CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

IMPACTO DE LOS RECURSOS USADOS POR EL PROFESOR EN LA COMPRENSIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE NÚMEROS CON SIGNO

Tesis que presenta

Ariel Esqueda Cosio

para obtener el grado de Maestro en Ciencias,

en la especialidad de Matemática Educativa

Directores de la tesis:

Dr. José Guzmán Hernández †

Dra. Aurora Gallardo Cabello

Dr. David Alfonso Páez

México, Ciudad de México diciembre de 2016

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por otorgarme una beca para estudiar la maestría en ciencias, en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN)

Número de becario: 338402

A LA MEMORIA DEL DOCTOR JOSÉ GUZMÁN HERNÁNDEZ

Y

DEL ANGELITO QUE ME CUIDA Y ME GUÍA SIEMPRE

AGRADECIMIENTOS

A mi Dios por darme la fuerza, sapiencia y perseverancia para cumplir mis objetivos.

A la Dra. Aurora Gallardo Cabello por confiar en mí y por aceptar continuar con mi trabajo de investigación, después del sensible fallecimiento del Dr. Guzmán. Por compartir su conocimiento y pasión por los números con signo; en particular, los negativos. Gracias por su ayuda, sus comentarios y observaciones que permitieron llevar a buen puerto mi trabajo. Siempre estaré agradecido.

Al Dr. David Alfonso Páez, primero, por su amistad incondicional; segundo, por aceptar ser parte de mi trabajo de investigación dirigiendo junto a la Dra. Gallardo la investigación; tercero, por sus oportunas observaciones, correcciones, críticas y comentarios vertidos en torno a mi tesis, porque sin su apoyo no hubiera sido posible la culminación, de forma satisfactoria, de este documento. Por compartir sus conocimientos, siempre pensando en mejorar el trabajo.

Mi eterno agradecimiento al Dr. José Guzmán Hernández por brindarme, primero, su confianza y, después, su guía para ingresar al programa de maestría del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Gracias por brindarme su apoyo y compartir sus conocimientos a lo largo de este proyecto de investigación, el cual concluyó en la presente tesis; porque sin su ayuda no hubiera sido posible lograr esta meta. También, agradezco su interés, dedicación y preocupación hacía mi formación como investigador, profesor y persona. No alcanzan las palabras para agradecer todo lo que me brindo el tiempo que lo conocí. Siempre estará presente en mi vida, ¡Hasta siempre Dr. Guzmán!

A la Dra. Marta Elena Valdemoros Álvarez y al Dr. Ulises Xolocotzin Egidio por aceptar ser mis sinodales, por el tiempo invertido en la revisión de la tesis y por sus comentarios y observaciones que enriquecieron este trabajo de investigación; además, de mis conocimientos.

A los profesores del Área básico y medio básico del Departamento de Matemática Educativa (Cinvestav-IPN) por sus observaciones, comentarios y correcciones, durante los seminarios que impartieron, las cuales ayudaron a mi formación como investigador. También, por compartir sus conocimientos que me permitieron crecer académicamente; por mostrar su entrega y pasión por la investigación.

A Karla, mi compañera de vida, por su apoyo incondicional, por creer en mí, por su tolerancia y amor; por soportar mis días de estrés y buscar hacerme sonreír. Gracias amor por siempre motivarme a ser mejor cada día, por acompañarme en este maravilloso viaje y por permitir que te siga a acompañando en tus proyectos. Mi eterno agradecimiento y amor.

A mis padres y hermanos por siempre estar presentes y apoyarme cuando lo necesite; en particular, a mis padres por siempre creer en mí, por motivarme a seguir creciendo y por ayudarme a conseguir mis metas. También, porque gracias a ustedes soy la persona que soy. Gracias por enseñarme el valor de la familia, la tolerancia, la responsabilidad, la honestidad y el amor.

A mis compañeros y amigos de la maestría: Carlos, Calli, Heidi, David y Eduardo por su compañerismo y amistad que me brindaron durante este viaje. Gracias por sus comentarios, observaciones y consejos que me dieron, los cuales me permitieron ser mejor persona e investigador. Fue muy grato convivir con ustedes.

A Ulises, José Luis, Clarita, Perla, Liliana, César, José Zambrano y Maru, el grupo de los “Guzmanianos”, por todo su apoyo durante mi formación, por ser un gran grupo de personas y de trabajo. Gracias por ayudarme a crecer como profesional y sobre todo gracias por su amistad.

A Adriana y Gaby por brindarme el apoyo cuando lo necesitaba en torno a lo administrativo.

A mis amigos de vida, Eliza, Mónica, Jesús y Víctor por siempre apoyarme y alentarme a seguir creciendo. Gracias por toda la confianza depositada en mí, la cual me ayuda a seguir creciendo. Siempre presentes en mi vida, muchas gracias mis hermanos.

A las autoridades correspondientes donde lleve a cabo mi toma de datos; en especial, a los profesores: Laura, Pedro, Saúl, Marco y Juan, por participar de forma desinteresada en esta investigación y por permitirme asistir a sus clases a videograbar sus sesiones.

ÍNDICE

Capítulo 4
Análisis del recurso físico

Capítulo 5
Análisis de datos y discusión de resultados

Capítulo 6
Conclusiones

RESUMEN

En la presente investigación se analizará la práctica del profesor de matemáticas de educación secundaria al usar recursos en la resolución de problemas, que implican el uso de números con signo. Se trata de un estudio de corte cualitativo en el que participaron cinco profesores de primer grado de secundaria, y cuya recopilación de datos se efectuó en dos etapas. En la primera, se videograbaron las sesiones de clase en las cuales cada profesor resuelve problemas que involucran el uso de números con signo y se analizaron los datos recopilados mediante la técnica de triangulación de estos, tomando como marco teórico la *Aproximación Documental de lo Didáctico* (ADD, Gueudet & Trouche, 2009). En la segunda etapa, con la finalidad de mostrar si son conscientes o no -los profesores- de los recursos usados; en particular, el sistema de referencia, al resolver problemas de números con signo se entrevistó a dos profesores, los cuales dan muestra del uso de sistema de referencia como recurso para resolver problemas, previa elaboración de un "protocolo de entrevista"; la entrevista incluyo observar los extractos de video recuperados de las sesiones de clase. En la tesis sólo se reportaran los datos recabados, a través de un estudio de caso, de dos profesores: Saúl y Pedro (pseudónimos) a los cuales se les realizó la entrevista. Los resultados mostraron que los profesores, usaron recursos aprendidos de su práctica docente. Dichos recursos permitieron resolver los problemas, por parte de los profesores, de forma correcta aunque no sean conscientes del uso de los recursos. Saúl utiliza, de forma no consciente, sistemas de referencia distintos para resolver problemas de números con signo; Pedro, no distingue los significados de los signos y confunde el signo de la operación (binario, Gallardo, 1994) con el signo del número (unario, Gallardo, 1994) cuando resuelve problemas.

ABSTRAC

In the present research, the implementation of different resources on solving signed numbers' mathematical problems by secondary education's mathematics teacher was analyzed . It is a qualitative study design, participating five first grade teachers of secondary education, where data gathering was completed in two stages. In the first one, the class sessions were videorecorded in which every professor solves problems that involve the use of signed numbers and then the collected data was analyzed by triangulation technique, taking as conceptual framework the Documentary Approximation of Didactics (ADD, Gueudet and Trouche, 2009, 2010) and the meanings of the plus and minus signs (Gallardo, 1994). In the second stage, with the purpose of showing whether they are -the teachers- conscious or not of the resources used, particularly the reference system to solve signed numbers's problems; two professors who showed the use of reference system as a resource for solving problems, were interviewed; prior preparation of a "protocol of interview" the interview included watching video extracts retrieved from the class sessions. In this work only the data collected were reported through a case study of two teachers: Saul and Pedro (pseudonyms) which underwent the interview. The results show that teachers used the resources learned by teaching . These resources helped solve problems by professors correctly despite not being aware of the use of resources. Saul uses not consciously, different reference systems to solve signed numbers; Pedro does not distinguish the meanings of the signs and confuses the sign of the operation (binary, Gallardo, 1994) with the number sign (unary, Gallardo, 1994) when solving problems.

PRESENTACIÓN

La práctica del profesor, entendida ésta como el conjunto de actividades que él o ella llevan a cabo en el salón de clases, ha sido estudiada por varios investigadores para comprender y mejorar la educación y la práctica del docente. Gran parte de los temas de investigación relacionados con la enseñanza de las matemáticas, provienen de la práctica del profesor, ya que en el aula de clases los profesores se enfrentan a una diversidad de factores y dificultades que modifican constantemente dicha práctica.

Dentro de la práctica del profesor se encuentran presentes los recursos, los cuales son base importante para llevar a cabo su labor, porque con ellos busca enseñar a los estudiantes los conocimientos institucionalizados. Debido a que el docente juega un papel fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje, tal como ha sido reportado en varias investigaciones (e.g., Adler, 2000; Gueudet & Trouche, 2009, 2010, entre otros), la presente investigación pretende aportar evidencias en torno al uso no consciente, por parte del profesor, de los recursos inherentes a su práctica; por tanto, el objetivo principal de esta investigación es: Documentar cómo el profesor de matemáticas, aun cuando no es consciente del uso de sus recursos, resuelve de manera correcta problemas que involucran números con signo.

Respecto a la problemática de la enseñanza de las matemáticas, referida a la práctica docente, han surgido varias propuestas por parte de los investigadores educativos, quienes las han abordado desde distintas perspectivas teóricas. En el presente documento se analiza la práctica del profesor desde la perspectiva de los recursos; en particular, el uso no consciente de los recursos inherentes a la práctica del docente de matemáticas en torno a la resolución de problemas de números con signo. El documento está organizado en cinco capítulos, en los cuales se explicitan las características de esta investigación, el análisis de los datos y las conclusiones.

En el Capítulo 1, se presenta el problema de investigación, los antecedentes que dieron sustento al problema planteado, y se justifica su importancia. También se plantean los objetivos que se pretenden alcanzar así como las preguntas de investigación que guían esta investigación. En el Capítulo 2, se describe el marco conceptual que permite analizar los datos recabados; la cual está conformada por la Aproximación documental de lo didáctico (Gueudet & Trouche, 2009, 2010) y los significados que tienen los signos más y menos (Gallardo, 1994)

En el Capítulo 3, se explicitan las características metodológicas de esta investigación: tipo de estudio, población participante y los criterios tomados en cuenta para seleccionarla, instrumentos para el acopio de los datos, las dos etapas mediante las cuales se efectuó la recopilación y análisis de los datos y el contenido matemático y curricular del estudio. Después, en el Capítulo 4 son analizados los libros de texto usados por Saúl y Pedro para comprender y resolver problemas que implican el uso de números con signo.

En el Capítulo 5, son analizados los datos obtenidos a través de las videograbaciones de las sesiones de clase; en particular, está centrado en los recursos inherentes en la práctica de dos profesores (Saúl y Pedro) en la comprensión y solución de problemas de números con signo. Del mismo modo, son analizadas las entrevistas realizadas a los profesores para observar el uso no consciente de sus recursos, en particular, el sistema de referencia. En primer lugar se exponen los recursos más representativos usados por Saúl y Pedro para comprender y resolver problemas que implican el uso de números con signo; en segundo, el análisis de la entrevista, efectuada a cada profesor acerca del uso de sus recursos.

En el Capítulo 6, se presentan las conclusiones a manera de síntesis de los resultados obtenidos en este trabajo, los cuales dan cuenta de los objetivos y de las respuestas a las preguntas de investigación. Finalmente, se plantean posibles temas de investigación, que se desprenden de ésta, para llevar a cabo en un futuro.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se precisa el problema de investigación, el cual hace referencia a los recursos usados por el profesor de matemáticas de primer grado de educación secundaria en la comprensión y uso de los números con signo (positivo y negativo). Aun cuando el interés es sobre los recursos, la presente investigación tiene como propósito analizar la práctica del profesor en la resolución de problemas que implican el uso de números con signo. En el capítulo, en primer lugar, se abordan los antecedentes del problema de investigación aquí propuesto; se pone mayor atención a lo reportado en la literatura respecto a la enseñanza de los números con signo y sistemas de referencia. En segundo lugar, son desarrollados el problema de investigación, los objetivos y las preguntas de esta investigación. En tercero, y para finalizar, se expone la justificación.

1.1. ANTECEDENTES

Los números con signo (positivos y negativos) han sido estudiados durante mucho tiempo por los matemáticos (e.g., D´Alembert, Descartes, Diofanto, Euler, entre otros) e investigadores (e.g., Bruno & Martinón, 1997; Cid, 2002, 2003; Gallardo, 1994; Glaeser, 1981, entre otros), incluso existen varias líneas de investigación al respecto. Una de ellas se enfoca en los obstáculos epistemológicos que surgen al enseñar y aprender los números con signo. La primera referencia sobre tales obstáculos es en los números negativos y aparece en el trabajo de Glaeser publicado en 1981. En su artículo, este autor realizó una búsqueda, a través de la historia, de obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos porque considera que uno de los objetivos de la didáctica era buscar y determinar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de esta ciencia Glaeser (1981).

Glaeser (1981) hace una revisión profunda del pasado en la cual analiza los textos de grandes matemáticos; por ejemplo, Diofanto, Descartes, McLaurin, Euler, Laplace, entre otros, y considera que en la evolución de la noción de número negativo[1], desde su primera aparición hasta el concepto actual, se pueden identificar los siguientes obstáculos:

- Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas;
- Dificultad para darle un sentido a las cantidades negativas aisladas;
- Dificultad para unificar la recta numérica;
    a) se insiste sobre las diferencias cualitativas entre las cantidades negativas y los números positivos;
    b) se describe la recta como una yuxtaposición de dos semi-rectas opuestas que llevan símbolos heterogéneos, y
    c) Se rechaza comparar simultáneamente las formas dinámicas y estáticas de los números.
- La ambigüedad de los dos ceros;
    a) Cero absoluto: hace referencia a la ausencia de números menores que él, y
    b) Cero origen: se marca arbitrariamente sobre un eje orientado.
- El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas (dificultad para desprenderse de un sentido concreto atribuido a los números), y
- Deseo de un modelo unificador. La necesidad de hacer funcionar un modelo aditivo igualmente valido para ilustrar el dominio multiplicativo en donde ese modelo es inoperante.

A partir del trabajo de Glaeser diferentes investigadores se interesaron en comprender los números negativos. Desde entonces, y debido a las dificultades de enseñanza (e.g., el profesor confunde entre el signo del número y el signo de la operación) y de aprendizaje (e.g., la comprensión del cero), estos números han sido tema de discusión por la comunidad de expertos en educación matemática. De acuerdo con Bruno (2001), tales dificultades no deben sorprendernos, pues incluso algunos matemáticos a lo largo de la historia se resistieron a utilizarlos. Los números con signo, como tema de discusión, han sufrido un largo y complejo proceso de aceptación para considerarlos como números; no es sino hasta

[1] En su artículo de 1981, Glaeser no habla de números negativos; sin embargo, a este tipo de número los llama "números relativos".

el siglo XIX cuando Hankel (1867, citado en Cid, 2003, p. 23) los introdujo de manera formal.

La preocupación por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los números negativos se ha manifestado en la publicación de diversos artículos. Al respecto, algunos investigadores están interesados en indagar sobre el signo, positivo y negativo, de estos números. Gallardo (1994) menciona que el signo puede ser concebido como: unario, binario y simétrico (estas definiciones se describen en el capítulo 2 de este trabajo).

Por su parte, Detzel, Barrio, Petich y Martínez (2014) afirman que la presentación de las notaciones para las operaciones de números con signo es un factor para confundir el signo unario con el binario. Estos investigadores mencionan que: "Se comienza con las notaciones incompletas, es decir, las notaciones en las que se han suprimido los signos "+" que indican operación binaria (por ejemplo, - 4 – 2) para terminar presentando las notaciones completas (por ejemplo, (-4) + (-2))." (p. 165). Estos autores, en su propuesta de enseñanza, consideran hacer el recorrido inverso. En otras palabras, iniciar con la notación completa y concluir con la notación incompleta.

En su tesis doctoral: *El status de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*, Gallardo (1994) hizo un estudio histórico-crítico e identifico cinco niveles de conceptualizar a los números negativos, inmersos en los procesos de solución de problemas encontrados en textos matemáticos. La autora afirma que existe evidencia para decir que los números negativos han transitado en estos niveles antes de ser considerado como una noción matemática formal. Los niveles de conceptualización, son los siguientes:

1. Sustraendo, donde la noción de número está subordinada a la magnitud;
2. Número con signo, cuando al número se le asocia el signo más o el signo menos;
3. Número relativo, es donde surge la idea de cantidades opuestas o la idea de simetría;
4. Número aislado, se consideran dos niveles: el de resultado de una operación o como solución de un problema o ecuación, y
5. Número negativo formal, donde este número adquiere el mismo estatus que el número positivo.

Cid (2003) hizo una revisión de publicaciones que discuten la enseñanza y el aprendizaje de los números negativos. Ella las clasificó en tres áreas: a) propuestas de enseñanza; b) dificultades de aprendizaje y errores en los alumnos, y c) implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo. En otra línea de investigación, Bruno y García (2004) analizan cómo futuros profesores de educación primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos, según las estructuras de los enunciados. Los investigadores encuentran que es de gran importancia la redacción de los enunciados para decidir la clasificación; así, establecen que la ausencia o no de palabras claves lleva a los profesores en formación a una determinada clasificación. Bruno y García (2004) concluyen:

> [Q]ue la enseñanza de la clasificación de problemas aditivos debe proporcionar una amplia variedad de enunciados que permitan recoger las diferentes variables que pueden aparecer (lingüísticas, contextuales, posición de la incógnita, etc.) con el fin de crear una imagen amplia de las situaciones, al tiempo que lleve a diferenciar los elementos estructurales (estados, variaciones, comparaciones) de los no estructurales. (p. 45)

Un trabajo similar al de Bruno y García (2004) es el de Bruno y Martinón (1997), quienes realizaron una clasificación funcional semántica de estos problemas aditivos. La clasificación está conformada por 11 problemas, de los cuales, con base en su estructura y con el propósito de enriquecer el significado del número negativo, tres están referidos a estados, cuatro a variaciones y cuatro a comparaciones[2]. La clasificación que presentan Bruno y Martinón, es la siguiente:

1. Combinación de estados;
2. Variación de un estado;
3. Comparación de estados;
4. Combinación de variaciones sucesivas;

[2] Para enriquecer el significado del número, Bruno y Martinón (1997) conciben situaciones concretas acerca de estados, comparaciones y variaciones. A continuación se describen:

a) Estado [*e (t)*]. Es el estado en el tiempo t. en los ejemplos de estado siempre existe un sujeto, una magnitud y una unidad de medida (e.g., debo cinco pesos, la temperatura es de 12 grados bajo cero, etc.);
b) Comparaciones [*c*]. las comparaciones se refieren a una situación estática. Existen dos funciones estado, y el tiempo carece de importancia (e.g., tengo siete pesos más que tú, hay ocho grados menos en México que en Colombia, etc.), y
c) Variación [*v*]. las variaciones se refieren a una situación dinámica, donde transcurre el tiempo. El tiempo tiene una función importante (e.g., gane 15 pesos, la temperatura bajó nueve grados, etc.).

5. Combinación de variaciones;
6. Comparación de variaciones;
7. Variación de variaciones;
8. Combinación de comparaciones adyacentes;
9. Combinación e comparaciones;
10. Variación de comparaciones, y
11. Comparación de comparaciones.

Por su parte, Almeida y Bruno (2013) documentan cómo futuros profesores de educación primaria resuelven problemas aditivos con números negativos. En su investigación, encontraron una variedad de estrategias usadas en las respuestas de los profesores, las cuales reflejan diferentes modos de pensamiento. Mencionan que los profesores son capaces de identificar los problemas que implican números con signo negativo pues en algún paso de sus respuestas escriben números con signo negativo. Almeida y Bruno (2013) concluyen que si bien no es difícil, para los profesores de primaria, resolver correctamente los problemas ("rango de error ha estado entre 8% y 32%", p. 134) resulta complejo para los docentes resolverlos planteando una operación con números negativos; particularmente, los problemas en los que el dato desconocido es la variación o la diferencia. Para dar solución a este tipo de problemas recurren al sentido común y expresan la solución de forma contextualizada o a través de gráficas.

En cambio, otros investigadores han centrado su atención en clasificar modelos de enseñanza en torno a estos números. Janvier (1983, citado en Cid, 2003), en su estudio, distingue tres modelos: el de equilibrio, el de la recta numérica y el híbrido. Sin embargo, dicha clasificación fue modificada por Cid (2002). Ella toma en cuenta sólo a los dos primeros modelos y los reconoce con el nombre de neutralización y desplazamiento, respectivamente.

En cuanto al modelo de desplazamiento, Cid (2003) afirma que existen diversas propuestas para usarlas como recurso en la enseñanza de los números negativos, por ejemplo, "personajes u objetos que avanzan o retroceden a lo largo de un camino (Thompson & Dreyfus, 1988; Sánchez & Olmedo, 1991), termómetros o escalas de diversas magnitudes (Bell, 1986; Strefland, 1996), ascensores que suben a los pisos y bajan a los garajes (Puig & Adam, 1956; Gradanidis, 1994), globos que se elevan o que se hunden por debajo del nivel de mar (Petri, 1986)" (p. 7).

Para que tenga sentido el modelo de desplazamiento, propuesto por Cid (2003), y la existencia de los números con signo es fundamental hacer uso del concepto físico: sistema de referencia[3]. En los ejemplos antes mencionados, dados por Cid, está implícito tal concepto. Al respecto algunos autores (e.g., Miranda, Radford & Guzmán, 2013, entre otros) señalan la necesidad e importancia del uso de sistemas de referencia, de forma correcta, para proponer y resolver tareas donde intervienen los números con signo.

Miranda et al. (2013) plantearon un problema de movimiento de dos objetos a estudiantes de 15 años y reportaron que estos tenían dificultades en su solución al considerar sistemas de referencia distintos para cada objeto inmerso en el problema. Entre sus conclusiones, Miranda et al. afirman que se debe tomar en cuenta un solo sistema de referencia en cada problema de movimiento independientemente del número de objetos inmersos; además, al graficar en el plano cartesiano la distancia versus tiempo, se debe interpretar el origen de coordenadas para que el movimiento de los objetos tenga sentido y poder establecer relaciones ente ellos.

En otro estudio, Miranda, Radford y Guzmán (2007) documentan la manera en que estudiantes de distintos niveles escolares representan el movimiento de objetos mediante gráficas cartesianas o dibujos, y cómo este enfoque ha sido de interés por parte de diversos autores. A partir de las investigaciones de estos autores (Miranda et al., 2007, 2013) se puede concluir que relacionar los datos de un problema con el sistema de referencia adecuado no es tarea fácil para los alumnos, y en ocasiones se debe a una falta de conocimiento o comprensión del problema.

Por su parte, respecto al sentido (positivo o negativo) del movimiento, Mochón (1997) afirma que los alumnos se preguntan a menudo qué signo debe tener la letra "g" (aceleración de la gravedad) al intentar sustituirla o calcular su valor numérico en alguna fórmula relacionada con el movimiento de caída libre. Al respecto, Mochón dice que las respuestas más frecuentes, por parte de los profesores, es: "negativa [cuando el objeto se

[3] En física, se entiende por sistema de referencia o marco de referencia al conjunto de convenciones usadas por un observador para poder medir la posición y otras magnitudes físicas de un sistema físico (Resnick, Halliday & Krane, 1996).

mueve] hacia arriba y positiva [cuando el objeto se mueve] hacia abajo” (p. 64). Además, de acuerdo con estas respuestas, es evidente que los alumnos tienen dificultades de comprensión y aceptan la existencia de velocidades y tiempos negativos, aunque no los pueden concebir en el contexto real.

Respecto a la problemática, sobre la enseñanza y aprendizaje de los números con signo, discutida en parágrafos precedentes, es notorio que se han investigado: sistemas de referencia y números con signo. Sin embargo, no existen investigaciones centradas en ambos conceptos y en la práctica del profesor de matemáticas de educación secundaria. Por ello, se propone la presente investigación, cuyo propósito es dar cuenta de los recursos usados por el docente, de ese nivel educativo, en la comprensión y resolución de problemas que involucran números con signo.

1.2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación está centrada en analizar la práctica del profesor de matemáticas, cuyo énfasis es sobre los recursos usados en la resolución de problemas que implican números con signo. Como se puede observar en la revisión de la literatura esta clase de números, que involucran sistemas de referencia, son objeto de estudio en diversas investigaciones. Los números con signo (números enteros), actualmente, se estudian en primero y segundo grado de educación secundaria; en particular, en los bloque IV y V de primer grado, y bloque I en segundo grado (SEP, 2011, pp. 34-38). En el Plan de estudio y el Programa, la SEP (2011) sugiere trabajar con situaciones de temperaturas, ganancias y pérdidas, elevador, recta numérica y localización de fechas para dar sentido a los números con signo; además, se presentan enunciados de problemas aditivos y multiplicativos. Sin embargo, consideramos de suma importancia que se ponga énfasis en el concepto: sistema de referencia en los planes y programas para secundaria, propuestos por la SEP (2011), porque es fundamental para la comprensión y solución de problemas de números con signo.

Diversos investigadores sugieren que se continúe, como línea de investigación, sobre los recursos usados por el profesor de matemáticas (Adler, 2000; Adler, Ball, Krainer, Lin & Novotna, 2005). En cambio, otros aseguran que, ante las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, aún falta por hacer en torno al conocimiento matemático y didáctico del profesor (e.g., Hill, Sleep, Lewis &Ball, 2007, entre otros); en particular, cómo él construye su conocimiento al reflexionar en y sobre su práctica, en la enseñanza del concepto de número negativo y las operaciones básicas con números enteros (Ñancupil, Carneiro & Flores, 2013).

El papel que desempeña el profesor de matemáticas es de gran importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Por tal motivo, la presente investigación busca analizar la práctica del profesor de matemáticas de educación secundaria efectuada en el salón de clases. El énfasis es sobre los recursos usados por él en la resolución de problemas que involucra a los números con signo. Así, de acuerdo con los antecedentes aquí mencionados, se planteó el siguiente problema de investigación:

Impacto de los recursos usados por el profesor en la comprensión y resolución de problemas de números con signo

1.3. Objetivos de investigación

1.3.1. General

Documentar cómo el profesor de matemáticas, aun cuando no es consciente del uso de sus recursos, resuelve de manera correcta problemas que involucran números con signo.

1.3.2. Particulares

a) Mostrar que el profesor de matemáticas no usa de forma consciente sistemas de referencia al resolver, en el aula, problemas que involucran el uso de números con signo.

b) Documentar el papel de los sistemas de referencia en la toma de decisiones del profesor respecto a qué operación usar (adición o sustracción) con números con signo.

1.4. Preguntas de investigación

Con base en los objetivos, en esta investigación se plantearon las siguientes preguntas de investigación.

1.4.1. Pregunta general

¿Cómo el profesor de matemáticas usa sus recursos para resolver, en el aula, problemas que involucran números con signo?

1.4.2. Preguntas particulares

a) ¿Cómo usa el profesor de matemáticas el recurso: sistema de referencia cuando resuelve problemas que involucran el uso de números con signo?
b) El libro de texto como recurso usado por el profesor, ¿cómo influye en la selección y comprensión de los problemas discutidos en el salón de clases?

Con base en el Marco conceptual utilizado en esta investigación, las tres preguntas se responden por medio del análisis de las videograbaciones de las clases en las que el profesor de secundaria recurrió a sus recursos, físicos y no físicos, para que los estudiantes comprendieran y resolvieran problemas relacionados con números con signo; básicamente, se pone atención a tres recursos: libro de texto (físico), sistemas de referencia y números con signo (no físicos). El análisis de las entrevistas realizadas a los profesores también ayudó a responder las preguntas de esta investigación

1.5. Justificación del estudio

Con base en la revisión de la literatura, es notorio que se ha investigado sobre los conceptos de sistemas de referencia (e.g., Miranda et al., 2007; Miranda et al, 2013, entre otros) y números con signo (e.g., Almeida & Bruno, 2013; Bruno, 2001; Cid, 2003; Mochón, 1997; Glaeser, 1981, entre otros). Estos conceptos son de gran importancia, en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, pues están estrechamente relacionados entre sí y se debe a que no pueden existir los números con signo, en problemas contextualizados, sin un sistema de referencia (Cid, 2002, 2003; Miranda et al., 2007, 2013; Mochón, 2007, entre otros). En matemáticas no podemos hablar de números positivos y negativos sin antes establecer un sistema de referencia que permita determinar el sentido (signo) de los números. A pesar de la relación que existe entre los recursos: sistemas de referencia y números con signo, no existen investigaciones centradas en ambos conceptos y en la práctica del profesor de matemáticas de nivel secundaria; por ello, surge la necesidad de hacer este tipo de investigación.

La práctica del profesor es de gran interés para los investigadores porque ésta impacta en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Si se pretende que el profesor lleve a cabo una “enseñanza de calidad” (Adler et al., 2005, p. 360), es necesario tener presente que el conocimiento del profesor (entendido como recurso no físico) es fundamental en su práctica docente (Adler, 2000; Gueudet &Trouche, 2009). En diversas investigaciones (e.g., Gueudet & Trouche, 2009; Guzmán & Kieran, 2013), se ha reportado que los profesores tienen, con frecuencia, falta de conocimiento al resolver problemas de índole matemático. Al respecto Artzt y Armour-Thomas (1999) aseguran que la falta de conocimiento de los profesores es fuente de dificultades al enseñar contenidos matemáticos.

Este estudio, también, siguió la línea de investigación que está centrada en los recursos inherentes usados por el profesor en la enseñanza de las matemáticas, y la cual ha cobrado gran interés en los últimos años (e.g., Adler, 2000; Adler et al., 2005; Gueudet & Trouche, 2009; Guzmán & Kieran, 2013, entre otros). Un trabajo significativo sobre este enfoque es el de Adler (2000), quien plantea la necesidad de poner mayor atención a los recursos inherentes en la práctica del profesor, saber qué son y cómo funcionan en la práctica del salón de clases. Por tanto, la presente investigación se caracteriza por investigar y analizar los recursos; en particular, el sistema de referencia y los números con signo (recursos no físicos) y el libro de texto que usa el profesor de matemáticas de educación secundaria en el aula, para resolver problemas de números con signo.

Lo que motivó esta investigación se debe: en primer lugar, como ya se mencionó anteriormente, no existen investigaciones acerca de la relación entre la práctica o el conocimiento del profesor, los sistemas de referencia y los números con signo. En segundo lugar, a pesar de que existen investigaciones relacionadas con los recursos usados por el profesor en su práctica docente, ninguna de éstas menciona o enfatiza el uso consciente o no de los recursos inherentes a su práctica. Finalmente, en tercer lugar, el hecho de que el Plan y Programa de la SEP (2011) no haga mención del concepto Sistema de referencia para enseñar y comprender los números con signo, no quiere decir que esté ausente en la resolución de problemas con este tipo de números. Por ello, es importante considerar ambos conceptos.

Por lo tanto para analizar los datos de la investigación debemos retomar un marco teórico para analizar la práctica del profesor. De esta manera tomamos como referencia el enfoque teórico *Aproximación Documental de lo Didáctico* (ADD, Gueudet & Trouche, 2009, 2010). Este enfoque teórico es presentado y explicado en el siguiente capítulo de esta tesis.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

Para analizar la práctica docente en la resolución de problemas que implican números con signo se necesita de un marco teórico que situé en el centro al conocimiento matemático y la actividad que el profesor desarrolla dentro del aula de clases. Por tanto, en esta investigación se adoptó como marco la *Aproximación documental de lo didáctico* propuesta por Gueudet y Trouche (ADD, 2009, 2010). De ella sólo son tomados en cuenta los conceptos: *trabajo documental*, *recurso y documento, y génesis documental*, los cuales mantienen una estrecha relación para estudiar y comprender la práctica del profesor de matemáticas. Es importante mencionar que la Aproximación Documental de lo Didáctico toma como base la Aproximación Instrumental (Rabardel, 1995), cuyos conceptos básicos son: *artefacto, instrumento y génesis instrumental*.

En el presente capítulo son explicitados los conceptos de la Aproximación Documental de lo Didáctico como base en esta investigación. Es pertinente describir, desde otras posturas teóricas, el concepto de recurso, pues éste es la base de la práctica docente (Gueudet & Trouche, 2009). Además, como parte del marco conceptual de la presente investigación y de acuerdo con la problemática aquí planteada, primero, se describen los significados que adquiere el signo positivo y negativo de acuerdo con Gallardo (1994) y se define el concepto: sistema de referencia.

