CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

ADQUISICIÓN DE LA NOCIÓN CUALITATIVA DE ÁREA MEDIADA POR LA LENGUA DE SEÑAS MEXICANA [LSM]. SORDOS (19-23). ESTUDIO DE CASOS

TESIS

QUE PRESENTA

HÉCTOR GERARDO ESTRADA GARCÍA

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE

MATEMÁTICA EDUCATIVA

DIRECTOR DE TESIS: **M. EN C. IGNACIO GARNICA Y DOVALA**

Ciudad de México Julio 2016

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**, que por medio del programa de becas me permitió realizar mis estudios de maestría y este proyecto de investigación.

Becario: 628777

Agradecimientos

A **Dios,** por su guía, acompañamiento y protección constante en mi vida.

Al Maestro **Ignacio Garnica**, por todo su apoyo, respaldo, comprensión y dedicación, por todo lo que aprendí de él y por permitirme conocer mediante el trabajo a su lado, un mundo académico apasionante, el de la investigación.

A mis Profesores: El **Dr. Eugenio Filloy**, la **Dra. Ana María Ojeda**, el **Maestro Vicente Carrión** y el **Maestro Héctor Chávez**, mil gracias por permitirme conocer un poco de lo mucho que tienen para aportar a nuestro país.

A **Andrea Barojas,** por todo su apoyo en el mundo de la LSM, su conocimiento y acompañamiento fue sumamente valioso y fundamental en la investigación.

A mis estudiantes: **Max, Brandon** y **Oscar**, por toda su disposición, por su tiempo, por su amistad y cariño fraterno, su recuerdo seguirá siempre conmigo.

Al pilar en el que me sostengo día a día, **Mi Familia: Margarita García** (mi madre), **Héctor Estrada** (mi padre), **Viri** y **Claudia**, mis dos maravillosas hermanas, los amo.

A mis compañeros**: Arturo, Esmeralda** y **Rogelio**, la aventura emprendida a su lado no sólo fue productiva, también fue una hermosa experiencia, que llevo en mi corazón.

A **Carmen Olvera**, el instrumento de Dios para que pudiera conocer el CINVESTAV.

A **Jesús David**, por su apoyo incondicional en el mundo de las matemáticas y en todo.

Índice

Índice de figuras

Índice de Tablas

Resumen

Esta investigación, cualitativa con estudio de casos (Stake, 2010), centró su interés en el problema de la adquisición de la noción cualitativa de área por estudiantes Sordos (19-22) en situación de tiempo real de enseñanza en el aula, con énfasis en la mediación de la Lengua de Señas Mexicana [LSM].

En su sentido teórico la investigación consideró: a) respecto a la adquisición de la noción matemática en foco, la propuesta metodológica de Turégano (1989), b) respecto a los postulados de regiones y sus áreas y de la noción de área de fórmula, Moise (1982) y Wilson y Osborne (1988), que se orientaron en la presente investigación a sus aspectos cualitativos, y c) respecto a las nociones de Pi, longitud de circunferencia y área del círculo, las proposiciones 1 y 3 de la medida del círculo (Heath, 1897). Para el estudio de la mediación de la LSM en el proceso de adquisición de la noción, se planteó la constitución y propuesta de señas pertinentes a la comunicación de los mensajes contenidos de nociones matemáticas (Cruz, 2008).

Los procesos de la investigación **—***Indagación, enseñanza, investigación***—** "se basaron en un modelo de comunicación, determinado por la competencia lingüística y comunicativa mediada por la LSM y señas propuestas en el aula" (Barojas y Garnica, 2014). Se realizaron actividades en el aula relativas a cada uno de los tres procesos, con el propósito de seguir y analizar indicios de adquisición de las nociones en foco, efectos de la comunicación entre pares en la competencia comunicativa y lingüística, así como la evaluación de las nociones adquiridas mediante el análisis de entrevistas individuales, con la intervención de una intérprete, a cada uno de los tres estudiantes.

Tres interrogantes guiaron los procesos: ¿Cuáles son los elementos necesarios para la adquisición de la noción cualitativa de área por estudiantes sordos, mediada por la LSM en situación de tiempo real de enseñanza en el aula? ¿Cuáles son los alcances y las limitaciones de la LSM en el proceso de adquisición de la noción en foco? Y ¿Cuáles son las señas propuestas que favorecen la adquisición de la noción en foco? Se reportan los siguientes resultados: a) construcción y documentación de treinta señas referentes al tratamiento de las nociones en foco, identificadas como necesarias para la adquisición cualitativa de área, b) identificación de alcances y limitaciones de la LSM en el tratamiento de las nociones en foco, y c) niveles de adquisición de la noción cualitativa de área.

Abstract

This qualitative with case study (Stake, 2010), focused his research interest in the problem of the acquisition of qualitative notion of area for Deaf students (19-22) in actual time classroom teaching, with emphasis in mediating the Mexican Sign Language [LSM].

In its theoretical sense research considered: a) regarding the acquisition of the mathematical notion in focus, the methodology Turegano (1989), b) with respect to the postulates of regions and areas and the notion of area formula, Moise (1982) and willson & Osborne (1988), which were aimed at the qualitative aspects, c) with respect to the notions of Pi, length, circumference and area of a circle, propositions 1 and 3 of the extent of the circle (Heath, 1897). To study the mediation of the LSM in the process of acquiring the notion, it proposed the constitution and relevant address to the communication of messages contained mathematical notions (Cruz, 2008) was raised.

Research processes -Inquiry , teaching, research- "were based on a communication model , determined by the linguistic and communicative competence mediated LSM and address proposals in the classroom" Barojas, Garnica (2014). Classroom activities relating were performed at each of the three processes, in order to follow and analyze evidence acquisition, effects of peer communication in the communicative and linguistic competence and the assessment of the insights gained by analyzing interviews individual, with the intervention of an interpreter, to each of the three students.

Three questions guided the process: What are the necessary elements for the acquisition of qualitative notion of area by deaf students, mediated LSM in actual teaching time in the classroom? What the scope and limitations of the LSM in the process of acquiring the notion in focus? And what signs proposals that favor the acquisition of the concept in focus? The following results were reported: a) construction and documentation thirty signs concerning the treatment of the concepts in focus, identified as necessary for qualitative acquisition area, b) Identification of scope and limitations of the LSM in working with the concepts in focus and c) acquisition levels qualitative concept of area.

Introducción

La presente investigación, pretende responder a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en aulas para sordos, planteada institucionalmente por la Educación Especial. Ante la necesidad de considerar las condiciones de comunicación de la comunidad sorda en las aulas durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, se propuso privilegiar la mediación de la LSM, la cual condujo a su vez a la necesidad de construir y proponer señas que propiciaran la comunicación de los mensajes contenidos de nociones matemáticas durante los procesos en cuestión.

Sus antecedentes inmediatos son dos investigaciones orientadas al estudio de la comprensión de nociones del sistema métrico decimal mediada por la LSM en el aula de sordos: la de Barojas (2014) para el caso de la magnitud masa-peso y la de Astorga (en curso) para el caso de la magnitud longitud, desarrolladas en el Centro de Investigación y de Estudiaos Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav del IPN).

Participaron tres jóvenes sordos con diferente nivel de competencia en la LSM y en situación de enseñanza en tiempo real en el aula para sordos. .

La investigación se realizó en tres tiempos: a) en el primero se trataron lo contenidos de las figuras geométricas elementales, b) en el segundo los relativos a la equivalencia de figuras poligonales, c) finalmente, el tratamiento de las nociones asociadas al tratamiento del círculo.

En el aula se desarrollaron tres procesos que componen la metodología de la investigación: a) *La enseñanza*, para la cual se diseñaron actividades que permitieran el tratamiento de las nociones pertinentes al tema de área, b) *La indagación* (mediante la comunicación entre pares) para la cual se generaron espacios de trabajo y actividades que propiciaran la interacción entre los estudiantes, en los que la participación del investigador se limitaba a la observación de la comunicación y c) La investigación cuyo principal instrumento fue la entrevista. En el capítulo primero se describe el planteamiento de la investigación, la justificación y las preguntas y objetivos planteados.

En el segundo capítulo se enumeran y describen las fuentes teóricas que dan sustento al planteamiento de la investigación en lo referente a: a) desarrollo cognitivo y lenguaje de los Sordos, b) la lengua de señas, una lengua natural, c) matemática educativa y d) método.

En el tercer capítulo se presentan las actividades y resultados del primer proceso de adquisición relacionado con el tratamiento del *área de figuras planas elementales:* triángulos y cuadriláteros.

En el cuarto capítulo se describen y reportan resultados del segundo tiempo en el proceso de adquisición: *equivalencia de figuras planas, perímetro y área de polígonos regulares* con actividades de equidescomposición y equivalencia de figuras planas, perímetro y área de polígonos regulares e irregulares.

En el quinto capítulo se presenta el resultado del tercer proceso de adquisición mediante el tratamiento del *Número Pi, la longitud de la Circunferencia y área del círculo*; Tanto en este capítulo como en los dos anteriores, se presentan las señas pertinentes a cada campo temático y que fueron construidas durante cada uno de los tres procesos..

Finalmente, en el capítulo sexto se presentan resultados del análisis de la aplicación de la entrevista a cada uno de los estudiantes. El guión correspondiente consideró los contenidos fundamentales estudiados durante los tres tiempos. Se incluyen las conclusiones derivadas de los resultados de esta investigación.

Capítulo primero

Planteamiento de la investigación

En este capítulo se presenta el problema de investigación, así como su justificación, las preguntas y objetivos planteados

1.1 Problema

La comunidad sorda, en general enfrenta serios retos que la educación le plantea, en particular los relacionados con la enseñanza de las matemáticas en situación de tiempo real en el aula para sordos. Un acercamiento a la historia del problema proporciona elementos sustanciales que se consideran en el presente estudio: la población sorda en México en su aspecto cuantitativo, la cuestión de la comunicación mediada por la lengua de señas (LS), lo que sabemos y lo que no sabemos de los sordos, los antecedentes de nuestra investigación.

1.1.1 La población sorda.

Según el Censo General de Población y Vivienda, 2010 en México a nivel nacional se contaba ya con 649,451 individuos sordos, equivalentes al 12.1 % de las personas que cuentan con alguna discapacidad. Lo que esta cifra implica entre otras cosas, es un reto para las aulas del sistema educativo, cuya primera y más evidente dificultad es la barrera en la comunicación.

La comunidad sorda, discreta por sus características propias, suele pasar desapercibida en todos los ámbitos, el desconocimiento en torno a ésta condición parece ser generalizado.

Marschark (2008,) comenta que *"Los malentendidos y conceptos erróneos todavía existen respecto a lo que significa ser sordo, personas bien intencionadas en el ámbito académico social y esferas administrativas con demasiada frecuencia crean tantos obstáculos para el éxito como aquellos que buscan eliminar"*. (p. 189)

El desconocimiento de la condición sorda se extiende incluso a los profesores de educación especial y abarca cuestiones como: el desarrollo histórico de la comunidad y la problemática a la que desde la educación o la investigación nos enfrentamos realmente.

Qi y Mitcbell (2007) aseguran que *"la mayoría de los indicadores no han demostrado ningún cambio significativo en función de su entrada masiva en las escuelas públicas locales o de la disponibilidad de la lengua de signos en la programación de la intervención temprana"* (p. 412)

1.1.2 Aspectos históricos.

La comunidad sorda ha transitado a lo largo de su historia por diferentes concepciones que los oyentes han tenido de ella, referirse a la situación del sordo actual puede arrojar diferencias muy marcadas con respecto a la concepción que se tenía de una persona con esta característica en el siglo XII pero que siguen siendo insuficientes.

En Europa, durante la edad media se conservó la concepción de que un sordo no podía ser educado debido a su carencia de lenguaje, lo cual hacía pensar que tenían algún tipo de discapacidad intelectual, está idea comenzó a modificarse a mediados del siglo XVI cuando se desarrollaron técnicas para la enseñanza de los sordos entre ellas el uso de señas.

1.1.2.1 La lucha por un método de comunicación.

La forma de abordar el proceso de enseñanza y en general de comunicación con y en la comunidad de personas sordas a lo largo de la historia ha arrojado dos tendencias que marcan caminos muy distintos:

En un aparente intento de "normalización" surge el llamado "Modelo Oralista" también conocido como "Método Alemán" que fue presentado en un congreso de Milán, durante el siglo XVIII por Samuel Heinike, planteando que el objetivo de la escuela de sordos era fundamentalmente enseñar el habla, de modo que el estudiante pudiera integrarse a la sociedad oyente que le enseñaría lo necesario.

Durante el mismo congreso, el abad Michel de L`Epée defendió la utilización de las lenguas de señas y la preparación intelectual del alumno para la vida, una propuesta que fue conocida como el "método francés".

Ambas tendencias están vigentes en México, sin embargo, será esta última la que delimitará el presente trabajo por considerar a la LSM como la lengua natural de las personas sordas (Cruz, 2008), ya que surge naturalmente en la relación diaria entre esta población, en respuesta a su condición de personas con limitación auditiva, por lo cual sus canales de emisión son corporales y espaciales y los de recepción visuales.

En 1955 se aceptaba la utilización de las señas como instrumento de comunicación; sin embargo, era considerado una forma pobre de "hablar" con las manos, igualándolo a la acción de hacer mímica. Ante esa situación, y convencido de que el alcance de esas señas era mayor, William Stokoe comenzó a desarrollar un método descriptivo para descubrir en ese código estructuras lingüísticas.

Como resultado de sus estudios, Stokoe publicó en 1960 la monografía "Sign Language Structure" (Estructura de la lengua de signos), en la que propone que las señas pueden ser analizadas como compuestos simultáneos de tres elementos sin significado: una forma de la mano, una actividad de la mano y un lugar ocupado por la mano. Eso le permitió argumentar que la lengua de señas usada por sus estudiantes era un código doblemente articulado, es decir, una lengua natural.

Aunque sus afirmaciones fueron vistas en principio con reserva por sus colegas, e incluso por los mismos Sordos, al cabo de pocos años comenzó a ser escuchado y comprendido.

En esto jugó un papel muy importante la publicación que hizo, en 1965, de lo que él llamó el Primer diccionario de la Lengua de Señas Estadounidense.

Cruz (2008), asegura que

> "Gracias a los estudios de Stokoe (1960, 1965) particularmente sobre la lengua de señas americana (ASL), es posible reconocer que las lenguas de señas, al igual que las lenguas orales, están organizadas en unidades lingüísticas dotadas de significado (primera articulación), las cuales a su vez están compuestas de unidades mínimas carentes de significado (segunda articulación)" (p. 257).

1.1.2.2 México, su propia historia.

En México, durante la segunda mitad del siglo XIX el entonces presidente Lic. Benito Juárez García, atendió el llamado del maestro sordo de nacionalidad francesa Eduardo Huet, sobre la urgencia de reconocer y aceptar el lenguaje natural de los sordos, con sus símbolos y gestos, utilizados como medios de comunicación, tan válidos como el lenguaje oral de la comunidad oyente.

A principios de 1867 que se promulgó la Ley Orgánica de Instrucción Pública, que buscaría reorganizar la educación a nivel nacional. Esa disposición tuvo vigencia en el Distrito Federal y en los territorios que dependían directamente del ejecutivo federal y fue hasta el 28 de noviembre del mismo año que el presidente, publicò el decreto para fundar la Escuela Nacional de Sordomudos, la cual funcionaría también como escuela normal de profesores, ubicada en las instalaciones del ex convento Corpus Christi.

Con la fundación de la Escuela Nacional se dio inicio formal al esfuerzo educativo para los sordos, contando con una matrícula inicial de 24 alumnos, mientras que el resto seguían viviendo al margen de estos beneficios, situación que no parece haber cambiado tanto hasta nuestros tiempos.

Vale la pena una reflexión ya que, a simple vista, no parece que existan cambios significativos con respecto a lo que sabemos o de los sordos ni a la visión que la sociedad tiene de ellos, de su condición, de su comunicación ni de la forma de tratar su problemática.

1.1.3 Lo que sabemos y no sabemos de los sordos.

Tal como sucedía en la edad media, existe actualmente una amplia población de personas que, derivado de la falta de lenguaje oral del sordo y de un evidente desconocimiento del tema, piensan que es incapaz de aprender o bien, el polo opuesto, quienes minimizan las repercusiones de esta condición en el individuo. Pero ante ambos escenarios lo que sabemos de la sordera es que:

> Es una privación sensorial que limita al individuo del mundo de la experiencia .Se priva al organismo de algunos de los recursos materiales de los que se desarrolla la mente. Debido esto, la experiencia total se reduce, no es una imposición sobre el balance y el equilibrio de todos los procesos psicológicos (Myklebust 1960, p 55).

Myklebust (1960) argumenta que:

> Cuando un tipo de sensación es deficiente, se altera la integración y la función de todos los otros. La experiencia está constituida de manera diferente; El mundo de la percepción, la concepción, la imaginación y el pensamiento tienen una fundación alterada, una nueva configuración. Tal alteración se produce naturalmente, y sin saberlo, porque a menos que el individuo esté organizado y en sintonía diferente, la supervivencia en sí puede estar en peligro (p. 56)

Es decir que la mayoría de los sordos experimentarán un mundo más limitado que los oyentes, que sus interacciones con el mundo implicarán, diferentes reglas y limitaciones, y que estas diferencias tendrán una variedad de implicaciones significativas para el desarrollo psicológico de los niños sordos.

Lo anterior no le da la razón a ninguna de las dos posturas radicales con las que se puede ver al sordo y nos sitúa en una realidad: es probable que el sordo pueda acceder a diversos tipos de contenido académico a pesar de la privación total o parcial de estímulos auditivos; sin embargo, se debe tener siempre en cuenta que su concepción de la realidad y de lo que ella ofrece, puede mostrar diferencias significativas con respecto al oyente.

En otras palabras, el trabajo que se realice con sordos no se hará en terreno infértil pero tampoco pueden ignorarse las aclaraciones que se han expuesto ni menospreciar los retos que esto conlleva, comenzando por la comunicación, que es la primera barrera a la que podemos enfrentarnos al estar en contacto con personas sordas.

Dicha barrera no es exclusiva de los profesores, investigadores o de cualquier prestador de servicios. Según investigaciones, "*aproximadamente el 95% de los niños sordos tienen padres oyentes*" (Myklebust, 2008, p. 441), es decir que incluso la comunicación con la familia se ve afectada.

Para quienes desconozcan casi por completo del tema, la respuesta puede ser muy sencilla, aprender el alfabeto en señas es la solución a la comunicación de oyentes con sordos, es decir, una traducción de un conjunto de símbolos a otro; esta técnica se denomina *dactilología*. Sin embargo tal respuesta està sumamente alejada de la realidad.

Usar el alfabeto en lengua de señas es sólo un factor mínimo; se requiere que el sordo domine por lo menos de manera básica, la lectura y escritura del español, lo cual no siempre es así.

Si lo que se busca es tener una comunicación real y más significativa, es necesario acceder al uso de la lengua de señas mexicana (LSM), la cual por sí sola puede llegar a ser todo un reto.

Cruz, (2008) explica que:

> "en la LSM se consideran aspectos fonológicos, semánticos y pragmáticos, por lo cual se deberá realizar un trabajo de orden descriptivo que nos permita comprender su naturaleza y dar una explicación sobre la morfología, así como de la sintaxis y las particularidades del discurso de esta lengua de señas" (p. 263).

La competencia lingüística entre los miembros de la comunidad sorda muestra diferencias importantes que obedecen a factores variados, es decir, que aunque varias personas, incluso de la misma edad, compartan la condición de sordera, no necesariamente tendrán la misma competencia lingüística, Cruz (2008) identifica cinco subgrupos de signantes:

1. Sordos que son monolingües (LSM), con un bajo conocimiento del español escrito y que no utilizan ninguna expresión oral.
2. Sordos que tienen como primera lengua la LSM y como una segunda lengua el español oral o escrito. Este grupo se puede comunicar a través del español con éxito.
3. Sordos bilingües que además de la LSM usan alguna otra lengua de señas como la American Sign Language (ASL).
4. Sordos o hipoacúsicos que pueden o no asociarse con la comunidad silente, y que conocen o han aprendido la LSM. Principalmente tienen una buena competencia oral y escrita del español, incluso el español puede considerarse su primera lengua.
5. Sordos semilingües, los cuales no adquirieron el español como primera lengua pero tampoco son competentes en la LSM.

Hasta aquí, el lector ya puede ir reconociendo la complejidad a la que nos enfrentamos en la realización de la presente investigación ya que *"a pesar de los avances científicos se están realizando en el desarrollo del lenguaje, los procesos sociales, la lingüística de lengua de signos y otros dominios, muchas áreas de desafío significativo para los jóvenes sordos han sido dejadas de lado"* (Myklebust, 1960. p. 440) entre ellas lo referente al tema matemático.

1.1.3.1 El aspecto cognitivo.

Las investigaciones que se han realizado con respecto al desarrollo cognitivo de los sordos son escasas, lo que provoca que existan más interrogantes que respuestas al respecto. Para Marchesi (1992), las interrogantes con respecto al tema pueden resumirse en tres afirmaciones:

- Las primeras limitaciones en la evolución intelectual de los niños sordos pueden manifestarse en sus expresiones simbólicas.
- La capacidad para planificar la conducta está estrechamente relacionada con la interiorización del lenguaje.
- La adquisición de conocimientos está muy relacionada con la capacidad de recibir información y elaborarla adecuadamente.

Estas tres afirmaciones ponen de manifiesto la importancia de realizar investigación para contribuir a la construcción de respuestas más específicas.

Ante este escenario, surge la necesidad de identificar los procesos cognitivos por los que transitan los estudiantes sordos en el aprendizaje de conceptos matemáticos, por lo que nuestra investigación se centra en la adquisición cualitativa del concepto de área mediada por la Lengua de Señas Mexicana (LSM).

1.1.4 Antecedentes de la investigación en foco.

La presente investigación es continuación de otras relacionadas con la adquisición del sistema métrico decimal (Garnica y Barojas, 2013; Barojas, 2014) en el aula de educación secundaria, sin embargo, el trabajo sistemático por parte del Departamento de Matemática Educativa (DME) con la comunidad de estudiantes sordos, se comenzó a partir de 2009 cuando se desarrollaron actividades para identificar la competencia lingüística y de comunicación en LSM así como la lengua escrita (LE), el dominio del vocabulario en Señas y los procesos de las operaciones aritméticas aditivas y multiplicativas.

Posteriormente en 2010 se establecieron las condiciones iníciales para trabajar nociones de aritmética, cantidades discretas y continuas, elementos básicos de estadística descriptiva y del conocimiento espacial.

Durante el primer semestre de 2011 se observó a través del uso de la LSM y la LE, la adquisición de las nociones por medio del conteo de colecciones de cantidades discretas y el tránsito a las cantidades continuas con el recurso de objetos como varas y otros.

En septiembre de 2015 dio inicio la presente investigación, comenzando con una etapa de acercamiento al problema que nos permitió posteriormente orientar las líneas de acción y análisis.

1.1.4.1 Las condiciones iniciales.

Expresado de forma sencilla, la presente investigación "arrancó desde cero". El primer paso fue comenzar a conocer a la población con la que se buscó trabajar; no nos referimos sólo a los tres estudiantes que participaron, sino a la comunidad de sordos en general, y lo que encontramos fue todo un reto que antes de iniciar la investigación no parecía tan grande.

1.1.4.1.1 Los estudiantes.

Los participantes en esta investigación, a quienes identificaremos como Os, Br y Mx de (edades 24, 24 y 19 años respectivamente; véase Tabla 2.3), a pesar de que ya habían estudiado con anterioridad algunos temas matemáticos indicados en el apartado 1.1.3, tenían un nulo acercamiento al tema del área en lo general.

Desde el principio, ellos mostraron una notable dificultad en las operaciones aritméticas básicas, tanto de suma como de multiplicación, especialmente en la última, lo cual fue un factor para que el trabajo fluyera lentamente.

Los tres también mostraron al principio una diferencia evidente en su competencia lingüística y dos de ellos, Os y Br, dificultades para acceder rápidamente a los contenidos matemáticos que se proponían, especialmente Br.

Sin embargo la motivación para aprender también era evidente, a pesar de que no estuvimos nunca en posibilidades de otorgar algún grado académico, los estudiantes asistieron desde el principio con una especial disposición al aprendizaje, especialmente el caso de Mx quien incluso durante los días en que no asistía al escenario empírico, nos externaba sus dudas mediante las redes sociales.

1.1.4.1.2 El investigador.

Como fortalezas personales, quien esto escribe sólo puede asegurar que inició con una gran motivación hacia la investigación, pues de inicio su desconocimiento de la LSM fue su primer reto, ya que al principio sólo establecía la comunicación mediante la dactilología, lo cual como ya se ha señalado en el apartado 1.1.3, es menos que suficiente para entablar una comunicación real con la comunidad de sordos.

Aunado a la barrera que me representó el desconocimiento de la lengua (LSM), el de los usos y costumbres de la comunidad sorda fue otro factor que impactó fuertemente al investigador desde el principio; y es que ¿qué tan importante puede ser conocer las características de la comunidad para trabajar matemáticas con ellos? Durante el tiempo de la investigación pudimos percatarnos de que entre quienes investigan en matemática educativa dirigida a normoyentes desconocen la problemática de la educación con sordos y la importancia de la LSM, la reducen al hecho de que es simplemente un sistema de comunicación y que al descifrarlo queda todo resuelto.

Conocer a la comunidad de cerca nos permitió entender incluso la forma en la que debíamos comunicarnos con ellos; pero, además, darnos cuenta de lo diferente que puede ser el mundo para ellos, ese mundo de oyentes que recorremos con un aire de propietarios, como si fuera igual para todos y no, no lo es.

La investigación requirió no sólo el domino de los contenidos que se propondrían a los estudiantes sordos sino determinar los caminos que nos conducirían a las metas establecidas, es decir, a que adquirieran cualitativamente la noción de área mediante el recurso de la LSM.

1.1.4.1.3 La LSM una herramienta incompleta.

Desde el principio definimos que la ruta de la investigación estaría trazada por la LSM, al considerarla la lengua natural del sordo; es decir, buscaríamos que los estudiantes adquirieran las nociones en foco mediante su propia lengua, si bien ésta se mostró desde el principio sumamente limitada e incompleta para poder comunicar los contenidos matemáticos necesarios. Esta condición no es necesariamente compartida por los investigadores de otros países.

La Tabla 1.1 muestran las palabras necesarias para tratar los contenidos matemáticos de la investigación en foco y la indicación de la existencia de la referencia respectiva en la LSM, producto de una búsqueda en diccionarios de señas, impresos y digitales.

Tabla 1.1
Palabras con seña en la LSM, necesarias para trabajar la investigación en foco

Palabra	Seña en LSM	Palabra	Seña en LSM
Área	-	Perpendicular	-
Base	-	Arco	-
Altura	-	Cuerda	-
Perímetro	-	Medir	-
Diámetro	-	Rombo	-
Radio	-	Lado	X
Diagonal	-	Vértice	-
Cuadrado	X	Punto medio	-
Rectángulo	-	Rombo	X
Ángulo	-	Pi	-
Triángulo		Mayor que	-
T. Equilátero	-	Menor que	-
T. Escaleno	-	Polígono	-
T. Isósceles	-	Polígono Regular	-
Círculo	X	Polígono Irregular	-
Circunferencia	-	Hexágono	-
Paralelo	-	Pentágono	-

La "X" indica la existencia de las señas respectivas, mientras que "-" señala la ausencia de seña.

1.2 Justificación

Hemos visto ya en los antecedentes que la comunidad sorda tiene una presencia importante en nuestro país y, sin embargo, son pocas las investigaciones que de ella se realizan; por consiguiente, es poca la información que de ella se tiene en lo general y, particularmente, en el ámbito de la formación matemática.

El hecho de que la LSM sea considerada como la lengua natural del sordo nos obliga a tomarla en cuenta, estudiarla y usarla para entenderla cada vez mejor y poder, a partir de la investigación, ofrecer información de utilidad respecto a esta lengua.

Diversos autores aseguran que al eliminar la barrera de la comunicación, los sordos podrían aprender igual o hasta mejor que los oyentes, Sin embargo, en la mayor parte de las pruebas estandarizadas, los resultados muestran un menor desempeño de los sordos en comparación a sus iguales oyentes.

Ante estos elementos, la presente investigación tiene como finalidad abordar el tema de la adquisición cualitativa de la noción de área en estudiantes sordos, mediada por la LSM.

1.3 Preguntas y objetivos

La investigación plantea las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los elementos necesarios para la adquisición de la noción cualitativa de área por estudiantes sordos, mediada por la LSM, en situación de tiempo real de enseñanza en el aula?
2. ¿Cuáles son los alcances y las limitaciones de la LSM en el proceso de la adquisición de la noción cualitativa de área por estudiantes sordos?
3. ¿Cuáles son las señas propuestas que favorecen la adquisición de la noción cualitativa de área por estudiantes sordos?

Los objetivos son:

1. Proponer alternativas al proceso de la enseñanza, mediada por la LSM, de la noción cualitativa de área en tiempo real en el aula para sordos.
2. Identificar los elementos que contribuyeron a la adquisición de conceptos con relación al tema de área.
3. Evaluar los alcances y limitaciones que se muestre la LSM para lograr la adquisición de la noción cualitativa de área por estudiantes sordos.
4. Construir y registrar las señas que sean pertinentes para lograr la adquisición de la noción cualitativa de área por estudiantes sordos.
5. Proponer las señas constituidas, derivadas de la adquisición de la noción cualitativa de área por los estudiantes sordos participantes en la investigación.

Capítulo segundo

Elementos teóricos y método

Este capítulo consiste en un acercamiento a las fuentes teóricas que sustentan la investigación. Presentamos las consideraciones básicas necesarias sobre el desarrollo cognitivo y el lenguaje de los Sordos, los elementos que permiten observar a la LSM como una lengua natural, los fundamentos matemáticos que fueron usados los pilares de las actividades diseñadas y una descripción del método de investigación utilizado.

2.1 Desarrollo cognitivo y lenguaje de los Sordos

La relación entre el funcionamiento cognitivo y el lenguaje ha despertado el interés de los investigadores desde hace tiempo. En ese sentido, los niños sordos fueron en ocasiones objeto de estudio con el fin de corroborar ideas de la teoría y de la investigación con los niños oyentes, como la relación entre el lenguaje y el aprendizaje, para contribuir al conocimiento general en cuanto a la lengua y el desarrollo del lenguaje.

Recientemente, los investigadores han dirigido su atención a la comprensión de los aspectos cognitivos de adultos y niños sordos, con respecto a su crecimiento con un lenguaje de señas en lugar de una lengua hablada y cómo esta situación podría afectar el desarrollo.

Sierra (1994), expone que Marchesi y sus colaboradores apuntan desde 1981 que la investigación se encuentra en una etapa en la que se piensa, que el lenguaje no está determinado por el desarrollo intelectual, sino que éste sustenta la actividad intelectual, la dirige; y agrega que:

> Tanto Piaget (1955) como Furth (1973) pensaban que la competencia cognitiva de los sordos era semejante a la de los oyentes aunque con algunos matices en la línea de una mayor lentitud en el desarrollo intelectual de los sordos. Este retraso se daba debido a la falta de experiencias en la comunicación y expresión que el sordo tiene. (Sierra 1994, p. 53).

En reiteradas y ocasiones y con diferentes autores, se realizan comparaciones entre el desarrollo cognitivo de los sordos con respecto al de los oyentes (por ejemplo, REFERENCIAS). Al respecto, Marchesi (1994) señala que la secuencia de adquisiciones de los distintos conceptos de las operaciones concretas es la misma en los sordos que en los oyentes, pero asegura que existe un desfase temporal entre unos y otros que se evidencia con facilidad entre más complejas sean las operaciones lógicas implicadas y agrega que: *"En el caso de las operaciones formales, caracterizadas por el pensamiento hipotético-deductivo, los adolescentes sordos mantienen una mayor retraso e, incluso, no alcanzan este estadio"* (p. 4).

Estos estudios son un indicador de que en un comparativo entre sordos y oyentes, los primeros muestran un pensamiento con mayor vinculación a lo directamente percibido, más concreto y con menor capacidad de pensamiento abstracto e hipotético.

Al respecto del comparativo entre sordos y oyentes en los primeros meses y años de vida, en Sierra (1994) proporciona la siguiente información: *"Best y Roberts (1976) realizaron un estudio en el que concluían, entre otras cosas, que los niños sordos progresan durante este periodo sensoriomotor de igual forma que los niños oyentes, salvo algunas excepciones"* (p. 54). Apuntaron, además, que las variantes observadas en los sujetos sordos no mostraban diferencias significativas con respecto al grupo de oyentes.

De igual forma, Bonvillian (1983) realizaron una investigación referida al desarrollo sensoriomotor de niños sordos que a su vez eran hijos de padres sordos y mostraron importantes coincidencias con los resultados de la investigación de Best y Roberts, ya que los niños observados, no manifestaron ningún retraso respecto de los oyentes, salvo en la escala de imitación vocal debido, posiblemente, a la poca estimulación que provenía de sus padres, también sordos.

Desde una perspectiva orientada a la educación de los sordos, pero siguiendo la línea de comparación con los oyentes, Marschark (2008) supone, bajo los esfuerzos de promover una educación integrada, que: *"Una vez que se han eliminado las barreras de comunicación en el aula, los procesos de enseñanza y aprendizaje para los estudiantes sordos deben ser los mismos"* (p. 5). Si esta suposicion es correcta, el resultado académico debería ser comparable en éxito entre los estudiantes sordos y los oyentes. Sin embargo, el rendimiento de los estudiantes sordos en la Prueba de Logros Stanford a lo largo de los años escolares muestra que los resultados de los estudiantes sordos estuvieron por debajo de los compañeros oyentes.

La investigación del desarrollo del comportamiento en la intersección entre las ciencias cognitivas y del cerebro, y la educación de los sordos, está comenzando a ofrecer una única e integrada comprensión del lenguaje, la cognición y el aprendizaje.

Los investigadores han llegado a reconocer la necesidad de comprender tanto las grandes diferencias individuales dentro de la población sorda, como las diferencias entre sordos y personas de la misma edad con la experiencia del lenguaje. Claramente, el tema del idioma es uno de los que se teje a través de nuestra comprensión de la cognición, del aprendizaje y del desarrollo de los niños sordos.

Según Marschark (2008), diversos estudios durante la última década han demostrado que los estudiantes sordos suelen poner en evidencia el conocimiento, conceptual, de organización y estrategias perceptivas cognitivas diferentes a los de sus pares oyentes; y agrega que:

> Dichas diferencias pueden ponerlos en una situación de desventaja académica en las clases regulares, incluso en entornos separados, el supuesto es que no se tienen identificadas tales diferencias ni ajustadas apropiadamente nuestras intervenciones y métodos de instrucción, un problema en la necesidad de una investigación. (p. 6)

Lo que la mayoría de los estudiantes sordos tienen en común es su diversidad. Ellos tienden a llegar al aula con las experiencias que varían más ampliamente que las de sus compañeros oyentes y, en parte como consecuencia de estas experiencias, han desarrollado diferentes estrategias de resolución de problemas y aprendizaje. Al respecto, Marschark (2008) asegura que:

> Si bien este tipo de hallazgos plantea preocupaciones sobre el potencial de rendimiento académico para los estudiantes sordos en entornos educativos convencionales, la riqueza de la evidencia reciente permite ver cómo los estudiantes sordos son capaces de aprender y presagia los cambios positivos en el futuro. (p. 7).

2.2 La lengua de señas, una lengua natural

Entre la población en general, es común la creencia de que la lengua de señas es sólo un sistema de mímica avanzada, carente de estructura propia y de las características de una lengua. Empero, hay estudios que demuestran que estamos frente a una lengua que es además la lengua natural de la población sorda.

Cruz (2008), presenta un análisis de la investigación de Hockett (1958) de las propiedades generales del lenguaje humano partiendo de la búsqueda de una justificación capaz de reconocer las características que lo diferencian de cualquier otro sistema de comunicación no humano. Enlista quince propiedades básicas:

- Vía vocal o auditiva
- Transmisión irradiada y recepción dirigida
- Desvanecimiento rápido
- Intercambiabilidad
- Retroalimentación total
- Especialización
- Semanticidad
- Arbitrariedad
- Carácter discreto
- Desplazamiento
- Dualidad
- Productividad
- Trasmisión tradicional
- Prevaricación
- Reflexividad

Cruz (2008) refiere y Hockett están de acuerdo en que estas propiedades sólo se dan de manera conjunta en sistemas de comunicación humanos y considera que de todas ellas, la productividad, el desplazamiento, la dualidad y la transmisión cultural son las esenciales de todo sistema lingüístico, las cuales no sólo se reconocen en las lenguas orales sino que, también, se encuentran presentes en las lenguas de señas.

Algunas de las propiedades obedecen al oralismo, lo cual se entiende si se aclara que la lengua de señas tiene un reconocimiento relativamente reciente (Stokoe, 1960). Empero, llama la atención que la mayoría de las propiedades enunciadas por Hockett no tengan una relación directa con los mensajes orales, pues inclusive llega a reconsiderar términos como cenemático y pleremático (los cuales no implican la presencia de un canal físico exclusivo al sonido).

La *productividad* es una de las propiedades que Hockett considera como esencial para definir lo que es un sistema lingüístico:

> Las lenguas de señas son productivas ya que los señantes tienen la posibilidad de producir y entender un número infinito de enunciados nuevos, lo cual también nos conduce a la propiedad de *intercambiabilidad* que se observa en estas lenguas. Aunado a lo anterior el intercambio de mensajes entre los miembros de las comunidades silentes también evidencia la existencia de una *retroalimentación* que se da a través de la vía visual y cinestésica, lo que Hockett denominó como propiedad de retroalimentación total. (Cruz, 2008, p.27).

Es importante señalar que la *productividad* está relacionada, además, con la propiedad de *especialización* de la lengua, por lo cual se debe subrayar que la capacidad del lenguaje humano no está definida por su oralidad.

2.2.1 La Lengua de Señas Mexicana.

Las investigaciones realizadas sobre la Lengua de Señas Mexicana (LSM) son pocas. Para Cruz (2008), la investigación de Donna Jackson Maldonado (1981) destaca por ser pionera, ya que en su artículo "Algunas observaciones objetivas sobre el lenguaje manual" presenta un análisis sobre las lenguas de señas, que permite ver que éstas son verdaderas lenguas naturales, y no sólo un listado de gestos o mímica sin una estructura lingüística.

Según Cruz (2008), la lengua de señas mexicanas es especializada, ya que en ella: "se conjugan por un lado las posibilidades anatómicas y fisiológicas que tiene el ser humano para la realización de movimientos de los brazos, manos, cuerpo, cara, etc., para transmitir y recibir mensajes sin un consumo de energía significativo". (p. 28).

2.2.1.1 La LSM y el español. Además de las relaciones que se presentan entre la LSM y otras lenguas de señas, se debe atender la relación entre ésta y el español, por ser la lengua predominante en México, y con la cual el sordo puede estar en constante interacción. Al respecto, Cruz (2008) señala que:

> Las relaciones entre la LSM y el español han originado otros sistemas de comunicación artificiales como el *español signado*, el cual se caracteriza por utilizar las señas propiamente de la LSM pero además se incorpora la morfología y el orden de palabras del español. El español signado

> principalmente se utiliza en el ámbito educativo. No obstante, su influencia puede permear la adquisición de la lengua de señas como lengua materna en un señante novel que al usar las señas emplee ciertos elementos pertenecientes a la gramática del español y ajenos por tanto a la estructura de la LSM. (p. 183)

2.3 Matemática educativa

Las fuentes matemáticas que sustentan la noción cualitativa de área son; ideas fundamentales de la medición, que presenta Osborne y Wilson (1988); La geometría desde un punto de vista avanzado; según Moise (1982): el documento histórico de Heath (1897), que desarrolla los trabajos de Arquímedes, en particular "el círculo y su medida", específicamente las proposiciones primera y tercera; y la propuesta metodológica de Turégano (1989) para la noción de área.

2.3.1 Osborne: Ideas fundamentales de medición.

Osborne (1988) propone seis ideas fundamentales de medida propuesta: Asignación numérica; Comparación; Congruencia; Unidad; Aditividad; e Iteración de Arquímedes, Estas ideas, según él mismo.

Pueden ser suficientes para describir la medición de una línea, los sistemas de medición de longitud y de áreas, son similares; las ideas fundacionales se trabajan en ambos sistemas y son útiles para pensar en los nuevos sistemas de medición, como el área (p. 81).

Típicamente, la distancia es el primer sistema de medición que se enseña en la escuela, Las ideas fundamentales de la longitud son útiles para introducir los nuevos sistemas de medición, como el de área. La primera idea fundamental es la de asignación numérica:

> Para el área, esta idea fundamental tiene un análogo exacto: A una región R, se asigna un número (no negativo) es asignado llamado área. Hay una propiedad de comparación paralela. Si una región R se puede cubrir con otra región Q, entonces el área de Q es mayor que o igual al área de R. También la congruencia es estrictamente paralela; es decir, si dos regiones son congruentes, entonces tienen la misma área. (Osborne, 1988, p. 83).

Con respecto a las unidades de medida, Osborne (1988) comenta que: "Podemos definir una unidad, como una milla cuadrada, una hectárea, o un centímetro cuadrado, para la medición de área o simplemente utilizar una unidad arbitraria" (p. 83).

2.3.2. Moise: Regiones poligonales y sus áreas.

***2.3.2.1.* Los postulados de área.** Moise (1982) define una región triangular como "una figura que es la unión de un triángulo y su interior" (p. 209) y agrega que: "los lados del triángulo se llaman los lados de la región y los vértices del triángulo se llaman vértices de la región". (p.209)

2.3.2.1.1 Regiones poligonales. Moise (1980) se refiere a una región poligonal como:

> Una figura plana que puede expresarse como la unión de un número finito de regiones triangulares, de tal modo que si dos de las regiones triangulares se intersectan, su intersección es una frontera o un vértice de cada una de ellas.
>
> No existe algo especial con respecto al modo en el que una región poligonal se puede cortar en regiones triangulares, si este proceso se puede hacer para una figura en particular, se puede hacer en un número infinito de formas.

2.3.2.1.2 Postulados que rigen la función área. Los postulados que, según Moise (1982), rigen la función área son:

1. α es una función de $\mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\mathfrak{R}$ es el conjunto de todas las regiones poligonales y $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales.
2. Para cada región poligonal R, $\alpha R>0$
3. *El postulado de congruencia*. Si dos regiones triangulares son congruentes, entonces tienen la misma área.
4. *El postulado de aditividad*. Si dos regiones poligonales se intersecan únicamente en aristas y vértices (o no se intersecan en absoluto), entonces el área de su unión es la suma de sus áreas.
5. *El postulado de unidad.* El área de una región rectangular es el producto de su base por su altura.

(p. 210)

2.3.2.1.3. Región cuadrada. Moise (1982) define una región cuadrada como:

… la unión de un cuadrado y su interior. Las regiones rectangulares se definen de ese mismo modo. Una manera de fijar la unidad de medida es tomar el ángulo enunciado como postulado, El área de un cuadrado con lado 1 es igual a 1.

(p. 211).

