CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

LOS CONCEPTOS VALOR PROPIO Y VECTOR PROPIO EN UN TEXTO DE ÁLGEBRA LINEAL: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Tesis que Presenta:

VICENTE FABIÁN CAMPOS

Para Obtener el Grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En la Especialidad de

MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de la Tesis: Dra. Hatice Asuman Oktaç

Ciudad de México Febrero, 2017

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt)
por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de maestría.

Vicente Fabián Campos

CVU 633235

Agradecimientos

A mi familia, por ser mi fuente de inspiración y por su apoyo incondicional en las decisiones que he tomado.

A la Dra. Asuman Oktaç, por su apoyo, paciencia y, sobre todo, por creer en mí para realizar el presente trabajo.

A mis revisores, Dra. Ileana Borja y el Dr. Hugo Mejía, por el valioso tiempo destinado para la lectura de este trabajo y por sus sugerencias para mejorarlo.

A los doctores que contribuyeron en mi formación académica: Dr. Ricardo Cantoral, Dr. Francisco Cordero, Dra. Rosa María Farfán y la Dra. Asuman Oktaç.

A mis compañeros del seminario, que han sido un apoyo constante en mi formación académica, en especial a César Romero, Gisela Camacho y Paty Jiménez, por sus valiosas aportaciones a mi trabajo.

A mis compañeros de generación: Fabián Romero, Jaime Pérez, Nayeli Pacheco, Luis López, Julio Yerbes y Antonio Madriz, por brindarme su amistad en esta etapa académica que iniciamos juntos.

A Claudio Opazo, Irene Pérez, Angélica Moreno, Mario Caballero, Claudia Méndez y Rosario Pérez, por brindarme su amistad desde el inicio de la maestría.

A Gaby Rodríguez y Adriana Parra, por su amabilidad y atención durante todas las gestiones escolares.

A mis amigos, Francisco Bautista y Tarcila Angulo, por hacer que mi estancia en la ciudad de México fuera más agradable.

¡Gracias a todos!

Contenido

Resumen

En este trabajo de investigación se estudia, desde el punto de vista cognitivo, cómo es que los conceptos valor propio y vector propio son abordados en un texto de álgebra lineal. En particular se busca evidenciar mediante el uso de la teoría APOE si un determinado libro de texto sigue, de manera implícita, una descomposición genética en el desarrollo de los conceptos valor y vector propio. Para tal fin se analizan las estructuras mentales que son promovidas y/o favorecidas a través del discurso presentado por el texto. El libro elegido para esta investigación es uno de los textos que comúnmente se sugiere en la bibliografía de los programas de álgebra lineal a nivel universitario. Debido a que la teoría APOE no proporciona herramientas metodológicas para analizar textos hemos propuesto, a partir de nuestra revisión de literatura, algunos criterios para analizar el libro de texto en cuestión. A partir de estos criterios se ha organizado la búsqueda de las estructuras mentales de los conceptos valor y vector propio que son promovidas y/o favorecidas en el texto. Como resultado de la investigación se proporcionan algunos elementos que podrían considerarse para el diseño de una descomposición genética para los conceptos valor y vector propio. Asimismo resaltamos algunos aspectos que, a nuestra consideración, deben tenerse presente para el aprendizaje de estos conceptos y que el libro de texto analizado parece ignorar.

Abstract

In this work we study, from a cognitive point of view, how the concepts of eigenvalue and eigenvector are addressed in a linear algebra textbook. It is sought to evidence through the use of APOS theory if a certain textbook implicitly follows a genetic decomposition in the development of the concepts eigenvalue and eigenvector. For this purpose we analyze the mental structures that are promoted and/or favored through the discourse presented by the textbook. The textbook chosen for this research is one of the textbooks commonly suggested in the bibliography of linear algebra programs at the undergraduate level. Since APOS theory does not provide methodological tools for analyzing textbooks, we have proposed, based on a literature review, some criteria for analyzing the textbook in question. Following these criteria the search for the mental structures of the concepts eigenvalue and eigenvector that are promoted and/or favored in the text was organized. As a result of this study we provide some elements that could be considered for the design of a genetic decomposition for the concepts eigenvalue and eigenvector. Also we highlight some aspects that we consider should be kept in mind for the learning of these concepts and which the textbook we analyzed seems to ignore.

CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El álgebra lineal es una de las asignaturas que actualmente se incluye en la mayoría de los programas de estudios de las carreras enfocadas en el área de ciencia y tecnología. Es considerada como básica, ya que las herramientas que proporciona esta área de las matemáticas tienen diversas aplicaciones en una gran variedad de dominios, por ello se incluye al menos un curso de esta asignatura durante los dos primeros años de los estudios universitarios. Sin embargo, “[l]a enseñanza de álgebra lineal en el nivel universitario es considerada universalmente como una experiencia frustrante para profesores y estudiantes por igual” (Hillel, 2000, p. 191). Investigaciones en esta área han mostrado que el aprendizaje del álgebra lineal a menudo resulta bastante difícil para los estudiantes, debido a que su estudio demanda de una fuerte carga cognitiva para lograr la comprensión de los conceptos abstractos de esta disciplina (Dorier, 2002; Oktaç y Trigueros, 2010; Thomas y Stewart, 2011). Pese a que algunos estudiantes logran eludir esta situación, su aprendizaje se basa principalmente en la memorización y aplicación de algoritmos algebraicos que carecen de significado para ellos, tal es el caso de los conceptos valor y vector propio.