2.1. SIGNIFICADOS DE LOS SIGNOS: MÁS (+) Y MENOS (-)

En su trabajo doctoral, Gallardo (1994), hizo un estudio histórico-crítico e identifico tres significados que pueden adquirir los signos positivo y negativo al resolver tareas (problemas, ejercicios, etc.) matemáticas. Gallardo (1994), menciona que el signo puede ser concebido como:

a) Unario, con significado estructural, abarca:
   Número relativo, número-solución, número resultado y número negativo formal;

b) Binario, con significado operacional, considera:
   1. Sustracción en aritmética como sustraer, completar y diferencia
   2. Sustracción en algebra como sustraer un número entero, añadir lo opuesto

c) Simétrico, con significado operacional, concibe:
   Lo opuesto de un número

De acuerdo con el trabajo desarrollado por Gallardo (1994), y para efectos de esta investigación, podemos concluir que el signo Unario es aquel que corresponde al número; por ejemplo, $^{+}5$, $^{-}8$, $^{-}4.5$, $^{+}\frac{1}{2}$, y el signo binario corresponde a la operación; por ejemplo, $^{-}5 + {}^{-}8$, $^{+}2.6 - {}^{-}6.5$, $^{-}\frac{1}{3} + {}^{-}\frac{3}{4}$.

En esta investigación se observará si el profesor de matemáticas distingue entre el signo unario y binario cuando resuelve problemas que implican el uso de los números con signo. Se pone atención cuando el docente realiza operaciones con este tipo de números y cuando usa el sistema de referencia para comprender y resolver los problemas planteados en el salón de clase.

2.2. SISTEMA DE REFERENCIA

En su artículo: *¿qué signo realmente tiene la "g"?*, Mochón (1997) menciona que en un problema de caída libre[4], donde intervienen las variables distancia, aceleración y velocidad, los alumnos suelen preguntarse: "¿las variables distancia, velocidad y aceleración, son positivas o negativas?" (p. 69). De acuerdo con el autor, las variables pueden ser tanto positivas como negativas, sólo es cuestión de determinar el sistema de coordenadas adecuado para obtener cada una de las posibilidades.

En términos de Mochón (1997), es necesario establecer el Sistema de referencia para comprender y resolver el problema que implica el uso de números positivos y negativos. En la Figura 2.1 se presentan las posibilidades de determinar el sistema de referencia.

[4] El problema que presenta Mochón (1997) es el siguiente: "Desde lo alto de un edificio de 30 metros se lanza una piedra. ¿Cuál debe ser su velocidad inicial para que tarde 10 segundos en llegar al suelo?" (p. 69).

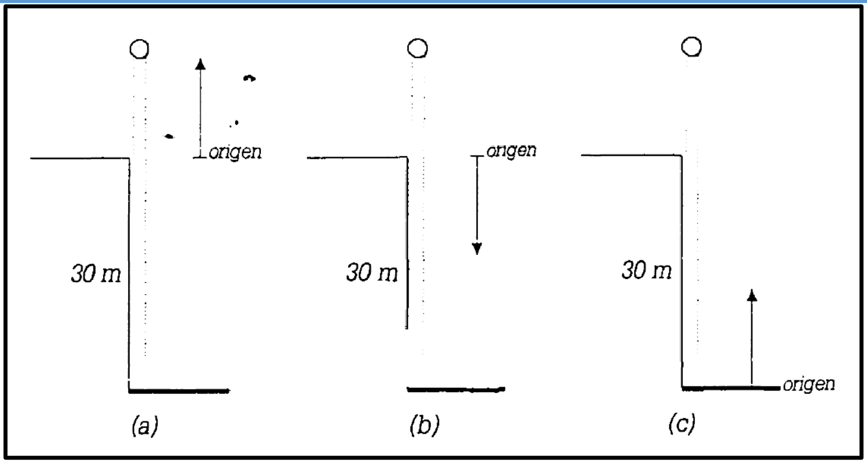


Figura 2.1. Posibles sistemas de referencia para comprender y resolver el problema de caída libre. Figura tomada de Mochón (1997, p. 70).

En el a) y b), de la Figura 2.1, se puede observar que el origen del Sistema de referencia lo ubica desde donde lanzan la piedra, mientras que en el c) el origen es colocado en el nivel del piso. También, establece que el movimiento hacia arriba será positivo en los incisos a y c, mientras que en el inciso b determina que el movimiento hacia abajo será positivo. Se puede observar que el sistema de referencia (origen y relación del movimiento con los números positivos y negativos) lo determina el sujeto.

De esta manera, para esta investigación tomamos las nociones que da Mochón (1997) y la conceptualización del sistema de referencia propuesta por Resnick et al. (1996): "en física, se entiende por sistema de referencia o marco de referencia al conjunto de convenciones usadas por un observador para poder medir la posición y otras magnitudes físicas de un sistema físico".

Esta conceptualización será usada en el análisis de los datos de la presente investigación (véase capítulo 5 de este trabajo), con el propósito de identificar si los profesores reportados usan los sistemas de referencia de forma consciente o no para comprender y resolver problemas que implican el uso de números con signo. Dentro del análisis se pondrá atención a la representación gráfica que usen los docentes con la intención de observar si determinan el origen de sus sistema de referencia y si dan evidencia de determinar las relaciones entre los movimientos de los objetos con los números con signo o sólo se limitan a usar operaciones de suma y resta en el dominio de los números Naturales.

2.3. CONCEPTO DE RECURSO

El concepto de recurso no es nuevo, sin embargo, investigadores como Adler (2000) han tratado de dejar en claro este concepto con la finalidad de poder comprender la práctica del profesor. Esta autora lo analiza desde la composición de la palabra misma, la descompone como *re-curso* (*re-source*). Afirma que la re-conceptualización del término recurso es necesaria para entender y comprender la importancia que tiene, el recurso, en los procesos de enseñanza y de aprendizaje; sobretodo, el papel que juega el profesor a partir de los recursos que dispone en su práctica docente.

Para Adler (2000), los recursos son parte fundamental del quehacer del profesor de matemáticas, porque en ellos se apoya para enseñar los contenidos; sin embargo, esta autora aclara que depende del uso que les dé para permitir u obstaculizar su conocimiento matemático para la enseñanza.

De acuerdo con Adler (2000), los recursos usados en educación matemática se pueden analizar desde su verbalización, considerando a estos como sustantivo (objetos) y como verbo (acciones) en la práctica y formación del profesor de matemáticas. La autora aborda, también, la formación de los profesores y las actividades relacionadas con dicha formación, hace énfasis en que ésta debe estar centrada en la conceptualización de los recursos que son inherentes a la práctica docente en el proceso de enseñanza.

En ese sentido, la formación de los profesores de matemáticas tendría que abordar los recursos que usan en su práctica docente; ampliando el concepto más allá de lo implica en su sentido común; en otras palabras, considerar a los recursos como objetos materiales (físicos) que forman parte del ambiente de la enseñanza y del aprendizaje, además, incluir los recursos humanos y culturales que intervienen. También, considerar en tal formación una reflexión sobre cómo los recursos son una extensión del profesor, en el sentido de que son de él en su práctica y los cuales inciden en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Para Adler (2000), el enfoque más común que se da a los recursos en educación está centrado en los materiales físicos y los recursos humanos. Estos recursos básicos son fundamentales para el funcionamiento de la institución escolar; sin embargo, no son suficientes para entender la dinámica que se da en el salón de clases; por ello, es necesario extender el concepto básico de recurso. Adler hace la siguiente categorización de estos recursos (materiales físicos, humanos y culturales) que intervienen en la práctica docente:

- Los recursos humanos: están vinculados directamente con los docentes que enseñan matemáticas y con los procesos (acciones) que utilizan en su práctica educativa. El profesor es obviamente un recursos humano fundamental, y la importancia de este recurso no es solo en función de su capacitación formal sino, también, porque él es el responsable del proceso de enseñanza. En la investigación y en el debate en la formación de profesores de matemáticas se continúa explorando la base del conocimiento del profesor en sus componentes y su profundidad: ¿qué tipo de conocimiento matemático conoce? ¿Qué conocimiento didáctico tienen el contenido matemático a enseñar? ¿Cuál es la relación entre estos dos tipos de conocimientos? Estas y otras preguntas pueden ser planteadas respecto a los recursos humanos que intervienen en la práctica docente.
- Los recursos materiales y no materiales: los recursos materiales son referidos a los objetos físicos que ayudan en el proceso de enseñanza; por ejemplo, las tecnologías y los materiales escolares usados en la enseñanza de las matemáticas. Los recursos no materiales se refieren a los símbolos matemáticos usados normalmente en los cursos de matemáticas; por ejemplo: x, y, etc.

  Las herramientas tecnológicas, como recursos físicos, incluyen: el pizarrón electrónico, la calculadora, la computadora y el software especializado (como el software de geometría dinámica), por mencionar algunos. Los recursos materiales en la escuela, incluyen, por ejemplo: libros de texto y materiales didácticos escritos, específicamente para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares: los geoplanos, las calculadoras, por mencionar algunos.

  Los objetos matemáticos, como recursos no materiales, son amplios; van desde unas sucesiones numéricas simples hasta teoremas complejos, incluyendo una amplia gama de objetos matemáticos; por ejemplo, una expresión algebraica, una representación del triángulo en el plano cartesiano, etc. El contexto es el que determina la utilización de los objetos cotidianos, ya que en sí mismos no tienen ninguna relación directa con la clase de matemáticas que se desarrollan en el aula, sino que estos objetos están constituidos por las prácticas culturales cotidianas, como comprar y vender, medir y comunicar.

- Los recursos culturales: son menos visibles, pero son creados y desarrollados culturalmente, y forman parte del contexto de la enseñanza; estos son el lenguaje y el tiempo. El lenguaje es un recurso cultural y social que incluye la verbalización de los estudiantes durante la clase, así como el intercambio de ideas con y entre los alumnos. El tiempo se puede considerar como recurso cultural; utilizado de formas diferentes en las zonas urbanas y en las rurales. La función del tiempo en la escuela es a través de los horarios de clase y de los tiempos para llevar a cabo las actividades de aprendizaje, tanto en la estructura que da el profesor a la clase como a las tareas.

En la Tabla 2.1 se muestra la categorización de los recursos para la enseñanza de las matemáticas en la escuela propuesta por Adler (2000).

Tabla 2.1.
Recursos básicos para el funcionamiento de la escuela (Adler, 2000, pp. 212-213)

Recursos	**Ejemplos**	**Observaciones**
Materiales	Edificio para la escuela, salones de clase, servicios sanitarios, electricidad, escritorios, pupitres, sillas, pizarrones, lápices, plumas, plumones, papel, etc.	Indispensables para el buen funcionamiento de la estructura escolar.
Humanos	Relaciones profesor-alumno, tamaño del grupo de clase, criterios de evaluación, alcance y contenido de la calificación.	
	Otros recursos y su Transparencia	
Humanos	Personas: los conocimientos del profesor y los padres. Procesos: colegialidad	En cuanto al alcance, el contenido y la orientación no hay consenso. Para asegurar la continuidad de la práctica, así como los cambios que surjan.
	Tecnologías: pizarrones, calculadoras, computadoras, fotocopiadoras, etc. Materiales de matemáticas de la escuela: libros de texto, otros textos, geoplanos, software didáctico, etc. Objetos matemáticos: pruebas, rectas	Es necesaria la invisibilidad para que la práctica se vea a través de la tecnología. Los significados matemáticos no son evidentes en sí; las posibilidades pedagógicas son construidas en la acción, la pedagogía centrada en el aprendizaje

	numéricas, cuadrados mágicos, etc.	puede llegar a hacerlos visibles.
Materiales	Objetos cotidianos: dinero, periódicos, cuentos, calculadoras, reglas, etc.	Son objetos específicamente matemáticos pero con contexto social, asimismo, deben ser visibles e invisibles. Fuera de las matemáticas, también, deben ser visibles e invisibles.
Sociales y culturales	Idioma: verbalización y comunicación. Tiempo: calendario, duración de los periodos de clase, tareas, etc.	La estructuración del tiempo necesita ser visible e invisible, con nuevas pedagogías o cuando la escolarización se rompe puede ser demasiado visible.

Remillard (2013), afirma que es necesario tomar perspectivas en el uso de los recursos por parte del profesor. Establece que existe una relación dinámica entre el docente y los recursos disponibles en su práctica. Este autor menciona que los recursos se pueden considerar:

- Como herramientas para el trabajo de diseño. La manera de percibir a los recursos, en su forma más común, es como una herramienta que apoya, orienta y refuerza el trabajo de diseño para la enseñanza, tanto en la preparación como en el trabajo en el aula. En este punto de vista teórico, el profesor y la herramienta son participantes activos en el trabajo de diseño (Remillard, 2005);
- como artefactos para el trabajo de diseño. Desde una perspectiva socio-histórica, los recursos como herramientas, son artefactos; los cuales, a partir del uso que les del profesor, se convierten en instrumentos que permiten realizar el trabajo de diseño, y
- como objetos en el trabajo de diseño. Esta perspectiva parte de las dos anteriores.

2.4. Aproximación Documental de lo Didáctico

2.4.1. Introducción a la Aproximación Documental de lo Didáctico

El enfoque teórico propuesto por Gueudet y Trouche (2009) surgió como una extensión de la Aproximación instrumental (Rabardel, 1995) y permite indagar y analizar la práctica docente, así como el desarrollo del profesor de matemáticas. La Aproximación instrumental tiene como conceptos claves: artefacto, instrumento y génesis instrumental; mientras que, la aproximación documental de lo didáctico tiene como componentes: recurso, documento y génesis documental, por nombra algunos.

Según Rabardel (1995), un artefacto es un objeto físico o simbólico con significado cultural y social que sirve para dar sustento a la actividad humana en la ejecución de ciertas tareas. Rabardel distingue entre el artefacto e instrumento. Este último se construye a través del artefacto y el uso que le dé el sujeto; es decir, el artefacto llega a ser instrumento a través del uso (actividad) que le dé el sujeto, con base en sus conocimientos y métodos de trabajo, y de las características mismas del artefacto.

El instrumento es el resultado de un proceso llamado génesis instrumental, a través del cual el sujeto construye esquemas de utilización de ese artefacto para una clase dada de situaciones. El instrumento no puede ser considerado sólo como un artefacto y se debe a que el sujeto construye esquemas de utilización; es decir, el instrumento está compuesto por el artefacto y los esquemas de utilización de éste. Drijvers y Trouche (2008, p. 368) presentan esta relación como:

Instrumento = artefacto + esquema de utilización

Respecto a los esquemas de utilización, Drijvers y Trouche (2008), mencionan que éstos no se pueden observar de manera directa en los sujetos, sino a través de su práctica docente; en otras palabras, cuando los sujetos resuelven actividades o problemas utilizando artefactos. Las personas pueden elaborar esquemas de utilización no apropiados para resolver una actividad en específico o basarse en concepciones erróneas; por lo tanto, los esquemas de utilización no son fáciles de construir.

La génesis instrumental tiene una naturaleza dual porque presenta dos procesos dinámicos relacionados entre sí. Por un lado, la instrumentalización está dirigida hacia el artefacto; el sujeto es quien guía la forma en que se utiliza el artefacto, y en cierto sentido, da forma al artefacto. Por otro lado, la instrumentación está dirigida hacia el sujeto; las posibilidades y limitaciones del artefacto influyen en la actividad del sujeto (Rabardel, 1995). El proceso de la génesis instrumental es iterativo ya que un instrumento, creado a partir de un artefacto, se puede considerar como un nuevo artefacto, y una vez que el sujeto lo usa, se genera un nuevo instrumento y así sucesivamente.

Gueudet y Trouche (2009), con base en la génesis instrumental, proponen su Aproximación Documental de lo Didáctico. Este nuevo enfoque permite comprender y analizar la práctica del profesor, a través de sus componentes principales que son: recurso, documento, trabajo documental y génesis documental los cuales son descritos a continuación.

2.4.2. Aproximación Documental de lo Didáctico

En el ámbito de la educación matemática existen diversas investigaciones que discuten el concepto de recurso (e.g, Adler, 2000; Gueudet & Trouche, 2009; Remillard, 2013, entre otros). A partir de las ideas de Adler, con el objetivo de analizar cómo el profesor de matemáticas se apropia de los recursos y los transforma en documentos, Gueudet y Trouche (2009) proponen su enfoque teórico: Aproximación documental de lo Didáctico. Gueudet y Trouche (2009) abordan el significado y uso de los recursos desde la práctica del profesor. Estos autores consideran que los recursos usados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas abarcan tanto los materiales básicos para la enseñanza, así como los conocimientos del profesor, las discusiones con los alumnos, las reflexiones que lleva a cabo el docente al interactuar con sus colegas, al preparar las actividades para sus clases.

De acuerdo con la ADD (Gueudet & Trouche, 2009) el profesor usa recursos físicos (e.g., pizarrón, computadora, calculadora, libro de texto, Programa de estudio, entre otros) y no físicos (e.g., conocimiento matemático y didáctico, entre otros) en su práctica docente. En otras palabras, todo lo que usa el profesor para llevar a cabo su práctica es considerado por estos autores como recurso. En la práctica, el recurso no está aislado de otros, sino que pertenece a un conjunto de recursos disponibles para resolver tareas dadas en el aula de clases.

2.4.2.1. Documento y trabajo documental del profesor de matemáticas

Gueudet y Trouche (2009, 2010) afirman que los recursos por ellos mismos no cambian la práctica del profesor, sino que los cambios significativos se dan cuando el profesor lleva a cabo un trabajo documental. De acuerdo con la ADD, el profesor interactúa e interacciona con los recursos disponibles para definir su trabajo en el salón de clases (trabajo documental).

El trabajo documental se puede dar dentro o fuera del aula de clases y hace referencia a: “buscar recursos, seleccionar o diseñar tareas matemáticas” (Gueudet &Trouche, 2009, p. 199) para implementar en las sesiones de clase. También, en el trabajo documental, se incluye el resultado (producto) obtenido de los recursos disponibles; este producto es llamado: documento.

Dentro de este enfoque teórico, ADD, se establece que el documento es originado por el profesor a través de apropiarse y transformar los recursos, con los que interacciona y al mismo tiempo estos recursos influyen en el conocimiento y la actividad del profesor. Gueudet y Trouche (2009) plantean que “los documentos pueden ser considerados en la forma del verbo documentar: para apoyar algo (en este caso, la actividad profesional del profesor) con los documentos” (p. 205).

2.4.2.2. Génesis documental

La transformación de recurso a documento se lleva a cabo a través del proceso denominado: génesis documental. Del mismo modo que en la génesis instrumental, la génesis documental involucra los procesos de instrumentalización, que es la apropiación y transformación de los recursos, y la instrumentación que se refiere a la influencia de los recursos sobre la práctica del profesor. El profesor al usar, transformar y apropiarse de los recursos disponibles en su práctica docente genera un documento y, cuando esto sucede, se ha producido la génesis documental. El documento obtenido influye en la práctica del docente y éste se convierte en un nuevo recurso para él.

De manera análoga a la génesis instrumental (Rabardel, 1995), en el profesor ocurre una génesis documental (Gueudet & Trouche, 2009). En el enfoque documental, este tipo de génesis se aplica al campo de la práctica docente y al desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En este proceso de génesis, el profesor se apropia y transforma los recursos disponibles en documentos; al mismo tiempo, construye también sus esquemas de utilización (Gueudet & Trouche, 2009); por ello, un documento es un conjunto de recursos y esquemas de utilización de esos recursos en una determinada clase de situaciones. De esta manera, la relación entre documento y recurso puede ser expresada de la siguiente manera:

Documento = recurso + esquema de utilización (Gueudet & Trouche, 2009, p. 205)

Estos investigadores sostienen que la transformación de recurso a documento, se da de forma gradual y continua, en la que el profesor construye sus propios esquemas de utilización. Para Gueudet y Trouche (2009, 2010), dichos esquemas son reglas de acción e *invariantes operatorios* y pueden ser observados en la práctica del profesor a través de sus acciones (e.g., discurso, procedimientos, entre otros). En este sentido, un esquema de utilización está integrado por una parte visible y tangible llamada *usos*, y una parte no visible e implícita llamada invariantes operatorios (Gueudet & Trouche, 2009).

Los invariantes operatorios se refieren a los conocimientos que guían y determinan el quehacer del profesor, Gueudet y Trouche (2009) afirman que son los conocimientos susceptibles de intervenir en la práctica docente: "fuerzas impulsoras y resultados de la actividad del profesor, instrumentadas por un conjunto de recursos" (p. 205). El siguiente esquema muestra una representación que hacen los autores acerca de la génesis documental.

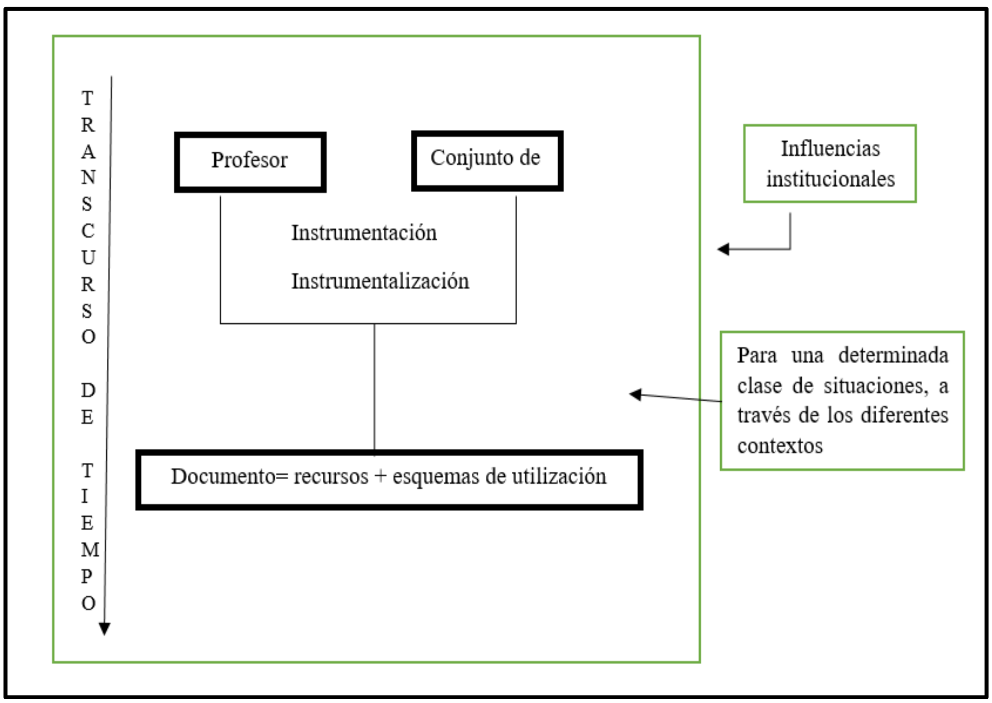


Figura 2.2. Esquema de representación de la génesis documental, tomado de Gueudet y Trouche (2009, p. 206).

La génesis documental tiene un carácter dialectico y dinámico, ya que la interacción que efectúa el profesor con los recursos disponibles lo llevan a crear un primer tipo de documento, que a su vez se convierte en un nuevo recurso; de tal modo que cuando el profesor interactúa con este nuevo recurso lo lleva a la creación de otro documento. Al respecto, Gueudet y Trouche (2009) mencionan que:

> La génesis documental no debe ser considerada como una transformación de un conjunto de recursos como entrada, y un documento como salida. Es un proceso continuo. Consideramos aquí que un documento generado por un conjunto de recursos proporciona nuevos recursos, lo que conducirá a un nuevo documento. Debido a este proceso, hablamos de la relación dialéctica entre los recursos y los documentos. (p. 206)

De acuerdo con la Aproximación documental de lo didáctico, la noción de invariante operatorio es compatible con el proceso dinámico de la génesis documental (Gueudet & Trouche, 2010). Ante nuevos recursos usados el profesor pone en juego su repertorio de invariantes operatorios; estos se asocian y transforman para generan nuevos invariantes operatorios.

En la presente investigación, se discuten y documentan los recursos que usa el profesor de matemáticas de primer grado de educación secundaria para resolver problemas de números con signo; se da mayor énfasis a los recursos: sistemas de referencia y números con signo positivo y negativo. Los conceptos teóricos de la ADD que se han bosquejado en este capítulo: el recurso, el trabajo documental y la génesis documental; así como la relación entre ellos, son utilizados en el análisis de los datos. Estos conceptos permiten entender cómo el profesor se apropia de los recursos, al construir sus esquemas de utilización, y los transforma en documentos, en el sentido de la ADD. En el siguiente capítulo se describen las características metodológicas de esta investigación.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este capítulo se describe el método usado en la presente investigación. En la primera parte, se hace referencia a las características del estudio; en la segunda parte, se describe la población participante, así como las condiciones tomadas en cuenta para la selección de dicha población. En la tercera parte, se aborda la manera en que fueron recabados los datos y los instrumentos usados para el acopio de los mismos. Finalmente, en la cuarta parte, se explica y justifica el contenido matemático y curricular en que se centra esta investigación.

3.1. TIPO DE ESTUDIO

Esta investigación es de corte cualitativo, ya que pretende analizar la práctica del profesor llevada a cabo en un ámbito donde se enseñan y aprenden matemáticas (Álvarez, 2003; Cohen, Manion & Morrison, 2007; Taylor & Bogdan, 1984). La investigación cualitativa establece que el conocimiento es el resultado de la interacción entre el individuo y su entorno; por tal motivo, es indispensable tomar en cuenta el escenario, las personas o grupos y permanecer próximos al mundo empírico (Álvarez, 2003). El presente estudio permite descubrir y analizar los recursos usados por el profesor de matemáticas de primer grado de educación secundaria; en particular, el sistema de referencia como un recurso para resolver problemas que implican el uso de números con signo.

La mejor forma de conocer, interpretar y analizar lo que sucede en el proceso de enseñanza es estar en el medio donde se lleva a cabo dicho proceso; para ello, como parte de la metodología a seguir en esta investigación fue el observar al profesor en su contexto natural: el salón de clase. Al respecto, como afirma Álvarez (2003) "observando a las personas en su vida cotidiana escuchándolas hablar sobre lo que tienen en mente, y viendo los documentos que producen, el investigador cualitativo obtiene un conocimiento directo de la vida social" (p. 26). Estar en el lugar donde se da el proceso de enseñanza permite obtener los datos de primera fuente, es decir, captar todo aquello que sucede en el aula y que se relaciona con el quehacer del profesor. Por su parte, en términos de Taylor y Bogdan (1984), en esta investigación cualitativa se busca producir datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable.

Asimismo, entre las características atribuidas al presente estudio, se retoman siete de las diez que Taylor y Bogdan (1984) sugieren para toda investigación de corte cualitativo:

1. En la metodología cualitativa, el investigador ve el escenario y a las personas en una perspectiva holística; las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo;
2. Los investigadores cualitativos son sensibles a los efectos que ellos mismos causan sobre las personas, objeto de su estudio;
3. Los investigadores cualitativos tratan de comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas;
4. El investigador cualitativo suspende o aparta sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones;
5. Para el investigador cualitativo, todas las perspectivas son valiosas;
6. Los métodos cualitativos son humanistas, y
7. Los investigadores cualitativos dan énfasis a la validez en [de] su investigación.

El método en el que se apoya esta investigación es el estudio de caso, cuya finalidad es comprender a profundidad la realidad social y educativa. Los estudios de caso, de acuerdo con Cohen et al. (2007), son ejemplos específicos diseñados para ilustrar un “principio más general” (p. 251), y a partir de ellos pueden indagar situaciones, no necesariamente, susceptibles de un análisis cualitativo. En los estudios de caso son abordados ejemplos específicos que hacen referencia a un sistema de estudio delimitado (e.g., un niño, grupo de personas y escuela) y proporcionan un ejemplo único de gente real en situaciones reales (Cohen et al., 2007).

En cambio, Godino (1999) considera que la investigación cualitativa requiere de un seguimiento continuo, completo y detallado de los procesos que tienen lugar en un determinado contexto, y este hecho hace que sea necesario centrar las actividades de experimentación en pocos individuos y a este tipo de trabajo se le conoce como estudio de caso. Por su parte, Hitchcock y Hughes (1995, citado en Cohen et al., 2007) consideran que un estudio de caso tiene las siguientes características distintivas:

1. Tiene que ver con una descripción rica y viva de los acontecimientos.
2. Proporciona una narración cronológica de los hechos.
3. Mezcla una descripción de los eventos con el análisis de ellos.
4. Se centra en los actores o grupos de actores individuales, y busca entender su percepción de los acontecimientos.
5. En él se destacan los eventos específicos que son relevantes para el caso.
6. El investigador está implicado integralmente en el caso.
7. Se intenta retratar la riqueza del caso, por escrito, en el informe.

3.2. PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN

Como parte de la población participaron profesores de matemáticas de primer grado de educación secundaria. Para ello, se acudió a varias secundarias públicas de la Ciudad de México y el Estado de México con el propósito de invitar a los docentes a participar en esta investigación. Para que aceptaran colaborar, se les explicó a ellos y a las autoridades correspondientes (Director de la institución) la metodología a seguir en el acopio de los datos: a) videograbación de las clases en las que abordan el tema de los números con signo (enteros, SEP, 2011, pp. 34-38) y, posteriormente, b) una entrevista para comprender y analizar si el profesor es consciente o no de los recursos usados en la resolución de problemas que implican esos números.

Aun cuando siete profesores se interesaron en participar en el acopio de los datos, sólo se pudo realizar el estudio con cinco de ellos y se debió a que sus directores de escuela también accedieron. Para la participación de los docentes no se consideraron las siguientes variables: edad, género, experiencia docente y formación académica.

De los cinco docentes que participaron en la investigación, cuatro laboran en la Ciudad de México y uno en el Estado de México. Como parte de la metodología, el estudio tuvo lugar, primero, en el aula de clases donde cada profesor imparte sus clases, y después, para la entrevista, en un espacio dentro o fuera de la escuela en la cual ellos laboran.

Para el acopio de los datos, en esta investigación se trabajó con los profesores: Marco, Saúl, Juan, Laura y Pedro (pseudónimos). Es importante mencionar que se videograbaron las clases de los cinco docentes en las cuales resolvían problemas de números con signo; sin embargo, sólo a dos de ellos (Saúl y Pedro) se les entrevistó. La elección de éstos se debió a que, al resolver los problemas propuestos durante las clases observadas, fueron los únicos que usaron sistemas de referencia sin tener idea de ello; en otras palabras, no eran conscientes de esos recursos. Es importante mencionar que estos dos profesores usaron una representación gráfica para comprender el problema y este recurso permitió, al investigador, observar con más claridad cómo es usado el sistema de referencia. Por ello, y además de que su participación fue la más representativa respecto a sus colegas, el análisis aquí reportado está centrado en Saúl y Pedro.

La participación de Pedro y Saúl fue la más representativa para esta investigación debido a que sólo ellos trabajaron problemas que se contextualizan por arriba del nivel del suelo llano y por debajo del nivel del mar. Consideramos que estos tipos de problemas permiten usar distintos Sistemas de referencia. Además Saúl y Pedro, a diferencia de sus colegas, recurrieron a la representación gráfica para comprender y resolver los problemas; es decir, recursos que no usaron Juan, Laura y Marco. Estos últimos profesores sólo resolvieron problemas usando operaciones con números con signo; por ejemplo, como problema para resolverlo con alguna operación, establecieron: “si una persona en un juego de puntos, primero ganó cuatro puntos, después perdió 2 puntos y finalmente ganó seis puntos, ¿cuántos puntos obtuvo al final?”

La elección de Saúl y Pedro, para ser reportados en esta investigación, se debe a que ellos usaron Sistemas de referencia distintos cuando resuelven problemas que implican el uso de los números con signo. Ello nos permitió conjeturar que no son conscientes del uso de este recurso.

A partir de un análisis preliminar de las clases videograbadas consideramos como hipótesis que los profesores usan de manera ocasional sistemas de referencia –recurso no físico– sin ser conscientes de ellos.

3.2.1. Características de los profesores reportados

Saúl y pedro, al igual que el resto de sus colegas participantes, son profesores comprometidos con la educación e interesados en enseñar los contenidos matemáticos propuestos por la SEP (2011). Para lograr los objetivos y responder las preguntas de esta investigación, se decidió reportar los datos de estos docentes debido a los siguientes motivos: Saúl usa, de forma no consciente, distintos sistemas de referencia para resolver problemas de números con signo; en cambio Pedro, no distingue entre los significados de los signos y confunde el signo de la operación (binario, Gallardo, 1994) con el signo del número (unario, Gallardo, 1994) al resolver problemas de números con signo.

