fuente de información para las perspectivas teóricas interesadas en el estudio de la influencia de las circunstancias socioculturales en la producción de conocimiento matemático.

Es más, –como quedará en evidencia más adelante– el propósito de análisis y los elementos teóricos explicitados, son fundamentales, no solo para definir nuestro objeto de análisis, sino para entender el problema, guiarnos en la selección de los datos, ayudarnos a explicar la relación de los datos con la realidad de la que se extraen y pronosticar sus tendencias futuras (Andréu, 2000).

La tercera etapa de nuestro análisis de contenido, el pre-análisis de los datos, pretende ser un primer momento de preparación organizacional y técnica de la información, en consecuencia, incluye procesos de selección de los datos y de tratamiento de los mismos, categorización, traducción y transcripción, por ejemplo. En este sentido, "la gran tarea del pre-análisis radica en definir 'el universo' adecuado, sobre el cual aplicaremos la técnica" (Hernández, 1994 en Cáceres, 2003, p. 60).

El análisis de los datos, cuarta etapa de nuestro análisis de contenido, es el centro de nuestra herramienta metodológica y apunta a ser un momento de comprensión de los datos, así como de establecimiento de causalidades, correspondencias y vínculos entre los mismos.

La quinta etapa de nuestro análisis, la interpretación e inferencia, permite concretar todo el esfuerzo reflexivo y crítico en el descubrimiento de lazos, causas y de su conveniente interpretación (Cáceres, 2003). Mientras que la sexta y última etapa, la conclusión, persigue la clara y concisa comunicación de los fundamentos, métodos y resultados del análisis de contenido realizado.

En síntesis, dado nuestro problema de investigación, la postura teórica asumida y el propósito de nuestra problematización, nos es necesario un andamiaje metodológico que nos permita analizar no solo la comunicación en la que se ubique la génesis de las nociones trigonométricas –del texto–, sino las condiciones sociales, culturales e instituciones que hicieron posible la producción y difusión de la misma –el contexto, en un sentido amplio–; este papel jugará la configuración particular del análisis de contenido que esbozamos.

Dialectización de las nociones trigonométricas

Como ha quedado expresado hace unas páginas, la segunda fase de nuestra problematización, la dialectización de las nociones trigonométricas, tiene como propósito particular confrontar los resultados de nuestra historización con un escenario didáctico. Con esto en mente, estructuramos una estrategia metodológica compuesta por cuatro etapas (Figura 18):

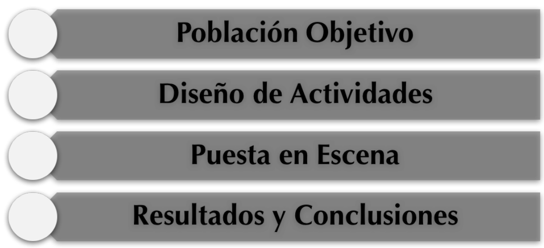


Figura 18. **Etapas de la dialectización**

La primera de ellas pretende acercarnos a la población objetivo de nuestra dialectización, esto es trascendental para la selección de los futuros participantes, así como para el diseño adecuado de las actividades de aula. La segunda etapa, el diseño de actividades, pretende concretar los resultados de la historización en tareas de aula que sean adecuadas a la trayectoria académica y características de la población objetivo, esbozadas en la etapa anterior.

La puesta en escena, tercera etapa de esta fase, refiere a la implementación de las actividades de aula diseñadas con los participantes seleccionados. Finalmente, la cuarta etapa, el planteamiento de resultados y conclusiones, es un momento de descripción y análisis de los datos, así como de planteamiento de conclusiones que atiendan nuestro objetivo.

En suma, dado el propósito de esta fase del estudio, nos es necesario estructurar un conjunto de actividades de aula –*ad hoc* a las características, condiciones y trayectoria académica de nuestra población objetivo– que nos permitan poner a prueba los resultados de la historización realizada. En este sentido es que la problematización del saber matemático, en tanto historización y dialectización de una pieza de conocimiento matemático particular, hace posible el "dejar hablar entre sí a las distintas posturas y explicaciones, significarlas con base en sus contextos, entenderlas y estudiarlas con base en ellos" (Reyes-Gasperini, 2017, p. 55).

3.2. Sobre el método

Después de la explicación y justificación de las decisiones metodológicas tomadas consecuencia de nuestro problema de interés y nuestra postura teórica, esto es, en el qué y porqué de nuestro proceder, nos enfocamos en explicitar los métodos puestos en juego, es decir, el cómo de cada una de las fases de problematización.

Historización de las nociones trigonométricas

Tal como hemos aludido, la configuración particular de análisis cualitativo de contenido descrita en la sección anterior es el andamiaje general de nuestra historización de las nociones trigonométricas. En este apartado, describimos *grosso modo* las decisiones tomadas y los métodos puestos en juego en cada una de las seis etapas que la componen.

Etapa 1: Determinación de un objeto de análisis

De manera irremediable al intentar determinar nuestro objeto de análisis, dado el propósito de nuestra historización –acercarnos a los usos y significados germinales de las nociones trigonométricas–, nos enfrentamos a la interrogante: ¿cuándo nacieron las nociones trigonométricas?

No es pequeño el debate acerca de esta cuestión, en primera instancia porque su respuesta es relativa a la concepción de 'nociones trigonométricas' que se considere. Así, por ejemplo, si consideramos las nociones trigonométricas como el seno, coseno y demás razones modernas, podríamos ubicar su nacimiento entre el 300 d.C. y el 400 d.C., en tratados hindúes como los *Siddhantas* (Montiel, 2011).

Sin embargo, desde una perspectiva más amplia de las nociones trigonométricas, la literatura especializada coincide en que algunos de los elementos necesarios para rastrear la emergencia de las mismas son la existencia de una medida cuantitativa estándar de la inclinación de una línea a otra –noción cuantitativa del ángulo–, y la capacidad e interés en el cálculo de las longitudes de los segmentos de línea (Van Brummelen, 2009).

Con eso en mente, y para efectos de nuestra historización, ubicamos el nacimiento de las nociones trigonométricas en el momento histórico en el que se enfrenta de forma deliberada y sistemática el problema de describir cuantitativamente la relación existente entre un ángulo y las distancias que este subtiende.

Así, volviendo a nuestra cuestión inicial, la literatura coincide –de forma general– en que la 'tabla trigonométrica' construida por Hiparco de Nicea, alrededor del siglo II a. C. en Alejandría, constituye la evidencia más antigua del nacimiento de la trigonometría con la que contamos. Sin embargo, esta tabla, al igual que el resto del trabajo de Hiparco, se ha perdido; hecho que nos ha orillado a elegir el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto* de Ptolomeo, en el cual el autor construye una tabla trigonométrica homóloga, como *objeto de análisis* para nuestra historización.

En suma, fruto de nuestra perspectiva teórica, nuestro propósito de análisis y las limitaciones metódicas aludidas, adoptamos al Capítulo IX del Libro I del *Almagesto* de Ptolomeo como nuestro objeto de análisis, en tanto constituye la evidencia más antigua del nacimiento de la trigonometría –como estudio deliberado, sistemático y cuantitativo de la relación ángulo-distancia– que ha llegado hasta nosotros.

Etapa 2: Recolección y selección de fuentes

Determinado un objeto de análisis, nos enfocamos en la recolección de fuentes de datos asociadas. La búsqueda, que se llevó a cabo en espacios físicos y digitales –generales y específicos de nuestro campo disciplinar–, nos permitió hacernos de un cúmulo de documentos que fácilmente podríamos clasificar en cuatro tipos: estudios sobre historia de las ciencias y de la matemática en general, reinterpretaciones del *Almagesto*, análisis sobre la obra y traducciones comentadas de la misma.

Las primeras, refieren a análisis realizados principalmente por filósofos, historiadores y/o matemáticos sobre la evolución histórica de las ciencias, en general, y de la matemática, en particular. Estas fuentes fueron indispensables para configurar una visión panorámica de los eventos trascendentales en la configuración del escenario científico y sociocultural en el que se construyó y difundió el *Almagesto*. Dentro de este grupo, a manera de ejemplo, podemos ubicar el *Science Awakening II* (van der Waerden, 1974) y la *Historia de la Matemática* (Boyer, 1986).

Las segundas, las reinterpretaciones del *Almagesto*, refieren a las versiones del *Almagesto* que no apuntan a ser una traducción literal de la obra, sino una interpretación en lenguaje moderno del contenido de la misma. Estas nos fueron útiles para acercarnos el contenido astronómico y matemático del tratado, así como para rastrear fuentes más cercanas a nuestro objeto de análisis. Dentro de este grupo podemos mencionar, para dar algún ejemplo, a *Ptolomy's Almagest* (Toomer, 1984).

Por otro lado, los análisis sobre el *Almagesto* hacen alusión a estudios realizados por matemáticos, astrónomos y/o historiadores específicamente alrededor del *Almagesto* de Ptolomeo. Estas hicieron posible –entre otras cosas– entender la obra dentro de su contexto de producción y difusión, así como ubicar fuentes fiables y cercanas a la misma. Dentro de este tipo de fuente podemos ubicar, como ejemplo, *A Suvey of Almagest* (Pedersen, 2010).

Finalmente, las traducciones comentadas del *Almagesto* refieren a las traducciones literales de la obra, en estas, a diferencia de las reinterpretaciones aludidas, los escolios se explicitan mediante notas al pie de página y/o comentarios en anexos. Estas fuentes nos fueron útiles para acercarnos tanto como es posible al documento escrito por Ptolomeo, su racionalidad, lenguaje y estructura. En el marco de este último grupo encontramos *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo* (Saiz, 2003).

En conclusión, en esta segunda etapa del análisis de contenido nos hicimos de un cúmulo de artículos, libros y recopilaciones que fungieron como materia prima de nuestro estudio. Además, comenzamos, producto de la triangulación de las mismas, con el proceso de selección de fuentes, tomando como criterio su fiabilidad histórica y/o impacto, según el caso.

Etapa 3: Pre-análisis de los datos

La tercera etapa de nuestro análisis de contenido, denominada pre-análisis, tiene como fin la preparación organizacional y técnica de los datos. Si bien no son procesos completamente disjuntos, esta etapa incluye diferentes momentos para el análisis contextual y análisis textual, única razón de que presentemos su descripción de forma separada.

Análisis contextual

La etapa de pre-análisis respecto al análisis contextual abarca tres momentos (Figura 19):

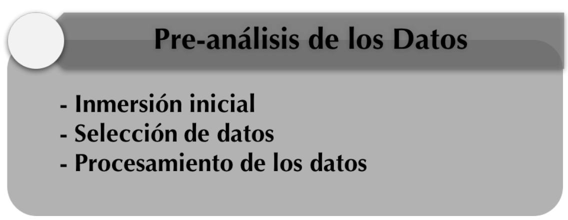


Figura 19. **Momentos del Pre-análisis – Análisis Contextual**

El primer de ellos refiere a las reiteradas lecturas comprensivas realizadas sobre las fuentes recopiladas y discriminadas en la etapa anterior, y tiene como objetivo ser una instancia de comprensión de las mismas. El segundo momento, la selección de datos, tiene el propósito de ser –con base en las lecturas realizadas y la triangulación– un primer filtro de datos, esto es, de selección de documentos o secciones de documentos que consideramos podrían contribuir a atender nuestro propósito de análisis. Finalmente, el procesamiento de los datos refiere a los procedimientos a los que son sometidos las fuentes y los datos con la intención de hacer más eficiente y eficaz su posterior análisis, procesos de traducción y transcripción, por ejemplo.

Análisis Textual

El pre-análisis de la componente textual también incluye los tres momentos descritos anteriormente. Como resultado de ellos, seleccionamos la traducción comentada de Saiz (2003) como obra principal para el análisis textual y las ediciones presentadas por Hutchins (1952), Toomer (1984) y Pedersen (2010) como fuentes alternas o secundarias; además, como parte de la preparación, transcribimos la edición de Saiz (2003), con la intención de facilitar su modificación posterior.

En este punto, y fruto de los momentos descritos, así como del análisis contextual realizado de forma paralela, nos percatamos de la pertinencia de realizar un análisis detallado de los *Elementos* de Euclides. Dicho estudio no solo es trascendental para el estudio del contexto en el que se produce y difunde ciencia en la época, sino que permite la configuración metódica de los momentos y etapas restantes del análisis de contenido.

Ahora bien, esta etapa del análisis –en su componente textual– incluye dos momentos además de los mencionados: la identificación de unidades de análisis, la codificación y categorización preliminar (Figura 20).

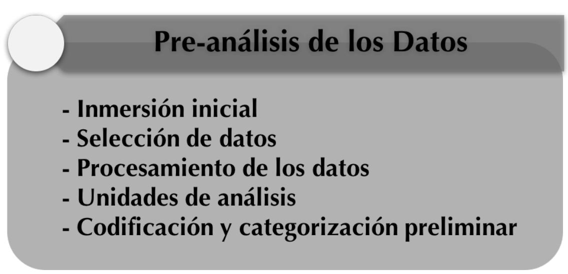


Figura 20. **Momentos del Pre-análisis – Análisis Textual**

El primero, refiere a la selección de unidades de análisis, esto es, a la discriminación de bloques de contenido que en primera instancia pueden ser analizados de forma aislada. Para nuestro caso, y producto del análisis contextual y el aludido estudio sobre los *Elementos*, tomamos como unidades de análisis cada una de las *proposiciones* identificadas en nuestro objeto de análisis. Entendidas estas como cada una de las secciones del tratado con unidad temática en las que el autor se da a la tarea de establecer una característica –propiedad o relación– esencial de los objetos matemáticos construidos o dados (Euclides, 1991).

Por otro lado, la codificación y categorización preliminar, segundo momento de esta etapa, alude al establecimiento implícito de códigos y categorías que sean base para el estudio de cada una de las proposiciones, así como de la obra en su conjunto. Así, para el caso que nos compete, partimos de la estructura discursiva identificada en el estudio de los *Elementos* para componer un conjunto de códigos estructurales *ad hoc* a la naturaleza de *Almagesto* de Ptolomeo. De forma homóloga, empleamos los niveles de análisis construidos con motivo del análisis sobre la obra de Euclides, para componer categorías de análisis que nos permitieran estudiar a diferentes niveles de profundidad el apartado de la obra maestra de Ptolomeo.

En síntesis, como fruto de la tercera etapa del análisis de contenido en su componente textual estudiamos las fuentes recolectadas alrededor de nuestro objeto de análisis, las seleccionamos y sometimos a los procesos de preparación técnica necesarios. Además, identificamos siete unidades de análisis o proposiciones en el *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo* (Saiz, 2003), y adaptamos la estructura discursiva y niveles de análisis construidos con motivo del análisis de los *Elementos* a los propósitos y la naturaleza de nuestro actual objeto de análisis.

Etapa 4: Análisis de los datos

De forma similar a la etapa anterior, esta tiene particularidades en sus componentes textual y contextual, por lo cual las describimos de forma disjunta.

Análisis Contextual

La etapa de análisis de los datos, con relación a la componente contextual, toma como base la propuesta metodológica planteado por Espinoza-Ramírez (2009), según la cual, para acercarnos el significado sociocultural de una obra, esta debe verse al menos desde tres perspectivas:

Como una producción con historia. La obra debe ser entendida como perteneciente a una época, a un ser humano con sus propias ideas germinales y sus medios de significación. Para ello estudiamos del autor: su vida personal, su familia y episodios relevantes de su vida; y de su vida profesional: su carrera académica, la relación con sus colegas y sus intereses académicos. Además nos interesa el contexto sociopolítico de la producción y difunción de la obra, así como los problemas abordados por la ciencia de su época.

Como un objeto de difusión. Toda obra matemática que se publica tiene una intencionalidad de difusión intrínseca, pues busca difundir algo a alguien. Esto hace necesario considerar el tipo de obra, los destinatarios de la misma, las condiciones del medio de difusión y la institución que la publica.

Como parte de una expresión intelectual global. Una obra antigua es una expresión intelectual que pertenece a una secuencia de ideas y evoluciona en la totalidad de las obras del autor e incluso de su comunidad científica, académica o social. Para ello, se estudia la obra matemática con una mirada general de las obras más relevantes del autor y se estudian las obras relacionadas con la obra.

En consecuencia, para nuestro análisis, nos planteamos preguntas de partida como: ¿quién fue Claudio Ptolomeo?, ¿cuándo y dónde nació?, ¿quién fue su familia?, ¿cuál fue su formación?, ¿qué antecedentes astronómicos y matemáticos sustentan el *Almagesto*?, ¿es el *Almagesto* una obra con fines didácticos o de divulgación científica?, ¿quiénes son sus destinatarios iniciales?, ¿qué eventos sociales, políticos o económicos son determinantes en su publicación?, ¿en qué condiciones se difunde originalmente? (Cruz-Márquez y Montiel, 2017).

Estas cuestiones constituyen el punto de partida de un iterativo proceso de análisis y articulación de los hechos históricos llevado a cabo con el afán de estructurar un panorama amplio de las condiciones de producción y difusión de la obra maestra de Ptolomeo.

Análisis Textual

Por otro lado, el Análisis de la componente textual contempla tres momentos (Figura 21):

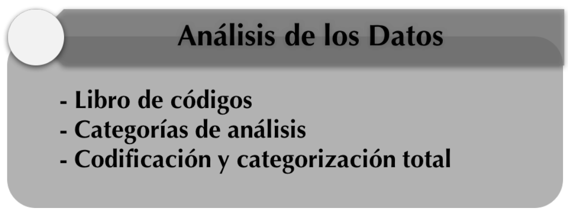


***Figura 21*. Momentos del Análisis – Análisis Textual**

El primero y segundo de ellos, hacen alusión a la precisión de los códigos y categorías identificados en la etapa anterior, los primeros mediante un 'libro de códigos', una lista que nombra, caracteriza y ejemplifica los códigos a utilizar con la intención de volver más precisos y eficientes los procesos posteriores; los segundos, a través de la explicitación de las categorías y de los criterios a los que responde su construcción. El tercer momento del análisis de los datos en su componente textual apunta a la codificación y categorización de la totalidad de los datos, tomando como base los criterios, los códigos y categorías explicitados previamente.

En síntesis, producto de esta etapa, construimos un libro compuesto por seis códigos y explicitamos las tres categorías o niveles de análisis construidos, que, como hemos enfatizado, devienen del estudio realizado sobre los *Elementos* de Euclides.

Etapa 5: Interpretación e inferencia de datos

La quinta etapa del análisis de contenido apunta a la mayor articulación entre el análisis textual y el análisis contextual realizado, es decir, en este punto se pretende, con base en los datos recolectados, seleccionados y analizados en las etapas precedentes, atender a nuestro propósito de análisis.

Etapa 6: Conclusiones e informe

Finalmente, esta etapa pretende hacer comunicable de forma clara y concisa los fundamentos, decisiones metodológicas, métodos y resultados de la historización de las nociones trigonométricas que realizamos a través del análisis de contenido en cuestión.

Dialectización de las nociones trigonométricas

Por su parte, la confrontación de los resultados de nuestra historización con un escenario didácticos requiere un andamiaje metodológico particular, razón por la cual construimos una estrategia metodológica que consta de cuatro etapas. En el presente apartado describimos a grandes rasgos las decisiones tomadas y los métodos puestos en juego en cada una de estas etapas.

Etapa 1: Estudio de la población objetivo

Dado nuestro interés por contribuir con la formación inicial docente –especialmente en Honduras– como una vía eficiente y efectiva, no solo de transformación educativa, sino de cambio nacional y regional; diseñamos la etapa de dialectización de las nociones trigonométricas pensando en un grupo de estudiantes del Profesorado en Matemáticas que oferta el campus central de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM), ubicado en Tegucigalpa, Honduras.

En consecuencia, realizamos, como primera etapa de nuestra dialectización, un estudio sobre la población seleccionada, con el objetivo de acercarnos a la misma, específicamente de su trayectoria a académica. Esto se llevará a cabo mediante la revisión de los planes de estudio del Profesorado en Matemáticas, así como de los planes y programas de estudio correspondientes a los últimos años de Educación Básica y la Educación Media de Honduras (equivalentes de la Educación Secundaria y Media Superior del sistema escolar mexicano).

Además de darnos información acerca de la relación que los participantes han podido construir con las nociones geométricas y trigonométricas producto de su trayectoria académica y de ponernos en posición de seleccionar un grupo particular de participantes, esta etapa es importante para identificar elementos en la formación de los futuros profesores referidos que rompan con el fenómeno de Aritmetización de la Trigonometría –en caso de que existan–.

Etapa 2: Diseño de las actividades de aula

Por su parte, la segunda etapa de esta fase de investigación, el diseño de actividades de aula, apunta a la construcción de un conjunto de actividades de aula que nos permitan confrontar los resultados de nuestra historización con el escenario aludido, sin perder de vista las características particulares de la población seleccionada.

Etapa 3: Puesta en escena

La tercera etapa de nuestra dialectización requiere de tres momentos: una entrevista con el o la docente a cargo del grupo de participantes seleccionado, la realización de las actividades con los estudiantes, y una entrevista final con el o la docente del espacio pedagógico seleccionado.

El primero de ellos, tienen como objetivo aprovechar la experiencia y cercanía del docente con el grupo, en pro de ajustar los detalles de las actividades de aula diseñadas. Para esto, presentamos brevemente –a el o la docente– el sustento, estructura y propósito de las actividades de aula construidas, en espera de observaciones y recomendaciones útiles para adecuar la puesta en escena.

El segundo momento, refiere a la puesta en marcha de las actividades de aula con el grupo seleccionado. Y el tercero, la reunión final con la o el docente a cargo, tiene como objetivo recolectar algunas de sus impresiones respecto a las limitaciones y potencialidades del diseño e implementación del taller, así como tomar sus observaciones respecto a las dificultades mostradas por los estudiantes, las posibles causas de estas, y las acciones que la universidad y los profesores pueden tomar al respecto.

Etapa 3: Resultados y conclusiones

Finalmente, la cuarta etapa de nuestra dialectización, el establecimiento de resultados y conclusiones, pretende hacer comunicable de forma clara y concisa los resultados de la puesta en escena, así como el análisis realizado sobre los mismos, a la luz de nuestra postura teórica y la historización de referencia.

4. Una Historización de las Nociones Trigonométricas

Consideramos que es un buen principio para explicar los fenómenos
la hipótesis más simple posible.
Claudio Ptolomeo

Con la intención de mejorar su claridad, y en correspondencia con la herramienta metodológica implementada, exponemos los resultados de la historización realizada en dos grandes apartados: el análisis contextual y el análisis textual del *Almagesto*.

4.1. Análisis contextual

Consideramos que, previo al recorrido cronológico por los antecedentes socioculturales del *Almagesto*, es necesario hacer explícitos algunos hechos astronómicos que fueron determinantes para la construcción y establecimiento de los diversos sistemas astronómicos que antecedieron a Ptolomeo.

Los hechos astronómicos empíricos

Al pensar en un planeta de nuestro sistema solar, Marte, por ejemplo, nos es natural evocar un planeta rocoso, rojizo y más pequeño que la Tierra. Esta concepción es producto de las fotografías y videos capturados desde los observatorios astronómicos o las sondas y naves espaciales lanzadas al espacio, por ende, es muy diferente a la visión de Marte que tendría, por ejemplo, una persona que hubiera vivido antes de nuestra era (DeWitt, 2010).

En consecuencia, al hablar de los hechos astronómicos empíricos a los que debían responder las teorías astronómicas en la antigüedad consideramos aquellos datos que devienen de observaciones empíricas simples, es decir, a los cambios aparentes de los cuerpos celestes, desde la Tierra, sin un instrumento de observación especializado.

Con esto en mente y con relación a las estrellas, dos hechos empíricos nos son de interés: su *periodo de movimiento* y su *posición relativa*. El primero refiere a que, desde nuestra perspectiva, las estrellas parecen moverse siguiendo un patrón regular que dura aproximadamente 24 horas, esto es, si una noche salimos a contemplar una estrella particular, 24 horas más tarde la estrella observada se encontrará aparentemente en la misma posición en la que estaba la noche anterior. Este movimiento parece ser circular, en sentido antihorario, respecto a un eje imaginario que atraviesa nuestro planeta y coincide con la llamada Estrella del Norte (Figura 22).

***Figura 22*. Movimiento de las estrellas. Modificada de Diana Robinson (2014).**

El segundo hecho empírico –relativo a las estrellas– al cual debía responder toda teoría astronómica es la aparente conservación de la posición relativa, es decir, cuando una estrella se mueve por el firmamento parece permanecer siempre en la misma posición respecto a las demás estrellas. Este hecho hace posible, por ejemplo, la identificación de constelaciones en el firmamento.

Por otro lado, dentro de los hechos empíricos más relevantes respecto al Sol tenemos su *periodo de movimiento* y su *cambio en la salida y puesta*. El primero hace referencia a su desplazamiento aparente por el cielo, saliendo por el Este y ocultándose por el Oeste, aproximadamente cada 24 horas. El segundo a la variación del punto exacto en su salida y puesta, acercándose al Norte durante el verano y hacia el Sur en invierno (Figura 23).

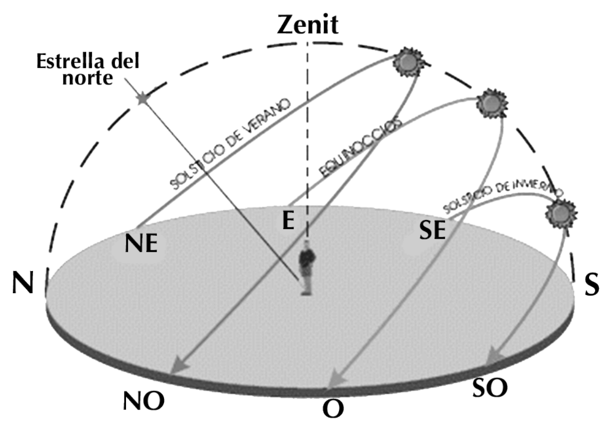


Figura 23. **Hechos astronómicos empíricos del Sol. Modificada de Van Brummelen (2009, p. 2).**

Finalmente, los hechos empíricos más notorios acerca los planetas son *su movimiento* y las *retrogradaciones*. El primero de ellos alude a las pequeñas variaciones de movimiento que manifiestan los planetas. Si observamos un planeta en el firmamento nocturno durante algunos días o semanas, en cada observación el planeta se habrá desplazado perceptiblemente de su posición anterior respecto a las estrellas. Esta particularidad de movimiento inspiró el término "planeta", cuya acepción griega es sinónimo de "nómada" o "vagabundo" (DeWitt, 2010).

El segundo hecho empírico, las retrogradaciones, refieren al aparente movimiento 'hacia atrás' que presentan los planetas, esto es, usualmente un planeta cruza el firmamento en una determinada dirección, sin embargo, durante ciertos intervalos, su velocidad aparente disminuye hasta el punto de detenerse e incluso moverse en dirección opuesta, para finalmente volver a la dirección inicial de movimiento (Figura 24). Si bien todos los planetas presentan diferentes intervalos de retrogradación, de manera general, este cambio temporal en el sentido de movimiento coincide con un aumento en el brillo y tamaño aparente de los planetas.

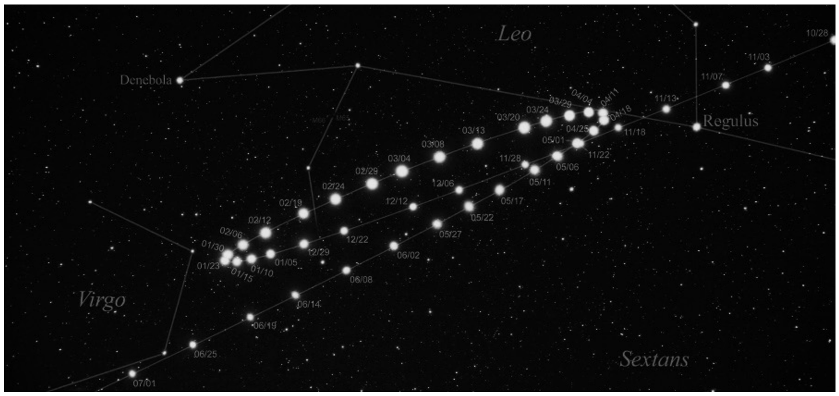


***Figura 24*. Movimiento de Marte entre Octubre 2011 y Julio 2012. Modificada de Cenk Tezel y Tunç Tezel (2011-2012).**

Considerando que los planetas, a excepción de las pequeñas variaciones temporales de brillo y movimiento mencionadas, no difieren a simple vista de una estrella cualquiera, su comportamiento constituyó quizá el elemento más problemático al intentar ofrecer una explicación completa de la mecánica celeste.

De Sirio a Ptolomeo

Con el afán de hacer más comprensible el cómo distintos elementos se entretejen hasta constituir los sistemas de explicación previos a la producción del *Almagesto*, nos es conveniente dividir las principales culturas de occidente en dos grandes grupos: las Civilizaciones Pre-helénicas y la Civilización Helénica. Dentro de las primeras consideramos la civilización egipcia y las civilizaciones mesopotámicas, mientras que el desarrollo de la segunda lo dividimos en cuatro épocas: arcaica, clásica, helenística y romana.

No obstante, el seccionar los antecedentes en estos intervalos nos es útil para explicar la emergencia y evolución de las ideas de interés desde un punto de vista más cercano a los acontecimientos socioculturales que a los científicos como productores autónomos de conocimiento, no debemos pasar por alto que los límites de estos intervalos no indican una discreción y mucho menos un estancamiento.

Civilización Egipcia

Las civilizaciones antiguas de occidente se desarrollaron en los valles fértiles, alrededor de grandes afluentes de agua (Figura 25), ya que estas zonas ofrecían mayores ventajas para desarrollarse gracias a la agricultura, ganadería y pesca (Struik, 1980). Sin embargo, este hecho también acarreaba algunos problemas, como las inundaciones, una situación recurrente en las regiones de Egipto y Mesopotamia.

Figura 25. **Civilizaciones Antiguas de Occidente**

El percatarse de que las inundaciones del valle del rio Nilo, que borraban los límites establecidos del terreno y causaba estragos en la ganadería y agricultura de la región, sucedían invariantemente poco después de la llamada salida heliaca de Sirio, esto es, cuando la estrella Sirio sale por el Este justo antes que el Sol, aproximadamente cada 365 días, constituye el nacimiento del estudio de los astros en Egipto (van der Waerden, 1974).

Desde entonces, los sacerdotes egipcios se situaban en las terrazas y en los techos superiores de los templos y palacios y desde allí contemplaban la bóveda celeste, "su tarea principal era señalar el orto, tránsito u ocaso de las estrellas que tenían seleccionadas como marcadoras de las horas" (Moreno-Garrido, 2014, p. 10).

Producto de estas observaciones, se instauró –en el año 4241 a.C. aprox. (Kline, 1972)– un calendario solar que constaba de doce meses de treinta días cada uno, a los cuales se le agregaban cinco días festivos. Además, hicieron posible la documentación de alrededor de una cincuentena de constelaciones y de los cinco planetas observables a simple vista, los ahora denominados Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno (Dorce, 2006).

Sabemos de estos y otros eventos de índole religiosa y astronómica gracias a las piedras talladas en tumbas, templos y demás monumentos egipcios, sin embargo, estas no constituyen una fuente de información amplia acerca de su trabajo matemático (Boyer, 1986). Por fortuna, contamos también con algunos papiros que, de una manera u otra, han sobrevividos el pasar de casi cuatro milenios. Entre estos destacan el Papiro de Ahmes, conocido también como Papiro de Rhind, y el Papiro de Moscú.

El primero de ellos, una cinta de papiro de casi seis metros de largo y unos 30 centímetros de alto, copiado por el escriba Ahmes alrededor del 1650 a.C. y comprado por A. Henry Rhind en 1858, constituye uno de los documentos matemáticos más antiguos que ha llegado hasta nosotros (Maor, 1998). Este papiro es una colección de 84 problemas matemáticos referentes a aritmética, estimación de una cantidad desconocida, cálculo de áreas y volúmenes, y progresiones aritméticas y geométricas, precedidos por dos tablas: una tabla de 2/n, para los enteros impares desde 3 a 101, y la una tabla de n/10, para n de 1 a 9 (Boyer, 1986).

Cuatro de los problemas del Papiro de Ahmes, del 56 al 60, nos merecen un interés especial. En ellos se plantea uno de los principales obstáculos que enfrentaban los egipcios en la construcción de las pirámides: mantener la inclinación uniforme en cada una y todas sus caras.

El problema 56 (Figura 26), por ejemplo, nos dice: "Si una pirámide tiene 250 codos de altura y su base tiene 360 codos de largo, ¿cuál es su *seket*?" (Chace, Bull, Manning y Archibald, 1927, p. 96, [Traducción nuestra]). Para resolver el problema, el escriba divide la base en dos partes de 180 codos cada una, luego divide 180 codos entre 250 codos, finalmente multiplica el resultado por siete –debido a las siete *manos* que componen un codo–, obteniendo $5\frac{1}{25}$ manos por codo como respuesta.

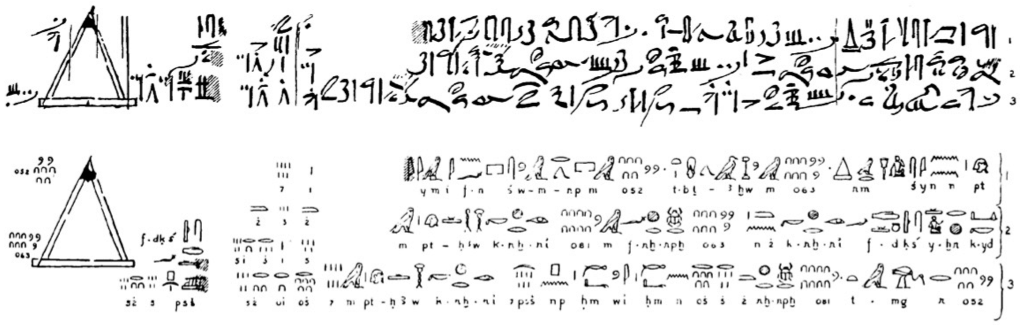


***Figura 26*. Problema 56 del Papiro de Ahmes. Tomada de Maor (1998, p. 7).**

En el triángulo ABC (Figura 27), que representa un hipotético corte transversal a una pirámide, nos es posible observar que el *seket* hace alusión a la razón entre la longitud del lado adyacente (A'C) medida en *codos* y la longitud del lado opuesto al ángulo C (AA') del triángulo rectángulo AA'C medida en *manos*, es decir, a la "separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación de la altura" (Boyer, 1986, p. 40).

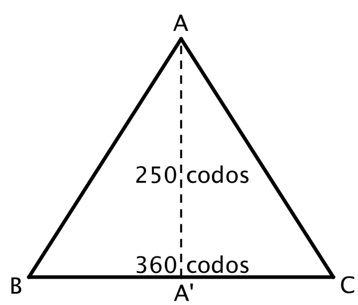


***Figura 27*. El seket**

Sin embargo, a pesar del uso e introducción de la noción de *seket* por parte de los egipcios, no podemos ubicar en su matemática el nacimiento de la trigonometría, pues si bien esta noción puede entenderse como la "cotangente del ángulo entre la base y la cara de la pirámide" (Maor, 1998, p. 7), esto es anacrónico ya que no contamos con evidencia de que la matemática egipcia contemplara una noción de ángulo (Van Brummelen, 2009), hecho que, como hemos anotado anteriormente, nos es necesario para hablar propiamente de un trabajo trigonométrico. En consecuencia, la noción de *seket* introducida por la civilización egipcia constituye nuestro primer *rudimento trigonométrico*.

En suma, "el amor a los dioses benévolos, el respeto a la tradición y la preocupación por la muerte y las necesidades de los muertos" (Boyer, 1986, p. 44), aunado a su ubicación en el medio de un desierto, que en gran medida les protegía de invasiones extranjeras y reducía el contacto con otras civilizaciones (Kline, 1972), produjo que la matemática egipcia, al igual que su cultura, fuera ejemplo de pasividad y uniformidad a través de su larga historia. Una muestra de esto es el mismo Papiro de Ahmes, escrito alrededor de 1650 a.C. pero cuyo contenido deriva al menos de la época del faraón Zoser, 1500 años antes (Boyer, 1986).

Además, aun cuando estos papiros nos dan cuenta más de los procesos de instrucción ciudadana que del pensamiento y desarrollo matemático de la época, debido a su naturaleza de "manuales destinados a la formación de estudiantes" (Boyer, 1986, p. 44), nos permiten dilucidar una matemática de preminencia práctica y con un débil nivel de abstracción.

En contraparte, el interés de los egipcios por la astronomía, a pesar de no producir un sistema de explicación completo para la mecánica celeste que haya llegado hasta nosotros, constituye el primer antecedente del uso de los fenómenos astronómicos para la organización de las prácticas civiles, religiosas y económicas del cual tenemos registro. Además, la observación y registro de los fenómenos que realizaron, si bien con fines preminentemente astrológicos (van der Waerden, 1974), fueron un gran recurso para las civilizaciones posteriores, especialmente la griega (Dorce, 2006).

Civilizaciones Mesopotámicas

Por su parte, en el valle de Mesopotamia, ubicado en las inmediaciones de los ríos Tigris y Éufrates (Figura 25), se desarrollaron diversas civilizaciones que –de forma genérica y ambigua– suelen llamarse babilónicas, a pesar de que la ciudad de Babilonia no constituyó el principio ni siempre fue el foco de dichas culturas (Boyer, 1986). Esta zona, a diferencia del valle del rio Nilo, fue el centro de diversos conflictos e invasiones que coaccionaron su desarrollo económico, social y científico.

Uno de sus más destacados aportes fue su sistema de escritura. Con ayuda de una varilla imprimían marcas a una tablilla de arcilla fresca, que posteriormente cocían en hornos o por exposición al sol. Este mecanismo permitió que, a diferencia de los papiros egipcios, gran cantidad de documentos resistieran el embate de los siglos y llegaran hasta nosotros.

Algunas de las tablillas encontradas, que datan de la época de la dinastía de Hammurabi –entre el 1800 a.C. y 1600 a.C.–, dan evidencia de un sistema numérico posicional y sexagesimal completamente desarrollado (Boyer, 1986). La adopción de una base sexagesimal por parte de las civilizaciones mesopotámicas tiene diversas hipótesis, siendo las razones astronómicas y metrológicas algunas de ellas (Van Brummelen, 2009).

De cualquier manera, el sistema de numeración mesopotámico, junto con el desarrollo de métodos de cálculo como la interpolación lineal y la aproximación de raíces, significó una mejora sin precedentes en la precisión y eficiencia de los cálculos aritméticos de la época, así como en el trabajo con fracciones y números grandes (Boyer, 1986); características que le ganaron un lugar en la ciencia griega y de cierta forma le hicieron perdurar hasta nuestros días, en nuestras subdivisiones de grados y horas, por ejemplo (Toomer, 1984; Aaboe, 1964).

