CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal
Departamento de Matemática Educativa.

“Creencias y dificultades en la comprensión y aplicación de los criterios para máximos y mínimos de funciones reales de variable real. Un estudio exploratorio con estudiantes de bachillerato”.

TESIS
que presenta

Javier Amador Elizondo Quintero.

Para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS.

ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA.

Director de la Tesis: Dr. Antonio Rivera Figueroa.

México, Ciudad de México Julio de 2018

Agradecimientos.

A mi Director de tesis.

Dr. Antonio Rivera Figueroa, su gran apoyo, paciencia y motivación.

A mis padres.

Luisa Quintero Alarcón y José Luis Elizondo Salcedo.

A mi familia.

Wendy, Luis, Ariadna, Karla, Othar, Kika, Cici y Sophie.

Resumen.

La enseñanza del cálculo diferencial en la educación de nivel medio superior, de acuerdo a programas de estudio consultados, se ha centrado en la práctica de procesos y algoritmos algebraicos, con la finalidad de desarrollar en los alumnos, las habilidades necesarias para la resolución de problemas. Este enfoque instrumental, en el sentido de Skemp (1976), se adopta en los criterios para la obtención de valores máximos y valores mínimos, de funciones reales de variable real.

En el presente trabajo, se reportan los resultados de una investigación, en la que se exploran mediante un instrumento diseñado para este fin, las creencias y dificultades que presentan los alumnos durante la resolución de problemas, cuando aplican e interpretan diversos aspectos elementales de los criterios de la primera y de la segunda derivada, para la obtención de valores máximos, valores mínimos y puntos de inflexión de funciones reales de variable real.

El cuestionario se aplicó a un total de sesenta y un estudiantes de bachillerato, que habían cursado y aprobado el curso de cálculo diferencial en instituciones de nivel medio superior de la Ciudad de México.

Para el marco teórico se emplearon las propuestas de Carpenter y Lehrer (1999) que establecen las formas de actividad mental que promueven el desarrollo de la comprensión matemática.

Javier Amador Elizondo Quintero.

Abstract.

The teaching of differential calculus in high school level education, according to study programs consulted, has focused on the practice of algebraic processes and algorithms, in order to develop in students, the skills needed to solve problems . This instrumental approach, in the sense of Skemp (1976), is adopted in the criteria for obtaining maximum values and minimum values, of real functions of real variable.

In the present work, we report the results of a research in which we explore, through an instrument designed for this purpose, the beliefs and difficulties that students present during the resolution of problems, when they apply and interpret various elementary aspects of the criteria of the first and of the second derivative, to obtain maximum values, minimum values and inflection points of real functions of real variable.

The questionnaire was applied to a total of sixty-one high school students who attended and passed the course of differential calculus in institutions of high school level of Mexico City.

For the theoretical framework we used the proposals of Carpenter and Lehrer (1999) that establish the forms of mental activity that promote the development of mathematical understanding.

Javier Amador Elizondo Quintero.

Contenido.

Agradecimientos. 3

Resumen. 5

Abstract. 6

Contenido. 7

Introducción. 9

Capítulo 1. Planteamiento del problema y preguntas de investigación. 11
- 1.1. Planteamiento del problema. 13
- 1.2. Objetivos y preguntas de investigación. 17

Capítulo 2. Antecedentes. 19
- 2.1. Investigaciones relacionadas. 20

Capítulo 3. Marco conceptual. 29
- 3.1. Comprensión en matemáticas. 30
- 3.2. Propuesta de categorías de comprensión. 34
- 3.3. Creencias y dificultades. 36

Capítulo 4. Marco de referencia. 39
- 4.1. Primer criterio para máximos y mínimos. 43
- 4.2. Criterio de la primera derivada. 44
- 4.3. Criterio de la segunda derivada. 49
- 4.4. Concavidad y puntos de inflexión. 50

Capítulo 5. Metodología. 53
- 5.1. Participantes. 55
- 5.2. Proceso de recolección de datos. 57
- 5.3. Diseño y descripción del instrumento de investigación. 57
  - 5.3.1. Problemas uno y dos. 58
  - 5.3.1. a. Trayectorias hipotéticas de problemas uno y dos. 62
  - 5.3.1.b. Dificultades esperadas de los problemas uno y dos. 63
  - 5.3.2. Problemas tres y cuatro. 64
  - 5.3.2. a. Trayectorias hipotéticas de problemas tres y cuatro. 65
  - 5.3.2.b. Dificultades esperadas de los problemas tres y cuatro. 68
  - 5.3.3. Problemas cinco y seis. 68
  - 5.3.3.a. Desviaciones esperadas de los problemas cinco y seis. 70
  - 5.3.4. Problema siete. 70
  - 5.3.4. a. Trayectoria hipotética del problema siete. 71
  - 5.3.4.b. Dificultades esperadas del problema siete. 72
  - 5.3.5. Problema ocho. 73

5.3.5. a. Trayectoria hipotética del problema ocho. 74
5.3.5.b. Dificultades esperadas del problema ocho. 75
5.3.6. Problema nueve. 75
5.3.6. a. Trayectoria hipotética del problema nueve. 77
5.3.6.b. Dificultades esperadas del problema nueve. 79
5.3.7. Problema diez. 79
5.3.7. a. Trayectoria hipotética del problema diez. 80
5.3.7.b. Dificultades esperadas del problema diez. 83

Capítulo 6. Análisis de datos. 85
6.1. Análisis general de los resultados obtenidos. 86
6.1.1. Análisis general de los resultados, problemas uno y dos. 86
6.1.2. Análisis general de los resultados, problemas tres y cuatro. 87
6.1.3. Análisis general de los resultados, problemas cinco y seis. 88
6.1.4. Análisis general de los resultados, problema siete. 90
6.1.5. Análisis general de los resultados, problema ocho. 91
6.1.6. Problema nueve. 92
6.1.7. Análisis general de los resultados, problema diez. 92
6.2. Análisis de los resultados por plantel. 93
6.2.1. Resultados de los problemas uno y dos por plantel. 94
6.2.2. Resultados de los problemas tres y cuatro por plantel. 95
6.2.3. Resultados de los problemas cinco y seis por plantel. 97
6.2.4. Resultados del problema siete por plantel. 98
6.2.5. Resultados del problema ocho por plantel. 99
6.2.6. Resultados del problema nueve por plantel. 101
6.2.7. Resultados del problema diez por plantel. 102
6.3. Análisis particulares. 104
6.3.1. Casos seleccionados de la aplicación del criterio de la primera derivada. 104
6.3.2. Casos seleccionados de la interpretación del criterio de la segunda derivada. 107
6.3.2. Caso en el que se emplea una gráfica para obtener los valores extremos. 110

Capítulo 7. Resultados y conclusiones. 113
7.1. Resultados. 114
7.1.1. Respecto del empleo de simbología, la notación matemática y el dominio de conceptos. 114
7.1.2. Respecto del criterio de la primera derivada. 115
7.1.3. Respecto del criterio de la segunda derivada. 117
7.1.4. Respecto de la interpretación de los criterios a partir de gráficas. 117
7.1.5. Respecto del empleo de la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión. 118
7.1.6. Respecto de los sistemas de creencias de los estudiantes. 118
7.2. Conclusiones. 120

Referencias Bibliográficas. 124

Introducción.

Uno de los temas centrales de los cursos de Cálculo Diferencial, tanto en el nivel bachillerato como en el nivel universitario, es el de máximos y mínimos de funciones (en este caso de funciones de una variable real con valores reales). La importancia de este tema radica en el papel que juega en las aplicaciones del Cálculo. Es mediante el tema de máximos y mínimos que el Cálculo hace brillar a la matemática básica por la diversidad de sus aplicaciones en diferentes disciplinas. Quizá las aplicaciones que más atraen, a quienes inician sus estudios en Cálculo Diferencial, es a la solución de problemas planteados en el contexto de situaciones relacionadas con la vida real, por ejemplo, el famoso "problema de la cajita" o el problema de "construcción de un bote cilíndrico de hojalata" ambos de capacidad dada y de menor costo. Es quizá el tema que muestra al estudiante la utilidad de la matemática en la solución de problemas no triviales de la "vida real" y por esto, tal vez, desarrolle en el estudiante el gusto por la matemática.

Las aplicaciones del tema de máximos y mínimos descansan en la enseñanza y aprendizaje de resultados del Cálculo, que suelen establecerse en forma de algoritmos o recetas, lo cuál, que podemos considerar como un aprendizaje de tipo instrumental, en el sentido de Skemp (1976). Es usual, comprensible y sensato que los resultados del Cálculo sobre máximos y mínimos en el nivel bachillerato se sustenten en consideraciones o interpretaciones geométricas. Los más comunes son: a) la condición necesaria de que la derivada de una función diferenciable se anule en un punto donde alcanza un valor máximo o un valor mínimo local. b) el criterio de la primera derivada y c) el criterio de la segunda derivada que dan condiciones suficientes para determinar los valores máximos o mínimos de una función dada.

Si bien, en el nivel bachillerato no es pertinente sustentar con rigor los criterios para máximos y mínimos, mencionados en el párrafo anterior, es conveniente que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje se lleven a cabo discusiones sobre su interpretación, alcances y limitaciones, de manera que se logre un aprendizaje relacional (en el sentido de Skemp), de manera que el estudiante pueda aplicarlos de manera razonada.

En esta tesis reportamos los resultados de una investigación realizada con estudiantes de bachillerato, que tiene como propósito averiguar en qué medida el estudiante comprende estos criterios para máximos y mínimos.

Capítulo 1.

Planteamiento del problema y preguntas de investigación.

1. Planteamiento del problema y preguntas de investigación.

El cálculo diferencial es una de las asignaturas de la educación media superior (EMS) que causa dificultades a los estudiantes. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) reportó que en la década de 2000 a 2010, en los Estados Unidos, se incrementó el porcentaje de estudiantes graduados que eligieron asistir a los cursos opcionales de pre-cálculo y cálculo en el bachillerato; pero también se reporta un aumento considerable en el porcentaje de graduados que necesitaron tomar cursos remediales de cálculo. Una consecuencia de esto, fue, que alrededor de una tercera parte de los estudiantes que cursaron cálculo diferencial en el bachillerato, evitaron elegir carreras universitarias que tuvieran materias relacionadas con el cálculo (NCTM Research Committe, 2011).

La enseñanza del cálculo diferencial en la EMS, es también un tema de interés en México, su contenido se considera necesario para la construcción de nuevo conocimiento en diversas materias de las áreas de ciencia e ingeniería en el nivel universitario. En los reportes de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico se observa un incremento considerable de estudiantes de bachillerato mexicanos interesados en ingresar a carreras relacionadas con ciencias e ingeniería (OECD, 2015).

La enseñanza de los criterios de la primera y de la segunda derivada para obtener valores máximos y valores mínimos de funciones reales, brinda la oportunidad de mostrar a los estudiantes de bachillerato, el verdadero potencial de las matemáticas para resolver problemas reales de optimización y de emplear gran parte del conocimiento matemático acumulado a lo largo de su trayectoria académica. Por esto, y por la relevancia que ha tomado el cálculo diferencial en el interés de los estudiantes, consideramos que la comprensión y la aplicación de dichos criterios nos ofrecen un tema de investigación importante y trascendente, y en particular nos centramos en los aspectos relacionados con las dificultades y las creencias que afectan el desempeño durante la resolución de problemas y la interpretación de conceptos.

1.1. Planteamiento del problema.

En los cursos de cálculo diferencial en el bachillerato, los aspectos relacionados al análisis del comportamiento de funciones por medio de la derivada, permiten vincular diversos conocimientos de álgebra, geometría analítica y trigonometría (pre-cálculo) con nuevos conceptos, teoremas, procedimientos y criterios. Con este fin se propone, que el proceso de enseñanza se base principalmente, en un fuerte y continuo apoyo visual mediante el uso de esquemas y gráficos, que tienen como finalidad el desarrollo de imágenes mentales en los estudiantes.

En los programas de la mayoría de las instituciones, se propone trabajar con los criterios de la primera derivada y de la segunda derivada, ya que ambos criterios ofrecen condiciones suficientes, para la obtención de valores máximos, valores mínimos y puntos de inflexión, y sirven de apoyo para el bosquejo de las gráficas de algunas funciones que satisfacen una serie de condiciones, y para la solución de problemas de optimización, que se reducen a hallar los valores máximos o valores mínimos de funciones.

La correcta interpretación y aplicación de los criterios, requiere el manejo de diversos conceptos y temas previos, como son por ejemplo: la interpretación geométrica de la derivada, el análisis de la monotonía de funciones, el álgebra de funciones, las reglas de derivación directa. Recíprocamente, la comprensión de los criterios también ayuda al estudiante a fortalecer el dominio de dichos temas previos.

Diversos autores reportan que, en la práctica, los estudiantes presentan algunas dificultades al resolver problemas que requieren la aplicación de los criterios. Parte de esta problemática, estriba en que la enseñanza de las matemáticas, y en específico del Cálculo diferencial, usualmente se hace mediante una fuerte carga operativa, en deterioro de la parte conceptual (Moreno & Cuevas, 2004).

La intensiva operatividad con la que se imparten los cursos de cálculo diferencial en el bachillerato, si bien permite fortalecer el dominio de los procedimientos, generalmente no deja espacio para la incorporación de los significados en la construcción mental de los conceptos por parte de los estudiantes, es decir, para el desarrollo de la comprensión.

Rivera et al. destacan que la comprensión de la derivada y sus significados, nos brindan la oportunidad de mostrarle al estudiante que la matemática es aplicable, y comunicarle que este concepto, entraña un gran potencial para el estudio de diversos problemas en diversas áreas del conocimiento; ya que el conocimiento de los estudiantes que sólo memorizan hechos o procedimientos, sin comprenderlos, es más frágil que si aprenden matemáticas con comprensión (Rivera, García, & Díaz, 2013).

Entonces, en la medida que los estudiantes entienden y aplican los criterios para determinar máximos y mínimos de funciones, solamente como algoritmos procedimentales, se limita su capacidad de comprender las conexiones que existen entre los criterios, con los conceptos de la derivada y de los diversos teoremas que les dan forma.

Lo anterior, da como resultado una incorporación de conocimiento incompleto o en ocasiones deficiente en las redes de aprendizaje de los alumnos.

Por ejemplo, consideremos el teorema que establece, que si la derivada de una función f es positiva (negativa) en un intervalo, entonces la función f es creciente (decreciente). Usualmente este tipo de conocimiento se ilustra con imágenes o gráficas, tanto en clases cómo en diversos libros de texto (Figura 1). La ausencia de una reflexión puede ocasionar conclusiones erróneas y llevar a conocimiento equivocado, como sería suponer, que el inverso de dicho teorema, es también válido. Un contraejemplo bastaría para refutar esta suposición; digamos la función $f(x) = x^3$. Esta función no solo es creciente, sino que es estrictamente creciente, sin embargo, es falso que $f'(x) > 0$ para cada número real x, ya que $f'(0) = 0$ (Rivera & Ponce, 2013).

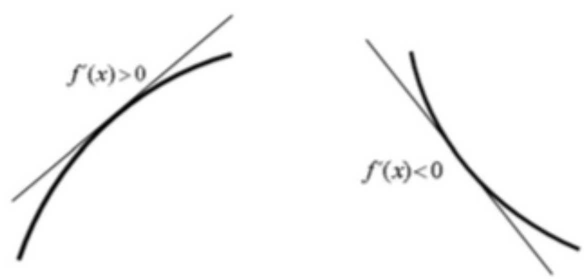


Figura 1. La relación entre el signo de la derivada y la monotonía de una función.

Adaptado de "Derivative, maxima and minima in a graphical context" por A.Rivera & J.C.Ponce (2012), *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(2), p. 285.

> "En la práctica, las representaciones gráficas particulares en las que confiamos para interpretar y asimilar los resultados de la derivada pueden limitar nuestro entendimiento, y por lo tanto, llevarnos a formular resultados no válidos" (Rivera & Ponce, 2013).

Con el fin de evitar caer en este tipo de conclusiones, se pueden mostrar ejemplos, en donde sea notorio el hecho, de que en una función estrictamente creciente, la derivada no necesariamente es estrictamente positiva.

Las dificultades que presentan los estudiantes, durante la aplicación de los criterios para calcular valores máximos y valores mínimos de funciones reales, se han investigado desde diferentes posturas. De las investigaciones consultadas, por ejemplo, tenemos autores como Cuevas (2004) y Rivera (2013) que señalaron la problemática de la enseñanza centrada en la mecanización; además, para Rivera, las dificultades de los estudiantes tienen que ver con su escasa o nula comprensión acerca de los conceptos relacionados con los criterios y de la naturaleza local de los mismos. Por su parte, Aspinwall, Selcuk y Presmeg (2010) destacan la importancia de la visualización y de las preferencias cognitivas de los estudiantes, al momento de resolver problemas de optimización.

En el presente estudio, consideramos un problema de investigación importante, el identificar las dificultades de los estudiantes, al momento de resolver problemas que requieren la aplicación del criterio de la primera derivada o del criterio de la segunda derivada (o ambos). También consideramos identificar aquellas dificultades, que surgen al relacionar los conceptos con sus representaciones visuales, al interpretar las condiciones de cada uno de los criterios a partir de las gráficas de funciones de primeras derivadas y de segundas derivadas.

Además, consideramos que durante el proceso de aprendizaje y de aplicación de los criterios, también influyen los sistemas de creencias de los estudiantes. Estos sistemas de creencias dan forma a la comprensión y establecen el contexto desde la perspectiva del individuo respecto de la naturaleza de las tareas por realizarse. Los sistemas de creencias dan forma a la cognición, incluso cuando uno no es consciente acerca de sostener estas creencias. (Schoenfeld, 1985)

Consideramos que las creencias son de interés para esta investigación, ya que por la edad promedio en la que se encuentran los estudiantes de educación media superior, sus perspectivas personales acerca de las matemáticas, influyen en mayor medida, porque afectan y dan forma al proceso de aprendizaje del cálculo diferencial, en específico, durante el aprendizaje de los criterios de la primera y de la segunda derivada; lo que será evidente al analizar los niveles de desempeño que muestren los estudiantes al resolver problemas y al cuestionarlos respecto de sus respuestas.

1.2. Objetivos y preguntas de investigación.

Las preguntas de investigación que planteamos para el desarrollo de esta investigación son:

¿Qué dificultades exhiben los estudiantes durante la aplicación de los criterios para determinar los valores máximos, mínimos y los puntos de inflexión?

¿Cuáles creencias muestran los estudiantes que afectan su desempeño durante la aplicación de los criterios?

Las respuestas a estas preguntas, nos permitirá averiguar si los estudiantes de nivel bachillerato, comprenden, por ejemplo, la naturaleza local de los criterios de la primera y de la segunda derivada para obtener valores máximos y valores mínimos.

Además, nos permitirá averiguar, si los estudiantes de nivel bachillerato, logran realizar conexiones entre las gráficas de la primera y segunda derivada, con los valores máximos, valores mínimos, puntos de inflexión y la monotonía de la función.

Y finalmente, nos permitirá averiguar si las dificultades detectadas durante la resolución de los problemas, están de alguna forma relacionadas con los sistema de creencias de los estudiantes.

Capítulo 2.

Antecedentes.

2. Antecedentes.

Las investigaciones consultadas acerca de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial en el nivel bachillerato, por lo general se centran en el desempeño de los docentes, en la pertinencia de los contenidos curriculares y en los enfoques tanto del proceso de enseñanza, como de la bibliografía y de las fuentes de información (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces, & Günter, 2016), (Burn & Mesa, 2015), (Bressoud, 2015), (Bressoud, Camp, & Teague, 2012), (Ellis, 2014) (Lloyd & Wilson, 1998) (Prenowitz, 1992).

Más complejo ha sido obtener información, acerca de investigaciones centradas particularmente en aspectos relacionados con la aplicación de los criterios de la primera y de la segunda derivada para la obtención de valores extremos.

A continuación se describen brevemente, los resultados de algunas de las investigaciones consultadas.

2.1. Investigaciones relacionadas.

En 2004, Moreno y Cuevas presentaron los resultados del estudio "Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial", en los que se observó, que tanto estudiantes cómo profesores, aplican algoritmos de manera mecánica, y que aun cuando se enfrentan a problemas no rutinarios y obtuvieron soluciones no razonables o contradictorias con la realidad de los problemas, no fueron capaces de identificar el error obtenido (Moreno & Cuevas, 2004).

Moreno y Cuevas, citan a Hieber y Lefevre (1986), para señalar que mientras los procesos algorítmicos se aprenden, en algunos casos superficialmente, y en otros incluso se logra concretar el dominio procedimental; los conceptuales carecen de significado, lo que conduce a un conocimiento procedimental sin sentido, o a lo que Skemp llama "reglas sin sentido" (Skemp, 1976).

Para su investigación diseñaron un instrumento de dos problemas de optimización no rutinarios, en donde era necesario emplear alguno de los criterios para obtener valores extremos, y además, tenían que resolver un cuestionario respecto de las condiciones de cada situación, en particular era relevante para el segundo problema, el que se considerara el dominio de la función para el análisis de los valores extremos.

Los investigadores concluyeron, que se evidenciaba una interpretación errónea de los conceptos de máximos y mínimos al aplicar el criterio de la segunda derivada, sin reflexionar en la solución obtenida y no considerar como información relevante que el dominio de la función es cerrado y acotado. También concluyeron que para la mayoría, tanto de profesores cómo de estudiantes, el máximo o mínimo de una función, sólo se puede encontrar a través del criterio de la segunda derivada, y de no ser posible la aplicación de este criterio, se concluye erróneamente, que el problema no tiene solución o que la función no tiene máximo (o mínimo).

Esta problemática la atribuyeron al proceso de instrucción, que se basa principalmente en entrenar a los estudiantes en las habilidades necesarias para el desarrollo de procedimientos, memorización, reglas y demás, por lo que la enseñanza de los cursos de Cálculo diferencial se considera rutinaria y conduce a una incorrecta interpretación de conceptos fundamentales.

En el artículo “Derivative, maxima and minima in a graphical context”, publicado en el 2012 por la revista *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Rivera y Ponce exploran las condiciones de necesidad o suficiencia de los criterios para determinar los máximos y mínimos de una función, y las implicaciones para la enseñanza de la derivada de funciones en cursos pre-universitarios.