2.3.2.2. Complejos y sus áreas de fórmula.

Sea una región poligonal R, expresada como la unión de un número finito de regiones triangulares, que se intersectan únicamente en fronteras y vértices. El conjunto ***K*** cuyos elementos son las regiones triangulares se llama un complejo, al que se denomina una triangulación de R.

Por lo tanto, R y K son objetos bastante diferentes, R es un conjunto infinito de puntos y K es un conjunto finito de regiones triangulares.

Para construir la función de área, Moise (1982) establece, como una definición, que el área de un triángulo es $\frac{1}{2}$ *bh*. El autor aclara que para evitar confusión entre la función de área que se establece finalmente así y el aparato que se usa en el proceso, llama a éste el *área de fórmula* y lo define oficialmente del modo siguiente: "El área de fórmula de un triángulo es la mitad del producto de cualquier base por su correspondiente altura." (p. 229). Y agrega que: "El área de fórmula de un complejo es la suma de las áreas de fórmula de sus elementos". (p. 229).

2.3.3 Heath: Las mediciones de un círculo

Heath (1897) presenta de la siguiente manera la primera proposición de Arquímedes: "el área de cualquier círculo es igual a un triángulo rectángulo en el que uno de los lados entorno al ángulo recto es igual al radio, y el otro a la circunferencia, del círculo". (p. 91).

Con respecto a la tercera proposición de Arquímedes, Heath (1897) expone que: "La relación de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es menor que $3\ \frac{1}{7}$, pero mayor que $3\frac{10}{71}$". (p. 93) (véase Apéndice 1).

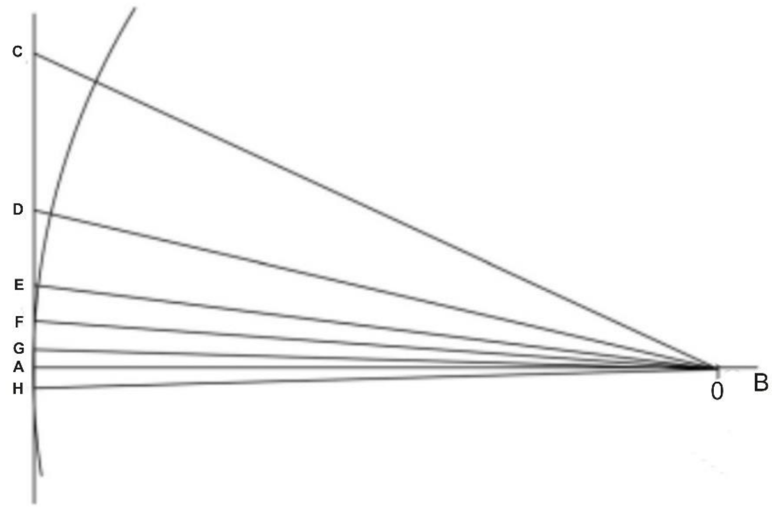


Figura 2.1 Tercera proposición de Arquímedes

2.3.4 Turégano: propuesta metodológica de noción de área.

Turégano (1989) presenta 13 propuestas metodológicas para subsanar las dificultades didácticas y teóricas que surgen en la adquisición del concepto cualitativo de área.

En la presente investigación se trabajó con los estudiantes la propuesta ocho, conformada por cinco ejercicios que consistieron en hallar polígonos equivalentes a uno dado (véase apéndice 2):

1. Rombo – Rectángulo.
2. Cuadrado – Triangulo y paralelogramo.
3. Hexágono regular – Paralelogramo.
4. Pentágono regular – Trapecio.
5. Cortando un cuadrado por sus diagonales - Rectángulo, paralelogramo, trapecio isósceles y triangulo isósceles.

Para la presente investigación se tomó en cuenta el estudio del “tránsito natural noción-concepto-definición para una de las ideas centrales de la Matemática: “*El área de una región”* (Turégano, 1993, p. 11), lo que nos permitió obtener información acerca de la relación lenguaje-comunicación-adquisición en el proceso educativo en sordos.

2.4 Método

La investigación, de corte cualitativo (Stake, 2010) tuvo como prioridad la observación de la LSM aplicada a las matemáticas, específicamente a la noción de área en escenario empírico y en tiempo real de enseñanza.

2.4.1 Los tres procesos de la investigación.

La noción de área se consideró en tres procesos: la enseñanza, la indagación y la investigación.

Para el proceso de enseñanza realizado con un grupo de tres estudiantes sordos, se diseñaron, aplicaron y evaluaron actividades referentes a tres grandes contenidos:

- Área de figuras planas elementales;
- Área y perímetro de polígonos regulares e irregulares; y
- Número Pi, longitud de la circunferencia y área del círculo.

La mayor parte del tiempo se contó con el apoyo de una intérprete, también investigadora.

El proceso de indagación, centrado en la comunicación entre pares, consistió en poner en práctica la comunicación entre los tres estudiantes relativa a contenidos desarrollados en el aula a efecto de propiciar el entendimiento de nociones o acciones de dudas no aclaradas por el investigador durante el desarrollo de la actividad, los cuales presentaron desde el inicio de la investigación una competencia lingüística en LSM diferenciada. Mediante sus diálogos se observaron: la adquisición de las nociones implicadas en los temas enseñados, la utilización de las señas construidas e impacto de la comunicación entre pares sobre la enseñanza de los contenidos.

El proceso de investigación consistió en realizar entrevistas individualizadas y en LSM a los estudiantes, las cuales se diseñaron con base en los tres grandes temas en foco.

Cada entrevista de investigación tuvo como columna vertebral una entrevista semiestructurada que, durante su aplicacion, permitió cambiar, adaptar u omitir las preguntas previstas según el curso de las respuestas dadas por los estudiantes. El interrogatorio fue mediado por la interprete, cuya participación se fue buscando disminuir con el aumento de la competencia lingüística del investigador (véase la Tabla 2.1).

Tabla 2.1
Ejemplo de entrevista semiestructurada

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre del Estudiante:</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td>Objetivo general: Obtener datos en cada una de las tres etapas de la investigación: Área de figuras planas elementales, Área y perímetro de polígonos regulares y Número Pi, longitud de la circunferencia y área del círculo.</td><td colspan="2">Contenido: Triángulos y cuadriláteros, área y perímetro, área y perímetro de polígonos regulares e irregulares, área de fórmula, Equidescomposición de figuras, triangulación, número Pi, longitud de la circunferencia y área del círculo.</td></tr>
<tr><td>Entrevistador: Gerardo Estrada</td><td colspan="2">Lugar: Biblioteca “Jerzy Plebanski”;</td></tr>
<tr><td colspan="3">Perfil entrevistado:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Técnica de registro: Tarjetas de trabajo, fotografía y Video</td></tr>
</table>

Guion	
Tema	**Pregunta**
Área	¿Qué es el área?
Área de cuadriláteros y triángulos	**¿Cómo obtienes el área de un cuadrado?** Se le muestra al estudiante un rectángulo de 10cm de base y 8 cm de altura y se le pide que obtenga la medida de su área
	¿Cómo obtienes el área de un triángulo?
Equidescomposición de figuras	**¿Dos figuras de diferente forma pueden tener la mima área?** comprobar que dos figuras tienen la misma área
Área y perímetro de polígonos	**¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro?** Se le presenta al estudiante un polígono irregular y se le pide que señale el área y el perímetro y después uno recortado.
	¿Cómo se puede obtener el área de un polígono?
Longitud de circunferencia	**¿Qué es la longitud de circunferencia?** Que obtenga la LC del círculo presentado
Pi	**¿Qué es el Pi?**
Área del circulo	**¿El círculo tiene área?** Se le pide al estudiante que obtenga el área de un circulo dado
	¿Un círculo puede tener la misma área de un triángulo?

Del 100% de las sesiones realizadas en este proyecto, el 76% (38) correspondieron al proceso de enseñanza, mientras que el 24% (12) restantes se dividió de manera equitativa entre el proceso de indagación y el de investigación.

2.4.2 Instrumentos de observación y registro.

Los instrumentos utilizados permitieron centrar la atención en el aula, en la comunicación entre pares, en las entrevistas y orientaron el diseño de las actividades con base en los resultados arrojados. En la indagación se aplicaron instrumentos para valorar la adquisición cualitativa de la noción de área así como la pertinencia de las señas construidas a la hora de ser usadas por los estudiantes en actividades previamente diseñadas.

A fin de realizar el análisis de la lengua LSM misma, un instrumento sumamente importante para la investigación, a fin de poder realizar el análisis de la lengua misma, fue la transcripción, la cual se aplicó en dos de los tres procesos: la indagación e investigación. La transcripción se realizó en glosas (Barojas, 2014) (véase la Tabla 2.2, como ejemplo) e interpretación al español.

Las técnicas de registro de información que se utilizaron fueron: videograbación, fotografías, uso del pizarrón, papel y lápiz. En los tres procesos mencionados teniendo presente los objetivos se filmaron las sesiones que se consideraron pertinentes, dando al video obtenido el carácter de fuente de información.

Los videos facilitaron la observación y el análisis, de acuerdo a los objetivos programados para cada una de las sesiones; son testimonios que permitieron dar seguimiento al proceso evolutivo del uso de las señas construidas en torno a la noción de área así como de la adquisición de los contenidos matemáticos necesarios para el avance de la investigación en foco.

Dadas las características de la población en estudio y los objetivos de la investigación, el medio de observación es visual, y la planeación de actividades debido tomar en cuenta la LSM; con apoyo en recursos tecnológicos (cámara de video y fotográfica).

En el diseño de las actividades se establecieron los objetivos de cada sesión, lo cual definía los momentos para capturar la información mediante la videograbación.

Tabla 2.2

Fragmento de Glosa correspondiente a la entrevista realizada al estudiante

Caso: Mx		**Fecha**: 19 de noviembre de 2015	**Lugar**: Biblioteca "Jerzy Plebanski"
Tema: Noción cualitativa de área			
Tiempo	**Part**	**Glosa**	
0:00	Inv	AQUÍ YA TEMA ÁREA A- R- E- A (Dactilología) SEÑA ÁREA TU SABER COMO ÁREA EJEMPLO (Max interrumpe)	
0:10	MX	ÁREA	
0:30	Inv	DIBUJO YA TU POR FAVOR AREA COMO TU EXPLICAR MAESTRO ASIGNAR	
1:30	MX	NO PREOCUPAR ÁREA SIGNIFICAR HAY ADENTRO ALTURA BASE PORQUE HAY ALTURA CENTIMETRO BASE CENTIMETRO POR ESO (Exp. Corporal) EJEMPLO IDEA (Se queda pensando) EJEMPLO MESA ESA (señala la mesa que está frente a él) MESA HAY ÁLTURA (se siente interrumpido por el maestro) ALTURA HAY SI HAY (Exp. Facial) YA (señala una lateral de la mesa) (se frustra porque el maestro no presta atención-visual)	
1:51	MX	(señala el espacio donde usó la seña de área) ÁREA SIGNIFICAR ADENTRO ALTURA BASE YA YO IDEA EJEMPLO ESTA (señala la mesa frente de él) MESA HAY ALTURA BASE SI PORQUE MIRAR AQUÍ (señala un espacio de la mesa) YO VER ESPACIO VER (señala una lateral de la mesa) ALTURA SENTIR UNO (se queda pensando) CIEN CENTIMETRO YA AQUI (señala la parte de la mesa cercana a él) SENTIR OCHO CENTIMETRO YA CANTIDAD (usa con las dos manos al mismo tiempo, el clasificador de haciendo referencia que va a hacer una operación con las dos cantidades que menciona) CIEN POR OCHO ESO USAR HAY PORQUE ÁREA MUCHO SOBRA CUADRADO CUADRADO (con movimiento de arriba para abajo haciendo referencia de los cuadritos de 1 cm de una tabla) PARECER (expresión Facial) TABLA DE DOBLE ENTRADA (expresión facial de pregunta) ESO PORQUE SOBRA CIEN RESPONDER CIENTOCHO ESO FILA (Usa la seña hacia la mesa, como referencia de un cuadrado que adentro contiene cuadritos) EJEMPLO OTRO EJEMPLO (Se queda pensando) CUADRADO C-U-A-D-R-A-D-O (Dactilología) CUADRADO HAY ALTURA BASE SI CLARO PORQUE EJEMPLO (Exp. Facial) DOS BASE DOS CENTIMETRO EJEMPLO ESO CANTIDAD (usa con las dos manos al mismo tiempo, el clasificador de… haciendo referencia a los espacios para hacer la operación de multiplicación de las cantidades mencionadas) ESO DOS POR DOS RESPONDER CUATRO HAY SOBRAR CUADRADO AREA CUADRADO CUADRADO CUADRADO (Clasificador de cuadritos y realiza un movimiento semicircular)	

2.4.2.1 La interpretación de la glosa

La glosa, cuyo ejemplo se presenta en la Tabla 2.2, es en cierta forma la manera de expresar por escrito "textualmente" la LSM, sin embargo, a la vista de cualquier persona ajena a esa lengua, la glosa puede carecer de sentido, por lo que es necesario un proceso de interpretación que permita a cualquier individuo, no familiarizado con la LSM, acceder a lo ocurrido mediante una lectura de su descripción.

La interpretación es un ejercicio que requiere, de quien la realiza, un esfuerzo para hacer que los diálogos que presenta se vuelvan comprensibles a cualquier lector, apegándose de la manera más fiel posible a lo expresado por el estudiante. Para realizarla es necesario tomar en cuenta el contexto del intercambio del que se realiza la glosa, así como las acciones que podrían acompañarla.

Por lo tanto, se consideró para la presentación de la investigación, la necesidad de realizar la interpretación en cada uno de los textos referentes a los diálogos de los estudiantes. Sin embargo, no debe dejarse de lado esa interpretación obedece a, por así decirlo, la glosa "procesada".

2.4.3 El escenario empírico.

Para la enseñanza, indagación e investigación se utilizó uno de los salones de la Biblioteca de Física, Matemáticas y Matemática Educativa, del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) y en los jardines de la misma institución.

2.4.4 Participantes.

La investigación se dirigió a una población Sorda con características heterogéneas. Participaron tres jóvenes con edades de 19 a 24 años, con pérdida auditiva profunda, bilateral y prelocutiva, así como un hipoacusico implantado. Los tres jóvenes son usuarios de LSM, con distintos grados de competencia lingüística y comunicativa en razón de que la adquirieron en distintos momentos cronológicos de sus vidas y en distintos lugares.

De los tres estudiantes, dos realizaron estudios de secundaria en el sistema no escolarizado, multigrado, del Instituto Nacional de Educación para Adultos (INEA); uno concluyó la primaria en el mismo organismo. En la Tabla 2.3 se resumen las características particulares de cada uno de los integrantes del grupo que permiten conocer su edad, su condición de sordera además del grado de pérdida auditiva, tipo de sordera y edad de cada estudiante al ingresar al proyecto de investigación, nivel de competencia lingüística y comunicativa, edad de inicio en el uso de LSM y nivel de estudios académicos (Barojas 2014).

Para los fines de esta investigación identificamos a cada uno de los participantes mediante las primeras letras de sus nombres: Mx, Os y Br. Para caracterizar las diferencias respecto a la adquisición de las nociones en foco se propuso como condición identificar a que nivel de competencia lingüística y comunicativa correspondía el uso de las LSM por cada estudiante, para lo que se identificaron tres niveles: Alto (A), Medio (M) y Bajo (B).

Tabla 2.3
Características auditivas de los participantes

Codificación	Edad	Características	Nivel de competencia lingüística y comunicativa	Inicio LSM	Escolaridad INEA
Mx	19	Pérdida auditiva profunda, bilateral y prelocutivo.	A	2007	Primaria concluida
Os	24	Pérdida auditiva profunda, bilateral y prelocutivo	B	2004	Secundaria concluida
Br	22	Hipoacúsico implantado	M		Secundaria concluida

2.4.5 Organización y operación en el aula.

Las sesiones de enseñanza en el aula se basaron en la aplicación de las actividades previamente diseñadas, las cuales incluían ejercicios en papel, pizarrón, áreas verdes y la utilización de material concreto cuando fue pertinente.

2.4.5.1 Diseño de actividades.

Las actividades se diseñaron previamente con una visión general que se ajustaba de manera particular a los resultados y observaciones seguidos de su aplicación misma. La Tabla 2.4 muestra un ejemplo de la planeación de las actividades en el aula.

Tabla 2.4
Ejemplo de planeación de las actividades

<table>
<tr><td>Viernes 13 de marzo de 2015</td><td colspan="2">Tema: Equivalencia de polígonos</td><td>Estudiantes: Mx, Os y Br</td></tr>
<tr><td colspan="2">Material: Tarjetas de trabajo, lápiz, regla y compás</td><td colspan="2">Duración de la actividad: 30 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Palabras Clave en LSM: Área, Diagonal, Rombo, Rectángulo e igual</td><td>Proceso: Enseñanza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo General: subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan para la adquisición del concepto cualitativo de área.</td><td colspan="2">Objetivo Particular: Que los estudiantes reconozcan polígonos equivalentes a uno dado.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividad
1ra Secuencia - Estimación: Se le presenta a los estudiantes un cuadrado acompañado de cuatro figuras diferentes entre sí, congruentes a él y se les pide al estudiante que infieran si el cuadrado comparte la misma medida del área con cada una de las cuatro figuras.

2da Secuencia – Utilización del compás: Se le pide al estudiante que corrobore su respuesta anterior utilizando el compás como instrumento de comparación de medidas.

3ra Secuencia – La diagonal: Los estudiantes trazarán en el cuadrado las diagonales para descomponerlo en cuatro triángulos, realizando la misma actividad en las cuatro figuras presentadas, identificando así la congruencia entre ellas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observaciones: Mediante la actividad, es importante que los estudiantes se percaten de que: Cortando un cuadrado por sus diagonales, se puede pasar a un rectángulo, paralelogramo, trapecio isósceles y triángulo isósceles.</td></tr>
</table>

2.4.5.2 Instrumentos.

En la enseñanza, los estudiantes hicieron uso de instrumentos de medición y construyeron de figuras geométricas: regla (con y sin graduación), escuadra, compás, metro y cinta métrica los cuales se requirieron después en los procesos de indagación e investigación.

El material concreto se propuso en varias de las actividades, generalmente al inicio de algún contenido nuevo para los estudiantes.

2.4.6 Construcción de las señas.

La búsqueda en diversos diccionarios, impresos y digitales, nacionales e internacionales, permitió conocer la existencia o no de las señas referentes a las nociones de área. Las existentes resultaron ser sumamente escasas, dando pie a la construcción de las inexistentes. Esa construcción la realizaron los estudiantes, con el auxilio de la intérprete y tras un proceso basado en actividades diseñadas con esa finalidad.

En ocasiones, algunas de las señas fueron motivo de debate entre los estudiantes, pero siempre llegaban a algún acuerdo. Sin embargo, mediante la utilización de las señas acordadas, y tal vez por una mayor comprensión de algún concepto, algunas de las señas construidas sufrieron modificaciones previas a su consolidación.

2.4.6.1 Descripciones de las señas construidas.

En los capítulos tercer, cuarto y quinto se plasman las señas construidas pertinentes a cada tema trabajado, de modo que puedan ser comprendidas fácilmente, se realiza para tal construcción una descripción en la que se emplean las siguientes especificaciones: la mano 1 se refiere a la mano dominante, mientras la 2 a la otra.

Se utilizaron las siguientes expresiones: dedos extendidos (véase Figura 2.2), dedos doblados (véase Figura 2.3), dedos abiertos (véase Figura 2.4), palma frente al signaste (véase Figura 2.5).

Figura 2.2 Dedos extendidos/ cerrados

Figura 2.3 Dedos abiertos/ extendidos

Figura 2.4 Dedos doblados

Figura 2.5 Palma frente al signante

2.4.6.2 Evaluación.

Durante el proceso de indagación se pudo observar la practicidad de la seña construida en función de su utilización y pertinencia en los diálogos de los estudiantes con respecto a las nociones matemáticas en foco.

2.4.6.3 Registro.

Una vez consolidadas, las señas se realizó el registro en video y fotografía. La fotografía se acompañó de una descripción que permitiera a cualquier lector utilizar la seña en cuestión.

2.5 Modelo de comunicación en el aula

El modelo obtenido por Barojas (2014) considera la interacción de los tres actores, estudiantes, intérprete e investigador, que intervienen en la realización de los actos comunicativos durante el desarrollo de las actividades en el aula (véase la Figura 2.6).

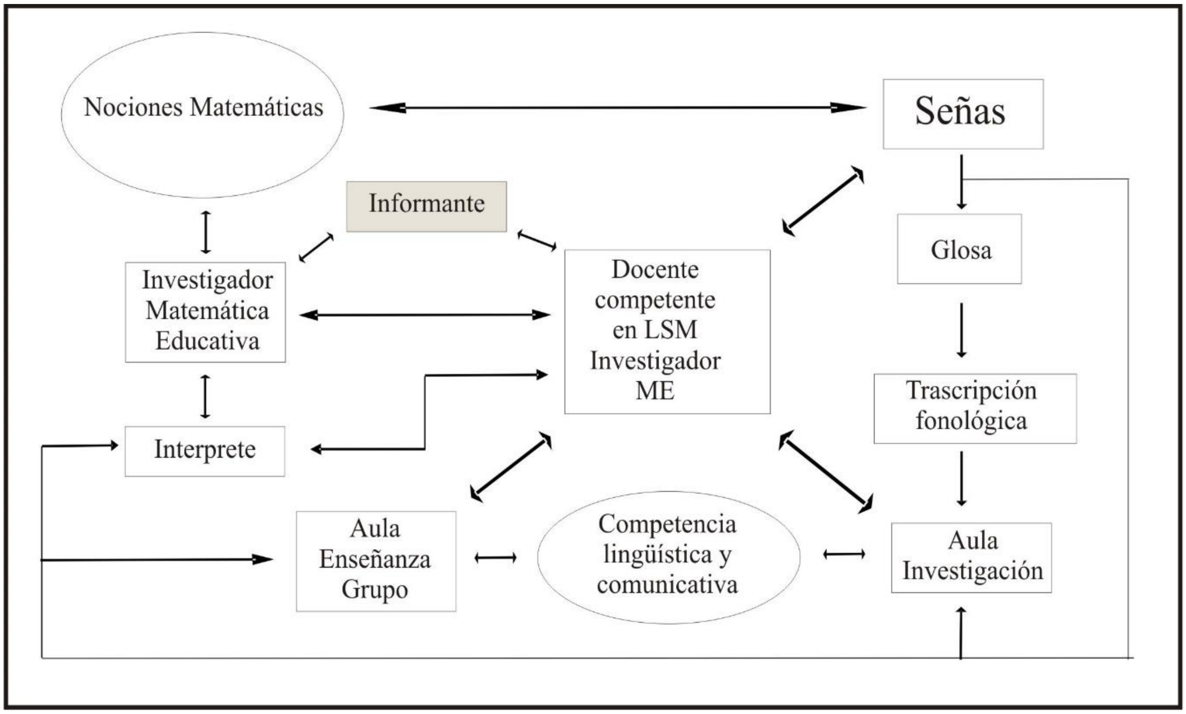


Figura 2.6 Modelo de comunicación en el aula

2.5.1 Intérprete

La participación constante de la intérprete la convirtió en una parte fundamental de la investigación. En un primer momento, permitió tener un acercamiento básico con la comunidad sorda, diluyendo la barrera de comunicación existente, y facilitando la aproximación a la realidad social que vive el sordo y específicamente al contexto, historia y características de los tres estudiantes participantes en esta investigación.

El papel de la intérprete consistió en:

- Mediar entre el estudiante sordo y el investigador en las fases de enseñanza, indagación e investigación (las entrevistas).
- Apoyar en la interpretación al revisar los videos de entrevistas.
- Apoyar en la construcción de señas por parte de los estudiantes.

Capítulo tercero

Procesos de adquisición I: Área de figuras planas elementales

El presente capítulo expone los primeros momentos de la investigación, en él se describe el análisis de las actividades realizadas en el curso de 18 sesiones de 3 horas cada una, para el tratamiento de las ideas fundamentales, el área de fórmula y construcciones con regla y compás.

El contenido se distribuye en tres momentos: la presentación de las actividades realizadas, la descripción de las señas construidas durante el proceso y el análisis de la comunicación entre pares, así como el de una entrevista individual correspondientes a la indagación e investigación, respectivamente.

3.1 Triángulos y cuadriláteros

Las actividades desarrolladas se iniciaron con el estudio del área de cuadriláteros con especial énfasis en el cuadrado y el rectángulo en su definición elemental. El tratamiento de rombos y trapecios se realizó en actividades relacionadas con la noción de equivalencia que se presentan en el capítulo cuarto. "Por una región cuadrada entendemos la unión de un cuadrado y su interior. Las regiones rectangulares se definen del mismo modo." Moise (1982)

Respecto al triángulo, el foco fue, por una parte, en la noción de "área de fórmula" Moise (1982, p. 229), que se desprendió de actividades relacionadas con la noción de la diagonal de un rectángulo; y, por la otra, en las definiciones y tratamiento de la noción del área correspondiente a la figura considerando su definición en función de la magnitud de sus lados (equilátero, isósceles y escaleno), en particular la del triángulo rectángulo.

3.1.1 Medición. Ideas fundamentales.

Las ideas fundamentales, que ya se han presentado en el capítulo segundo, por su naturaleza se estarán trabajando a lo largo de toda la investigación. Se presentan resultados de actividades relacionadas con las ideas de *asignación numérica*, *aditividad* y *congruencia*.

3.1.1.1 Asignación numérica.

A una región R se asigna un número no negativo denominado el área

3.1.1.1.1 Actividades.

Se desarrollollaron dos actividades con la finalidad de trabajar la obtención del área en rectángulos mediante el conteo de unitarios, así como la identificación de su base y altura.

3.1.1.1.1.1 Obtención del área de un rectángulo mediante el conteo de cuadros.

Objetivo: Que lograran obtener el área de un rectángulo haciendo uso del conteo de cuadros al interior del mismo.

Desarrollo: Se les presentaron tarjetas con figuras rectangulares de las cuales debían obtener el área mediante el conteo de cuadritos cuando la figura estaba cuadriculada (véase la Figura 3.1) o utilizando cuadritos de papel (1 cm^2) con los que cubrían la figura para después contarlos (véase la Figura 3.2).

Conforme se avanzó en la actividad, las figuras presentadas fueron siendo cada vez más grandes, lo que hacía que calcular el área de esa forma fuera un trabajo cada vez más tedioso para los estudiantes.

Resultados: El desarrolla de la actividad no revistió dificultades evidentes. Al concluirla, los estudiantes lograron obtener el área de cada rectángulo presentado, haciendo uso del conteo.

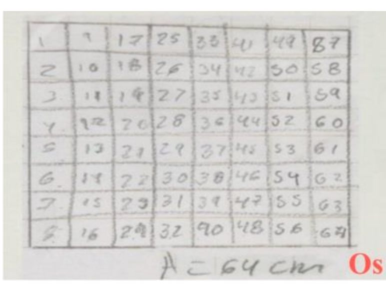


Figura 3.1 Uso del conteo para la asignación numérica del área de una figura rectangular

Figura 3.2 Uso del relleno con cuadros de un centímetro por lado para la asignación numérica del área de una figura rectangular

3.1.1.1.1.2 identificación de la base y la altura.

Objetivo: que los estudiantes identificaran la base y altura de cada rectángulo presentado, para después obtener con esos datos el área de cada uno.

Desarrollo: Se les presentaron tarjetas con figuras rectangulares de las cuales debían identificar su base y su altura, para posteriormente darle a cada una de esas magnitudes una asignación númérica.

En consecuencia, con la primera actividad, se utilizarton figuras rectangulares cuadriculadas (véase la Figura 3.3) y se continuó con el uso de cuadros como unidad de medida (véase la Figura 3.4).

Resultados: El contenido no revistió dificultades para que fuera adquirido, lo cual dio paso a la introducción de los dos primeros conceptos referentes al tema en foco, a la construcción de sus respectivas señas: *base* (véase la Figura 3.5 en el apartado 3.2) y *altura* (véase la Figura 3.6 en el apartado 3.2), así como a sus simbolizaciones respectivas. “b” y “h”.

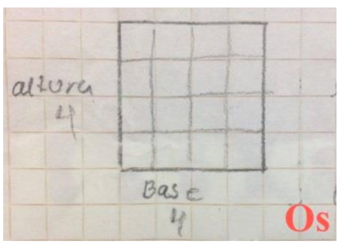


Figura 3.3 Identificación de base y altura en figuras rectanguares cuadriculadas

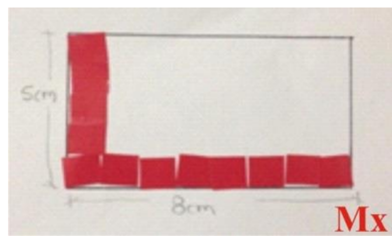


Figura 3.4 Identificación de base y altura mediante el uso de cuadros

3.1.1.2 Aditividad.

Como se señaló en 2.3.2.1, dos regiones poligonales que se intersectan únicamente en fronteras y vértices (o no se intersectan en absoluto), el área de su unión es la suma de sus áreas

3.1.1.2.1 Actividad (en espacio externo al aula).

Con el fin de acercar más a los estudiantes a la noción cualitativa de área, se les propuso la obtención de medidas de áreas en regiones parciales, tanto en papel como en superficies externas al aula; se les pidió que obtuvieran sólo la medida de las regiones parciales.

Objetivo: Que construyeran una figura sobre pasto con base en un croquis para posteriormente obtener el área respectiva.

Desarrollo: Se les proporcionó una tarjeta con el croquis de un hexágono irregular, el cual presentaba las medidas de tres de sus lados (véase la Figura 3.7. A continuación se les pidió que Construyeran a tamaño real en el césped la construcción de la figura presentada en la tarjeta, para lo cual se les proporcionaron: lazo, estacas, metro y escuadras. Una vez realizada la construcción solicitada (véase la Figura 3.8), se les pidió que obtuvieran el área respectiva.

Resultados: Mx realizó con precisión la construcción del polígono, siguiendo las indicaciones del croquis. Al terminar la construcción obtuvo de forma correcta la medida del área del polígono. Al preguntarle por el procedimiento que utilizó para la obtención del área, hizo referencia a un procedimiento en el que interviene la aditividad como elemento para la obtención del área total de la figura, aunque en un principio manifestó confusión al hacer referencia a una medida en centímetros cuadrados, situación que él mismo se corrigió de inmediato (véase la Tabla 3.1).

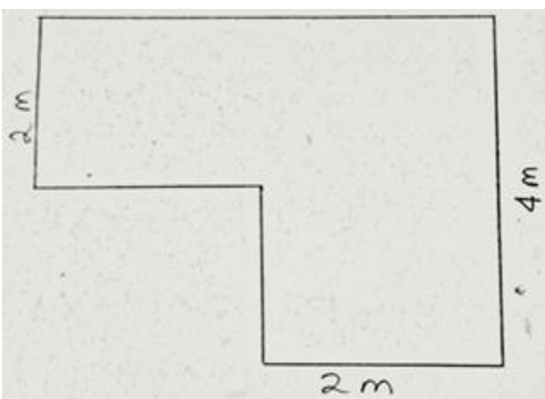


Figura 3.7 Croquis de la construcción solicitada

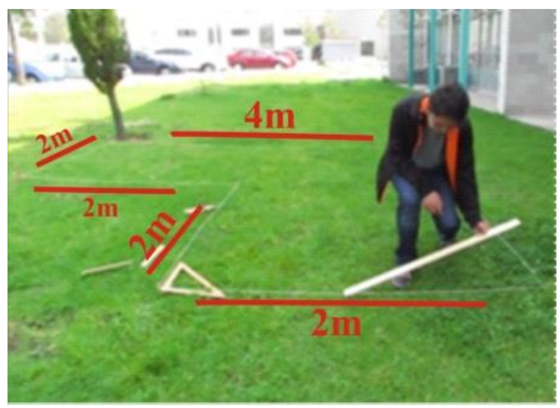


Figura 3.8 Construcción realizada en el suelo.

Tabla 3.1
Explicación de Mx respecto al proceso de aditividad en la Figura 3.7

Int	Diálogo
Inv	¿Cuánto es el área de la figura y por qué?
Mx	Mira, la base es cuatro metros, la altura son cuatro metros, hago la multiplicación y serían dieciséis centímetros cuadrados, perdón, dieciséis metros cuadrados en todo el cuadrado completo, pero le restamos esa parte del cuadrado (*señaló el espacio vacío*) porque todo el cuadrado tiene adentro varios cuadros y ese cuadro vacío mide dos metros de base y dos metros de altura, los multiplico y me dan cuatro metros, a los dieciséis metros de todo el cuadro le resto esos cuatro metros del cuadro vacío y por eso me dan doce metros.

3.1.1.3 Congruencia.

Si dos regiones son congruentes entonces tienen la misma área.

3.1.1.3.1 Actividad.

Objetivo: Que identificaran figuras congruentes entre sí.

Desarrollo: Se comenzó presentándoles varias figuras que al ser descompuestas podían formar otras que fueran congruentes a las primeras (véase la Figura 3.9), para lo cual se hizo uso de regla y compás.

La siguiente parte de la actividad consistió en darles una hoja de trabajo con una serie de figuras en desorden, las cuales debían unir con su par congruente (véase la figura 3.10a) para lo cual podían hacer uso solamente del compás.

Resultados: La actividad no les generó alguna dificultad evidente y las figuras fueron unidas correctamente (véase la Figura 3.10b). Con la realización de esta actividad, se fincaron las bases para tratar más adelante la composición – descomposición de figuras con un mayor grado de complejidad.

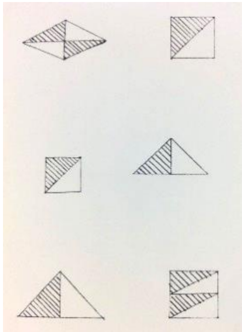


Figura 3.9 Figuras equivalentes tratadas en el aula

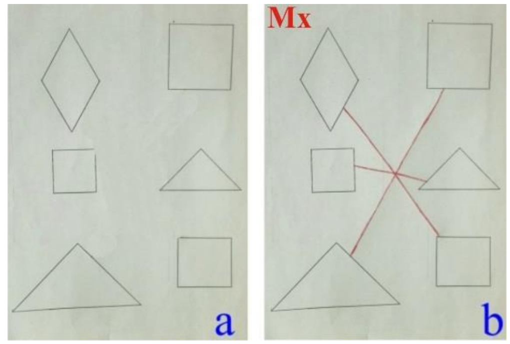


Figura 3.10 Correspondencia de figuras diferentes con una misma área

3.1.2 Área de fórmula

Una manera de fijar la unidad medida de es tomar el siguiente enunciado como postulado: *El área de un cuadrado con lado 1 es igual a 1 y la fórmula de área para rectángulos como postulado: El área de una región rectangular es el producto de su base por su altura.* (Moise, 1982, pp. 211-12)

3.1.2.1 Actividades.

Se desarrollaron dos actividades correspondientes al tratamiento del área en rectángulos y triángulos.

3.1.2.1.1 Rectángulo.

3.1.2.1.1.1 Aplicación del área de fórmula en rectángulos.

Objetivo: Que obtuvieran el área de un rectángulo mediante la utilización del área de fórmula.

Desarrollo: Consistió en comparar el resultado que se obtenía de sumar toda la cuadrícula al interior de una figura rectangular con el obtenido al multiplicar la base por la altura. De la comparación pudieron advertir que ambos resultados coincidían, ya que realizar la multiplicación de ambos elementos equivalía a realizar la suma de toda su cuadrícula interna.

A partir de ese momento se sustituyó la práctica de sumar la cuadrícula interior de una figura por la utilización del área de fórmula: $b \times h$, con la cual los estudiantes encontraban la medida del área de cada rectángulo presentado (véase la Figura 3.11).

Resultados: Los tres estudiantes lograron desplazar el conteo de cuadros sustituyéndolo por la aplicación del área de fórmula en los rectángulos presentados.

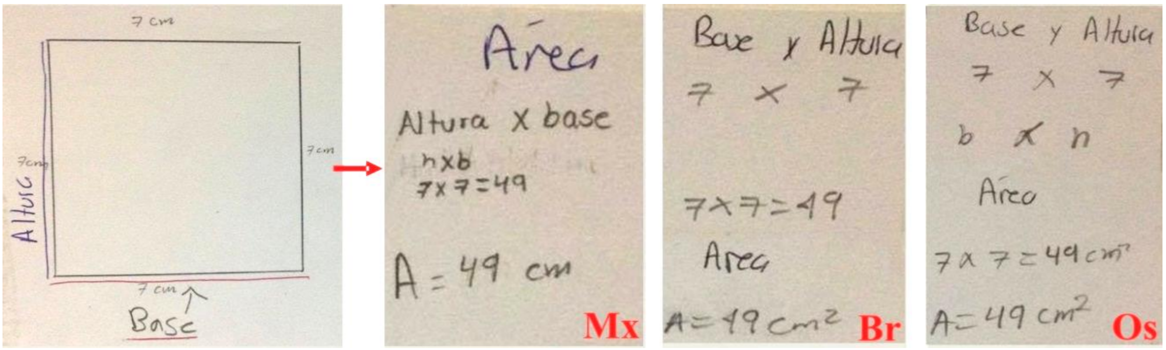


Figura 3.11 Aplicación del área fórmula en una figura rectangular

3.1.2.1.1.2 La diagonal del cuadrilátero como generadora del triángulo.

Objetivo: Transitar del trabajo con el rectángulo al tratamiento del triángulo mediante el uso de la *diagonal del cuadrilátero*.

Desarrollo: La transición al tema de triángulos se dio mediante la utilización de los rectángulos y la introducción de un nuevo elemento: *la diagonal del cuadrilátero*, para la cual se construyó una seña (Véase la Figura 3.12, en el apartado 3.2) y se utilizó para dividir cada rectángulo en dos triángulos iguales (Véase la Figura 3.13).

La actividad permitió a los estudiantes advertir que al partir una figura rectangular en dos partes iguales, cada parte tendría el área correspondiente a la mitad del rectángulo original y que además se daba forma a otra figura: el triángulo.

Resultados: Si bien el proceso de generación de los triángulos mediante *la diagonal* no fue sencillo, sí se logró consolidar la actividad para dar paso al tratamiento de ellos, de tal forma que la idea de la diagonal persistió no sólo como generadora de triángulos sino como un ejemplo de que una figura puede ser descompuesta para generar otra.

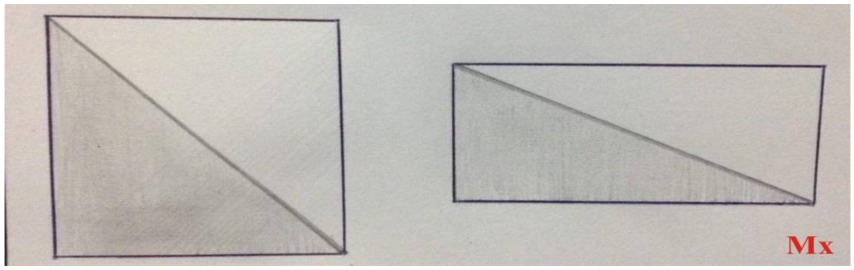


Figura 3.13 La diagonal del cuadrilátero como generadora del triángulo

3.1.2.1.2 Triángulo.

3.1.2.1.2.1 Área de fórmula del triángulo.

Objetivo: Obtener el área de un triángulo mediante su fórmula.

Desarrollo: Tomando como base el hecho ya conocido de que un triángulo es la mitad de un rectángulo, les fue sencillo construir el área de fórmula partiendo de la referente a los rectángulos, la cual se “partía” por la mitad, es decir, se dividía en dos partes iguales, resultando así la expresión: $a = \frac{(b \times h)}{2}$.

Una vez identificada el área de fórmula se les presentó una tarjeta con un rectángulo (véase la Figura 3.14a) y se les solicitó que utilizaran la diagonal para obtener dos triángulos y el área de uno de ellos (véase la Figura 3.14b)

Resultados: Con relativa facilidad, los estudiantes lograron obtener el área de un triángulo. Sin embargo, debido al procedimiento de transición que utilizamos al principio, todos los triángulos que se les presentaron eran rectángulos, lo que hacía sencilla la identificación tanto de la base, como de la altura.

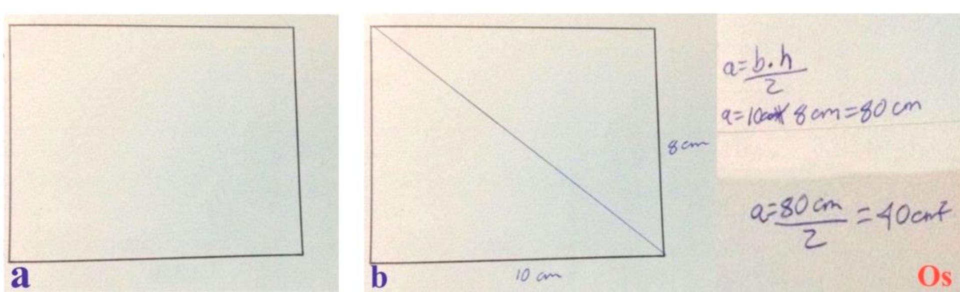


Figura 3.14 Aplicación del área formula del triangulo

3.1.2.2. Tipos de triángulos y sus elementos.

La dificultad con el tratamiento de triángulos se presentó al tratar con los no rectángulos, ya que la identificación de la altura se dificultó al confundirse regularmente con alguno de sus lados.

3.1.2.2.1. Actividades.

Se desarrollaron actividades para identificar las alturas en los diferentes tipos de triángulos.

3.1.2.2.1.1. Identificación de las tres alturas de un triángulo.

Objetivo: Se identificarán las alturas correspondientes a cada uno de los vértices de los triángulos presentados.

Desarrollo: Las actividades consistieron en la presentación de triángulos en tarjetas (véase la Figura 3.15a), de los cuales se les pidió que identificaran sus tres alturas, Al hacerlo, Mx asignó un número de identificación a cada lado del triángulo que tomó como base para identificar la respectiva altura, logró identificarlas y trazar su paralela (véase la Figura 3.15b).

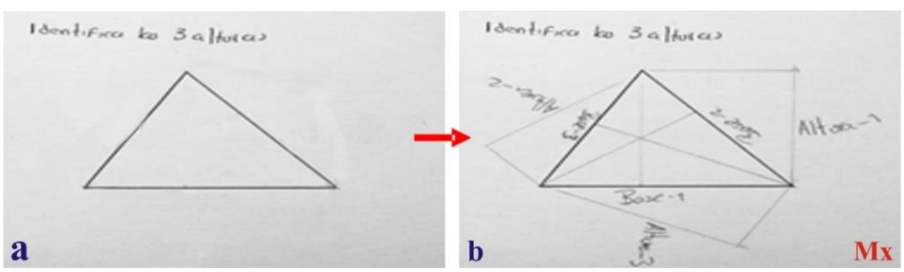


Figura 3.15 Identificación de las alturas de un triángulo

3.1.2.2.2. Aplicación de la Proposición I.37 [Euclides].

Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

3.1.2.2.2.1 Aplicación de la Proposición I.37.

Objetivo: Centrar la atención a la noción de un segmento de recta perpendicular entre dos rectas paralelas.

