CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

RUPTURAS EPISTEMOLÓGICAS EN LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE UNA ALTERNATIVA DIGITAL DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Tesis que presenta

Rubén Elizondo Ramírez

Para obtener el grado de Maestro en
Ciencias en la especialidad de
Matemática Educativa

Director de la tesis:

Dr. Luis Enrique Moreno Armella

México, Distrito Federal Agosto de 2014

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero brindado a través de la beca otorgada durante mis estudios.

Becario No. 475681

Agradezco al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), en especial al Departamento de Matemática Educativa (DME) de la Unidad Zacatenco, por la oportunidad y apoyo otorgado para llevar a cabo mis estudios de maestría.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer profundamente al Dr. Luis E. Moreno Armella, fuente de inspiración y conocimiento, la oportunidad de haber llevado a cabo esta investigación bajo su tutela; su apoyo, paciencia, confianza y empeño depositados en mí me dieron la oportunidad de concluir este importante ciclo de mi carrera profesional.

Agradezco a mis padres, Minerva Ramírez Contreras y Mauricio Elizondo Fuentes, y a mi hermano Mauricio Elizondo Ramírez por su amor y apoyo incondicionales. Igualmente, agradezco a toda mi familia y a mis amigos por su cariño.

Agradezco también a los sinodales de este trabajo por sus importantes aportaciones y sugerencias que han servido para el enriquecimiento de este trabajo, el Dr. Gonzalo Zubieta Badillo y el Dr. Marco Antonio Santillán Vázquez. Asimismo, a los doctores Manuel Santos, José Guzmán, Ernesto Sánchez y François Pluvinage por sus enseñanzas brindadas durante esta etapa, y al personal administrativo, en particular, a Adriana Parra.

De forma general, agradezco a mis amigos y compañeros de trabajo, alumnos y a todas las personas que fueron parte de este proceso.

Finalmente, agradezco a Karen por haberme acompañado durante este tiempo.

Dedico este trabajo a la memoria de mi abuelo

José Ángel Ramírez Santiago

ÍNDICE

RESUMEN

La presente tesis de maestría reporta una investigación cuyo objetivo principal consiste en documentar las rupturas epistemológicas encontradas en la geometría; particularmente, la evidencia recopilada se correlaciona con las rupturas epistemológicas propuestas por Hegedus & Moreno-Armella (2011). La investigación se cimienta en la constitución de la geometría euclidiana como un *espejo* del espacio físico y en *la ruptura de este espejo* derivada por el surgimiento de las geometrías no euclidianas. De esta forma, el eje del estudio concierne a la tensión existente entre la intuición del espacio físico y un modelo de geometría no euclidiana: el Disco de Poincaré. Para documentar dichas rupturas epistemológicas, esta investigación se fundamenta en elementos teóricos referentes a mediación instrumental, semiótica y coacción. Los resultados de la investigación surgen a partir del desarrollo de actividades con estudiantes de bachillerato enfocadas en concepciones y mecanismos de validación en geometría, en un ambiente de papel y lápiz así como en uno de geometría dinámica.

ABSTRACT

This document reports a master's degree research study whose main goal consists on documenting the epistemological ruptures found in geometry. Particularly, the evidence compiled is correlated to the epistemological ruptures suggested by Hegedus & Moreno-Armella (2011). Not only is this investigation based on the constitution or representation of the Euclidean geometry as a *mirror* of the physical space but also on the *breach of this mirror* originated by the emergence of non-Euclidean geometries. Thus, the focal point of the study concerns to the current tension between the intuition of the physical space and a non-Euclidean geometry model: the Poincaré Disk model. To provide evidence for such ruptures, this research is supported by some theoretical elements regarding mediation, semiotics and co-action. The results of the investigation emerges from the development of activities carried out by high-school students, focused on conceptions and validation processes of geometry, in a traditional paper-and-pencil environment as well as in a dynamic-geometric one.

PRESENTACIÓN

Este documento da cuenta de la investigación sobre las rupturas epistemológicas encontradas en la geometría considerando la tensión que existe entre la intuición del espacio físico y un modelo de geometría no euclidiana: el Disco de Poincaré. La investigación se lleva a cabo con estudiantes de bachillerato mediante actividades relacionadas con concepciones y mecanismos de validación. El documento consta de seis capítulos descritos a continuación.

En el Capítulo 1 se plantea el problema de investigación. Se incluyen los antecedentes del problema llevando a cabo una revisión de la literatura relacionada con el estudio, los objetivos, hipótesis y las preguntas que guían la investigación.

El Capítulo 2 contiene el marco conceptual que sustenta el análisis de los datos recabados. Se discuten conceptos referentes a rupturas epistemológicas, mediación instrumental, semiótica, coacción y mecanismos de validación, tomando en cuenta la tecnología digital.

En el Capítulo 3 se presenta una alternativa digital de la geometría hiperbólica. En primer lugar, se lleva a cabo una narración histórica en torno al surgimiento de las geometrías no euclidianas, haciendo referencia a *Los Elementos* de Euclides donde se enfatiza sobre el problema relacionado con el quinto postulado. Luego, se mencionan los personajes que estudiaron este problema y sus aportaciones que dieron origen a las geometrías no euclidianas: Saccheri, Gauss, Bolyai y Lobachevski, principalmente. En segundo lugar, se relata el rol jugado por Henri Poincaré en esta nueva rama de la matemática describiendo una de sus contribuciones fundamentales: el modelo del Disco de Poincaré. Después, se hace referencia a la digitalización de este modelo en un ambiente de geometría dinámica.

El Capítulo 4 trata sobre los fundamentos metodológicos tomados en cuenta para el desarrollo de la investigación: el tipo de estudio, la población participante, y el diseño y características del Instrumento para el acopio de los datos.

En el Capítulo 5 se analizan y discuten los datos recopilados, con base en los conceptos teóricos presentados en el Capítulo 2, presentando algunos ejemplos representativos.

El Capítulo 6 contiene las conclusiones generales de los resultados obtenidos del análisis y discusión de los datos recabados, y se exponen las reflexiones respecto de las preguntas que guiaron el estudio. Además, se presentan varias implicaciones de investigación futura para la continuación de este trabajo, con lo cual se pretende ahondar y contribuir en mayor medida en este campo de investigación.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas consideradas para el desarrollo del estudio, un anexo relacionado con la versión digital del Disco de Poincaré y los Cuestionarios que formaron el Instrumento de investigación para la recopilación de los datos.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

INTRODUCCIÓN

1.1. EL PROBLEMA

La investigación reportada en este documento aborda la problemática relacionada con las rupturas epistemológicas encontradas en la geometría[1]. El eje de esta problemática es la tensión existente entre la intuición del espacio físico y un modelo de geometría no euclidiana. Dicha problemática se basa en el análisis de las concepciones de objetos geométricos y mecanismos de validación usados por alumnos de bachillerato, estudiados en un ambiente de geometría euclidiana (en papel y lápiz y en geometría dinámica) y en un ambiente de geometría no euclidiana (vía un modelo de geometría hiperbólica inmerso en un ambiente dinámico). El problema de investigación se reporta en el presente documento como:

RUPTURAS EPISTEMOLÓGICAS EN LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE UNA ALTERNATIVA DIGITAL DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Este problema se estudia a partir de elementos teóricos referentes a rupturas epistemológicas, mediación instrumental, semiótica, y al concepto de coacción introducido por Moreno-Armella, Hegedus y Kaput (2008).

1.2. ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

Con el surgimiento de las nuevas tecnologías (e.g., la geometría dinámica) una de las áreas de interés de la comunidad en educación matemática ha sido estudiar el papel que desempeña la tecnología digital en el aprendizaje de las matemáticas. Varios autores (e.g., Moreno-

[1] En este documento, el concepto de “ruptura epistemológica” se refiere a los cambios relacionados con el conocimiento derivados por la evolución epistemológica de éste; en particular, los cambios en el conocimiento geométrico. En matemáticas, este término surge, de manera general, por el cuestionamiento de los matemáticos respecto del trabajo de sus predecesores.

Armella et al., 2008) reconocen que las nuevas tecnologías, al ofrecer nuevas maneras de acercarse a los objetos y procesos matemáticos, tienen un rol fundamental en la educación matemática de los estudiantes. Asimismo, la comunidad también se ha ocupado por construir perspectivas teóricas que ofrezcan explicaciones plausibles y permitan estudiar el papel de las nuevas tecnologías en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Por ejemplo, Moreno-Armella et al. (2008) indican que las nuevas tecnologías permiten que los alumnos tengan mayor acceso a las ideas matemáticas. Estos autores resaltan una diferencia entre el trabajo matemático en papel y lápiz, y cuando el mediador es la tecnología digital: las nuevas tecnologías permiten nuevas formas en la actividad matemática. Este punto de vista conduce a nuevas perspectivas relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas. Moreno-Armella et al. (2008) sugieren que una estructura simbólica (e.g., la estructura geométrica) es un medio en el que es posible auxiliarse para pensar sobre dicha estructura y, simultáneamente, tal estructura impacta la mente humana rediseñándola. En un medio estático (papel y lápiz) existe una simbolización que es una plataforma para expresar y razonar con generalidad, lo cual puede conducir a otras simbolizaciones. Moreno-Armella et al. (2008) indican que se debe considerar que el símbolo no es un ente aislado, por lo contrario, es creado por el usuario y, como consecuencia, también su significado.

Por otra parte, en las últimas décadas se ha generado un interés por incluir la demostración geométrica como parte de la matemática escolar. Se ha reconocido la necesidad de respaldar las investigaciones, tanto a nivel empírico como teórico, para sustentar el potencial de las nuevas tecnologías en el razonamiento matemático inmerso en un contexto geométrico. Como resultado, uno de los problemas de la investigación actual corresponde al estudio de las proposiciones formales en situación escolar y los procesos para su validación.

Lo anterior se evidencia en diversas fuentes y en algunos de los principales foros en Educación Matemática. Por ejemplo, en:

- *Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*
- *The International Congress of Mathematical Education (ICME)*
- *The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*

Se manifiesta una fuerte tendencia en las investigaciones relacionadas con el razonamiento, la argumentación y la demostración. En varios de estos foros se dedican sesiones especiales para la discusión de la temática (e.g., ICME-10, 2004). En:

- *North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)*

Hay una sección especializada sobre razonamiento y demostración y un grupo de trabajo para geometría y tecnología, el cual ha centrado su interés en la discusión sobre la demostración en ambientes dinámicos. De manera similar, revistas como *Mathematics Teacher (1999)* y *Educational Studies in Mathematics (2001)* han dedicado volúmenes completos a la discusión sobre la demostración. Asimismo, otras revistas como *International Journal of Computers for Mathematical Learning, Journal for Research in Mathematics Education*, *ZDM,* entre otras, publican artículos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento en un contexto geométrico.

En las propuestas de reformas educativas, se ha incorporado el razonamiento matemático como objeto importante a desarrollar en todos los niveles educativos (e.g., NCTM, 2000; MEN, 1998, etc.). Esta diversidad permite contar con un amplio abanico de posturas sobre el mismo problema. Gran parte de estas posturas están recopiladas en la página de internet http://www.lettredelapreuve.it/ mantenida por investigadores interesados en esta problemática como Balacheff, Boero, Chazan, Duval, De Villiers, Mariotti, entre otros. Esta base de datos fue usada como complemento para la revisión de bibliografía de esta investigación de la cual se da una breve reseña a continuación:

- Mariotti, Bartolini-Bussi, Boero, Ferri, y Garuti (1997) plantean que la relación entre las construcciones y los teoremas es de difícil comprensión para los estudiantes. Sus resultados muestran que el significado de construcción de los estudiantes tiene una evolución lenta
- Gardiner y Hudson (1998) concluyen que los ambientes de geometría dinámica promueven el desarrollo de las nociones de dibujar y construir. Su estudio enfatiza la mediación instrumental

- Arzarello, Micheletti, Olivero y Robutti (1998) indican que los alumnos logran construir enunciados generales en un ambiente de geometría dinámica. Además, resaltan la potencialidad de la herramienta del arrastre, pues ésta permite la exploración y validación de una construcción para producir y validar conjeturas
- Olivero (2003) analiza las formas como la geometría dinámica puede ayudar a los estudiantes en el proceso de prueba. Como resultado de su trabajo, desarrolló un marco teórico experimental que permite analizar las interacciones entre los estudiantes y las herramientas, y entre los estudiantes mismos. Asimismo, se enfoca en la propiedad del arrastre

En general, los resultados de estas investigaciones coinciden en que los ambientes de exploración mediados por la geometría dinámica ofrecen oportunidades de desarrollo ausentes en los medios tradicionales (estáticos) de papel y lápiz.

En relación con la investigación didáctica referente a las geometrías no euclidianas y, particularmente, a los modelos de geometría hiperbólica no ha sido evidenciada ampliamente. Sin embargo, existen algunos estudios que abordan las potencialidades del software de geometría dinámica en la representación de la geometría hiperbólica (Straesser, 2001), estudios relacionados con la geometría elíptica (Kaisari & Patronis, 2010) y estudios enfocados en el diseño computacional de la geometría hiperbólica (Stevenson & Noss, 1999; Stevenson, 2000). A continuación se sintetizan estos trabajos y, cuando es el caso, se indica la relación de estos con la presente investigación:

- Straesser (2001), indica que el software de geometría dinámica puede ser usado innovadoramente en la geometría hiperbólica, resaltando la capacidad del software Cabri-Géomètre para hacer macros, en el sentido de llevar a cabo una configuración y guardarla para que su reproducción no sea necesaria; así, basta con recuperarla de la memoria de la computadora para poder usarla. En el diseño del modelo dinámico del Disco de Poincaré de la investigación reportada en el presente documento se usa esta herramienta característica del software de geometría dinámica, usando GeoGebra. Este autor indica que los modelos de la geometría hiperbólica son poco accesibles en un ambiente de papel y lápiz. Además, este autor refiere que la exploración llevada a cabo por el usuario apunta a una mejor comprensión de la estructura de este modelo comparado con las actividades tradicionales en papel y lápiz. Su investigación no considera la componente didáctica del modelo del Disco de Poincaré, sólo resalta la potencialidad del software para tener una representación dinámica de dicho modelo

- Kaisari & Patronis (2010), analizan con estudiantes universitarios la construcción de un modelo de geometría elíptica donde distinguen tres tipos de uso de los conceptos geométricos: elementos de representación de la experiencia espacial, objetos de la práctica escolar tradicional y componentes de una teoría matemática abstracta. Estos autores centran su análisis en estos tres tipos de conceptos geométricos y concluyen que si los estudiantes usan conceptos geométricos en diferentes formas, tienen éxito al interactuar con sus compañeros y comprender sus razonamientos, además de que la construcción de modelos de la geometría elíptica representa un importante vínculo entre la geometría elemental y avanzada
- Stevenson & Noss (1999) y Stevenson (2000) llevan a cabo un estudio relacionado con la geometría hiperbólica desde un contexto de diseño computacional enfocado en estudiantes universitarios. Estas investigaciones apuntan a que, en un ambiente computacional, los significados son construidos por la acción de objetos virtuales y relaciones, y están conectados con otras intuiciones derivadas de fragmentos de conocimiento más primitivos e inferenciales. Estos autores concluyen que el uso de la herramienta virtual en situaciones específicas parece ofrecer una descripción más flexible y poderosa de la evolución de la comprensión matemática. Además, Stevenson (2000) indica que el diseño de un contexto computacional para el aprendizaje de matemáticas "avanzadas", tal como la geometría hiperbólica, reconcilia la introducción de los aprendices a modelos específicos de estructuras abstractas de manera explicativa y expresiva

Se reitera, no obstante, que en estos estudios la componente didáctica no es el foco de atención. Más todavía, la investigación desde un punto de vista didáctico referente a las rupturas epistemológicas concernientes a la geometría no ha sido ampliamente documentada.

Con base en estos antecedentes, se considera pertinente llevar a cabo una investigación que evidencie las rupturas epistemológicas de la geometría cuando estudiantes de bachillerato son enfrentados con un modelo de geometría no euclidiana. Asimismo, se cree importante investigar sobre el papel que juega el software de geometría dinámica en la concepción de un modelo de geometría hiperbólica de modo que sea posible documentar dichas rupturas cuando el software de geometría dinámica es usado como un mediador de la geometría. A continuación, se delinean los propósitos, hipótesis y preguntas de investigación del presente estudio.

1.3. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

Como fue indicado previamente, esta investigación está centrada en las rupturas epistemológicas de la geometría, con un interés particular enfocado en la tensión existente entre la intuición del espacio y un modelo de geometría hiperbólica. Para documentar tales rupturas, se considera necesario evidenciar las concepciones geométricas de los estudiantes y los mecanismos de validación que ellos emplean en situaciones de prueba geométrica. En esta dirección, el propósito general del estudio se descompone en dos objetivos particulares descritos a continuación:

- Describir y analizar las concepciones de los estudiantes respecto de objetos geométricos y los mecanismos de validación usados por ellos cuando son enfrentados con situaciones geométricas euclidianas y no euclidianas
- Reportar rupturas epistemológicas de la geometría y correlacionarlas con las rupturas propuestas por Hegedus et al. (2011)

Con base en los antecedentes y en los objetivos indicados previamente, surgen hipótesis sobre el presente estudio; éstas se delinean a continuación:

- Los estudiantes tienen concepciones adecuadas de los conceptos geométricos básicos dado que la geometría euclidiana es objeto de estudio desde los niveles básicos en la educación
- Los estudiantes tienen una concepción *pre-semiótica* de los objetos geométricos euclidianos, es decir, creen que estos han existido siempre además de que son únicos. Como consecuencia, existen rupturas epistemológicas al enfrentarse con geometrías no euclidianas

- La geometría dinámica permite una mayor comprensión de la geometría producto de la visualización[2] y dinamismo de los objetos geométricos. Asimismo, permite que el estudiante desarrolle intuiciones geométricas y refuerce su pensamiento geométrico[3]

1.4. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas planteadas a continuación son producto de los antecedentes y objetivos de la problemática. Éstas guían el estudio y se pretende responderlas:

- ¿Cómo cambia la concepción de los estudiantes respecto de los objetos geométricos al explorar un modelo de geometría no euclidiana?
- ¿Qué intuiciones geométricas son generadas por los estudiantes al explorar un modelo de geometría no euclidiana?
- ¿Cuáles son las rupturas epistemológicas de la geometría detectadas cuando los estudiantes son enfrentados con un modelo de geometría no euclidiana?
- ¿Cuál es el papel que desempeña el software de geometría dinámica en la exploración de una geometría no euclidiana?

En el siguiente capítulo se exponen los elementos teóricos de esta investigación.

[2] En este trabajo, el concepto de visualización se interpreta como el espacio de representación de las configuraciones de dos o tres dimensiones las cuales sirves como ayuda intuitiva para el razonamiento.
[3] Este concepto se refiere al conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones de los objetos geométricos, las relaciones entre ellos y sus transformaciones.

CAPÍTULO II

MARCO CONCEPTUAL

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se exponen los elementos teóricos de la investigación. En particular, se consideran elementos sobre rupturas epistemológicas, mediación instrumental, semiótica, coacción y mecanismos de validación, tomando en cuenta la fase experimental.

2.1. RUPTURAS EPISTEMOLÓGICAS

Carl Gustav Jung (1885-1961) introdujo y estudió la noción de *obstáculo epistemológico*, haciendo referencia a los obstáculos afectivos en un *universo mental* del científico y del estudiante. Bachelard (1884-1962), en su obra inspirada por el trabajo de Jung, *La formation de l'esprit scientifique*, indica que los obstáculos epistemológicos impiden progresar en el conocimiento de fenómenos pues el obstáculo epistemológico debe traspasar el saber del pasado así como el sentido común con el fin de que aparezca una *verdadera ciencia*. De acuerdo con Bachelard (1993), acceder a la ciencia significaría aceptar contradecir el pasado. Entonces, las opiniones, las convicciones y las prenociones serían obstáculos epistemológicos: "lo verdadero nunca es lo que se debió haber creído sino lo que se debió haber pensado" (Bachelard, 1993). De acuerdo con este autor, la ciencia se edifica en la transición de los prejuicios a lo verdadero, de la experiencia a la razón, transición que constituye una ruptura epistemológica.

Hegedus et al. (2011), por su parte, reportan que la noción de obstáculo epistemológico ha sido un útil constructo para analizar errores y dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, mencionan que algunos autores han criticado esta noción argumentando que prescinde de factores socioculturales en su definición (además de que no se establece en términos de experiencias de aprendizaje individuales sino, más ampliamente, en el desarrollo de pensamiento científico). No obstante, Hegedus et al. (2011) indican que esta noción puede ser usada para descubrir rupturas epistemológicas redefiniendo la noción de cultura para manejar la *coevolución* de la tecnología y el aprendizaje de hoy. Así, de acuerdo con estos autores, la cultura es la coevolución de los medios digitales y las acciones comunicativas expresivas.

De esta manera, una ruptura epistemológica se entiende como la transición que permite *conocer de forma real*, rechazando ciertos conocimientos previos para revelar conocimiento nuevo. Hegedus et al. (2011) identifican cuatro rupturas epistemológicas relacionadas con el conocimiento matemático. Éstas se categorizan en función de momentos en la historia de las matemáticas donde ha sido necesario prescindir de ciertos conceptos o nociones previamente establecidos para producir una nueva epistemología de la matemática. En particular, estos autores señalan dos rupturas concernientes al periodo previo al siglo XXI y otras dos al siglo XXI. En la Tabla 2.1 se indican estas rupturas epistemológicas y, en seguida, se describe cada una de ellas.

Tabla 2.1. Rupturas epistemológicas en las matemáticas

Antes del siglo XXI	En el siglo XXI
Primera ruptura epistemológica: *Surgimiento de una estructura matemática encarnada*	Primera ruptura epistemológica: *Surgimiento de una estructura matemática encarnada a través de ambientes de modelación dinámica*
Segunda ruptura epistemológica: *Reformalización de la estructura matemática del espacio físico*	Segunda ruptura epistemológica: *Percepción de la estructura matemática del espacio físico*

1. Primera ruptura epistemológica antes del siglo XXI. Comprende el periodo pre-kantiano desde tiempos de *Los Elementos* de Euclides. Se refiere a la concepción kantiana de la geometría euclidiana como representación única y fiel del espacio
2. Segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI. Concierne a la reformalización de la matemática derivada del surgimiento de las geometrías no euclidianas. En esta ruptura se ubica una fuerte tensión entre la intuición y la lógica

3. Primera ruptura epistemológica en el siglo XXI. Se refiere a la introducción de la tecnología digital en la concepción del espacio
4. Segunda ruptura epistemológica en el siglo XXI. Compete a la introducción de sistemas tecnológicos que involucran otros sentidos como el tacto para concebir objetos matemáticos

Hegedus et al. (2011) proponen que, contrastando las dos primeras rupturas con el desarrollo actual, existe un cambio en la semiótica centrado en una nueva teoría: la semiótica digital. Esta teoría respalda el estudio de la interacción de los usuarios con los símbolos (de la semiótica digital), pero se extiende a los nuevos usuarios que se desarrollan en ambientes digitales. Además, estos autores establecen dicho cambio mediante distintas nociones incluyendo la de coacción, expuesta en la sección 2.4, la cual es un principio de organización para la forma como toma sentido el simbolizar, objetivar y percibir la esencia de una estructura.

El análisis de los datos de la presente investigación se enfoca en las dos rupturas previas al siglo XXI y en la primera de las dos pertenecientes al siglo XXI. En el siguiente capítulo se delinea una narrativa cronológica sobre el surgimiento de las geometrías no euclidianas señalando momentos históricos de la matemática sobre el surgimiento de estas rupturas.

2.2. MEDIACIÓN INSTRUMENTAL

Uno de los principales rasgos de la especie humana, desde su origen como especie, es la producción de herramientas. Nuestros ancestros, al utilizar piedras para cazar un animal o abrir una nuez, no necesitaban llevar la misma piedra para cazar o abrir otra nuez en un lugar distinto, bastaba con *transportar* el modelo mental que les permitiera reproducir esas acciones. Es decir, las piedras no sólo eran herramientas *amplificadoras* de una actividad física sino, lo que es más importante, las piedras eran la *cristalización* de acciones intencionadas cuyo objetivo era transformar su entorno.

La producción de herramientas consiste en un proceso mental, donde la experiencia y la capacidad de relacionar ciertos conocimientos con otros, engendra elementos inexistentes en la naturaleza, los cuales no se pueden descubrir. Las herramientas, tanto materiales como simbólicas, han beneficiado al hombre para modificar sus condiciones materiales de existencia y su adaptación con el entorno. Como consecuencia, el hombre, además de modificar su entorno y convertirlo en un reflejo de su actividad, se ha modificado a sí mismo y, con ello, la manera de percibirlo.

Dentro de la teoría sociocultural, Vygotsky (1995) plantea que el sujeto construye su propio conocimiento, el cual está estrechamente ligado con el contexto social. Además, el lenguaje juega un papel primordial en el desarrollo del pensamiento; por lo tanto, existe una relación entre la construcción del conocimiento y las herramientas. Para Vygotsky, hay dos tipos de herramientas: técnicas (artefactos) y psicológicas (símbolos). Estas herramientas son mediadoras de la actividad humana para la construcción de conceptos. Vygotsky (1995) introduce la noción de *mediación semiótica* al considerar que un sujeto aprende primero por el uso de herramientas técnicas, orientadas alrededor de una acción externa.

Por ejemplo, un niño aprende las figuras geométricas con la manipulación directa de las representaciones materiales de ciertos objetos geométricos. El proceso de transformar una herramienta técnica (artefacto) en una psicológica (símbolos), se denomina *internalización*. En el ejemplo, este proceso puede producirse con la ayuda de un adulto o un profesor. Entonces, las herramientas técnicas ayudan en el control del ambiente exterior para cambiarlo, mientras que los símbolos contribuyen a cambiar las construcciones mentales del individuo. En el proceso de internalización, las diferentes operaciones y acciones externas son reconstruidas e interiorizadas. La reconstrucción se basa en la evolución de un proceso interpersonal a uno intrapersonal.

Moreno-Armella & Sriraman (2010) también distinguen una herramienta material de una simbólica. Estos autores indican que, por un lado, la herramienta material afecta la naturaleza de la actividad humana (mediada) y que ésta puede modificar el propósito de la actividad. Por otro lado, la herramienta simbólica afecta el conocimiento, la cognición del sujeto. Además, Moreno-Armella & Hegedus (2009) indican que la herramienta no es el objeto físico en sí mismo sino es la *encarnación* o *incorporación* de un propósito y un diseño: una realización material de una idea. Como consecuencia, una herramienta no puede separarse de una actividad. Más todavía, si la actividad cambia, el propósito también y esto implica la redefinición de la herramienta como tal: “la herramienta y la actividad están definidas mutuamente” (Moreno-Armella et al., 2009).

Enseñar la construcción de herramientas permite que el aprendiz construya una copia de la misma herramienta. Así, la herramienta no es un ejemplar particular, sino la idea y el algoritmo para construirla (Moreno-Armella et al., 2009). Entonces, el empleo de la herramienta no sólo afecta la estrategia de construcción, sino también las acciones que le derivan: la actividad cognitiva siempre está mediada por un instrumento.

2.2.1. La computadora como herramienta de mediación

La computadora se ha convertido en una herramienta mediadora tanto cognitiva como epistemológica. Ésta provee un amplio abanico de representaciones de un objeto matemático y de relaciones matemáticas. De acuerdo con Moreno-Armella & Sriraman (2005), las versiones virtuales de los objetos matemáticos producen una sensación de existencia material y, además, ofrecen la posibilidad de ser manipulados: son *representaciones ejecutables*. Este sistema de representación permite tener acceso tanto a la representación de un objeto como a las acciones con el objeto. Así, lo que se manipula está más cerca del objeto conceptual que de un dibujo estático.

Moreno-Armella et al. (2010) destacan que una computadora puede afectar de manera simultánea tanto la actividad humana del usuario (e.g., al escribir) como su cognición (e.g., reorganizando sus ideas). Particularmente, los ambientes computacionales proveen una ventana para estudiar la evolución de conceptos matemáticos (causados por la presencia de esas nuevas herramientas), lo cual puede llevarse a cabo analizando el uso de esas herramientas en la producción de conocimiento dentro de un ambiente computacional (Moreno-Armella et al., 2005).

De acuerdo con Noss & Hoyles (1996), un ambiente computacional es un *dominio de abstracción*, el cual puede ser entendido como un escenario donde los estudiantes pueden articular sus ideas informales con sus ideas más formales respecto de un tema. La creciente familiarización de los estudiantes con las herramientas computacionales permite que éstas sean transformadas en instrumentos matemáticos en el sentido de que los recursos computacionales se incorporan gradualmente en la actividad de los estudiantes (Guin & Trouche, 1999; Rabardel, 1995). Además, las computadoras han hecho factible una nueva manera de mirar los símbolos, mirar a través de ellos, y trasformar los recursos de la cognición matemática (Moreno-Armella et al., 2010).

2.3. SEMIÓTICA

Un símbolo representa o toma el lugar de algo y los objetos matemáticos existen sólo a través de símbolos. Epistemológicamente hablando, el objeto matemático es introducido cuando se produce una representación semiótica que permite afirmar que una experiencia ha sido matematizada. Una vez que se tiene una nueva representación, se tiene un nuevo objeto matemático y éste queda definido a partir de dos sistemas de representación: la evolución de un objeto matemático se traduce en la iteración de esta actividad semiótica (Moreno-Armella et al., 2009). Dicho de otro modo, la objetividad matemática resulta de la actividad humana, una actividad mediada exclusivamente por símbolos. Así, ésta no puede ser exclusiva de los objetos porque estos no existen antes de la producción de una representación semiótica.

Para tener una mejor comprensión de un objeto o estructura matemáticos se requiere del empleo e interacción de más de un sistema de representación. Cada uno de estos sistemas, junto con las reglas que los acompañan, presupone una caracterización distinta del correspondiente objeto. En otras palabras, muestran propiedades relevantes en ese contexto, pero no agotan al objeto; por lo contrario, lo enriquecen y apoyan su comprensión. Entonces, la manera de representar en matemáticas permite manipular y procesar cada una de esas representaciones pues éstas son simbólicas. Así, los distintos modos de representarlas expresan, a su vez, las propiedades y relaciones estructurales entre los objetos.

Por otro lado, la notación matemática no es epistemológicamente neutral. Los símbolos matemáticos *coevolucionan* con sus referentes matemáticos y la objetividad semiótica inducida hace posible que sean compartidos en una comunidad de práctica (Moreno-Armella et al., 2010). Así, desde el punto de vista didáctico, el aprendiz es confrontado con un objeto previamente definido, aunque el objeto esté siempre en construcción.

En el caso de la geometría, la representación de un objeto puede hacerse de diferentes maneras. Se puede hablar de representaciones materiales (que pueden ser de papel, plástico, madera, etc.); de representaciones figurales (que pueden ser elaboradas sobre una superficie como el papel o la computadora); y de representaciones discursivas (descripciones con palabras, utilizando lenguaje natural y simbólico).

La aprehensión de las representaciones geométricas se constituye por la relación entre el sujeto y el objeto geométrico que representan. La manera de *ver* en geometría está mediada por el tipo de conocimiento de cada individuo, por los sistemas de representación y por el contexto. Por su parte, la *visualización* consiste en la sensibilidad en la lectura del objeto geométrico representado (Sandoval, 2005).

2.3.1. REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DIGITALES

Una refracción del objeto matemático eventualmente toma un lugar en los medios de representación digitales. La computadora es un soporte externo de la cognición y, por lo tanto, es un instrumento cognitivo, pues afecta las formas de entender, reorganizar y expresar ciertos aspectos relacionados con la actividad intelectual. Además, es un instrumento epistemológico pues media la apropiación, la generación y la validación del conocimiento. En particular, la computadora media la producción del conocimiento matemático y le otorga significado a sus objetos y relaciones.

Moreno-Armella et al. (2009) indican que "con los nuevos avances en el diseño de medios dinámicos, la accesibilidad de ideas matemáticas y la naturaleza de simbolización son transformados con la creación de nuevas formas de experiencia simbólicamente mediada". En el caso de la geometría dinámica, ésta ofrece un campo de exploración que no es factible en las representaciones con papel y lápiz. El tipo de representación es diferente, es una representación dinámica en la cual las propiedades estructurales de los objetos permanecen inalterables.

Entre las principales características que ofrece la geometría dinámica se encuentran el *arrastre*[1] y la *medición*[2]. El primero permite manipular directamente las construcciones en la pantalla de la computadora. Es decir, consiente procesar las representaciones, conservando las relaciones estructurales de la construcción. La medición posibilita al usuario para llevar a cabo conjeturas y validarlas dentro de este medio.

El uso de las nuevas tecnologías conduce a una reestructuración cognitiva puesto que requieren del aprendizaje de una sintaxis, particularmente en la geometría dinámica. Es decir,

[1] En Olivero (2003) se encuentra una clasificación de las distintas modalidades de arrastre.
[2] En Olivero & Robutti, (2001) se encuentra una clasificación de las distintas modalidades de medición.

solucionar una actividad geométrica en un ambiente digital requiere de dos tipos de instrucción: la matemática y la instrumental.

2.4. COACCIÓN

El concepto de coacción describe cómo el usuario de un ambiente dinámico guía y, a su vez, es guiado por este ambiente como una actividad fluida (Moreno-Armella et al., 2009). La noción de coacción enfatiza la importancia del rol del ambiente donde se usa una herramienta así como del proceso dialéctico desarrollado entre el usuario, la herramienta y el ambiente. Como consecuencia, el sujeto y dicho ambiente están mutuamente definidos.

Transformar una herramienta cognitiva implica que la herramienta (material o simbólica), se vuelva *invisible* cuando se usa: "decimos que *pensamos con* un sistema semiótico cuando lo usamos como una herramienta cultural […] y que *pensamos a través de* un sistema semiótico cuando es usado como una herramienta cognitiva" [cursivas en el original] (Moreno-Armella et al., 2009). En el caso de la geometría, la geometría euclidiana ha sido transformada de una herramienta *cultural* a una herramienta *cognitiva*. Por su parte, las geometrías no euclidianas son una herramienta cultural.

Moreno-Armella et al. (2009) advierten sobre algunos riesgos que se corren cuando se tiene una familiaridad en un sistema semiótico en matemáticas: "trabajar durante un largo periodo de tiempo con ciertos objetos matemáticos puede hacernos creer en la existencia pre-semiótica de tales objetos" (Moreno-Armella et al., 2009). Éste es el caso de la geometría euclidiana.

El estudiante y el medio interaccionan el uno con el otro y la iteración de este proceso es lo que Moreno-Armella et al. (2009) llaman coacción entre el estudiante y el medio. Estos autores introducen el término *objetos borde* para explicar cómo ocurre tal coacción. Estos objetos son definidos como las encarnaciones dinámicas digitales de objetos matemáticos que inicialmente se definen en un ambiente de papel y lápiz los cuales pueden ser significativamente explorados dentro de un nuevo ambiente. Así, una representación semiótica digital de un objeto borde posee una nueva cualidad que no está presente en las representaciones semióticas en papel y lápiz: la ejecutabilidad de la representación. Dicho de otro modo, la ejecutabilidad de las representaciones semióticas digitales es lo que permite la coacción entre el aprendiz y el medio digital y esta ejecutabilidad está encarnada en los objetos que habitan en la *ecología* digital.

El conocimiento producido en los medios digitales es distinto del producido en un medio de papel y lápiz debido a que el mediador no es epistemológicamente neutro. Es decir, la naturaleza del conocimiento está inextricablemente vinculada con el artefacto de mediación: “los objetos borde pueden guiarnos en el diseño de nuevos modelos para explorar el pensamiento matemático en las aulas de clase” (Moreno-Armella et al., 2009).

2.5. **MECANISMOS DE VALIDACIÓN**

La manera como los estudiantes manifiestan las concepciones acerca de los objetos geométricos es argumentando de manera oral o escrita. Esta última exige mayor reflexión. Las argumentaciones de los estudiantes dependen fuertemente de la naturaleza de los objetos y las situaciones a las que hace referencia la validación (Sandoval, 2005). Como lo plantea el NCTM (2000), la enseñanza debe permitirle al estudiante que, gradualmente, amplíe y afine sus destrezas de razonamiento, para profundizar en las valoraciones de sus afirmaciones y conjeturas. Asimismo, utilizar el razonamiento inductivo y deductivo para formular sus argumentos. El NCTM (2000) hace explícito que los estudiantes deben:

- Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas
- Formular e investigar conjeturas matemáticas
- Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones
- Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración

Moreno-Armella et al. (2005) indican que los ambientes computacionales derivan su poder educacional dada la posibilidad para manipular y externalizar ideas abstractas mientras se trabaja dentro de sus bordes. Así, estos autores refieren que es fundamental entender la naturaleza del conocimiento que surge por la interacción con las herramientas computacionales. Es decir, “es importante entender el rol epistemológico de las nuevas herramientas cuando son introducidas en una infraestructura previa de pensamiento matemático” (Moreno-Armella et al., 2005).

Una consecuencia de refractar los objetos matemáticos en los medios dinámicos digitales es la presencia de nuevas formas de justificar aseveraciones matemáticas. Sin embargo, esto no significa reemplazar la epistemología de un mecanismo de validación, sino que se produce uno nuevo: “estamos entrando a una fase de exploración con objetos borde” (Moreno-Armella et al., 2009). Además, Moreno-Armella et al. (2010) refieren que: “uno puede preguntarse a sí mismo si estamos entrando a una nueva era donde las relaciones previas entre exploración y justificación están cambiando profundamente”.

En esta dirección, los estudiantes pueden hacer algunas *observaciones situadas* dentro del ambiente computacional que están explorando, y podrían ser capaces de expresar sus observaciones por medio de las herramientas y actividades planeadas en este ambiente (Moreno-Armella et al., 2005). Una posible consecuencia de estas observaciones son las *pruebas situadas*; es decir, una exploración sistemática dentro de un ambiente computacional. Por ejemplo, cuando los estudiantes tratan de invalidar (e.g., mediante el arrastre o la medición) una propiedad de una figura geométrica y son incapaces de hacerlo. Esta propiedad se convierte en un teorema expresado vía las herramientas del ambiente computacional la cual podría ser usada para construir un puente entre el conocimiento situado y algún tipo de formalización. Intencionalmente, los estudiantes explotan las herramientas provistas por el ambiente computacional para explorar relaciones matemáticas y probar teoremas, en el sentido de pruebas situadas (Moreno-Armella et al., 2005).

De esta manera, el uso de la tecnología ofrece gran potencial donde los estudiantes pueden investigar invariantes y proponer las conjeturas correspondientes. Así, el software se transforma en una herramienta donde los estudiantes pueden buscar y documentar el comportamiento de objetos y relaciones, y explorar la naturaleza de su estructura. Moreno-Armella et al. (2005) remarcan que este tipo de razonamiento se ubica más allá del nivel perceptual: “esto es precisamente el caso cuando intentamos, por ejemplo, con lápiz y papel, probar una proposición geométrica”. Trabajar dentro de un ambiente computacional conlleva a adoptar una estrategia diferente: “tenemos que recurrir a la naturaleza de las herramientas de mediación que tenemos a nuestra disposición” (Moreno-Armella et al., 2005).

En este orden de ideas, Sandoval (2005) refiere que la geometría dinámica ayuda al estudiante a confirmar si una conjetura merece o no la pena probarse por métodos más rigurosos. La actividad puede estar apoyada con el arrastre, la medición y la verificación de propiedades: “el tener puntos que se pueden mover en una pantalla, les proporciona [a los estudiantes] material nuevo para observar lo que no se puede con papel y lápiz” (Sandoval, 2005). Asimismo, Hanna (2001) indica que el uso de la geometría dinámica contribuye a la comprensión de la geometría teórica, porque proporciona una *mediación semiótica* que ayuda a los estudiantes a construir el sentido de los procesos de exploración, conjetura y argumentación, como una manera de llegar a una demostración válida.

Las exploraciones dentro de un ambiente computacional eventualmente conducen a los estudiantes a producir y articular relaciones que son generales en el ambiente donde están trabajando. Estas relaciones, que *encapsulan* declaraciones generales, han sido llamadas por Noss & Hoyles (1996) *abstracciones situadas* en el sentido de que éstas son expresadas dentro de las herramientas y el lenguaje del ambiente computacional. Es decir, los estudiantes pueden desarrollar una habilidad para enunciar proposiciones generales en el lenguaje donde están trabajando. Entonces, los mecanismos de validación dependen del ambiente donde se trabaja y, como consecuencia, es plausible afirmar que hay distintos niveles para validar el conocimiento matemático, dependiendo del ambiente y de los sujetos.

CAPÍTULO III

UNA ALTERNATIVA DIGITAL DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

INTRODUCCIÓN

Durante más de dos mil años, el quinto postulado de *Los Elementos* de Euclides fue uno de los enunciados más estudiados en la historia de las matemáticas. Su característica más peculiar se halla en su redacción pues ésta dio lugar a muchos intentos de demostración durante siglos. Como resultado de tales intentos, que casi se confunden con la historia misma de esta disciplina, se hizo patente una de las alternativas al postulado: por un punto exterior a una recta pasa únicamente una paralela. La negación matemática de esta versión condujo a los matemáticos del siglo XIX hacia una nueva rama: las geometrías no euclidianas.

Este capítulo consta de dos partes. En la primera, se describe una breve reseña histórica en torno al surgimiento de las geometrías no euclidianas. Se comienza con una breve descripción de *Los Elementos* de Euclides considerando particularmente elementos referentes al quinto postulado[1]; posteriormente, se relatan los episodios más importantes que dieron origen a las geometrías no euclidianas[2] de la mano de matemáticos como Saccheri, Gauss, Bolyai, Lobachevski, Beltrami, Poincaré, etc. En la segunda parte, se describe un modelo de esta geometría: el Disco de Poincaré. El diseño digital de este modelo[3] es utilizado en la parte experimental de la presente investigación.

3.1. NARRATIVA HISTÓRICA EN TORNO AL SURGIMIENTO DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

El camino que recorrió la geometría para adquirir un carácter propio es análogo al de otras ramas de la ciencia. Primero, respondió a una necesidad práctica: medir la tierra. Después, el

[1] Primera ruptura epistemológica antes del siglo XXI, sección 2.1.
[2] Segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI, sección 2.1.
[3] Primera ruptura epistemológica en el siglo XXI, sección 2.1.

estudio mismo de la geometría fue un problema de interés desde varios siglos antes de nuestra era. La racionalidad con la que los griegos proyectaron su mirada sobre el mundo tuvo en la escritura sus principales cimientos pues ésta trajo consigo una revolución en forma de capturar ideas y de comunicarlas. Muestra de ello es la obra de sistematización de Euclides, *Los Elementos*, la cual enhebra todos los resultados geométricos conocidos hasta entonces. Euclides se estableció en Alejandría alrededor del año 300 a.C., después de formarse en la Academia de Platón. A partir de los trece libros que forman *Los Elementos*, la geometría sería concebida, hasta la época de Kant, como la única representación fiel del espacio (primera ruptura epistemológica, sección 2.1) y alcanzaría una organización global que expone la fuerza del método deductivo.

3.1.1. *LOS ELEMENTOS*

El principal trabajo de Euclides titulado *Los Elementos* es una compilación de trece libros dedicada a la geometría. Al inicio del Libro I, Euclides precisa los conceptos que usa a lo largo de su obra: nociones comunes, definiciones y postulados. Con base en estos, Euclides se da a la tarea de demostrar proposiciones geométricas, con la restricción de que cada resultado nuevo debe ser deducido lógicamente a partir de los postulados o de resultados obtenidos previamente.

A pesar de que *Los Elementos* no es un tratado perfecto, no es exagerado afirmar que al preocuparse por sistematizar su exposición, Euclides sentó las bases de la ciencia moderna. Los defectos de su obra se deben fundamentalmente a la carencia de varios conceptos que los matemáticos tardaron mucho tiempo en precisar. Para lograr una exposición sistemática, hubo que esperar hasta 1898 cuando Hilbert (1862-1943) modificó el sistema de postulados en su libro *Fundamentos de Geometría.*

Un sistema de postulados puede ser considerado como un conjunto de ciertas reglas bajo las cuales debe llevarse a cabo alguna actividad. Así, es importante que entre los postulados no haya dos contradictorios y que todos los postulados usados se enuncien explícitamente. Para comprender la génesis de las geometrías no euclidianas, se considera necesario reproducir los cinco postulados euclidianos en su forma original, pues la redacción misma del quinto postulado dio pie a una controversia entre los matemáticos que perduró por más de veinte siglos:

1. *Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera*
2. *Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta*
3. *Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia*
4. *Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí*
5. *Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos*. (Euclides, 1991.)

Ninguna proposición de *Los Elementos* ha tenido una vida tan agitada como la del quinto postulado pues tiene, claramente, una forma más complicada que los cuatro primeros. La razón por la cual Euclides se vio forzado a elegir esta versión se deriva de que en el discurso matemático griego el concepto de infinito no tenía cabida. Es decir, si, por ejemplo, se decía que "por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una única paralela", se estaría afirmando algo sobre el comportamiento de un objeto geométrico (en este caso una recta) más allá de donde la evidencia perceptiva, derivada de la visión humana, podría dar fe sobre tal comportamiento. Esta falta de evidencia fue evitada por Euclides al dar su versión del quinto postulado.

Sin embargo, esta versión conlleva a otros problemas. Contrario al hecho de que las proposiciones debían ser enunciadas de manera concisa y con tal evidencia que fuera indiscutible, el enunciado del quinto postulado tiene más los rasgos de un teorema que de un postulado: el enunciado es muy largo, tiene una hipótesis y una conclusión. Es probable que Euclides haya sentido cierta incomodidad al emplear el quinto postulado pues no lo usó sino hasta la proposición 29 del Libro I (Euclides, 1991). Euclides no sólo heredó una obra maestra sino también una tormenta intelectual: dilucidar la naturaleza del quinto postulado. ¿Era necesario como postulado? O, por lo contrario, ¿podría demostrarse como una proposición más a partir de los primeros cuatro?