Si bien la mayoría de las tablillas mesopotámicas descubiertas –unas 500,000 aproximadamente– conciernen a problemas económicos y contables (Kline, 1972), alrededor de 300 contienen temas relacionados a la matemática de la época, una de estas últimas es de nuestro especial interés: la tablilla 322 de la colección Plimpton (Figura 28), escrita alrededor del año 1700 a.C., comprada cerca de 1922 por G. A. Plimpton y donada a la Universidad de Columbia una década más tarde (Maor, 1998).

***Figura 28*. Tablilla Plimpton 322**

Aun cuando la tablilla está dañada y fracturada en por su borde izquierdo, en ella se distinguen claramente cuatro columnas de números, la del extremo derecho contiene de forma descendente los números del 1 al 15 y su función aparente es identificar las filas, las tres columnas restantes contienen colecciones de números que a simple vista podrían ser interpretadas como un registro de cuentas comerciales, sin embargo, un estudio más detallado de las mismas sugiere que se trata de ternas pitagóricas (Boyer, 1986), esta última interpretación ha hecho posible su reconstrucción (Figura 29).

$(c/a)^2$	b	c	
[1,59,0,]15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

NOTE: The numbers in brackets are reconstructed.

***Figura 29*. Reconstrucción de la tablilla Plimpton 322. Tomada de Maor (1998, p. 32).**

Si consideramos el triángulo rectángulo ABC (Figura 30), los números que figuran en la segunda y tercera columna –de izquierda a derecha– constituyen los lados *b* y *c* del triángulo, respectivamente, y la columna del extremo izquierdo hace alusión, en cada caso, al cuadrado de la razón entre los lados *c* y *a*.

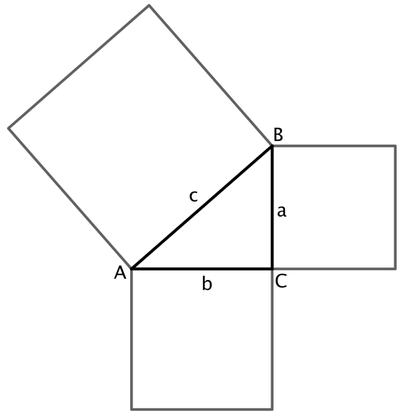


***Figura 30*. Ilustración de la relación identificada en la tablilla Plimpton 322**

Ahora bien, si bien es cierto que podemos interpretar la columna del extremo izquierdo de la tablilla como una noción homóloga a nuestra cosecante cuadrada del ángulo A (Maor, 1998), al no contar con más tablillas similares a la Plimpton 322 que sugieran la conciencia de esta relación y del uso de la noción de ángulo en su construcción –más allá del interés explicito por emplear ternas pitagóricas–, no podemos ubicar el nacimiento de la trigonometría en la matemática mesopotámica (Van Brummelen, 2009), ni denominar a esta tablilla como algo más que un segundo rudimento trigonométrico.

En otro sentido de ideas, y con relación a los avances astronómicos realizados en el valle de Mesopotamia, sabemos que para los tiempos del rey Nabonasar –747 a.C.– en Babilonia, ciudad mesopotámica que en ese momento constituía el centro de la actividad científica y económica de la zona, ya se tomaba registro los fenómenos celestes (Dorce, 2006; Aaboe, 1964).

En tablas de arcilla se enlistaban las efemérides astronómicas, así como los cuerpos celestes y sus movimientos. Estas permitían, con el pasar de los años y dada la periodicidad de muchos fenómenos astronómicos, anticipar los mismo, esto es, establecer “un puente entre la práctica empírica y la teoría predictiva” (Montiel, 2011, p. 72).

Más aún, esta constante observación y registro del cielo llevó a los astrónomos mesopotámicos a –cerca del 400 a.C.– tomar conciencia de que los planetas no se desplazaban de forma azarosa, al contrario, se movían alrededor de la Tierra dentro de una estrecha banda del firmamento. Esto permitió el uso de las 12 constelaciones que atraviesa esta banda, denominada zodiaco, como puntos de referencia para registrar con mayor precisión la posición y movimiento de los denominados cuerpos celestes ‘errantes’ (Figura 31) (Matos, 1990).

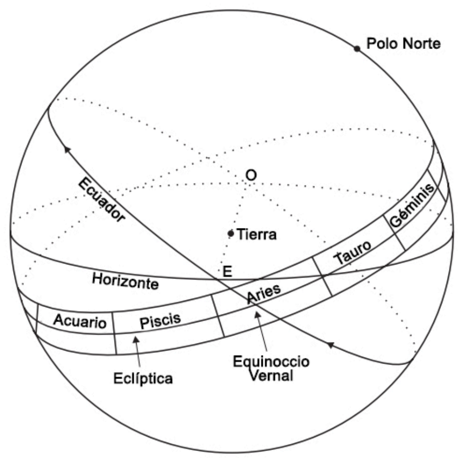


***Figura 31*. La eclíptica y el zodiaco. Modificada de Van Brummelen (2009, p. 16).**

Para hacer operativo y preciso este método, se dividió el zodiaco –así como el tiempo que tarda el Sol en recorrerlo– en doce partes iguales o signos, cada una identificada por una de las constelaciones aludidas. Posteriormente, cada signo se dividió en 30 *longitudes* (uš) y así, “el zodiaco estaba ahora dividido en 360 unidades, más tarde llamadas grados” (Van Brummelen, 2009, p. 17, [Traducción nuestra]). Si bien “estos *grados* fueron la unidad fundamental para la medida no solo de los arcos, sino también la medida del tiempo” (Matos, 1990, p. 6, [Traducción nuestra]), su uso no sobrepasó el ámbito astronómico, al menos hasta la llegada de los griegos.

A manera de conclusión, respecto al desarrollo matemático de las civilizaciones mesopotámicas, dos hechos nos son relevantes. El primero es que la matemática cultivada por siglos, al constituirse en un recurso fundamental para la administración pública y las prácticas económicas en general, hizo necesaria la introducción paulatina de procesos de enseñanza, desarrollando, en consecuencia, tendencias hacia la abstracción (Struik, 1980). En efecto, pese a la ausencia de pruebas contundentes sobre el grado de abstracción de la matemática mesopotámica, la tablilla Plimpton 322 sugiere una "cierta tolerancia, si no [sic] incluso un estímulo, hacia la matemática cultivada por sí misma" (Boyer, 1986, p. 59), el cual funge como un antecedente importante para el desarrollo matemático griego (Aaboe, 1964).

Y segundo, al ser el ángulo y las cuerdas cantidades continuas, su tratamiento requiere el desarrollo de un sistema numérico eficiente y eficaz para representar y operar fracciones y números grandes, por esta razón el sistema posicional sexagesimal mesopotámico se convirtió a la postre en el "sistema de numeración estándar en astronomía y trigonometría" (Van Brummelen, 2009, p. 13, [Traducción nuestra]).

Finalmente, con relación a los aportes astronómicos, como menciona Van Brummelen, si bien la observación de los fenómenos celestes es casi tan antigua como la humanidad misma, "los primeros documentos que registran sistemáticamente estos acontecimientos y desarrollan una ciencia cuantitativa para acompañarlos" (2009, p. 14, [Traducción nuestra]) los encontramos en el siglo VIII a.C. con las civilizaciones mesopotámicas.

Además, la invención de los *grados* como herramienta para el registro de las posiciones y movimientos de los astros significa un paso trascendental en el tránsito de la noción de ángulo como forma a su tratamiento como cuantificación de la amplitud, y por ende en la emergencia de las nociones trigonométricas.

Civilización Helénica: Época Arcaica (antes del 499 a.C.)

A pesar del aludido dominio de la medición del tiempo y la gran cantidad de observaciones astronómicas realizadas por las civilizaciones egipcia y mesopotámicas, las explicaciones que estas daban a los fenómenos celestes estaban estrechamente relacionadas con sus creencias religiosas y míticas. Es hasta el siglo VI a.C., con el asentamiento de las primeras colonias griegas, pueblos con el espíritu atrevido e imaginativo de aventureros y con una ventajosa posición –a lo largo de toda la costa del mar Negro y del mar Mediterráneo (Figura 32)– que les permitía "un contacto más estrecho con los dos grandes valles fluviales de los que podía venir el conocimiento" (Boyer, 1986, p. 75), que comienza gradualmente el movimiento de *racionalización del universo*, esto es, se transita paulatinamente de la cuestión oriental *¿cuándo?* a la cuestión científica moderna *¿cómo y por qué?* (Struik, 1980).

***Figura 32*. Centros matemáticos más importantes en la Edad Talásica. Con base en Boyer (1986, pp. 72-73).**

Este afán progresivo por "humanizar la naturaleza, encontrar una explicación lógica independiente de los caprichos divinos, completando la observación empírica con el razonamiento lógico" (Mateu y Orts, 2006, p. 20) significa, para la astronomía, la búsqueda de explicaciones a los desplazamientos, formas, tamaños y posición de los astros, por sobre la simple observación y registro de los mismos.

Las primeras noticias de este movimiento las tenemos gracias al filósofo Tales de Mileto (ca. 624 – 548 a.C.), quien, además de ser el primer hombre al que se le atribuyen descubrimientos matemáticos concretos y ser el padre de la matemática deductiva (Boyer, 1986), desde una concepción materialista del universo según la cual "todos los objetos materiales proceden de una misma sustancia originaria, no siendo más que variaciones o manifestaciones de esta sustancia tan material como los mismos objetos que engendra" (Melogno, Rodríguez y Fernández, 2011, p. 21), postuló al agua como el principio de todas las cosas y al planeta Tierra como un disco gigante que flota sobre un cuerpo infinito de este líquido (Figura 33).

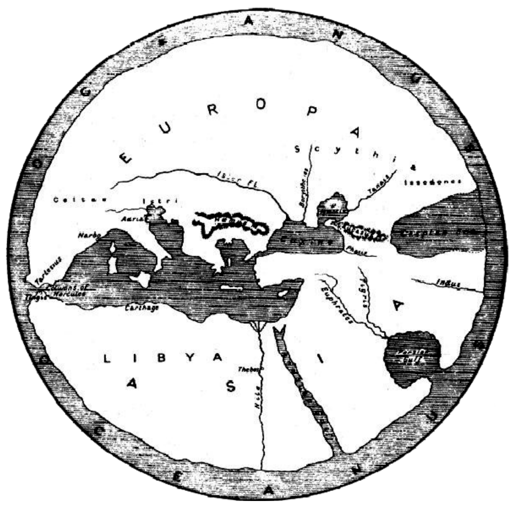


***Figura 33*. Mapa de Hacateo, afín a la visión del universo propuesta por Tales**

Por su parte, a sus discípulos, Anaximandro (ca. 610 – 547 a.C.) y Anaxímenes (ca. 590 – 524 a.C.) de Mileto, se les concede la construcción de un mapa terráqueo completo, proponer las primeras dimensiones para el universo y plantear que las estrellas se hallan clavadas en una esfera transparente de materia cristalina, denominada *esfera de las estrellas fijas*, que explicaba perfectamente los hechos astronómicos empíricos e ideológicos asociados a las estrellas (Dorce, 2006) –lo que le haría perdurar al menos hasta el siglo XVII (Asimov, 1975)–. Además, el primero de ellos postuló a la Tierra como un cuerpo cilíndrico que flota en el vacío ya que, al estar en el centro del universo, equidista de todas sus partes (Asimov, 1975); para Anaxímenes, en cambio, el principio de las cosas era el fuego y considera a la Tierra como un disco que flota en el vacío (Mateu y Orts, 2006).

También se le atribuye a Anaximandro ser el primer griego en hacer uso del gnomon (Dorce, 2006), una varilla vertical de longitud conocida que se utilizaba para medir las horas del día con base en la sombra que proyectaba, dispositivo que, según Heródoto, los antiguos griegos recibieron de los babilonios (Maor, 1998).

La sombra s que proyecta un gnomon de longitud conocida h (Figura 34), varía conforme la hora del día y la época del año en cuestión, es decir, al ángulo α que los rayos del Sol forman con la horizontal. En términos modernos podríamos decir, como $\cot\alpha = s/h$ y $\tan\alpha = h/s$, entonces $s = h\cot\alpha$ y $h = s\tan\alpha$, esto es, "s es proporcional a la cotangente de α y h también lo es a la tangente de α" (Mateus, 2013, p. 12).

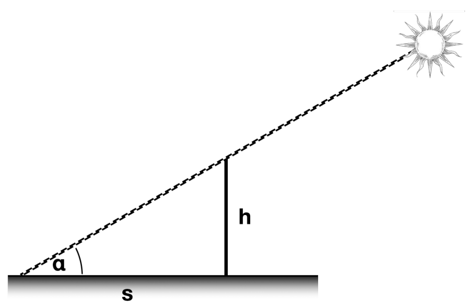


Figura 34. **Uso del gnomon. Con base en Maor (1998, p. 23).**

Si bien es cierto que –actualmente– podemos entrever relaciones trigonométricas en el cálculo de las horas del día y de la altura de las pirámides realizado por los milesios (Maor, 1998), no tenemos evidencia que nos permita asegurar la conciencia de dichas relaciones, ni del uso adrede de las mismas. Hecho por el cual ubicamos estos usos como un nuevo rudimento trigonométrico.

Por otro lado, al norte de Mileto, en la isla de Samos (Figura 32), nace Pitágoras (ca. 580 – 500 a.C.), presunto alumno de Tales y Anaximandro, de quien sabemos viajó a Egipto, Babilonia y muy probablemente a India (Boyer, 1986). A este se le atribuye el fundar una sociedad de carácter comunal y secreto, la cual, desde una concepción idealista, que sostiene que "las estructuras últimas de la materia no son sustancias materiales propiamente dichas, sino más bien estructuras matemáticas" (Melogno et al., 2011, p. 22), postuló la primera explicación completa para la mecánica celeste que ha llegado hasta nosotros.

Bajo este modelo, el universo se concibe compuesto por un Fuego Central, alrededor del cual giran el Sol, la Luna, la Tierra, los cinco planetas conocidos, la esfera de las estrellas fijas y un décimo planeta, denominado Antitierra (Figura 35). La parte deshabitada de la Tierra está siempre dirigida hacia el Fuego Central y la Antitierra está siempre alineada con la Tierra y el Fuego Central, en consecuencia, tanto la Antitierra como el Fuego Central, nunca son visibles desde la porción habitada de la Tierra.

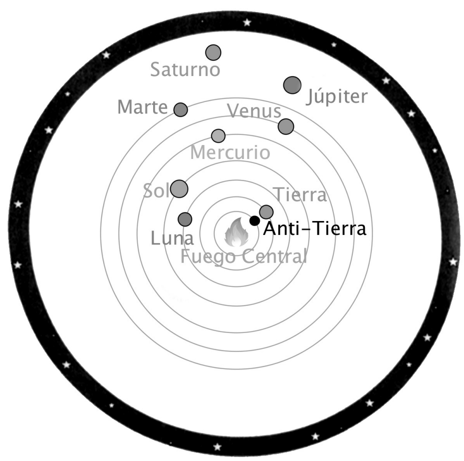


***Figura 35*. Cosmología pitagórica. Con base en González (2001, p. 144)**

Este modelo les vale a los pitagóricos el título de ser los primeros en postular la *esfericidad de los cuerpos celestes* y la *circularidad de sus trayectorias*, hechos astronómicos ideológicos –creencias predominantes respecto a la estructura y funcionamiento del universo– que perdurarían al menos hasta la época de Copérnico, aproximadamente 2000 años.

Aunque no podemos negar la trascendencia de los aportes de la escuela pitagórica en la matemática y la astronomía de la época, "la ciencia pitagórica, en general, al igual que la matemática pitagórica, parece haber sido una curiosa mezcla de pensamiento riguroso y de especulación fantástica" (Boyer, 1986, p. 86). Un ejemplo de esto lo hallamos en el mismo modelo expuesto, donde se añaden un par de cuerpos celestes invisibles –el Fuego Central y la Antitierra– con la único propósito de presentar un universo compuesto por diez elementos, dada su deificación por la *tetraktys* (el número diez).

Más aún, la doctrina pitagórica consideraba que los números (enteros positivos) rigen la vida y el cosmos, por tal motivo, el percatarse de la incapacidad de estos para dar cuenta de algunas relaciones fundamentales –la razón del lado de un cuadrado y su diagonal, por ejemplo– representó la demolición de las bases de la fe pitagórica. En este sentido, la *inconmensurabilidad* "hizo que la geometría se privilegiara sobre la aritmética y con ello en Grecia la geometría adquirió el estatus de ciencia por excelencia" (Sánchez, 2012, p. 76), hecho de notoria trascendencia en la posterior producción matemática y astronómica de la época.

En suma, la gran cantidad de cambios políticos y económicos ocurridos durante los últimos siglos previos al 600 a.C. alrededor de la cuenca del Mediterráneo (Figura 32), produjo –entre otras cosas– la emergencia de un nuevo orden social, un cúmulo de pueblos migratorios y una nueva clase hombre. Este gozaba de una independencia y riqueza sin precedente hasta el momento, en consecuencia, contaba con tiempo de ocio y podía reflexionar respecto al mundo. Bajo estas condiciones fue posible un desarrollo inédito del racionalismo y de la perspectiva científica en la zona, así como el establecimiento de una meta para los estudios científicos: "el entendimiento del lugar del hombre en el universo de acuerdo con un esquema racional" (Struik, 1980, p. 53).

Los primeros resultados de este movimiento fueron el reconocimiento de la inconmensurabilidad y el consecuente nacimiento y auge de la geometría deductiva (van der Waerden, 1974). Además, en esta época ubicamos el surgimiento de algunos hechos astronómicos ideológicos centrales en la visión del universo que tendría

Ptolomeo al emprender la redacción del *Almagesto* como ser la *finitud* y *esfericidad* del universo y la visión de la Tierra como un *cuerpo flotante* en el vacío, propuesta por Tales y sus discípulos; así como la *esfericidad* de los cuerpos celestes y la *circularidad* de sus trayectorias, sugeridas por los pitagóricos.

Civilización Helénica: Época Clásica (500 a.C. – 323 a.C.)

Con el fin de acercarnos un tanto más a la idea del universo que tuvo Ptolomeo al redactar el *Almagesto*, hemos de trasladarnos hasta Atenas (Figura 32), lugar donde nació Platón (ca. 428 – 348 a.C.), filósofo que –valiéndose de su renombre– influyó de gran manera en la visión del cosmos de la época.

Así, en su obra *Timeo*, Platón escribe: "esta es la razón de que Dios haya formado el mundo en forma esférica y circular, siendo las distancias por todas partes iguales, desde el centro hasta los extremos. Esa es la más perfecta de todas las figuras" (en Saiz, 2003, p. 11). Mientras que, en *Las Leyes*, se opone a la idea de que la Luna, el Sol y los demás planetas son cuerpos errantes del firmamento al enunciar que "cada uno de ellos, en efecto, recorre la misma ruta, no cambiante, sino única y circular, aun cuando parezca cambiante" (en Saiz, 2003, p. 11). Secundando, respectivamente, la *esfericidad de los cuerpos celestes* y la *circularidad* de movimiento de los planetas, propuestas por la escuela pitagórica.

Con estas ideas en mente, uno de sus más reconocidos discípulos, Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.), propone una nueva explicación para la mecánica celeste, conocida como el modelo de las esferas homocéntricas (Figura 36). En este, cada uno de los planetas está adherido al ecuador de una de varias esferas transparentes concéntricas que, con diferentes ejes de rotación, giran alrededor de la Tierra estática.

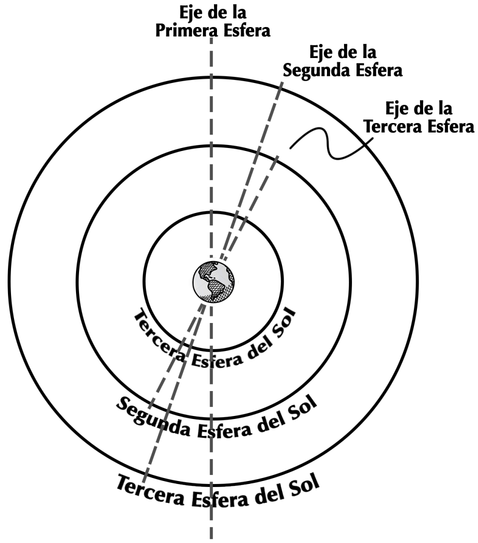


Figura 36. **Modelo de Eudoxo. Con base en Rioja y Ordónez (1999, p. 40).**

El modelo planteado originalmente por Eudoxo consta de un total de veintisiete esferas: la esfera de las estrellas fijas, tres para explicar los movimientos del Sol y la Luna y cuatro para cada uno de los cinco planetas restantes (Mateu y Orts, 2006). Este modelo, que le vale a Eudoxo el título de creador de la astronomía como campo científico, se acopló perfectamente a los hechos astronómicos ideológicos hasta ahora mencionados y permitió describir de manera adecuada *las retrogradaciones* observadas en el movimiento de los planetas (Figura 37), hasta entonces sin una explicación convincente.

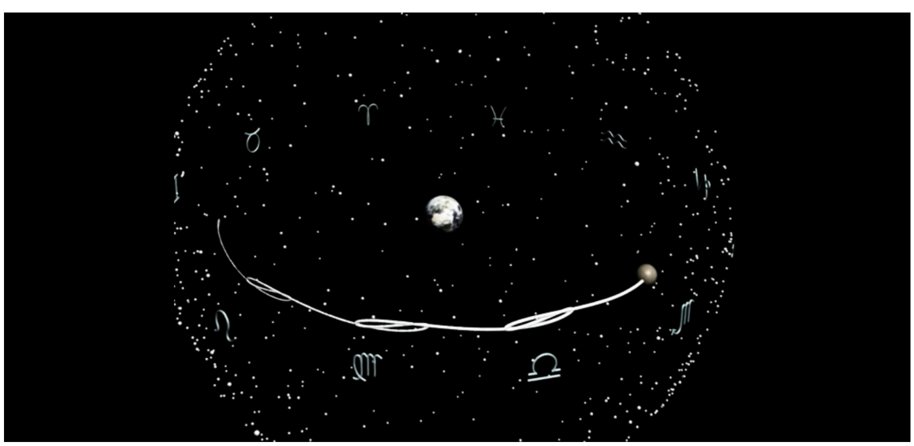


Figura 37. **Movimiento de un planeta bajo el modelo de las esferas homocéntricas. Modificada de Santiago Ginnobili (2011).**

Llegado este punto, presentamos algunos de los hechos astronómicos ideológicos –así como a quienes los propusieron y secundaron– que constituyen la cosmovisión predominante en la época en que Ptolomeo compuso el *Almagesto*, sin embargo, es hasta los tratados de otro alumno de Platón, Aristóteles (384 – 322 a.C.), que estas creencias toman coherencia y cohesión en una visión del universo, visión que perduró hasta la época de Copérnico –casi 2000 años–, denominada *cosmovisión aristotélica del universo*.

En el marco de este conjunto de creencias, se concibe un universo *esencialista* y *teleológico*, esto es, un cosmos en el cual los objetos naturales están constituidos de materia con un objetivo, propósito o función específica que los hace comportarse como lo hacen (DeWitt, 2010). En consecuencia, se plantea un universo dividido en dos grandes partes: el orbe superior *supralunar* y el inferior *sublunar* (Figura 38).

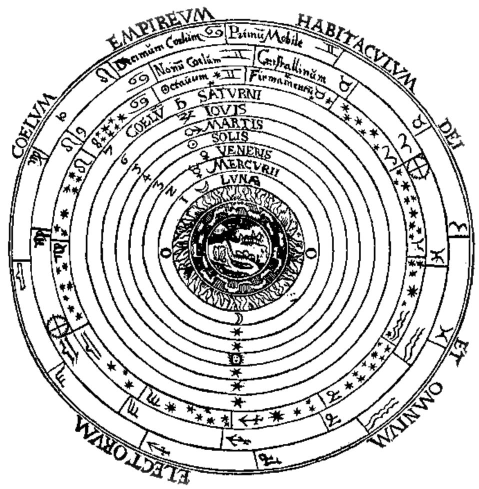


***Figura 38*. Esquema del universo, afín a la cosmovisión aristotélica del universo. Modificada de Apian, Bellere y Gemma (1545, fo. 3).**

El primero, que abarca la Luna, el Sol, los planetas conocidos y las estrellas fijas, está gobernado por un único elemento, el éter, elemento inmutable y perfecto (Dorce, 2006), cuyo movimiento característico es el “circular y uniforme, de máxima perfección y regularidad, por no tener comienzo ni fin” (Melogno et al., 2011, p. 52). Hecho que armoniza y explica la *esfericidad* del universo, la *esfericidad* de los cuerpos celestes y la *circularidad* de sus trayectorias propuestas por los antiguos griegos en Mileto y Samos.

Por otro lado, el orbe inferior sublunar, habitado por seres "finitos, corruptibles y sujetos a nacimiento y muerte" (Melogno et al., 2011, p. 50), está compuesto de al menos cuatro elementos básicos: la tierra, cuya tendencia natural es moverse en línea recta hacia el centro del universo; el agua, que de igual manera tiende a moverse linealmente hacia el centro del universo, pero con menor intensidad que el elemento tierra; el aire, que tiene una tendencia natural a moverse linealmente en sentido ascendente, es decir, hacia la región ubicada sobre la tierra y el agua; y el elemento fuego, que también tiende a moverse linealmente alejándose del centro del universo, pero con mayor intensidad que el elemento aire (DeWitt, 2010).

Esta composición y estructura del orbe sublunar no solo explica de manera consistente fenómenos que observamos a diario, las piedras undiendose en el lago, las burbujas de aire moviendose hacia la superficie del agua, la direccion de las llamas, sino que se acopla a la perfección con los hechos astronónicos ideológicos preexistentes alrededor del comportamiento del cosmos.

Así, por ejemplo, al considerar que el movimiento natural del elemento tierra es lineal hacia el centro del universo, entonces, como nuestro planeta –constituido principalmente de ese elemento– no se mueve, hecho que Aristóteles había 'probado' al secundar el modelo de Eudoxo (Saiz, 2003), este ya debe estar ocupando su lugar en el universo, es decir, la Tierra debe estar en el centro del universo. De esta manera, las creencias sobre la estructura y funcionamiento del universo se articulan y explican unas a otras bajo la cosmovisión aristotélica (Figura 39).

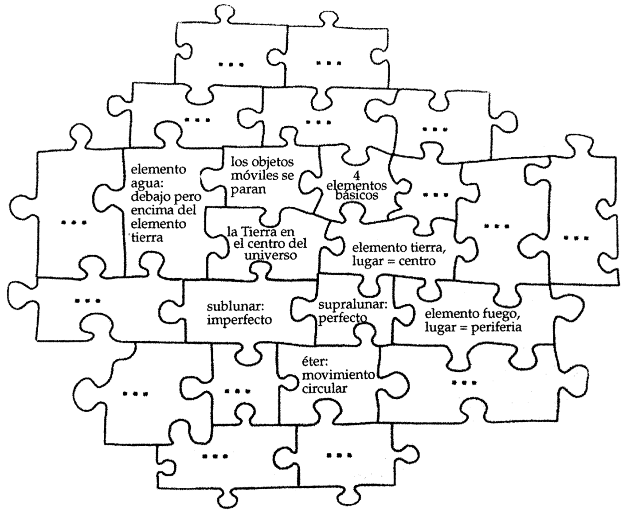


Figura 39. **El "pluzzle" de creencias de Aristóteles. Tomada de DeWitt (2010, p. 23).**

Después de la muerte de Aristóteles, en el año 336 a.C., uno de sus alumnos, Alejandro Magno (ca. 356 a.C. – 323 a.C.), asume el poder de Macedonia tras la muerte de su padre Filipo II. La principal empresa de su mandato fue continuar con la ampliación del imperio que años atrás había comenzado su padre. Así, en el 332 a.C., Magno conquista Egipto y es aclamado como faraón, un año más tarde funda Alejandría (Figura 32), ciudad que jugará un papel nuclear en la composición y estructura de la obra maestra de Ptolomeo.

A manera de conclusión, en este segundo periodo del desarrollo de la civilización griega ubicamos algunos eventos trascendentales como ser el nacimiento de la astronomía científica con el modelo de las esferas homocentricas propuesto por Eudoxo y la constitución de la cosmovisición aristotélica del universo, sistema de creencias que, como hemos mencionado, predominará por al menos diecinueve siglos.

Civilización Helénica: Época Helenística (323 a.C. – 30 a.C.)

Con la muerte Alejandro Magno, hacia el año 323 a.C., se desencadena una lucha despiadada por tomar el poder de Macedonia, que abarcaba entonces la mayor parte del mundo conocido (Figura 40). Conflicto que concluye con la división del imperio en tres reinos: el Imperio Seléucida, Macedonia Antigónida y Egipto. De este último, en el año 306 a.C., asume el poder Ptolomeo I Soter, el cual toma como sede de su gobierno a la ciudad de Alejandría (Boyer, 1986).

Figura 40. Extensión de Macedonia al término del reinado de Magno

Bajo el mandato de Ptolomeo I, y gracias a la construcción del puerto de Alejandría, la centralización demográfica lograda gracias a la limitada fundación de nuevas ciudades, la monopolización del comercio a través del Nilo y un comercio exterior basado en importar materia prima y exportar manufactura, así como un fuerte control de las finanzas públicas, Alejandría gozó de la estabilidad económica y militar necesaria para erguirse como el centro cultural, político, económico y científico del mediterráneo por un lapso de más de 600 años (Melogno et al., 2011; Kline, 1972).

Entre las primeras decisiones de Ptolomeo I estuvo el establecimiento de una Biblioteca y una Escuela en Alejandría, hecho que constituye el primer antecedente de una política estatal de financiamiento de la actividad científica de la cual tenemos registro. Se estima que para el año 300 a.C. la Biblioteca contaba con alrededor de 200,000 volúmenes y con 400,000 cerca del año 250 a.C., esta inmensa colección de material científico se debe muy probablemente a que esta comenzó a título personal del mismo Ptolomeo I antes de que la Biblioteca comenzara a existir oficialmente (Melogno et al., 2011), aunado al referido monopolio que ejercía Egipto en la producción de papiro en la época.

Por su parte, la Escuela de Alejandría, denominada Museo, en alusión al lugar donde habitan las musas –entes míticos que proveen inspiración y sabiduría–, además de ser uno de los mecanismos más importantes de culturización del reino, se convirtió en el foco de la actividad científica de la época. Esta escuela jugó un papel medular en la composición del *Almagesto*, dado que, además de presumirse la casa de estudio de Ptolomeo, asociados a ella encontramos personajes de nuestro interés como Eratóstenes y Aristarco, así como a los autores de las bases matemáticas y astronómicas inmediatas de la obra maestra de Ptolomeo: Euclides, Apolonio e Hiparco (Boyer, 1986).

De estos últimos, el primero, Euclides de Alejandría (325 – 265 a.C.), que, si bien constituye uno de los personajes más famosos de la época helenística griega, es también una de las figuras sobre las que menos certezas tenemos. Sólo parecen haber dos referencias dignas de confianza al respecto: primero, fue más joven que los discípulos de Platón, mayor que Arquímedes y contemporáneo de Ptolomeo I; y segundo, enseñó o formó escuela en la ciudad de Alejandría (Euclides, 1991).

Lo demás que de él sabemos es consecuencia de una tradición efectivamente muy persistente, pero carente de base en algún documento histórico conocido, por ejemplo: su nacimiento en Atenas (Figura 32) alrededor del año 325 a.C., su muerte cerca del año 265 a.C., sus estudios en la Academia de Platón, su carácter amable y gentil, y la sobresaliente capacidad pedagógica que mostró como miembro de la Escuela de Alejandría. Además, alrededor de este incierto personaje griego giran algunas leyendas, como el haber respondido: "dale 3 óbolos [monedas de plata], pues necesita sacar provecho de lo que aprende" a un alumno que preguntó acerca de la utilidad de estudiar geometría. También se cuenta que, en otra ocasión, el rey Ptolomeo I le consultó sobre una vía de acceso al conocimiento geométrico más rápida y menos fatigosa, a lo que a este contestó: "no hay ningún camino real a la geometría" (Boyer, 1986).

Esta falta de documentos históricos, algunas confusiones de identidad y las historias inverosímiles e incluso contradictorias que rodean a este personaje, hace que se hable de él como estudioso de las ciencias antes que como persona. Más aún, como menciona Forster, "nada sabemos de él: a decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como un hombre" (1961 en Euclides, 1991, p. 8).

Respecto a su trabajo como 'hombre de ciencia', sabemos que Euclides fue autor de no menos de doce obras referentes a una variedad materias, algunas de ellas, como los *Elementos*, los *Datos*, *Fenómenos* y *Óptica* han llegado hasta nosotros provenientes de versiones árabes o griegas altamente confiables; otras, en cambio, han sido reconstruidas de segundas fuentes, como *Divisiones de figuras*. De un tercer grupo de obras se tiene muy poca o nula información, entre ellas: *Porismas*, *Cónica*, *Sobre superficies*, *Catóptrica*, *Elementos de música*, *Introducción a la armonía* y *Sobre paralogismos*.

A pesar de esta amplia producción de obras atribuidas a Euclides es, sin lugar a dudas, sobre los *Elementos* que descansa su fama. Es en esta obra, compuesta por 13 libros que recopilan la matemática elemental de la época en sus diversos campos temáticos: geometría plana, geometría del espacio, teoría de la proporción, teoría aritmética e inconmensurables, que encontramos la cumbre de la matemática griega (Boyer, 1986).

No obstante, su importancia radica no solo en la completitud de la síntesis que contiene, pues sabemos de la existencia de al menos tres epítomes similares (Boyer, 1986; Euclides, 1991), sino en su presentación como un sistema formal axiomático deductivo (Melogno et al., 2011). Euclides es el primero, del que tenemos evidencia, en presentar un conjunto inicial de principios, con un alcance general en el área, y el único en subdividirlos en definiciones, peticiones y comunes sentencias (Euclides, 1991). En efecto, los *Elementos* "supone una de las principales obras científicas de la historia de la humanidad, pues marca el comienzo de una nueva forma de pensar" (Hemenway, 2008, p. 17).

En fin, la naturaleza, contenido y estructura de los *Elementos*, aunada a un conjunto de condiciones favorables, como el aludido apogeo económico y cientifico del que gozaba Alejandría en la época de su surgimiento, permitieron que el lenguaje, el razonamiento y las herramientas matemáticas plasmadas en los *Elementos* dominaran el quehacer científico occidental casi desde su aparición (ca. 300 a.C) y que tuvieran que pasar 2000 años antes de que se diera un desarrollo lógico de la matemática elemental más cuidadoso (Euclides, 1991; Boyer, 1986).

Por otro lado, y respecto al segundo personaje de interés mencionado, Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.), estudiante de Estratón, quien para el año 287 a.C. funjía como director del Museo de Alejandría (Massa, Guevara, Puig-Pla y Romero, 2009), es famoso por proponer el primer modelo heliocéntrico del cual tenemos conocimiento, esto, diecisiete siglos antes que Copérnico (Van Brummelen, 2009).

Aunque la mayor parte del trabajo de este astrónomo y matemático griego se ha perdido, sobrevive *Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna*. En dicha obra, que "se lee en el estilo griego clásico, evocador de Euclides" (Van Bruemmelen, 2009, p. 22, [Traducción nuestra]), Aristarco parte de seis hipótesis sobre los tamaños y las distancias a los astros y, a través de dieciocho proposiciones, se da a la tarea de demostrar tres tesis (Massa et al., 2009). De estas últimas, la que nos atañe es la referente a las distancias relativa del Sol y la Luna, que se halla en la proposición 7ma: la distancia del Sol a la Tierra es mayor que 18 veces, pero menor a 20 veces, la distancia de la Tierra a la Luna.

Para atender esta cuestión, Aristarco hace uso de al menos cuatro de sus hipótesis:

1. (Que) La Luna recibe su luz del Sol
2. (Que) La Tierra tiene una relación de punto y de centro respecto a la esfera en la que la Luna se mueve.
3. (Que) Cuando la Luna se nos muestra partida en dos, el círculo máximo que delimita sus partes de oscuridad y claridad se sitúa en la dirección de nuestro ojo.
4. (Que) Cuando la Luna se nos muestra partida en dos, entonces dista del Sol menos de una treintava parte de un cuadrante. (de Samos, 2007, p. 35)

El primer par de ellas nos ilustran acerca del comportamiento y posición relativa de los astros involucrados, así sabemos que en esta obra Aristarco contempla al Sol como fuente original de la luz que refleja la Luna, además considera que la Tierra es el centro de la esfera en la que se mueve la Luna (Figura 41).

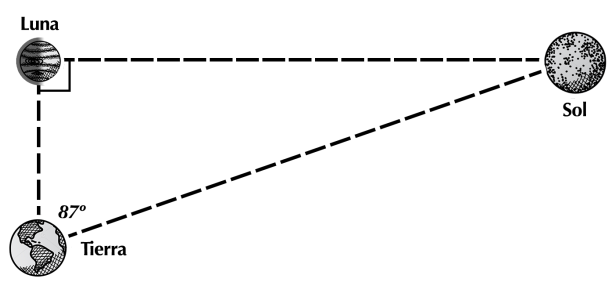


***Figura 41*. Cálculo de las distancias del Sol y la Luna. Con base en Van Brummelen (2009, p. 23)**

El segundo par de hipótesis nos dan cuenta de fenómenos observados y calculados, Aristarco parte considerando que el ángulo Sol-Luna-Tierra, en una noche de medialuna, es recto y que el ángulo Luna-Tierra-Sol es "menos que un cuadrante por un treintavo de cuadrante" (Heath, en Van Brummelen, 2009, p. 22, [Traducción nuestra]), esto es, en notación actual, 87°.

Con estas precisiones, Aristarco introduce una figura que representa un corte transversal hipotético a los planetas y las esferas con las que estos se mueven (Figura 42).

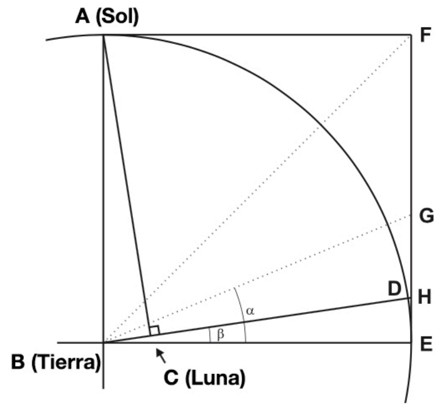


Figura 42. **Diagrama para la Proposición 7ma. Modificada de Van Brummelen (2009, p. 24).**

En esta figura, A representa el centro del Sol, B el centro de la Tierra y C el centro de la Luna. Luego, estableciendo algunas relaciones entre arcos y longitudes en la figura, demuestra que, en efecto, la distancia del Sol a la Tierra (AB) es mayor que 18 veces, pero menor a 20 veces, la distancia de la Tierra a la Luna (BC).