Resaltan la manera, en que las representaciones gráficas particulares que emplean los docentes y los libros de texto, para interpretar y asimilar los resultados de la derivada, pueden terminar por limitar el entendimiento del aprendiente y, por lo tanto, llevarlo a formular resultados no válidos, (Rivera & Ponce, 2013).

Otra situación que reportan, es una interpretación errónea del primer criterio para máximos y mínimos, que dicta que una condición necesaria para una función diferenciable, que tiene un máximo o un mínimo en un punto *a*, es que su derivada en ese punto sea igual a cero. Usualmente basta para explicarlo con una interpretación gráfica, ya que en un punto donde la derivada es cero, la tangente a la gráfica es horizontal, intuitivamente esto ocurre en puntos donde puede haber máximos o mínimos locales, sin embargo, se puede llegar a conclusiones incorrectas e imprecisas al no considerar el dominio de una función, para ejemplificarlo emplean la función:

$$f(x)=\left(x^3-x^2-2x+1\right)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)$$

El dominio de esta función es el intervalo $\left[-1,1\right]$, al analizar el comportamiento de la función mediante el primer criterio se obtiene que existe un mínimo en $x = 0$, sin embargo, como puede observarse en la Figura 2, el mínimo de $f(x)$ se encuentra en $x=1$.

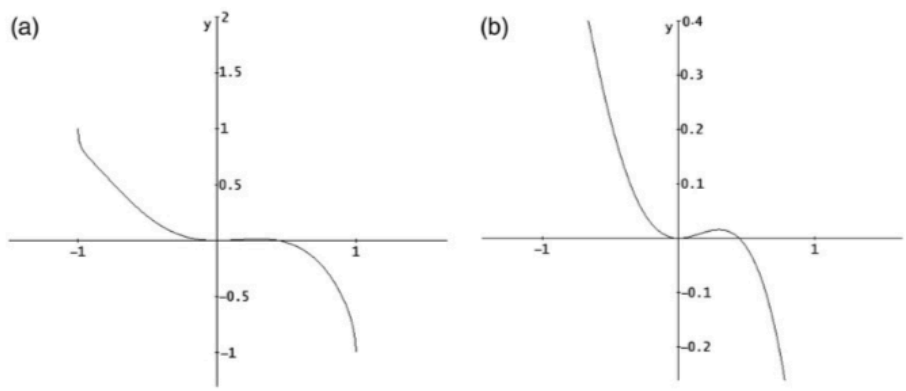


Figura 2. (a) Gráfica de f(x), (b) gráfica de f(x) con el eje ordenado a mitad de la escala.

Adaptado de "Derivative, maxima and minima in a graphical context" por A.Rivera & J.C.Ponce (2012), *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(2), p. 293.

Rivera y Ponce (2012) muestran un ejemplo, al que puede conducir la enseñanza desde un contexto altamente gráfico del criterio de la primera derivada, para ello, emplean la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2-\dfrac{x^2}{1+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)} & si \quad x\neq 0 \\ 2 & si \quad x=0 \end{cases}$$

El criterio de la primera derivada se aplica, cuando en teoría, es posible encontrar una vecindad del punto crítico, donde la derivada tiene un signo del lado izquierdo y otro distinto del lado derecho del punto crítico, entonces el criterio no aplica, si la derivada tiene el mismo signo a ambos lados del punto crítico, o si no es posible definir una vecindad suficientemente cercana al punto crítico, en la que ocurra que la derivada tiene diferentes signos alrededor del mismo. En el caso de la función propuesta, no es posible determinar dicha vecindad para $x = 0$, por lo que el criterio de la primera derivada no aplica (Figura 4).

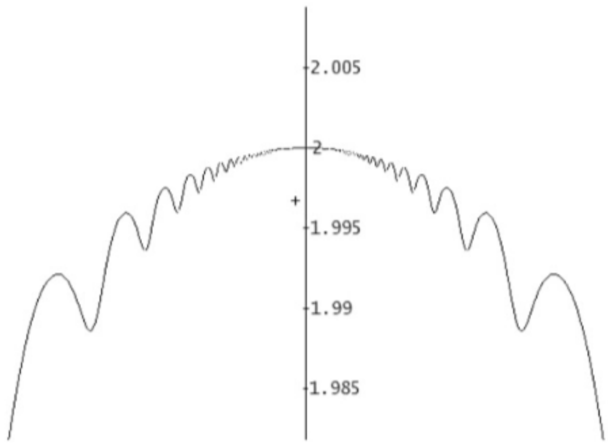


Figura 3. Acercamiento de gráfica de f(x) cercano a (0,2).

Adaptado de "Derivative, maxima and minima in a graphical context" por A.Rivera & J.C.Ponce (2012), *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(2), p. 295.

En 2013, Rivera, García y Díaz presentaron los resultados de una investigación titulada "Comprensión de los significados de la derivada: un estudio con profesores de bachillerato y una propuesta didáctica en ambientes virtuales", en la que analizaron las soluciones de cuestionarios, compuestos por problemas que requerían la aplicación e interpretación de diversos aspectos relacionados con la derivada y de sus interpretaciones físicas y geométricas.

En este estudio, Rivera et al. profundizan en la importancia del aprender matemáticas con entendimiento (*learning mathematics whit understanding*), y señalan que la comprensión en matemáticas es un trabajo continuo, que se lleva a cabo durante un proceso y que puede realizarse en varios niveles y de diferentes formas, y por lo tanto, que la comprensión es dinámica y se debe considerar en constante adaptación (Rivera, García, & Díaz, 2013). Posteriormente describen la propuesta de Carpenter y Lehrer, de las cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión, a) construcción de relaciones, b) extensión y aplicación de conocimiento matemático, c) reflexión sobre las experiencias, d) articulación de lo que el individuo conoce, y e) apropiación del conocimiento matemático (en el siguiente capítulo retomaremos esta propuesta para el marco teórico).

En sus conclusiones, los autores reportan diversas situaciones de incomprensión de los significados de la derivada, dado que algunos de los participantes empleaban la derivada y la noción de pendiente, para referirse a la recta tangente. Este hallazgo lo consideraron de gran importancia, principalmente porque los participantes en el estudio fueron docentes de bachillerato, y revela dificultades acerca de la utilización inapropiada de lenguaje matemático.

El artículo "Contrasting Cases of Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs" realizado por Selcuk Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., y Presmeg, y publicado en el 2010 en la revista *Mathematical Thinking and Learning*, presenta un estudio de caso que pretende destacar la importancia de la visualización y del análisis en el pensamiento matemático, para ello aplican una serie de instrumentos a tres alumnos elegidos por mostrar una capacidad sobresaliente para el aprendizaje del cálculo y por tener diferentes preferencias cognitivas. El estudio se hizo con la finalidad de contrastar el proceso de pensamiento de los participantes, al momento de bosquejar gráficas de funciones cuando se les presentaban las gráficas de sus derivadas.

Destacan estos autores, que el uso de múltiples representaciones en la presentación de conceptos (que puede pueden ser representados numérica, algebraica, gráfica y verbalmente siempre que sea posible), ayudan a los estudiantes a comprender las conexiones entre las diferentes representaciones y les permiten desarrollar una comprensión más profunda y más robusta de los conceptos.

"Comprender una idea es la habilidad de reconocer la idea incrustada en diferentes representaciones, el manipular la idea dentro de representaciones dadas, y el trasladar la idea de una representación a otra" (Selcuk, Aspinwall, & Presmeg, 2010).

Los Principios y Estándares para la matemática escolar (NCTM, 2000), destacan la importancia de las habilidades de los estudiantes para "seleccionar, aplicar y trasladar a través de representaciones matemáticas, para resolver problemas". Las ideas matemáticas, son comunicadas con representaciones externas, al tomar la forma de lenguaje hablado, o de escritura con símbolos, dibujos o diagramas, u objetos físicos. Entender una idea, es la habilidad de reconocer la idea incrustada en diferentes representaciones, el manipular la idea dentro de representaciones dadas, y el trasladar la idea de una representación a otra.

Selcuk et al, citan el trabajo de Hiebert y Carpenter (1992) donde establecen la existencia de algunas relaciones entre las representaciones "externas" e "internas" creadas por los estudiantes, y cómo, sobre esta noción de representaciones conectadas, ellos definen comprensión, en términos de cómo la información es representada y estructurada.

"La matemática es comprendida si su representación mental es parte de una red de representaciones, el grado de entendimiento está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento, o hecho es entendido a fondo, si está ligado a redes existentes con más fuertes o más numerosas conexiones" (Selcuk, Aspinwall, & Presmeg, 2010).

A los participantes en el estudio de Selcuk, previamente identificadas sus preferencias ya fuera para el pensamiento analítico o el visual o el armónico-pictórico, respectivamente; les fueron asignadas una serie de tareas a realizarse una vez por semana, durante un semestre escolar. Las tareas consistieron en resolver problemas relativos a la gráfica de derivadas y el bosquejo de la función antiderivada, y se aplicó una entrevista individual posterior.

Finalmente, concluyen que los tres estudiantes construyeron diferentes e idiosincráticas imágenes y representaciones, al llegar a diferentes comprensiones de las gráficas de derivadas y que los resultados sugieren que los dos estudiantes cuyas preferencias cognitivas eran fuertemente visuales o analíticas y que no sintetizaron el pensamiento visual y analítico, experimentaron diferentes dificultades asociadas con sus modos preferidos de representación y pensamiento matemático. Incluso el estudiante que sintetizó estos modos hasta cierto punto, con buenos resultados, experimentó dificultades cuando no lo hizo.

En el RUME 2014, Jessica Ellis presentó los resultados del estudio llamado "Graduate Students Teaching Assistants' (GTAs') beliefs, instructional practices, and student success", en donde se abordan, mediante encuestas aplicadas para este fin, las posturas acerca de las prácticas instruccionales y de las creencias de la enseñanza del Cálculo Diferencial, desde la perspectiva de los estudiantes graduados que asisten a los docentes (GTAs), en comparación con las de los profesores titulares y las de otros miembros de la comunidad de académicos universitarios. Sus resultados indican que los GTAs, creen que las tecnologías ayudan más a los estudiantes, pero las visualizan más como un apoyo procedimental que conceptual, consideran a sus estudiantes más capaces de entender el cálculo, y que los GTAs están menos interesados en continuar la enseñanza del Cálculo (Ellis, 2014).

Respecto al éxito de los estudiantes, se reporta que tienen una mayor expectativa de aprobar con los GTAs que con el resto de los profesores, sin embargo, se invierte la intención de continuar al curso de Cálculo II, por que se tiene una menor confianza, menor disfrute y se reduce el interés en aprender más matemáticas.

El estudio concluye, que hay la necesidad de preparar de una forma más adecuada a los GTAs para la enseñanza del Cálculo y la de examinar la naturaleza e implicaciones de sus creencias, acerca de mantener una postura procedimental en el uso de las calculadoras en el salón.

Capítulo 3.

Marco conceptual.

3. Marco Conceptual.

En diversas investigaciones, se ha destacado la importancia de la comprensión en matemáticas y se han realizado planteamientos para intentar explicar como ocurre y que elementos del proceso de aprendizaje intervienen en su desarrollo. Para los fines de este trabajo y para conocer los diversos aspectos que componen la comprensión en matemáticas son importantes también las nociones acerca de las representaciones internas y externas, las relaciones entre ellas, así como el de la visualización en matemáticas.

3.1. Comprensión en matemáticas.

La comprensión de un concepto matemático puede ser de un alto nivel de complejidad, y en ocasiones requerirá de un proceso largo de aprendizaje con diferentes vertientes, dada la diversidad de componentes que pueden constituir el concepto. (Rivera, García, & Díaz, 2013)

En este trabajo, se considera la comprensión en matemáticas desde la postura, en que ésta emerge y se desarrolla a través de las distintas actividades mentales propuestas por Carpenter (1999), y que no ocurre como un acto aislado que resulta de un momento de reflexión, sino más bien como un proceso o una sucesión de actos.

También se destaca la importancia de las representaciones, Hiebert y Carpenter (1992) consideran, que los estudiantes emplean representaciones internas y externas durante su proceso de aprendizaje, y que en medida de cómo crean relaciones para realizar conexiones entre ellas, es como comprenden la forma en que la información es representada y estructurada.

Las ideas matemáticas son comunicadas con representaciones externas, al adoptar la forma de lenguaje hablado, escritura con símbolos, dibujos o diagramas, o de objetos físicos. Las imágenes o representaciones internas son personales y no son sólo copias de originales externos.

La representación no es una forma sensible o consistente de describir lo que sucede dentro de una persona, porque sus experiencias internas son su mundo, y no simplemente una representación del mundo. Además, diferentes individuos pueden crear diferentes representaciones internas, de un concepto que es presentado como una representación instruccional externa, tales como una gráfica o un diagrama.

Un concepto o proceso matemático es entendido, si su representación mental es parte de una red de representaciones. Comprender, requiere la habilidad de reconocer la idea incrustada en diferentes representaciones y manipularla dentro de representaciones conocidas, así como trasladarla entre diferentes representaciones. El grado de entendimiento está determinado por la cantidad y la fuerza de las conexiones creadas.

Una idea matemática, procedimiento, o hecho es entendido a fondo, si está ligado a redes existentes con más fuertes o más numerosas conexiones (Selcuk, Aspinwall, & Presmeg, 2010).

Cuando el conocimiento es altamente estructurado, nuevo conocimiento puede ser relacionado e incorporado a redes de conocimiento existentes por lo que es menos susceptible de olvidarse (Carpenter & Leher, 1999).

Carpenter y Lehrer (1999) proponen cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión.

a) Construcción de relaciones.

b) Extensión y aplicación de conocimiento matemático.

c) Reflexión sobre las experiencias.

d) Articulación de lo que el individuo conoce.

e) Apropiación del conocimiento matemático.

Durante la construcción de relaciones, los objetos matemáticos recobran significado en la manera como se relacionan con otras cosas. Los individuos construyen relaciones para una nueva idea o proceso, relacionándolos con ideas o procesos ya conocidos. (Rivera, García, & Díaz, 2013)

Diversos problemas planteados en la presente investigación, tienen como finalidad identificar en que forma, los estudiantes reconocen las relaciones que existen entre la gráfica de una función y la gráfica de su primera (o de su segunda) derivada, y viceversa. Y averiguar como a partir de la visualización de una representación externa en forma de gráfica, el estudiante realiza conexiones entre sus diferentes representaciones internas y describe su solución mediante otras representaciones externas, que pueden ser de forma gráfica, mediante el uso de simbología y notación algebraica, o textualmente, mediante el uso de lenguaje coloquial.

Durante el análisis de las gráficas de la primera y segunda derivada, los estudiantes aplican e interpretan el conocimiento matemático que acumularon durante el aprendizaje de los criterios y realizan conexiones entre representaciones internas, para lograr establecer su relación con el comportamiento de la función.

La articulación y comunicación de los conocimientos, promueve el desarrollo de la comprensión, y es mediante el recurso del lenguaje, que los estudiantes muestran las relaciones entre sus representaciones internas, exteriorizándolas al comunicar sus ideas.

En medida que los estudiantes conozcan una mayor cantidad de representaciones y de las conexiones entre ellas, les será posible comunicar lo aprendido de una forma más completa y estructurada. Durante el proceso de comunicación, también se lleva a cabo la reflexión sobre las experiencias ya que expresar las ideas requiere un esfuerzo de interpretación para lograr representarlas de manera externa y para reconocer las ideas matemáticas importantes involucradas con la situación por mostrar. El esfuerzo que haga todo individuo por comunicar las ideas le ayudará a la comprensión de lo que desea comunicar (Rivera, García, & Díaz, 2013).

Acerca de la visualización en matemáticas, un creciente cuerpo de investigadores sostienen, que el entendimiento de las matemáticas está fuertemente relacionado con la habilidad de utilizar pensamiento visual y analítico.

Algunos estudios han revelado que los estudiantes tienen dificultad al interpretar relaciones dinámicas en conceptos fundamentales del cálculo. Thompson (1994) examinó la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo en un experimento de enseñanza con estudiantes graduados de matemáticas y encontró que los estudiantes que tuvieron dificultades para entender el teorema, se debía a las empobrecidas imágenes mentales que habían desarrollado.

La visualización envuelve representaciones tanto externas como internas (o imágenes) y la consideramos en el sentido que propone Presmeg (2006), que define la visualización, como todos los procesos implicados en la construcción y transformación tanto de imágenes mentales visuales, como de todas las representaciones de carácter espacial que pueden ser utilizadas para dibujar figuras o para construirlas o manipularlas con lápiz y papel u ordenadores. Consideran que las imágenes de los estudiantes son personales e idiosincráticas, y que en ocasiones, pueden ser diferentes de lo que se pretende enseñar.

En esta investigación consideramos que los estudiantes forman imágenes mentales visuales que guían su pensamiento, y por lo tanto emplean imágenes de cómo ellos transforman, por ejemplo, la gráfica de la derivada (en su mente o en el papel) para poder interpretar los valores extremos de la función original, esto también debe ocurrir al interpretar la gráfica de la segunda derivada y, recíprocamente, cuando emplean la gráfica de la función para establecer los signos de la derivada y la segunda derivada.

Es posible, que durante el proceso de enseñanza de los criterios, al introducir diferentes representaciones matemáticas y al promover la construcción de representaciones a través de las interacciones entre ellas, se consiga que los estudiantes sinteticen diferentes modos de pensamiento que les permitan conectar sus representaciones e imágenes personales, con las convencionales.

3.2. Propuesta de categorías de comprensión.

Para el análisis de los datos, proponemos tres categorías de comprensión matemática para establecer el nivel de concreción de las actividades mentales descritas anteriormente. Estas categorías permiten observar y dar conclusiones acerca del desempeño mostrado por los estudiantes durante la resolución de los problemas del instrumento.

Las categorías propuestas son:

Categoría uno. Respuesta Correcta (C).

En esta categoría se colocan todas las respuestas, que coinciden con las trayectorias hipotéticas propuestas para el instrumento y aquellas que, aunque no fueron consideradas, demuestran dominio del tema por parte de los estudiantes.

Categoría dos. Respuesta Parcialmente Correcta (P.C.).

En esta categoría se encuentran aquellas respuestas, que aunque demuestren cierto dominio del problema en cuestión, mostraron también desviaciones esperadas. Estas desviaciones nos permiten establecer, las dificultades derivadas ya sea de la aplicación o de la interpretación de los criterios.

Categoría tres. Respuesta incorrecta (I).

En esta última categoría se encuentras aquellas respuestas que demuestran dificultades tan evidentes, que se puede concluir que los estudiantes desconocen los temas necesarios para resolver los problemas.

En la Tabla 1 se muestra un ejemplo de la relación entre las tres categorías propuestas, con las actividades mentales de Carpenter y Lehrer (1999).

Los aspectos que se consideraron para establecer las categorías en el ejemplo de la tabla 1, pueden variar al igual que las características y los objetivos de cada problema.

Tabla 1
Relación entre las categorías de comprensión y las actividades mentales

Actividades mentales de Carpenter y Lehrer.	Categorías de Comprensión C.	 P.C.	 I
	El estudiante…		
Construcción de relaciones.	Establece exitosamente las relaciones entre la información mostrada y los conocimientos relacionados con los criterios.	Reconoce las relaciones entre la información mostrada y sus conocimientos previos, pero no la concreta.	Establece relaciones incorrectas, ya sea que no comprenda el problema o que no tenga dominio sobre el conocimiento previo.
Extensión y aplicación de conocimiento matemático.	Aplica correctamente los principios y conceptos relacionados con los criterios.	Aplica los principios y conceptos relacionados con los criterios de forma incorrecta o incompleta.	No posee conocimiento acerca de los criterios.
Reflexión sobre las experiencias.	Recurre a experiencias previas mediante la reflexión en la solución del problema.	Resuelve el problema de forma mecánica sin que sea evidente una reflexión acerca de la naturaleza de la solución.	No reconoce los problemas por que carece de experiencia en ellos.
Articulación de lo que el individuo conoce.	Reconoce y emplea correctamente la notación algebraica y/o los esquemas o gráficos para representar sus respuestas.	Emplea notación algebraica de forma incorrecta, aunque su respuesta tenga indicios de ser correcta.	No emplea notación algebraica ni tampoco esquemas o diagramas en sus respuestas.
Apropiación del conocimiento matemático.	Demuestra dominio tanto del lenguaje como de los conceptos y procedimientos necesarios.	Emplea de forma incorrecta el lenguaje o los conceptos y procedimientos, aunque su respuesta tenga sentido.	Desconoce como resolver el problema y/o no puede dar lectura e interpretación del mismo.

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 1. Categorías de comprensión y actividades mentales.

3.3. Creencias y dificultades.

El dominio afectivo es un sistema de representación interna que involucra emociones, actitudes, creencias, valores morales y ética. Dentro de un mismo espectro se ubican los sentimientos y emociones considerados como de corta duración y con una carga muy elevada, en contraste con las creencias que son de una naturaleza mas estable y relacionadas con el conocimiento (Liljedahl & Oesterte, 2014)

En el contexto de las matemáticas, se introdujo el dominio afectivo para intentar explicar, por qué los alumnos que poseían los recursos cognitivos para tener éxito en las tareas matemáticas continuaban fallando. Relativo a los docentes de matemáticas, existe un interés creciente en cómo los factores afectivos influyen en la práctica del aula, en particular, los relativos a las creencias, actitudes y autoeficacia (Thompson, 1992).

Existen diferentes tipos de creencias que pueden influir en la enseñanza, por ejemplo: creencias sobre las matemáticas, creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas, creencias sobre los estudiantes, creencias sobre la propia capacidad de los docentes para hacer matemáticas y enseñar matemáticas, etc.

A partir de que se reconoce que las creencias afectan la enseñanza, se han realizado investigaciones acerca de las creencias de los maestros en formación, y del papel que juegan sus experiencias como estudiantes de matemáticas, en sus creencias iniciales sobre lo que significa enseñar matemáticas y del papel de los programas de formación docente para remodelar estas creencias.