3.1.2. Equivalencias y negación del quinto postulado

En el recorrido como un estatuto incierto, durante más de veinte siglos después de *Los Elementos*, los geómetras se dieron a la tarea de hallar una versión más sencilla del quinto postulado que cumpliera con los requisitos deseables de sencillez y evidencia intuitiva. En este periodo, varios matemáticos creyeron haber deducido el quinto postulado usando sólo los cuatro primeros[4]. Sin embargo, en todos los casos se había usado un hecho equivalente al quinto postulado. Entre estas equivalencias[5], destacamos las siguientes:

- Axioma de Playfair: por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una paralela a la recta dada
- La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos
- Existencia de rectas equidistantes

En particular, el axioma de Playfair, atribuido a John Playfair (1748-1819) y enunciado por Proclo en el siglo V d.C., resalta dos cualidades características del paralelismo euclidiano: la existencia de una recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ella, y la unicidad de dicha paralela. Resulta claro que hay dos formas de negar matemáticamente el axioma de Playfair:

1. No existe ninguna paralela que pase por un punto exterior a una recta dada
2. Existen al menos dos paralelas que pasan por un punto exterior a una recta dada

La negación de este axioma conduce al desarrollo las geometrías no euclidianas. En particular, la primera versión conduce hacia la geometría elíptica y la segunda hacia la geometría hiperbólica. En torno a esta última gira parte de la presente investigación.

3.1.3. La contradicción que no llegó

Nadie dudaba de la veracidad de la geometría ni de que Euclides había logrado dar una representación fiel del espacio; sin embargo, a comienzos del siglo XVIII los matemáticos seguían inquietos pues no lograban demostrar el quinto postulado. No obstante, sus trabajos no eran en vano. Es probable que Girolamo Saccheri (1667-1733) haya sido quien mostró de manera más clara la toma de conciencia sobre el problema lógico: añadió a los cuatro postulados la negación del quinto en sus dos versiones. En ambos casos pretendía llegar a una contradicción y concluir que la única hipótesis sostenible era la unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta dada. En su extraordinario camino lógico, Saccheri encontraba resultados que le parecían más absurdos cada vez, pero continuó hasta el final.

[4] Una recopilación de los intentos más conocidos puede encontrarse en Wolfe (1945).
[5] En O'Leary (2010) y Ramírez & Sienra (2000) se pueden consultar las demostraciones de estas equivalencias con el quinto postulado. Además, en Euclides (1991, p.199) pueden encontrarse al menos ocho equivalencias.

Cuando ya no pudo más, llegando a conclusiones absurdas, afirmó que había ciertos hechos que *repugnaban* a la naturaleza de la línea recta por lo cual la única hipótesis admisible era la que Euclides había enunciado. Para Saccheri fue una derrota; pero también fue un triunfo: su pensamiento lógico condujo al desarrollo de las geometrías no euclidianas.

3.1.4. Una digresión filosófica kantiana

En la introducción de su Crítica de la Razón Pura, Kant refiere que:

“No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Pues, ¿por dónde iba a despertarse la facultad de conocer… como no fuera por medio de objetos que hieren los sentidos... y elaborar así, con la materia bruta de las impresiones sensibles, un conocimiento de los objetos llamados experiencia?... mas si todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia no por ello se origina todo él en la experiencia” (Kant, 2005).

De modo que el conocimiento del mundo no puede separarse de la experiencia, aunque eso no signifique que resida ahí. Entonces, el conocimiento no es una representación (en el sentido de una copia) de la realidad externa de nuestro intelecto, sino una *interpretación*. Para Kant, nuestras experiencias sensoriales son posibles como fenómenos que se desarrollan en el espacio y en el tiempo. Pero espacio y tiempo son las formas de sensibilidad mediante las cuales el intelecto capta las experiencias. Las formas de sensibilidad son innatas; sin ellas, las experiencias son imposibles.

Como la intuición del espacio se origina en las formas de sensibilidad correspondientes, se considera como natural todas las propiedades del espacio que dicta la sensibilidad. Entonces, solamente estructurando las experiencias de acuerdo con nuestras formas de sensibilidad es posible el conocimiento objetivo. De ahí surge la posibilidad de matematizar la experiencia pues es la forma de estructurarla. La matematización es central porque es lo que permite extender el conocimiento, mediante la deducción, más allá de los principios. En particular, la organización axiomática de la geometría hizo que ésta emergiera de la esfera puramente empirista hacia una fase de mayor organización lógica. Dado el nivel de coordinación existente entre las condiciones materiales y la organización lógica de la geometría, la estructura formal pasó de ser vista como necesaria, a aparecer como inevitable. Para Kant, no se podía contradecir ese sistema geométrico sin esperar consecuencias negativas; este “error” proviene de atribuir al espacio en su totalidad un comportamiento derivado de nuestra experiencia local de ese espacio.

No es que el espacio sea intrínsecamente euclidiano, sino que nuestro intelecto le impone ese rasgo a la experiencia de los sentidos. Dicho de otro modo, los postulados euclidianos y sus consecuencias forman parte de nuestro conocimiento apriorístico de manera que imponemos la forma euclidiana a todas nuestras percepciones espaciales y es difícil concebir otra forma de organización para el espacio. Así como cuando miramos las cosas a nuestro alrededor las vemos de colores sin que lo podamos evitar, vemos el espacio organizado como euclidiano. Kant propone que se abandone la idea de que somos observadores pasivos de lo que nos rodea, a la espera de que la naturaleza imprima sobre nuestro entendimiento sus regularidades. Por lo tanto, la naturaleza lleva la marca de nuestro intelecto, pero de un intelecto previamente determinado hasta sus estructuras más íntimas.

Se considera como necesaria la incursión en la epistemología kantiana porque da paso al periodo donde se da una ruptura definitiva con la concepción empírica y racionalista de la geometría (primera ruptura epistemológica, sección 2.1), la cual abre la puerta a una reconceptualización del método axiomático en el campo de la matemática.

3.1.5. COMO VIOLETAS EN PRIMAVERA

Kant falleció a inicios del siglo XIX (en 1804). En esta época, ya había señales de que “el problema de las paralelas” estaba siendo conceptualizado de manera distinta. El gran Carl Friedrich Gauss (1777-1855), de origen alemán, desde su juventud también se interesó por el quinto postulado y su pensamiento siempre permaneció articulado con las concepciones epistemológicas de Kant. Sin embargo, a diferencia de sus otros trabajos en matemáticas, su trabajo en geometría es muy fragmentario y sus reflexiones las dejó escritas solamente en cartas a sus amigos. La razón de ello se debe a que temía por su reputación, pues Gauss era poseedor de gran fama y respeto, y pospuso las publicaciones de sus investigaciones sobre geometría para “evitar las voces escandalosas de los beocios” (Gray, 2007). Gauss, considerado el *Príncipe de las Matemáticas*, fue quien dio el nombre de geometrías no euclidianas.

Taurinus, amigo de Gauss, al estudiar el problema supone que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°; sin embargo, hasta ese momento no se conocía una superficie donde esto pudiera ocurrir. En la respuesta de Gauss a Taurinus referente a su trabajo, es posible notar varias revelaciones extraordinarias:

"Lo he meditado por más de treinta años y no creo que alguien lo haya pensado más que yo, aunque nunca he publicado nada al respecto. Al suponer que la suma de los tres ángulos es menor que 180°, se llega a una geometría curiosa, bastante distinta de la nuestra y, sin embargo, consistente […] Los teoremas de esta geometría suenan paradójicos al no iniciado, pero una reflexión cuidadosa revela que no contienen algo imposible […] y la única cosa opuesta a nuestra concepción es que debería existir en el espacio una magnitud determinada por sí misma […] Pero me parece, pese a lo que digan los metafísicos, que sabemos muy poco, o casi nada, sobre la verdadera naturaleza del espacio como para considerar absolutamente imposible lo que nos parece antinatural…" (Wolfe, 1945.)

Es destacable una conclusión de Gauss: lo que es lógico, consistente, no necesariamente es aceptable para la intuición. No se sabe si Gauss alguna vez consideró la posibilidad de escribir sus meditaciones de manera seria; sin embargo, Farkas Bolyai (1775-1856), su antiguo compañero de la universidad en Göttingen, alentó a su hijo János para que publicara lo antes posible sus resultados relacionados con el quinto postulado:

"Hay algo de cierto en que muchas cosas tienen su época, y se descubren simultáneamente en varios lugares, así como las violetas brotan por doquier al llegar la primavera"

János Bolyai (1802-1860) estuvo en una situación privilegiada al llevar a cabo sus investigaciones sobre este tema pues había obtenido respuesta a todas sus inquietudes sobre el tema por parte de su padre. Prescinde del quinto postulado y crea la *Ciencia absoluta del espacio*. En 1823 tiene ya la mayor parte de la teoría, la cual aparece publicada como un apéndice del primer volumen del libro de su padre: *Tentamen*. Gauss respondió a Farkas en 1832 sobre el trabajo de János:

“Si comienzo diciendo que no puedo elogiar el trabajo de tu hijo, estarás de seguro sorprendido: pero no puedo hacerlo porque eso sería como elogiarme a mí mismo. El contenido completo, el camino que ha seguido, los resultados a los que ha arribado, coinciden casi exactamente con las meditaciones que han ocupado mi mente durante los últimos 35 años” (Bonola, 1955.)

János Bolyai nunca creyó que Gauss hubiera obtenido varios resultados antes de conocer los suyos, razón por la cual la respuesta de Gauss le causó un gran disgusto.

En Rusia, Nikolái Lobachevski (1793-1856) también estudiaba el problema en torno al quinto postulado. Sus estudios los llevó a cabo en Kazán con Bartels, profesor alemán que coincidió con Gauss cuando todavía intentaba demostrar el quinto postulado. Lobachevski, conocedor del trabajo de Saccheri, estudia este problema desde 1815 y llega a la conclusión de que no es posible demostrarlo a partir de los primeros cuatro. Esta convicción lo impulsa a explorar lógicamente el sistema que incluye la siguiente negación del quinto postulado: existen al menos dos paralelas que pasan por un punto exterior a una recta dada. La idea de que un sistema matemático era solamente un *modelo* mas no un *mapa* exacto de lo que se quería representar todavía no estaba madura. Con el paso del tiempo, esta idea se desarrolla en gran medida a partir del estudio de las geometrías no euclidianas.

Lobachevski desarrolló la trigonometría hiperbólica para trasladar sus teoremas del sistema sintético hiperbólico a un sistema analítico encontrando que las fórmulas correspondientes eran totalmente coherentes. Con buena dosis de evidencia, se podía afirmar que tanto el sistema euclidiano como el hiperbólico eran coherentes.

Desde la época de Euclides y hasta la mitad del siglo XIX, el sistema euclidiano no era sólo una representación sino una *encarnación del espacio físico*. Por esta razón, los teoremas eran verdades. Sin embargo, esta correspondencia comenzaba a agrietarse y se anunciaba una nueva epistemología para las matemáticas. Es decir, una nueva forma de concebir los objetos matemáticos y una nueva manera de concebir el conocimiento matemático mismo.

Actualmente, János Bolyai y Lobachevski son reconocidos como los descubridores de esta nueva geometría: la geometría hiperbólica. La etapa descrita en esta sección es donde se ubica la segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI (sección 2.1).

3.1.6. Geometría hiperbólica

Las geometrías no euclidianas muestran claramente cómo lo que es se impone contra lo que se creía. Su descubrimiento fue un triunfo de la lógica sobre la única intuición hasta entonces desarrollada, la euclidiana. Es conveniente enunciar algunas de las propiedades de la geometría hiperbólica:

- Existen al menos dos paralelas que pasan por un punto exterior a una recta dada
- La suma de los ángulos de un triángulo hiperbólico es menor que dos rectos
- Ninguna recta es equidistante a otra

Sin embargo, todavía no era conocida una superficie donde estas propiedades pudieran ser percibidas. Beltrami (1835-1899) respondió a la pregunta sobre la existencia de un *papel hiperbólico*. Es decir, exhibió una superficie sobre la cual valían los postulados del sistema hiperbólico. Para ello, consideró la pseudoesfera (Ilustración 3.1).

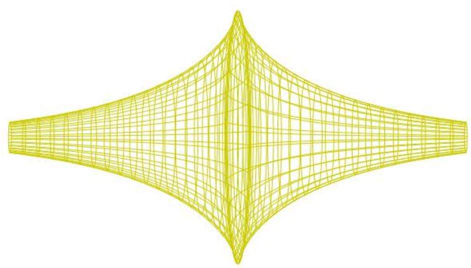


Ilustración 3.1. La pseudoesfera.

Esta superficie tiene curvatura constante negativa. De hecho, cualquier superficie de curvatura constante negativa sirve como modelo local de la geometría hiperbólica. En la Ilustración 3.2 se muestra un paraboloide hiperbólico el cual también se ajusta a un modelo local de geometría hiperbólica.

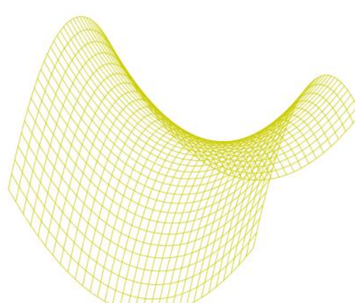


Ilustración 3.2. El paraboloide hiperbolico.

Los modelos mostrados en las ilustraciones precedentes pueden ser usados como modelos de geometría hiperbólica. Estos modelos ayudaron a percibir que dentro del sistema hiperbólico no se escondía ninguna contradicción sino, por lo contrario, una *redescripción representacional* de la geometría de superficies de curvatura negativa constante. Sin embargo, estas superficies tienen una fuerte limitación y Beltrami estaba consciente de ello: estos modelos únicamente funcionan como modelos *locales* de la geometría hiperbólica. Existen otros modelos relacionados con Beltrami (O'Leary, 2010). Uno de ellos es conocido como la semiesfera de Beltrami a partir del cual Poincaré desarrolla dos modelos (equivalentes entre sí) de geometría hiperbólica: el Disco de Poincaré y el semiplano de Poincaré. En la siguiente sección, se describe el modelo del Disco de Poincaré.

3.2. **EL DISCO DE POINCARÉ**

Dos modelos de geometría hiperbólica que permiten *visualizar* los conceptos y postulados hiperbólicos se deben al matemático francés Henri Poincaré (1854-1912). Sus resultados en física teórica, electromagnetismo, dinámica, astronomía, topología combinatoria y teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales lo convirtieron en el líder de las matemáticas a fines del siglo XIX y comienzos del XX. Poincaré concibió la relación entre la geometría hiperbólica y las transformaciones de Möbius que le condujo a encontrar un modelo donde pudieran ser visibles los resultados de la geometría hiperbólica: el Disco de Poincaré. Debido a que la teoría matemática detrás de la geometría hiperbólica sobrepasa los objetivos de esta investigación, ésta no se ahonda en este trabajo; el lector interesado puede consultar la siguiente bibliografía: O'Leary, (2010); Goodman-Strauss, (2001); Gray, (2007); Ramírez & Sienra, (2000).

Se considera conveniente, no obstante, introducir el concepto del Disco de Poincaré a partir de la definición formal. El Disco de Poincaré es una proyección estereográfica que proyecta la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ en el plano $z = 0$ usando el polo sur como centro de proyección (O'Leary, 2010). Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces, las imágenes de los puntos del hemisferio superior de dicha esfera yacen en $\mathcal{C}$ y estos son los puntos del modelo. De manera similar, las imágenes de los arcos del hemisferio superior de la esfera se proyectan en segmentos dentro de $\mathcal{C}$, o bien, en semicircunferencias dentro de $\mathcal{C}$ que la intersecan ortogonalmente. Éstas son las rectas, o geodésicas, del Disco de Poincaré.

Así, en este modelo se dice que dos líneas son paralelas si intersecan en $\mathcal{C}$. De este modo, $\mathcal{C}$ puede interpretarse como la recta euclidiana al infinito. La imagen del hemisferio superior de la esfera dentro de $\mathcal{C}$ es el Disco de Poincaré.

Además, se toman en cuenta las siguientes consideraciones (Goodman-Strauss, 2001):

- Los puntos del modelo son puntos en la circunferencia unitaria abierta del plano euclidiano
- Las rectas hiperbólicas[6] son arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia (unitaria) que es la frontera del disco
- El lugar geométrico de los puntos que equidistan a un punto fijo es una circunferencia euclidiana (sin embargo, el centro euclidiano de esta circunferencia no corresponde con el centro hiperbólico de la circunferencia en el modelo aunque el centro hiperbólico sí es equidistante a todos los puntos de la circunferencia hiperbólica)
- Los ángulos en el Disco de Poincaré son ángulos euclidianos (es necesario tomar en cuenta la definición de ángulo entre dos curvas, o bien, entre una recta y una curva, como el ángulo formado entre las tangentes formadas en el punto de intersección de las curvas)
- Dos ángulos son iguales si sus medidas son iguales, dos segmentos son iguales si sus extremos mantienen la misma distancia hiperbólica, etc.

En la Ilustración 3.3 se muestra el Disco de Poincaré destacando las primeras cuatro propiedades mencionadas. Asimismo, se considera fundamental enfatizar que en el Disco de Poincaré son válidos todos los resultados de la geometría absoluta; es decir, las proposiciones y resultados que prescinden del quinto postulado. De esta manera, en el Disco de Poincaré son válidas, por ejemplo, las primeras 28 proposiciones del Libro I de *Los Elementos* (sección 3.1.1).

Para el desarrollo de la investigación reportada en este documento, se llevó a cabo una versión digital de este modelo de geometría hiperbólica. En la siguiente sección se describen las propiedades de este modelo; sin embargo, no se considera necesario profundizar en la descripción del proceso desarrollado para su programación.

[6] Las rectas hiperbólicas también son llamadas geodésicas. En este trabajo, se usan estos términos indistintamente.

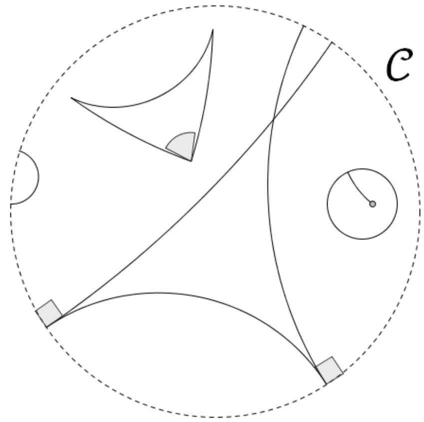


Ilustración 3.3. El Disco de Poincaré.

3.2.1. El modelo dinámico del Disco de Poincaré

De acuerdo con Moreno-Armella et al. (2005) percibir y objetivar son procesos distintos, donde la simbolización hace la diferencia:

Quizá esto era lo que Poincaré quiso decir cuando introdujo las circunferencias ortogonales en el modelo de la geometría hiperbólica: uno podría percibir las circunferencias ortogonales como circunferencias ortogonales, o bien, uno podría objetivarlas como rectas de un mundo no euclidiano. Esto es lo que pasa con cada modelo: uno puede mirar a través de él. Y en este momento, la mediación semiótica del modelo explota su magia: produce significado (Moreno-Armella & Sriraman, 2005.)

Con base en el párrafo anterior y en los elementos teóricos que guían esta investigación (Capítulo 2), el Disco de Poincaré es una herramienta de mediación. Además, el modelo dinámico del Disco de Poincaré es una *redefinición dinámica* de este modelo, una *redescripción representacional* de la geometría hiperbólica, donde todos los elementos teóricos considerados tienen presencia (Capítulo 2).

El diseño digital del modelo dinámico del Disco de Poincaré está basado en construcciones de regla y compás euclidianos[7] (Goodman-Strauss, 2001). Fue programado en el software de geometría dinámica GeoGebra y la ventana de inicio se muestra en la Ilustración 3.4.

[7] El contenido geométrico usado para la construcción del modelo incluye, además de los conceptos geométricos básicos, inversión, polos y polares. En Goodman-Strauss, (2001) pueden encontrarse las construcciones base del modelo.

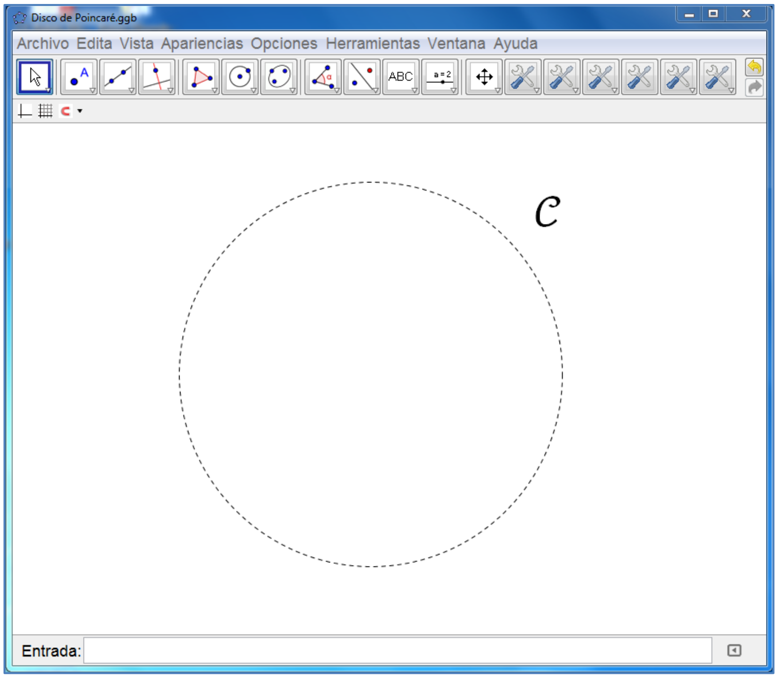


Ilustración 3.4. Ventana del disco dinámico de Poincaré en GeoGebra.

Conviene indicar que este modelo dinámico no pierde ninguna propiedad respecto de las herramientas por defecto de geometría dinámica además de que se conserva la propiedad de *ejecutabilidad* (Capítulo 2). Además, las herramientas programadas para el modelo dinámico y las herramientas que aparecen por defecto en el software de geometría dinámica GeoGebra son compatibles entre sí. La descripción de las herramientas programadas para trabajar en el modelo dinámico del Disco de Poincaré se detalla en el Anexo A del presente documento.

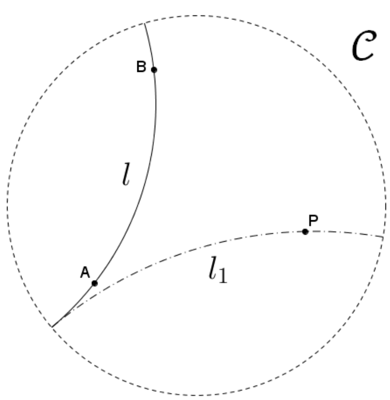


Ilustración 3.5. La recta hiperbólica l_1 es paralela a la recta hiperbólica dada l.

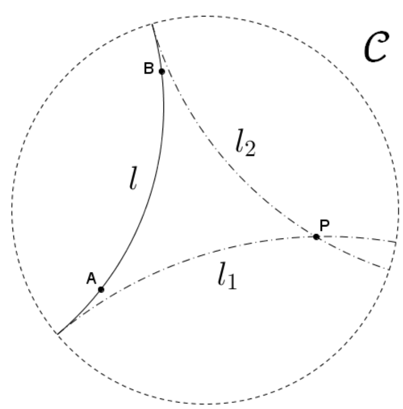


Ilustración 3.6. La recta hiperbólica l_2 también es paralela a la recta hiperbolica dada l.

Se considera importante mostrar cómo se representa un par de paralelas entre sí, así como la negación del axioma de Playfair: por un punto externo a una recta dada, pasan al menos dos rectas paralelas a dicha recta. En la Ilustración 3.5, l es una recta hiperbólica dada y la recta l_1 es una paralela que pasa por un punto P externo a la recta l. En la Ilustración 3.6, la recta l_2 también es paralela a la recta l, pasando por el mismo punto P.

Además, dado que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que dos rectos (sección 3.1.6), es necesario definir un triángulo equilátero hiperbólico como la figura geométrica hiperbólica con tres lados iguales y tres ángulos iguales. De manera similar, un cuadrado hiperbólico es la figura geométrica hiperbólica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales, aunque su construcción no es equivalente a la incluida en *Los Elementos*, pues ésta depende del quinto postulado. En la Ilustración 3.7 y en la Ilustración 3.8 se muestra, respectivamente, un triángulo equilátero hiperbólico y un cuadrado hiperbólico.

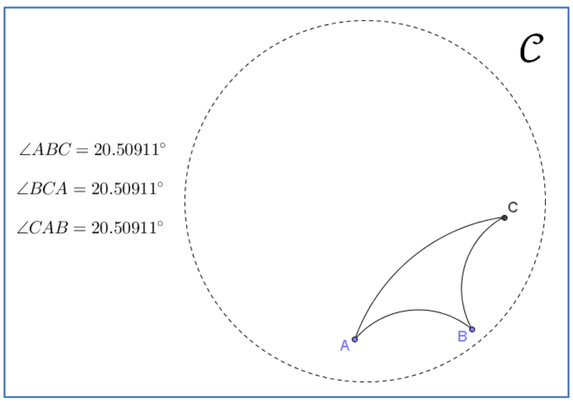


Ilustración 3.7. Triángulo equilátero hiperbólico.

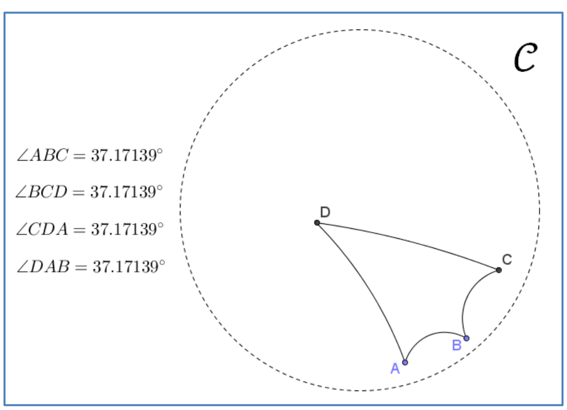


Ilustración 3.8. Cuadrado hiperbólico.

Se considera pertinente el cierre de este capítulo con una cita de van den Brink (1995), “la historia muestra que el desarrollo de las geometrías no euclidianas no progresan sin un esfuerzo, proceso similar al ocurre en el salón de clases”. En el siguiente capítulo se describe el diseño de la fase experimental de la presente investigación donde el modelo dinámico del Disco de Poincaré juega un papel fundamental.

CAPÍTULO IV

DISEÑO DE LA FASE EXPERIMENTAL

INTRODUCCIÓN

El diseño experimental de la investigación permite relacionar la teoría y la experimentación. La organización de estos elementos conduce a responder, sistemáticamente, las preguntas que guían este estudio. La etapa experimental es un proceso de revisión y refinamiento de cada fase incluida en el estudio. Este proceso permite el desarrollo simultáneo de la teoría, el acopio de los datos y el análisis de los mismos. En este capítulo se expone la metodología de investigación considerada para el desarrollo de la presente investigación. En particular, se describe: el tipo y validación del estudio, la población participante y las tareas propuestas (Instrumento) para la recolección de datos, delineando los métodos para el acopio de estos.

4.1. TIPO Y VALIDACIÓN DEL ESTUDIO

Esta investigación es de corte exploratorio-descriptivo (Hernández et al., 2003); es exploratoria, porque se pretende profundizar sobre las concepciones y los mecanismos de validación de los estudiantes y, con ello, identificar rupturas epistemológicas. Además, de acuerdo con los objetivos del estudio, es descriptivo, pues se pretende especificar las concepciones y los mecanismos de validación de la población participante.

Por otra parte, la confiabilidad de los resultados de una investigación debe cumplir ciertos criterios de validez. Es decir, toda investigación debe tener características de fiabilidad, generalidad o alcance, y de importancia en el medio. El primero se refiere a la credibilidad de lo que se afirme; el segundo, al contexto donde es válida la investigación, es decir, alude a la amplitud y alcance de los resultados; el tercero, se refiere a si los resultados de la investigación son pertinentes y si contribuyen a la teoría o practica de acuerdo con lo planteado en el medio (Schoenfeld, 2007, 2008).

El acopio, la manipulación y la interpretación de datos son fases centrales de cualquier investigación. Para darle un valor de fiabilidad a cada una de estas fases y, como consecuencia, a los resultados que se obtengan de ellas, se debe cumplir con los siguientes criterios de validación: poder descriptivo y explicativo, predicción, rigor y especificidad, replicabilidad, y triangulación (Schoenfeld, 2007). A continuación se detallan estos criterios:

- Poder descriptivo. Se refiere a la capacidad del referente teórico elegido para representar de manera fiel lo que se pretende describir
- Poder explicativo. Se relaciona con la caracterización del problema de investigación, y explica cómo éste se lleva a cabo
- Predicción. Este criterio se refiere a lo que puede suceder bajo ciertas condiciones; es decir, con base en el marco teórico elegido y la metodología de investigación empleada, se esperan ciertos resultados a priori. Además, un estudio desarrollado bajo las mismas condiciones que otro, debe arrojar resultados similares
- Rigor y especificidad. En toda investigación, tanto en el marco teórico que sustenta el estudio como en la metodología empleada en la recolección de datos debe existir rigor y especificidad
- Replicabilidad. La investigación debe ser detallada de manera que el experimento pueda ser replicable; es decir, que éste pueda llevarse a cabo con otra población en condiciones similares
- Triangulación. Se refiere a que las fuentes de datos (y por ende, de la evidencia) deben ser múltiples

De acuerdo con Cohen, Manion y Morrison (2004), “la triangulación es el uso de dos o más métodos en el acopio de datos para el estudio de alguna característica del comportamiento humano”. En particular, en el presente estudio la triangulación se lleva a cabo a partir de la metodología y de los datos obtenidos.

4.2. LA POBLACIÓN PARTICIPANTE

La población participante estuvo conformada por diez estudiantes de un grupo de segundo semestre del nivel medio superior (CECYT-IPN Núm. 9 “Juan de Dios Bátiz Paredes”, México). La edad de los estudiantes oscila entre los 15 y 16 años. La asignatura de

Geometría y Trigonometría es de carácter obligatorio durante dicho semestre acorde con el currículum de la institución mencionada. La aplicación del Instrumento se llevó a cabo mientras los alumnos eran instruidos en geometría euclidiana. De acuerdo con el mapa curricular de dicha institución, el estudiante:

1. Identifica los conceptos básicos de la geometría euclidiana y el método axiomático deductivo para establecer un lenguaje formal
2. Analiza comparativamente las diferentes figuras geométricas y sus propiedades en su entorno académico y social
3. Utiliza el método axiomático deductivo y las propiedades de las figuras geométricas para solucionar problemas de su entorno académico y social

En particular, los temas considerados el mapa curricular mencionado son:

- Conceptos y elementos básicos de la geometría euclidiana
- Postulados, teoremas y axiomas geométricos
- Método axiomático deductivo
- Conceptos básicos y propiedades de triángulos, polígonos y circunferencia
- Relación de conceptos de la geometría euclidiana en problemas propuestos
- Solución de problemas aplicando el método axiomático deductivo

Con base en estas características y en los objetivos de la investigación, se afirma que los participantes objeto de estudio conforman una población adecuada, pues tienen fundamentos de geometría euclidiana, y deben ser instruidos en el método deductivo de acuerdo con el mapa curricular indicado. En la siguiente sección se detalla el Instrumento de investigación.

4.3. DISEÑO DEL INSTRUMENTO

El diseño del Instrumento tiene como base los objetivos indicados en el Capítulo 1 y el marco conceptual del Capítulo 2. Consta de ocho Cuestionarios abarcando un total de 49 preguntas. Para la recopilación de los datos se requirió de las hojas de trabajo de cada uno de los Cuestionarios, de capturas de pantalla y algunas videograbaciones del trabajo de los estudiantes usando el software de geometría dinámica GeoGebra, de las entrevistas llevadas a cabo después de la aplicación del Instrumento y de las notas de campo del investigador.

Con el diseño y aplicación de cada cuestionario se encaminó al estudiante hacia el conocimiento de un modelo de geometría no euclidiana, averiguando, principalmente, sus concepciones sobre objetos geométricos así como los mecanismos de validación empleados al demostrar proposiciones geométricas y detectando las rupturas epistemológicas en la geometría. Además, se consideró importante averiguar si los estudiantes podían llevar a cabo ejercicios prácticos derivados de proposiciones geométricas y conocer sus impresiones de las actividades al final de la implementación de todas las tareas. En la siguiente sección se indican las proposiciones geométricas incluidas en el Instrumento.

Algunos de los participantes tenían ideas incipientes respecto del uso de GeoGebra. Sin embargo, la mayor parte de ellos desconocía este software y, como consecuencia, su funcionamiento. Por esta razón, fue necesario que recibieran un breve entrenamiento por parte del investigador de manera que se llevaron a cabo sesiones relacionadas con su uso. Asimismo, después de haber aplicado el Cuestionario 5, se dio instrucción sobre el modelo dinámico del Disco de Poincaré. En el Anexo A del presente documento se describen las herramientas del modelo dinámico del disco de Poincaré. Sin embargo, no todas fueron necesarias en la parte experimental.

El proceso de aplicación del Instrumento se llevó de manera cautelosa con el fin de que los estudiantes, al momento de llevar a cabo las tareas solicitadas, pudieran revelar información pertinente y no alterar la fiabilidad del estudio. En esta dirección, es importante aclarar que durante la etapa de familiarización con el software no se desarrolló ninguna de las construcciones incluidas en el Instrumento. Después de la aplicación del Instrumento, el investigador llevó a cabo entrevistas con algunos participantes para ampliar los datos de la investigación.

4.3.1. PROPOSICIONES GEOMÉTRICAS CONSIDERADAS EN EL INSTRUMENTO.

Para el desarrollo del Instrumento, se consideraron siete proposiciones geométricas contenidas en el Libro I de *Los Elementos* de Euclides (Euclides, 1991). En la Tabla 4.1 se enuncia cada una de ellas y, en seguida, se describe por qué son tomadas en cuenta y cómo se relacionan.

Tabla 4.1. Proposiciones de Los Elementos consideradas para la fase experimental.

Proposición	Enunciado
Proposición 1	*Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada*
Proposición 12	*Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella*
Proposición 15	*Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí*
Proposición 16	*En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos*
Proposición 29	*La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos del mismo lado iguales a dos rectos*
Proposición 32	*En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos*
Proposición 46	*Trazar un cuadrado a partir de un segmento dado*

- Las proposiciones 1, 12 y 46 se tomaron en cuenta para conocer los procesos de construcción y mecanismos de validación empleados por los estudiantes en un ambiente de papel y lápiz. Además, las construcciones de estas tres proposiciones se consideraron en la parte experimental relacionada con el modelo dinámico del Disco de Poincaré.
- Las proposiciones 15 y 29 se consideran con el fin de conocer si los estudiantes, además de aplicarlas, podían demostrarlas en un ambiente de papel y lápiz.
- Al seleccionar las proposiciones 16 y 32 se pretendió conocer las concepciones sobre la posible implicación de una a partir de la otra, y con el fin de saber si los estudiantes detectaban que la proposición 32 se valía del quinto postulado para su demostración.

Además de estas proposiciones, los Cuestionarios incluyen preguntas relacionadas con las concepciones geométricas de los estudiantes, con las construcciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré y con las impresiones de los participantes en relación con las actividades planteadas.

4.3.2. Descripción de los Cuestionarios del Instrumento.

En esta sección se detalla cada uno de los ocho Cuestionarios que, en conjunto, forman el Instrumento de investigación. En cada caso se indica de cuántas preguntas se formó así como la descripción de cada una. De manera similar, se especifica el objetivo de cada pregunta y la respuesta esperada pues, de acuerdo con Cohen et al. (2004), el criterio de predicción debe ser considerado en una investigación. Como fue mencionado previamente, este criterio se relaciona con las respuestas esperadas concordando con el marco teórico elegido y la metodología de investigación empleada; es importante indicar que no se esperan respuestas a priori cuando las preguntas están relacionadas con las creencias e impresiones de los participantes. Además, cuando es el caso, se menciona si se llevó a cabo alguna tarea adicional entre la aplicación de los cuestionarios (e.g., instrucción a los estudiantes sobre geometría, proceso de familiarización con el modelo dinámico del Disco de Poincaré, etc.). Los Cuestionarios recibidos por los alumnos se encuentran al final del presente documento (del Anexo B al Anexo I).

4.3.2.1 Cuestionario 1 (Anexo B)

Este Cuestionario está formado por cuatro preguntas. Previo a su aplicación, los alumnos recibieron una instrucción sobre *Los Elementos* de Euclides, particularmente el Libro I, conociendo su organización dada por definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones, así como su estructura basada en el método axiomático-deductivo. Asimismo, se explicó el sentido de llevar a cabo construcciones geométricas con regla y compás, ejemplificando en el pizarrón la construcción del triángulo equilátero. En la Tabla 4.2 se detalla este Cuestionario.

Tabla 4.2. Descripción del Cuestionario 1.

Cuestionario 1	
Pregunta 1	
Pregunta	Explica con tus palabras qué es: un punto, un segmento, una recta, una superficie.
Objetivo de la pregunta	Conocer las concepciones de los participantes sobre elementos básicos de geometría: punto, segmento de recta, recta y superficie.
Respuesta esperada	Se espera que el participante sea capaz de dar una definición adecuada porque los conceptos incluidos en esta pregunta han sido foco de estudio en niveles tempranos.

Pregunta 2	
Pregunta	Enuncia los cinco postulados de Euclides.
Objetivo de la pregunta	Averiguar si los estudiantes, después de una breve instrucción sobre *Los Elementos*, son capaces de enunciar los cinco postulados de Euclides.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes sean capaces de enunciar adecuadamente los cinco postulados de Euclides pues, además de la instrucción dada sobre *Los Elementos*, estos forman parte del contenido temático estudiado durante el curso de Geometría y Trigonometría de la población participante.
Pregunta 3	
Pregunta	La Proposición 1 de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente: "*Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada*". Con regla y compás construye dicho triángulo tomando en cuenta los cinco postulados de Euclides y describe tu proceso de construcción.
Objetivo de la pregunta	Conocer el proceso de construcción (con regla y compás en la hoja de trabajo) de un triángulo equilátero (proposición 1).
Respuesta esperada	Dado que la construcción geométrica del triángulo equilátero fue tomada en cuenta durante la etapa de instrucción de *Los Elementos*, se espera que los estudiantes logren hacer una construcción correcta así como describir adecuadamente su proceso de construcción.
Pregunta 4	
Pregunta	¿Cómo compruebas que el triángulo construido en el inciso anterior es correcto?
Objetivo de la pregunta	Conocer el mecanismo de validación empleado por los estudiantes para validar su construcción.
Respuesta esperada	Se espera que los participantes tengan algunas dificultades al responder esta pregunta pues, a pesar de que se espera una construcción adecuada, el proceso de validación de proposiciones geométricas es nuevo para ellos.

4.3.2.2 Cuestionario 2 (Anexo C)

Este Cuestionario consistió de cinco preguntas. Las dos primeras enfocadas en concepciones de los estudiantes y, dado que una parte considerable de esta investigación gira en torno al quinto postulado de Euclides, las otras tres preguntas conciernen a éste. En particular, con la última pregunta de este Cuestionario se busca que los alumnos tengan un primer enfrentamiento con las geometrías no euclidianas mediante la negación del quinto postulado. En la Tabla 4.3 se detalla este Cuestionario.

Tabla 4.3. Descripción del Cuestionario 2.

Cuestionario 2	
Pregunta 1	
Pregunta	Explica con tus palabras qué es: un ángulo, un ángulo recto, una circunferencia, un triángulo, un cuadrado, un polígono.
Objetivo de la pregunta	Conocer las concepciones de los participantes sobre otros elementos básicos de geometría: ángulo, ángulo recto, circunferencia, triángulo, cuadrado y polígono.
Respuesta esperada	Se espera que el participante sea capaz de dar una definición adecuada porque los conceptos geométricos incluidos en esta pregunta han sido foco de estudio desde niveles tempranos.
Pregunta 2	
Pregunta	Explica con tus palabras qué es: un axioma, un postulado, una proposición, un teorema.
Objetivo de la pregunta	Conocer las concepciones de los estudiantes en el sentido de averiguar qué entienden por: axioma, postulado, proposición y teorema.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes tengan nociones claras sobre estos conceptos, al menos sobre “postulado” y “proposición”, pues estos también forman parte del contenido temático estudiado durante su curso de Geometría y Trigonometría.
Pregunta 3	
Pregunta	Enuncia el quinto postulado de Euclides.
Objetivo de la pregunta	Enfatizar en la concepción de los estudiantes sobre el enunciado del quinto postulado de *Los Elementos* y dar paso a las siguientes preguntas de este Cuestionario.
Respuesta esperada	Se espera una definición similar respecto de la dada en el Cuestionario 1.
Pregunta 4	
Pregunta	Enuncia una equivalencia del quinto postulado.
Objetivo de la pregunta	Averiguar si los estudiantes conocen una equivalencia del quinto postulado.
Respuesta esperada	Debido a que la geometría euclidiana es objeto de estudio desde los niveles básicos en la enseñanza de las matemáticas, es posible que los estudiantes conozcan alguna equivalencia del quinto postulado (sección 3.1.2), particularmente el axioma de Playfair; por esta razón, se espera que algunos participantes identifiquen esta versión del quinto postulado y la enuncien.

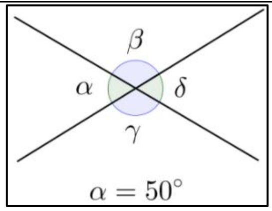
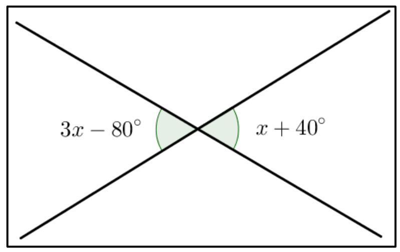
Pregunta 5	
Pregunta	¿Qué significa negar el quinto postulado?
Objetivo de la pregunta	Conocer si los estudiantes entienden el significado de negar matemáticamente el quinto postulado.
Respuesta esperada	Averiguar si los participantes conocen o deducen alguna negación del quinto postulado (sección 3.1.2); sin embargo, debido a que este tema no es parte del contenido matemático del curso de los participantes, se esperan pocas respuestas que coincidan con alguna negación del quinto postulado.

4.3.2.3 Cuestionario 3 (Anexo D)

Este Cuestionario estuvo conformado por tres preguntas, la segunda de ellas con tres incisos, con el objetivo de indagar en los mecanismos usados por los estudiantes para validar proposiciones euclidianas así como en las aplicaciones de una de ellas. En particular, se incluyen las proposiciones 12, 15 y 46 del Libro I (sección 4.3.1). En la Tabla 4.4 se detalla este Cuestionario.

Tabla 4.4. Descripción del Cuestionario 3.

Cuestionario 3	
Pregunta 1	
Pregunta	La proposición 12 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente: *"Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella".* Traza dicha recta y demuestra que es una perpendicular a la recta infinita dada.
Objetivo de la pregunta	Analizar la construcción de los estudiantes y averiguar si son capaces de validarla.
Respuesta esperada	Se espera que los alumnos sean capaces de llevar a cabo la construcción de la perpendicular indicada; no obstante, se espera que los mecanismos para la validación de dicha construcción sean precarios.
Pregunta 2a)	
Pregunta	Determina el valor de los ángulos β, γ y δ si $\alpha = 50°$.

	
Objetivo de la pregunta	Conocer si los alumnos pueden resolver un ejercicio rutinario sobre “ángulos opuestos por el vértice” involucrando “ángulos suplementarios”.
Respuesta esperada	Se espera que los participantes determinen fácilmente el valor indicado dado que este tipo de ejercicios son estudiados en niveles previos al bachillerato.
Pregunta 2b)	
Pregunta	Determina el valor de x. 
Objetivo de la pregunta	Conocer si los alumnos pueden resolver un ejercicio sobre “ángulos opuestos por el vértice” involucrando “ángulos suplementarios” en el cual, para conocer el valor indicado, es necesario relacionar los datos mediante una ecuación de primer grado.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes determinen el valor indicado con alguna posible complicación en el tratamiento algebraico.
Pregunta 2.1	
Pregunta	La proposición 15 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente: *“Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí”.* Demuestra esta proposición.
Objetivo de la pregunta	Averiguar si los estudiantes, además de aplicar adecuadamente la proposición 15, pueden validarla.
Respuesta esperada	Se espera que la validación sea deficiente; no obstante, los participantes podrían usar el concepto de ángulos suplementarios tanto en la resolución de los ejercicios planteados como en la justificación de la proposición.
Pregunta 3	
Pregunta	La proposición 46 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente: *“Trazar un cuadrado a partir de un segmento dado”.* Traza dicho cuadrado y argumenta por qué tu construcción es, efectivamente, un cuadrado.

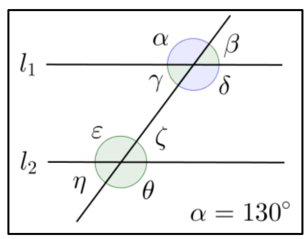
Objetivo de la pregunta	Analizar las construcciones de los estudiantes y averiguar si son capaces de validarlas.
Respuesta esperada	Debido a que este objeto geométrico es foco de estudio desde la enseñanza básica de las matemáticas, se espera que los estudiantes logren construirlo. No obstante, se espera que en los mecanismos usados para su validación haya una ligera evolución respecto de los Cuestionarios anteriores.