Desarrollo: Mediante el uso del geoplano se construyeron con ligas tres diferentes triángulos que compartían la misma base y la misma altura (véase la Figura 3.16a), para después reproducir esas construcciones en su cuadernos y obtener de ellas su respectiva área (véase la Figura 3.16b),

Resultados: Tanto Mx como Os lograron realizar sin dificultades las actividades que se diseñaron referentes a las diferentes alturas del triángulo. Sin embargo, Br, presentó desde el principio dificultades muy marcadas hacia esa identificación, las cuales en momentos parecía superar.

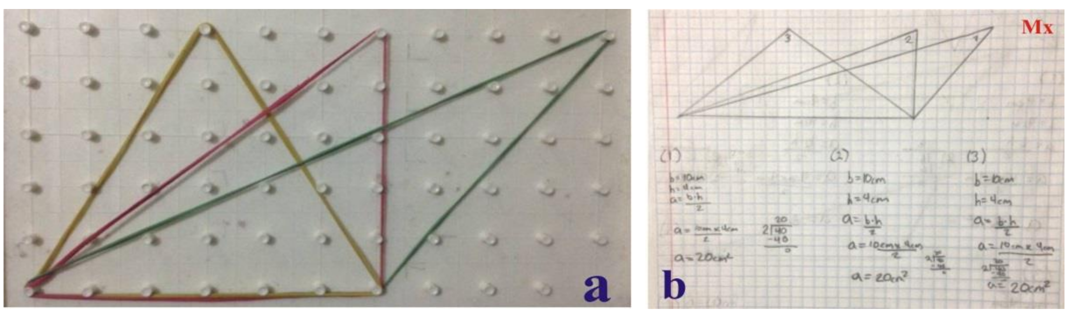


Figura 3.16 Tratamiento de la Proposición I.37

A partir de la seña de triángulo (véase la Figura 3.17, apartado 3.2), fue necesario construir las señas que nombraran los diferentes tipos de triángulos presentados: isósceles (véase la Figura 3.18, apartado 3.2), equilátero (véase la Figura 3.19, apartado 3.2) y rectángulo (véase la Figura 3.20, apartado 3.2).

3.1.3 Construcciones con regla y compás. Perpendicularidad y paralelismo.

3.1.3.1 Actividades.

Se realizaron cinco actividades de construcción con regla y compas que permitieron trabajar las nociones de perpendicularidad y paralelismo.

Objetivo: Inducir las nociones de perpendicularidad y paralelismo.

Desarrollo: Se realizaron actividades de dibujo mediante regla y compás, para resolver cinco problemas planteados en (Calderón 2003, pp. 49-65). Para su realización se construyeron además, la señas correspondientes a cada una de las nociones: paralela (véase la Figura 3.21, apartado 3.2), perpendicular (véase la Figura 3.22, apartado 3.2), punto medio (véase la Figura 3.23, apartado 3.2), rectángulo (véase Figura la 3.24, apartado 3.2) y rombo (véase la Figura 3.25, apartado 3.2).

La principal forma de comunicación con los estudiantes en el momento de la enseñanza fue mediante las acciones realizadas por el investigador, seguidas a la vez por las correspondientes, realizadas trazo a trazo, por los estudiantes.

3.1.3.1.1 Paralela

Problema: Por un punto cualquiera dado fuera de una recta, trazar a ésta una paralela (véase la Figura 3.26).

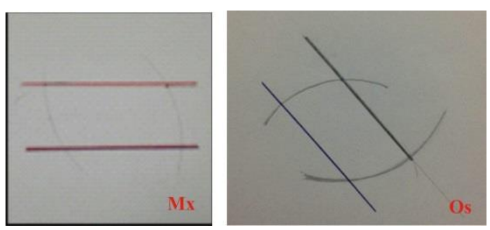


Figura 3.26 Construcción de la paralela

3.1.3.1.2 Perpendicular

Problema: Por un punto cualquiera de una recta trazar una perpendicular (véase la Figura 3.27)

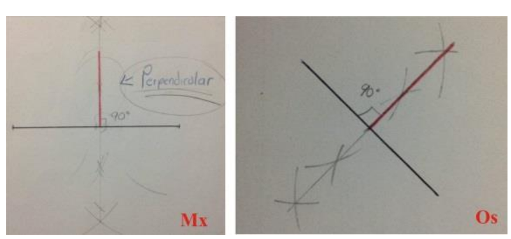


Figura 3.27 Construcción de la Perpendicular

3.1.3.1.3 Punto medio

Problema: Dividir una recta dada (sobre la línea azul) en dos partes iguales (Punto medio en círculo rojo) (ver Figura 3.28).

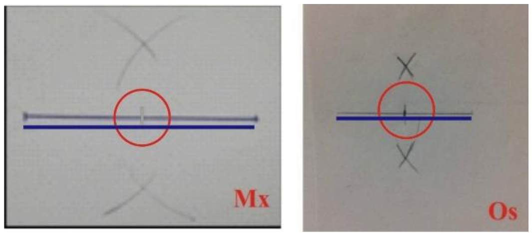


Figura 3.28 Construcción del punto medio

3.1.3.1.4 Rectángulo

Problema: A partir de una línea cualquiera (sobre la línea azul) construir un rectángulo (véase la Figura 3.29)

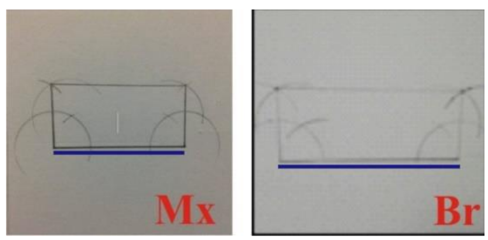


Figura 3.29 Construcción de un rectángulo a partir de un segmento de recta dado

3.1.3.1.5 Rombo

Problema: A partir de una línea cualquiera construir un rombo (véase la Figura 3.30).

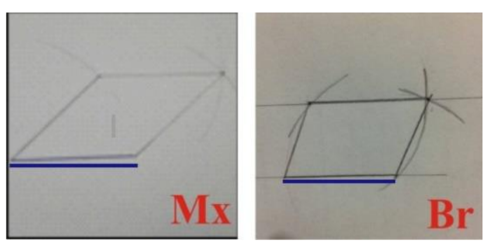


Figura 3.30 Construcción de un rombo a partir de un segmento dado

Resultados: Mx y Os no presentaron dificultades en las actividades de construcción, sin embargo para Br fue una tarea muy difícil ya que pareció no tener claro la utilización de los instrumentos, especialmente del compás, por lo que no se logró el objetivo con él, no obstante que las explicaciones se dieron tanto por parte del investigador, como por sus propios compañeros.

La actividad permitió realizar una serie de construcciones consecuentes con la finalidad de afianzar el procedimiento de construcción de cada una de las figuras

3.2. Señas propuestas (constituidas)

Describimos aquí las propuestas de señas construidas relacionadas con las nociones: ideas fundamentales, el área de fórmula y construcciones con regla y compás.

3.2.1 Base.

Base Seña bimanual simétrica, con movimiento. **Mano 2**: Todos los dedos abiertos, la palma hacia abajo, el dedo pulgar frente al signante. **Mano 1**: Los dedos meñique, anular, medio, e índice abiertos el dedo pulgar cerrado, la palma hacia abajo. **Realización de la seña:** Ambas manos frente al pecho, la mano no dominante se mantiene estática, la mano dominante con los dedos apuntando al frente, traza una trayectoria lineal bajo la mano no dominante de izquierda a derecha.	

Figura 3.5 Descripción de la seña: BASE

3.2.2 Altura.

Altura Seña bimanual asimétrica, con movimiento **Mano 2:** Los dedos meñique, anular y medio, cerrados, los dedos índice y pulgar abiertos formando una L la palma contra el signante. **Mano 1:** Los dedos meñique, anular, medio, e índice, cerrados, el dedo pulgar abierto, la palma contra el signante. Realización de la seña: ambas manos frente al pecho, la mano no dominante se mantiene estática, la mano dominante traza una trayectoria lineal hacia arriba paralela al dedo índice de la mano no dominante.	

Figura 3.6 Descripción de la seña: ALTURA

3.2.3. Diagonal.

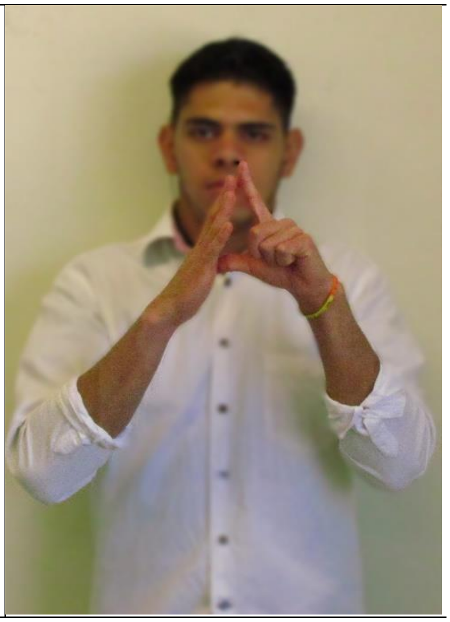
Diagonal Seña bimanual asimétrica, con movimiento **Mano 2:** Los dedos meñique, anular y medio, cerrados, los dedos índice y pulgar abiertos formando una L la palma contra el signante. **Mano 1:** En inclinación de 45º con la palma hacia abajo Todos los dedos extendidos y juntos, el meñique frente al signante **Realización de la seña:** Ambas manos frente al pecho, la mano no dominante se mantiene estática, la mano dominante traza una trayectoria diagonal hacia abajo pasando por las puntas de los dedos índice y meñique de la mano 2.	

Figura 3.12 Descripción de la seña: DIAGONAL

3.2.4 Triángulo.

Triángulo

Seña bimanual asimétrica, estática

Mano 2: Los dedos meñique, anular, medio y pulgar cerrados, el dedo índice extendido, la palma frente al signaste de forma horizontal.

Mano 1: Dedos Meñique, anular y pulgar doblados, índice y medio, extendidos y abiertos.

Realización de la seña: Las puntas de los dedos índice y medio de la mano 1 tocan el dedo índice de la mano 2 formando un triángulo.

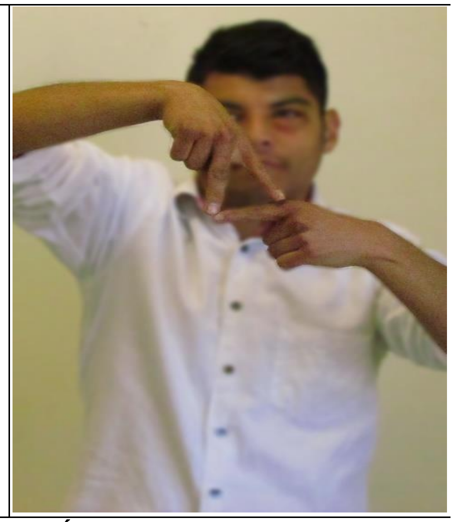


Figura 3.17 Descripción de la seña: TRIÁNGULO

3.2.4.1 Isósceles.

Triángulo Isósceles

Seña bimanual asimétrica, con movimiento Compuesta con la seña de: "Triángulo" e "Igual"

Mano 1: Dedos extendidos y cerrados, la palma hacia el signante tocando el superior lateral contrario.

Mano 2: Repite el movimiento tocando el superior lateral contrario

Realización de la seña: Después de la seña de "triángulo" la mano 1 toca el superior lateral del brazo opuesto, enseguida la mano 2 toca el superior lateral del brazo opuesto. Finalmente se signa la palabra "igual"

Figura 3.18 Descripción de la seña: TRIÁNGULO ISÓSCELES

3.2.4.2 Equilátero.

Triángulo Equilátero

Seña bimanual asimétrica, con movimiento compuesta con la seña de: "Triángulo" e "Igual"

Mano 1: Dedos extendidos y cerrados, la palma hacia el signante tocando el superior lateral contrario.

Mano 2: Repite el movimiento tocando el superior lateral contrario

Realización de la seña: Después de la seña de "triángulo", la mano 1 toca el superior lateral del brazo opuesto, enseguida la mano 2 toca el superior lateral del brazo opuesto, de nuevo la mano 1 toca el superior lateral del brazo opuesto. Finalmente se signa la palabra "igual"

Figura 3.19 Descripción de la seña: TRIÁNGULO EQUILÁTERO

3.2.4.3 Rectángulo.

Triángulo Rectángulo

Seña bimanual asimétrica, con movimiento Compuesta con la seña de: "Triángulo" y seña "Angulo recto"

Mano 2: Los dedos meñique, anular y medio, cerrados, los dedos índice y pulgar abiertos formando una L la palma contra el signante.

Mano 1: Los dedos meñique, anular, medio y pulgar cerrados, el dedos índice extendido

Realización de la seña: El dedo índice de la mano uno señala el ángulo en la "L" formada por la mano 2.

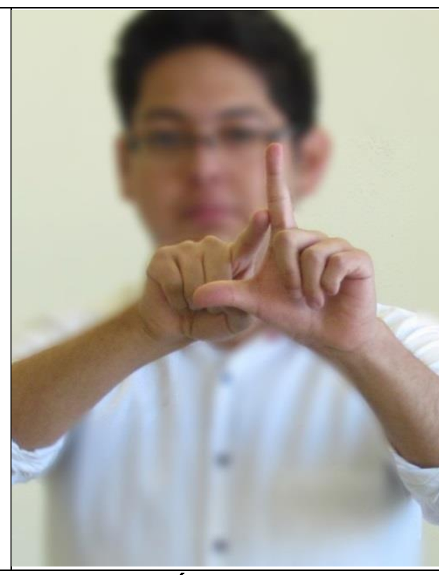


Figura 3.20 Descripción de la seña: TRIÁNGULO RECTÁNGULO

3.2.5 Paralela.

Paralela

Seña bimanual simétrica, con movimiento.

Mano 2: Dedos extendidos y juntos, la palma hacia arriba.

Mano 1: Dedos extendidos y juntos, la palma hacia abajo.

Realización de la seña: ambas manos con las palmas encontradas y separadas trazan un breve trayecto horizontal.

Figura 3.21 Descripción de la seña: PARALELA

3.2.6 Perpendicular.

Perpendicular

Seña bimanual asimétrica, estática.

Mano 1: Dedos meñique, anular, medio y pulgar doblados, el dedo índice extendido.

Mano 2: Dedos meñique, anular, medio y pulgar doblados, el dedo índice extendido.

Realización de la seña: Con los dos dedos índices de cada mano se forma una cruz.

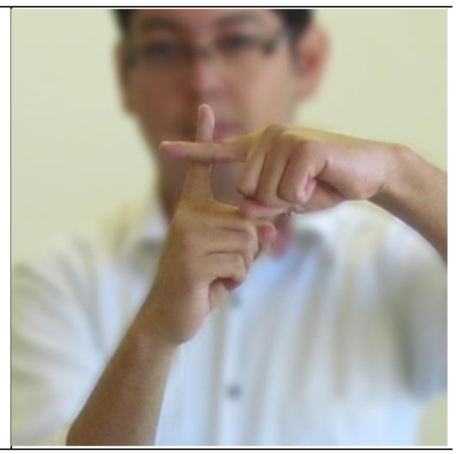


Figura 3.22 Descripción de la seña: PERPENDICULAR

3.2.7 Punto medio.

Punto Medio

Seña bimanual asimétrica, con movimiento

Compuesta con la seña de: “punto” y de “Medio”.

Punto

Mano 2: Dedos extendidos y juntos

Mano 1: Dedos meñique, anular y medio doblados, índice y pulgar, extendidos y tocando sus puntas

Realización de la seña: Dedos índice y pulgar de la mano 1 tocan juntos la palma de la mano 2

Medio

Mano 2: Todos los dedos extendidos y juntos

Mano 1: Todos los dedos extendidos y juntos

Realización de la seña: La mano 1 “parte” a unión de los dedos de la mano 2 entre el índice y el anular.

Figura 3.23 Descripción de la seña: PUNTO MEDIO

3.2.8 Rectángulo.

Rectángulo

Seña bimanual asimétrica, con movimiento.

Mano 2: Dedo meñique, anular, medio y pulgar doblados, dedo índice extendido, palma hacia el signante.

Mano 1: dedos anular, medio y pulgar doblados, meñique e índice extendidos, palma hacia el signante.

Realización de la seña: las puntas de los dedos meñique e índice de la mano 1 tocan los extremos del dedo índice de la mano 2 formando un cuadrado, enseguida la mano 1 se desplaza un poco hacia afuera en sentido horizontal.

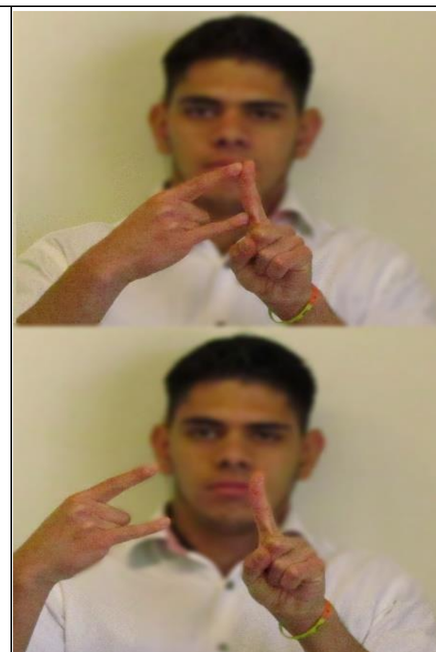


Figura 3.24 Descripción de la seña: RECTÁNGULO

3.3.9 Rombo.

Rombo

Seña bimanual simétrica, estática.

Mano 2: Dedos meñique, anular y pulgar doblados, dedos medio e índice extendidos y abiertos.

Mano 1: Dedos meñique, anular y pulgar doblados, dedos medio e índice extendidos y abiertos.

Realización de la seña: La punta del dedo índice de la mano 1 toca la punta del dedo índice de la mano 2 al mismo tiempo que la punta del dedo medio de la mano 1 toca la tunta del dedo medio de la mano 2.

Figura 3.25 Descripción de la seña: ROMBO

3.3 Comunicación entre pares

El propósito de las sesiones de *comunicación entre pares* consistió en *indagar* respecto a los objetivos de actividades, realizadas en sesiones previas de *enseñanza* bajo la conducción del investigador, cuando se trataron por los estudiantes sin la intervención de éste. El desarrollo y realización de las actividades en cuestión bajo la conducción de uno de los estudiantes permitieron desprender preguntas respecto a las dudas que expresaban y que eventualmente eran aclaradas entre ellos.

3.3.1 Actividad realizada en sesión de enseñanza.

Objetivo: Obtener y comparar el área de las tres figuras presentadas.

Desarrollo: Se les presentaron tres figuras (todas con área 36 cm^2), de las cuales debían obtener su área (véase la Figura 3.31) y una vez que se tuviera ese dato, hacer la comparación entre los mismos, haciendo notar que a pesar de que las figura tenían diferencias de forma, el área era la misma.

Resultados: Mx no mostró complicaciones para realizar y comprender la actividad, obtuvo el área total de cada figura (véase la Figura 3.32). En el caso de las figuras 3.32 - a y 3.32 - b, se observa que procedió mediante la obtención de áreas parciales que después sumó para obtener el resultado pedido.

La actividad permitió a Mx abonar al tema de la composición y descomposición de figuras, así como a la idea fundamental de aditividad; sin embargo para Os no fue tan fácil y mostró dificultades para entenderla.

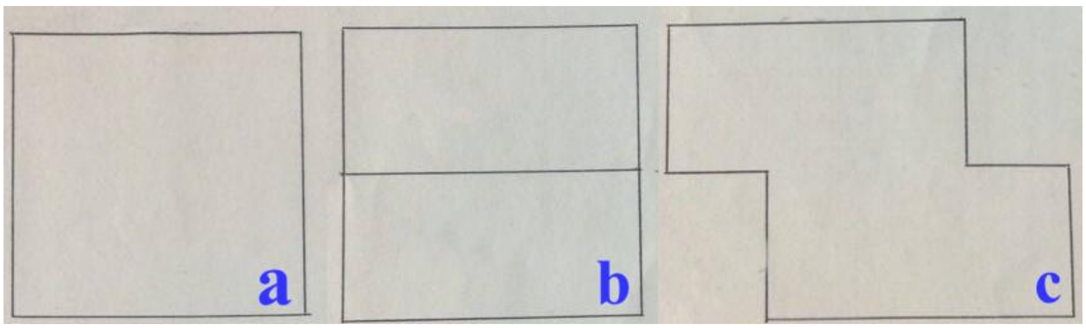


Figura 3.31 Rectángulos presentados a Mx y Os

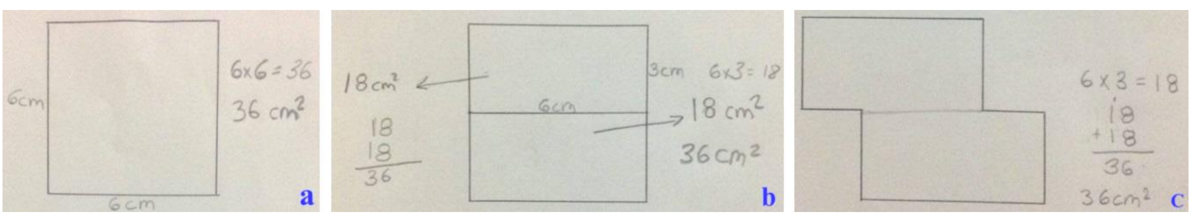


Figura 3.32 Obtención de áreas por parte de Mx

3.3.2 Actividad desarrollada en sesión de indagación: *comunicación entre pares.* Mx-Os.

Dadas las condiciones en las que uno de los estudiantes (Mx) mostraba facilidad en la actividad presentada mientras que el otro (Os) parecía tener bastantes dudas, se recurrió a la comunicación entre pares en la que el estudiante más adelantado fungió como tutor del otro, mientras el investigador observaba el desarrollo de la actividad para obtener información que le permitiera indagar respecto al proceso de adquisición y comunicación entre ambos. Para ello, se replicó la actividad previa, obteniendo los resultados que se presentan a continuación:

Objetivo: Obtener y comparar el área de las tres figuras presentadas

Desarrollo: Mx condujo la actividad, le presentó las condiciones de la tarea a realizar lo cuestionó respecto al área de la figura 3.31a (véase la Tabla 3.1).

Tabla 3.1
Mx explicó de la actividad a partir del tratamiento de la Figura 3.31a

Est	Diálogo
Mx	Mira ahí vemos unos cuadros (*Figura* 3.31a.). En estos cuadrado hay que ver cuánto es el área; primero éste (*señalando el cuadrado 3.31a*). Tú debes decir cuánto es el área
Os	¿El área de este cuadrado? (*Figura 3.31a*)
Mx	¿Sí, cuánto es el área del cuadrado?
Os	(*Tras un momento de reflexión, realiza conteos mentales con ayuda de sus dedos y responde*) 36 cm (*sin atender lo relativo a la unidad de área)*

Al obtener la respuesta correcta a su pregunta, continuó con la Figura (3.31b). Le hizo ver a Os que se trataba de una figura con las mismas dimensiones que la primera, pero con una división y le preguntó sobre el área de cada una de las dos regiones generadas. A pesar de la explicación dada, Os daba señales de no comprender la pregunta (véase la Tabla 3.2).

Tabla 3.2
Mx explicó nuevamente la actividad

Est	Diálogo
Mx	Los 36 cm^2 de este primer cuadrado (*Figura 3.31a*) son los mismos que en el segundo cuadrado, si observas, los dos cuadrados tienen la misma área pero el segundo cuadrado está separado la mitad (*hace a un lado la mitad separando de manera figurada la mitad de la figura, se va al cuadrado, vuelve a señalar mitad y tapa la mitad de abajo, señala el espacio de la mitad de ese cuadrado*) ¿Cuánto es el área?
Os	(*Se queda pensando*) Tengo que decir otra respuesta (*sigue pensando*) es 13 (*cuenta con los dedos*) no es 13 (*continúa contando con los dedos*) es 6

Una vez que Mx se percató de la dificultad que presentaba Os, decidió recurrir a un ejemplo que no se encontraba en las actividades presentadas, fue un recurso que él decidió utilizar a título personal con la finalidad de darse a entender, lo que puso en evidencia la disposición del estudiante para compartir su propio conocimiento y la posibilidad que tiene de generalizar el contenido con el que se estaba tratando, lo que le permitió construir sus propios argumentos para la comunicación entre pares (véase la Tabla 3.3).

Tabla 3.3
Mx utilizó estrategias personales para la explicación del proceso

Est	Diálogo
Mx	Por ejemplo, es una idea (*se queda pensando*) por ejemplo, en una superficie están los cm^2 pero <u>al partir un cuadrado</u> que sea de 5 cm^2, si junto los 5 cm con otros 5 cm me dan 10, ¿me entendiste? Es como partir la mitad por ejemplo el primer cuadrado el área es de 36 cm^2, la mitad de ese cuadrado lo separas, eso es lo que tienes que hacer, ¿me entiendes?
Os	Ya está
Mx	¿Sí?, si juntas un cuadrado de 12 y otro cuadrado de 12, ¿cuánto es?
Os	36
Mx	¿Seguro que son 36? Piénsalo bien agiliza la mente
Os	(*Tras una serie de intentos, Os responde*) 24 *(no recurre a la unidad de área)*
Mx	Muy bien 24 (*no recurre a la unidad de área)*

Concluyó con sus ejemplos y evidenció que Os tenía serias dificultades respecto a la operación de procesos aditivos y multiplicativos, Regresó a la Figura 3.31b y lo interrogo nuevamente (véase la Tabla 3.4).

Tabla 3.4
Mx explicó su ejemplo

Est	Diálogo
Mx	Muy bien entonces ¿cuánto es de área en toda esta figura? (3.32b)
Os	36cm^2
Mx	Y ¿cuánto es el área de cada mitad?
Os	18 cm^2

Al concluir la actividad, Os logró resolverla correctamente (véase la Figura 3.33) y se mostró motivado al entender un contenido que a pesar de haber sido tratado ya en sesión de enseñanza, no lo tenía tan claro como después de la explicación de su compañero.

Es importante señalar que realizó su explicación incluyendo en sus ejemplos elementos nuevos, diferentes a los que se utilizaron durante la enseñanza del tema, lo que deja ver que existe acercamiento a la noción cualitativa del contenido tratado.

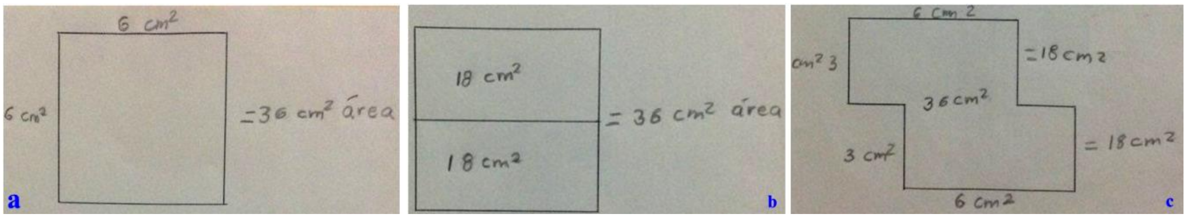


Figura 3.33 Obtención de áreas por parte de Os

3.3.2.1. Resultados de la indagación: A pesar de que la explicación en la enseñanza fue para ambos estudiantes, sólo Mx logró comprender el contenido. Sin embargo, llama la atención que al realizar la actividad de comunicación entre pares, Os ya logró ya comprender el tema presentado, lo que plantea la posibilidad que tienen los estudiantes para acceder a los contenidos, bajo condición de que la comunicación sea lo más efectiva posible.

De la sesión de indagación se desprenden las siguientes preguntas:

- ¿Por qué razón, Mx logra acceder con mayor facilidad a los contenidos presentados por el investigador?

- ¿Qué tanto interviene la baja competencia en las operaciones de multiplicación con la comprensión de las nociones tratadas?

- ¿Qué elementos permitieron que Os entendiera mejor la explicación de Mx que la del investigador?

- ¿Hasta qué grado podrán los estudiantes podrán generalizar la descomposición de área en figuras que no sean rectangulares?

3.4 Entrevista 1

Al concluir las actividades reportadas en el presente capítulo, se realizó la entrevista a Mx tomando como base las nociones de: las ideas fundamentales y el área de fórmula.

Objetivo: conocer el grado de competencia adquirido por Mx respecto de los temas tratados durante la primera parte de la investigación.

Contenido:

- Área
    - Área de rectángulos
    - Figuras congruentes
    - Área de fórmula
    - Área del triángulo

Entrevistador: Investigador

Entrevistado: Mx

Guión:

- ¿Qué es el área?
- ¿Qué unidades de medida se pueden utilizar?
- ¿Qué figuras pueden tener área?
- ¿El círculo tiene área?
- ¿Dos figuras diferentes pueden tener la misma área?
- Si cambia la forma de una figura, ¿cambia también su área?
- ¿Cuánto mide el área del siguiente triángulo? (Se le presenta la figura)

Desarrollo: Se contó con la asistencia de una intérprete. Ante la pregunta ¿Qué es el área?, Mx logró ubicar el hecho de que diferentes superficies concretas cuentan con área, dio el ejemplo de la mesa (véase la Tabla 3.5). Utilizó de manera fluida y correcta las señas de área, base y altura las cuales fueron construidas durante la etapa de enseñanza.

Expreso a la noción de área, la expresó como una agregación de cuadros que se usan como unidad de medida. Utilizó el área de fórmula de un rectángulo para conocer la medida de una región cerrada lo cual se puso de manifiesto al multiplicar 6cm por 6cm en su ejemplo.

Tabla 3.5

Explicación de la noción de área por parte de Mx

I	Explícanos lo que es el área	
Mx	**Glosa**	**Interpretación**
	NO PREOCUPAR ESO (señala el espacio donde usó la seña de área) ÁREA SIGNIFICAR ADENTRO ALTURA BASE YA YO IDEA EJEMPLO ESTA (señala la mesa frente de él) MESA HAY ALTURA BASE SI PORQUE MIRAR AQUÍ (señala un espacio de la mesa) YO VER ESPACIO VER (señala una lateral de la mesa) ALTURA SENTIR UNO (se queda pensando) CIEN CENTIMETRO YA AQUI (señala la parte de la mesa cercana a él) SENTIR OCHO CENTIMETRO YA CANTIDAD (usa con las dos manos al mismo tiempo, el clasificador de… haciendo referencia que VA A HACER UNA OPERACIÓN CON LAS DOS CANTIDADES QU EMENCIONA) CIEN POR OCHO ESO USAR HAY PORQUE ÁREA MUCHO SOBRA CUADRADO CUADRADO (con movimiento de arriba para abajo haciendo referencia de los cuadritos de 1 cm de una tabla) PARECER (exp. Facial) TABLA DE DOBLE ENTRADA (exp. Facial de pregunta) ESO PORQUE SOBRA CIEN RESPONDER CIENTOCHO ESO FILA (Usa la seña hacia la mesa, como referencia de un cuadrado que adentro contiene cuadritos) EJEMPLO OTRO EJEMPLO (Se queda pensando) CUADRADO C-U-A-D-R-A-D-O (Dactilología) CUADRADO HAY ALTURA BASE SI CLARO PORQUE EJEMPLO (expresion facial) DOS BASE DOS CENTÍMETRO EJEMPLO ESO CANTIDAD (usa con las dos manos al mismo tiempo, el clasificador de… haciendo referencia de los espacios para hacer la operación de multiplicación de las cantidades mencionadas) ESO DOS POR DOS RESPONDER CUATRO HAY SOBRAR CUADRADO ÁREA CUADRADO CUADRADO CUADRADO (Clasificador de cuadritos y realiza un movimiento semicircular) TABLA DOBLE ENTRADA ESO CORTO ENTENDER (expresión facial de pregunta)DUDA DUDA (expresión facial de pregunta).	**…** el área es cuando se tiene adentro altura y base un ejemplo es que esta mesa tiene una altura y tiene una base por ejemplo la altura pueden ser 6 cm y la base también 6 cm cuando empiezo a hacer la operación tengo que multiplicarlos y depende de la respuesta es el área porque adentro tiene unos cuadros y cada cuadro puede medir cierta medida, por ejemplo un cuadrado, tiene una altura y una base, (señalando la mesa) ésta es la base y ésta es la altura, igual depende de cuánto midan la altura y la base sacamos el resultado dependiendo de los cuadritos que tiene cada cuadro

Aceptó al metro cuadrado como la unidad para medir el área de la figura como el rectángulo, al centímetro cuadrado como submúltiplo, y advirtió que dependiendo de las dimensiones de la región, se usarán los centímetros cuadrados o los metros cuadrados (véase la Tabla 3.6).

Tabla 3.6
Identificación de la unidad de medida por parte de Mx

I	¿Y solamente se pude medir en centímetros?	
Mx	**Glosa**	**Interpretación**
	(Se queda pensando) SI NO SI NO (Movimientos de cabeza) DOS DOS DOS METRO A VECES CENTÍMETRO A VECES COMO COSA EJEMPLO MAESTRO MOSTRAR EJEMPLO ACORDAR AHÍ (Señala hacia fuera del aula, expresión facial de pregunta) MÁS GRANDE LARGO GRANDE AH (expresión facial) METRO SI (expresión facial) AHORA EJEMPLO AHÍ (señala una hoja sobre la mesa) PEQUEÑO HACER ESCRIBIR ESO (Señala una hoja sobre la mesa) PEQUEÑO CENTÍMETRO SIEMPRE SIEMPRE A VECES MAESTRO MOSTRAR CÓMO REGLAS CONCENTRAR ESO CORTO DOS DOS METRO CENTÍMETRO DOS DOS NADA MÁS (expresion facial).	… puede ser en metros, a veces en centímetros, pueden ser las dos cosas, por ejemplo te acuerdas el día que trabajamos en el pasto hicimos un cuadrado, ahí se pueden ver los metros pero cuando estamos aquí trabajando en una hoja, los cuadrados son más pequeños aquí trabajamos en centímetros, pero pueden ser de los dos.

Tomó como base una diagonal trazada en un rectángulo como generadora de triángulos para justificar el hecho de que estos últimos pueden tener área y dio un explicación referida a la noción cualitativa del área de fórmula de triángulo (véase la Tabla 3.7).

Tabla 3.7
Figuras que pueden tener área

I	El cuadrado y el rectángulo tienen área pero ¿otras figuras tienen área?	
Mx	(Se queda pensando) SI SI (Movimiento de cabeza) (Se queda pensando) SI PODER PORQUE CUADRADO CUADRADO EJEMPLO CUADRADO YO IDEA CUADRADO CUADRADO (Clasificador) HAY ADENTRO ÁREA BIEN YA EJEMPLO DIAGONAL PARTIR NO SE (expresión facial) EJEMPLO (se queda pensando) EJEMPLO YO MI CASA CUADRADO (Clasificador) CUADRADO HAY ÁREA ALTURA BASE YA LISTO YA COMO DIAGONAL/PARTIR EJEMPLO CUARTO MÍO OTRO CUARTO ABUELO OTRO CUARTO NO SE (expresión facial) ESPOSO LO QUE SEA (expresión facial y corporal) YA ESO CUADRADO PARTIR PARTIR PARTIR (acción que realiza en un espacio haciendo referencia a las columnas) PARTIR PARTIR PARTIR (acción que realiza en un espacio haciendo referencia a las filas) YA (expresión facial) CORTO (expresión facial) PODER COMO QUITAR/RESTAR COMO RESTAMENOS RECORDAR MISMO MISMO HACE RATO CUADRADO ALTURA BASE POR YA RESPONDER CUANTO COMO PARTIR DIAGONAL ESO SEPARAR.	**…** Sí, sí se puede porque un cuadrado por ejemplo, tiene esa forma pero también podemos sacarle diagonal, por ejemplo mi casa, tiene forma de cuadrado y quiero sacar el área pero cuando está partida en diagonal por ejemplo para hacer mi cuarto o el cuarto de mi abuela o el de mi esposa, ese cuadro puede ser partido en diagonales y se puede sacar el área, por ejemplo es como restarle, como quitarle, ¿te acuerdas que hicimos un cuadrado?, sacamos la altura y la base y multiplicamos la base por la altura ese cuadrado se parte en la mitad y se hace diagonal y podemos sacar las mitades de esa área.

Negó con seguridad la posibilidad de que el círculo pudiera tener área y justificó la negación con el argumento de que para que eso fuera posible debería tener una base y una altura, que, para él, estaban ausentes en la figura (véase la Tabla 3.8).

Lo anterior nos permite afirmar que no tiene clara la noción cualitativa de área ya que requiere de la presencia que dos elementos familiares que sean ubicables fácilmente (base y altura) para poder aceptar sus presencias de la misma en figuras diferentes a los rectángulos y triángulos.

Tabla 3.8 Negación de la posibilidad del área en el círculo

I	**Y los círculos ¿también tienen área?**	
Mx	**Glosa**	**Interpretación**
	NO NO (movimento de cabeza) CIRCULO NO (movimiento de cabeza) CIRCULO NO NO NO (movimiento de cabeza y expresión facial) PORQUE NO PODER COMO CUADRADO EXACTO NO HAY NO HAY COMO DESFIGURADO (CLASIFICADOR) DESFIGURADO (CLASIFICADO) POR ESO NO (movimiento de cabeza) EXACTO NO HAY	No, los círculos no se puede, tiene que ser una figura que sea recta porque esa está desfigurada esa no es recta sino que el circulo está desfigurado no tiene líneas rectas.

En la siguiente actividad se le presentó un rectángulo de 4cm por 3cm (véase la Figura 3.34a) y se le pidió que obtuviera su área de dicha figura; hizo una estimación de la medida de la figura antes de realizar la medición correspondiente de sus lados con ayuda de la regla; Enseguida utilizó el área de fórmula para obtener el resultado que se le solicitó (véase la Figura 3.34-b).

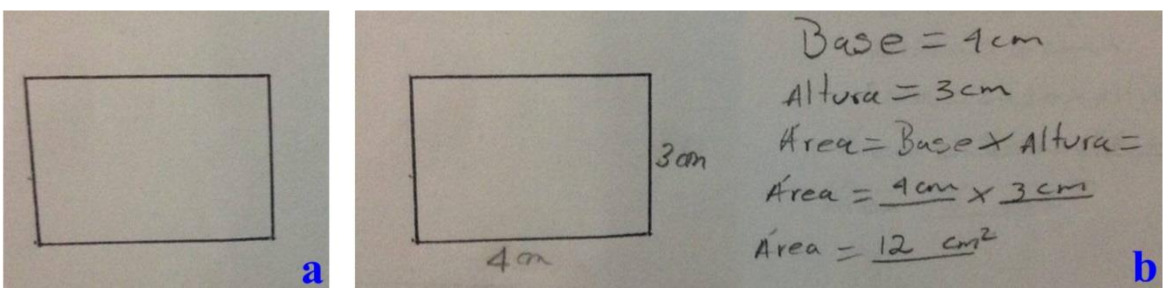


Figura 3.34 Mx obtuvo el área del rectángulo presentado

Se le presentaron dos figuras (véase Figura 3.35a y 3.35b) y la pregunta ¿Cuál es más grande? Ante el contenido de su respuesta se advierte su noción de equivalencia al darse cuenta que las dos regiones de diferente forma pueden tener la misma área (véase Tabla 3.9).

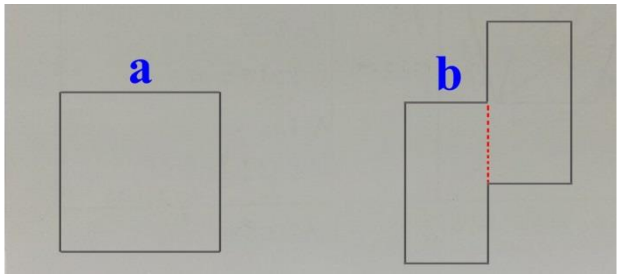


Figura 3.35 Comparación de áreas equivalentes

Tabla 3.9
La idea fundamental de congruencia

I	**¿Cuál figura es más grande?**	
Mx	**Glosa**	**Interpretación**
	HAY CUADRO CUADRO DIFERENTE FIGURA DIFERENTE PERO IGUAL ÀREA CONTACTADOS (señalando ambas figuras)	(*El estudiante obtiene el área de cada una de las figuras y da una respuesta*) Son dos cuadros que son iguales pero éste ya cambia porque tiene dos cuadros diferentes (*se refirió a la figura 3.35b*)
I	**Pero si cambia la figura ¿cambia el área también?**	
Mx	**Glosa**	**Interpretación**
	ÀREA IGUAL SÌ PERO FORMA CAMBIAR FORMA DESCOMPOSICON DE CUADRADO (CL) DESCOMPOSCION DE CUADRADO (CL) DIFERENTE DIFERENTE POR ESO ESTE (SEÑALA EL CUADRADO DIBUJADO EN LA HOJA) AREA SI (MOVIMENOT DE CABEZA) MISMO HAY PORQUE EXACTO HAY AHÍ (SEÑALA EL DIBUJO EN LA HOJA) EXACTO HAY AHÍ (SEÑALA EL DIBUJO EN LA HOJA) CUADRADO CUADRADO (REALIZANDO MOVMIENTO DE ARRIBA PARA ABAJO) IGUAL CUADRADO COMO DESCOMPOSICIÓN DE CUADRADO POR ESO FORMA POR ESO SI PODER AREA HAY PERO DIAGONAL /PARTIR COMO MITAD SEPARAR (CON LA MIRADA HACIA EL DIBUJO DE LA DESOMPOSION DE CUADRADO) CUAL RESPONDER CUANTO ESO (se queda pensando y cuenta con los dedos)	… el área puede ser igual pero como que la forma de cómo se presenta el área si cambiaria pero sigue siendo la misma que tiene, el área tiene también 36, es como si tuviera los cuadritos adentro pero nada más que de otra forma…

Resolvió la situación planteada, procedió mentalmente sin realizar operaciones con lápiz en papel, vale decir, obtuvo el resultado correcto sin utilizar la fórmula (véase la Tabla 3.10).

Tabla 3.10

Explicación del procedimiento para la obtención del área de un triángulo

I	**¿Cuánto mide el área de éste? (señalando uno de los dos triángulos que se formaron) y ¿por qué?**	
Mx	**Glosa**	**Interpretación**
	PORQUE SEPARAR COMO DIAGONAL ESO (señalando la hoja) SEPARAR MIRA HACE RATO TODO CENTIMETRO CUADRADO YA MITAD SEPARAR CUANTO 30 CENTIMETRO CUADRADO CORTO ESO ESO 30 30 CENTIMETRO CUADRADO PORQUE JUNTAR 60 CENTIMETRO CUADRADO ESO (Ve la hoja) PARECER PORQUE TENER PRECISO COMO (clasificador) SEPARACIÓN DE DIAGONALES PARECER IGUAL PRECISO EQUIVOCAR NO HAY PRECISO TENER AREA TGENER MISMO MISMO MISMO POR ESO OK.	(*Mx da una respuesta sin utilizar la fórmula de área del triángulo*) Separado, mide 30 cm cuadrados, porque con la diagonal es como separar, antes era completa y eran 60 cm cuadros entonces la mitad son 30 cm cuadrados

Se le presentó un trapecio rectángulo (véase la Figura 3.36) y se le pidió que obtuviera de éste la medida de su área: Mx procedió descomponiendo la figura en dos conocidas, un rectángulo y un triángulo, primero obtuvo la medida del rectángulo mediante el área de fórmula, enseguida realizó el procedimiento correspondiente para obtener la medida del área del triángulo, finalmente sumó ambas áreas y dio con ello el resultado final del procedimiento (véase la Figura 3.37).