Un uso similar de la noción de ángulo encontramos en el trabajo de Eratóstenes de Cirene (275 – 195 a.C.), astrónomo, matemático y geógrafo griego, encargado de la Biblioteca de Alejandría entre el 245 a.C. y el 201 a.C. (Melogno et al., 2011), quien para calcular la circunferencia de la Tierra observó que mientras los rayos del Sol, un día particular de verano, caen perpendicularmente sobre la ciudad de Syena, en Alejandría –orbe ubicada aproximadamente en mismo meridiano y 5000 estadios hacia el norte– los rayos formaban un ángulo de “un cincuentavo de un círculo completo” (Boyer, 1986, p. 214) respecto al cénit. Así, gracias a la igualdad de los ángulos S’AZ y S’’OZ (Figura 43) y la razón aludida, Eratóstenes estima que la circunferencia de la tierra ronda los 250,000 estadios –ca. 46,000 km–, valor que supera por mucho el cálculo más aproximado hasta ese momento (Asimov, 1975).

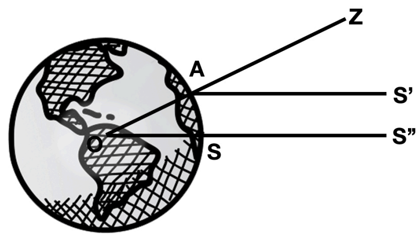


Figura 43. **Cálculo de la circunferencia de la Tierra. Con base en Boyer (1986, p. 214)**

En los trabajos aludidos de Aristarco y Eratóstenes encontramos un paso gigantesco hacia la cuantificación de la amplitud, ya que el expresarla como porción de cuadrante o de círculo completo hace posible operar con ella, y, si bien su objetivo no fue hacer explícitas las relaciones trigonométricas –por lo cual ubicamos sus trabajos como rudimentos trigonométrico*s*–, estos dos astrónomos enfrentaron problemas que "apuntaban de una manera cada vez más urgente a la necesidad de establecer sistemáticamente las relaciones entre los ángulos y las cuerdas" (Boyer, 1986, p. 211).

Un trascendental avance en esta dirección lo encontramos con Hypsicles de Alejandría (191 a.C. – 120 a.C.), mejor conocido por ser el autor del anexado XIV libro de los *Elementos* de Euclides (Melogno et al., 2011), quien, en *El surgimiento de los doce signos del zodíaco*, menciona que:

> La circunferencia del círculo del zodiaco se ha dividido en 360 arcos iguales, que cada uno de los arcos sea llamado grado en el espacio, y de manera similar, si el tiempo en el cual el círculo del zodiaco retorna a cualquier posición se divide en 360 partes iguales, que cada uno de los tiempos sea llamado grado en el tiempo. (Thomas, en Matos, 1990, p. 10, [Traducción nuestra])

El método que Hypsicles introduce en esta obra, dividir la circunferencia en 360 partes, llamadas grados, y el diámetro de la misma en 120 partes, cada una subdividida en 60 partes más pequeñas y así sucesivamente –*ad hoc* con el sistema sexagesimal mesopotámico (Kline, 1972)–, se volvió cada vez más usual en la producción matemática de la época, dado el fácil transito que permitía entre los registros astronómicos y el proceder matemático. Además, constituye la primera evidencia de la noción de ángulo como cuantificación de la amplitud con la que contamos y, por ende, en un paso trascendental en la emergencia de las nociones trigonométricas.

En otro sentido de ideas, el matemático y astrónomo Apolonio de Perga (262 – 190 a.C.), conocido como el *Gran Geómetra* gracias a su obra maestra *Sobre las Secciones Cónicas*, se percata de que, si bien el modelo de las esferas homocéntricas explicaba cualitativamente las retrogradaciones que observamos en el movimiento de los planetas, no podía hacerlo de forma cuantitativa y tampoco era capaz de dar cuenta del cambio de brillo y tamaño aparente de los mismos, en consecuencia, y conservando casi intacta la estructura y funcionamiento de los planetas bajo la *visión aristotélica del universo*, propone dos modelos geométricos alternativos, uno de ellos a partir de movimientos *epicíclicos* y el otro a base de movimientos *excéntricos* (Figura 44).

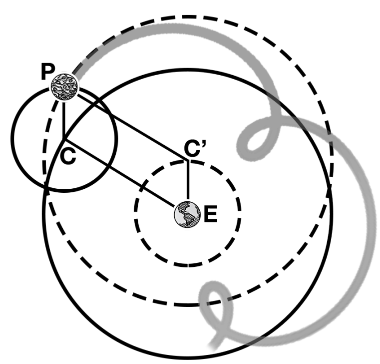


Figura 44. **Modelo de Epiciclos y Excéntricas de Apolonio. Con base en Boyer (1986, p. 193)**

En el primero, el de epiciclos –ilustrado con líneas sólidas en la figura–, propone un planeta (P) que se mueve uniformemente describiendo una circunferencia menor o 'epiciclo', cuyo centro (C) gira a su vez uniformemente describiendo una circunferencia mayor o 'deferente', con centro en la Tierra (E). En el segundo prototipo –líneas discontinuas–, el planeta (P) se mueve uniformemente siguiendo la circunferencia mayor cuyo centro (C′) se mueve de manera homóloga a lo largo de una circunferencia menor con centro en la Tierra (E) (Boyer, 1986). Si consideramos las distancias de P a C y de C′ a E como iguales, es claro que los modelos geométricos presentados resultan ser equivalentes, situación de la cual Apolonio era consciente.

Aunque no contamos con evidencias de que Apolonio intentara acoplar sus modelos a los registros astronómicos con el fin de hacerlos capaces de anticipar los fenómenos celestes, estos significan un gran avance hacia la explicación Ptolemaica de la mecánica celeste, pues, manteniendo la geoestaticidad del universo, así como el movimiento circular, uniforme e ininterrumpido característicos de los planetas bajo la cosmovisión aristotélica, propone separar a la Tierra del centro de la órbita de los mismos, idea nuclear para el trabajo de su principal sucesor, el matemático y astrónomo griego Hiparco.

Hiparco (ca. 180 – 125 a.C.), nació en Nicea (Figura 32) y vivió la mayor parte de su vida adulta en Rodas, lugar donde instauró su observatorio. Pese a los numerosos aportes a la astronomía griega hechos por este personaje, entre ellos el organizar y ordenar las observaciones astronómicas realizadas por sus antecesores, redactar un catálogo de al menos 850 estrellas, descubrir la precesión de los equinoccios, mejorar algunas constantes como la duración del mes y el año, y utilizar los prototipos plateados por Apolonio para modelar el movimiento del Sol y la Luna (Maor, 1998), es sin lugar a dudas la composición de su tabla trigonométrica –a mediados del siglo II a.C.– que lo ha hecho pasar a la historia y ser acreedor del título de *padre de la trigonometría* (Boyer, 1986).

Como hemos mencionado, esta tabla –junto con la mayor parte del trabajo de Hiparco– se ha perdido, sin embargo, sabemos de ella y de los posibles métodos que utilizó en su construcción gracias a los créditos y los múltiples comentarios hechos por Ptolomeo y otros autores griegos de la época. A manera de ejemplo, al modelar el movimiento de la Luna mediante los epiciclos propuestos por Apolonio, Ptolomeo plantea la razón entre el radio del epiciclo y el radio del deferente como 5;14 / 60, al respecto menciona que Hiparco en sus trabajos toma este valor como $247\frac{1}{2} / 3122\frac{1}{2}$. Gracias a este tipo de referencias es que sabemos que Hiparco consideraba al círculo dividido en 360º, cada uno dividido subsecuentemente en 60 partes más pequeñas, en consecuencia, el radio era dividido en 3438 de estas últimas, o un número cercano a esta cifra (Van Brummelen, 2009).

Ptolomeo también atribuye a Hiparco la solución al problema de las temporadas desiguales, tal vez el problema más antiguo que se resolvió utilizando una tabla trigonométrica (Bressoud, 2010b). En él, Hiparco observa que los modelos precedentes no son capaces de explicar las cuatro estaciones del año, que son producto de las diferentes distancias a las que nuestro planeta se posiciona respecto al Sol en ese periodo de tiempo.

Esto es evidente pues, si consideramos al Sol como un cuerpo que se desplaza de manera circular uniforme –e incluso si se moviera de forma 'epicíclica'– alrededor del centro del universo, donde está ubicada la Tierra como un ente estático (Figura 45), no solo el tamaño y brillo aparente del Sol debería ser siempre el mismo, sino que la simple existencia de las estaciones carece de sentido.

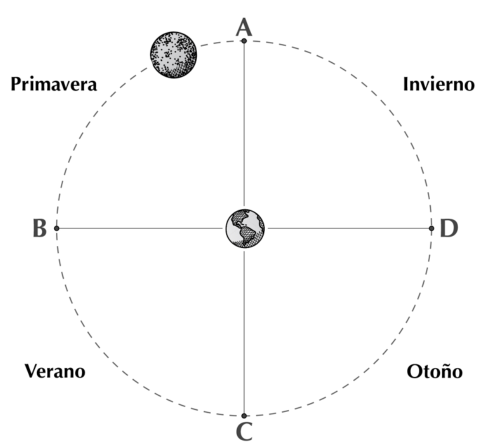


Figura 45. **Duración de las estaciones con la Tierra como centro de la eclíptica**

En consecuencia, Hiparco plantea que, para hacer coincidir el modelo con los fenómenos observados respecto al Sol, es necesario que la Tierra no esté ubicada exactamente en el centro de la eclíptica (Figura 46), la pregunta subsecuente es: ¿a qué distancia del centro estamos ubicados, entonces?

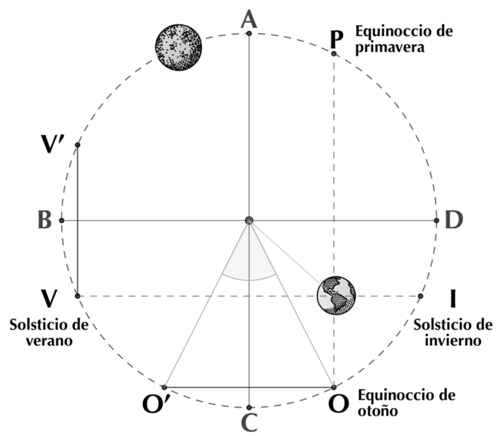


Figura 46. **Distancia de la Tierra al centro de la eclíptica. Con base en Bressoud (2010b, p. 2)**

Para atender esta cuestión, Hiparco utiliza las mediciones empíricas de la duración de las estaciones para dividir la eclíptica. Así, si la distancia entre el equinoccio de primavera (P) y el equinoccio de otoño (O) es 187 días de los 365¼ del año, entonces el arco $\widehat{PVO}$ corresponde a 184,31º de los 360º en los que se divide el círculo, en consecuencia, el arco $\widehat{OO'}$ es igual a 4,31º. De manera homóloga, Hiparco logra calcular que el arco $\widehat{VV'}$ corresponde a 1,98º.

Así, para calcular la distancia entre la Tierra y el centro de la eclíptica mediante el 'teorema de Pitágoras', resta conocer la longitud de la cuerda que subtienden estos arcos, sin embargo, Hiparco se tropieza con la dificultad de no poseer una herramienta matemática que asocie sistemáticamente los arcos –o ángulos centrales– con las longitudes de cuerda que estos subtienden, así que se da a la tarea de construirla; quehacer que deviene en su tabla trigonométrica.

En conclusión, en este tercer periodo de desarrollo de la civilización griega destacamos el establecimiento y apogeo socioeconómico de Alejandría, ya que en esta convergieron personajes como Euclides, que dotó de una nueva racionalidad y lenguaje la matemática griega, además de reunir las herramientas de la matemática básicas de la época en su obra los *Elementos*; Apolonio, que –acorde a las cosmovisión predominante de la época– introdujo dos modelos geométricos que, si bien no eran anticipatorios, constituyeron una herramienta fundamental para explicar los movimientos de los astros; Aristarco, Eratóstenes e Hypsicles, en cuyos trabajos encontramos la introducción de la noción de ángulo como cuantificación de la amplitud y la división del círculo en 360 unidades; e Hiparco, que desarrolló la primera tabla trigonométrica de la cual tenemos conocimiento y realizó muchos otros aportes, que aunque no han llegado hasta nosotros por sus tratados, sobreviven en las obras de sus sucesores, especialmente de Ptolomeo.

Civilización Helénica: Época Romana (30 a.C. al 500 d.C.)

A pesar de que el nombre de Ptolomeo dominó el pensamiento astronómico hasta la época de Copérnico, más de 1400 años, poco se sabe de la vida de este matemático, astrónomo, geógrafo y físico. Existe cierta unanimidad a considerar a Egipto como su país de origen y los años 100 d.C. y 170 d.C. como fechas de su nacimiento y muerte, respectivamente. Menos certeza tenemos acerca de su familia, pues varios escritores asocian a Ptolomeo a la familia real del mismo nombre, algunos incluso le conceden el título de rey, otros, en cambio, argumentan que Ptolomeo no pudo tener dicha ascendencia (Saiz, 2003). La ciudad egipcia de la cual fue oriundo también es un enigma, Alejandría, Pelusio y Ptolemaida son algunas de las involucradas en dicho debate.

Lo que es un hecho es que, gracias a las observaciones propias que reporta en sus estudios, sabemos que trabajó en la ciudad de Alejandría entre los años 125 d.C y 141 d.C., y tras esta última fecha se dedicó a redactar la obra que le ha hecho inmortal: el *Almagesto* (Dorce, 2006; Saiz, 2003).

Este tratado, compuesto por 13 libros, ha tomado diversos nombres a través de la historia. Su título original en griego *Los trece libros de las colecciones matemáticas*, que posteriormente se redujo a *La gran colección*, a la cual los árabes le consignaron el superlativo "megiste" y el artículo "al" para ser traducido como *Al-megiste* (*El más grande*), de donde proviene su título latino (Boyer, 1986).

Como es natural, una creación de esta magnitud y carácter no surge como un hecho aislado, sino tiene muchos antecedentes directos, así, el *Almagesto* se debe en gran medida a las obras astronómicas de Hiparco y Apolonio; a las observaciones de los astros hechas por Teón, Aristarco, Timocaris y las Civilizaciones Antiguas; y por supuesto, a las obras matemáticas de Euclides y Menelao (Boyer, 1986; Dorce, 2006).

Sin embargo, no es pequeño el debate acerca de la magnitud de esta deuda, historiadores de las ciencias como Crouzet consideran que "en realidad [el Almagesto] se trata de un éxito usurpado, porque ese tratado, así como otros más especiales del mismo autor, utilizaba menos su esfuerzo personal que el de los sabios helenísticos" (en Saiz, 2003, p. 18), por el contrario, otros estiman que Ptolomeo en ningún momento pretendió expoliar el trabajo de estos ya que "fue muy escrupuloso en citar a sus predecesores cuando la idea no era suya, lo que permite distinguir claramente cuáles son y cuáles no sus propias contribuciones" (Melogno et al., 2011, p. 84). Lo que es un hecho es que gracias al *Almagesto* "se agruparon todas las ideas relacionadas con este arte [la astronomía] que se hallaban dispersas entre los griegos, los romanos y los restantes habitantes de las regiones occidentales del mundo" (Said al-Andalusi en Saiz, 2003, p. 6).

En efecto, en esta síntesis abarca una breve discusión acerca de la geoestaticidad y geocentrismo del universo; algunas soluciones geométricas a problemas de astronomía esférica; los modelos del Sol y de la Luna; y finalmente la teoría de las estrellas, primero la de las fijas y posteriormente la de los cinco planetas conocidos. Su estructura "sigue un estricto orden axiomático: es mediante la posición del Sol que puede fijarse la de la Luna, y mediante la de ambos que pueden fijarse las posiciones de las estrellas" (Melogno et al., 2011, p. 84).

En el libro primero, después de argumentar algunos hechos astronómicos ideológicos como la esfericidad de los cuerpos celestes, la geoestaticidad y el geocentrismo del universo, y previo a describir su teoría planetaria, Ptolomeo se da a la tarea de construir la tabla trigonométrica que fungirá como base de sus cálculos posteriores. Como hemos advertido, se concede a Hiparco la construcción de la primera tabla de este estilo, pero esta se ha perdido, sin embargo, en los capítulos IX y X del Libro I del *Almagesto* nos encontramos, no solo con las tablas trigonométricas de Ptolomeo, sino con la explicación de los métodos utilizados en su construcción, lo que los convierte en una fuente invaluable para nuestros fines.

En suma, si bien el sistema de explicación propuesto por Ptolomeo se basó en hechos astronómicos ideológicos inválidos para este momento de la historia, como la geocentricidad del universo y la circularidad de las trayectorias de los planetas, los argumentos geométricos que utilizó para construir y probar este sistema y en especial su tabla trigonométrica, nos son de mucho interés pues, además de seguir vigentes, constituyen las primeras evidencias concretas del nacimiento de nociones matemáticas que poseían una naturaleza particular: la trigonométrica.

Una síntesis necesaria

El recorrido realizado por aproximadamente 4 milenios de la historia de la humanidad, de Sirio a Ptolomeo, nos ha permitido acercarnos de forma importante a dos elementos fundamentales para nuestros fines: la problemática que enfrentaba Ptolomeo y el contexto en el cual se produce y difunde su obra.

Sobre el contexto de producción y difusión

Reconocemos a las condiciones en las que se produce y difunde la obra maestra de Ptolomeo como una trama particular de tres componentes: el contexto sociocultural, el contexto científico y el contexto tácito.

Contexto sociocultural. Alude a los eventos de índole social y cultural que jugaron un rol trascendental en la configuración, carácter y estructura del *Almagesto*, entre ellos destacamos: el desarrollo de las civilizaciones antiguas, la ventajosa ubicación geográfica e ingenio del pueblo griego, la fundación y poderío de Alejandría, la creación y auge de su Museo y su Biblioteca, y la coincidencia de Ptolomeo y sus antecesores científicos directos en dicha ciudad.

Contexto científico. Refiere al conjunto de características que definen y dan forma al ambiente científico, en general, y matemático-astronómico, en particular, en el que Ptolomeo crea y difunde su obra. Dentro de los sucesos científicos que delimitaron las herramientas matemáticas y astronómicas con las que contó Ptolomeo al emprender la composición de su tabla trigonométrica destacamos: las observaciones realizadas por las civilizaciones antiguas, los sistemas de numeración y métodos de cálculo mesopotámicos, la identificación de la inconmensurabilidad y el consecuente auge de la geometría deductiva griega, la composición de los *Elementos* de Euclides, la emergencia del ángulo como cuantificación de la amplitud, las teorías de epiciclos y excéntricos de Apolonio, y toda la producción científica de Hiparco.

Una pieza destacada de este ámbito son los hechos astronómicos empíricos, que, como hemos hecho explícito, hacen alusión al conjunto de fenómenos astronómicos relevantes a la determinación de un sistema que pretenda explicar la estructura y mecánica del cosmos. Dentro de ellos, hicimos mención de: el periodo de movimiento y la conservación de la posición relativa de las estrellas; el periodo de movimiento y cambio en la salida y puesta del Sol; y el movimiento y retrogradaciones de los planetas.

Contexto tácito. Hace referencia al conjunto de creencias que configuran la visión del universo de una época particular. Algunos de los hechos astronómicos ideológicos que conforman la cosmovisión aristotélica del universo, visión dominante en la época de Ptolomeo, son: la finitud y esfericidad del universo, la geoestaticidad, el geocentrismo, la existencia de la esfera de las estrellas fijas, la esfericidad de los cuerpos celestes, y la circularidad y uniformidad del movimiento de los planetas.

Denominamos a estos como 'hechos', dado que juegan un papel no menor al de los hechos astronómicos empíricos en la construcción y aceptación de los sistemas de explicación. Un ejemplo de ello es el aludido modelo heliocéntrico propuesto por Aristarco, el cual, a pesar de explicar "mejor que cualquiera de los [modelos] conocidos las apariencias de los planetas" (Saiz, 2003, p. 11), al no concordar con la cosmovisión aristotélica del universo, "como planta que hubiese germinado demasiado pronto, desapareció antes de desarrollarse" (Duhem, en Saiz, 2003, p. 11).

Otra acotación importante respecto a los hechos astronómicos ideológicos que identificamos, como la geoestaticidad y geocentrismo del universo, es que, si bien ahora son considerados inválidos, estos en ningún momento fueron ingenuos ni aleatorios, por el contrario, respondían fielmente al desarrollo científico de la época. Así, por ejemplo, la demostración de la esteticidad de la Tierra presentada por Ptolomeo en el *Almagesto* –que tiene como base la propuesta por Aristóteles al secundar el modelo de Eudoxo– apunta a que el movimiento de la Tierra alrededor del Sol produciría, entre otras cosas, vientos infernales en nuestro planeta producto del rozamiento con el viento y que la fuerza centrífuga mandaría al espacio a todos los habitantes de la Tierra (Saiz, 2003), argumentos físicos que, sin considerar los efectos de la gravedad –identificada dieciséis siglos más tarde–, son completamente válidos.

Estos hechos astronómicos ideológicos también estaban arraigados al razonamiento lógico de la época en cuestión. Para ilustrar esto, consideremos la siguiente situación hipotética: una persona que se desplaza de izquierda a derecha sobre una patineta lanza verticalmente una pelota al aire (Figura 47). Al caer la pelota, 1) ¿la persona habrá avanzado y dejado atrás el punto de lanzamiento (Trayectoria A)? o, 2) ¿recorrerá la pelota una trayectoria parabólica, cayendo nuevamente en la mano de la persona que hizo el lanzamiento (Trayectoria B)?

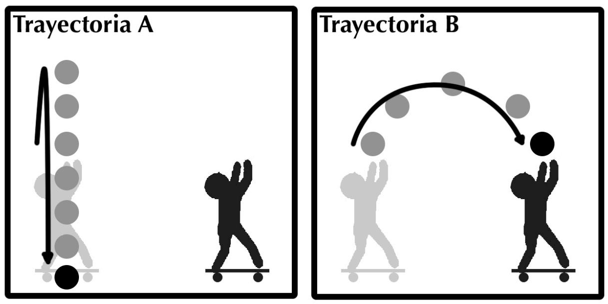


***Figura 47*. Trayectoria de un objeto lanzado al aire. Con base en DeWitt (2010, p. 124).**

Si como la mayoría, usted elige la Trayectoria A como la más plausible, entonces, "para ser lógicamente coherente, también tiene que creer que la Tierra es estacionaria" (DeWitt, 2010, p. 125). Esto debido a que, bajo el razonamiento que subyace a la Trayectoria A, si la Tierra bajo nuestros pies estuviera rotando y/o desplazándose a la velocidad necesaria para explicar el movimiento aparente de los astros –ca. 29.8 km/s–, al lazar un objeto hacia arriba este no caería en nuestra mano nuevamente, si no al Oeste, donde nos encontrábamos al realizar el lanzamiento. Aunque ingenuo, este ejemplo nos permite advertir como los hechos astronómicos ideológicos identificados también están conectados con un razonamiento lógico predominante en aquella época respecto al movimiento de los cuerpos, razonamiento que no es difícil encontrar incluso en este momento –dos mil años después–.

Finalmente, la observación más importante respecto a estos contextos es que, si bien el estudiarlos y exponerlos de forma disjunta nos es útil para dar claridad y linealidad al relato, estos en ningún momento son independientes, al contrario, se entrecruzan, oponen y concilian, y en su conjunto dan forma a las condiciones que hicieron posible la emergencia de las nociones trigonométricas en el *Almagesto* de Ptolomeo.

Así, por ejemplo, coartar el movimiento de los planetas a trayectorias circulares –por casi 2000 años– por el hecho de ser 'la más perfecta de todas las figuras' ilustra la injerencia del contexto tácito al científico, mientras que desplazar el centro de rotación de los planetas del centro del universo, producto de la medición empírica de las estaciones del año, es un claro ejemplo de la relación inversa.

Sobre la problemática

El análisis contextual llevado a cabo nos hizo conscientes de la existencia de tres antecedentes fundamentales para la configuración de la problemática que enfrentaron los matemáticos-astrónomos griegos de la época de Ptolomeo: la necesidad por anticipar los fenómenos astronómicos, como herramienta de organización civil y religiosa; la determinación griega por explicar racionalmente los fenómenos naturales, especialmente los astronómicos; y la cosmovisión aristotélica del universo, que, como hemos mencionado, coloca a la tierra como ente inmóvil en el centro del universo y a los planetas girando de forma circular, uniforme e ininterrumpida alrededor de este.

Así, ante la necesidad construir un sistema astronómico capaz de explicar y anticipar los fenómenos celestes, y dada la cosmovisión aristotélica del universo, los astrónomos griegos enfrentaron de forma recurrente el problema de *medir indirectamente* la distancia entre dos posiciones de un cuerpo celeste conociendo el ángulo central que las separa y viceversa (Figura 48).

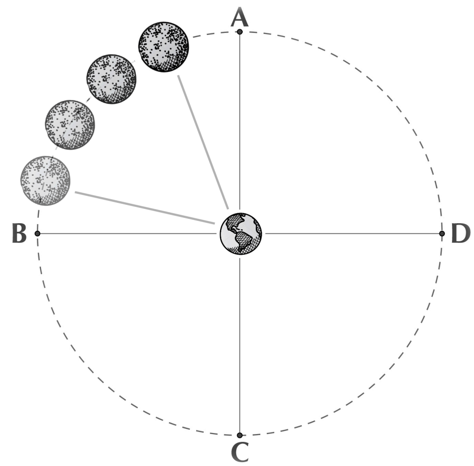


Figura 48. **Problemática astronómica de la época de Ptolomeo**

Sin embargo, el no contar con una herramienta matemática que describiera de forma sistemática y cuantitativa la relación existente entre esas magnitudes orilló a los astrónomos griegos, a partir de Hiparco, a construir tablas que hicieran corresponder una amplia cantidad de ángulos centrales con las longitudes de cuerdas que subtienden, es decir, a construir tablas trigonométricas.

En conclusión, el recorrido histórico realizado desde Sirio hasta Ptolomeo, nos hizo conscientes de que, ante la convergencia entre la cosmovisión aristotélica del universo y la necesidad de componer un sistema que explicara y anticipara los fenómenos astronómicos, es que los astrónomos griegos enfrentaron la necesidad de ***medir indirectamente distancias en el contexto del círculo***, problema que los orilla a explicar de forma sistemática y cuantitativa la relación existente entre un ángulo central y las longitudes que este subtiende, una relación de naturaleza nueva, particular, una relación de naturaleza trigonométrica.

4.2. Análisis Textual

Este segundo apartado de resultados de nuestra historización comprende una breve descripción del aludido estudio sobre los *Elementos* de Euclides, la consecuente construcción códigos y categorías con motivo del estudio del *Almagesto*, y –finalmente– el análisis textual de la obra maestra de Ptolomeo.

Un antecedente esencial

Como expresamos hace algunas páginas, gracias a la inmersión inicial en el documento de interés –el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto*– y el análisis contextual llevado a cabo de forma paralela, nos percatamos de la pertinencia de realizar un análisis detallado de los *Elementos* de Euclides, dada la fuerte injerencia de este sobre la obra maestra de Ptolomeo.

Dicha influencia no se limita a la de un fundamento matemático, aun cuando solo en el capítulo referido se puede identificar el uso de al menos 20 proposiciones de la obra de Euclides –provenientes de los libros I, II, III, IV, VI y XIII de la misma (Cruz-Marquez y Montiel, en prensa)–, sino como germen de una forma particular de hacer y comunicar la ciencia en la época.

Es así que iniciamos nuestro estudio sobre el Libro I de los *Elementos* con el objetivo de acercarnos a la racionalidad y al lenguaje con el cual se hacía matemática en la época en cuestión. Este se llevó a cabo junto al Lic. Sergio Rubio Pizzorno y la Dra. Gisela Montiel Espinosa en el marco del Seminario de Investigación en Matemática Educativa II perteneciente al segundo semestre del año lectivo 2015-2016. Este, comprendió dos etapas principales: la familiarización o pre-análisis de los datos, y el análisis de los mismos. La primera incluyó la recolección y selección de fuentes, la lectura reiterada de las versiones elegidas y una revisión bibliográfica alrededor de

Euclides y su obra maestra; mientras que para la segunda estructuramos un método tripartito particular de análisis.

Para efectos del presente escrito, nos es de interés resaltar solo uno de los resultados del estudio: la estructura discursiva identificada en los *Elementos*. Y es que, como hemos reiterado, quizá el mayor aporte de la obra maestra de Euclides no es la completitud de su síntesis matemática, sino su presentación como un sistema formal axiomático deductivo, esto es, reconocemos a Euclides como el primer matemático –del cual tenemos evidencia– que explicita un grupo de proposiciones no demostradas, de 'elementos' (Euclides, 1991), sobre los cuales teje la trama deductiva de las demás proposiciones (Melogno et al., 2011).

Así, fruto de la etapa de familiarización o pre-análisis, nos percatamos de que el Libro I de la obra maestra de Euclides está compuesta por los 'elementos' de partida, divididos en definiciones (35), peticiones (5) y comunes sentencias (10) –quizá por influencia de Aristóteles (Melogno et al., 2011; Rubio-Pizzorno y Montiel, 2016)–, y un amplio conjunto de proposiciones (48), que se reparten entre problemas (14), en las que el autor se da a la tarea de construir un objeto geométrico particular, y teoremas (34), en los que se ocupa de establecer una característica –propiedad o relación– esencial de los objetos matemáticos construidos o dados (Euclides, 1991).

Además, nos percatamos de que, sin importar su carácter de problema o teorema, existe una deliberada regularidad en la estructura discursiva de cada una de las proposiciones del Libro I, esto es, existen un conjunto de unidades discursivas con una estructura y función semejante en cada una de las proposiciones.

La estructura de análisis discursivo utilizada para el estudio de los *Elementos*, construida tomando en cuenta lo propuesto por Vega (2013), Navarro (2005) y Euclides (1991), se detalla como sigue:

1. **Enunciado**. Fase en la que se declara lo que se quiere demostrar o lo que se quiere construir.

2. **Exposición**. Apartado en el que se exponen los objetos que van a intervenir en el desarrollo de la proposición y se concretan en un dibujo (representación material).
3. **Preparación**. Planteamiento de las relaciones a establecer a partir de los objetos declarados anteriormente. Se caracteriza por comenzar con la frase *digo que* en el caso de los teoremas y *conviene/es menester* en los problemas.
4. **Demostración**. Bloque en el cual se lleva a cabo la construcción o prueba. Se puede constituir de alguna combinación, tanto en orden como en presencia, de los siguientes elementos:
   a) **Construcción**: parte en la que se añaden al dibujo o representación material inicial las unidades figurales (puntos, líneas o circunferencias) necesarias para poder demostrar la afirmación del enunciado.
   b) **Prueba**: apartado dedicado a plantear y justificar los pasos lógicos necesarios para probar la tesis o la construcción deseada.
   c) **Conclusión particular**: relaciones particulares, cuyas conclusiones son también particulares en cuanto al enunciado, pero son útiles para demostrar éste.
   d) **Generalización**: al realizar una conclusión particular, se establece una relación local que, añadida a otros casos homólogos, conforman la conclusión general necesaria para satisfacer el enunciado. Cabe destacar que Euclides generalmente demuestra un caso particular, y luego generaliza este resultado declarando cuáles son y cómo se debería proceder en el resto de casos.
5. **Conclusión**. Último párrafo de la proposición. Este se corresponde de manera general con el enunciado, y en el menor número de casos con la preparación. Su fin es cerrar el problema o teorema puntualizando lo que se demostró o construyó en la proposición.

Para ilustrar esta estructura, veamos el caso de la proposición primera:

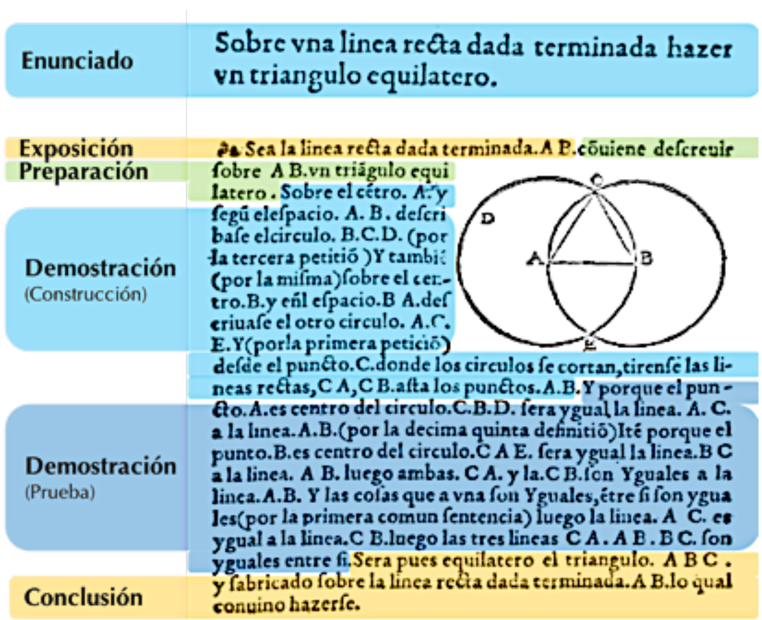


Figura 49. **Proposición primera. Con base en Zamorano (1576, fo. 12B).**

Además de esta estructura discursiva, la primera etapa del estudio hizo posible la identificación de ciertos grupos de proposiciones que parecen compartir un fin o propósito común, a cada uno de estos lo denóminamos *bloque de proposiciones*.

Como consecuencia de esta organización discursiva identificada y de la perspectiva teórica asumida, especialmente del modelo de anidación de prácticas explicitado (Figura 14), comenzamos el esbozo de un método tripartito de análisis del documento *per se*.

En primera instancia definimos tres niveles de análisis para el Libro I de los *Elementos*: micro, meso y macro (Cruz-Márquez y Montiel, 2017). El primero apunta a estudiar en detalle cada proposición en tanto estructura discursiva y objetivo particular. El análisis llevado a cabo en este nivel incluye, entre otras cosas, las preguntas *qué hace* y *cómo lo hace*, que conforman el núcleo del mismo y tienen como objetivo ayudar a identificar las *acciones* que lleva a cabo el autor de forma directa sobre los objetos, así como las *herramientas* que le son útiles para ello (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015b).

El segundo nivel de análisis, el meso, tiene como intención principal estudiar las relaciones existentes entre una proposición y otra, esto es, cada uno de los bloques de proposiciones identificados. En consecuencia, la cuestión *para qué lo hace* juega un papel protagónico, ya que tienen como objetivo ayudarnos a derivar posibles *actividades*, en tanto articulación intencionada de acciones directas sobre el medio, en cada uno de los bloques identificados (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015b).

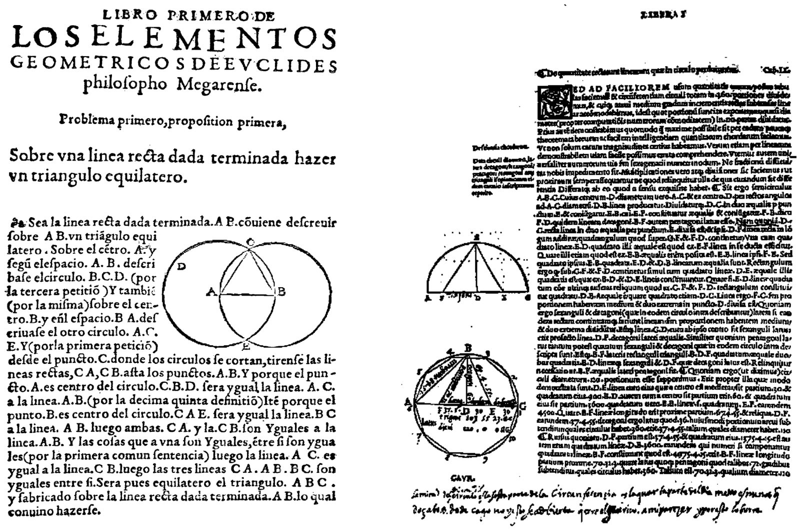
Finalmente, el análisis macro persigue la articulación de los objetivos particulares de cada proposición y los nexos entre estos, con la intención de acercarnos al objetivo del documento.

En suma, dado que los *Elementos* fijaron un estándar metodológico, tanto en lo referente a la sistematización deductiva como al rigor informal de la prueba, para las obras matemáticas y sus dominios de aplicación –desde la astronomía hasta la geografía– (Euclides, 1991), decidimos realizar un análisis detallado del Libro I de la obra de Euclides. Como resultado, nos acercamos a la forma en la que se hacía y comunicaba la matemática en la época; además, consecuencia de la identificación de esta estructura, esbozamos un método últil para el estudio la construcción de nociones matemáticas bajo una racionalidad y lenguaje particular, que ahora podemos denominar euclideano.

Sobre nuestras unidades, códigos y categorías de análisis

Tal como hemos explicitado anteriormente, la estructura discursiva identificada y el método de análisis construido para el estudio de la obra maestra de Euclides, que han sido expuestos y ejemplificados *grosso modo* en el apartado anterior, son la base para las unidades, codigos y categorías de análisis puestas en juego en el estudio que aquí nos reune. Sin embargo, como es ihnherente a este tipo de estudios, ajustamos el método al propósito específico de nuestro análisis, así como a la naturaleza particular de nuestro objeto de estudio.

Así, en primera instancia, determinamos las proposiciones como nuestras unidades básicas de análisis. Sin embargo, en el *Almagesto*, a diferencia de lo observado en el estudio de los *Elementos*, las proposiciones no son secciones identificadas explícitamnete por el autor a través de subtítulos (Figura 50).


LIBRO PRIMERO DE
LOS ELEMENTOS
GEOMETRICOS DE EVCLIDES
philosopho Megarense.

Problema primero, proposition primera,

Sobre vna linea recta dada terminada hazer vn triangulo equilatero.

Sea la linea recta dada terminada. A B. conuiene descreuir sobre A B. vn triãgulo equilatero. Sobre el cẽtro. A. y segũ el espacio. A. B. descriuase el circulo. B.C.D. (por la tercera peticiõ) Y tambiẽ (por la misma) sobre el centro. B. y eñl espacio. B A. descriuase el otro circulo. A. C. E. Y (por la primera peticiõ) desde el puncto. C. donde los circulos se cortan, tirense las lineas rectas, C A, C B. asta los punctos. A. B. Y porque el puncto. A. es centro del circulo. C.B.D. sera ygual la linea. A. C. a la linea. A. B. (por la decima quinta definitiõ) Itẽ porque el puncto. B. es centro del circulo. C A E. sera ygual la linea. B C a la linea. A B. luego ambas. C A. y la. C B. son Yguales a la linea. A. B. Y las cosas que a vna son Yguales, ẽtre si son yguales (por la primera comun sentencia) luego la linea. A C. es ygual a la linea. C B. luego las tres lineas C A. A B. B C. son yguales entre si. Sera pues equilatero el triangulo. A B C. y fabricado sobre la linea recta dada terminada. A B. lo qual conuino hazerse.