El desempeño de la mayoría de las tareas intelectuales, se lleva a cabo dentro del contexto establecido por la propia perspectiva del estudiante, con respecto a la naturaleza de estas tareas. Los sistemas de creencias dan forma a la cognición, incluso cuando uno no es consciente acerca de sostener estas creencias (Schoenfeld, 1985).

La investigación sobre las creencias se complica por varios factores, incluido el límite borroso entre las creencias y el conocimiento, las creencias y actitudes/emociones, así como los desafíos para encontrar formas de medir las creencias y su impacto.

Los sistemas de creencias son la cosmovisión matemática de cada uno, la perspectiva con la cuál se aborda la matemática y las tareas matemáticas. Las creencias de un individuo acerca de las matemáticas, pueden determinar cómo elige abordar un problema, qué técnicas pueden ser usadas o evitadas, qué tanto y qué tan intensamente trabajará en él, y así sucesivamente. Las creencias establecen el contexto en el que los recursos heurísticos y de control operan (Schoenfeld, 1985). Diversas investigaciones han sido malinterpretadas por qué los estudios fallan al no tomar en cuenta asuntos afectivos, el impacto de variables afectivas está ahí, incluso si no fueron designadas.

Al exponer las tres categorías del conocimiento y comportamiento (Recursos, control y sistemas de creencias), requeridos para caracterizar la resolución de problemas en humanos, Shoenfeld (1983) menciona cuatro sistemas de creencias, de las cuáles el individuo no necesariamente esta consciente.

- respecto de uno mismo,
- respecto del medio ambiente,
- respecto del tema
- y respecto de las matemáticas.

Para los fines de esta investigación, proponemos observar las dificultades que presentan los estudiantes en sus respuestas de los problemas, con el objetivo de identificar aquellas que se pueden considerar dentro de la dimensión de las creencias, ya sean de carácter personal, ambientales o respecto de la comprensión de los criterios.

Capítulo 4.

Marco de referencia.

4. Marco de Referencia..

Para una correcta interpretación y aplicación de los criterios para calcular máximos y mínimos locales y puntos de inflexión, se requiere conocer conceptos previos, algunas definiciones, y el cómo se establecen las relaciones entre el comportamiento de la derivada con la monotonía de la función.

Un concepto que se menciona constantemente durante la aplicación de los criterios es el de punto crítico, un punto x_0 es un punto crítico de una función f, si es un punto de su dominio donde se cumple $f'(x_0)=0$. Algunos autores también consideran punto crítico aquel donde la derivada no existe, por ejemplo Haaser, LaSalle y Sullivan (1990(reimp. 2011)).

Otros conceptos son los de máximo local y mínimo local. Se dice que f tiene un valor máximo local (máximo relativo) en un punto a de su dominio I, si existe un intervalo de la forma $(a-r,a+r)\subset I$, tal que $f(x)\leq f(a)$ para todo punto $x\in(a-r,a+r)$, el valor máximo es $f(a)$, en el caso de que se cumpla que $f(x)\leq f(a)$ para todo punto $x\in I$, se dice que f tiene un valor máximo absoluto en a.

De manera análoga, decimos que existe un valor mínimo local (mínimo relativo) en un punto a de I, si existe un intervalo $(a-r,a+r)\subset I$ tal que $f(x)\geq f(a)$ para todo punto $x\in(a-r,a+r)$, el valor mínimo es $f(a)$, en el caso de que se cumpla que $f(x)\geq f(a)$ para todo punto $x\in I$, decimos que f tiene un valor mínimo absoluto en a. (Rivera, 2012).

En el caso de una función continua en un intervalo cerrado y acotado $\left[\alpha,\beta\right]$, ésta alcanza un valor máximo y un valor mínimo absoluto.

No se espera que un alumno de bachillerato adquiera un dominio completo sobre los conceptos, pero es importante que comprenda el lenguaje que se requiere al hablar de valores extremos, que distinga entre valores absolutos y valores relativos. También es importante, que distinga entre el punto x_0 del dominio donde la función toma un valor extremo, y el valor mismo $f\left(x_0\right)$ de la función en ese punto. A lo que se le llama valor máximo o valor mínimo es al valor de la función $f\left(x_0\right)$ y no al punto x_0.

Durante la enseñanza y el aprendizaje del papel que juega la derivada en el estudio de las funciones, es común que se hagan las siguientes asociaciones de ideas:

a) La derivada positiva corresponde a funciones crecientes.
b) La derivada negativa corresponde a funciones decrecientes.
c) La derivada creciente corresponde a una gráfica cóncava hacia arriba.
d) La derivada decreciente corresponde a una gráfica cóncava hacia abajo (Rivera & Ponce, 2013).

Sin embargo, estas asociaciones de ideas se precisan en enunciados que deben ser comprendidos y que van mas allá de una mera asociación de ideas, por ejemplo, tenemos el siguiente:

Teorema. Si una función f definida en un intervalo $\left[a,b\right]$ es derivable y $f'\left(x\right)>0$ para toda $x\in\left[a,b\right]$, entonces f es estrictamente creciente.

Una versión diferente del teorema anterior, es el siguiente:

Teorema. Si una función f definida en un intervalo $\left[a,b\right]$ es derivable y $f'(x) \geq 0$ para toda $x \in \left[a,b\right]$, entonces f es creciente.

La diferencia entre estos dos enunciados es muy sutil, en el primer caso se afirma, que la función es estrictamente creciente bajo la condición que la derivada es estrictamente positiva y en el segundo caso se afirma que la función es creciente, bajo la condición que la derivada es no negativa. Una diferencia más notable entre ambos teoremas es que el recíproco del primero es falso mientras que el recíproco del segundo es verdadero. Una situación análoga se tiene para funciones decrecientes.

Un ejemplo de esto se observa en $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, que es una función estrictamente creciente mientras que su derivada no es positiva en todos los puntos, ya que contiene una infinidad de puntos donde su derivada es igual a cero (Figura 4).

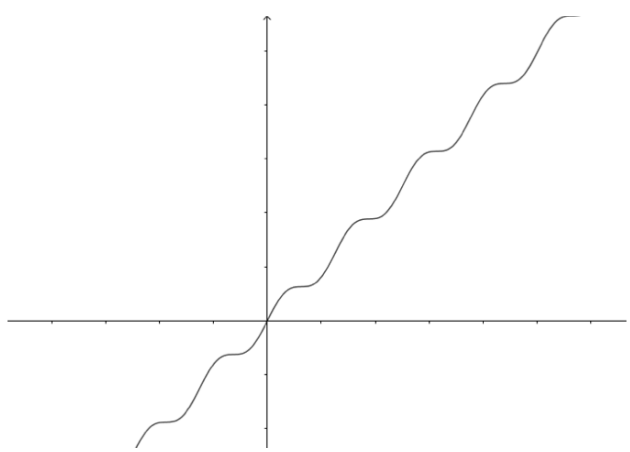


Figura 4. Gráfica de función estrictamente creciente, con derivada no negativa.

Los siguientes enunciados corresponden a definiciones que también merecen ser bien comprendidos.

- Si una función f es dos veces derivable en un intervalo [a, b] y su segunda derivada f '' es positiva en ese intervalo, entonces la función f es concava hacia arriba, si la segunda derivada es negativa entonces f es concava hacia abajo.
- Un punto de inflexión es un punto donde cambia la concavidad de una función, es decir donde la derivada pasa de ser creciente a ser decreciente o viceversa.

4.1. Primer criterio para máximos y mínimos.

Un enunciado común en los libros de texto, que caracteriza los puntos donde la función alcanza valores máximos o valores mínimos, es el siguiente.

Si una función $f:\left[a,b\right]\rightarrow\mathbb{R}$ alcanza un valor máximo o un valor mínimo local en un punto $x_0\in\left(a,b\right)$ y f es derivable en x_0, entonces $f'\left(x_0\right)=0$.

Al teorema anterior podríamos llamarle el primer criterio para determinar los máximos y mínimos de una función. En palabras, este teorema dice que una condición necesaria en una función que tiene un máximo o un mínimo en un punto x_0 donde es diferenciable, es que la derivada se anule en x_0.

A pesar de la simplicidad de este primer criterio para máximos y mínimos, involucra diversas condiciones que deberían considerarse al momento de referirse a él, por ejemplo puede ocurrir que en los cursos solamente se haga hincapié en que si existe el máximo o el mínimo, la derivada se anula; pero suele omitirse el hecho de que hay funciones donde la derivada sea anula en un punto x_0 y no necesariamente la función alcanza un valor extremo en $f\left(x_0\right)$. Tal es el caso conocido de la función $f\left(x\right)=x^3$, que tiene un punto crítico $x=0$, pero no alcanza un valor extremo en dicho punto (Figura 5).

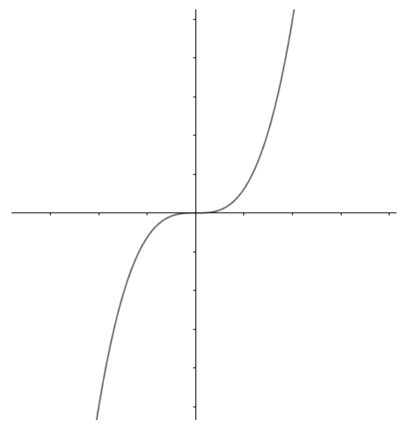


Figura 5.Gráfica de la función f(x)=x³.

Otro aspecto que en ocasiones se obvia, es que en los extremos del intervalo donde está definida la función, pueden existir máximos o mínimos absolutos, pero no se consideran porque suele ocurrir que la derivada no se anula en ellos, es decir, durante el proceso de enseñanza suele conducirse al estudiante a solamente considerar la existencia de valores extremos en los puntos críticos de la función.

4.2. Criterio de la primera derivada.

El criterio de la primera derivada es un teorema que nos ofrece las condiciones suficientes que nos permiten calcular valores máximos y valores mínimos de una función real.

Teorema.

Si f es una función derivable en $\left(a,b\right)$ y $x_0\in\left(a,b\right)$ es un punto crítico de f, y en alguna vecindad $\left(x_0-r,x_0+r\right)$ de x_0 se cumple que:

$$f\left(x\right)>0 \text{ para todo } x_0-r<x<x_0 \quad \text{y} \quad f\left(x\right)<0 \quad \text{para todo } x_0<x<x_0+r$$

Entonces f tiene un máximo local en x_0.

De manera análoga tenemos que si se cumple que:

$$f(x) < 0 \text{ para todo } x_0 - r < x < x_0 \text{ y } f(x) > 0 \text{ para todo } x_0 < x < x_0 + r$$

Entonces f tiene un mínimo local en x_0.

Es decir, el criterio de la primera derivada indica que si la derivada de una función f es positiva a la izquierda de un punto crítico y negativa a su derecha, entonces f tiene un máximo local en dicho punto crítico. Si por el contrario, la derivada es negativa por el lado izquierdo y positiva por el lado derecho entonces f tiene un mínimo en el punto crítico.

En la práctica, puede ser difícil aplicar este criterio porque se requiere encontrar una vecindad del punto crítico donde la derivada tenga un signo algebraico del lado izquierdo y el opuesto del lado derecho del punto crítico. El criterio puede fallar por dos razones.

i) La derivada tiene el mismo signo algebraico del lado izquierdo y del derecho y

ii) No existe una vecindad del punto crítico, tal que la derivada tenga distintos signos algebraicos del lado derecho que del izquierdo. (Rivera & Ponce, 2013)

Un ejemplo de la segunda razón se observa en la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2}{2 + \cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Las siguientes figuras muestran la gráficas de la función f a escala 1:1 y la gráfica de la misma función a escala 50:1, como puede observarse en la segunda gráfica la función se acerca oscilando a $x = 0$, lo que no permite establecer una vecindad lo suficientemente cercana al punto crítico para aplicar el criterio de la primera derivada.

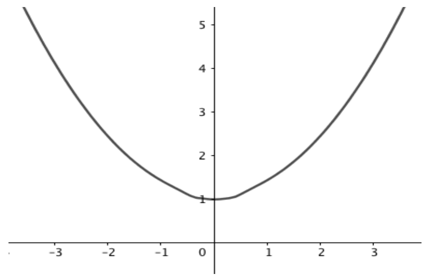


Figura 6. Gráfica de f

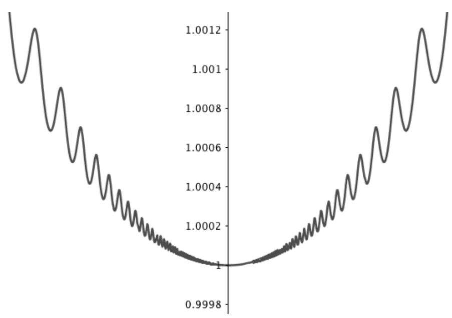


Figura 7. Gráfica de f en escala 50:1.

El criterio de la primera derivada en ocasiones suele resultar complejo, principalmente, por la necesidad de establecer vecindades lo suficientemente pequeñas alrededor de los puntos críticos, que garanticen determinar el signo de la primera derivada.

Durante el proceso de enseñanza, suele sugerirse el uso de tablas para aplicar el criterio de la primera derivada, empleando valores suficientemente cercanos a los puntos críticos, un ejemplo de este procedimiento, se puede observar en el siguiente problema extraído de un libro texto ampliamente utilizado en los cursos de Cálculo Diferencial, tanto por docentes como por alumnos.

"Problema: Calcular los máximos y mínimos locales de la función f dada por $f(x) = x^{1/3}(8-x)$. Traza la gráfica de f ". (Swokowski, 1979).

Una vez calculados los puntos críticos de la función, el autor los emplea para establecer intervalos y propone que los signos de la derivada se obtengan sustituyendo "valores de prueba *k*" elegidos de cada intervalo. Argumenta que la validez de los signos de la derivada en los valores de prueba *k*, son suficientes para cada intervalo debido a la continuidad de la función. El autor muestra los resultados en una tabla como la siguiente.

Tabla 2

Análisis de los puntos críticos de f.

Intervalo	(- ∞, 0)	(0, 2)	(2, ∞)
k	-1	1	8
Valor de prueba *f'*(*k*)	4	$\frac{4}{3}$	- 2
Signo de $f'(x)$	+	+	-
Comportamiento de *f*	creciente en (-∞, 0]	creciente en (-∞, 0]	decreciente en (2, ∞,]

Tabla 2. Ejemplo de análisis de una función por el criterio de la primera derivada..

Adaptado de "Caclulus With Analytic Geometry" por E.W. Swokowsky (1979), p. 179.

En la Tabla 2, se puede observar que la derivada cambia de signo, al pasar de la izquierda a la derecha del punto crítico $x = 2$. Por lo que se concluye que, la función f tiene un valor máximo local igual a $f(2)$.

Lo que no se menciona en el resultado del problema, es qué ocurre con los puntos críticos dónde la derivada no cambia de signo. El vacío de información en este sentido, puede llevar a conclusiones incorrectas, cuando los estudiantes crean sus imágenes mentales con esta omisión y como consecuencia de no utilizar suficientes ejemplos de funciones.

Una de estas conclusiones incorrectas, es suponer que todos aquellos puntos críticos donde no se localizan valores máximos o mínimos, son en automático puntos de inflexión. En la práctica, así ocurre con la mayoría de las funciones que se utilizan como ejemplos y ejercicios durante la enseñanza del Cálculo diferencial en el nivel bachillerato. Es decir, los puntos críticos que no corresponden a máximos o a mínimos, por supuesto coinciden con los puntos de inflexión. Sin embargo, existen funciones especiales en donde esto no ocurre, por ejemplo la función.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x|x|}{2+sen\left(\dfrac{1}{x}\right)} & si \quad x\neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

Tiene un punto crítico en $x=0$, al que no le corresponde algún valor extremo o punto de inflexión (Figura 8).

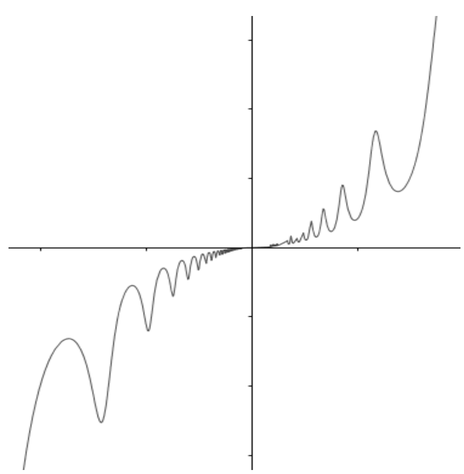


Figura 8. Ejemplo de función donde a un punto crítico no le corresponde un valor extremo o un punto de inflexión.

Otra conclusión incorrecta, es que los estudiantes tienden a calcular los puntos de inflexión de una función, empleando únicamente los puntos críticos (Rivera & Ponce, 2013).

4.3. Criterio de la segunda derivada.

Una forma más directa para determinar si los puntos críticos de una función corresponden a valores extremos, es el criterio de la segunda derivada. En este criterio, se emplean las nociones de concavidad y su relación con los signos de la segunda derivada en los puntos críticos de la función.

Si f es una función dos veces derivable en (a,b) y $x_0 \in (a,b)$ es un punto crítico de f, es decir $f'(x_0)=0$,

a) si $f''(x_0)>0$, entonces f tiene un mínimo en x_0.

b) si $f''(x_0)<0$, entonces f tienen un máximo en x_0.

En otras palabras, si la segunda derivada es positiva en un punto crítico de la función, entonces alcanza un mínimo local y si la segunda derivada es negativa, entonces alcanza un máximo local en el punto crítico.

Este criterio no garantiza que la segunda derivada debe ser negativa o positiva, si en un punto crítico hay un máximo o un mínimo, según sea el caso (algo similar a lo que ocurre en el primer criterio para máximos y mínimos). Un ejemplo de esto, es la función $f(x)=x^4$, que tiene un mínimo absoluto en $x=0$, pero que $f''(0)=0$ (Figura 9).

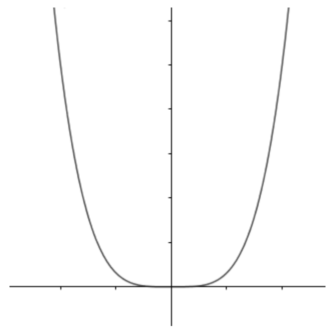


Figura 9. Gráfica de f(x) =x^4.

Por otra parte, existen funciones derivables en las que ocurre que, en los puntos críticos la segunda derivada no existe. En esos casos, será necesario intentar el análisis por el criterio de la primera derivada, siempre que sea posible.

4.4. Concavidad y puntos de inflexión.

El análisis de la concavidad de una función, aporta información más precisa acerca de su comportamiento y nos permite ubicar sus puntos de inflexión. La concavidad está relacionada con la derivada, de la siguiente forma:

Si una función f es derivable en un intervalo $\left[a,b\right]$, decimos que f es:

a) Cóncava hacia arriba en $\left[a,b\right]$ si f' es creciente en $\left[a,b\right]$.

b) Cóncava hacia abajo en $\left[a,b\right]$ si f' es decreciente en $\left[a,b\right]$.

Como ya se mencionó anteriormente, los puntos de inflexión se localizan en los puntos dónde la función cambia de concavidad, es decir dónde la derivada pasa de ser creciente a ser decreciente o viceversa.

Si función f es derivable en un intervalo $\left[a,b\right]$, un punto $a<c<b$ es un punto de inflexión de f, si existe una vecindad $\left(c-r,c+r\right)$ de c, tal que f es cóncava hacia arriba

en $(c-r,c)$ y cóncava hacia abajo en $(c,c+r)$, también ocurre cuando f es cóncava hacia abajo en $(c-r,c)$ y cóncava hacia arriba en $(c,c+r)$.

Debido a la relación de la concavidad con la derivada de una función, ocurre que si existe un punto de inflexión de una función f en un valor x_0, entonces f' tiene un máximo o un mínimo en x_0. A partir de esta relación, podemos realizar el cálculo de los puntos de inflexión, si a la derivada se le aplica el criterio de la primera derivada, obteniendo la siguiente conclusión.

Si en una función f dos veces derivable en un intervalo $[a,b]$, se tiene un punto $a<c<b$ tal que $f''(c)=0$, y existe una vecindad $(c-r,c+r)$ de c, tal que $f''(x)$ tiene signos diferentes en los intervalos $(c-r,c)$ y $(c,c+r)$, entonces f tiene un punto de inflexión en c.

En resumen, para obtener los puntos de inflexión de una función, se requiere obtener las raíces de su segunda derivada y realizar el análisis de concavidad alrededor de ellos, es decir, comprobar que la segunda derivada cambia de signo, antes y después del valor de referencia.

Por último, otra forma de obtener los puntos de inflexión de una función se propone en el criterio de la tercera derivada, que dice que f tiene un punto de inflexión en x_0, si $f''(x_0)=0$ y $f'''(x_0)\neq 0$.

Capítulo 5.

Metodología.

5. Metodología.

La presente investigación es de tipo cualitativo y para su realización se siguieron las etapas que se describen a continuación.

Primera etapa. Revisamos los actuales programas de estudio de la materia de Cálculo Diferencial, y los comparamos con los programas de estudio que se empleaban en años recientes.

Segunda etapa. Aplicamos un instrumento de investigación, para obtener información acerca de la aplicación y comprensión de los aspectos elementales de los criterios de la primera y segunda derivada. Diseñamos los problemas de tal forma, que su resolución no requiriera desarrollos o procedimientos algebraicos complicados; procurando que en las respuestas se hiciera evidente el nivel de comprensión de los estudiantes, y que nos permitiera detectar las dificultades que se presentan al aplicar los criterios.

Tercera etapa. Realizamos el análisis de los datos obtenidos, categorizándolos en tres niveles de comprensión, que fueron establecidos previamente para cada problema. El análisis se presenta en este informe, primero de forma general, posteriormente por institución y al final se eligen y exponen los casos interesantes que nos permiten describir los problemas de creencias y dificultades detectados.

Cuarta etapa. A partir de la selección de los casos interesantes, realizamos entrevistas con aquellos estudiantes que nos pudieran brindar información acerca de sus trayectorias de solución y de las dificultades detectadas.

5.1. Participantes.

Nuestra investigación se llevó a cabo con estudiantes de nivel medio superior, que recién habían cursado y aprobado la materia de Cálculo Diferencial.