4.3.2.4 Cuestionario 4 (Anexo E)

Este Cuestionario consistió de tres preguntas. Las primeras dos se relacionan con las concepciones de los estudiantes en el sentido de indagar en cómo validan la veracidad de una proposición geométrica y cómo conciben una posible implicación entre las proposiciones 16 y 32. De manera similar al Cuestionario 3, en este Cuestionario se incluyó un ejercicio evidente sobre resolución de ángulos producidos por una secante que corta a dos rectas paralelas y la proposición 29, es decir, la base teórica para la resolución del ejercicio, con el objetivo de conocer si los estudiantes podían resolver dicho ejercicio y validar la proposición mencionada. En la Tabla 4.5 se especifica el Cuestionario 4.

Tabla 4.5. Descripción del Cuestionario 4.

Cuestionario 4	
Pregunta 1	
Pregunta	¿Cómo validas que una proposición geométrica sea verdadera o falsa?
Objetivo de la pregunta	Conocer la creencia de los estudiantes relacionada con la validación de una proposición geométrica.
Respuesta esperada	Debido a que esta pregunta está relacionada con las concepciones de los estudiantes, no puede ser contestada a priori; no obstante, se espera que los participantes reconozcan que en la actividad matemática, particularmente en la geometría, las proposiciones se validan mediante demostraciones.
Pregunta 2	
Pregunta	La proposición 16 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente: *“En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos”.* Y la proposición 32 del Libro I es la siguiente: *“En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los*

	dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos". ¿Crees que la proposición 16 es una implicación de la primera parte de la proposición 32? Justifica tu respuesta. ¿Por qué Euclides enuncia las dos proposiciones en dos partes distintas del Libro I? ¿Por qué no demuestra la proposición 32 dentro de la demostración de la proposición 16?
Objetivo de la pregunta	Enfrentar al estudiante a una situación de una posible implicación entre las dos proposiciones indicadas y averiguar si logran identificar que la proposición 32 depende el quinto postulado.
Respuesta esperada	Dadas las características de esta pregunta, se considera que tampoco puede ser contestada a priori por los participantes; sin embargo, se espera que algunos de ellos consigan identificar que la proposición 32 depende del quinto postulado.
Pregunta 3	
Pregunta	Si $\alpha = 130°$ y las rectas l_1 y l_2 son paralelas, determina el valor de los ángulos β, γ, δ, ε, ζ, η y θ. 
Objetivo de la pregunta	Conocer si los alumnos pueden resolver un ejercicio rutinario sobre "dos rectas paralelas cortadas por una secante".
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes determinen fácilmente el valor indicado dado que este tema es estudiado por los participantes en su curso de Geometría y Trigonometría.
Pregunta 3.1	
Pregunta	La proposición 29 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente: *"La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos del mismo lado iguales a dos rectos".* Demuestra esta proposición.
Objetivo de la pregunta	Averiguar si los estudiantes, además de aplicar adecuadamente la proposición 29, pueden validarla.
Respuesta esperada	De manera similar al Cuestionario anterior, se espera que los participantes muestren un avance en los mecanismos de validación empleados.

4.3.2.5 Cuestionario 5 (Anexo F)

Con la aplicación de este Cuestionario se pretendió conseguir un segundo acercamiento a las geometrías no euclidianas al conocer algunas concepciones, tanto escritas como bosquejadas, de los estudiantes para dar paso a la geometría hiperbólica; estuvo compuesto por cuatro preguntas. En la primera de ellas se enunció la equivalencia del quinto postulado en su versión como el axioma de Playfair y se insistió sobre la negación matemática del quinto postulado con base en esta versión. La segunda y tercera preguntas de este cuestionario se relacionan con el bosquejo de una superficie donde pasen al menos dos paralelas por un punto exterior a una recta dada y con el Disco de Poincaré. La cuarta pregunta se enfocó en concepciones sobre las geometrías no euclidianas. En Tabla 4.6 se delinea este Cuestionario.

Tabla 4.6. Descripción del Cuestionario 5.

Cuestionario 5	
Pregunta 1	
Pregunta	Una equivalencia del quinto postulado de Euclides, conocida como el axioma de Playfair, es la siguiente: *“Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una paralela a la recta dada”.* ¿Qué significa negar matemáticamente esta equivalencia del quinto postulado?
Objetivo de la pregunta	Averiguar si comprenden el significado de negar matemáticamente el quinto postulado en su versión dada por el axioma de Playfair.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes hagan referencia a una negación del quinto postulado (sección 3.1.2).
Pregunta 2	
Pregunta	¿Qué forma debería tener una superficie donde pasen al menos dos paralelas por un punto exterior a una recta dada? Haz un bosquejo de tal superficie.
Objetivo de la pregunta	Conocer las concepciones gráficas de los estudiantes respecto de superficies hiperbólicas.
Respuesta esperada	Se pretende que los participantes bosquejen una superficie como la pseudoesfera o el paraboloide hiperbólico (o cualquier superficie de curvatura constante negativa) (sección 3.1.6); sin embargo, se espera que pocos bosquejos de los estudiantes coincidan con estas superficies.
Pregunta 3	
Pregunta	Imagina un modelo geométrico de dos dimensiones cuya frontera es una

	circunferencia cualquiera. En este modelo, las rectas necesariamente deben ser ortogonales a dicha frontera (es decir, cada extremo de una recta debe formar ángulos rectos con la circunferencia frontera). Dentro de ese modelo geométrico, ¿qué forma tendría una recta, un segmento de recta, una circunferencia, un triángulo, un cuadrado? Haz un bosquejo de este modelo geométrico.
Objetivo de la pregunta	Conocer las concepciones gráficas de los estudiantes respecto del Disco de Poincaré por escrito.
Respuesta esperada	Se pretende que los estudiantes bosquejen un escenario similar al Disco de Poincaré (sección 3.2)
Pregunta 4	
Pregunta	¿Qué es (o bien, qué no es) una geometría no euclidiana? En una geometría no euclidiana, ¿Cuál es el papel que desempeña el quinto postulado de Euclides? ¿Dónde crees que existan aplicaciones de las geometrías no euclidianas?
Objetivo de la pregunta	Conocer las concepciones de los estudiantes sobre una geometría no euclidiana así como el papel jugado por el quinto postulado en ella y sus posibles aplicaciones.
Respuesta esperada	Esta pregunta se relaciona con creencias de los estudiantes sobre las geometrías no euclidianas; por esta razón, no se espera ninguna respuesta a priori.

Después de la aplicación de este cuestionario se explicó a los participantes el significado de negar el quinto postulado a partir de la equivalencia indicada (el axioma de Playfair) y se mencionaron otras equivalencias. Además, se instruyó a los participantes en el uso del modelo dinámico del Disco de Poincaré en una sesión grupal dirigida por el investigador.

4.3.2.6 Cuestionario 6 (Anexo G)

Este cuestionario se compuso por dos partes. La primera de ellas se enfocó en construcciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré así como en los mecanismos empleados por los estudiantes para validarlas. Se consideraron las proposiciones 1, 12, 15 y 46 (sección 4.3.1). Sin embargo, no se hizo mención a los estudiantes de que las construcciones en el modelo dinámico de las proposiciones 1, 12 y 15 eran análogas a las construcciones estrictamente euclidianas[1]. En la segunda parte de este Cuestionario se solicitó a los participantes que

[1] La construcción del cuadrado hiperbólico no es equivalente a la construcción dada por Euclides en la proposición 46; en el Anexo A se describe una prueba situada sobre esta situación y en la sección 3.2.1 se muestra una representación que corresponde, efectivamente, a un cuadrado hiperbólico.

indicaran sus impresiones al conocer un modelo de geometría no euclidiana así como las dificultades tenidas al usar el modelo dinámico del Disco de Poincaré.

Tabla 4.7. Descripción del Cuestionario 6.

Cuestionario 6	
Pregunta 1	
Pregunta	Construye un triángulo equilátero hiperbólico en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Describe paso a paso tu proceso de solución. ¿Cómo validas que tu construcción es correcta?
Objetivo de la pregunta	Analizar el proceso de construcción de los participantes de un triángulo equilátero hiperbólico así como su posible mecanismo para validar su construcción.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes identifiquen que la construcción del triángulo equilátero hiperbólico en el modelo dinámico del Disco de Poincaré es equivalente a la construcción euclidiana de modo que basen su construcción en ésta. Asimismo, se espera que los argumentos para su validación sean empíricos en el sentido de usar las herramientas de medición del modelo.
Pregunta 2	
Pregunta	Dado un segmento hiperbólico cualquiera y su punto medio, construye la mediatriz hiperbólica del segmento dado en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Describe paso a paso tu proceso de solución. ¿Cómo validas que tu construcción es correcta?
Objetivo de la pregunta	Analizar el proceso de construcción de los participantes de una mediatriz hiperbólica así como su posible mecanismo para validar su construcción.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes identifiquen que la construcción de la mediatriz hiperbólica en el modelo dinámico del Disco de Poincaré es equivalente a la construcción euclidiana de modo que basen su construcción en ésta. Asimismo, se espera que los argumentos para su validación sean empíricos en el sentido de usar las herramientas de medición del modelo.
Pregunta 3	
Pregunta	Dada una recta hiperbólica, construye una perpendicular desde un punto exterior a la recta dada en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Describe paso a paso tu proceso de solución. ¿Cómo validas que tu construcción es correcta?
Objetivo de	Analizar el proceso de construcción de los participantes de una perpendicular

la pregunta	hiperbólica desde un punto exterior a una recta hiperbólica dada así como su posible mecanismo para validar su construcción.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes identifiquen que la construcción de una perpendicular desde un punto exterior a una recta dada en el modelo dinámico del Disco de Poincaré es equivalente a la euclidiana de modo que basen su construcción en ésta.
Pregunta 4	
Pregunta	Construye un cuadrado hiperbólico en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Describe paso a paso tu proceso de solución. ¿Cómo validas que tu construcción es correcta?
Objetivo de la pregunta	Analizar el proceso de construcción de los participantes de un cuadrado hiperbólico así como su posible mecanismo para validar su construcción.
Respuesta esperada	Dado que la construcción del cuadrado hiperbólico en el modelo dinámico del Disco de Poincaré no es equivalente a la construcción euclidiana, se espera que los estudiantes no consigan construir adecuadamente el cuadrado hiperbólico; sin embargo, se espera que los estudiantes que logren las tres construcciones anteriores consigan una representación similar a un cuadrilátero hiperbólico (en el sentido de una figura formada por cuatro segmentos hiperbólicos).
Cuestionario 6 (segunda parte)	
Pregunta 1	
Pregunta	¿Qué impresiones tuviste al conocer un modelo de geometría no euclidiana?
Objetivo de la pregunta	Conocer las impresiones de los participantes al enfrentarse a un modelo de geometría no euclidiana.
Respuesta esperada	Debido a que esta pregunta concierne a las creencias de los estudiantes sobre el modelo dinámico del Disco de Poincaré, no se esperan respuestas a priori.
Pregunta 2	
Pregunta	¿Qué dificultades tuviste al usar el modelo dinámico del Disco de Poincaré?
Objetivo de la pregunta	Conocer las dificultades presentadas cuando los estudiantes usan el modelo.
Respuesta esperada	Debido a que esta pregunta concierne a las dificultades tenidas por los estudiantes al usar el modelo dinámico del Disco de Poincaré, tampoco se esperan respuestas a priori.

4.3.2.7 Cuestionario 7 (Anexo H)

En este Cuestionario tuvo como objetivo conseguir un primer acercamiento a las rupturas epistemológicas. En particular, se formularon nueve preguntas para conocer si los estudiantes habían logrado identificar, o no, la equivalencia respecto de las construcciones llevadas a cabo en el modelo dinámico del Disco de Poincaré además de evaluar un posible avance referente a su conocimiento geométrico. Asimismo, conocer si los participantes concebían la posible validez del teorema de Pitágoras[2] en el modelo, la preferencia de los estudiantes entre demostrar o aplicar su conocimiento geométrico y para conseguir algunas impresiones relacionadas con el agrado de los participantes respecto de las actividades. En la Tabla 4.8 se detalla este cuestionario.

Tabla 4.8. Descripción del Cuestionario 7.

Cuestionario 7	
Pregunta 1	
Pregunta	Con regla y compás, construye un triángulo equilátero. Describe tu proceso de solución y justifica por qué tu construcción es correcta. ¿Qué diferencias hay al construir un triángulo equilátero en geometría euclidiana y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré? ¿Las construcciones son equivalentes?
Objetivo de la pregunta	Analizar si existe una evolución de los estudiantes en cuanto a la construcción y validación del triángulo equilátero. Además, conocer la creencia de los estudiantes sobre la posible equivalencia entre la construcción euclidiana y la hiperbólica del triángulo equilátero. Asimismo, averiguar las diferencias que los participantes encuentran entre estas construcciones.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes logren identificar que las construcciones son equivalentes y un avance relacionado con la validez de su construcción.
Pregunta 2	
Pregunta	¿Qué diferencias hay al construir un cuadrado en geometría euclidiana y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré? ¿Las construcciones son equivalentes?
Objetivo de la pregunta	Conocer la creencia de los estudiantes respecto de la posible equivalencia de la construcción de un cuadrado euclidiano y en el Disco de Poincaré. Asimismo, averiguar qué diferencias encuentran los participantes entre estas construcciones.

[2] A pesar de que existen adaptaciones del teorema de Pitágoras en las geometrías no euclidianas, e.g., mediante las funciones trigonométricas hiperbólicas, en esta investigación es explorado con base en la versión euclidiana.

Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes detecten que la construcción de un cuadrado euclidiano no es equivalente a la de uno hiperbólico.
Pregunta 3	
Pregunta	¿Qué diferencias hay al construir la mediatriz de un segmento en geometría euclidiana y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré? ¿Las construcciones son equivalentes?
Objetivo de la pregunta	Conocer la creencia de los estudiantes respecto de la posible equivalencia de la construcción de una mediatriz euclidiana y en el Disco de Poincaré. Asimismo, averiguar qué diferencias encuentran los participantes entre estas construcciones.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes identifiquen que la construcción de una mediatriz euclidiana es equivalente a la construcción de la mediatriz hiperbólica.
Pregunta 4	
Pregunta	¿Qué diferencias hay al construir una perpendicular por un punto exterior a una recta dada en geometría euclidiana y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré? ¿Las construcciones son equivalentes?
Objetivo de la pregunta	Conocer la creencia de los estudiantes respecto de la posible equivalencia de la construcción euclidiana de una perpendicular por un punto exterior a una recta y en el Disco de Poincaré. Asimismo, averiguar qué diferencias encuentran los participantes entre estas construcciones.
Respuesta esperada	Se espera que los estudiantes identifiquen que la construcción de una perpendicular por un punto exterior a una recta euclidiana es equivalente a la construcción hiperbólica.
Pregunta 5	
Pregunta	En el Disco de Poincaré, ¿se cumple el teorema de Pitágoras? Justifica tu respuesta.
Objetivo de la pregunta	Conocer la creencia de los estudiantes sobre la posible validez del teorema de Pitágoras en el Disco de Poincaré.
Respuesta esperada	Debido a que esta pregunta concierne a la creencia de los estudiantes sobre la posible validez del teorema de Pitágoras en el Disco de Poincaré no esperan respuestas a priori.
Pregunta 6	
Pregunta	¿Crees que es importante demostrar las proposiciones geométricas? O, ¿prefieres solamente llevar a cabo aplicaciones prácticas derivadas de tales proposiciones? ¿Por qué?

Objetivo de la pregunta	Conocer si los estudiantes prefieren validar o aplicar las proposiciones geométricas.
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con la preferencia de los participantes, no esperan respuestas a priori.
Pregunta 7	
Pregunta	¿Fue de tu agrado haber abordado temas de geometría en el software de geometría dinámica? ¿Por qué?
Objetivo de la pregunta	Conocer si los participantes mostraron agrado respecto de las tareas desarrolladas en el software de geometría dinámica
Respuesta esperada	Dado que esta pregunta se relaciona con el gusto de los participantes, tampoco se esperan respuestas a priori.
Pregunta 8	
Pregunta	¿Qué ventajas destacas al utilizar el software de geometría dinámica?
Objetivo de la pregunta	Conocer las ventajas que los participantes encuentran al usar el software de geometría dinámica.
Respuesta esperada	Debido a que esta pregunta se relaciona con las impresiones de los participantes, tampoco se esperan respuestas a priori.
Pregunta 9	
Pregunta	¿Fue de tu agrado haber conocido temas de geometría no euclidiana? ¿Por qué?
Objetivo de la pregunta	Conocer si los estudiantes mostraron agrado al conocer una geometría no euclidiana.
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con el gusto de los participantes, tampoco se esperan respuestas a priori.

Después de la aplicación del Cuestionario 7 se llevó a cabo una sesión plenaria con el modelo dinámico del Disco de Poincaré analizando, principalmente, el triángulo equilátero, el teorema de Pitágoras a partir de la definición euclidiana y la existencia de al menos dos paralelas a una recta hiperbólica dada por un punto fuera de ella, considerando los casos cuando los objetos geométricos hiperbólicos eran lejanos y cercanos del centro del modelo.

4.3.2.8 Cuestionario 8 (Anexo I)

Este Cuestionario consta de doce preguntas y se enfoca en las concepciones de los estudiantes buscando un segundo acercamiento a las rupturas epistemológicas. También tiene como objetivo hallar información sobre si existe un posible avance en cuanto a la evolución de los conceptos y mecanismos de validación usados por los estudiantes. En la Tabla 4.9 se detalla este Cuestionario.

Tabla 4.9. Descripción del Cuestionario 8.

Cuestionario 8	
Pregunta 1	
Pregunta	¿Cómo defines un triángulo equilátero en la geometría euclidiana? ¿Cómo lo defines en la geometría no euclidiana? ¿Hay diferencias entre estas definiciones? En caso afirmativo, indica cuáles son.
Objetivo de la pregunta	Conocer la manera como los estudiantes definen un triángulo equilátero en la geometría euclidiana y en la no euclidiana después de haber trabajado con el modelo dinámico del Disco de Poincaré así como las posibles diferencias que encuentran entre éstas.
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con las creencias de los participantes, no se esperan respuestas a priori; sin embargo, se espera que algunos de los participantes identifiquen que la definición de triángulo equilátero dada como "figura geométrica con tres lados iguales y tres ángulos iguales" es válida en ambas geometrías.
Pregunta 2	
Pregunta	¿Qué concluyes respecto de la exploración de triángulos equiláteros en el modelo dinámico del Disco de Poincaré?
Objetivo de la pregunta	Conocer las conclusiones de los estudiantes después de haber explorado triángulos equiláteros hiperbólicos en el Disco de Poincaré.
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con impresiones de los participantes, no se esperan respuestas a priori.
Pregunta 3	
Pregunta	Describe cómo validas que la construcción de un triángulo equilátero hiperbólico en el modelo es, efectivamente, un triángulo equilátero hiperbólico.
Objetivo de la pregunta	Conocer si existe una evolución en los participantes al validar la construcción del triángulo equilátero hiperbólico.
Respuesta esperada	Se espera que los mecanismos de validación empelados por los estudiantes mejoren respecto de los usados en cuestionarios anteriores.

Pregunta 4	
Pregunta	¿Cómo defines un triángulo rectángulo en la geometría euclidiana? ¿Cómo lo defines en la geometría no euclidiana? ¿Hay diferencias entre estas definiciones? En caso afirmativo, indica cuáles son.
Objetivo de la pregunta	Conocer cómo los estudiantes definen un triángulo rectángulo en la geometría euclidiana y en la no euclidiana después de haber trabajado con el modelo dinámico del Disco de Poincaré así como las posibles diferencias que encuentran entre éstas.
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con las creencias de los participantes, no se esperan respuestas a priori.
Pregunta 5	
Pregunta	¿Qué concluyes respecto de la exploración de triángulos rectángulos y del teorema de Pitágoras en el modelo dinámico del Disco de Poincaré?
Objetivo de la pregunta	Conocer las conclusiones de los estudiantes después de haber explorado triángulos rectángulos hiperbólicos en el Disco de Poincaré.
Respuesta esperada	Dado que esta pregunta se relaciona con impresiones de los participantes, no se esperan respuestas a priori.
Pregunta 6	
Pregunta	¿Por qué el teorema de Pitágoras no es válido en el modelo del Disco de Poincaré? Describe cómo invalidas este teorema en dicho modelo.
Objetivo de la pregunta	Averiguar cómo los estudiantes justifican la invalidez del teorema de Pitágoras en el Disco de Poincaré.
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con creencias de los participantes, tampoco se esperan respuestas a priori; no obstante, es posible que los estudiantes ofrezcan argumentos de medición para justificar su respuesta.
Pregunta 7	
Pregunta	Después de las exploraciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré, ¿qué concluyes sobre el comportamiento de los objetos hiperbólicos cuando están cerca del centro del modelo? ¿Cuál es la situación límite? Es decir, justamente en el centro del modelo.
Objetivo de la pregunta	Conocer cómo conciben los estudiantes el comportamiento los objetos hiperbólicos cuando están cerca del centro del modelo.
Respuesta esperada	Dado que esta pregunta se relaciona con concepciones de los participantes, no se esperan respuestas a priori.

Pregunta 8	
Pregunta	Antes de haber conocido un modelo de geometría no euclidiana, ¿cómo definías el concepto de paralela? A partir de las exploraciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré, ¿cómo cambia tu concepción sobre la definición de este concepto? Da una nueva definición de paralela con base en las exploraciones en el modelo.
Objetivo de la pregunta	Conocer si los participantes tienen una concepción distinta sobre el concepto de paralelas después de haber llevado a cabo las exploraciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré.
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con concepciones de los participantes, no se esperan respuestas a priori.
Pregunta 9	
Pregunta	¿Piensas que la geometría euclidiana se deriva de la geometría no euclidiana o al revés? O bien, ¿crees que no se puede dar ninguno de estos casos? Justifica tu respuesta.
Objetivo de la pregunta	Conocer si los estudiantes consideran que la geometría euclidiana se deriva de la no euclidiana o viceversa, o bien, son independientes.
Respuesta esperada	Dado que esta pregunta se relaciona con concepciones de los participantes, no se esperan respuestas a priori.
Pregunta 10	
Pregunta	¿Cómo cambia tu concepción de los objetos geométricos al explorar una geometría no euclidiana?
Objetivo de la pregunta	Conocer cómo cambian las concepciones de los estudiantes respecto de los objetos geométricos.
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con concepciones de los participantes, no se esperan respuestas a priori.
Pregunta 11	
Pregunta	¿Qué diferencias encuentras entre los objetos geométricos representados en lápiz y papel y en un medio de geometría dinámica como GeoGebra?
Objetivo de la pregunta	Conocer las diferencias que los estudiantes encuentran entre los objetos geométricos en un medio estático y en uno dinámico.
Respuesta esperada	Debido a que esta pregunta se relaciona con concepciones de los participantes, no se esperan respuestas a priori.

Pregunta 12	
Pregunta	¿Cuál es la importancia del software de geometría dinámica GeoGebra en la exploración de una geometría no euclidiana, en particular, del Disco dinámico de Poincaré?
Objetivo de la pregunta	Conocer las impresiones de los estudiantes al usar el software de geometría dinámica en un modelo de geometría no euclidiana
Respuesta esperada	Puesto que esta pregunta se relaciona con impresiones de los participantes, no se esperan respuestas a priori.

4.3.3. La tecnología digital utilizada

Para la experimentación se usaron computadoras, en particular, el software de geometría dinámica GeoGebra con el supuesto de que "puede ayudar a los estudiantes a identificar las propiedades geométricas que subyacen en la construcción de la figura y que son necesarias para la producción de una explicación" (Olivero, 2003).

Durante la instrucción dada a los estudiantes por el investigador respecto del software y del modelo dinámico del Disco de Poincaré, también se utilizó una computadora y un proyector. Se constató que la tecnología provee, en este caso, la retroalimentación a las acciones que necesitan los alumnos (coacción), para poder interpretar sus resultados, dentro de la geometría.

4.3.4. Las herramientas de acopio de datos

Durante la implementación de los Cuestionarios se recurrió, como es recomendado en la literatura (*e.g.*, Cohen et al., 2004; Schoenfeld, 2007, 2008), a diferentes herramientas de acopio de datos. Ello con el fin de tener evidencia suficiente y lograr los objetivos del problema de esta investigación y, de esta manera, dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 1. Las herramientas de investigación fueron las siguientes:

- Hojas de trabajo (Cuestionarios). Éstas permiten tener registro escrito del trabajo de los estudiantes. Es decir, proveen evidencia sobre las concepciones y los mecanismos de validación usados en un ambiente de papel y lápiz

- Capturas de pantalla en la computadora. Esta herramienta suministra los registros del trabajo de los participantes en un ambiente de geometría dinámica
- Audio-grabaciones. Éste sirve para tener evidencia de las entrevistas realizadas después de la aplicación del Instrumento de investigación
- Videograbaciones. Provee evidencia en video sobre la interacción entre los participantes y el investigador durante las sesiones de trabajo
- Notas de campo del investigador. Ofrecen información adicional y complementaria que el investigador juzga importante al momento de llevar a cabo la implementación del Instrumento y las entrevistas

Cohen et al. (2004) consideran que la entrevista es un recurso en la investigación para el acopio de datos; ésta supone el hecho de que, respecto del conocimiento, es generado entre las personas y puede ser observado en sus conversaciones. Asimismo, estos autores afirman que la entrevista es un medio particular para representar o mostrar el conocimiento sobre formas culturales de las personas. De esta manera, la entrevista es un recurso que puede ser usado para conseguir información en torno a cómo los participantes del estudio llevan a cabo las tareas planteadas en los Cuestionarios diseñados para esta investigación. Por esta razón, la entrevista es un medio adicional para documentar el desempeño durante las tareas planteadas.

En el siguiente capítulo se da cuenta sobre el análisis de los datos recopilados de acuerdo con los criterios establecidos en esta sección.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LOS DATOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrolla el análisis de la información recopilada y se discute sobre ella. Este análisis se lleva a cabo con base en los elementos teóricos descritos en el Capítulo 2 y en la metodología indicada en el Capítulo 4. En particular, se aborda un análisis de casos sobre cada uno de los participantes. De este modo, los resultados obtenidos son producto del análisis, descripción y discusión de los datos obtenidos por el Instrumento de investigación.

5.1. LOS ANÁLISIS DE CASOS

En esta sección, se llevan a cabo los análisis de casos; en cada uno de estos, se da una breve descripción de los participantes y se evidencian sus respuestas más representativas.

5.1.1. EL CASO DE ADRIÁN

Adrián fue un participante interesado en las tareas propuestas; en particular, mostró un gran interés por las actividades desarrolladas en el software de geometría dinámica. Para dar cuenta sobre la participación de este alumno, se considera importante, en principio, describir sus concepciones sobre objetos geométricos. A pesar de que en la instrucción previa referente a *Los Elementos* se indicó que el concepto de infinito no tenía cabida en la matemática griega, Adrián usa este concepto al explicar las nociones de segmento y recta (Pregunta 1, Cuestionario 1) describiendo: “parte de una línea infinita previamente delimitada” y “línea que se extiende infinitamente a menos que se establezcan puntos” (Ilustración 5.1).

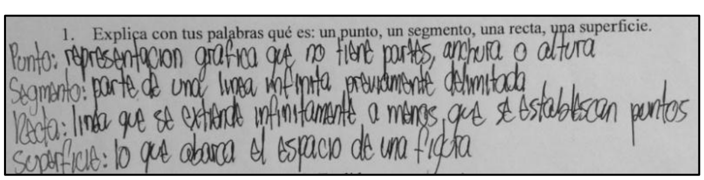

1. Explica con tus palabras qué es: un punto, un segmento, una recta, una superficie.
Punto: representacion grafica que no tiene partes, anchura o altura
Segmento: parte de una linea infinita previamente delimitada
Recta: linea que se extiende infinitamente a menos que se establezcan puntos
Superficie: lo que abarca el espacio de una figura

Ilustración 5.1. Respuesta de Adrián a la Pregunta 1, Cuestionario 1.

Respecto de la concepción de este participante sobre el término “postulado” (Pregunta 2, Cuestionario 2), destaca que es “algo que se da y que por lógica se ve”, concordando con lo expuesto en el Capítulo 3 (Ilustración 5.2). Respecto de los otros términos, este alumno tiene concepciones adecuadas.

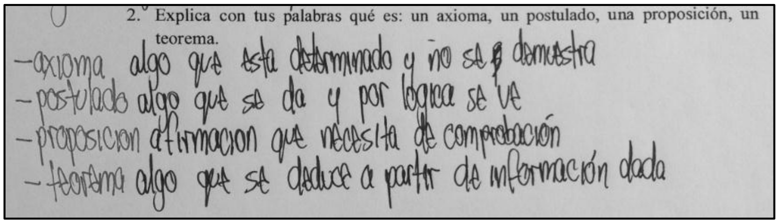


Ilustración 5.2 Respuesta de Adrián a la Pregunta 2, Cuestionario 2.

Cuando Adrián se enfrenta a la demostración de la proposición 15 (Pregunta 2.1, Cuestionario 3), incluye un bosquejo donde aparecen rectas paralelas, mostrando una interpretación errónea del enunciado de la proposición. Además, es importante notar que en su intento de demostración, el estudiante utilizó medidas particulares para los ángulos (Ilustración 5.3).

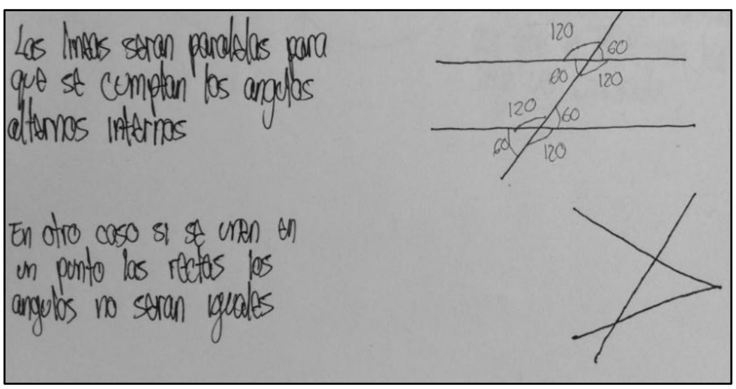
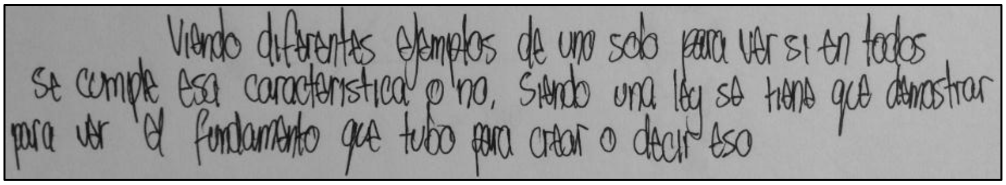


Ilustración 5.3. Respuesta de Adrián a la Pregunta 2.1, Cuestionario 3.

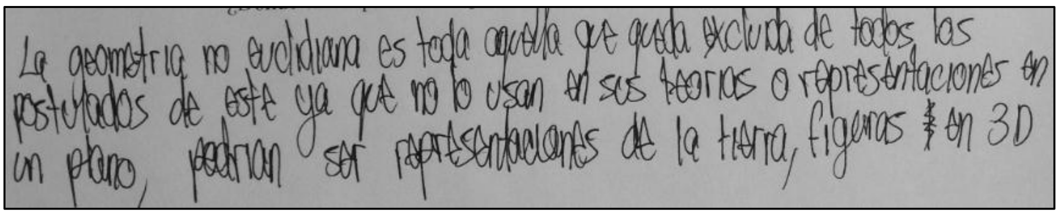
Adrián da una respuesta interesante sobre la validación de una proposición geométrica (Pregunta 1, Cuestionario 4). Asegura que la valida “viendo diferentes ejemplos de uno solo para ver si en todos se cumple esa característica o no” (Ilustración 5.4). Sin embargo, se considera que en esta noción hace falta incluir la propiedad de generalidad de modo que el estudiante pueda llevar a cabo justificaciones más sólidas.



Viendo diferentes ejemplos de uno solo para ver si en todos se cumple esa característica o no, Siendo una ley se tiene que demostrar para ver el fundamento que tubo para crear o decir eso

Ilustración 5.4. Respuesta de Adrián a la Pregunta 1, Cuestionario 4.

Respecto del concepto de geometría no euclidiana (Pregunta 4, Cuestionario 5), este participante asegura los cinco postulados de Euclides quedan excluidos “la geometría no euclidiana es toda aquella que queda excluida de todos los postulados [*sic*]” malentendiendo que sólo el quinto es el que se descarta (Ilustración 5.5).



La geometria no euclidiana es toda aquella que queda excluida de todos los postulados de este ya que no lo usan en sus teorias o representaciones en un plano, podrian ser representaciones de la tierra, figuras y en 3D

Ilustración 5.5. Respuesta de Adrián a la Pregunta 4, Cuestionario 5.

Cuando este alumno llevó a cabo las construcciones señaladas en el Cuestionario 6, menciona que la construcción de la mediatriz (Pregunta 2) fue una consecuencia de la construcción del triángulo equilátero hiperbólico, mostrando una comprensión adecuada de la actividad (Ilustración 5.6 e Ilustración 5.7).

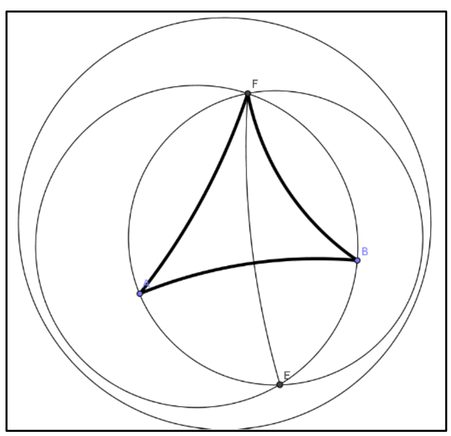
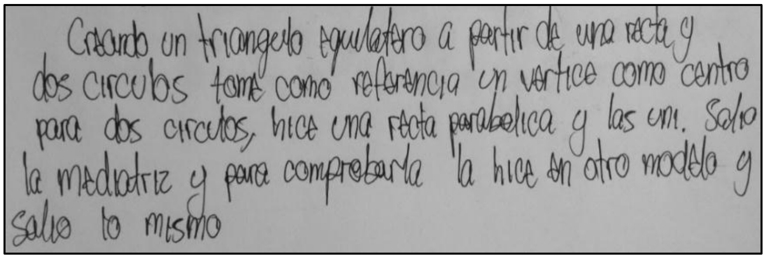


Ilustración 5.6. Construcciones del triángulo equilátero y mediatriz de Adrián.



Creando un triangulo equilatero a partir de una recta y dos circulos tome como referencia un vertice como centro para dos circulos, hice una recta parabolica y las uni. Salio la mediatriz y para comprobarla la hice en otro modelo y salio lo mismo

Ilustración 5.7. Respuesta de Adrián a la Pregunta 2, Cuestionario 6.

Además, Adrián incluye en una sola construcción los ensayos de las cuatro construcciones solicitadas. Sin embargo, no justifica sus procesos de construcción (Ilustración 5.8).

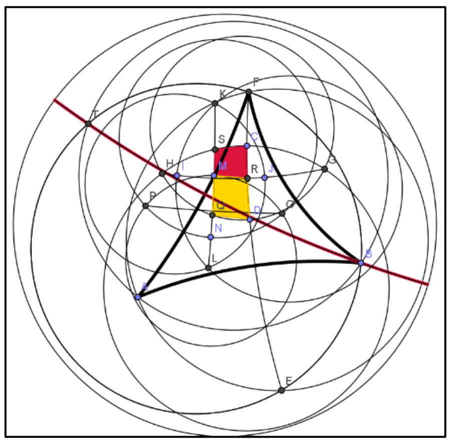
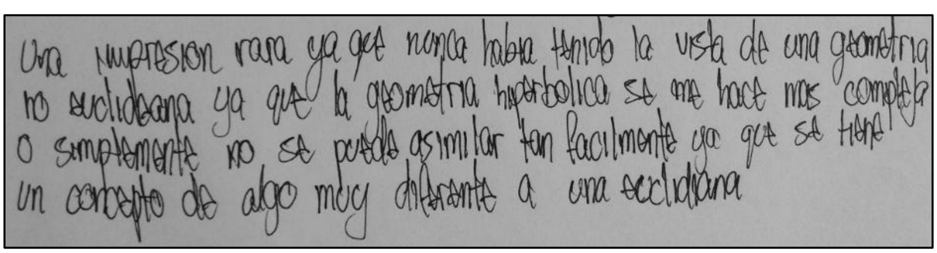


Ilustración 5.8. Construcciones de Adrián en el Disco de Poincaré.

Sobre sus impresiones al conocer el modelo dinámico del Disco de Poicare (Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte), este alumno refiere que tuvo una impresión “rara” además de que “no se puede asimilar tan fácilmente ya que se tiene un concepto de algo muy diferente a una euclidiana [*sic*]” (Ilustración 5.9). Esta respuesta se vincula con las rupturas epistemológicas antes del siglo XXI (sección 2.1) pues este participante reconoce que nunca había tenido un acercamiento a las geometrías no euclidianas identificando cierta complejidad al conocer un modelo de geometría hiperbólica.



Una impresion rara ya que nunca habia tenido la vista de una geometria no euclideana ya que la geometria hiperbolica se me hace mas compleja o simplemente no se puede asimilar tan facilmente ya que se tiene un concepto de algo muy diferente a una euclidiana

Ilustración 5.9 Respuesta de Adrián a la Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte.

En lo que respecta a los mecanismos de validación, este participante justifica adecuadamente la construcción del triángulo equilátero (Pregunta 1, Cuestionario 7): “sabemos que el radio mide lo mismo hacia cualquier punto de la circunferencia”. No obstante, cuando señala las diferencias al construir un triángulo equilátero euclidiano y uno hiperbólico refiere que “podría convertirse en una confusión ya que aunque los lados sean del mismo tamaño se podrían interpretar mal [*sic*]”, de modo que nuevamente se vincula esta respuesta con la ruptura epistemológica antes del siglo XXI (sección 2.1). Además, indica que “en la [*geometría*] euclidiana hay cosas más notorias que en la de Poincaré” y detecta que la construcción del triángulo equilátero es equivalente en ambos modelos “porque son las mismas figuras” (Ilustración 5.10).

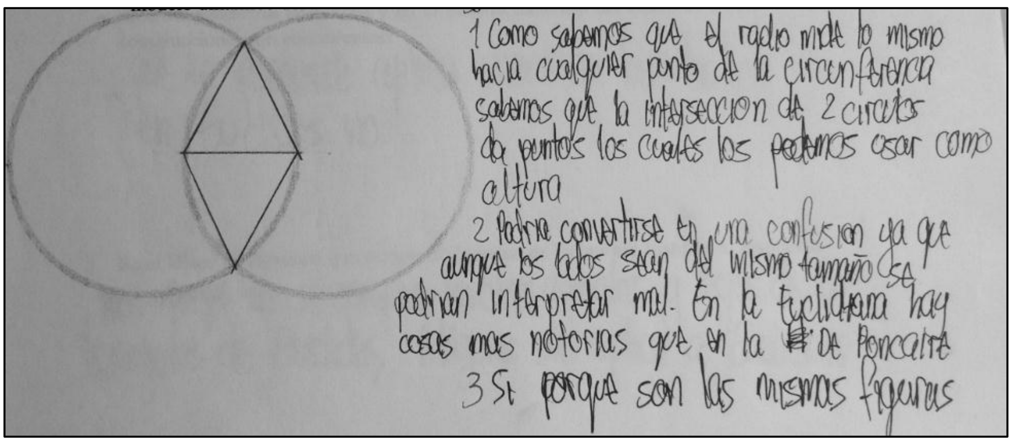


Ilustración 5.10. Respuesta de Adrián a la Pregunta 1, Cuestionario 7.

En cuanto a la importancia que tiene demostrar proposiciones geométricas (Pregunta 6, Cuestionario 7), este alumno menciona que siempre es necesario llevar a cabo una comprobación “porque todo lo que se hace hay que comprobarlo” (Ilustración 5.11).

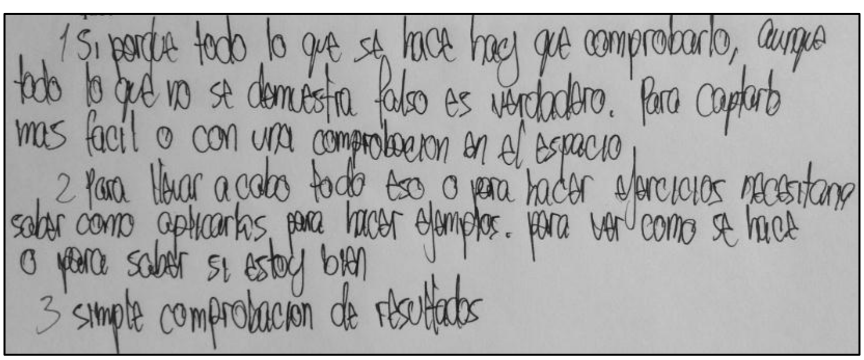
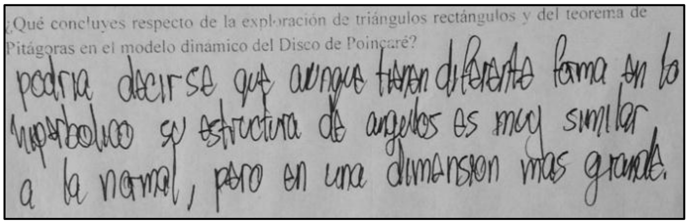


Ilustración 5.11. Respuesta de Adrián a la Pregunta 6, Cuestionario 7.

En lo que respecta a la exploración del triángulo rectángulo en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 8, Cuestionario 5), este participante muestra una comprensión adecuada de la noción de ángulos pues menciona que “podría decirse que aunque tienen diferente forma en lo hiperbólico [*sic*] su estructura de ángulos es muy similar a la normal [*la geometría euclidiana*]” (Ilustración 5.12).

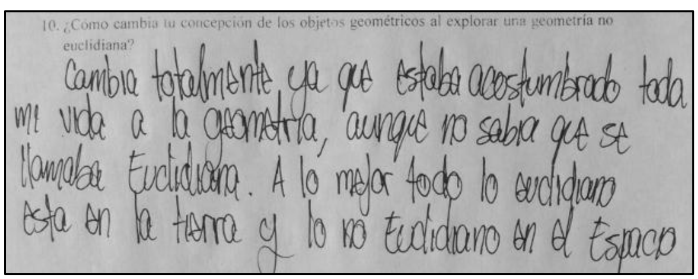


¿Qué concluyes respecto de la exploración de triángulos rectángulos y del teorema de Pitágoras en el modelo dinámico del Disco de Poincaré?

podria decirse que aunque tienen diferente forma en lo hiperbolico su estructura de angulos es muy similar a la normal, pero en una dimension mas grande.

Ilustración 5.12. Respuesta de Adrián a la Pregunta 8, Cuestionario 5.

Este alumno reconoce un cambio total en la concepción de los objetos geométricos producto de la exploración de una geometría no euclidiana (Pregunta 10, Cuestionario 8): “cambia totalmente ya que estaba acostumbrado toda mi vida a la geometría, aunque no sabía que se llamaba euclidiana [*sic*]”. En esta respuesta también se identifica una relación con la ruptura epistemológica antes del siglo XXI. Además, Adrián cree que “a lo mejor todo lo euclidiano está en la Tierra y lo no euclidiano en el espacio [*sic*]”, mostrando una reconceptualización de la geometría euclidiana (Ilustración 5.13).



10. ¿Cómo cambia tu concepción de los objetos geométricos al explorar una geometría no euclidiana?

Cambia totalmente ya que estaba acostumbrado toda mi vida a la geometria, aunque no sabia que se llamaba Euclidiana. A lo mejor todo lo euclidiano esta en la tierra y lo no Euclidiano en el Espacio

Ilustración 5.13. Respuesta de Adrián a la Pregunta 10, Cuestionario 8.

El análisis de las respuestas de este participante arroja varios resultados importantes. Por un lado, se destaca que la comprensión adecuada de objetos geométricos y una noción incipiente, pero atinada, sobre validación de proposiciones conduce a este alumno hacia un entendimiento acertado del modelo dinámico del Disco de Poincaré. No obstante, al comienzo de las exploraciones en este modelo, Adrián acepta haber tenido una impresión rara y confusa sobre los objetos geométricos hiperbólicos; sin embargo, muestra una pronta familiarización con el software de geometría dinámica y un interés por las tareas encomendadas generando intuiciones que lo dirigen a identificar que las construcciones euclidianas y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré son equivalentes. Por otro lado, las respuestas de este participante se vinculan estrechamente con las rupturas epistemológicas expuestas en la sección 2.1, pues el estudiante admite que estaba acostumbrado a trabajar con geometría euclidiana y que las geometrías no euclidianas son nuevas para él; no obstante, la evidencia muestra que el tratamiento de la geometría hiperbólica en un ambiente dinámico permite, al menos en este caso, un desarrollo del pensamiento geométrico.

5.1.2. El caso de Gustavo

Este participante también mostró interés al realizar las tareas propuestas procurando claridad en sus respuestas. Por ejemplo, en la construcción del triángulo equilátero (Pregunta 3, Cuestionario 1), este alumno se basa en los postulados justificando que “un segmento son dos puntos unidos” y que “un punto al lado de un segmento es un círculo”; completa su construcción señalando que este último paso “se aplica del otro lado y listo”. Además, justifica (Pregunta 4, Cuestionario 1) que “si todos los ‘lados’ A, B y C son iguales, entonces el triángulo es correcto” (Ilustración 5.14).