Figura 50. **Primera página de proposiciones de los *Elementos* y del *Almagesto*. Tomadas de Zamorano (1576, fo. 12B) y Saiz (2003, Apéndice), respectivamente.**

En consecuencia, tomamos como base el carácter y estructura de las proposiciones identificadas en la obra maestra de Euclides para, mediante las reiteradas lecturas comprensivas del Capítulo IX del *Almagesto*, identificar las proposiciones o unidades de análisis en que esta última puede ser dividida. Como fruto de este proceso identificamos siete proposiciones o unidades en nuestro objeto de análisis (Figura 51).

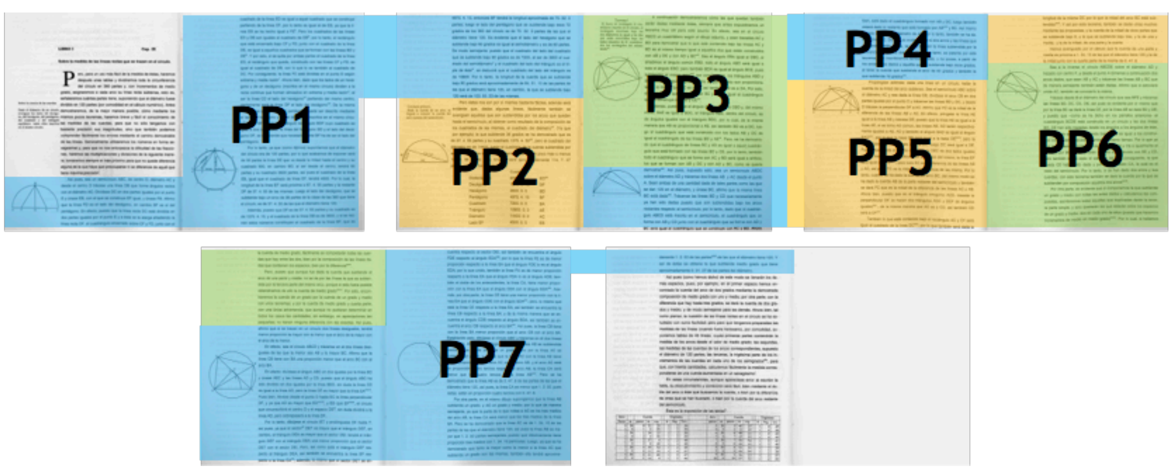


Figura 51. **Esquema de las proposiciones identificadas en el Capitulo IX del *Almagesto***

Durante este proceso, advertimos que existían cambios considerables entre la estructura discursiva reconocida en los *Elementos* y la puesta en juego por Ptolomeo en su obra maestra. En primera instancia, observamos que todas las proposiciones identificadas corresponden a teoremas –en el sentido antes explicado–. Además, nos percatamos de la completa ausencia de elementos como la *generalización* y la incorporación de un componente más, que dada su función denominamos *uso*. En suma, los elementos estructurales identificados en la obra de Ptolomeo se detallas de la siguiente forma (Cruz-Márquez y Montiel, 2017):

1. **Enunciado**. Sección en la que se declara la proposición geométrica genérica que se pretende demostrar.
2. **Exposición**. Apartado en el que los diferentes los objetos geométricos que intervienen en la proposición se explicitan y se concretan en una representación.
3. **Preparación**. Planteamiento de las relaciones a establecer en término de los objetos declarados anteriormente.
4. **Demostración**. Bloque en el cual se lleva a cabo la demostración deseada. Puede constituir de los siguientes elementos:
   a. **Construcción**: parte en la que se añade a la construcción inicial elementos geométricos auxiliares cuyas propiedades contribuyen a demostrar el enunciado.
   b. **Prueba**: apartado dedicado a plantear y justificar los pasos lógicos necesarios para demostrar la tesis.
5. **Conclusión**. Este se corresponde de manera general con el enunciado, y en el menor número de casos con la preparación. Su fin es cerrar la proposición puntualizando lo que se demostró.
6. **Uso**. En este apartado el autor se vale de la proposición demostrada para añadir mediciones a su tabla trigonométrica y/o justificar otras proposiciones útiles para dicho fin.

Estas diferencias en cuanto a estructura son consecuencia no solo de los casi 300 años que separan la difusión de uno y del otro, sino de la distinta naturaleza de los escritos. Y es que, de acuerdo con nuestro análisis contextual, a diferencia de los *Elementos* –una obra con fines didácticos y dirigida al 'público en general'–, el *Almagesto* es una obra enmarcada en un dominio específico de aplicación de las matemáticas, que tiene como objetivo principal comunicar a un grupo de especialistas un modelo planetario e introducir herramientas consecuentes que permitan resolver problemas prácticos de astronomía. En consecuencia, es un tanto más discursivo que esquemático, más deductivo que explicativo, y más concreto que abstracto.

En fin, consideramos la organización discursiva aludida como un conjunto de codigos estructurales, de etiquetas que nos hablan de piezas del documento que tienen una estructura y una finalidad semejante. Es así que, en terminos del analisis de contenido, la estructura discursiva explicitada funge de nuestro libro de códigos.

Por último, con relación a las categorías, dado el papel que juegan los niveles de análisis construidos para el estudio de los *Elementos*, reunir los códigos estructurales bajo criterios explícitos de trabajo, consideramos a cada uno como una categoría de análisis. Así, nuestro estudio sobre el *Almagesto* cuenta con tres categorías o niveles de análisis: micro, meso y macro. El primero, tiene como núcleo las cuestiones *qué hace* y *cómo lo hace*, y –como hemos hecho explícito– pretende identificar el objetivo particular de cada proposición, así como las *acciones* y herramientas que el autor pone en juego para lograr el mismo.

El análisis meso está dirigido al estudio de cada uno de los bloques de proposiciones identificados, en tanto orquestación de *acciones* y herramientas con un propósito común, en consecuencia, tienen como columna vertebral la pregunta *para qué lo hace*.

Finalmente, la tercera categoría o nivel de análisis, el macro, tienen como objetivo la articulación e interpretación de los elementos identificados en los niveles micro y meso, en pro de acercarnos al objetivo del documento estudiado.

Análisis Textual del *Almagesto*

Presentamos los resultados del análisis textual *per se* en concordancia con los niveles o categorías explicitadas en el apartado anterior, es decir, comenzamos con el trabajo realizado y los resultados obtenidos en el análisis micro de cada una de nuestras unidades de análisis; pasamos al análisis meso, en el cual presentamos el análisis realizado para cada uno de nuestros bloques de proposiciones; y finalmente, presentamos los resultados del nivel macro, los cuales, parten del trabajo realizado en los niveles anteriores.

Análisis Micro

Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo[1]

Pero, para un uso más fácil de la medida de éstas [cuerdas][2], haremos después unas tablas y dividiremos toda la circunferencia del círculo en 360 partes y, con incrementos de medio grado, asignaremos a cada arco su línea recta subtensa, esto es, señalaremos cuántas partes tiene, suponiendo que el diámetro fuese dividido en 120 partes (por comodidad en el cálculo numérico)[3]. Antes demostraremos, de la mejor manera posible, cómo mediante los mismos pocos teoremas, haremos breve y fácil el conocimiento de las medidas de las cuerdas, para que no sólo tengamos con bastante precisión sus magnitudes, sino que también podamos comprender fácilmente los errores mediante el camino demostrable de las líneas[4]. Generalmente utilizaremos los números en forma sexagesimal y, para que no nos entorpezca la dificultad de las fracciones, haremos las multiplicaciones y divisiones de la siguiente manera: tomaremos siempre el más próximo para que no quede diferencia alguna de la que haya que preocuparse ni se diferencie de aquél que tiene máxima precisión[5].

---

1 La traducción que se toma como base para el presente análisis es la propuesta por Saiz (2003), sin embargo, se consideran como fuentes alternas las traducciones presentadas por Hutchins (1952) y Toomer (1984), así como el análisis y comentarios de la versión propuesta por Pedersen (2010).

2 Todos los escolios significativos en el cuerpo de la traducción –títulos, subtítulos, aclaraciones y notas– se identifican con un formato **negrita** y/o se encuentran entre corchetes. Además, a excepción de cuando provengan del análisis contextual, se hace referencia explícita de la fuente original del escolio o nota. Por otro lado, la división en párrafos, numerales y viñetas es nuestra, en pro de hacer más comprensible la lectura y más eficiente nuestro análisis.

3 Como mencionamos en el análisis contextual, esta división de la circunferencia en 360 grados y el radio del círculo en 60 partes, cada una dividida subsecuentemente en 60 partes más pequeñas, construida con base en la matemática y astronomía mesopotámica, era usual en Grecia para la época de Hiparco, 200 años antes.

4 Ptolomeo explicita que su labor en el presente capítulo de su libro es proponer y demostrar una tabla que asocie a los ángulos, con intervalo de medio grado, las cuerdas que le corresponden.

5 El sistema sexagesimal posicional de las civilizaciones mesopotámicas tenía –como enfatizamos en el análisis contextual y el mismo Ptolomeo indica– amplias ventajas en cuanto a eficiencia y eficacia sobre el sistema egipcio y griego contemporáneo, especialmente al

PROPOSICIÓN 1 (PP1)

Enunciado:

Sobre la ciencia de las cuerdas: Dado el diámetro de un círculo, averiguar los lados del decágono, del hexágono, del pentágono, del cuadrado y del triángulo equilátero, todos ellos inscritos en el mismo círculo[6] [7].

Exposición:

Así pues, sea un semicírculo ABC, de centro D, diámetro AC.

Construcción:

1. Y desde el centro D trácese una línea recta DB que forme ángulos rectos con el diámetro AC **[Eucl. I, PP11]**[8] [9].
2. Divídase [la línea] DC en dos partes iguales por el punto E **[Eucl. I, PP10]**[10].
3. Y únase [la línea] EB **[Eucl. I, P1]**[11], con el que se construye [la línea] EF igual **[Eucl. I, PP3]**[12].
4. Y únase [la línea] FB **[Eucl. I, P1]**.

---

trabajar con fracciones y números grandes. Además, como expresamos anteriormente, los métodos de cálculo desarrollados por las civilizaciones mesopotámicas harán en extremo precisas las tablas trigonométricas construidas por los astrónomos-matemáticos griegos.

[6] Las longitudes de los lados del hexágono, el cuadrado y el triángulo inscritos en un círculo de radio conocido (cuerdas subtendidas por arcos de 60°, 90° y 120°, respectivamente) eran de dominio popular para la época. Además, Euclides demostró cómo calcular las longitudes de los lados del pentágono y decágono regular inscritos en un mismo círculo (cuerdas subtendidas por arcos de 72° y 36°, respectivamente) (Bressoud, 2010c).

[7] Parágrafo no presente en las versiones de Hutchins (1952) y Toomer (1984).

[8] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 11:** *Dada una línea recta, sacar desde un punto en ella señalado una recta línea en ángulos rectos*.

[9] A menos que se especifique lo contrario, se utilizará como referencia de los *Elementos* la versión al castellano presentada por Zamorano (1576).

[10] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 10:** *Dividir en dos partes iguales una línea recta dada terminada*.

[11] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Petición 1:** *Tirar una línea recta desde cualquier punto hasta cualquier punto*.

[12] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 3:** *Dadas dos líneas rectas desiguales, cortar de la mayor una línea recta igual a la menor*.

Preparación:

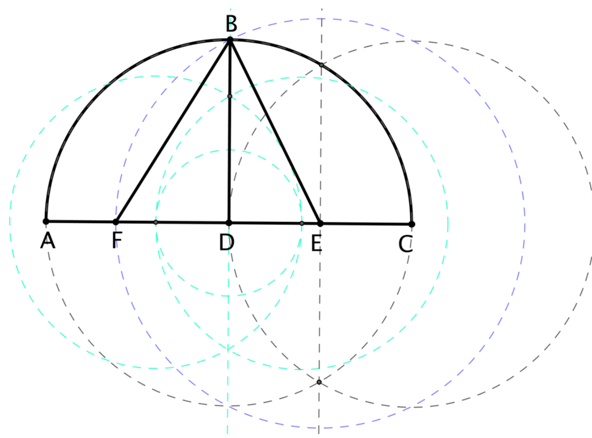
Afirmo que la línea FD es el lado del decágono, en cambio [la línea] BF es el [lado] del pentágono.

Demostración:

Prueba:

[a] En efecto, puesto que la línea recta DC está dividida en dos partes iguales por el punto E **[2]** y a ésta se le alarga añadiendo la línea recta DF, el cuadrángulo[13] encerrado sobre [las líneas] CF y FD, junto con el cuadrado de la línea ED es igual a aquel cuadrado que se construye partiendo de la línea EF[14] **[Eucl. II, PP4]**[15].

[b] Por lo tanto es igual al [cuadrado] de [la línea] EB, ya que la línea EB se ha hecho igual a [la línea] FE **[3][Eucl. I, CS1]**[16].



17

[13] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Definición 31:** *Cuadrángulo es el [cuadrilátero] que es rectángulo [esto es, de ángulos rectos] pero no es equilátero*.

[14] En notación algebraica actual tendríamos $(CF.FD) + ED^2 = EF^2$; considerando que el segmento CF está constituido por el segmento FD y los segmentos iguales ED y CE, podríamos escribirlo como $(FD + 2ED).FD + ED^2 = EF^2$, o lo que es lo mismo $FD^2 + 2FD.ED + ED^2 = EF^2$ (Saiz, 2003).

[15] **Euclides, *Elementos*, Libro II, Proposición 4:** *Si una línea recta se corta como quiera, el cuadrado que es hecho de ella toda es igual a los cuadrados que se hacen de sus partes y aquel rectángulo que dos veces se comprende debajo de sus partes*.

[16] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Común sentencia 1:** *Las cosas que a una misma [cosa] son iguales, también entre sí son iguales*.

[17] Las figuras presentadas en trazos sólidos han sido diseñadas digitalmente conforme a las contenidas en la traducción de Saiz (2003); los trazos discontinuos se han agregado y son, según las proposiciones de los *Elementos* citadas, los necesarios para construir las figuras.

[c] Pero los cuadrados de las líneas ED y DB son iguales al cuadrado de [la línea] EB **[Eucl. I, PP47]**[18], por lo tanto, el rectángulo que está encerrado bajo [las líneas] CF y FD, junto con el cuadrado de la línea DE, es igual a aquellos cuadrados que se forman con las líneas BD y DE **[Eucl. I, CS1]**.

[d] Y por esto, si se quita por ambas partes el cuadrado de la línea ED, el rectángulo que queda, constituido con las líneas CF y FD, es igual al cuadrado de [la línea] DB **[Eucl. I, CS3]**[19], con lo que lo es también al cuadrado de [la línea] DC **[Eucl. I, D15]**[20]**[Eucl. I, CS1]**.

[e] Por consiguiente, la línea FC está dividida en el punto D según extrema y media razón **[Eucl. VI, D3]**[21]**[Eucl. VI, PP17]**[22].

[f] Ahora bien, dado que los lados de un hexágono y de un decágono (inscritos en el mismo círculo) dividen a la recta continua que forman alineados en extrema y media razón **[Eucl. XIII, PP9]**[23], al ser la línea CD el lado del hexágono [regular inscrito] **[Eucl. IV, PP15 C]**[24] partiendo del mismo centro, ciertamente será la línea DF el lado del decágono [regular inscrito][25].

[g] De la misma manera, ya que el lado del pentágono puede ser descrito mediante el lado del hexágono y el del decágono inscritos en el mismo círculo **[Eucl. XIII, PP10]**[26], al ser [la línea] BF el lado del triángulo rectángulo BDF **[1]** cuyo cuadrado es igual a dos cuadrados: la línea del hexágono BD y el lado

---

[18] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 47:** *En los triángulos rectángulos, el cuadrado que es hecho del lado que está opuesto al ángulo recto es igual a los dos cuadrados que son hechos de los lados que contienen el ángulo recto*.

[19] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Común sentencia 3:** *Y si a cosas iguales se les quitan cosas iguales, las [cosas] que quedaren serán iguales*.

[20] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Definición 15:** *Círculo es una figura llana contenida de una línea, que se llama circunferencia, hasta a la cual todas las líneas que salieren de un punto que esté dentro cayendo en la circunferencia del mismo círculo, son entre sí iguales*.

[21] **Euclides, *Elementos*, Libro VI, Definición 3:** *Dícese ser dividida una línea recta con razón extrema y media cuando fuere que: como sea toda [la línea] a la mayor parte, así la [parte] mayor [sea] a la [parte] menor*.

[22] **Euclides, *Elementos*, Libro VI, Proposición 17:** *[…] Y si el rectángulo que es contenido debajo de las [líneas] extremas fuere igual al cuadrado de la de en medio, las tres líneas rectas serán proporcionales [esto es, estarán divididas según extrema y media razón]*.

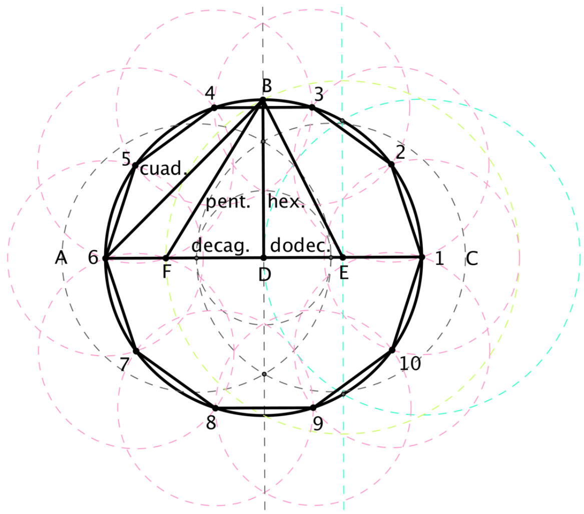
[23] **Euclides, *Elementos*, Libro XIII, Proposición 9:** *Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono* (Saiz, 2003, p. 77).

[24] **Euclides, *Elementos*, Libro IV, Proposición 15, Corolario:** *De aquí es manifiesto que el lado del hexágono [equilátero y equiángulo] es igual al semidiámetro del círculo [en el que se inscribe] […]*.

[25] Utiliza, como advierte Theón en sus *Comentarios*, la proposición inversa a la citada: Elementos, Libro XIII, Proposición 9 (Saiz, 2003).

[26] **Euclides, *Elementos*, Libro XIII, Proposición 10:** *Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es igual es igual a los [cuadrados] de los [lados] del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo* (Saiz, 2003, p. 77).

del decágono DF, se desprende que necesariamente BF ha de ser el lado del pentágono [regular inscrito].



Uso:

Por lo tanto, ya que (como dijimos) suponíamos que el diámetro del círculo era de 120 partes, por lo que acabamos de exponer será de 30 partes la línea DE **[2]** que va desde la mitad hasta el centro[27] y su cuadrado [será de] 900 [partes], en cambio [la línea] BD, al ser desde el centro, tendrá 60 partes y su cuadrado 3600 partes, así pues el cuadrado de la línea EB, igual que el cuadrado de la línea EF **[3]**, tendrá 4500 [partes] **[Eucl. I, PP47]**. Por lo cual, la longitud de la línea EF será próxima a 67. 4. 55 partes[28] y la [línea] restante DF [será] de 37. 4. 55 de las mismas [partes]. Luego el lado del

---

27 **Euclides, *Elementos*, Libro XIII, Proposición 10:** *Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es igual es igual a los [cuadrados] de los [lados] del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo* (Saiz, 2003, p. 77).

28 El cálculo de raíces cuadradas con sexagesimales se realizaba mediante un método iterativo, conocido actualmente como el algoritmo de Newton. Para el cálculo de $x = \sqrt{a}$, por ejemplo, se parte de una primera aproximación a_1 y mediante la fórmula $b_1=a/a_1$ se calcula un segundo valor de tal suerte que, si a_1 es demasiado pequeño, entonces b_1 será demasiado grande y viceversa, así la media aritmética $a_2 = a_1 + b_1/2$ es una mejor aproximación que la de partida. El grado de exactitud del método reside en la cantidad de iteraciones realizadas y del valor de partida (Boyer, 1969); en los cálculos presentados por Ptolomeo encontramos una precisión de hasta siete cifras decimales respecto al cálculo actual (Bressoud, 2010a).

decágono, que se subtiende bajo un arco de 36 partes de la clase de las 360 que tiene el círculo, es de 37. 4. 55 de las que el diámetro tiene 120[29].

Además, puesto que [la línea] DF es de 37. 4. 55 partes y su cuadrado es de 1375. 4. 15 [partes], y el cuadrado de la línea DB es de 3600 [partes], y si se reúnen estos números constituyen el cuadrado de la línea BF **[Eucl. I, PP47]**, que es 4975. 4. 15 [partes], entonces [la línea] BF tendrá la longitud aproximada de 70. 32. 3 partes.

Luego el lado del pentágono que se subtiende bajo esos 72 grados de los 360 del círculo es de 70. 32. 3 partes de las que el diámetro tiene 120. Es evidente que el lado del hexágono que se subtiende bajo 60 grados es igual al semidiámetro y es de 60 partes. De modo semejante, puesto que el cuadrado del lado del cuadrado que se subtiende bajo 90 grados es de 7200 [partes], al ser de 3600 [partes] el cuadrado del semidiámetro y el cuadrado del lado del triángulo es el triple de éste **[Eucl. XIII, PP12]**, se deducirá que el cuadrado del lado del triángulo es de 10800 [partes]. Por lo tanto, la longitud de la cuerda que se subtiende bajo 90 grados será aproximadamente de 84. 51. 10 de las partes de las que el diámetro tiene 120, en cambio, la que se subtiende bajo 120 [grados] será de 103. 55. 23 de las mismas [partes].

¿Qué y cómo lo hace?
En esta proposición Ptolomeo *agrega las primeras seis cuerdas a su tabla*. Para ello construye una figura geométrica que le permite observar de forma nítida la relación existente entre los lados de *polígonos regulares* y la longitud del *diámetro de la circunferencia* en la que están inscritos. Posteriormente, mediante la interpretación aritmético-algebraica de la construcción realizada –esto es, las implicaciones aritmético-algebraicas que la construcción geométrica acarrea, en función de la división del radio y la circunferencia declarada–, deduce la

29 Este constituye el primer caso en el que Ptolomeo, gracias a la mencionada división del radio y la circunferencia, utilizan los objetos y relaciones geométricas declaradas o construidas en pro de agregar mediciones a la tabla en construcción.

longitud de los lados de los polígonos regulares inscritos (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono y el decágono) y finalmente las homologa con las longitudes de las cuerdas inscritas por ángulos centrales de 120°, 90°, 72°, 60° y 36°, respectivamente.

En el transcurso de esta primera proposición, Ptolomeo pone en funcionamiento nociones geométricas como el triángulo rectángulo, el punto medio, la proporcionalidad, así como sus propiedades y relaciones.

Hasta este punto Ptolomeo no ha hecho más que sus antecesores: atender algunas relaciones particulares entre arcos y sus respectivas cuerdas, más aún, estas cuerdas –como hemos enfatizado– eran 'bastante conocidas' en la época.

El producto principal de esta proposición son seis primeros pares ángulo-cuerda:

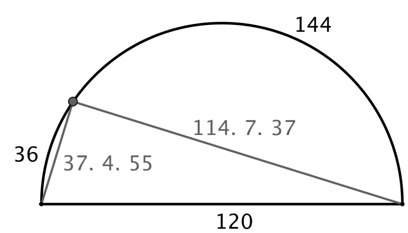
Tabla de Arcos y Cuerdas			
Arco	**Cuerda**	**Razón decimal**	**Diferencia con el cálculo actual**
36	37. 4. 55	0.6180324074	0.00000158
72	70. 32. 3	1.175569444	0.00000106
60	60. 0. 0	1	0
90	84. 51. 10	1.414212963	0.00000059
120	103. 55. 23	1.732050926	0.00000011
180	120. 0. 0	2	0

PROPOSICIÓN 2 (PP2)

Pero éstas nos son por sí mismas bastante fáciles, además será evidente que, dadas algunas líneas, fácilmente también se averigüen aquéllas que son subtendidas por los arcos que quedan hasta el semicírculo, al obtener como resultado de la composición de los cuadrados de las mismas, el cuadrado del diámetro **[Eucl. III, PP31]**[30] **[Eucl. I, PP47]**.

Enunciado:

Corolario primero: Dada la cuerda del arco, se llegará a conocer la cuerda del arco restante del semicírculo.



Uso:

(Ya que, por ejemplo) la que subtiende 36 grados se ha demostrado que es 37. 4. 55 partes y su cuadrado es 1375. 4. 50 [partes][31], pero el cuadrado del diámetro es de 14400 [partes], luego el cuadrado de la cuerda subtendida por estos 144 grados restantes del semicírculo tendrá poco más o menos 13024. 56 partes y su longitud será aproximadamente 114. 7. 37 partes **[Eucl. I, PP47]**; igual en los demás casos[32].

30 **Euclides, *Elementos*, Libro III, Proposición 31:** *En el círculo, el ángulo que está en el medio círculo es recto […].*

31 Este valor difiere del presentado anteriormente, siendo mejor aproximación el primero (Saiz, 2003).

32 Este constituye el primer caso en el que Ptolomeo utiliza los pares ángulo-cuerda conocidos como insumos para, con base en un resultado geométrico, calcular otros pares.

¿Qué y cómo lo hace?

En esta segunda proposición, el autor establece un *primer método geométrico* y *amplía la cantidad de cuerdas* de su tabla trigonométrica.

Para ello, se vale de la concreción aritmético-algebraica de una relación geométrica entre la *circunferencia* y el *triángulo rectángulo* inscrito en ella, conocida ahora como Teorema de Tales, y de los pares ángulo-cuerda conocidos para calcular las cuerdas subtensas por los ángulos suplementarios a los ángulos cuyas cuerdas conoce.

Las herramientas matemáticas puestas en juego en esta proposición son el triángulo rectángulo y el semicírculo, al igual que sus relaciones y propiedades.

El producto principal de esta proposición es el primer método geométrico, que podríamos sinterizar en la expresión: *Dado un ángulo y su cuerda subtensa, también se conocerá la cuerda subtensa por el ángulo suplemento del primero.*

Además, con base en dicho método, agrega dos pares ángulo-cuerda a su tabla:

Tabla de Arcos y Cuerdas[33]			
Arco	**Cuerda**	**Razón decimal**	**Diferencia con el cálculo actual**
144 (sup. de 36)	114. 7. 37	1.902115741	0.00000027
108 (sup. de 72)	97. 4. 56	1.618037037	0.00000304

[33] Toda los pares ángulo-cuerda que se presentan, y que no son calculadas de forma explícita en el escrito de referencia, son tomadas de la tabla completa presentada en Hutchins (1952).

PROPOSICIÓN 3 (PP3)

A continuación, demostraremos cómo las [cuerdas] que quedan también serán dadas mediante éstas [cuerdas calculadas], siempre que antes expusiéramos un teorema muy útil para este asunto[34]:

Enunciado:

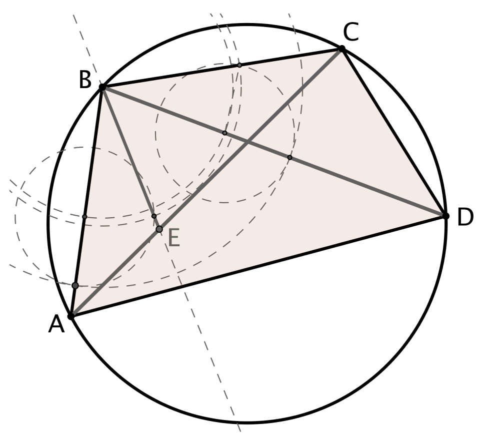
Teorema I: Si fuera un rectángulo el cuadrilátero inscrito en el círculo, el rectángulo encerrado bajo los dos diámetros es igual a los dos [rectángulos] que están encerrados bajo los lados opuestos de él, considerados los rectángulos del mismo modo[35].

Exposición:

En efecto, sea en el círculo ABCD un cuadrilátero según el dibujo adjunto.

Construcción:

1. Y sean trazadas [las líneas] AC y BD **[Eucl. I, P1]**.



---

[34] Este párrafo explicita de forma muy clara el método que el autor pretende seguir para lograr su cometido, construir su tabla trigonométrica: utilizar las propiedades geométricas declaradas o construidas para, con base en los pares ángulo-cuerda que conoce –y la división del círculo y su diámetro escogida–, calcular los pares ángulo-cuerda que requiere.

[35] El enunciado hace alusión a un caso particular del teorema enunciado y demostrado por el autor (Saiz, 2003). Entiéndase que ha de probar el que ha llegado hasta nosotros como "Teorema de Ptolomeo": *el rectángulo encerrado bajo las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico es igual a los dos rectángulos construidos con sus dos pares de lados opuestos*.

Preparación:

Para demostrar que lo que está contenido bajo las líneas AC y BD [esto es, el rectángulo que está formado con las líneas AC y BD] es al mismo tiempo igual a aquellos dos [rectángulos] que están construidos con [las líneas] AB y DC y con AD y BC.

Demostración:

Construcción:

2. Sea el ángulo EBA igual al [ángulo] DBC **[Eucl. I, PP23]**[36].

Prueba:

[a] Si añadimos el ángulo común EBD, todo el ángulo ABD será igual a todo el ángulo EBC **[Eucl. I, CS2]**[37].

[b] Pero también [el ángulo] BDA es igual al ángulo BCE, pues subtienden el mismo arco **[Eucl. III, PP21]**[38].

[c] Por consiguiente, los triángulos ABD y BCE son de ángulos iguales entre sí, por lo tanto, son proporcionales, lo mismo que [la línea] BC es a [la línea] CE, así también [la línea] BD es a [la línea] DA **[Eucl. VI, PP4]**[39].

[d] Por esto, el cuadrángulo que se forma con [las líneas] BC y AD es igual al cuadrángulo que se construye con [las líneas] BD y CE[40].

[e] Además, puesto que el ángulo ABE es igual a [el ángulo] CBD **[2]** y, del mismo modo, [el ángulo] BAE es igual a [el ángulo] BDC **[Eucl. III, PP21]**, el triángulo ABE, dentro del círculo, es de ángulos iguales con el triángulo BDC, por lo cual, de la misma manera que [la línea] AB es proporcional a [la línea] AE, así también [la línea] BD es a [la línea] DC **[Eucl. VI, PP4]**.

---

36 **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 23:** *Sobre una línea recta y en un punto en ella señalado hacer un ángulo de líneas rectas igual a un ángulo dado de líneas rectas.*

37 **Euclides, *Elementos*, Libro I, Común sentencia 2:** *Si a cosas iguales se les añaden cosas iguales los todos serán iguales.*

38 **Euclides, *Elementos*, Libro III, Proposición 21:** *En el círculo, los ángulos que están en un mismo segmento son iguales entre sí.*

39 **Euclides, *Elementos*, Libro VI, Proposición 4:** *Los lados de los triángulos equiángulos que abarcan iguales ángulos son proporcionales y son de semejante razón los lados que se oponen a iguales ángulos.*

40 En notación algebraica actual, como $\frac{BC}{CE} = \frac{BD}{DA}$, entonces $BC.AD = BD.CE$ (Saiz, 2003).

[f] Luego el cuadrángulo que está construido con los lados AB y DC es igual al cuadrángulo de las líneas BD y AE[41].

[g] Pero, se ha demostrado que el cuadrángulo de las líneas BC y AD es igual a aquel cuadrángulo que está formado con las líneas BD y CE **[d]**, por lo tanto, también todo el cuadrángulo que se forma con AC y BD será igual a ambos, los [cuadrángulos] que se forman con AB y DC y con AD y BC **[Eucl. I, CS2]**, como se quería demostrar.

¿Qué y cómo lo hace?
A través de esta proposición, Ptolomeo *introduce y demuestra una nueva relación geométrica*[42] –que ha llegado a nosotros como Teorema de Ptolomeo–, la existente entre la longitud de los lados y de las diagonales de un *cuadrilátero cíclico*. Esta proposición no le es útil directamente para agregar pares ángulo-cuerda a su tabla, sin embargo, será la justificación base de al menos la proposición siguiente. El círculo, el triángulo, la proporcionalidad, así como sus elementos y relaciones son las principales herramientas matemáticas que el autor pone en funcionamiento para lograr su cometido en esta proposición.

41 En notación algebraica actual tendríamos, como $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$, entonces $AB.DC = BD.AE$ (Saiz, 2003).

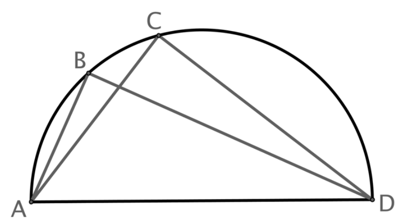
42 Diferentes investigadores advierten la posibilidad de que la relación demostrada en esta proposición ya era conocida para la época de Ptolomeo.

PROPOSICIÓN 4 (PP4)

Exposición:

Así pues, supuesto esto, sea un semicírculo ABCD sobre el diámetro AD.

1. Y trácense dos líneas AB y AC desde el punto A **[Eucl. I, P1]**. Sean ambas de una cantidad dada de tales partes como las que se dan 120 en el diámetro[43].
2. Y únase [la línea] BC **[Eucl. I, P1]**.



Preparación:

Afirmo que la misma línea BC está dada.

Demostración:

Construcción:

3. Trácense las líneas BD y CD **[Eucl. I, P1]**.

Prueba:

[a] Que necesariamente ya han sido dadas puesto que son subtendidas bajo los arcos restantes respecto al semicírculo **[PP2]**.

[b] Por lo tanto, dado que el cuadrángulo ABCD está inscrito en el semicírculo, el cuadrángulo que se forma con [las líneas] AB y CD junto con el cuadrángulo que se forma con [las líneas] AD y BC será igual al cuadrángulo que se construye con [las diagonales] AC y BD **[PP3]**.

[c] Ahora bien, está dado el cuadrángulo formado con [las líneas] AB y DC, luego también estará dado lo restante que está formado por [las líneas] AD y BC.

[43] Al no disponer de una herramienta teórica o física que permita trazar rectas o ángulos con una medida específica, que no fueren las cuerdas deducidas en las proposiciones 1 y 2 o los ángulos construidos por bisección de ángulos conocidos, las representaciones presentadas a partir de esta proposición no constituyen construcciones geométricas *stricto sensu*.

[d] Así mismo ha sido dado el semidiámetro de AD, por lo tanto, también se ha dado la línea BC.

Conclusión:

De aquí es evidente que si dos arcos y las líneas que subtienden están dadas, se dará también la línea subtendida por la diferencia entre esos dos arcos.

Uso:

Por lo tanto, es patente por este teorema, que inscribiremos también líneas, y no pocas, a partir de los excedentes dados y aquéllas que se subtiende bajo doce grados, al tener la cuerda que subtiende el arco de 60 grados y también la que subtiende 72 grados[44].

¿Qué y cómo lo hace?
En esta proposición Ptolomeo constituye un *segundo método geométrico* y lo utiliza para *ampliar la cantidad de pares ángulo-cuerda* de su tabla trigonométrica.   Para ello, hace uso del primer método geométrico (PP2) y la relación geométrica construida en la proposición anterior (PP3), para, con base en los pares ángulo-cuerda conocidos, calcular las cuerdas subtensas por el ángulo diferencia de dos ángulos cuyas cuerdas subtensas se conocen.   De forma homóloga a la proposición anterior, el círculo, el triángulo, la proporcionalidad, así como sus elementos y relaciones son las principales herramientas matemáticas que el autor pone en funcionamiento para cumplir su propósito.   El producto principal de esta proposición es un segundo método geométrico, que podríamos resumir en la siguiente expresión: *Dados dos ángulos y sus cuerdas subtensas, también se conocerá la cuerda subtensa por el ángulo diferencia de los primeros*.

44 Más aún, un uso exhaustivo de este teorema permite conocer, gracias a las cuerdas subtensas por los ángulos centrales de 90º, 60º y 36º, la cuerda subtensa por un arco de 6° y, con base en ella, todas las cuerdas subtendidas por arcos múltiplos de 6° (Pedersen, 2010).

Además, con base en dicho método y los pares ángulo-cuerda conocidos, es posible calcular todas las cuerdas subtensas por ángulos centrales que son múltiplos de 6º:

Tabla de Arcos y Cuerdas			
Arco	**Cuerda**	**Razón decimal**	**Diferencia con el cálculo actual**
6 (dif. 36 y 30)	6. 16. 49	0.1046712963	0.00000061
174 (dif. 180 y 6)	119. 50. 8	1.997259259	0.00000018
168 (dif. 174 y 6)	119. 20. 34	1.989046296	0.00000250
162 (dif. 168 y 6)	118. 31. 22	1.97537963	0.00000294
…	…	…	…

PROPOSICIÓN 5 (PP5)

Enunciado:

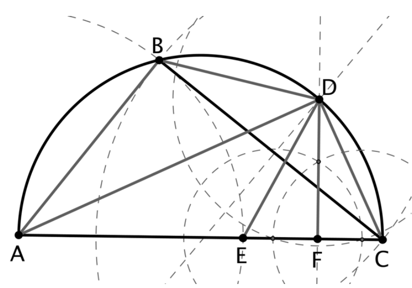
Propóngase además: dada una línea en un círculo, hallar la cuerda de la mitad del arco subtenso.

Exposición:

Sea el semicírculo ABC sobre el diámetro AC y sea dada la línea CB.

Construcción:

1. Divídase el arco CB en dos partes iguales por el punto D **[Eucl. III, PP30]**[45].
2. Trácense las líneas BD y DC **[Eucl. I, P1]**.
3. Y desde [el punto] D trácese la perpendicular DF a [la línea] AC **[Eucl. I, PP12]**[46].



Preparación:

Afirmo que [la línea] FC es la mitad de la diferencia de las líneas AB y AC[47].

Demostración:

Construcción:

---

45 **Euclides, *Elementos*, Libro III, Proposición 30:** *Dividir por medio una circunferencia [borde de un círculo] dada.*

46 **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 12:** *Tirar una línea recta perpendicular sobre una línea recta dada infinita desde un punto que no esté en ella.*

47 Ptolomeo pretende demostrar que: *el cuadrángulo que se forma con las líneas AC y FC es igual al cuadrado que se forma con la línea DC,* la mitad del arco subtenso dado. No obstante, para ello, prueba inicialmente que FC es la mitad de la diferencia de las líneas AB y AC.

4. En efecto, póngase la línea AE igual a la línea AB **[Eucl. I, PP3]**.
5. Y trácese [la línea] DE **[Eucl. I, P1]**.

Prueba:

[a] Puesto que la línea AB es igual a la línea AE **[4]**, si se toma AD común, las líneas AB [y] AD serán respectivamente iguales a AE [y] AD y también el ángulo BAD es igual al ángulo EAD **[1][Eucl. III, PP21]**, por lo que la base BD será igual a la base DE **[Eucl. I, PP4]**[48].