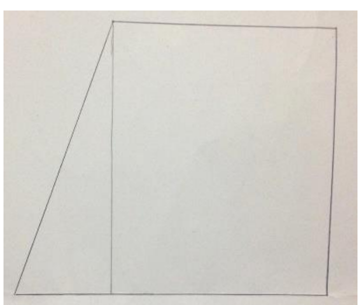


Figura 3.36 Trapecio rectángulo

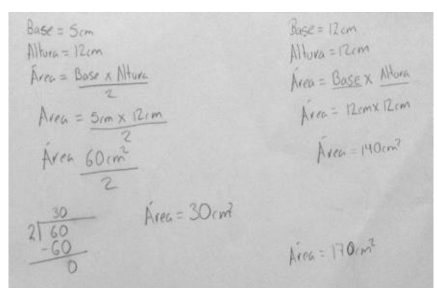


Figura 3.37 Procedimiento de obtención de área

Puso en juego la idea fundamental de aditividad. En el resultado final aparece un error no derivado del procedimiento sino de la multiplicación realizada en él. Se identificó una baja competencia y dificultad en las operaciones básicas se identificaron a lo largo de todo el proceso de la realización de las tareas.

3.5 Observaciones

Durante los tres momentos de la investigación se comenzó a haber un acercamiento del estudiante a la noción cualitativa de área, dejando aún pendientes muchos elementos por tratar, Que Mx haya expresado que el círculo no tenía área evidencia que no hay una adquisición completa del tema, pero las acciones que los estudiantes realizaron en la resolución de las actividades indican que con algunas limitaciones la adquisición se construye.

Otra de las dificultades más marcadas deriva de la comunicación debido a la baja competencia lingüística (en LSM) del investigador, lo cual se fue subsanando de dos formas: principalmente mediante el apoyo de la intérprete constantemente presente y mediante el paulatino aprendizaje de la LSM por parte del investigador.

Se evidenció que los tres estudiantes, presentaron serias dificultades en las operaciones básicas, especialmente en las multiplicativas, así como un lenguaje muy reducido que les dificulta dar explicaciones más específicas a pesar de que exista una correcta utilización de las señas construidas durante su puesta en práctica en las actividades de resolución de problemas, así como en la comunicación entre pares.

Mx pareció acceder con mayor facilidad a los contenidos presentados. En contraparte, Br mostró fuertes dificultades para hacerlo mientras que Os estuvo en un punto medio entre ellos dos.

Capítulo cuarto

Proceso de adquisición II: Equivalencia de figuras planas, perímetro y área de polígonos regulares

En este capítulo se expone la segunda etapa de la investigación. Se presenta el análisis de las actividades realizadas en 14 sesiones de 3 horas cada una, para el tratamiento de: la equidescomposición y equivalencia de polígonos; el perímetro y área de polígonos regulares e irregulares.

El contenido se distribuye en tres momentos: 1) la presentación de las actividades realizadas y su análisis; 2) la descripción de las señas construidas durante el proceso; 3) el análisis de las sesiones de comunicación entre pares y la entrevista correspondientes a la indagación e investigación.

4.1 Equidescomposición y equivalencia de figuras planas

Según cita Turégano (1989), Para H. Freudenthal el concepto de área es *"uno de los más básicos y profundos del discurso matemático"*. Hay que tener en cuenta que el concepto cualitativo de área y el cualitativo de longitud, tienen niveles cognoscitivos diferentes, siendo superior el primero, lo cual suele ocasionar dificultades didácticas importantes al enseñarlo a los estudiantes.

4.1.1 Actividades.

Se desarrollaron actividades con el objetivo de tratar la noción de equidescomposición y equivalencia en sesiones de enseñanza, para que los estudiantes comprendieran que el concepto de área no depende de la forma. No pretendíamos que los estudiantes definieran lo que es el concepto de área sino que se comprendieran qué significado tiene que dos superficies tengan la misma área.

4.1.1.1 Equidescomposición.

Las actividades se basaron en la propuesta ocho, de Turégano (1989) conformada por seis secuencias correspondientes a las actividades que consistieron en hallar polígonos equivalentes a uno dado (véase Apéndice 2). Presentamos el análisis de las secuencias primera, tercera y cuarta, las cuales se trataron en actividades de enseñanza. En el marco del tratamiento de la equidescomposición fue necesaria la construcción de las señas para

Pentágono (véase la Figura 4.1 en apartado 4.3) y Hexágono (véase la Figura 4.2 en apartado 4.3).

4.1.1.1.1 Secuencia Primera: Rombo – Cuadrado.

Objetivo: Dado un rombo hallar su equivalencia en un cuadrado.

Desarrollo: Consistió en la construcción de un rectángulo a partir de la descomposición de un rombo dado, utilizando regla y compás. La figura del rombo que se les presentó no contenía ningún tipo de triangulación, la cual los estudiantes realizaron posteriormente.

Resultados: Al finalizar la actividad, Mx logró construir de manera correcta la construcción de un cuadrado con base en el rombo dado. Sin embargo, Os y Br construyeron un rectángulo con diferencias entre éste y el rombo dado, lo cual se atribuye a la dificultad en el manejo de los instrumentos, especialmente el compás, ya que aparentemente siguieron el procedimiento adecuado (véase la Figura 4.3).

En los tres casos, los estudiantes triangularon el rombo dado, y mediante el uso del compás fueron reproduciendo cada uno de los cuatro triángulos obtenidos, construyendo así el cuadrado. Os y Br, numeraron los triángulos obtenidos para identificar en el cuadrado el triángulo respectivo en el rombo. Sin embargo no lograron construir el cuadrado debido a que alteraron las magnitudes de los lados del rombo.

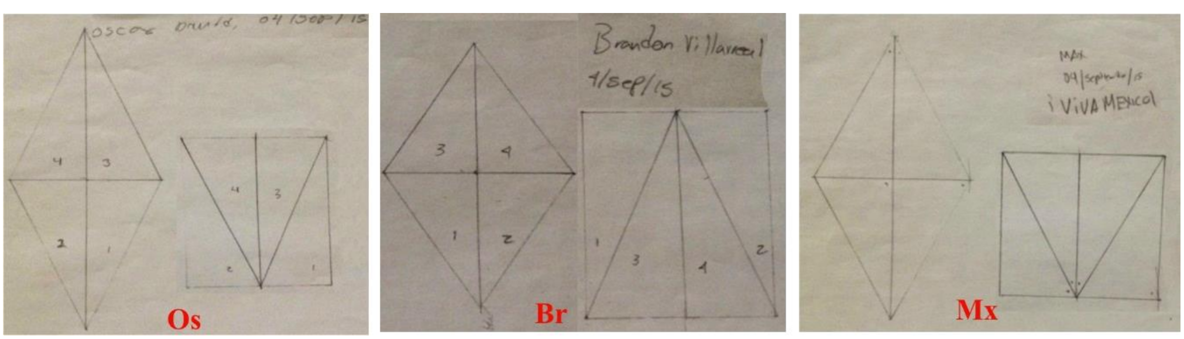


Figura 4.3 Dado un rombo hallar un cuadrado equivalente

4.1.1.1.2 Secuencia tercera   Hexágono – Paralelogramo.

Objetivo: Dado un hexágono hallar su equivalencia en un paralelogramo.

Desarrollo: Consistió en la triangulación de un paralelogramo a partir de la descomposición de un hexágono dado, utilizando regla y compás. La figura del hexágono que se les presentó no contenía ningún tipo de triangulación, la cual los estudiantes realizaron posteriormente.

Resultados: Tanto Os como Br triangularon ambas figuras, comparando la cantidad de triángulos en cada una, para finalmente aceptar que ambas áreas eran iguales; Os utilizó la numeración de triángulos como estrategia para identificar la cantidad que había de éstos en cada polígono (véanse las Figuras 4.4b y 4.4c).

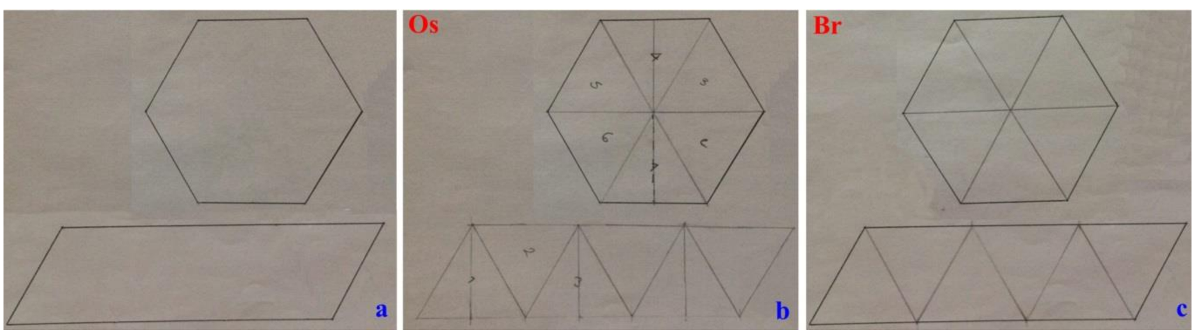


Figura 4.4 Dado un hexágono hallar un paralelogramo equivalente

4.1.1.1.3 Secuencia cuarta Pentágono – Trapecio.

Objetivo: Dado un pentágono hallar su equivalencia en un trapecio.

Desarrollo: Consistió en la triangulación de un trapecio a partir de la descomposición de un pentágono dado (véase la Figura 4.5. a), utilizando regla y compás. La figura del pentágono que se les presentó no contenía ningún tipo de triangulación, la cual los estudiantes realizaron posteriormente.

Resultados: Mx realizó la triangulación del pentágono y obtuvo cinco triángulos que después trazó en el trapecio (véase la Figura 4.5b). Comparó mediante el compás la congruencia de los lados del polígono con cada uno de los lados (bases) de los triángulos correspondientes al trapecio.

Finalmente, el estudiante aseguró que ambas figuras tenían la misma medida de área, argumentando que la cantidad de triángulos (del mismo tamaño) era la misma en uno y en otro, variando únicamente en el acomodo.

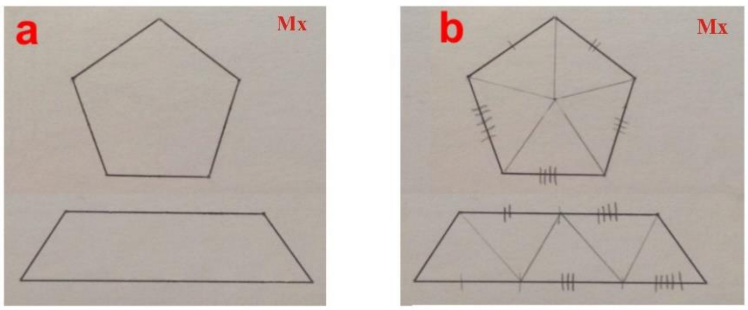


Figura 4.5 Dado un pentágono hallar un trapecio equivalente

4.1.1.1.4 Secuencia extra pentágono regular – pentágono irregular.

Objetivo: Dado un pentágono regular (véase la Figura 4.6 – a) hallar su equivalencia en uno irregular (véase la Figura 4.6 – b).

Desarrollo Además de la secuencia cuarta propuesta por Turégano, se aplicó una variante en la que se le presentó a Mx un pentágono y se le pidió que triangulara un pentágono irregular a partir de la descomposición de uno regular dado utilizando regla y compás. La figura del pentágono que se les propuso no mostro ningún tipo de triangulación, la cual el estudiante realizó después.

Resultados: El estudiante trianguló el pentágono regular y obtuvo los cinco triángulos que después realizó en el pentágono irregular. Verificó, mediante el uso del compás, la equivalencia en ambos casos. Al finalizar, afirmó que ambas figuras tenían la misma área, argumentando que la cantidad de triángulos (del mismo tamaño) era la misma en uno y en otro, variando únicamente en el acomodo (véase la Figura 4.6).

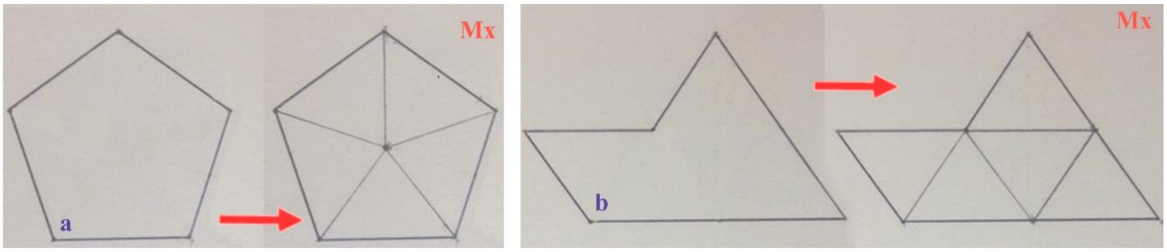


Figura 4.6 Dado un pentágono regular hallar un pentágono irregular equivalente

4.2 Perímetro y área de polígonos regulares e irregulares

4.2.1 Actividades.

Se desarrollaron cuatro actividades referentes al tratamiento del perímetro y área que permitieran diferenciar entre las características de uno y otra, para después obtener ambos elementos de los polígonos regulares e irregulares presentados.

4.2.1.1 diferencia entre el perímetro y el área.

Objetivo: hacer notoria la diferencia entre el área y el perímetro de un polígono.

Desarrollo: Previa explicación de la diferencia entre el área y perímetro de un polígono, se les pidió a los estudiantes que colorearan con azul el perímetro de un triángulo (véase la Figura 4.7), y que en seguida colorearan el área de otro triángulo similar (véase la Figura 4.8). Cabe destacar que los estudiantes ya utilizaban con anterioridad la seña de "perímetro".

Resultados: Los estudiantes lograron diferenciar sin dificultad entre el área y el perímetro en las figuras presentadas.

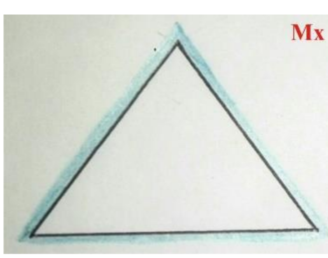


Figura 4.7 El estudiante colorea correctamente el perímetro del triángulo.

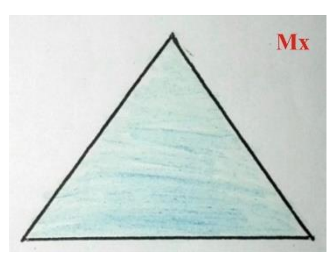


Figura 4.8 El estudiante colorea correctamente el área del triángulo.

4.2.1.2 Polígonos Regulares.

4.2.1.2.1 Obtención de área y perímetro de polígonos regulares.

Objetivo: Que obtuvieran el área y perímetro de los polígonos regulares propuestos.

Desarrollo: Se les presentaron tarjetas con polígonos regulares de los cuales debían obtener primero el perímetro y después el área (véase la Figura 4.9).

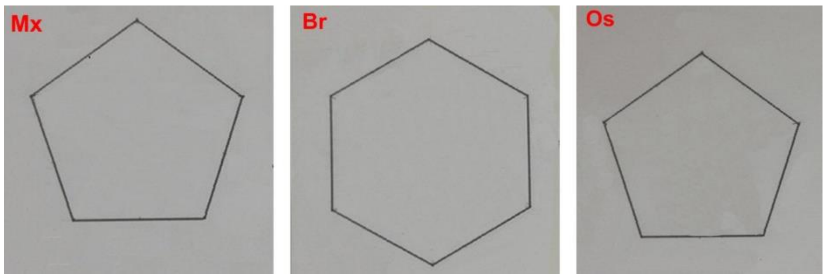


Figura 4.9 Polígonos regulares presentados para obtención de área y perímetro

Para ello, fue necesario construir en este momento tres nuevas señas para las palabras *Polígono* (véase la figura 4.10 en apartado 4.3) *Polígono Regular* (véase la figura 4.11 en apartado 4.3) y *Polígono Irregular* (véase la figura 4.12 en apartado 4.3).

Los procedimientos que se les presentaron para la obtención del perímetro consistieron en sumar la medida de cada uno de los lados del polígono o mediante la multiplicación de dicha medida por el número total de lados del polígono, y se les permitió a los estudiantes utilizar con libertad uno u otro procedimiento (véase la Figura 4.13).

Para la obtener del área de los polígonos regulares se utilizó el proceso de triangulación, el cual aplicaron a las figuras, obtuvieron el área de cada triángulo para después sumarlas todas y dar así el resultado con del área total del polígono (véase la Figura 4.13).

Resultados: Los tres estudiantes lograron obtener el perímetro de las figuras presentadas, sin embargo sólo Mx y Os obtuvieron correctamente el área ya que Br mostro dificultades con la triangulación.

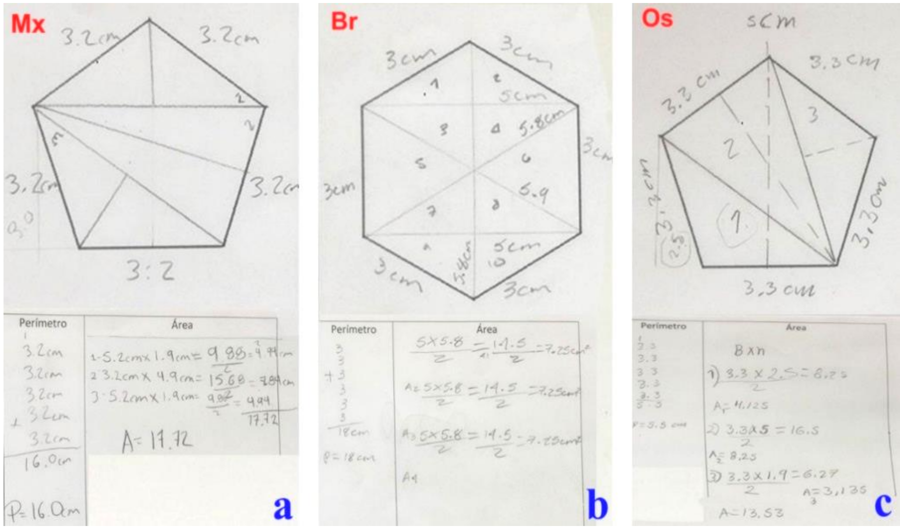


Figura 4.13 Perímetro y área de polígonos regulares

4.2.1.2.2 Agotamiento por defecto.

Objetivo: Evidenciar del proceso de agotamiento por defecto para la longitud de circunferencia.

Desarrollo: Se propuso una actividad de comparación entre lo que los estudiantes llamaban “el perímetro del círculo” y el de un hexágono, dodecágono y tetraicoságono (24 lados) regulares inscritos en el círculo, el cual fue presentado en papel cebolla (véase la Figura 4.14). Al terminar la comparación, se les preguntó “¿cuál de todas las figuras es más grande?” y se les pidió que justificaran su respuesta (véase la Tabla 4.1).

Resultados: los estudiantes lograron identificar al círculo como la figura más grande. A pesar del crecimiento de los polígonos regulares según sus lados, no se refirieron al perímetro, lo cual pudo deberse a que el sentido de la pregunta fue la relación de tamaño entre ambas figuras.

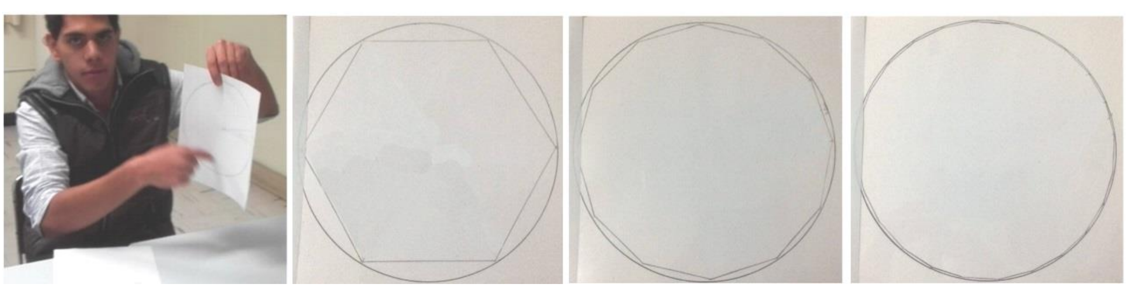


Figura 4.14 Proceso de agotamiento por defecto

Tabla 4.1
Respuesta de Mx respecto al proceso de agotamiento por defecto

Inv	**¿Cuál de todas las figuras tiene mayor área? Y ¿Por qué?**
Mx	El círculo tiene mayor área porque todas las otras figuras caben adentro del círculo y entre más lados tenga más se acercan al círculo pero sigue siendo más grande, se ve.

4.2.1.2.3 Obtención de área y perímetro de polígonos irregulares.

Objetivo: Obtener el área y perímetro de los polígonos irregulares presentados.

Desarrollo: Se les presentaron tarjetas con figuras de polígonos regulares de los cuales debían obtener primero el perímetro y después el área (véase la Figura 4.15).

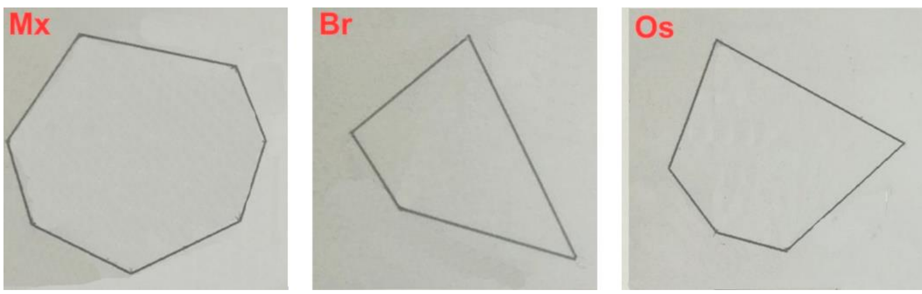


Figura 4.15 Polígonos irregulares presentados para obtención de área y perímetro

Desarrollo: El procedimiento que se les presentó para la obtención del perímetro consistió en sumar la medida de cada uno de los lados del polígono dado (véase la Figura 4.16).

El área de los polígonos regulares se obtuvo por el proceso de triangulación, que aplicaron a las figuras, obtuvieron el área de cada triángulo para después sumarlas todas y dar así el resultado del área total del polígono (véase la Figura 4.16).

Resultados: Los tres estudiantes lograron obtener el perímetro y área de las figuras presentadas. Sin embargo la figura presentada a Br fue especialmente sencilla y la triangulación que debía hacer era muy básica.

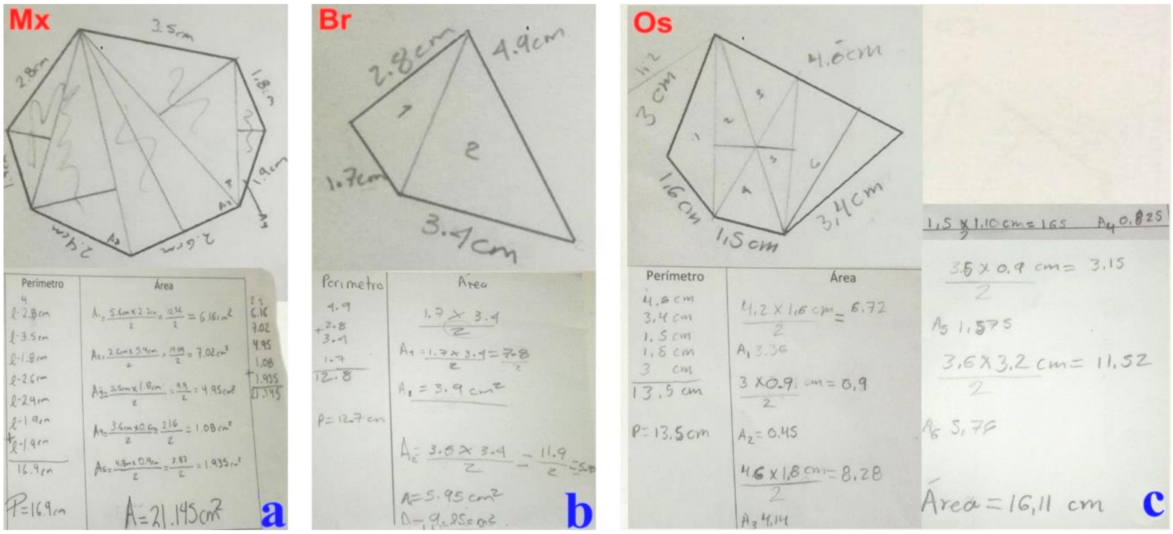


Figura 4.16 Perímetro y área de polígonos irregulares

4.3 Señas propuestas constituidas

A continuación se describen las propuestas de señas construidas con el tema de polígonos:

4.3.1 Pentágono.

Pentágono

Seña bimanual simétrica, sin movimiento.

Mano 2: Los dedos índice y medio, extendidos y abiertos formando un "V" invertida, con la palma hacia el signante.

Mano 1: Los dedos meñique e índice extendidos y abiertos, la palma frente al signante, las puntas de los dedos hacia arriba.

Realización de la seña: La punta del dedo medio de la mano 2 se une con la punta del dedo meñique de la mano 1, la punta del dedo índice de la mano 2 se une con la punta del dedo índice de la mano 1.

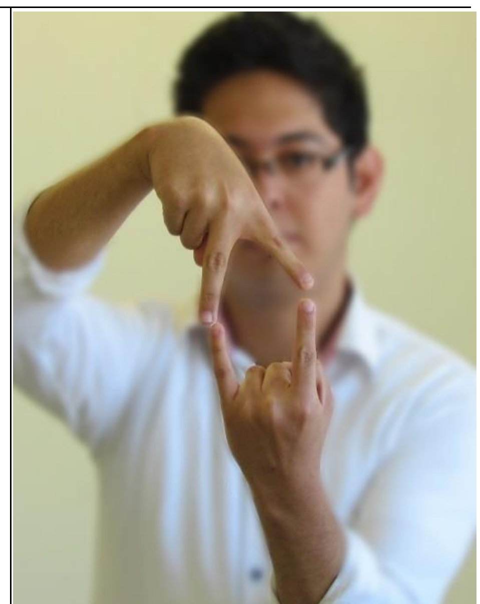


Figura 4.1 Descripción de la seña: PENTÁGONO

4.3.2 Hexágono.

Hexágono

Seña bimanual simétrica, sin movimiento.

Mano 2: Los dedos meñique e índice extendidos y abiertos, la palma frente al signante, las puntas de los dedos hacia abajo.

Mano 1: Los dedos meñique e índice extendidos y abiertos, la palma frente al signante, las puntas de los dedos hacia arriba.

Realización de la seña: La punta del dedo meñique de la mano 2 se une con la punta del dedo meñique de la mano 1, la punta del dedo índice de la mano 2 se une con la punta del dedo índice de la mano 1.

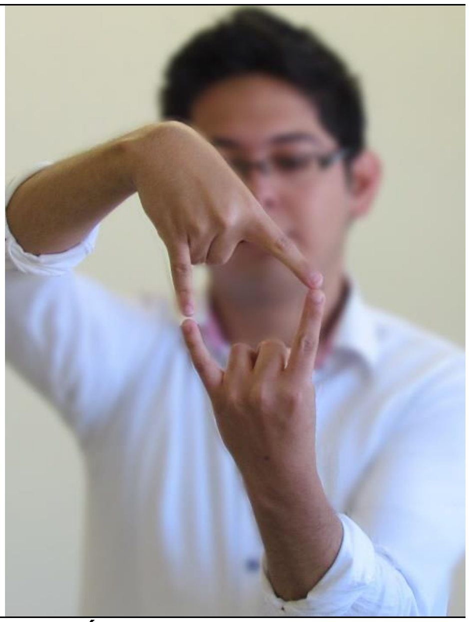


Figura 4.2 Descripción de la seña: HEXÁGONO

4.3.3 Polígono.

Polígono

Seña bimanual simétrica, sin movimiento.

Mano 2: Los dedos índice y medio, extendidos y abiertos, el dedo pulgar entre ambos, la palma hacia el signante, el dedo medio horizontal.

Mano 1: El dedo índice extendido y apuntando hacia arriba, el pulgar extendido y abierto, la palma hacia el observador.

Realización de la seña: La mano 2 se coloca a un lado de la mano 1, quedando de forma paralela los dedos medio y pulgar (respectivamente) de ambas manos.

Figura 4.10 Descripción de la seña: POLÍGONO

4.3.3.1 Polígono regular.

Polígono regular

Seña bimanual simétrica, con movimiento.

Mano 2: Los dedos índice y medio, extendidos y entrelazados, las puntas de los dedos hacia arriba, la palma frente al observador,

Mano 1: El dedo índice extendido y apuntando hacia arriba, el pulgar extendido y abierto, la palma hacia el observador.

Realización de la seña: La mano 2 se coloca a un lado de la mano 1 quedando paralelas una a la otra, la mano 2 hace un pequeño deslizamiento de adentro hacia afuera en forma horizontal

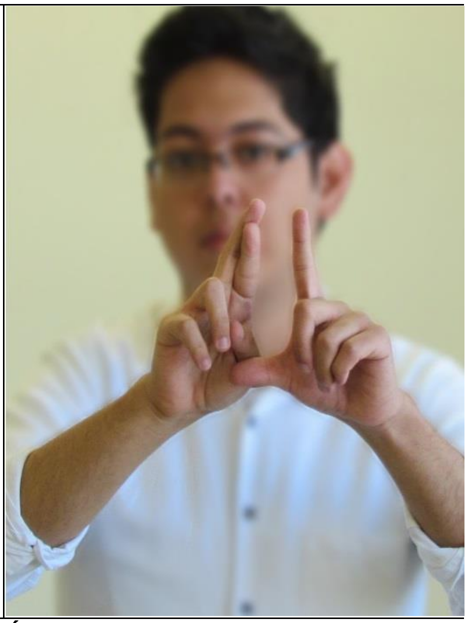


Figura 4.11 Descripción de la seña: POLÍGONO REGULAR

4.3.3.2 Polígono irregular.

Polígono irregular

Seña bimanual simétrica, con movimiento.

Mano 2: el dedo meñique extendido apuntando hacia arriba, los demás dedos doblados.

Mano 1: El dedo índice extendido y apuntando hacia arriba, el pulgar extendido y abierto, la palma hacia el observador.

Realización de la seña: La mano 2 se coloca a un lado de la mano 1 quedando paralelas una a la otra, la mano 2 hace un pequeño deslizamiento de adentro hacia afuera en forma horizontal

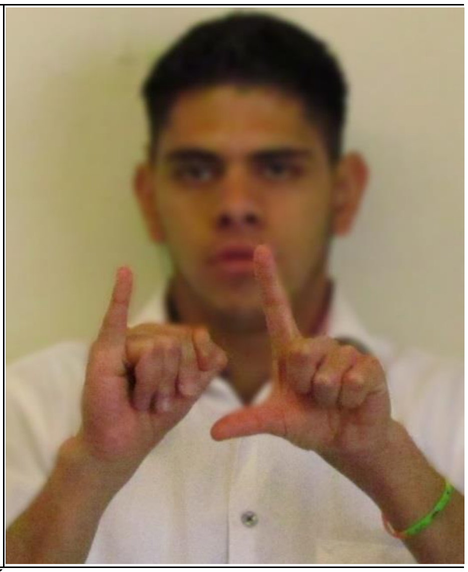


Figura 4.12 Descripción de la seña: POLÍGONO IRREGULAR

4.4 Comunicación entre pares (Mx, Os y Br)

Debido a que la actividad *cuadrado-Rombo* (4.1.1.1.1) no fue resuelta correctamente por Os y Br, se le reconsideró en sesión de indagación teniendo a Mx como tutor de la misma.

Objetivo: Hallar un cuadrado equivalente a un rombo dado (véase la Figura 4.17a) con el propósito de aclararles las dudas que quedaron después de haberla realizado la tarea en sesión de enseñanza e indagar sobre los procesos de comunicación.

I

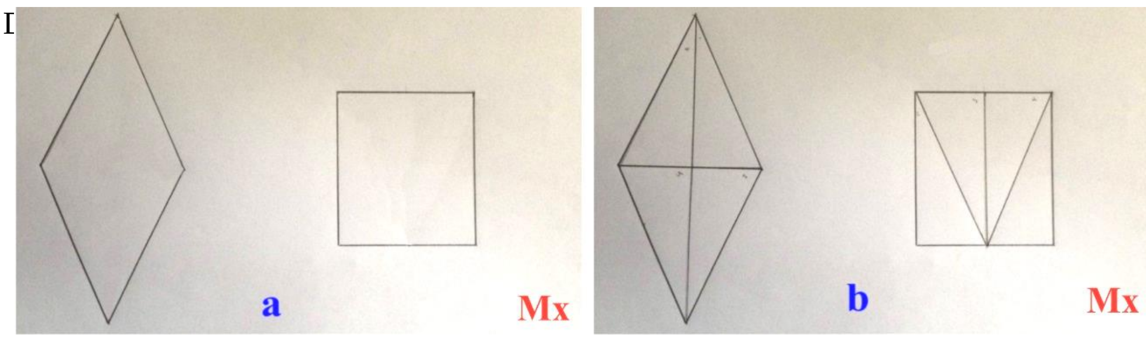


Figura 4.17 Dado un rombo hallar un cuadrado equivalente

Desarrollo: Mx comenzó presentándoles el cuadrado y el rombo, les preguntó acerca de la posibilidad de que ambas figuras tuvieran la misma área, tratando de obtener de ellos una respuesta que después pondría en juego para ser comprobarla (véase la Tabla 4.2).

Tabla 4.2
Presentación de la actividad: Rombo – cuadrado por parte de Mx

Est	Diálogo
Mx	A ver, ustedes díganme este cuadrado y este rombo (Figura 4.13a) ¿son iguales en área o son diferentes? Véanla bien, después lo vamos a comprobar
Os	Son iguales
Mx	¿Y tú Br?
Br	(*Observa varios segundos la figura*) son iguales, se ve (*hace una estimación de comparación con sus dedos índice y pulgar como un compás entre una figura y otra*)

Mx dirigió la actividad a manera de enseñanza con sus compañeros, sin limitarse a dar sólo una explicación sino indagando entre ellos y tratando de llevarlos desde lo que sabían, hasta el contenido que pensaba enseñarles. Por su parte, sus compañeros respondieron desde un principio que ambas figuras eran iguales (refiriéndose al área de ellas).

En la primera intervención, Br justificó su respuesta mediante una estimación muy básica que realizó con los dedos a manera de compás, pero no con el compás que estaba a su disposición. A diferencia de Mx, Br, sólo buscaba dar una explicación general y no tan precisa; sin embargo Mx la aceptó.

Os utilizó la seña "deformar", que los estudiantes usaron constantemente para hacer referencia a la descomposición de las figuras, es decir, que una región cambia de forma, pero insiste en que la figura puede ser igual ya que "se puede cortar y volver apegar de distinta forma" que es la manera en la que en ese momento pudo explicar la equidescomposición de una figura (véase la Tabla 4.3).

Tabla 4.3
Explicación de Os y Mx respecto a la equivalencia de figuras.

Mx	Si, y tú Os, ¿por qué dices que es igual?
Os	Porque el cuadrado está deformado para hace un rombo, el cuadrado se puede cortar y volverlo a pegar pero con otra forma como la forma del rombo pero es lo mismo.
Mx	Muy bien, fíjense bien, voy a explicarles, ambos están bien, lo pensaron muy bien, ahora vean esto porque es muy importante (*usa un compás y comienza a hacer comparaciones entre una figura y otra*). Miren son iguales (*las figuras: rombo y cuadrado*), podemos utilizar una regla para trazar las diagonales y vean (*comparando segmentos de una figura y otra*) son exactamente iguales de un lado y otro lado (*toma la regla y triangula ambas figuras, en seguida comienza a comparar cada uno de los triángulos de una figura con los de la otra*) vean son los mismos cuatro triángulos en las dos figuras sólo que en ésta están volteados (*comprueba de nuevo mediante el uso del compás que cada triangulo del cuadrado es congruente a uno del rombo*).

Finalmente, Mx aceptó sus respuestas dio una explicación, en la que utilizó la regla y el compás, primero para hacer una comparación entre una figura y otra, y después para triangular ambas figuras y a través de este procedimiento, identificar que para cada triángulo de los obtenidos en una hay otro congruente en la otra (véase la Figura 4.13b).

En general y por las acciones manifiestas, Br y Os adquirieron una noción cualitativa básica con respecto a la equidescomposición de polígonos

Resultados de la indagación: Llamaron la atención diversos aspectos de la actividad, entre ellos, que Mx realizara una explicación distinta a la que se le dio a él al tratar el tema, lo que parece evidenciar que el estudiante lo comprendió.

Durante la actividad, Br realizó una comparación con los dedos, lo que mostro que se debían hacer ciertas comparaciones entre segmentos para resolver la actividad. Sin embargo, regularmente sus resultados fueron incorrectos, lo que se podría deber a un uso incorrecto de los instrumentos, específicamente del compás.

La palabra "deformar" se utilizó recurrentemente para referirse a una situación de descomposición. Esto probablemente se debió a la falta de conceptos y señas construidas en la LSM.

Finalmente se observa que los estudiantes lograron comprender con mayor claridad el contenido al ser explicado por su compañero, lo cual podría deberse a la competencia lingüística de la LSM o incluso a la estrategia que utilizó Mx para que comprendieran la actividad. En cualquiera de los casos, quedó claro que los estudiantes podían acceder a los contenidos y que en ocasiones sería necesario cambiar las estrategias de enseñanza para lograrlo.

La actividad de indagación generó las siguientes preguntas:

- ¿La palabra *deformar* les permite describir un concepto (equidescomposición) para el cual no tienen una seña propia?
- ¿Qué tanto influye la falta de pericia en la utilización del compás, que muestra Br, a la hora de realizar las actividades referentes a la equidescomposición?

4.5 Investigación

4.5.1 Entrevista 2.

Al concluir las actividades, se realizó la entrevista a Mx tomando como base las nociones de área, perímetro, triangulación y equidescomposición, para lo cual se realizaron las siguientes preguntas:

Contenido:

- Área y perímetro
- Triangulación
- Equidescomposición

Entrevistador: Investigador

Entrevistado: Mx

Guión:

- El área y el perímetro son diferentes, ¿por qué?
- ¿Cómo se puede saber la medida del perímetro de una figura?
- ¿Cómo se puede obtener el área de un polígono?
- ¿Dos figuras diferentes pueden tener la misma área?

Desarrollo: Contando con la asistencia de una intérprete, se inició la entrevista. A la pregunta "¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro?", Mx dio una respuesta que indica su comprensión de la diferencia que hay entre el área y el perímetro, sin embargo, el vocabulario con el que cuenta el estudiante, es tan reducido que no le permitió estructurar una respuesta más precisa (véase la Tabla 4.4).

Tabla 4.4
Respuesta de Mx respecto a perímetro y área. (entrevista 2)

Inv	¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro?
Mx	El área y el perímetro son diferentes porque en el perímetro son las medidas de cada lado y el área es la parte de adentro de la figura y lo que mide de adentro

En su respuesta respecto a la pregunta "¿Cómo se sabe la medida del perímetro de una figura?", Mx no mostró confusión entre el procedimiento para obtener el área y el del perímetro (véase la Tabla 4.5).

Tabla 4.5
Mx explica cómo obtener el perímetro de una figura

Inv	¿Cómo se sabe la medida del perímetro de una figura?
Mx	Hay que ver sus lados y ver cuánto mide cada uno, todos juntos son el perímetro, porque al final se suman todas las medidas de los lados.

Para responder a la pregunta "¿cómo se puede obtener el área de un polígono?", el estudiante recurrió de inmediato a la triangulación como el procedimiento regular para obtener el área de cualquier polígono presentado (véase la Tabla 4.6).

Tabla 4.6
Mx explica el procedimiento para obtener el área de un polígono.

Inv	¿Cómo se puede obtener el área de un polígono?
Mx	Es fácil, parece difícil pero no, porque a los polígonos se les puede poner diagonales y esas diagonales forman triángulos, de cada triángulo yo puedo saber su área y después sumarlos todos y eso es lo que mide en total el área de la figura.

La triangulación no sólo le sirvió para obtener el área de los polígonos sino para justificar la posibilidad de la equidescomposición entre ellos, como lo puso de manifiesto su respuesta a la pregunta "¿Dos figuras diferentes pueden tener la misma área?" (véase la Tabla 4.7).

Tabla 4.7
Respuesta del estudiante Mx referente a la equidescomposición

Inv	¿Dos figuras diferentes pueden tener la misma área?
Mx	Sí, sí pueden, acuérdate de que cada figura puede tener adentro unos triángulos y esos triángulos se pueden acomodar diferente y se deforma la figura, cambia la forma, pero sigue siendo la misma área

Resultados: Durante la entrevista, se presentaron dificultades referentes a las operaciones básicas, sin embargo se pudieron subsanar mediante la utilización de la calculadora, lo que permitió que la investigación avanzara.

Los temas abordados durante la entrevista parecen haber sido adquiridos por el estudiante lo que se manifiesto principalmente en sus acciones.

Mx mostró seguridad a la ofrecer sus respuestas; sin embargo, la LSM siguió siendo una limitante para estructurar sus respuestas, Por lo que resulto más sencillo responder mediante acciones o incluso mediante procedimientos matemáticos.

Capítulo quinto

Proceso de adquisición III: Número Pi, longitud de Circunferencia y área del círculo

El presente capítulo expone la tercera y última etapa de la investigación. En él se presenta el análisis de las actividades realizadas en 19 sesiones de 3 horas cada una, para el tratamiento de: El número Pi, la longitud de la circunferencia, su expresión simbólica y el área del círculo y su expresión simbólica.

El contenido se distribuye en tres apartados: la presentación del análisis de las actividades realizadas, la descripción de las señas construidas durante el proceso y el análisis de los resultados correspondientes al proceso de indagación.

5.1 Número Pi

Arquímedes demostró su proposición 3 "*la razón de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es menor que* $3\frac{1}{7}$ *, pero mayor que* $3\frac{10}{71}$ ", hoy día equivalente a la proposición: $3\frac{10}{71} < pi < 3\frac{1}{7}$.

Para tal efecto siguió un procedimiento que lo condujo, a partir del hexágono, al cálculo del perímetro de polígonos regulares de 12, 24, 48 y 96 lados respectivamente, inscritos para la obtención de la cota inferior y circunscritos para la determinación de la cota superior.

Nuestro estudio consideró la cota superior que posibilitó el diseño de la estrategia para inducir la noción del número *pi*; utilizar el teorema de Tales, partir el diámetro en siete partes iguales, en relación con la parte proporcional $\frac{1}{7}$ del diámetro y tratar la noción con material concreto y bajo procedimiento figural.

5.1.1 Actividades.

Se diseñaron actividades correspondientes a la construcción de señas relativas a los elementos del círculo; a la construcción de *material concreto* (discos de conglomerado de diferentes radios) a efecto de realizar la comparación de la longitud de circunferencia a su diámetro y al uso del teorema de Tales con el propósito de dotar de sentido a la parte proporcional $\frac{1}{7}$.

5.1.1.1 Las partes del círculo.

Objetivo: Que identificaran los elementos del círculo y construyeran las señas respectivas.