El profesor Saúl trabaja en una escuela secundaria pública del Estado de México. Para su formación profesional, él estudió en la Escuela Normal Superior de Chalco –ubicada en el Estado de México– e hizo una especialidad en Matemáticas. Saúl tiene, poco más de, 26 años como docente de matemáticas en educación secundaria e imparte esta asignatura en los tres grados educativos. Durante su participación en esta investigación, uso como recurso el libro: *Complemento matemático 1*, de Casarrubias y Gómez (2015).

Por su parte, el profesor Pedro labora en una escuela secundaria pública de la Ciudad de México. Él estudió la licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas en la Escuela Normal Superior de México –ubicada en la Ciudad de México-, y tiene tres años de experiencia como titular frente a grupo y un año de prácticas profesionales. Pedro ha trabajado con los tres grados de educación secundaria. Como parte de su práctica docente, durante la videograbación de sus clases, el solía recurrir al libro de texto, que proporciona la SEP: *Matemáticas 1*, de Block y García (2013), pero al considerarlo deficiente lo complementó con otro libro de texto: *Matemáticas 1. Primer curso*, de caballero, Martínez y Bernárdez (1994).

3.3. ACOPIO DE DATOS

El acopio de datos en esta investigación se realizó en dos etapas. En la primera, se implementó la observación no participativa para recabar datos con base en la práctica del profesor en el salón de clases. En esta etapa se videograbaron las clases en las que Saúl y Pedro “enseñaron” el concepto de número entero [números con signo]; en particular, las observaciones fueron principalmente en la resolución de problemas que implican el uso de dichos números. En la segunda etapa, el instrumento utilizado fue la entrevista, previa elaboración de un protocolo, para cada uno de los profesores reportados en este trabajo. A continuación, se describe cada una de las etapas.

3.3.1. Primera etapa. Videograbación de las sesiones

En la primera etapa, se videograbaron las sesiones de clase de los cinco profesores que participaron en la investigación, y en las cuales enseñaron a los alumnos los números positivos y negativos (números con signo). También, se realizó un análisis de estas videograbaciones y el libro de texto usado por cada profesor –seleccionado para la entrevista- en torno a la resolución de problemas de números con signo.

A través de las videograbaciones se observó a cada profesor en su medio natural –salón de clase- en el cual usaron los recursos disponibles para enseñar los números enteros. Para llevar a cabo el acopio de los datos en el aula de clases, nos apoyamos en la observación no participativa como instrumento de investigación válido y fiable (Cohen et al., 2007). Al respecto, de acuerdo con Álvarez (2003), la observación no participativa es definida como el “acto de notar un fenómeno, a menudo con instrumentos, y registrándolo con fines científicos” (p. 104).

Las observaciones se llevaron a cabo en las fechas y tiempos determinados por cada profesor. Se videograbaron todas las sesiones de clase en las que se trabajaron los números positivos y negativos, pues el propósito era captar el mayor número de recursos usados por los docentes en la enseñanza de estos contenidos matemáticos (SEP, 2011). Durante el tiempo de grabación, el observador buscó no influir en el desarrollo de las clases, en otras palabras, “trató de pasar lo más desapercibido posible y no tener ningún tipo de relación con los miembros del aula” (Godino, 1999, p. 172).

En la Tabla 3.1 se muestra el número de sesión de clase videograbadas de cada profesor que participó en la primera etapa del presente estudio. Se intentó cubrir el total de sesiones, desde que iniciaron con el tema de los números con signo (e.g., definición, operaciones, algoritmos, etc.) hasta que culminaron con la resolución de problemas; sin embargo, no fue posible con todos los profesores, puesto que algunos no lo permitieron. Por ejemplo, Pedro sólo autorizó que se videograbaran las clases en que resolvió problemas con números con signo.

Tabla 3.1

Número de sesiones videograbadas de cada profesor

Profesor	*Formación académica*	*Clases videograbadas*
Marco	Normalista	10
Saúl	Normalista	8
Juan	Lic. en matemáticas aplicadas	6
Laura	Normalista	15
Pedro	Normalista	3

Por otro lado, como parte de la primera etapa, también se analizaron las videograbaciones de cada profesor con el propósito de observar e identificar los recursos que cada uno de ellos usó en la resolución de problemas de números con signo. El análisis se llevó a cabo tomando como referente el concepto de recurso dado en la Aproximación Documental de lo Didáctico (Gueudet & Trouche, 2009). Después de identificar los recursos más representativos que usó cada profesor, se tomaron extractos de las videograbaciones; en particular, se recuperan las soluciones que hace Saúl en los problemas del avión y del submarino (véase Capítulo 4 de este trabajo), y las soluciones propuestas por Pedro en los problemas de la mosca y del submarino (Ver Capítulo 5 de este documento). Como parte de la triangulación de los datos (Cohen et al., 2007), los extractos fueron revisados y analizados por el asesor de esta investigación para corroborar lo identificado por el investigador respecto a los recursos usados por los docentes en los problemas seleccionados.

Después de realizar el análisis en conjunto, asesor e investigador, consideramos como hipótesis que los profesores Saúl y Pedro no eran conscientes de que usaban sistemas de referencia como recurso para resolver los problemas con números con signo. Saúl cambio de sistema de referencia al resolver un problema que se contextualiza por debajo del nivel del mar (problema del submarino) sin hacer explícito dicho cambio a los alumnos; además, en ningún instante hizo referencia a los números con signo porque, para él, sólo es necesario establecer las operaciones (adición o sustracción).

Por su parte, Pedro, dio muestra de confundir el signo de la operación con el signo del número cuando salió del sistema de referencia (forma gráfica) para realizar las operaciones y, en éstas, no considera los signos de las cantidades; esto, nos permitió observar un uso no consciente del sistema de referencia. Por ello, fue necesario realizar una entrevista a los dos profesores con el objetivo de observar y confirmar si son o no conscientes del uso de su recurso (sistema de referencia) y determinar cuáles son sus argumentos.

También, como parte de la primera fase del estudio, se realizó un análisis de los libros de texto usados por Saúl y Pedro en torno a los problemas que involucran el uso de números con signo (véase Capítulo 5, pp. 47-99, de este documento). El propósito es saber cómo influye este recurso en la práctica del profesor de matemáticas; observar si los contenidos del libro son tomados en el desarrollo de la clase y si el profesor reproduce, textualmente, la forma de resolver los problemas que propone el libro de texto o si realiza modificaciones a dicha propuesta en su práctica. Es importante mencionar que el análisis estuvo centrado en cómo son planteados los problemas y la manera en que se sugiere la solución de los mismos.

3.3.2. Segunda etapa. Entrevista

En la segunda etapa, con base en los datos recabados en la primera etapa, fueron invitados los profesores Saúl y Pedro para ser entrevistados con el propósito de mostrar si son o no conscientes de los sistemas de referencia que usaron como recurso al resolver problemas de números con signo, y tratar de entender su práctica docente. Se pretendió que los profesores analizaran y argumentaran el uso de sus recursos; en particular, sobre el sistema de referencia, por lo tanto, las preguntas incluidas en el protocolo de entrevista fueron abiertas (Cohen et al., 2007) y centradas sobre el sistema de referencia usado en la resolución de problemas que involucran números con signo.

Se recurrió a la entrevista semi-estructurada como instrumento para recabar datos; en términos de Álvarez (2003), el investigador la usó como una forma de buscar y “entender el mundo desde la perspectiva del entrevistado, y desmenuzar los significados de sus experiencias” (p. 109). En la entrevista, se le pidió al profesor que primero observará el extracto de video de sus clases y, posteriormente, el investigador le hizo las preguntas del protocolo. Es importante mencionar que el investigador modifico, añadió o quito preguntas del protocolo de entrevista con base a las respuestas que fue dando el profesor. Esto fue necesario debido a la información que proporcionaba cada profesor en el momento de la entrevista.

Cohen et al. (2007) destacan que en las entrevistas semi-estructuradas el investigador tiene la libertad de modificar el orden de las preguntas, explicar o añadir información durante el desarrollo de ésta; además, puede dar alguna información extra al entrevistado de forma conversacional. Estos autores mencionan que este tipo de entrevista es una situación abierta, en la que se dispone de mayor flexibilidad y libertad para dialogar con el entrevistado.

Con el propósito de que los profesores se sintieran cómodos y, así, tener la confianza de preguntarles, ellos decidieron el momento y el lugar para ser entrevistados: Saúl fue entrevistado en la explanada de la escuela y Pedro en su casa. En todo momento se generó un contexto de respeto y confianza entre el investigador y los profesores; para ello, se les informó el propósito de la entrevista y se resaltó la confidencialidad y anonimato de ellos y de la información obtenida.

Durante la entrevista, primero, se le mostro –a cada profesor– un extracto de video de alguna de sus clases cuando resolvió problemas con números con signo; segundo, se le hicieron preguntas (e.g., ¿Qué significa que la altura de la tierra al avión sea 2870 metros?, ¿Qué significa que el avión baje 945 metros?, ¿Los 960 metros, que es la profundidad del submarino, es positiva o negativa?, entre otras) de acuerdo con el protocolo de entrevista (véase anexos, pp. 11-115) y la información proporcionada por el profesor entorno a los recursos utilizados en el salón de clases. La entrevista duro, aproximadamente, 50 minutos con cada docente.

3.4. CONTENIDO MATEMÁTICO Y CURRICULAR

3.4.1. Contenido matemático

El contenido matemático que se aborda en este trabajo está relacionado con los números enteros *[números con signo*]; en particular, con los problemas aditivos. La enseñanza y uso de los números positivos y negativos se trabajan en los tres grados de educación secundaria (SEP, 2011); sin embargo, para esta investigación, nos enfocamos al contenido propuesto en primer grado debido, a que ahí, se propone abordar problemas aditivos con números positivos y negativos.

En el Plan de Estudios 2011 (SEP, 2011, p. 73) se han mantenido la organización de la asignatura a través de los ejes:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico;
2. Forma, espacio y medida, y
3. Manejo de la información

A diferencia del Plan de Estudios 2006 (SEP, 2006) en el Plan resiente se ha incluido un eje llamado: “Actitud hacia el estudio de las matemáticas” (SEP, 2011, p. 15). Este nuevo eje no afecta la organización del contenido matemático. El contenido para cada grado de educación secundaria está dividido en cinco bloques; en cada uno de ellos, se abordan los tres ejes temáticos antes mencionados.

El contenido matemático, que fundamenta esta investigación, está ubicado en los bloques IV y V de primer grado de educación secundaria (SEP, 2011, pp. 34-38). En el bloque IV se introducen, por primera vez, los números negativos, y se enseña a sumar y restar con números negativos y positivos. En el bloque V, se continúa con la enseñanza de los números enteros y se plantean y resuelven problemas aditivos que implican el uso de números negativos y positivos.

La elección de este contenido matemático es importante para esta investigación porque los números negativos han sido estudiados durante mucho tiempo (e.g., Bruno, 2001; Cid, 2003; Gallardo, 1994; Glaser, 1981, entre otros) y hasta la fecha siguen existiendo dificultades en los procesos de enseñanza (e.g., distinguir entre el signo del número y el signo de la operación se debe a la presentación de la notación para las operaciones de números con signo, Detzel et al., 2014, por citar alguno) y aprendizaje (e.g., dar sentido al cero) de estos números.

3.4.2. Contenido curricular

El eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico, en el Plan de Estudios de matemáticas (SEP, 2011), se divide en cuatro temas:

1. Números y sistemas de numeración;
2. Problemas aditivos;
3. Problemas multiplicativos, y
4. Patrones y ecuaciones. (P. 16)

En el bloque IV se trabaja con el primer tema: números y sistemas de numeración; en el bloque V, se trabaja con el segundo tema: problemas aditivos. En la Figura 3.1 y la Figura 3.2 se presentan el contenido matemático y curricular en el plan de estudios SEP (2011).

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente

APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Construye círculos y polígonos regulares que cumplan con ciertas condiciones establecidas. • Lee información presentada en gráficas de barras y circulares. Utiliza estos tipos de gráficas para comunicar información.	NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN • Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.	FIGURAS Y CUERPOS • Construcción de círculos a partir de diferentes datos (el radio, una cuerda, tres puntos no alineados, etc.) o que cumplan condiciones dadas. MEDIDA • Justificación de la fórmula para calcular la longitud	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Análisis de la regla de tres, empleando valores enteros o fraccionarios. • Análisis de los efectos del factor inverso en una relación de proporcionalidad, en particular en una reproducción a escala.

Figura 3.1. Contenido matemático y aprendizajes esperados. Bloque IV, primer grado de educación secundaria. Plan de estudios de educación básica secundaria, 2011, p. 34.

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente

APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Resuelve problemas aditivos que implican el uso de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.	PROBLEMAS ADITIVOS • Resolución de problemas que implican el uso de sumas y restas de números enteros.	MEDIDA • Uso de las fórmulas para calcular el perímetro y el área del círculo en la resolución de problemas.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Resolución de problemas de proporcionalidad múltiple.

Figura 3.2. Contenido matemático y aprendizajes esperados. Bloque V, primer grado de educación secundaria. Plan de estudios de educación básica secundaria, 2011, p. 35.

A partir de esta propuesta del Plan y Programas de la SEP (2011), el profesor se enfrenta a nuevos retos que demandan actitudes distintas frente al conocimiento matemático. “No se trata de que el docente busque las explicaciones más sencillas y amenas, sino de que analice y proponga problemas interesantes” (SEP. 2011, p. 20). Con base en lo anterior, en el desarrollo de la presente investigación se analizan los recursos que usan los profesores, Saúl y Pedro, cuando resuelve problemas aditivos –en el salón de clases– que implican el uso de números con signo (positivos y negativos). Ambos profesores usan el libro de texto (como recurso físico) para impartir sus clases. A continuación, en el siguiente capítulo, hacemos un análisis del contenido matemático, de esta investigación; en particular, como son abordado los problemas aditivos con números con signo en los libros de texto que usa cada profesor. También se reportan los datos recabados; así, como el análisis de los mismos.

Capítulo 4

Análisis del recurso físico

Para enseñar los números con signo a los alumnos de primer grado de educación secundaria, Saúl y Pedro efectuaron un trabajo documental fuera y dentro del salón de clases (Gueudet & Trouche, 2009, 2010), durante este trabajo ellos interaccionaron con sus recursos los cuales les permitieron hacer cambios en su práctica docente. Basados en los datos recabados durante la primera y la segunda etapa de esta investigación se observó que los profesores usaron el libro de texto como recurso físico para enseñar, a los alumnos, los números con signo: en particular, a comprender y resolver problemas aditivos con este tipo de números. A continuación se presentan y discuten las sugerencias didácticas y el contenido matemático de este recurso físico que le ofrece al profesor en torno a la comprensión y resolución de problemas aditivos.

4.1. Libro de texto

El libro de texto es un recurso fundamental en la práctica docente, y los profesores que aquí participaron extrajeron de éste las sugerencias y actividades que consideraron pertinentes para la comprensión y resolución de problemas aditivos de números con signo. En esta sección se revisan y discuten tres libros de texto usados en la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros; en articular, para comprender y resolver problemas aditivos. En la Tabla 4.1 se muestran los libros de texto que cada docente usó como recurso físico en su trabajo documental (Gueudet & Trouche, 2009, 2010) efectuado antes y durante las clases en el aula.

Esta revisión y discusión tiene como propósito explorar la forma en que los autores de estos libros abordan los números enteros (números con signo) y, a su vez, el tipo de problemas que proponen y la propuesta de solución que dan.

Tabla 4.1.
Libro de texto usado por los profesores como recurso físico

Profesor	Libro de texto
Saúl	Complemento matemático 1, Casarrubias y Gómez (2015)
Pedro	Matemáticas 1, Block y García (2013)
	Matemáticas 1. Primer curso, Caballero (1994)

Los autores de cada uno de estos libros de texto buscan cumplir con el conocimiento institucionalizado en el Programa de estudios (SEP, 2011) en torno a la enseñanza de los números enteros a través de la resolución de problemas; de manera que proponen en el recurso físico diversas Actividades e información que consideran relevante para el estudio de estos números y tratando de llevar a cabo las sugerencias didácticas del Programa de estudio.

4.1.1. Libro de texto usado por Saúl

4.1.1.1. Complemento matemático 1, Casarrubias y Gómez (2015)

Como parte de su trabajo documental Saúl usó, durante las clases, el libro de texto *Complemento matemático 1* (Casarrubias & Gómez, 2015) para enseñar los números enteros. A continuación analizamos la forma en que este autor presenta el tema; en particular, los recursos que usa para resolver problemas aditivos que implican el uso de este tipo de números.

Casarrubias y Gómez (2015) inician el tema indicando que “los números que hemos estudiado [*números Naturales*] son números positivos (+). Los negativos (-) se usan para representar cantidades como: 20 metros bajo el nivel del mar (-20), 5 grados bajo cero (-5)” (p. 113). Como se observa, este autor inicialmente no indica que los negativos sean un tipo de número y sólo explicita que se usan para representar cantidades por debajo del cero. Al indicar que las cantidades que están bajo el nivel del mar o bajo cero, implícitamente los autores establece un sistema de referencia en donde el origen es el cero o el nivel del mar y las cantidades por arriba del origen son positivas y por debajo del origen negativas.

La afirmación que dio Saúl le permite, en un principio, contextualizar los números con signo para lograr que los alumnos comprendan el uso de este tipo de números; para esto, él propone algunos problemas (véase Figura 4.1) donde se representan cantidades positivas y negativas de forma concreta, por ejemplo, el termómetro.

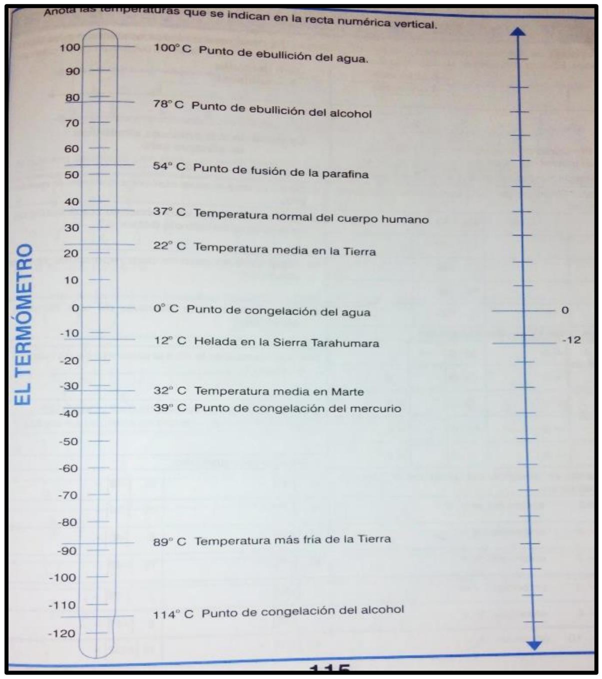


Figura 4.1. El termómetro como recurso para contextualizar los números con signo (Casarrubias & Gómez, 2015, p. 115).

Los autores tratan de definir los números con signo y lo hace como números simétricos. Casarrubias y Gómez (2015) usa la recta numérica como recurso (Gueudet & Trouche, 2009, 2010) para explicar y definir los números simétricos (véase Figura 4.2). Dentro de esta propuesta el autor afirma que “la suma de dos números simétricos siempre es igual que cero, $-6+6=0$”.

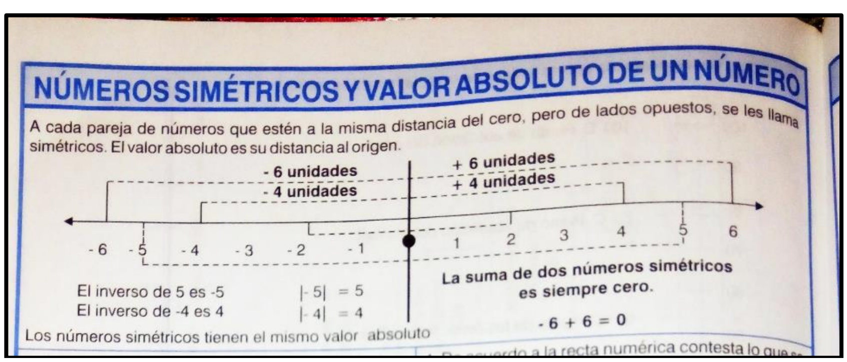


Figura 4.2. Definición de los números con signo (Casarrubias & Gómez, 2015, p. 115).

En esta afirmación se puede observar que los autores no hacen una diferencia entre los significados de los signos más y menos; es decir, no hace una diferencia entre el signo del número y el signo de la operación, unario y binario respectivamente (Gallardo, 1994). Por ejemplo, un ejercicio que propone es "$5-5=0$" entonces, ¿esta operación es una resta de números naturales o una suma de números con signo? Esta forma de escribir las operaciones genera dificultades para comprender el significado de las operaciones y de los números con signo. Lo correcto, si los autores afirman que la suma de dos números simétricos es cero, sería usar tanto y diferenciar el signo del número y el signo de la operación (e.g., $^{+}5+^{-}5=0$).

Casarrubias y Gómez (2015) siguen usando la recta como recurso para comprender los números con signo. Ahora ubican dichos números en la recta numérica. Se debe notar, que a pesar que el programa de la SEP (2011) establece que el tema es: operaciones con números enteros, el autor extiende el contenido y trabaja con números positivos y negativos.

Un recurso que usan los autores para comprender el tema de los números con signo es el plano cartesiano (véase Figura 4.3). Consideramos que este recurso es fundamental para resolver y comprender problemas aditivos contextualizados por arriba o por abajo del nivel del mar, debido a que es un tipo de sistema de referencia en donde, al igual que la comunidad matemática, establece que los números que están a la derecha y hacia arriba del cero (origen) son números positivos, y los que están a la izquierda y hacia abajo del cero serán números negativos.

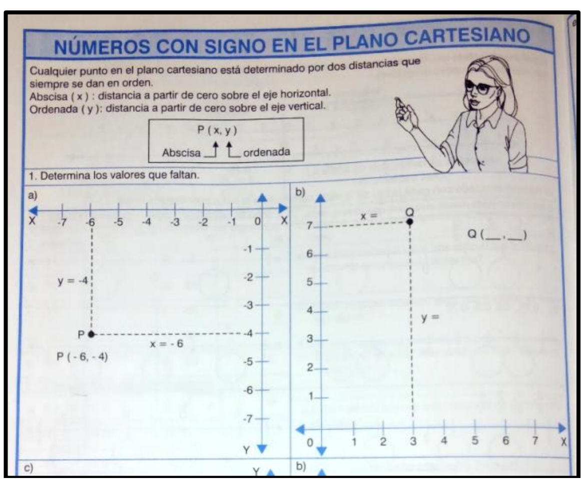


Figura 4.3. El plano cartesiano como recurso para resolver y comprender problemas aditivos (Casarrubias & Gómez, 2015, p. 118).

Una parte fundamental para resolver problemas aditivos es saber operar con los números con signo; para enseñar como sumar y restar, los autores usan la recta numérica. Con este recurso ellos pretenden que los alumnos comprendan como sumar y restar números con signo para que, posteriormente, adquieran el algoritmo para operar dichos números. Al usar la recta numérica para operar números con signo, implícitamente los autores usan el sistema de referencia en el cual determina que para cantidades positivas se tiene que mover hacia la derecha y para las negativas hacia la izquierda (véase Figura 4.4).

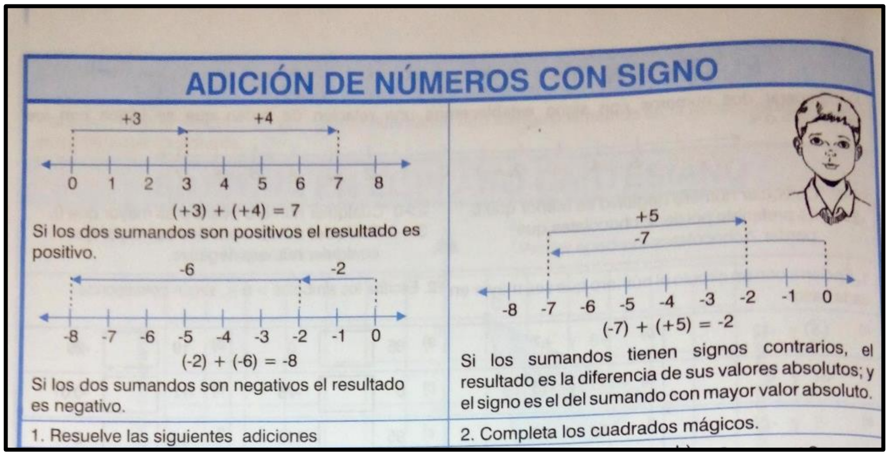


Figura 4.4. La recta numérica como recurso para operar números con signo (Casarrubias & Gómez, 2015, p. 122).

Los autores dan muestra, en este apartado del libro, de distinguir el signo del número y de la operación, no hace ninguna distinción en la escritura; es decir, usa el signo en la misma posición para determinar el signo de la operación y signo del número (e.g., (+5) + (-3)). Esta forma de escribir puede ocasionar errores cuando el alumno, e incluso el maestro, resuelvan problemas aditivos con este tipo de números. Lo ideal sería distinguir en la forma de escribir los signos, por ejemplo, $^{+}5+^{-}3$ y con esta forma de escribir los signos se nota, claramente, que no representa lo mismo el signo más del número cinco y el signo más de la operación; también se evita escribir paréntesis que indica multiplicación.

Finalmente, los autores proponen una serie de problemas aditivos (véase Figura 4.5) para que los alumnos apliquen los conocimientos adquiridos. Sin embargo, Casarrubias y Gómez (2015) no resuelven ninguno de los problemas ni sugieren cómo resolverlos. Consideramos que los autores dan por hecho que los alumnos y docente usaran lo aprendido anteriormente, es decir, sabrán usar los números con signo y las operaciones de suma y resta para representar y resolver los problemas.

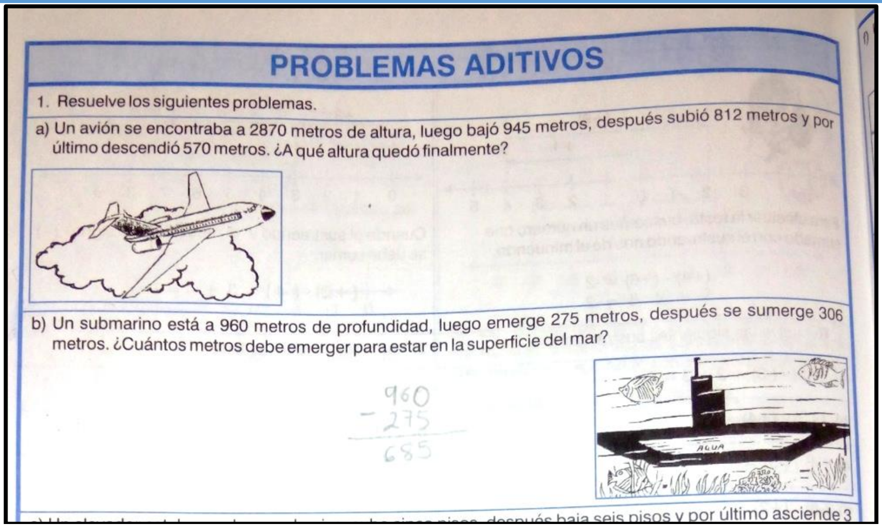


Figura 4.5. Problemas aditivos que implican el uso de números con signo (Casarrubias & Gómez, 2015, p. 124).

Como se puede observar en la Figura 4.5, Casarrubias y Gómez (2015) proponen problemas que se contextualizan tanto por arriba del vinel del mar como por debajo del mismo. Este tipo de problemas se pueden resolver usando las operaciones de suma y resta o, también, usando la representación gráfica como recurso para comprender y resolver el problema. La forma de resolver cada problema es elección de quien lo intenta resolver debido a que el autor no da posibles formas de resolverlo; a pesar de esta libertad, se esperaría que usaran las relaciones que el autor, implícitamente estableció: movimientos hacia la derecha o por arriba del cero son positivas y movimientos hacia la izquierda o por abajo del cero son negativas.

Con base es la relación anterior, se espera que en los problemas que se contextualizan por debajo del nivel del mar (e.g., problema del submarino, p. 124), el docente y los alumnos representen las profundidad a la que se encuentra el submarino con un numero negativo y los movimientos que realice hacia arriba o hacia abajo con un numero positivo o negativo, respectivamente.

Presentamos una solución al problema del submarino, considerando el contenido y las relaciones que establecen los autores. Para indicar la profundidad inicial de 960 metros, se usaría el número $({}^{-}960m)$ y cuando menciona: que emerge 275 metros, se tiene que sumar $(+275m)$ y así tener ${}^{-}960m + {}^{+}275 = {}^{-}685$. Posteriormente, cuando dice el problema que: se sumerge 306 metros, se tiene que sumar el número negativo ${}^{-}306$ para obtener

$^{-}685m + ^{-}306 = ^{-}991$ y con este resultado poder contestar el problema, es decir, le debe emerger 991 metros el submarino para llegar a la superficie.

Consideramos que los autores esperan que los alumnos y el docente resuelvan este tipo de problemas como se resolvió anteriormente. Sin embargo (como se verá más adelante), Saúl, a pesar de usar el libro de Carrubias y Gómez (2015) para su trabajo documental, no lo resuelve de esta forma y él establece que la profundidad del submarino se representa con un número positivo.

4.1.2. Libros de texto usados por Pedro

Pedro, durante la entrevista, mencionó que al considerar deficiente el libro que otorga la SEP (*Matemáticas 1*, Block & García, 2013), él complementa su trabajo documental con el libro *Matemáticas 1. Primer curso,* Caballero (1994) para enseñar el tema de los números enteros. A continuación se revisan y analizan ambos libros para observar y analizar cómo los autores plantean la enseñanza de este tipo de números.

4.1.2.1. Matemáticas 1, Block y García (2013)

En el libro de texto de Block y García (2013) se inicia ejemplificando la necesidad de construir los números Enteros para poder resolver operaciones que no tienen solución en el domino de los números Naturales, por ejemplo, estos autores mencionan: “ En el conjunto de los números Naturales, una resta como $7-13$ no tiene solución, porque no existe un número natural que sumado a 13 dé como resultado 7” (p. 194), mencionan que se necesitan los números enteros para dar solución a dicha resta; sin embargo, los autores no definen a los números Enteros, los usan para resolver ciertas actividades. Block y García, buscan concretizar este tipo de números y por ello recurren a situaciones concretas para dar sentido a los números positivos y negativos. En la Figura 4.6 se muestra un ejemplo del tipo de problemas que usan para dar sentido a los números con signo.

1. La tabla registra las canicas que Mario ganó (con números positivos) y perdió (con negativos) en varios partidos. Complétala.

Ganó 8	Perdió 9				Perdió 1	Perdió 2	Ganó 6	
+8		−5	+4	+5		−2		0

Figura 4.6. Situación para concretizar los números con signo (Block & García, 2013, p. 236).

Los autores usan, como recurso (Gueudet & Trouche, 2009, 2010), la recta numérica para identificar, posicionar y realizar operaciones con los números positivos y negativos. Block y García (2013) determinan, al igual que la comunidad matemática, que “los números positivos están a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero” (p. 196). Lo anterior permite determinar la posición de los números enteros en la recta.

Los autores, al considerar la recta numérica, implícitamente están usando un sistema de referencia en donde su origen es el cero y determinan la relación entre los movimientos y los números signados; por tanto, los movimientos hacia la derecha y hacia la izquierda se relacionan con números positivos y negativos, respectivamente. En la Figura 4.7 se muestra estas relaciones que implícitamente determinan los autores cuando dan el procedimiento para sumar números enteros en la recta numérica.