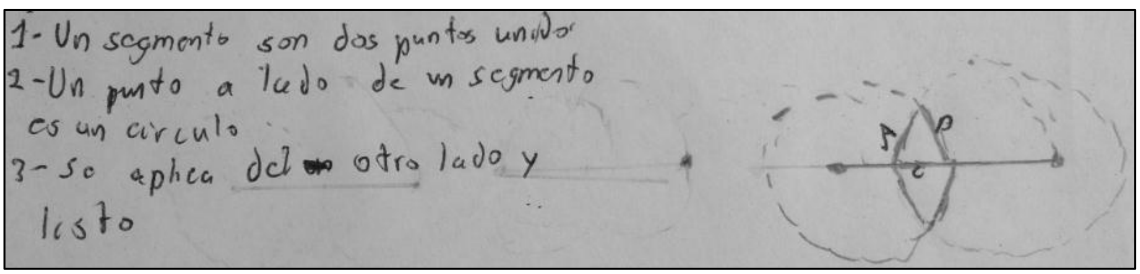


Ilustración 5.14. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 3, Cuestionario 1.

Al enunciar una equivalencia del quinto postulado (Pregunta 4, Cuestionario 2), la interpretación de la respuesta de Gustavo puede considerarse una aproximación adecuada en el sentido del axioma de Playfair (desconocido en esa etapa de la aplicación del Instrumento) (Ilustración 5.15).

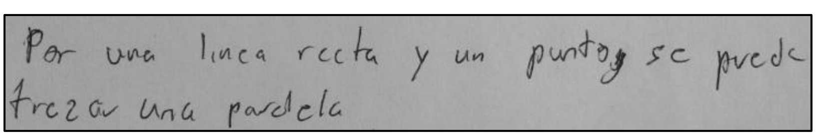


Ilustración 5.15. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 4, Cuestionario 2.

Al trabajar con los ejercicios de aplicación de la proposición 15 (Pregunta 2.1, Cuestionario 3), Gustavo no tiene problemas para obtener las respuestas correctas. Sin embargo, al intentar validar la proposición, se considera que sus argumentos deficientes pues indica que "el ángulo *AD* y *CB* es el mismo por igualdad y medida" (Ilustración 5.16).

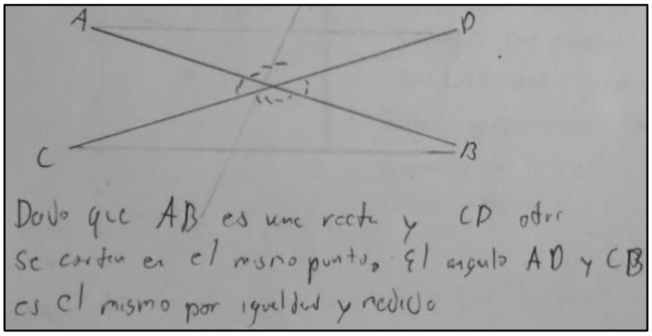


Ilustración 5.16. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 2.1, Cuestionario 3.

En relación con la proposición 29 (Pregunta 3.1, Cuestionario 4), este participante tampoco tiene dificultades al obtener las repuestas de la aplicación práctica. No obstante, al pretender validar la proposición no concluye, a pesar de que considera las hipótesis (Ilustración 5.17).

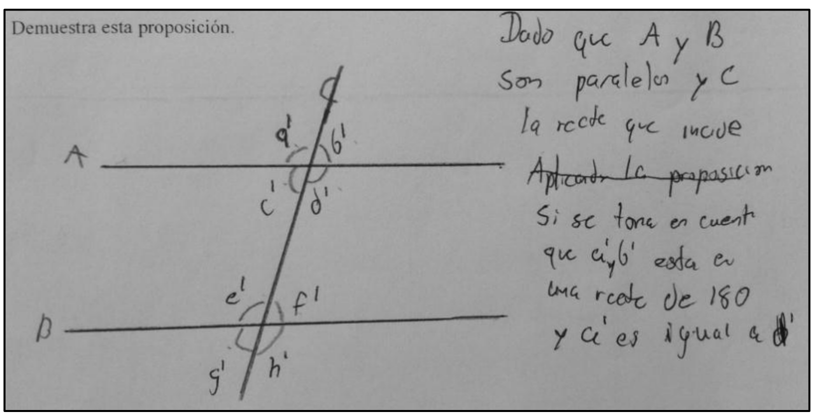


Ilustración 5.17. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 3.1, Cuestionario 4.

En lo que concierne a su concepción sobre la negación del quinto postulado en la versión conocida como el axioma de Playfair (Pregunta 1, Cuestionario 5), Gustavo tiene un acercamiento adecuado a la negación matemática, pues menciona que negar esta equivalencia significa "demostrar que por una recta [*se interpreta "punto" en lugar de "recta"*] no es posible trazar una y sólo una paralela a la recta dada" (Ilustración 5.18). Se considera que esta respuesta se deriva del conocimiento de una equivalencia del quito postulado (Cuestionario 2, Ilustración 5.15).

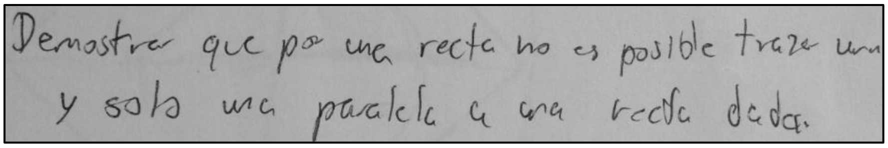

Demostrar que por una recta no es posible trazar una y solo una paralela a una recta dada.

Ilustración 5.18. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 1, Cuestionario 5.

Sobre la concepción preliminar del Disco de Poincaré (Pregunta 3, Cuestionario 5), este participante lleva a cabo el bosquejo mostrado en la Ilustración 5.19. En éste, se muestra la comprensión de una circunferencia frontera; sin embargo, el alumno no considera la condición de perpendicular explicitada en la pregunta.

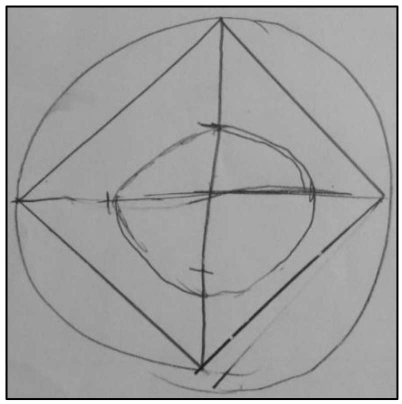


Ilustración 5.19. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 3, Cuestionario 5.

Cuando Gustavo utiliza el modelo dinámico del Disco de Poincaré para construir un triángulo equilátero hiperbólico y lo contrasta con el euclidiano (Pregunta 1, Cuestionario 7), menciona que “se utilizó un proceso ‘euclidiano’ con el segmento y un radio del segmento. Es casi lo mismo que con Euclides” comprendiendo la equivalencia entre las construcciones euclidiana e hiperbólica (Ilustración 5.20). Además, verifica su construcción con la herramienta “Distancia hiperbólica entre dos puntos” (Ilustración 5.21).

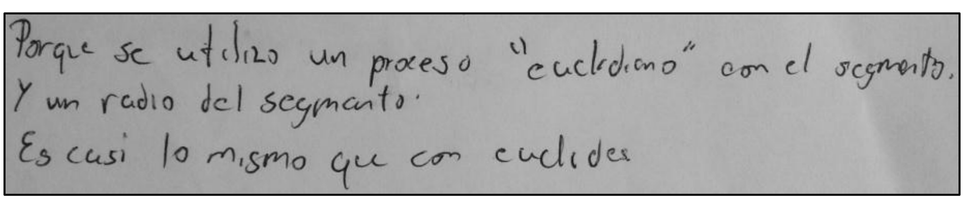

Porque se utilizo un proceso “euclidiano” con el segmento.
Y un radio del segmento.
Es casi lo mismo que con euclides

Ilustración 5.20. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 1, Cuestionario 7.

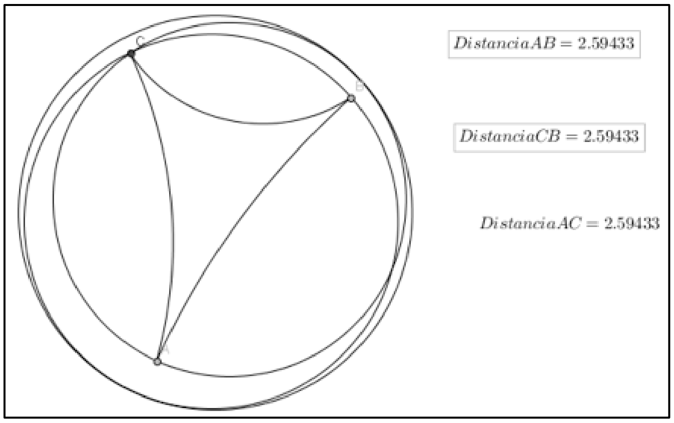


Ilustración 5.21. Construcción y validación del triángulo equilátero hiperbolico de gustavo.

Cuando este participante contrasta la definición de un triángulo equilátero euclidiano y uno hiperbólico (Pregunta 1, Cuestionario 8), reconoce que la diferencia entre estos es la suma de los ángulos internos pues señala que un triángulo equilátero euclidiano “[*tiene*] lados iguales y ángulos iguales que den 180° euclidianos” y que uno hiperbólico “[*tiene*] lados iguales y ángulos iguales que den menos de 180°” (Ilustración 5.22).

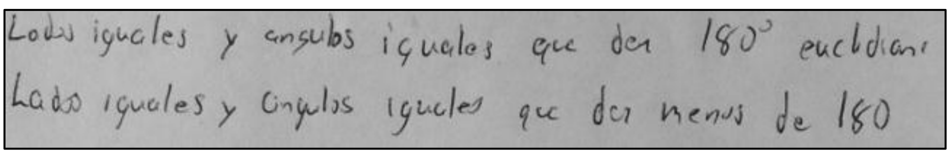

Lados iguales y angulos iguales que den 180° euclidiano
Lados iguales y angulos iguales que den menos de 180

Ilustración 5.22. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 1, Cuestionario 8.

En su respuesta referente a la importancia de las demostraciones (Pregunta 6, Cuestionario 7), este participante reconoce que “es importante demostrarlas primero, es como si te llevaran a la guerra sólo con una pistola y necesitas un rifle de asalto. Las aplicaciones derivadas son interesantes pero no lo suficiente para resaltar el valor de éstas” (Ilustración 5.23).

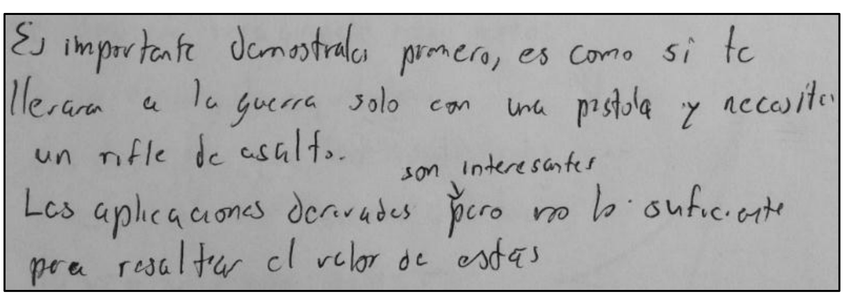
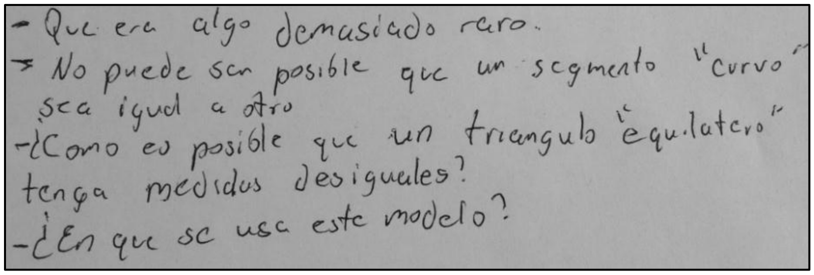

Es importante demostrarlas primero, es como si te
llevaran a la guerra solo con una pistola y necesitas
un rifle de asalto.
son interesantes
Las aplicaciones derivadas pero no lo suficiente
para resaltar el valor de estas

Ilustración 5.23. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 6, Cuestionario 7.

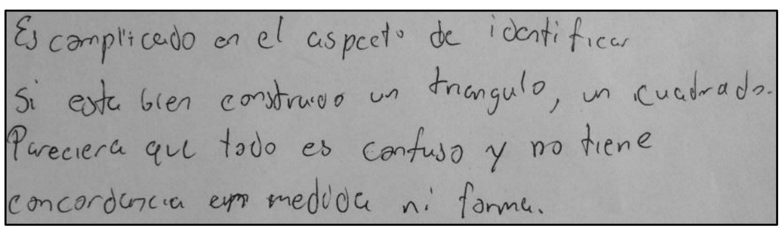
Respecto de sus impresiones sobre el modelo de geometría no euclidiana (Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte), este participante también describe “que era algo demasiado raro”. Asimismo, le cuesta concebir que un “segmento ‘curvo’ sea igual a otro” y que “un triángulo ‘equilátero’ tenga medidas desiguales” (Ilustración 5.24).



- Que era algo demasiado raro.
- No puede ser posible que un segmento "curvo" sea igual a otro
- ¿Como es posible que un triangulo "equilatero" tenga medidos desiguales?
- ¿En que se usa este modelo?

Ilustración 5.24. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte.

Gustavo acepta haber tenido complicaciones al usar el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 2, Cuestionario 6, segunda parte) pues menciona que “pareciera que todo es confuso y no tiene concordancia en medida ni forma” (Ilustración 5.25). Aquí se identifica una conservación acentuada y encarnada de la geometría euclidiana como única (primera ruptura epistemológica antes del siglo XXI).



Es complicado en el aspecto de identificar
si esta bien construido un triangulo, un cuadrado.
Pareciera que todo es confuso y no tiene
concordancia en medida ni forma.

Ilustración 5.25. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 2, Cuestionario 6, segunda parte.

Sin embargo, respecto de la definición de rectas paralelas (Pregunta 8, Cuestionario 8), este alumno identifica una diferencia fundamental entre la definición euclidiana y la no euclidiana, pues refiere que las paralelas euclidianas son “rectas separadas por una distancia igualitaria” y las paralelas no euclidianas son “rectas separadas por distancias no igualitarias” (Ilustración 5.26). En esta respuesta se reconoce una comprensión del modelo dinámico del Disco de Poincaré y un acercamiento a la reformalización de la estructura matemática del espacio físico (segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI).

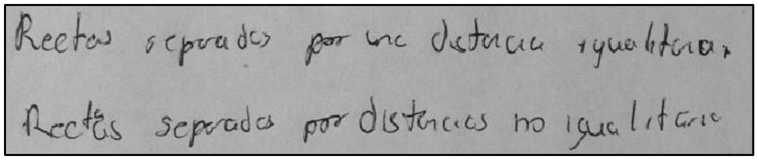

Rectas separadas por una distancia igualitaria.
Rectas separadas por distancias no igualitaria

Ilustración 5.26. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 8, Cuestionario 8.

Gustavo destaca varias ventajas al usar el software de geometría dinámica (Pregunta 8, Cuestionario 7); en particular, menciona: rapidez, precisión, eficacia, intuitivo, sencillo, gratis, poderosa (en el aspecto de precisión y construcciones euclidianas y no euclidianas) (Ilustración 5.27). Además, este participante indica que fue de su agrado y, aparentemente sorprendente, haber conocido temas de geometría no euclidiana (Pregunta 9, Cuestionario 7) pues acepta que “las apariencias engañan al ser humano que todo lo ve y nada sabe” y al bosquejar un triángulo equilátero hiperbólico sobre la hoja de trabajo refiere que “jamás me hubiera imaginado que esto [*señalando con una flecha el bosquejo*] es un triángulo equilátero” (Ilustración 5.28).

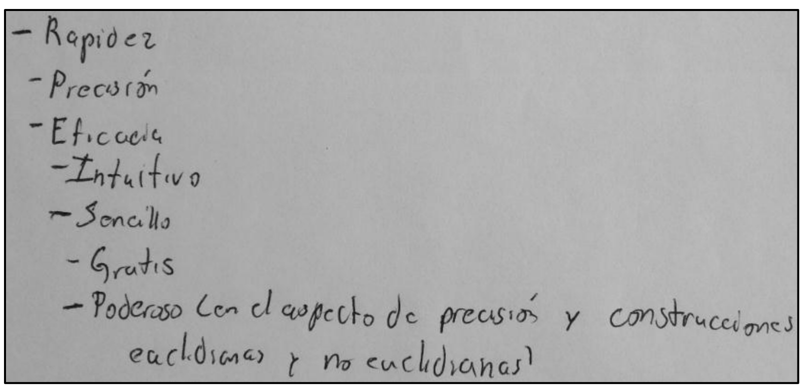

- Rapidez
- Precisión
- Eficacia
- Intuitivo
- Sencillo
- Gratis
- Poderoso (en el aspecto de precisión y construcciones euclidianas y no euclidianas)

Ilustración 5.27. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 8, Cuestionario 7.

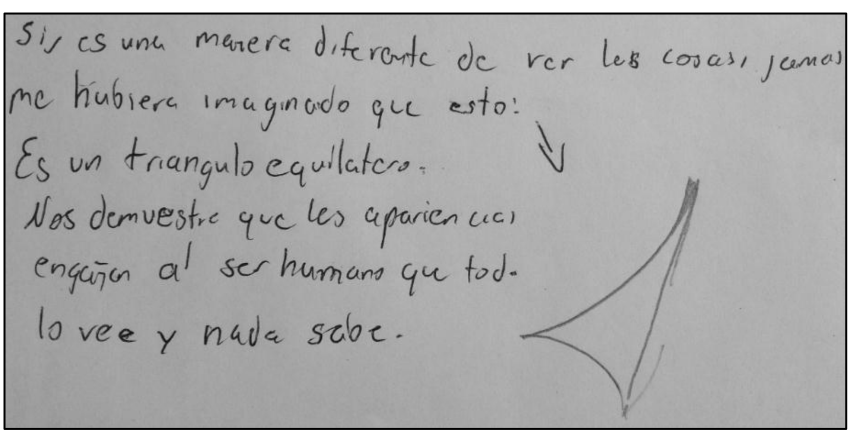


Ilustración 5.28. Respuesta de Gustavo a la Pregunta 9, Cuestionario 7.

Al haber analizado el estudio de caso de Gustavo se muestra una fuerte relación con la primera ruptura epistemológica antes del siglo XXI pues el análisis muestra que este participante mantuvo una intuición euclidiana durante el desarrollo de las actividades. No obstante, este alumno logró identificar que las construcciones hiperbólicas del triángulo equilátero, la mediatriz y la perpendicular por un punto externo a una recta dada eran equivalentes a las construcciones euclidianas y estableció una clara diferencia entre las paralelas euclidianas y no euclidianas (segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI). Además, en las respuestas dadas por este participante destacan varias propiedades del software de geometría dinámica.

5.1.3. El caso de Alan

Durante el proceso de implementación del Instrumento, Alan mostró varias limitaciones tanto conceptuales como en sus construcciones y los mecanismos de validación respectivos. Por ejemplo, para definir segmento y superficie (Pregunta 1, Cuestionario 1), este alumno utiliza el concepto “espacio” en ambos casos. Indica que un segmento es el “espacio entre dos puntos” y que una superficie es el “espacio que tiene longitud y anchura” (Ilustración 5.29).

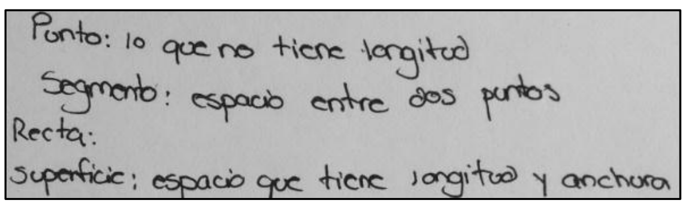
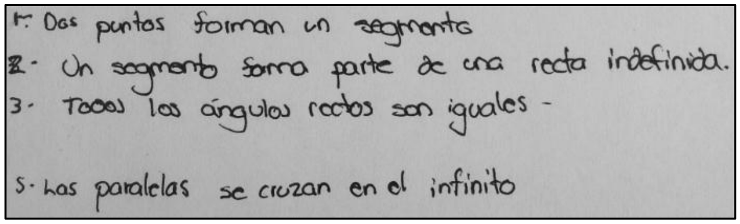

Punto: lo que no tiene longitud
Segmento: espacio entre dos puntos
Recta:
superficie: espacio que tiene longitud y anchura

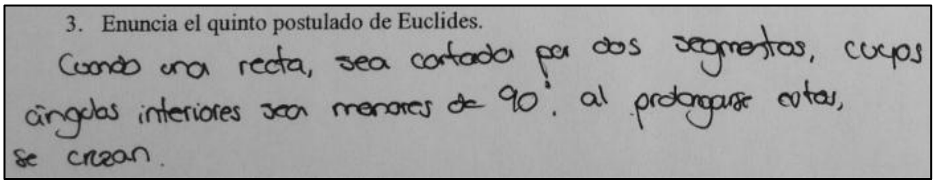
Ilustración 5.29. Respuesta de Alan a la Pregunta 1, Cuestionario 1.

Alan también tiene inconvenientes al enunciar los cinco postulados de Euclides (Pregunta 2, Cuestionario 1), pues sólo logra formular el cuarto de manera correcta. En este primer intento de enunciar el quinto postulado, este alumno lo describe como “Las paralelas se cruzan en el infinito” (Ilustración 5.30). Se destaca que en el segundo intento (Pregunta 3, Cuestionario 2), Alan consigue un enunciado más próximo al de Euclides indicando que “Cuando una recta sea cortada por dos segmentos, cuyo ángulos interiores sean menores de 90°, al prolongar éstas, se cruzan” (Ilustración 5.31).



1.- Dos puntos forman un segmento
2.- Un segmento forma parte de una recta indefinida.
3.- Todos los ángulos rectos son iguales -
5.- Las paralelas se cruzan en el infinito

Ilustración 5.30. Respuesta de Alan a la Pregunta 2, Cuestionario 1.

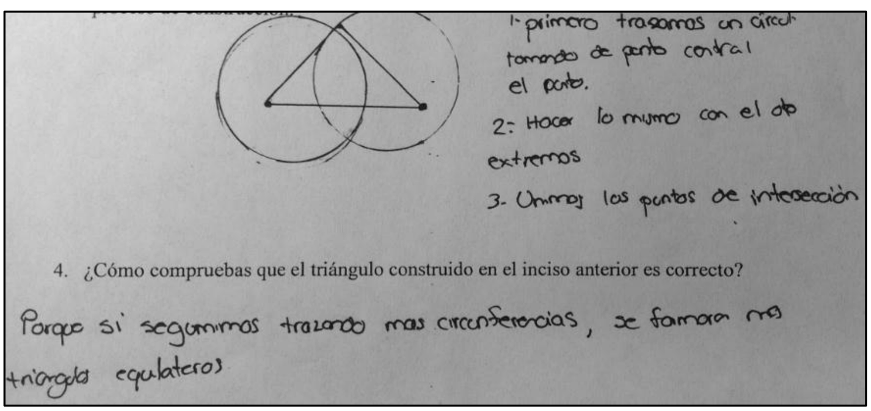


3. Enuncia el quinto postulado de Euclides.

Cuando una recta, sea cortada por dos segmentos, cuyos ángulos interiores sean menores de 90°. al prolongarse estas, se cruzan.

Ilustración 5.31. Respuesta de Alan a la Pregunta 3, Cuestionario 2.

Las construcciones y los intentos para su validación empleados por este participante también son deficientes. Por ejemplo, al construir un triángulo equilátero (Pregunta 3, Cuestionario 1), muestra un procedimiento erróneo pues parte trazando “un círculo tomando el punto central” en lugar de considerar un segmento; después indica que “unimos los puntos de intersección” sin dejar en claro cuáles son estos puntos. Al tratar de validar su resultado (Pregunta 4, Cuestionario 1), indica que su construcción es correcta “porque si seguimos trazando más circunferencias, se formarán más triángulos equiláteros” (Ilustración 5.32).



1.- primero trazamos un círculo tomando de punto central el punto.
2.- Hacer lo mismo con el otro extremos
3.- Unimos los puntos de intersección

4. ¿Cómo compruebas que el triángulo construido en el inciso anterior es correcto?

Porque si seguimos trazando mas circunferencias, se formara mas triangulos equilateros

Ilustración 5.32. Respuesta de Alan a la Pregunta 3, Cuestionario 1.

De manera similar, cuando Alan se enfrenta con la validación de la proposición 12 (Pregunta 1, Cuestionario 3), no comprende las condiciones de la construcción y hace un bosquejo inadecuado, de modo que se interpreta que este participante desconoce la noción de perpendicularidad. Al intentar contestar esta pregunta, describe su bosquejo de esta manera:

“Trazamos una circunferencia y después una recta que la divida a la mitad, después, en cualquier punto del perímetro de la circunferencia trazamos un punto. Después trazamos una recta que pase por el centro de la circunferencia. Es perpendicular por que se juntan” (Ilustración 5.33).

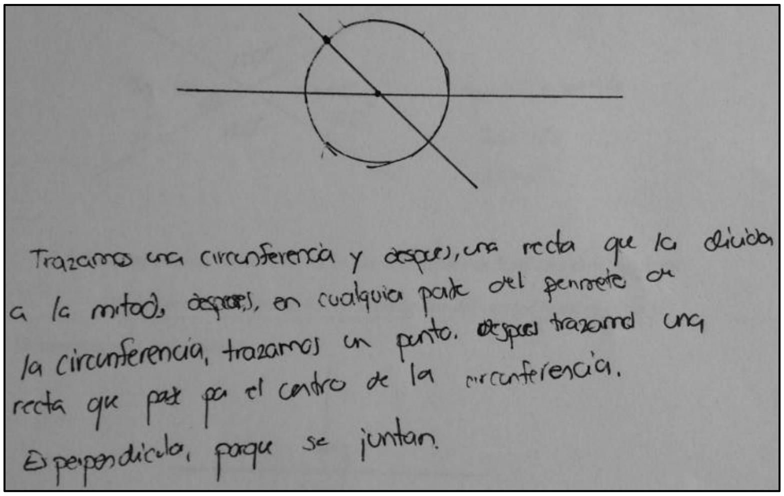


Ilustración 5.33. Respuesta de Alan a la Pregunta 1, Cuestionario 3.

Como resultado de esta carencia conceptual, este participante no puede llevar a cabo esta construcción en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 3, Cuestionario 6) tal como lo evidencia en la respuesta de esta pregunta (Ilustración 5.34).

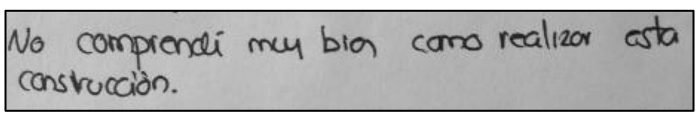


Ilustración 5.34. Respuesta de Alan a la Pregunta 3, Cuestionario 6.

Alan también muestra complicaciones en la aplicación práctica de la proposición 15 (Pregunta 2b, Cuestionario 3) pues un tratamiento algebraico inadecuado lo conduce a obtener un valor incorrecto de la incógnita planteada (Ilustración 5.35).

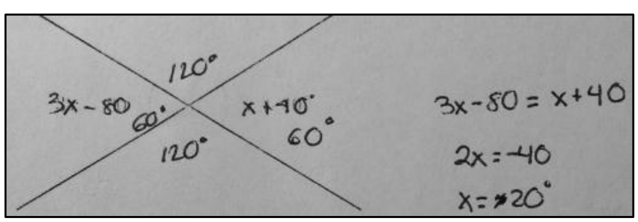


Ilustración 5.35. Respuesta de Alan a la Pregunta 2b, Cuestionario 3.

Más todavía, al intentar validar esta proposición (Pregunta 2.1, Cuestionario 2), este participante hace un bosquejo particular asignando valores a los ángulos considerados. Además, su descripción es deficiente pues refiere que: “Al trazar dos rectas que se corten, los espacios entre las líneas es igual [*sic*], por lo tanto, sus ángulos serán iguales” (Ilustración 5.36).

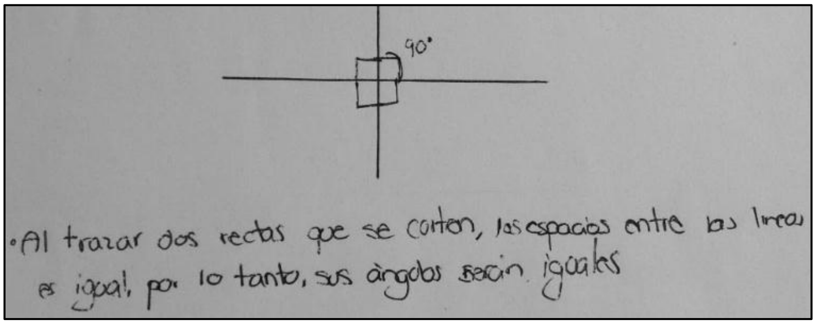


Ilustración 5.36. Respuesta de Alan a la Pregunta 2.1, Cuestionario 2.

Cuando este alumno trata de demostrar la proposición 29 (Pregunta 3.1, Cuestionario 4), usa nuevamente valores particulares pero, en esta ocasión, no describe ningún proceso de validación (Ilustración 5.37).

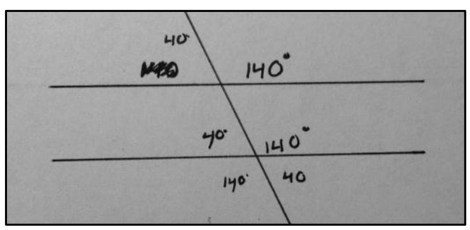


Ilustración 5.37. Respuesta de Alan a la Pregunta 3.1, Cuestionario 4.

Dado lo anterior, resulta importante conocer cómo comprende este participante la validez de una proposición geométrica (Pregunta 1, Cuestionario 4). En la respuesta de esta pregunta, refiere que: “Comprobándola, realizando lo que indica la proposición” (Ilustración 5.38). Se considera que por esta concepción inadecuada sus mecanismos de validación son deficientes como se evidenció previamente.

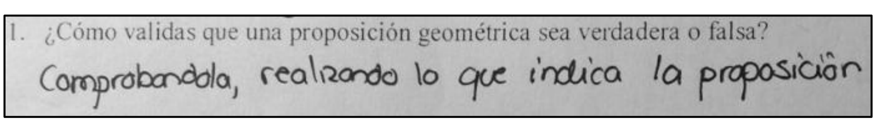


Ilustración 5.38. Respuesta de Alan a la Pregunta 1, Cuestionario 4.

En las construcciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré, este participante también tuvo deficiencias; éstas se consideran consecuencia de las fallas indicadas en el trabajo con papel y lápiz. Por ejemplo, en la construcción del triángulo equilátero hiperbólico (Pregunta 1, Cuestionario 6) Alan no atiende la restricción de que el triángulo debe ser equilátero pues traza un triángulo hiperbólico cualquiera. Describe que para construirlo "primero trazamos una circunferencia, después, colocamos 3 puntos dentro de la circunferencia, después trazamos rectas que pasen por los 3 puntos y así tendremos un triángulo hiperbólico". En la Ilustración 5.39 se muestra la captura de pantalla de su construcción y en la Ilustración 5.40 su explicación donde añade un bosquejo del resultado en la pantalla de GeoGebra.

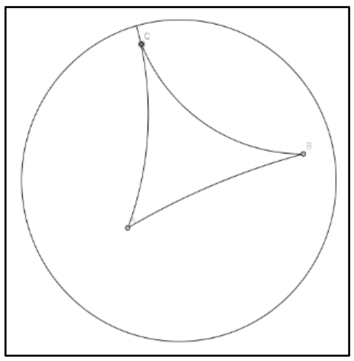


Ilustración 5.39. Construcción de un triángulo hiperbólico de Alan.

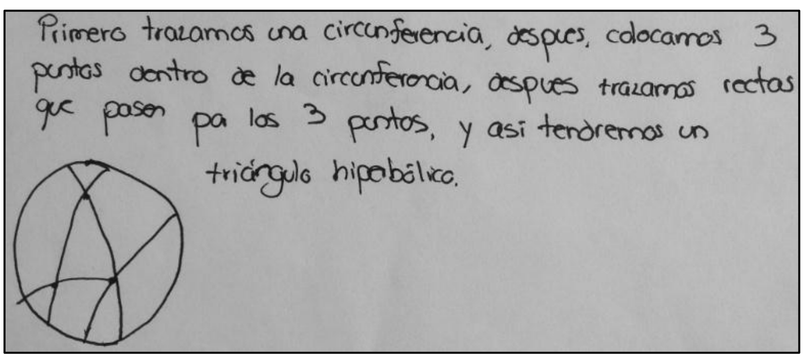


Ilustración 5.40. Respuesta de Alan a la Pregunta 1, Cuestionario 6.

Alan muestra un avance en la construcción con regla y compás del triángulo equilátero (Pregunta 1, Cuestionario 7) en comparación con el descrito en el Cuestionario 1 (Ilustración 5.32). En este caso, describe el siguiente proceso de construcción: "Trazamos una recta. Trazamos dos circunferencias sobre los dos puntos finales del segmento. Sobre los puntos de intersección los unimos y obtenemos un triángulo equilátero" (Ilustración 5.41).

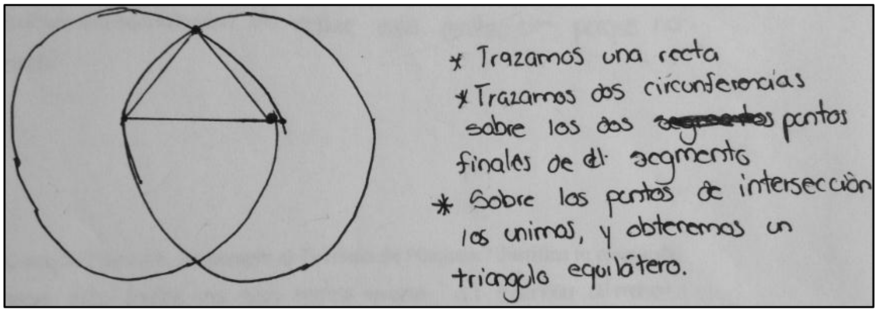


Ilustración 5.41. Respuesta de Alan a la Pregunta 1, Cuestionario 7.

Sin embargo, este participante no logró comprender por completo los objetos geométricos hiperbólicos. Prueba de ello es el entendimiento inadecuado de la definición de los ángulos hiperbólicos pues al definir un triángulo rectángulo hiperbólico (Pregunta 4, Cuestionario 8) menciona que “sus mediatrices [*se interpreta como las tangentes en un punto que conducen a la definición de ángulo de manera general*] forman un ángulo recto”. Además, indica que “en el no euclidiano sus ángulos internos no pueden medir 90°” (Ilustración 5.42). Como consecuencia, refiere que “El teorema de Pitágoras no puede ser utilizado en el Disco de Poincaré ya que los lados del triángulo no son rectos” (Pregunta 6, Cuestionario 8) (Ilustración 5.43).

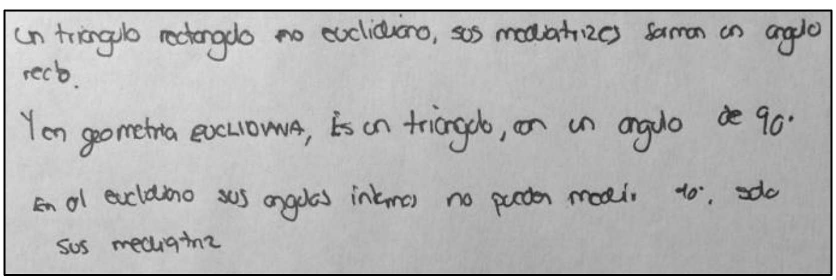


Ilustración 5.42. Respuesta de Alan a la Pregunta 4, Cuestionario 8.

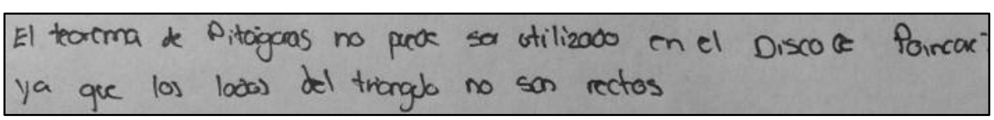


Ilustración 5.43. Respuesta de Alan a la Pregunta 6, Cuestionario 8.

En relación con las impresiones finales sobre las tareas indicadas (Pregunta 1, Cuestionario 6), este alumno no mostró agrado con el desarrollo de las actividades pues señala que “me pareció extraña [*la geometría hiperbólica*] porque nosotros estamos acostumbrados a ver un mundo euclidiano, o sea, figuras regulares, y la geometría no euclidiana son figuras irregulares” (Ilustración 5.44). Se destaca que el cambio en la concepción de los objetos geométricos detectado por este participante reside en que “los objetos o figuras no necesariamente tienen que ser rectos” (Pregunta 10, Cuestionario 8) (Ilustración 5.45).

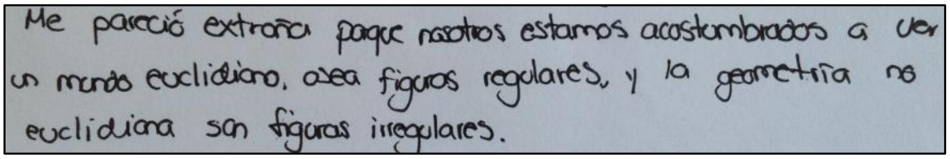

Me pareció extraña poque nosotros estamos acostumbrados a ver un mundo euclidiano, osea figuras regulares, y la geometría no euclidiana son figuras irregulares.

Ilustración 5.44. Respuesta de Alan a la Pregunta 1, Cuestionario 6.

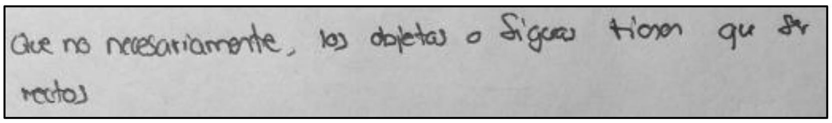

Que no necesariamente, los objetos o figuras tienen que ser rectos

Ilustración 5.45. Respuesta de Alan a la Pregunta 10, Cuestionario 8.

En la entrevista llevada a cabo después de la implementación del Instrumento, se destaca el siguiente fragmento:

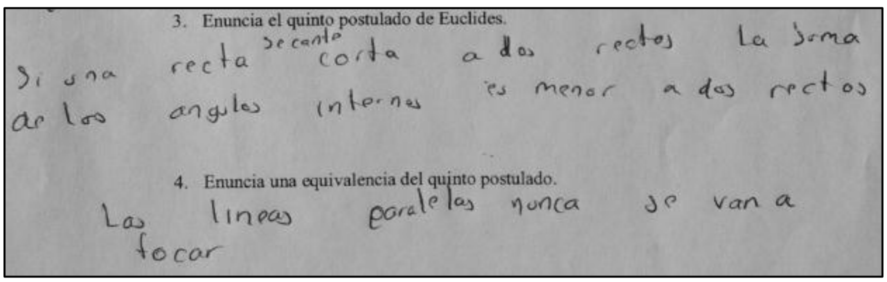
Investigador: Alan, ¿qué opinas de la geometría no euclidiana? En particular, del modelo de geometría hiperbólica del Disco de Poincaré. ¿Cambian tus percepciones respecto a los objetos geométricos que tú conocías?

Alan: Pues sí, es algo nuevo porque estamos acostumbrados a vivir en un mundo con geometría euclidiana [...] En el Disco de Poincaré, aunque un lado esté corto puede medir lo mismo que uno que esté más extendido y no tiene que ver nada la parte visual con la parte geométrica.

El estudio de caso de Alan muestra distintos resultados relacionados con las complicaciones que las carencias conceptuales pueden afectar el desarrollo de las actividades. En particular, se considera que estas carencias conceptuales dirigieron al estudiante a usar mecanismos de validación débiles así como fallas en las tareas encomendadas en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Del estudio de caso de Alan, no obstante, se tiene evidencia sobre una fuerte tensión entre la lógica y la intuición, pues este participante reconoce en la entrevista que “aunque un lado esté corto puede medir lo mismo que uno que esté más extendido y no tiene que ver nada la parte visual con la parte geométrica”.

5.1.4. EL CASO DE SEBASTIÁN

Sebastián es un participante que muestra un entendimiento de la geometría euclidiana pero tiene dificultades al concebir una geometría no euclidiana; con el fin de evidenciar estas dificultades, este análisis de caso se concentra en este aspecto, aunque se considera importante mostrar una respuesta relacionada con concepciones y una con mecanismos de validación. A pesar de que al enunciar el quinto postulado (Pregunta 3, Cuestionario 2) este participante indica que "Si una recta secante corta a dos rectas, la suma de los ángulos internos es menor a dos rectos" se interpreta una concepción adecuada de éste. Además, menciona una equivalencia acertada (Pregunta 4, Cuestionario 2) "Las líneas paralelas nunca se van a tocar" (Ilustración 5.46).


3. Enuncia el quinto postulado de Euclides.

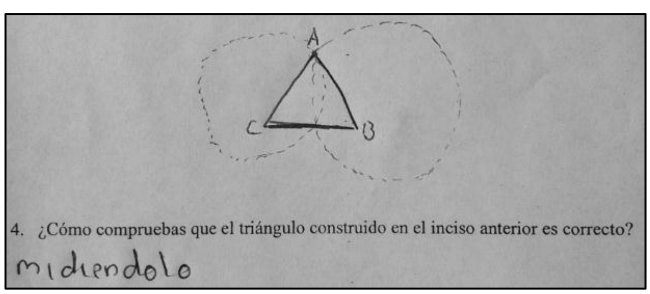
Si una recta secante corta a dos rectos la suma de los angulos internos es menor a dos rectos

4. Enuncia una equivalencia del quinto postulado.

Las lineas paralelas nunca se van a tocar

Ilustración 5.46. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 3, Cuestionario 2 y a la Pregunta 4, Cuestionario 2.

Este alumno lleva a cabo correctamente las construcciones indicadas. Sin embargo, en cuanto a la forma de validar proposiciones, Sebastián presenta argumentos débiles. Prueba de ello es la construcción del triángulo equilátero con regla y compás (Pregunta 3, Cuestionario 1) y su validación (Pregunta 4, Cuestionario 1) pues sólo muestra el bosquejo de su construcción y argumenta que la validez de ésta se produce "midiéndolo" (Ilustración 5.47).



4. ¿Cómo compruebas que el triángulo construido en el inciso anterior es correcto?

midiendolo

Ilustración 5.47. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 3, Cuestionario 1 y a la Pregunta 4, Cuestionario 1.

A pesar de que las construcciones propuestas por este participante son incorrectas en el sentido de su estructura, éstas son interesantes pues aprovecha la ejecutabilidad del software de geometría dinámica. Por ejemplo, en el intento de construcción del triángulo equilátero (Pregunta 1, Cuestionario 6), este participante relata que "para poder hacer que el triángulo fuera equilátero hice que las medidas de los segmentos hiperbólicos fueran los mismos" (Ilustración 5.48). No obstante, estos segmentos hiperbólicos no son iguales entre sí.

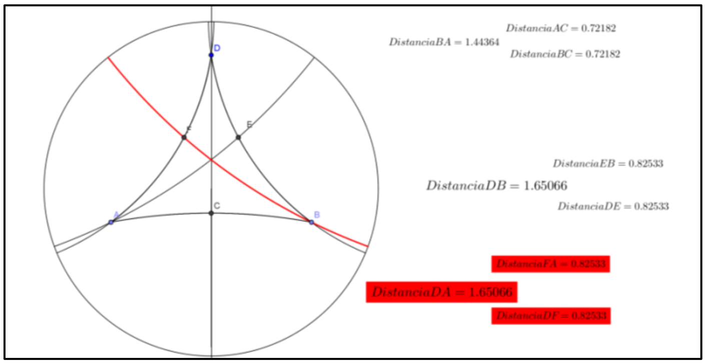


Ilustración 5.48. Construcción de un triángulo hiperbólico de Sebastián.

De manera similar, Sebastián lleva a cabo la construcción de un cuadrilátero hiperbólico (Pregunta 4, Cuestionario 6) pues reconoce que su construcción no corresponde a un cuadrado hiperbólico. Es interesante notar que este participante utilizó la cuadrícula de GeoGebra para llevar a cabo su construcción, pues, tal como lo narra: "Puse cuatro puntos dentro de la circunferencia y los uní usando hipérbolas [*se refiere a rectas hiperbólicas*]. Les puse sus medidas [*sic*] y valiéndome de la cuadrícula ubiqué los puntos en la cuadrícula, me salieron dos y dos, o sea un rectángulo aunque sus puntos los haya ubicado a una misma distancia". El resultado de este procedimiento se muestra en la Ilustración 5.49.

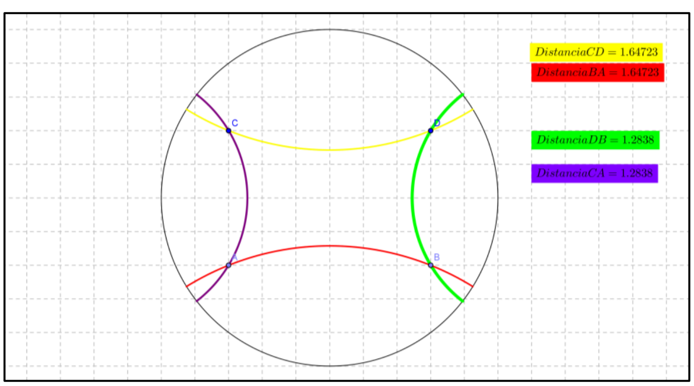


Ilustración 5.49. Construcción de un cuadrilátero hiperbólico de Sebastián.