Desarrollo: El tratamiento del número *pi* representó también el acercamiento al círculo. Se inició con la presentación de las partes de este último a los estudiantes, lo que requirió de la *construcción* de las siguientes señas: Circunferencia (véase la Figura 5.1 en apartado 5.4), diámetro (véase la Figura 5.2 en apartado 5.4), radio (véase la Figura 5.3 en apartado 5.4), arco (véase la Figura 5.4 en apartado 5.4) y cuerda (véase la Figura 5.5 en apartado 5.4).

Una vez presentados los elementos y construidas sus respectivas señas, se pidió a los estudiantes que los identificaran en una tarjeta que contenía un circulo (véase la Figura 5.6a) y escribieran cada una de sus partes (véase Figura 5.6b)

Resultados: Los tres estudiantes lograron realizar la identificación de los elementos del círculo con nombre en español y seña en LSM.

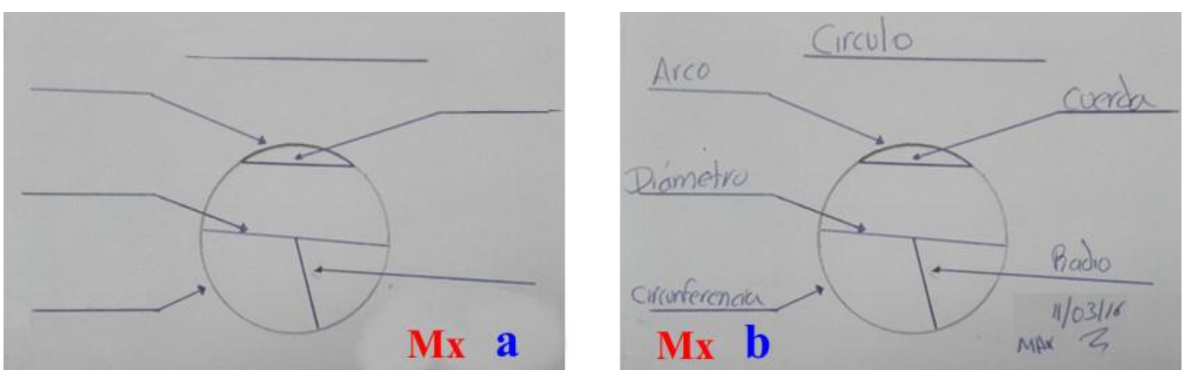


Figura 5.6 Identificación de los elementos del círculo

5.1.1.2 Tratamiento con material concreto.

Objetivo: Reconocer que la *razón* de la circunferencia de un círculo a su diámetro es la misma, independiente del tamaño del círculo, es decir, es constante y su nombre es Pi.

Desarrollo: Se contó con 6 círculos de aglomerado con sendos diámetros de 5, 10, 15, 20, 30 y 40 centímetros, que fueron la base de la actividad, que se desarrolló en *tres secuencias*. La *primera* consistió en obtener, mediante un listón, la noción cualitativa de la longitud de la circunferencia (**LC**), y pegar el listón en una superficie de papel debajo del círculo. En la *segunda* secuencia, los estudiantes usaron listón para obtener la noción cualitativa del diámetro: *finalmente,* en la tercera secuencia se comparó el listón del diámetro con respecto a la **LC** previamente obtenida (véase la Figura 5.7).

Resultados: Con la actividad de material concreto, los estudiantes pudieron constatar que el diámetro "cabía tres veces en la **LC**" y que siempre, expresaban, "sobraba un pedacito"

En principio, manifestaron que la parte que, según ellos, "sobraba" de la relación entre el diámetro y la **LC** se debía a un error de precisión en la medida con los listones. Sin embargo, tras la repetición de la actividad se dieron cuenta de que la proporción entre diámetro y **LC** era recurrente y constante.

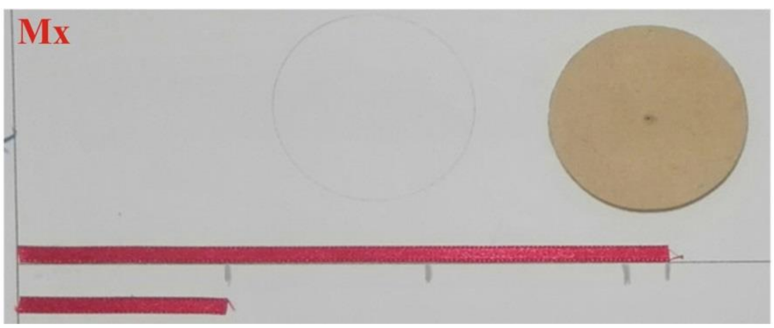


Figura 5.7 Tratamiento de la LC con material concreto

5.1.1.3 Relación proporcional entre la LC y el diámetro del Círculo.

Objetivo*:* Que los estudiantes identificaran la relación proporcional entre la longitud de circunferencia y el círculo.

Desarrollo: Mediante hojas de trabajo se les presentaron ocho círculos con radios de diferentes y se les pidió que con el uso del compás, obtuvieran la LC de cada uno. Una vez que lo realizaron, Os advirtió que cada vez que crecía la circunferencia, crecía también lo que llamaban el "pedacito sobrante".

Colocó en el escritorio todas las hojas de trabajo de manera que los círculos quedaran acomodados por tamaño de manera ascendente y mediante el uso del compás hacer una comparación entre cada uno de ellos, evidenciando así, ante Br (véase la Tabla 5.1), que cada vez que la circunferencia crecía, crecía también el que llamaron "pedacito sobrante" (véase la Figura 5.8).

Resultados: ambos estudiantes realizaron la actividad correctamente y pudieron identificar que había una relación entre el crecimiento del círculo y su LC.

Tabla 5.1
Diálogo entre Os y Br referente a la **LC**.

Seg	Est	Diálogo
1	**Os**	Mira, si éste (señalando el diámetro) es chico, el pedacito que sobra también es chico y cuando crece éste (señalando el diámetro) también crece el pedacito (demuestra con el compás que cada "pedacito" es más grande que el anterior al igual que las circunferencias) ¿Lo ves?
	Br	Sí, lo entiendo, si éste crece (señalando el diámetro), crece también el pedacito sobrante.

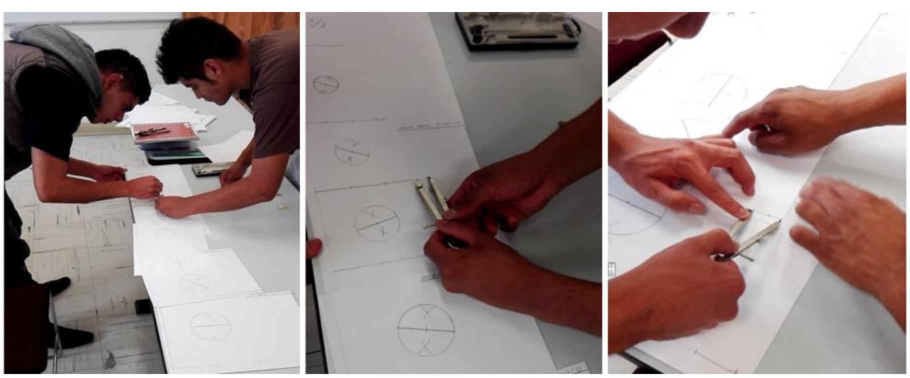


Figura 5.8 Secuencia de la explicación que realiza el estudiante Os a Br

5.1.1.4. Acercamiento cualitativo a la medida de la LC

Objetivo: Efectuar un acercamiento cualitativo a la obtención de la medida de la LC.

Desarrollo: Se le pidió a Mx que obtuviera mediante un listón la magnitud de la circunferencia de un círculo de aglomerado de 40 cm de diámetro, empero, el estudiante decidió hacer previamente una estimación cuantitativa mediante un cálculo mental, dando de ello una explicación (véase la tabla 5.2).

Tabla 5.2
Explicación de Mx respecto a la estimación de la LC

Seg	Est	Diálogo
1	**Mx**	Es muy fácil saber cuánto puede medir el diámetro, primero veo el radio porque es la mitad, yo le calculo más o menos unos 10 cm de radio y la otra parte es igual porque mide lo mismo así que el diámetro tienen que ser 20 cm. Luego ¿cuánto mide la circunferencia? Igual es fácil, este diámetro se saca tres veces por ejemplo este diámetro serían primero 20 cm la segunda serían 40 cm, la tercera 60 cm y ya, pero como siempre sobra un pedacito, yo le calculo que serían más o menos unos 65 cm.

Resultados: Aunque no calculó correctamente la medida del radio ya que no utilizó regla, se deduce que identificó la relación de dos a uno entre éste y el diámetro. Hasta ese momento de la investigación, los estudiantes sabían que existe también una relación entre la **LC** y el diámetro que obedecía, en sus expresiones, a **"tres diámetros más un pedacito"** y que si aumentaba la medida de la **LC** también aumentaba dicho "pedacito". Sin embargo, no había precisión con respecto a las dimensiones de la relación.

El material concreto se fue desplazando poco a poco, iniciando por retirar los círculos de aglomerado y el listón, para tratar sólo con círculos dibujados.

5.1.2. Aproximación a la constante: tratamiento figural

Se recurrió al *método de Arquímedes* relativo a la rectificación de la circunferencia, tres veces su diámetro más $\frac{1}{7}$ de él, es decir, LC $= \left(3 + \frac{1}{7}\right)\ veces\ el\ diámetro.$ Para tal efecto se utilizó el teorema de Tales, necesario para dividir el diámetro en siete partes y el uso de la seña correspondiente.

5.1.2.1 Actividades.

Se realizaron dos actividades, una con el propósito de obtener, mediante el uso del teorema de Tales, la razón $\frac{1}{7}$ del diámetro de un círculo; la otra con el objetivo de dar tratamiento a la razón $\frac{1}{7}$ del diámetro para la obtención de su expresión decimal y dar sentido a la noción de la constante Pi

5.1.2.1.1. Uso del teorema de Tales para la determinar la razón $\frac{1}{7}$ del diámetro de un círculo.

Objetivo: Realizar la partición del diámetro de un círculo en 7 partes iguales.

Desarrollo: La introducción de la proposición 3 de Arquímedes comenzó poniendo en práctica el teorema de Tales referente a la partición de un segmento en 10 partes iguales (Astorga, 2013) que los estudiantes operaban con relativa facilidad desde el inicio de la investigación.

Se les pidió que realizaran la partición del diámetro de cada circunferencia en siete partes iguales (antes, *por el tratamiento de la longitud, habían realizado la partición de un segmento en diez partes iguales).*

Resultados: Los estudiantes no mostraron dificultades significativas en la realización de la actividad, y lograron parar de la partición en 10 de un segmento dado a la partición en 7 de un diámetro (véase la Figura 5.9).

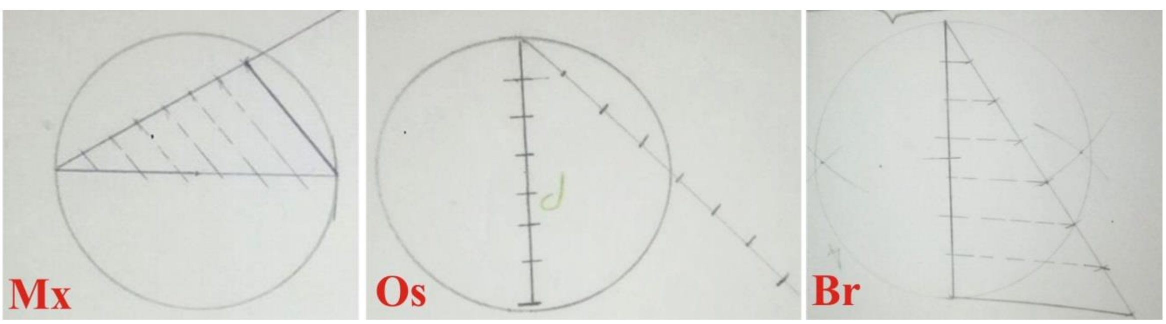


Figura 5.9 Partición del diámetro en 7 partes iguales por Mx, Os y Br

5.1.2.1.2 Del "pedacito sobrante" a la identificación de la constante Pi

Objetivo: Identificar la idea de "pedacito sobrante", con la razón "$\frac{1}{7}$" , que los estudiantes utilizaban hasta ese momento.

Desarrollo: Mediante el teorema de Tales, lo estudiantes realizaron la división del diámetro en 7 y tomaron una de ellas para compararlo con lo que llamaban "pedacito sobrante" y advirtieron que eran muy similar entre ellos.

Fue necesario realizar una ***secuencia de actividades*** que permitieran tener un acercamiento a la representación de fracción, con la finalidad de que le dieran sentido a la "expresión decimal" de la razón $\frac{1}{7}$.

En la *primera secuencia* se hizo uso de la calculadora para obtener la expresión decimal (de hasta cuatro cifras) de las fracciones: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$ (véase la Figura 5.10).

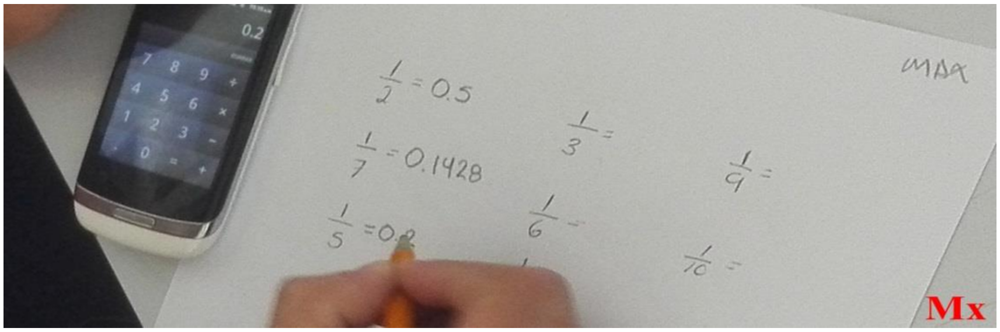


Figura 5.10 Uso de la calculadora para obtener la expresión decimal

Luego *se ordenaron las expresiones numéricas* mediante una comparación, en la que se distinguían las características de los tres tipos de decimales:

- Decimales **exactos:** $\frac{1}{2} = 0.5$; $\frac{1}{4} = 0.25$; $\frac{1}{5} = 0.2$; $\frac{1}{8} = 0.125$; $\frac{1}{10} = 0.1$
- Decimales **periódicos**: $\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$; $\frac{1}{6} = 0.166666\ldots$; $\frac{1}{9} = 0.111111\ldots$
- Decimales **periódicos mixtos**: $\frac{1}{7} = 0.\mathbf{142857}142857\ldots$

La *segunda secuencia consistió* en el tratamiento de la longitud de circunferencia en relación con su diámetro, resultado de las actividades realizadas con material concreto, en su representación gráfica y mediante la aplicación del método de Arquímedes, dando inicio al proceso de sustituciones que permitieran transitar hacia una representación cuasi-formal, comenzando por asignarle a lo que los estudiantes llamaban "pedacito sobrante" el valor de $\frac{1}{7}$, es decir:

Longitud de la circunferencia ***es aproximadamente*** **=** $\left(3+\frac{1}{7}\right)$ $\mathit{veces\ el\ diámetro}$

La palabra diámetro fue sustituida por la literal **d**. Para hacer referencia a la **Longitud de Circunferencia** se construyó su respectiva seña (véase la Figura 5.11 en apartado 5.4) y la literal **C** para la obtención de la expresión:

$$\mathbf{C} = \left(3+\frac{1}{7}\right) \ \textbf{\textit{veces}}\ \mathbf{d}$$

El siguiente paso consistió en obtener el resultado decimal de la *razón* $\frac{1}{7}$, *es decir 0.1428, ya que se acordó utilizar sólo las primeras cuatro cifras significativas a partir del punto decimal*:

$$\mathbf{3 + \frac{1}{7} = 3 + 0.1428}$$

Finalmente se sumaron las dos cantidades, obteniendo la cifra: 3.1428 y se indicó que era un valor de uso ya que el valor preciso contiene una cantidad indefinida de dígitos, y se avanzó a la siguiente representación:

$$\mathbf{C = (3.1428)}\ \textbf{\textit{veces}}\ \mathbf{d}$$

La siguiente sustitución tuvo que ver con la palabra *veces* para lo cual fue necesario realizar actividades referentes a las diferentes formas de representación de la operación de multiplicación: **( ) ( ),** $\times$ **,** $\cdot$. (véase la Figura 5.12).

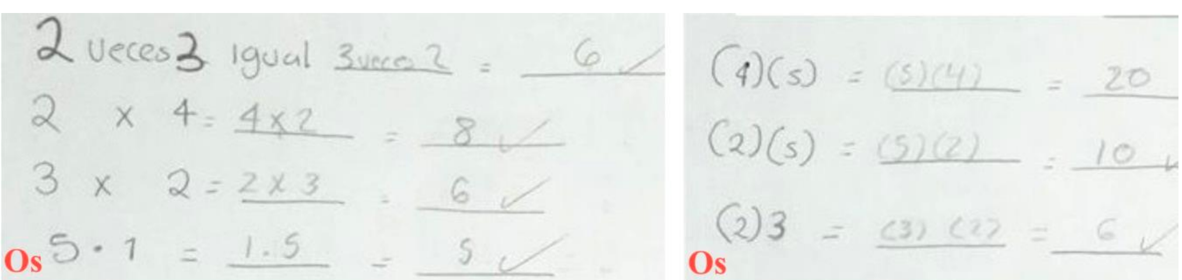


Figura 5.12 Diferentes representaciones de la operación de multiplicación

De esta forma se pudo sustituir la palabra veces por el signo correspondiente “ $\times$” es decir:

$$\mathbf{C = (3.1428) \times d}$$

Previo al siguiente paso, se realizaron con los estudiantes ejercicios de comparación de orden entre diversas cantidades (véase la Figura 5.13) de las cuales surgieron las señas para: *mayor que* (véase la Figura 5.14 en apartado 5.4) y *menor que* (véase la Figura 5.15 en apartado 5.4).

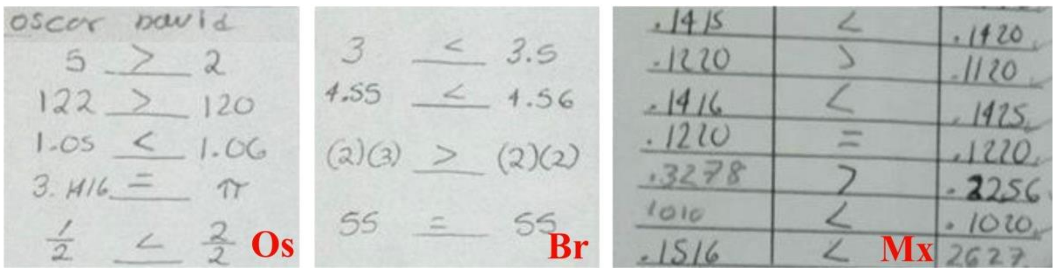


Figura 5.13 Ejercicios de comparación y orden

Concluidas las actividades referentes a la comparación para ordenar, se presentó a los estudiantes ***el número 3.1416*** y se les pidió que realizaran una comparación de orden ***con el 3.1428***. Al terminar la comparación, se les explicó que ninguno de los dos números era realmente exacto ya que incluso el 3.1416 también era un número con una cantidad de dígitos indefinida, empero, era un poco más preciso que el 3.1428 por lo que era más conveniente utilizarlo.

Los estudiantes no mostraron dificultades para transitar del 3.1428 al 3.1416 sustituyéndolo rápidamente en su representación para llegar a:

$$\mathbf{C = (3.1416) \times d}$$

Enseguida se les explicó que el número 3.1416 tenía un nombre en español es decir Pi, una representación en matemáticas: π, y que debía tener una seña en LSM, misma que fue construida por los estudiantes (véase la Figura 5.16 en apartado 5.4) de tal forma que pudieron realizar la siguiente representación:

$$\mathbf{3.1416 = Pi = \pi}$$

Resultados: Los tres estudiantes lograron acceder al contenido de manera correcta, a pesar de que fueron varios los temas complementarios que se tuvieron que abordar en el trayecto para lograr el objetivo propuesto (véase la Figura 5.17).

El procedimiento de Mx presenta una incorrección en la secuencia (véase la Figura 5.17c en color rosa), que parece deberse a una distracción, pues la presentó por única ocasión en un contenido que, incluso, llegó a explicar correctamente a sus compañeros.

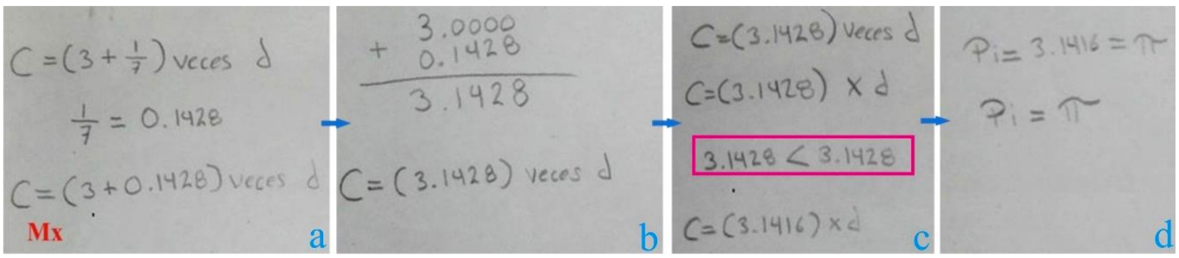


Figura 5.17 Proceso del estudiante Mx en la construcción del número Pi

5.2 Longitud de la circunferencia: expresión simbólica

Una vez que los estudiantes tuvieron clara la noción básica de **Pi**, se trabajó con la **LC**, haciéndoles ver que el diámetro, representado por la literal **d**, era equivalente a la representación **2r**, ya que significaba multiplicar el radio por dos, con lo cual se obtenía el diámetro, es decir **d = 2×r**. Así realizaron la transición correspondiente a la representación de la **LC** (véase la Figura 5.18).

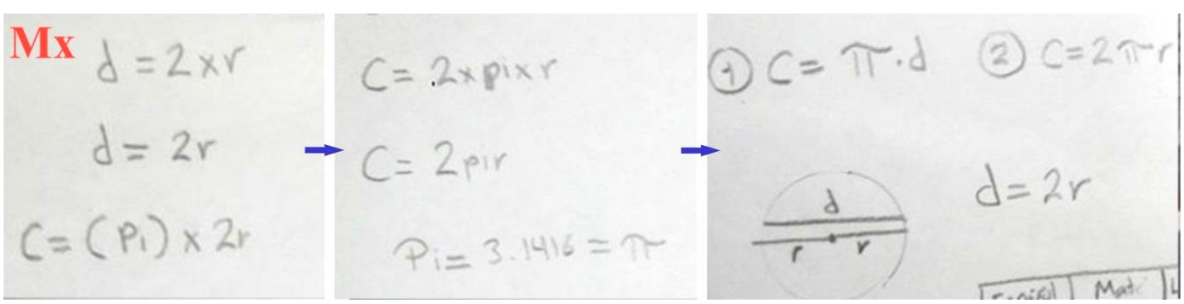


Figura 5.18 Transición a la expresión simbólica de la LC

5.2.1 Actividades.

Se realizaron dos actividades, una con el propósito de obtener la LC a partir de un círculo dado y la otra mediante el conocimiento de su radio.

5.2.1.1 Obtención de la LC dado un círculo.

Objetivos: a) identificar y determinar la medida de su diámetro, b) calcular su LC mediante la aplicación de las expresiones **C= πd** y **C= 2πr.**

Desarrollo: Una vez concluido el proceso por el cual los estudiantes llegaron a las expresiones **C= πd** y **C= 2πr**, se realizaron actividades para la obtención de la **LC**; se le entregó a Mx una tarjeta con una circunferencia como única información (véase la Figura 5.19a), y se le pidió que obtuviera su LC, para lo cual realizó el proceso correspondiente (véase la Figura 5.19b)

Resultados: El estudiante logró realizar la actividad correctamente y mediante las dos fórmulas ya conocidas, obtuvo en ambos casos el mismo resultado y finalmente trazó la LC con el compás.

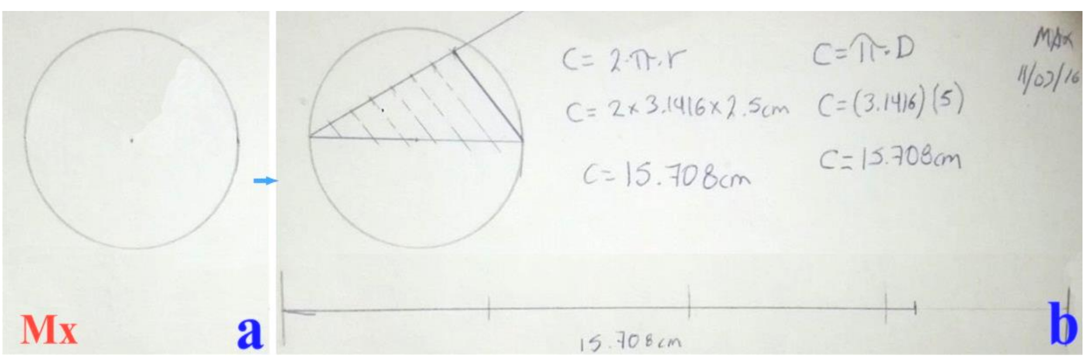


Figura 5.19 Obtención de la medida de la LC

5.2.1.2 Obtención de la LC de un círculo a partir dela medida del radio.

Objetivo: Dado un radio, obtener la LC.

Desarrollo: Se le presentó a Os una tarjeta con la medida del radio como único dato (véase la Figura 5.20a), y a partir de él, obtuvo la medida de la LC y posteriormente trazó con el compás, la circunferencia correspondiente al radio dado.

Resultados: Os logró realizar la actividad correctamente, aplicando y sustituyendo la representación 2•π•r, con lo que obtuvo el resultado para después trazár el círculo y la LC correspondiente a los datos obtenidos (véase la Figura 5.20b).

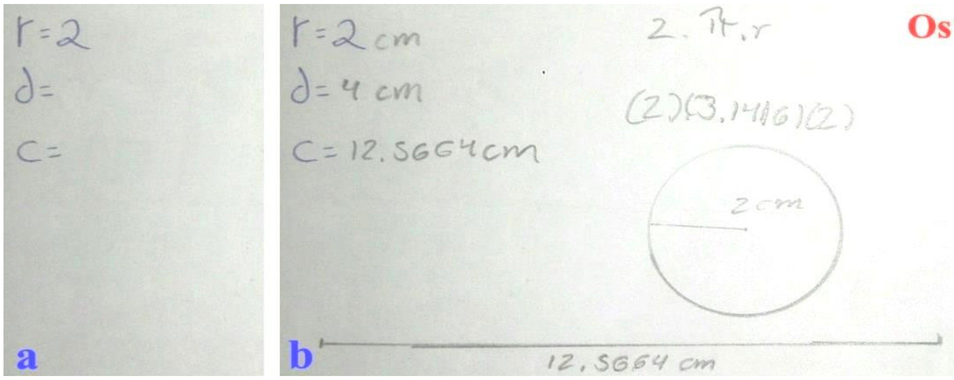


Figura 5.20 Obtención de la medida de la LC por parte de Os

5.3 Área del círculo

5.3.1 Arquímedes: proposición 1. Tratamiento gráfico

Respecto a la "Medida del círculo", Arquímedes demostró su proposición 1: "El área de cualquier círculo es igual a la del triángulo rectángulo en el cual uno de sus lados el del ángulo recto es igual al radio y el otro a la longitud de la circunferencia del círculo".

Para ello utilizó el método de reducción al absurdo. Su punto de partida fue de orden figural, la superficie de un triángulo rectángulo medible y la rectificación de la longitud de la circunferencia.

Para los propósitos de nuestra investigación, para el diseño de las actividades realizadas en sesiones de enseñanza consideramos el acercamiento figural de la proposición (véase la Figura 5.21).

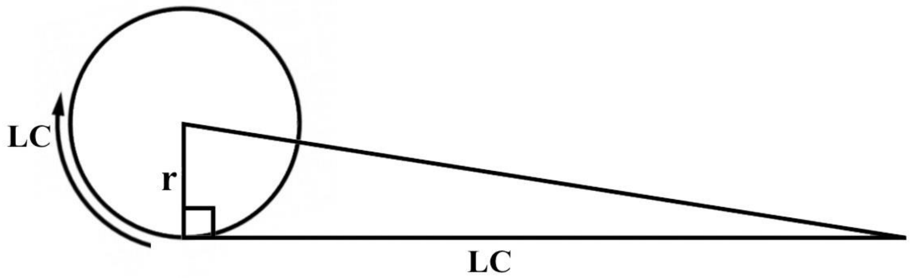


Figura 5.21 Interpretación figural de la proposición 1 de Arquímedes

5.3.1.1 Actividad

Se realizó una actividad con el propósito de fortalecer la noción cualitativa del área del círculo mediante la proposición 1 de Arquímedes.

5.3.1.1.1 Proposición 1 de Arquímedes

Objetivo: Acercar a los estudiantes a la noción cualitativa del área del círculo.

Desarrollo: La actividad consistió en la construcción de un triángulo a partir de un círculo, cuyo cateto mayor es igual a la LC y el cateto menor equivale al radio.

Se expuso en el pizarrón por parte del investigador la construcción de una circunferencia de la cual se obtuvo el radio y posteriormente la longitud de la circunferencia para formar un triángulo con ambos elementos, posteriormente se le pidió al Mx que reprodujera el procedimiento a manera de explicación a sus compañeros (véase la Figura 5.22).

Re**sultados**: Aparentemente Mx logró comprender la actividad e incluso realizó una explicación en el pizarrón.

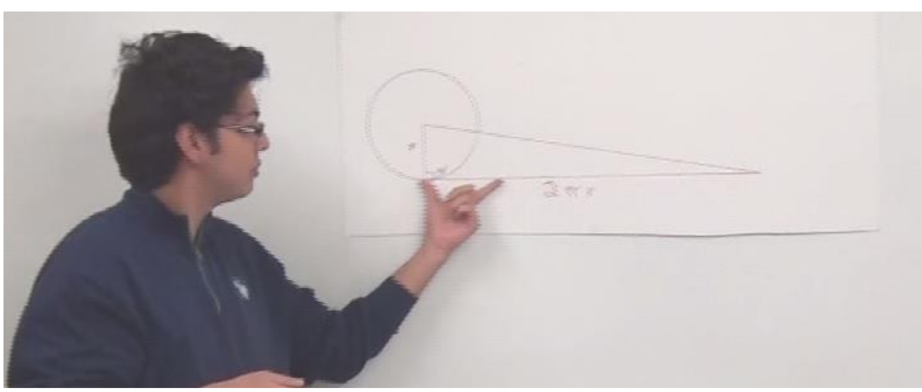


Figura 5.22 Mx explicando la proposición 1

5.3.2 Expresión simbólica: (Pi) r^2

A partir de la proposición 1 de Arquímedes se comenzó en sesión de enseñanza con un proceso de sustitución para transitar al área de fórmula del círculo. Luego se le pidió a Mx que replicara el procedimiento a manera de explicación a sus compañeros (véase la Figura 5.23).

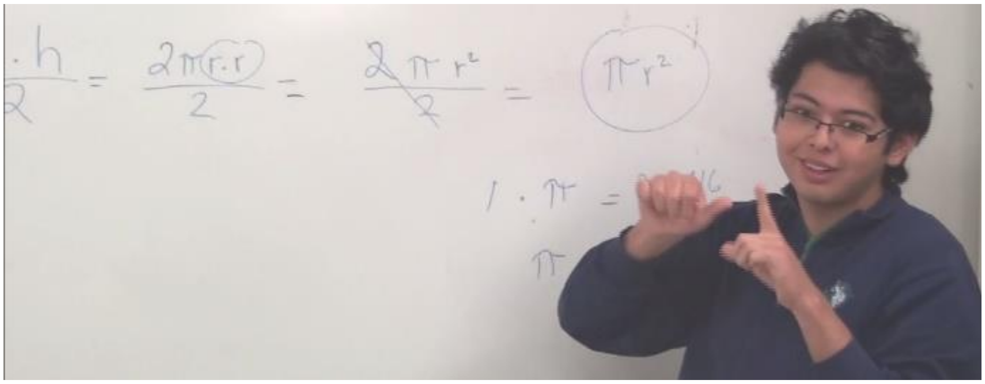


Figura 5.23 Proceso de sustitución a partir de la proposición 1 de Arquímedes

Se partió de una fórmula conocida para ellos, la del área del triángulo, es decir $\frac{b.h}{2}$. Primero sustituyeron el valor de **b** que, como los estudiantes ya habían visto, es igual a la **LC**, es decir **2πr;** y luego el de **h** por el de **r**, avanzando a $\frac{2\pi r.r}{2}$.

Previamente se realizaron actividades complementarias que permitieran del proceso de sustitución, entre ellas se realizaron ejercicios de elevación a potencias por multiplicación repetida (véase la Figura 5.24). De esa forma se transitó de $\frac{2\pi r.r}{2}$ a $\frac{2\pi r^2}{2}$.

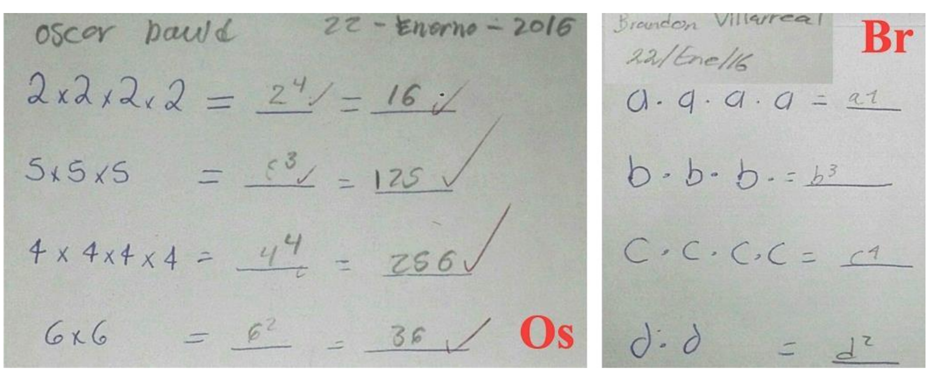


Figura 5.24 Ejercicios de elevación a potencias

Otra actividad previa complementaria de sustitución consistió en trabajar ejercicios de reducción (véase la Figura 5.25), para transitar de la representación $\frac{2\pi r^2}{2}$ a πr^2.

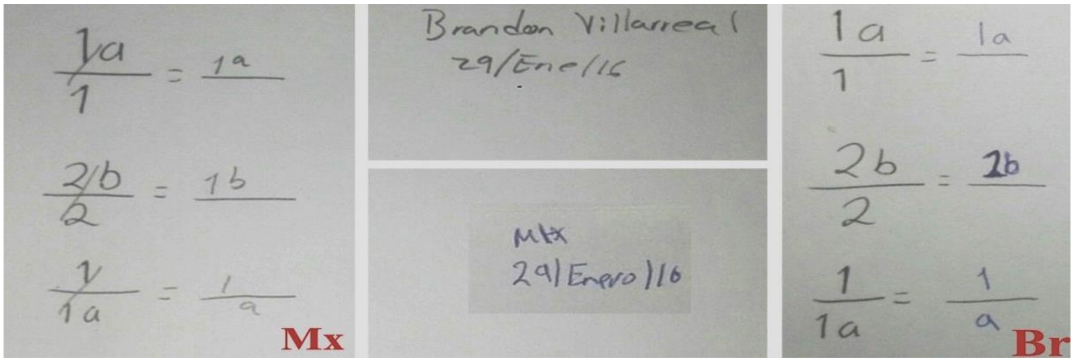


Figura 5.25 Ejercicios de reducción

5.3.2.1 Actividades.

Se realizaron tres actividades para poner en práctica los contenidos tratados referentes a la obtención del área de un círculo, ya sea de forma sencilla o mediante la presentación de áreas parciales (*coronas circulares y regiones sombreadas*)

5.3.2.1.1 Obtención del área de un círculo

Objetivo: Dado un círculo, obtener su área

Desarrollo: Al concluir el proceso por el cual los estudiantes llegaron a la expresión $\boldsymbol{\pi}$ $\mathbf{r}^{2,}$ se realizaron ejercicios para obtener la medida del área de los círculos presentados; se le dio a Mx una tarjeta con un círculo (véase la Figura 5.26a), del cual obtuvo la medida del radio para que calculara la LC y luego el área del círculo

Resultados: Mx realizó con aparente facilidad la actividad y obtuvo el resultado solicitado de manera correcta (véase la Figura 5.26b).

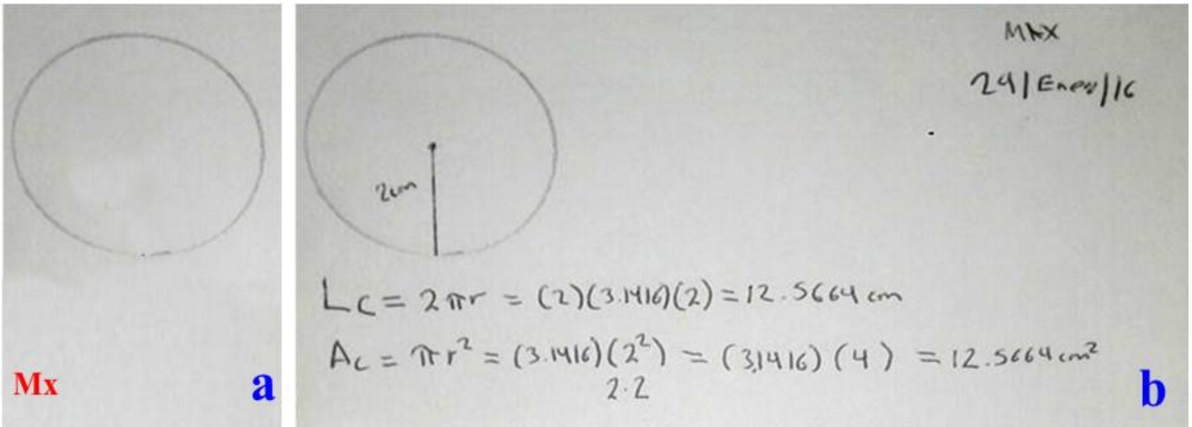


Figura 5.26 Mx obtiene las medidas del área y LC de un círculo dado

5.3.2.1.2 Aplicaciones

Se realizaron dos actividades para aplicar el procedimiento de obtención de área de un círculo en regiones parciales (corona circular y región sombreada)

5.3.2.1.2.1 Resolución del problema: Obtener el área de una corona circular.

Objetivo: Aplicar el procedimiento para la obtención del área de un círculo en una corona circular.

Desarrollo: Como actividad de conclusión de la enseñanza se puso en práctica la aplicación de problemas propuestos por Baldor (2008) correspondientes al tratamiento de la circunferencia y el círculo: ¿Cuál es el área de una corona circular de radios R y r? Se presentaron a los estudiantes, las imágenes de coronas circulares para obtener de ellas su área, así como tres hojas de trabajo en las cuales debían obtener el área de las coronas circulares dadas (véase la Figura 5.27).

Resultados: Mx obtuvo el área del círculo más grande al cual nombra “1”, para después obtener la del círculo pequeño, al que nombró “2”. Enseguida restó el área “2” del área “1” para así obtener el valor solicitado.

Llamó la atención que recurrentemente Mx buscó sustituir las representaciones figurales por simbólicas al nombrar cada círculo con un número y al final escribir una especie de fórmula para obtener el área de la corona circular (véase la Figura 5.27a).

En su desempeño, Br mostró una dificultad recurrente con la sustitución de valores en las fórmulas (véase la Figura 5.27b) en la última etapa de la investigación referida al círculo. El estudiante comenzó con la fórmula πr^2, previa obtención correcta de las medidas de los dos radios; sin embargo, conservó π a pesar de que colocó su valor pero sin realizar sustitución, y continuó con el proceso de manera regular. Al final simplemente cambió π por la representación de área (A) para indicar el resultado.

Os siguió un procedimiento parecido al de Mx y obtuvo al final el resultado correcto solicitado (véase la Figura 5.27c).

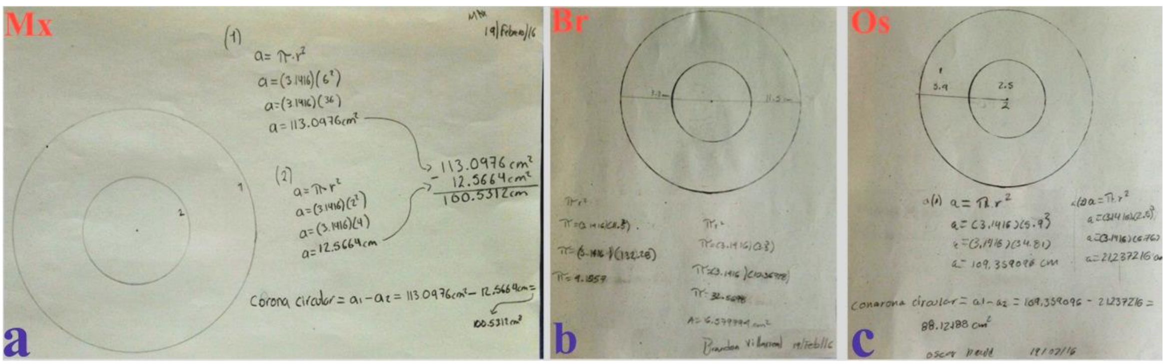


Figura 5.27 Resolución del problema de corona circular

5.3.2.1.2.2 Resolución del problema: Obtención de la medida de las regiones sombreadas

Objetivo: Aplicar el procedimiento para la obtención del área de un rectángulo y un círculo en una región sombreada.

Desarrollo: Se le presentó a Mx una hoja de trabajo, que contenía un círculo inscrito en un rectángulo, par que determinara sólo la medida del área sombreada (véase la Figura 5.28).

Resultados: Mx no manifestó dificultades evidentes en la actividad, recurrió a un procedimiento similar al utilizado en la corona circular, es decir, obtuvo primero, el área total del cuadrado al aplicar la formula $b{\cdot}h$, luego obtuvo el área del círculo mediante la aplicación de la formula πr^2 el área del círculo; finalmente restó del área del rectángulo, la del círculo y así dio la respuesta solicitada.

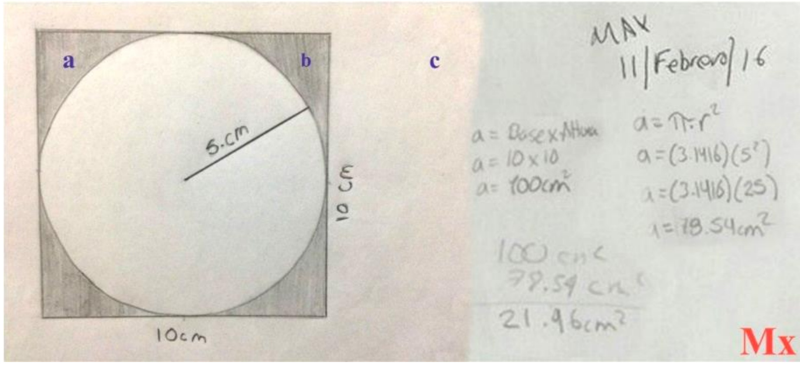


Figura 5.28 Resolución de Mx del problema de obtención de áreas sombreadas

5.4 Señas propuestas constituidas

En esta sección describimos las propuestas de señas construidas a partir de los temas referentes a: El número Pi, la longitud de la circunferencia: expresión simbólica y el área del círculo.