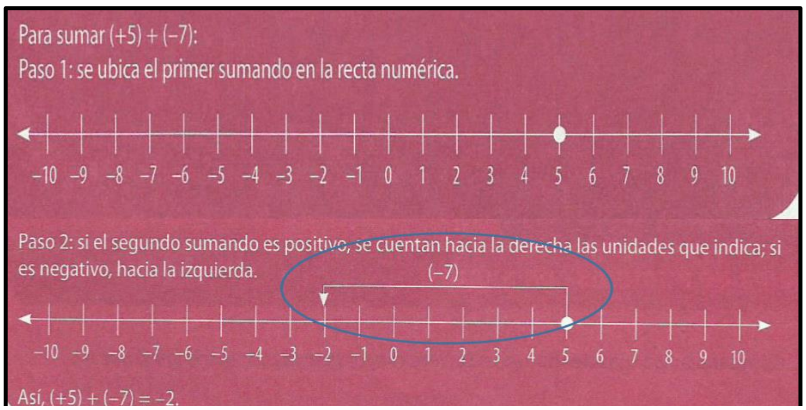
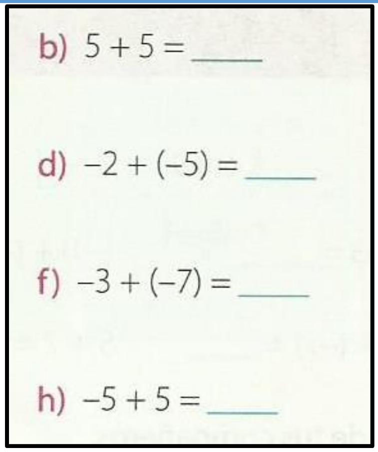


Figura 4.7. Relación entre los movimientos hacia la derecha y hacia la izquierda con los números positivos y negativos, respectivamente (Block & García, 2013, pp. 236-237).

Aunque los autores, cuando operan a través de la recta numérica, consideran el signo de los números (positivo y negativo, no sucede lo mismo cuando resuelven operaciones sin usar la recta numérica. Block y García, dan por entendido que los alumnos tienen presente que +5 se puede escribir sin el signo (5). A partir de esta situación los autores introducen operaciones como: $5+5,\ -3+6,\ \textit{entre otras}$ (véase Figura 4.8).



b) $5 + 5 =$ _____

d) $-2 + (-5) =$ _____

f) $-3 + (-7) =$ _____

h) $-5 + 5 =$ _____

Figura 4.8. Operaciones propuestas en el libro de texto (Block & García, 2013, p. 239).

La Figura 4.8 nos permite observar que Block y García (2013) no hacen una diferencia en la escritura de los signos del número y de la operación, y esto puede generar dificultades en los alumnos e, incluso, en el profesor cuando resuelvan problemas que impliquen el uso de este tipo de números. Los autores, como ya hemos mencionado, no siempre escriben el signo del número (unario, Gallardo, 1994) cuando escriben operaciones, por ejemplo, en el inciso b de la Figura 4.8 dan por entendido que los alumnos identifican que el número cinco tiene signo positivo, sin tener que escribirlo.

Esta situación de no escribir el signo del número puede, incluso, generar dificultades cognitivas para aprender a operar este tipo de números. Por ejemplo, en el inciso h de la Figura 4.8 al no diferenciar, en la escritura, entre los significados de los signos produce complicaciones para aprender, pues al leer menos cinco más cinco, los alumnos pueden entender que son dos operaciones; es decir, restar cinco y luego sumar cinco, los cual es un error. Lo correcto sería leer cinco negativo más cinco positivo, pero al no haber diferencia al escribir los signos los alumnos y profesores no logran visualizar esta problemática.

Por lo anterior, consideramos fundamental hacer una diferencia en la escritura de los signos unario y binario; por ejemplo, la suma $-5+5$ se puede escribir cómo $^{-}5 + {}^{+}5$ y con esta forma de escribir los signos es notorio que los significados son distintos para los signos más y menos. Entonces, sería factible para los alumnos y docentes poder leer la operación como: negativo cinco más positivo cinco o cinco negativo más cinco positivo. De esta manera, distinguimos entre el signo del número (unario) y el de la operación (binario).

En la Figura 4.9 se muestran algunos ejemplos de problemas que proponen estos autores en su libro de texto.

a) Ana sacó $5.00 de su alcancía el lunes, metió $8.00 el martes, sacó $3.00 más el miércoles, sacó $2.00 el jueves y metió $1.00 el viernes. ¿Al final de la semana hay más o menos dinero en la alcancía que al principio? ¿Cuánto?

b) En una serie de juegos de canicas, Pepe perdió tres canicas, luego ganó dos y después perdió cinco. ¿Cuántas canicas le sobraron?

c) Mario jugó dos partidos. En el primero perdió tres canicas. No recuerda cómo le fue en el segundo, pero sabe que acabó ganando una canica. ¿Cómo le fue en el segundo partido?

Figura 4.9. Problemas aditivos planteados en el libro de Block y García (2013, p. 241).

Los autores pretenden enseñar los números enteros a través de problemas. Sin embargo todos los problemas que presentan se contextualizan en una recta numérica horizontal, lo que impide a los alumnos y al profesor enfrentarse a problemas contextualizados por arriba o por debajo del nivel del mar. Esta situación los llevaría a usar un sistema de referencia (recta numérica de forma vertical) para poder comprender y resolver el problema. Como se puede observar en la Figura 4.9 los problemas se basan en ganancias y pérdidas para contextualizar a los números positivos y negativos.

En el libro de texto no se hace mención de que existen problemas por debajo del nivel del mar y, por tanto, no presentan posibles soluciones a problemas de este tipo.

4.1.2.2. *Matemáticas 1. Primer curso, Caballero, Martínez y Bernárdez (1994)*

El libro de Caballero (1994) es usado por Pedro como complemento al considerar deficiente el libro de Block y García (2013), entonces se espera que el contenido de este libro complemente al ofrecido por Block y García. Los autores del libro, para introducir los números con signo, plantean una situación (véase Figura 4.10) en donde dos personas parten del mismo lugar pero en direcciones contrarias.

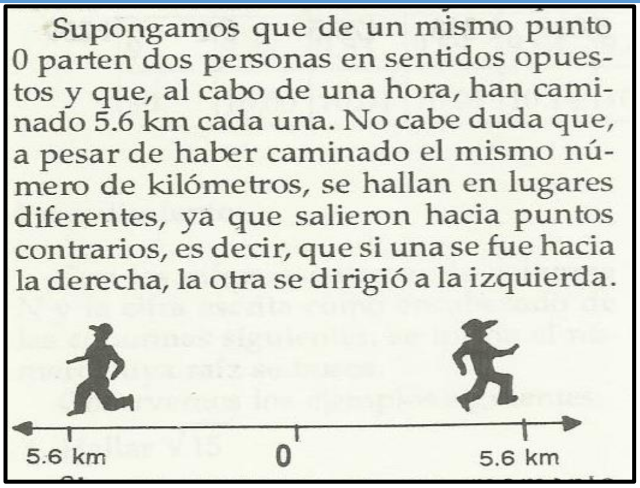

Supongamos que de un mismo punto 0 parten dos personas en sentidos opuestos y que, al cabo de una hora, han caminado 5.6 km cada una. No cabe duda que, a pesar de haber caminado el mismo número de kilómetros, se hallan en lugares diferentes, ya que salieron hacia puntos contrarios, es decir, que si una se fue hacia la derecha, la otra se dirigió a la izquierda.

Figura 4.10. Actividad inicial para comprender y contextualizar los números con signo (Caballero et al., 1994, p. 144).

Con el problema que se muestra en la Figura 4.10, Caballero et al. (1994) muestran la existencia de los números con signo, los cuales pueden ser representados en una recta numérica. Se observa que ubica en una recta numérica a las personas en direcciones contrarias. Con esta analogía se pretende indicar que los números negativos y positivos están en direcciones contrarias pero que guardan la misma distancia respecto del cero.

Los autores usan, como recurso (Gueudet & Trouche, 2009, 2010), la recta numérica para identificar y posicionar a los números positivos y negativos. Al igual que Block y García (2013) y que la comunidad matemática, Caballero et al. (1994) consideran que los números positivos están a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero (véase Figura 4.11). Lo anterior permite determinar la posición de los números enteros en la recta.

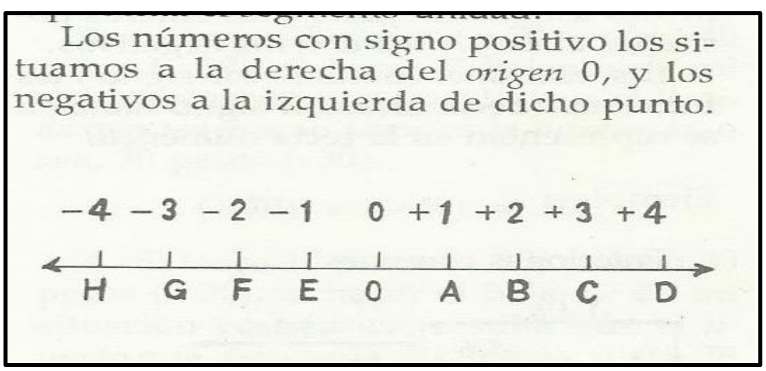

Los números con signo positivo los situamos a la derecha del *origen* 0, y los negativos a la izquierda de dicho punto.

Figura 4.11. La recta numérica como recurso para identificar y posicionar a los números con signo (Caballero et al., 1994, p. 145).

Los autores, consideran implícitamente un sistema de referencia al usar la recta numérica. En dicho sistema, al igual que Block y García (2013), el origen del sistema es el cero y la relación entre los movimientos y los números signados. De esta manera consideran que los movimientos hacia la derecha y hacia la izquierda se relacionan con números positivos y negativos, respectivamente. En la Figura 4.12 se muestran estas relaciones que implícitamente determinan los autores cuando dan el procedimiento para sumar números enteros en la recta numérica.

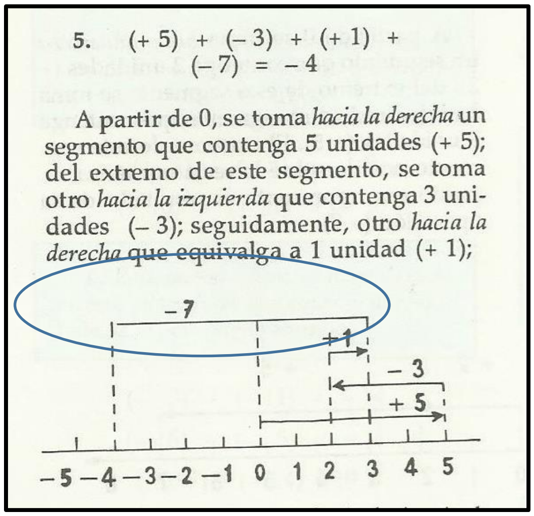
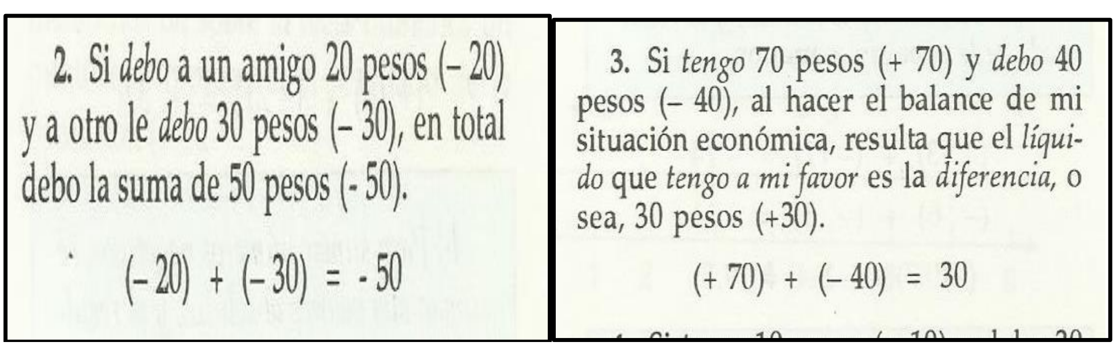


Figura 4.12. La recta numérica como recurso para operar números con signo (Caballero et al., 1994, p. 144).

Con el propósito de concretizar este tipo de números y para poner en práctica lo aprendido en torno a los números con signo, los autores proponen una serie de problemas de los cuales dan la solución aritmética. Dentro de este conjunto de problemas, principalmente, se encuentran algunos que se contextualizan con pérdidas y ganancias de dinero, con deudas, entre otros (véase Figura 4.13). Con este tipo de problemas Caballero et al. (1994) pretenden formalizar las operaciones con números con signo y obtener los algoritmos para sumar números enteros.


2. Si *debo* a un amigo 20 pesos (– 20) y a otro le *debo* 30 pesos (– 30), en total debo la suma de 50 pesos (- 50).

(– 20) + (– 30) = - 50

3. Si *tengo* 70 pesos (+ 70) y *debo* 40 pesos (– 40), al hacer el balance de mi situación económica, resulta que el *líquido* que *tengo a mi favor* es la *diferencia*, o sea, 30 pesos (+30).

(+ 70) + (– 40) = 30

Figura 4.13. Problemas aditivos para contextualizar los números con signo (Caballero et al., 1994, p. 147).

Los problemas que presentan estos autores se pueden resolver sin tener que usar la recta numérica. Pero si se pidiera usar una recta numérica para expresar y resolver los problemas, sin duda que todos se podrían representar en una recta numérica horizontal. Al plantear y resolver problemas de este tipo (véase Figura 4. 13) donde sólo se usan las pérdidas, ganancias y deudas para concretizar a los números con signo, impide a los alumnos y al profesor enfrentarse a problemas donde intervenga el movimiento; por ejemplo, los que se contextualizan por arriba o por debajo del nivel del mar.

En el libro de texto no se hace mención de que existen problemas por arriba y por debajo del nivel del mar y, por tanto, no presentan posibles soluciones a problemas de este tipo.

4.2. COMENTARIOS FINALES RESPECTO A LOS NÚMEROS CON SIGNO EN LOS RECURSOS FÍSICOS

En la propuesta didáctica de los tres libros de texto, aquí analizados, se busca cumplir con lo institucionalizado en torno a la enseñanza de los números con signo, en primer grado de educación secundaria; en particular, estos recursos físicos le proporcionaron información y actividades al profesor, y al alumno, con la finalidad de comprender y resolver problemas que implican el uso de este tipo de números. Sin embargo, en dos libros de texto no trabajan con problemas contextualizados por debajo del nivel del mar.

Los autores de los tres libros de texto analizados buscan, a través de ejemplos, definir y dar sentido a los números con signo. Usan la recta numérica como recurso para ubicar y operar (suma y resta) con los números con signo. Con este recurso, ellos, usan implícitamente un sistema de referencia; con el cual, los autores coinciden es indicar que los movimientos hacia la derecha o hacia arriba se representan con números positivos y los movimientos hacia la izquierda o hacia abajo (movimientos contrarios a subir o ir a la derecha) con números negativos.

En los tres libros de texto, también se observó que los autores cuando escriben operaciones (suma o resta) usan los paréntesis para diferenciar el signo del número con el signo de la operación, por ejemplo, escriben $(+8)+(-4)$ para diferenciar el significado de los signos. Con este tipo de escritura buscan que los alumnos y el profesor comprendan que los signos más y menos tienen significados distintos (signo del número y signo de la operación). Sin embargo, al usar paréntesis lleva a los alumnos y profesor a realizar multiplicación aun cuando no se ha enseñado esta operación (la multiplicación y división con números con signo corresponde al bloque I de segundo grado de educación secundaria); es decir, para resolver la operación $(+8)-(-4)$ los alumnos necesitan usar "la regla de los signos" para obtener el resultado de $-(-4)=+4$ y así obtener $+8+4=12$ esta forma de representar las operaciones genera dificultades entre los alumnos.

En los tres libros de texto aunque pretenden distinguir entre el signo unario y binario, no proponen escribirlos de forma distinta y esto provoca errores. Consideramos que es necesario escribir de forma distinta el signo del número y el signo de la operación para evitar usar paréntesis (e.g., ${}^{+}8 - {}^{-}4$).

Se encontró que los autores proponen una serie de problemas aditivos para que los alumnos usen lo aprendido. Sin embargo sólo en el libro de texto de Casarrubias y Gómez (1998) se proponen problemas que se contextualizan por debajo del nivel del mar (e.g., problema el submarino). Consideramos que este tipo de problemas tienen una mayor complejidad para entenderlos y resolverlos por parte del alumno. Es importante destacar que ninguno de los tres libros da posibles soluciones a los problemas que propone y, a manera de conjetura, los autores creen que con enseñar a sumar y restar números con signo y usando, implícitamente, un sistema de referencia (movimientos hacia la derecha o hacia arriba con números positivos y movimientos hacia la izquierda o hacia abajo con números negativos) es suficiente para que tanto alumnos como el profesor logren comprender y resolver este tipo de problemas.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de los datos recabados en las dos etapas de la investigación (videograbación de las clases de los profesores y entrevista a dos profesores). Se da evidencia del conjunto de recursos inherentes a la práctica docente y usados por los profesores Saúl y Pedro para comprender y resolver problemas de números con signo, también se muestra el uso no consciente sobre dichos recursos. Para ello, primero, se expone el análisis de las clases videograbadas de ambos profesores, dando énfasis al sistema de referencia como recurso usado en la solución de problemas que involucran los números con signo; segundo, el análisis de la entrevista de cada docente para evidenciar que no son conscientes del uso de este último recurso.

5.1. PRIMERA ETAPA. VIDEOGRABACIÓN DE LAS SESIONES

Con base en el análisis de las clases videograbadas en la primera etapa del estudio, el propósito que Saúl y Pedro tenían, dentro del tema de los números enteros, fue que los alumnos comprendieran el significado de los números con signo a través de la resolución de diversos problemas. Para ello, en términos de la Aproximación Documental de lo Didáctico (Gueudet & Trouche, 2009), cada profesor usó los recursos disponibles en ese momento; por ejemplo, el libro de texto, reflexiones sobre operaciones realizadas con números con signo, entre otros.

Ambos profesores están comprometidos con que los alumnos aprendan y apliquen los contenidos curriculares propuestos en el Programa de estudios (SEP, 2011). Una manera de aplicar tales conocimientos es resolviendo problemas de índole matemático. Por ejemplo, al terminar de enseñar los números enteros y al plantear problemas aditivos en la clase, Saúl, les comentó a sus alumnos: “el propósito de la clase es que los alumnos de primero 'c' aplicaran lo aprendido del tema de los números enteros para poder resolver problemas cotidianos aplicando [usando] números enteros".

Como parte de su práctica docente en las soluciones de estos problemas, Pedro y Saúl usaron recursos físicos y no físicos (Gueudet & Trouche, 2009, 2010), llegando a coincidir en algunos de ellos; entre los cuales está el concepto de sistema de referencia (de forma implícita), signos (flechas, puntos, líneas) para indicar los movimientos de los objetos, entre otros.

5.1.1. Recursos usados por Saúl

En su trabajo documental, Saúl echó mano del libro de texto *Complemento Matemático 1* (Casarrubias & Gómez, 2015) como recurso físico y, de él, seleccionó un conjunto de problemas aditivos de números enteros (números con signo) para resolverlos en el salón de clases. Para lograr que los alumnos comprendieran y resolvieran los problemas seleccionados, el profesor, usó implícitamente, el sistema de referencia como recurso fundamental en la resolución y comprensión de los problemas.

Dentro del conjunto de problemas seleccionados existen dos que llevan por nombre: el avión y el submarino[5] (Casarrubias & Gómez, 2015, p. 124). Durante la solución de éstos se da muestra del uso no consciente de distintos sistemas de referencia.

5.1.1.1. Sistemas de referencia como recursos en el problema el avión[6]

El enunciado del problema "el avión" es el siguiente: "un avión se encontraba a 2870 metros de altura. Luego bajó 945 metros; después, subió 812 metros, y por último descendió 570 metros, ¿a qué altura quedó finalmente el avión?" (Casarrubias & Gómez, 2015, p. 124) Como parte de la cultura en el salón de clases, los alumnos primero tuvieron tiempo para resolver el problema y después Saúl, junto con ellos, lo expuso desde el pizarrón. En su trabajo documental, Saúl intentó ir explicando la forma de resolver el problema para que los alumnos comprendieran el procedimiento y reflexionaran sobre el que ellos llevaron a cabo.

[5] En el libro de texto no aparecen con estos nombres los problemas, sin embargo, por cuestiones de identificarlos, el investigador les asignó ese nombre a cada problema.
[6] Problema seleccionado, por Saúl, del libro de texto: *Complemento matemático 1* (Casarrubias & Gómez, 2015, p 124).

Además, entre los recursos disponibles, Saúl recurrió a dos rectas paralelas para representar gráficamente el problema y darle significado real, es decir, simulaban ser la tierra (véase Figura 5.1), a manera de conjetura consideramos que para Saúl representa el cero (origen). De acuerdo con el discurso de Saúl, se puede percibir que sus invariantes operatorios en torno a este recurso son tres: a) la importancia que tiene la representación gráfica para comprender y resolver el problema, b) una creencia acerca de la representación de los objetos a través de signos (punto) –para fijar el movimiento de los mismos–, y c) un conocimiento matemático para poder interpretar la tierra como origen (cero) en un sistema de referencia específico.

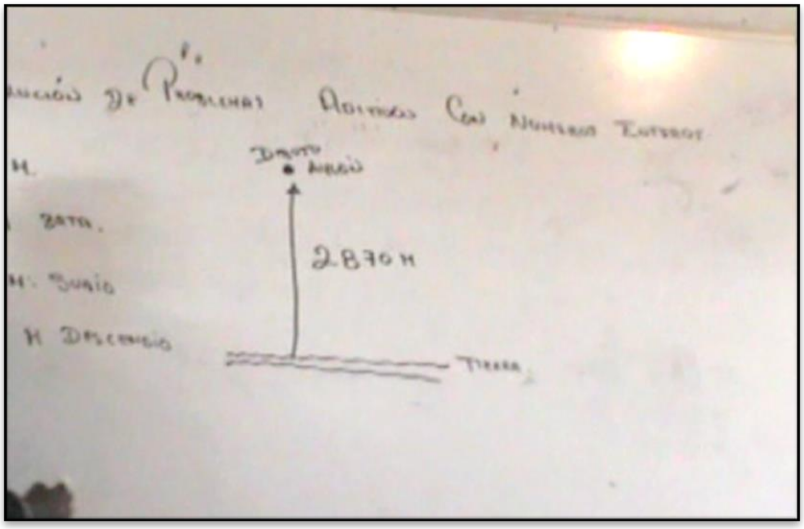


Figura 5.1. Rectas paralelas como recurso para dar sentido y comprender el problema.

Otro recurso, del que echó mano Saúl, son las flechas (signos) para representar el movimiento e identificar la altura del avión en el problema (véase Figura 5.1). El siguiente extracto de la clase videograbada muestra lo mencionando en este párrafo.

Saúl: Bien vamos a colocar nuestro dibujo. Coloquen acá que estamos a nivel de la tierra [*coloca dos rectas paralelas que representan el nivel de la tierra*], y dibujen un avión. Vamos a resolver el problema. El avión está en este punto [*dibuja en el pizarrón un punto y le coloca la palabra "avión"*] entonces, de la tierra hacia donde está el avión [*dibuja una flecha vertical desde el nivel de la tierra hasta el punto que representa el avión*] se encuentra a 2870 metros (colóquenle hijos).

Alumno: ¿cómo maestro?

Saúl: si, de la tierra [*señala con su dedo índice, de la mano izquierda, las líneas que representan el nivel de la tierra*] hasta donde se encuentra el avión [*señala el punto que representa el avión*] está a 2870 metros. ¿Estamos bien?

Alumnos: Sí

Como se observa en el extracto, Saúl buscó fijar el movimiento del objeto a través de signos (punto) para poder establecer la altura del avión y, de forma implícita, establecer el origen de su sistema de referencia (líneas paralelas que representan el nivel de la tierra). En términos de Gueudet y Trouche (2009), esto sería la clase de situaciones. De acuerdo con sus invariantes operatorios, para Saúl darle solución al problema depende: primero, de tener un conocimiento previo en torno al concepto altura; segundo, usar un sistema de referencia para relacionar los movimientos del objeto con las operaciones de suma y resta.

Se puede observar que en la solución aparece el concepto de sistema de referencia de manera implícita, porque Saúl establece un origen [nivel de la tierra] para observar y medir los movimientos que hace el avión, indica un sentido [flecha vertical hacia arriba] y le asocia, inicialmente, una cantidad positiva (2800 metros) a dicho movimiento. Conforme avanza en la solución del problema, el profesor da muestra de no usar los números con signo para establecer las cantidades correspondientes a los movimientos que hace el avión de subir y bajar. El siguiente extracto de la clase videograbada muestra el uso no consciente del sistema de referencia y la ausencia de los números con signo en su procedimiento, aun cuando el tema en la clase es este conjunto de números.

Saúl: Ahora, dice que va a bajar nueve cuarenta y cinco metros [*se refiere a 945 metros*] entonces, ¿sumo o resto?

Alumnos: resto

Saúl: entonces, restamos. La primera operación sería: 2870 le restamos 945 [*coloca en el pizarrón, de forma vertical, la resta* $2870-945$, *véase Figura 5.2*] réstenle. [*Da tiempo para que los alumnos resuelvan la resta*]

Alumnos: ya

Saúl: ya le restaron, alcen la mano quien ya restó.

Alumna: 1955 [*resultado incorrecto*]

Saúl: [*Al ver que dieron un resultado incorrecto él resuelve la* resta]. Entonces, queda 1925

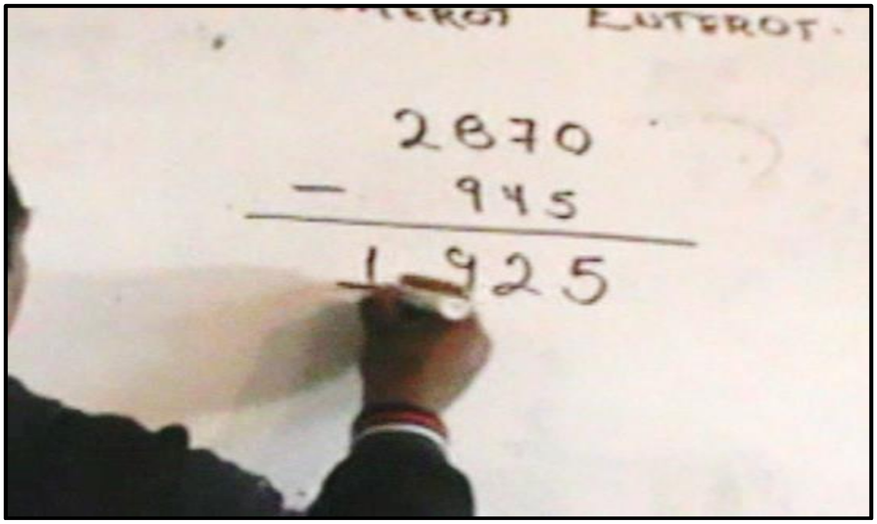


Figura 5.2. La sustracción como recurso para determinar el movimiento hacia abajo del avión.

Como se puede observar en el extracto, Saúl, usó como recurso las operaciones básicas (adición y sustracción) para determinar la altura del avión después de bajar los 945 metros que indica el problema. De acuerdo con el discurso de Saúl, al preguntar ¿sumo o resto?, da por hecho –de manera implícita– que los movimientos que realice el avión estarán asociados a una operación y no a números negativos o positivos.

En la Figura 5.2 se puede observar que el signo que coloca el docente no corresponde al signo del número (945) sino al de la operación; es decir, Binario (Gallardo, 2004). El profesor se mantiene en el terreno de los números Naturales, y sólo realiza una resta entre dos cantidades positivas (2870 – 945), y da muestra de una confusión entre los significados del signo del número y el signo de la operación. A pesar de que su procedimiento le permite obtener el resultado, su accionar no es correcto; lo adecuado sería asociarle un signo (positivo o negativo) a los movimientos que realice el avión (e.g., ${}^{+}2800 + {}^{-}945 = {}^{+}1855$) de esta manera el signo corresponde al número y determinar el movimiento que hace el objeto.

En su interpretación y explicación, Saúl, estableció que cuando un objeto realiza el movimiento de bajar se le asocia la operación resta. Esta interpretación del movimiento le permitió al profesor calcular la nueva altura del avión después de bajar 945 metros.

Posteriormente, Saúl, llevó el resultado obtenido a su representación gráfica; sin embargo, el tiempo[7] no formó parte de sus invariantes operatorios para ese recurso (Gueudet & Trouche, 2009) porque no lo consideró ni para resolver el problema ni para representar los movimientos que hizo el avión en su dibujo (véase Figura 5.1). Lo anterior se puede observar en el siguiente extracto de las clases videograbadas.

> Saúl: Entonces, el avión, vamos a bajarlo. El avión ya estaría por acá [coloca un nuevo punto del lado izquierdo y por debajo del primer punto que dibujó] entonces coloquen en su diagrama.

Como se observa, para Saúl, no es necesario considerar el tiempo (que está implícito en el problema del avión que propone) porque no lo necesita para resolver el problema y por ello coloca el nuevo punto que representa al avión, en su nueva posición, del lado izquierdo del primer punto que colocó en su dibujo (véase Figura 5.3); de esta manera, se consideran como movimientos instantáneos. Para el docente no fue necesario usar en la resolución del problema la flecha, como recurso, para determinar el movimiento o la posición del avión después de realizar una acción (bajar 945 metros). Lo anterior quizá se debió, a manera de conjetura, que el profesor consideró que para los alumnos era claro el movimiento de bajar y la operación realizada para determinar la nueva posición del avión y, por tanto, no era necesario colocar una flecha hacia abajo para determinar que el avión descendió.

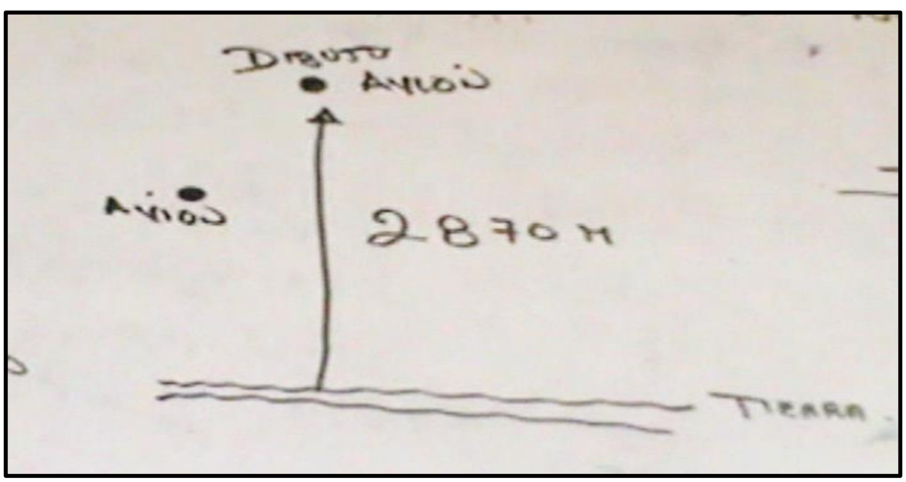


Figura 5.3. Posición del avión después de bajar 945 metros.

[7] El tiempo está presente, implícitamente, en el problema cuando hace referencia sobre los movimientos de subir y bajar; por lo tanto, tiene que ser considerado por el docente, en la representación gráfica del problema para lograr darle sentido para los alumnos.

En el problema se menciona que el avión, después de bajar 945 metros, sube 812 metros. Para ello, Saúl usa de manera no consciente el sistema de referencia, porque subir y bajar está relacionados a la suma y resta respectivamente. El siguiente extracto de las clases videograbadas de Saúl da evidencia de lo anterior.

Saúl: Luego ¿qué dice? Que va a subir de donde estaba acá [*señala el nuevo punto que representa la posición del avión*] subió 812 metros, ¿sumamos o restamos?

Alumnos: sumamos

Saúl: entonces, súmenle. A esto [*hace referencia a los 1925 metros que es la posición del avión después de bajar 945 metros*] le voy a sumar 812, súmenle hijos [*coloca en el pizarrón la suma 1925 + 812, de forma vertical*]

Alumnos: 2 737

Saúl: Entonces, casi se acerca a donde estaba originalmente el avión, entonces vamos a colocarlo [*dibuja un nuevo punto, a la izquierda y más arriba que el anterior punto, para representar la posición nueva del avión*]. ¿Estamos bien?

Como se observa en el extracto precedente, Saúl explícita a los alumnos que los metros que sube el avión se puede medir a partir de la última posición del objeto. De esta forma, existe coherencia en el procedimiento debido a que si el avión sube entonces se tiene que hacer la operación contraria a la resta; por ello, el docente y los alumnos coinciden en sumar la cantidad que asciende (812 metros) con la última posición del avión.

Saúl, sigue sin considerar cantidades positivas o negativas para establecer el movimiento que realiza el avión y sólo se concreta en usar sumas o restas de números naturales y, nuevamente, no usa el recurso de la flecha para explicitar el movimiento que hace el avión (si bien el origen del primer punto –que representa la altura del avión– es el cero; para las siguientes posiciones se parte de las alturas precedentes, se pueden usar las flechas para indicar los movimientos que hace el avión). Después de colocar en su representación gráfica la nueva posición del avión (2737 metros) a través de un nuevo punto, Saúl resuelve la última parte del problema la cual se refiere al descenso del avión. El profesor repite el procedimiento y realiza una resta debido a que el avión baja nuevamente ($2737 - 570 = 2167$). Lo anterior se evidencia en el siguiente extracto de la clase videograbada de Saúl.