Participaron treinta estudiantes del sexto semestre de bachillerato tecnológico de la especialidad de Programación, del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos núm. 9, "Juan de Dios Batiz" (CECyT 9).

También participaron treinta y un alumnos de nuevo ingreso de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del Instituto Politécnico Nacional (UPIICSA), de los cuáles veintitrés eran egresados de diversos Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional, tres egresados de planteles de la Escuela Normal Preparatoria de la Universidad Nacional Autónoma de México, cuatro egresados de diversos institutos tecnológicos regionales y un egresado de la Universidad del Valle de México. Los estudiantes de UPIICSA aun no habían cursado la materia de Cálculo Diferencial a nivel universitario.

Aunque se tuvo la oportunidad de aplicar el cuestionario a estudiantes de otros planteles de nivel bachillerato, no los consideramos para el análisis de datos, por mostrar un completo desconocimiento de los temas relacionados con el Cálculo Diferencial, como fue el caso del plantel núm. 18 del Colegio de Bachilleres, Tlilhuaca Azcapotzalco (Col. Bach. 18), y del Centro de Estudios Tecnológicos industrial y de servicios núm. 8, "Rafael Dondé" (CETis núm. 8). Al consultar con los docentes en ambas instituciones respecto de esta situación, coincidieron que por instrucciones de las autoridades de sus planteles, se empleó el tiempo destinado a los cursos de Cálculo, para darle prioridad a los contenidos de la prueba PLANEA. A título personal, podemos confirmar esta información, ya que siendo presidente de la academia local de matemáticas de un plantel, recibimos la misma instrucción por parte de la coordinación estatal, que incluso realizó supervisiones en todos los planteles del Distrito Federal, para verificar que los docentes procedieran como fue indicado.

En la Tabla 3 se muestra un concentrado de los participantes, por plantel y nivel de estudios.

Tabla 3
Participantes en el estudio de caso por plantel y nivel de estudios.

Institución.	Participantes	Nivel máximo de estudios
CECyt núm. 9	30	Sexto semestre de bachillerato
UPIICSA	31	Recién gresados de Bachillerato
Total	61	

Tabla 3. Participantes en el estudio de caso por plantel y nivel de estudios.

Edades promedio de los participantes por institución se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4
Participantes en el estudio de caso por edad y plantel.

Institución.	Participantes	Edad media
CECyt núm. 9	30	17.5
UPIICSA	31	19.7
Total	61	-----

Tabla 4. Participantes en el estudio de caso por edad y plantel.

5.2. Proceso de recolección de datos.

La recolección de datos se realizó en las instalaciones de cada institución, con el apoyo y presencia de sus profesores titulares, el tiempo propuesto para la resolución del instrumento fue de noventa minutos.

Después de revisar las respuestas de sus cuestionarios, se hizo una selección de algunos estudiantes para entrevistarlos, con el propósito de profundizar en el análisis de sus respuestas.

5.3. Diseño y descripción del instrumento de investigación.

El instrumento aplicado para el presente estudio, es un cuestionario de diez problemas no rutinarios. En seis de esos problemas presentamos gráficas de funciones en el plano cartesiano y solicitamos a los participantes, que a partir de ellas, describieran información acerca de conceptos tales como: monotonía de la función, valores máximos y mínimos locales, concavidad, y puntos de inflexión (problemas 1, 2, 5, 6, 7 y 8). En dos de los problemas restantes, solicitamos que determinaran la existencia y localización de los valores máximos y/o mínimos de una función, por medio del criterio de la primera derivada (problemas 3 y 4). En otro problema, solicitamos calcular los puntos de inflexión (problema 9). El último problema lo diseñamos contemplando diversas trayectorias de solución, la más elemental (y por lo mismo la más esperada) era que se respondiera a partir de bosquejar una gráfica (problema 10), con este último problema tuvimos la intención de averiguar si los estudiantes empleaban a los extremos del dominio de una función, para el cálculo de valores extremos absolutos, y también, si se consideraban los puntos críticos de la función en aquellos valores en donde se indetermina la derivada.

Si bien nuestro principal interés, es estudiar la comprensión y la aplicación de los criterios para determinar los máximos, mínimos y los puntos de inflexión de una función, al diseñar el instrumento, se pretendió además, que las respuestas mostraran la comprensión de los participantes acerca de temas relacionados, como son el uso del lenguaje y la notación algebraica, el reconocimiento de la terminología propia del tema y su habilidad para los procesos de derivación directa.

5.3.1. Problemas uno y dos.

Diseñamos los primeros dos problemas, con la finalidad de identificar si el nivel de comprensión de los participantes, les permitía relacionar la gráfica de una función con las condiciones que se describen en los criterios de la primera y de la segunda derivada.

Consideramos que el nivel de comprensión los criterios se hace evidente, si a partir de una representación externa, como la gráfica de una función, los estudiantes realizan conexiones al emplear otras representaciones externas, como son, intervalos o desigualdades, para describir el comportamiento de los signos de la primera derivada a lo largo del dominio de la función. La concavidad y los puntos de inflexión, por su parte, nos permitirán averiguar si se comprenden las relaciones entre la gráfica de la función, con el comportamiento del signo en la segunda derivada.

En el problema uno (Figura 10), presentamos una gráfica de una función en la que indicamos los puntos que corresponden al máximo y mínimo locales y al punto de inflexión, solicitamos a los participantes que describieran la información mostrada en la gráfica.

Figura 10. Problema uno del instrumento de investigación.

1. La siguiente imagen representa la gráfica de una función h, con la información que se muestra complete lo siguiente:

a) Es $h'(x) > 0$ para todo x en:

b) Es $h'(x) < 0$ para todo x en:

c) Es $h'(x) = 0$ para todo x en:

d) Es $h''(x) > 0$ para todo x en:

e) Es $h''(x) < 0$ para todo x en:

f) La función h tiene puntos de inflexión en:

g) Los valores máximos locales de h son:

h) Los valores mínimos locales de h son:

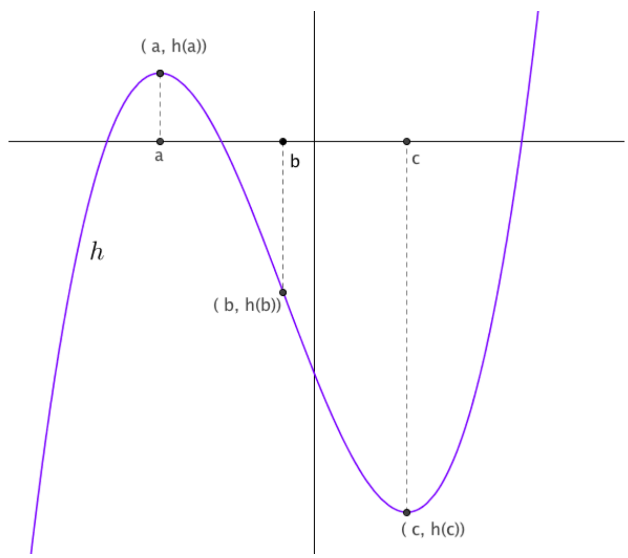


Figura 10. Problema uno del instrumento de investigación.

En el problema dos, presentamos la mismas cuestiones que en el problema uno, la diferencia, es que en este último se emplearon valores numéricos para mostrar los puntos que corresponden a los valores máximos, mínimos y los puntos de inflexión, (Figura 11).

Figura 11. Problema dos del instrumento de investigación.

2. La siguiente imagen representa la gráfica de la función f, con la información que se muestra complete lo siguiente:

a) Es $f'(x) > 0$ para todo x en:

b) Es $f'(x) < 0$ para todo x en:

c) Es $f'(x) = 0$ para todo x en:

d) Es $f''(x) > 0$ para todo x en:

e) Es $f''(x) < 0$ para todo x en:

f) La función f tiene puntos de inflexión en:

g) Los valores máximos locales de f son:

h) Los valores mínimos locales de f son:

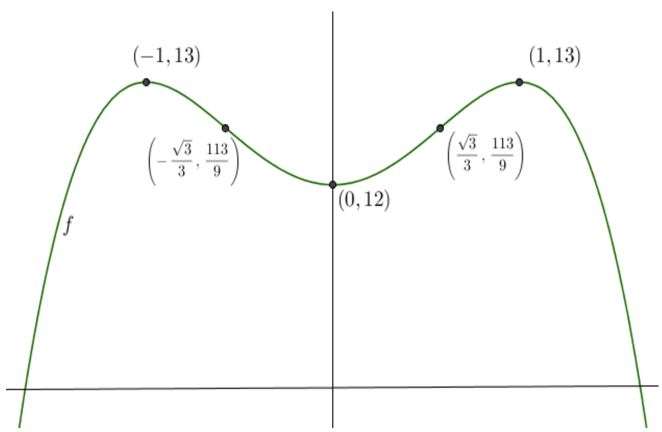


Figura 11. Problema dos del instrumento de investigación.

En ambos problemas, consideramos analizar la notación y el lenguaje que empleaban los participantes para describir sus ideas y sus propuestas de solución. Averiguar si lograban identificar los elementos empleados en los criterios de la primera y la segunda derivada, tales como: puntos críticos, valores máximos, valores mínimos y puntos de inflexión.

Otro elemento de análisis importante, fue verificar si las respuestas se presentaron mediante el uso de notación de intervalos o describiendo las soluciones en términos puntuales. Este análisis nos permitiría conocer si las relaciones entre la monotonía de una función y el cambio de signo en su primera derivada son considerados sobre un intervalo. Pero, considerando como desviación posible, el que se recurrieran a resultados puntuales Por ejemplo, una solución esperada para el inciso 1.a. sería: "Es $h'(x) > 0$ para todo x en: $(-\infty, a) \bigcup (c, \infty)$, esta respuesta mostraría que los participantes emplearon adecuadamente la notación de intervalos, la respuesta también se consideró correcta si se describieron por medio de desigualdades, en este caso, para el inciso 1.a. se consideró como solución correcta la expresión: "$x < a$ *ó* $x > c$ ", en algunos casos ocurrió que algunas respuestas se realizaron por medio de indicaciones o dibujos sobre la gráfica, en otros casos se describieron mediante el uso de lenguaje común.

Como ya se mencionó, la diferencia entre los problemas uno y dos, es que en el primero todos los elementos mostrados en la gráfica se presentaron mediante términos literales, mientras que en el segundo se emplearon valores numéricos. Los diseñamos de esta forma con la intención de sugerir implícitamente, que las soluciones se describieran mediante conjuntos continuos (ya sea con intervalos o desigualdades), pero se consideró la posibilidad de que los alumnos fueran directamente al segundo problema por ser numérico y que intentaran dar soluciones puntuales. De hacerlo de esta forma, sería evidente la presencia de una dificultad implantada en su sistema de creencias, acerca de cómo se concibe la monotonía de una función respecto de la derivada. Por ejemplo, una solución incompleta pero esperada en el inciso 2.a. sería por ejemplo: "Es $f'(x) > 0$ para todo x en: $x = -2$, o $x = -0.5$ "o cualquier lista de números que validen la condición solicitada.

En los incisos d y e, de ambas situaciones se propuso averiguar, si los sujetos lograban establecer la relación entre la gráfica de la función y su concavidad, mediante el criterio de la segunda derivada. En los incisos g y h, se solicitó que indicaran los valores máximos y mínimos respectivamente, se planteó de esta forma para identificar la interpretación de ambos conceptos por parte de los estudiantes.

5.3.1. a. Trayectorias hipotéticas de problemas uno y dos.

Las respuestas correctas esperadas, en los problemas uno y dos se muestran a continuación.

Soluciones problema uno.

a) Es $h'(x) > 0$ para todo x en: $(-\infty, a) \cup (c, \infty)$

b) Es $h'(x) < 0$ para todo x en: (a, c)

c) Es $h'(x) = 0$ para todo x en: $\{a, c\}$

d) Es $h''(x) > 0$ para todo x en: (b, ∞)

e) Es $h''(x) < 0$ para todo x en: $(-\infty, b)$

f) La función h tiene puntos de inflexión en: $x = b$, el punto es $(b, h(b))$

g) Los valores máximos locales de h son: $h(a)$

h) Los valores mínimos locales de h son: $h(c)$

Soluciones problema dos.

a) Es $f'(x) > 0$ para todo x en: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

b) Es $f'(x) < 0$ para todo x en: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

c) Es $f'(x) = 0$ para todo x en: $\{-1, 0, 1\}$

d) Es $f''(x) > 0$ para todo x en: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

e) Es $f''(x) < 0$ para todo x en: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

f) La función f tiene puntos de inflexión en: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{113}{9}\right) y \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{113}{9}\right)$:

g) Los valores máximos locales de f son: $f(-1) = f(1) = 13$

h) Los valores mínimos locales de f son: $f(0) = 12$

5.3.1.b. Dificultades esperadas de los problemas uno y dos.

Consideramos que las posibles dificultades, que los participantes del estudio podrían exhibir al resolver los problemas uno y dos, serían:

En los incisos del a) al e):

- Se escribieran las soluciones en intervalos cerrados o semicerrados.
- Se escribieran mediante valores puntuales.
- Si se empleaban desigualdades, era posible que se escribieran de forma errónea.
- Que se confundieran los puntos mostrados en la figura con intervalos.

En el inciso f):

- Que se confundiera el punto de inflexión con los puntos donde la función alcanza sus máximos o mínimos locales.

En los incisos g) y h):

- Que se cambiara el orden de las respuestas.
- Que se confundieran los valores máximos y mínimos con los puntos físicos o con los valores de las abscisas de los puntos.

5.3.2. Problemas tres y cuatro.

Para el diseño de los problemas tres y cuatro, consideramos que las soluciones nos permitieran analizar los procedimientos elegidos por los estudiantes al aplicar el criterio de la primera derivada. En este sentido, consideramos importante identificar si las soluciones empleaban algún algoritmo o proceso.

En el problema tres (Figura 12), se presentó una función y se solicitó a los participantes que identificaran, a qué tipo de valor extremo de la función corresponde un punto crítico dado. Para responder de manera precisa, los estudiantes requerían realizar el cálculo de los otros puntos críticos, ya que designamos la función de tal forma, que uno de los puntos críticos omitidos se encuentra a un décimo de distancia, del punto crítico mostrado.

Figura 12. Problema tres del instrumento de investigación.

3. Para la función $f(x) = 50x^4 - x^2$, tenemos que $f'(0) = 0$.

   Aplique el criterio de la primera derivada para determinar si existe un máximo o un mínimo local en $x = 0$, describa el procedimiento y justifique su respuesta.

Figura 12. Problema tres del instrumento de investigación.

En el problema cuatro, solicitamos que se calcularan los máximos o mínimos de una función polinómica de grado cuatro (Figura 13). Al igual que el problema 3, se diseñó para que dos de los puntos críticos se encontrarán cercanos en términos de fracción decimal.

Figura 13. Problema cuatro del instrumento de investigación

4. Utilizando el criterio de la primera derivada determine si existen máximos o mínimos de g.

$$g(x) = 5x^4 - 6x^3 - x^2$$

Figura 13. Problema cuatro del instrumento de investigación

Procuramos que el álgebra en ambas situaciones fuera muy elemental y no requiriera procedimientos tediosos o complejos, las operaciones aritméticas involucradas también eran sencillas. Nuestra intención en estos problemas fue la de analizar detenidamente el proceso de aplicación del criterio de la primera derivada, sin que esto requiriera de un procedimiento largo o complejo, que desalentara a los participantes.

5.3.2. a. Trayectorias hipotéticas de problemas tres y cuatro.

A continuación, mostramos las estrategias de solución para los problemas tres y cuatro, en las que se consideró que para el análisis de monotonía de la función, se verificara el comportamiento de la derivada, para cada uno de los intervalo obtenidos a partir de dividir el dominio de la función por medio de los puntos críticos.

Solución problema tres.

Se calculan los puntos críticos de la función f, para esto se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$, como se muestra a continuación.

$$f(x)=50x^4-x^2$$
$$f'(x)=200x^3-2x$$
$$200x^3-2x=0$$
$$x(100x^2-1)=0$$
$$x=-\frac{1}{10},x=0,x=\frac{1}{10}$$

Se plantean los intervalos entre $x = 0$ y los otros puntos críticos, para realizar análisis de la monotonía de la función por medio de la primera derivada.

Para el lado izquierdo de x = 0, el intervalo a considerar es $\left(-\frac{1}{10},0\right)$, en donde la $f'(x)=2x(10x-1)(10x+1)$ es positiva . (Dado que para $-\frac{1}{10}<x<0$, ocurre que $2x<0$, $10x-1<0$ y $10x+1>0$). Entonces la función es creciente en este intervalo.

Para el lado derecho de x = 0, el intervalo es $\left(0,\frac{1}{10}\right)$, en este intervalo la función $f'(x)$ es negativa. . (Para $0<x<\frac{1}{10}$, ocurre que $2x>0$, $10x-1<0$ y $10x+1>0$). Por lo que la función *f* es decreciente en este intervalo. Por lo tanto, existe un máximo local en $x = 0$.

Solución problema cuatro.

El problema cuatro se resuelve de forma similar al problema tres, con la diferencia , de que se debe hacer el análisis para todos los puntos críticos que se obtengan, al resolver la ecuación $g'(x) = 0$.

$$g(x)=5x^4-6x^3-x^2$$
$$g'(x)=20x^3-18x^2-2x$$
$$20x^3-18x^2-2x=0$$
$$x(10x+1)(x-1)=0$$
$$x=-\frac{1}{10},x=0,x=1$$

Posteriormente, se divide el dominio de la función en intervalos, de tal forma, que los extremos de cada intervalo sean los puntos críticos obtenidos, por lo que el dominio de la función *g* queda dividido en los siguientes cuatro intervalos,

$$D_g=\left(-\infty,-\frac{1}{10}\right)\cup\left(-\frac{1}{10},0\right)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$$

Se describe la monotonía de la función, mediante la aplicación del criterio de la primera derivada para los intervalos propuestos. Con el fin de establecer el signo de la derivada para todos los valores de cada intervalo, se considera la función $g'(x) = 2x\,(10x + 1)(x - 1)$.

En el primer intervalo tenemos que $x<-\frac{1}{10}$, por lo que los valores de cada uno de los factores de g' resultan: $2x < 0$, $10x + 1 < 0$ y $x - 1 < 0$, por lo que $g'(x)$ resulta ser negativo y por lo tanto la función *g* es decreciente.

De la misma forma se obtienen los signos de la derivada en el resto de los intervalos y se concluye que existen mínimos locales en $x=-\frac{1}{10},x=1$ y existe un máximo local en $x=0$.

Consideramos que los participantes en el estudio realizarían el análisis de monotonía al aplicar el criterio de la primera derivada, a valores puntuales elegidos en cada intervalo.

5.3.2.b. Dificultades esperadas de los problemas tres y cuatro.

En el problema tres, se esperaba como dificultad principal, que los participantes no consideraran necesario calcular los otros puntos críticos y aplicaran el criterio de la primera derivada, sobre el punto crítico en cuestión, tomando cualquier valor a su izquierda y a su derecha, sin restricción alguna. En este sentido la respuesta a la que llegarían sería errónea.

En ambos problemas consideramos dificultades esperadas, las siguientes:

- Que solamente se derivara la función, mediante la instrucción de emplear el criterio de la primera derivada.
- Que no se derivara correctamente o que no se obtuvieran todos los puntos críticos.
- Que una vez obtenidos los puntos críticos, se decidiera si corresponden a máximos o mínimos, ya sea por el orden en el que aparecen o mediante los valores de sus imágenes.
- Que no se considerara que la monotonía de la función se establece sobre un intervalo y solamente se asignaran valores puntuales a la derivada.

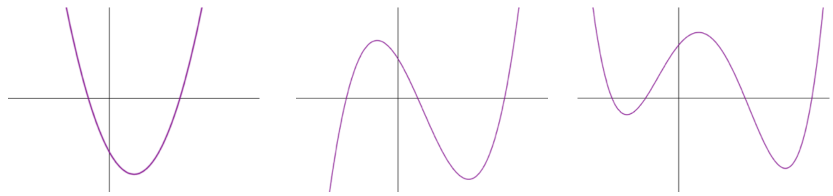
5.3.3. Problemas cinco y seis.

Los problemas cinco y seis, se diseñaron con el fin de identificar los participantes eran capaces de establecer el orden de derivación, dadas tres gráficas que corresponden a una función, su primera derivada y su segunda derivada, colocadas en forma aleatoria y sin indicar la regla de correspondencia, (Figura 14).

Figura 14. Problemas cinco y seis del instrumento de investigación

Problema cinco.

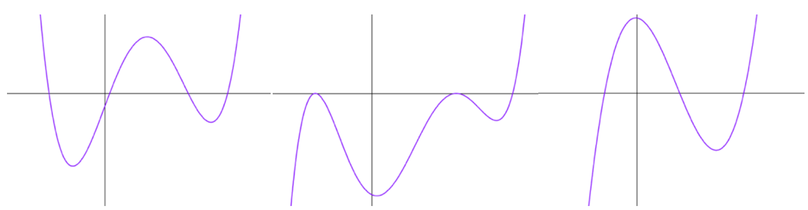
5. En las siguientes imágenes escriba cuál corresponde a cada una de las gráficas de las funciones *f, f'* ó *f''*.



a) ____________________ b) ________________ c) _______________

Problema seis.

5. En las siguientes imágenes escriba cuál corresponde a cada una de las gráficas de las funciones *g, g'* ó *g''*.



a)________________ b) ________________ c) ________________

Figura 14. Problemas cinco y seis del instrumento de investigación.

Las respuestas correctas para los problemas cinco y seis, se muestran a continuación.

Solución problema cinco.

En el problema cinco, el orden consecutivo de la las gráficas de la función y de sus derivadas, es: a) *f''*, b) *f'* y c) *f*.

Solución problema seis.

Para el problema seis, el orden consecutivo de la las gráficas de la función y de sus derivadas, es: a) f'', b) f' y c) f.

5.3.3.a. Desviaciones esperadas de los problemas cinco y seis.

Consideramos que la mayoría de los estudiantes, no tendrían problema, al realizar la ordenamiento de las gráficas de los problemas cinco y seis. Una desviación esperada es que eligieran el orden de las gráficas al suponer que un orden mayor de derivación, aumenta el número de valores extremos de las gráficas.