5.4.1 Circunferencia

Circunferencia

Seña bimanual simétrica, con movimiento.

Mano 2: Sólo los dedos índice y pulgar extendidos con las puntas yemas de ambos juntas, la palma en dirección al observador.

Mano 1: Sólo los dedos índice y pulgar extendidos con las puntas yemas de ambos juntas, la palma en dirección al observador.

Realización de la seña: las manos comienzan juntas por las puntas de los dedos índice y pulgar, y se separan una de la otra dibujando en el aire un una media circunferencia hacia arriba para terminar de nuevo juntas.

Figura 5.1 Descripción de la seña: CIRCUNFERENCIA

5.4.2 Diámetro

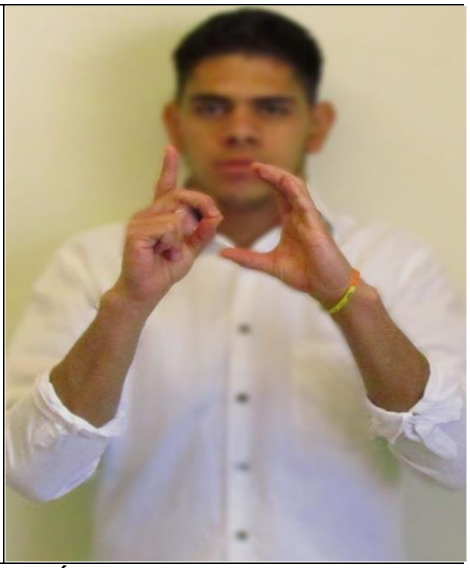
Diámetro Seña bimanual asimétrica, con movimiento. **Mano 2**: Los dedos meñique, anular, medio e índice cerrados, semiextendidos, el pulgar abierto, toda la mano forma una "C". **Mano 1**: El dedo índice extendido, los demás dedos con las puntas unidas entre ellos (formando la letra "d"). **Realización de la seña:** La mano 1 hace un recorrido horizontal desde ya coyuntura entre el dedo pulgar e índice de la mano 2 hacia fuera de ella marcando un diámetro en el medio círculo que hace la mano 2.	

Figura 5.2 Descripción de la seña: DIÁMETRO

5.4.3 Radio

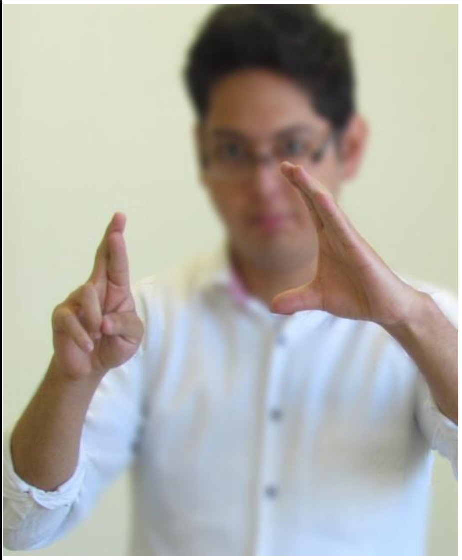
Radio Seña bimanual asimétrica, con movimiento. **Mano 2**: Los dedos el meñique, anular, medio e índice cerrados, semiextendidos, el pulgar abierto, toda la mano forma una "C". **Mano 1**: Los dedos meñique, anular y pulgar unidos por las puntas, los dedos medio e índice extendidos y entrelazados (formando la letra "r"). **Realización de la seña:** La mano 1 recorre horizontalmente desde el centro de la mano 2 hacia fuera de ella marcando un radio en el medio círculo que hace la mano 2	

Figura 5.3 Descripción de la seña: RADIO

5.4.4 Arco

Arco Seña bimanual asimétrica, con movimiento. **Mano 2**: Los dedos meñique, anular, medio e índice cerrados, el pulgar abierto, toda la mano forma una "C". **Mano 1**: Los dedos meñique, anular, medio, e índice, cerrados, el dedo pulgar abierto, la palma contra el signante (formando la letra "a"). **Realización de la seña:** La mano 1 hace un recorrido horizontal desde la primera falange del dedo índice de la mano 2 hacia fuera de ella.	

Figura 5.4 Descripción de la seña: ARCO

5.4.5 Cuerda

Cuerda Seña bimanual asimétrica, con movimiento. **Mano 2**: Los dedos semiextendidos, el meñique, anular, medio e índice cerrados, el pulgar abierto, toda la mano forma una "C". **Mano 1**: Los dedos semiextendidos, el meñique, anular, medio e índice cerrados, el pulgar abierto, toda la mano forma una "C" invertida. **Realización de la seña:** La punta del dedo pulgar de la mano 1 parte de la primera falange del dedo índice de la mano 2 y hace un recorrido horizontal hacia fuera.	

Figura 5.5 Descripción de la seña: CUERDA

5.4.6 Longitud de Circunferencia

Longitud de Circunferencia

Seña bimanual asimétrica, con movimiento, compuesta de la seña “longitud” y “circunferencia”.

Longitud

Mano 2: Los dedos meñique y pulgar con las puntas unidas, los dedos anular, medio e índice, extendidos y cerrados, la palma hacia abajo.

Mano 1: Los dedos meñique y pulgar con las puntas unidas, los dedos anular, medio e índice, extendidos y cerrados, la palma hacia abajo.

Realización de la seña: El dedo anular de la mano 2 unido al dedo índice de la mano 1, la cual hace un recorrido horizontal hacia el frente, terminando con el dedo meñique levantado. Finalmente se signa la palabra “Circunferencia”

Figura 5.11 Descripción de la seña: LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA

5.4.7 Mayor que

Mayor que

Seña bimanual asimétrica, con movimiento.

Mano 2: Los dedos índice y medio, extendidos y abiertos formando un “V” horizontal, con la palma hacia el signante.

Mano 1: Todos los dedos extendidos y cerrados, la palma hacia abajo.

Realización de la seña: La mano 2 se ubica sobre la mano 1 y se eleva un poco en un movimiento vertical.

Figura 5.14 Descripción de la seña: MAYOR QUE

5.4.8 Menor que

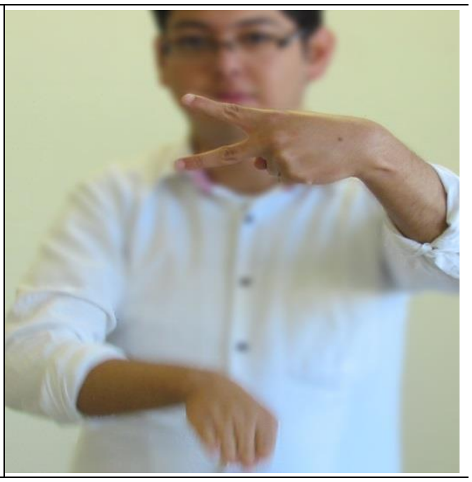
Menor que Seña bimanual asimétrica, con movimiento. **Mano 2**: Los dedos índice y medio, extendidos y abiertos formando un “V” horizontal, con la palma hacia el signante. **Mano 1**: Todos los dedos extendidos y cerrados, la palma hacia abajo. **Realización de la seña:** La mano 2 se sitúa bajo la mano 1 y hace un movimiento vertical hacia abajo.	

Figura 5.15 Descripción de la seña: MENOR QUE

5.4.9 Pi

Pi Seña bimanual asimétrica, sin movimiento. **Mano 2**: Los dedos meñique, anular, medio y pulgar doblados, el dedo índice extendido y arqueado, la palma hacia abajo. **Mano 1**: Los dedos meñique, anular y anular doblados, los dedos índice y medio extendidos y ligeramente abiertos (formando la letra “V”) la palma frente al signante. **Realización de la seña:** El dedo índice de la mano 2 sobre las puntas de los dedos medio e índice de la mano 1.	

Figura 5.16 Descripción de la seña: PI

5.5 Comunicación entre pares

En sesión de indagación, Mx explicó, en el pizarrón, a Br y Os los temas de Pi, la longitud de la circunferencia: expresión simbólica y el área del círculo con el objetivo de aclarar dudas que se presentaron en la enseñanza (véase la Figura 5.28).

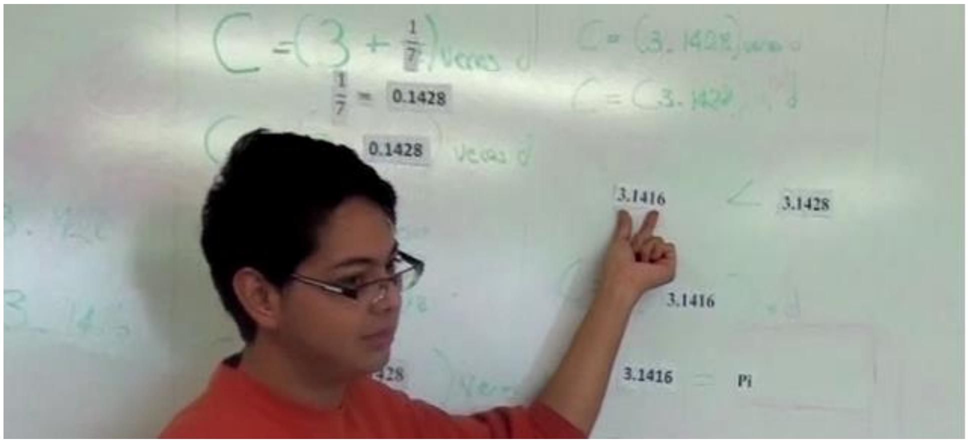


Figura 5.28 Mx explica en el pizarrón a Br y Os el tema: Pi

5.5.1 Pi.

Mx explicó el proceso de sustitución para llegar a las diferentes representaciones de Pi, y recordó a sus compañeros la relación entre la LC y el diámetro que le da un valor aproximado de una de siete partes a lo que antes llamaban “pedacito” o “sobrante” (véase la Tabla 5.3).

Tabla 5.3
Max explica a Br y Os el proceso para llegar a la representación de Pi

Int	Diálogo
Mx	Miren aquí tenemos que la LC es igual a tres más uno sobre siete veces d, ese tres más uno sobre siete ya lo vimos antes, ¿recuerdan?.
Os	Sí, recuerdo
Mx	Son los tres diámetros de la circunferencia más el pedacito que sobra que ya sabemos que sale de partir el diámetro en siete y tomar una de esas siente partes.

Enseguida, Mx hizo uso del aspecto cuantitativo al sustituir el $\left(3 + \frac{1}{7}\right)$ por 3.1428 haciendo hincapié ante sus compañeros, en que ambas representaciones son equivalentes (véase la Tabla 5.4).

Tabla 5.4
Max explica a Br y Os el proceso para llegar a la representación de Pi

Int	Diálogo
Mx	Uno sobre siete es igual a 0.1428. Ahora lo que vamos a hacer es una suma del tres más el 0.1428, es muy fácil (hace la suma) el resultado es 3.1428 y es lo mismo que acá arriba (señalando la representación, **C =** $\left(3 + \frac{1}{7}\right)$ ***veces* d),** es igual
Br	Es igual
Mx	Pero ahora ya no vamos a poner todo eso, ya nada más vamos a poner 3.1428.

Finalmente hizo referencia, a la relación de orden entre el 3.1428 y el 3,1416, explicándole a sus compañeros que este último se acerca con mayor precisión a la relación entre la LC y el diámetro. Así mismo les recordó las diferentes representaciones con las que habrían de tratar el *pi*, es decir, en español, matemáticas y LSM (véase la Tabla 5.5).

Tabla 5.5
Mx explicó a Br y Os el proceso para llegar a la representación de Pi

Int	Diálogo
Mx	El 3.1428 está bien pero ya vimos que hay otro número que es más preciso que es poquito menor que el 3.1428, es el 3.1416, ese número tiene un nombre en español, se llama Pi, en matemáticas se escribe π y en LSM le pusimos…
Os	(signa la palabra) Pi

5.5.2 Longitud de Circunferencia: Expresión simbólica.

Una vez revisado el tema de Pi, Mx continuó la explicación a sus compañeros Br y Os referente al tema de la expresión simbólica de la LC, en la Tabla 5.6 se describe la explicación del estudiante, en la cual hizo referencia a las diferentes formas de representación de la multiplicación para sustituir la palabra *veces* por el signo $\times$, asimismo, reiteró el valor del número Pi y concluyó con la representación *(Pi)*$\times$*d*.

Tabla 5.6
Mx explica a Br y Os el proceso para llegar a dos representaciones de la fórmula para obtener la longitud de circunferencia.

Int	**Diálogo**
Mx	¿Se acuerdan que vimos que había varias formas de multiplicar?
Os	(Contesta con algo de duda) Sí
Mx	Con la equis o con los paréntesis o con el punto o con la palabra veces, pero es muy larga y la vamos a cambiar por la x pero es lo mismo, pero en vez de poner “veces d” vamos a poner “x d” ¿de acuerdo? En vez de poner 3.1416 veces d podemos poner pi porque ya sabemos que es lo mismo y en vez de veces ponemos por (x) pi por d (señalando la representación (pi)x d)

Enseguida, Mx recurrió a su explicación respecto a la representación π en sustitución de pi, recordando a sus compañeros que se trata de términos equivalentes (véase la Figura 5.7).

Tabla 5.7
Mx recuerda a Br y a Os que Pi y π son representaciones equivalentes

Int	**Dialogo**
Mx	Pero recuerden que en vez de poner Pi podemos poner π porque es lo mismo, tiene su nombre en español y en matemáticas, así (señalando la representación (π) x d).
Br	(Repitiendo las señas realizadas por Mx) Pi x d.

Terminó haciendo referencia a las dos diferentes representaciones de la fórmula para obtener la longitud de circunferencia, con base en la relación entre el diámetro y el radio, reiterando a sus compañeros que ambas representaciones son equivalentes (véase la Tabla 5.8).

Tabla 5.8
Mx explica a Br y Os las dos representaciones para obtener la LC.

Int	Explicación
Mx	Ésta es la fórmula para saber la longitud de la circunferencia pero son dos fórmulas porque el diámetro es igual a dos radios así (señala la representación d= 2r). Entonces podemos poner también Pi por dos radios (señalando la representación (π)2r pero como da lo mismo como pongamos los números en la multiplicación, podemos poner dos pi por radio. Entonces tenemos dos fórmulas, pero que son iguales, podemos escoger cualquiera de las dos (señala las representaciones (π)x d y 2(π)r)

5.5.3 El área del círculo.

Mx expuso ante Br y Os el proceso por el cual se obtiene la fórmula para saber la medida del área de un círculo, explicó de forma básica la proposición 1 de Arquímedes (véase la Tabla 5.9).

Tabla 5.9
Mx les explicó el proceso para obtener el área de un círculo

Int	Diálogo
Mx	Miren, vean bien este triángulo, (señalando el pizarrón). Este lado del triángulo mide tres diámetros de este círculo (señala el cateto mayor) un diámetro, dos diámetros, tres diámetros y un pedacito más. Este lado es el Pi
Os	¿Por qué?
	Porque desenrollamos la circunferencia. Este lado del triángulo, la altura, mide lo mismo que el radio del círculo, luego con una diagonal lo hacemos ya un triángulo.

Finalmente explicó a sus compañeros el proceso de sustituciones por el que transita la forma del área del triángulo para llegar a la representación de la fórmula para obtener el área de un círculo (véase la Tabla 5.10).

Tabla 5.10
Mx explica a Br y Os el proceso para obtener el área de un círculo

Int	Diálogo
Mx	¿Se acuerdan de la fórmula para el área de triángulo?
Os	Base por altura entre dos.
Mx	Sí, así, base por altura sobre dos. Pero miren, la base del triángulo es igual a dos por pi por radio, ya dijimos porqué, entonces se puede poner también así (señalando la representación $\frac{2\pi r.r}{2}$), pero aquí tenemos dos veces el radio y acuérdense que ya vimos que se puede poner también así porque es una multiplicación (señalando la representación $\frac{2\pi r^2}{2}$); y aquí fíjense que tenemos igual un dos arriba y un dos abajo, ya vimos que no se ponen (hace el proceso de reducción rayando ambos números), entonces ya nada más nos queda πr^2

Resultados de la indagación: Al finalizar los temas, los tres estudiantes lograron obtener la medida de la longitud de circunferencias y la del área de cualquier círculo presentado, así como con el dato de la medida del diámetro o radio de cualquier círculo.

Tanto Mx como Os mostraron facilidad al realizar sustitución de datos en las fórmulas obtenidas. Br, por su parte, tuvo dificultades al aplicar la fórmulas, específicamente en el proceso de sustitución de los datos presentados.

Los tres estudiantes hicieron uso constante de la mayoría de las señas construidas a lo largo del proceso de investigación. Con respecto a las últimas señas construidas, se notó una mayor participación de los tres estudiantes e incluso se suscitaron varios debates entre ellos para poder llegar a un acuerdo en cuanto a las señas asignadas.

La participación de los tres estudiantes en la recta final de la investigación se intensificó y se notó un interés mayor. Llamó la atención que a pesar de haber tenido varias inasistencias, el estudiante Os no mostró dificultades para nivelarse en los contenidos presentados a sus compañeros.

Capítulo sexto

Estudio de casos

El presente capítulo expone la última entrevista realizada a los tres estudiantes, en la que se abarcaron los temas de: área de rectángulos, área de triángulos, equidescomposición, área y perímetro de polígonos, área de polígonos, longitud de circunferencia, el Pi y área del círculo. Las preguntas que integraron la entrevista fueron las siguientes:

- ¿Qué es el área? (con ejercicio de obtención de área)
- ¿Cómo obtienes el área de un triángulo? (mediante ejercicio de obtención de área)
- ¿Dos figuras de diferente forma pueden tener la misma área? (mediante ejercicio de equidescomposición)
- ¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro?
- ¿Cómo se puede obtener el área de un polígono? (mediante ejercicio)
- ¿Qué es la longitud de circunferencia?
- ¿Qué es el Pi?
- ¿El círculo tiene área?

6.1 Mx

6.1.1 Área.

La entrevista dio inicio con la pregunta: ¿Qué es el área?, la cual Mx respondió mediante un argumento que había usado de manera regular y con el que recurrió a hacer notar mediante la LSM, que dentro de cada región había de manera imaginaria “unos cuadritos”, que al ser contados dan la medida del área (véase la Tabla 6.1).

Al mismo tiempo, dió un ejemplo relativo a la construcción de una casa y la forma en la que se puede saber la medida del terreno para la misma.

Tabla 6.1
Respuesta del Mx a la pregunta ¿qué es el área?

Inv	¿Qué es el área?
Mx	El área es lo que tenemos adentro de un cuadrado, dentro del cuadrado hay unos cuadritos que podemos contar. Por ejemplo si yo quiero construir mí casa, puedo medir el terreno, le mido la base luego la altura, después las multiplico y así sé cuál es su área.

6.1.1.1 Área del rectángulo.

Al terminar su respuesta, se le proporcionó un rectángulo y se le pidió que obtuviera el área del mismo, lo cual realizó correctamente tras identificar con una regla las medida de la base y la altura y aplicar el área de formula (véase la Figura 6.1). Mx solicitó una calculadora para resolver la multiplicación, misma que le fue proporcionada.

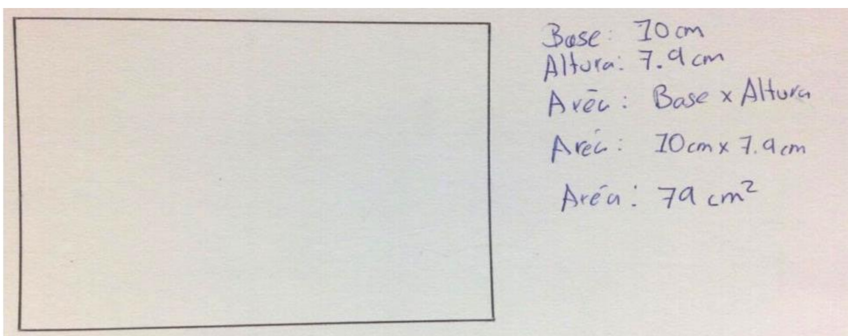


Figura 6.1 Rectángulo presentado a Mx

Una vez concluido el ejercicio, se le pidió que explicara el procedimiento mediante el cual llegó al resultado obtenido (véase la Tabla 6.2).

Tabla 6.2
Mx explica su procedimiento para obtención de área de rectángulo

Inv	¿Cómo obtuviste el área?
Mx	Lo que hice fue sacar la altura y la base para saber lo que es adentro, el área. Ahí dentro de lo que es el área encontramos lo que es la base y la altura, que son puntos importantes, los multipliqué y me da el área. Es rápido.

En su respuesta, hizo referencia con evidente facilidad al área de fórmula, centrando su principal interés en la identificación de la base y de la altura como elementos indispensables para encontrar el dato solicitado.

La utilización de la calculadora fue una constante en el proceso de la investigación debido a la baja competencia que los tres estudiantes mostraron en las operaciones básicas de adición y de multiplicación, dificultad que se mantuvo presente hasta el final del proceso.

6.1.1.2 Área del triángulo.

La siguiente actividad consistió en proporcionarle una figura (véase la Figura 6.2a) compuesta por dos triángulos, y se le pidió que obtuviera el área de la parte sombreada.

Mx procedió identificando dos triángulos y obtuvo de cada uno de ellos la medida de su área. Posteriormente restó al de mayor tamaño el triángulo más pequeño y de esa manera obtuvo el resultado solicitado de manera correcta (véase la Figura 6.2b).

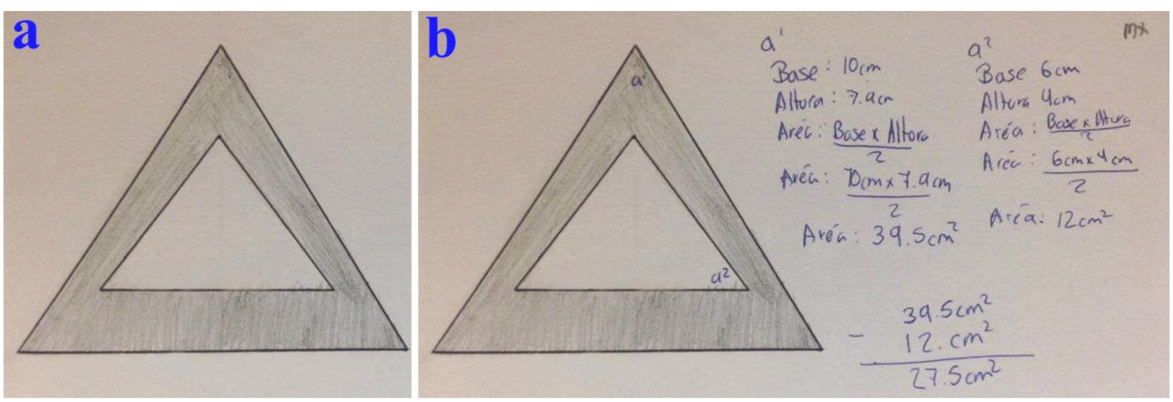


Figura 6.2 Figura triangular presentada a Mx

Una vez concluido el ejercicio (para el cual también utilizó la calculadora), se le pidió que explicara el procedimiento mediante el cual llegó al resultado obtenido (véase la Tabla 6.3).

Tabla 6.3
Mx explica su procedimiento para obtención de área de la figura presentada (6.2)

Inv	¿Cómo obtuviste el área de la figura?
Mx	Es muy fácil mira, lo que pasa es que cada trianguló es como si fuera la mitad de un cuadrado, es como si a un cuadrado le pusiera una diagonal y entonces sale el triángulo. Por eso al igual que con el cuadrado, le sacas al triángulo la base, luego la altura y lo multiplicas, pero como un triángulo es la mitad de un cuadrado, lo divides entre dos. Luego yo me fijo que aquí hay como dos triángulos (señalando la Figura 6.2), uno grande y uno chiquito pero el chiquito es un hueco, entonces primero saco el área de uno, luego del otro y al final al grande le quito el área del chico porque esa parte está hueca.

En su explicación, el estudiante evidencia el papel de la diagonal que fue la forma en la que se le presentó el triángulo y mediante la cual le dio significado a su fórmula de área, lo que hizo ver de manera regular a los triángulos como la mitad de un cuadrado.

Cabe destacar que el ejercicio como tal nunca se les había presentado a los estudiantes, es decir, se trató la obtención de área del triángulo, así como la de regiones parciales pero no una combinación de ambas. Se infiere que el estudiante resolvió el problema mediante una analogía entre la figura presentada y lo realizado con la corona circular (véase, en *5.3.2.1.2.1, Resolución del problema:* Obtener el área de una corona circular).

6.1.2 Equidescomposición.

Se le presentó al estudiante una tarjeta de trabajo con un pentágono y un trapecio (véase la Figura 6.3a) y se le preguntó: ¿el área de estas dos figuras es igual o diferente?. Para responder, el estudiante primero realizó la triangulación de ambas figuras (véase la Figura 6.3b), a la vez que verificaba que cada triángulo en una fuera congruente con uno en la otra. Finalmente dio una respuesta a la pregunta realizada y una explicación para justificarla (véase la Tabla 6.4).

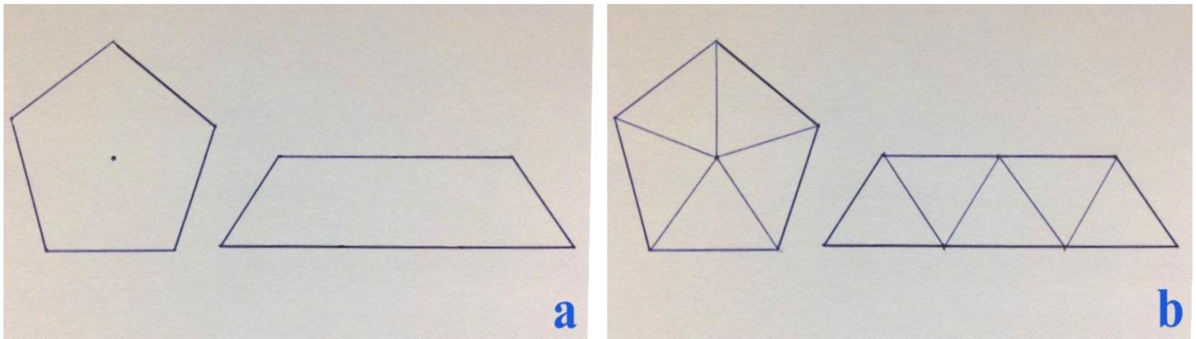


Figura 6.3 Figuras presentadas a Mx

Tabla 6.4
Mx da su respuesta y explicación a la pregunta sobre la equidescomposición.

Inv	¿Las dos figuras tienen áreas iguales o diferentes? Y ¿por qué?
Mx	Sí, mira, las dos figuras tienen una forma diferente pero tienen la misma área. Lo sé porque tienen caben los mismos triángulos en una figura y en la otra. Entonces es la misma área en los dos, sólo que desfigurada

El estudiante utilizó la triangulación para poder justificar su respuesta, la cual fuecorrecta, y utilizó la palabra—seña "desfigurada" que se utilizó constantemente en el trabajo con la equidescomposición y que hace referencia a una figura que cambia su forma pero que mantiene en esencia sus elementos, en este caso el área.

6.1.3 Área y perímetro.

Con el propósito de reconocer si el estudiante diferenciaba el área del perímetro se le Preguntó ¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro? Una vez obtenida su respuesta (véase la Tabla 6.5) se le presentaron dos polígonos más que estaban recortados y no mostraban un perímetro marcado, para descartar una respuesta centrada en la arista. Sin embargo, el estudiante lo volvió a señalar correctamente el perimetro, al igual que el área (véase la Figura 6.4)

Tabla 6.5

Mx se refiere a la diferencia entre el área y el perímetro

Inv	¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro?
Mx	Son diferentes, sí, el área y el perímetro son diferentes, porque el área está adentro *(véase la Figura 6.4a)* y para el perímetro tenemos que saber cuántos lados tiene la figura y medir cada lado porque todos juntos son el perímetro *(véase la Figura 6b)*.

Figura 6.4 Mx señala correctamente el perímetro y área de la figura

6.1.3.1 Área y perímetro de polígonos regulares.

Finalmente se le presentó una tarjeta con un hexágono (véase la Figura 6.5a) y se le pidió que obtuviera las medidas de su perímetro y de su área, lo cual realizó correctamente (véase la Figura 6.5b).

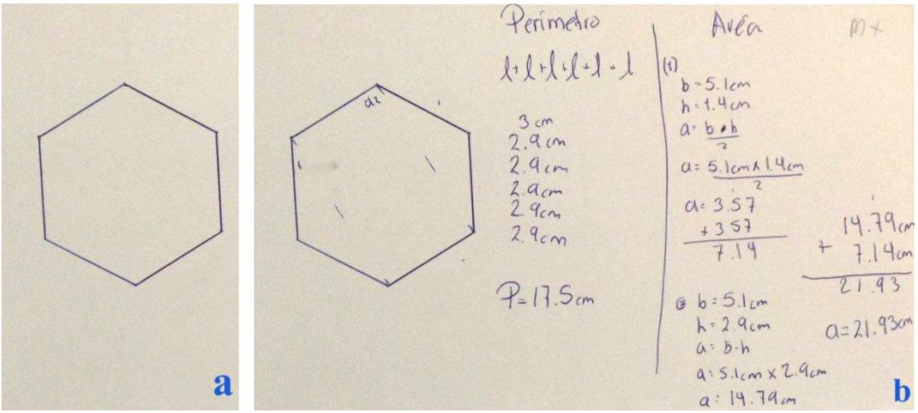


Figura 6.5 Hexágono presentado a Mx

El estudiante resolvió correctamente los ejercicios presentados y ante la posibilidad de sumar o multiplicar para resolver la medida del perímetro, optó por la suma, con la cual tiene menos dificultades que con la multiplicación. En la Figura 6.5b se distinguen trazos cortos, a manera de marcas, que obedecen a la triangulación del hexagono, estrategia mediante la cual Mx obtuvo el área de la figura. Sin embargo, no requirió hacer tan evidente la triangulación y se despojó cada vez más del aspecto figural, por lo que se hace en la Figura 6.6 un análisis interpretativo de las acciones realizadas por Mx.

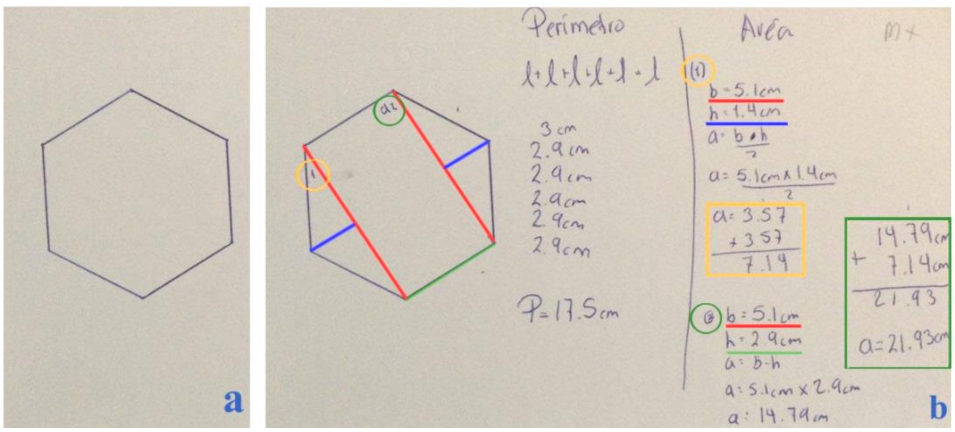


Figura 6.6 Interpretación del desarrollo de la actividad

El estudiante realizó una triangulación sin la necesidad de trazarla. Obtuvo dos tipos de figuras al interior del hexágono: dos triángulos y un rectángulo; señaló con el numeral 1, uno de los triángulos, el cual hemos encerrado en un círculo color ámbar, al rectángulo le asignó el numeral 2, que encerramos en un círculo color verde.

Con líneas rojas hemos resaltado los lados que el estudiante tomó como base, tanto de los triángulos como del rectángulo que obtuvo, con líneas azules se evidencian las alturas que obtuvo sin trazarlas; y de color verde el lado del hexágono que tomo como altura del rectángulo.

Mx infirió la congruencia de los dos triángulos, ya que solamente realizó el procedimiento para obtener el área de uno de ellos mientras que para el segundo triángulo solo duplicó el resultado del primero, lo cual se puede constatar en el rectángulo color ámbar; Finalmente sumó las tres áreas para obtener un resultado final, el cual se encierra en un rectángulo color verde a la derecha de la Figura 6.6b.

6.1.3.2 Área y perímetro de polígonos irregulares

Se le proporcionó a Mx una tarjeta con un hexágono irregular (véase la Figura 6.7a) y se le pidió que obtuviera el área y perímetro de ese polígono.

El estudiante procedió de la misma forma como lo hizo con los regulares, es decir, triangulando la figura, lo cual también realizo de forma discreta, sin marcar claramente los cuatro triángulos que obtuvo (véase la Figura 6.7b)

Finalmente hemos reconstruido con colores, los lados de los triángulos obtenidos que el estudiantes tomó como base (en color rojo) y como altura (en color azul) para determinar el área de cada uno de los triángulos, las cuales sumó para dar un resultado del área total del hexágono que encerramos en un rectángulo verde (véase la Figura 6.7c)

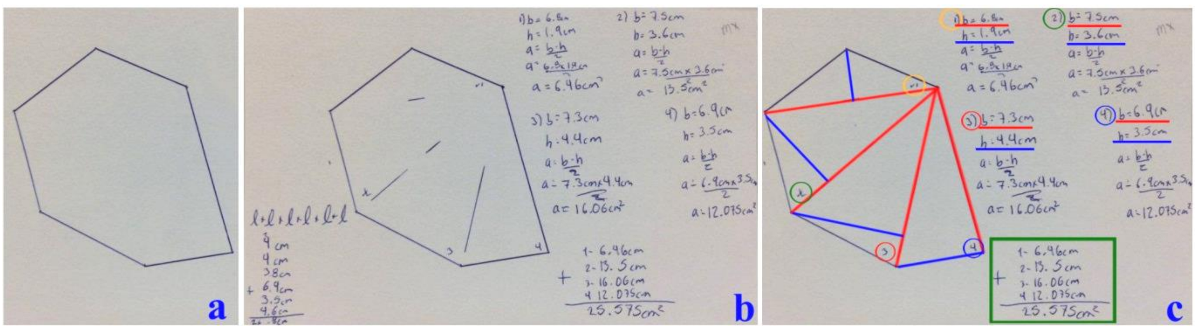


Figura 6.7 Obtención de área y perímetro de polígono irregular

6.1.4 Longitud de circunferencia.

Se le planteó la pregunta ¿Qué es la longitud de circunferencia? La interrogante fue difícil, por lo que optó por recurrir a ejemplos que le permitieran explicar el concepto (véase la Tabla 6.6).

Tabla 6.6
Mx hace referencia a la longitud de circunferencia

Inv	**¿Qué es la longitud de circunferencia?**
Mx	Podemos hablar de materiales que forman una línea, por ejemplo una cuerda, o el cable del control de "Nintendo". Ese cable tiene una forma en la que se puede representar la longitud de la circunferencia, por ejemplo en las tiendas de telas miden en metros así se puede medir la longitud de circunferencia, pero realmente no existe, es como medir lo que hay entre un espacio vacío y otro.

Se le presentó una circunferencia (véase Figura 6.8a) y se le pidió que señalara con el dedo la longitud de circunferencia, lo cual realizó correctamente.

Enseguida debió obtener su medida de la misma para lo cual utilizó las fórmulas $C = 2\pi \times r$ y $C = \pi \times d$ las cuales aplicó después de obtener con una regla la medida del diámetro (véase la Figura 6.8c).

Para continuar, se le pidió que dibujara en una recta la longitud de circunferencia, para lo cual el estudiante hizo uso del teorema de Tales para realizar una partición en siete del diámetro de la figura (véase la Figura 6.8b) y con el compás realizó correctamente la construcción solicitada (véase la Figura 6.8c). Hemos representado con líneas rojas al diámetro y se indica en azul su séptimo segmento.

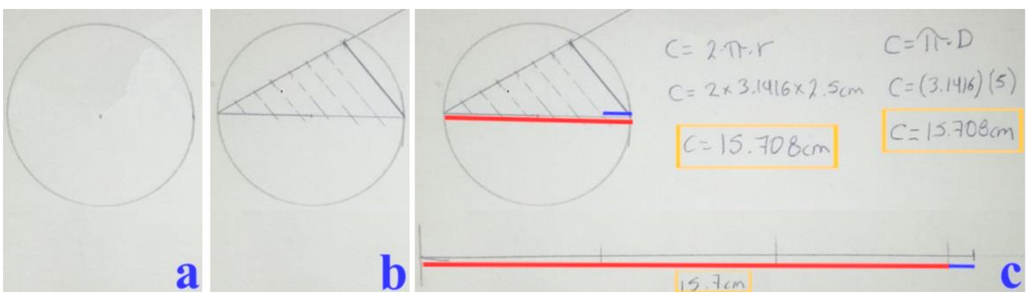


Figura 6.8 Longitud de circunferencia

Finalmente, Mx comparo la medida de la longitud de circunferencia que trazó y la medida que obtuvo al aplicar las formulas, de lo que resultaron cantidades muy similares que hemos encerrado en un recuadro color ámbar (véase la Figura 6.8c)

El estudiante mostro seguridad al obtener la longitud de la circunferencia mediante el uso de las dos expresiones, lo cual contrasta con su dificultad evidente para definirla. Esta dificultad podría atribuirse a las limitaciones de la LSM respecto a los conceptos formalizados.

En lo referente a la identificación cualitativa, Mx señaló en la figura presentada la longitud de circunferencia, la trazó de manera inducida, aunque como ya se ha mencionado, mostró dificultades referentes al lenguaje que le impidieron describir claramente la magnitud en cuestión.

6.1.5 Pi.

Se planteó una pregunta concreta al estudiante: ¿Qué es el Pi?, la cual no le fue fácil responder. Sin embargo, hizo una descripción basada en los diferentes elementos que identifican a ese número, recurriendo en parte al procedimiento mediante el cual se le presentó en la etapa de enseñanza (véase la Tabla 6.7), dejando ver su acercamiento hacia la noción cualitativa Pi.

Tabla 6.7
Mx habla del Pi

Inv	¿Qué es el Pi?
Mx	Es el número que se trabaja dentro de las matemáticas, es el número 3.1416. Es un número que está adentro de la longitud de circunferencia que se parte en 3 y sobra un pedacito. Ese pedacito es el 0.1416

6.1.6 El área del círculo

La pregunta "¿el círculo tiene área?" Se desprendió de la primera entrevista realizada a Mx (Tabla 3.8) durante los inicios de la investigación, en la cual rotundamente aseguró que el círculo, dadas sus características físicas, no podría tener área. Sin embargo, en esta ocasión su respuesta fue distinta (véase la Tabla 6.8).

Tabla 6.8
Mx hace referencia respecto del área de circulo

Inv	¿El círculo tiene área?
Mx	Sí, claro que tiene, dentro del círculo hay un área y es muy fácil mira: primero sacamos el radio del círculo al cuadrado, luego lo multiplicamos por el Pi, que es 3.1416 y así tenemos el área del círculo

Al terminar su respuesta se le proporcionó una tarjeta con un círculo (véase la Figura 6.9a) y se le pidió que obtuviera el área de esa figura.

El estudiante identificó el radio de la circunferencia, sin marcarlo en la tarjeta, por lo cual hemos colocado una línea de color rojo para evidenciar el segmento que obedece al radio que obtuvo. A partir de la identificación del radio, aplicó de manera correcta la fórmula $A = \pi \times r^2$, obtuvo así el resultado solicitado (véase Figura 6.9b).

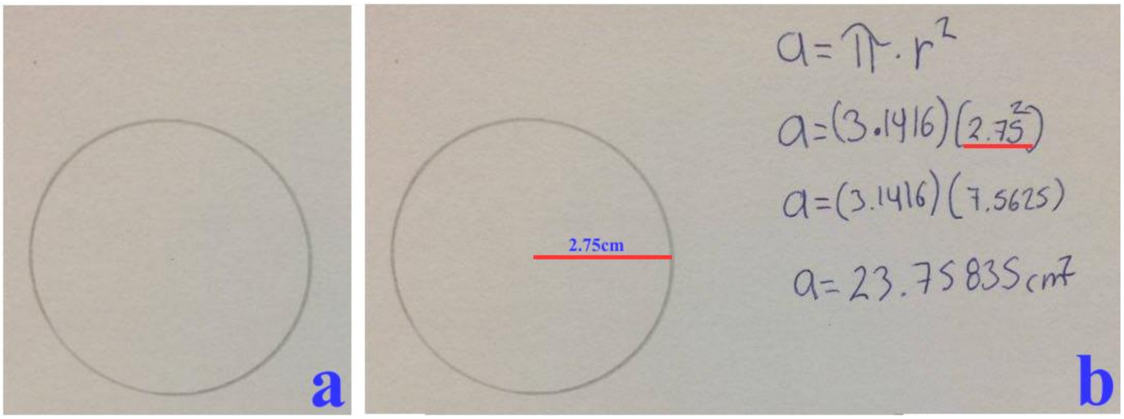


Figura 6.9 Obtención del área de un círculo

Concluidas las preguntas referentes al círculo, se puede afirmar que Mx adquirió la noción cualitativa de área, lo cual fue difícil de expresar por el estudiante debido a las limitaciones de la lengua (LSM) pero que se *infiere* tanto por sus acciones como de la descripción de sus procedimientos para obtener el área de un círculo.

6.2 Os

6.2.1 Área.

La entrevista se inició con la pregunta: ¿Qué es el área?, a la cual Os respondió refiriéndose a las figuras que más se trataron en las sesiones de enseñanza: el triángulo, rectángulo y círculo, así como “a los cuadritos que cada una tiene dentro” (véase la Tabla 6.9).

Tabla 6.9
Respuesta de Os a la pregunta ¿Qué es el área?

Inv	¿Qué es el área?
Os	El área es lo que tienen adentro los triángulos, los rectángulos o los círculos, todas las figuras tienen área porque adentro tienen cuadritos, no los podemos observar pero ahí están.

6.2.1.1 Área del rectángulo.

Se le proporcionó a Os un rectángulo y se le pidió que obtuviera su área, para lo cual procedió midiendo con la regla la base y la altura de la figura (véase tabla 6.10).

Tabla 6.10
Os explica su procedimiento para obtención de área de rectángulo

Os	Mide 80 cm^2
Inv	¿Y cómo lo hiciste para saber esa medida?
Os	Con la base por la altura, la base mide 10cm , la altura 8cm, lo multiplico y da 80 cm^2

Su respuesta fue correcta. Al expresarla mediante la LSM, se le pidió que efectuara las operaciones respectivas en la tarjeta en la que se le presentó la figura, lo cual realizó sin dificultades y de manera correcta (véase la Figura 6.10).