[b] Pero la misma base BD es además igual a DC **[1]**, luego DC será igual a DE **[Eucl. I, CS1]**.

[c] Puesto que desde el vértice del triángulo DEC de dos lados iguales **[b]** ha sido trazada la [línea] perpendicular DF a la base del mismo, la línea EF será igual a la [línea] FC **[Eucl. I, PP5]**[49] **[Eucl. I, PP26]**[50].

[d] Pero todo [el lado] EC es la diferencia de las líneas AB y AC **[4]**, así pues [la línea] FC es la mitad de la diferencia de las mismas.

[e] Por lo tanto, cuando se ha dado la cuerda del arco BC, del mismo modo se ha dado la cuerda AB de la parte restante del semicírculo **[Ptol., PP2]** y también se dará FC que es la mitad de la diferencia de las líneas AC y AB **[d]**.

[f] Ahora bien, puesto que en el triángulo ortogonio [esto es, rectángulo] ACD **[Eucl. III, PP31]**, trazada la [línea] perpendicular DF se hacen dos triángulos ADC y DCF de ángulos iguales **[Eucl. VI, PP8]**[51], de la misma manera que AC es a CD, así también CD será a CF.

[g] También lo que está contenido bajo el rectángulo [que se forma con las líneas] AC y CF será igual al cuadrado de la línea DC, por lo que también será dada la longitud de la misma [línea] DC por la que la mitad del arco BC está subtendido[52].

---

48 **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 4:** *Si dos triángulos tuvieren los dos lados iguales a los dos lados, el uno y el otro al otro y al otro, y el ángulo igual al ángulo contenido debajo de iguales líneas rectas; tendrán la base igual a la base […].*

49 **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 5:** *Los ángulos de los triángulos isósceles que están sobre la base son iguales entre sí […].*

50 **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 26:** *Si dos triángulos tuvieren dos ángulos iguales, el uno al otro, y el un lado igual al un lado, ahora el que está entre los dos ángulos iguales o el que se opone al uno de los iguales ángulos; tendrán también los demás lados iguales a los demás lados, el uno al otro, y el ángulo restante al ángulo restante.*

51 **Euclides, *Elementos*, Libro VI, Proposición 8:** *Si en el triángulo rectángulo se tirare una perpendicular sobre la base desde el ángulo recto, los triángulos de sobre la perpendicular son semejantes al todo y entre sí.*

52 En notación algebraica actual, podríamos decir, como $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CF}$, entonces $AC.CF = CD^2$.

Uso:

Y así por este teorema, también se darán otras muchas [cuerdas] mediante las propuestas, y la cuerda de la mitad de doce partes que se subtiende bajo 6, y la que se subtiende bajo tres y la de una y media, y la de la mitad, de una parte y la cuarta[53].

Hemos averiguado por el cálculo que la cuerda de una parte y media es próxima a 1. 34. 15 de las que el diámetro tiene 120 y la de la mitad junto con la cuarta parte de la misma de 0. 47. 8.

¿Qué y cómo lo hace?
En esta proposición Ptolomeo demuestra un *tercer método geométrico* y lo utiliza para *agregar pares ángulo-cuerda* a su tabla trigonométrica. Para ello introduce el *segmento* FC y, haciendo uso del segundo método construido (PP2) y algunas relaciones presentes en los *Elementos*, prueba que el *cuadrángulo* que se forma con las líneas AC y FC es igual al *cuadrado* que se forma con la línea DC, esto es, que la cuerda DC es la subtensa por el ángulo mitad del ángulo dado. El círculo, el triángulo rectángulo, la proporcionalidad, así como sus elementos y relaciones vuelven a ser las herramientas matemáticas nucleares para el logro del objetivo en esta proposición. El producto principal de esta proposición es el tercer método geométrico, que podríamos sintetizar como: *Dado un ángulo y su cuerda subtensa, también se conocerá la cuerda subtensa por el ángulo mitad del primero.* Además, con base en dicho método y los pares ángulo-cuerda conocidos, es posible calcular todas las cuerdas subtensas por ángulos centrales que son múltiplos de 1,5º:

53 El uso exhaustivo de esta proposición hace posible el cálculo de todas las cuerdas subtensas por múltiplos de 1'5° grados, esto es: 1'5°, 3°, 4'5°, 6°, 7'5°, etcétera.

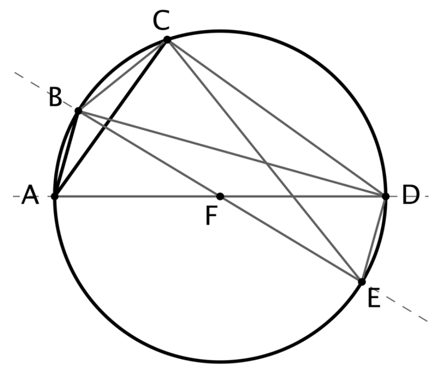
Tabla de Arcos y Cuerdas			
Arco	**Cuerda**	**Razón decimal**	**Diferencia con el cálculo actual**
0.75	0. 47. 8	0.0130925	0.00000271
1.5	1. 34. 15	0.0261805	0.00000136
3	3. 8. 28	0.0523148	0.00003908
4.5	4. 42. 40	0.0785185	0.00000111
…	…	…	…

PROPOSICIÓN 6 (PP6)

Exposición:

Sea a la inversa el círculo ABCDE sobre el diámetro AD y trazado con centro F.

1. Y desde el punto A tómese a continuación dos arcos dados, que sean AB y AC.
2. Y trácense las líneas AB y BC **[Euc. I, P1]** que de manera semejante también estén dadas.



Preparación:

Afirmo que si estuviera unida [la cuerda] AC, también se conocería la misma.

Demostración:

Construcción:

3. Trácese desde [el punto] B el diámetro del círculo que sea BFE **[Eucl. I, P1]**.
4. Y trácense las líneas BD, DC, CE y DE **[Eucl. I, P1]**.

Prueba:

[a] Así pues es evidente por sí mismo que por la línea BC se dará la línea CE **[PP2]**, por la línea AB se dará BD [y] DE **[PP2]**.

[b] Y puesto que –como se ha dicho en párrafos anteriores– el cuadrángulo BCDE está construido en un círculo y las dos líneas BD [y] CE han sido trazadas desde los ángulos a los ángulos de éste **[4]**, el rectángulo que está contenido bajo estas es igual a los construidos con los lados opuestos, ambos al mismo tiempo **[PP3]**. Por lo que ya que se ha dado el rectángulo de las líneas BD y CE e igualmente el formado por [las líneas] BC y DE, también se dará el construido con [las líneas] BE y CD.

[c] Pero también se ha dado el diámetro BE, por consiguiente, la [línea] que queda CD habrá sido dada y por ésta, también [la línea] CA, la cual es el resto del semicírculo **[PP2]**.

Conclusión:

Por lo tanto, si se han dado dos arcos y sus cuerdas, con este teorema también se dará la cuerda por la que se subtienden por composición aquellos dos arcos.

Uso:

Por otra parte, es evidente que si componemos la que subtiende un grado y medio con todas las antes dadas y calculamos las compuestas, escribiremos todas aquéllas que duplicadas darán la tercera parte simple, y solo quedarán las que estarán entre los espacios de un grado y medio, dos en cada uno de ellos (puesto que hacemos incrementos de medio en medio grado).

¿Qué y cómo lo hace?
En esta proposición Ptolomeo propone un *cuarto método geométrico para ampliar la cantidad de cuerdas* de su tabla trigonométrica. Para ello postula dos cuerdas y sus respectivos arcos como dados, y, mediante la construcción de cinco segmentos auxiliares y las proposiciones 2da y 3era, demuestra que también será dada la cuerda subtensa por el arco composición. El círculo, el triángulo rectángulo, la proporcionalidad, y sus elementos y relaciones son las principales herramientas matemáticas para esta proposición. El producto principal de esta proposición es un cuarto método geométrico, que podríamos expresar como: *Dados dos ángulos y sus cuerdas subtensas, también se conocerá la cuerda subtensa por el ángulo composición de los primeros.* Haciendo uso exhaustivo de los métodos anteriores, este método no le permite agregar directamente nuevos pares ángulo-cuerda a su tabla trigonométrica.

PROPOSICIÓN 7 (PP7)

Por lo cual, si hallamos la cuerda de medio grado[54], fácilmente se completarán todas las cuerdas que hay entre las dos, bien por la composición de las líneas dadas que contienen los espacios, bien por la diferencia.

Pero, puesto que aunque fue dada la cuerda que subtiende el arco de una parte y media, no se da por las líneas la que es subtendida por la tercera parte del mismo arco; porque si esto fuera posible obtendríamos de ello la cuerda de medio grado. Por esto, encontraremos la cuerda de un grado por la cuerda de un grado y medio con unos teoremas, y por la cuerda de medio grado y cuarta parte; con una única advertencia, que aunque no pudieran determinar en todos los casos las cantidades, sin embargo, en apreciaciones tan pequeñas, no tienen ninguna diferencia con las exactas.

Enunciado:

Así pues, afirmo que si se traza en un círculo dos líneas desiguales, tendrá menor proporción la mayor con la menor que el arco de la mayor con el arco de la menor[55].

Exposición:

En efecto, sea el círculo ABCD.

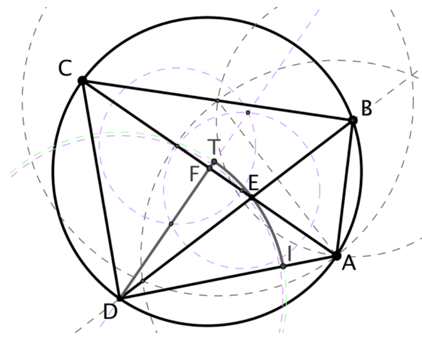
Construcción:

1. Y trácese en él dos líneas desiguales de las que la menor sea AB y la mayor BC **[Eucl. I, P1]**.

---

54 Ante la imposibilidad de trisecar el ángulo, se vuelve necesario un método distinto para aproximar la cuerda subtensa por un arco de 1° y 0.5° (Saiz, 2003).

55 Ptolomeo intenta demostrar que las cuerdas no mantienen la razón de los arcos que las subtienden, esto es, que la relación entre los arcos –y por ende los ángulos centrales– y las cuerdas que subtienden no es proporcional.



Preparación:

Afirmo que la línea CB tiene con [la línea] BA una proporción menor que el arco BC con el arco BA.

Demostración:

Construcción:

2. En efecto, divídase el ángulo ABC en dos iguales por la línea BD **[Eucl. I, PP9]**[56].
3. Y únase AEC y las líneas AD y CD **[Eucl. I, P1]**.

Prueba:

[a] Puesto que el ángulo ABC ha sido dividido en dos partes iguales por la línea BED **[2]**, sin duda la línea CD es igual a la línea AD **[Eucl. III, PP26]**[57] **[Eucl. III, PP29]**[58], pero la línea CE es mayor que la línea EA **[Eucl. VI, PP3]**[59].

Construcción:

4. Pues bien, llévese desde el punto D hasta EC la línea perpendicular DF **[Eucl. I, PP12]**.

---

[56] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 9:** *Dividir un ángulo dado rectilíneo en dos partes iguales.*

[57] **Euclides, *Elementos*, Libro III, Proposición 26:** *Los ángulos iguales, en iguales círculos, están sobre iguales circunferencias [es decir, sobre iguales segmentos de circunferencia, arcos], estén sobre los centros o sobre las circunferencias.*

[58] **Euclides, *Elementos*, Libro III, Proposición 29:** *En los círculos iguales, debajo de iguales circunferencias [es decir, debajo de iguales segmentos de circunferencia, arcos], se extienden iguales líneas rectas [cuerdas].*

[59] **Euclides, *Elementos*, Libro VI, Proposición 3:** *Si el ángulo de un triángulo se dividiere por medio y la línea recta que divide el ángulo dividiré también la base, las partes de la base tendrán una misma razón a los demás lados del mismo triángulo […].*

Prueba:

[b] Y ya que [la línea] AD es mayor que [la línea] ED, y [la línea] ED que [la línea] DF **[4][Eucl. I, PP18]** [60], el círculo que circunscribirá el centro D y el espacio DE, sin duda dividirá a la línea AD, pero sobrepasará a la línea DF.

Construcción:

5. Por lo tanto, dibújese el círculo IET **[Eucl. I, P3]**[61].
6. Y prolónguese [la línea] DF hasta [el punto] T **[Eucl. I, P2]**[62].

Prueba:

[c] Así pues, ya que el sector[63] DET es mayor que el triángulo DEF, en cambio, el triángulo DEA es mayor que el sector DEI: tendrá el triángulo DEF con el triángulo DEA una menor proporción que el sector DET con el sector DEI **[?]**.

[d] Pero, así como está el triángulo DEF respecto al triángulo DEA, así también se encuentra la línea EF respecto a la línea EA **[Eucl. VI, PP1]**[64].

[e] Además, lo mismo que el sector DET se encuentra respecto al sector DEI, así también se encuentra el ángulo FDE respecto al ángulo EDA **[Eucl. VI, PP33 C]**[65].

[f] Por lo que la línea FE es de menor proporción respecto a la línea EA que el ángulo FDE lo es al ángulo EDA **[?]**.

[g] Por lo que unido, también la línea FA es de menor proporción respecto a la línea EA que el ángulo FDA lo es al ángulo ADE **[?]**.

[h] También el doble de los antecedentes, la línea CA, tiene menor proporción con la línea EA que el ángulo CDA con el ángulo EDA **[?]**.

[i] Además, por otra parte, la línea CE tiene menor proporción con la línea EA que el ángulo CDE con el ángulo EDA **[?]**.

---

[60] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 18:** *El mayor lado de todo triángulo se extiende debajo del mayor ángulo.*

[61] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Petición 3:** *Sobre cualquier centro y distancia describir un círculo.*

[62] **Euclides, *Elementos*, Libro I, Petición 2:** *Una línea recta terminada extenderla continua y derechamente.*

[63] **Euclides, *Elementos*, Libro III, Definición 9:** *Sector del círculo es, cuando el ángulo estuviere sobre el centro del círculo, la figura comprendida debajo de las líneas rectas que comprenden el ángulo y de la circunferencia tomada debajo de ellas.*

[64] **Euclides, *Elementos*, Libro VI, Proposición 1:** *Los triángulos y los paralelogramos que están debajo de una misma altura son entre sí como las bases.*

[65] **Euclides, *Elementos*, Libro VI, Proposición 33, Corolario:** *Y manifiesta cosa es que como se ha hecho el sector con sector, así el ángulo con el ángulo.*

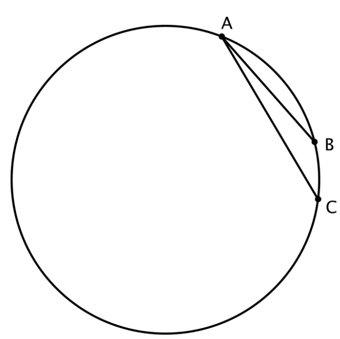
[j] Pero, lo mismos que está la línea CE respecto a la línea EA, así también se encuentra la línea CB respecto a la línea BA **[Eucl. VI, PP3]**.

[k] Y de la misma manera que se encuentra el ángulo CDB respecto al ángulo BDA, así también se encuentra el arco CB respecto al arco BA **[Eucl. VI, PP33]**[66].

[l] Así pues, la línea CB tiene con la línea BA menor proporción que el arco CB con el arco BA **[?]**.

Uso:

Establecido esto, dibújese el círculo ABC y trácense en él dos líneas desiguales, AB [y] AC, y supóngase que por la línea AB es subtendida media y una cuarta parte de un grado, pero por la línea AC se subtiende un grado, y puesto que la línea AC con la línea AB tiene menor proporción que el arco AC con el arco AB, y el arco AC está en proporción cuatro tercios respecto al arco AB, la línea CA será menor que los cuatro tercios de la línea AB. Pero se ha demostrado que la línea AB es de 0. 47. 8 de las partes de las que el diámetro tiene 120, así pues, la línea CA es menor que 1. 2. 50, pues éstas están en proporción cuatro tercios con 0. 47. 8.



Por otra parte, en el mismo dibujo supongamos que la línea AB subtiende un grado, y AC un grado y medio[67]; por lo que de manera semejante, ya que la parte de lo que rodea a AC es los tres medios del arco AB, la línea CA será menor que los tres medios

[66] **Euclides, *Elementos*, Libro VI, Proposición 33:** *En círculos iguales los ángulos tienen la misma razón que las circunferencias [es decir, sobre iguales segmentos de circunferencia, arcos] sobre las cuales están, ahora sean hechos en los centros ahora en las circunferencias y también los sectores que son los hechos en los centros.*

[67] Esta frase deja ver con suma claridad el carácter exclusivamente ilustrativo de las representaciones geométricas utilizadas en este punto –mencionado anteriormente–.

de la misma línea BA. Pero se ha demostrado que la línea AC es de 1. 34. 15 de las partes de las que el diámetro tiene 120, así pues la línea AB es mayor que 1. 2. 50 partes semejantes, puesto que efectivamente proposición tres medios con 1. 34. 15 partículas.

Luego, ya que se ha demostrado que tanto la mayor como la menor a la línea AC que subtiende un grado son las mismas, también ella tendrá aproximadamente 1. 2. 50[68] de las partes de las que el diámetro tiene 120. Y así de éstas se obtiene la [cuerda] que subtiende medio grado que tiene aproximadamente 0. 31. 27 de las partes del diámetro.

Así pues (como hemos dicho) de este modo se llenarán los demás espacios, pues, por ejemplo, en el primer espacio hemos encontrado la cuerda del arco de dos grados mediante la demostrada composición de medio grado con uno y medio; por otra parte, con la diferencia que hay hasta tres grados, se dará la cuerda de dos grados y medio, y de modo semejante para las demás.

Ahora bien, tal como pienso, la cuestión de las líneas rectas en el círculo se ha estudiado con suma facilidad; pero para que tengamos preparadas las medidas de las líneas (cuando fuera necesario), por comodidad, exponemos tablas de 45 líneas, cuyas primeras partes contendrán la medida de los arcos desde el valor de medio grado; las segundas, las medidas de las cuerdas de los arcos correspondientes, supuesto el diámetro de 120 partes; las terceras, la trigésima parte de los incrementos de las cuerdas en cada uno de los semigrados, para que, con treinta cantidades, calculemos fácilmente la medida correspondiente de una cuerda aumentada en un sexagésimo.

---

68 Pese a lo demostrado –si se traza en un círculo dos líneas desiguales, tendrá menor proporción la mayor con la menor que el arco de la mayor con el arco de la menor–, Ptolomeo considera que para arcos iguales o menores a 1° la diferencia es despreciable (Saiz, 2003).

En estas circunstancias, aunque apareciese un error al escribir la tabla, su descubrimiento y corrección será fácil, bien mediante el doble del arco a éste que buscamos la cuerda, o bien por la diferencia de otras que se han buscado, o bien por la cuerda del arco restante del semicírculo.

¿Qué y cómo lo hace?
En esta proposición Ptolomeo *aproxima la cuerda subtensa por un ángulo central de 1º y 0.5º*. Para ello demuestra que *la razón entre la cuerda mayor y la cuerda menor en un círculo es menor que la razón de sus respectivos arcos*. Probado eso, compara la cuerda subtensa por un ángulo central de 0.75º con la de 1º y la de 1º con la de 1.5º, con lo que justifica que la cuerda subtensa por 1º debe ser menor que 1. 2. 50 (esto es, menor que los cuatro tercios de la cuerda subtensa por un ángulo central de 0.75º, 0. 47. 8 partes) y mayor que 1. 2. 50 partes (es decir, mayor que los tres medios de la cuerda subtensa por un ángulo central de 1.5º, 1. 34. 15 partes). Así, concluye que las cuerdas subtensas por un ángulo central de 1º y 0.5º serán aproximadamente 1. 2. 50 y 0. 31. 27 de las partes de las que el diámetro tiene 120. En esta proposición, quizá la más densa de las expuestas por Ptolomeo en este apartado de su obra, se pone en funcionamiento nociones matemáticas el triángulo, el círculo, el sector, la proporcionalidad, sus elementos y relaciones. El producto principal de esta proposición es una demostración matemática de que *las cuerdas no mantienen la razón de los arcos que las subtienden*, es decir, que la relación entre los arcos –y por ende los ángulos centrales– y las cuerdas que subtienden no es proporcional. Esto es de gran valía en nuestro estudio, pues muestra de forma nítida, no solo la consciencia que los astrónomos griegos tenían sobre la relación entre los ángulos

centrales y las cuerdas que subtienden, sino sobre la naturaleza peculiar –no proporcional– de esta relación, sobre su naturaleza trigonométrica.

Además, producto de esta proposición, Ptolomeo está en condiciones de agregar a su tabla las cuerdas subtensas por ángulos centrales que son múltiplos de 0.5º, las únicas faltantes para lograr su cometido:

Tabla de Arcos y Cuerdas			
Arco	**Cuerda**	**Razón decimal**	**Diferencia con el cálculo actual**
1	1. 2. 50	0.01745370	0.00000063
0.5	0. 31. 27	0.00873611	0.00000949

Análisis Meso

Consecuencia del análisis micro, identificamos tres conjuntos de proposiciones que comparten objetivos afines, estos son: las primeras cuerdas, los métodos geométricos y las cuerdas 'pares'.

Bloque I: Primeras cuerdas

En este primer bloque, constituido únicamente por la proposición primera, Ptolomeo proporciona un primer grupo de pares ángulo-cuerda, las subtensas por arcos –ángulos centrales– de 120º, 90º, 72º, 60º y 36º.

Para ello, el autor declara algunos elementos geométricos de partida: una circunferencia dividida en 360 partes y su diametro dividido en 120, cada una de estas partes divida subsecuentemente en 60 partes más pequeñas. A esta configuración agrega elementos geométricos con características particulares: un segmento perpendicular (DB) al diámetro en su punto medio, el punto medio (E) del segmento DC, el segmento que une E y B, un segmento FE –sobre el diámetro– con igual longitud que el segmento BE, y el segmento FB (Figura 52).

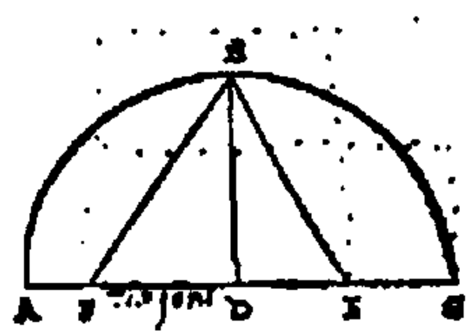


Figura 52. **Contrucción geométrica de partida PP1. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).**

Posteriormente, Ptolomeo demuestra que los segmentos DF, BD, BF, BA, AE, son semejantes a los lados de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia con diez, seis, cinco, cuatro y tres lados, respectivamente (Figura 53).

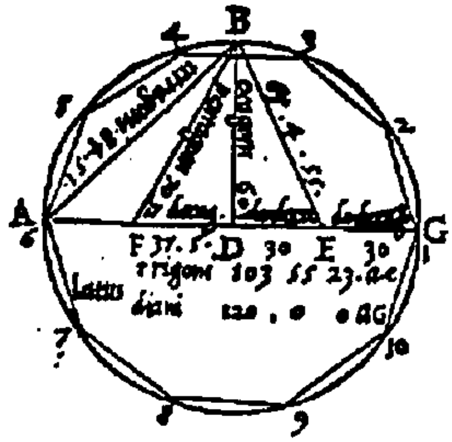


Figura 53. Primeras cuerdas. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).

Para finalizar su cometido, el autor se vale de las propiedades geométricas de los objetos declarados y construidos, y de los métodos aritmético-algebraicos asociados, para –con base en la división inicial designada a la circunferencia y su diametro– cuantificar la longitud de dichos lados o longitudes de cuerda (Figura 54).

		Quadrata.	
	¶. Dodecagoni.	900.0.0.	E.D.
	¶. Decagoni.	1375.4.14.	D.F.
	¶. Exagoni.	3600.0.0.	B.D.
GAVR.	¶. Pentagoni	4975.4.15.	B.F.
	¶. Tetragoni	7200.0.0.	B.A.
	¶. Trigoni	10800.0.0.	A.E.
	¶. Diametri	14400.0.0.	A.C.
	¶. Lateris.E.F.	4500.0.0.	E.B.

***Figura 54*. Primeras cuerdas. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).**

En suma, si bien –como muestra nuestro análisis contextual– el cálculo de estos pares ángulo-cuerda no lleva a Ptolomeo más lejos que sus antecesores, como veremos, estos son elementos esenciales en la construcción de su tabla trigonométrica en tanto constituyen la materia prima para su trabajo en los bloques próximos.

Bloque II: Métodos Geométricos

Este bloque está compuesto por las proposiciones segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta, y en él Ptolomeo se da a la tarea de construir cuatro métodos que le permitan ampliar la cantidad de pares ángulo-cuerda conocidos. Así, en la proposición segunda, parte de una semicircunferencia, a la cual agrega un ángulo central cuya cuerda subtensa conoce (Figura 55).

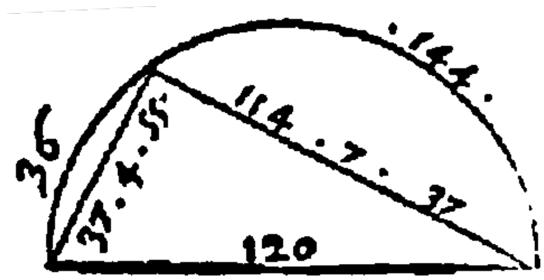


***Figura 55*. Primer método geométrico. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).**

Acto seguido, utiliza el que ha llegado hasta nosotros como 'Teorema de Tales' para sostener que el triángulo construido por la cuerda cuya longitud conoce, el diámetro del semicírculo y la cuerda subtensa por el ángulo suplemento del primero, es rectángulo.

Consecuencia de ello, el autor está en condiciones de utilizar el ahora conocido como 'Teorema de Pitágoras' y los métodos aritmético-algebraicos necesarios para calcular la cuerda subtensa por el ángulo suplemento al ángulo conocido. Este método le permite averiguar, en primera instancia, las cuerdas subtensas por ángulos centrales de 144º y 108º, suplementos de 36º y 72º, respectivamente.

Por otro lado, en la proposición tercera, el autor propone y demuestra la relación geométrica existente entre los lados y las diagonales de un cuadrilátero cíclico, ahora conocida como 'Teorema de Ptolomeo': el rectángulo encerrado bajo las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico es igual a los dos rectángulos construidos con sus dos pares de lados opuestos (Figura 56).

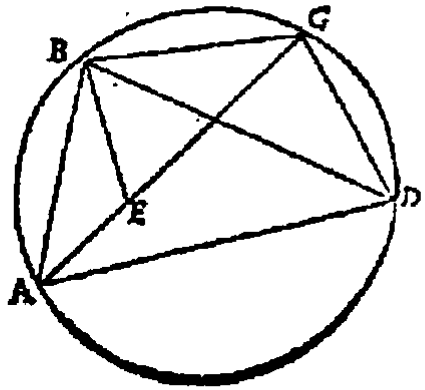


Figura 56. **Teorema de Ptolomeo. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).**

Esta relación geométrica permite a Ptolomeo, en la proposición cuarta, proponer un método geométrico que fundamente el cálculo de la cuerda subtensa por el ángulo diferencia entre dos ángulos cuyas cuerdas son conocidas. Para ello, parte de una semicircunferencia (ACD), a la cual agrega –compartiendo un extremo del diámetro (A)– dos cuerdas cuyos ángulos centrales conoce (AB y AC) (Figura 57).

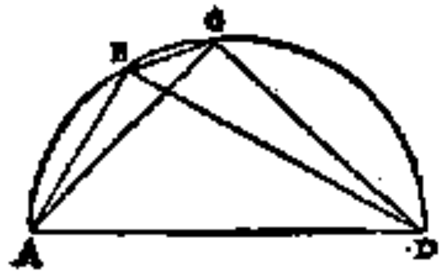


Figura 57. **Segundo método geométrico. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).**

Como resultado, el autor está en condiciones de calcular –gracias al primer método construido– las cuerdas suplementos de las primeras (BD y CD), así como la cuerda diferencia de las primeras (BC), al hacer uso de la propiedad geométrica demostrada en la proposición anterior. Este método le permite calcular, de primera mano, la cuerda subtensa por un ángulo central de 30º, como ángulo diferencias entre 90º y 60º, y la cuerda subtensa por un ángulo central de 6º, al ser ángulo diferencia entre 36º y 30º. En síntesis, llegado este punto, Ptolomeo está en condiciones de exponer una tabla constituida por los ángulos centrales múltiplos de 6º y sus respectivas cuerdas.

El tercer método geométrico construido por Ptolomeo, en la proposición quinta, le permite calcular las cuerdas subtensas por la mitad de un ángulo cuya cuerda es conocida. Para ello el autor parte de un semicírculo (ABC), en el cual construye –desde uno de los extremos del diámetro (C)– una cuerda cuya longitud de arco es conocida (BC); agrega, además, el punto medio del arco BC (D), las cuerdas BD, DC, AB y AD, y el segmento DF perpendicular al diámetro de la semicircunferencia (Figura 58).

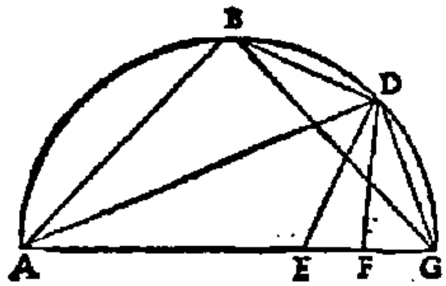


Figura 58. **Tercer método geométrico. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).**

Posteriormente, el autor demuestra que el segmento FC es la mitad de la diferencia entre las cuerdas AB y AC, y –con base en la proporcionalidad de triángulos– calcula la longitud de la cuerda DC, la mitad de la cuerda dada (BC). Fruto de este método, Ptolomeo amplía su tabla trigonométrica a las cuerdas cuyos ángulos centrales son múltiplos de 1.5º.

Finalmente, en la proposición sexta, Ptolomeo agrega un cuarto método geométrico, para ello parte de una circunferencia y su diámetro, a la cual agrega dos cuerdas cuyas longitudes conoce (AB y BC), la primera de ellas compartiendo uno de los extremos del diámetro (A) (Figura 59); así, después de agregar el diámetro BE y las cuerdas BD, CD y CE, y mediante el uso de los últimos dos métodos geométricos construidos, Ptolomeo calcula la longitud de la cuerda AC, esto es, construye un método para el cálculo de la cuerda subtensa por el ángulo central suma de dos ángulos centrales cuyas cuerdas son conocidas.

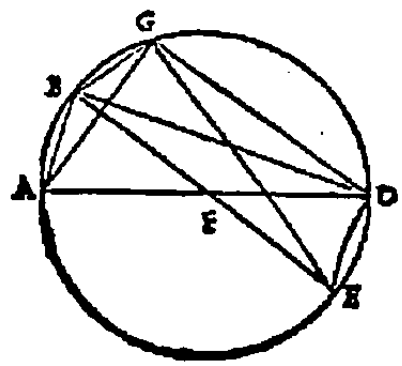


Figura 59. **Cuarto método geométrico. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).**

En conclusión, en este segundo bloque de proposiciones, Ptolomeo se da a la tarea de proponer o retomar relaciones geométricas que funjan como un puente entre los pares ángulo-cuerda conocidos y los buscados. Como hemos visto, el uso de estos métodos geométricos en pro de completar su tabla trigonométrica pende de la división de la circunferencia y su diámetro referida, así como de los pares ángulo-cuerda conocidos y los métodos de cálculo aritmético-algebraicos mesopotámicos.

Además, es importante resaltar el trascendental papel que la construcción, el establecimiento de conjeturas, la argumentación –sobre herramientas matematicas como el triángulo rectángulo, el círculo, la proporcionalidad, al igual que sus elementos y propiedades– juegan en el establecimiento de estos métodos geométricos.

Bloque II: Cuerdas 'Pares'

Pese al enorme avance que implica la proposición de los métodos anteriores en la empresa de construir su tabla trigonométrica, –como el mismo Ptolomeo señala– la imposibilidad que enfrenta por trisecar el ángulo lo orilla a, en la séptima proposición, aproximar las cuerdas subtensas por ángulos centrales de 1º y 0.5º.

Para ello, prueba que *la razón entre la cuerda mayor y la cuerda menor en un círculo es menor que la razón de sus respectivos arcos* (Figura 60). Esto, además de servirle como argumento geométrico para aproximar las cuerdas deseadas, muestra la plena consciencia del autor sobre la naturaleza no proporcional de la relación que se estable entre un ángulo central y las cuerdas que este subtiende.

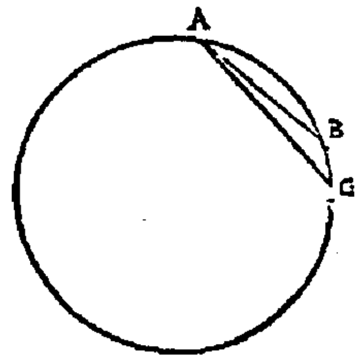


Figura 60. **Aproximación de un ángulo. Tomada de Saiz (2003, Apéndice).**

Probado eso, el Ptolomeo compara la cuerda subtensa por un ángulo central de 0.75º con la de 1º y la de 1º con la de 1.5º, concluyendo que las cuerdas subtensas por un ángulo central de 1º y 0.5º serán aproximadamente 1. 2. 50 y 0. 31. 27 de las partes de las que el diámetro tiene 120.

Análisis Macro

El análisis textual llevado a cabo sobre el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto* muestra que, para cumplir su objetivo, construir una tabla que asocie a los ángulos entre 0.5º y 180º –con un intermedio de medio grado– con sus respectivas cuerdas, Ptolomeo requiere al menos tres herramientas fundamentales, tres bloques o momentos, y de tres usos de las nociones y procedimientos geométricos.

Tres herramientas fundamentales. El análisis presentado, y a la luz del análisis contextual previo, muestra con gran claridad que para poder lograr su cometido Ptolomeo heredó al menos tres herramientas esenciales: la geometría axiomática deductiva griega, reunida en los *Elementos* de Euclides; los aportes aritmético-algebraicos heredados de las civilizaciones mesopotámicas; y una noción del ángulo como cuantificación de la amplitud, concreta en la división de la circunferencia del círculo y de su diámetro.

Respecto a la primera, y como se ha mostrado anteriormente, los *Elementos* dotan de un lenguaje y una racionalidad particular a todas sus obras posteriores, especialmente el *Almagesto*. Además de proveer a Ptolomeo un cúmulo bastante rico de herramientas de construcción geométrica y prueba matemática, que, como ha sido evidente en el análisis micro, explota al máximo.

Dentro de los aportes aritmético-algebraicos mesopotámicos, cabe resaltar el sistema numérico, que, al ser sexagesimal y posicional, tenía amplias ventajas sobre los sistemas griegos y egipcios contemporáneos, especialmente al trabajar con números grandes y con fracciones. Además, los métodos de cálculo mesopotámicos, como el cálculo de raíces cuadradas, fueron determinantes en el asombroso grado de exactitud observado en la tabla construida por Ptolomeo.

Finalmente, la división de la circunferencia del círculo en 360 partes y del diámetro en 120 partes, cada una de ellas dividida subsecuentemente en 60 partes más pequeñas, que –como evidencia nuestro análisis contextual– la matemática griega construye con base en la astronomía y matemática mesopotámica y que para los tiempos de Ptolomeo ya era de uso estándar, es un elemento esencial para ser capaces de cuantificar las cuerdas trazadas en un círculo. En este sentido, esta división funge como unidad de medida, pues es con base en ella que se cuantifican y expresan las longitudes de las cuerdas.

Tres momentos. Además de estas herramientas, Ptolomeo requiere de tres bloques o momentos para construir su tabla trigonométrica: el establecimiento de seis ***primeras cuerdas***, la construcción de cuatro ***métodos geométricos*** y una aproximación para las ***cuerdas 'pares'***, cuerdas subtensas por ángulos centrales de 1º y 0.5º.

En el primero, el autor identifica seis primeros pares ángulo-cuerda, si bien bastante conocidos en la época, estos fungen de materia prima para los métodos que construirá posteriormente. Además, son el primer ejemplo del método que rige la construcción de su tabla: establecer construcciones y relaciones geométricas, y utilizar las implicaciones aritmético-algebraicas de dichas relaciones para –con ayuda de métodos de cálculo y de la unidad de medida establecida para la circunferencia y su diámetro– cuantificar la longitud de las cuerdas que desea.

En el segundo momento, Ptolomeo enuncia y demuestra cuatro métodos geométricos, esto es, establece cuatro relaciones geométricas generales que sustentan procesos de cálculo útiles para la cuantificación de cuerdas con características particulares. Así, los métodos permiten calcular la cuerda suplemento, diferencia, mitad y suma de uno o dos ángulos –según el caso– cuyas cuerdas se conocen, permitiendo al autor ampliar su tabla trigonométrica, de seis pares ángulo-cuerda a algo más de 120.

Sin embargo, la importancia de estos métodos no solo radica en la cantidad de pares ángulo-cuerda que permiten calcular, sino en que constituyen el primer medio sistemático para describir de forma cuantitativa la relación entre los ángulos centrales (en tanto cuantificación de la amplitud) y cuerdas (en tanto longitudes subtensas) del cual tenemos conocimiento. En otras palabras, es específicamente en estos métodos geométricos que ubicamos el nacimiento de la trigonometría.

Finalmente, para completar su tabla, y ante la imposibilidad de trisecar el ángulo, Ptolomeo debe aproximar la cuerda subtensa por un ángulo central de 1º. Para ello prueba que *la razón entre la cuerda mayor y la cuerda menor en un círculo es menor que la razón de sus respectivos arcos*, esto –como hemos advertido– no solo le sirve como fundamento geométrico para aproximar la cuerda deseada, sino que muestra la plena conciencia del autor sobre la naturaleza no proporcional que se establece entre los arcos –ángulos centrales– y las cuerdas que estos subtienden.

Tres usos. Por último, el análisis micro y meso expuesto, nos permitió advertir que de forma transversal a los momentos aludidos, las nociones y procedimientos geométricos, especialmente la proporcionalidad, el círculo y el triángulo rectángulo, así como sus elementos y relaciones, son utilizadas por Ptolomeo con al menos tres propósitos: ***como herramientas de construcción***, donde, valiéndose principalmente problemas y postulados de los *Elementos*, declara y representa los objetos geométricos que van a intervenir en las proposiciones posteriores; ***como herramientas teóricas***, donde se ayuda de definiciones, comunes sentencias y teoremas para proponer y probar relaciones geométricas existentes entre los objetos declarados y construidos anteriormente; y ***como herramientas aritmético-algebraicas***, donde, tomando como base la escala de proporcionalidad, las operaciones aritmético-algebraicas aludidas y las relaciones ángulo-cuerda conocidas, agrega nuevos pares ángulo-cuerda a su tabla. A la sinergia de estos tres usos de las nociones geométricas es lo que en delante referiremos como **trabajo geométrico**.