5.3.4. Problema siete.

En el problema siete (Figura 15), se pretendió que partir de la gráfica de su primera derivada, los participantes intentaran identificar diversos elementos de análisis de una función, tales como: puntos críticos, valores extremos o puntos de inflexión. Uno de los aspectos importantes sería averiguar si los estudiantes identifican los signos de la derivada, a lo largo de su gráfica sobre el plano cartesiano, para con esto definir los intervalos de monotonía de la función.

Esperamos que los estudiantes muestren comprensión, acerca de que la sección del plano que se encuentra por arriba del eje de las abscisas, contiene los valores positivos de la derivada, mientras que la sección que se encuentra por abajo contiene las valores negativos. Una vez identificados estos signos en la gráfica de la derivada, se requiere que los estudiantes, logren establecer los intervalos donde la función es creciente o decreciente, y que las raíces de f' corresponden a los puntos críticos del dominio de la función.

Figura 15. Problema siete del instrumento de investigación.

7. La siguiente imagen representa la gráfica de la primera derivada de una función f. Con la información que se muestra determine:

a) Los puntos críticos de f.

b) En qué valores de x la función f alcanza un máximo.

c) En qué valores de x la función f alcanza un mínimo.

d) En qué valores de x la función f tiene puntos de inflexión.

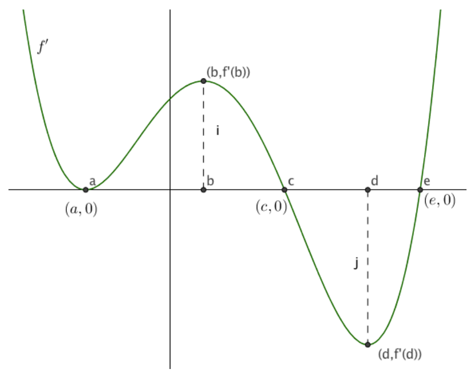


Figura 15. Problema siete del instrumento de investigación.

Al relacionar los puntos críticos de la función, con el cambio de signo en la gráfica de la derivada, deberían estar en condiciones interpretar el criterio de la primera derivada y señalar aquellos puntos donde la función alcanza máximos o mínimos relativos, así como distinguir cuando no se presenta el cambio de signo. También fue de nuestro interés averiguar, si los participantes podían relacionar los puntos de inflexión de la función, con los valores extremos mostrados en la gráfica de la derivada.

5.3.4. a. Trayectoria hipotética del problema siete.

La estrategia de solución para el problema siete, requería que se interpretaran las condiciones que se indican en el criterio de la primera derivada, a partir de una representación gráfica, por lo que era necesario establecer los valores y signos de la derivada, en los puntos señalados en la gráfica y alrededor de ellos.

Solución problema siete.

a) Los puntos críticos de f corresponden a las raíces de f' y son: $x = a$, $x = c$ y $x = e$.

b) En $x = c$, la derivada cambia de positiva a negativa, por lo tanto la función f alcanza un máximo local.

c) En $x = e$, la derivada cambia de negativa a positiva, por lo tanto la función f alcanza un mínimo local.

d) La función f tiene puntos de inflexión en $x = a$, $x = b$ y $x = d$. Los puntos de inflexión de la función corresponden con los puntos críticos de la derivada.

5.3.4.b. Dificultades esperadas del problema siete.

Realizar conexiones entre el comportamiento gráfico de la derivada con los elementos de una función, no es un ejercicio común para un curso de Cálculo Diferencial de bachillerato. Para el problema siete, a partir de una representación externa en forma de gráfica, los participantes necesitaban establecer conexiones entre sus representaciones internas, respecto de las condiciones del criterio de la primera derivada, para expresar sus soluciones mediante otras representaciones externas. Consideramos que los participantes podrían mostrar, las dificultades siguientes:

- Que se confundieran los elementos de la gráfica de la derivada con los elementos de la función.

- Que aun cuando se concluyera que las raíces de la derivada son los puntos críticos de la función, no se lograra identificar el signo de la derivada, para establecer la monotonía de la función.
- Que no se identificara la conexión entre los valores extremos de la derivada, con los puntos de inflexión de la función.

5.3.5. Problema ocho.

En el problema ocho, presentamos la gráfica de la segunda derivada de una función y se indicaron sus raíces (Figura 16), también se dio información acerca de los puntos críticos de la función y se solicitó que determinaran los puntos donde la función alcanza valores máximos, valores mínimos y puntos de inflexión.

Se pretendía que dados los puntos críticos, el participante los relacionara con el signo de la segunda derivada y mediante el criterio de la segunda derivada identificara el comportamiento de la función. Por ejemplo en el punto crítico $x = a$, la segunda derivada es negativa, según el criterio de la segunda derivada se encuentra un máximo local en dicho valor. Al contrario, el punto crítico en $x = c$, es también una raíz de la segunda derivada, no se trata de un valor extremo, porque en ese punto ocurre el cambio de concavidad de la función.

Esta situación demandaba que el participante tuviera un alto nivel de dominio de los conceptos y de las condiciones necesarias para interpretar el criterio de la segunda derivada, además se requería que lograran hacer las conexiones del comportamiento algebraico de la segunda derivada a partir de su gráfica, se esperaba que incluso algunos alumnos que tuvieran dominio procedimental de los criterios no lograran establecer dichas conexiones, se consideró esto último como el principal interés de exploración en este problema.

Figura 16. Problema ocho del instrumento de investigación.

8. En la siguiente imagen se muestra la gráfica de f'' (la segunda derivada de f) y se sabe que $f'(a) = f'(c) = f'(e) = 0$. Con esta información, determinar los puntos donde la función f alcanza sus valores máximos, mínimos y los de inflexión (si existen). Justifique su respuesta.

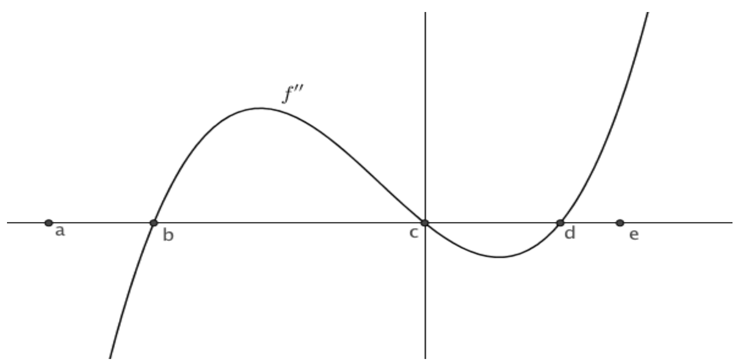


Figura 16. Problema ocho del instrumento de investigación.

5.3.5. a. Trayectoria hipotética del problema ocho.

Consideramos que para resolver el problema ocho, se necesitaban realizar conexiones internas entre la interpretación del criterio de la segunda derivada, con una representación externa en forma de gráfica. Realizadas estas conexiones, los estudiantes identificarían a partir de los puntos indicados sobre la gráfica de la segunda derivada, los valores extremos de la función y sus puntos de inflexión.

Solución problema ocho.

Dado que se satisfacen las condiciones suficientes : $f'(a)=0$ y $f'(a) = 0$ y $f''(a)<0$

se puede afirmar que f alcanza un máximo local en $x = a$. En $x = e$, se alcanza un mínimo local, ya que se cumple que $f''(e)=0$ y $f''(e)>0$. Los puntos de inflexión de f se localizan en $x = b$, $x = c$, y $x = d$, porque en los tres puntos la segunda derivada se anula y ocurre el cambio de concavidad en una vecindad suficientemente pequeña de cada uno de ellos.

5.3.5.b. Dificultades esperadas del problema ocho.

Consideramos que al resolver el problema ocho, los estudiantes podrían presentar las siguientes dificultades:

- Que confundieran los elementos de la gráfica de la segunda derivada con los elementos de la función.
- Que consideraran a las raíces de la segunda derivada como los posibles valores extremos de la función.
- Que al no mostrarse explícitamente las imágenes de los valores $x = a$ y $x = e$ en la gráfica de la segunda derivada, no se les considerara como candidatos a ser elementos de análisis de la función.
- Que no se lograra establecer que las raíces de la segunda derivada corresponden a los puntos de inflexión de la función (dado que en los tres casos ocurre el cambio de concavidad alrededor de ellos).

5.3.6. Problema nueve.

Para el problema nueve, consideramos averiguar si los estudiantes emplean la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión de una función y en ese caso, cómo es que definen la existencia de dichos puntos (Figura 17).

Como se ha revisado en los antecedentes, está documentada una desviación común que consiste en emplear los puntos críticos para obtener los puntos de inflexión de una función,

Ahora bien, la condición necesaria para considerar a un punto del dominio de la función como candidato a ser punto de inflexión, es que la segunda derivada se anule o se indetermine en él, y a partir de esto, se tienen dos formas de establecerlo, la primera es que alrededor del candidato ocurra un cambio en el signo de la segunda derivada, lo que implicaría un cambio en la concavidad de la función; y por otra parte se puede atender al criterio de la tercera derivada que señala que: "un punto del dominio de la función en el que la segunda derivada se anula, será punto de inflexión si la tercer derivada es distinta de cero".

Para el problema nueve, planteamos una función que cumpliera con una serie de requisitos.

- Primero, se utilizaron coeficientes enteros para que el álgebra fuese sencilla, con la finalidad de no desalentar a los participantes en su intención de contestar el problema.
- Segundo, planteamos que los puntos críticos de la función fuesen raíces racionales que se pudieran determinar por factorización directa, o empleando la regla de solución conocida para las ecuaciones de segundo grado.
- Tercero, se procuró que las raíces de la segunda derivada, también fuesen racionales y de resolución sencilla.
- Cuarto, que dos de las raíces de la segunda derivada cumplieran las condiciones necesarias para ser puntos de inflexión y otra no lo fuera.

Figura 17. Problema nueve del instrumento de investigación.

9. Sea la función p con su primera y segunda derivada.

$$p(x) = x^4\left(10x^2 - 24x + 15\right)$$
$$p'(x) = 60x^3\left(x^2 - 2x + 1\right)$$
$$p''(x) = 60x^2\left(5x^2 - 8x + 3\right)$$

Determinar los puntos de inflexión de p.

Figura 17. Problema nueve del instrumento de investigación.

Como datos del problema se expusieron: la función, su primera y su segunda derivada, esto con la intención de que las dificultades del proceso de derivación no afectaran el análisis del problema.

5.3.6. a. Trayectoria hipotética del problema nueve.

A continuación, se muestra una estrategia de solución para el problema nueve, basándonos en un procedimiento que considera condiciones suficientes para determinar los puntos de inflexión de la función por medio de la segunda derivada.

Solución problema nueve.

Se determinan las raíces de la ecuación $p''(x) = 0$

$$60x^2\left(5x^2 - 8x + 3\right) = 0$$
$$x(5x-3)(x-1) = 0$$
$$x = 0, x = \frac{3}{5}, x = 1$$

Se divide el dominio de la función p mediante los raíces obtenidas.

$$D_p = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, 1\right) \cup (1, \infty)$$

Se analiza el comportamiento de $p''(x) = 60x^2\,(5x-3)(x-1)$ en cada intervalo obtenido, con el fin de establecer si se satisfacen la condición del cambio de concavidad, en los puntos de inflexión.

En $(-\infty, 0)$ se tiene que $60x^2 > 0$, $5x - 3 < 0$ y $x - 1 < 0$, por lo que $p''(x) > 0$ en este intervalo, y la función p es cóncava hacia arriba.

En $\left(0, \frac{3}{5}\right)$ se tiene que $60x^2 > 0$, $5x - 3 < 0$ y $x - 1 < 0$, por lo que $p''(x) > 0$ en este intervalo, y la función p es cóncava hacia arriba.

En $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ resulta que $60x^2 > 0$, $5x - 3 > 0$ y $x - 1 < 0$, por lo que $p''(x) < 0$ y por lo tanto función p es cóncava hacia abajo.

Para $(1, \infty)$ se obtiene que $60x^2 > 0$, $5x - 3 > 0$ y $x - 1 > 0$, por lo que $p''(x) > 0$ y la función p es cóncava hacia arriba.

Dado que en $x = \frac{3}{5}$ y en $x = 1$, la segunda derivada cambia de signo, se concluye que la función p tiene puntos de inflexión en ambos valores. Por el contrario en $x = 0$ no se observa cambio de concavidad, al aplicar el criterio de la primera derivada resulta que existe un mínimo local de p en $x = 0$.

5.3.6.b. Dificultades esperadas del problema nueve.

Consideramos que en este problema, los participantes podrían presentar la siguientes dificultades:

- Que se emplearan los puntos críticos de la función para el cálculo de los puntos de inflexión.
- Que se propusieran todas las raíces de la segunda derivada como puntos de inflexión, sin realizar el análisis de concavidad.
- Que realizaran el análisis de concavidad de forma errónea o invertida.

5.3.7. Problema diez.

En el problema diez utilizamos la función *seno*, por ser una de las funciones más conocidas por los estudiantes de bachillerato, le agregamos la condición del valor absoluto y se acotó su dominio a un intervalo cerrado (Figura 18).

Figura 18. Problema diez del instrumento de investigación.

10. Determinar los puntos donde la función $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ alcanza sus valores máximos y mínimos en $-\pi \leq x \leq \pi$.

Figura 18. Problema diez del instrumento de investigación.

El propósito de este problema, fue explorar las diferentes ideas que los participantes emplearían, ya sea que intentaran aplicar alguno de los criterios, o que intentaran reproducir la gráfica de la función seno interpretando como resulta afectada por el valor absoluto.

Se supuso que si los participantes bosquejaban o al menos imaginaban la gráfica de la función, a partir de esta información, lograrían establecer los valores máximos (al menos) y sobretodo, lo que se consideró como el objetivo principal de este problema: averiguaríamos si los estudiantes consideran los extremos del intervalo del dominio, para verificar la existencia de mínimos absolutos en la función.

Otro aspecto importante que consideramos al diseñar el problema diez, es averiguar si los estudiantes obtienen los puntos críticos de una función, en los valores donde la derivada se indetermina, esto es que, *si para algún x_0 en el dominio de la función ocurre que $f'(x_0)$ no existe, entonces x_0 es punto crítico del dominio de f.*

5.3.7. a. Trayectoria hipotética del problema diez.

La solución del problema diez, requería se planteara una función por partes equivalente, y que se consideraran las derivadas laterales en $x = 0$ y posteriormente se justificara si se cumplen las condiciones necesarias para aplicar los criterios de la primera y la segunda derivada. La resolución procedimental por medio de los criterios demandó que los participantes tuvieran un amplio dominio del tema.

Solución problema diez.

Para aplicar los criterios de la primera y de la segunda derivada, se descompone la función f por medio del valor absoluto.

$$f(x) = |senx| = \begin{cases} senx & si \quad senx \geq 0 \\ -senx & si \quad senx < 0 \end{cases}$$

Para describir el dominio de *f*, se tiene que *sen x* ≥ 0 para cada *x* en $[0, \pi]$ y sen $x < 0$ para cada *x* en $[-\pi, 0)$, por lo que la función sobre la que se aplicarán los criterios queda:

$$f(x) = \begin{cases} senx & si \quad 0 \leq x \leq \pi \\ -senx & si \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Se deriva la función.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & si \quad 0 < x \leq \pi \\ -\cos x & si \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Se determinan los puntos críticos al resolver $f'(x) = 0$, las raíces de la ecuación $\cos x = 0$, son $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$.

Se obtiene la segunda derivada.

$$f''(x) = \begin{cases} -senx & si \quad 0 < x \leq \pi \\ senx & si \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Se realiza el análisis de los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada.

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$
$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Por ser la segunda derivada negativa, en ambos casos se concluye que existen máximos locales.

Como puede observarse, la función es continua pero no derivable en $x = 0$, esto ocurre porque $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$, es decir, las derivadas laterales son distintas en ese extremo (Rivera, 2012), por lo tanto $x = 0$, es otro punto crítico de f. Al aplicar el criterio de primera derivada se tiene que la derivada pasa de negativa a positiva, por lo que se puede concluir que existe un mínimo local de f en $x = 0$.

En conclusión, la función f, alcanza máximos locales en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$, al sustituir en f resulta que ambos son iguales, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

También se alcanza un mínimo local en $x = 0$, el mínimo es $f(0) = 0$.

Al evaluar los extremos del dominio se observan mínimos absolutos en $x = -\pi$ y $x = \pi$, los mínimos son iguales, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

Se consideró que los participantes emplearían diferentes estrategias, principalmente la de bosquejar la gráfica de la función f, y a partir de esto determinarían los valores extremos tomando como referencia, sus conocimientos previos acerca del comportamiento de la función seno para determinar los valores extremos (Figura 19).

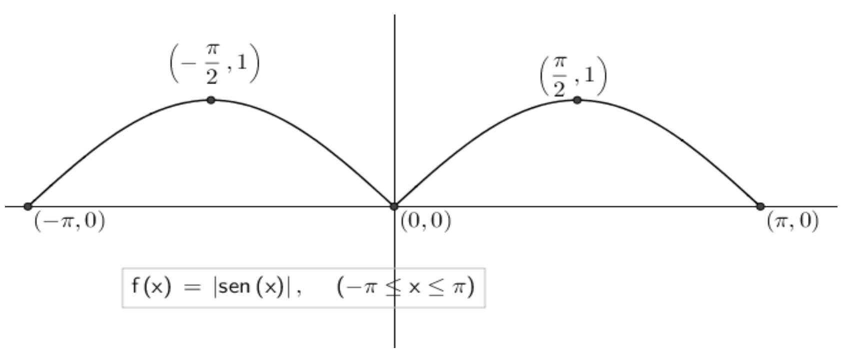


Figura 19. Gráfica de la función del problema diez del instrumento de investigación.

5.3.7.b. Dificultades esperadas del problema diez.

Para el problema diez, consideramos que se podrían detectar algunas de las siguientes dificultades:

- Que se trazara la gráfica de la función *seno* pero no se considerara el valor absoluto.
- Que se intentara aplicar el criterio de la primera derivada en la función *seno*, sin considerar el valor absoluto.
- Que se trazara correctamente la gráfica de la función, pero al realizar el análisis a partir de ella no se consideren los límites del dominio de la función para el cálculo de los valores extremos.

Capítulo 6. Análisis de datos.

6.1. Análisis general de los resultados obtenidos.

A continuación, se muestra el análisis general de los resultados estructurado de la siguiente forma: en los problemas uno al seis, se realizó comparándolos en parejas (uno y dos, tres y cuatro, cinco y seis), los problemas siete a diez se analizaron individualmente.

En las tablas solamente se presentan los resultados de los alumnos que respondieron, qué como podrá notarse, eran menos conforme los problemas presentaban mayor complejidad.

6.1.1. Análisis general de los resultados, problemas uno y dos.

En los problemas uno y dos, diez participantes lograron identificar la relación entre la monotonía de la función y el signo de la derivada, fueron precisos en sus respuestas y emplearon la notación matemática adecuada, que bien pudo ser por intervalos o por desigualdades, veintidós alumnos identificaron correctamente la monotonía en algunos intervalos, pero no en todo el dominio de la función. Catorce participantes identificaron correctamente los puntos críticos en la gráfica, lo que demuestra dominio del concepto, pero treinta y seis lo hicieron de forma incorrecta.

Establecer la relación de la concavidad presentó más dificultades, ya que, solamente siete participantes lograron establecerla en el problema uno, y de estos, cinco lo confirmaron al responder correctamente la misma cuestión en el problema dos. Por el contrario, los puntos de inflexión (que se solicitaron explícitamente), los lograron identificar cuarenta participantes en el primer problema, pero para el segundo problema ocho de ellos no lograron identificarlos todos y dieciséis alumnos señalaron erróneamente que un punto de inflexión se encontraba en donde la función alcanza un mínimo local.

En la Tabla 5 uno se pueden observar los resultados de los problemas uno y dos.

Tabla 5
Resultados generales de los problemas 1 y 2.

	Problema 1			Problema 2		
Aspectos analizados	C.	P.C.	I.	C.	P.C.	I.
Criterio de la primera derivada						
Monotonía	**10**	2	39	**7**	22	41
Puntos críticos	**14**	0	36	**12**	1	37
Criterio de la segunda derivada						
Concavidad	**7**	1	36	**5**	1	42
Puntos de inflexión	**40**	2	14	**32**	2	22
Valores extremos						
Máximos	**35**	16	5	**34**	14	9
Mínimos	**35**	16	5	**34**	14	9

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 5. Resultados generales de los problemas uno y dos .

Acerca de los valores máximos o mínimos, en el primer problema treinta y cinco alumnos escribieron la respuesta correcta, que en este caso se refiere a un valor de la función expresado en forma de literales, para el problema dos, treinta y cuatro alumnos lograron establecerlos correctamente. Por el contrario, dieciséis y catorce participantes identificaron correctamente en donde se alcanzaban los valores máximos y mínimos de ambos problemas, pero señalaron el punto físico como respuesta o el valor de la abscisa, esto indica que, aunque se logran reconocer en una gráfica, existe confusión acerca de los conceptos de máximo y mínimo.

6.1.2. Análisis general de los resultados, problemas tres y cuatro.

En los problemas tres y cuatro, los participantes mostraron conocer el criterio de la primera derivada, pero no lo aplicaron de forma precisa. La desviación se exhibe cuando una vez obtenidos los puntos críticos, se hacía necesario realizar el análisis de monotonía alrededor de los mismos. Solamente tres participantes aplicaron todas las condiciones del criterio de la primera derivada, es decir, establecer los signos de la derivada antes y después, en una vecindad suficientemente pequeña del punto crítico. Se puede ver el resumen de respuestas en la Tabla 6.

Tabla 6
Resultados generales de los problemas 3 y 4.

	Problema 3			Problema 4		
Aspectos analizados	C.	P.C.	I.	C.	P.C.	I.
Criterio de la primera derivada						
Derivaron correctamente y calcularon los otros puntos críticos	**21**	7	31	**27**	4	25
Determinaron la existencia de máximos y mínimos	**6**	1	37	**11**	1	34
Justificaron correctamente por medio del criterio	**4**	0	40	**3**	0	37

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 6. Resultados generales de los problemas 3 y 4.