A pesar de que, de manera regular, Os utilizó la calculadora, en esta ocasión prescindió de ella y realizó la multiplicación de forma mental

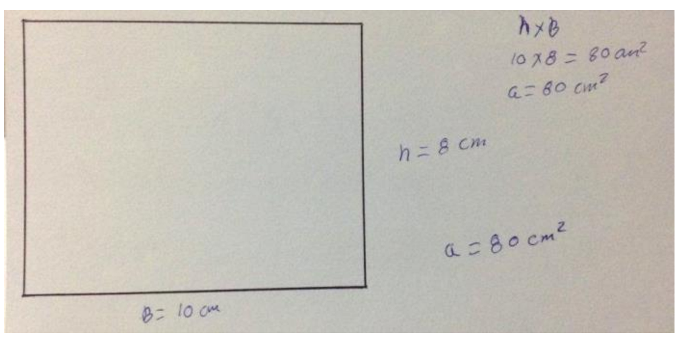


Figura 6.10 Rectángulo presentado a Os

6.2.1.2 Área del triángulo.

La siguiente actividad consistió en que obtuviera el área de la parte sombreada de una figura compuesta por dos triángulos que se le proporcionó (véase la Figura 6.11a).

Os identificó dos triángulos, obtuvo de cada uno de ellos la medida de su área, posteriormente restó al de mayor tamaño el triángulo más pequeño y de esa manera obtuvo el resultado solicitado de manera correcta (véase la Figura 6.11b).

Al escribir la formula, nuevamente Os cambió el orden entre la altura y la base, sin embargo, al sustituir los valores respectivos si escribió primero la base y después la altura. Un cambio similar ocurrió al realizar la resta, ya que invirtió el orden de las cifras y, sin embargo, el resultado fue correcto.

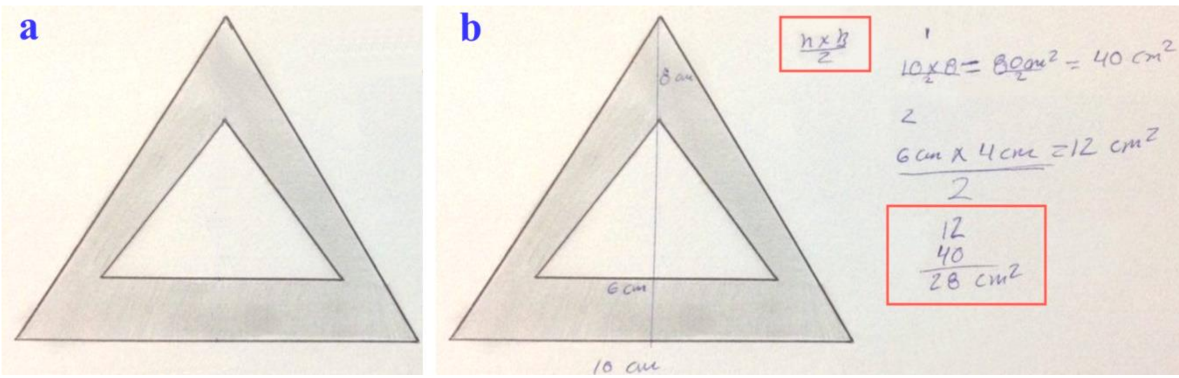


Figura 6.11 Figura triangular presentada a Os

Una vez concluido el ejercicio se le pidió que explicara el procedimiento mediante el cual llegó al resultado (véase la Tabla 6.11).

Tabla 6.11
Os explica su procedimiento para obtención de la figura triangular

Inv	¿Cómo obtuviste el área de la figura?
Os	Aquí hay dos triángulos, uno grande y otro chico, primero saco el área del grande y luego le quito el triángulo chico porque ese triángulo sobra, es un hueco.

Os resolvió el problema mediante un procedimiento similar al utilizado para determinar el área de la corona circular.

6.2.2 Equidescomposición.

Se le presentó una tarjeta de trabajo con un pentágono y un trapecio (véase la Figura 6.12a) y se le preguntó: ¿el área de estas dos figuras es igual o diferente? Para responder, Os primero las comparó sólo visualmente y, utilizó sus dedos a modo de compás, respondió que ambas figuras eran iguales. Enseguida procedió a triangular ambas figuras (véase la Figura 6.12b) y verificó que cada triángulo en una fuera congruente con uno en la otra

Finalmente dio una respuesta a la pregunta y una explicación, utilizó como argumento la triangulación para justificarla (véase la Tabla 6.12).

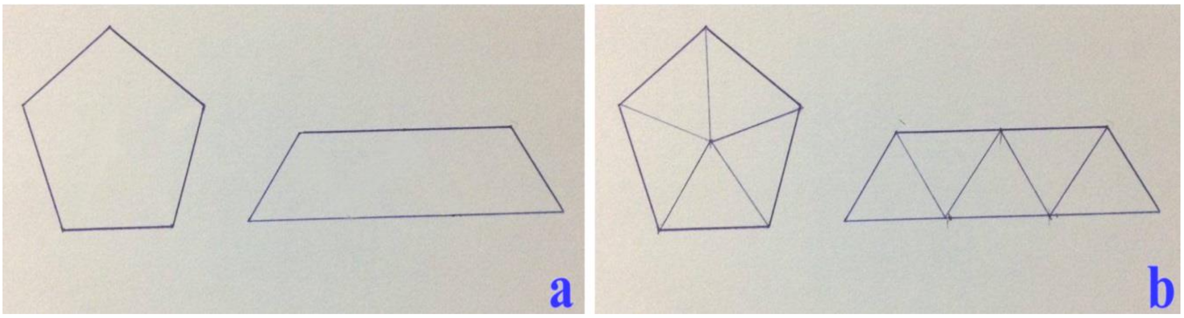


Figura 6.12 Figuras presentadas a Os

Tabla 6.12
Os da su respuesta y explicación a la pregunta sobre la equidescomposición.

Inv	**¿Las dos figuras tienen áreas iguales o diferentes? Y ¿por qué?**
Os	Iguales porque en cada una hay los mismos 5 triángulos, son triángulos iguales en cada una.

6.2.3 Área y perímetro.

Con el propósito de asegurar que el estudiante diferenciaba el área del perímetro, se le preguntó: ¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro? Una vez obtenida su respuesta (véase la Tabla 6.13), se le presentaron dos polígonos más que estaban recortados y no mostraban un perímetro marcado, para descartar que se centrara en las líneas, pero el estudiante lo volvió a señalar correctamente, al igual que el área (véase la Figura 6.13)

Tabla 6.13
Os indica de la diferencia entre el área y el perímetro

Inv	**¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro?**
Os	El perímetro está afuera de la figura (véase Figura 6.13a), en el límite y el área está dentro, es todo lo que está dentro de la figura (véase Figura 6.13b).

Figura 6.13 Os señala correctamente el perímetro y el área de la figura

6.2.3.1 Área y perímetro de polígonos regulares

Se le presentó al estudiante una tarjeta con un hexágono (véase la Figura 6.14a) y se le pidió obtener él su perímetro y área respectivos, Os midió uno de los lados, multiplicó el valor obtenido por seis y dio así el perímetro de la figura.

Continuó triangulando el hexágono en seis mediante sus diagonales, para después obtener el área de uno de los triángulos componentes, la multiplicó por seis, y obtuvo el área total de la figura (véase la Figura 6.14b).

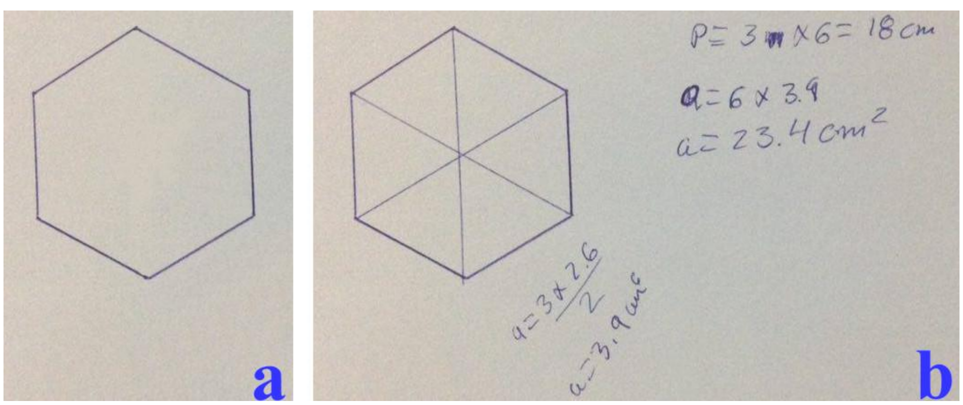


Figura 6.14 Hexágono presentado a Os

6.2.4 Longitud de circunferencia.

El estudiante respondió con seguridad, haciendo referencia a la idea de rectificar la circunferencia y a los tres diámetros que la integraban (véase la Tabla 6.14)

Tabla 6.14
Os hace referencia a la longitud de circunferencia

Inv	¿Qué es la longitud de circunferencia?
Os	Es como el contorno del círculo, esa misma circunferencia que tiene el círculo, se extiende en una línea que está partida en tres diámetros.

Se le presentó una circunferencia (véase la Figura 6.15a) y se le pidió que señalara con el dedo la longitud de circunferencia, lo cual realizó correctamente.

Después se le pidió que dibujara la LC del círculo dado, para lo cual realizó primero la identificación del diámetro y luego realizó con regla y compás su partición en siete, proporcionar la construcción pedida (véase Figura 6.15b).

Finalmente se le pidió que obtuviera la medida de la LC del círculo dado para lo cual hizo uso de la representación $\pi \times d$, y obtuvo el resultado de manera correcta.

En lo referente a la identificación cualitativa, el estudiante señaló en la figura presentada la LC, la dibujó de manera inducida, aunque como ya se ha mencionado, dio una descripción clara de la LC.

De igual manera en que interpretamos el procedimiento exhibido por Mx, la figura 6.15 muestra nuestra interpretación de la realizado por Os para responder a las interrogantes referidas den la LC.

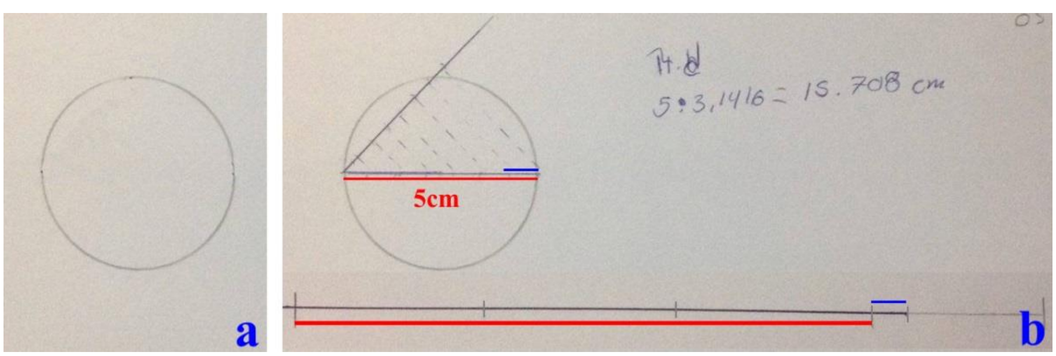


Figura 6.15 Longitud de circunferencia

6.2.5 Pi.

Se le planteó a Os realizó una pregunta concreta: ¿Qué es el Pi?, el estudiante la respondió mediante su valor e hizo referencia a su relación con el diámetro (véase la Tabla 6.15).

Tabla 6.15
Os habla del Pi

Inv	¿Qué es el Pi?
Os	Es el 3.1416, ese es el Pi, son tres diámetros y un pedacito más cuando lo partimos en 7 (*al diámetro*).

6.2.6 El área del círculo.

Finalmente, se le presentó a Os una tarjeta con un círculo (véase la Figura 6.16a) y se le pidió que obtener el área de la figura, para lo cual, identificó y midió el radio respectivo y luego aplicó la fórmula: $a = \pi \times r^{2.}$

A pesar de que el estudiante dio un resultado correcto, nuevamente, cambió el orden en la fórmula al sustituir los valores respectivos, ya que aunque escribió $a = \pi \times r^2$, al sustituir colocó primero el radio y después el valor de *pi* (véase la Figura 6.16b).

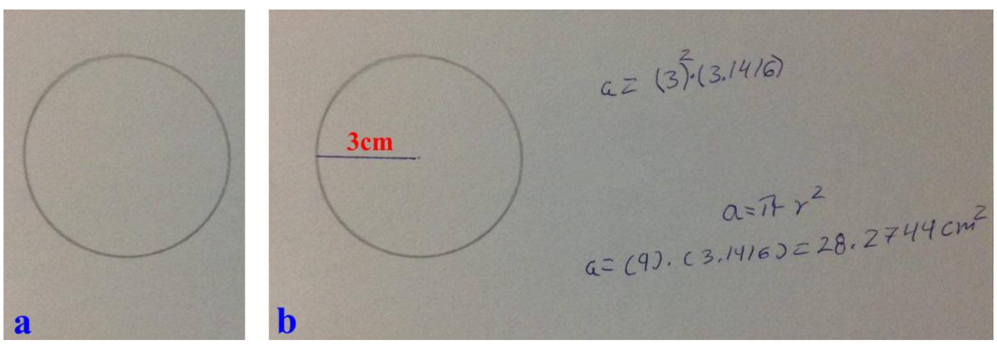


Figura 6.16 Obtención del área de un círculo por Os

6.3 Br

6.3.1 Área.

La pregunta: ¿Qué es el área? A la que Br respondió con dificultad y mediante un argumento muy pobre que difícilmente describe el concepto (véase la Tabla 6.16).

Tabla 6.16
Respuesta del Br a la pregunta de área

Inv	¿Qué es el área?
Br	El área es todo lo que está adentro, te fijas cuanto es el área, lo juntas y respondes.

6.3.1.1 Área del rectángulo.

Al terminar su respuesta, se le proporcionó un rectángulo y se le pidió que obtuviera el área del mismo, trianguló el rectángulo mediante una diagonal y obtuvo el área de uno de los triángulos sin que se le pidiera, probablemente la pregunta no le resultó clara y recurrió a un procedimiento que domina, no obstante el resultado que obtuvo es correcto.

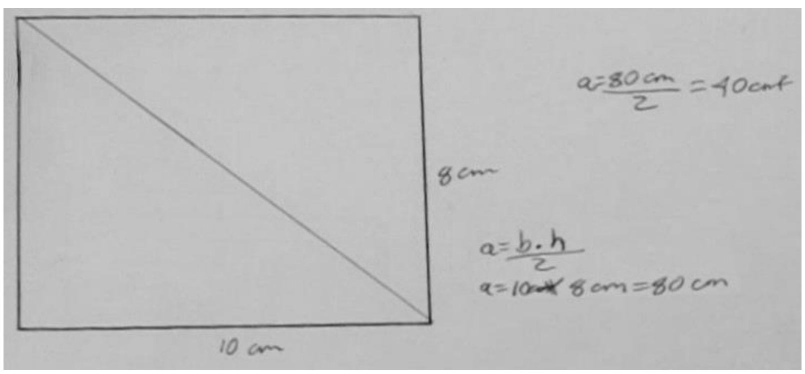


Figura 6.17 Rectángulo presentado a Br

Cuando concluyó el ejercicio, se le pidió que explicara su procedimiento (véase la Tabla 6.17).

Tabla 6.17
Br explica su procedimiento para obtención de área de rectángulo

Inv	¿Cómo obtuviste el área?
Br	Primero saqué el área de todo el rectángulo, luego con la diagonal se divide en dos, es como partirlo a la mitad, y cada triángulo que sale tiene 40 cm^2 de área.

6.3.1.2 Área del triángulo.

Se proporcionó al estudiante una figura compuesta por dos triángulos, y se le pidió que obtuviera el área de la parte sombreada (véase la Figura 6.18a).

Br identificó los dos triángulos y obtuvo de ellos sus respectivas medidas; aplicó el área de la formula a cada uno y utilizó la calculadora. Finalmente, restó el área del triángulo menor al área del mayor y obtuvo un resultado correcto (véase la Figura 6.18b), que explica de manera escueta (véase la Tabla 6.18b)

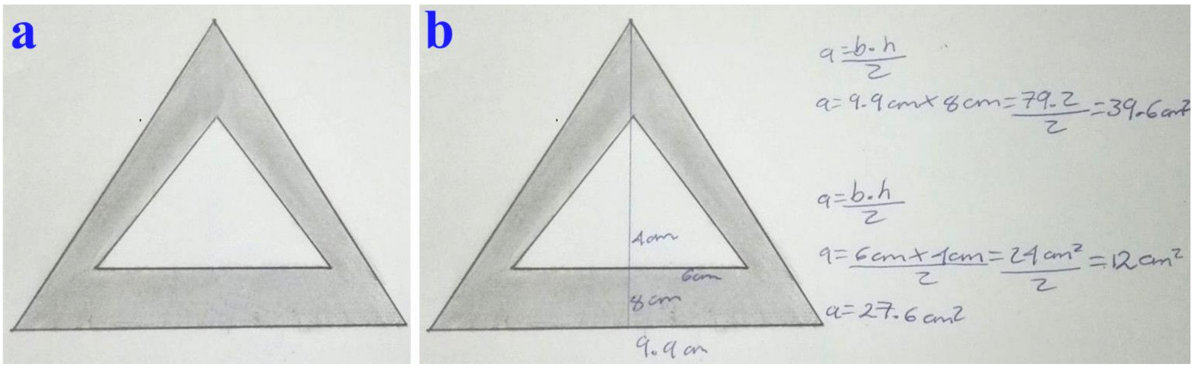


Figura 6.18 Figura triangular presentada a Br

Tabla 6.18
Br explica su procedimiento para obtención de área de la figura presentada

Inv	¿Cómo obtuviste el área de la figura?
Br	Aquí tenemos dos figuras (señalando la figura 4.18), toda completa son 39.6 cm^2 de área pero las separamos y quedan 27.6 cm^2

6.3.2 Equidescomposición.

Se le presentó una tarjeta de trabajo con un pentágono y un trapecio (véase la Figura 6.19a) y se le preguntó: ¿El área de estas dos figuras es igual o diferente?, Br se negó a dar una respuesta por simple estimación; primero trianguló de ambas figuras (véase la Figura 6.19b), se aseguró que cada triángulo en una fuera congruente con uno en la otra, finalmente dio una respuesta a la pregunta. La justificación de su respuesta fue correcta, se refirió al acomodo de los triángulos que el mismo propuso en ambas figuras. (Véase la Tabla 6.19).

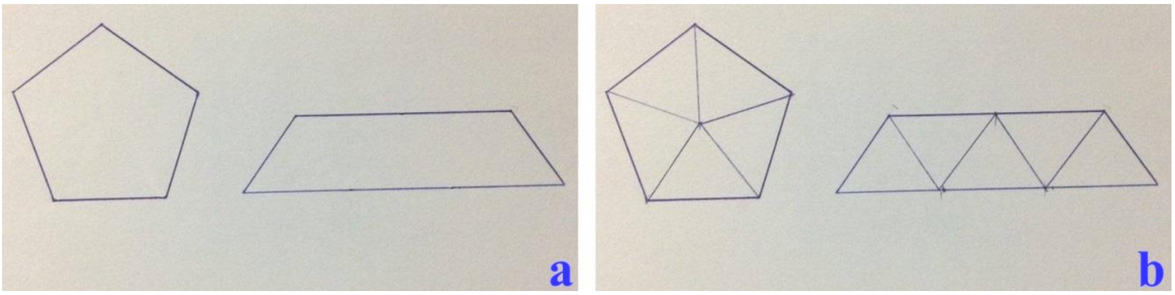


Figura 6.19 Figuras presentadas a Br

Tabla 6.19
Br da su respuesta y explicación a la pregunta sobre la equidescomposición.

Inv	¿Las dos figuras tienen áreas iguales o diferentes? Y ¿por qué?
Br	Si, son iguales porque tienen los mismos triángulos sólo que están acomodados diferente y por eso se ven diferentes pero son iguales

6.3.3 Área y perímetro.

Con el propósito de asegurar que el estudiante diferenciara el área del perímetro, se le pregunto: ¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro? Br asoció en su respuesta al perímetro con la longitud como una forma de ejemplificarlo, y al área con la parte interna de una figura (véase la Tabla 6.20).

Después, al igual que se propuso a Mx y a Os, se le presentaron dos polígonos recortados, sin sus perímetros marcados. En ambos el estudiante señalo y distinguió correctamente el parámetro del área (véase la Figura 6.20) lo que nos indicó que, de manera cualitativa, identifica ambos, aunque con dificultad para describirlos en señas.

Tabla 6.20
Br refiere respecto de la diferencia entre el área y el perímetro

Inv	¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro?
Br	Son diferentes porque el perímetro es para unas formas, por ejemplo para la longitud, y el área es para otras formas, es todo lo de adentro de una figura.

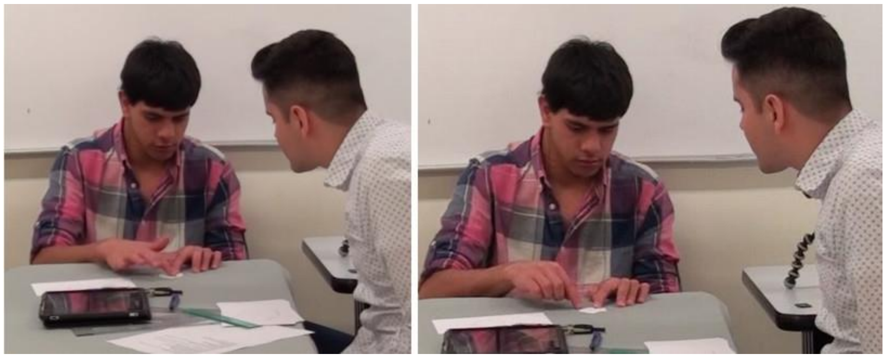


Figura 6.20 Br señala correctamente el perímetro y área de la figura

6.3.3.1 Área y perímetro de polígonos regulares.

Se le presentó a Br una tarjeta con un hexágono (véase la Figura 6.21a) y se le pidió que obtuviera de él su perímetro y su área. Br midió uno de los lados, después multiplicó la medida por 6 y obtuvo el perímetro de la figura. En primer lugar, escribió “a =” pero pareció darse cuenta de su error y ya que no se les permitió borrar, escribió delante “p =”. Dio el resultado correcto del perímetro (véase la Figura 6.21b)

Continuó triangulando el hexágono y fue entonces cuando se hizo evidentes su dificultad al triangular polígono. Se infiere de sus acciones (véase la Figura 6.21b) que con los trazos realizados, no todas las figuras internas son triángulos.

Con una triangulación errónea, Br intentó obtener el área de cada figura interna, aplicó correctamente el área de fórmula (con el uso de la calculadora), sin embargo no logró concluir correctamente la actividad.

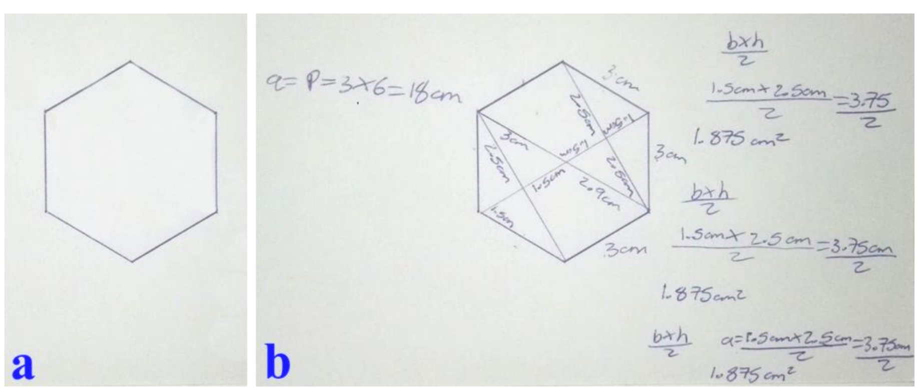


Figura 6.21 Hexágono presentado a Br

6.3.3.2 Área y de polígonos irregulares.

Se le entregó a Br una tarjeta con un hexágono irregular (véase la Figura 6.22a) y se le pidió que obtuviera el área de ese polígono.

Br presentó las mismas dificultades que con los pentágonos regulares ante la triangulación, lo que le impidió realizar la actividad correctamente a pesar de que fueron correctas sus operaciones para obtener el área de los triángulos (véase la Figura 6.22b).

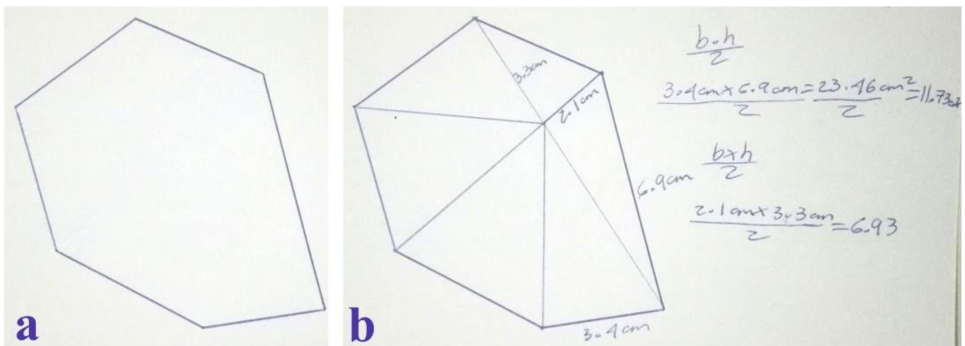


Figura 6.22 Obtención de área y perímetro de polígono irregular

6.3.4 Longitud de circunferencia.

A la pregunta ¿Qué es la longitud de circunferencia? Br respondió refiriéndose a una línea alrededor del círculo (véase la Tabla 6.21).

Tabla 6.21
Br hace referencia a la longitud de circunferencia

Inv	¿Qué es la longitud de circunferencia?
Br	Es como una línea de alrededor de un círculo que se extiende.

Se le presentó una circunferencia (véase la Figura 6.23a) y se le pidió que señalara con el dedo su longitud, lo cual realizó correctamente.

Después se le pidió que dibujara la LC del círculo dado, para lo cual identifico primero el diámetro, para realizar luego con regla y compás la construcción pedida. Sin embargo, no patrió en 7 segmentos el diámetro y, en vez de eso, calculó la parte faltante (véase la Figura 6.23b).

Finalmente debía obtener la medida de la LC, pero no logró recordar la fórmula para su obtención, lo que le impidió dar la respuesta solicitada.

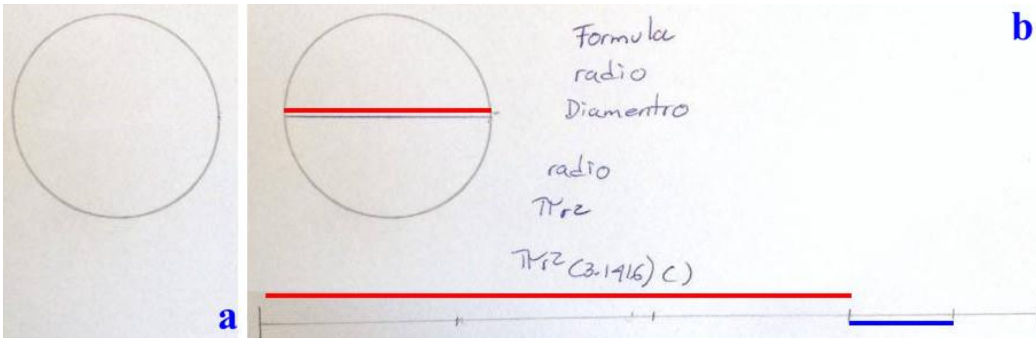


Figura 6.23 Longitud de circunferencia

6.3.5 Pi.

Se le planteó a Br la pregunta: ¿Qué es el Pi?, a la cual respondió mediante su valor e hizo referencia a su uso (véase la Tabla 6.22).

Tabla 6.22
Br habla del Pi

Inv	¿Qué es el Pi?
Br	Es un número en matemáticas que vale 3.1416, Ese número después lo multiplicas por ejemplo por el radio y obtienes un resultado.

6.3.6 El área del círculo.

Finalmente, se le presentó a Br una tarjeta con un círculo (véase la Figura 6.24a) y se le pidió obtener su área. Intentó responder el problema planteado mediante la triangulación del círculo, lo cual evidentemente no le permitió resolverlo (véase la Figura 6.24b).

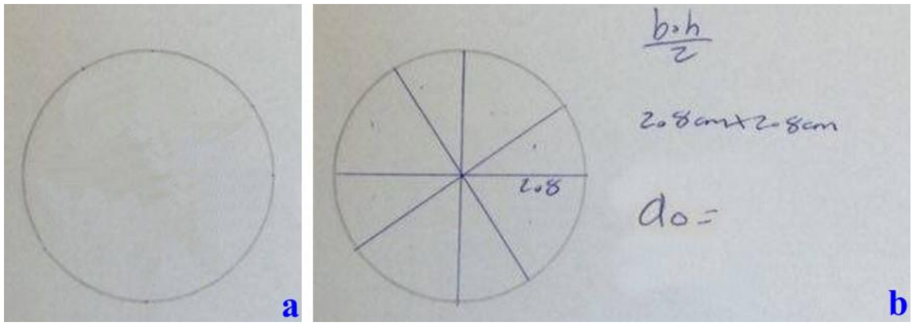


Figura 6.24 Obtención del área de un círculo

6.4 Resultados.

Los tres estudiantes lograron identificarla la noción cualitativa de área como una parte interna de cada figura plana presentada. De manera general se refirieron a la existencia de cuadros que no se ven dentro de los polígonos que se propusieron. Mx es quien mostró más claridad respecto al tema del área, especialmente en la práctica ya que incluso a él se le dificultó dar argumentos en LSM para definir el área.

La diagonal fue identificada por los tres estudiantes como central para segmentar figuras planas y mediante la cual se puede construir un triángulo a partir de algún rectángulo dado. Los tres obtuvieron con aparente facilidad el área de un triángulo utilizando el área de fórmula.

También los tres entrevistados lograron desarrollar con facilidad la actividad correspondiente a la equidescomposición, para lo cual utilizaron de manera recurrente la triangulación de cada figura presentada.

Los tres estudiantes lograron identificar y diferenciar entre el área y el perímetro de cada figura presentada, y en sus explicaciones recurrieron a elementos que les eran familiares para tratar de dar una respuesta correcta. Sin embargo la dificultad lingüística fue evidente.

Tanto Mx como Os obtuvieron correctamente el área de los polígonos propuestos, para lo cual recurrieron a la triangulación y luego a la suma de las áreas parciales obtenidas. Sin embargo, Br mostro serias dificultades en lo que respecta a la triangulación, por las cuales no avanzó en un procedimiento que aparentemente tiene claro.

Los tres estudiantes lograron identificar la Longitud de circunferencia y de manera general, aludieron a los elementos que la componen, hablando de tres diámetros y una parte más. Sin embargo, les fue difícil expresar una descripción de ella en LSM.

Los tres entrevistados se refirieron al valor del número *pi* para describirlo, así como a sus diferentes representaciones.

A diferencia de sus inicios en la investigación, Mx aceptó que el círculo puede tener área al igual que los polígonos regulares e irregulares.

Tanto Mx como Os obtuvieron con relativa facilidad la longitud de circunferencia y el área de los círculos presentados, sin embargo, Br enfrentó obstáculos al olvidar incluso la fórmula necesaria para resolver los problemas relativos a esas dos magnitudes.

Capítulo séptimo

Conclusiones

El uso de la LSM, representó un reto para entender el problema de la adquisición de las nociones matemáticas a través de su mediación, así como los alcances y limitaciones de la misma.

Es claro el avance que se logró con los estudiantes en la adquisición de las nociones tratadas con la mediación de la LSM, lo que deja de manifiesto la capacidad de ellos para acceder a los contenidos considerados.

La investigación también permitió advertir las limitaciones presentadas en el proceso, entre las que destaca: la falta de señas para la mayor parte de los conceptos matemáticos utilizados.

Esta situación hizo evidente la necesidad, no sólo de construir las señas faltantes, sino de que los estudiantes accedan a una competencia de español escrito que les permita crecer y profundizar en los conceptos que se les propusieron, así como aplicar en diferentes contextos, las nociones matemáticas adquiridas.

Sin embargo, no nos referimos a la sustitución de un sistema de comunicación por otro, sino a la complementación de ambos, la cual proponemos no sólo en el caso de los estudiantes sino como un ejercicio que tendría que ser adoptado obligatoriamente por los profesores del sistema educativo regular y especial, e ir adquiriendo paulatinamente el manejo de la LSM mediante la propia interacción con la comunidad sorda.

Ante las limitaciones naturales de la LSM, la construcción de señas faltantes por parte de los estudiantes, permitió un avance significativo en los contenidos tratados, representando una contribución que puede ser posteriormente utilizada por otros grupos de investigadores.

Las actividades realizadas se caracterizaron por la sobriedad en su presentación, lo que permitió centrar la atención de los estudiantes en los contenidos implicados, logrando resultados efectivos, contrario a la creencia ampliamente compartida de que los estudiantes sordos requieren de material didáctico sumamente vistoso o llamativo, lo cual, como se pudo observó, puede ocasionar distracciones o confusión.

El modelo de enseñanza en la etapa respectiva consideró tres secuencias: material concreto, figura y simbólico, las cuales se pusieron en juego recurrentemente. La implementación de este modelo proporciono resultados positivos, permitiendo que los estudiantes lograran transitar desde los aspectos más básicos hasta la simbolización de las nociones matemáticas respectivas.

Consideráramos que, en el orden de una nueva investigación, se podrían continuar los temas referentes a la noción de área, integrando ahora la lengua escrita en las actividades, lo que permitiría en el terreno de la enseñanza, ampliar la posibilidad de que los estudiantes de resolvieran diversos problemas y, en lo referente a la investigación, realizar un enfrentamiento empírico entre la lengua escrita y la LSM.

Referencias

Baldor, J. A. (2008). *Geometría y trigonometría*. México, Grupo Editorial Patria, S. A. De CV.

Barojas, A. (2014) *Comprensión de nociones del sistema métrico decimal mediada por la LSM en el aula de sordos* [17 - 21]: *Estudio de casos*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Calderón. F. (2003). *Técnica del dibujo*. Editorial Porrúa. México.

Cruz, M. (2008). *Gramática de la lengua de señas Mexicana*. Tesis de doctorado. Colegio de México. México.

Euclides. *Elementos libros I – IV*. Gredos. España.

Garnica, I., A. Barojas (2013) LSM en la adquisición de cantidad de magnitud: masa y longitud. Jóvenes [16 - 21] con audición diferenciada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 26*. 709 – 716.

Hauser, C., M. Marschark. (2008). What We Know and We Don’t Know about Cognition and Deaf Learners. En: Deaf Cognition: fundations and outcomes (Marc Marscharck and Peter C. Hauser, Eds.). Oxford University Press.

Heath, T. L. (1897). *The Works of Archimides*. Cambridge, University Press.

Marchesi, A. (1992) Desarrollo del lenguaje y del juego simbólico en niños sordos profundos. Centro de publicaciones. España.

Marscharck, M., L. Walters. (2008). Language Comprhension and Learning. En: Deaf Cognition: fundations and outcomes (Marc Marscharck and Peter C. Hauser, Eds.). Oxford University Press.

Moise, E. (1982). *Geometría elemental desde un punto de vista avanzando*, México: Ed. Continental, S. A.de CV.

Myklebust, (1960). *Those Who Ignore History*. En *Deaf Cognition: foundations and outcomes* (Marc Marscharck and Peter C. Hauser, Eds.). Oxford University Press.

Osborne, A. Y Wilson P. (1988). Foundational Ideas in Teaching about Measure. En: *Teaching Mathematics in grades k-8. Research Based Methods*. USA: Allyn and Bacon Inc.

Qi y Mitcbell (2007) *Deaf learners and mathematical problem solving*. En Deaf Cognition: fundations and outcomes (Marc Marscharck and Peter C. Hauser, Eds.). Oxford University Press.

Stake, R.E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. España: Ediciones Morata, S.L.

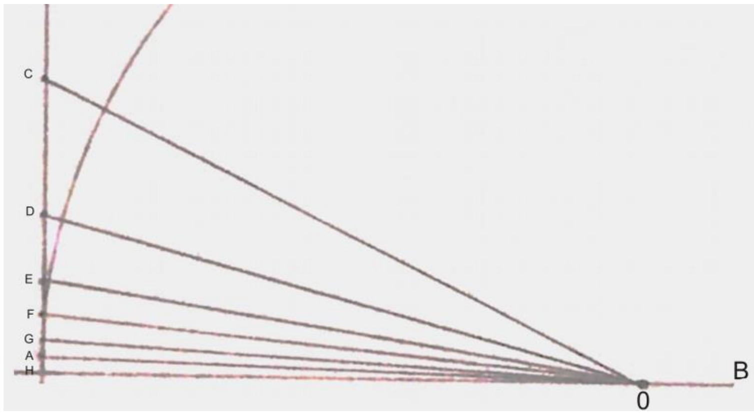
Sierra, J. J. (1994). Estilos cognitivos en niños sordos. Dependencia – independencia de campo (DIC): Implicaciones educativas. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Educación. Departamento de investigación y Diagnóstico en educación. Recuperado de: http://biblioteca.ucm.es/tesis/19911996/S/5/S5006301.pdf

Turegano, P. (1989). Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la facultad de seducción de Albacete, 3,235-256. España. Recuperando de: Http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/pdf/revista3/r3a20.pdf

Apéndices

Apéndice 1

PROPOSICIÓN 3



La razón de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es menor que $3\frac{1}{7}$ *y mayor que* $3\frac{10}{71}$

$\frac{CD}{AD} = \frac{OC}{OA}$ … Euclides VI-3 (**1a aplicación**, primera *cota superior*_**OD** biseca el ángulo AOC,)

$$\frac{CD+AD}{AD} = \frac{OC+OA}{OA}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{OC+OA}{OA}$$

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OC+OA}{AC}$$

$\frac{OA}{AC} + \frac{OC}{AC} = \frac{OA}{AD}$ (1)

Conocía: $\frac{\sqrt{3}}{1}$ $\frac{2}{1}$

Propuso aproximación: $\frac{265}{153} < \frac{\sqrt{3}}{1}$ y $\frac{306}{153} = \frac{2}{1}$

Sustituye en (1): $\frac{265}{153} + \frac{306}{153} < \frac{OA}{AD}$

$\frac{571}{153} < \frac{OA}{AD}$ *(Lado de un polígono de doce lados)*

Utiliza el teorema de Pitágoras y aproxima OD/AD, dato necesario para continuar con la 2ª partición

$$\Delta AOD$$

$$\frac{OD}{AD} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$\frac{DE}{EA} = \frac{OD}{OA}$ ... Euclides VI-3 (**2a aplicación**, segunda *cota superior*_**OE** biseca el ángulo AOD)

$\frac{OA}{AD} + \frac{OD}{AD} = \frac{OA}{AE}$ (2)

Sustituye en (2) $\frac{571}{153} + \frac{591\frac{1}{8}}{153} < \frac{OA}{AE}$

$\frac{1162\frac{1}{8}}{153} < \frac{OA}{AE}$ *(lado de un polígono de veinticuatro lados)*

Utiliza el teorema de Pitágoras y aproxima OE/AE dato necesario para continuar con la 3ª partición

$$\Delta AOE$$

$$\frac{OE}{AE} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

$\frac{EF}{AF} = \frac{OE}{OA}$ ... Euclides VI-3 (**3a aplicación**, tercera *cota superior*_**OF** biseca el ángulo AOE)

$\frac{OA}{AE} + \frac{OE}{AE} = \frac{OA}{AF}$ (3)

Sustituye en (3)

$\frac{1162\frac{1}{8}}{153} + \frac{1172\frac{1}{8}}{153} < \frac{OA}{AF}$

$\frac{2334\frac{1}{4}}{153} < \frac{OA}{AF}$ *(lado de un polígono de cuarenta y ocho lados)*

Utiliza el teorema de Pitágoras y aproxima OF/AF dato necesario para continuar con la 4ª partición

$$\Delta AOF$$

$$\frac{OF}{AF} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

$\frac{EF}{AF} = \frac{OF}{OA}$ ... Euclides VI-3 (**4a aplicación**, cuarta *cota superior*_**OG** biseca el ángulo AOF)

$\frac{OA}{AF} + \frac{OF}{AF} = \frac{OA}{AG}$ (4)

Sustituye en (4)

$\frac{2334\frac{1}{4}}{153} + \frac{2339\frac{1}{4}}{153} < \frac{OA}{AG}$

$$\frac{4673\frac{1}{2}}{153} < \frac{OA}{AG}$$ *(lado de un polígono de noventa y seis lados)*

Finalmente: $AB = 2OA, \quad GH = 2AG$

Por lo tanto: $\frac{AB\ (\text{diámetro del círculo})}{\text{perímetro de un polígono de 96 lados}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153 \times 96}$

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}$$

<u>La circunferencia del círculo es menor que el perímetro del polígono de 96 lados:</u>

$pi < [\frac{Perímetro_{96} lados}{\text{Diámetro del círculo}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}]$, por lo tanto: $\mathbf{pi} < \mathbf{3 + \frac{1}{7}}$ **(*cota superior*)**

$\frac{OA}{AC} + \frac{OC}{AC} = \frac{OA}{AD}$ (12 lados)

$$\frac{571}{153} < \frac{OA}{AD}$$

$\frac{OA}{AD} + \frac{OD}{AD} = \frac{OA}{AE}$ (24 lados)

$$\frac{571}{153} + \frac{591\frac{1}{8}}{153} < \frac{OA}{AE}$$

$$\frac{1162\frac{1}{8}}{153} < \frac{OA}{AE}$$

$\frac{OA}{AE} + \frac{OE}{AE} = \frac{OA}{AF}$ (48 lados)

$$\frac{1162\frac{1}{8}}{153} + \frac{1172\frac{1}{8}}{153} < \frac{OA}{AF}$$

$$\frac{2334\frac{1}{4}}{153} < \frac{OA}{AF}$$

$\frac{OA}{AF} + \frac{OF}{AF} = \frac{OA}{AG}$ (96 lados)

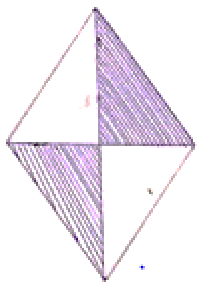
$$\frac{2334\frac{1}{4}}{153} + \frac{2339\frac{1}{4}}{153} < \frac{OA}{AG}$$

$$\frac{4673\frac{1}{2}}{153} < \frac{\boldsymbol{OA}}{\boldsymbol{AG}}$$

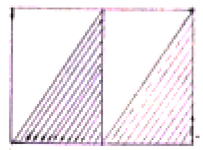
Apéndice 2

Secuencias obtenidas y adaptadas a la investigación de Turégano (1989), utilizadas en enseñanza.