Dentro de la literatura en español es común emplear los términos eigenvalor, eigenvector, valor característico y vector característico para referirse a los conceptos valor propio y vector propio, respectivamente. En este documento se utilizará la expresión “valor y vector propio” para referirnos, de manera simplificada, a ambos conceptos, alternando en ocasiones con “valor propio y vector propio”. En la siguiente sección se citan algunos trabajos de investigación en Matemática Educativa enfocados en la problemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos; cabe mencionar que aún son pocos los estudios de este tipo en la literatura.

1.1 Estudios sobre los conceptos valor y vector propio

Los conceptos valor y vector propio son uno de los conceptos del álgebra lineal de mayor aplicación dentro de la misma matemática, como por ejemplo en ecuaciones diferenciales, potencias de matrices, cadenas de Markov, entre otros; también se pueden encontrar aplicaciones de ellos en áreas de la física como la mecánica cuántica. Dado el amplio dominio de estos conceptos resulta de gran interés su estudio. Investigadores como Klasa (2010), Gol Tabaghi (2010, 2014), Soto y García (2002) y Salgado y Trigueros (2014, 2015) han documentado la problemática existente en torno a su aprendizaje y enseñanza, y de igual forma han propuesto diversas estrategias para mejorar la comprensión de estos conceptos en los estudiantes.

Uno de los principales factores que han obstaculizado el aprendizaje de los conceptos valor y vector propio, identificado por investigadores en el área, es la desvinculación existente entre su representación algebraica y geométrica, lo cual limita la comprensión de los estudiantes al no lograr una coordinación entre estas representaciones. Cabe señalar que esto no es exclusivo de estos conceptos, ya que esta dificultad se presenta de forma generalizada en el aprendizaje del álgebra lineal, como comenta Dorier (2002):

> Una de las principales dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal tiene que ver con la variedad de lenguajes, registros semióticos de representación, puntos de vista y ambientes a través de los cuales los objetos del álgebra lineal se pueden representar. Los estudiantes tienen que distinguir estas diferentes formas de representar los objetos del álgebra lineal, pero además necesitan trasladarse de uno a otro y, a su vez, no confundir los objetos con sus diferentes representaciones. (p. 877)

De acuerdo a Hillel (2000, p. 192) existen tres modos de descripción en el álgebra lineal que comúnmente se utilizan para representar sus objetos y operaciones, los cuales coexisten, se intercambian, pero no son equivalentes; estos son:

1. *El modo abstracto*. Usa el lenguaje y conceptos de la teoría general, por ejemplo: espacios vectoriales, subespacios, dimensión, operadores lineales.
2. *El modo algebraico*. Usa el lenguaje y conceptos de la teoría específica sobre R^n, el cual incluye: n-tuplas, matrices, rango, soluciones de sistemas de ecuaciones.
3. *El modo geométrico*. Usa el lenguaje y conceptos de los espacios de 2 y 3 dimensiones; por ejemplo, segmentos de línea dirigidos, líneas, puntos, planos, transformaciones geométricas.

La existencia de diferentes modos de descripción sugiere la necesidad de proporcionar a los estudiantes herramientas que permitan articular la representación algebraica y geométrica de los conceptos valor propio y vector propio para lograr una compresión más amplia de ellos (Gol Tabaghi, 2014, p. 224), ya que en la mayoría de los cursos y libros de texto se enfatiza el aprendizaje de un algoritmo relacionado con resolver la ecuación $Av = \lambda v$, soslayando la geometría implícita en estos conceptos. De hecho, Gol Tabaghi (2010, p. 20) señaló dos aspectos que no necesariamente son evidentes bajo el enfoque algebraico de los valores y vectores propios, los cuales son:

- Que un vector propio, x, de una matriz A de nxn, es un vector especial distinto de cero que es colineal con el vector Ax.
- Que un valor propio, λ, de una matriz A de nxn, es un escalar cuyo valor indica el factor por el cual el vector propio, asociado a este valor propio, es dilatado o contraido como resultado de la transformación bajo A.

Con el propósito de lograr una vinculación entre las diferentes representaciones (algebraica y geométrica) de los conceptos valor propio y vector propio, se ha considerado el uso de la tecnología como elemento mediador para tal fin. En esta dirección se han desarrollado trabajos, apoyados en el uso de algún software de geométrica dinámica, que permitan, mediante la interacción del estudiante con el software, el desarrollo de la *flexibilidad cognitiva*, referida por Dorier (2002), entre ambas representaciones. Ejemplos de estos trabajos son Klasa (2010), Soto y García (2002), Gol Tabaghi (2010, 2014) y Gol Tabaghi y Sinclair (2013).