Saúl: Luego, ¿qué significa la palabra descendió? ¿Sube o baja? [*Con sus manos hace movimientos hacia arriba y hacia abajo*]

Alumnos: bajó

Saúl: baja. Entonces, qué hago, ¿sumo o resto?

Alumnos: resta

Saúl: entonces, restamos 570.

Alumnos: 2167

Saúl: serían [*resuelve la resta*] 2167, ahora vean la pregunta que me plantea ¿a qué altura quedó finalmente el avión?

Alumnos: 2167

Saúl: coloquen ahí [*en el dibujo*], el avión quedó finalmente a una altura de 2167 metros.

Con base en los extractos de la clase videograbada se puede afirmar que un recurso importante que usa Saúl para poder comprender el problema y darle solución es la representación gráfica (dibujo), el cual se hace acompañar de signos tales como: flechas, puntos y palabras para fijar y dar sentido al movimiento del avión. También está presente el uso del sistema de referencia a pesar de que nunca es mencionado explícitamente por Saúl, a manera de conjetura, porque este profesor considera que los alumnos –naturalmente– comprenden el problema y saben qué operación realizar para cada movimiento.

Se muestra que Saúl usó el sistema de referencia de forma implícita y es porque establece un origen (nivel de la tierra), a través de dos líneas paralelas; después establece –de forma errónea– que los movimientos del avión están relacionados con la suma o la resta, y no con cantidades positivas o negativas. Para Saúl los movimientos hacia arriba se relacionan con la suma y los movimientos hacia abajo con la resta, lo cual da evidencia que el profesor no usa los números con signo en la resolución del problema y sólo echa mano del signo binario (Gallardo, 2004). En términos de Resnick et al. (1996), para el profesor este sería el sistema de referencia pues establece las convenciones para poder medir la posición (altura del avión) y otras magnitudes físicas (movimiento) de una situación física.

Sin embargo, no es el sistema de referencia que se espera que use al resolver problemas aditivos de números con signo porque genera dificultades en los alumnos.

A continuación analizamos los recursos usados para comprender y resolver el problema "el submarino". Dicho problema fue resuelto el mismo día que el problema del avión.

5.1.1.2. Recursos usados en el problema el submarino

El enunciado del problema el submarino es: "un submarino está a 960 metros de profundidad. Luego emerge 275 metros; después, se sumerge 306 metros, ¿cuántos metros debe emerger para estar en la superficie del mar [*nivel del mar*]?" (Casarrubias & Gómez, 2015, p. 124).

Los alumnos necesitan de un cambio radical en la forma de concebir el problema para poder dar solución al mismo (más adelante se dan evidencias de esta afirmación); sin embargo, para Saúl, no representa un reto porque es un problema que ha resuelto varias veces en pasados ciclos escolares, por lo cual da muestra de un dominio en la resolución de este problema como veremos más adelante. El profesor resolvió este problema en el pizarrón, al igual que el anterior, e intentó explicar la forma de resolverlo para que los alumnos comprendieran el procedimiento. Es importante mencionar que los estudiantes estaban influenciados por el problema anterior (el avión) y, por tanto, usarían lo aprendido para tratar de resolver el problema: el submarino.

Saúl recurre, una vez más, a la representación gráfica como recurso para comprender y resolver el problema del submarino. Establece el origen del que se tomará referencia para medir la profundidad del submarino. El siguiente extracto de la clase videograbada muestra lo anterior.

Saúl: Sale, vamos a dibujar nuestro submarino [*el profesor realiza la representación gráfica del problema en el pizarrón]*. Recuerden que el submarino está debajo del agua. Aquí dibújenle que estaría la tierra [*traza dos líneas paralelas para representar la tierra, en lugar de hacer referencia al nivel del mar*]. Vamos a analizarlo, dice que de la tierra [*nivel del mar]* hasta abajo del mar, ¿hasta dónde se encontrará el submarino? [*No da tiempo para que respondan los alumnos]* A 960 metros; entonces, pónganle la primera, de la tierra hasta donde está el submarino serían 960 metros [*dibuja una flecha hacia abajo, indicando la profundidad del submarino inicialmente* (Véase Figura 5.4)].

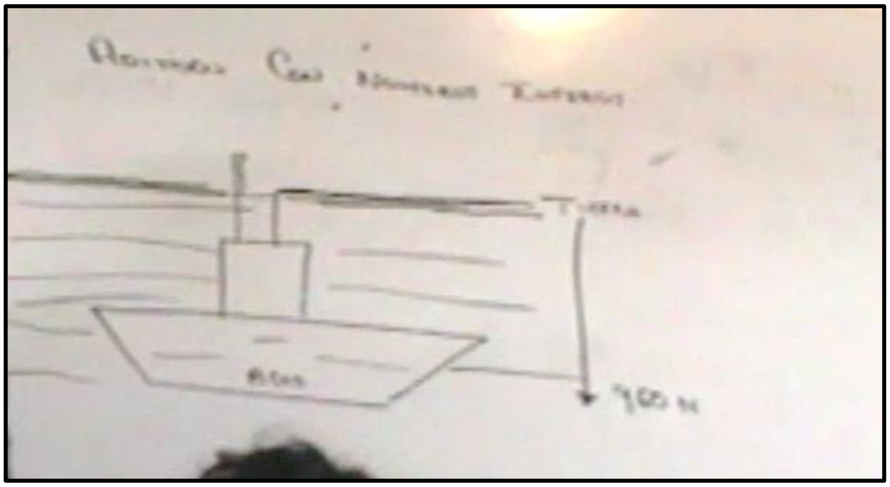


Figura 5.4. Recursos usados, inicialmente, en el problema del submarino.

Como se puede observar, en el extracto precedente, un recurso usado por Saúl para comprender y contextualizar el problema fue la representación gráfica (dibujo). De acuerdo con el discurso y el procedimiento efectuado en el salón de clases, el establecer un origen [Saúl llama, de forma errónea, nivel de la tierra], determinar la distancia que hay entre los objetos y la tierra e, incluso, el problema anterior (el avión) forman parte de sus esquemas de uso porque es un recurso importante para poder indicar los movimientos (subir o bajar) que realice el submarino y, así, poder medir la profundidad del mismo.

Para ello, Saúl trazó una línea horizontal que representa el nivel del mar [*él, la llamó nivel de la tierra*]; esta línea representa el origen (cero metros) de donde parte el submarino y, del cual, se mide la profundidad inicial del objeto. Este recurso [*el origen*] para Saúl es muy importante y, por ello, enfatiza a los alumnos: “de la tierra [*señala la línea que representa el nivel de la tierra*] hasta abajo del mar”. Como se puede observar en la Figura 5.4 el profesor usa una flecha vertical orientada hacia abajo para indicar que el submarino se sumergió y está inicialmente, a una profundidad de 960 metros. Saúl coloca, a un lado de la flecha, la cantidad 960 [*nótese que el profesor no usa ningún signo para el número y, por tanto, lo consideramos como una cantidad positiva*].

Podemos observar que Saúl cambia de sistema de referencia para resolver este problema, esto lo podemos afirmar porque en el problema del avión él determinó, como parte de su sistema de referencia, que la altura inicial [*movimiento hacia arriba*] se representa con una cantidad positiva y, en el problema del submarino, uno esperaría que Saúl determinara la profundidad inicial del submarino con una cantidad negativa, por ser un movimiento contrario a subir; sin embargo, el docente relaciona con una cantidad positiva la profundidad del submarino [*movimiento hacia abajo*].

En el discurso de Saúl no se advierte de este cambio. Al parecer, el profesor espera que el sistema de referencia (dibujo) les dijera a los alumnos de este cambio. No obstante, se puede observar que el cambio de sistema de referencia puede ocasionar dificultades en los alumnos para comprender y resolver el problema, para el profesor nunca generó conflicto dicho cambio en su práctica docente. Lo anterior se evidencia con el siguiente extracto de la clase videograbada de Saúl.

Saúl: Ahora, paso dos, dice: emerge, ¿qué es emerge?

Alumnos: va para arriba

Saúl: emerge es va para arriba; entonces, ¿qué hacemos? ¿Sumamos o restamos [*el profesor señala la posición del submarino*]?

Alumnos: sumamos

Saúl: si sumamos, sería más grande la cantidad [*comparando con 960*], ¿estamos de acuerdo? Y el submarino se sume más para abajo [*hace el movimiento con su brazo izquierdo hacia abajo, indicando que el submarino tendría mayor profundidad*]

Alumnos: restamos [*convencidos por el argumento del profesor*]

Saúl: entonces, restamos. Réstenle; a 960 le vamos a restar 275 [*coloca en el pizarrón, de forma vertical, la resta 960 – 275*]

Alumnos: 685

Podemos observar que, influenciados por el problema del avión y las relaciones implícitas que hizo Saúl, los alumnos al ser cuestionados sobre qué operación realizar para saber la nueva posición del submarino después de emerger 275 metros respondieron: sumar. Es evidente que la respuesta está basada en el problema anterior, donde los movimientos hacia arriba fueron relacionados con la operación suma; por tanto, si el submarino emerge [*va hacia arriba*] se tiene que sumar. Sin embargo, los alumnos no toman en consideración que el profesor está usando un nuevo sistema de referencia y, por tanto, las relaciones que se establecieron anteriormente no se pueden usar para este problema.

En la solución del problema, los esquemas de utilización que los alumnos poseen y ponen en juego en torno a la operación que se usa de acuerdo al movimiento del objeto son diferentes que los de Saúl. Para los alumnos, los movimientos hacia arriba del submarino se siguen relacionando con la suma porque no son conscientes del cambio de sistema de referencia que Saúl, de manera inconsciente, hizo al considerar la profundidad del submarino como una cantidad positiva y por el hecho de estar situados en el campo de los números Naturales.

Se observa experiencia en Saúl para resolver problemas de este tipo, también confianza y dominio del recurso usado pues en ningún momento muestra inseguridad cuando los alumnos le responden que se tiene que sumar cuando el submarino emerge. De acuerdo con el discurso dado por Saúl para justificar por qué no se tiene que sumar cuando el submarino emerge, se puede observar que él se mantiene en el campo de los números naturales y recurre al orden de este tipo de números para argumentar –de manera matemática– porque si sumamos 275 a 960 se obtendría una cantidad mayor y, por tanto, el submarino se hundiría más. Tal argumento da evidencia de que Saúl no usa los números con signo y que sólo considera a los números naturales, y en su representación gráfica recurre, de forma implícita, a una recta donde los números van creciendo hacia abajo y todos son positivos.

Loa alumnos cambian sus esquemas ante la justificación de Saúl, pues en su discurso ahora ellos afirman que las cantidades se restan cuando el submarino emerge. No se puede observar si los alumnos en verdad quedan convencidos del argumento que da Saúl y si logran comprender porque no es una suma. Una vez que los alumnos aceptan que se tiene que restar no presentan dificultad para resolver el problema, pues tienen en mente que todo movimiento contrario a subir, en este problema, se relaciona con la suma (operación contraria a restar). Lo anterior se muestra en el siguiente extracto de la clase videograbada.

Saúl: [resuelve la resta]; entonces, serían cinco, se convierte en cinco sería ocho, se convierte en ocho serían seis [*685*]. Colóquenle, ¿subió no? [*Dibuja, en su representación gráfica, una flecha hacia arriba –que va desde el punto que* *representa la profundidad anterior del submarino hacia el nivel del mar– para indicar que el submarino subió*] y coloca la cantidad obtenida (685 m).

Luego dice: sumerge, ¿qué es sumerge?

Alumnos: bajar

Saúl: baja. Entonces, va para abajo; si estoy acá [*señala, en el pizarrón, donde colocó la flecha hacia arriba y la cantidad de 685 m*], ¿qué le hacemos?

Alumnos: se suma

Saúl: se suma. Súmenle hijos, 306 metros [*coloca la operación 685 + 306*]

Alumnos: 991

Como se observa en el extracto precedente, los alumnos consideran la operación suma para conocer la nueva posición del submarino después de sumergirse 306 metros. Esta acción está influenciada por los argumentos que Saúl dio previamente, en los cuales mencionó que cuando el submarino emerge no se puede sumar porque el submarino se hundiría más y, por lo tanto, la operación que relaciona con la acción de subir es la resta. Esto generó conflicto entre los alumnos, quienes relacionan los movimientos hacia arriba con la suma; sin embargo, aceptaron la justificación del docente (sin reflexionar o cuestionar) por tratarse de una figura de autoridad. Una vez aceptada la nueva relación, los alumnos dieron muestra de comprender el uso del sistema de referencia porque fueron capaces de relacionar, de forma correcta, la operación que se tiene que hacer para los movimientos hacia abajo –en el problema del submarino – aun sin comprender el por qué.

A pesar de existir un cambio de sistema de referencia, Saúl siguió sin usar los números con signo y sólo se concentró en las operaciones de adición y sustracción con números naturales. En la Figura 5.5 se puede observar lo antes dicho y cómo Saúl recurre al uso de las flechas para determinar los movimientos que realiza el submarino, caso contrario al problema del avión en donde sólo usó una vez la flecha para determinar la altura inicial del avión. Esta situación, nos permite conjeturar que el docente considera de mayor complejidad el problema del submarino y, por ello, necesita indicar en todo momento el movimiento que hace el objeto con la finalidad de que los alumnos comprendan el procedimiento.

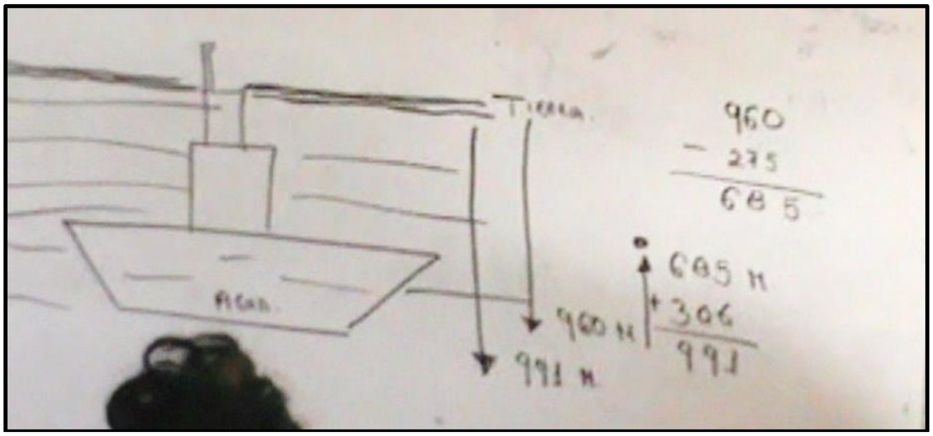


Figura 5.5. Flechas, como recurso, para determinar el movimiento del submarino y el uso del signo binario (Gallardo, 2004) para conocer la posición.

Como se puede observar en la Figura 5.5, Saúl sigue sin considerar el tiempo –que se presenta en el contexto real–, y coloca las flechas que usa para determinar el movimiento y la nueva posición del submarino de manera indistinta, sin respetar un orden porque sólo le interesa el desplazamiento que hace de forma vertical; es decir, los desplazamientos que realiza el submarino.

5.1.1.3. El sistema de referencia como un posible recurso adecuado en la resolución de los problemas: el avión y el submarino

Como hemos mencionado Saúl usa la representación gráfica como recurso para comprender el problema y el sistema de referencia para resolver el mismo; sin embargo, al no considerar los números con signo en su procedimiento, cometió el error de relacionar los movimientos de los objetos con las operaciones de suma o resta y no con una cantidad positiva o negativa. En la siguiente tabla se presenta una posible solución de los problemas presentados usando el sistema de referencia y los números con signo de forma correcta, con el propósito de mostrar la forma de trabajar el sistema de referencia y los números con signo en la solución de problemas aditivos que implican el uso de estos números.

Tabla 5.1.
Análisis de la solución de Saúl en el problema del avión y una posible solución

Problema del avión:

Un avión se encontraba a 2870 metros de altura. Luego bajó 945 metros; después, subió 812 metros, y por último descendió 570 metros, ¿a qué altura quedo finalmente el avión?

Instrucciones	**Solución de Saúl**	**Solución propuesta**	**Comentarios**
Altura inicial	2870 m	$^{+}2870m$	Saúl da por hecho que los alumnos consideran el signo positivo cuando no se escribe en el número
Baja 945 metros	$\begin{array}{r} 2870 \\ -\ \underline{945} \\ 1925 \end{array}$	$\begin{array}{r} ^{+}2870 \\ +\ \underline{^{-}945} \\ ^{+}1925 \end{array}$	En la propuesta de Saúl sólo usa el signo binario y, con ello, no está indicado el movimiento que hace el avión. A diferencia de Saúl, en la propuesta se usan ambos signos el binario (operación) y unario (del número) Gallardo (1994). Con esta forma de establecer la operación se usa correctamente el sistema de referencia y, así, se establece que los movimientos hacia abajo se relacionan con cantidades negativas y no con la operación resta.
Sube 812 metros	$\begin{array}{r} 1925 \\ +\ \underline{812} \\ 2737 \end{array}$	$\begin{array}{r} ^{+}1925 \\ +\ \underline{^{+}812} \\ ^{+}2737 \end{array}$	Saúl relaciona la suma con el movimiento de subir. En nuestra propuesta el movimiento de subir está relacionado con una cantidad positiva. De esta manera se hace un uso correcto del sistema de referencia, en donde se establece que los movimientos hacia arriba son cantidades positivas y los movimientos hacia abajo son cantidades negativas.
Desciende 570 metros	$\begin{array}{r} 2737 \\ -\ \underline{570} \\ 2167 \end{array}$	$\begin{array}{r} ^{+}2737 \\ +\ \underline{^{-}570} \\ ^{+}2167 \end{array}$	

En la Tabla 5.1 se puede observar el uso de un sistema de referencia como recurso, a pesar de que Saúl nunca hace mención de él. Se nota un uso incorrecto e, incluso, no consciente, porque no usa los números con signo y se limita a establecer la relación de los movimientos del avión con las operaciones suma o resta. Así, se realiza una suma si el avión sube y una resta si baja.

En la Tabla 5.2 se presenta la solución que da Saúl al problema “el submarino” y la propuesta de solución que damos para dicho problema. Debemos mencionar que para este problema hay dos posibles soluciones: una considerando el mismo sistema que usa Saúl en el problema del avión y, dos, considerando el sistema que usa el profesor en el problema del submarino.

Tabla 5.2.
Análisis de la solución, al problema del submarino, de Saúl y propuestas de soluciones usando el sistema de referencia de forma correcta

Problema del submarino:

Un submarino está a 960 metros de profundidad. Luego emerge 275 metros; después, se sumerge 306 metros, ¿cuántos metros debe emerger para estar en la superficie del mar [*nivel del mar*]?

Instrucciones	Solución de Saúl	Propuesta 1: respetando el sistema que usa Saúl	Propuesta 2: sistema de referencia usado en el problema del avión	Comentarios
Profundidad inicial	960 m	$^{+}960m$	$^{-}960m$	Saúl determina que la profundidad del submarino es una cantidad positiva. Si usamos el mismo sistema que usó Saúl en el problema del avión, la cantidad que representa la profundidad del submarino, tendría que ser negativa porque el profesor determinó la altura del avión como una cantidad positiva.
Emerge 275 metros	$960 - 275 = 685$	$^{+}960 + {}^{-}275 = {}^{+}685$	$^{-}960 + {}^{+}275 = {}^{-}685$	En la propuesta de Saúl, nuevamente, sólo usa el signo binario. Se presentan dificultades en los alumnos, pues ellos asocian la acción de subir (emerger) con una suma (problema del avión) pero como Saúl uso un sistema distinto para este problema, entonces, la suma ya no funciona y, por tanto, el profesor explica porque no se puede sumar e indica que es una resta lo que tienen que hacer. En la propuesta 2, sigue existiendo la relación establecida en el problema del avión, es decir, el movimiento de subir se relaciona con la suma.

Sumerge 306 metros	$+\begin{array}{r}685\\ \underline{306}\\ 991\end{array}$	$+\begin{array}{r}{}^{+}685\\ \underline{{}^{+}306}\\ {}^{+}991\end{array}$	$+\begin{array}{r}{}^{-}685\\ \underline{{}^{-}306}\\ {}^{-}991\end{array}$	Saúl, en su nuevo sistema de referencia, relaciona la suma con el movimiento de bajar. En nuestra propuesta 2 el movimiento de subir está relacionado con una cantidad positiva o, en términos de Saúl, con una suma. De esta manera, se usa el mismo sistema de referencia para no generar conflictos en los alumnos. Se establece que los movimientos hacia arriba son cantidades positivas y los movimientos hacia abajo son cantidades negativas.

En la Tabla 5.2 se puede observar el uso de un distinto sistema de referencia para resolver el problema del submarino. El cambio que hace el profesor, sin dar explicación alguna de dicho cambio de sistema nos hace conjeturar que no es consciente del uso del sistema de referencia como recurso para resolver el problema. Si bien, su procedimiento es correcto y le permite obtener la respuesta correcta, Saúl no es consciente de que usa distintos sistemas de referencia para resolver cada problema antes presentados. Los sistemas de referencia que usó son los siguientes:

- Problema del avión
  - Origen: nivel de la tierra
  - Movimientos hacia arriba: suma [*correcto: cantidades positivas*]
  - Movimientos hacia abajo: resta [*correcto: cantidades negativas*]
- Problema del submarino
  - Origen: nivel de la tierra [*nivel del mar*]
  - Movimientos hacia arriba: resta [*correcto: cantidades negativas*]
  - Movimientos hacia abajo: suma [*correcto: cantidades positivas*]

Consideramos que una forma para no generar dificultades en los alumnos es usar el mismo sistema de referencia en todos los problemas que resuelva o explicitar el sistema de referencia que usará en cada problema con la finalidad de que no surjan contradicciones en los proceso de solución, y usar números signados para poder asociar a los movimientos cantidades con signo.

5.1.2. Recursos usados por Pedro

Pedro, como parte de su trabajo documental (Gueudet & Trouche, 2009), seleccionó algunos problemas aditivos de los libros: *Matemáticas 1* (Block & García, 2013) y *Matemáticas 1. Primer curso* (Caballero et al., 1994) y otros de internet para resolverlos en clase, con la finalidad de reforzar los conceptos, algoritmos y reglas enseñadas en torno a los números enteros (números con signo). De acuerdo con el Programa de estudios (SEP, 2011), los problemas aditivos permiten usar sumas y restas con números enteros. Estas operaciones fueron usadas por Pedro como recurso para resolver los problemas.

Para que los alumnos comprendieran los conceptos, algoritmos y operaciones de números con signo al resolver los problemas, al igual que Saúl, Pedro también recurrió al sistema de referencia (representación gráfica) como recurso y una serie de signos para indicar los movimientos de los objetos que intervienen en los problemas.

Dentro de los problemas que Pedro resuelve en el aula, seleccionamos dos que resaltan los recursos usados en su solución. Estos son: la mosca y el submarino[8], en ellos se observó que Pedro tuvo dificultad para distinguir los significados de los signos positivo y negativo (Gallardo, 1994) y no usó el signo del número al realizar operaciones. En seguida, son explicitados los recursos usados en cada uno de ellos.

5.1.2.1. Recursos usados en el problema la mosca

Como parte de su trabajo documental (Gueudet & Trouche, 2009), Pedro junto con los alumnos resolvió el siguiente problema en el pizarrón: “Una mosca se encuentra volando en el campo. Inicialmente se encuentra a una altura de 6 metros. Comienza a realizar ascensos y descensos, los cuales son registrados. Primero se eleva 2 metros, y luego desciende 3 m. después asciende nuevamente 5 metros y desciende 4 metros. ¿A qué altura se encuentra en ese momento la mosca?”

Un recurso usado por Pedro, al igual que el profesor Saúl, es la representación gráfica (dibujo) para interpretar y comprender el problema. Además, de forma implícita, usó el sistema de referencia para determinar que el nivel del piso es su origen (cero relativo) y los movimientos de subir y bajar con la suma y resta, respectivamente. De acuerdo con el discurso de Pedro, los invariantes operatorios (Gueudet & Trouche, 2009)

[8] El investigador asignó estos nombres a los problemas que Pedro resolvió en clase para poder identificarlos.

que guiaron el uso de este recurso es el significado que Pedro tiene en torno al nivel de la tierra. Pedro define el nivel de la tierra como un cero relativo (origen del sistema de referencia); del cual, se toma la referencia para determinar las alturas y movimientos que haga la mosca. Además, recurre al dibujo para poder fijar el movimiento de la mosca y, de esta forma, poder establecer su altura. Lo mencionado anteriormente se evidencia en el siguiente extracto de la clase videograbada.

Pedro: Bien, vamos a resolver el problema. Por acá está mi pasto [*dibuja en el pizarrón líneas que simulan el pasto*] y por acá está mi mosquita [*dibuja una mosquita y una curva, con línea punteada, que representa el movimiento de la mosca*] y está a una altura ¿de cuánto? [*Véase Figura 5.6*]

Alumnos: seis metros

Pedro: entonces, voló de cero metros [*indica el pasto con una flecha y coloca el número cero*] o sea que estábamos sobre el nivel del piso, hacía seis metros. Esto es relativo [*se refiere a los cero metro, nivel del piso*] ahorita les voy a decir por qué siento que es relativo.

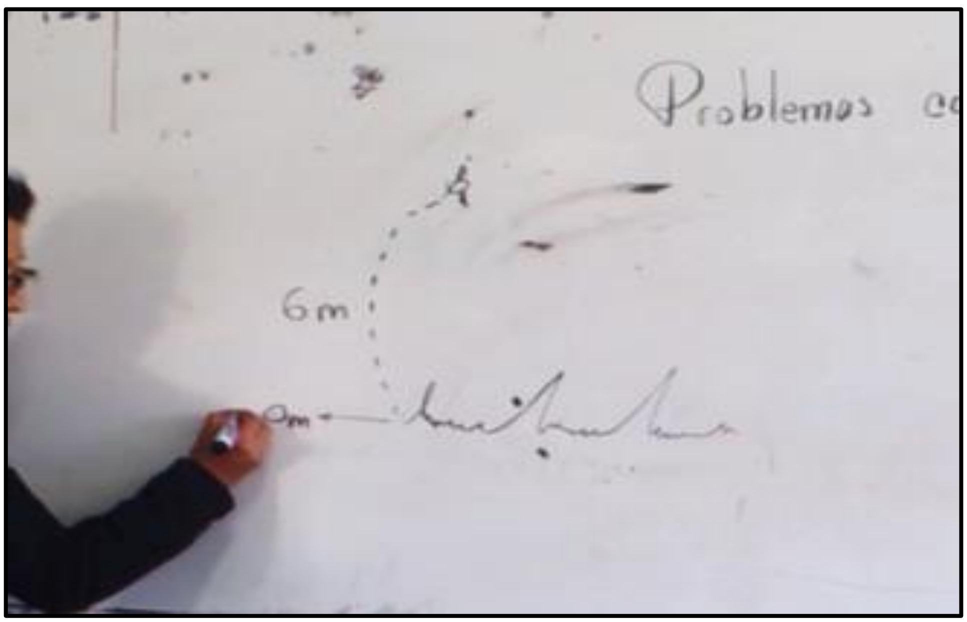


Figura 5.6. La representación gráfica como recurso para comprender el problema, y línea curva para determinar la altura de la mosca.

Como se puede observar en el extracto anterior y en la Figura 5.6, Pedro requiere determinar el origen [*cero relativo*], y establecer la relación que existe entre el nivel del piso y el cero relativo para poder medir la altura de la mosca. Si bien, en ningún momento de la clase el profesor dio una explicación del porqué lo nombra “cero relativo”. Consideramos que para él existe el concepto de un cero absoluto y que toma en cuenta el contexto del problema. Esto da muestra, en un principio, que Pedro usa el sistema de referencia de forma correcta y, posiblemente, de forma consciente, más allá de no dar una definición ni mencionar su uso, porque advierte que se necesita determinar un origen y que él lo puede establecer donde sea (Resnick et al., 1996).

Para Pedro es fundamental, al igual que para Saúl, fijar los movimientos que realice el objeto (la mosca), para ello, recurre al dibujo. A diferencia de Saúl, quien usa una flecha como recurso para indicar la altura del avión, Pedro se apoya en una línea curva y le coloca a un lado la cantidad seis metros (m). El uso de este recurso permite observar que hay dificultades para medir la altura de un objeto (véase Figura 5.6).

A partir de las acciones y el discurso de Pedro, podemos observar que existen errores conceptuales en torno al concepto altura porque el profesor asocia la altura (seis metros) de la mosca con la longitud de la curva que dibuja (la trayectoria de la mosca). La cantidad seis metros la tuvo que haber colocado a un lado del dibujo que representa la mosca (como lo hace más adelante). Es evidente que para Pedro esta representación no genera dificultades en los alumnos y que ellos lo comprenden para resolver el problema. En el siguiente extracto de la clase videograbada se da evidencia de esta afirmación.

Pedro: entonces, empezó a hacer esto la mosquita [*dibuja líneas curvas, indicando las posibles trayectorias que hace la mosca al volar*] y no sabía a donde ir la mosquita. Entonces, empezó a subir y bajar. Luego, primero, se eleva. Entonces, de aquí [*señala la posición de la mosca donde su altura es de seis metros*] empieza a subir dos metros, entonces, hasta ahí ¿cuánto llevaríamos?

Alumnos: ocho metros [*no hacen operaciones escritas*]

Pedro: hasta ahí, llevaríamos ocho metros [*coloca en el pizarrón una nueva curva indicando que la mosca subió y le coloca 8 m*] luego desciende tres metros la mosquita [*comienza a trazar una línea curva hacia abajo para indicar el movimiento de la mosca*] la mosca dice me rebelo y ahora me voy para el piso. ¿Cuánto?

Alumnos: cinco metros

Pedro: estamos a una altura de cinco metros [*no realiza ninguna operación en el pizarrón, todo es mental*], y luego dice asciende cinco metros, ¿Dónde estamos a los cinco metros?

Alumnos: 10 metros

Se puede observar que para Pedro no es necesario dar explicación alguna en torno a qué operación hacer para resolver el problema de la mosca, ni escribir dichas operaciones. Al parecer, él considera que los alumnos cuentan con un conocimiento previo para saber qué operación realizar si la mosca sube o baja, pues son movimientos que ellos identifican. Sin embargo, para el profesor es fundamental indicar a partir de donde se suma o se resta la cantidad que se eleva o baja la mosca. Pedro señala con su dedo una nueva posición que tiene la misma altura inicial de la mosca y menciona que a partir de esa posición se tienen que sumar dos metros (véase Figura 5.7.a y 5.7.b).

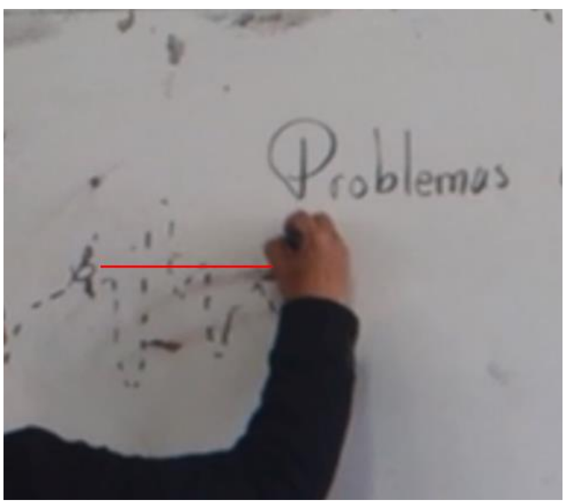


Figura 5.7.b. Uso de una marca para determinar la altura de seis metros de la mosca y a partir de ella sumar lo que se eleva.

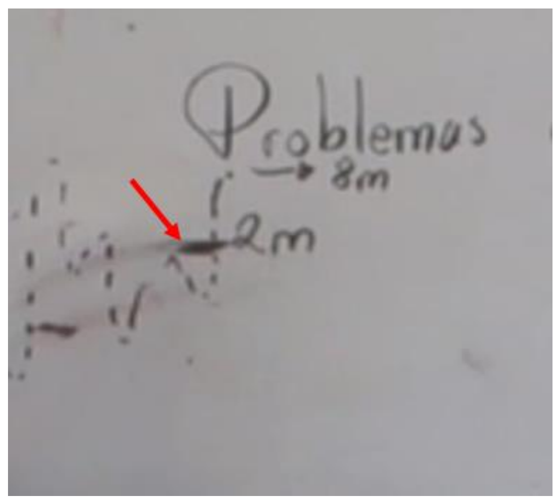


Figura 5.7.a. Traslación de la altura inicial de la mosca a una nueva posición.