Este participante muestra un avance al describir cómo valida la construcción de un triángulo equilátero (Pregunta 1, Cuestionario 7). Menciona que “al encerrar cada lado en un círculo por igual en cada uno desde su centro a la circunferencia, nos da un radio. Si cada lado es igual los 3 deberían caben en el círculo [*sic*]”. En la respuesta de esta pregunta destaca que Sebastián consigue identificar que los triángulos equiláteros en ambas geometrías “son equivalentes en que sus 3 lados deben ser iguales [*sic*]” (Ilustración 5.50).

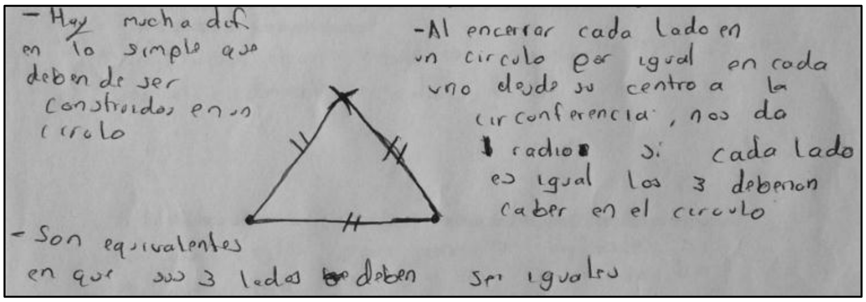


Ilustración 5.50. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 1, Cuestionario 7.

Sin embargo, sobre las construcciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 2, Cuestionario 7), este participante refiere que “no puedes seguir al pie de la letra las reglas euclidianas ya que sólo servirán para confundirte” (Ilustración 5.51). Aquí se interpreta que este alumno intentó aplicar las reglas euclidianas; es decir, mantuvo una intuición euclidiana (primera ruptura epistemológica antes del siglo XXI).

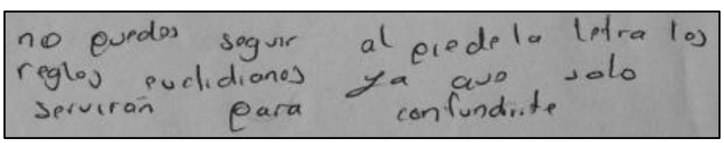


Ilustración 5.51. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 2, Cuestionario 7.

Además, sobre las impresiones que este participante tuvo al conocer un modelo de geometría no euclidiana (Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte) señala que “todo cambia, las reglas y sus condiciones de igualdad, mediatriz, etc.” (Ilustración 5.52).

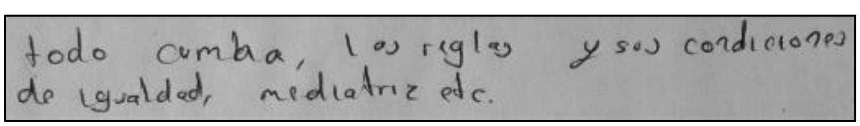


Ilustración 5.52. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte.

Como resultado de las respuestas anteriores, Sebastián no mostró agrado por las actividades llevadas a cabo en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 9, Cuestionario 7), mencionando que "no [*fue*] mucho [*de su agrado*], porque me confundió, pero se me hizo interesante" (Ilustración 5.53).

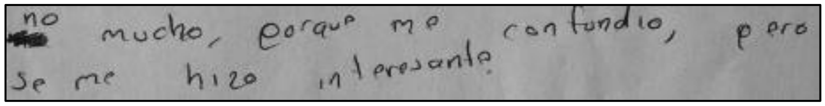

no mucho, porque me confundio, pero
se me hizo interesante

Ilustración 5.53. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 9, Cuestionario 7.

Además, señala que la principal dificultad que tuvo al usar el Disco de Poincaré (Pregunta 2, Cuestionario 6, segunda parte) fue "quitarme la idea de que seguía siendo geometría euclidiana" (Ilustración 5.54).

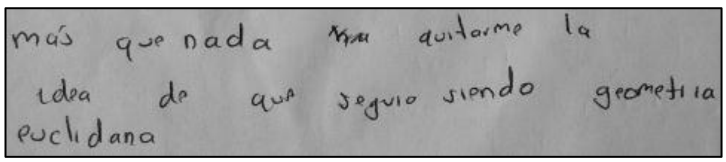

más que nada quitarme la
idea de que seguio siendo geometria
euclidana

Ilustración 5.54. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 2, Cuestionario 6, segunda parte.

Sin embargo, este participante logra identificar que las definiciones de triángulo equilátero y de triángulo rectángulo son equivalentes en ambas geometrías. En particular, indica que un triángulo equilátero (Pregunta 1, Cuestionario 8) es "un triángulo con lados y ángulos iguales" señalando que "no hay diferencias entre las 2 definiciones [*sic*]" (Ilustración 5.55). Asimismo, concluye respecto de la exploración de triángulos equiláteros en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 2, Cuestionario 8) que "aunque las definiciones de las 2 tipos de geometría son lo mismo, ya viéndolos gráficamente tienen diferencias bastante obvias [*sic*]" (Ilustración 5.56).

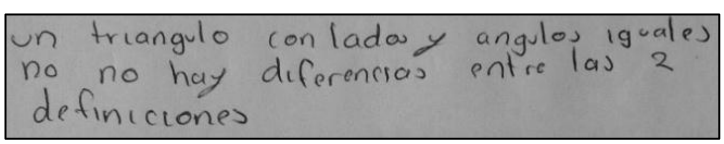
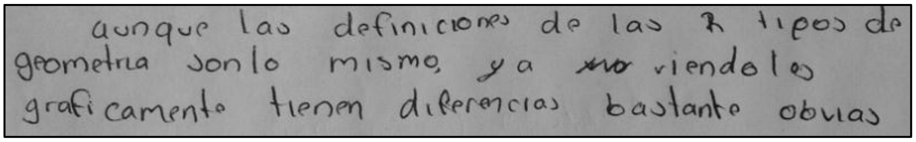

un triangulo con lados y angulos iguales
no no hay diferencias entre las 2
definiciones

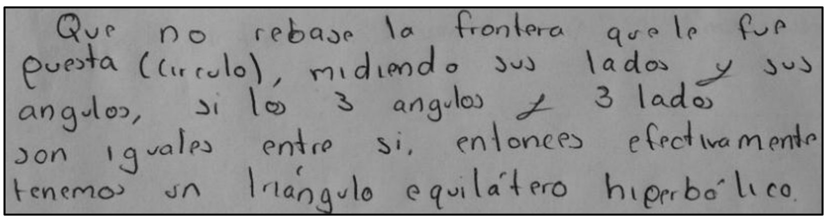
Ilustración 5.55. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 1, Cuestionario 8.



aunque las definiciones de las 2 tipos de
geometria son lo mismo ya ~~no~~ viendolos
graficamente tienen diferencias bastante obvias

Ilustración 5.56. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 2, Cuestionario 8.

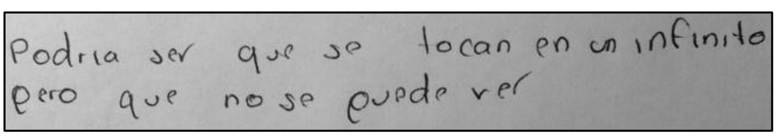
Este alumno se vale nuevamente de la medición para validar que su construcción del triángulo equilátero hiperbólico (Pregunta 3, Cuestionario 8) pues, para corroborar que su construcción es correcta, señala: "midiendo sus lados y sus ángulos, si los 3 ángulos y los 3 lados son iguales entre sí, entonces efectivamente tenemos un triángulo equilátero hiperbólico" (Ilustración 5.57). Este argumento puede ubicarse en el contexto de una prueba situada.



Que no rebase la frontera que le fue
puesta (circulo), midiendo sus lados y sus
angulos, si los 3 angulos y 3 lados
son iguales entre si, entonces efectivamente
tenemos un triángulo equilátero hiperbólico.

Ilustración 5.57. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 3, Cuestionario 8.

Respecto de la noción adquirida por este alumno del concepto de paralela (Pregunta 8, Cuestionario 8), define que "podría ser que se tocan [*las paralelas*] en un infinito pero que no se puede ver [*sic*]" (Ilustración 5.58). Dada esta respuesta, se interpreta que Sebastián no comprendió que la circunferencia frontera juega el papel de infinito.



Podria ser que se tocan en un infinito
pero que no se puede ver

Ilustración 5.58. Respuesta de Sebastián a la Pregunta 8, Cuestionario 8.

En la entrevista llevada a cabo después de la implementación del Instrumento, se destaca el siguiente fragmento de la interacción entre el investigador y Sebastián:

Investigador: Sebastián, ¿cómo describirías la geometría no euclidiana?

Sebastián: Pues, en primera instancia, tiene un límite y que no todas las leyes euclidianas se aplican en la no euclidiana.

Investigador: ¿Qué piensas sobre ésta [*la geometría no euclidiana*]?

Sebastián: […] Se me hace interesante sí, pero para ocuparla tal vez no serviría mucho.

Del análisis llevado a cabo en esta sección, se destaca que Sebastián comprende de forma adecuada los conceptos de la geometría euclidiana, aunque muestra deficiencias en la validación de proposiciones geométricas. Cuando este participante se enfrenta con las construcciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré, no respeta sus estructuras pues se apoya de la ejecutabilidad del software para cambiar de posición las figuras y hacerlas coincidir con las construcciones buscadas. Además, se considera que este participante también mantuvo una intuición euclidiana pues no consiguió comprender de lleno las tareas concernientes al Disco de Poincaré.

5.1.5. El caso de Enrique

Este participante mostró una concepción adecuada sobre los objetos geométricos básicos y llevó a cabo distintos intentos para validar sus construcciones; sin embargo, estos no fueron acertados pero sus ensayos arrojan resultados importantes. Resalta su construcción con regla y compás del cuadrado (Pregunta 3, Cuestionario 3) de la cual describe: “Un círculo se traza con un radio, por lo tanto, este va a ser igual a todo círculo con el radio igual, y trazando 5 círculos que comparten el mismo radio se podrá trazar un cuadrado, que es igual en todos sus lados, que por perímetro es cuatro veces el radio [*sic*]” (Ilustración 5.59). No obstante, esta construcción es incorrecta pues el resultado de este procedimiento es un rectángulo.

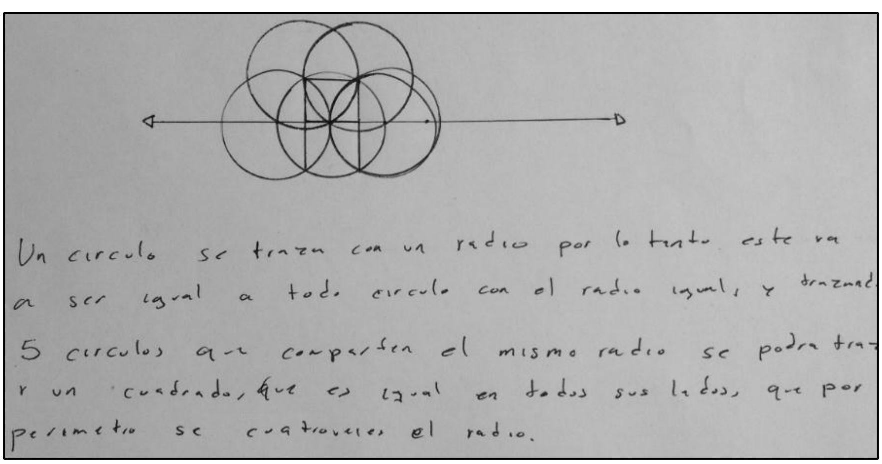


Ilustración 5.59. Respuesta de Enrique a la Pregunta 3, Cuestionario 3.

Enrique reproduce esta construcción en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 4, Cuestionario 6). De hecho, por iniciativa propia este participante relata su procedimiento en un archivo por escrito incluyendo capturas de su trabajo en GeoGebra (Ilustración 5.60).

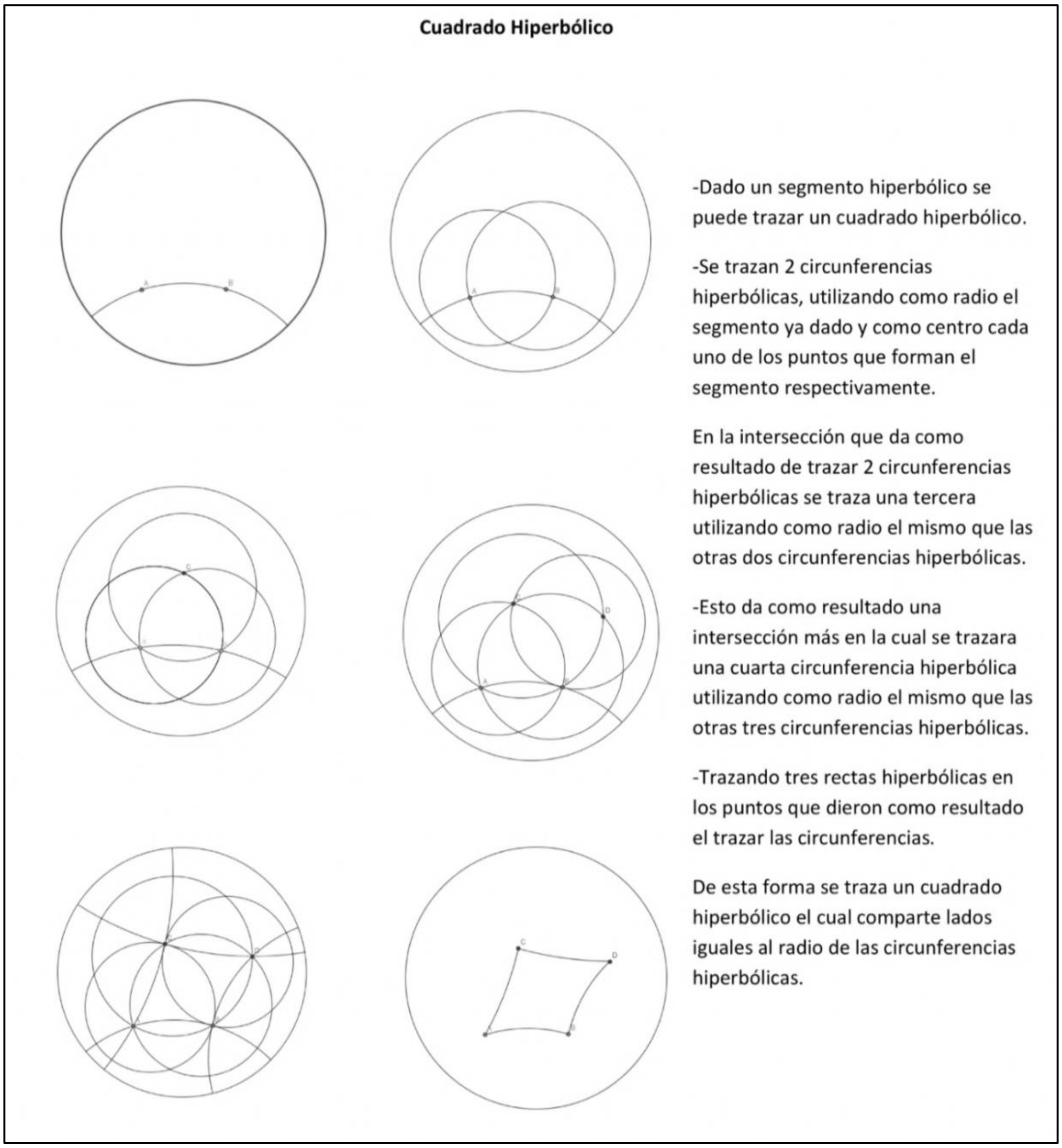


Ilustración 5.60. Construcción de un cuadrilátero hiperbólico de Enrique.

Sin embargo, se le muestra gradualmente al alumno que su construcción no es adecuada. A continuación se muestra la interacción en esta etapa entre el investigador y este participante:

Investigador: ¿Por qué argumentas que esta figura [*Señalando la pantalla de GeoGebra*] es un cuadrado?

Enrique: Porque todos los lados son radios de circunferencias.

Investigador: ¿Y las circunferencias tienen el mismo radio?

Enrique: Sí

Investigador: Ok [*sic*]. ¿Y los ángulos también son iguales?

Enrique: Mmm [*sic*] [*Hace esta expresión de duda mirando su construcción*]

Investigador: ¿Cómo podrías verificar si los ángulos son iguales?

Enrique: Midiéndolos [*Toma el mouse de la computadora, selecciona la herramienta hiperbólica "Ángulo" y obtiene las medidas de los ángulos de la figura (Ilustración 5.61)*]

Investigador: ¿Son iguales los ángulos?

Enrique: No.

Investigador: ¿Qué pasa si mueves uno de los puntos? ¿Es un cuadrado?

Enrique: No [*cambia de posición el punto B (Ilustración 5.62)*]

Investigador: ¿Entonces? [*sic*]

Enrique: Entonces la construcción no es igual que en la geometría euclidiana.

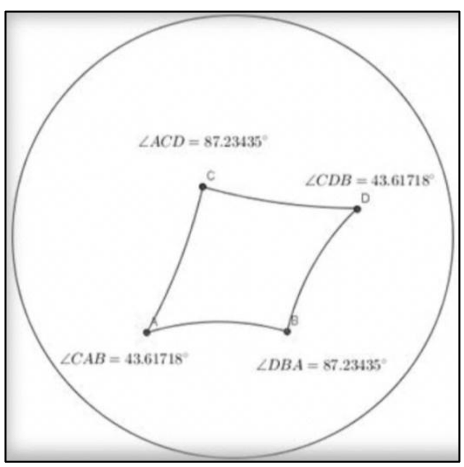


Ilustración 5.61. Obtención de las medidas de los ángulos del cuadrilátero hiperbólico de Enrique usando la herramienta de medición.

Este alumno hace uso de la ejecutabilidad del software pues recibe una respuesta inmediata que lo convence sobre la invalidez de su construcción. Además, sobresale el uso de las herramientas hiperbólicas para invalidarla. El resultado de haber cambiado de posición el punto B mencionado en la entrevista se muestra en la Ilustración 5.62.

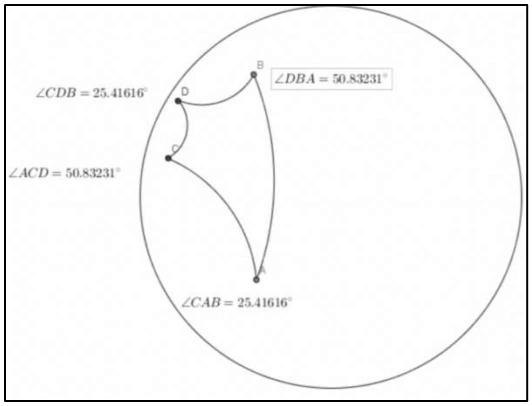


Ilustración 5.62. Posición del cuadrilátero hiperbólico de Enrique después de haber cambiado de posición al punto B.

Este participante comprende la negación matemática del quinto postulado (Pregunta 5, Cuestionario 2) indicando que “significa negar la geometría euclidiana desde el punto de vista de este postulado, proponiendo alguno más y creando la geometría no euclidiana” (Ilustración 5.63).

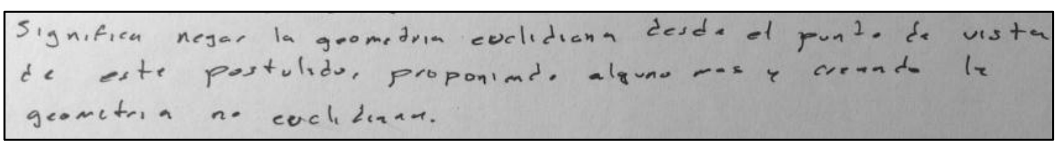

Significa negar la geometria euclidiana desde el punto de vista de este postulado, proponiendo alguno mas y creando la geometria no euclidiana.

Ilustración 5.63. Respuesta de Enrique a la Pregunta 5, Cuestionario 2.

Además, entiende la negación del axioma de Playfair (Pregunta 1, Cuestionario 5): “significa afirmar que por un punto exterior [*a una recta*] es posible trazar más de una paralela a la recta dada” (Ilustración 5.64).

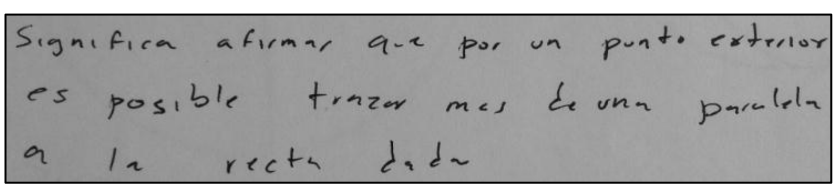

Significa afirmar que por un punto exterior es posible trazar mas de una paralela a la recta dada

Ilustración 5.64. Respuesta de Enrique a la Pregunta 1, Cuestionario 5.

De esta manera, enrique define que una geometría no euclidiana “es aquella en la que se niega el quinto postulado remplazándolo con otro y existe en las figuras con volumen” (Pregunta 4, Cuestionario 5) (Ilustración 5.65).

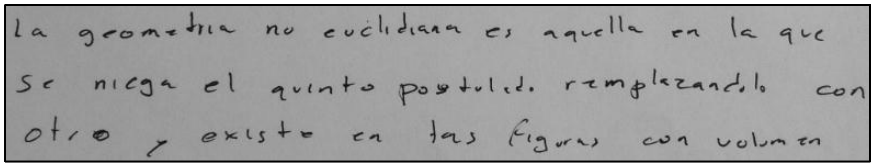

La geometria no euclidiana es aquella en la que
se niega el quinto postulado remplazandolo con
otro y existe en las figuras con volumen

Ilustración 5.65. Respuesta de Enrique a la Pregunta 4, Cuestionario 5.

Por esta razón, concibe una superficie por donde pasen al menos dos paralelas por un punto exterior a una recta dada (Pregunta 2, Cuestionario 5) como un “modelo esférico” (Ilustración 5.66). No obstante, un modelo esférico no tiene curvatura constante negativa (sección 3.2) pero se considera un buen acercamiento a la noción de geometría no euclidiana.

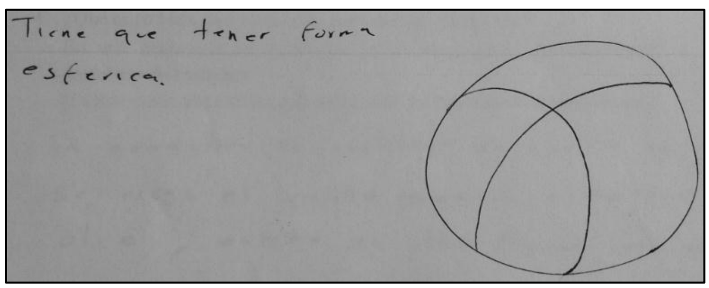


Ilustración 5.66. Respuesta de Enrique a la Pregunta 2, Cuestionario 5.

Las otras construcciones encomendadas en el modelo dinámico del Disco de Poincaré fueron llevadas a cabo correctamente por este participante identificando que las éstas son equivalentes a las construcciones euclidianas: “la diferencia es tan sólo la forma que toman en el espacio, sin embargo son equivalentes” (Pregunta 3, Cuestionario 7) (Ilustración 5.67).

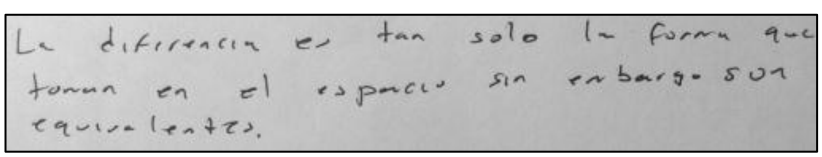

La diferencia es tan solo la forma que
toman en el espacio sin embargo son
equivalentes.

Ilustración 5.67. Respuesta de Enrique a la Pregunta 3, Cuestionario 7.

Menciona que la dificultad que tuvo al usar el modelo (Pregunta 2, Cuestionario 6, segunda parte) fue “el hecho de no lograr darme una idea de cómo se *curvan* las rectas” [subrayado añadido] (Ilustración 5.68). Aquí se destaca concordancia con la segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI, pues se muestra un obstáculo que dificulta aceptar un cambio en la forma de las rectas.

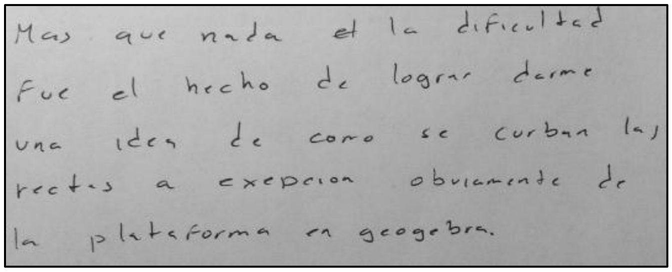

Mas que nada el la dificultad
fue el hecho de lograr darme
una idea de como se curban las
rectas a exepcion obviamente de
la plataforma en geogebra.

Ilustración 5.68. Respuesta de Enrique a la Pregunta 2, Cuestionario 6, segunda parte.

Sobre la invalidez del teorema de Pitágoras en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 6, Cuestionario 8), este alumno menciona que “no es válido puesto que el teorema de Pitágoras está basado en la quinta proposición de Euclides [*se refiere al quinto postulado*] y el Disco de Poincaré está basado en la geometría no euclidiana en el que se niega esta quinta proposición [*nuevamente, se refiere al quinto postulado*]”. Además, indica que “el teorema se invalida al momento de comprobar su validez o más bien de intentar comprobarla [*sic*]” (Ilustración 5.69).

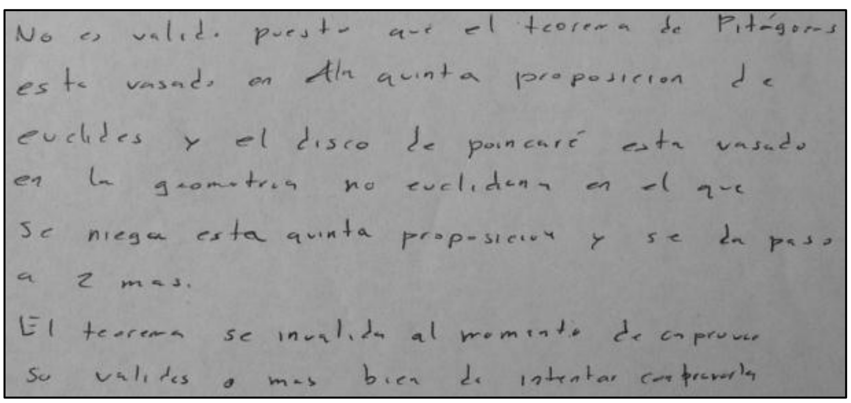

No es valido puesto que el teorema de Pitágoras
esta vasado en la quinta proposicion de
euclides y el disco de poincaré esta vasado
en la geometria no euclidiana en el que
se niega esta quinta proposicion y se da paso
a 2 mas.
El teorema se invalida al momento de comprovar
su valides o mas bien de intentar comprovarla

Ilustración 5.69. Respuesta de Enrique a la Pregunta 6, Cuestionario 8.

Sobre las conclusiones relacionadas con el comportamiento de los objetos hiperbólicos cerca del modelo (Pregunta 7, Cuestionario 8), Enrique resalta que “Entre más cerca del centro se esté el Disco de Poincaré [*sic*] se asemejará más a la geometría euclidiana puesto que la proyección será a menor tamaño y por lo tanto las curvas disminuirán” (Ilustración 5.70).

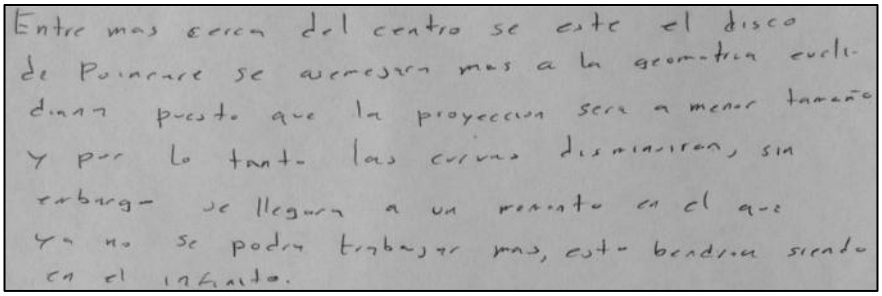

Entre mas cerca del centro se este el disco
de Poincare se acercara mas a la geometria eucli-
diana puesto que la proyeccion sera a menor tamaño
y por lo tanto las curvas disminuiran, sin
embargo se llegara a un momento en el que
ya no se podra trabajar mas, esto bendria siendo
en el infinito.

Ilustración 5.70. Respuesta de Enrique a la Pregunta 7, Cuestionario 8.

Respecto de la pregunta sobre la creencia de alguna posible implicación entre la geometría euclidiana y la no euclidiana (Pregunta 9, Cuestionario 8), este participante refiere que “La geometría no euclidiana se deriva de la euclidiana puesto [que] esta es una relación a las 4 primeras proposiciones [*se refiere a los cuatro primeros postulados*] y una negación a el 5° proposición [*se refiere al quinto postulado*] [*sic*]” (Ilustración 5.71).

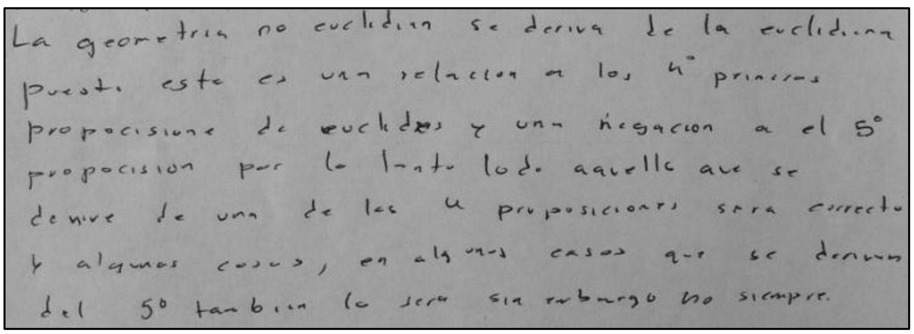

La geometria no euclidiana se deriva de la euclidiana
puesto este es una relacion a los 4° primeras
proposiciones de euclides y una negacion a el 5°
proposicion por lo tanto todo aquello que se
derive de una de las 4 proposiciones sera correcto
y algunos casos, en algunos casos que se deriven
del 5° tambien lo sera sin embargo no siempre.

Ilustración 5.71. Respuesta de Enrique a la Pregunta 9, Cuestionario 8.

A continuación, se destaca un fragmento de la entrevista llevada a cabo con este participante después de la aplicación del Instrumento:

Investigador: Enrique ¿qué piensas de la geometría hiperbólica?

Enrique: Bueno, la geometría hiperbólica es un modelo completamente distinto al que yo conocía. Por ejemplo, un cuadrado ya no puedo hacerlo de la misma manera en que la geometría común, la geometría euclidiana, puesto que tengo que buscar la forma de mantener siempre los cuatros lados iguales y los cuatro ángulos.

Investigador: ¿Y de qué manera cambia lo que conocías sobre geometría al conocer un modelo de geometría no euclidiana?

Enrique: Más que nada cambia en los límites [...] mostrándonos siempre a la vista de manera visual el infinito. Literal, *podemos presenciar el infinito* [subrayado añadido].

Investigador: ¿Qué piensas o qué destacas del uso del software al conocer un modelo de geometría no euclidiana?

Enrique: Bueno, pienso que el software es un muy importante puesto que, al ser algo completamente distinto, sin éste podríamos caer en un error al trabajar en él. Por ejemplo, al acercarnos más al centro [*se refiere al centro del Disco de Poincaré*], las líneas se asemejan más a la geometría euclidiana y al alejarnos más a la no euclidiana, y sin el software podríamos equivocarnos.

Investigador: ¿Qué otras ventajas destacas al utilizar el software?

Enrique: Es simple, con los movimientos que hagas *éste mismo te los trabaja de manera instantánea* [subrayado añadido].

En este fragmento de la entrevista llevada a cabo con Enrique resaltan varios resultados importantes. En principio, este participante identifica que la construcción del cuadrado hiperbólico es distinta de la euclidiana. Además, a diferencia de Sebastián (sección 5.1.4), este participante comprende acertadamente que la circunferencia frontera del Disco de Poincaré representa al infinito e indica que "podemos presenciar el infinito". Asimismo, en la última respuesta de este participante resalta nuevamente el concepto de ejecutabilidad: "con los movimientos que hagas éste mismo te los trabaja de manera instantánea".

El estudio de caso de este participante exhibe información relevante. En primer lugar, se destaca la familiarización con el software de geometría dinámica y las tareas desarrolladas en el Disco de Poincaré; este alumno explota la ejecutabilidad del software y produce pruebas situadas. En segundo lugar, se considera que las exploraciones llevadas a cabo por Enrique lo condujeron a una concepción clara del Disco de Poincaré aceptando una reconceptualización de la estructura matemática del espacio físico (segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI, sección 2.1).

5.1.6. EL CASO DE RICARDO

En el análisis de las respuestas dadas por este participante se destacan algunas deficiencias conceptuales y dificultades al validar proposiciones geométricas. Por ejemplo, Ricardo basa la justificación del triángulo equilátero en su proceso de construcción (Pregunta 4, Cuestionario 1) (Ilustración 5.72). Afirma que “haciendo la construcción mediante los postulados” su comprobación es válida.

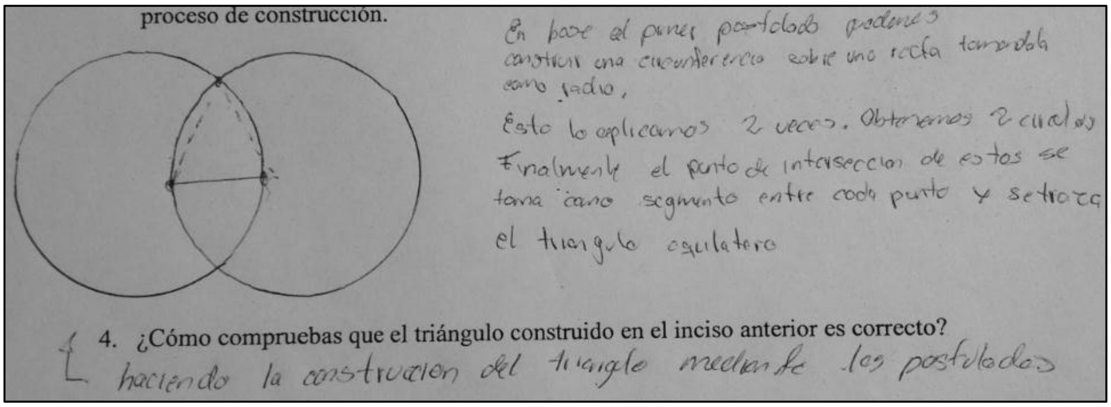
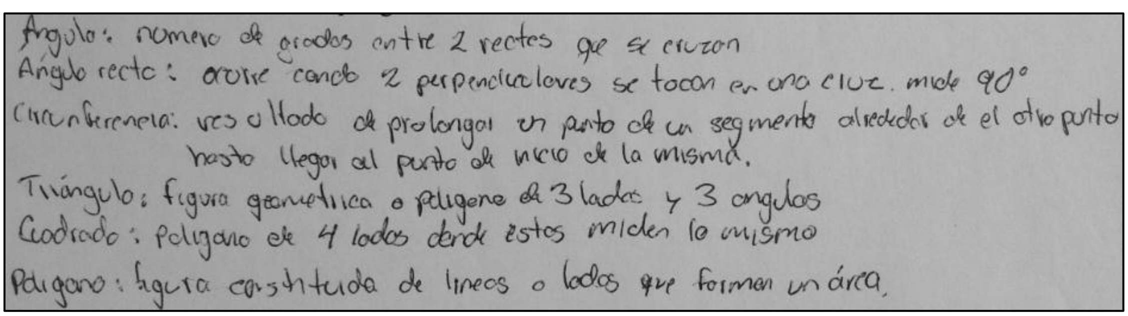


Ilustración 5.72. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 4, Cuestionario 1.

Respecto de su concepción sobre el concepto de circunferencia (Pregunta 1, Cuestionario 2), se interpreta que está cerca de dar una definición como el lugar geométrico (concepto que, de acuerdo con el plan de estudios de la institución indicada, aún no es conocido por los participantes): “resultado de prolongar un punto de un segmento alrededor de otro punto hasta llegar al punto de inicio de la misma”. Además, este alumno menciona el concepto de área al explicar lo que es una superficie: “figura constituida de líneas o lados que forman un área” (Ilustración 5.73).



Angulo: numero de grados entre 2 rectas que se cruzan
Angulo recto: ocurre cuando 2 perpendiculares se tocan en una cruz. mide 90°
Circunferencia: resultado de prolongar un punto de un segmento alrededor de el otro punto hasta llegar al punto de inicio de la misma.
Triángulo: figura geometrica o poligono de 3 lados y 3 angulos
Cuadrado: Poligono de 4 lados donde estos miden lo mismo
Poligono: figura constituida de lineas o lados que forman un área.

Ilustración 5.73. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 1, Cuestionario 2.

Ricardo intenta validar las proposiciones geométricas con base en ejercicios particulares. Esta situación se presenta en dos ocasiones en el Cuestionario 3. En particular, en la Ilustración 5.74 se muestra evidencia sobre su intento de demostración de la proposición 15 (Pregunta 2.1, Cuestionario 3), justificándola a partir “del ejercicio anterior”.

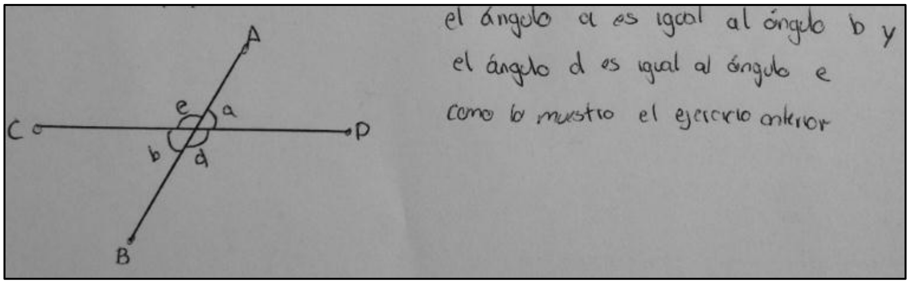


Ilustración 5.74. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 2.1, Cuestionario 3.

En el intento de demostración de la proposición 29 (Pregunta 3.1, Cuestionario 4), Ricardo se esfuerza por validarla mostrando un intento basado en notación simbólica (Ilustración 5.75). Sin embargo, su justificación no es clara.

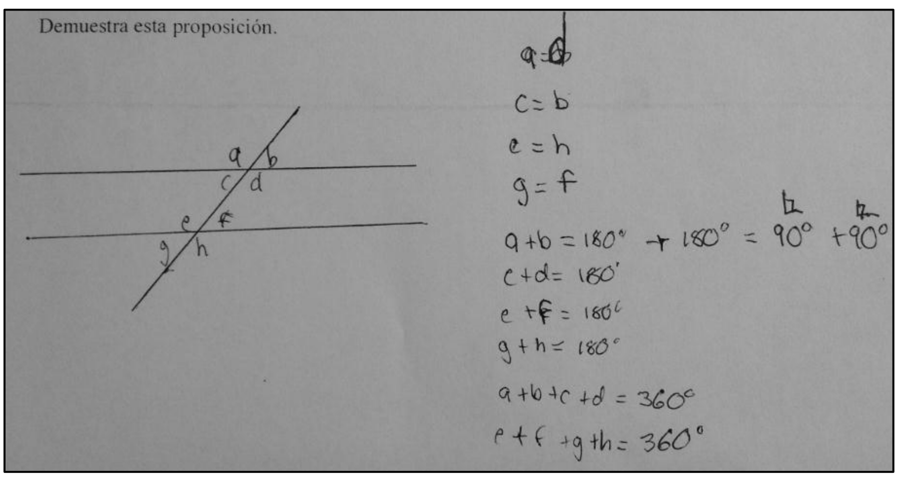


Ilustración 5.75. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 3.1, Cuestionario 4.

En la segunda parte del Cuestionario 6, Ricardo acepta que no tuvo dificultades al usar el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Esta reacción se muestra en sus intentos de construcción en el modelo. Aunque no lleva a cabo las construcciones propiciamente, sus procesos son interesantes y se considera importante evidenciar dos de ellos. En el caso del triángulo equilátero hiperbólico (Pregunta 1, Cuestionario 6), coloca seis puntos cerca de la circunferencia frontera del Disco de Poincaré. A partir de ellos, traza dos triángulos y concluye que estos son equiláteros (Ilustración 5.76 e Ilustración 5.77). Este ensayo conduce a un triángulo ideal en el modelo con ángulos cuyas medidas son 0°.

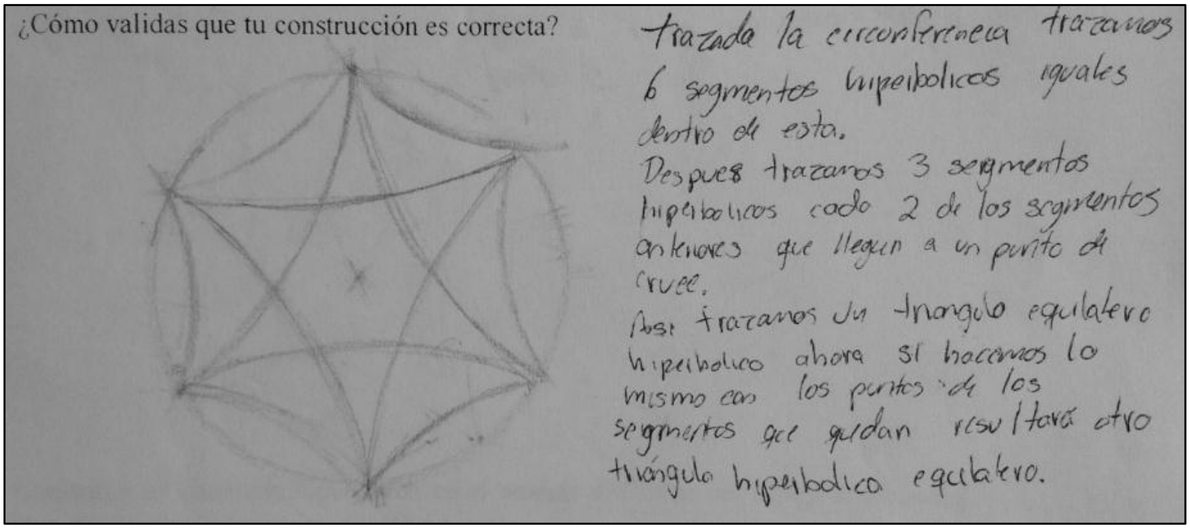


Ilustración 5.76. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 1, Cuestionario 6.

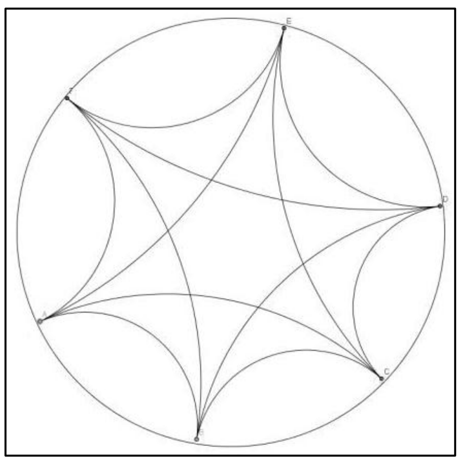


Ilustración 5.77. Construcción de dos triángulos hiperbólicos de Ricardo.

La construcción del cuadrado de Ricardo con regla y compás en la hoja de trabajo (Pregunta 3, Cuestionario 3) es adecuada pues usa el concepto de perpendicular indicando que "Siendo AB la recta dada, girarla hasta formar un ángulo recto […]" (Ilustración 5.78). Sin embargo, en la construcción en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 4, Cuestionario 6), no toma en cuenta el procedimiento desarrollado con regla y compás, sino que lleva a cabo una construcción similar a la del triángulo equilátero en el modelo pues coloca puntos arbitrariamente: "tomar medidas de los ángulos y mover los puntos hasta obtener 90° en cada uno de los ángulos” (Ilustración 5.79). En esta respuesta también se destaca el concepto de ejecutabilidad (Capítulo 2).

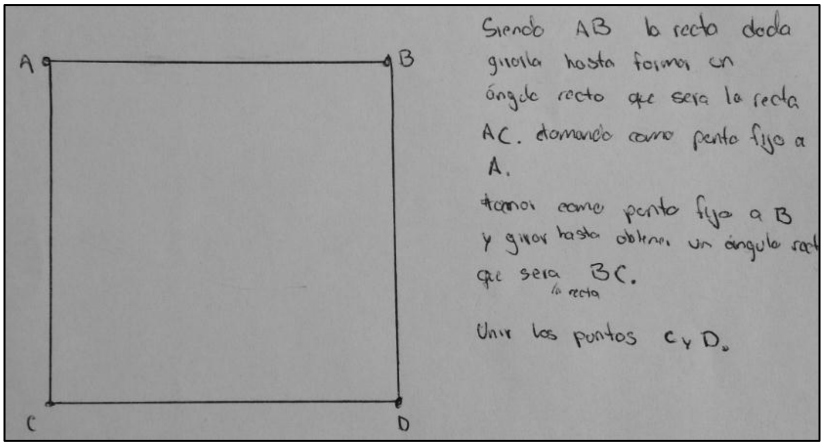


Ilustración 5.78. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 3, Cuestionario 3.