4.3. Algunas conclusiones

El recorrido histórico realizado –de Sirio a Ptolomeo– nos hizo conscientes de que la meta principal de los matemáticos-astrónomos de la época de Ptolomeo era componer un sistema astronómico capaz de explicar y anticipar los fenómenos celestes, en el marco de los hechos astronómicos empíricos y los hechos astronómicos ideológicos referidos.

Para este fin, heredaron al menos dos herramientas fundamentales: la geometría axiomática deductiva griega, y el sistema numérico y métodos de cálculo mesopotámicos. La primera fue indispensable para la composición de modelos geométricos que encarnaran la forma en que la gente de la época concebía la estructura y funcionamiento del universo, mientras que la segunda se convirtió en una herramienta esencial para ajustar los modelos geométricos al cúmulo de datos empíricos con los que se contaba (Figura 61).

Figura 61. Construcción de los sistemas de explicación a los fenómenos astronómicos

Ahora bien, en este proceso de construcción de un sistema de explicación, y producto de los hechos astronómicos ideológicos, especialmente la *finitud* y *esfericidad* del universo, la *geoestaticidad*, el *geocentrismo*, y la *circularidad* y *uniformidad* del movimiento de los planetas; es que Ptolomeo y sus antecesores tropezaron con el obstáculo de ***medir indirectamente distancias en el contexto del círculo***.

Y es fruto de esta problemática que surge la necesidad por **construir una explicación sistemática y cuantitativa de la relación existente entre un ángulo central y las longitudes de cuerda que subtiende**, esto es, de construir y explicitar una relación matemática de naturaleza diferente, de naturaleza trigonométrica.

Para este fin particular, Ptolomeo parte de nociones matemáticas como el círculo y el triángulo rectángulo –sus elementos, propiedades y relaciones–, así como la proporcionalidad, y los usa como herramientas de construcción, como herramientas teóricas y como herramientas aritmético-algebraicas, esto es, las pone en funcionamiento para *introducir y construir objetos geométricos*, para *establecer ciertas propiedades y relaciones*, y para *calcular los pares ángulo-cuerda* deseados.

El primer y segundo uso parten del dominio de las aludidas nociones geométricas, mientras que el tercero hace necesaria la puesta en escena de una interpretación aritmético-algebraica de las relaciones geométricas construidas; de una división de la circunferencia y diámetro del círculo, de una unidad de medida; y de métodos aritméticos y algebraicos de cálculo. En este sentido es que la geometría axiomática deductiva griega, los aportes aritmético-algebraicos hechos por los mesopotámicos y una noción del ángulo como cuantificación de la amplitud jugaron un papel trascendental en la construcción social de las nociones trigonométricas.

Además, es importante subrayar el rol que desempeñaron eventos socioculturales como la ventajosa ubicación geográfica de los pueblos griegos, la fundación y poderío de Alejandría, y la creación y auge de su Museo y su Biblioteca, para el establecimiento de una atmosfera favorable –sino incluso estimulante– para la producción científica en la época en cuestión. Hecho que nos ha orillado sostener que los tres contextos aludidos, tácito, sociocultural y científico, fueron igualmente importantes para la construcción de las nociones trigonométricas y, en consecuencia, de "una astronomía cuantitativa que pudiera ser usada para predecir los caminos y la posición de los cuerpos celestes y para ayudar a contar el tiempo, el calendario, la navegación y la geografía" (Kline, 1972, p. 119).

En conclusión, la historización llevada a cabo nos permite plantear –a manera de hipótesis–, que la ***medición indirecta de distancias en el contexto del círculo*** hace necesaria la construcción de las nociones trigonométricas, y que el ***trabajo geométrico*** sobre nociones geométricas como **el círculo, el triángulo rectángulo** (sus elementos, propiedades y relaciones) **y la proporcionalidad** constituye una propuesta viable para la misma.

5. Una dialectización de las Nociones Trigonométricas

Nuestro progreso como nación
no puede ser más rápido que nuestro progreso en educación.
John F. Kennedy

Para presentar la segunda etapa de nuestro estudio, la confrontación en un escenario didáctico, partimos de una descripción general de nuestra población de interés, luego la construcción de las actividades de aula y, finalmente, presentamos los resultados y conclusiones de la misma.

5.1. La población objetivo

La Escuela Superior del Profesorado Francisco Morazán, fundada en 1956 por el Gobierno de la República con la intensión de responder al elevado grado de empirismo en la Educación Media del país, se convirtió, después de 33 años de trayectoria académica –el 14 de diciembre de 1989–, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, una universidad dedicada a la formación y perfeccionamiento a nivel superior de los cuadros que requiere la educación nacional (Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, 2015).

Actualmente, la UPNFM constituye la única institución de Educación Superior de Centroamérica dedicada de forma exclusiva a la formación inicial y continua de docentes de los diversos niveles y áreas de enseñanza. Comprende dos facultades y diez departamentos académicos, los cuales ofertan veintitrés carrreras de pregrado y catorce programas a nivel de posgrado. Dentro de las primeras, nos atañe el Profesorado en Matemáticas.

El Profesorado en Matemáticas

La carrera de "Profesorado en Matemáticas en el grado de Licenciatura" es coordinada por la Facultad de Ciencia y Tecnología a través del Departamento de Ciencias Matemáticas. Según su Plan de Estudios vigente, tiene una duración de cuatro años y está compuesto por 52 espacios pedagógicos, distribuidos en doce periodos académicos, cada uno con una duración de trece semanas (Departamento de Ciencias Matemáticas, 2008).

Estos espacios pedagógicos están organizados dentro tres grandes áreas curriculares: la **Formación de fundamentos generales y pedagógicos**, que abarca un total de 17 espacios pedagógicos, 9 de formación de fundamento general (6 obligatorios y 3 electivos) y 8 espacios de formación de fundamento pedagógico; la **Formación específica**, que consta de un total de 32 espacios pedagógicos, 5 de formación pedagógica didáctica orientada a la formación profesional y 27 espacios pedagógicos de formación profesional como tal; y, finalmente, la **Práctica profesional**, compuesta por 3 espacios pedagógicos (Figura 62).

***Figura 62*. Áreas curriculares del Plan de Estudios vigente**

Bajo dicho Plan, el primer espacio pedagógico en el que los estudiantes de la carrera se encuentran con el estudio de las nociones trigonométricas es el de Trigonometría y Geometría Analítica (EMA-1303), ubicado en el tercer periodo académico (Anexo 1). Dentro de las áreas temáticas propuestas para este espacio, encontramos el estudio de las funciones trigonométricas, las identidades y ecuaciones trigonométricas, la resolución de triángulos oblicuángulos con aplicaciones y la graficación de las funciones trigonométricas y sus inversas.

Los espacios pedagógicos que son requisitos para este curso son Matemáticas (EMA-1301) y Algebra I (EMA-1002), ubicados en el primer y segundo periodo, respectivamente. En el primero se aborda el estudio de los sistemas numéricos, áreas y perímetros, plano cartesiano y la resolución de problemas que involucren conceptos de aritmética, geometría y algebra. Mientras que en el espacio de Algebra I se plantea el estudio de polinomios y expresiones algebraicas, números complejos, ecuaciones e inecuaciones polinómicas, racionales, radicales, valor absoluto, exponenciales y logarítmicas en una variable y sus aplicaciones.

Además, el espacio de Trigonometría y Geometría Analítica es requisito de los espacios pedagógicos Cálculo I (EMA-1604) y Geometría I (EMA-1904), ambos ubicados en el cuarto periodo académico. De forma genérica, el primero de ellos incluye el estudio de áreas temáticas como límites, diferenciales, series y sus aplicaciones. Mientras que el segundo abarca el estudio de triángulos, congruencia y semejanza, perpendicularidad y paralelismo, polígonos regulares, círculo y circunferencia, y construcciones geométricas elementales.

En síntesis, bajo el Plan de Estudios vigente para la carrera de Profesorado en Matemáticas de la UPNFM, el estudio de las nociones trigonométricas comienza en el tercer periodo académico, en el espacio pedagógico de Trigonometría y Geometría Analítica. La secuencia de los espacios pedagógicos aludidos, así como las áreas temáticas propuestas para cada uno de ellos, deja entrever que dicho estudio se centra en la definición, operatividad y graficación de las funciones trigonométricas, atravesando el estudio de las identidades y ecuaciones trigonométricas. Además, nos resulta sumamente revelador que el estudio la geometría no constituya un antecedente importante para el espacio pedagógico de Trigonometría y Geometría Analítica, en tanto el primer curso dedicado a su estudio –Geometría I– no es un requisito, sino un curso posterior.

Para darnos una idea un tanto más clara de las herramientas con las que contarán nuestros participantes al enfrentar las actividades de aula, nos es necesario esbozar la estructura y funcionamiento de la Educación Media del sistema escolar hondureño.

La Educación Media

A diferencia de la Educación Superior, los niveles de Educación Prebásica (estudiantes de 0 a 6 años), Básica (estudiantes de 6 a 15 años) y Media (estudiantes de 15 y 18 años) del sistema escolar hondureño son regidos por la Secretaría de Educación Pública del país. Siendo obligatoria y gratuita la instrucción hasta la Educación Básica.

La Educación Media es una oferta educativa compartida por los sectores público y privado. Se ofrece en dos modalidades: Bachillerato Científico Humanista (BCH) y Bachillerato Técnico Profesional (BTP). El primero, tiene una duración de dos años y pretende dotar a los estudiantes de las competencias necesarias para continuar estudios en el nivel de Educación Superior. Mientras que el segundo, con una duración de tres años, provee además una formación técnico profesional que les permite integrarse al mercado laboral, en rubros como turismo, administración, artes y otros (Secretaría de Educación, 2003).

Pese a la diversidad de propuestas en la Educación Media, el Área de Matemática es transversal a todos los planes y programas de dicho nivel. Así, para efectos de este análisis, utilizaremos, a manera de ejemplo, el Plan de Estudios propuesto para el "Bachillerato Técnico Profesional en Informática" (Secretaría de Educación, 2007), quizá el más popular de los bachilleratos técnicos profesionales.

La estructura genérica de los bachilleratos técnicos profesionales está compuesta por tres ciclos de estudio: la **Formación de Fundamento** –ciclo transversal a todo el nivel de Educación Media–, con una duración de dos semestres, consta de dos espacios curriculares asociados al Área de Matemática (Matemática I y Matemática II), uno para cada semestre académico; la **Formación Orientada**, con una duración de un semestre, cuenta con un espacio curricular en el marco del Área de Matemática (Matemática III o Matemática Aplicada); y, finalmente, la **Formación Específica**, con una duración de tres semestres, no tiene ningún espacio curricular en el Área de Matemática (Figura 63).

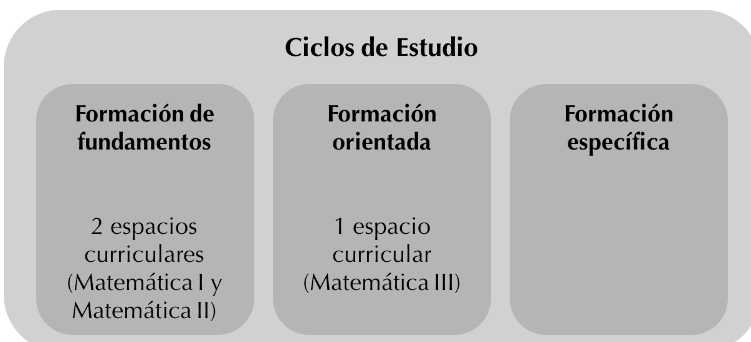


***Figura 63*. Ciclos de Estudio del Plan de Estudios de BTP en Informática**

El espacio curricular de Matemática I, bajo el Plan de Estudios aludido, presenta en la segunda unidad –de cuatro unidades totales– una "Introducción a la Trigonometría", que incluye como contenidos conceptuales la medición de ángulos, el estudio de las 'funciones' trigonométricas de ángulos agudos y cualquier ángulo, la resolución de triángulos rectángulos y su aplicación, y la aplicación de las 'razones' trigonométricas con otras ciencias.

La primera unidad del espacio curricular de Matemática I –que antecede la unidad aludida–, denominada "Fundamentos Aritméticos y Geométricos", incluye como contenidos conceptuales el estudio de los números reales, las operaciones con notación científica, perímetro y área de superficies planas, y área y volumen de cuerpos sólidos.

Por otro lado, el espacio curricular de Matemática II, incluye, en la segunda unidad, denominada "Funciones Trascendentales", el estudio de las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas y las funciones seno y coseno. Según la descripción, este último contenido se centra en el análisis de las características de la función seno y coseno, orientado a la introducción de su definición y graficación.

Finalmente, la primera unidad del espacio curricular de Matemática III, cuyo nombre es "Trigonometría", incluye como contenidos conceptuales al estudio de la trigonometría del triángulo rectángulo, las funciones y ecuaciones trigonométricas, resolución de triángulos oblicuángulos, y gráfica de funciones trigonométricas y sus inversas. Además, en este mismo espacio curricular, pero en las unidades tercera y cuarta, denominadas "Derivada y Aplicaciones" e "Integración y Aplicaciones", respectivamente, se ponen en juego las nociones trigonométricas como objetos susceptibles de ser operados.

En suma, bajo el Plan de Estudios del BTP en Informática, que utilizamos como ejemplo, el Área de Matemática incluye tres espacios curriculares: Matemática I, Matemática II y Matemática III. Durante el primero, se toma a la construcción y medición de ángulos como base para el estudio de las razones trigonométricas de ángulos agudos y –posteriormente– de ángulos cualquiera, y la resolución de triángulos rectángulos y problemas de aplicación asociados. Durante el segundo espacio curricular, Matemática II, se estudia la función seno y coseno, su definición y graficación. Finalmente, en el transcurso del espacio de Matemática III, se realiza el estudio de la trigonometría del triángulo rectángulo, las funciones y ecuaciones trigonométricas, la resolución de triángulo oblicuángulos y sus aplicaciones, y la graficación de las funciones trigonométricas y sus inversas.

Una síntesis necesaria

Partiendo de nuestro interés por extender este proyecto de investigación hacia la formación inicial docente en Honduras, establecimos a los estudiantes de la carrera de Profesorado en Matemáticas –que oferta la UPNFM en modalidad presencial para la sede central, ubicada en Tegucigalpa, Honduras– como población de interés para esta etapa de dialectización. Esta decisión nos orilló a estudiar *grosso modo* la relación que nuestros posibles participantes tienen con las nociones trigonométricas, fruto de su trayectoria académica.

Como resultado, observamos que el estudio de la trigonometría en el sistema escolar hondureño comienza en el primer semestre de la Educación Media, con el estudio de las razones trigonométricas de ángulos agudos y –posteriormente– de ángulos cualquiera, y la resolución de triángulos y sus aplicaciones. Durante el segundo semestre, se plantea el tránsito de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica, con el estudio, definición y graficación de las funciones seno y coseno. Mientras que en el tercer semestre comienza el estudio de las ecuaciones y funciones trigonométricas, la resolución de triángulos oblicuángulos y sus aplicaciones, la graficación de las funciones trigonométricas y sus inversas, y el trato de las nociones trigonométricas en tanto objetos susceptibles de ser operados.

Finalmente, durante el primer año del Profesorado en Matemáticas, se reanuda el estudio de las funciones trigonométricas, las identidades y ecuaciones trigonométricas, la resolución de triángulos oblicuángulos y sus aplicaciones, y la graficación de las funciones trigonométricas y sus inversas (Figura 64).

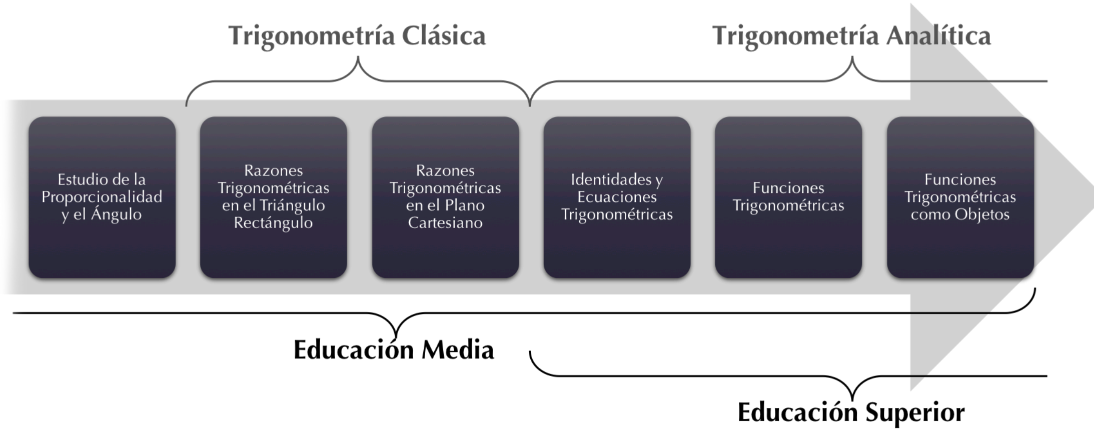


Figura 64. **Trigonometría – Sistema escolar hondureño**

Salvo la superposición de los niveles educativos, el tratamiento de las nociones trigonométricas que nos permite inferir los planes y programas de estudio de la Educación Media y Superior del sistema escolar hondureño aludidos, no difiere en gran medida del reportado por la literatura especializada de nuestra disciplina, expuesto en nuestro apartado de antecedentes (Figura 3). Más aún, en este estudio no observamos ningún elemento que obstaculice la manifestación de los fenómenos asociados a dicho tratamiento, en especial el de Aritmetización de la Trigonometría, el uso exclusivo como herramienta técnica que reciben las nociones trigonométricas y la emergencia de un significado lineal y aritmético para las mismas, de nuclear interés para nuestro estudio.

En suma, consecuencia de esta sucinta revisión, consideramos que un estudiante del primer y segundo año de Profesorado en Matemáticas posee características de interés para nuestros participantes: no es ajeno a los fenómenos didácticos de estudio y posee las herramientas matemáticas que nuestra historización señala como valiosas para actividades de construcción de las nociones trigonométricas: el círculo y el triángulo rectángulo (sus elementos, propiedades y relaciones), así como la proporcionalidad.

5.2. El diseño de las actividades de aula

Con nuestra historización como base y con las consideraciones expresadas en la sección inmediatamente anterior respecto a la población objetivo, estamos en condiciones de estructurar una primera versión de nuestras actividades de aula.

La situación-problema

La base de diseño para nuestras actividades de aula es la hipótesis construida: "la *medición indirecta de distancias en el contexto del* círculo permite, mediante el *trabajo geométrico*, confrontar el significado lineal y aritmético que el dME vigente asocia a las razones trigonométricas, así como su resignificación mediante el uso".

Eso implica, en primera instancia, que la situación-problema propuesta debe orillar a los participantes a obtener la distancia entre dos objetos, cuya medición directa es impráctica o imposible dadas las condiciones o herramientas de partida. Además, se deberá proporcionar un punto de observación desde el cual se asegure la equidistancia de esos objetos, ya que ello hace del ángulo de separación entre los mismos una herramienta valiosa para la solución, como nuestra historización evidencia.

Pese a la búsqueda exhaustiva de tareas de la vida cotidiana o académica de nuestra población objetivo en las que se enfrente naturalmente este tipo de medición indirecta, no fue posible encontrar una que fuera viable para esta etapa del estudio, hecho que nos obligó a construir una situación-problema ficticia en el salón de clases.

La situación-problema propuesta es la siguiente:

Situación Problema. A tres metros del punto en el suelo etiquetado como X, se encuentran tres objetos, marcados como A, B y C, ¿cuál es la distancia entre los objetos A y B y entre B y C?

Situación-Problema

Para enfrentar esta situación-problema, los participantes dispondrán de un espacio amplio en el cual se hallará un punto marcado en el suelo (X) y, a una distancia uniforme (3m) de ese punto, tres objetos (A, B y C). Además, contarán con sets de geometría, punteros láser, calculadora, lápices y papel como herramientas.

Por otro lado, la historización realizada también nos hizo conscientes de la pertinencia de tres bloques o momentos de actividad: la situación-problema, el análisis de las relaciones, y la vuelta a la situación-problema.

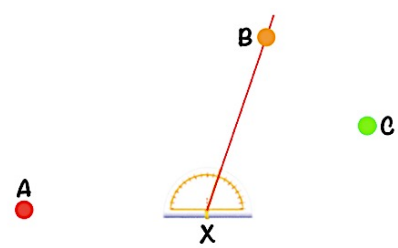
Bloque primero de actividades: situación-problema

Este bloque está compuesto por tres actividades, la primera de ellas es la siguiente:

Actividad 1. Con ayuda del transportador y del puntero láser, aproxima el ángulo –con vértice en X– que separa a los objetos A y B, y B y C.

- ¿Cuándo mide el ángulo AXB?

- ¿Cuánto mide el ángulo BXC?



Bloque 1: Actividad 1

Esta tiene como objetivo que los participantes midan, con ayuda del transportador y el puntero láser, el ángulo de separación entre los objetos A y B, y entre B y C, con X como vértice o punto de observación. Esto, además de fuente de datos para el problema, pone al ángulo sobre la 'mesa de trabajo'.

La segunda actividad propuesta en este bloque es la siguiente:

Actividad 2. Con las mediciones realizadas anteriormente, ¿cómo podríamos conocer las distancias entre los objetos A y B, y B y C?

Bloque 1: Actividad 2

Esta actividad permite que los participantes exploren diversas estrategias de resolución para la situación problema, con base en los datos dados y recolectados hasta el momento.

Finalmente, en la actividad 3, se propone a los estudiantes lo siguiente:

Actividad 3. Considerando las mediciones realizadas en la actividad 1 y con ayuda del set de geometría, construye un modelo a escala de la situación problema. Finalmente, con base en este modelo, aproxima la distancia entre los objetos A y B, y B y C.

Bloque 1: Actividad 3

Esta tiene como propósito particular proveer de una aproximación de referencia para evaluar futuros métodos y respuestas, al mismo tiempo que será una herramienta valiosa para comenzar a centrar la atención y discusión en los elementos geométricos que intervienen en la situación-problema.

En síntesis, este bloque está compuesto por tres actividades y tiene como objetivo general ser un espacio de recolección de datos y de resolución de la situación-problema propuesta, así como un primer momento de construcción y reflexión geométrica.

Bloque segundo de actividades: análisis de las relaciones

Este es el bloque central de trabajo, consta de 4 actividades, cada una de ellas compuesta por diversos incisos y/o interrogantes. La primera actividad propuesta para este bloque es la siguiente:

Actividad 1.

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 180º?
- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 6m y el ángulo AXB fuera 180º?
- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 9m y el ángulo AXB fuera 180º?
- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera *d* metros y el ángulo AXB fuera 180º?
- Ahora, ¿coincide la mitad de la distancia calculada en el primer inciso con la distancia entre A y B cuando el ángulo AXB es la mitad, es decir 90º? ¿por qué?
- ¿Coincide un tercio de la distancia calculada en el primer inciso con la distancia entre A y B cuando el ángulo AXB es un tercio, es decir 60º? ¿por qué?

Bloque 2: Actividad 1

Y responde al menos a tres propósitos particulares: primero, la interrogante inicial, centra la atención en una relación ángulo-cuerda particular: la cuerda subtensa por un ángulo central de 180º; en segundo lugar, las interrogantes dos, tres y cuatro, tienen como objetivo resaltar la naturaleza proporcional de la relación radio-cuerda en el caso particular estudiado; y, finalmente, las cuestiones cinco y seis, apuntan al estudio de la naturaleza no proporcional de la relación ángulo-cuerda, relativa al caso particular de estudio.

Las actividades 2 y 3 de este bloque tienen estructura y propósitos homólogos a los explicitados para la actividad 1, con la salvedad de que las relaciones ángulo-cuerda de estudio son las correspondientes a un ángulo central de 90º y 60º, respectivamente.

Por otro lado, la actividad 4 de este bloque es la siguiente:

Actividad 4.

- En la situación problema, si el ángulo AXC fuera 90º y el objeto B estuviera entre los objetos A y C, es decir, el ángulo AXB fuera 45º, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

- Ahora, en la situación problema, si el ángulo AXC fuera μ, un ángulo para el cual la distancia entre A y C es conocida, y el objeto B estuviera entre los objetos A y C, es decir, el ángulo AXB fuera μ/2, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

- En la situación problema, ¿si el ángulo AXC fuera 180º y el ángulo AXB fuera 60º, podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

- Ahora, en la situación problema, si el ángulo AXC fuera 180º y el ángulo AXB fuera μ, un ángulo para el cual la distancia entre A y B es conocida, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

Bloque 2: Actividad 4

Esta tiene como objetivo la construcción de dos métodos geométricos. La interrogante primera y segunda apuntan a la construcción de un método de cálculo de la cuerda subtensa por el ángulo mitad de un ángulo central cuya cuerda se conoce, mientras que la cuestión tercera y cuarta pretenden el establecimiento de un método útil para calcular la cuerda subtensa por el ángulo suplemento de un ángulo central cuya cuerda se conoce.

En suma, el objetivo principal de este bloque de actividades es ser un momento de estudio de las relaciones ángulo-cuerda y radio-cuerda que interviene en la medición indirecta requerida y de la naturaleza de las mismas, adicionalmente, permite la construcción de relaciones ángulo-cuerda particulares –cuerdas subtensas por ángulos centrales de 180º, 90º y 60º– y métodos geométricos –cuerda mitad y cuerda suplemento– que, como revela nuestra historización, son necesarios para enfrentar este tipo de situaciones.

Bloque tercero de actividades: relación ángulo-cuerda

Finalmente, el bloque tercero consta de una sola actividad, la siguiente:

Actividad 1. Con ayuda de las relaciones particulares y los métodos de cálculo identificados en el bloque anterior y las mediciones realizadas inicialmente, calcula la distancia entre los objetos A y B y entre B y C, en la situación inicial.

- ¿Cuál es la distancia entre A y B?

- ¿Cuál es la distancia entre B y C?

Bloque 3: Actividad 1

Esta tiene como fin volver a la situación-problema y, con base en la reflexión llevada a cabo y los métodos geométricos y las relaciones ángulo-cuerda particulares establecidas, responder a la misma.

En conclusión, fruto de la historización y el estudio de la población objetivo llevado a cabo, estructuramos un conjunto de actividades de aula que tienen por objetivo evidenciar que, al integrarse en situaciones de medición indirecta de distancias en el contexto del círculo –que impliquen procesos de construcción y reflexión geométrica, de planteamiento de conjeturas y de cálculo–, los participantes no solo confrontan el significado lineal y aritmético asociado a las nociones trigonométricas, sino que comienzan un proceso de resignificación de las mismas con base en su uso (Anexo 2).

5.3. Puesta en escena

Posterior al estudio de nuestra población objetivo y a la propuesta de las actividades de aula, presentamos una descripción del escenario y los participantes de esta etapa del estudio, la puesta en escena y los principales resultados obtenidos en la misma.

Sobre los participantes y el escenario

Como resultado de nuestro estudio sobre la población objetivo, observamos que los estudiantes que cursan el espacio pedagógico de Trigonometría y Geometría Analítica bajo el Plan de Estudio vigente, para el primer periodo académico del año 2017, poseen las herramientas matemáticas que nuestra historización señala como necesarias al enfrentar el tipo de actividades de aula construidas, además, no encontramos –hasta dicho nivel de formación– algún indicador de ruptura del fenómeno de Aritmetización de la Trigonometría.

Así, nos contactamos con el Departamento de Matemáticas de la UPNFM y con la profesora Libni Berenice Castellón, Máster en Educación Secundaria con enfásis en Matemáticas, con 12 años de experiencia en formación inicial docente y 3 períodos académicos a cargo del espacio pedagógico seleccionado. Acordamos una entrevista inicial de trabajo, en la que se le presentara a la docente, de forma breve, el sustento y estructura de las actividades de aula propuestas, en espera de observaciones y recomendaciones importantes para adaptar la situación a las particularidades de su grupo, así como para establecer una mejor estrategia en la implementación de las actividades de aula.

Esta entrevista se llevó a cabo el lunes 6 de febrero del 2017, tuvo una duración de media hora y fue grabada en audio. Como resultado, realizamos cambios menores y muy superficiales a las actividades de aula construidas, por ejemplo, sustituimos el término “juego geométrico” por “set de geometría”, dado que el primero no es de uso común en Honduras.

Además, durante la entrevista, la profesora concordó con algunos de los resultados de investigación que conforman nuestra problemática, la indistinción de las nociones trigonométricas en los libros de texto utilizados, por ejemplo.

Asimismo, nos informó de algunos fenómenos particulares del espacio pedagógico en cuestión, por ejemplo, la enorme brecha que observa entre el currículo oficial y el currículo efectivo de la Educación Media –especialmente en las áreas de geometría y trigonometría–, y que en ese punto de su formación los estudiantes no han cursado el espacio pedagógico de Geometría I; situaciones que cree determinantes para el desarrollo de su curso y un factor a tener en cuenta en las actividades de aula propuestas.

Finalmente, nos advirtió sobre algunas particularidades del grupo, por ejemplo, que observa especiales dificultades en los estudiantes al abordar problemas que involucran nociones y procedimientos geométricos, y que, dado su nivel de formación, existe poca reflexión de carácter pedagógico y didáctico en la clase.

El mismo día de la entrevista, lunes 6 de febrero, tuve la oportunidad de presentarme con el grupo de estudiantes seleccionado y consensuar con ellos la hora y el día más conveniente para la implementación de las actividades de aula. Acordamos realizar la puesta en escena como un taller extraclase, que nos permitiera tomar tres horas continuas de trabajo, y lo agendamos para el viernes 10 de febrero, en horas de la tarde.

Implementación de las actividades de aula

La implementación de las actividades de aula se llevó a cabo el día y hora acordada, viernes 10 de febrero a las 2pm, en un aula facilitada por la profesora a cargo del espacio pedagógico. De los 21 estudiantes inscritos en el curso, 17 nos comunicaron su posibilidad e interés de participar en el taller, sin embargo, debido a algunas situaciones sociopolíticas ajenas a la institución, solo a ocho de los estudiantes les fue posible asistir el día y hora acordada.

Fotografía del facilitador, los participantes y la profesora a cargo del espacio pedagógico

Al llegar al salón de clases los estudiantes encontraron, en el centro del aula, un punto marcado como X, y, a una distancia de 3 metros de ese punto, tres vasos plásticos, etiquetados como A, B y C. Dado el número de participantes, acordamos realizar la Actividad 1 del primer bloque de actividades, medición de los ángulos AXB y BXC, como un solo grupo.

Estudiantes utilizando el transportador y el puntero laser para tomas las medidas necesarias

Posterior a ello, los estudiantes regresaron a sus escritorios y comenzaron a trabajar de forma individual casi en su totalidad y siguiendo las actividades explicitadas en el guion (Anexo 2). Sin embargo, de forma espontánea, durante la realización de las actividades dos y tres del primer bloque, se fueron conformando dos equipos, de tres y cinco participantes, respectivamente.

Disposición de los participantes durante el transcurso de las actividades

Además, durante todo el taller, dos estudiantes trabajaron de forma conjunta, al punto de presentar solamente una gruía de trabajo. Razón por la cual contamos solo con siete guías de trabajo, a pesar de trabajar con ocho estudiantes.

Por otro lado, y pese a las preguntas abiertas y dirigidas del guía, la discusión de las actividades comenzó siendo muy poca y solo entre los estudiantes; situación que fue cambiando paulatinamente con el paso de las actividades.

Dos hechos generales más son relevantes a la implementación de las actividades de aula, el primero es que, a pesar de haber adquirido otros compromisos, contamos con la presencia de la profesora a cargo del espacio pedagógico en algunos lapsos del taller, esta es de suma importancia para la interpretación de los resultados de la puesta en escena. El segundo es que al trabajar en la actividad 4 del segundo bloque de actividades agotamos las tres horas acordadas y dados los disturbios en la periferia de la universidad decidimos no prolongar más el taller.

Resultados

Con la intención de hacer más clara la comunicación de resultados de la implementación, dividimos este apartado en cuatro secciones, una por cada uno de los tres bloques que componen nuestras actividades de aula y una sección final donde presentamos de forma integral y sucinta los principales resultados de la implementación.

Bloque primero de actividades: situación-problema

Actividad 1. La primera actividad de este bloque apunta a la medición de los ángulos centrales que separan a los objetos A y B, y B y C. Tal como hemos explicitado, todos los participantes trabajaron en conjunto en esta actividad, llegando a la conclusión de que el ángulo AXB medía 15º y el ángulo BXC medía 75º.

Sin embargo, solo uno de los participantes traslada esto a la guía de trabajo:

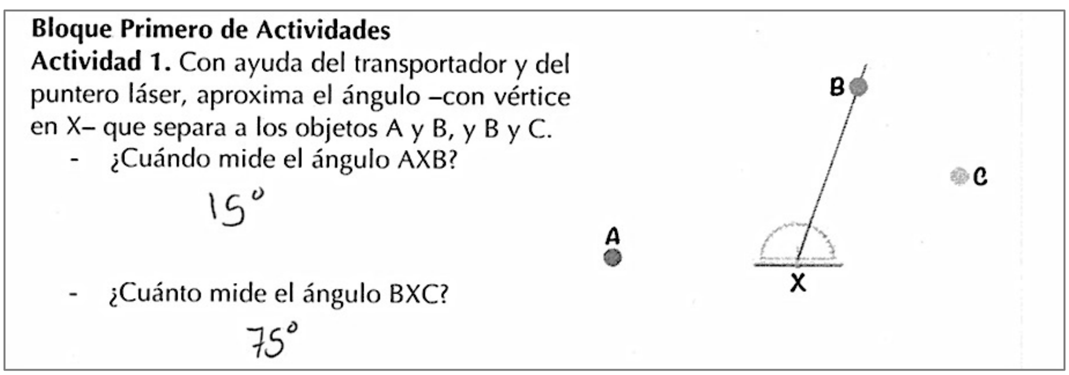
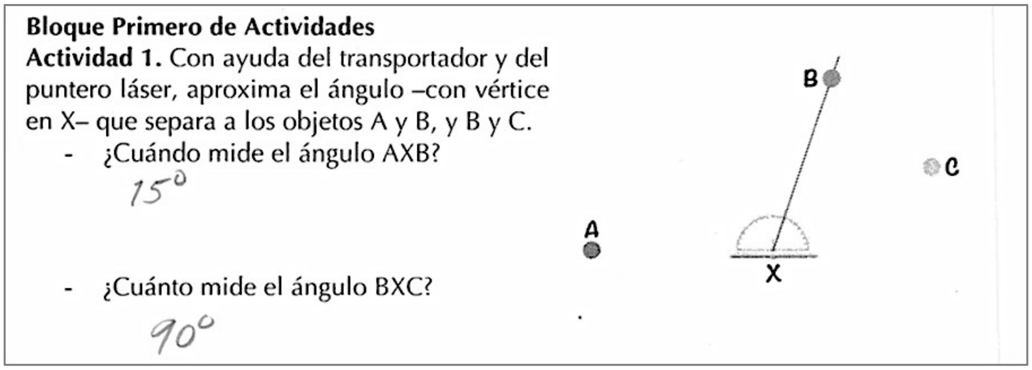

Bloque Primero de Actividades
Actividad 1. Con ayuda del transportador y del puntero láser, aproxima el ángulo –con vértice en X– que separa a los objetos A y B, y B y C.
- ¿Cuándo mide el ángulo AXB?
  15°
- ¿Cuánto mide el ángulo BXC?
  75°

Figura 65. Actividad 1 – Alumno 1

El resto de participantes, reporta 90º como la medida el ángulo BXC:


Bloque Primero de Actividades
Actividad 1. Con ayuda del transportador y del puntero láser, aproxima el ángulo –con vértice en X– que separa a los objetos A y B, y B y C.

- ¿Cuándo mide el ángulo AXB?
  15°
- ¿Cuánto mide el ángulo BXC?
  90°

***Figura 66*. Actividad 1 – Alumno 3**

Pese a esta discordancia, como veremos en las actividades posteriores, casi todos los estudiantes usan las medidas mencionadas anteriormente, en consecuencia, atribuimos este desacierto a un descuido en la notación y a la forma en que se tomó la medición, ya que –con la intención de ser más eficientes– los estudiantes fijaron 'el cero' del transportador en dirección del objeto A y sin moverlo tomaron la medida de los ángulos AXB y AXC, con el propósito de utilizar esa información para deducir posteriormente las medidas requeridas.

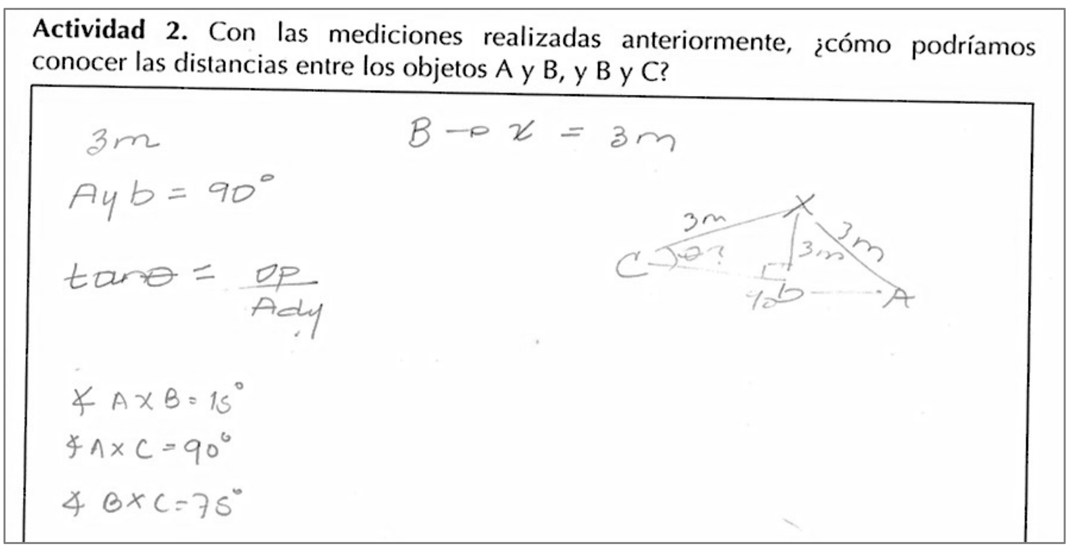
En este punto ubicamos el primer momento de conflicto para los estudiantes, ya que el solicitarles que dejaran sus pupitres y utilizaran instrumentos geométricos para tomar datos de una situación concreta pareció inquietarlos, en primera instancia. Hecho que enfatiza la profesora a cargo en la entrevista final:

> **[Audio1 – 00:59]**
>
> *Profesora* – […] Me gustó la parte práctica, que creo que resultó interesante para ellos, en el sentido…, si usted se fijó, cuando usted les dijo midan, todos ***tenían miedo como de medir***, y eso que era la parte tangible […], porque le apuesto que ellos prefieren irse directo a plantear algo, pero que tuvieran que medir, esa dificultad de alinear el láser hasta poder determinar el ángulo,… como que fue un choque para ellos el usar un instrumento.