En la Figura 5.7.a se puede observar que los invariantes operatorios (Gueudet & Trouche, 2009) que guían el uso de la representación gráfica y el sistema de referencia por parte de Pedro es considerar el tiempo, porque la mosca está en movimiento. El profesor dibuja líneas curvas que representa la trayectoria que hace la mosca y, también, traslada la posición inicial de la mosca (seis metros de altura) a una nueva posición que indica con una nueva marca [*segmento*]. Aunque Pedro, inicialmente, menciona que usará un cero relativo como origen, él no menciona que realizó sumas y restas para conocer la nueva posición del objeto. El hecho de que Pedro use sumas y restas para resolver el problema, nos permite inferir que él usa, implícitamente, un sistema de referencia para comprender y dar solución al problema. Sin embargo, al igual que Saúl, Pedro relaciona los movimientos de la mosca con las operaciones de suma y resta, en vez de relacionar los movimientos de la mosca con cantidades positivas o negativas; en otras palabras, Pedro no usa los números con signo para resolver el problema de la mosca.

Pedro: si se dan cuenta traté de no usar operaciones, simplemente, la mayoría fue mental en mi dibujo

A pesar de que Pedro no realiza ninguna operación escrita, hay evidencia de que tanto él como los alumnos usan las operaciones de adición y sustracción para conocer la nueva altura de la mosca después de subir o bajar. Para el profesor es suficiente la representación gráfica que hace del problema para comprender como resolverlo. De esta manera, se puede observar que Pedro establece, de manera implícita, que para los movimientos hacia arriba se suma y hacia abajo se resta.

Pedro no usa los números con signo como recurso para resolver el problema y, sólo se limita a realizar, mentalmente, sumas y restas de números naturales. A manera de conjetura, él usó el sistema de referencia de forma implícita, a pesar de indicar el origen de su sistema, y fue fundamental para resolver el problema de la mosca. Para Pedro es necesario establecer un origen [*nivel del piso o cero relativo*] para poder medir las alturas y, después, establecer relaciones en torno a los movimientos de la mosca; en este caso, de forma errónea, asocia a los movimientos hacia arriba la operación suma y a los movimientos hacia abajo la operación resta.

Durante la resolución de este problema, no surgieron dificultades ni interrogantes en torno al procedimiento dado por Pedro y los alumnos; sin embargo, en el problema: el submarino (que a continuación analizamos) aparecen dificultades para comprender los argumentos que dio el profesor sobre la forma de resolver el problema.

5.1.2.2. Recursos usados en el problema el submarino

Pedro, al igual que el profesor Saúl, como parte de su trabajo documental usó un problema que se contextualiza por debajo del nivel del mar [el submarino] con el objetivo de que los alumnos dieran muestra de los conocimientos adquiridos durante las sesiones donde él enseñó los números enteros. El problema del submarino que usó Pedro es el siguiente: Un submarino se encuentra a una profundidad de 430 metros. Después descendió 100 metros; luego subió 150 metros, y finalmente bajo 220 metros más. ¿A qué profundidad se encuentra el submarino al finalizar sus acciones?[9]

Para este tipo de problema, como ya se mencionó, se requiere un mayor esfuerzo cognitivo para poder percibirlo. Los problemas contextualizados por debajo del nivel del mar son más complejos de asimilar; en particular, en torno a los movimientos de subir y bajar de un objeto. Por lo tanto es necesario explicitar todo lo que se use para resolverlo. A manera de hipótesis, creemos que Pedro es consciente de la dificultad que representa resolver este tipo de problemas y, por tanto, recurre a otro tipo de recursos (e.g. signo menos, flechas, entre otros) para que los alumnos comprendan la forma de resolverlo.

Como parte de los recursos usados por Pedro se encuentra la representación gráfica. Este recurso permite, desde la perspectiva del docente, comprender el problema y resolverlo sin hacer operaciones escritas; sin embargo, cuando se trata de cantidades grandes se necesita de la operación escrita. Consideramos que el uso, de forma implícita, del sistema de referencia sigue presente en la solución que da Pedro a este problema. Lo anterior se puede observar en el siguiente extracto de la clase videograbada.

Pedro: un submarino se encuentra a una profundidad de 430 metros. Si yo no quisiera usar tantas operaciones (aunque si las tendré que hacer) ¿Cómo dibujaría menos 430 metros? [*No da tiempo para que respondan los alumnos*] pondría mi mar [*representa el nivel del mar con líneas quebradas*], y a una profundidad [*traza una flecha vertical con dirección hacia abajo para indicar el movimiento del submarino*] porque estamos descendiendo, ¿cuánto estaríamos aquí [*hace referencia a la profundidad inicial del submarino*]?

Alumnos: a 430

Pedro: [*el profesor escribe el 430*] yo utilizaría un signo, utilizaría el signo menos [$^{-}$, *signo del número*] porque a la altura del nivel del mar nos consideramos a cero metros [*indica con una flecha la línea que representa el nivel del mar y le coloca 0m*] entonces, del nivel del mar lo que baja ya se considera, yo lo considero

[9] El problema el submarino, al igual que el problema la mosca, que usó Pedro no fue seleccionado de ninguno de los dos libros de texto que usa. Este problema fue obtenido de una página de internet.

números negativos [*cantidades negativas*] ¿hasta aquí vamos bien? Empezamos a utilizar los signos menos.

Como se puede observar en el extracto precedente, Pedro al preguntar "¿cómo dibujaría menos 430?", da evidencia que para él la profundidad a la que está el submarino se relaciona con cantidades negativas. A manera de conjetura, se puede creer que él usó el mismo sistema de referencia que en el problema de la mosca, porque para indicar la profundidad (posición contraria a la altura de la mosca) recurre al signo menos, signo contrario al que usó en la altura de la mosca (positivo). Para que el profesor pueda referirse a profundidades necesita establecer el origen, el cual es el referente para medir la profundidad inicial del submarino. En la Figura 5.8 se puede observar este recurso usado por Pedro para contextualizar y comprender el problema.

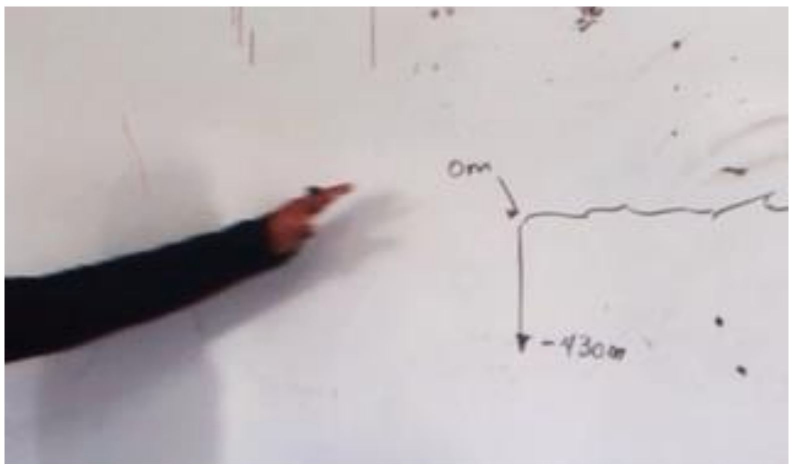


Figura 5.8. Recursos usados por Pedro para determinar la profundidad del submarino.

En la Figura 5.8 se puede observar el origen que determina Pedro como cero metros al nivel del mar. El profesor no indica que sea un cero relativo, como en el problema anterior, lo cual nos permite conjeturar dos cosas: 1) se le olvidó indicar que es relativo ese cero o 2) para Pedro el nivel del mar es el cero absoluto. Lo anterior se puede deber a que, en la vida real, toda altura se mide en referencia el nivel del mar (e.g. la altura de la Ciudad de México es 2250 metros sobre el nivel del mar). Después de fijar el origen, para indicar el movimiento que hace el submarino, Pedro usa la flecha orientada hacia abajo como recurso para establecer el movimiento del submarino y, así, poder medir la profundidad de 430 metros.

Pedro establece que la profundidad del submarino se representa con un número negativo y, de manera implícita, relaciona el movimiento hacia abajo –que hace el submarino (profundidad)– con una cantidad negativa y no con la operación resta como lo hizo en el problema de la mosca; sin embargo, esta relación (movimiento hacia abajo con cantidad negativa) no la mantiene después cuando sigue resolviendo el problema. Lo anterior genera dificultades en los alumnos porque no han usado números con signo en este tipo de problemas; además, de que están influenciados por la relación que, Pedro, estableció en el problema anterior. En el siguiente extracto de la clase videograbada se puede observar lo dicho anteriormente.

Pedro: dice que, descendió, ¿qué es descender?

Alumnos: bajar

Pedro: vamos a bajar, nuevamente [*hace alusión a la profundidad, inicial, del submarino*], ¿cuánto?

Alumnos: 100 metros

Pedro: 100 metros [*dibuja una flecha vertical hacia abajo para representar que el submarino bajó*] sin hacer tantas operaciones, ¿a qué profundidad estaría?

Alumnos: menos 330

Pedro: menos 530 metros de profundidad [*el profesor no atiende el resultado que dieron algunos alumnos de menos 330*]

Alumnos: ¿quinientos?

Pedro: sí, ¿no? [*Hace un movimiento con sus manos y cara de asombro. No entiende porque los alumnos dicen menos 330*]

Alumnos: Sí, [*algunos alumnos aún no se convencen de que sean menos 530*]

Pedro: bueno, yo, así lo veo. Porque si estoy a una profundidad de menos 430 metros [*hace un movimiento con su mano indicando que el submarino baja hasta los 430 metros*] y vuelvo a bajar [*hace un movimiento con la mano más abajo que el anterior*] ¿A dónde estoy?

Alumnos: ah sí es cierto [*bastó con el movimiento que hace el profesor para que se convencieran del resultado los alumnos*]

Pedro: a menos 530 metros sobre el nivel del mar

En el extracto anterior podemos observar que, influenciados por el problema anterior de la mosca, en este nuevo los alumnos realizan una resta entre naturales ($430-100=330$) porque el submarino desciende y, por ello, mencionan que la nueva profundidad del submarino sería menos 330. A manera de conjetura, consideramos que los alumnos mencionan el "menos" porque saben que debajo del mar se colocan los negativos, y no porque sea el resultado de su operación. Pedro no atiende el resultado que dan los alumnos y les dice que son menos 550. En el resultado que él da no se puede observar si usa dos cantidades negativas o dos positivas cuando suma, debido a que no hace la operación en el pizarrón.

Cuando Pedro colocó la cantidad 100 en un costado de la flecha que usó para indicar que el submarino volvió a bajar nos permite deducir suma dos cantidades positivas ($430+100=550$) (véase Figura 5.9.a). Con esta acción también nos percatamos que Pedro modifica la relación que había establecido en el problema anterior; es decir, cambia el sistema de referencia que había usado en el problema de la mosca, pues ahora considera sumar cuando el submarino está bajando en lugar de restar. Estos cambios no conscientes del sistema de referencia, por parte del profesor, generan dificultades en los alumnos porque no identifican que ha cambiado la forma de resolver el problema y que la relación que habían establecido para el problema de la mosca no funciona o no es igual para el del submarino; sin embargo, los alumnos no quedan convencidos que sean menos 550 y cuestionan al profesor.

Cuando los alumnos responden en forma de pregunta: "¿quinientos?" se puede observar que sus esquemas de utilización en torno al recurso de la operación son distintos a los de Pedro, porque ellos consideran restar mientras que el profesor recurre a la suma. Asombrado, Pedro, no se explica por qué los alumnos dicen menos 330 y trata de dar un argumento para explicar y convencer a los alumnos de que la respuesta correcta es menos 550. Él recurre a nuevos recursos (véase Figuras 5.9.b y 5.9.c) para tratar de que los alumnos comprendan lo siguiente: "si el submarino bajó 430 metros y vuelve a bajar, entonces, ¿a qué profundidad estará el submarino?"

Figura 5.9.a. Uso de cantidad positiva para determinar que el submarino bajó.

Figura 5.9.b. Indicar que el submarino bajó primero 430 metros.

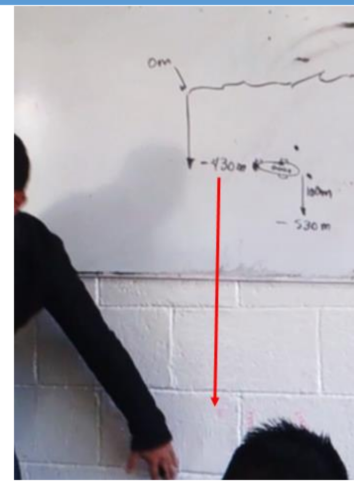


Figura 5.9.c. Movimiento hacia abajo para indicar que el submarino vuelve a bajar.

El argumento que da Pedro para justificar que la nueva profundidad del submarino, después de bajar 100 metros es menos 550, no es matemática. El profesor se apoya en los gestos como recurso no físico (Gueudet & Trouche, 2009). Cuando Pedro hace el movimiento de ir más a bajo (Figura 5.9.c) los alumnos inmediatamente se convencen de la respuesta dada por él. El discurso, que se presenta en el salón de clase, entre el docente y los alumnos no nos permite observar que es lo que los convence: 1) el movimiento del profesor, o 2) que los alumnos tengan conocimiento sobre la recta numérica e identificaron que $^{-}550$es menor que $^{-}430$. Lo último, permite observar que ellos indican que la respuesta es $^{-}550$ porque al restar siempre se obtiene una cantidad menor.

A partir de este momento para los alumnos fue claro, de forma implícita, que cuando el submarino baje se tiene que sumar e, inmediatamente, relacionan los movimientos de subir con la resta. Esto último se puede observar en el siguiente extracto de la clase videograbada.

Pedro: luego subió [*indica que están en menos 530 metros y dibuja una flecha hacia arriba para indicar que sube el submarino*] 150 metros subió. Entonces, ¿qué operación tendría que ejercer [*realizar*] para saber la nueva posición?

Alumnos: resta

Pedro: muy bien. Tenemos que 530 metros le vamos a restar 150 metros [*el profesor escribe en el pizarrón la operación* $550-150$ *de forma vertical, resuelve la resta*], entonces, ¿en dónde me encuentro?

Alumnos: 380 metros

Como se puede observar en el extracto precedente, los alumnos convencidos del argumento que dio Pedro en torno a por qué era menos 530 establecieron una nueva relación entre los movimientos del submarino y la operación. Así, cuando baje se suma y, por lo tanto, cuando suba se resta. De esta manera, los alumnos ya no mostraron dificultad para realizar la operación correspondiente cuando el submarino subió 150 metros, pues todos respondieron que se tenía que restar. Pedro da muestra de no usar números con signo (véase Figura 5.10), más allá de que considera el signo negativo para indicar la profundidad del submarino, y sólo se limita a usar el signo binario (Gallardo, 1994). El profesor, nuevamente, usa las operaciones como recurso para determinar la nueva profundidad del submarino después de subir o bajar, y la flecha hacia arriba para indicar el movimiento del submarino.

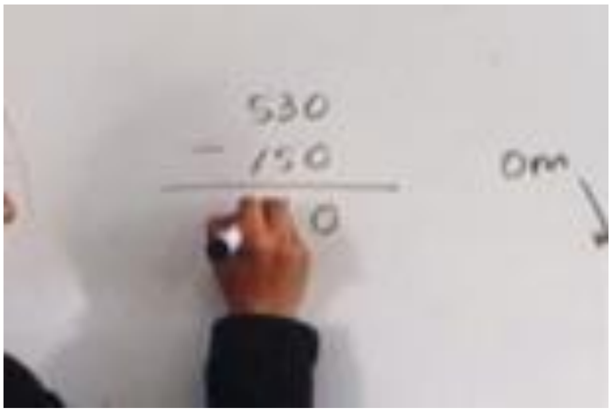


Figura 5.10. La resta (signo binario) como recurso usado por Pedro.

La respuesta que dan los alumnos al restar es 380 [*positivo*], este discurso da evidencia del uso de las operaciones con números naturales al igual que el profesor quien usa la resta como recurso para determinar la nueva posición del submarino, sin considerar el signo negativo que poseen los números en su representación gráfica. A pesar de que los alumnos dan una respuesta con una cantidad positiva el profesor no se detiene a cuestionar el porqué de su respuesta y continúa resolviendo el problema. En el siguiente extracto, se da muestra de lo anterior y del argumento que da Pedro para determinar que es negativo el resultado.

Pedro: ¿a menos que? [*El profesor nuevamente, no atiende el resultado que dan los alumnos*] seguimos utilizando numero negativo porque estamos debajo del agua por eso seguimos utilizando números negativos. Estamos antes del cero [indica el *nivel del mar*]

Alumnos: ¿por qué negativo? [*Pregunta un alumno que sigue sin entender porque se usa el signo menos*]

Pedro: ahorita atendemos las dudas [*continua resolviendo el problema sin atender la duda del joven*] luego dice que bajó 220 metros

Se puede observar que el profesor no atiende, al momento, las dudas de los alumnos y tampoco intenta disipar las posibles dificultades en torno al uso de los números negativos. Posiblemente, no considera a los alumnos para no generar conflictos en él a la hora de resolver el problema, de modo que se limita a dar argumentos no matemáticos como el hecho de mencionar que es negativo por estar debajo del nivel del mar. Este argumento no sería válido si tomamos el sistema de referencia que usa el profesor Saúl (véase pp. 55-61, de este capítulo) cuando resuelve el problema del submarino, porque para él las cantidades debajo del nivel del mar son, también, positivas.

Los alumnos ya no dan muestra de tener dificultades para saber qué operación hacer cuando el submarino baja 220 metros. El profesor resuelve en el pizarrón la suma $(380+220=600)$ y al preguntar a qué profundidad estamos [*se refiere al submarino*] la mayoría de los alumnos responde que a menos 600.

Pedro: luego dice que bajó [*dibuja una flecha hacia abajo indicando que baja el submarino*] ya que estamos acá, vuelve a bajar 220 metros

Alumnos: se suma ¿no? Interrumpe un alumno

Pedro: exactamente. Tenemos 380 metros más 220 metros [*coloca en el pizarrón la suma, de forma vertical,* $380+220$]. Entonces, ¿a qué profundidad estamos?

Alumnos: a menos 600 metros

A pesar de que los alumnos, en su mayoría, dieron el resultado correcto, hay algunos alumnos que dieron muestra de tener dificultades, las cuales quizás son producto del recurso usado por Pedro para conocer la nueva posición del submarino; en otras palabras, el hecho de que él no use los signos de los números cuando resuelve las operaciones, genera que los alumnos sigan estando en el campo de los números Naturales y, por lo tanto, su resultado sigue siendo positivo. Por ello, un alumno menciona que a él le dio 600 positivo. Lo anterior se muestra en el siguiente extracto de la clase videograbada.

Pedro: menos 600 metros

Alumno A: maestro, yo le puse en positivo

Pedro: tendrías que especificar 600 metros debajo del nivel del mar *[el profesor no da mayor explicación, y no atiende a los alumnos que obtuvieron el resultado positivo*]

Alumno B: pues tú ponle el signo menos y ya [*hace el comentario al compañero que le dio 600 positivo*]

Pedro: si tiene sólo los 600 [*positivo*] yo lo que enfatizaría es que como son 600 metros debajo del nivel del mar. Con ese signo [*remarca el signo menos que coloco a su resultado* $^{-}600$] dice que con ese signo significa eso [*que están debajo del nivel del mar*] menos 600 metros debajo del nivel del mar. Entonces, ¿ya?

Alumnos: ya

En el extracto precedente se puede observar las dificultades que surgen al considerar un sistema de referencia distinto al usado en el problema de la mosca. Los alumnos no comprenden el uso del signo del número porque el profesor nunca lo usó en su procedimiento. Los argumentos que sigue dando el docente son con base en el contexto del problema; es decir, él justifica que es negativo por estar debajo del nivel del mar y en ningún momento da una justificación matemática, usando números con signo. La mayoría de los alumnos y el profesor se niegan a usar los números negativos como parte de su solución.

Pedro da muestra de considerar este tipo de problemas más complicado que el de la mosca; dada la dificultad, busca en todo momento indicar el movimiento que hace el submarino a través del uso de flechas. También, muestra inseguridad cada vez que un alumno lo cuestiona y no sabe cómo explicar su procedimiento; por tanto, basa sus argumentos en el contexto del problema en lugar de dar una explicación matemática. Quizás, estas dificultades surgen por no usar de forma consciente el recurso: sistema de referencia

5.1.2.3. El sistema de referencia como un posible recurso adecuado en la resolución de los problemas: la mosca y el submarino

El uso, de forma implícita, del sistema de referencia le permite a Pedro resolver ambos problemas; sin embargo, al igual que Saúl, él relaciona los movimientos de la mosca y del submarino con las operaciones suma y resta, en lugar, de relacionarlas con cantidades negativas y positivas. Con la finalidad de comprender y usar de forma correcta el sistema de referencia para resolver este tipo de problemas, a continuación se hace un análisis de la solución hecha por Pedro de ambos problemas y se da una propuesta de solución usando de forma correcta el recurso: sistema de referencia.

Tabla 5.3.
Análisis de la solución echa por Pedro al problema de la mosca y una propuesta de solución correcta usando números con signo

Problema de la mosca:

Una mosca se encuentra volando en el campo. Inicialmente se encuentra a una altura de 6 metros. Comienza a realizar ascensos y descensos, los cuales son registrados. Primero se eleva 2 metros, y luego desciende 3 m. después asciende nuevamente 5 metros y desciende 4 metros. ¿A qué altura se encuentra en ese momento la mosca?

Instrucciones	Solución de Saúl	Solución propuesta	Comentarios
Altura inicial	6 m	$^{+}6m$	Pedro, al igual que Saúl, da por hecho que los alumnos consideran el signo positivo cuando no se escribe en el número. Entonces, inicialmente, relaciona el movimiento por encima del nivel del piso como una cantidad positiva. Es necesario, cuando se usa un sistema de referencia, usar el signo del número para no confundir con el de la operación.

Continuación Tabla 5.3.
Análisis de la solución echa por Pedro al problema de la mosca y una propuesta de solución correcta usando números con signo

Elevar 2 metros	$\begin{array}{r} 6 \\ +\;2 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} {}^{+}6 \\ +\;{}^{+}2 \\ \hline {}^{+}8 \end{array}$	Pedro sólo usa el signo de la operación (binario, Gallardo, 1994) y, con ello, no está indicado el movimiento que hace el avión, sólo, suma los desplazamientos. Sin embargo, en la propuesta, se utilizan ambos signos el binario (operación) y unario (del número) Gallardo (1994). Con esta forma de establecer la operación se usa correctamente el sistema de referencia y, así, se establece que los movimientos hacia arriba se relacionan con cantidades positivas y no con la operación suma.
Desciende 3 metros	$\begin{array}{r} 8 \\ -\;3 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} {}^{+}8 \\ +\;{}^{-}3 \\ \hline {}^{+}5 \end{array}$	Pedro, también, relaciona la operación resta con el movimiento de bajar. La propuesta de solución indica que el movimiento de bajar está relacionado con una cantidad negativa. De esta manera se hace un uso correcto del sistema de referencia, en donde se establece que los movimientos hacia arriba se representan con cantidades positivas y los movimientos hacia abajo con cantidades negativas.
Asciende 5 metros	$\begin{array}{r} 5 \\ +\;5 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} {}^{+}5 \\ +\;{}^{+}5 \\ \hline {}^{+}10 \end{array}$	Nuevamente, Pedro, realiza una suma cuando la mosca asciende 5 metros en lugar de asociarle la cantidad de ${}^{+}5$ al movimiento de subir.
Baja 4 metros	$\begin{array}{r} 10 \\ -\;4 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} {}^{+}10 \\ +\;{}^{-}4 \\ \hline {}^{+}6 \end{array}$	

En la Tabla 5.3 se observa el uso inadecuado del sistema de referencia al relacionar los movimientos hacia arriba con la suma y los movimientos hacia abajo con la resta. Pedro no hace mención que usará dicho recurso y eso puede generar dificultades en los alumnos; además, no hace ninguna operación y confía en que los alumnos sabrán que hacer. El profesor no recurre a los números con signo como recurso para resolver el problema, generando confusión al resolver el problema del submarino porque las relaciones que se establecieron para este problema no se usan.

En la siguiente Tabla 5.4 se presenta lo que hace Pedro en el problema del submarino y una posible solución por parte del Investigador usando el mismo sistema de referencia.

Tabla 5.4.
Análisis de la solución echa por Pedro al problema de la mosca y una propuesta de solución correcta usando números con signo

Problema del submarino:

Un submarino se encuentra a una profundidad de 430 metros. Después descendió 100 metros; luego subió 150 metros, y finalmente bajó 220 metros más. ¿A qué profundidad se encuentra el submarino al finalizar sus acciones?

Instrucciones	Solución de Saúl	Propuesta de solución	Comentarios
Profundidad inicial	$^{-}430m$	$^{-}430m$	Pedro, inicialmente, da muestra de usar el mismo sistema de referencia que en el problema de la mosca al considerar la profundidad del submarino como una cantidad negativa. Sin embargo, con base en su discurso, se observa que él usa el signo menos para la cantidad 430 debido a que se encuentra debajo del nivel del mar. Esto da muestra de no considerar una cantidad negativa para los movimientos hacia abajo y solo usa el signo por el contexto del problema. En cambio, en la propuesta que hacemos, el signo del número representa que el submarino hizo un movimiento hacia abajo, y por eso está a una profundidad.
Desciende 100 metros	$\begin{array}{r} 430 \\ +\ \underline{100} \\ 530 \end{array}$	$\begin{array}{r} ^{-}430 \\ +\ \underline{^{-}100} \\ ^{-}530 \end{array}$	A pesar de que Pedro no escribe la operación, podemos deducir que él suma dos cantidades positivas (430 y 100) porque coloca a un costado de la flecha que indica el movimiento del submarino la cantidad 100m (positiva). Pedro, al realizar una suma cuando el submarino baja, da evidencia de que usa un sistema distinto al de la mosca porque ahora los movimientos hacia abajo los relaciona con la suma, contrario a lo que hacía en el problema de la mosca. En la solución de Pedro podemos observar que, para una misma cantidad, considera ambos signos (“+” y “-“); es decir, cuando está es su representación gráfica considera el signo menos a las profundidades (e.g. $^{-}430$) y cuando sale de esa representación y hace operaciones la considera como una cantidad positiva.

Continuación Tabla 5.4.

Análisis de la solución echa por Pedro al problema de la mosca y una propuesta de solución correcta usando números con signo

Desciende 100 metros	$\begin{array}{r} 430 \\ +\ \underline{100} \\ 530 \end{array}$	$\begin{array}{r} {}^{-}430 \\ +\ \underline{{}^{-}100} \\ {}^{-}530 \end{array}$	Por eso, en la propuesta, el signo menos se considera en todo momento y éste se relaciona con el movimiento que haga el submarino. Así como la acción descender implica bajar por eso se asocia con una cantidad negativa también y de esta manera se realiza una suma de números con signo.
Subió 150 metros	$\begin{array}{r} 530 \\ -\ \underline{150} \\ 380 \end{array}$	$\begin{array}{r} {}^{-}530 \\ +\ \underline{{}^{+}150} \\ {}^{-}380 \end{array}$	Como ya se indicó, Pedro cambió de sistema de referencia y, por tanto, ahora a los movimientos hacia arriba se le asocia la operación resta. Al resolver la operación, Pedro, obtiene un resultado positivo; entonces, para llevarlo a su sistema de referencia (dibujo) menciona que se coloca el signo menos porque siguen por debajo del agua [nivel del mar]. Este mal uso del signo, se evita al usar la propuesta que damos porque en todo momento consideramos y usamos el signo del número; así, al obtener nuestro resultado un número negativo, nos indica que el submarino sigue por debajo del agua y en qué dirección se coloca la nueva posición del submarino. Con la propuesta de uso correcto del sistema de referencia se cumple el objetivo del Programa de estudios (SEP, 2011) de usar operaciones con números enteros (negativos y positivos)
Bajó 220 metros	$\begin{array}{r} 380 \\ +\ \underline{220} \\ 600 \end{array}$	$\begin{array}{r} {}^{-}530 \\ +\ \underline{{}^{-}220} \\ {}^{-}600 \end{array}$	Nuevamente, Pedro, usa la suma cuando el submarino baja en lugar de usar una cantidad negativa. Entonces el resultado que obtiene es 600 positivo, pero al llevarlo a su representación lo convierte en negativo argumentando que están debajo del mar. El usar números con signo permite evitar esas ambigüedades en el uso del signo y, por ende, evitar dificultades en la comprensión y resolución de problemas.

En la Tabla 5.4 se puede observar que Pedro usa un sistema de referencia distinto en cada problema y, a manera de conjetura, da muestra que no distingue entre el significado del signo del número y el signo de la operación cuando sale de su representación gráfica para hacer una operación, lo cual nos permite pensar en que no es consciente del uso de su recurso. El procedimiento que usa es adecuado a pesar de hacer un mal uso de los recursos inherentes a la resolución de este tipo de problemas. Se puede observar que Pedro usa los mismos sistemas de referencia que usa Saúl. A continuación se muestran los sistemas, que de forma implícita, estableció Pedro.

- Problema de la mosca
  - Origen: nivel del piso (cero relativo)
  - Movimientos hacia arriba: suma [*correcto: cantidades positivas*]
  - Movimientos hacia abajo: resta [*correcto: cantidades negativas*]
- Problema del submarino
  - Origen: nivel del mar (cero absoluto)
  - Movimientos hacia arriba: resta [*correcto: cantidades negativas*]
  - Movimientos hacia abajo: suma [*correcto: cantidades positivas*]

A pesar de que Pedro usa el signo menos para indicar las cantidades por debajo del nivel del mar, no hace un uso correcto del sistema de referencia porque vuelve a asociar el subir con una resta y el bajar con una suma casos contrarios a lo que estableció en el problema de la mosca. Estas acciones nos hacen conjeturar que Pedro no es consciente del uso de estos recursos.

El uso de un sistema de referencia distinto en cada problema, el no indicar dicho cambio, el no usar números con signo en sus operaciones nos permite establecer la siguiente hipótesis: los profesores, Saúl y Pedro, no son conscientes del uso del sistema de referencia como recurso para resolver y comprender problemas aditivos de números con signo. A continuación se presenta el análisis de las entrevistas realizadas a cada uno de los docentes que corresponden a la etapa dos de esta investigación.

5.2. SEGUNDA ETAPA. LA ENTREVISTA

Con base en el análisis llevado a cabo en la primera etapa (videograbación de las sesiones de clase) y con el propósito de corroborar la hipótesis planteada en el párrafo anterior, se realizó una entrevista a Saúl y Pedro. Para cada uno de ellos se elaboró un protocolo de entrevista (véase los anexos, pp. 111-11), en el cual se puso mayor énfasis en el uso del sistema de referencia como recurso. El objetivo de la entrevista, como ya se ha mencionado, es mostrar el uso no consciente del sistema de referencia por parte de Saúl y Pedro.

5.2.1. Entrevista a Saúl en torno al uso del sistema de referencia

En la entrevista, Saúl fue cuestionado por el investigador en torno a los recursos usados (Gueudet & Trouche, 2009, 2010) para comprender y resolver problemas aditivos de números con signo; en particular, sobre el sistema de referencia. El profesor dio argumentos para justificar los recursos usados en sus clases cuando resolvió los problemas. A través de sus argumentos, Saúl mostró sus esquemas de utilización acerca de los recursos usados en el salón de clases, también, da evidencia del uso no consciente del sistema de referencia.

Saúl posee un conocimiento matemático para determinar la altura del avión, porque argumenta que la medición es de forma vertical partiendo del nivel de la tierra (cero metros); sin embargo, de acuerdo con su discurso en la entrevista, no es capaz de llevar este conocimiento a otro instante del problema. Lo anterior se muestra en el siguiente extracto de la entrevista.

Investigador: usted argumentó que para medir la altura del avión, en un instante, se parte de la tierra y, de ahí, se mide de forma vertical. Si quisiéramos saber la altura del mismo avión en otro instante, ¿qué haría?

Saúl: ¡eeeh! [*guarda silencio 8 segundos*] a ver la pregunta es ya partió, está a una altura y viene otra segunda etapa: medir la distancia ¿no?

Investigador: sí, usted me comentó que para determinar la altura del avión parte de la tierra y mide (si fuera posible) o supone una cierta cantidad. Supongamos que el avión avanza y quiere determinar la altura a la que se encuentra el avión, ¿qué haría?