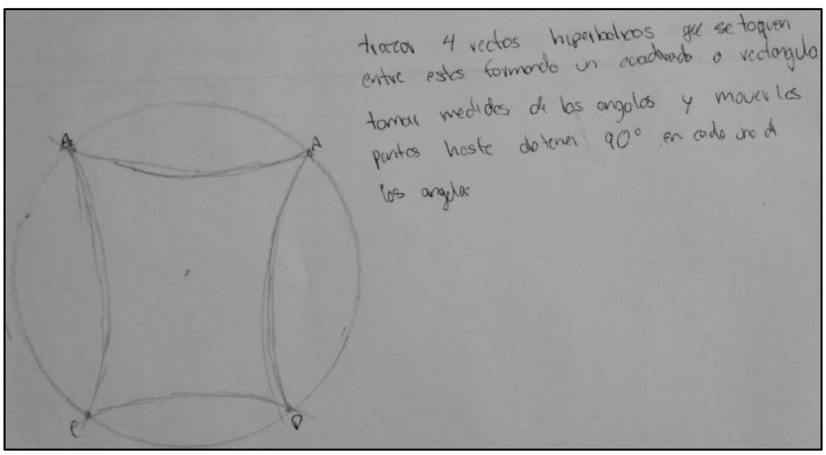


Ilustración 5.79. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 4, Cuestionario 6.

En la interacción con este participante durante el desarrollo de esta actividad acepta que sus construcciones son inadecuadas. En relación con el teorema de Pitágoras (Pregunta 5, Cuestionario 7), Ricardo asegura que en este modelo es válido este teorema argumentando que: “es posible trazar un triángulo rectángulo y a partir de las medidas hiperbólicas de éste sacar todos los catetos y la hipotenusa” (Ilustración 5.80).

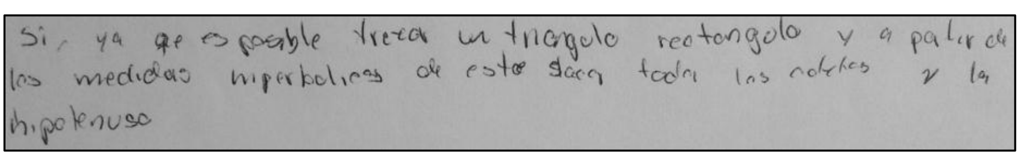


Ilustración 5.80. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 5, Cuestionario 7.

Sin embargo, después de la sesión plenaria llevada a cabo después del Cuestionario 7, este participante admite que el teorema de Pitágoras no es válido en el Disco de Poincaré (Pregunta 6, Cuestionario 8) porque: "Pitágoras en la geometría euclidiana [*sic*] puede formar cuadrados en cada segmento del triángulo [*rectángulo*], mientras que en la geometría hiperbólica no es posible formar cuadrados en los segmentos del triángulo [*rectángulo*]" (Ilustración 5.81). En esta respuesta sobresale una descripción gráfica como apoyo a este argumento.

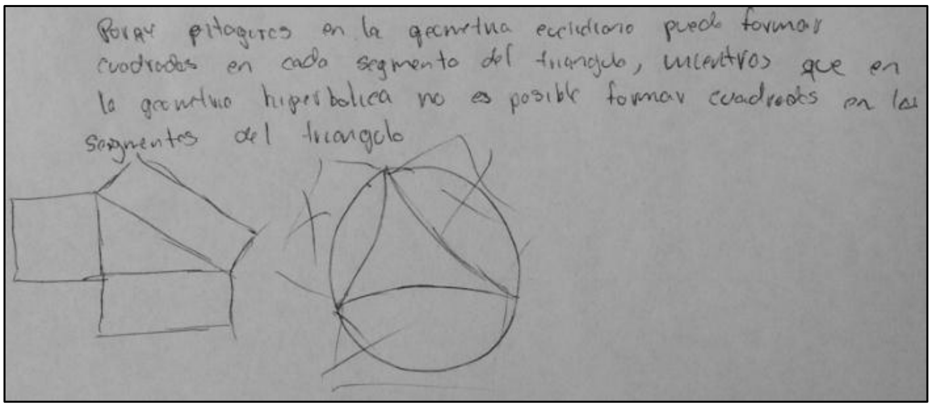


Ilustración 5.81. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 6, Cuestionario 8.

Además, este participante muestra un cambio importante en su concepción sobre el término de paralelas (Pregunta 8, Cuestionario 8), pues señala que antes de las exploraciones en el modelo su definición de paralelas era: "2 líneas o rectas que nunca se juntan [*sic*]". Sin embargo, refiere que "después de estudiar el modelo dinámico de Poincaré [*sic*] entendí que es posible que [*se*] junten de nuevo pero en el infinito" (Ilustración 5.82).

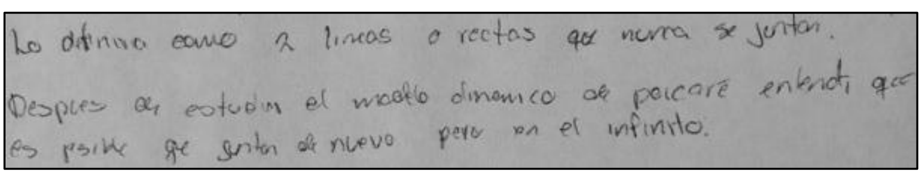
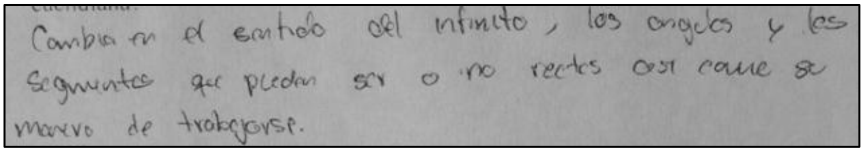

Lo definia como 2 lineas o rectas que nunca se juntan.
Despues de estudiar el modelo dinamico de poicare entendi que
es posible que junten de nuevo pero en el infinito.

Ilustración 5.82. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 8, Cuestionario 8.

De manera similar, este participante acepta un cambio en relación con los objetos geométricos (Pregunta 10, Cuestionario 8), pues señala que "Cambia en el sentido del infinito, los ángulos y los segmentos que pueden ser o no rectos así como su manera de trabajarse" (Ilustración 5.83).



Cambia en el sentido del infinito, los ángulos y los segmentos que pueden ser o no rectos así como su manera de trabajarse.

Ilustración 5.83. Respuesta de Ricardo a la Pregunta 10, Cuestionario 8.

En la entrevista aplicada después de la implementación del Instrumento, este participante reafirma el cambio de concepción sobre los objetos geométricos:

Investigador: Ricardo, en general, ¿qué opinas de la geometría no euclidiana?

Ricardo: Pues es bastante distinta a la geometría euclidiana en cuanto a lo que es la percepción de los lados y los ángulos y de las mismas figuras

Investigador: ¿Qué cambia en particular de lo que conocías ya de la geometría euclidiana con un modelo de geometría hiperbólica?

Ricardo: Pues cambió mucho mi percepción de las figuras puesto que al construir, no sé, un triángulo o un cuadrado, podemos construirlo de diferentes maneras y, sin embargo, va a seguir siendo un triángulo y un cuadrado. ¿Por qué? Porque su definición es la misma: tiene ángulos iguales y lados iguales.

En este análisis se muestra que las exploraciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré guiaron a este participante para desarrollar intuiciones; en particular, concebir la equivalencia entre las definiciones de triángulo equilátero y cuadrado en ambas geometrías así como el cambio en su concepción sobre paralelas.

5.1.7. El caso de Andrés

Este participante muestra un entendimiento adecuado de la geometría euclidiana. Dado que las respuestas más representativas de este alumno giran en torno a las impresiones después de haber llevado a cabo las exploraciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré, el análisis se concentra en este aspecto. En particular, Andrés detecta la equivalencia entre las construcciones en ambos modelos señalando que: "las construcciones son iguales porque son procesos que no cambian en la geometría […] sólo hay que deformar" (Pregunta 3, Cuestionario 7) (Ilustración 5.84).

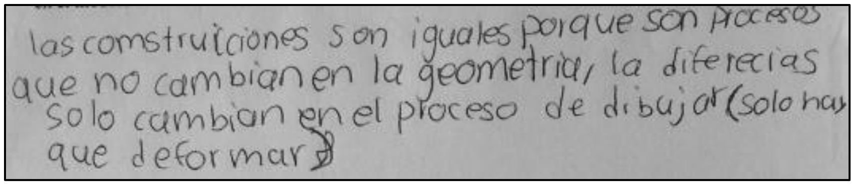

las comstruiciones son iguales porque son procesos que no cambian en la geometria, la diferecias solo cambian en el proceso de dibujar (solo hay que deformar)

Ilustración 5.84. Respuesta de Andrés a la Pregunta 3, Cuestionario 7.

Respecto de la posible validez del teorema de Pitágoras en el modelo (Pregunta 5, Cuestionario 7), Andrés lleva a cabo este razonamiento: “el teorema de Pitágoras dice que el triángulo rectángulo se obtiene con $c^2 = b^2 + a^2$ [*se interpreta que ‘cumple’*]. Sí se puede obtener debido [a] que sí puede haber triángulos rectángulos” (Ilustración 5.85).

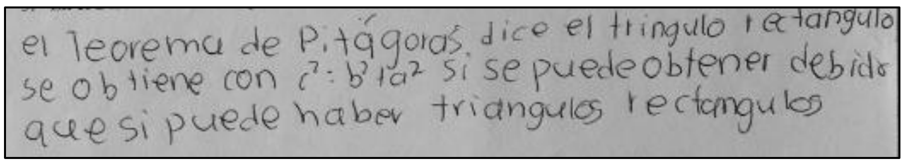

el Teorema de Pitágoras dice el tringulo rectangulo se obtiene con $c^2 : b^2 + a^2$ si se puede obtener debido que si puede haber triangulos rectangulos

Ilustración 5.85. Respuesta de Andrés a la Pregunta 5, Cuestionario 7.

Sin embargo, después de haber llevado a cabo la exploración del triángulo rectángulo en la sesión plenaria, este alumno indica que el teorema de Pitágoras no se cumple en el Disco de Poincaré (Pregunta 6, Cuestionario 8), pero su justificación no es clara (Ilustración 5.86).

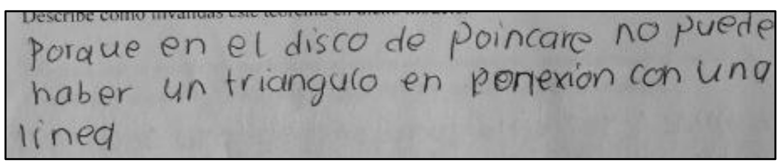

porque en el disco de Poincare no puede haber un triangulo en conexión con una linea

Ilustración 5.86. Respuesta de Andrés a la Pregunta 6, Cuestionario 8.

En relación con las complicaciones al haber usado el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Pregunta 2, Cuestionario 6, segunda parte), este participante manifestó que: “Es curioso ya que no comprendía lo que eran lados en el Disco de Poincaré pero poco a poco fui entendiendo” (Ilustración 5.87). Aquí se destaca una reconceptualización del espacio físico, es decir, la segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI.

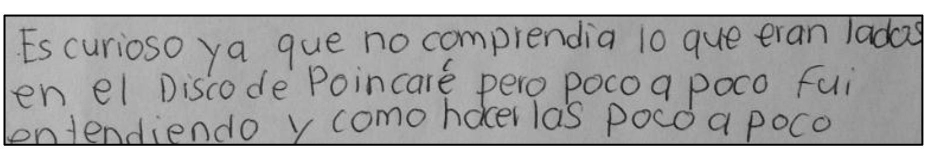

Es curioso ya que no comprendia lo que eran lados en el Disco de Poincaré pero poco a poco fui entendiendo y como hacer las poco a poco

Ilustración 5.87. Respuesta de Andrés a la Pregunta 2, Cuestionario 6, segunda parte.

Este participante reconoce que hay varios cambios en su concepción sobre objetos geométricos después de haber explorado una geometría no euclidiana (Pregunta 10, Cuestionario 8): "pueden cambiar muchas cosas ya que no lo ves de manera inmediata, ya que tenías conceptos de la geometría euclidiana, pero después de ver la no euclidiana te das cuenta de que puede haber variantes" (Ilustración 5.88).

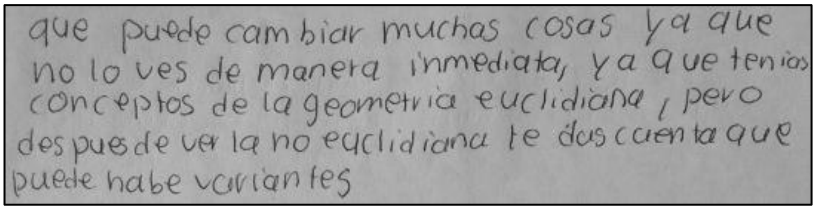

que puede cambiar muchas cosas ya que no lo ves de manera inmediata, ya que tenias conceptos de la geometria euclidiana, pero despues de ver la no euclidiana te das cuenta que puede habe variantes

Ilustración 5.88. Respuesta de Andrés a la Pregunta 10, Cuestionario 8.

Como resultado, da una respuesta interesante sobre el concepto de paralela (Pregunta 8, Cuestionario 8): "es una línea que toca en todos sus puntos o en ninguno a una línea" (Ilustración 5.89).

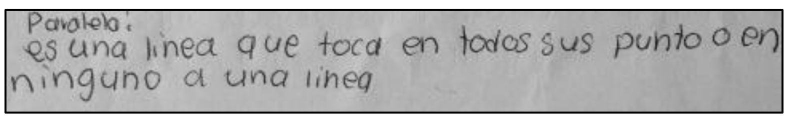

Paralela:
es una linea que toca en todos sus punto o en ninguno a una linea

Ilustración 5.89. Respuesta de Andrés a la Pregunta 8, Cuestionario 8.

Este participante destaca la propiedad de visualización del software de geometría dinámica (Pregunta 7, Cuestionario 7) indicando poder "apreciar con mejor visualización los procedimientos y las formas" (Ilustración 5.90).

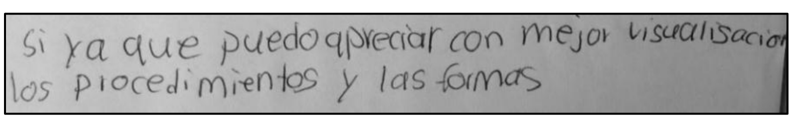

si ya que puedo apreciar con mejor visualisacion los procedimientos y las formas

Ilustración 5.90. Respuesta de Andrés a la Pregunta 7, Cuestionario 7.

Andrés admitió haber tenido agrado por las actividades realizadas sobre el Disco de Poincaré (Pregunta 9, Cuestionario 7) afirmando que "es una idea que nunca había visto [*la geometría hiperbólica*], es como si fuera de otro mundo" (Ilustración 5.91).

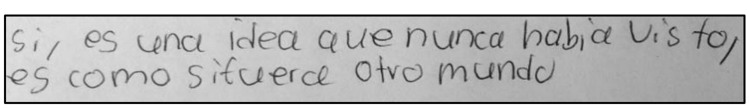

si, es una idea que nunca habia visto, es como si fuera otro mundo

Ilustración 5.91. Respuesta de Andrés a la Pregunta 9, Cuestionario 7.

Este análisis de caso muestra un cambio en las concepciones geométricas de este participante pues las exploraciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré lo guiaron a desarrollar nuevas intuiciones; en particular, la definición dada sobre el concepto de paralela (Ilustración 5.89).

5.1.8. El caso de Nereo

Este participante desarrolló convenientemente las tareas indicadas y en la entrevista indicó que tenía una idea sobre las geometrías no euclidianas; este análisis se enfoca en los mecanismos de validación usados y en sus impresiones sobre las actividades desarrolladas. Respecto de la construcción con regla y compás del triángulo equilátero en la hoja de trabajo, este alumno llevó a cabo una construcción correcta y una validación adecuada (Preguntas 3 y 4, Cuestionario 1), aunque prescinde de una notación simbólica y la desarrolla verbalmente (Ilustración 5.92 e Ilustración 5.93).

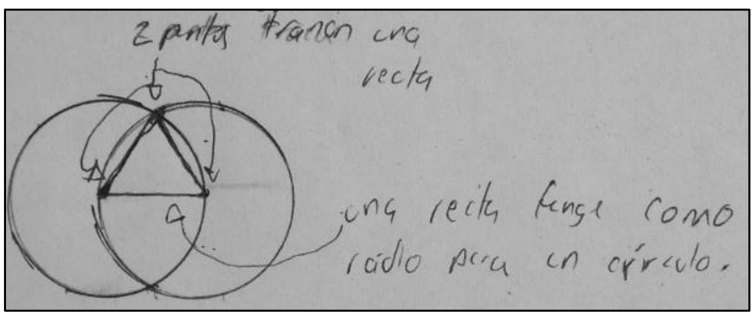


Ilustración 5.92. Respuesta de Nereo a la Pregunta 3, Cuestionario 1.

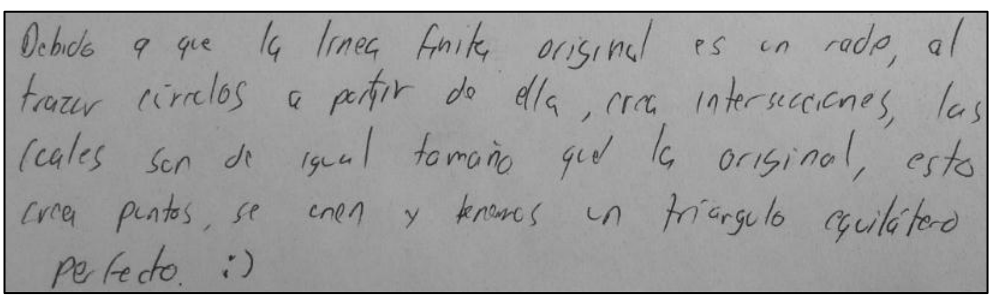

Debido a que la linea finita original es un radio, al trazar circulos a partir de ella, crea intersecciones, las cuales son de igual tamaño que la original, esto crea puntos, se unen y tenemos un triangulo equilatero perfecto. :)

Ilustración 5.93. Respuesta de Nereo a la Pregunta 4, Cuestionario 1.

En la construcción del cuadrado (Pregunta 3, Cuestionario 3), Nereo describe su proceso de solución de la siguiente manera: “Se traza la perpendicular proporcionada por la proposición 12. Se trazan varios círculos y donde se intersectan se forma un cuadrado, se unen puntos y ya” (Ilustración 5.94).

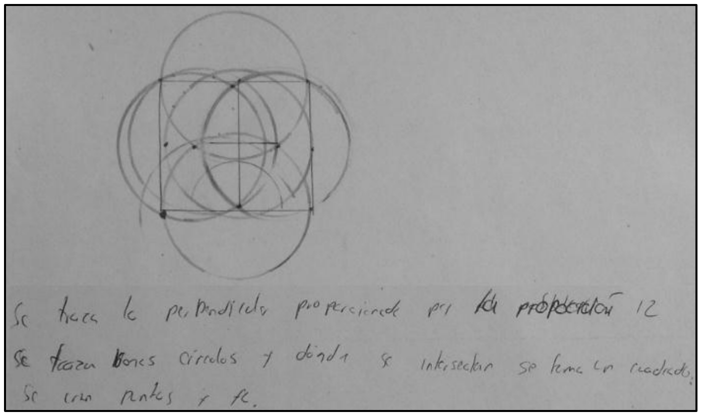


Ilustración 5.94. Respuesta de Nereo a la Pregunta 3, Cuestionario 3.

En la Pregunta 2 del cuestionario 4, este participante detecta que es necesaria más información para poder demostrar la proposición 32 desde que la 16 es enunciada, menciona que: “[…] se necesita conocimiento previo a la proposición 32 que no está en la 16. Al momento no era posible hablar de ello” (Ilustración 5.95).

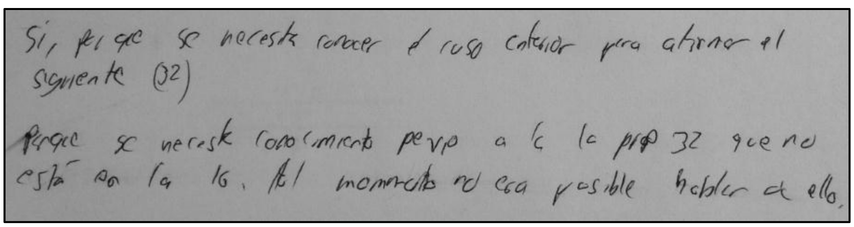


Ilustración 5.95. Respuesta de Nereo a la Pregunta 2, Cuestionario 4.

La concepción que este alumno tiene sobre las geometrías no euclidianas (Pregunta 4, Cuestionario 5) es destacable respecto de los demás participantes. Indica que “es una teoría aparte (como la hiperbólica que nos lleva a la teoría de la relatividad)”. En esta teoría es donde Nereo afirma que existen aplicaciones de las geometrías no euclidianas (Ilustración 5.96).

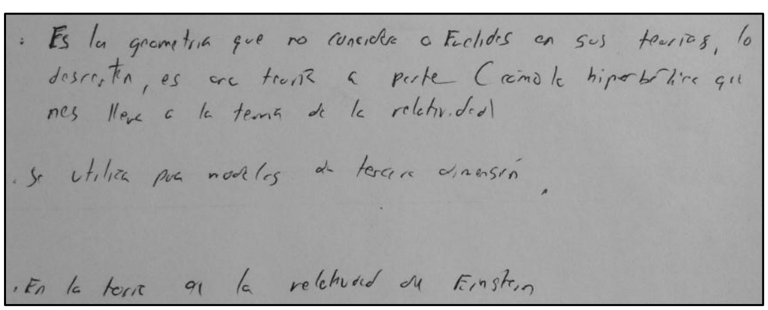


Ilustración 5.96. Respuesta de Nereo a la Pregunta 4, Cuestionario 5.

Para dar cuenta sobre las respuestas del párrafo anterior, se llevó a cabo una entrevista con el estudiante después de la aplicación del Instrumento. En seguida, se recupera un fragmento de ésta:

Investigador: Nereo, ¿cómo supiste que en la teoría de la relatividad de Einstein era posible encontrar aplicaciones de la geometría no euclidiana?

Nereo: Bueno, es que toda la vida he admirado a Einstein y, pues hasta cierto punto, me considero algo así como su fanático […] Y, pues debido a eso, lo he investigado un poco. Y, además, alguna vez en un episodio de un documental llamado Universo Infinito lo mencionaron.

En relación con la equivalencia entre las construcciones del triángulo equilátero en ambas geometrías (Pregunta 1 del Cuestionario 7), este alumno señala que “en cuestiones de mecanización no hay ningún punto diferente, absolutamente todo es igual”. Indica que la única diferencia “es cuando las rectas no son ‘rectas’ a la vista” (Ilustración 5.97).

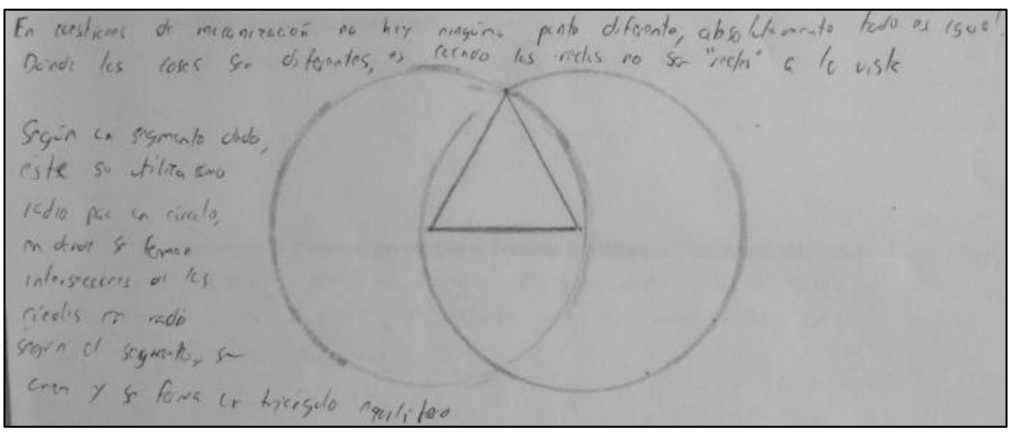
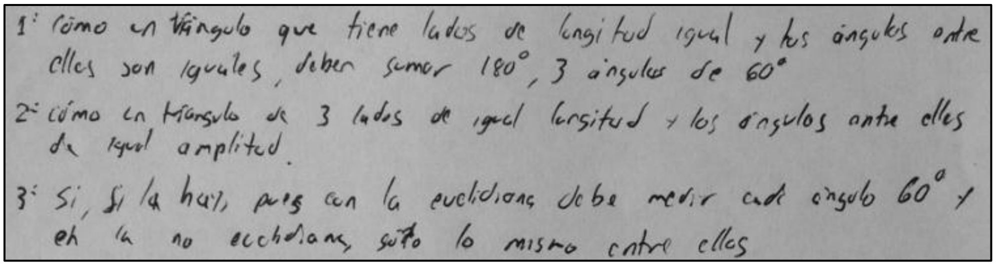


Ilustración 5.97. Respuesta de Nereo a la Pregunta 1, Cuestionario 7.

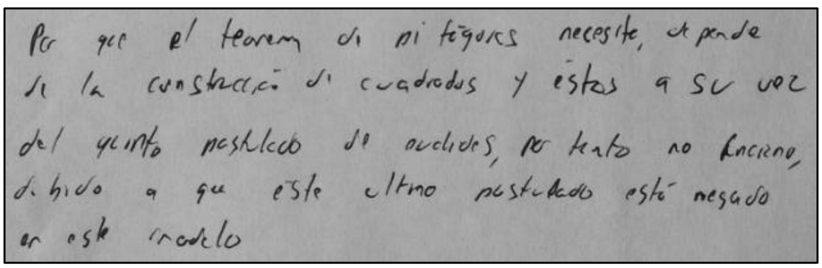
De este modo, Nereo destaca que la diferencia entre las defunciones de triángulo equilátero en ambas geometrías (Pregunta 1, Cuestionario 8) es que “[*en*] la euclidiana debe medir cada ángulo 60° y en la no euclidiana sólo lo mismo entre ellos” (Ilustración 5.98).



1: cómo un triángulo que tiene lados de longitud igual y los ángulos entre ellos son iguales, deben sumar 180°, 3 ángulos de 60°
2: cómo un triángulo de 3 lados de igual longitud y los ángulos entre ellos de igual amplitud.
3: Si, si la hay, pues en la euclidiana debe medir cada ángulo 60° y en la no euclidiana, solo lo mismo entre ellos

Ilustración 5.98. Respuesta de Nereo a la Pregunta 1, Cuestionario 8.

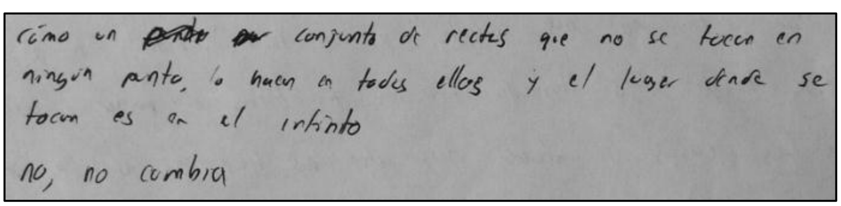
Este participante da argumentos similares en lo que respecta a triángulos rectángulos (Pregunta 4, Cuestionario 8). Sobresale su razonamiento relacionado con la invalidez del teorema de Pitágoras en el Disco de Poincaré: "[…] el teorema de Pitágoras necesita, depende, de la construcción de cuadrados y estos a su vez del quinto postulado de Euclides, por tanto no funciona, debido a que este último postulado está negado en este modelo" (Ilustración 5.99).



Por que el teorema de pitágoras necesita, depende de la construcción de cuadrados y estos a su vez del quinto postulado de euclides, por tanto no funciona, debido a que este último postulado está negado en este modelo

Ilustración 5.99. Respuesta de Nereo a la Pregunta 4, Cuestionario 8.

Su definición del concepto de paralelas también es interesante (Pregunta 8, Cuestionario 8), pues indica que su concepción "no cambia" definiéndolas como: "[…] conjunto de rectas que no se tocan en ningún punto, lo hacen en todos ellos y el lugar donde se tocan es en el infinito" (Ilustración 5.100).



cómo un ~~punto~~ ~~en~~ conjunto de rectas que no se tocan en ningún punto, lo hacen en todos ellos y el lugar donde se tocan es en el infinito
no, no cambia

Ilustración 5.100. Respuesta de Nereo a la Pregunta 8, Cuestionario 8.

Es importante evidenciar la respuesta de Nereo sobre el posible cambio en la concepción de los objetos geométricos después de haber explorado una geometría no euclidiana (Pregunta 10, Cuestionario 8), pues este alumno refiere que "Realmente no cambia, lo único diferente es que ahora sé que existen otros modelos, esto debido a que nuestro mundo es euclidiano y no puedo ver la no euclidiana en mi realidad más próxima" (Ilustración 5.101).

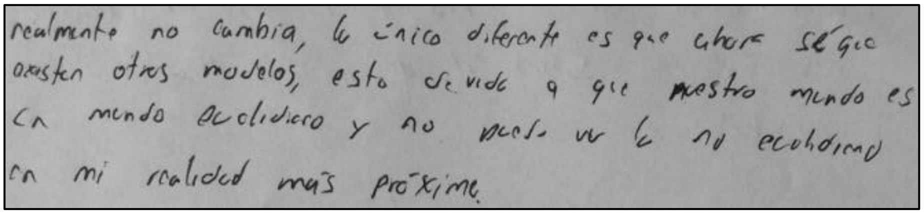

realmente no cambia, lo único diferente es que ahora sé que existen otros modelos, esto se debe a que nuestro mundo es un mundo euclidiano y no puedo ver la no euclidiana en mi realidad más próxima

Ilustración 5.101. Respuesta de Nereo a la Pregunta 10, Cuestionario 8.

En cuanto a sus impresiones finales sobre el uso de GeoGebra (Preguntas 7 y 8, Cuestionario 7), este alumno muestra agrado y destaca algunas ventajas del software. Refiere que el uso de la geometría dinámica es "divertido, práctico, entretenido e interesante" (Ilustración 5.102 e Ilustración 5.103). Además, este participante que el software de geometría dinámica "es de vital importancia […] pues el Disco de Poincaré no es factible en la realidad" (Pregunta 12, Cuestionario 8) (Ilustración 5.104).

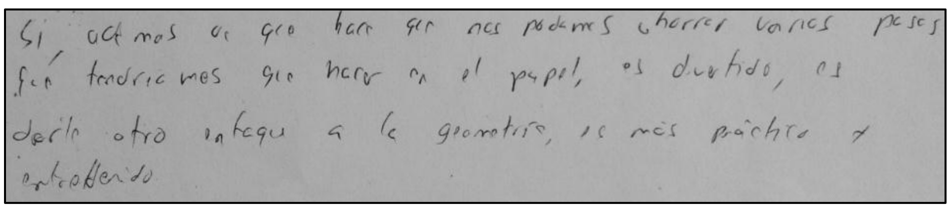

Si usamos geogebra nos podemos ahorrar varios pasos que tendríamos que hacer en el papel, es divertido, es decir otro enfoque a la geometría, es más práctico y entretenido

Ilustración 5.102. Respuesta de Nereo a la Pregunta 7, Cuestionario 7.

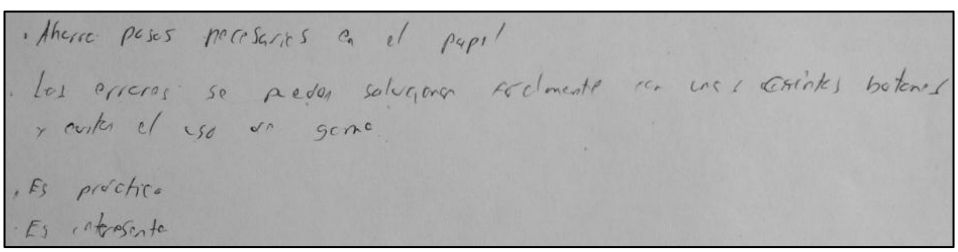

· Ahorra pasos necesarios en el papel
· Los errores se pueden solucionar fácilmente con unos cuantos botones y evita el uso de goma
· Es práctico
· Es interesante

Ilustración 5.103. Respuesta de Nereo a la Pregunta 8, Cuestionario 7.

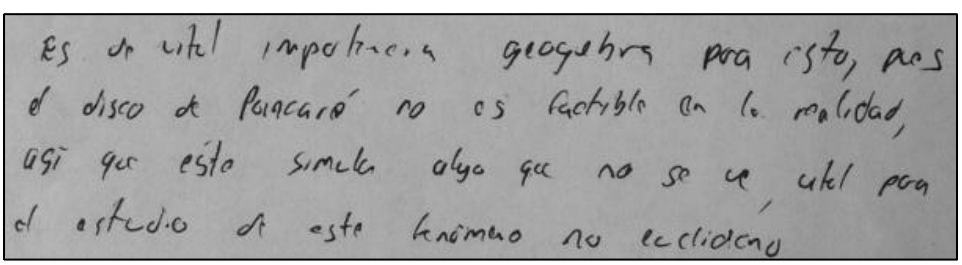

Es de vital importancia geogebra para esto, pues el disco de Poincaré no es factible en la realidad, así que esto simula algo que no se ve, útil para el estudio de este fenómeno no euclidiano

Ilustración 5.104. Respuesta de Nereo a la Pregunta 12, Cuestionario 8.

Este participante mostró un gran entusiasmo por las tareas desarrolladas, pues al responder si había sido de su agrado haber abordado temas de geometría no euclidiana (Pregunta 9, Cuestionario 7) menciona que "¡es fantástica! Es algo descomunal, muy interesante, algo que no se ve en este plano dimensional, es algo magnífico, merece, creo yo, incluso más atención que la geometría euclidiana" (Ilustración 5.105).

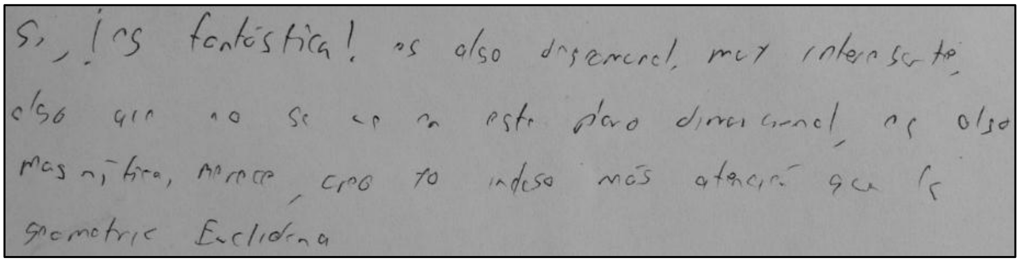

Si, ¡es fantástica! es algo descomunal, muy interesante, algo que no se ve en este plano dimensional, es algo magnífico, merece, creo yo, incluso más atención que la geometría Euclidiana

Ilustración 5.105. Respuesta de Nereo a la Pregunta 9, Cuestionario 7.

De acuerdo con el análisis del trabajo de este alumno, se destacan resultados importantes sobre sus impresiones del modelo dinámico del Disco de Poincaré. Se considera que haber tenido una idea sobre las geometrías no euclidianas antes de haber llevado a cabo las actividades, propició que el alumno tuviera un mejor desempeño en éstas; es probable que su concepción adecuada sobre objetos geométricos también haya favorecido el cumplimiento de las tareas de este participante. Se considera, sin embargo, que sus mecanismos de validación serían beneficiados con el uso de una notación simbólica, en el sentido de traducir sus procedimientos verbales a esta notación. Esta transición sería de utilidad cuando este, y los demás estudiantes, se enfrenten con demostraciones más demandantes. Se destaca que para este participante es clara la importancia de la visualización "[*en el Disco de Poincaré*] las rectas no son 'rectas' a la vista"; no obstante, su adaptación con las tareas fue evidente de modo que resaltan las rupturas epistemológicas descritas en la sección 2.1.

5.1.9. EL CASO DE MALINALI

Malinali fue una participante interesada en el desarrollo de las actividades, principalmente en uso del software. No mostró dificultades en sus procesos de construcción en papel y lápiz y sus mecanismos de validación son apropiados. Por ejemplo, cuando se enfrenta con la validez de la proposición 12 (Pregunta 1, Cuestionario 3), esta participante traduce simbólicamente la proposición en un bosquejo adecuado a partir del cual da su prueba; ésta la describe de la siguiente manera: "Si trazamos un círculo sobre una recta AB con un diámetro

EF tomando E como centro y de nuevo FE tomando F como centro la línea que se crea de punto a punto es una línea recta que atraviesa la recta dividiendo el triángulo equilátero, que se convierte en [*triángulo*] rectángulo que tiene un ángulo de 90° grados [*sic*] siendo entonces perpendicular" (Ilustración 5.106).

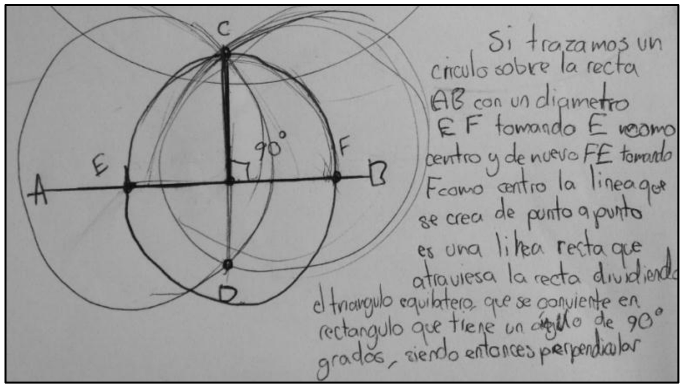


Ilustración 5.106. Respuesta de Malinali a la Pregunta 1, Cuestionario 3.

De manera similar, al validar la proposición 29 (Pregunta 3.1, Cuestionario 4) Malinali hace uso de las hipótesis, definiciones, un bosquejo y una notación adecuada (Ilustración 5.107).

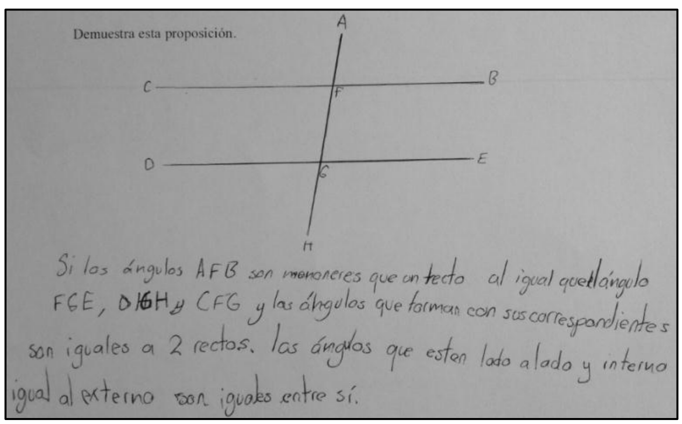


Ilustración 5.107. Respuesta de Malinali a la Pregunta 3.1, Cuestionario 4.

El bosquejo de la concepción previa de esta alumna sobre el Disco de Poincaré es interesante (Pregunta 3, Cuestionario 5), pues evidencia la comprensión sobre el término "ortogonal". Sin embargo, una falla en la interpretación de la "circunferencia frontera" la condujo a dibujar las figuras geométricas indicadas fuera de ella (Ilustración 5.108).

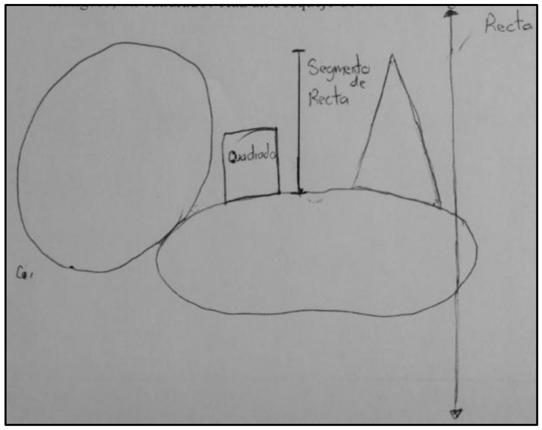


Ilustración 5.108. Respuesta de Malinali a la Pregunta 3, Cuestionario 5.

Asimismo, Malinali comprende que una geometría euclidiana es donde “no se maneja el quinto postulado” (Pregunta 4, Cuestionario 5), y se apoya en el dibujo de un balón de baloncesto para explicar este hecho (Ilustración 5.109).

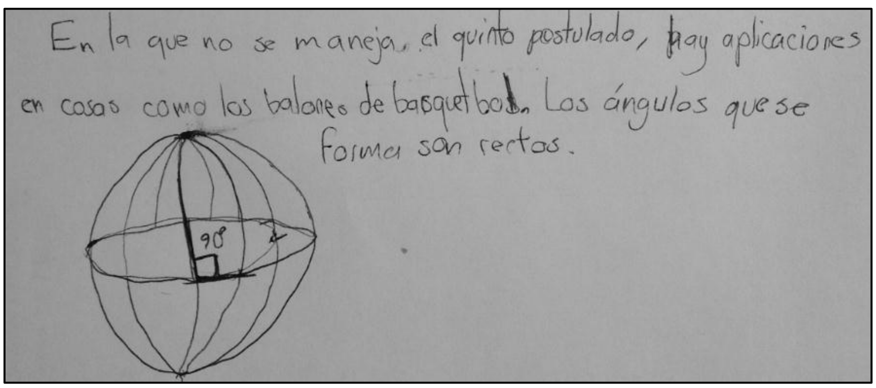


Ilustración 5.109. Respuesta de Malinali a la Pregunta 4, Cuestionario 5.

Malinali se mostró interesada en el uso del modelo dinámico del Disco de Poincaré y su familiarización con el software fue casi inmediata. En la entrevista llevada a cabo con esta participante que “en realidad nunca había trabajado con un software parecido, y me parece una estupenda herramienta”. Para la construcción del triángulo equilátero hiperbólico (Pregunta 1, Cuestionario 6), describe su proceso de construcción y lo valida usando la herramienta de medición hiperbólica del software: “medí los lados y los ángulos que eran iguales” (Ilustración 5.110 e Ilustración 5.111).

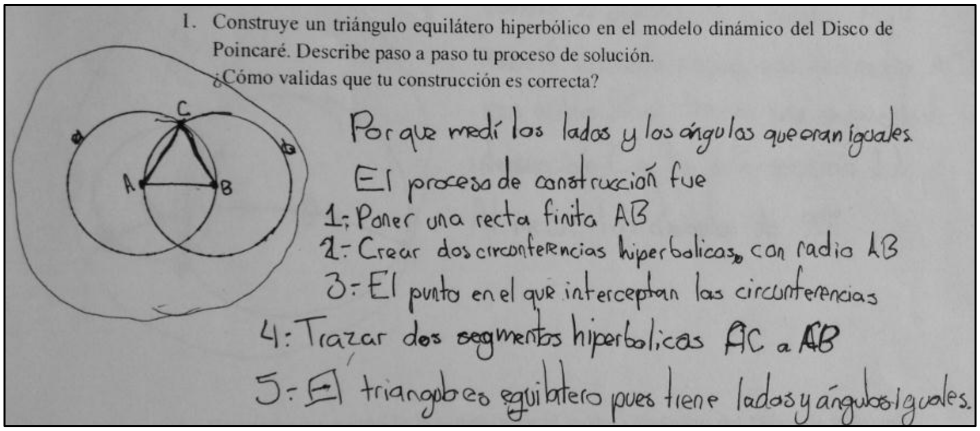


Ilustración 5.110. Respuesta de Malinali a la Pregunta 1, Cuestionario 6.

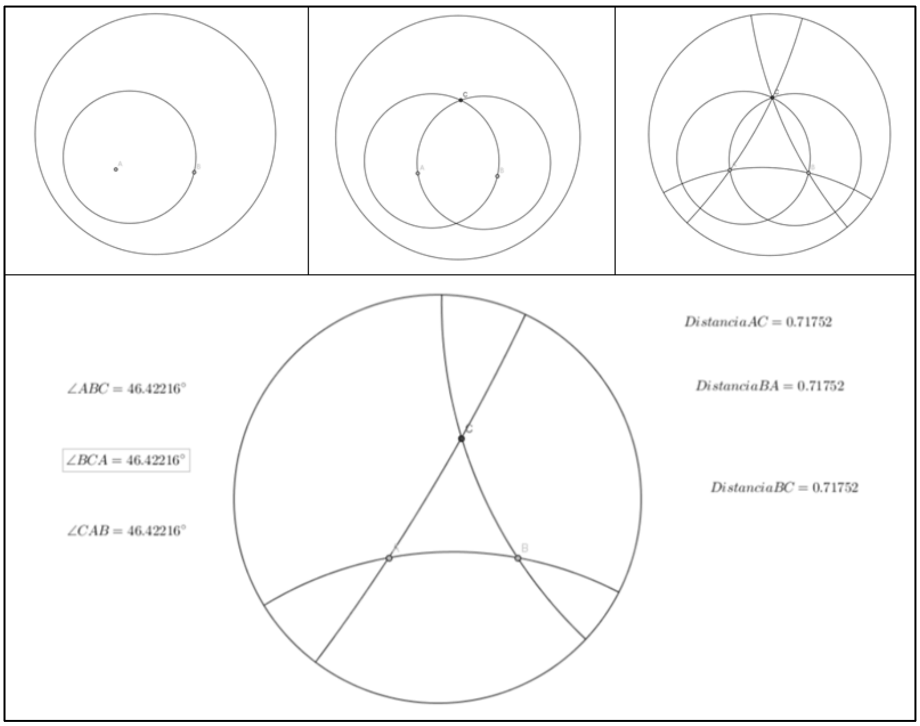


Ilustración 5.111. Proceso de construcción y validación de un triángulo equilátero en el Disco de Poincaré de Malinali.