En suma, el desarrollo de la actividad hizo patente una generalizada dificultad respecto al uso de instrumentos geométricos, especialmente el transportador; así como cierta inseguridad y descuido para expresar nociones geométricas y sus relaciones, no fue inusual escuchar –como será patente– que se hiciera referencia al ángulo AXB como 'ángulo AB', por ejemplo.

Actividad 2. La segunda actividad de este bloque tiene por objetivo que los participantes exploren diversas estrategias de resolución para la situación problema, con base en los datos dados y los recolectados hasta el momento.

Como principal resultado, ninguno de los participantes propuso ni desarrolló una estrategia que le permitiera obtener una aproximación a las distancias solicitadas. Más aún, aunque se discutió de forma conjunta sobre el uso de algunas herramientas, solo dos estudiantes explicitaron una noción matemática como posible herramienta de solución, la tangente del ángulo:


Actividad 2. Con las mediciones realizadas anteriormente, ¿cómo podríamos conocer las distancias entre los objetos A y B, y B y C?

3m

Ayb = 90°

$\tan\theta = \frac{OP}{Ady}$

$B \to X = 3m$

$\measuredangle AXB = 15°$

$\measuredangle AXC = 90°$

$\measuredangle BXC = 75°$

Figura 67. **Actividad 2 – Alumno 6**

Sin embargo, al cuestionarles sobre el uso de dicha noción, uno de los estudiantes explicita que la *ausencia del triángulo rectángulo* no les permite utilizarla en pro de resolver la situación-problema planteada:

> **[Video1 – 17:27]**
>
> *Facilitador* – ¿Qué están haciendo aquí?… Por aquí hablaron de utilizar tangente, ¿cómo utilizarían la tangente?
>
> *Alumno 1* – ¡Ah! Pero es que, igual, ***no tenemos ángulos rectos***.

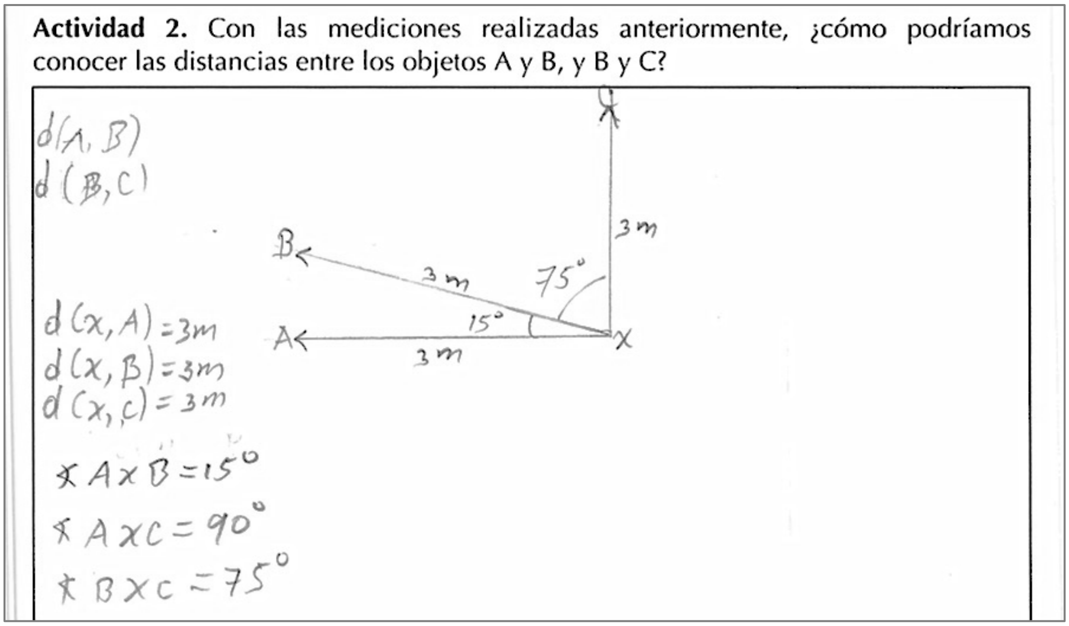
Este es el primer indicio que encontramos de una cierta *dependencia a la explicitación del triángulo rectángulo* como condición a la introducción y uso de algunas nociones matemáticas, en especial las trigonométricas.

Nos encontramos de forma reiterada con este fenómeno a lo largo de toda la implementación de las actividades de aula, sobre todo, en casos donde los participantes intentan forzar la situación con tal de establecer triángulos rectángulos. A manera de ejemplo, en la figura que presenta el mismo Alumno 6 (Figura 67), señala un triángulo rectángulo para el cual la hipotenusa y uno de los catetos miden lo mismo –por dato de partida–.

Al hablar al respecto, la profesora del curso nos comentó:

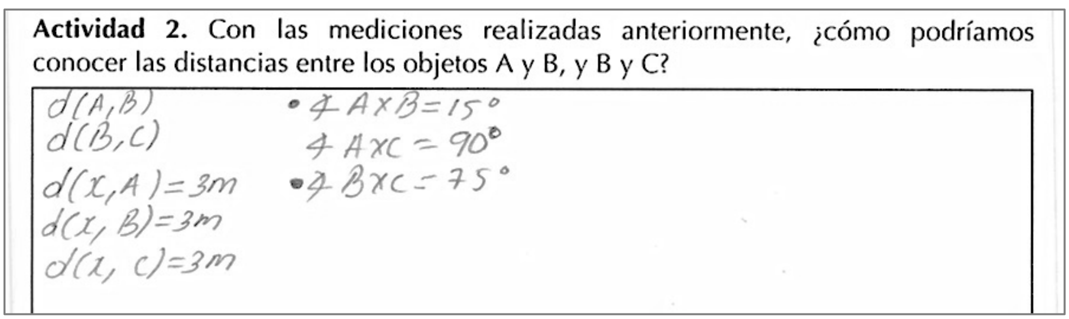
> **[Audio1 – 12:10]**
>
> *Profesora* – Y creo que en parte tenemos la culpa [refiriéndose a los profesores], porque yo les digo, cuando hicimos los problemas, ese día, los primeros problemas con tangente, yo les dije "cuando estén resolviendo un problema, lo que tenemos que tratar de ***identificar es qué triángulo rectángulo es el que se forma***, entonces ustedes lo que tienen que buscar es encontrar el triángulo rectángulo", pues todo lo van a querer acomodar al triángulo rectángulo.

Finalmente, respecto a los elementos que ponen en juego con motivo de la situación-problema, identificamos tres grupos casi equitativos: quienes intentan modelarlo con el uso de triángulos (Figura 66), quienes presentan una interpretación 'cartesiana/vectorial' de la situación (Figura 67), y quienes solo enlistan los datos dados o recolectados (Figura 68).



Actividad 2. Con las mediciones realizadas anteriormente, ¿cómo podríamos conocer las distancias entre los objetos A y B, y B y C?

Figura 68. **Actividad 2 – Alumno 3**



Actividad 2. Con las mediciones realizadas anteriormente, ¿cómo podríamos conocer las distancias entre los objetos A y B, y B y C?

Figura 69. **Actividad 2 – Alumno 5**

La observación relevante al respecto es que, hasta este punto, ninguno de los estudiantes asoció la situación-problema con el círculo y circunferencia.

Actividad 3. La actividad tres pretende, mediante la construcción de un modelo a escala, proveer de una aproximación de referencia para evaluar futuros métodos y respuestas, así como centrar la discusión en los elementos geométricos que intervienen en la situación-problema.

En tres de las guías de trabajo se presentan modelos a escala *ad hoc* a la situación-problema que devienen en aproximaciones acertadas de las distancias solicitadas:

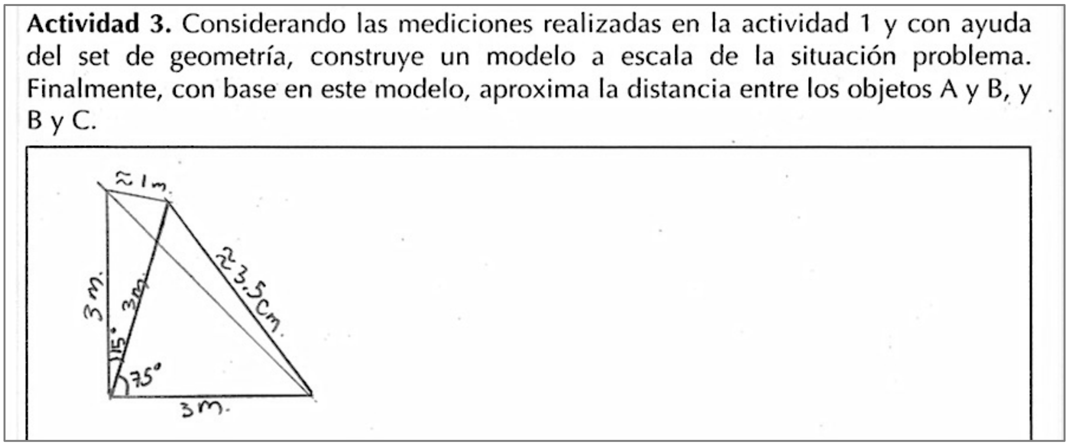

Actividad 3. Considerando las mediciones realizadas en la actividad 1 y con ayuda del set de geometría, construye un modelo a escala de la situación problema. Finalmente, con base en este modelo, aproxima la distancia entre los objetos A y B, y B y C.

Figura 70. **Actividad 3 – Alumno 1**

En las cuatro restantes, no se incluyen modelos correspondientes con las características de la situación-problema en cuestión, en consecuencia, las aproximaciones que reportan –en los casos que lo hacen– no son cercanas a las esperadas:

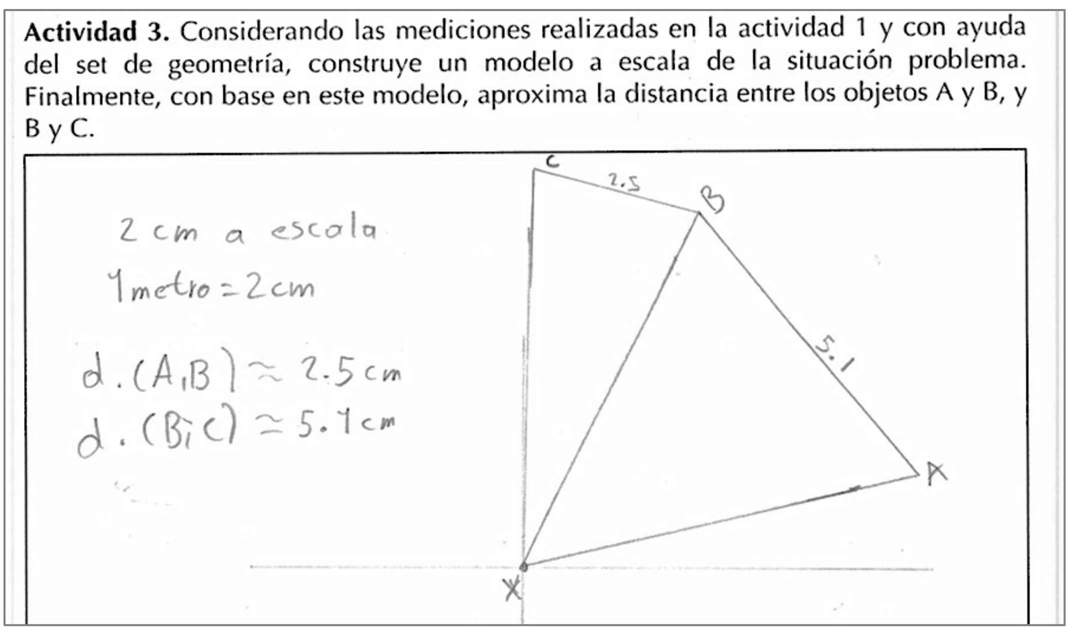

Actividad 3. Considerando las mediciones realizadas en la actividad 1 y con ayuda del set de geometría, construye un modelo a escala de la situación problema. Finalmente, con base en este modelo, aproxima la distancia entre los objetos A y B, y B y C.

Figura 71. **Actividad 3 – Alumno 7**

Tres de los participantes de este último grupo, utilizan el espacio designado a esta actividad para construir –de forma conjunta– una estrategia particular de resolución a la situación-problema:

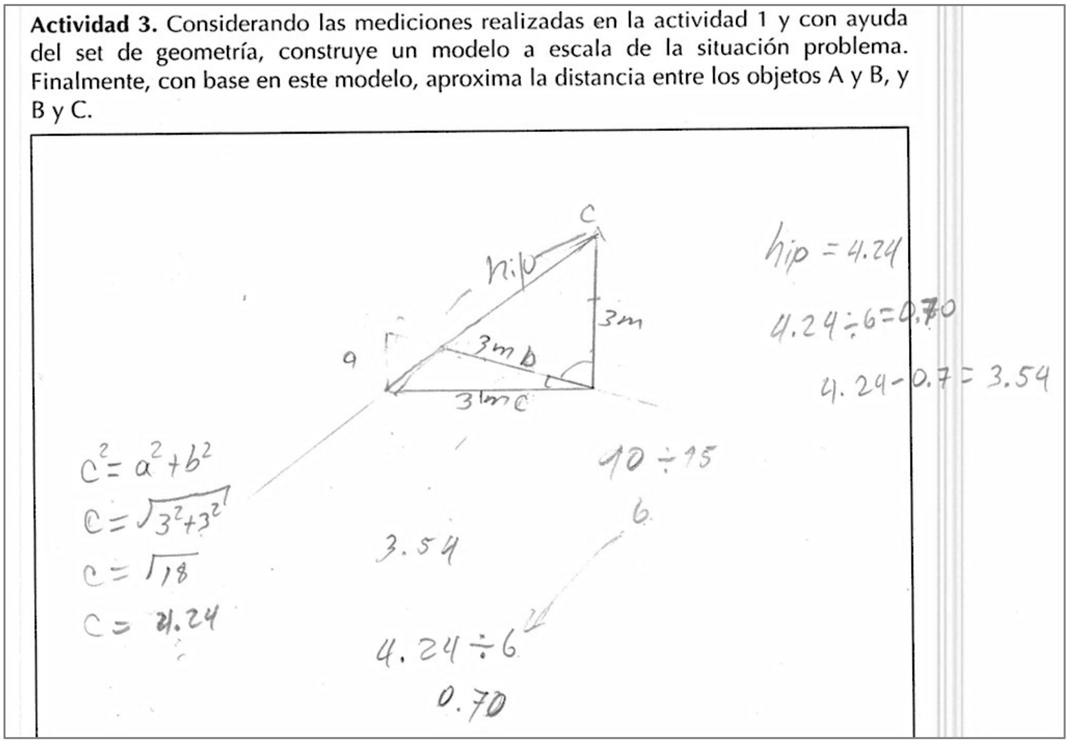


Figura 72. **Actividad 3 – Alumno 3**

Al ser cuestionados sobre su estrategia, uno de los estudiantes del grupo argumenta:

[Video2 – 14:25]

Facilitador – ¿Cómo ingeniamos un método para calcular la distancia entre B y C? […] ¿cómo lo harían?, ¿qué creen?

Alumno 1 – La distancia de aquí a aquí –señalando los objetos A y B, con ayuda de un puntero laser– ***va a ser un sexto de la distancia de C a A***.

Facilitador – ¿Por qué sería un sexto?

Alumno 1 – Porque el ángulo aquí –señalando los objetos A, X y B– es 15, ¿verdad?, de aquí a aquí, el ángulo que se forma es 15. Y el ángulo de aquí a aquí –señalando los objetos C, X y A– es 90, que ***sería seis veces mayor*** que el de aquí a aquí –señalando nuevamente los objetos B, X y A–.

Con base en lo expuesto en las guías de trabajo y sus explicaciones, podemos sintetizar la estrategia así: los estudiantes emparejan la situación-problema con el modelo de un triángulo rectángulo; además, parten de la hipótesis de que si el ángulo AXC (cuya medida es 90º) 'es seis veces mayor' que el ángulo AXB (cuya medida es 15º), entonces, la distancia entre los objetos A y C 'también debería ser seis veces mayor' que la distancia entre A y B; así, calculando la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo construido y dividiéndola por seis, calculan la distancia entre los objetos A y B; finalmente, calculan los cinco sextos de la longitud de la hipotenusa, la cual representa –según su hipótesis– la distancia entre los objetos B y C.

En primera instancia, podemos entrever el aludido fenómeno de *dependencia a la explicitación del triángulo rectángulo*, pues, a pesar de partir de una construcción a escala (como muestran los borrones), los estudiantes deciden obviar la equidistancia de los objetos al punto X –dada como dato– en pro de introducir el triángulo rectángulo como modelo de la situación-problema. Además, la hipótesis introducida, eje central de la estrategia, refleja de forma nítida el *significado lineal* que se asocia a la relación ángulo-longitud en el triángulo bajo el tratamiento escolar actual.

Más aún, llama la atención que al someter a discusión la estrategia presentada, la mayoría de los participantes advirtió que esta dejaba de lado una de las condiciones iniciales de la situación-problema, la equidistancia de los objetos al punto X; sin embargo, nadie señaló la hipótesis aludida como un desacierto.

Finalmente, uno de los participantes que reporta un modelo geométrico *ad hoc* a la situación-problema planteada, agrega al mismo un par de signos que señalan la existencia de un par de ángulos rectos, al mismo tiempo, agrega una figura extra, que si bien está compuesta por triángulos rectángulos, obvia la equidistancia de los objetos al punto X, hecho del que el estudiante parece percatarse:

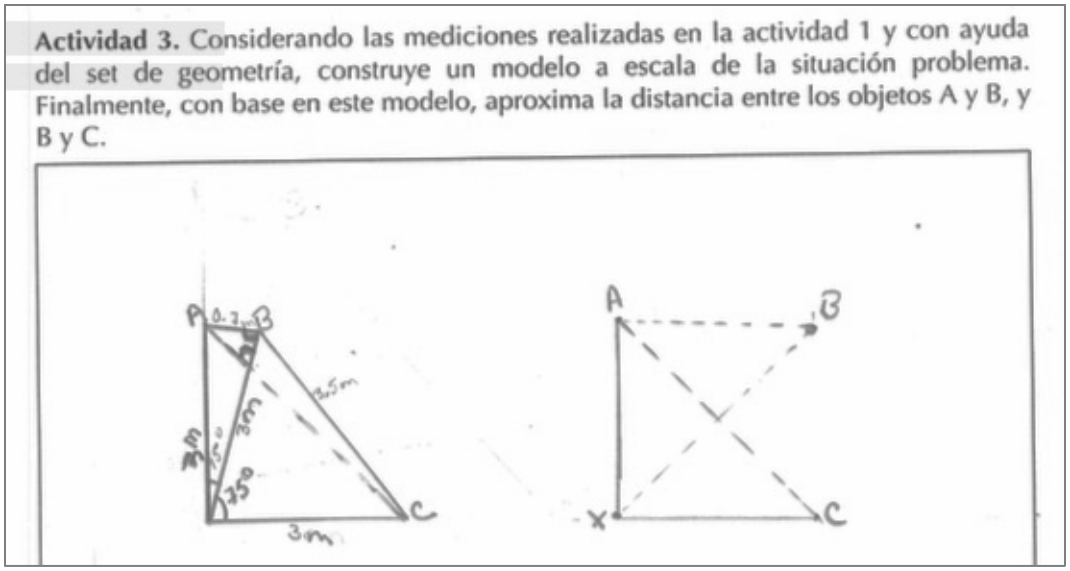


Figura 73. **Actividad 3 – Alumno 4**

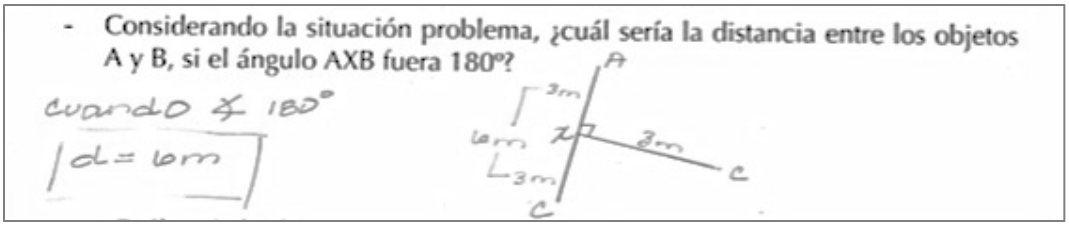
En suma, como resultado de esta actividad, advertimos la influencia del fenómeno de *dependencia a la explicitación del triángulo rectángulo* y del *significado lineal* asociado a la relación ángulo-longitud en el triángulo; además, observamos que –de forma general– existe un descuido de las unidades de medida y del uso de notación matemática para los elementos que intervienen en los modelos geométricos construidos.

Bloque segundo de actividades: análisis de las relaciones

Actividad 1. Como hemos expresado en la etapa de diseño, las actividades 1, 2 y 3 de este segundo bloque son muy cercanas en cuanto a estructura y propósito. Así, cada una de estas actividades está compuesta por tres secciones (A, B y C), en tanto conjuntos de preguntas y/o incisos, y cada una de estas secciones responde a objetivos particulares.

La sección inicial de estas tres actividades, compuesta únicamente por la interrogante primera, tiene como objetivo específico centrar la atención en una relación ángulo-cuerda particular, para el caso de la actividad 1, la cuerda subtensa por un ángulo central de 180º.

Todos los participantes coincidieron en que si dos objetos se encuentran a 3 metros de un punto X y el ángulo central que los separa mide 180º, la distancia entre dichos objetos es 6m. La justificación de esta afirmación radica en que un ángulo central de 180º asegura la linealidad de los lados del ángulo:

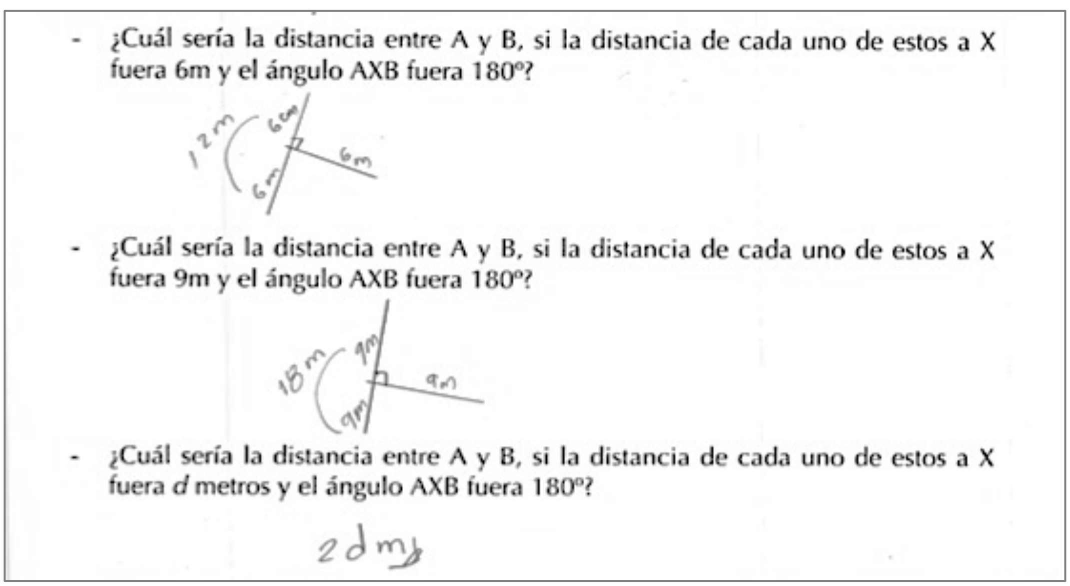


- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 180º?

cuando ∡ 180°
$\boxed{d = 6m}$

Figura 74. **Actividad 1, Sección A – Alumno 6**

La segunda sección, compuesta por las preguntas segunda, tercera y cuarta, tiene por objetivo acentuar la naturaleza proporcional de la relación radio-cuerda en el caso particular estudiado. Para la actividad 1 de este bloque, todos los participantes fueron capaces de identificar y justificar la naturaleza proporcional de la relación radio-cuerda cuando la medida del ángulo central es siempre 180º, así como de generalizar la longitud de la cuerda cuando el radio mide *d metros*:



- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 6m y el ángulo AXB fuera 180º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 9m y el ángulo AXB fuera 180º?

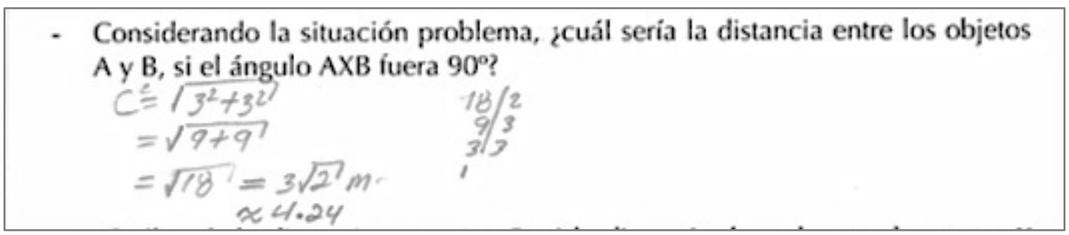
- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera *d* metros y el ángulo AXB fuera 180º?

2dm

Figura 75. **Actividad 1, Sección B – Alumno 2**

Finalmente, la tercera sección de las actividades 1, 2 y 3, compuesta por las cuestiones cinco y seis, apuntan al estudio de la naturaleza no proporcional de la relación ángulo-cuerda, relativa al caso particular de estudio. Ante esta sección, en el caso particular de la actividad 1, ningún estudiante dio una respuesta concreta en la guía de trabajo y, si bien en la discusión coincidieron en la naturaleza no proporcional de la misma, no se esbozó algo cercano a una justificación de este hecho.

Actividad 2. El caso particular de interés para esta actividad es cuando el ángulo central mide 90º. Así, en la primera actividad –de manera semejante a la actividad anterior– todos los estudiantes coincidieron en que, si dos objetos que se encuentran a 3 metros de un punto X y su ángulo de separación mide 90º, la distancia entre dichos objetos es aproximadamente *4.24m* (o *3√2 m*). La justificación de esta afirmación –también unánime– es que un ángulo central de 90º asegura la existencia de un 'triángulo rectángulo', lo que implica que la distancia entre los objetos en cuestión puede ser calculada 'fácilmente' mediante el teorema de Pitágoras:



- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 90º?

$C = \sqrt{3^2+3^2}$

$= \sqrt{9+9}$

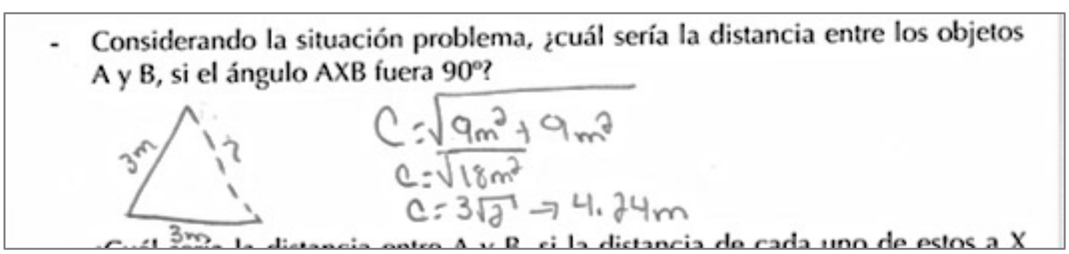
$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ m$

≈ 4.24

18 | 2
9 | 3
3 | 3
1

Figura 76. **Actividad 2, Sección A – Alumno 5**

Una observación relevante para esta actividad y sección es que, si bien todos calcularon correctamente la distancia entre los objetos A y B para el caso propuesto, de las guías de trabajo que acompañan sus respuestas con figuras, ninguna se corresponde con la situación-problema, ya que no simbolizan ni constituyen triángulos rectángulos en sentido estricto (Figura 76) o no se corresponden con las características de la situación-problema (Figura 77).



- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 90º?

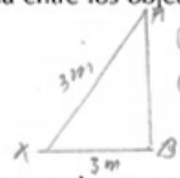
$C: \sqrt{9m^2+9m^2}$

$C: \sqrt{18m^2}$

$C: 3\sqrt{2} \rightarrow 4.24m$

Figura 77. **Actividad 2, Sección A – Alumno 4**

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 90º?



$c = \sqrt{9m^2 + 9}$

$c = \sqrt{18}$

$c = 3\sqrt{2}$

≈ 4.24

Figura 78. **Actividad 2, Sección A – Alumno 3**

Esto, en primera instancia, podemos asociarlo con el carácter accesorio que se le concede a las construcciones geométricas, fruto de la centración en los procesos numéricos-algebraicos que promueve el discurso Matemático Escolar actual.

Por otro lado, con relación a la segunda sección de esta actividad, y de forma homóloga a lo sucedido en la actividad anterior, todos los participantes fueron capaces de identificar la naturaleza proporcional de la relación que se establece entre el radio y la cuerda subtensa cuando la medida del ángulo central se mantiene en 90º, así como de generalizar la longitud de la cuerda cuando el radio mide *d metros*:

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 6m y el ángulo AXB fuera 90º?

$\sqrt{72}$ m

$6\sqrt{2}$ m

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 9m y el ángulo AXB fuera 90º?

$\sqrt{162}$ m

$9\sqrt{2}$ m

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera *d* metros y el ángulo AXB fuera 90º?

$\sqrt{2(d^2)}$ m

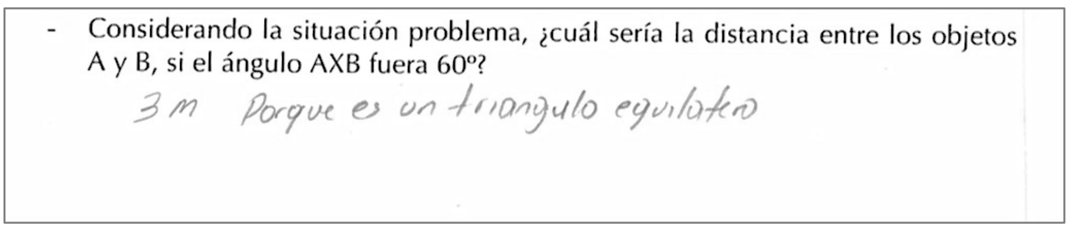
$d\sqrt{2}$ m

Figura 79. **Actividad 2, Sección B – Alumno 1**

Finalmente, respecto a la tercera sección de esta actividad, se obtuvo un fenómeno similar a la sección correspondiente en la actividad anterior: ninguna respuesta registrada en las guías de trabajo y una escueta discusión al respecto, a pesar de las preguntas generales y dirigidas del facilitador del taller.

Actividad 3. El caso particular de interés para la actividad 3 de este bloque es cuando el ángulo central se mantiene constante y mide 60º. Así, y de forma similar a las dos actividades anteriores, todos los estudiantes coincidieron en que si dos objetos se encuentran a 3 metros de un punto X y el ángulo central que los separa mide 60º, la distancia entre dichos objetos es *6 m*.

La justificación de esta afirmación radica en que, bajo las condiciones aludidas, se asegura la configuración de un 'triángulo equilátero':

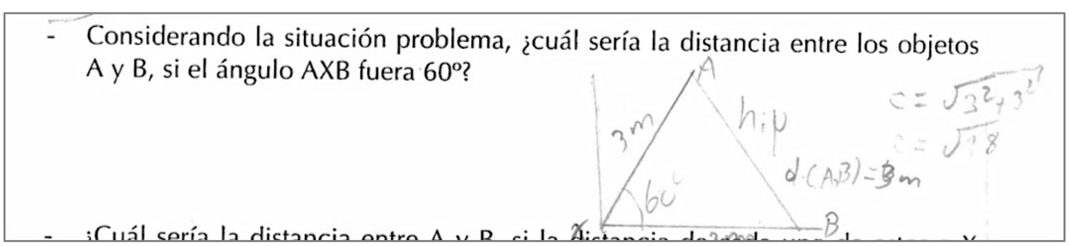


- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 60º?

3 m Porque es un triangulo equilatero

Figura 80. **Actividad 3, Sección A – Alumno 5**

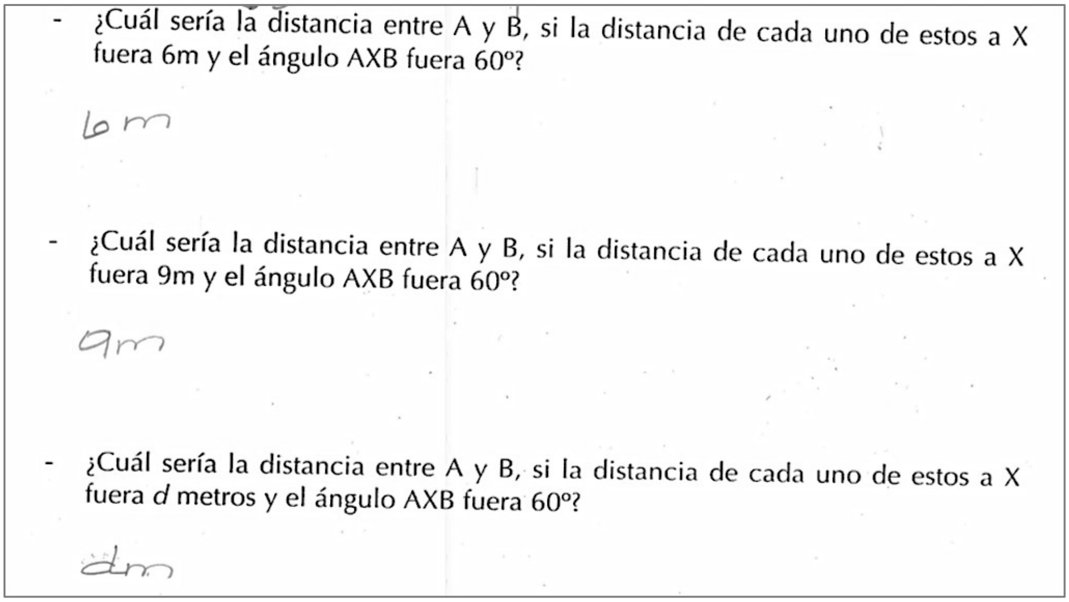
Además, advertimos que uno de los participantes evidencia haber intentado resolver la situación mediante el uso del teorema de Pitágoras, a pesar de hacer explícitas en la figura condiciones de la situación-problema que no compaginan con dicho método:



- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 60º?

Figura 81. **Actividad 3, Sección A – Alumno 3**

Por otro lado, respecto a la segunda sección de la actividad 3, todos los participantes fueron capaces de reconocer la naturaleza proporcional de la relación que se establece entre el radio y la cuerda subtensa cuando la medida del ángulo central es siempre 60º, así como de generalizar la longitud de la cuerda cuando el radio mide *d metros*:



- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 6m y el ángulo AXB fuera 60º?

6m

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 9m y el ángulo AXB fuera 60º?

9m

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera *d* metros y el ángulo AXB fuera 60º?

dm

***Figura 82*. Actividad 3, Sección B – Alumno 6**

Finalmente, los resultados de la tercera y última sección de esta actividad no fueron diferentes a los obtenidos en las actividades anteriores.

Actividad 4. A diferencia de las primeras tres actividades de este bloque, centradas en el estudio de casos particulares, esta tiene por objetivo la construcción de dos métodos geométricos que sean de ayuda para ampliar los pares ángulo-cuerda conocidos y consta de dos secciones (A y B) con propósitos específicos.

La primera sección, compuesta por las interrogantes primera y segunda, apunta a la construcción de un método de cálculo para la cuerda subtensa por el ángulo mitad de un ángulo central cuya cuerda se conoce.

La reflexión entre estudiantes y la discusión en conjunto permitieron que uno de los grupos espontáneos de trabajo construyera un método con las características descritas:

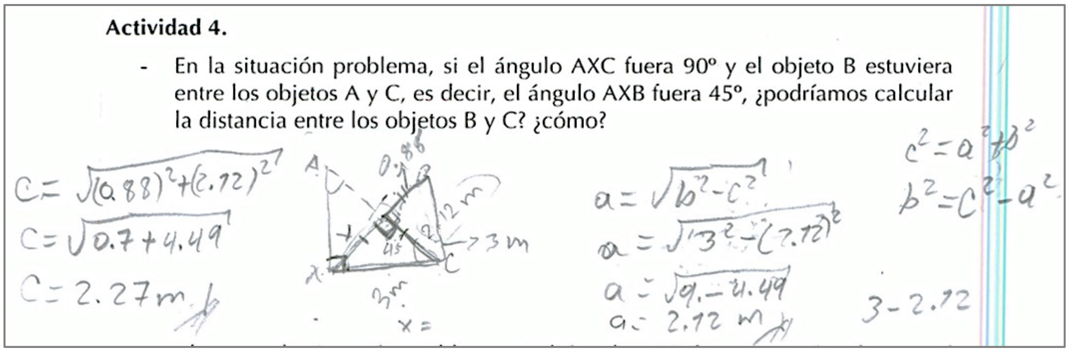


Figura 83. **Actividad 4, Sección A – Alumno 3**

Al cuestionársele sobre el funcionamiento del método, uno de los alumnos del equipo pasa al pizarrón y expone:

[Video2 – 28:40]

Alumno 3 – Lo que yo decía era que, es que aquí, lo que tendríamos de hacer primero es sacar esta medida –refiriéndose a la distancia entre C y el pie de la perpendicular a la 'hipotenusa' desde el punto X–, dividir el triángulo, todo este triángulo, en dos, obtendríamos que de aquí a aquí tiene 3 –distancia XC–, de aquí a aquí tiene 3 –distancia XA–, entonces si lo dividimos en dos, sacaríamos… con el teorema de Pitágoras obtendríamos que de aquí a aquí –de A a C– tenemos que es 4.24, ¿verdad? [cuerda calculada en la actividad 1] y si la… si esta altura lo divide en dos, aquí quedaría como 2.12, entonces esta medida, de aquí a aquí –de C al pie de la perpendicular– mide 2.12 y de aquí a aquí –distancia AC– mide 3, entonces con el teorema de Pitágoras obtendríamos… ¿quién puede sacar allí el resultado?

Facilitador – Solo allí, solo allí…

Alumno 3 – Entonces, el resultado que obtendríamos con el teorema de Pitágoras, con esta –distancia AC– y esta medida –distancia de C al pie de la perpendicular– que conocemos, sería de aquí a aquí –de X al pie de la perpendicular–, entonces, y si todo esto mide 3 –distancia AB–, el resultado que obtendríamos de aquí a aquí –distancia de X al pie de la perpendicular–, se lo restaríamos a 3, sería esta medida que tendríamos acá –la distancia entre B y el pie de la perpendicular–.