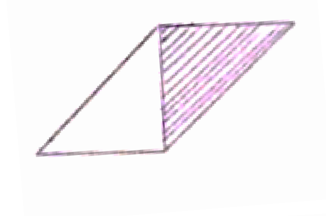
1. ° ROMBO ⟶ RECTANGULO

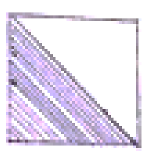


Corte 2 diagonales

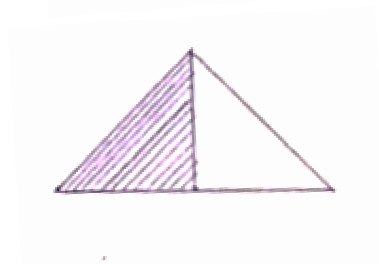


2. ° CUADRADO ⟶ TRIANGULO
⟶ PARALELOGRAMO

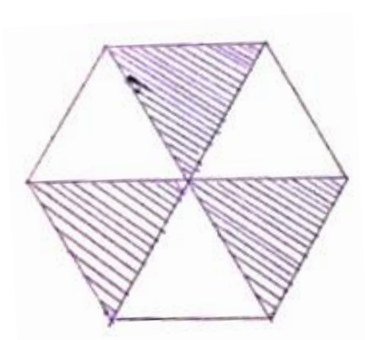


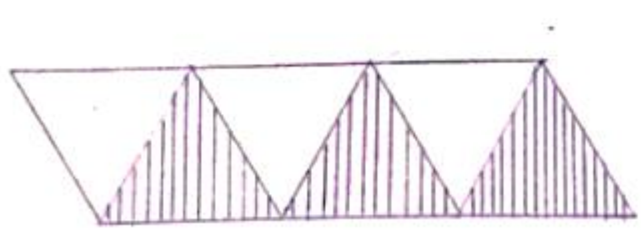


Corte 1 diagonales

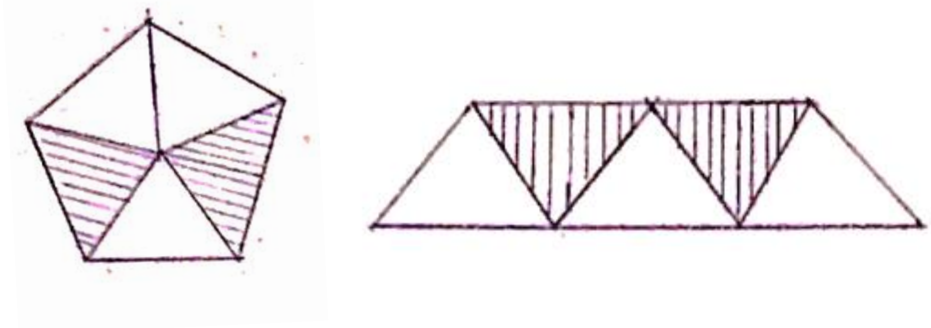


3. ° HEXAGONO REGULAR ⟶ PARALELOGRAMO

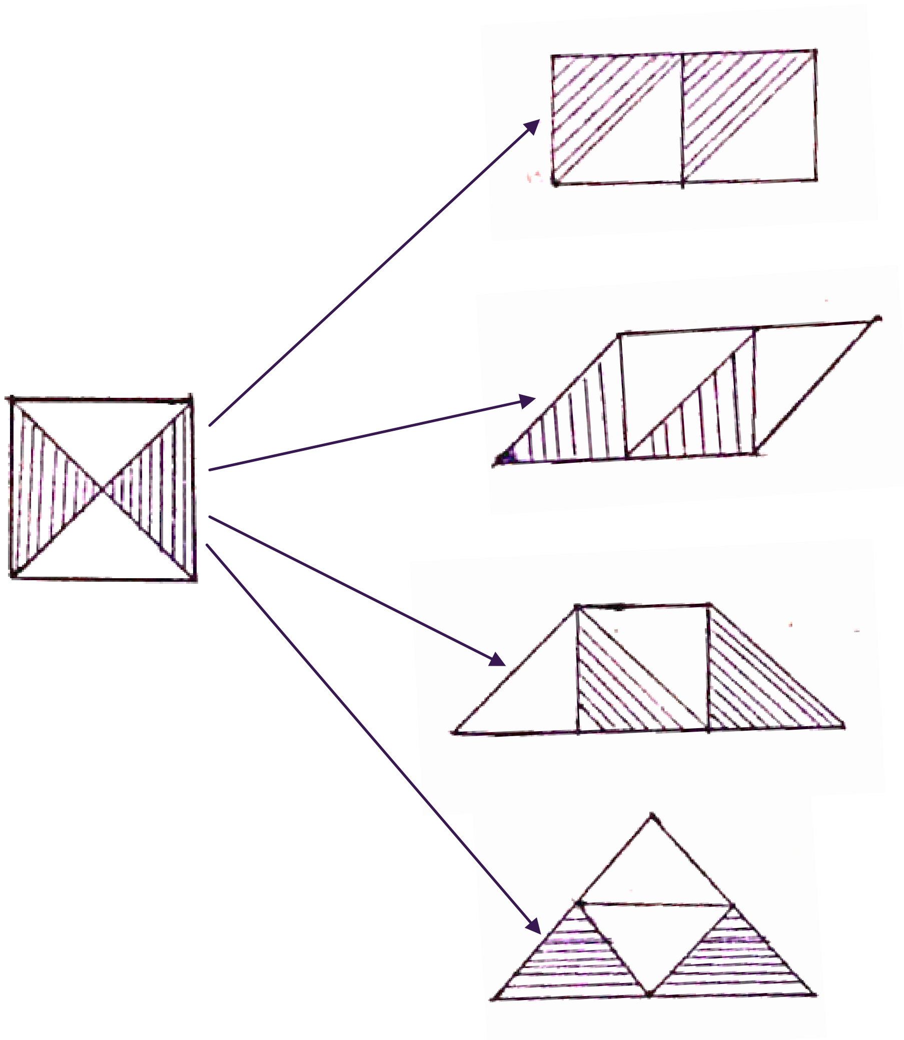




4. ° PENTAGONO REGULAR ⟶ TRAPECIO



5. ° Cortando un cuadrado por sus diagonales, se puede pasar a rectángulo, paralelogramo, trapecio isósceles y triangulo también isósceles.



Anexos

Glosa correspondiente a entrevista realizada a estudiante

Caso: Mx	**Fecha**: 19 de noviembre de 2015	**Lugar**: Biblioteca "Jerzy Plebanski"	**Tema**: Noción cualitativa de área

Tiempo	**Part**	**Glosa**
0:00	Inv	AQUÍ YA TEMA AREA A - R -E- A (Dactilología) SEÑA AREA TU SABER COMO AREA EJEMPLO (Max la interrumpe)
0:10	Mx	AREA
0:15	Inv	DIBUJO YA TU POR FAVOR AREA COMO TU EXPLICAR MAESTRO ASIGNAR
0:22	Mx	NO PREOCUPAR AREA SIGNIFICAR HAY ADENTRO ALTURA BASE PORQUE HAY ALTURA CENTIMETRO BASE CENTIMETRO POR ESO (Exp. Corporal) EJEMPLO IDEA (Se queda pensando) EJEMPLO MESA ESA (señala la mesa que está frente a él) MESA HAY ÁLTURA ALTURA HAY SI HAY (Exp. Facial) YA (señala una lateral de la mesa) ESO (señala el espacio donde usó la seña de área) AREA SIGNIFICAR ADENTRO ALTURA BASE YA YO IDEA EJEMPLO ESTA (señala la mesa frente de él) MESA HAY ALTURA BASE SI PORQUE MIRAR AQUÍ (señala un espacio de la mesa) YO VER ESPACIO VER (señala una lateral de la mesa) ALTURA SENTIR UNO (se queda pensando) CIEN CENTIMETRO YA AQUI (señala la parte de la mesa cercana a él) SENTIR OCHO CENTIMETRO YA CANTIDAD (usa con las dos manos al mismo tiempo, el clasificador de… haciendo referencia que VA A HACER UNA OPERACIÓN CON LAS DOS CANTIDADES QU EMENCIONA) CIEN POR OCHO ESO USAR HAY PORQUE AREA MUCHO SOBRA CUADRADO CUADRADO (con mov. De arriba para abajo haciendo referencia de los cuadritos de 1 cm de una tabla) PARECER (exp. Facial) TABLA DE DOBLE ENTRADA (exp. Facial de pregunta) ESO PORQUE SOBRA CIEN RESPONDER CIENTOCHO ESO FILA (Usa la seña hacia la mesa, como referencia de un cuadrado que adentro contiene cuadritos) EJEMPLO OTRO EJEMPLO (Se queda pensando) CUADRADO C-U-A-D-R-A-D-O (Dactilología) CUADRADO HAY ALTURA BASE SI CLARO PORQUE EJEMPLO (Exp. Facial) DOS BASE DOS CENTIMETRO EJEMPLO ESO CANTIDAD (usa con las dos manos al mismo tiempo, el clasificador de… haciendo referencia de los espacios para hacer la operación de multiplicación de las cantidades mencionadas) ESO DOS POR DOS RESPONDER CUATRO HAY SOBRAR CUADRADO AREA CUADRADO CUADRADO CUADRADO (Clasificador de cuadrirtos y realiza un movimiento semicircular) TABLA DOBLE ENTRADA ESO CORTO ENTENDER (exp. Facial de pregunta) DUDA DUDA (Exp. Facial de pregunta)
1:41	Inv	Muy bien
1:42	MX	OK
1:43	Inv	TU PENSAR AREA MEDIR MEDIR UNICO CENTIMETRO
	Mx	(Se queda pensando) SI NO SI NO (Movimientos de cabeza) DOS DOS DOS METRO A VECES CENTIMETRO A VECES COMO COSA EJEMPLO MAESTRO MOSTRAR EJEMPLO ACORDAR AHÍ (Señala hacia fuera del aula, expresión facial de pregunta) MAS GRANDE LARGO GRANDE AH (expresión facial) METRO SI (expresión facial) AHORA EJEMPLO AHÍ (señala

		una hoja sobre la mesa) PEQUEÑO HACER ESCRIBIR ESO (Señala una hoja sobre la mesa) PEQUEÑO CENTIMETRO SIEMPRE SIEMPRE A VECES MAESTRO MOSTRAR COMO REGLAS CONCENTRAR ESO CORTO DOS DOS METRO CENTRIMETRO DOS DOS NADA MAS (Exp. Facial)
2:24	Inv	AREA CUADRADO CUADRADO (CLASIFICADOR) YA OTRA FORMA PODER AREA SI NO
2:33	Mx	(SE QUEDA PENSANDO) SI (cabeceo) (SE QUEDA PENSANDO) SI PODER (SE QUEDA PENSANDO) POR EJEMPLO PAPEL ESO (Señala la hoja que está en la mesa) PAPEL CUADRADO TABLA DOBLE ENTRADA OTRO CASA CUADRADO (CLASIFICADOR) MISMO ÁREA VES (expresión facial y corporal)OTRO (Se queda pensando)NO SE (expresión facial y corporal) EJEMPLO TRABAJAR TRABAJAR RECTANGULO OFICINA RECTANGULO RECTANGULO (CL) RECTANGULO RECTANGULO (CL) HAY ADENTRO AREA HAY MISMO NO SE (expresión facial) NO SE (expresión facial) COSAVARIAS/MUCHO ESO HAY AREA PORQUE ALTURA POR EJEMPLO POR EJEMPLO CASA CUADRADO (CLASIFICADOR) ALTURA BASE ALTURA CUANTO METRO CUATRO METRO Í BASE 5 METRO HAY AREA VES (expresión facial y corporal) USAR MEDIR (usa el clasificador en el espacio donde usó la seña de altura) MEDIR (usa el clasificador en el espacio donde usó la seña de base) COMO ESO AREA CORTO COSAVARIAS/MUCHO (A lo interrumpe)
3:15	Inv	PERO MISMO MISMO CUADRADO SI RECTANGULO OTRO FORMA EJEMPLO CIRCULO OTRO PODER AREA PODER SI NO
3:26	Mx	(SE QUEDA PENSANDO) SI SI (movimiento de cabeza) SI PODER
3:32	Mx	(Se queda pensando) AREA OTRA FORMA (expresión facial de pregunta a A)
3:48	Inv	SI SI (movimiento de cabeza)
3:56	Mx	(SE QUEDA PENSANDO) SI SI (MOVIMIENTO DE CABEZA) (SE QUEDA PESNANDO) SI PODER PORQUE CUADRADO CUADRADO EJEMPLO CUADRADO YO IDEA CUADRADO CUADRADO (CLASIFICADOR) HAY ADENTRO AREA BIEN YA EJEMPLO DIAGONAL PARTIR NO SE (expresión facial) EJEMPLO (se queda pensando) EJEMPLO YO MI CASA CUADRADO (CLASIFICADOR) CUADRADO HAY AREA ALTURA BASE YA LISTO YA COMO DIAGONAL/PARTIR EJEMPLO CUARTO MIO OTRO CUARTO ABUELO OTRO CUARTO NO SE (EXPRESION FACIAL) ESPOSO LO QUE SEA (expresión facial y corporal) YA ESO CUADRADO PARTIR PARTIR PARTIR (acción que realiza en un espacio haciendo referencia a las columnas) PARTIR PARTIR PARTIR (acción que realiza en un espacio haciendo referencia a las filas) YA (expresión facial) CORTO YA (expresión facial) PODERCOMO QUITAR/RESTAR COMO RESTAMENOS RECORDAR MISMO MISMO HACE RATO CUADRADO ALTURA BASE POR YA RESPONDER CUANTO 100 CUADRADO COMO PARTIR DIAGONAL ESO SEPARAR COMO 50 CENTIMETRO(usa las señas en un espacio) 50 CENTIMETRO (Usa las señas en otro espacio) RESPONDER ESO SI PODER
4:37	Inv	PREGUNTAR CIRCULO AREA ADENTRO HAY SI NO
5:25	Mx	NO NO (movimiento de cabeza) CIRCULO NO (movimiento de cabeza) CIRCULO NO NO NO (movimiento de cabeza y expresión facial) PORQUE NO PODER COMO CUADRADO EXACTO NO HAY NO HAY COMO DESFIGURADO(CLASIFICADOR)DESFIGURADO(CLASIFICADOR) POR ESO NO (movimiento de cabeza) EXACTO NO HAY

6:12	G	AQUÍ (SEÑALANDO LA HOJA) CUANTO AREA
6:20	Mx	DIFICIL (expresión facial) DIEZAQUÍ (señala la base del cuadrado dibujado en la hoja) DIEZ CENTIMETRO (Inv. le da una regla) YO PORQUE VER SENTIR ESO (realiza las medidas del cuadrado dibujado en la hoja) CERQUITA DOCE CERQUITA DOCE CERQUITA SENTIR MAS O MENOS SIEMPRE SIEMPRE COMO TAMAÑO (CLASIFICADOR DEL TAMAÑO DE UNA LÍNEA) TAMAÑO (CLASIFICADOR DEL TAMAÑO DE UNA LÍNEA) SABER DIEZ SIEMPRE SIEMPRE RARO A VER (expresión facial) DIFERENTE RARO CONFUNDIR (MX mide la base del cuadrado dibujado en la hoja) BASE DOCE CENTRIMETROS SI (expresión facial de pregunta)
6:49	Inv	Si ESCRIBIR
7:10	Mx	(soluciona la actividad) ALTURA CINCO CENTIMETRO BASE DOCE CENTIMETRO CANTIDAD (Usa las dos manos para clasificador de… referencia de espacio las cantidades mencionadas para realizar la operación) CINCO POR DOCE RESPONDER (se queda pensando) SESENTA CENTIMETRO CUADRADO (escribe la solución en la hoja)
7:48	A	RESPONDER BIEN PERO PREGUNTA HACE RATO TU EXPLICAR ALTURA BASE CANTIDAD (USANDO LAS DOS MANOS PARA EL CL DE OPERACIONES) POR ADENTRO HAY PREGUNTAR POR POR PORQUE
8:07	Mx	PORQUE SIEMPRE SIEMPRE PRIMERO BASE SEGUNDO LENGUA DE SEÑAS CONFUNDIR CONFUNDIR NO PODER COMO EXACTO LEY BASE BASE SIEMPRE SIEMPRE PRIMERO CANTIDAD (USA UNA MANO PARA CL DE OPERACIÓN) AHÍ PRIMERO BASE POR ALTURA NUMERO CUANTO CIENTIMETRO AHÍ (señala la hoja que está sobre la mesa) DESCUBRIR PRIMERO PORQUE VER SIEMPRE SIEMPRE COSTUMBRE COSTUMBRE AHÍ (señala la hoja que está sobre la mesa) VER CINCO POR SIEMPRE CANTIDAD CANTIDAD CANTIDAD (USA AMBAS MANOS PARA EL CLASIFICADOR DE OPERACIÓN REALIZANDO VARIOS MOVIMIENTOS RAPIDOS) RAPIDO NO PODER COMO DEBER REGLAS LEY SIEMPRE BASE PRIMERO BASE CANITIDAD (CL OPERACIÓN REALIZA UN MOVIMIENTO EN FORMA DIAGONAL) POR 5 IGUAL RESPUESTA CUANTO ESO ENTENDER (expresión facial de pregunta, al ver a Gerardo que no le entendió) MIRAR AHÍ (señala la cantidad de la base y usa el clasificador de cantidad y mueve de la cantidad escrita junto al cuadrado dibujado en la hoja hacia donde escribió esa cantidad para realizar la operación y realiza la operación) ESO
9:21	A	BIEN BIEN RESPONDER PERO PREGUNTA OTRA VEZ TU PENSAR POR POR PORQUE NO POR JUNTAR JUNTAR PORQUE
9:38	Mx	PORQUE YO EQUIVOCAR EQUIVOCAR YO HACER YO USTEDES NO YO EQUIVOCAR EQUIVOCAR PORQUE YO COSTRUMBRE JUNTAR JUNTAR SUMA SIGNIFICAR JUNTAR SUMA BIEN BIEN PERO COMO JUNTAR SIGNIFICAR CANITDAD (USA AMBAS MANOS PARA EL CL DE OPERACIÓN) EL (señala en un espacio) OSCAR BRANDON PENSAR JUNTAR JUNTAR COMO JUNTAR SUMA NO PODER POR ESO YO EQUIVOCAR COMO FALTAR LENGUA DE SEÑAS PONER SEÑAS ESO EQUIVOCAR YO YO EQUIVOCAR ESO MEJOR COMO CANTIDAD (USA AMBAS MANOS PARA EL CL DE OPERACIÓN) EOS (SEÑALA EL CLASIFICADOR DE CANTIDAD DENTRO DE UNA OPERACIÓN) SIGNIFICAR COMO CANTIDAD (USO DE AMBAS MANOS PARA EL CLASIFICADOR DE OPERACIÓN Y LAS JUNTA) COMO EJEMPLO CUANTAS SEÑAS PONER SEÑAS SEÑAS ESO EQUIVOCAR YO

		EQUIVOCAR ESO RESPUESTA MEJOR Cl operación QUE ES CL OPERACIÓN FORMA POR EJEMPLO NUMERO CL OPEARACION OTRO JUNTA ESO JUNTAR SIEMPRE JUNTAR SIGNFICIAR COMO CANTIDAD (USO DE AMBAS MANOS PARA EL CLASIFICADOR DE OPERACIÓN Y LAS JUNTA) COMO EJEMPLO NUMERO CANTIDAD (USA UNA MANO PARA EL CLASIFICADOR DEL ESPACIO DONDE SE COLOCA UNA CANTIDAD PARA REALIZAR LA OPERACIÓN) CANTIDAD (USA LA OTRA MANO PARA EL CLASIFICADOR DEL ESPACIO DONDE SE COLOCA UNA CANTIDAD PARA REALIZAR LA OPERACIÓN) NUMERO CANTIDAD (USA AMBAS MANS PARA EL CLASIFICADOR DE LOS ESPACIOS DONDE SE COLOCA LAS CANTIDAD PARA REALIZAR LA OPERACIÓN Y REALIZA EL MOVIMIENTO DE JUNTAR) MEJOR JUNTAR (EXPRESION FACIAL DE NEGAR) COMO SIEMPRE SIEMPRE JUNTAR SIGNIFICAR SUMA POR ESO YO EQUIVOCAR YO POR ESO MEJOR EXACTO CANTIDAD (USA AMBAS MANOS PARA EL CLASIFICADOR DEL ESPACIO DONDE SE COLOCA LAS CANTIDAD PARA REALIZAR LA OPERACIÓN) COMO PARA MAS CLARO EN LA LENGUA DE SEÑAS ESO
10:20	Inv	ENTENDER SI SI APARTE PREGUNTAR PORQUE TU POR POR POR NO SUMA O DIVISION PORQUE NO (MX LA INTERRUMPE)
10:58	Mx	AH (expresión facial) ESO PORQUE ESO (SEÑALA LA HOJA QUE ESTÁ SOBRE LA MESA) POR POR SIEMPRE SIEMPRE PORQUE SUMA NO PODER ESO (CON LA MIRADA SEÑALA LA HOJA QUE ESTA EN LA MESA) SOBRA NO PODER COMO POR POR SIGNIFICAR COMO HAY ADENTRO HAY AREA MIRAR EJEMPLO ESE (SEÑALA HOJA) DOCE POR CINCO RESPONDER 60 CENTIMETRO CUADRADO ESE (SEÑALA EL ESPACIO DONDE USO LA SEÑA DE SESENTA) HAY SOBRAR AREACUADRADO CUADRADO CUADRADO CUADRADO CUADRADO CUADRADO (REALIZANDO MOVIMIENTOS LINEALES, EN DOS COLUMNAS COMO REFERENCIA DE CUADRITOS) TABLA DE DOBLE ENTRADA ESO SESENTA CENTIMETRO CUADRADOESO AHÍ (SEÑALA LA HOJA QUE ESTA SOBRE LA MESA)
11:07	Inv	BIEN BIEN
11:08	Mx	OK
11:10	Inv	ATENDER AHÍ (Señala nueva hoja sobre la mesa) DIBUJO DOS CUADRADO (CLASIFICADOR) CUADRADO (CLASIFICADOR) GRANDE CUAL
11:17	Mx	GRANDE ESTE (SEÑALA UNO DE LOS CUADRADOS DIBUJADOS EN LA HOJA) (Gerardo le da una regla) MAS GRANDE (expresión facial de pregunta a A)
11:20	Inv	SI SI (Movimiento de cabeza)
11:25	MX	ESTE (señala uno de los cuadrado dibujado en la hoja)
11:32	Inv	AREA DOS DIBUJO(Usa la seña en un espacio) DIBUJO (usa la seña en otro espacio) MIRAR AREA ESTE (señala el espacio donde usó la primera seña de dibujo) CUANTO OTRO CUADRADO (USA LAS SEÑAS EN EL ESPACIO DONDE USO LA SEGUNDA SEÑA DE DIBUJO) AREA CUANTO SENTIR GRANDE CUAL
11:44	Mx	AH (Expresión facial, se queda pensando) COMO ESTE (SEÑALA EL CUADRADO DIBUJADO EN LA HOJA) CUADRADO CUADRADO COMO DESCOMPOSICIÓN DE CUADRADO (CLASIFICDOR) DESCOMPOSICIÓN DE CUADRADO (CLASIFICDOR) COMO PARTIR/DIAGONAL IGUAL DIAGONAL DESCOMPOSICIÓN DE CUADRADO (CLASIFICDOR) ESO

		(MX TOMA LA REGLA PARA MEDIR LOS CUADRADOS)PUNTO DECIMAL BASE (Gerardo lo interrumpe y le da un lápiz) ESCRIBIR (Expresión facial de pregunta)
12:00	Inv	SI (movimiento de cabeza)
12:05	Mx	(Se dirige a A) YO PENSAR LENGUA DE SEÑAS ESO (REALIZAR LA ACTIVIDAD EN LA HOJA) PUNTO DECIMAL OTRA VEZ AHÍ (señala la hoja que está sobre la mesa) ALTURA SEIS CENTIMETRO BASE SEIS CENTIMETRO (se queda pensando) JUNTAR RESPONDER TREINTA NO(expresión facial) TREINTA Y CINCO CENTIMETRO CUADRADO
12:12	Inv	(CON EXPRESION FACIAL MUESTRA DE SORPRESA ANTE LA RESPUESTA DE MX)
12:19	Mx	(se queda pensando y cuenta con los dedos) PERDÓN TREINTA CENTIMETROCUADRADO
12:24	Inv	(NO VIO LA RESPUESTA) TREINTA Y QUE(expresión facial de pregunta)
12:30	Mx	TREINTA CENTIMETRO CUADRADO
12:40	Inv	TREINTA (expresión facial de pregunta)
12:48	Mx	TESTIGO AHÍ (señala la cámara de video)
12:56	Inv	EQUIVOCAR EQUIVOCAR
13:05	Inv	CAMARA DE VIDEO CAMARA DE VIDEO PROBAR PROBAR
13:10	Mx	TU LENGUA DE SEÑAS MIRAR VAS A VER (expresión facial) OK
13:17	Mx	TREINTA CENTIMETRO CUADRADO
13:21	Inv	NO NO
13:25	Mx	EQUIVOCAR CUAL (expresión facial de pregunta)
13:28	Inv	(Señala las medidas de los cuadrados dibujados en la hoja)
13:30	Mx	YO DECIR MIRAR SEIS POR SEIS RESPONDER TREINTA CENTIMETRO CUADRADO
13:32	Inv	NO (movimento de cabeza)
13:33	Mx	QUE (expresión facial de pregunta) CUAL CUAL (expresión facial de pregunta)
13:34	Inv	SEIS POR SEIS CUANTO (expresión facial de pregunta)
13:36	Mx	TREINTA (expresión facial de pregunta)
13:36	Inv	NO (movimento de cabeza) SEIS POR SEIS…
13:39	Mx	(cuenta con los dedos de su mano) TU RAZON
13:40	Mx	PERDÓN 36 CENTIMETRO CUADRADO
13:40	Inv	BIEN BIEN BIEN
13:41	Mx	PERDON PERDON CONFUNDIR CONTAR SABER POR CONTAR NO PODER COMOCABEZA FUCIONAR POR ESO YO COSTUMBRE COMO PRIMERA VEZ EMPRZAR ANTES ANTES CONTAR CONTAR NO PODER ELLA (SEÑALA A ANDREA) REGAÑAR YO COMO QUITAR RESPETAR/NO DECIR NADA COMO EJERCICIO EJERCICIO NO IMPORTA PODER HACER CONTAR NO IMPORTA ESFORZAR ESFORZAR COMO EJERCICIO EJERCICOCABEZA CONTROLAR POCO POCOTRANSFORMAR PRIMERA VEZ YO YO SENTIR MEJOR NTERESANTE CABEZA FUNCIONAR ESO RAPIDO ESO
13:52	Inv	BIEN BIEN
13:53	Mx	PERDON CONFUNDIR POCO POCO YA BIEN SEIS ALTURA SEIS CENTIMETRO BASE SEIS CENTIMETRO YA CANTIDAD JUNTAR (USA AMBAS MANOS PARA EL CLASIFICADOR DE OPERACIÓN REALIZANDO UN MOVIMIENTO DE JUNTAR) SEIS POR SEIS RESPONDER TREINTA SEIS CENTIMETRO CUADRADO YA
14:03	Inv	BIEN OTRO ESTE (señala otro dibujo en la misma hoja que esta sobre la mesa)

14:04	Mx	(Se queda pensando) COMO (expresión facial de pregunta) DIAGONAL/PARTIR (G lo interrumpe)
14:06	Inv	CUANTO AREA
14:10	Mx	DIAGONAL/PARTIR COMO DESCOMPOSICIÓN DE CUADRADO (CLASIFICADOR) AHÍ (señala el dibujo del cuadrado) ESTE (Se ñala otro dibujo de cuadrado) IGUAL PARECER PARECER (realiza el movimiento sobre ambos dibujos en la hoja) SI PERO DESCOMPOSICON DE CUADRADO DIFERENTE ESTE (SEÑALA LA DIVISION EN EL DIBUJO DE LOS CUADRADOS) POR ESO (se queda pensando al ver a G que no está convencido de la respuesta) (G lo interrumpe y habla en voz)
14:26	Inv	Si cambia la figura cambia el área
14:29	Inv	HACE RATO EXPLICAR CUADRADO IGUAL ESTE (señala el primer cuadrado dibujado en la hoja) TU PENSAR CUADRADO CUADRADO DESCOMPOSICIÓNAREA (Usa la seña en el espacio donde está el clasificador de un cuadrado) AREA (Usa la seña en el otro espacio donde está el otro clasificador de un cuadrado) MISMO MISMO O CAMBIAR
14:32	Mx	CAMBIAR PORQUE DIAGONAL/PARTIR POR ESO
14:36	Inv	CUANTO (expresion facial de pregunta) (Mx la interrumpe)
14:37	Mx	DIAGONAL/PARTIR (G lo interrumpe)
14:39	Inv	CUANTO AREA
14:45	Mx	YO SENTIR YO SENTIR (cuenta con los dedos de la mano) SENTIR (se queda pensando) (G le ofrece la regla) MIRAR AHÍ AHÍ (señala el dibujo en la hoja sobre la mesa) CAMBIAR SI PORQUE MIRAR HAY ALTURA SI SI (MOVIMIENTO DE CABEZA) BIEN MISMO PARECER MISMO MISMO PERO AREA COMO CAMBIAR (expresión facial de duda) CAMBIAR FORMA DESCOMPOSICON DE CUADRADO (CL) DESCOMPOSCION DE CUADRADO (CL) DIFERENTE DIFERENTE POR ESO ESTE (SEÑALA EL CUADRADO DIBUJADO EN LA HOJA) AREA SI (MOVIMENOT DE CABEZA) MISMO HAY PORQUE EXACTO HAY AHÍ (SEÑALA EL DIBUJO EN LA HOJA) EXACTO HAY AHÍ (SEÑALA EL DIBUJO EN LA HOJA) CUADRADO CUADRADO (REALIZANDO MOVMIENTO DE ARRIBA PARA ABAJO) IGUAL CUADRADO COMO DESCOMPOSICIÓN DE CUADRADO POR ESO FORMA POR ESO SI PODER AREA HAY PERO DIAGONAL /PARTIR COMO MITAD SEPARAR (CON LA MIRADA HACIA EL DIBUJO DE LA DESOMPOSION DE CUADRADO) CUAL RESPONDER CUANTO ESO (se queda pensando y cuenta con los dedos)
15:38	Mx	BIEN VEINTE (Expresión facial de duda y continua pensando) UNO NO (expresión facial de equivocarse) DIECISÉIS (expresión facial de equivocarse y continua pensado y contando los dedos de su mano) BIEN DIECIOCHO DIECIOCHO DIECIOCHO CENTIMETRO CUADRADO Y MITAD IGUAL IGUAL DIECIOCHO CENTIMETRO CUADRADO JUNTAR TREINTASEIS CENTIMETRO CUADRADO CORTO
15:59	Inv	ESCRIBIR MITAD/PARTIR Seña diagonal
16:03	Mx	(realiza la seña de diagonal)
16:07	Inv	DIBUJO TU DIAGONAL
16:10	Inv	TRAZAR AQUI (señala la hoja donde debe trazar una línea en forma diagonal) DIAGONAL
16:22	Inv	MISMO MISMO MISMO MISMO AQUÍ (señala el dibujo anterior) CUADRADO RECTANGULO TU DIAGONAL TRAZAR
16:25	Mx	AH!(expresión facial) DOS DOS DIAGONAL COMO IZQUIERDA TRAZAR

		(realiza la acción sobre el dibujo) O trazar (realiza la acción de lado derecho sobre el dibujo) DOS DOS
16:27	Inv	IGUAL IGUAL
16:30	Mx	(MX realiza la actividad)
18:01	Inv	BIEN CUANTO AREA (Usando la seña en el espacio sobre el dibujo e indica que debe quitar una partes de la figura)
18:07	Mx	RESTAR COMO SEPARAR
18:08	Inv	CUANTO
18:10	Mx	30 CENTIMETRO CUADRADO
18:11	Inv	PORQUE
18:12	Mx	PORQUE SEPARAR COMO DIAGONAL ESO (señalando la hoja) SEPARAR MIRA HACE RATO TODO CENTIMETRO CUADRADO YA MITAD SEPARAR CUANTO 30 CENTIMETRO CUADRADO CORTO ESO ESO
18:19	Inv	DIAGONAL DIGAGONAL (SEÑALA CUADRADO)TU DECIR 30 CM CUADRADO
18:23	Mx	30 30 CENTIMETRO CUADRADO PORQUE JUNTAR 60 CENTIMETRO CUADRADO ESO (VE LA HOJA) PARECER PORQUE TENER PRECISO COMO CL SEPARACIÓN DE DIAGONALES PARECER IGUAL PRECISO EQUIVOCAR NO HAY PRECISO TENER AREA TGENER MISMO MISMO MISMO POR ESO OK
18:33	Inv	¿Cuál es la base y la altura del triángulo?
18:39	Inv	CUADRADO CUADRADO YA TU DIBUJAR DIAGONAL YA BIEN PERO AREA DIAGONAL YA ALTURA CUANTO BASE CUANTO EJEMPLO (SEÑALA EL CUADRADO) ALTURA CUAL
18:48	Mx	ALTURA PRECISO ALTURA ALTURA PORQUE
18:50	Inv	(SEÑALA CUADRADO) ALTURA CUAL
18:52	Mx	(SEÑALA EL CUADRADO) MIRA ALTURA PORQUE LIDER CABEZA CABEZA CABEZA ALTURA SIEMPRE SIEMPRE CUAL (SEÑALA ALTURAS) ESO CORTO
19:02	Inv	BASE BASE CUAL
19:04	Mx	(SEÑALA) ESTA B A S E
19:06	Inv	La base y la altura de este ESE MISMO TRIANGUILO ALTURA BASE CUAL ALTURA ALTURA (SEÑALA) CUANTO
19:39	MX	5 CENTIMETRO
19:41	Inv	MARCA ESCRIBIR En todo el triángulo cuanto es el AREA
19:58	Inv	TRIÁNGULO TRIÁNGULO COMPLETO AREA CUANTO
20:22	Mx	(SE QUEDA PENSANDO) MIRA BASE CUANTO VER CENTIMETRO CINCUENTA CENTIMETRO CUADRADO AHÍ PORQUE PREGUNTO PORQUE AHÍ PORQUE AHÍ TENER ACORDAR HACE RATO TU EJEMPLO MISMO HACE RATO RECTANGULO BIEN COMPLETO BIEN DIAGONAL MISMO AHÍ COMO SEPARAR COMO VACIO NO HAY COMO CONSENTRAR VER ESO IGUAL CONECTAR CL DIAGONALES PEGAR ESO PREGUNTAR ASI COMO PORQUE TRIANGULO MIRA AHÍ DIGO RARO AHÍ COMO COSAS DIFERENTE PORQUE ESE YO SENTIR VER TENER ALTURA YA BASE BIEN PERO COMO FORMA TRIANGULO DIFERENTE ESO ESO SIEMPRE APARTE COMO SIEMPRE PRESISO LEY ALTURA BASE TENER DESCIBRIR HACE RATO TRIANGULO PONER (HACIA LA HOJA) YA ESE MIRA DONDE ALTURA YO RESPONDER IGUAL COMO APRTE COMO IDEA (FIGURAS DESCONFIGURADAS) COMO CONTRUIR MIRA EJEMPLO ALTURA CASA CABEZA ESO CL

		TECHO APARTE ESO SENTIR COMPLETO SENTIR SIGNIFICAR COMO TRIANGULO SIGNIFICAR CUADRADO IGUAL CONECTAR CUADRADO TRIANGULO CL PUEDE HABER OTRA FIGURA ESO AHÍ QUITAR. COMO AHORTA ESE (SEÑALA LA HOJA) TRIANGULO LOS LADOS APARTE SIEMPRE BASE TENER ALTURA TENER POR ESO
21:42	Inv	BIEN
21:49	Mx	YO AYER ESTUDIAR POR ESO BIEN
21:57	Inv	CUANTO AREA (SEÑALANDO DIBUJO)
22:02	Mx	MIRA CLARO ESO BIEN FORMA DIFERENTE DIFERENTE DESFIGURADO ESO (HACIA LA HOJA) MIRA SIEMPRE SIEMPRE IZQUIERDA ALTURA TENER BASE O TENER ALTURA IZQUIERDA IGUAL CABEZA LINEA APARTE ESO POR ESO MIRA ALTURA 12 CENTIMETRO CUADRADO BASE 17 CENTIMETRO CUADRADO CL OPERACIÓN PRMERO 17 POR 12 RESPONDER CL NECESITO PAPEL
22:15	Mx	NO PODER PENSAR PACIENCIA PACIENCIA (HACE OPARACIONES) AREA CUANTO COMPLETO COMPLETO 204 CENTIMETRO CUADRADO
22:20	Inv	NO EQUIVOCAR
22:21	Mx	CUAL
22:22	Inv	DIBUJO TENER CUADRADO Y TRIANGULO TU HACE RATO EL CUADRADO PONER ALTURA DONDE YA BIEN BIEN PERO BASE EQUIVOCAR EQUIVOCAR EQUIVOCAR BASE CUAL CUADRADO CUADRADO UNICO MIRA CUAL BASE
22:30	Mx	YO DECIR HACE RATO
22:32	Inv	CUANTO UNICO CUADRADO BASE YA
22:33	Mx	SI HACE RATO YO DECIR TRIANGULO HACE RATO DECIR (haciendo clasificador) BASE DE TRIANGULO MISMO PARTIR ALTURA CABEZA DONDE (Señala la base del triángulo) DECIR HACE RATO ESTO DIFERENTE YO DECIR YO DECIR
22:38	Inv	BASE CUADRADO UNICO YA OK SI ENTENDER DORMA DIFERENTE YA ENTENDER
22:46	Mx	ALTURA 12 CENTIMETRO CUADRADO BASE 11 PUNTO 9 CENTIMETRO CUADRADO
22:58	Inv	MIRA BIEN BIEN PERO NÚMERO NÚMERO VER
23:04	Mx	ENTENDER ENTENDER
23:07	G	SI
23:10	Mx	OK MIRA DECIR
23:11	Inv	ESO
23:13	Mx	11 PUNTO CERO
23:15	Inv	12
23:16	Mx	NO (SEÑALA LA HOJA) 11 DECIR 11
23:19	Inv	TU DECIR 11 PUNTO 9 Y
23:21	Mx	CÁMARA
23:22	Inv	POCO
23:24	Mx	NO PODER SOLO REGLA NO PODER APARTE NO PODER
23:31	Inv	TU SABER MULTIPLICAR PUNTO DECIMAL
23:37	Mx	NO ACORDAR TU ENSEÑAR GRACIAS BASE 12 EQUIVOCAR ALTURA 12 CEENTIMETRO BASE 12 CENTIMETRO CORTO
23:44	Inv	AREA CUANTO
23:50	Mx	JUNTAR 12 12 12 12 12 UNO COMPLETO AREA 144 CENTIMETRO CUADRADO CORTO (SEÑALA)

23:52	Inv	PERO FALTA PONER
24:00	Mx	QUE
24:02	Inv	(SEÑALA ALTURA)
24:03	Mx	DECIR SEÑAS
24:04	Inv	PERO BIEN PERO UNICO FALTA TRIANGULO PARAR
24:07	Mx	SI MIRA AQUÍ AQUÍ
24:11	Inv	CUANTO JUNTO
24:12	Mx	ENTENDER MIRA AQUÍ MISMO MISMO SEPARAR DIAGONAL MIRA (Señala la hoja) YO ENTENDER CLARO MIRA AHÍ BASE AHÍ TENER BASE TENER ALTURA SIEMPRE 12 ASÍ SENTIR CUANTO
24:17	Inv	TU TU ALTURA PONER PRECISO ALTURA NO HAY
24:19	Mx	LAPIZ GORDO
24:22	Inv	TU HACE RATO 17 ENTONCES MIRA TU DECIR 11.9 5.9 JUNTAR 17
24:29	Mx	YA ENTENDI DESCUBRIR RAZON MIRA
24:32	Inv	5
24:39	Mx	MIRA PUNTO MIRA TU VER (SEÑALA CERO)
24:42	Inv	SI PERO
24:43	Mx	YO DECIR 17 . 17 PUNTO UNO SI AHÍ SI
24:48	Inv	PRECISO
24:54	Mx	SI BASE LINEA TENER LINEA HAY COMO LINEA PRESISO CHUECO NO HAY LINEA ESO
25:02	Inv	17
25:05	Mx	SI RARO 17 COMPLETO DECIR SI DECIR
25:06	Inv	5
25:07	Mx	SI ENTENDER
25:09	Inv	12 JUNTA CUANTO
25:12	Mx	12 POR 5 60 60
25:14	Inv	6 12 JUNTAR
25:16	Mx	JUNTAR 17
25:17	Inv	ENTENDER 11.9 5.1 JUNTAR
25:20	Mx	ESO
25:21	Inv	17
25:22	Mx	ENTENDER
25:23	Inv	VES
25:24	Mx	ENTENDER
25:25	Mx	OK AHÍ BASE 5 CENTIMETRO CINCO PERDON ALTURA 12 CENTIMETRO YA OPERAR 5 POR 12 RESPONDER 60 60 CENTIMETRO CUADRADO PERO PARTIR DIAGONAL RESTA 30 CENTIMETRO CUADRADO AHÍ YA SOBRA AREA (SEÑALA)
25:34	Inv	CUANTO
25:38	Mx	DECIR 30 CENTIMETRO CUADRADO SI SI ALTURA AREA
25:42	Inv	SI SI CUANTO MENTOS CUANTO
25:44	Mx	30 CENTIMETRO CUADRADO
25:46	Inv	OK TODO CUANTO
25:49	Mx	TODO COMPLETO
25:52	Inv	COMPLETO CUANTO
25:53	Mx	204 TODO COMPLETO 402 CENTIMETRO CUADRADO YA ESTE 30 CENTIMETRO CUADRADO JUNTAR 234 CENTIMETRO CUADRADO
26:01	Inv	BIEN BIEN TU EXPLICAR TU HACER COMO ASIGNAR MAESTRO TU

		EXPLICAR
26:03	Mx	ASIGNARME
26:04	Inv	TU HACER COMO MULTIPLICAS O LO JUNTAS O QUITAR O PENSAR HACER TU COMO
		AHÍ HAY ADENTRO CUADRADO CUADRADO ESE PARECER PERO QUITAR DIAGONAL POQUITO AHÍ APARTE QUITAR RESTAR APARTE AHÍ HAY NO SE CUADRADO CUADRADO SOBRAR QUITAR ESTO JUNTAR COMPLETO 234 CENTIMETRO CUADRADO COMPLETO APARTE OTRO TENER HAY FORMA HAY DESCUBRIR MISMO MISMO CABEZA MISMO MISMO CABEZA ALTURA (SEÑALA LA HOJA) Y LUIEGO HAY BASE COMPETO CUANTO RESPONDER 234 CM CUADRADO TODO COMO TODO PERO TODO MITAD MITAD YA APARTE TODO COMPLETO ESO
27:05	Inv	BIEN BIEN EXPLICAR PERO TU EXPLICAR CUADRADO UNICO OBJETICO CUADRADO UNICO PERO FALTAR EXPLICAR COMO DIAGONAL DIAGONAL COMO HACER COMO CUADRADO APARTE YA PERO DIAGONAL DIAGONAL TU HACER COMO SI SI CUADRADO CL RECTANGULO RECTÁNGULO COMPLETO CENTIMETRO CUADRADO DIAGONAL SEPARAR LUEGO APARTE SOBRA 32 CENTIMETRO CUADRADO COMO RESTAR NO SÉ HAY ALTURA ESTO ES APARTE HAY DESCUBRIR CABEZA ALTURA CABEZA HASTA ESO AHÍ HAY BASE CUANTO 5 CENTIMETRO ALTURA 12 CENTIMETRO JUNTAR RESPONDER CUANTO TODO COMPLETO 60 CM CUADRADO DIAGONAL RESTAR HAY SOBRAR 30 CENTIMETRO CUADRADO AHÍ ESO
28:03	Inv	BIEN BIEN