De manera similar, esta participante construye correctamente la mediatriz hiperbólica de un segmento hiperbólico (Pregunta 2, Cuestionario 6), describe el proceso de construcción y la valida con las herramientas hiperbólicas incluidas en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Ilustración 5.112 e Ilustración 5.113). Esta participante identificó que las construcciones indicadas en el Disco de Poincaré eran equivalentes a las euclidianas.

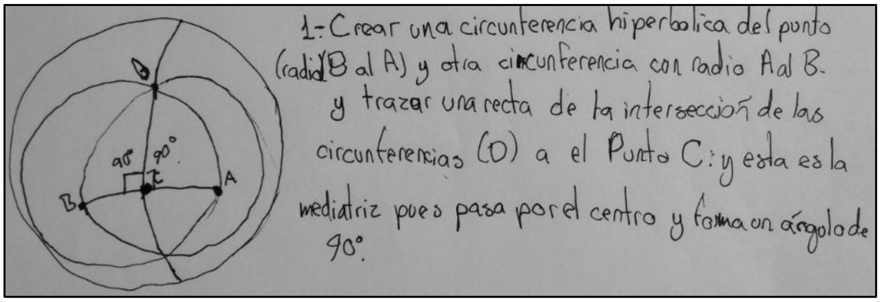


Ilustración 5.112. Respuesta de Malinali a la Pregunta 2, Cuestionario 6.

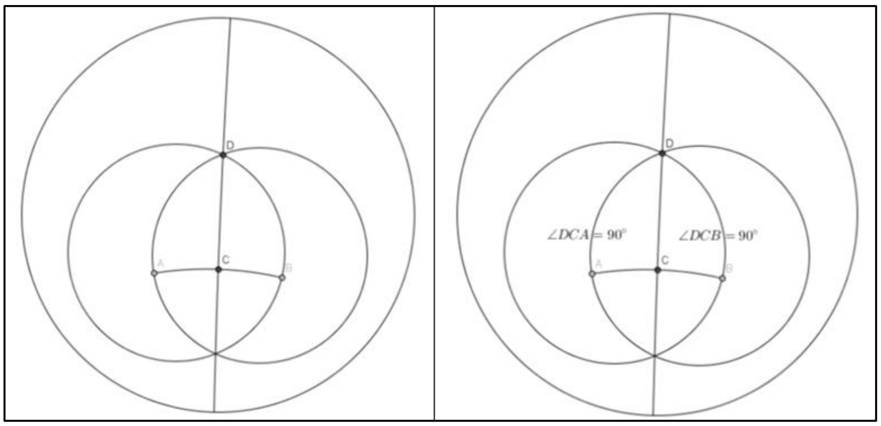


Ilustración 5.113. Construcción y validación de una mediatriz hiperbólica en el Disco de Poincaré de Malinali.

Respecto de sus impresiones al conocer un modelo de geometría no euclidiana (Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte), Malinali refiere que "fue una agradable sorpresa" (Ilustración 5.114). Asimismo, refiere que "me llamó la atención la parte de la representación física dentro de la circunferencia, la deformación de las figuras y que midieran aún lo mismo". Además, menciona que para llevar a cabo las construcciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré "se basó en los postulados de la geometría euclidiana".

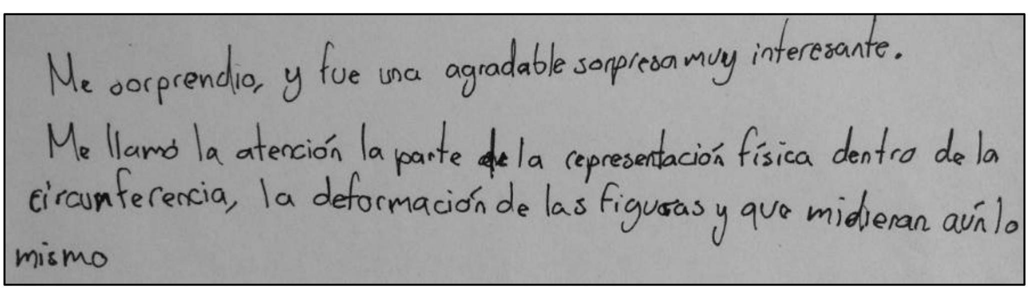

Me sorprendio, y fue una agradable sorpresa muy interesante.
Me llamó la atención la parte de la representación física dentro de la circunferencia, la deformación de las figuras y que midieran aún lo mismo

Ilustración 5.114. Respuesta de Malinali a la Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte.

En el Cuestionario 7, esta participante reitera que las construcciones con papel y lápiz y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré son equivalentes (Pregunta 4) (Ilustración 5.115).

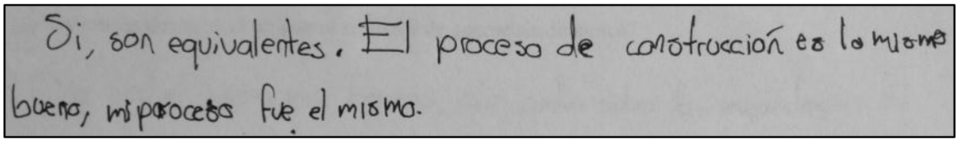

Si, son equivalentes. El proceso de construcción es lo mismo
bueno, mi proceso fue el mismo.

Ilustración 5.115. Respuesta de Malinali a la Pregunta 4, Cuestionario 7.

En la entrevista, la estudiante también fue cuestionada sobre su criterio para validar sus construcciones usando las herramientas de medida provistas por el software. A continuación se muestra un extracto de la entrevista:

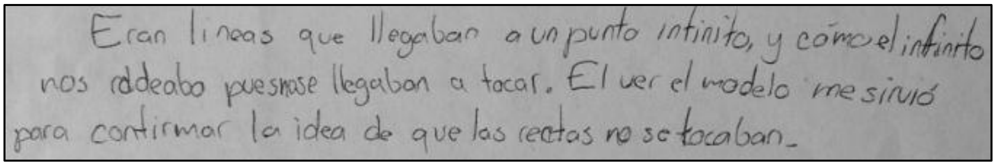
Investigador: […] respecto a la validación de las proposiciones en el Disco de Poincaré, ¿qué herramienta usas para probar, para tratar de demostrar, que son adecuadas, que son correctas?

Malinali: En la mayoría la medición de ángulos y de lados porque, pues, en el Disco de Poincaré nosotros vemos la representación y no podemos estar totalmente seguros de que tal lado mide lo mismo que el otro. Entonces las herramientas [*medición de ángulos y de lados*] son muy útiles para saber qué [*cuánto*] mide exactamente […]

Investigador: Y, ¿el uso de estas herramientas de medición son exclusivamente para comprobar o para validar que cierta proposición es correcta?

Malinali: […] estas herramientas nos ayudan a comprobar que es cierto y también en cierto modo a validarlo […] con esto podemos darnos cuenta de que es verdad lo que nosotros hicimos.

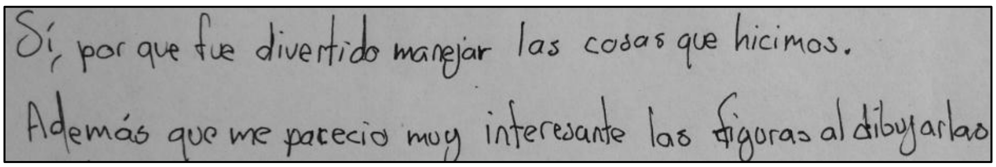
En relación con su concepción del término paralelas (Pregunta 8, Cuestionario 8), esta participante indica que las definía como "[…] líneas que llegaban a un punto infinito y como el infinito nos rodeaban pues no se llegaban a tocar". Añade que "El ver el modelo me sirvió para confirmar la idea de que las rectas no se tocaban" (Ilustración 5.116).



Eran lineas que llegaban a un punto infinito, y como el infinito nos rodeaba puesnose llegaban a tocar. El ver el modelo me sirvió para confirmar la idea de que las rectas no se tocaban.

Ilustración 5.116. Respuesta de Malinali a la Pregunta 8, Cuestionario 8.

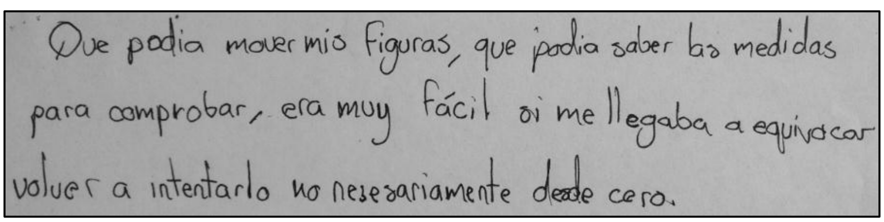
Malinali manifestó que fue de su agrado haber conocido temas de geometría no euclidiana: “fue divertido manejar las cosas que hicimos” (Pregunta 9, Cuestionario 7) (Ilustración 5.117).



Sí, por que fue divertido manejar las cosas que hicimos.
Además que me parecio muy interesante las figuras al dibujarlas

Ilustración 5.117. Respuesta de Malinali a la Pregunta 9, Cuestionario 7.

Como ventaja del uso del software de geometría dinámica (Pregunta 8, Cuestionario 7), esta alumna destaca la propiedad de ejecutabilidad, pues indica que “podía mover mis figuras, podía saber las medidas para comprobar, era muy fácil, si me llegaba a equivocar volver a intentarlo no necesariamente desde cero [*sic*]” (Ilustración 5.118).



Que podia mover mis figuras, que podia saber las medidas para comprobar, era muy fácil si me llegaba a equivocar volver a intentarlo no nesesariamente desde cero.

Ilustración 5.118. Respuesta de Malinali a la Pregunta 8, Cuestionario 7.

En la entrevista efectuada después de la aplicación del Instrumento, esta alumna acepta haber tenido agrado con las representaciones hiperbólicas:

Investigador: Malinali, ¿qué piensas sobre la geometría euclidiana y la no euclidiana? ¿Qué cambios encuentras [*entre éstas*]? ¿Ambas son funcionales? ¿Qué puedes decir sobre ellas dos?

Malinali: Me parecen muy interesantes. Para empezar la geometría euclidiana es con la que trabajamos normalmente entonces me parece bastante práctica y la podemos utilizar para aplicaciones en general […] me gustó mucho las representaciones [*sic*] porque podemos ver de una manera distinta lo mismo que manejamos nosotros pero en otro tipo de universo.

Investigador: ¿Y a qué te refieres con las representaciones del universo?

Malinali: Sí, bueno, en la geometría no euclidiana podemos manejar delimitaciones del universo mediante un círculo y en éste podemos ver qué sucede mediante la geometría euclidiana […]

En el análisis del estudio de caso de Malinali, es posible reconocer una casi inmediata familiarización con el software de geometría dinámica. Además, resalta la importancia de los sistemas de representación, tanto digitales como en papel y lápiz, y el uso de las herramientas de medición para validar las construcciones indicadas, en el sentido de pruebas situadas.

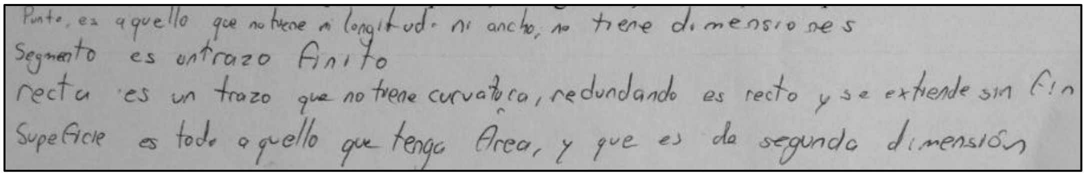
5.1.10. El caso de Byron

Byron fue el participante más sobresaliente de la población tomada en cuenta para esta investigación. Su edad es de 16 años; en la entrevista indicó que era la primera vez que tomaba el curso de Geometría y Trigonometría, además de haber aceptado no tener estudios en matemáticas más avanzados que sus compañeros. Se cree conveniente recuperar un fragmento de la entrevista llevada a cabo después de la aplicación del Instrumento antes de describir este caso de estudio.

Investigador: Byron, ¿toda la matemática que conoces la has aprendido en la escuela o has tomado algunos cursos adicionales?

Byron: Bueno, desde la primaria fui promovido a causa de que era bueno. Me entrenaron durante ciertos días horas extra después de clases. Desde ahí tomé cierto cariño por los números. Llegando a la secundaria, conté con un buen profesor que siguió promoviendo mi capacidad matemática y, desde entonces, llevo una habilidad en cuanto a los números.

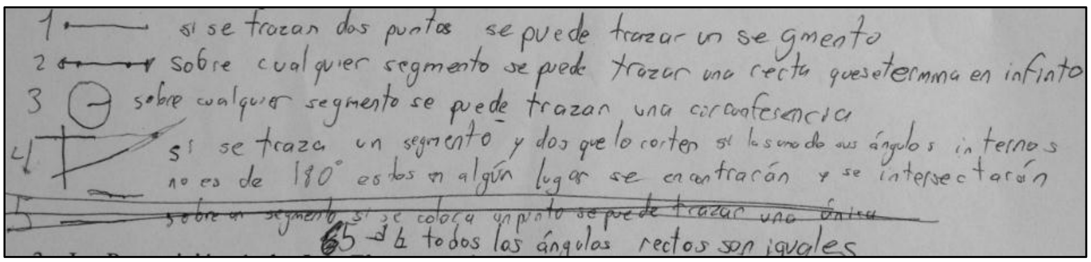
Cuando menciona sus concepciones referentes a lo que es un punto y una superficie (Pregunta 1, Cuestionario 1), involucra el término de "dimensión". Así, menciona que un punto "es aquello que no tiene longitud ni ancho, no tiene dimensiones" y que una superficie "es todo aquello que tenga área, y que es de segunda dimensión" (Ilustración 5.119).



Punto, es aquello que no tiene ni longitud ni ancho, no tiene dimensiones
Segmento es un trazo finito
recta es un trazo que no tiene curvatura, redundando es recto y se extiende sin fin
Supeficie es todo aquello que tenga área, y que es de segunda dimensión

Ilustración 5.119. Respuesta de Byron a la Pregunta 1, Cuestionario 1.

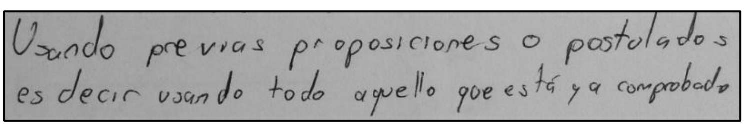
En relación con los cinco postulados de Euclides (Pregunta 2, Cuestionario 1), se apoya en representaciones gráficas. Incluye el término de infinito al enunciar el postulado 2: “sobre cualquier segmento se puede trazar una recta que termina en infinito” (Ilustración 5.120).



1 si se trazan dos puntos se puede trazar un segmento
2 sobre cualquier segmento se puede trazar una recta quesetermina en infinito
3 sobre cualquier segmento se puede trazar una circunferencia
4 si se traza un segmento y dos que lo corten si la suma de sus ángulos internos no es de 180° estos en algún lugar se encontrarán y se intersectarán
5 ~~sobre un segmento si se coloca un punto se puede trazar una única~~
5 todos los ángulos rectos son iguales

Ilustración 5.120. Respuesta de Byron a la Pregunta 2, Cuestionario 1.

Este participante comprende que la validez de una proposición geométrica (Pregunta 1, Cuestionario 4) se produce “usando previas proposiciones o postulados, es decir, usando todo aquello que está ya comprobado” (Ilustración 5.121).



Usando previas proposiciones o postulados
es decir usando todo aquello que está ya comprobado

Ilustración 5.121. Respuesta de Byron a la Pregunta 1, Cuestionario 4.

Cuando construye el triángulo equilátero (Pregunta 3, Cuestionario 1), incluye entre paréntesis los postulados que utiliza (Ilustración 5.122). Además, su validación es adecuada pues refiere que “cualquiera de los segmentos es un radio del círculo, los círculos son iguales, los radios son iguales” (Pregunta 4, Cuestionario 1) (Ilustración 5.123).

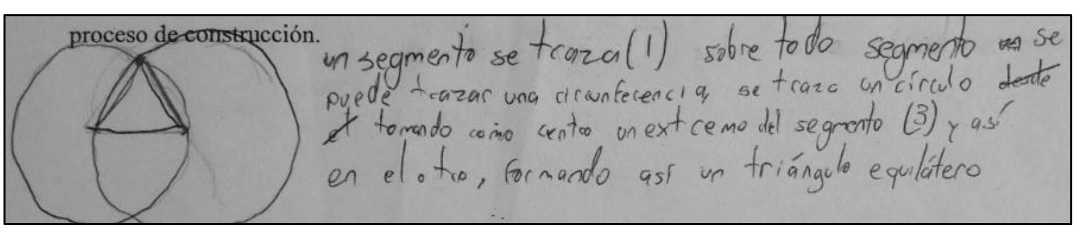


Ilustración 5.122. Respuesta de Byron a la Pregunta 3, Cuestionario 1.

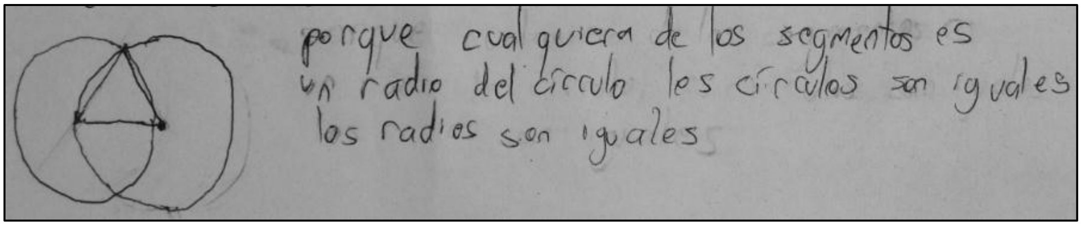


Ilustración 5.123. Respuesta de Byron a la Pregunta 4, Cuestionario 1.

La concepción que este alumno tiene sobre el término de circunferencia es destacable pues usa la noción de equidistancia, además, distingue los conceptos de circunferencia y círculo: “es una línea que rodea al círculo cuyos puntos son equidistantes al centro y estos puntos son infinitos” (Pregunta 1, Cuestionario 2) (Ilustración 5.124). Cabe mencionar que, al referir que “estos puntos son infinitos”, su visión sobre este objeto geométrico es analítica.

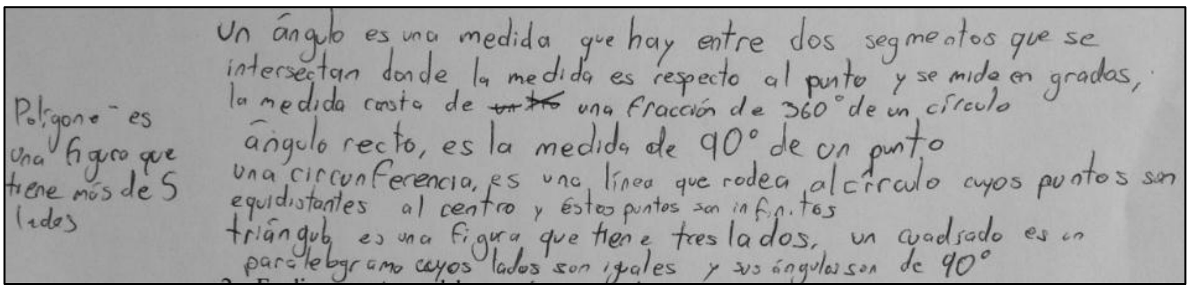


Ilustración 5.124. Respuesta de Byron a la Pregunta 1, Cuestionario 2.

Byron da argumentos apropiados para validar la proposición 12 (Pregunta 1, Cuestionario 3). Lleva a cabo un bosquejo y se apoya de una notación simbólica adecuada (Ilustración 5.125).

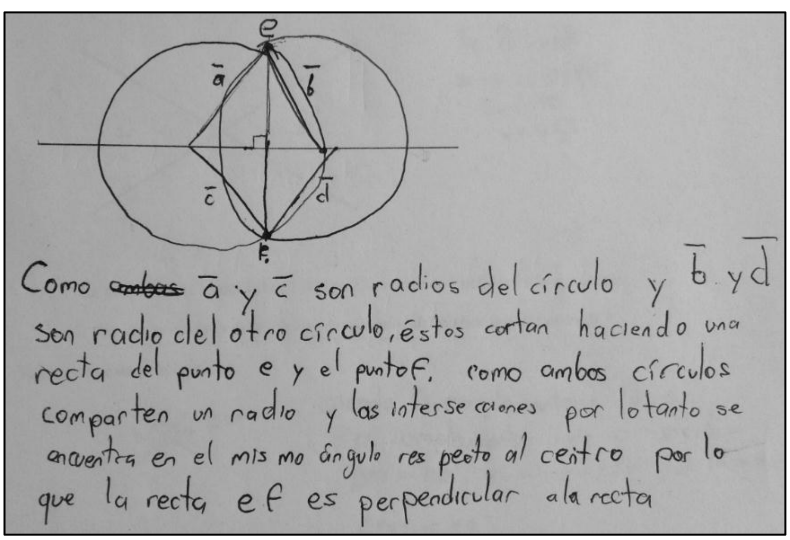
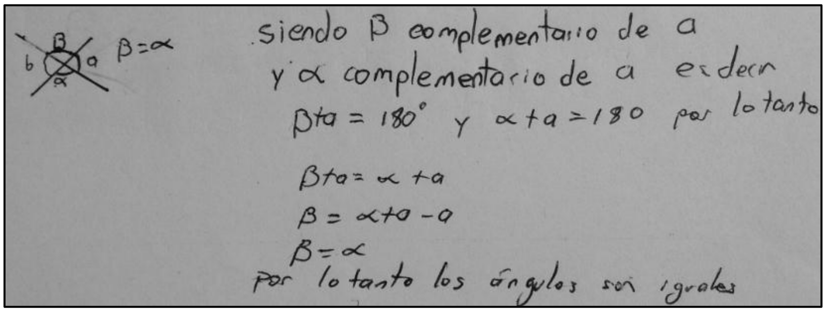


Ilustración 5.125. Respuesta de Byron a la Pregunta 1, Cuestionario 3.

En la validación de la proposición 15 (Pregunta 2.1, Cuestionario 3), este participante también justifica adecuadamente su prueba valiéndose de ángulos complementarios (Ilustración 5.126).


b β a α $\beta=\alpha$

siendo β complementario de a
y α complementario de a es decir
$\beta+a = 180°$ y $\alpha+a=180$ por lo tanto
$\beta+a = \alpha+a$
$\beta = \alpha+a-a$
$\beta=\alpha$
por lo tanto los ángulos son iguales

Ilustración 5.126. Respuesta de Byron a la Pregunta 2.1, Cuestionario 3.

Respecto de la negación del quinto postulado en su versión como el axioma de Playfair (Pregunta 1, Cuestionario 5), este alumno indica que “existirían triángulos que tienen 2 ángulos rectos” (Ilustración 5.127). En esta respuesta se encuentra implícita la primera negación del axioma de Playfair (sección 3.1.2).

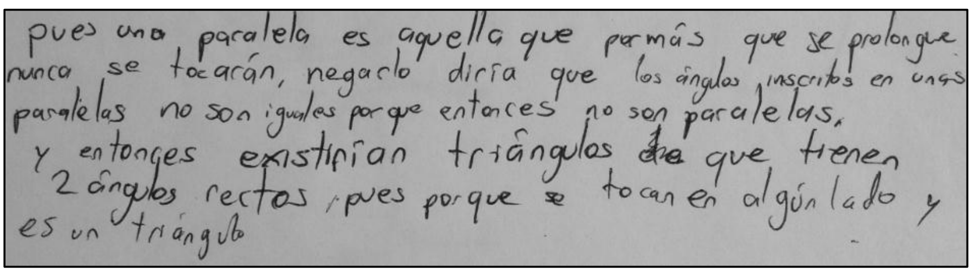

pues una paralela es aquella que por más que se prolongue nunca se tocarán, negarlo diría que los ángulos inscritos en unas paralelas no son iguales porque entonces no son paralelas,
y entonces existirían triángulos de que tienen 2 ángulos rectos, pues porque se tocan en algún lado y es un triángulo

Ilustración 5.127. Respuesta de Byron a la Pregunta 1, Cuestionario 5.

Este alumno no tuvo dificultades al llevar a cabo las construcciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Por ejemplo, en la construcción del triángulo equilátero (Pregunta 1, Cuestionario 6), Byron detecta que las construcciones son equivalentes (Ilustración 5.128).

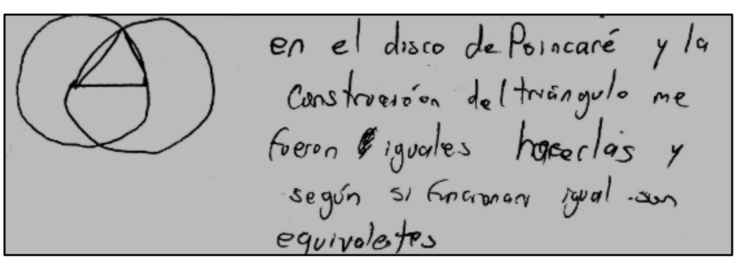

en el disco de Poincaré y la construcción del triángulo me fueron iguales hacerlas y según si funcionan igual son equivaletes

Ilustración 5.128. Respuesta de Byron a la Pregunta 1, Cuestionario 6.

Al responder la pregunta sobre una nueva posible definición del concepto de paralelas (Pregunta 8, Cuestionario 8), Byron indica que son “Las líneas que por más extendidas nunca se tocan, que también hay paralelas hiperbólicas pero pasa más de una paralela”. En esta respuesta destaca que este concepto “ayuda a tener aún más visión de lo extensa en la geometría [*sic*]” (Ilustración 5.129).

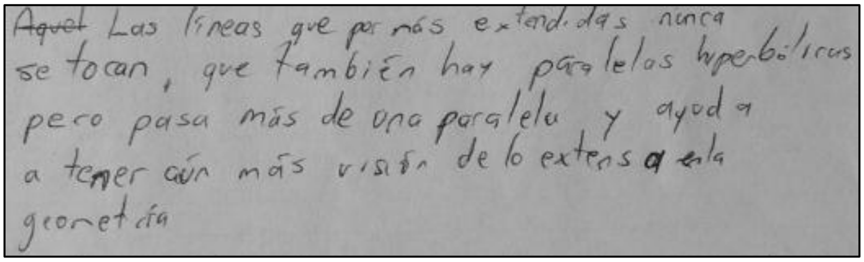
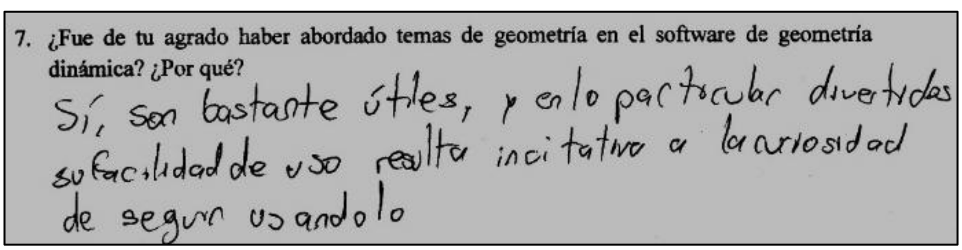

~~Aquel~~ Las líneas que por más extendidas nunca
se tocan, que también hay paralelas hiperbólicas
pero pasa más de una paralela y ayuda
a tener aún más visión de lo extensa en la
geometría

Ilustración 5.129. Respuesta de Byron a la Pregunta 8, Cuestionario 8.

En relación con sus impresiones sobre el modelo de geometría no euclidiana (Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte), Byron menciona que “fue extraño ver que hay más de una geometría”. En su respuesta, se destaca la importancia de la visualización que permite el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Este alumno reconoce que haber usado el software de geometría dinámica “resulta incitativo a la curiosidad” (Pregunta 7, Cuestionario 7) (Ilustración 5.130); interpretando que éste conlleva a la generación de intuiciones producidas por el estudio del Disco de Poincaré.


7. ¿Fue de tu agrado haber abordado temas de geometría en el software de geometría dinámica? ¿Por qué?

Sí, son bastante útiles, y en lo particular divertidas
su facilidad de uso resulta incitativo a la curiosidad
de seguir usandolo

Ilustración 5.130. Respuesta de Byron a la Pregunta 1, Cuestionario 6, segunda parte.

Además, menciona que una de las ventajas de usar el software de geometría dinámica consiste en que “al modificar un punto, todo lo que está relacionado con ello cambia” (Pregunta 8, Cuestionario 7) (Ilustración 5.131). En esta respuesta se halla implícito el término de función, por lo cual el software de geometría dinámica impulsa la comprensión de este concepto, estudiado con mayor profundidad en cursos posteriores al de la población participante.

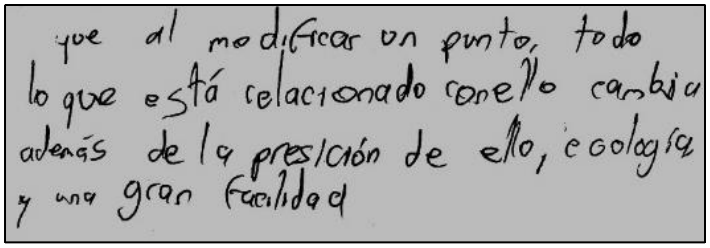

que al modificar un punto, todo lo que está relacionado con ello cambia además de la presición de ello, ecología y una gran facilidad

Ilustración 5.131. Respuesta de Byron a la Pregunta 8, Cuestionario 7.

Byron menciona que fue de su agrado haber estudiado temas de geometría no euclidiana (Pregunta 9, Cuestionario 7), pues “al ver una nueva geometría con esos conceptos, es difícil imaginarlo y en lo particular me agrada cambiar de paradigmas, resulta placentero salir de la cotidiana forma de ver la geometría”. En esta respuesta se interpreta la transición entre las rupturas epistemológicas antes del siglo XXI. Además, menciona que su concepción de los objetos geométricos “no cambió en el sentido de lo empírico” señalando que “persiste la idea de la [*geometría*] no euclidiana como un mundo muy complejo” (Ilustración 5.132).

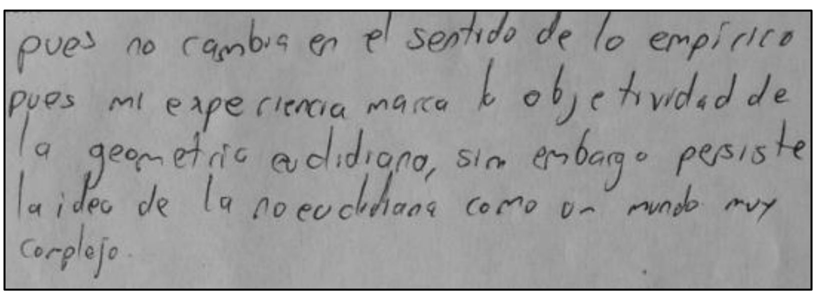

pues no cambia en el sentido de lo empírico pues mi experiencia marca la objetividad de la geometría euclidiana, sin embargo persiste la idea de la no euclidiana como un mundo muy complejo.

Ilustración 5.132. Respuesta de Byron a la Pregunta 9, Cuestionario 7.

En otro fragmento de la entrevista llevada a cabo después de la aplicación del Instrumento, este participante complementa la respuesta anterior:

Investigador: ¿Qué piensas de la geometría no euclidiana Byron? ¿Cómo cambian tus impresiones sobre el mundo?

Byron: Pues viene siendo un poco difícil de entender. Cuando uno está acostumbrado a llevar una vida práctica en donde la geometría sirve para cosas que ves en la vida cotidiana, es complicado poder imaginarla como en una geometría no euclidiana, porque uno puede ver que a veces la geometría euclidiana sirve en lo cotidiano. Sin embargo, al ver una geometría así [*la hiperbólica*], y que funciona, cambian demasiado tus paradigmas.

5.2. COMENTARIOS SOBRE EL ANÁLISIS DE LOS DATOS

Con base en el análisis desarrollado en este capítulo, es posible sintetizar los principales resultados. En principio, se reconoce que en la población participante tiene concepciones adecuadas sobre los conceptos geométricos básicos. Sin embargo, a pesar de que antes de la implementación del Instrumento los estudiantes sabían que el concepto de infinito no tenía lugar en el discurso matemático griego, algunos de ellos (e.g., Alan, Adrián y Byron) lo usan para explicar lo que entienden por recta. No obstante, se considera que las fallas detectadas en cuanto a concepciones no afectaron el desarrollo de las actividades.

En esta dirección, se recupera una respuesta de Byron (Pregunta 2, Cuestionario 1) para mostrar el uso de otra notación simbólica pues utiliza bosquejos al describir los cinco postulados. Para mostrar que algunos participantes comprenden el método deductivo, se tienen evidencia relacionada con la Pregunta 2, Cuestionario 4; por ejemplo, Nereo refiere que "faltan cosas por demostrar que nos ayudan en la proposición 32".

La mayoría de los participantes no tiene dificultades para llevar a cabo los ejercicios de aplicación (Pregunta 2, Cuestionario 3 y Pregunta 3, Cuestionario 4). Sin embargo, Alan presentó un error en el tratamiento algebraico en el ejercicio de aplicación. Los intentos validación, en general, son descriptivos. Se considera que esta característica se deriva dado que método deductivo y la validación de proposiciones son conceptos nuevos para la población participante. No obstante, algunos estudiantes involucran una notación simbólica apropiada para llevar a cabo sus validaciones; prueba de ello es el caso de Byron quien presenta una evolución considerable en el pensamiento geométrico.

Además, se reconoce que hay un proceso gradual en los procesos de justificación producto de las exploraciones llevadas a cabo en del software de geometría dinámica donde se generan pruebas situadas usando las herramientas de medición para validar sus resultados; por ejemplo, Sebastián, Enrique y Malinali. En el caso de Sebastián, las utiliza como única herramienta de validación. Sin embargo, Enrique y Malinali las usan para comprobar sus resultados: producen pruebas situadas. De hecho, esta participante reconoce que el uso que les da a estas herramientas es, en una primera instancia, para corroborar y, tal como ella lo indica, "también en cierto modo a validar […] con esto podemos darnos cuenta de que es verdad lo que nosotros hicimos".

Por otra parte, a pesar de que ningún participante consiguió bosquejar una superficie adecuada de representación, se obtuvieron ideas interesantes mostrando creencias importantes sobre la concepción de los objetos geométricos hiperbólicos. Además, en general los estudiantes comprenden la equivalencia entre las construcciones euclidianas e hiperbólicas del triángulo equilátero, la mediatriz y la perpendicular a una recta por un punto fuera de ella mostrando una pronta familiarización con el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Algunos estudiantes, sin embargo, no tradujeron las situaciones euclidianas al lenguaje hiperbólico y sólo consideraron la construcción de un triángulo hiperbólico cualquiera (e.g., Ricardo) y ninguno de los ensayos de construcción coincidió con un cuadrado hiperbólico. No obstante, la construcción de Enrique muestra una apropiación del software de geometría dinámica explotando sus herramientas para validar, o no, conocimiento.

A pesar de que hubo participantes que no congeniaron con la actividad, como Alan y Sebastián, el resto de los alumnos manifestaron agrado por conocer un tema relativo a la geometría no euclidiana y mostraron comodidad al usar el software de geometría dinámica. La respuesta de Gustavo a la Pregunta 8, Cuestionario 7 (Ilustración 5.27) incluye de manera general las ventajas destacadas por los estudiantes en cuanto al uso de éste; se destaca que el término "visualización" es explicitado por gran parte de ellos.

Para concluir este capítulo, se retoma la impresión de Andrés respecto de la geometría euclidiana: "es una idea que nunca había visto, es como si fuera de otro mundo" (Ilustración 5.133).

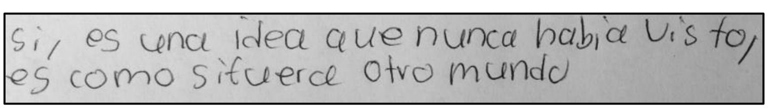

Si, es una idea que nunca habia visto, es como sifuera otro mundo

Ilustración 5.133 Respuesta de Andrés a la Pregunta 9, Cuestionario 7.

Asimismo, vale la pena recuperar la impresión de Nereo respecto de las actividades desarrolladas: "[*la geometría hiperbólica*] ¡es fantástica! Es algo descomunal, muy interesante, algo que no se ve en este plano dimensional, es algo magnífico, merece, creo yo, incluso más atención que la geometría euclidiana" (Ilustración 5.134).

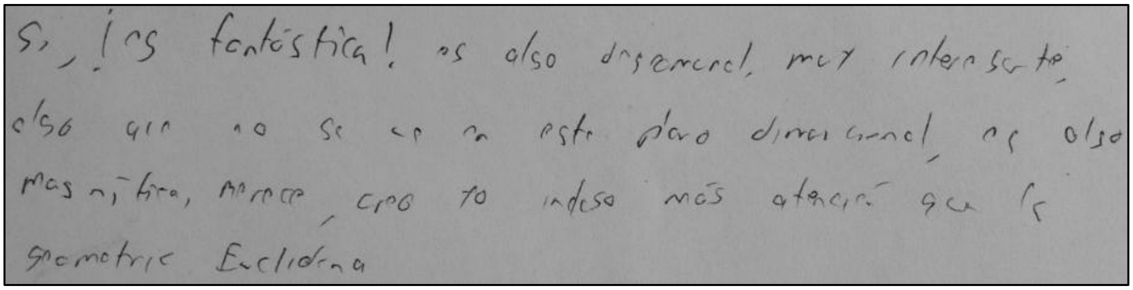

Si, ¡es fantástica! es algo diferencial, muy interesante, algo que no se ve en este plano dimensional, es algo magnífica, merece, creo yo incluso más atención que la geometría Euclidiana

Ilustración 5.134 Respuesta de Nereo a la Pregunta 9, Cuestionario 7.

Con base en el análisis de los datos, en el siguiente capítulo se dan las conclusiones generales de la investigación reportada en el presente documento así como las implicaciones derivadas de ésta.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen las conclusiones de la presente investigación. Estas conclusiones son el resultado del análisis y discusión de los datos recabados en la implementación del Instrumento de investigación. En primer lugar, se comentan las conclusiones generales de la investigación. En segundo lugar, se dan las respuestas de las preguntas que guiaron el estudio planteadas en el la sección 1.4. Finalmente, se describen algunas de las implicaciones derivadas de esta investigación.

6.1. CONCLUSIONES GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

Con base en el análisis de los datos recabados en esta investigación y discutidos en el capítulo anterior, los resultados del Instrumento contienen evidencia que permite afirmar, por un lado, que los estudiantes creen que los objetos geométricos euclidianos han existido siempre y creen que son los únicos lo cual les conduce a pensar *a través de* la geometría euclidiana (primera ruptura epistemológica antes del siglo XXI, sección 2.1). Sin embargo, es posible encaminarlos hacia una concepción más amplia de la geometría. En particular, concebir a la geometría euclidiana como un modelo o representación del mundo y descubrir la existencia de otros modelos geométricos (segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI, sección 2.1). Como lo indican Moreno-Armella et al. (2005) “la visualización no es un tema de mirar sino de mirar a través de los objetos que nacieron en nuestro campo perceptual”. Además, cuando los estudiantes exploran temas de geometría en un ambiente dinámico, existe una reconceptualización de los objetos geométricos (primera ruptura epistemológica en el siglo XXI, sección 2.1). Durante este proceso, existe una fuerte tensión entre la intuición del espacio físico y el modelo, un diálogo constante entre los dos modelos geométricos trabajados, donde la coacción producida por el uso del software está presente por medio de la ejecutabilidad.

Por otro lado, los estudiantes son capaces de resolver ejercicios derivados de las aplicaciones de proposiciones euclidianas. No obstante, en una situación de validar la proposición, los estudiantes se encuentran ante una herramienta cultural no interiorizada por lo cual los mecanismos de validación varían entre los participantes y, en general, estos son deficientes. De acuerdo con el análisis se puede concluir que los estudiantes tienden a demostrar proposiciones geométricas a partir de casos particulares y a través de un discurso descriptivo. Este resultado era esperado pues la demostración geométrica es un tema nuevo para los participantes y la instrucción sobre el tema había sido nula en su educación. Sin embargo, se considera que con las exploraciones en el software de geometría dinámica los participantes desarrollan sus mecanismos para validar proposiciones geométricas pues, además de que permite generar conjeturas, es posible llevar a cabo pruebas situadas de éstas. De este modo, se considera que es posible conducir a los estudiantes hacia validaciones generales en geometría. Lo que es más, estas exploraciones permiten estudiar de manera situada el concepto de infinito.

El análisis de los datos también apunta a que no todos los participantes comprenden el método deductivo en el sentido de la organización que Euclides dio en *Los Elementos*. Es decir, algunos estudiantes no comprenden que es necesaria información adicional antes de validar otra proposición. En relación con las ideas gráficas, los estudiantes son incapaces de bosquejar una superficie hiperbólica o interpretar adecuadamente la descripción descrita del Disco de Poincaré. Se esperaba este resultado pues los estudiantes no conocían, ni concebían, una superficie con estas características. No obstante, el modelo dinámico del Disco de Poincaré permite visualizar una geometría no euclidiana y los estudiantes muestran agrado por las actividades desarrolladas en éste.

En general, se considera que cuando los estudiantes tienen una concepción adecuada de la geometría euclidiana, es sencillo que comprendan el Disco de Poincaré. No obstante, a pesar de que algunos participantes mostraron una concepción adecuada de la geometría euclidiana, hubo ciertas complicaciones con el desarrollo con las actividades hiperbólicas. Puesto que esos participantes conservaron una intuición euclidiana, se considera como una prenoción que produjo obstáculos al descubrir nuevo conocimiento (Bachelard, 1993): lo que es primero desde el punto de vista cognitivo no necesariamente es lo primero desde el punto de vista lógico.

6.2. CONCLUSIONES RESPECTO DE LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Con base en el análisis de los datos, en esta sección se plantean las respuestas de las preguntas que guiaron esta investigación.

¿Cómo cambia la concepción de los estudiantes respecto de los objetos geométricos al explorar un modelo de geometría no euclidiana?

De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, los conceptos geométricos básicos son concebidos adecuadamente por los estudiantes; se considera que este resultado se deriva del estudio de estos conceptos desde niveles tempranos. Además, éste coincide con la hipótesis planteada en la sección 1.3. No obstante, existen algunas complicaciones al definir objetos geométricos de una manera más general. En particular, no todos los participantes comprenden el concepto de ángulo cuando se involucran ángulos entre dos curvas y su definición dada a partir de las tangentes formadas en el punto de intersección de éstas. Sin embargo, al explorar un modelo de geometría no euclidiana los estudiantes identifican convenientemente que un triángulo equilátero puede ser definido de manera general como la figura geométrica con tres lados iguales y tres ángulos iguales, y el cuadrado como la figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales; se considera que esta identificación se enfrasca en la reconceptualización de la estructura matemática del espacio físico (segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI).

En cuanto a los objetos geométricos hiperbólicos, los estudiantes muestran complicaciones en un primer acercamiento. Sin embargo, es posible detectar que ellos consiguen adaptarse prontamente a un entorno de geometría no euclidiana mediado por un modelo geometría hiperbólica inmerso en GeoGebra. Los participantes reconocen que una recta puede tener una forma distinta de la conocida e identifican que las construcciones consideradas son equivalentes al caso euclidiano. Se considera que la exploración de una geometría no euclidiana refuerza la concepción de los estudiantes respecto de los objetos geométricos.

¿Qué intuiciones geométricas son generadas por los estudiantes al explorar un modelo de geometría no euclidiana?

Los participantes reconocen que tanto la geometría euclidiana como el Disco de Poincaré son modelos geométricos y que estos no agotan los objetos geométricos; por lo contrario, los amplían y pueden conducir a generalizaciones, como en el caso del triángulo equilátero y del cuadrado. Asimismo, aceptan que en el modelo de geometría hiperbólica ciertas construcciones pueden parecer contradictorias señalando que "un segmento que parece más corto luce más extendido", como lo mencionó Alan. De manera similar, en general los estudiantes identifican que la circunferencia frontera del Disco de Poincaré juega el papel del infinito teniendo como resultado un estudio situado de este concepto; tal como lo señala Enrique, "podemos presenciar el infinito" (sección 5.1.5). Además, la exploración de un modelo de geometría no euclidiana en GeoGebra permite que los estudiantes tengan un acercamiento intuitivo a los conceptos de límite y función, estudiados en cursos posteriores, sin la necesidad de una definición formal; por ejemplo, en el estudio de caso de Byron, este participante refiere que "al modificar un punto, todo lo que está relacionado con ello cambia" (sección 5.1.10). En este sentido, se considera que el modelo dinámico del Disco de Poincaré promueve el desarrollo no sólo de intuiciones geométricas, sino más generalmente, de intuiciones matemáticas. Se considera que este desarrollo se debe, en gran medida, a la propiedad de ejecutabilidad provista por el software de geometría dinámica.

¿Cuáles son las rupturas epistemológicas de la geometría detectadas cuando los estudiantes son enfrentados con un modelo de geometría no euclidiana?