Saúl: pues igual, nada más ahí me queda dar el dato [*hace referencia a suponer la nueva altura del avión*] porque si me pides medirlo realmente estaría complicado o a menos que trajéramos instrumentos para medir.

El razonamiento de Saúl muestra una falta de dominio del concepto de Altura. A pesar de tener claro que se mide a partir de la tierra, no es capaz de medir la altura del avión en otro instante y afirma que necesita dar el nuevo dato. El argumento que ofrece el profesor no es matemático y permite observar que no es consciente del uso del sistema de referencia, pues no logra ver que puede trasladar, paralelamente, el origen que había establecido (cero metros) para medir la altura inicial del avión y, a partir de esa traslación, poder medir nuevamente la altura, partiendo del nivel de la tierra.

El hecho de que Saúl no logre trasladar el origen y use el sistema de referencia (que él estableció) para determinar la nueva altura del avión, se deba a la relación que implícitamente determinó entre los movimientos del avión y las operaciones de suma y resta; por ello, necesita una cantidad inicial para partir de ella y así sumar o restar para saber la nueva altura, o bien, tiene que suponer la nueva altura dando el dato. Para el profesor los movimientos de bajar y subir se relacionan con la resta y la suma respectivamente; sin embargo, no puede justificar, matemáticamente dicha relación, lo que nos permite afirmar que no es consciente del uso del recurso. Lo anterior se muestra en el siguiente extracto de la entrevista.

Investigador: en este problema se menciona que el avión baja 945 metros, ¿qué significa que baje 945 metros?

Saúl: pues que perdió altura

Investigador: y simbólicamente ¿qué realiza?

Saúl: una resta

Investigador: entonces, si en un instante me pide que el avión está a 2870 metros y en un segundo instante va a bajar 945 metros, ¿cómo justifica que se realice una resta si el avión va bajando poco a poco?

Saúl: obviamente, sería 2870 metros inicio del avión. Entonces, me dice que baja, entonces le tenemos que aplicar una resta [*resuelve la resta en una hoja*], a esta respuesta [*señala el resultado de la resta, 1925*] yo le voy a argumentar que el avión ya no se encuentra tan "altote", que es 2870 metros, como ya bajo el avión, el avión ya se encuentra más abajo de este resultado, voy a colocarlo acá [*señala en su dibujo un nuevo punto por debajo del anterior que representa los 2870 metros*] 1925 metros.

La representación gráfica y el uso de signos (punto, flechas, entre otros) fueron algunos de los recursos que Saúl uso al resolver el problema del avión en el salón de clases. Como se puede ver en el extracto de la entrevista anterior, Saúl basa sus argumentos en la posición el avión (altura) para justificar la operación que hizo cuando el avión bajó 945 metros. Podemos observar que no da un argumento matemático pues sólo menciona que el avión ya no está tan "altote" y por eso tuvo que restar para conocer la nueva altura.

Saúl no logra usar el sistema de referencia, que implícitamente estableció, para justificar por qué se tiene que restar cuando el avión baja. Esta situación nos permite ver que el profesor no es capaz de justificar matemáticamente su accionar debido a que no tiene presente el uso del recurso. Una forma de justificar es trasladar, paralelamente, el origen a la nueva posición del avión y haciendo coincidir, en una recta vertical, las dos posiciones del avión (altura inicial y al bajar 945 metros) puede justificar por qué hacer una resta (véase Figura 5.11).

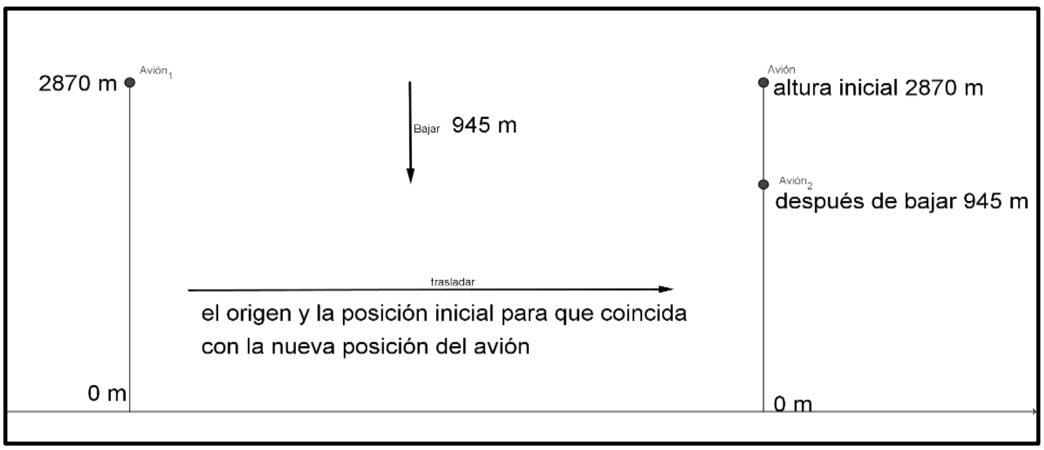


Figura 5.11. Uso consciente del sistema de referencia como recurso para justificar la operación (propuesta realizada por el investigador).

Investigador: después en el problema se dice que el avión asciende 812 metros, me puede explicar, brevemente, ¿qué significa que ascienda?, ¿qué operación realiza? Y ¿cómo justifica dicha operación?

Saúl: Sí, igual. Siempre partimos de donde nos quedamos. Entonces, aquí lo que estamos aplicando es una adición de números enteros, se conoce como suma. Entonces Ascendió 812 metros, entonces, le aplico la operación de suma [*el profesor realiza la suma de 925 metros más 812 metros*]. Entonces, el avión ya está a 2737 metros del nivel del mar.

Investigador: como parte de su discurso que dio en la clase y con lo que me acaba de mencionar, podemos concluir que si un cuerpo se mueve de forma ascendente se relaciona con la operación suma, y cuando los movimientos, de ese cuerpo, son hacia abajo con la operación resta.

Saúl: Sí

Investigador: ¿cómo justifica esa relación? ¿Por qué es válida?

Saúl: ¡Ah! mira. Te repito, en matemáticas ocupamos este tema en números enteros; trabajar con positivos y con negativos. Cuando hablamos de ascender se asocia a una operación de adición y cuando hablamos de descender tenemos que restarle.

Como se puede observar en el extracto de la entrevista anterior, Saúl erróneamente relaciona los movimientos de subir y bajar con la operación suma y resta respectivamente, a pesar de mencionar que está trabajando con números positivos y negativos él no usa los números con signo cuando resuelve el problema y sólo se maneja en el dominio de los números naturales. Cuando el profesor indica que tiene que sumar o restar a partir de la cantidad anterior da muestra de que no usa el sistema de referencia y, por tanto, podemos inferir que no es consciente del uso del recurso cuando resuelve los problemas, esta inferencia la podemos observar mejor en el problema el submarino donde el profesor cambia el sistema de referencia que usó en el problema el avión para seguir trabajando con los Naturales. En el siguiente extracto de la entrevista se muestra lo mencionando anteriormente.

Investigador: en el problema se menciona que el submarino emerge 275 metros, ¿cómo emerge esos 275 metros?

Saúl: ¿emerge? [*Pausa*]

Investigador: dice emerge 275 metros

Saúl: [sigue pensando el profesor] a ver otra vez ¿cómo es?

Investigador: dice que un submarino está a 960 metros… [*Interrumpe el profesor*]

Saúl: a ok, entonces, estamos a una profundidad de 960 metros. Aquí obviamente hay que ver que tenemos que hacer una resta, porque repito el submarino está a una profundidad de 960 metros y me dice que emerge, entonces, tenemos que restar. Una resta y ya se encontraría [*realiza la resta entre 960 y 275*] sería a 695 metros.

Investigador: ¿por qué es una resta, profesor, si en el problema anterior usted menciono que los movimientos hacia arriba, que es este caso de emerger, lo relaciona con las cantidades positivas y la operación suma?

Saúl: ajá, pero estamos hablando de dos situaciones diferentes: uno hablamos del nivel del mar hacia arriba, subir es con suma, y acá [*se refiere al problema del submarino*] se invierte ¿por qué?, porque del cero hacia abajo sería incongruente la respuesta de decir: sabe que si me encuentro a 960 metros y emerge, ¿qué pasaría si yo le aplico una suma? Entonces, no emergió el submarino. Sería, si le aplicamos como tú me estás planteando [es necesario aclarar que *el profesor fue quien estableció esta relación en el problema "el avión"*], [*realiza la suma 960 + 275*]. El submarino no puede encontrarse a una profundidad de 1235 metros ¿por qué?, si me está diciendo que se encuentra en un inicio, el submarino, a 960 metros no podemos decir ahora que se encuentra a 1235 metros, sería una aberración lo que estaríamos diciendo, entonces ahí el chamaco que hace ¡ah no puedo sumarle! Entonces, tengo que restarle.

En el extracto de entrevista precedente se puede observar que Saúl cambia de sistema de referencia respecto al que usó en el problema: el avión, ahora resta cuando el submarino emerge en lugar de sumar como lo hizo cuando el avión ascendía. A pesar de que Saúl menciona que son dos cosas distintas (el problema el avión y el submarino) y, por tanto, puede hacer operaciones distintas a las establecidas en un primer momento.

Saúl al usar de forma no consciente el sistema de referencia no es capaz de dar un argumento con dicho recurso y basa su justificación en el dominio de los Naturales, para explicar a los alumnos por qué no se suma cuando emerge el submarino. De esta manera, afirma que si suman 275 metros a los 960 metros (profundidad inicial) se obtiene 1235 metros, y como $1235 > 960$, entonces, el submarino se hundiría más; este argumento nos permite observar que el profesor sigue sin considerar a los números negativos y sólo se mueve en el dominio de los números naturales. Sin embargo, no da un argumento válido que justifique por que se resta y no se suma en su nuevo sistema de referencia.

Basados en su discurso, observamos que Saúl no considera a los números negativos, aun cuando menciona que trabajará con ellos. El hecho de no usar los negativos se debe, probablemente, a: 1) Saúl se rehúsa a trabajar con los números negativos y por ello sólo se mueve en el dominio de los Naturales o 2) para el profesor sólo tiene sentido hablar de negativos por debajo del nivel del mar si se encuentra en un sistema de referencia particular (plano cartesiano o sistema de coordenadas XY). En el plano cartesiano, las cantidades a la derecha y arriba del cero son positivas y hacia la izquierda y para abajo del cero son negativas. Lo anterior se muestra en el siguiente extracto de la entrevista.

Investigador: ¿los 960 metros, que es la profundidad del submarino, la considera positiva o negativa?

Saúl: en este caso, estamos hablando [*se queda pensando unos segundos la respuesta*] como una situación positiva. Si nos vamos al plano cartesiano pues obviamente no entra ahí. Porque ahí estaríamos hablando de que para arriba están los positivos y hacia abajo están los negativos.

Para Saúl no tiene sentido hablar de cantidades negativas, por debajo del nivel del mar, porque no se ubica en el plano cartesiano el problema. Este hecho nos permite volver afirmar que el profesor no es consciente del uso del sistema de referencia al resolver problemas aditivos y que sólo se ubica en los Naturales con los cuales realiza operaciones de suma y resta según el caso. Al no estar ubicados en un plano cartesiano (tipo de sistema de referencia) los negativos no tienen sentido para Saúl y por ello no los usa en su sistema de referencia. En el siguiente extracto de entrevista se muestra lo mencionado.

Investigador: entonces, si los 960 metros son positivos, supongamos que en ese momento pasa volando un pájaro a 20 metros.

Saúl: ¿en cuál estamos hablando?

Investigador: en el problema del submarino. ¿Cómo representaría a ese pájaro, si va a 20 metros volando sobre el nivel del mar?

Saúl: pues aquí arriba del nivel del mar, porque no puede estar por abajo, ¿estás de acuerdo? Porque sería una aberración

Investigador: Sí. Entonces, esos 20 metros, ¿los considera positivos, también?

Saúl: Sí, porque está volando

Investigador: pero si considera los 960 metros, que es la profundidad del submarino, como positiva, ¿es correcto que la altura del pájaro sea positiva?

Saúl: Sí, porque se consideran por separado.

Investigador: pero si son parte del mismo problema, ¿tiene sentido que un objeto que está arriba del nivel del mar y un objeto por abajo del nivel del mar sean positivos?

Saúl: Sí desde luego, aquí lo que importa es qué preguntan, por ejemplo yo preguntaría ¿cuál es la distancia que hay del pájaro al submarino?

En el extracto de entrevista precedente, se puede observar que Saúl se basa en argumentos extra matemáticos para justificar sus acciones. En esta ocasión manifiesta que el pájaro va por arriba del nivel del mar porqué si no sería una "aberración", esta afirmación nos permite observar que el docente, posiblemente, no considera usar números negativos porque es incorrecto debido a que el ave se encuentra por arriba del cero. Sin embargo, cuando justifica porque considera los 20 metros a los que vuela el pájaro son una cantidad positiva observamos que no considera el mismo sistema de referencia que usó, pues no determina la posición del pájaro con un número negativo en su representación gráfica. El profesor trató de hacer notar que él siempre considera tanto los problemas (el avión y el submarino) como la profundidad del submarino y la altura del pájaro por separado y que por ello puede usar operaciones distintas para movimientos iguales (e.g., cuando suben los objetos) o considerar positivas ambas posiciones (del submarino y del pájaro).

Cuando Saúl en su discurso menciona que tanto la profundidad del submarino como la altura del pájaro se pueden considerar positivas en el mismo sistema de referencia da muestra de un uso incorrecto del sistema de referencia debido a que considera positivos ambos casos aun cuando los movimientos que hacen el submarino y el pájaro son contrarios. Para Saúl es suficiente usar la estrategia adecuada que permita obtener el resultado sin importar que no sea consciente de los recursos que usa.

5.2.2. Entrevista a Pedro en torno al uso del sistema de referencia

La representación gráfica, el sistema de referencia y el señalamiento del origen (cero relativo) son parte del conjunto de recursos de los que dispuso Pedro, en el salón de clases, para comprender y resolver problemas aditivos de números con signo. Mediante la representación gráfica, el profesor, intentó contextualizar los problemas fijando el movimiento de los objetos para poder medir su distancia respecto al nivel de la tierra o del mar.

De acuerdo con los datos recopilados en la entrevista, es evidente que el profesor usa un cero relativo en el problema la mosca, para determinar el punto de partida (origen) y así medir la altura inicial de la mosca. Durante la entrevista, Pedro da muestra que el cero absoluto es el nivel del mar; sin embargo, no es capaz de justificar cómo medir, en una nueva posición, la altura de la mosca. En el siguiente extracto de la entrevista se muestra lo anterior.

Investigador: en su discurso usted dijo que considerar los cero metros, nivel del piso, es relativo, ¿a qué se refiere con eso?

Pedro: es relativo porque no sabemos si la altura de la mosca está a nivel del mar. Estamos a una cierta altura, obviamente, por el contexto del problema yo siento [considero] que estamos a los cero metros para facilitárselos a los educandos. O sea, no es la misma altura en la ciudad de México que al ras de la playa, si nos vamos a Acapulco esa altitud va variando. Entonces estamos a cero metros en la ciudad de México, pues en realidad no estamos a cero metros estamos, no recuerdo bien la cantidad, pero si estamos a más de 1000 metros; entonces, se sumaría con lo de la mosca. Por eso lo coloqué como relativo.

Investigador: ¿es correcto utilizar el cero relativo en el problema?

Pedro: sí, porque hay que colocar un punto de referencia. Hay que empezar con un punto de referencia porque si los niños no tienen un punto de referencia para partir pues, obviamente, ni siquiera sabrán a donde llegar.

Investigador: si se quisiera saber la altura de la mosca en otro instante, ¿cómo la calcularía?

Pedro: En otro instante, tendría que tener más elementos de otro problema. Porque estamos hablando en el contexto físico puede que baje, puede que se canse (aunque suene muy básico) se canse, entonces, la mosca baja y estamos a cero metros de nuevo.

Investigador: supongamos que la mosca no baja totalmente, sin tocar el piso, sigue volando, ¿cómo calcula esa altura?

Pedro: no podría darte alguna cifra, al menos exacta.

Investigador: pero, ¿cómo lo haría? ¿Cuál sería el procedimiento para determinar la altura de la mosca? La mosca estaba a seis metros, inicialmente, y luego subió o bajó y quiero saber a qué altura está en otro instante, ¿cómo le hace?

Pedro: pues nada más hacer operaciones de suma y resta. Dependiendo si es ascendente, sube, y es una suma y si baja significa que tendría que restar a partir de la distancia donde estuvo anteriormente […] Siempre se toman como partida los puntos anteriores.

Investigador: si no tuviéramos una referencia anterior, punto de referencia. ¿Qué haría para determinar la altura a la que va volando la mosca?

Pedro: podría sacar diferentes valores. A carencia de variables, de no saber si sube o baja, tendría que hacer un registro e incluso sacar un promedio: sube tres, baja dos, sube tres, baja dos, etc. Bueno es lo que yo haría porque si me siento un poco en desventaja al no saber las variables, por ejemplo, puede subir 10 metros o bajar hasta el piso. Como desconozco, lo único que si siento es que tendría que usar sumas y restas y tuviera las variables; si no las tuviera, yo si desconocería el método para calcular la altura de la mosca.

En el extracto de entrevista precedente se puede observar que determinar el origen o punto de partida forma parte de los esquemas de utilización de Pedro (Gueudet & Trouche, 2009), en torno al recurso sistema de referencia. El profesor es consciente de la importancia que tiene el origen para poder determinar la altura de los objetos e incluso hace una distinción en cuanto al cero, cuando está o no en el nivel del mar, pero no logra explicar cómo medir la altura de la mosca en un segundo instante. Con base en su discurso, podemos inferir que se debe al uso no consciente del sistema de referencia porque para él es necesario tener un dato (cantidad) inicial para poder sumar o restar a partir de dicho dato.

Pedro da muestra de tener dificultades en torno al concepto de altura, pues no es capaz de establecer la altura de la mosca en una nueva posición sin tener un dato inicial. También, no asocia la cantidad de la altura con una recta perpendicular (que determina la distancia), sino con una línea curva (trayectoria). A pesar de que Pedro tiene muy claro el punto de partida (origen) para medir la altura de la mosca no es capaz de trasladar su origen inicial a la nueva posición de la mosca y a partir de él medir la nueva altura. El profesor siempre necesita de una altura anterior para sumar o restar la cantidad que ascienda o descienda la mosca, respectivamente; no puede determinar la altura de la mosca sin tener un dato anterior. En el siguiente extracto de la entrevista se muestra lo anterior.

Investigador: en el problema se menciona que la mosca se eleva 2 metros, ¿cómo cuenta que la mosca se elevó 2 metros? ¿A partir de dónde se elevó 2 metros?

Pedro: a partir del punto de referencia anterior que son 6 metros. Porque yo parto del punto de vista de que la mosca está estática a seis metros y luego me elevo dos.

Investigador: de acuerdo con sus palabras: ¿la acción subir se relaciona con la operación suma; los descensos con la operación resta?

Pedro: Para mí sí. En ese contexto y en ese problema sí.

Investigador: ¿puede cambiar en algún otro contexto o problema?

Pedro: claro que sí, las palabras pueden variar. Si estamos hablando de bajo del mar, yo, utilizaría otro tipo de herramientas.

Investigador: ¿con base en qué usted justifica esas relaciones?

Pedro: me baso, más que nada, en la teoría que dan algunos libros. La mayoría lo toman como ascender que significa suma para algunos

Con base en el discurso de Pedro y con el extracto de la entrevista precedente, podemos observar que el profesor, como parte de sus sistema de referencia que usa implícitamente, establece que los movimientos que hace la mosca se subir y bajar se relacionan con la suma y resta, respectivamente. Observamos que Pedro no usa los números con signo en esta operación pues no relaciona los movimientos de subir y bajar con cantidades positivas y negativas respectivamente; esta situación puede generar dificultades en otro tipo de contexto. Pedro tiene presente que las relaciones que ha establecido pueden ser modificadas en contextos distintos; en otras palabras, el sistema de referencia puede ser modificado o cambiad. Sin embargo, no es consciente del uso del sistema de referencia porque sólo reproduce lo que dicen los libros de texto que ha consultado sin reflexionar el porqué de los algoritmos.

Como Pedro mencionó durante la entrevista, se puede cambiar de sistema de referencia cuando se trabaja en otro contexto distinto al problema de la mosca, pero mantiene el sistema en el segundo problema porque determina que la profundidad del submarino es negativa por estar por debajo del nivel del mar (véase Figura 5.12). Al considerar una cantidad negativa para representar la profundidad del submarino, se esperaría que el profesor mantuviera las relaciones que había establecido, es decir, sumar cuando sube el objeto y restar cuando baje; sin embargo, estas relaciones las cambio Pedro y ahora resta cuando sube y suma cuando baja el submarino:

Investigador: Cuando baja el submarino, ¿qué operación realizó?

Pedro: una suma

Investigador: ¿qué números sumó?

Pedro: 430 más 100 metros

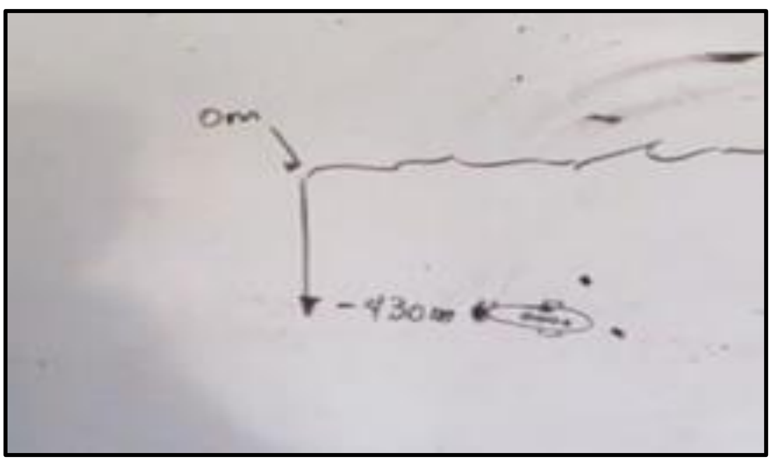


Figura 5.12. El signo menos como recurso para determinar la profundidad del submarino (imagen tomada de las clases videograbadas para mostrar el recurso usado por Pedro).

En el extracto de entrevista precedente se puede observar que Pedro no usa los signos del número (Unario, Gallardo, 1994) cuando realiza las operaciones para determinar la nueva posición del submarino, aun cuando inicialmente él estableció la cantidad $^{-}430$. Lo que tendría que haber sumado Pedro era: $^{-}430+^{-}100$ y así obtener los $^{-}530$ en lugar de $430+100=530$que puede generar dificultades en los alumnos al considerar nuevamente el signo unario en la representación gráfica. En el siguiente extracto de la entrevista se da muestra de lo mencionado en este párrafo.

Investigador: cuándo sube el submarino, en el video se observa, que usted resta. 530 menos 150, ¿por qué no considera el signo del número cuando realiza las operaciones, y una vez que obtiene el resultado por qué vuelve a considerar el signo del número en su representación? ¿Es correcto lo que hace?

Pedro: porque los alumnos se confunden, entonces, para no tratar de confundirlos [*guarda silencio y escribe en una hoja la operación -100 – (-100) de forma horizontal*, véase *Figura 5.13.a*] entonces, esto es abismal para los alumnos; incluso, para uno como profesor dices: “qué onda con esto” a diferencia que si lo puedo colocar como -100 – (-100) de forma vertical [*véase Figura 5.13.b*]. Aquí cambian las cosas. Básicamente no los consideré porque a los alumnos se les complica mucho. Volví a aterrizarlo en el resultado porque como estamos hablando de bajo del nivel del mar entonces ya nada más coloque los signos negativos.

Como podemos observar en el extracto de entrevista anterior, Pedro argumenta que no usa el signo Unario (Gallardo, 1994) para no confundir a los alumnos. Sin embargo, él menciona que la forma en que se presenten las operaciones (forma horizontal o vertical) de números con signo es lo que genera la dificultad para operar. Entonces para no generar conflicto entre los alumnos Pedro decidió no usar el signo del número y sólo se limitó a usar el signo Binario (Gallardo, 1994) para conocer la nueva posición del submarino al bajar o subir.

(a) (b)

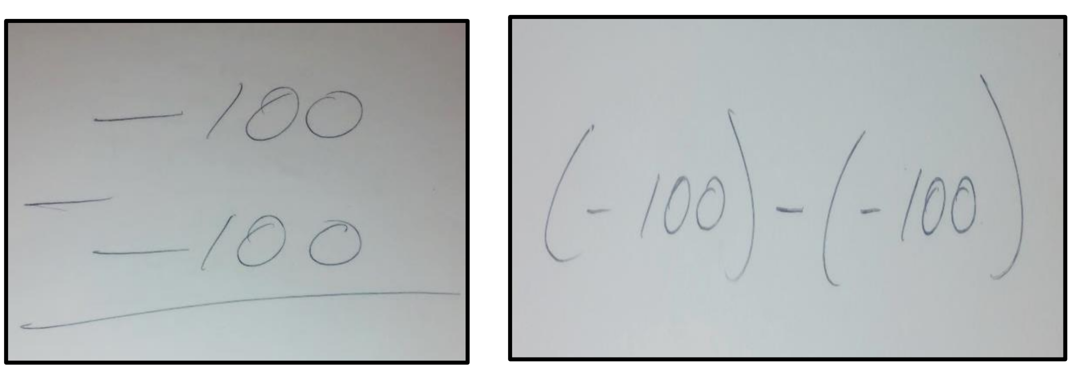


Figura 5.13. Formas de presentar las operaciones con números con signo.
a) Horizontal y b) vertical.

Pedro argumenta que la forma horizontal (Véase Figura 5.13.a) de presentar las operaciones con números con signo es difícil de concebir, incluso, para él como profesor. Consideramos que dicha dificultad se debe al hecho de no hacer diferencia entre el signo Unario y el Binario tal como afirma Gallardo (1994). Incluso, al diferenciar los signos del número y de la operación permitiría no usar los paréntesis cuando se presenta de forma vertical las operaciones (e.g., $^{-}100 - {}^{-}100$).

Aunque Pedro no considera el signo del número cuando hace las operaciones, y una vez que obtiene el resultado vuelve a considerar el signo en su representación gráfica, este procedimiento hace que él cambie su sistema de referencia y por ello cuando el submarino baja se tiene que sumar (contrario a lo que realizaba en el problema de la mosca). El profesor no usa de forma consciente el sistema de referencia debido a que no puede argumentar por qué puede no considerar el signo del número y después, en su sistema de referencia, volver a colocar el signo. Consideramos que esta acción (no usar el signo del número) se debe a que Pedro no distingue entre los signos Unario y Binario; para comprobar esta inferencia solicitamos al profesor resolver el problema sin considerar a los alumnos y él afirmó que lo resolvería de otro modo (tomando en cuenta el signo del número). En el siguiente extracto de entrevista se muestra lo anterior.

Investigador: si le pidiera que resuelva el problema, sin considerar que a los alumnos se puedan confundir, ¿lo resolvería de la misma manera? ¿Cómo lo resolvería?

Pedro: no, yo creo que lo resolvería de otra manera

Investigador: ¿puede resolverlo por favor?

Pedro: claro. Espero no tener dificultades aquí [*se refiere a resolver el problema en ese instante*]. Entonces es menos 430 [*escribe en la hoja* $^{-}430$[10]] debajo del nivel de mar. Descendemos [*en la hoja escribe, de forma vertical* $^{-}430\,^{-}100$] como tenemos signos iguales, se tienen que sumar.

Investigador: ¿realiza una suma?

Pedro: si, entonces, se conserva el signo y da menos 530 […] Entonces estamos a menos 530 metros. Luego volvemos a ascender 150 metros [*coloca en su hoja,*

[10] Pedro no escribe así los signos de los números, sin embargo, los escribimos así para hacer notar que él se refiere a los signos del número y no al de la operación.

debajo del $^{-}530,\ ^{+}150$] entonces, los alumnos identifican que son signos diferentes, y que los signos diferentes se tienen que restar [...] Estamos a menos 380 metros, y dice que volvemos a descender [*escribe en la hoja, debajo del* $^{-}380,\ ^{-}120$] son signos negativos y signos iguales se suman, entonces, resultado es 500 (véase Figura 5.14). Entonces, hablamos de una profundidad de 500 metros.

Investigador: ¿qué operaciones está realizando?

Pedro: al principio $\begin{bmatrix} ^{-}430 \\ \underline{^{-}100} \end{bmatrix}$ es una suma; después $\begin{bmatrix} ^{-}530 \\ \underline{^{+}150} \end{bmatrix}$ una resta; una suma $\begin{bmatrix} ^{-}380 \\ \underline{^{-}120} \end{bmatrix}$

Investigador: ¿es una resta la segunda? [*Me refiero a* $\begin{bmatrix} ^{-}530 \\ \underline{^{+}150} \end{bmatrix}$]

Pedro: si es una resta.

Investigador: ¿qué números está restando?

Pedro: 530 menos 150

Investigador: pero ahí, en su operación, aparece que es menos 530 y usted le va a restar menos 150. ¿Cuánto le da menos 530 menos 150?

Pedro: 380 la respuesta

Investigador: ¿la resta de menos 530 menos 150 da 380 [$^{-}530 - ^{+}150 = 380$]?

Pedro: sí, bueno yo así lo entiendo.

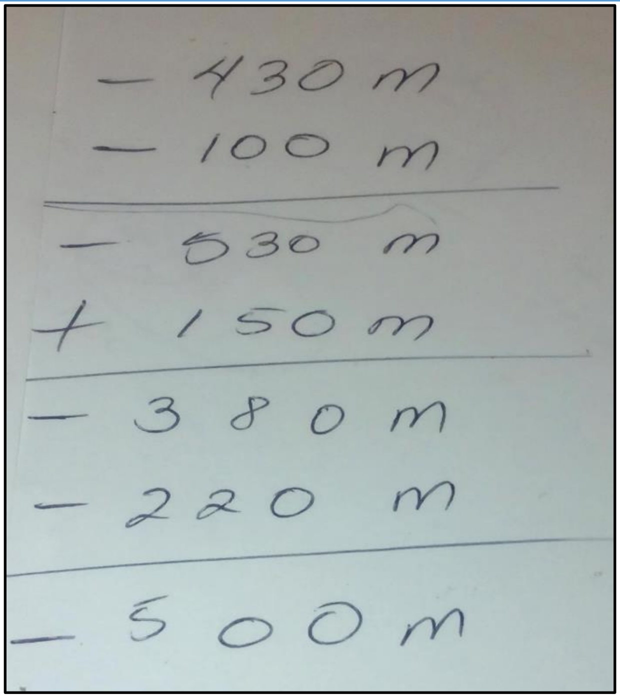


Figura 5.14. Operaciones realizadas por Pedro para resolver el problema "el submarino".

En el extracto precedente Pedro usa el signo Unario para resolver el problema. Aunque suma y resta no considera el signo Binario (de la operación, Gallardo, 1994), el profesor no distingue entre el signo del número y de la operación, y los usa indistintamente. Lo anterior nos permite afirmar que el profesor no es consciente del uso del sistema de referencia porque aunque usa el signo del número no relaciona los movimientos de los objetos de subir y bajar con cantidades positivas y negativas, lo cual permite no generar dificultades entre los alumnos porque siempre se usaría el mismo sistema sin tener que cambiar de relaciones como lo hizo Pedro al sumar cuando la mosca sube y restar cuando el submarino sube.

Pedro influenciado por las reglas[11], que se usan cuando se enseña a sumar y restar con números enteros, resuelve el problema sin considerar los significados que tienen los signos más y menos (Gallardo, 1994). También da muestra de un uso no consciente del sistema de referencia cuando no distingue entre los signos Unario y Binario, pues son parte de su sistema y él no los considera ni cuando realiza las operaciones ni cuando establece las relaciones entre el movimiento de subir y bajar con la suma y resta respectivamente.

[11] En la adición de números enteros cuando se tienen signos iguales se suman las cantidades y se conserva el signo; cuando los signos son distintos, se restan las cantidades y se coloca el signo del número con mayor valor absoluto.

Cuando el investigador solicita a Pedro que resuelva el problema nuevamente, podemos inferir, que al considerar el signo del número para resolver el problema, él da indicios de transformar el recurso (sistema de referencia) a documento a través de una génesis documental. En un principio él no uso dicho signo cuando resolvió el problema en el salón de clase y sólo se apoyó, como parte de sus esquemas de utilización, en las operaciones de suma y resta; sin embargo, cuando volvió a usar el sistema de referencia, implícitamente, al resolver el problema durante la entrevista, Pedro lleva más allá el recurso transformándolo en documento.