En el problema tres, siete alumnos interpretaron erróneamente la existencia de un mínimo local. Se observó que en la mayoría de los casos aplicaron el criterio de la primera derivada al elegir valores a la izquierda y derecha del punto crítico, pero no comprobaron que fueran suficientemente cercanos. Otros lo decidieron porque al sustituir en la función resultaba la imagen igual a cero (en este sentido se refleja la carencia de herramientas apropiadas). Veintiún alumnos calcularon correctamente los otros puntos críticos del problema tres, mientras que hubo algunos que solamente derivaron la función pero no resolvieron la ecuación $f'(x)=0$.

De los que calcularon los puntos críticos solamente seis concluyeron que existía un valor máximo en $x = 0$, sin embargo, su justificación no es suficiente, ya que solamente se basaron en el valor de las imágenes para definir cuál era mayor, cuatro si justificaron su afirmación.

En el problema cuatro, veintisiete participantes determinaron los tres puntos críticos de la función, y once de ellos lograron identificar correctamente si correspondían a algún valor extremo, tres alumnos justificaron su respuesta por el criterio de la primera derivada, mientras que ocho intentaron justificar su respuesta al emplear las imágenes de los puntos críticos y realizando bosquejos donde suponían como es la gráfica de la función.

6.1.3. Análisis general de los resultados, problemas cinco y seis.

Los participantes mostraron, en sus respuestas de los problemas cinco y seis, que reconocían la derivada como una transformación que afectaba las gráficas de las funciones suavizándolas cada vez que se aplicaba. Se puede observar en la Tabla 7 que un número significativo de ellos respondieron correctamente este problema.

Tabla 7
Resultados generales de los problemas 5 y 6

Aspectos analizados		Respuestas C.	P.C.	I.
Reconocimiento de la relación entre la gráfica de una función y la de su derivada	Problema 5	**29**	0	31
	Problema 6	**27**	1	33

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 7. Resultados generales de los problemas 5 y 6 .

Las respuestas obtenidas sugieren, que los alumnos que contestaron correctamente, han tenido oportunidad de practicar suficientes ejercicios o incluso que han discutido en clase este tipo de nociones, por lo que podemos afirmar que la capacidad de comprensión mostrada es la esperada para el nivel de los participantes.

En aquellos que respondieron de forma incorrecta, destaca la coincidencia que intentaron establecer el orden de derivación basándose en el número de raíces de cada función.

6.1.4. Análisis general de los resultados, problema siete.

Los resultados del problema siete, hacen evidente que la mayoría de los participantes no lograron establecer la relación entre la gráfica de la derivada y el comportamiento de la función. Solamente dos alumnos identificaron todos los elementos requeridos y nueve lograron reconocer los puntos de inflexión. En la Tabla 8 se pueden observar los resultados obtenidos.

Tabla 8
Resultados generales del problema 7.

	Respuestas		
Aspectos analizados	C.	P.C.	I.
Interpretación del comportamiento de una función a partir de la gráfica de su primera derivada			
Se reconocen los puntos críticos.	**11**	0	43
Se infiere la existencia del valor máximo	**3**	0	50
Se infiere la existencia del valor mínimo	**2**	1	50
Se reconocen los puntos de inflexión	**9**	2	42

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 8. Resultados generales del problema 7.

El nivel de respuesta en este problema es bajo ya que aunque cincuenta y cuatro participantes dieron alguna solución, en solamente once casos se evidenció comprensión del problema a resolver, consideramos que una probable desviación en las soluciones pudo ser ocasionada por una confusión en la lectura e interpretación del problema, ya que la mayoría de las respuestas incorrectas daban los resultados al considerar la gráfica como si fuera la función (la gráfica era de la derivada).

6.1.5. Análisis general de los resultados, problema ocho.

En el problema ocho (Tabla 9), dos de los participantes lograron interpretar las condiciones del criterio de la segunda derivada desde su gráfica y con ello identificaron los elementos de la función original, lo que representa un alto nivel de comprensión y de análisis. Destacaron sobre todo los argumentos de uno de los alumnos respecto a la concavidad de la función a partir de conocer el signo de la segunda derivada en la gráfica. Al igual que en el problema siete, los alumnos que respondieron de forma errónea, consideraron que la gráfica pertenecía a la función.

Tabla 9
Resultados generales del problema 8.

Aspectos analizados	Respuestas C.	P.C.	I.
Interpretación del comportamiento de una función a partir de la gráfica de su segunda derivada			
Se infiere la existencia del valor máximo	**5**	1	39
Se infiere la existencia del valor mínimo	**2**	0	36
Se infiera la existencia de los puntos de inflexión	**5**	1	32

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 9. Resultados generales del problema 8.

6.1.6. Problema nueve.

Aunque el nivel de respuesta fue de cincuenta y tres participantes, durante el análisis de las respuestas del problema nueve se pudo confirmar que muy pocos conocían el procedimiento para determinar los puntos de inflexión deuna función, solamente doce alumnos (de cuarenta y dos que lo intentaron), los respondieron correctamente. Once de los que intentaron justificar, solamente recurrieron a la condición necesaria, y solo un participante realizó el análisis de concavidad alrededor de los puntos candidatos. Se consideró que a nivel bachillerato este tipo de análisis no es muy común. Se muestran los resultados en la tabla Tabla 10.

Tabla 10
Resultados generales del problema 9

Aspectos analizados	Respuestas		
	C.	P.C.	I.
Análisis de los puntos de inflexión por medio de la segunda derivada			
Se elige calcular las raíces de la segunda derivada	**16**	3	28
Se eligen correctamente los puntos de inflexión.	**12**	1	23
Se justifica correctamente	**1**	0	34

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 10. Resultados generales del problema 9.

6.1.7. Análisis general de los resultados, problema diez.

Para resolver el problema diez, doce alumnos intentaron trazar la gráfica de la función, de ellos, siete lograron determinar la forma en que el valor absoluto afecta la gráfica del seno y con ello propusieron correctamente, los valores máximos, pero, a pesar de que sus gráficas fueron bien bosquejadas, solamente tres lograron reconocer la existencia de un mínimo en x = 0, y solamente dos alumnos, recurrieron a los extremos del intervalo para verificar la existencia de otros valores mínimos. Un estudiante intentó justificar su procedimiento algebraicamente, pero sin considerar el valor absoluto, es decir derivando la función directamente, aunque este procedimiento es incompleto, si logró establecer algunos de los puntos críticos de la función seno, pero no así, aquellos que resultan al aplicar el valor absoluto. En la Tabla 11 se muestran los resultados del problema diez.

Tabla 11
Resultados generales del problema 10

Aspectos analizados	Respuestas C.	P.C.	I.
Determinar los valores extremos de una función trascendente definida en un intervalo cerrado			
Se emplea una gráfica para determinar los valores máximos	7	5	37
Se reconoce el valor mínimo local en x = 0	3	1	34
Se emplean los extremos del intervalo para obtener los valores mínimos	1	0	32
Se justifica algebraicamente el procedimiento	1	0	31

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 11. Resultados generales del problema 10.

6.2. Análisis de los resultados por plantel.

Se muestra a continuación, el análisis de los resultados de los problemas por plantel, se consideran únicamente los datos de las instituciones CECyT 9 y UPIICSA ya que los restantes no arrojaban información relevante para el presente estudio.

6.2.1. Resultados de los problemas uno y dos por plantel.

De los participantes del CECyT 9, un tercera parte lograron establecer la relación entre la monotonía de la función y el signo de la derivada, pero muy pocos (6) establecieron la relación de concavidad, al contrario que los puntos de inflexión que la mitad del grupo logró señalar correctamente, resalta que aunque reconocen los máximos y mínimos en la gráfica, en sus respuestas señalaron los puntos físicos o los valores de las abscisas donde se encuentran (Tabla 12).

Tabla 12
Resultados de los problemas 1 y 2 de los participantes del CECyT 9.

	Problema 1			Problema 2		
Aspectos analizados	C.	P.C.	I.	C.	P.C.	I.
Criterio de la primera derivada						
Monotonía	**8**	2	10	**7**	2	10
Puntos críticos	**12**	0	7	**10**	1	8
Criterio de la segunda derivada						
Concavidad	**6**	1	6	**4**	1	12
Puntos de inflexión	**14**	2	9	**12**	2	11
Valores extremos						
Máximos	**7**	16	2	**10**	14	2
Mínimos	**7**	16	2	**10**	14	2

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 12. Problemas uno y dos, CECyT 9.

Por su parte, de los participantes del UPIICSA, menos del 10 % lograron establecer la relación entre la monotonía de la función y el signo de la derivada, y solamente uno estableció la relación de concavidad. Ocurrió lo contrario con los puntos de inflexión y con los valores extremos, ya que el 90 % los contestaron correctamente (Tabla 13).

Tabla 13

Resultados de los problemas 1 y 2 de los participantes de UPIICSA.

Aspectos analizados	Problema 1			Problema 2		
	C.	P.C.	I.	C.	P.C.	I.
Criterio de la primera derivada						
Monotonía	**2**	0	29	**0**	20	31
Puntos críticos	**2**	0	29	**2**	0	29
Criterio de la segunda derivada						
Concavidad	**1**	0	30	**1**	0	30
Puntos de inflexión	**26**	0	5	**20**	0	11
Valores extremos						
Máximos	**28**	0	3	**24**	0	7
Mínimos	**28**	0	3	**24**	0	7

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 13. Problemas uno y dos, UPIICSA.

6.2.2. Resultados de los problemas tres y cuatro por plantel.

En la Tabla 14 se pueden observar los resultados de los problemas tres y cuatro que obtuvieron los participantes del CECyT 9, en el problema tres, nueve alumnos interpretaron erróneamente la existencia de un mínimo local. Se observó que en la mayoría de los casos, aplicaron el criterio de la primera derivada al proponer valores a la izquierda y a la derecha del punto crítico, pero no comprobaron que fueran suficientemente cercanos. Otros estudiantes lo decidieron igual, porque al sustituir en la función resultaba la imagen igual a cero (en este sentido se refleja la carencia de herramientas apropiadas) . Doce alumnos calcularon correctamente los otros puntos críticos, mientras que hubo algunos que solamente derivaron la función pero no resolvieron la ecuación $f'(x)=0$.

Tabla 14

Resultados de los problemas 3 y 4 de los participantes del CECyT 9.

	Problema 3			Problema 4		
Aspectos analizados	C.	P.C.	I.	C.	P.C.	I.
Criterio de la primera derivada						
Derivaron correctamente y calcularon los otros puntos críticos.	**12**	7	9(d)	**14**	4	7
Determinaron la existencia de máximos (y mínimos)	**2**	1	10	**6**	1	8
Justificaron correctamente por medio del criterio.	**0**	0	9	**3**	0	6

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas, (d) aplicaron el criterio de la primera derivada directamente.

Tabla 14. Problemas tres y cuatro, CECyT 9.

En el problema cuatro, catorce alumnos determinaron los tres puntos críticos de la función, y seis de ellos lograron identificar correctamente si correspondían a algún valor extremo, tres alumnos justificaron su respuesta con el criterio de la primera derivada, mientras que otros seis intentaron justificar su respuesta al calcular las imágenes de los puntos críticos y al trazar bosquejos donde suponían como es la gráfica de la función.

Los resultados de los participantes de UPIICSA se resumen en la Tabla 15. Como puede observarse la cantidad de alumnos que respondieron de forma incorrecta fueron mucho más que los del plantel anterior, no emplearon el criterio de la primera derivada, tan solo se limitaron a derivar la función. Es posible que al haber trabajado los temas con mayor distancia de tiempo que los del CECyT 9 ocasionara esta diferencia de resultados. Aunque por otra parte siendo alumnos de ingeniería se esperaba que tuvieran un mejor desempeño en estos problemas.

Tabla 15

Resultados de los problemas 3 y 4 de los participantes del UPIICSA.

Aspectos analizados	Problema 3			Problema 4		
	C.	P.C.	I.	C.	P.C.	I.
Criterio de la primera derivada						
Derivaron correctamente y calcularon los otros puntos críticos.	**9**	0	22	**13**	0	18
Determinaron la existencia de un máximo	**4**	0	27	**5**	0	26
Justificaron correctamente por medio del criterio.	**0**	0	31	**0**	0	31

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 15. Problemas tres y cuatro, UPIICSA.

6.2.3. Resultados de los problemas cinco y seis por plantel.

Los alumnos del CECyT 9, en sus respuestas de los problemas cinco y seis, mostraron que reconocían la derivada como una transformación que afectaba las gráficas de las funciones suavizándolas cada vez que se aplicaba. Se puede observar en la Tabla 16 que la mayoría respondieron correctamente esta cuestión, a diferencia de los participantes de UPIICSA (Tabla 17), donde más de la tercera parte del grupo encuestado relacionó el orden de derivación con el número de raíces de las funciones.

Tabla 16

Resultados de los problemas 5 y 6 de los participantes del CECyT 9.

Aspectos analizados		Respuestas C.	P.C.	I.
Reconocimiento de la relación entre la gráfica de una función y la de su derivada	Problema 5	**20**	0	10
	Problema 6	**18**	1	12

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 16. Problemas cinco y seis, CECyT 9.

Tabla 17
Resultados de los problemas 5 y 6 de los participantes del UPIICSA.

Aspectos analizados		Respuestas C.	P.C.	I.
Reconocimiento de la relación entre la gráfica de una función y la de su derivada	Problema 5	**9**	0	21
	Problema 6	**9**	0	21

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 17. Problemas cinco y seis, UPIICSA.

6.2.4. Resultados del problema siete por plantel.

La mayoría de los participantes del CECyT 9 no lograron establecer la relación entre la gráfica de la derivada y el comportamiento de la función en el problema siete (Tabla 18). Solamente tres alumnos identificaron todos los elementos solicitados aunque se destaca que ocho relacionaron correctamente los puntos de inflexión con las raíces de la derivada.

Tabla 18
Resultados del problema 7 de los participantes del CECyT 9.

Aspectos analizados	Respuestas C.	P.C.	I.
Interpretación del comportamiento de una función a partir de la gráfica de su primera derivada			
Se reconocen los puntos críticos.	**6**	0	17
Se infiere la existencia del valor máximo	**3**	0	19
Se infiere la existencia del valor mínimo	**2**	1	19
Se reconocen los puntos de inflexión	**8**	2	12

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 18. Problema siete CECyT 9.

El nivel de respuesta en este problema es alto (al menos 23 alumnos lo intentaron), se consideró que una probable desviación en las soluciones podría ser una confusión en la lectura e interpretación del problema, ya que la mayoría de las respuestas incorrectas daban los resultados al considerar la gráfica como si fuera la función (la gráfica era de la derivada).

Algo similar ocurrió con los participantes de UPICCSA (Tabla 19), la mayoría de los que respondieron este problema cometieron el mismo error, pero al contrario de los anteriores solamente uno relacionó las raíces de la derivada con los puntos críticos de la función.

Tabla 19
Resultados del problema 7 de los participantes del UPIICSA.

Aspectos analizados	Respuestas C.	P.C.	I.
Interpretación del comportamiento de una función a partir de la gráfica de su primera derivada			
Se reconocen los puntos críticos.	**5**	0	26
Se infiere la existencia del valor máximo	**0**	0	31
Se infiere la existencia del valor mínimo	**0**	0	31
Se reconocen los puntos de inflexión	**1**	0	30

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 19. Problema siete, UPIICSA.

6.2.5. Resultados del problema ocho por plantel.

En el problema ocho, tres alumnos del CECyT 9 lograron interpretar las condiciones del criterio de la segunda derivada desde su gráfica y con ello identificar los elementos de la función original, lo que demuestra un alto nivel de comprensión y de análisis (Tabla 20). Destacan sobre todo los argumentos de uno de los alumnos respecto a la concavidad de la función a partir de conocer el signo de la segunda derivada en la gráfica. Al igual que en el problema siete.

Tabla 20

Resultados del problema 8 de los participantes del CECyT 9.

Aspectos analizados	Respuestas		
	C.	P.C.	I.
Interpretación del comportamiento de una función a partir de la gráfica de su segunda derivada			
Se infiere la existencia del valor máximo	**2**	1	11
Se infiere la existencia del valor mínimo	**1**	0	6
Se infiera la existencia de los puntos de inflexión	**3**	1	4

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 20. Problema ocho, CECyT 9.

Los participantes de UPIICSA tuvieron un desempeño similar ya que solamente tres reconocieron la existencia de valores máximos, de los que uno reconoció los valores mínimos y dos de ellos los puntos de inflexión, en este caso destaca que la mayoría explicó los elementos de la gráfica directamente sin tomar en cuenta que se trataba de la segunda derivada (Tabla 21).

Tabla 21

Resultados del problema 8 de los participantes del UPIICSA.

Aspectos analizados	Respuestas		
	C.	P.C.	I.
Interpretación del comportamiento de una función a partir de la gráfica de su segunda derivada			
Se infiere la existencia del valor máximo	**3**	0	28
Se infiere la existencia del valor mínimo	**1**	0	30
Se infiera la existencia de los puntos de inflexión	**2**	0	28

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 21. Problema ocho, UPIICSA.

6.2.6. Resultados del problema nueve por plantel.

Aunque el nivel de respuesta en CECyT 9 se redujo a dieciséis alumnos, durante el análisis del problema nueve se pudo confirmar que conocen el criterio de la segunda derivada ya que lo emplearon para determinar los puntos de inflexión de la función, pero solamente cuatro alumnos (de seis que lo intentaron), los respondieron correctamente, cuatro intentaron justificar, pero solamente recurren a la condición necesaria, no se recurrió en ningún caso al análisis de concavidad alrededor de los puntos candidatos. Se considera que a nivel bachillerato este tipo de análisis no es muy común. Se muestran los resultados en la Tabla 22.

Tabla 22
Resultados del problema 9 de los participantes del CECyT 9.

Aspectos analizados	Respuestas C.	P.C.	I.
Análisis de los puntos de inflexión por medio de la segunda derivada			
Se elige calcular las raíces de la segunda derivada	**6**	3	7(d)
Se eligen correctamente los puntos de inflexión.	**4**	1	0
Se justifica correctamente	**0**	0	4

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas, (d) = Se aplicó sobre la primera derivada.

Tabla 22. Problema nueve, CECyT 9.

Por parte de UPIICSA (Tabla 23), diez participantes emplearon la segunda derivada para el cálculo de raíces, ocho de ellos eligieron correctamente los puntos de inflexión, pero solamente uno justificó la existencia de ellos.

Tabla 23
Resultados del problema 9 de los participantes del UPIICSA.

Aspectos analizados	Respuestas		
	C.	P.C.	I.
Análisis de los puntos de inflexión por medio de la segunda derivada			
Se elige calcular las raíces de la segunda derivada	**10**	0	21
Se eligen correctamente los puntos de inflexión.	**8**	0	23
Se justifica correctamente	**1**	0	30

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 23. Problema nueve, UPIICSA.

6.2.7. Resultados del problema diez por plantel.

Para resolver el problema diez, dieciocho alumnos del CECyT 9 lo intentaron mediante el bosquejo de la gráfica de la función, de ellos, cinco bosquejaron correctamente la forma en que el valor absoluto afecta la gráfica del seno y con ello propusieron los valores máximos, pero, a pesar de que sus gráficas fueron bien bosquejadas, solamente dos reconocieron la existencia de un mínimo en $x = 0$, y solamente un alumno, recurrió a los extremos del intervalo para verificar la existencia de otros valores mínimos. Un alumno intento justificar su procedimiento algebraicamente, pero sin considerar el valor absoluto, es decir derivo la función directamente, aunque este procedimiento es incompleto, si logra establecer algunos de los puntos críticos de la función seno, pero no de los que resultan al aplicar el valor absoluto. En la Tabla 24 se muestran los resultados del problema diez.

En el caso de los participantes de UPIICSA, todos bosquejaron la gráfica de la función seno, pero solamente dos aplicaron el valor absoluto y reconocieron los valores máximos, uno de ellos respondió correctamente los valores mínimos y obtuvo la derivada a partir de la función por partes (Tabla 25).

Tabla 24
Resultados del problema 10 de los participantes del CECyT 9.

Aspectos analizados	Respuestas C.	P.C.	I.
Determinar los valores extremos de una función trascendente definida en un intervalo cerrado			
Se emplea una gráfica para determinar los valores máximos	**5**	5	8
Se reconoce el valor mínimo local en $x = 0$	**2**	1	4
Se emplean los extremos del intervalo para obtener los valor mínimos	**1**	0	2
Se justifica algebraicamente el procedimiento	**0**	0	1

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 24. Problema diez, CECyT 9.

Tabla 25
Resultados del problema 10 de los participantes del UPIICSA.

Aspectos analizados	Respuestas C.	P.C.	I.
Determinar los valores extremos de una función trascendente definida en un intervalo cerrado			
Se emplea una gráfica para determinar los valores máximos	**2**	0	29
Se reconoce el valor mínimo local en x = 0	**1**	0	30
Se emplean los extremos del intervalo para obtener los valor mínimos	**1**	0	30
Se justifica algebraicamente el procedimiento	**1**	0	30

Notas: C. = Respuestas correctas; P.C.=Respuestas parcialmente correctas; I.= Respuestas incorrectas

Tabla 25. Problema diez, UPIICSA.