Las rupturas epistemológicas detectadas se correlacionan con lo expuesto en la sección 2.1. En principio, se identifica que los estudiantes tienen una concepción pre-semiótica de los objetos geométricos reconociendo que están acostumbrados a la geometría euclidiana: primera ruptura epistemológica antes del siglo XXI. Al tener contacto con la geometría dinámica, los estudiantes mantienen una actividad fluida pues guían y son guiados por éste, es decir, se produce la coacción (sección 2.4).

Cuando son enfrentados con una geometría no euclidiana, hay evidencia sobre una reconceptualización de la estructura del espacio físico: segunda ruptura epistemológica antes del siglo XXI.

Además, los objetos matemáticos tratados en un ambiente de modelación dinámica produce una nueva epistemología y semiótica de las matemáticas: primera ruptura epistemológica antes en el siglo XXI.

¿Cuál es el papel que desempeña el software de geometría dinámica en la exploración de una geometría no euclidiana?

En las respuestas anteriores, se han mencionado algunos roles desempeñados por el software de geometría dinámica respecto de la problemática de este trabajo. Conviene enlistarlas de manera sucinta para contestar esta pregunta de investigación. Así, de acuerdo con los resultados obtenidos, el software de geometría dinámica:

- Apoya considerablemente a la visualización de objetos geométricos no euclidianos
- Permite que los estudiantes establezcan conjeturas así como sus comprobaciones respecto de proposiciones geométricas y construcciones en el modelo de Poincaré (pruebas situadas)
- Promueve el desarrollo de intuiciones geométricas y refuerza las concepciones que los estudiantes tienen sobre objetos geométricos
- Permite la introducción en el nivel bachillerato de un contenido matemático considerado para niveles posteriores

De esta manera, se afirma que los estudiantes pueden mirar, pensar y aprender a través del software de geometría dinámica. Por estos motivos, se considera conveniente que el software de geometría dinámica tenga un mayor uso en las aulas.

6.3. IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN

Los resultados obtenidos en esta investigación sugieren diferentes implicaciones relacionadas, principalmente, con dos direcciones: la enseñanza y el aprendizaje del contenido matemático considerado, y sobre futuras investigaciones.

Respecto de la enseñanza del contenido geométrico abordado en esta investigación, los resultados apuntan a que se debe dar mayor énfasis a los mecanismos de validación, tanto en un ambiente de papel y lápiz como en el de geometría dinámica, ya que estos son fundamentales para validar el conocimiento matemático en los cursos de matemáticas, al menos en el nivel bachillerato, posteriores al de Geometría y Trigonometría.

Los resultados también revelan que los estudiantes adquieren una pronta y adecuada familiarización con el uso del software. Entre las ventajas conceptuales se resalta que el software de geometría dinámica permite tener un considerable acercamiento al concepto de función, primordial en los cursos subsecuentes.

Con base en los resultados obtenidos, también se destaca que, a partir del estudio de un modelo de geometría no euclidiana, los estudiantes pueden desarrollar su pensamiento geométrico y, como consecuencia, tener una visión más amplia de su entorno académico. La posibilidad de incluir un modelo geométrico distinto del euclidiano fomentaría el razonamiento geométrico de los estudiantes.

De acuerdo con Cohen et al. (2004), existen sugerencias en cuanto al criterio de triangulación de una investigación: incluir teorías alternas, múltiples métodos sobre el mismo objeto de estudio o un mismo método en diferentes ocasiones, y múltiples observadores del fenómeno a investigar. Bajo esta postura, se considera, en relación con las implicaciones para la investigación, importante llevar a cabo más exploraciones en el modelo diseñando diversas tareas para mostrar otro tipo de rupturas cuando los estudiantes se enfrentan a una geometría no euclidiana.

Además, como fue evidenciado, los participantes que intentaron validar sus construcciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré las llevaron a cabo con las herramientas del software. Es decir, aunque los mecanismos de validación se basaron en la medición dada por las herramientas provistas por GeoGebra, estos se llevaron a cabo dentro del software como mediador. Surge la pregunta ¿cómo validar proposiciones geométricas no euclidianas en el software de geometría dinámica?

En esta dirección, se destacan implicaciones para la investigación de aspectos que no fueron el foco de esta investigación, por ejemplo:

- La relación entre las concepciones geométricas y los mecanismos de validación usados en un ambiente de papel y lápiz, en uno de geometría hiperbólica y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré
- La implementación del estudio en equipos de trabajo
- La implementación de problemas abiertos en estos ambientes
- La relación entre conceptos de geometrías no euclidianas y los bosquejos de los estudiantes
- El papel del investigador
- Considerar otros modelos de geometría no euclidiana
- Considerar otro tipo de población

El modelo también conduce al configuraciones conocidas como teselaciones, las cuales podrían ser estudiadas, desde una perspectiva didáctica, más a fondo, pues se involucra una componente artística relacionada con el trabajo de Escher que podría ser atrayente para los estudiantes (Escher, 1971; Coxeter, 1979; Goodman-Strauss, 2001) (Ilustración 6.1).

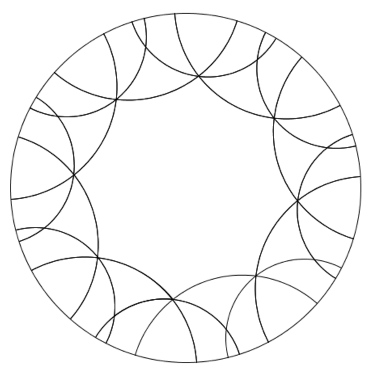


Ilustración 6.1. Teselasión en el modelo dinámico del Disco de Poincaré.

El modelo dinámico del Disco de Poincaré permite explorar, por ejemplo, las rectas y los puntos notables del triángulo hiperbólico. Puesto que en el modelo es posible trazar mediatrices, alturas, medianas y bisectrices hiperbólicas, las definiciones del circuncentro, ortocentro, baricentro e incentro hiperbólicos equivalen a las definiciones euclidianas. Sin embargo, en contraste con el modelo euclidiano, el circuncentro y el ortocentro no siempre están definidos en el modelo dinámico del Disco de Poincaré (Ilustración 6.2). No obstante, cuando el circuncentro está definido, cumple con la propiedad de ser el centro de la circunferencia hiperbólica circunscrita del triángulo hiperbólico (Ilustración 6.3).

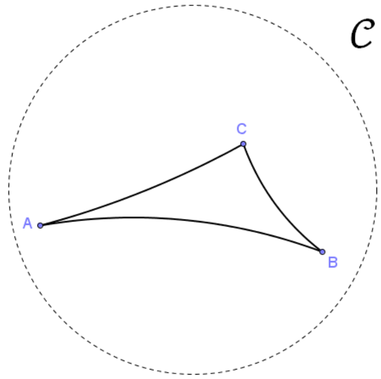


Ilustración 6.2. El circuncentro no siempre está definido en el Disco de Poincaré.

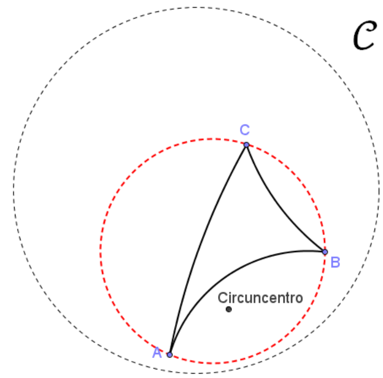


Ilustración 6.3. Cuando el circuncentro está definido, es el centro de la circunferencia hiperbólica circunscrita.

Se considera que a través de estas exploraciones el pensamiento sea desarrollado incluyendo preguntas como: ¿Por qué el circuncentro y el ortocentro no siempre están definidos? ¿Por qué el baricentro y el incentro siempre están definidos? ¿Por qué el baricentro de un triángulo hiperbólico siempre está definido pero no cumple con la propiedad de dividir en razón 2:1 la mediana? Además, apoyarse con el software para probar de manera situada que el incentro siempre existe y que es el centro de la circunferencia hiperbólica inscrita del triángulo hiperbólico (Ilustración 6.4).

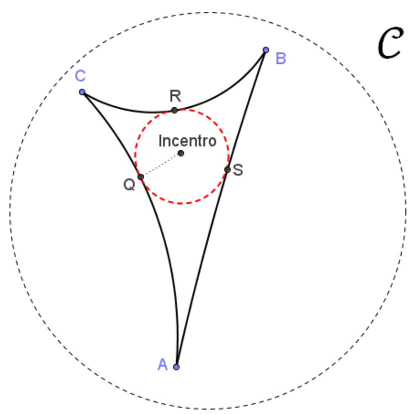


Ilustración 6.4. El incentro hiperbólico es el centro de la circunferencia hiperbólica inscrita.

Asimismo, al considerar el circuncentro, el ortocentro y el baricentro, una pregunta surge naturalmente: ¿La recta de Euler es válida en la geometría hiperbólica? ¿Por qué? Una prueba situada en el modelo dinámico del Disco de Poincaré conduce a que la respuesta a esta pregunta es negativa (Ilustración 6.5). Se cree que llevar a cabo una discusión más amplia para justificar esta respuesta puede desarrollar el pensamiento geométrico.

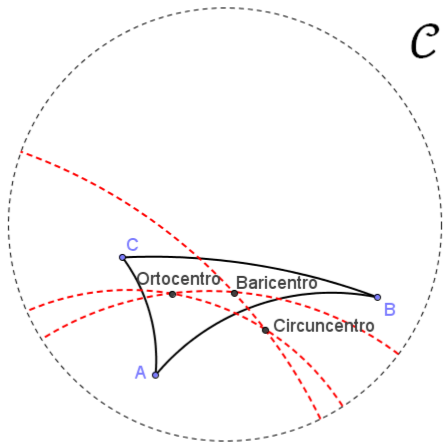


Ilustración 6.5. La recta de Euler no es un resultado de la geometría hiperbolica.

Más todavía, se considera que el modelo dinámico del Disco de Poincaré puede seguir siendo explotado abarcando, incluso, una exploración estructural de las cónicas. En efecto, tomando la definición de cónica como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un foco y de una directriz, es posible construir una parábola, una elipse o una hipérbola dependiendo de la naturaleza de la directriz: si es una recta, entonces se produce una parábola, si es una circunferencia, entonces se produce una elipse o una hipérbola.

Dicho de otro modo, la parábola puede ser definida como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta dada (directriz) y de un punto externo a la recta dada (foco) y esta definición puede ser llevada de manera sencilla al modelo dinámico del Disco de Poincaré. En la Ilustración 6.6 y en la Ilustración 6.7 se muestran dos parábolas en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. En ambos casos, la recta directriz es la geodésica AB y el foco es el punto F.

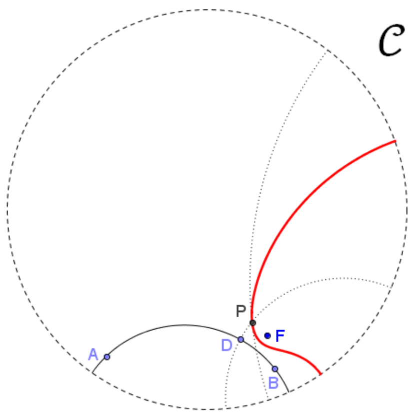


Ilustración 6.6. Parábola con foco F y directriz la geodésica AB.

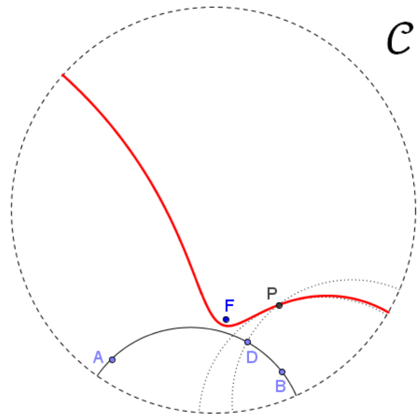


Ilustración 6.7. Otra parábola con foco F y directriz la geodésica AB.

De manera similar, una elipse (o hipérbola) puede definirse como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una circunferencia directriz y de un punto ajeno a dicha circunferencia (foco). Si el foco está dentro de la circunferencia directriz, entonces se tiene una elipse; si el foco está fuera de ella, entonces se tiene una hipérbola. Esta definición también puede ser llevada al modelo dinámico del Disco de Poincaré. En la Ilustración 6.8 y en Ilustración 6.9 se muestra, respectivamente, una elipse y una hipérbola en el modelo dinámico del Disco de Poincaré; en ambos casos, los puntos A y F son los focos y la circunferencia hiperbólica con centro en A y que pasa por H es la circunferencia directriz.

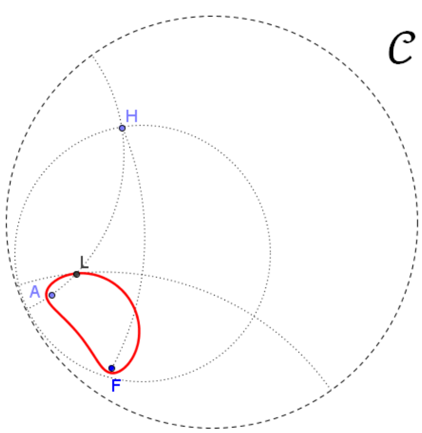


Ilustración 6.8. Elipse con focos F y A y directriz la circunferencia con centro en A y radio AH.

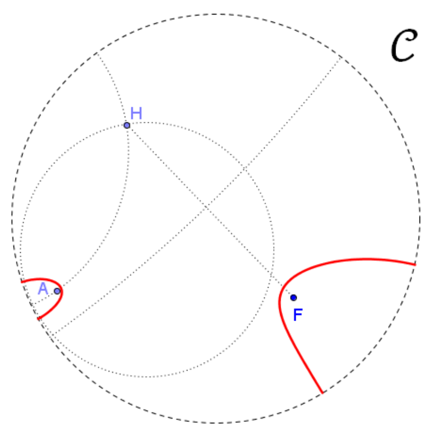


Ilustración 6.9. Hipérbola con focos F y A y directriz la circunferencia con centro en A y radio AH.

Creemos que una exploración de las cónicas en el modelo dinámico del Disco de Poincaré a partir de esta definición sintética puede desarrollar el pensamiento geométrico. Además, pensamos que llevar a cabo pruebas situadas reforzaría el concepto de cónica de los alumnos, pues éstas mantienen sus propiedades estructurales.

Asimismo, se considera importante llevar a cabo más exploraciones del modelo *per se*. Por ejemplo, cerca del centro de la circunferencia $\mathcal{C}$ los objetos geométricos hiperbólicos tienen un comportamiento similar en relación con los objetos geométricos euclidianos. Esta propiedad se debe al ángulo de paralelismo que podría ser involucrada en investigaciones similares en el nivel universitario (una exposición sobre este tema aparece en Coxeter, 1979; O'Leary, 2010; etc.). Del mismo modo, llevar a cabo un estudio con participantes de este nivel relacionada con la equivalencia entre los modelos del Disco y del Semiplano de Poincaré y la exploración del concepto de hiperparalelas podría arrojar nueva luz referente a las rupturas epistemológicas de la geometría.

Finalmente, el uso de distintos marcos conceptuales puede admitir observar otras características sobre el desempeño de los estudiantes que, bajo la perspectiva teórica adoptada, posiblemente, no lo permitía. Así, abordar la problemática a través de otros lentes teóricos, puede enriquecer los resultados reportados en el presente documento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). Dragging in cabri and modalities of transition from conjectures to proof in geometry. *PME XXII Stellenbosch*, (2), 32-39.

Bachelard, G. (1993). La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance. Ed. Vrin. Trabajo original publicado en 1938.

Bonola, (1955). Non-Euclidean geometry. New York: Dover Publications.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2004). Research methods in education. London: RoutledgeFalmer.

Coxeter, H. (1979). The non-Euclidean symmetry of Escher’s picture “Circle Limit III”. *Leonardo*, (12), 19-25.

Escher, M. (1971). The world of M.C. Escher. H.N. Abrams, New York.

Euclides. (1991). Los elementos, Libros I-IV. Ed. Gredos.

Gardiner, J., & Hudson, B. (1998). The evolution of pupils’ ideas of construction and proof using hand-held dynamic geometry-technology. *PME XXII Stellenbosch*, (2), 337-344.

Goodman-Strauss, C. (2001). Compass and Straightedge in the Poincaré Disk. *The Mathematical Association of America*, (108), 38-49.

Gray, J. (2007). Worlds out of nothing. London: Springer-Verlag.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (3), 195-227.

Hegedus, S. & Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies of Mathematics*, (77), 369-388.

Hernández, R, Fernández, C. & Baptista, P. (2003). Metodología de la investigación. Tercera Edición. McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A.

Kaisari, M. & Patronis, T. (2010). *So we decided to call* “straight line” (…): Mathematics students’ interaction and negotiation of meaning in constructing a model of elliptic geometry. *Educational Studies of Mathematics*, (75), 253-269.

Kant, I. (2005). Crítica de la razón pura. Ed. Taurus, Madrid. Trabajo original publicado en 1781.

Mariotti, M., Bartolini-Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R. (1997). Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition. *PME21*. Lathi, Finland, (1), 180-195.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Special issue of Educational Studies in Mathematics: Democratizing Access to Mathematics Through Technology – Issues of Design and Implemetation*, 68(2), 99-111.

Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, (41), 505–519.

Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. (2013). From Static to Dynamic Mathematics: Historical and Representational Perspectives. *S.J. Hegedus, J. Roschelle (eds.), The SimCalc Vision and Contributions, (27), Advances in Mathematics Education*. Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013.

Moreno-Armella, L., & Sriraman, B. (2005). Structural stability and dynamic geometry: Some ideas on situated proofs. *International Reviews on Mathematical Education*, 37(3), 130-139.

Moreno-Armella, L., & Sriraman, B. (2010). Symbols and Mediation in Mathematics Education. *B.Sriraman, L. English (eds.), Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

O’Leary, M. (2010). Revolutions of Geometry. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

Olivero, F. (2003). The proving process within a dynamic geometry environment. PhD thesis. University of Bristol.

Olivero, F. & Robutti, O. (2001). An exploratory study of students’ measurement activity in a dynamic geometry environment. *CERME 2*.

Rabardel, P. (1995). Les homes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin.

Ramírez, A & Sienra, G. (2000). Invitación a las geometrías no euclidianas. Publicaciones de la Facultad de Ciencias, UNAM, México.

Sandoval (2005). Estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos en un ambiente dinámico. Tesis de doctorado del Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

Schoenfeld, A. (2007). Method. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on the mathematics teaching and learning* (1), 69-110. Charlotte NC: Information Age Publishing Inc.

Schoenfeld, A. (2008). Research methods in (mathematics) education. L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, 467-519. New York: Routledge Taylor & Francis Group.

Stevenson, I. (2000). Modeling hyperbolic space: Designing a computational context for learning non-Euclidian geometry. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, (5), 143-167.

Stevenson, I., & Noss, R. (1999). Supporting the evolution of mathematical meanings: The case of non-Euclidean geometry. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, (3), 229-254.

Straesser, R. (2001). Cabri-Géomètre: does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Kluwer Academic Publishers, (6), 319-333.

Van den Brink, F. (1995). Geometry education in the midst of theories. *For the Learning of Mathematics*, 15(1), 21-28.

Wolf, H. (1945). Introduction to Non-Euclidean Geometry. Holt, Reinhert and Winston.

ANEXOS

En esta sección, se encuentran los nueve anexos de la investigación reportada en este documento. En particular, en el Anexo A se describe el disco dinámico del Modelo de Poincaré. Del Anexo B al Anexo I se incluyen los Cuestionarios que conforman el Instrumento de investigación.

ANEXO A: EL MODELO DINÁMICO

En este anexo se describe cómo usar el modelo dinámico del Disco de Poincaré; la atención se centra, principalmente, en la descripción de las herramientas.

El modelo dinámico del Disco de Poincaré fue programado en el software de geometría dinámica GeoGebra. Para trabajar en éste, es necesario abrir la aplicación llamada “Disco de Poincaré” cuyo formato es “.ggb” (formato por defecto de los archivos de GeoGebra). En este archivo es donde las herramientas del modelo dinámico están programadas; de lo contrario, el software despliega una ventana común de GeoGebra. La ventana de inicio se muestra en la Ilustración 3.4 en la sección 3.2.1.

El modelo dinámico del Disco de Poincaré se restringe al interior de una circunferencia[1]; esta misma circunferencia corresponde a la frontera del modelo, es decir, el infinito, de modo que los objetos geométricos hiperbólicos deben estar estrictamente dentro de esta circunferencia. De manera general, las herramientas del modelo dinámico del Disco de Poincaré son equivalentes a las herramientas euclidianas en el sentido de que, por ejemplo, un punto hiperbólico equivale a un punto euclidiano, las rectas, semirrectas y segmentos hiperbólicos equivalen a las rectas, semirrectas y segmentos euclidianos, respectivamente, etc.

Como fue indicado en la sección 3.2.1, el diseño del modelo dinámico del Disco de Poincaré se apoya en el trabajo de Goodman-Strauss (2001). Las herramientas ahí descritas son las siguientes: geodésica (recta hiperbólica), circunferencia hiperbólica, punto medio

[1] En lo sucesivo, esta circunferencia es llamada “la circunferencia $\mathcal{C}$”.

hiperbólico, mediatriz hiperbólica y rotación de un segmento hiperbólico dado un ángulo. No obstante, se consideró importante programar otras herramientas en la aplicación de GeoGebra con el fin de tener un conjunto más amplio para su implementación. Estas herramientas fueron programadas en analogía a las construcciones euclidianas, sustituyendo la regla y el compás euclidianos por *la regla y el compás hiperbólicos*, es decir, la construcción de geodésicas (y, como consecuencia, segmentos y semirrectas hiperbólicos) y de circunferencias hiperbólicas.

Al igual que los menús programados por defecto, los menús hiperbólicos despliegan distintas herramientas así como una breve descripción para usarlas (Figura 1).

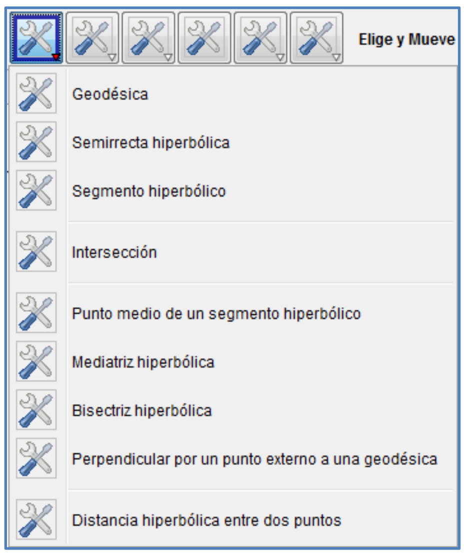


Figura 1. Menú de herramientas hiperbólicas.

Para utilizar cualquier herramienta hiperbólica, es necesario seleccionar la circunferencia $\mathcal{C}$ antes de llevar a cabo los demás pasos de construcción. Como fue indicado antes, todos los objetos hiperbólicos del Disco de Poincaré deben estar dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$ de manera que se sugiere definir los puntos usando la barra de entrada del software y escribir "PuntoEn[c]". De este modo, se evitan puntos sobre la circunferencia $\mathcal{C}$, o bien, fuera de ella, además de que el software mantiene una mejor estabilidad. No obstante, la aplicación del Disco de Poincaré también funciona colocando un punto cualquiera dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$, pero al no estar restringido a su interior, puede salir de ella incumpliendo con las características del modelo y generando inestabilidades en el desarrollo de las tareas dentro del modelo (Figura 2).

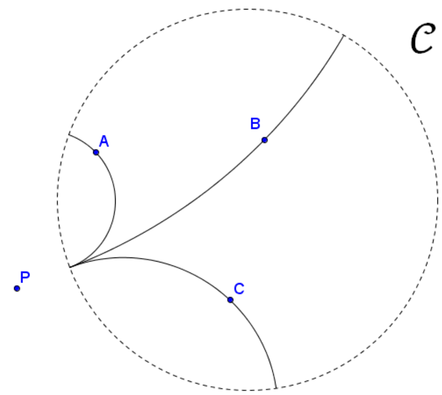


Figura 2. Posición inadecuada de un punto en el Disco de Poincaré.

En seguida, en la Tabla A.1 se describe cada una de las herramientas del modelo dinámico del Disco de Poincaré. Es importante aclarar que las descripciones hacen referencia a objetos hiperbólicos; cuando se menciona un objeto euclidiano se explicita.

Tabla A.1. Descripción de las herramientas del modelo dinámico del Disco de Poincaré.

Herramientas hiperbólicas en el modelo dinámico del Disco de Poincaré		
Herramienta	Descripción	Construcción
Geodésica (Recta)	Se forma a partir de una circunferencia ortogonal a la circunferencia $\mathcal{C}$. El arco de curva dentro de esta circunferencia es la geodésica.	Seleccionar dos puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$.
Semirrecta	Es una porción de una geodésica que pasa por dos puntos dentro de $\mathcal{C}$. La semirrecta nace de uno de estos puntos e interseca ortogonalmente a la circunferencia $\mathcal{C}$.	Seleccionar dos puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$. El primer punto seleccionado es donde nace la semirrecta.
Segmento	Es una porción de una geodésica delimitada por dos puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$.	Seleccionar dos puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$.
Intersección	GeoGebra ofrece esta herramienta por defecto, sin embargo, se programó esta herramienta para evitar inestabilidades en el software. Está diseñada para intersecar únicamente rectas, semirrectas y segmentos hiperbólicos. Para intersecar	Seleccionar dos puntos de la primera recta (o bien, semirrecta o segmento) y dos puntos de la segunda recta (semirrecta o segmento).

	otros objetos, incluidos lo euclidianos, se usa la herramienta por defecto de GeoGebra.	
Punto medio	Señala el punto medio hiperbólico de un segmento.	Seleccionar los extremos del segmento.
Mediatriz	Corresponde a la geodésica perpendicular a un segmento pasando por su punto medio.	Seleccionar los extremos del segmento.
Bisectriz	Corresponde a la geodésica que divide un ángulo en dos ángulos iguales.	Seleccionar tres puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$. En el primero de ellos debe estar el ángulo a bisecar.
Perpendicular	Dada una geodésica (o bien, una semirrecta o un segmento) y un punto fuera de ella, esta herramienta traza una geodésica perpendicular a la geodésica dada por dicho punto.	Seleccionar dos puntos de la geodésica dada, después, el punto por el cual debe pasar la perpendicular.
Distancia	Indica la distancia hiperbólica entre dos puntos.	Seleccionar dos puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$.
Circunferencia	Construye una circunferencia a partir de su centro y un punto por el cual debe pasar.	Seleccionar un punto (centro de la circunferencia deseada), después, un punto por el cual debe pasar.
Triángulo	Construye una figura geométrica hiperbólica de tres lados.	Seleccionar tres puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$.
Triángulo equilátero	Construye una figura geométrica hiperbólica de tres lados y tres ángulos iguales.	Seleccionar dos puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$.
Ángulo	Indica el valor de un ángulo a partir de tres puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$.	Seleccionar tres puntos en sentido antihorario dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$. El ángulo a medir debe estar en el segundo punto seleccionado.

Área de un triángulo	Indica la medida en grados del área de un triángulo hiperbólico.	Seleccionar los tres vértices del triángulo. El valor se despliega en la ventana de trabajo.
Suma de los ángulos de un triángulo	Indica la medida en grados de la suma de los ángulos internos de un triángulo.	Seleccionar los tres vértices del triángulo. El valor se despliega en la ventana de trabajo.
Cuadrado	Construye una figura geométrica hiperbólica de cuatro lados y cuatro ángulos iguales.	Seleccionar dos puntos dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$.
Dos rectas paralelas a una recta dada	Construye dos geodésicas paralelas a una geodésica dada pasando por un punto fuera de ésta.	Seleccionar dos puntos de la geodésica dada, después el punto fuera de ésta.
Reflexión de un punto	Refleja un punto respecto de un centro de reflexión.	Seleccionar el punto a reflejar y luego el centro de reflexión.
Rotación de un segmento dado un ángulo	Rota un segmento hiperbólico en sentido antihorario en función de un ángulo. Esta herramienta conduce a las teselaciones.	Seleccionar los extremos del segmento e indicar el ángulo de rotación.

A continuación se ejemplifica la construcción de un triángulo equilátero hiperbólico así como la manera de anclarla al menú de herramientas[2]. Se siguió la construcción de la Proposición 1 contenida en el Libro I de *Los Elementos* usando la regla y el compás hiperbólicos. De esta manera, dado un segmento hiperbólico AB, se traza la circunferencia hiperbólica con centro en A y que pase por B y, análogamente, se traza la circunferencia hiperbólica con centro en B y que pase por A; luego, una de las intersecciones de estas circunferencias produce el punto C el cual es el tercer vértice del triángulo. Puesto que la circunferencia hiperbólica con centro en C y radio el segmento AC coincide con la circunferencia hiperbólica con centro en C y radio el segmento BC, los tres segmentos (AB, AC y BC) son radios de circunferencias que tienen el mismo radio, entonces el triángulo ABC es un triángulo equilátero (Figura 3).

[2] Para generar las herramientas y poder conservarlas en el menú de las herramientas del software, basta con usar el comando "Creación de Herramienta Nueva" y señalar los elementos requeridos en el proceso de construcción. Asimismo, para la creación de algunas herramientas es necesario tomar algunas precauciones para evitar inconsistencias del software; por ejemplo, como fue descrito en la herramienta "Intersección".

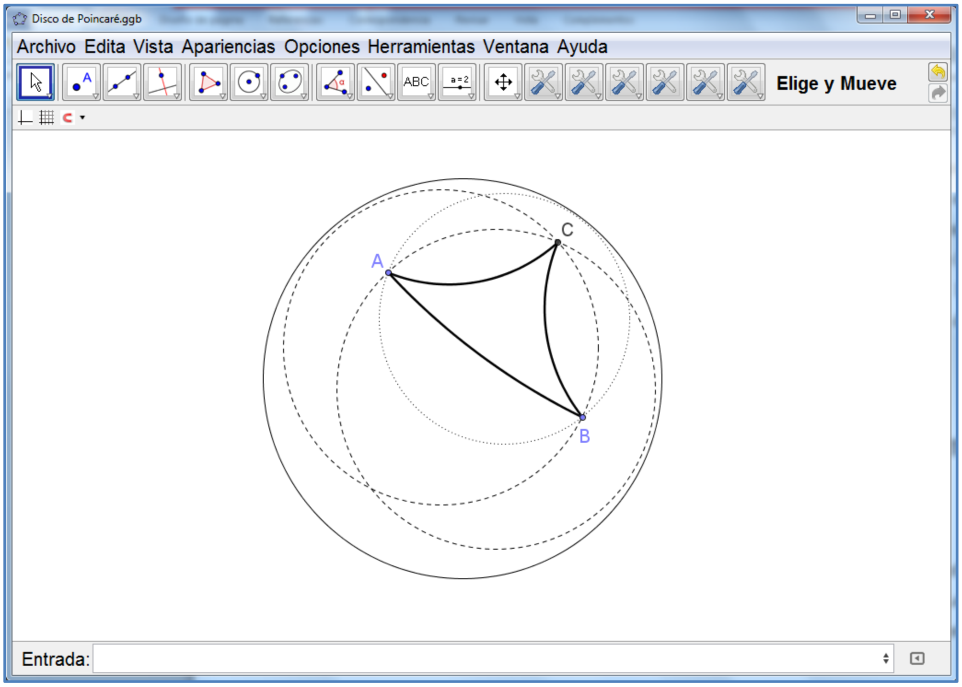


Figura 3. Triángulo equilátero hiperbólico.

Un triángulo equilátero hiperbólico, resultado de la programación de esta herramienta, se muestra en la sección 3.2.1. Sin embargo, la construcción del cuadrado hiperbólico no es equivalente. A continuación se expone la construcción de un cuadrilátero hiperbólico siguiendo la proposición 46 del Libro I de *Los Elementos* con el objetivo de dar una prueba situada de que la construcción dada en esta proposición no produce un cuadrado hiperbólico.

Para construir un cuadrado, en la proposición 46 Euclides toma un segmento dado AB y sobre el extremo A de éste levanta una perpendicular AC; sobre esta perpendicular ubica el punto D de manera que los segmentos AB y AD sean congruentes. Luego, levanta una paralela al segmento dado AB sobre el punto D y por el extremo B del segmento AB levanta una paralela al segmento AC, de manera que el cuadrilátero $ABDE$ es el cuadrado buscado. Sin embargo, siguiendo esta construcción en el modelo dinámico del Disco de Poincaré, y sustituyendo las paralelas por el punto D y B a los segmentos AB y AC respectivamente (paso equivalente en la geometría euclidiana), el cuadrilátero formado no corresponde con un cuadrado hiperbólico. Una prueba situada de este hecho se muestra en la Figura 4 donde, usando las herramientas de medición de ángulos y segmentos hiperbólicos, se descarta la posibilidad de que el cuadrilátero $ABDE$ sea un cuadrado. El segmento hiperbólico AB es igual al segmento hiperbólico AD, y el segmento hiperbólico BE es igual al segmento hiperbólico DE por construcción; sin embargo, estos pares de segmentos hiperbólicos no son iguales entre sí. Además, el ángulo BED no es recto (Figura 4).

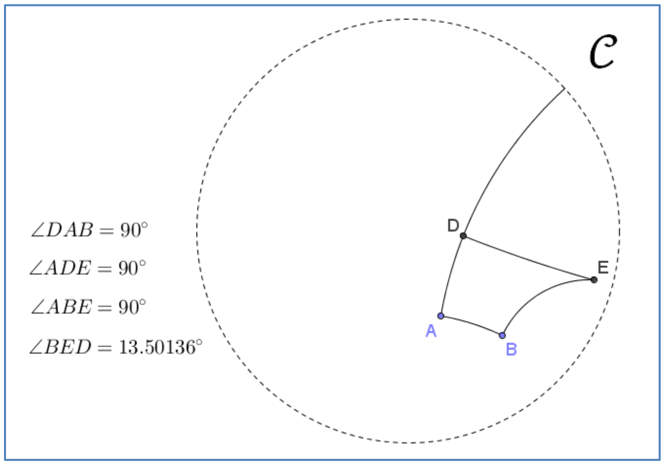


Figura 4. Construcción de la proposición 46 en el Disco de Poincaré.

De hecho, el punto E no siempre existe pues depende de las posiciones de los puntos A y B (Figura 5).

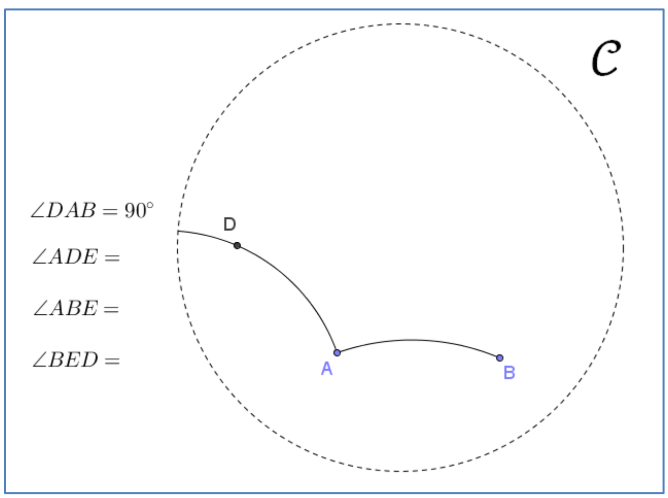


Figura 5. El punto E depende de las posiciones de los puntos A y B.

La construcción descrita no coincide con un cuadrado hiperbólico pues sus ángulos no pueden ser rectos; la restricción es que estos deben ser iguales, pero no rectos. En la sección 3.2.1 se muestra una figura geométrica hiperbólica con cuatro lados y cuatros ángulos iguales, es decir, un cuadrado hiperbólico.

ANEXO B: CUESTIONARIO 1

CUESTIONARIO 1

Escuela:
Semestre:
Materia:

1. Explica con tus palabras qué es: un punto, un segmento, una recta, una superficie.

2. Enuncia los cinco postulados de Euclides.

3. La Proposición 1 de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente: "*Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada*". Con regla y compás construye dicho triángulo tomando en cuenta los cinco postulados de Euclides y describe tu proceso de construcción.

4. ¿Cómo compruebas que el triángulo construido en el inciso anterior es correcto?

ANEXO C: CUESTIONARIO 2

CUESTIONARIO 2

Escuela:
Semestre:
Materia:

1. Explica con tus palabras qué es: un ángulo, un ángulo recto, una circunferencia, un triángulo, un cuadrado, un polígono.

2. Explica con tus palabras qué es: un axioma, un postulado, una proposición, un teorema.

3. Enuncia el quinto postulado de Euclides.

4. Enuncia una equivalencia del quinto postulado.

5. ¿Qué significa negar el quinto postulado?

ANEXO D: CUESTIONARIO 3

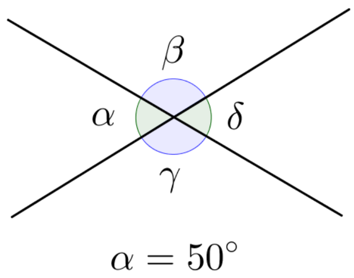
CUESTIONARIO 3

Escuela:
Semestre:
Materia:

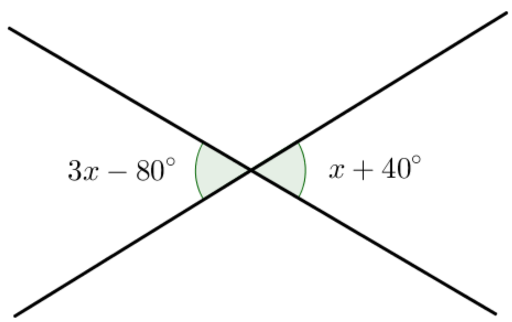
1. La proposición 12 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente:
   "Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella".
   Traza dicha recta y demuestra que es una perpendicular a la recta infinita dada.

2. Resuelve los siguientes ejercicios

a) Determina el valor de los ángulos β, γ y δ si $\alpha = 50°$.



b) Determina el valor de x.



a. La proposición 15 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente:

"Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí".

Demuestra esta proposición.

3. La proposición 46 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente:

"Trazar un cuadrado a partir de un segmento dado".

Traza dicho cuadrado y argumenta por qué tu construcción es, efectivamente, un cuadrado.

ANEXO E: CUESTIONARIO 4

CUESTIONARIO 4

Escuela:
Semestre:
Materia:

1. ¿Cómo validas que una proposición geométrica sea verdadera o falsa?

2. La proposición 16 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente:

"En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos".

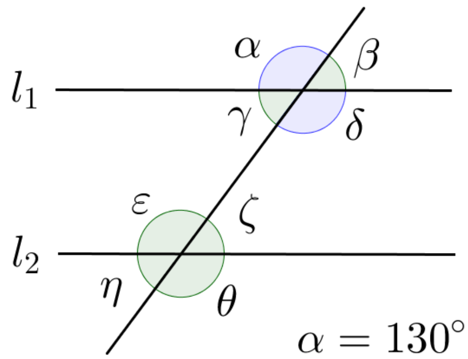
Y la proposición 32 del Libro I es la siguiente:

"En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos".

¿Crees que la proposición 16 es una implicación de la primera parte de la proposición 32? Justifica tu respuesta. ¿Por qué Euclides enuncia las dos proposiciones en dos partes distintas del Libro I? ¿Por qué no demuestra la proposición 32 dentro de la demostración de la proposición 16?

3. Resuelve los siguientes ejercicios

   c) Si $\alpha = 130°$ y las rectas l_1 y l_2 son paralelas, determina el valor de los ángulos $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ y θ.



b. La proposición 29 del Libro I de *Los Elementos* de Euclides es la siguiente:

"La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos del mismo lado iguales a dos rectos".

Demuestra esta proposición.

ANEXO F: CUESTIONARIO 5

CUESTIONARIO 5

Escuela:
Semestre:
Materia:

1. Una equivalencia del quinto postulado de Euclides, conocida como el axioma de Playfair, es la siguiente:
   "Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una paralela a la recta dada".
   ¿Qué significa negar matemáticamente esta equivalencia del quinto postulado?

2. ¿Qué forma debería tener una superficie donde pasen al menos dos paralelas por un punto exterior a una recta dada? Haz un bosquejo de tal superficie.

3. Imagina un modelo geométrico de dos dimensiones cuya frontera es una circunferencia cualquiera. En este modelo, las rectas necesariamente deben ser ortogonales a dicha frontera (es decir, cada extremo de una recta debe formar ángulos rectos con la circunferencia frontera). Dentro de ese modelo geométrico, ¿qué forma tendría una recta, un segmento de recta, una circunferencia, un triángulo, un cuadrado? Haz un bosquejo de este modelo geométrico.

4. ¿Qué es (o bien, qué no es) una geometría no euclidiana?
   En una geometría no euclidiana, ¿Cuál es el papel que desempeña el quinto postulado de Euclides?
   ¿Dónde crees que existan aplicaciones de las geometrías no euclidianas?

ANEXO G: CUESTIONARIO 6

CUESTIONARIO 6

Escuela:
Semestre:
Materia:

1. Construye un triángulo equilátero hiperbólico en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Describe paso a paso tu proceso de solución.
   ¿Cómo validas que tu construcción es correcta?

2. Dado un segmento hiperbólico cualquiera y su punto medio, construye la mediatriz hiperbólica del segmento dado en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Describe paso a paso tu proceso de solución.
   ¿Cómo validas que tu construcción es correcta?

3. Dada una recta hiperbólica, construye una perpendicular desde un punto exterior a la recta dada en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Describe paso a paso tu proceso de solución.
   ¿Cómo validas que tu construcción es correcta?

4. Construye un cuadrado hiperbólico en el modelo dinámico del Disco de Poincaré. Describe paso a paso tu proceso de solución.
   ¿Cómo validas que tu construcción es correcta?

CUESTIONARIO 6

(Segunda parte)

Escuela:
Semestre:
Materia:

1. ¿Qué impresiones tuviste al conocer un modelo de geometría no euclidiana?

2. ¿Qué dificultades tuviste al usar el modelo dinámico del Disco de Poincaré?

ANEXO H: CUESTIONARIO 7

CUESTIONARIO 7

Escuela:
Semestre:
Materia:

1. Con regla y compás, construye un triángulo equilátero. Describe tu proceso de solución y justifica por qué tu construcción es correcta.

   ¿Qué diferencias hay al construir un triángulo equilátero en geometría euclidiana y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré? ¿Las construcciones son equivalentes?

2. ¿Qué diferencias hay al construir un cuadrado en geometría euclidiana y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré? ¿Las construcciones son equivalentes?

3. ¿Qué diferencias hay al construir la mediatriz de un segmento en geometría euclidiana y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré? ¿Las construcciones son equivalentes?

4. ¿Qué diferencias hay al construir una perpendicular por un punto exterior a una recta dada en geometría euclidiana y en el modelo dinámico del Disco de Poincaré? ¿Las construcciones son equivalentes?

5. En el Disco de Poincaré, ¿se cumple el teorema de Pitágoras? Justifica tu respuesta.

6. ¿Crees que es importante demostrar las proposiciones geométricas? O, ¿prefieres solamente llevar a cabo aplicaciones prácticas derivadas de tales proposiciones? ¿Por qué?

7. ¿Fue de tu agrado haber abordado temas de geometría en el software de geometría dinámica? ¿Por qué?

8. ¿Qué ventajas destacas al utilizar el software de geometría dinámica?

9. ¿Fue de tu agrado haber conocido temas de geometría no euclidiana? ¿Por qué?

ANEXO H: CUESTIONARIO 8

CUESTIONARIO 8

Escuela:
Semestre:
Materia:

1. ¿Cómo defines un triángulo equilátero en la geometría euclidiana? ¿Cómo lo defines en la geometría no euclidiana? ¿Hay diferencias entre estas definiciones? En caso afirmativo, indica cuáles son.

2. ¿Qué concluyes respecto de la exploración de triángulos equiláteros en el modelo dinámico del Disco de Poincaré?

3. Describe cómo validas que la construcción de un triángulo equilátero hiperbólico en el modelo es, efectivamente, un triángulo equilátero hiperbólico.

4. ¿Cómo defines un triángulo rectángulo en la geometría euclidiana? ¿Cómo lo defines en la geometría no euclidiana? ¿Hay diferencias entre estas definiciones? En caso afirmativo, indica cuáles son.

5. ¿Qué concluyes respecto de la exploración de triángulos rectángulos y del teorema de Pitágoras en el modelo dinámico del Disco de Poincaré?

6. ¿Por qué el teorema de Pitágoras no es válido en el modelo del Disco de Poincaré? Describe cómo invalidas este teorema en dicho modelo.

7. Después de las exploraciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré, ¿qué concluyes sobre el comportamiento de los objetos hiperbólicos cuando están cerca del centro del modelo? ¿Cuál es la situación límite? Es decir, justamente en el centro del modelo.

8. Antes de haber conocido un modelo de geometría no euclidiana, ¿cómo definías el concepto de paralela? A partir de las exploraciones en el modelo dinámico del Disco de Poincaré, ¿cómo cambia tu concepción sobre la definición de este concepto? Da una nueva definición de paralela con base en las exploraciones en el modelo.

9. ¿Piensas que la geometría euclidiana se deriva de la geometría no euclidiana o al revés? O bien, ¿crees que no se puede dar ninguno de estos casos? Justifica tu respuesta.

10. ¿Cómo cambia tu concepción de los objetos geométricos al explorar una geometría no euclidiana?

11. ¿Qué diferencias encuentras entre los objetos geométricos representados en lápiz y papel y en un medio de geometría dinámica como GeoGebra?

12. ¿Cuál es la importancia del software de geometría dinámica GeoGebra en la exploración de una geometría no euclidiana, en particular, del Disco dinámico de Poincaré?