5.3. REFLEXIONES FINALES SOBRE LOS RECURSOS USADOS POR SAÚL Y PEDRO

El trabajo documental efectuado por Saúl y Pedro estuvo centrado en comprender y resolver problemas aditivos con números con signo; para ello, como puede observarse en el análisis de los datos recabados en la primera etapa, cada profesor dispuso de un conjunto de recursos específicos como parte de su práctica docente. El programa de estudios (SEP, 2011) fue un recurso físico inherente en la práctica de ambos docentes. Con la finalidad de seguir la propuesta del Programa, Saúl y Pedro, buscaron problemas aditivos como parte de su trabajo documental (Gueudet & Trouche, 2009). Además del libro de texto y del Programa de estudios (SEP, 2011), ambos profesores usaron otros recursos en su trabajo documental efectuado en el salón de clases. En ese conjunto de recursos disponibles en su práctica se encontraron las operaciones para representar los movimientos y posiciones de los objetos, la representación gráfica, el sistema de referencia, entre otros.

Se observó, durante el análisis, que a pesar de contar con formaciones distintas, usar distintos libros de texto y diferir en su experiencia laborar, Saúl y Pedro usaron varios recursos iguales para resolver problemas aditivos en el aula de clases. Dentro de los recursos que usaron ambos docentes están:

- la representación gráfica;
- sistema de referencia (implícito);
- flechas para indicar el movimiento del objeto;
- relacionar el movimiento hacia arriba con la suma y el movimiento hacia abajo con la resta en problemas contextualizados por arriba del nivel de la tierra o el mar;

- relacionar el movimiento hacia arriba con la resta y el movimiento hacia abajo con la suma en problemas contextualizados por debajo del nivel del mar;
- indicar en cada problema el punto de referencia para medir las aturas o profundidades (origen del sistema), y
- Usar las operaciones suma y resta

Con la entrevista realizada a cada docente, se puede mostrar que a pesar de usar varios recursos para comprender y resolver problemas aditivos de números con signo, Saúl y Pedro no son conscientes del uso de algunos de ellos; en particular, el sistema de referencia. Este hecho se puede observar en Saúl, cuando cambia de sistema de referencia para resolver el problema el submarino y considera las cantidades por debajo del nivel del mar como positivas (lo cual es correcto), sin embargo, no advierte en ese mismo sistema de referencia los objetos por arriba del nivel del mar como negativas.

Por su parte, Pedro da muestra del uso no consciente de este recurso cuando se sale del sistema de referencia y no considera el signo Unario para operar y, posteriormente, regresa a su sistema y coloca el signo al número. Durante la entrevista el profesor deja ver que no diferencia entre el signo Unario y Binario y, por tanto, no es consciente del uso del sistema de referencia para resolver problemas.

Podemos comentar que durante la entrevista ninguno de los profesores llevó a cabo una reflexión sobre el uso de sus recursos; si bien esto no era el objetivo de la investigación, creemos que es importante que los docentes reflexionen en torno a los recursos que usan en su práctica docente.

CAPÍTULO 6
CONCLUSIONES

En este capítulo se da cuenta de las conclusiones de la presente investigación, llevada a cabo mediante estudios de caso. Dichas conclusiones son el resultado del análisis y la discusión de los datos recabados. La investigación estuvo centrada en identificar y analizar los recursos usados en la práctica del profesor de matemáticas de primer grado de educación secundaria en torno a la comprensión y resolución de problemas de números con signo con base en el programa de estudios (SEP, 2011). También, se buscó observar si los docentes son conscientes o no de los recursos usados durante su práctica profesional.

A continuación, con base en el análisis de los datos recabados en las dos etapas del estudio, se muestran los resultados que dan cuenta de los objetivos y las respuestas de las tres preguntas de investigación (véase Capítulo 1). Al inicio de este capítulo, se da cuenta del objetivo general de la investigación; después, se da respuesta a la pregunta general y a las dos preguntas particulares que guiaron esta investigación.

Al final del capítulo, se plantean algunas consideraciones finales, derivadas de la presente investigación. Se enfatiza que a pesar de usar recursos, por parte del profesor, que permiten resolver correctamente los problemas con números con signo, es indispensable ser conscientes de su uso para no generar dificultades de aprendizaje y de enseñanza cuando se trabaja con estos números.

6.1. RESPECTO A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación tuvo como objetivo general*: Documentar cómo el profesor de matemáticas, aun cuando no es consciente del uso de sus recursos, resuelve de manera correcta problemas que involucran números con signo.*

En esta investigación, a través del análisis y discusión de los datos recabados, fue posible observar los recursos que usa el profesor de matemáticas de educación secundaria cuando resuelve problemas de números con signo en el salón de clases. De acuerdo con Gueudet y Trouche (2009, 2010), Saúl y Pedro –como parte de su trabajo documental–

seleccionaron un conjunto de problemas para ser resueltos en clase, y recurrieron a sus conocimientos matemáticos (recursos no físicos) para comprender y resolver dichos problemas. Para lograr el objetivo general de esta investigación, se propusieron como objetivos particulares:

a) *Mostrar que el profesor de matemáticas no usa de forma consciente sistemas de referencia al resolver, en el aula, problemas que involucran el uso de números con signo.*

El análisis de datos y la discusión de los resultados presentados en el capítulo precedente permiten observar que los profesores de matemáticas de primer grado de educación secundaria usan un sistema de referencia para resolver problemas contextualizados por arriba del nivel de la tierra y uno distinto para resolver los problemas que su contexto es por abajo del nivel del mar. Estas acciones, por parte de los profesores, permiten evidenciar que no usan de forma consciente el sistema de referencia cuando resuelve problemas que involucran números con signo.

Mediante la entrevista, realizada a cada profesor, sobre los recursos usados por ellos en el salón de clase, Saúl y Pedro dieron muestra de no usar el sistema de referencia conscientemente. Por un lado, Saúl da evidencia: primero, cuando no usa números con signo para representar los movimientos, hacia arriba y hacia abajo, de los objetos (submarino y avión) que aparecen en los problemas que resolvió y relacionar dichos movimientos con las operaciones suma y resta; segundo, al considerar la profundidad del submarino como una cantidad positiva; tercero, cuando fue cuestionado por el investigador sobre como representaría el vuelo de un pájaro a 20 metros, considerando el mismo sistema de referencia que uso en el problema del submarino, Saúl mencionó que sería también positivo. Lo anterior nos permite observar que para el docente no importa si está arriba o por debajo del nivel del mar, él siempre considera como una cantidad positiva.

Por otra parte, Pedro da muestra de no usar conscientemente el sistema de referencia: primero, al igual que Saúl, relaciona los movimientos de subir y bajar con las operaciones suma y resta en el problema de la mosca, y posteriormente, cambia esa relación en el problema del submarino, en lugar, de relacionar los movimientos con cantidades positivas o negativas; segundo, en el problema del submarino en su representación gráfica si usa el signo menos para indicar la profundidad del submarino, sin embargo, cuando realiza una operación no considera el signo del número, es decir, sale y entra de su sistema de referencia cuando tiene que operar con los números; tercero, al ser cuestionado del por qué no usa el signo del número cuando resuelve las operaciones, Pedro argumenta que es para no confundir a los estudiantes; sin embargo, cuando resuelve el problema durante la entrevista, sin considerar a los alumnos observamos que no distingue entre el signo unario y el binario (Gallardo, 1994) lo cual nos permite observar que no es consciente del uso del sistema de referencia en el problema del submarino.

Lo anterior nos da evidencia de que los profesores no son conscientes del uso del sistema de referencia como recursos para comprender y resolver problemas aditivos de números con signo.

b) Documentar el papel de los sistemas de referencia en la toma de decisiones del profesor respecto a qué operación usar (adición o sustracción) con números con signo.

Los resultados obtenidos de las clases videograbadas, analizadas en el capítulo anterior, permiten observar que para los problemas que se desarrollan arriba del nivel del mar, los docentes usan un sistema de referencia en el cual determinan realizar una suma si el objeto sube y una resta si baja. Sin embargo, cuando el contexto de los problemas en por debajo del nivel del mar, Saúl y Pedro cambian su sistema de referencia; en este sistema de referencia, los profesores deciden hacer una suma si los objetos bajan y una resta si suben.

Lo anterior, evidencia la importancia de los sistemas de referencia en la toma de decisiones, por parte de los docentes, sobre la operación que tienen que usar en la resolución de los problemas planteados. De esta manera, para los docentes, es fundamental usa el sistema de referencia para decidir qué operación hacer con base en el movimiento de los objetos en cada problema, a pesar de generar dificultades en los estudiantes por el uso de distintos sistemas de referencia.

Respecto al objetivo general, podemos afirmar que los profesores de matemáticas, reportados en este trabajo, resuelven correctamente los problemas de números con signo que plantean en el salón de clase aun cuando no son conscientes del uso de los recursos disponibles en su práctica docente.

6.2. RESPECTO A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Con base en el análisis de los datos recabados durante la primera y la segunda etapa del estudio presentado en el capítulo 4 de este documento, se da respuesta a las preguntas que guiaron la presente investigación. La pregunta general de este estudio es:

¿Cómo el profesor de matemáticas usa sus recursos para resolver, en el aula, problemas que involucran números con signo?

Para dar respuesta a esta pregunta, se analizaron los diferentes recursos que usa el profesor de matemáticas de primer grado de educación secundaria cuando resuelve problemas aditivos con números con signo, y se plantearon dos preguntas particulares.

a) *¿Cómo usa el profesor de matemáticas el recurso: sistema de referencia cuando resuelve problemas que involucran el uso de números con signo?*

De acuerdo con el análisis de los datos recabados, se observó que los profesores usan el sistema de referencia de forma implícita y no consciente, además, durante la entrevista dieron muestra del uso no consciente del recurso porque presentaron deficiencias y errores conceptuales al momento de resolver el problema.

Durante el análisis de las sesiones de clase observamos que Saúl usó dos sistemas de referencia al resolver los problemas en el salón de clase. Aun cuando logra resolver los problemas de forma correcta no es consciente del cambio que hace respecto al sistema de referencia y sólo fundamenta su procedimiento en el hecho de que le permite obtener el resultado, sin importar que no sea de la manera adecuada. Saúl da muestra del uso no consciente durante la entrevista cuando afirma que la profundidad del submarino y la altura a la que vuela un pájaro, en el mismo problema y con el mismo sistema de referencia, se consideran cantidades positivas. Este hecho nos permite observar que el profesor no es consciente de que usa un sistema de referencia y que al considerar como positiva la profundidad del submarino, tendría que establecer la altura del pájaro como negativa.

Por su parte, Pedro usa el sistema de referencia de forma implícita y no es consciente de su uso. El profesor usa cantidades negativas para determinar las profundidades del submarino argumentado que como se encuentra por debajo del mar se usa el signo menos para indicar la profundidad; sin embargo, no usó los números con signo para indicar los movimientos del objeto y se limitó a realizar operaciones con números naturales. Posteriormente, al resultado le colocaba el signo menos para poder representarlo en su sistema de referencia.

Durante la entrevista se observó que Pedro dio una justificación de por qué cuando opera no considera el signo del número (Unario, Gallardo, 1994) y cuando vuelve al sistema le coloca el signo. Al no poder argumentar su procedimiento, podemos afirmar que Pedro no distingue entre el signo Unario y Binario y, por tanto, nos permite observar que no es consciente del uso del sistema de referencia porque necesita salir del mismo para poder operar con los Naturales.

En conclusión y dando respuesta a la pregunta, podemos afirmar que ambos profesores usan de forma no consciente el sistema de referencia como recurso para comprender y resolver problemas aditivos en el salón de clase y, aunque no son conscientes de su uso, llegan a resultados correctos.

c) *El libro de texto como recurso usado por el profesor, ¿cómo influye en la selección y comprensión de los problemas discutidos en el salón de clases?*

Los libros de texto usados por los profesores de matemáticas durante su trabajo documental (Gueudet & Trouche, 2009, 2010) sirvieron para seleccionar un conjunto de problemas para resolver en el salón de clase. Sin embargo este recurso no proporcionó, a los docentes, el soporte matemático para el desarrollo de su clase ni sirvió para comprender y resolver los problemas. Por ejemplo, Pedro recupera problemas de Internet que se contextualizan por debajo del nivel del mar (e.g., problema “el submarino”) y los libros de texto que usa no tratan este tipo de problemas. Además, en el libro de texto *Matemáticas 1* (Block & García, 2011) sólo explica con problemas que usan la recta numérica para contextualizar y hace distinción entre el signo del número y el de la operación usando paréntesis. El signo del número que se observa en el libro de texto, sirve para indicar el movimiento de los objetos (véase capítulo 4, pp. 39-41). A pesar de que el libro de texto establece usar el signo del número para indicar el movimiento del objeto, el profesor no usa los números con signo cuando resuelve los problemas.

Por su parte, Saúl aunque selecciona los problemas del libro de texto que usa y aparecen problemas contextualizados por debajo del nivel del mar, no muestra una forma de resolverlos y sólo aparecen como ejercicios. Sin embargo, al igual que los libros que usa Pedro, el libro *Complemento Matemático 1* (Casarrubias & Gómez, 2015) establece en la recta numérica que los movimientos hacia la derecha y hacia la izquierda se relacionan con cantidades positivas y negativas, respectivamente. Este conocimiento no es tomado en cuenta por Saúl por lo cual no usa los números con signo al resolver los problemas dando evidencia de un uso no consciente.

Para dar respuesta a esta pregunta, podemos observar que el libro de texto como recurso no influye, en la práctica de los profesores, para comprender y resolver problemas porque ellos deciden resolver de forma distinta a la propuesta de los libros de texto los problemas. Esta decisión de los docentes de no tomar en cuenta la propuesta del recurso físico los llevó a mostrar deficiencias conceptuales y mostrar un uso no consciente de algunos recursos; en particular, el sistema de referencia.

Abarcando los aspectos que cubren estas dos preguntas particulares y dando respuesta a la pregunta general que guio esta investigación, es posible concluir que los profesores usan de forma no consciente el sistema de referencia para comprender y resolver problemas en el salón de clase. Además, aunque algunos recursos estuvieron presenten en la práctica de los profesores (e.g., libro de texto) estos no influyeron para comprender y resolver los problemas a pesar de ser un recurso esencial en la práctica docente.

Un recurso que estuvo ausente fue el uso de los números con signo y la discusión en torno al significado del signo del número para determinar y representar los movimientos de los objetos. Es notorio que los docentes se rehúsan a trabajar con los números con signo; en particular, con los negativos y no llevan a cabo una reflexión en torno a los recursos disponibles en su práctica docente.

6.3. INVESTIGACIONES FUTURAS

El análisis de los datos y los resultados obtenidos en la investigación aquí reportada sugieren diferentes implicaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de los números con signo; en particular, la resolución de problemas que impliquen el uso de dichos números. La práctica del profesor ha sido objeto de varias investigaciones, debido a la importancia que tiene en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. Autores como Adler (2000), Gueudet y Trouche (2009, 2010), entre otros, sugieren que es importante saber cómo aprende el profesor de su práctica y observar los recursos usados en la misma.

Como afirman Gueudet y Trouche (2009, 2010), los recursos por si mismos no cambian la práctica del profesor. La funcionalidad de un recurso en y para la enseñanza de las matemáticas reside en su uso durante la práctica, y no en su simple presencia. Para que se produzca un cambio positivo en la práctica del docente es necesario que el profesor reflexione sobre los recursos usados en su práctica. En este sentido, se puede trabajar en una siguiente investigación para conocer el proceso de reflexión-en-acción que hace el docente, tomando como guía la siguiente pregunta de investigación: ¿qué cambios ocurren en la práctica del profesor de matemáticas al reflexionar sobre los recursos usados cuando resuelve problemas aditivos, que implican el uso de números con signo?

Los resultados también sugieren que para comprender y resolver problemas aditivos con números con signo, para este nivel educativo, es necesario conocer y tener presente el concepto: sistema de referencia para darle un uso consciente y no generar dificultades entre los alumnos. Con base en lo que Saúl y Pedro hicieron durante sus clases, es importante dar mayor peso al sistema de referencia como recurso y el uso de los números con signo para determinar la relación entre este tipo de números y los movimientos que realicen los objetos en un determinado problema contextualizado por arriba o por abajo del nivel del mar.

Otra línea de trabajo que se desprende de esta investigación, es investigar cómo los profesores de matemáticas se apropian de los recursos disponibles; cómo los transforman y producen nuevos documentos (Gueudet & Trouche, 2009, 2010) y cómo a partir de la reflexión-en-acción, con ayuda del investigador, el docente se vuelve consciente del uso de los recursos disponibles en su práctica. La investigación debe estar centrada en la reflexión que hacen los docentes en torno a los recursos inherentes a su práctica, a través de un taller, para lograr generar un uso consciente de los mismos y observar cómo se transforma la práctica docente.

De esta manera, para futuras investigaciones sería conveniente analizar la interacción entre el profesor y el investigador en torno al proceso de reflexión sobre los recursos usados en la comprensión y resolución de problemas que involucren números con signo, y los cambios que hace en su práctica profesional como resultado de esta reflexión; también, investigar la influencia y apoyo de la tecnología, en particular, del uso de un Software de Geometría Dinámica (Geogebra) para comprender y resolver problemas, y lograr un uso consciente de los recursos; sería pertinente observar las diferencias y semejanzas de los recursos usados por el profesor de matemáticas y el profesor de física del nivel secundaria con el objetivo de observar si por la formación académica usan de forma consciente o no el sistema de referencia cuando resuelven problemas de números con signo.

Con estas líneas de investigación, se pretende generar una interacción y reflexión con los profesores en torno a los recursos usados durante su práctica con el objetivo de lograr un mejor proceso de enseñanza y de aprendizaje en torno a los números con signo.

REFERENCIAS

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3,* 205-224.

Adler, J., Ball, D. L., Krainer, K., Lin, F. L. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 359-381.

Almeida, R. & Bruno, A. (2013). Estrategias de futuros profesores de primaria en problemas aditivos con números negativos. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 127-136.

Álvarez, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología.* México: Paidós Ecuador.

Artzt, R. & Armour-Thomas, E. (1999). A cognitive model for examining teachers' instructional practice in mathematics: a guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 211-235

Block, D. & García, S. (2012). *Matemáticas 1*. México: SM

Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. La gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 4(2).

Bruno, A. & García, J.A. (2004). Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. RELIME. 7(1), 25-48.

Bruno, A. & Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, 9 (1), 33-46.

Caballero, A., Martínez, L. & Bernárdez, J. (1994). *Matemáticas 1. Primer curso.* México: Esfinge.

Casarrubias, A. & Gómez, S. (2015). *Complemento matemático 1*. México: Casarrubias editor

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza, vol. 2,* 529-542.

Cid, E. (2003). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario de investigación en Didáctica de las Matemáticas, Cangas, España*..

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* New York: Rroutledge.

Detzel, P., Barrio, E., Petich, A. & Martínez, R. (2014). Ideas para enseñar: Repensando la enseñanza de los números negativos en la escuela secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Pp. 163-170.

Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: cases and perspectives,* Heid, M. K. & Blume, G. W. (Editores), Vol. 2, 363-391

Gallardo, A. (1994). El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas, *tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN*, México.

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didàctique des Mathèmatiques*, Vol. 2, pp. 303-346.

Godino, J. D., Batanero, C. & Flores, P. (1999). *El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores.* Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar, pp. 165-185.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71,* 199-218.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents travail du professeur et genèses documentaires. En G. Gueudet & L. Trouche (Eds), *Ressources vives* (pp. 57-74). Lyon: Presses Universitaires de Rennes.

Guzmán, J. & Kieran, C. (2013). Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials: A resource-based analysis of teaching practice. *The mathematics Enthusiast,* 10, 163-190.

Hill, H. C., Sleep, L. Lewis, J. M. & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). USA: Information Age.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19(3),* 5-30.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2013). Un origen matemático vs dos orígenes fenomenológicos: la significación del movimiento de objetos respecto del punto (0, 0). *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 2(2),* 183-208.

Mochón, S. (1997). ¿Qué signo realmente tiene la "g"?: el significado y la enseñanza del signo negativo en la Física. *Educación Matemática, 9(3),* 64-76.

Ñancupil, J. C., Carneiro, R. F. & Flores, P. (2013). La reflexión sobre la práctica del profesor de matemática: el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Pp. 37-46.

Páez, D. (2015). Análisis de la práctica del profesor de matemáticas en torno al concepto de pendiente: énfasis en la reflexión durante y después de la acción, *tesis doctoral no publicada*, *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,* México.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes & les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Serie Psychologie dirigée par Claude Bonnet et François Richard; Armand Colin (Editor), 239 pp.

Remillard, J. T. (2013). Examining resources and re-sourcing as insights into teaching. *ZDM Mathematics Education, 45: 935-927.*

Resnick, RT.; Halliday, D & Krane, K. (1996). *Física: Vol. 1*. México: CECSA.

Secretaría de Educación Pública (2011). Programa de estudio. Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas. México: SEP

Taylor, S. J. & Bogdan, R. (1984). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Paidós, p.301.

ANEXO 1
PROTOCOLO DE ENTREVISTA PARA SAÚL

Inicio: (preguntas generales) ¿Podría decirme su nombre completo? ¿Cuál es su formación académica? ¿Cuántos años tiene dando clases de matemáticas? ¿Siempre ha trabajado en secundaria? ¿En todos los niveles escolares? ¿Qué opinión tiene sobre la enseñanza de los números con signo (positivo y negativo)? ¿Qué opinión tiene de sus alumnos? ¿Prepara usted sus clases entes de venir al salón de clases? ¿Qué libro de texto usa para preparar sus clases? ¿Qué le parece la forma en la que son planteados los problemas sobre números con signo en esos libros de texto?

[Preguntas sobre la práctica del profesor]

En sus clases de matemáticas usted resolvió algunos problemas, que involucran números con signo [*positivo y negativo*]. En algunos extractos de las videograbaciones de sus clases, después de analizarlos, detectamos características interesantes en el discurso que usted y sus alumnos utilizaron en la resolución de los problemas.

Voy a mostrarle uno de esos extractos que menciono. Se trata del problema de "el avión", ¿lo recuerda? Bien, ahí va:

[*Mostrar el extracto de video, del problema del avión*]

[*Una vez terminado de visualizar el extracto del video*]. Le voy a platear unas preguntas acerca del discurso utilizado por usted y sus alumnos cuando resolvieron el problema.

[*Debo mencionar que la entrevista es con fines de investigación y no pretendo evaluar su desempeño en clase; además, la información que nos proporcione será confidencial*].

Preguntas acerca del problema "el avión"

1. En este extracto de video:
    a) ¿Qué significa que la altura de la *tierra* al avión sea de 2870 metros?
    b) ¿Considera usted que el avión está fijo o en movimiento?
    c) Si el avión está en movimiento, ¿cómo garantizar que siempre se mantiene a esa altura si la *tierra* no es plana?

d) ¿Cómo convence a sus estudiantes de que, en ese momento, la altura del avión a la *tierra* es de 2870 metros?

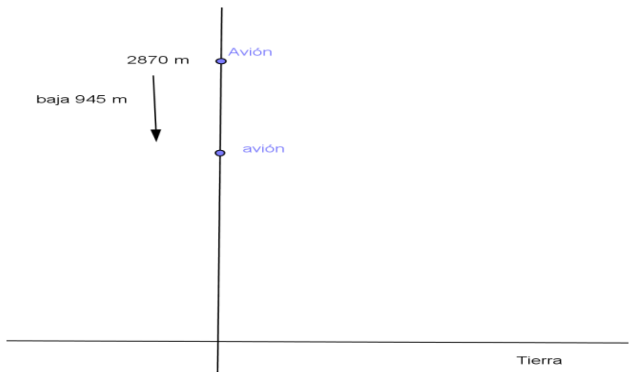
e) ¿Qué significado tiene, en este problema, tomar como referencia: la *tierra*?

f) Si se quisiera saber la altura del avión a la tierra en otro instante, ¿qué haría?

2. En el problema se menciona que el avión baja 945 metros,

a) ¿Qué significa que el avión baje 945 metros?

b) ¿Significa que el avión baja de forma vertical los 945 metros?

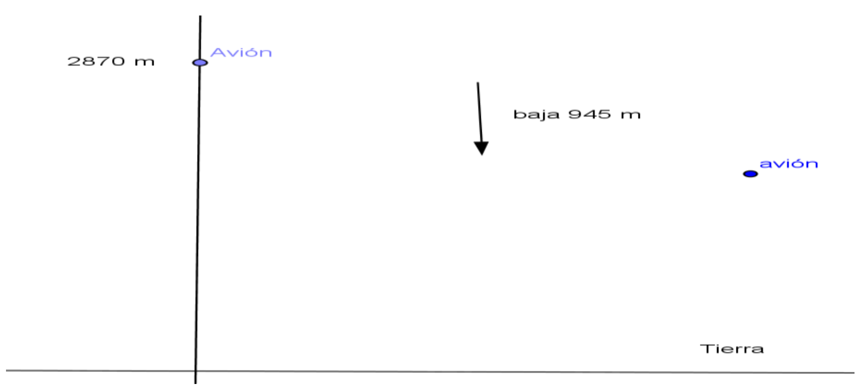


c) Pero, si el avión está en movimiento, ¿es posible que baje de esa forma (verticalmente)?

d) ¿Cómo va bajando el avión si está en movimiento?

e) Si va bajando poco a poco, moviéndose el avión, ¿cómo representaría que el avión baja 945 m? ¿es posible utilizar la operación (resta), que usted mencionó a sus alumnos?

f) Si en un instante está a 2870 m y se pide que en un segundo instante el avión haya bajado 945 m, usted argumenta que se necesita restar a 2870 los 945 m que baja. ¿Cómo justifica esa operación? ¿Por qué es posible utilizar dicha operación, si el avión va bajando poco a poco?



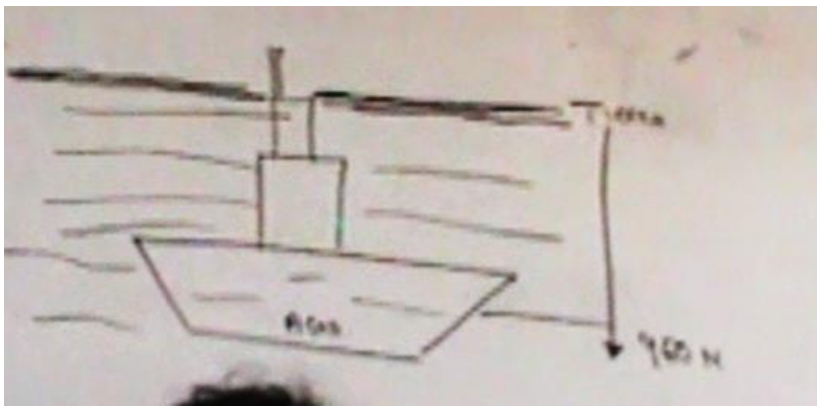
3. Después se menciona, en el problema, que el avión asciende 812 metros.
   a) Con base a todo lo anterior, me podría decir: ¿qué significa que el avión ascienda 812 metros?, ¿cómo podemos visualizar esa acción? ¿Cómo justifica la operación que utiliza?
4. Como parte de su discurso, dado en clase, y con lo que acaba de mencionar, ¿podría explicarme si podemos concluir que si un cuerpo se mueve ascendentemente se relaciona con cantidades positivas y con la operación suma, y los movimientos del cuerpo hacia abajo con cantidades negativas y con la operación resta?
   a) ¿Cómo justifica esta relación? ¿Por qué es válida?

El otro problema que resolvió en clase fue "el submarino".

[*Mostrar el extracto de video, del problema del submarino*]

1. De forma similar al problema anterior, me puede argumentar:
   a) ¿Qué significa que la profundidad del nivel del *mar* [creo que dijo "tierra" en vez de nivel del mar. Verifica, por favor] al submarino sea 960 metros?
   b) Cuando coloca los datos en su figura, ¿considera que el submarino está fijo o en movimiento?
   c) Si el submarino está en movimiento, ¿cómo garantizar que siempre se mantiene a esa profundidad?
   d) ¿Cómo determina que, en ese momento, la profundidad del submarino es 960 metros?
2. En el problema se menciona que el submarino emerge 275 metros,
   a) ¿cómo emerge esos 275 metros?
   b) ¿Cómo representa, en símbolos, que el submarino emerge 275 metros?
   c) ¿Por qué "resta" profesor, si en el problema anterior usted mencionó que los movimientos hacia arriba se relacionan con cantidades positivas y la operación suma?
   d) Entonces, ¿la forma de considerar el movimiento del objeto (submarino) en este problema, es distinta de anterior?
   e) Los movimientos de los objetos [avión y submarino] son distintos en cada problema?
   f) ¿En que basa su afirmación? Es decir, ¿por qué puede considerar relaciones distintas en cada problema?

3. Si la consideración del movimiento del objeto, en este problema, es distinta de la anterior,
   a) Los 960 metros, que es la profundidad del submarino, ¿es positiva o negativa?
      i. [si dice positiva] Si un pájaro vuela a 50 metros sobre el nivel del mar, ¿cómo lo representaría en su dibujo?
      ii. [si dice negativa] ¿por qué si los movimientos hacia arriba (contario a la profundidad del submarino) los relaciona con cantidades negativas y la operación “resta”?



4. si en un problema de movimiento de objetos se considera la acción “bajar” como cantidad negativa [problema del avión] y en el otro problema esta acción "bajar" se relaciona con la suma, ¿no cree que esta consideración genere conflictos de entendimiento [respecto al movimiento de los objetos] entre los alumnos?, ¿qué podría hacer para evitar posibles dificultades en los alumnos?

ANEXO 2
PROTOCOLO DE ENTREVISTA PARA PEDRO

Inicio: (preguntas generales) ¿Podría decirme su nombre completo? ¿Cuál es su formación académica? ¿Cuántos años tiene dando clases de matemáticas? ¿Siempre ha trabajado en secundaria? ¿En todos los niveles escolares? ¿Qué opinión tiene sobre la enseñanza de los números positivos y negativos? ¿Qué opinión tiene de sus alumnos? ¿Prepara usted sus clases entes de venir al salón de clases? ¿Qué libro de texto usa para preparar sus clases? ¿Qué le parece la forma en la que son planteados los problemas sobre números con signo en esos libros de texto?

[*Preguntas sobre la práctica del profesor*]

En sus clases de matemáticas usted resolvió algunos problemas, que involucran números con signo [*positivo y negativo*]. Le voy a mostrar algunos extractos de su clase, y después le voy a plantear algunas preguntas sobre ellos.

Iniciamos con el problema de "la mosca":

[*Mostrar el extracto de video, del problema de la mosca*]

Preguntas acerca del problema "la mosca"

1. En este extracto de video:
   a) ¿Qué significa que la altura de la *tierra* a la mosca sea de 6 metros?
   b) ¿Considera usted que la mosca está fija o en movimiento?
   c) Si la mosca está en movimiento, ¿cómo garantizar que siempre se mantiene a esa altura?
   d) ¿Cómo justifica que la altura de la mosca a la *tierra* es de 6 metros siempre?
   e) Usted, en su discurso, dice que considerar los cero metros es relativo ¿a qué se refiere con eso de relativo?
   f) Si se quisiera saber la altura de la mosca a la tierra en otro instante, ¿cómo la calcularía?

2. En el problema se menciona que la mosca se eleva 2 metros,
   a) ¿Cómo cuenta que la mosca se elevó 2 metros? ¿A partir de dónde se elevó 2 metros?
   b) ¿por qué prefiere utilizar la representación del movimiento de la mosca en su clase?
   c) Los desplazamientos en la gráfica no son rectas, entonces, ¿cómo se fija usted en la altura de la mosca?
   d) En el movimiento continuo de la mosca, ¿cómo justifica las operaciones de subir y bajar de la mosca en un tiempo cualquiera?

El otro problema que resolvió en clase fue "el submarino".

[*Mostrar el extracto de video, del problema del submarino*]

1. Cuando baja el submarino, ¿qué operación realizó?
2. ¿qué números sumo?
3. ¿por qué no considera el signo del número cuando realiza las operaciones, y una vez que obtiene el resultado por qué vuelve a considerar el signo del número en su representación?, ¿es correcto lo que hace?
4. si en un problema de movimiento de objetos se considera la acción "bajar" como cantidad negativa [*problema de la Mosca*] y en el otro problema esta acción "bajar" se relaciona con la suma, ¿no cree que esta consideración genere conflictos de entendimiento [*respecto al movimiento de los objetos]* entre los alumnos?, ¿qué podría hacer para evitar posibles dificultades en los alumnos?