6.3. Análisis particulares.

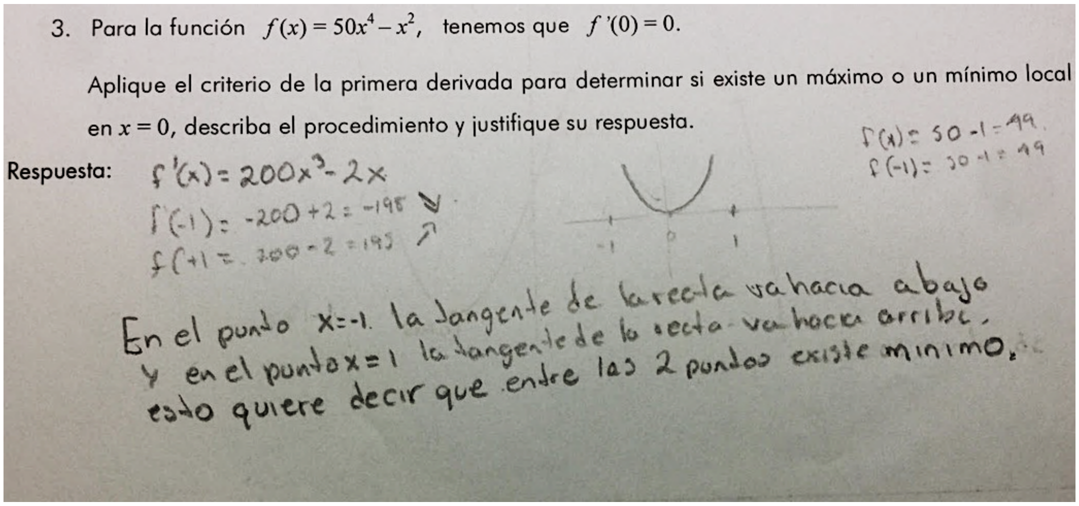
A continuación, se muestran algunas respuestas que consideramos interesantes, por que exhiben la forma en que los participantes redactaron y/o bosquejaron sus respuestas.

El análisis cualitativo de los datos, nos permitió observar las representaciones externas que utilizaron los estudiantes para expresar la solución de los problemas; se asignaron las categorías de comprensión correspondientes al desempeño mostrado, y se identificaron las dificultades que los estudiantes presentan durante la aplicación de los criterios de la primera y de la segunda derivada.

Una vez identificadas las dificultades de los estudiantes; se procedió a reconocer su naturaleza, es decir, si las dificultades eran de tipo procedimental, o conceptual, o de representación. Posteriormente detectamos cuales de ellas correspondían a la dimensión de las creencias que afectan el desempeño académico de los alumnos.

6.3.1. Casos seleccionados de la aplicación del criterio de la primera derivada.

En la Figura 20 se presenta la solución del problema tres, del estudiante A. Puede verificarse que realiza conexiones entre tres formas de representaciones externas; la notación algebraica, el lenguaje verbal y una gráfica; su forma de proceder sugiere que tiene una predilección por el razonamiento visual (Selcuk, Aspinwall, & Presmeg, 2010), esto significa que resuelve el problema, al visualizar el comportamiento geométrico de la función . El estudiante aplicó el criterio de la primera derivada, proponiendo valores a la izquierda y a la derecha del punto crítico, pero no verificó que fueran lo suficientemente cercanos.



3. Para la función $f(x) = 50x^4 - x^2$, tenemos que $f'(0) = 0$.

Aplique el criterio de la primera derivada para determinar si existe un máximo o un mínimo local en $x = 0$, describa el procedimiento y justifique su respuesta.

Respuesta: $f'(x) = 200x^3 - 2x$

$f'(-1) = -200 + 2 = -198$

$f'(+1) = 200 - 2 = 198$

$f(x) = 50 - 1 = 49$

$f(-1) = 50 - 1 = 49$

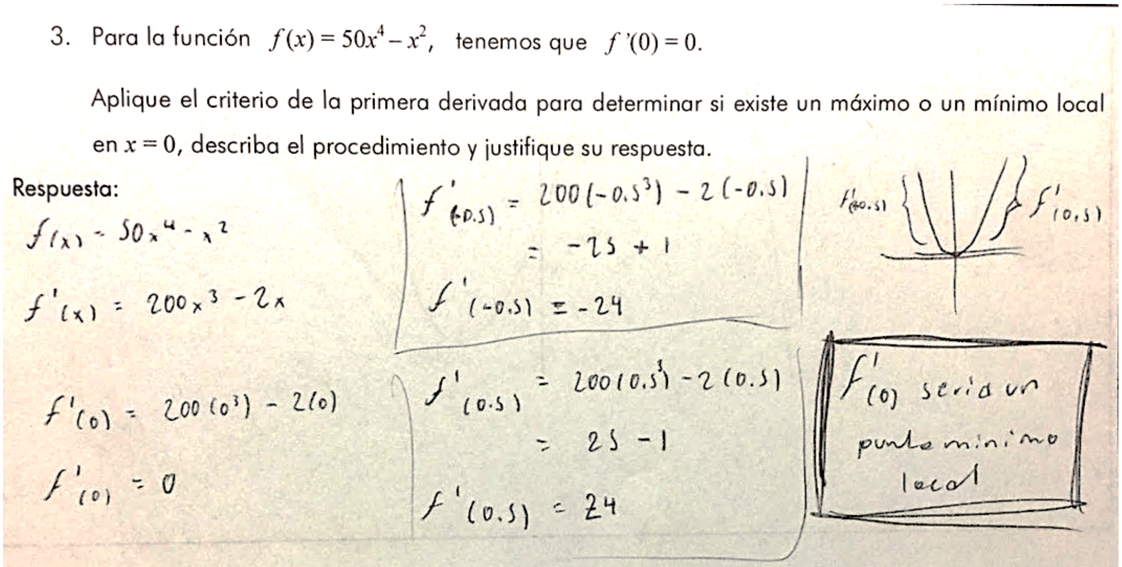
En el punto x=-1. la tangente de la recta va hacia abajo y en el punto x=1 la tangente de la recta va hacia arriba. esto quiere decir que entre los 2 puntos existe minimo.

Figura 20. Solución del problema 3, Estudiante A.

La explicación del estudiante A, acerca de la relación entre la dirección de la recta tangente y la monotonía de la función, nos permite suponer que comprende la interpretación geométrica de la derivada y que ha tenido la oportunidad de emplearla para explicar la monotonía de las funciones.

El estudiante A no comprende (o no demuestra comprender) la naturaleza local del criterio de la primera derivada. Para este estudiante, fue suficiente proponer valores a los lados del punto crítico, y esto lo hizo llegar a una solución equivocada, ya que no consideró la probable existencia de otros puntos críticos.

Otros estudiantes presentaron la misma dificultad al aplicar el criterio de la primera derivada, como puede observarse en las figuras 18 y 19, aunque sus representaciones fueron distintas, coinciden en que no reconocen la necesidad de tomar valores suficientemente cercanos al punto crítico para evaluar la derivada.



3. Para la función $f(x) = 50x^4 - x^2$, tenemos que $f'(0) = 0$.

Aplique el criterio de la primera derivada para determinar si existe un máximo o un mínimo local en $x = 0$, describa el procedimiento y justifique su respuesta.

Respuesta:

$f(x) = 50x^4 - x^2$

$f'(x) = 200x^3 - 2x$

$f'(0) = 200(0^3) - 2(0)$

$f'(0) = 0$

$f'(-0.5) = 200(-0.5^3) - 2(-0.5)$

$= -25 + 1$

$f'(-0.5) = -24$

$f'(0.5) = 200(0.5^3) - 2(0.5)$

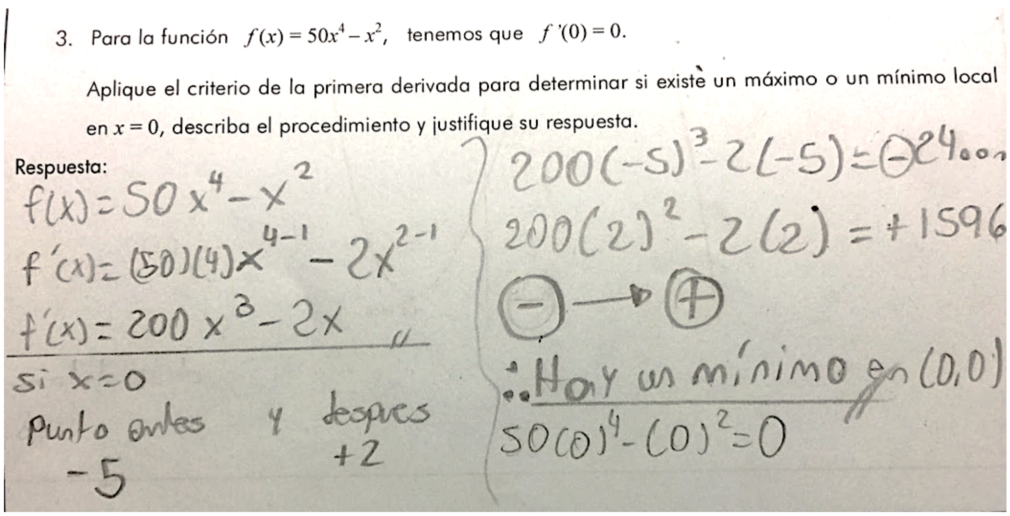
$= 25 - 1$

$f'(0.5) = 24$

$f'(-0.5)$ $f'(0.5)$

$f'(0)$ sería un punto mínimo local

Figura 21. Segunda solución del problema 3, con la misma dificultad observada en el estudiante A.



3. Para la función $f(x) = 50x^4 - x^2$, tenemos que $f'(0) = 0$.

Aplique el criterio de la primera derivada para determinar si existe un máximo o un mínimo local en $x = 0$, describa el procedimiento y justifique su respuesta.

Respuesta:

$f(x) = 50x^4 - x^2$

$f'(x) = (50)(4)x^{4-1} - 2x^{2-1}$

$f'(x) = 200x^3 - 2x$

si $x = 0$

Punto antes y despues

-5 $+2$

$200(-5)^3 - 2(-5) = -24\ldots$

$200(2)^2 - 2(2) = +1596$

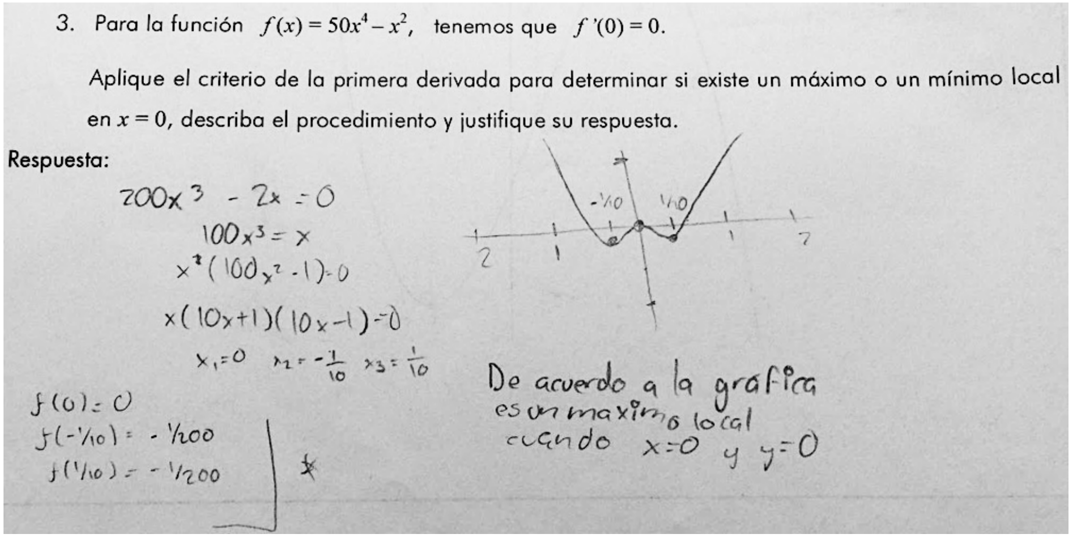
$- \rightarrow +$

$\therefore$ Hay un mínimo en $(0,0)$

$50(0)^4 - (0)^2 = 0$

Figura 22. Tercera solución del problema 3, con la misma dificultad observada en el estudiante A.

El estudiante B (Figura 23), si realizó el procedimiento para obtener los puntos críticos de la función. Empleó tres formas de representaciones externas; la notación algebraica, el lenguaje verbal y la gráfica. Su forma de proceder sugiere que emplea el razonamiento analítico visual, es decir, que elige resolver el problema de forma algebraica y utiliza un apoyo visual (una gráfica) para presentar su respuesta.



3. Para la función $f(x) = 50x^4 - x^2$, tenemos que $f'(0) = 0$.

Aplique el criterio de la primera derivada para determinar si existe un máximo o un mínimo local en $x = 0$, describa el procedimiento y justifique su respuesta.

Respuesta:

$200x^3 - 2x = 0$
$100x^3 = x$
$x^2(100x^2 - 1) = 0$
$x(10x+1)(10x-1) = 0$
$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{10} \quad x_3 = \frac{1}{10}$

$f(0) = 0$
$f(-1/10) = -1/200$
$f(1/10) = -1/200$

De acuerdo a la gráfica es un maximo local cuando $x = 0$ y $y = 0$

Figura 23. Solución del problema 3, del estudiante B.

Aunque si calculó los puntos críticos, el estudiante B, no aplicó el criterio de la primera derivada, la dificultad que observamos fue que asignó los valores extremos dependiendo de la posición relativa de las imágenes de los puntos críticos bajo *f*.

Con estos resultados, el estudiante B concluye que la imagen mayor corresponde al valor máximo relativo y las imágenes menores corresponden a valores mínimos absolutos y lo representa trazando la gráfica de la función. Este bosquejo de gráfica es correcto, el procedimiento empleado, no lo es.

6.3.2. Casos seleccionados de la interpretación del criterio de la segunda derivada.

El estudiante A resolvió el problema ocho al visualizar, sobre la gráfica de la segunda derivada, las condiciones del criterio de la segunda derivada (Figura 24).

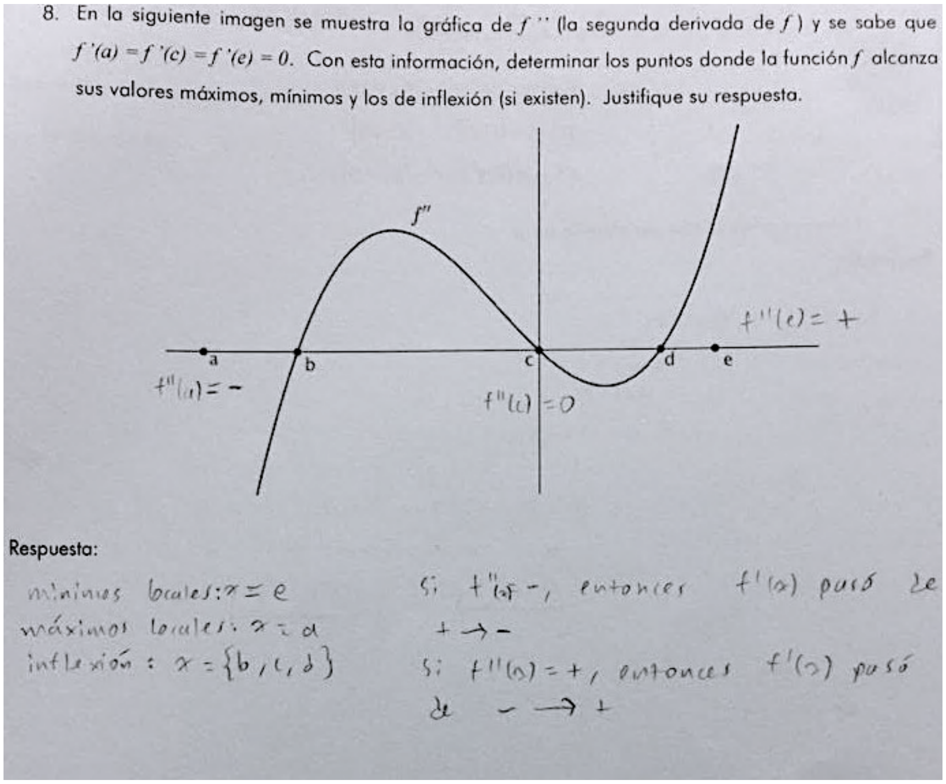


Figura 24. Solución del problema 8, Estudiante A.

El estudiante A, escribe sobre la gráfica los signos de la segunda derivada en el plano cartesiano. Describe que el valor mínimo local se alcanza en el punto crítico $x = e$, el valor máximo local se alcanza en $x = a$, y que los puntos de inflexión se encuentran en $x = b$, $x = c$ y $x = d$, justica su afirmación acerca de los valores máximo y mínimo, describiendo la relación entre el signo de la segunda derivada y el comportamiento de la primera derivada de la función .

El estudiante A, demuestra comprender, que los puntos de inflexión se determinan al calcular las raíces de la segunda derivada, pero le hace falta realizar el análisis del comportamiento de la segunda derivada alrededor de dichas raíces, para poder afirmar, que efectivamente corresponden a puntos de inflexión. Cuándo se le cuestionó acerca de su respuesta, el estudiante afirmó que los puntos de inflexión eran aquellos donde la segunda derivada se anulaba.

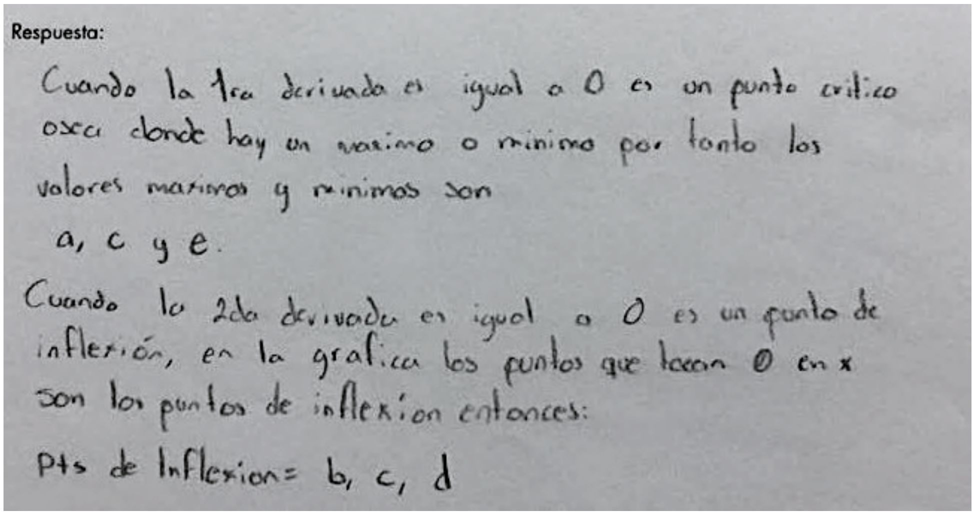
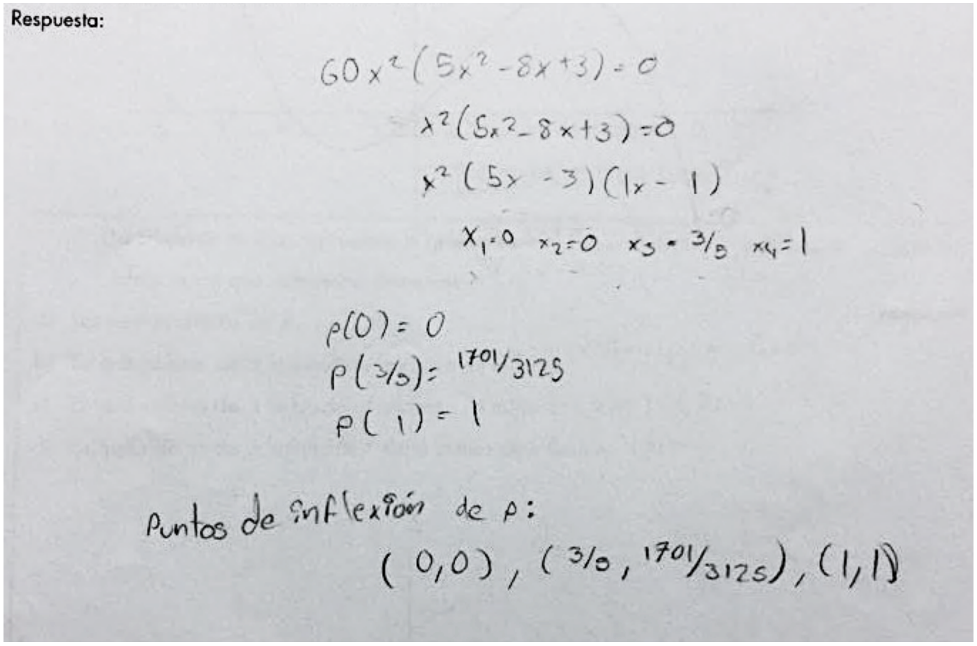

Respuesta:
Cuando la 1ra derivada es igual a 0 es un punto critico
osea donde hay un maximo o minimo por tanto los
valores maximos y minimos son
a, c y e.
Cuando la 2da derivada es igual a 0 es un punto de
inflexión, en la grafica los puntos que tocan 0 en x
son los puntos de inflexion entonces:
Pts de Inflexion= b, c, d

Figura 25. Solución del problema 8, en la que solamente se consideran las condiciones necesarias.

En la Figura 25 se observa una solución del problema ocho en la que se exhibe que al intentar interpretar los criterios de la primera y de la segunda derivada, los estudiantes tan sólo consideran las condiciones necesarias. Es decir, que los valores extremos se calculan empleando los puntos críticos y que los puntos de inflexión se determinan al calcular las raíces de la segunda derivada. En su respuesta, puede observarse que este estudiante no considera, que algunos puntos críticos si resultan ser puntos de inflexión.

Tal y como puede observarse en la Figura 26, algunos de los participantes comprenden que los puntos de inflexión se calculan, a partir de determinar las raíces de la segunda derivada, pero no se considera el análisis de concavidad para comprobarlo.



Respuesta:

$60x^2(5x^2-8x+3)=0$

$x^2(5x^2-8x+3)=0$

$x^2(5x-3)(1x-1)$

$x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=3/5 \quad x_4=1$

$p(0)=0$

$p(3/5)=1701/3125$

$p(1)=1$

Puntos de inflexión de p:

$(0,0),\ (3/5,\ 1701/3125),\ (1,1)$

Figura 26. Otra solución del problema 8, en la que solamente se considera la condición necesaria.

6.3.2. Caso en el que se emplea una gráfica para obtener los valores extremos.

En el problema diez se solicita determinar los puntos donde la función $f(x)=|\text{sen}x|$.

En la figura 24 se muestra la solución de un estudiante donde se puede observar como emplea su razonamiento visual – analítico.

El estudiante primero bosqueja la gráfica de la función $\text{sen}x$ sin restricciones; posteriormente le asigna las condiciones de valor absoluto y acota el dominio de sobre el intervalo cerrado.