Finalmente, otro de los integrantes del grupo alude nuevamente al uso del teorema de Pitágoras para, a sabiendas de las distancias entre C y el pie de la perpendicular, y entre B y el pie de la perpendicular, calcular la distancia que separa a B y C, esto es, la cuerda subtensa por la mitad del ángulo cuya cuerda se conocía.

Explicado el método, la discusión se centró sobre los casos y las condiciones que aseguran que la perpendicular a AC desde el punto X corta a AC en el punto medio, hipótesis de partida en el método construido:

[Video3 – 8:48]

Facilitador – Vean que ahora, qué pasaría, por ejemplo, si este ángulo –refiriéndose al ángulo AXC–, ¿qué pasaría si este ángulo no fuera 90º, sino que fuera otro ángulo cualquiera? Por ejemplo, si fuera 60º, ¿qué pasa si este ángulo es 60º, podemos con el mismo método, calcular este de aquí –refiriéndose al ángulo AXB, de 30º?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué? […]

Varios – [Desacuerdo]

Facilitador – ¿No?, ¿por qué no? o ¿sí?, ¿por qué?

Alumno 3 – Yo creo que sí, porque siempre trazaríamos la altura y siempre se nos formarían ángulos de 90 –aludiendo a la intercepción entre la 'hipotenusa' AC y el segmento XB–.

Facilitador – ¿Siempre se formarían aquí ángulos de 90? Ese es análisis que tenemos que hacer, recuerden que el método funciona si estos cuatro son rectos –refiriéndose a los ángulos que se forma por la intersección de los segmentos AC y XB–. Si este es de 60 –el ángulo AXC– y lo divido en dos partes, ¿estos son rectos otra vez?, ¿sí, no, … por qué?

Alumno 1 – Si todo es de 60 y lo dividís así… perdón, en dos partes, sí, serían rectos siempre, el problema es, por ejemplo, aquí ve –haciendo alusión a la situación-problema–, que no lo dividís por la mitad. O sea, ***dividiéndolo a la mitad, sí, siempre te van a quedar ángulos rectos allí en el centro***.

Finalizan las tres horas programadas para el taller con la explicación de porqué solo cuando se divide el ángulo a la mitad es que podemos asegurar que los segmentos AC y XB se cortan perpendicularmente y en el punto medio del segmento AC, en el marco de la configuración geométrica de la situación-problema.

Algunos estudiantes discuten sobre la posibilidad de adecuar el método construido para situaciones donde las medidas de los ángulos AXB y BXC no son iguales, como la situación-problema original. Mientras que el resto de participantes –cuatro, para ser precisos– se percata de la utilidad de este método para la resolución parcial de la situación-problema y calculan la cuerda subtensa por un ángulo central de 15º:

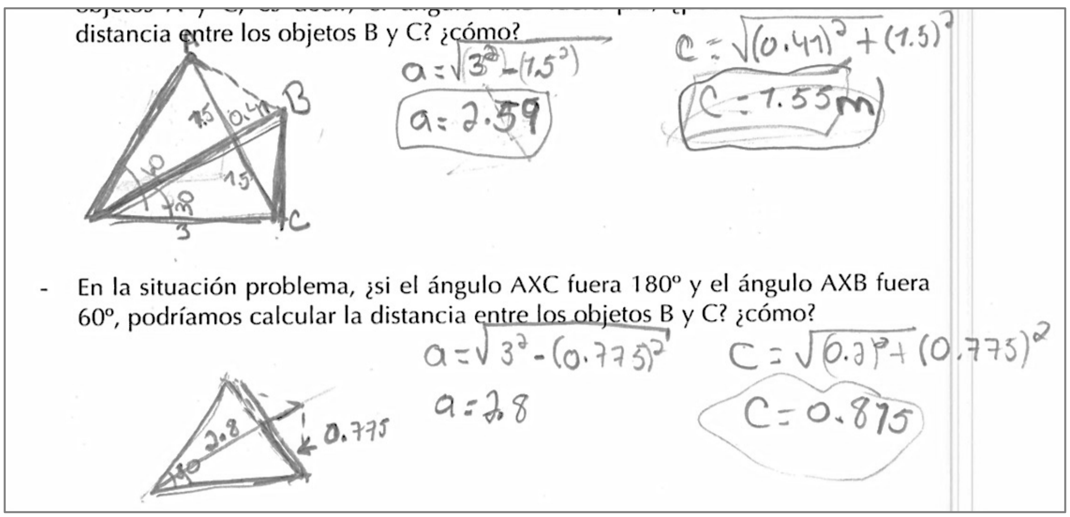


Figura 84. **Cálculo de la cuerda subtensa por un ángulo central de 15º – Alumno 4**

5.4. Análisis y conclusiones

Para la interpretación de los resultados obtenidos en la implementación de las actividades de aula, partimos de la perspectiva teórica asumida –especialmente el modelo de anidación de prácticas (Figura 14)– y de la problemática delineada respecto a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las nociones trigonométricas.

Así, utilizamos las preguntas *qué hace*n y *como lo hacen*, con el objetivo de acercarnos a las *acciones* directas sobre los objetos que realizan los participantes, así como a las herramientas que movilizan con motivo de las mismas. Además, empleamos la cuestión para qué lo hacen con la intención de identificar el propósito de sus *acciones*, que de forma general coincide con el objetivo con el cual fue diseñada la actividad.

Presentamos los resultados de este análisis de acuerdo con los bloques, actividades y secciones que conforman las actividades de aula implementadas:

Bloque primero de actividades: situación-problema

Actividad 1. A causa de la actividad 1 del bloque primero de actividades, identificamos que los estudiantes comparan, aproximan, miden la medida de los ángulos AXB y BXC con ayuda de los instrumentos geométricos facilitados.

Esta actividad, en tanto insta a los estudiantes a hacer uso de instrumentos geométricos para medir, acción que –como advierte nuestra problemática– no se ve involucrada en el estudio de las nociones trigonométricas, ni siquiera en los denominados 'ejercicios de aplicación' (Figura 6), constituye un primer momento de confrontación con el discurso Matemático Escolar asociado a la Trigonometría.

Actividad 2. Por otro lado, en la actividad 2 del este bloque, reconocemos que los participantes construyen figuras y/o listas que engloban los datos de la situación-problema e introducen nociones matemáticas (fórmulas, definiciones, etc.) asociadas a dichos elementos.

Si bien el propósito explícito de esta actividad es calcular, identificamos en ella un segundo momento de confrontación con el discurso, ya que, tal como indica nuestra problemática, si bien el uso técnico y el significado aritmético dominan el tratamiento escolar de las nociones trigonométricas, estos evidencian ser insuficientes para enfrentar situaciones que no son reducibles al cálculo de un valor faltante, ya que no explicitan en su configuración inicial triángulos rectángulos o no proporciona de manera inmediata todos los datos necesarios para ello.

Esta situación orilló a los participantes a una constante búsqueda e introducción de triángulos rectángulos –incluso ignorando datos de partida– y produjo el estancamiento momentáneo de los estudiantes que 'propusieron' la tangente como herramienta de resolución.

Actividad 3. Finalmente, con relación a la actividad 3 del bloque primero de actividades, identificamos que los participantes aproximan las distancias existentes entre los objetos A y B, y entre B y C. Para ello, construyen un modelo a escala de la situación problema y escalan las medidas de interés.

Esta tercera actividad también fungió como un momento inicial de confrontación, ya que requiere de procesos de construcción geométrica que, dada la aludida separación entre el estudio de trigonometría y la geometría, acarrea diversas dificultades. Esta actividad también nos permitió advertir –de forma nítida– el significado lineal asociado a la relación ángulo-distancia en el triángulo rectángulo.

En suma, este primer bloque de actividades representó una etapa de confrontación dentro de la situación-problema diseñada, ya que requería de procesos de medición, cálculo y construcción geométrica excluidos del estudio de la trigonometría bajo el discurso Matemático Escolar actual. En consecuencia, nos ha permitido evidenciar que los participantes no son ajenos al fenómeno de

Aritmetización de la Trigonometría y, más importante aún, provocar una verdadera necesidad por estudiar y describir la relación entre los ángulos centrales que se tienen como dato y sus cuerdas, en pro de resolver la situación-problema planteada.

Bloque segundo de actividades: análisis de las relaciones

Dada la similar estructura e intención de las primeras tres actividades de este bloque, presentamos su análisis en conjunto.

Actividades 1, 2 y 3. En la primera sección de estas actividades, compuesta únicamente por la interrogante primera, observamos que los participantes establecen pares ángulo-cuerda particulares (las cuerdas subtensas por ángulos centrales de 180º, 90º y 60º, respectivamente). Para ello, utilizan una propiedad 'básica' de la configuración geométrica determinada en cada caso, como argumento de un proceder numérico, aritmético y/o algebraico.

En la segunda sección de estas actividades, advertimos que los participantes reflexionan sobre la naturaleza de la relación radio-cuerda. Para ello, construyen, comparan e identifican regularidades en pares radio-cuerda particulares.

Finalmente, durante la tercera sección de estas actividades, los estudiantes reflexionan sobre la naturaleza de la relación ángulo-cuerda. Para ello, comparan los pares ángulo-cuerda particulares establecidos previamente.

En suma, después del momento de confrontación anterior, y a pesar de evidenciar algunas dificultades particulares como el uso impropio del teorema de Pitágoras, durante las actividades 1, 2 y 3 de este segundo bloque, los participantes comienzan a esbozar figuras geométricas, a asociar nociones matemáticas a cada caso y a poner en funcionamiento los elementos, propiedades y relaciones de las mismas en pro de establecer pares radio-cuerda y ángulo-cuerda, lo que –mediante comparación– les permite analizar la naturaleza de cada una de las relaciones en cuestión.

Actividad 4. Con relación a esta actividad, última actividad realizada por las razones aludidas previamente, identificamos que los estudiantes construyen un primer método geométrico con el fin de ampliar la cantidad de pares ángulo-cuerda conocidos. Para ello, modelan la situación mediante figuras geométricas, le asocian nociones matemáticas particulares y articulan los elementos y propiedades de las mismas en pro de establecer un puente entre los pares ángulo-cuerda conocidos y los buscados.

Como hemos enfatizado en nuestra historización, la construcción de métodos geométricos que permitan ampliar sistemáticamente la cantidad de pares ángulo-cuerda conocidos es otra de las actividades indispensable para describir cuantitativamente la relación que se establece entre un ángulo y las distancias que este subtiende.

En consecuencia, advertimos en esta actividad un segundo indicio del proceso de resignificación de las nociones trigonométricas, ya que los estudiantes evidencian poner en juego nociones geométricas –como el punto medio, la perpendicularidad y el triángulo rectángulo, así como sus elementos, propiedades y vínculos– en pro de establecer nuevas relaciones geométricas que sean útiles para el cálculo de los pares ángulo-cuerda deseados; esto es, de realizar trabajo geométrico sobre dichas nociones matemáticas –usarlas como herramientas de construcción, de planteamiento de conjeturas y de cálculo– en pro de resolver parcialmente la medición indirecta de distancias planteada.

A manera de conclusión, el primer bloque de actividades de aula implementadas fungió como un momento de confrontación con el discurso Matemático Escolar vigente, en particular con el fenómeno de Aritmetización de la Trigonometría que este promueve.

En consecuencia, permitió evidenciar los fenómenos identificados en nuestra problemática y algunos imprevistos como la dependencia a la explicitación del triángulo rectángulo, pero más importante aún, este primer bloque de actividades, mostró la insuficiencia de las estrategias y significados asociados a las nociones trigonométricas bajo el tratamiento escolar actual para enfrentar situaciones como la medición indirecta de distancias, creó la necesidad de estudiar y entender la naturaleza de la relación ángulo-cuerda para así poder atender la situación-problema; esto es, en términos de nuestra teoría, puso a los participantes en situación de aprendizaje (Cantoral, 2013).

Por su parte, el segundo bloque de actividades nos dio evidencia de que la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo constituye, en presencia del trabajo geométrico sobre nociones como el triángulo rectángulo y la proporcionalidad, un espacio adecuado para comenzar el proceso de resignificación de las nociones trigonométricas mediante su uso. Además, nos dio indicios del trascendental papel que juegan actividades como medir, comparar, construir, conjeturar y calcular en dichos procesos de confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas.

6. Resultados

La vida no es la que uno vivió,

sino la que recuerda y cómo la recuerda para contarla.

Gabriel García Márquez

Ubicamos los resultados y aportes de nuestra investigación en tres grandes apartados o categorías: los referentes a la disciplina, a la teoría y a la línea de investigación en la cual está adscrita la misma.

El principal aporte a nivel de disciplina, son los resultados de la problematización de las nociones trigonométricas llevada a cabo. Así, en primer lugar, con relación a la historización de las nociones trigonométricas, específicamente como resultado del análisis contextual, advertimos que, producto de la imperante necesidad por construir un modelo capaz de explicar y anticipar los hechos astronómicos empíricos, y que además fuese consistente con los hechos astronómicos ideológicos de la época –que se articulan bajo la cosmovisión aristotélica del universo–, se enfrentó la necesidad de medir indirectamente distancias en el contexto del círculo.

En consecuencia, postulamos a la ***medición indirecta de distancia en el contexto del círculo*** como la situación que hace necesaria la descripción sistemática y cuantitativa de la relación existente entre un ángulo central y las distancias que este subiente, la construcción social de las nociones trigonométricas.

Por otro lado, el análisis textual llevado a cabo sobre el *Almagesto*, nos permitió observar que para lograr su cometido –describir de forma sistemática y cuantitativa la relación ángulo-cuerda– Ptolomeo heredó al menos tres herramientas fundamentales:

la geometría axiomática deductiva griega, condensada en la obra maestra de Euclides; el sistema numérico y los métodos aritmético-algebraicos de las civilizaciones mesopotámicas; y una noción cuantitativa del ángulo, operacional mediante una unidad de medida de la amplitud.

Dadas estas herramientas, Ptolomeo está en condiciones de tomar nociones geométricas como ***el círculo***, ***el triángulo rectángulo*** y ***la proporcionalidad***, así como sus elementos, propiedades y relaciones, para ponerlas en funcionamiento como ***herramientas de construcción***, donde le permiten introducir y construir objetos geométricos; como ***herramientas teóricas***, útiles para establecer propiedades y relaciones entre los objetos geométricos introducidos y construidos previamente; y como ***herramientas aritmético-algebraicas***, indispensables para calcular los pares ángulo-cuerda deseados.

En otro orden de ideas, respecto a la dialectización de las nociones trigonométricas, esta nos permitió confrontar los resultados de nuestra historización, especialmente la hipótesis aludida, con un escenario didáctico. Así, construimos un conjunto de actividades de aula con base en nuestra hipótesis, procurando fuera adecuada a la población y escenario de implementación.

Como resultados de esta etapa, evidenciamos algunos fenómenos producto del discurso Matemático Escolar asociado a la trigonometría, entre ellos la dependencia a la explicitación del triángulo rectángulo, el carácter netamente ilustrativo atribuido a las figuras, estrategias lineales asociadas a la relación ángulo-longitud, así como algunas dificultades particulares en la construcción geométrica y en el uso de los instrumentos geométricos y la notación matemática.

Más aún, esta fase nos dio indicios de que el uso de las nociones trigonométricas en situaciones de medición de distancias en el contexto del círculo constituye un escenario adecuado para confrontar el significado lineal y aritmético asociado a las mismas, así como para promover su resignificación mediante su uso.

Asimismo, nos hizo consientes del trascendental papel que juegan las actividades de medición, construcción, comparación, planteamiento de conjeturas y cálculo durante el proceso.

En suma, la problematización de las nociones trigonométricas llevada a cabo nos permitió plantear como hipótesis que la *medición indirecta de distancias en el contexto del círculo* constituye un espacio adecuado para confrontación el fenómeno de Aritmetización de las Trigonometría y resignificar las nociones trigonométricas mediante el uso. Además, nos dio evidencia empírica de que el *trabajo geométrico* –como sinergia de los usos aludidos– sobre nociones geométricas como el *círculo*, el *triángulo* rectángulo y la *proporcionalidad*, así como sus elementos, propiedades y relaciones, constituye una alternativa viable para hacerlo.

El principal aporte a nivel de teoría es el esbozo de un esquema metodológico, con base en el análisis cualitativo de contenido, útil para el estudio de las circunstancias socioculturales, los usos y significados germinales de una noción matemática particular; esto es, de una propuesta metodológica para los estudios histórico-epistemológicos desde la perspectiva que ofrece la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

Dicho esquema –expuesto, justificado y ejemplificado en nuestro trabajo– se puede sintetizar con el siguiente diagrama:

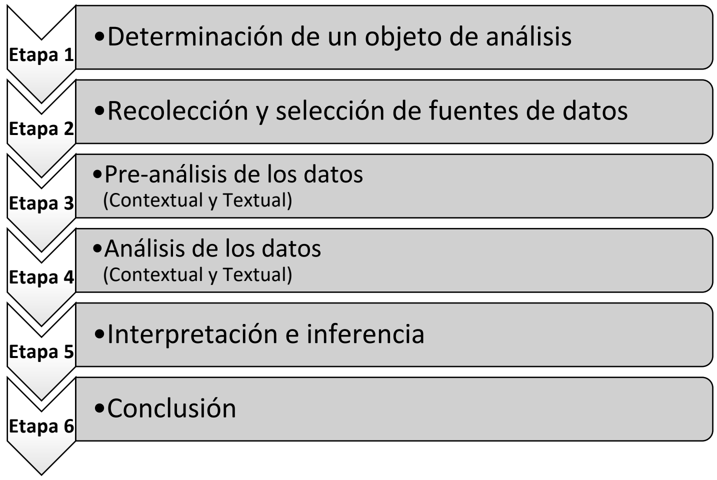


Figura 85. **Esquema metodológico para estudios histórico-epistemológicos, desde la TSME**

Valga la aclaración que, como hemos reiterado en este estudio y de acuerdo con la naturaleza misma de nuestra postura teórica, los objetivos de investigación, el propósito de análisis, las consideraciones teóricas y los antecedentes son los elementos determinantes para las decisiones metodológicas tomadas en el transcurso de un estudio de este tipo, en consecuencia, este esquema no es más que un 'paraguas' metodológico que pretende ser lo suficientemente amplio y flexible para ser de ayuda a futuras investigaciones de este corte.

Finalmente, la principal contribución a nivel de línea de investigación es el estudio detallado de uno de los momentos históricos de construcción social del conocimiento trigonométrico, la cantidad trascendente.

En este sentido, identificamos un contexto natural de significación para la cantidad trascendente, la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo. Además, postulamos al trabajo geométrico, en tanto sinergia de usos, como una estrategia fundamental para confrontar el discurso Matemático Escolar asociado a la Trigonometría, así como para comenzar el proceso de resignificación de las nociones trigonométricas.

Finalmente, dimos evidencia empírica del importante papel que juegan actividades como medir, comparar, construir, conjeturar y calcular en dichos procesos de confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas.

7. Conclusiones

Quizás no se trate del final feliz,
quizás se trate de la historia.
Anónimo

A manera de conclusión, y pretendiendo atender nuestras preguntas iniciales de investigación, consideramos que la problematización de las nociones trigonométricas llevada a cabo nos permitió advertir, en primera instancia, a la *medición indirecta de distancias en el contexto del círculo* como el uso germinal de las nociones trigonométricas, específicamente de la cantidad trascendente.

Además, nos permitió identificar la trascendencia de incorporar nociones geométricas como el círculo, el triángulo rectángulo y la proporcionalidad, así como sus elementos, propiedades y relaciones, en actividades de medición, construcción, comparación, planteamiento de conjeturas y cálculo, donde constituyan herramientas de construcción geométrica, teóricas y aritmético-algebraicas.

En suma, producto de esta investigación, postulamos y confrontamos la hipótesis de que la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo constituye un escenario apropiado para confrontar el significado lineal y aritmético asociado a las nociones trigonométricas bajo el discurso Matemático Escolar vigente, así como para promover su resignificación mediante su uso. Asimismo, tomamos consciencia de la importancia del trabajo geométrico –en tanto sinergia de usos–, sobre nociones geométricas como el círculo, el triángulo rectángulo y la proporcionalidad, para dicho proceso.

8. Prospectivas

(...) parecía que habíamos llegado al final del camino
y resulta que era sólo una curva abierta a otro paisaje y a nuevas curiosidades.
José Saramago

A pesar del gran esfuerzo que implica un estudio de este tipo, como es natural, muchas dudas e interrogantes quedan abiertas a su término. En primer lugar, respecto a los aspectos teóricos y metodológicos del presente estudio, nos parece pertinente ajustar las actividades de aula de tal manera que permitan mayor reflexión y visibilidad de los procesos de construcción y argumentación geométrica.

Por ootro lado, y con relación al ámbito histórico-epistemológico, podemos destacar la necesidad de un estudio detallado de los trabajos de Aristarco e Hiparco, así como de las obras de Ptolomeo que se enmarcan en la cartografía y geografía, ya que con ellos podría ampliarse esta primera descripción de la emergencia de la cantidad trascendente.

Finalmente, en lo tocante al ambito didáctico, nos llama fuertemente la atención la aparente ausencia de situaciones reales en la formación inicial docente en las que se enfrente de forma natural la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo. En consecuencia, consideramos interesante y enriquesedora la posiblidad de construir situaciones de aprendizaje que partan de ambientes cotidianos o profesionales en los que esta práctica sea habitual. Además, nos parece necesario un estudio que, dada la ausencia de análisis sobre la naturaleza particular de las nociones trigonométricas, se ocupe de estudiar las consecuencias de someterlas a un tratamiento algebraico y sobre todo de proponer estrategias para confrontar dicho fenómeno.

Referencias

Aaboe, A. (1964). *Matemáticas: episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo* (A. Linares, Trad.). Colombia: Editorial Norma.

Andréu, J. (2000). Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada. *Fundación Centro Estudios Andaluces, Universidad de Granada*, *10*(2), 1-34.

Apian, P., Bellere, J. y Gemma, F. (1545). *Cosmographia, siue Descriptio vniuersi orbis*.

Araya, A., Monge, A. y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de compresión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *7*(2), 1-31.

Asimov, I. (1975). *El universo* (M. Paredes Larrucea, Trad.). Colombia: Alianza editorial.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1969)

Bressoud, D. (2010a). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, *104*(2), 106-112.

Bressoud, D. (2010b). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, *104*(2), 106-112. (Suplemento 1: Historical Reflections on Teaching Trigonometry: Hipparchus).

Bressoud, D. (2010c). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, *104*(2), 106-112. (Suplemento 2: Historical Reflections on Teaching Trigonometry: Euclid).

Brito, A. y Barbosa, B. (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Horizontes, Bragança Paulista*, *22*(1), 65-70.

Bueno-Ravel, L. y Gueudet, G. (2009). Online Resources in Mathematics, Teachers' Geneses and Didactical Techniques. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14*(1), 1-20. doi: 10.1007/s10758-009-9143-0

Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: Una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas. Individuo y Sociedad*, *2*(1), 53-82.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analítica* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. [promeipn]. (2011, 29 de septiembre). Simposio de Matemática Educativa. Conferencia de Ricardo Cantoral [Archivo de video]. Disponible en https://goo.gl/n7qWsn

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015a). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 5-17. doi: 10.12802/relime.13.1810

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015b). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepestemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9 – 28.

Cavanagh, M. (2008). Trigonometry from a different angle. *The Australian Mathematics Teacher, 64*(1), 25–30.

Chace, A., Bull, L., Manning, H. y Archibald, R. (Eds.). (1927). *The Rhind Mathematical Papyrus. Vol I*. Oberlin, Ohio: Mathematical Association of America.

Chalmers, A. (1990). *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?* (E. Pérez Sedeño y P. López Máñez, Trad.). Madrid: Siglo Veintiuno Editores. (Trabajo original publicado en 1976)

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: Un estudio del discurso Matemático escolar* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Cruz-Márquez, G. y Montiel, G. (2017). Emergencia de las Nociones Trigonométricas en el Almagesto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 981-989.

Cruz-Márquez, G. y Montiel, G. (en prensa). Preliminares trigonométricos en el Almagesto. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *1*(2).

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics*, *16*(2), 19-22.

de Samos, A. (2007). *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*. (M. R. Massa Esteve, Trad.). Cádiz: Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Departamento de Ciencias Matemáticas. (2008). Plan de estudio de la carrera de Profesorado en Matemáticas en el grado de Licenciatura.

DeWitt, R. (2010). *Cosmovisiones. Una introducción a la historia y la filosofía de la ciencia*. (J. Sarret Grau, Trad.). España: Buridán.

Díaz, M., Salgado, G. y Díaz, V. (2010). La transición: grados→ radianes→ reales. Un obstáculo didáctico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *74*, 29-37.

Do Nascimento, A. (2005). Uma seqüência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica (Tesis de maestría no publicada). PUC-SP, Brasil.

Dorce, C. (2006). *Ptolomeo. El astrónomo de los círculos*. Madrid: Nivola.

Espinoza-Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Euclides (1991). *Elementos* (L. Vega, Int.; M. L. Puertas Castaños, Trad.). Madrid: Gredos.

Farfán, R. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería: estudio de caso* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Ginnobili, S. [Santiago Ginnobili]. (2011, 28 de febrero). Eudoxo, Ptolomeo, Copérnico [Archivo de video]. Disponible en https://goo.gl/jCy99M

González, P. (2001). *Pitágoras: el filósofo del número*. Madrid: Nivola.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-141.

Hemenway, P. (2008). *El código secreto: la misteriosa fórmula que rige el arte, la naturaleza y la ciencia*. Evergreen.

Hutchins, R. (Ed.). (1952). The Almagest: I - V. En *Encyclopedia Britannica* (22da edición, Vol. 16, pp. 5-477). Chicago, IL: Encyclopedia Britannica.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Kendal, M. y Stacey, K. (1998). Teaching Trigonometry. *Australian Mathematics Teacher*, *54*(1), 34-39.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. NY: Oxford University Press.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav–IPN, México.

Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights*. New Jersey: Princeton University Press.

Massa, M., Guevara, I., Puig-Pla, C., y Romero, F. (2009). Trigonometría para medir los cielos. *XIV Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, 1-15. Disponible en: https://goo.gl/sJMf4M

Mateu, E. y Orts, A. (2006). La astronomía griega: de los pitagóricos al almagesto de Ptolomeo. *Huygens,* (62), 19 – 38.

Mateus, K. (2013). *Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, 1(1), 4 – 11.

Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. En A., Bikner-Ahsbahs, C., Knipping y N., Presmeg, (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods*, 365-380. Dordrecht: Springer Netherlands.

Melogno, P., Rodríguez, P. y Fernández, S. (Eds.). (2011). *Elementos de Historia de la Ciencia*. Uruguay: Universidad de la República.

Mesa, V. y Goldstein, B. (2016). Conceptions of Angles, Trigonometric Functions, and Inverse Trigonometric Functions in College Textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(2), 338-354. doi: 10.1007/s40753-016-0042-1

Mesa, V. y Herbst, P. (2011). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. *ZDM Mathematics Education*, *43*(1), 41-52. doi: 10.1007/s11858-010-0300-7

Montiel, G. (2007). *Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría*. En Cecilia Rita Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 590-595). Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico.* México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico*. México: Secretaría de Educación Pública.

Montiel, G. (2014). El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (p. 1771-1779). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, 61-88.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del Pensamiento Funcional-Trigonométrico. En M. Ferrari, G. Martínez y G. Buendía (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*, 169-205. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1193-1216.

Moreno-Garrido, C. (2014). *Astronomía en el Antiguo Egipto* (Trabajo de fin de grado). Universidad de Jaén, España. Disponible en https://goo.gl/ir4zsD

Navarro, J. (2005). Los elementos de euclides. *Un Paseo por la Geometría 2002/2003*, 55 – 82. España: Real Sociedad Matemática Española. Disponible en https://goo.gl/unfL6X

Navarro, P. y Villalva, M. (2009). *Un estudio sobre la desarticulación entre la semejanza y la trigonometría en el bachillerato*. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, (p. 287-296). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Patricio, H., García, C. y Arrieta, J. (2005). *Las prácticas de hacer semejanzas en los triángulos y la emergencia de las razones trigonométricas*. En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 619-624). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Pedersen, O. (2010). *A Survey of the Almagest: With Annotation and New Commentary by Alexander Jones*. Springer Science & Business Media.

Peña-Rincón, P., Tamayo-Osorio, C. y Parra, A. (2015). Una visión latinoamericana de la Etnomatemática: tensiones y desafíos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(2), 137-150. doi: 10.12802/relime.13.1820

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav–IPN, México.

Reyes-Gasperini, D. (2017). *Empoderamiento Docente y Socioepistemología*. Barcelona: Gedisa.

Rioja, A. y Ordóñez, J. (1999). *Teorías del Universo. Vol. 1: de los pitagóricos a Galileo*. Madrid: Síntesis.

Robinson, D. (2014). Star Trails over Arches National Park, Utah. Disponible en https://goo.gl/1adPui

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2016). Construcciones Dinámicas. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa) . Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

Saiz, L. (2003). *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo: "Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo"*. Madrid: Maxtor.

Sánchez, C. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 71 – 92. Disponible en https://goo.gl/ea8b3E

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Secretaría de Educación. (2003). *Currículo Nacional Básico (CNB)*. Disponible en https://goo.gl/z3zKC4

Secretaría de Educación. (2007). *Planes y Programas de Educación Media. Bachillerato Técnico Profesional en informática*. Disponible en https://goo.gl/NvsDRC

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión*. Una Visión Socioepistemológica (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN. México.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav-IPN, México

Steer, J., Vila, M. y Eaton, J. (2009). Trigonometry with year 8: Part 1. *Mathematics Teaching*, (214), 42-44.

Struik, D. (1980). Historia concisa de las matemáticas (P. Lezama y Noriega, Trad.). México: Instituto Politecnico Nacional. (Trabajo original publicado en 1948)

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. y Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 1-19.

Tezel, C. y Tezel, T. (2011-2012). APOD and General Astronomy Discussion Forum. Disponible en https://goo.gl/EunZBe

Thompson, P. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sépulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 1, pp. 45–64). Morelia, México: Cinvestav – UMSNH.

Toomer, G. (1984). *Ptolomy's Almagest*. London: Duckworth.

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. (2015). Página Institucional: Quienes Somos. Disponible en: https://goo.gl/eTZgrT

Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the Earth: the early history of trigonometry*. Princeton University Press.

van der Waerden, B. (1974). *Science awakening II*. Springer Science & Business Media, B. V.

Vega, Y (2013). *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Disponible en https://goo.gl/D1GEXd

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(3), 91-112.

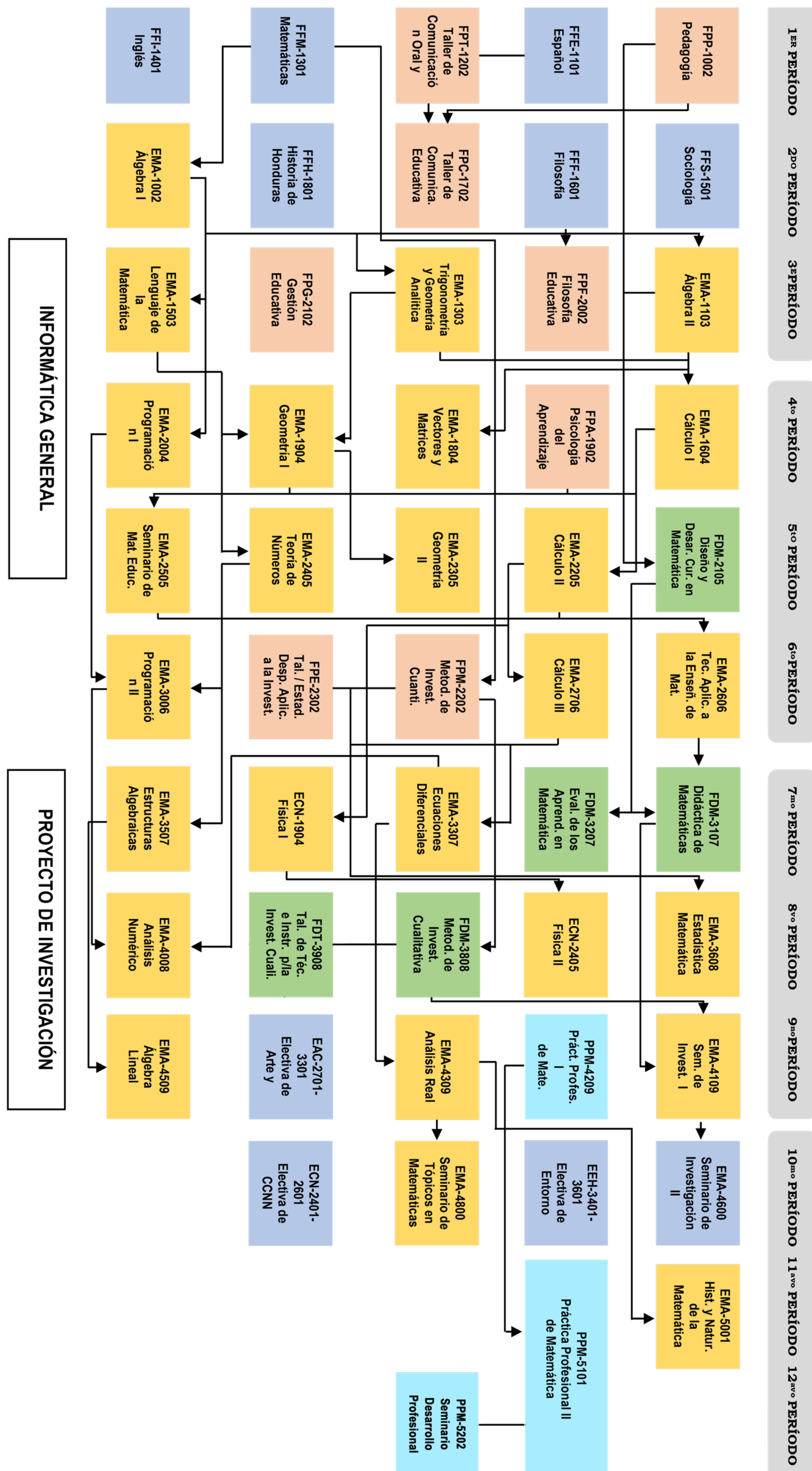
Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics teacher*, *102*(2), 144-150.

Wongapiwatkul, P., Laosinchai, P. y Panijpan, B. (2011). Enhancing conceptual understanding of trigonometry using Earth geometry and the great circle. *Australian Senior Mathematics Journal*, *25*(1), 54-63.

Xiang, H. (2008). Hacia una imagen contextualista de la racionalidad. *Praxis*, *62*, 103-135.

Zamorano, R. (1576). *Los seis Libros primeros de la Geometría de Euclides*.

Anexo 1



Fujograma, Plan de Estudios 2008. Con base en Departamento de Ciencias Matemáticas

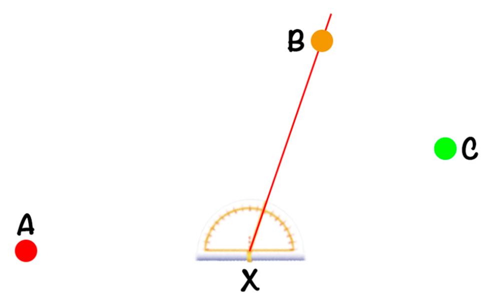
Anexo 2

Medición Indirecta de Distancias

Situación Problema. A tres metros del punto en el suelo etiquetado como X, se encuentran tres objetos, marcados como A, B y C, ¿cuál es la distancia entre los objetos A y B y entre B y C?

Bloque Primero de Actividades

Actividad 1. Con ayuda del transportador y del puntero láser, aproxima el ángulo –con vértice en X– que separa a los objetos A y B, y B y C.



- ¿Cuándo mide el ángulo AXB?

- ¿Cuánto mide el ángulo BXC?

Actividad 2. Con las mediciones realizadas anteriormente, ¿cómo podríamos conocer las distancias entre los objetos A y B, y B y C?

Actividad 3. Considerando las mediciones realizadas en la actividad 1 y con ayuda del set de geometría, construye un modelo a escala de la situación problema. Finalmente, con base en este modelo, aproxima la distancia entre los objetos A y B, y B y C.

- ¿Cuál es la distancia entre A y B?

- ¿Cuál es la distancia entre B y C?

Bloque Segundo de Actividades

Actividad 1.

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 180º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 6m y el ángulo AXB fuera 180º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 9m y el ángulo AXB fuera 180º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera *d* metros y el ángulo AXB fuera 180º?

- Ahora, ¿coincide la mitad de la distancia calculada en el primer inciso con la distancia entre A y B cuando el ángulo AXB es la mitad, es decir 90º? ¿por qué?

- ¿Coincide un tercio de la distancia calculada en el primer inciso con la distancia entre A y B cuando el ángulo AXB es un tercio, es decir 60º? ¿por qué?

Actividad 2.

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 90º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 6m y el ángulo AXB fuera 90º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 9m y el ángulo AXB fuera 90º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera *d* metros y el ángulo AXB fuera 90º?

- Ahora, ¿coincide la mitad de la distancia calculada en el primer inciso con la distancia entre A y B cuando el ángulo AXB es la mitad, es decir 45º? ¿por qué?

- ¿Coincide un tercio de la distancia calculada en el primer inciso con la distancia entre A y B cuando el ángulo AXB es un tercio, es decir 30º? ¿por qué?

Actividad 3.

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 60º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 6m y el ángulo AXB fuera 60º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 9m y el ángulo AXB fuera 60º?

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera *d* metros y el ángulo AXB fuera 60º?

- Ahora, ¿coincide la mitad de la distancia calculada en el primer inciso con la distancia entre A y B cuando el ángulo AXB es la mitad, es decir 30º? ¿por qué?

- ¿Coincide un tercio de la distancia calculada en el primer inciso con la distancia entre A y B cuando el ángulo AXB es un tercio, es decir 20º? ¿por qué?

Actividad 4.

- En la situación problema, si el ángulo AXC fuera 90º y el objeto B estuviera entre los objetos A y C, es decir, el ángulo AXB fuera 45º, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

- Ahora, en la situación problema, si el ángulo AXC fuera μ, un ángulo para el cual la distancia entre A y C es conocida, y el objeto B estuviera entre los objetos A y C, es decir, el ángulo AXB fuera μ/2, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

- En la situación problema, ¿si el ángulo AXC fuera 180º y el ángulo AXB fuera 60º, podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

- Ahora, en la situación problema, si el ángulo AXC fuera 180º y el ángulo AXB fuera μ, un ángulo para el cual la distancia entre A y B es conocida, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

Bloque Tercero de Actividades

Actividad 1. Con ayuda de las relaciones particulares y los métodos de cálculo identificados en el bloque anterior y las mediciones realizadas inicialmente, calcula la distancia entre los objetos A y B y entre B y C, en la situación inicial.

- ¿Cuál es la distancia entre A y B?

- ¿Cuál es la distancia entre B y C?