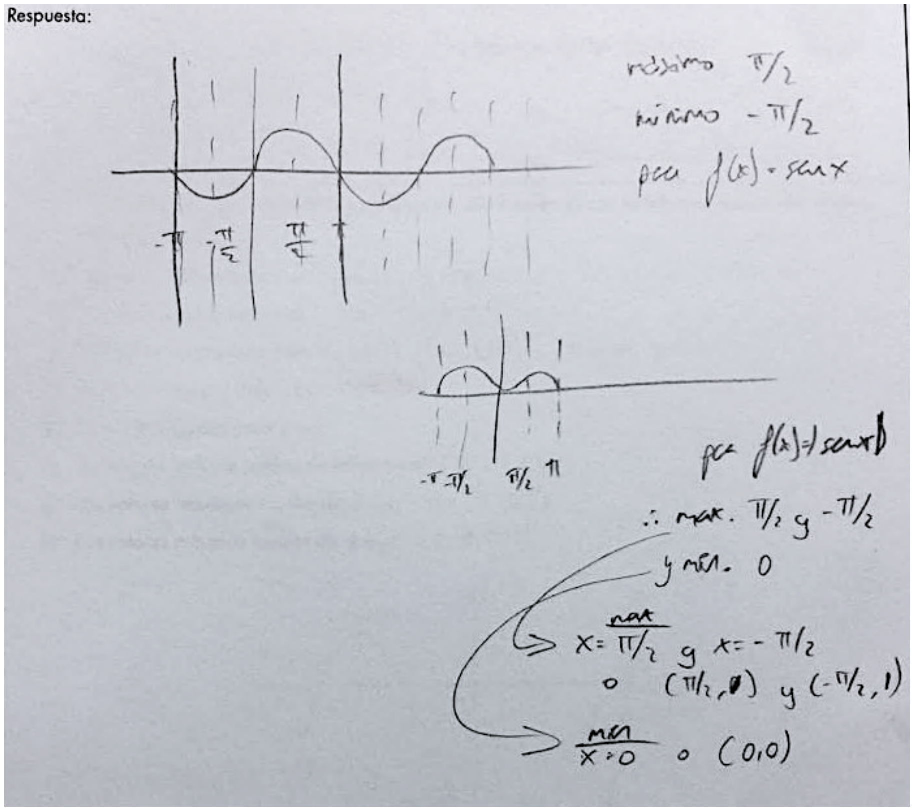


Figura 27. Solución del problema diez por parte de un estudiante.

A partir de la segunda gráfica, el estudiante propone los puntos donde se localizan los valores máximos y un valor mínimo. No considera a los extremos del intervalo cerrado para determinar la existencia de valores mínimos en ellos.

Esta última respuesta muestra un nivel de comprensión altamente sofisticado, ya que se pueden reconocer las conexiones que realizó el estudiante entre las representaciones externas de la geometría de una relación trigonométrica con los conceptos del análisis de funciones.

Capítulo 7. Resultados y conclusiones.

7. Resultados y conclusiones.

7.1. Resultados.

A continuación presentamos los resultados y las conclusiones acerca de las dificultades y creencias identificadas en los estudiantes al resolver problemas de aplicación e interpretación de los criterios para calcular valores máximos y mínimos de funciones reales.

7.1.1. Respecto del empleo de simbología, la notación matemática y el dominio de conceptos.

En lo general, poco más de la mitad de los estudiantes demostraron la capacidad de leer y comprender el lenguaje matemático empleado en el cuestionario, pero menos de la tercera parte, también mostraron, en sus respuestas, la capacidad de utilizarlo para mostrar sus resultados y sus ideas. La tercera parte de los participantes, emplearon correctamente la notación de intervalos o la de desigualdades.

Respecto de los conceptos de valores máximos y mínimos relativos, poco más de la mitad de los alumnos, aunque lograron identificarlos en una gráfica, mostraron confusión al escribir las soluciones, en este sentido se confunden los valores extremos, con los puntos físicos donde la función los alcanza, o con los valores de las abscisas de los mismos.

La mitad reconocieron los puntos críticos de una función sobre una gráfica y la tercera parte logró calcularlos, al resolver la ecuación que se obtiene al anular la derivada, sin embargo, se observó que no reconocieron, salvo dos excepciones, aquellos puntos críticos que se obtienen donde la derivada se indetermina.

La mayoría de los estudiantes, identificaron los puntos de inflexión sobre la gráfica de la función y la tercera parte logro deducirlos a partir de la gráfica de la primera derivada.

Solamente un alumno involucró los extremos del intervalo cerrado, sobre el que está definida la función, para determinar la existencia de valores extremos absolutos.

7.1.2. Respecto del criterio de la primera derivada.

Se observó que más de la mitad de los alumnos conocen el criterio de la primera derivada, sin embargo, presentaron una serie de dificultades al intentar aplicarlo.

Una tercera parte de los participantes, aplicaron el criterio de la primera derivada seleccionando valores a la izquierda y a la derecha del punto crítico para evaluar la derivada. La dificultad evidenciada, fue que no lo hicieron sobre valores suficientemente cercanos al punto crítico, es decir, el no considerar intervalos suficientemente pequeños, alrededor de los puntos críticos, los llevó a resultados erróneos.

Esto hace evidente, que no se logra comprender la naturaleza local del criterio de la primera derivada, y que se aplica de manera procedimental sin reflexionar en las condiciones suficientes para aplicarlo.

Otra dificultad observada en la mitad de los alumnos, fue que intentaron calcular o describir los valores máximos o mínimos, a partir de la posición relativa que alcanzaban en el plano cartesiano las imágenes de los puntos críticos sobre la función, es decir, si la imagen que resultaba mayor concluyeron que correspondía a un máximo y la que resultaba menor, que correspondía a un mínimo. No aplicaron el criterio de la primera derivada.

Esta forma de proceder puede funcionar en algunos casos, pero en lo general es errónea.

Dada la cantidad de respuestas obtenidas para esta dificultad, nos parece pertinente ubicarla dentro de la dimensión de creencias que afectan el desempeño, lo que podría resumirse de la siguiente forma:

En ocasiones los estudiantes consideran que una vez calculados los puntos críticos de la función, basta con obtener sus imágenes para suponer cuales de ellos corresponden a valores máximos o valores mínimos.

Esta creencia, que puede ser producto de un aprendizaje que favoreció la mecanización de procedimientos, podría ser evitada, si se muestran suficientes contraejemplos para refutarla.

Por ejemplo, en la función $f(x) = -x^3 \ (x - 2)^3$, se tienen puntos críticos en $x = 0$, $x = 1$, y $x = 2$. Las imágenes de estos valores bajo la función, son: 0, 1, y 0, respectivamente. En el caso de los estudiantes que evidenciaron la creencia descrita, estos resultados bastarían para suponer que la gráfica de la función, es la mostrada en la Figura 28.

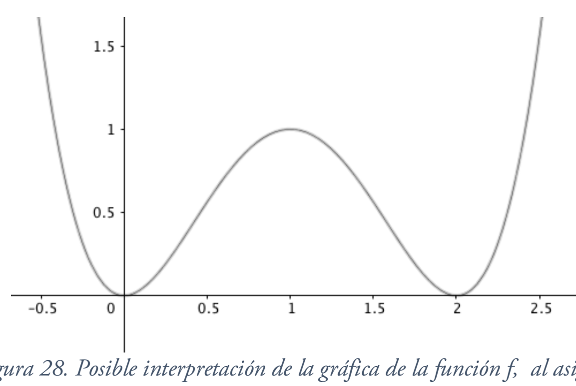


Figura 28. Posible interpretación de la gráfica de la función f, al asignar los valores extremosa partir de las imaagenes de los puntos críticos.

Al aplicar correctamente el criterio de la primera derivada, se concluye que existe un valor máximo local en $x = 1$, pero la función no tiene valores mínimos. Al realizar el análisis de concavidad, se determina que los puntos críticos $x = 1$, y $x = 2$, coinciden con puntos de inflexión de la función, tal y como se observa en la Figura 29.

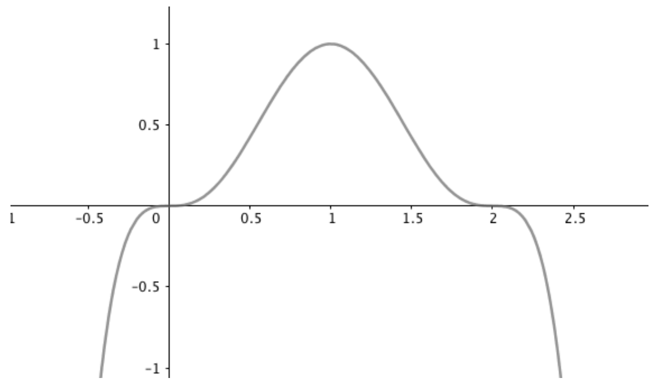


Figura 29. Gráfica correcta de la función f.

7.1.3. Respecto del criterio de la segunda derivada.

En los datos obtenidos se puede observar, que la mitad de los alumnos conocen el criterio de la segunda derivada, pero muy pocos, apenas tres, lograron emplearlo exitosamente para resolver los problemas que lo requerían. En específico, reconocen la relación entre el comportamiento de la segunda derivada y la concavidad de una función. Cabe destacar que uno de los alumnos aplicó esta relación, de forma muy precisa al describir la gráfica de la función, relacionando los valores extremos de la función, con el signo de la segunda derivada.

7.1.4. Respecto de la interpretación de los criterios a partir de gráficas.

Solamente seis estudiantes, lograron relacionar gráfica de la primera derivada, con los puntos críticos, valores extremos y puntos de inflexión de la función original, y ocho estudiantes lo hicieron a partir de la gráfica de la segunda derivada. Consideramos importante recalcar que, esta conexión de ideas requiere un nivel de abstracción bastante elevado además del dominio de los temas, y muestra que estos estudiantes tienen la capacidad de establecer conexiones en situaciones matemáticas no rutinarias.

7.1.5. Respecto del empleo de la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión.

Veintiún estudiantes resolvieron la ecuación obtenida al anular la segunda derivada con el fin de obtener los puntos de inflexión, pero solamente un alumno justificó la existencia realizando el análisis de concavidad alrededor de las raíces obtenidas. La mitad de los alumnos respondieron con una dificultad esperada, que consiste en asignar como puntos de inflexión aquellos puntos críticos que en el análisis no resultan ser valores máximos ni mínimos.

La dificultad observada es que los alumnos calculan los puntos de inflexión utilizando solamente los puntos críticos, el problema aquí, es que aunque en algunos casos coinciden, se dejan fuera otros puntos de inflexión que no son puntos críticos y solamente se obtienen con la segunda derivada.

7.1.6. Respecto de los sistemas de creencias de los estudiantes.

En el resumen general de los resultados, identificamos creencias ya citadas en algunas investigaciones consultadas. Estas creencias que se consideran comunes, tales como, el que algunos estudiantes consideran que al no ser expertos en cálculo diferencial, solo pueden dar respuestas procedimentales y no necesitan justificar (o razonar) sus procesos y sus soluciones (Shoenfeld, 1983). Esta creencia, aunque no es explícita, puede identificarse en la mayor parte de las respuestas que utilizan el criterio de la primera derivada como un algoritmo procedimental, cuando no se justifican los valores elegidos para definir los valores extremos. Principalmente, porque se cometía el error de no considerar que dichos valores, estuvieran lo suficientemente cercanos al punto crítico para ser válidos.

Dada la cantidad de respuestas que coinciden al exhibir las mismas dificultades, y por la naturaleza procedimental de las mismas, suponemos que pasarán a formar parte de los sistemas de creencias de los estudiantes y que son creencias de naturaleza ambiental, y también respecto de los temas. Estas creencias detectadas afectarán el desempeño de los estudiantes en cuestiones particulares de la aplicación de los criterios.

Una dificultad que puede considerarse como candidata a instaurarse en el sistema de creencias, es que: "basta con sustituir los puntos críticos en la función, para decidir si corresponden a valores máximos o valores mínimos, decidiéndolo a partir de la posición relativa de sus imágenes".

Otra dificultad, que ya fue citada anteriormente por Rivera & Ponce (2013) y por Moreno & Cuevas (2004), es que los estudiantes no consideran a los extremos de los intervalos cuando la función es acotada, como candidatos a ser valores máximos y/o mínimos de la función. Los datos obtenidos en la presente investigación, nos llevan a considerar que esta dificultad, es una creencia común ya instaurada en los estudiantes, y sobre todo, que no son consientes de tenerla.

Se observó que dos terceras partes de los estudiantes que intentaron calcular los puntos de inflexión de una función, emplearon solamente los puntos críticos de la función que no correspondían a valores máximos o a valores mínimos, argumentando que deberían corresponder a puntos de inflexión, esta dificultad fue descrita anteriormente por Rivera & Ponce ((2013). Para los fines de este trabajo, y dada la cantidad y las características de los participantes, consideramos que esta dificultad se mantendrá como una creencia en los estudiantes que no tengan la oportunidad de corregirla.

7.2. Conclusiones.

Los resultados obtenidos en nuestra investigación, muestran que aquellos estudiantes que hacen uso correcto de la notación y de la simbología matemática, durante la aplicación de los criterios para determinar valores máximos y valores mínimos, poseen un conocimiento instrumental, no relacional en el sentido de Skemp. Es decir, son capaces de llevar a cabo procedimientos de forma algorítmica, pero no comprenden la naturaleza local de los criterios. Por ejemplo, para el criterio de la primera derivada, no se percatan que necesitan analizar la función sobre intervalos suficientemente cercanos al punto crítico.

También observamos, que el 17 por ciento de los estudiantes, lograron identificar diferentes representaciones externas y transitaron de una representación a otra, relacionando los esquemas o gráficos con lenguaje verbal y matemático.

En algunos casos, los estudiantes apoyaron sus respuestas procedimentales, trazando bosquejos, mostrando su preferencia para el razonamiento visual, en otros casos únicamente emplean el razonamiento analítico. Tal y como habían reportado Selcuck et al. (2010), los estudiantes que obtuvieron respuestas más sofisticadas fueron aquellos que emplearon representaciones tanto algebraicas y verbales como pictóricas, al describir su razonamiento. En nuestra investigación solamente tres, de los sesenta y un estudiantes mostraron este nivel de razonamiento.

Con referencia en las actividades mentales propuestas por Carpenter y Lehrer, podemos concluir, que alrededor del 10 por ciento de los estudiantes que participaron en esta investigación, establecieron exitosamente la relación entre la información mostrada y sus conocimientos acerca de los criterios, pero que más de la mitad solamente los reconoce de forma superficial y no las concreta en sus respuestas (construcción de relaciones).

La mitad de los estudiantes aplicaron los principios y conceptos relacionados con los criterios de forma incorrecta o incompleta. Por otra parte, solamente el 13 por ciento de los estudiantes, lograron identificar los puntos extremos de una función, aplicando el criterio de la primera derivada para máximos y mínimos, a partir de la información proporcionada por la gráfica de la primera derivada. Estos mismos estudiantes lograron identificar los puntos de inflexión, basados en la información proporcionada por la gráfica de la segunda derivada. El resto de los estudiantes fueron incapaces de establecer relaciones a partir de las gráficas de la primera y de segunda derivada para obtener conclusiones sobre los valores extremos y los puntos de inflexión de una función.

Respecto de la reflexión de las experiencias, como actividad mental en el sentido de Carpenter y Lehrer, los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes resuelven los problemas de forma mecánica sin una reflexión. Es notable qué, cuando trataron de aplicar el criterio de la primera derivada, al verificar el cambio de signo de la derivada para puntos cercanos al punto crítico a, procedieron a evaluar la derivada en puntos tanto a la derecha como a la izquierda de a, sin reflexionar sobre la necesidad de hacerlo para puntos suficientemente cercanos al punto crítico a. Este resultado es consecuencia, como lo externaron los estudiantes, del procedimiento que llevan a cabo los autores del libro de texto, pues los ejemplos que utilizan para ilustrar el criterio de la primera derivada, en general, no requieren de esta reflexión.

Al intentar articular y mostrar la apropiación del conocimiento matemático, la mayor parte de los estudiantes emplearon lenguaje no formal en sus respuestas, lo que hacía evidente que presentaban dificultades para la correcta utilización de la notación algebraica, incluso cuando sus respuestas eran correctas. Cuando se les cuestionó acerca de la representación verbal que empleaban en sus soluciones, los estudiantes respondieron que se sentían más cómodos con ésta, ya que la simbología algebraica les parecía confusa e innecesaria.

Otra dificultad observada en las respuestas, aun cuando en algunos casos tenían sentido, consiste en que los conceptos se interpretaban de forma incorrecta. Por ejemplo el 30 por ciento de los estudiantes, respondieron que los valores máximos o mínimos de las funciones, eran las abscisas o los puntos geométricos en las gráficas, cuándo se les cuestionó al respecto, repitieron su respuesta y confirmaron que para ellos, el valor máximo o mínimo era el punto crítico y no la imagen del mismo.

Las dificultades que se evidenciaron, podrían ser superadas si se planteasen suficientes actividades, en las que, además de realizar procedimientos, se hiciese espacio para la reflexión de los conceptos y las de diversas actividades mentales que promoviesen la comprensión (Carpenter & Leher, 1999) .

Se sugiere apoyar el proceso de comprensión de los conceptos de máximos y mínimos tanto locales como absolutos y de los puntos de inflexión, mediante el uso de suficientes representaciones visuales no cotidianas, que permitan refutar aquellas conclusiones erróneas a las que suelen llegar los estudiantes.

Finalmente, en la enseñanza de los criterios para máximos y mínimos de funciones debería tratarse de que hubiese una comprensión relacional no solamente una comprensión instrumental, en el sentido de Skemp.

Referencias Bibliográficas.

Carpenter, T., & Leher, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema, & t. Romberg, *Mathematics Classrooms that promote understanding* (págs. 19-32). N.J., Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates.

Liljedahl, P., & Oesterte, S. (2014). Teacher Beliefs, Attitudes and Self-Efficacy in Mathematics Education. En *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 583-585). London, UK: Springer Reference.

Lloyd, M., & Wilson, M. (1998). Supporting innovation: The impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(3), 248-274.

Bressoud, D. (2015). Chapter 1. The Calculus Students. En D. Bressoud, V. Mesa, C. Rasmussen, D. Bressoud, V. Mesa, & C. Rasmussen (Edits.), *Insights and Recommendations from the MAA National Study of College Calculus.* EEUU: MAAPRESS.

Bressoud, D., Camp, D., & Teague, D. (Marzo de 2012). *Background to the MAA/NCTM Statement on Calculus.* Recuperado el Septiembre de 2017, de National Council of Teachers of Mathematics: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/MAA_NCTM_background.pdf

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Günter, T. (2016). *Teaching and Learning of Calculus.* Hamburgo: ICME-13 Topical Surveys.

Burn, H., & Mesa, V. (2015). Chapter 4. The Calculus I Curriculum. En D. Bressoud, V. Mesa, C. Rasmussen, D. Bressoud, V. Mesa, & C. Rasmussen (Edits.), *Insights and Recommendations from the MAA National Study of College Calculus.* MAAPRESS.

DGENP. (2009). *ENP- Planes y Programas de Estudio.* Recuperado el 10 de Febrero de 2017, de Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria UNAM: http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/sexto/1600.pdf

Ellis, J. (2014). *Graduate students Teaching Assistants' (GTAs') beliefs, instructional practices, and student success.* Recuperado el 15 de Octubre de 2017, de Mathematical Association of America: https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/cspcc/rume2014_ellis.pdf

Haaser, N. B., LaSalle, J. P., & Sullivan, J. A. (1990(reimp. 2011)). *Análisis Matemático, Curso de introducción. Vol 1.* (2a. edición ed., Vol. 1). México, México: Trillas.

Moreno, S., & Cuevas, C. (agosto de 2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática, 16*(2), 93-104.

NCTM & MAA. (Marzo de 2012). *A Joint Position Statement.* Recuperado el Agosto de 2017, de National Council of Teachers of Mathematics: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/Calculus%20MAA%20NCTM%20Joint%20Statement.pdf

NCTM. (2000). *Principles and Standars for School Mathematics* (Vol. 77). Reston: National Council of Teachers of Mathematics .

NCTM Research Committe. (May de 2011). Trends and Issues In High School Mathematics: Research Insights and Needs. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 204-219.

OECD. (2015). *Education at a glance 2015 Mexico* . Recuperado el 3 de Mayo de 2017, de OECD: https://www.oecd.org/mexico/Education-at-a-glance-2015-Mexico-in-Spanish.pdf

Prenowitz, W. (1992). Insight an understanding in the calculus. En T. M. al, *A Century of Calculus* (págs. 32-37). Washington, D.C., EEUU: Mathematical Association of America.

Presmeg, N. (2006). Research of Visualization In Learning and Teaching Mathematics. En A. Gutierrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (págs. 205 - 236). Rotterdam: Sense.

Rivera, A. (2012). *Cálculo diferencial, Fundamentos, Aplicaciones y Notas Históricas.* México, D.F., México: Grupo Editorial Patria.

Rivera, A., & Ponce, J. C. (Marzo de 2013). Derivative, maxima and minima in a graphical context. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(2), 284-299.

Rivera, A., García, R. M., & Díaz, M. (2013). Comprensión de los significados de la derivada: un estudio con profesores de bachillerato y una propuesta didáctica en ambientes virtuales. En T. Rojano, *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.* (págs. 37-67). México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* EE.UU.: Academic Press, Inc.

Selcuk, H., Aspinwall, L., & Presmeg, N. C. (Abril-Junio de 2010). Contrasting Cases of Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 152-176.

Shoenfeld, A. H. (1983). Beyond the Purely Cognitive: Belief Systems, Social Cognitions, and Metacognitions As Driving Forces in Intellectual Performance. *Cognitive Science*, 329 - 363.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Swokowski, E. W. (1979). *Calculus With Geometry Analytic* (2a edición ed.). Boston, United States of America: Prindle, Weber & Schmidt.

Thompon, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput, *Research in Colllegiate Mathematics Education* (Vol. 4, págs. 21 - 44). Providence: American Mathematical Society.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grows, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 127 - 146). New York: Macmillan.