1.1.1 Uso de la tecnología como elemento mediador

1.1.1.1 Los diseños de Klasa

Klasa (2010) propuso algunos diseños pedagógicos para abordar algunos conceptos del álgebra lineal como: transformaciones lineales, valores y vectores propios, formas cuadráticas y valores singulares. Estos diseños fueron elaborados con el uso de softwares como CAS Maple y Cabri. Respecto a los valores y vectores propios, la autora diseñó animaciones en ambos softwares para que los estudiantes identificaran los vectores propios de algunas matrices en R^2.

En CAS Maple, la animación mostraba el movimiento de un vector unitario v, sobre un círculo, junto con su imagen, $T(v)$, bajo una transformación lineal T; posterior a ello se preguntaba a los estudiantes cuándo los dos vectores eran colineales. De forma similar en Cabri ellos podían repetir la animación presentada en Maple, pero con mayor interacción y flexibilidad. Es decir, los estudiantes podían desplazar el vector v sobre la pantalla y detenerse justo cuando observaban colinealidad con el vector $T(v)$; además, con este software era posible medir las magnitudes de los vectores para poder determinar el valor propio correspondiente. La intención de estas actividades era que los estudiantes observaran que, para algunas matrices asociadas a transformaciones lineales en R^2, se tiene que:

- Los vectores propios pueden no existir.
- Dos rectas distintas de vectores propios en general no son ortogonales.
- Y que las rectas de vectores propios serán colineales solamente cuando las matrices sean simétricas. En este caso las rectas coinciden con los ejes principales de una elipse, que es imagen de un círculo unitario bajo una transformación lineal (Klasa, 2010, p. 2104).

Uno de los señalamientos hechos por Klasa (2010) sobre los softwares empleados en sus actividades, es que el uso de Cabri pareció mejorar la comprensión geométrica y conceptual en los estudiantes sobre los temas de álgebra lineal abordados, aunque tal impacto pedagógico no fue analizado a detalle por la autora. Por otro lado, CAS Maple fungió, principalmente, como facilitador de cálculos; por ejemplo, los estudiantes podían calcular los valores y vectores propios de una transformación lineal de la forma tradiconal (raíces del polinomio característico, resolución de un sistema de ecuaciones), y posterior a ello usar el programa para verificar los resultados obtenidos.

1.1.1.2 El trabajo de Soto y García

Soto y García (2002), de forma similar a Klasa (2010), utilizando el software Cabri diseñaron algunas activiades encaminadas hacia el aprendizaje de los conceptos valor y vector propio, enfocándose en R^2 y R^3. La perspectiva teórica tomada en cuenta por los autores para el diseño de sus actividades, fue la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica. Bajo este enfoque teórico se sugiere que un individuo debe poder transitar entre las diferentes representaciones de un objeto matemático para lograr su comprensión. Es así que los autores consideraron que los entornos dinámicos elaborados en Cabri, para explorar los valores y vectores propios de matrices de $2x2$ y $3x3$, debían mostrar de forma simultánea sobre la pantalla las siguientes representaciones:

1) La representación gráfica de v y $T(v)$, donde v era un vector al que se podía manipular libremente, el cual causaba un efecto sobre $T(v)$.
2) La matriz A, la cual era la matriz asociada a la transformación $T(v)$, y cuyas entradas podían manipularse, lo cual ocasionaba que $T(v)$ y el polinomio característico sufrieran modificaciones.
3) El polinomio característico, el cual podía ser manipulado a través de las entradas de la matriz A.

Con la ayuda de estas representaciones y mediante la interacción con el software los estudiantes podían determinar que un vector propio de una matriz A, ocurría cuando v y $T(v)$ eran colineales, esto tras "arrastrar" el vector v sobre la pantalla. Una vez localizado un vector propio era posible determinar el valor propio correspondiente, mediante el cociente de las magnitudes de los vectores v y $T(v)$; además, los estudiantes podían observar que el valor encontrado coincidía con alguna raíz real del polinomio característico correspondiente a la matriz A. Cabe resaltar que por las limitantes del software, para representar vectores tridimensionales sobre una pantalla de dos dimensiones, la exploración en R^3, a diferencia de R^2, requirió mayor número de movimientos para determinar la colinealidad de los vectores v y $T(v)$.

Una vez que los estudiantes estaban familiarizados con la exploración de valores y vectores propios de matrices en el entorno dinámico, les fueron planteados algunos cuestionamientos cuya respuesta requería explorar en el software con diferentes matrices (triangulares, singulares, simétricas, entre otras), así como poder observar patrones de cambio y responder a los cuestionamientos.

Una de las dificultades que reportan Soto y García (2002, p. 7) del trabajo con los estudiantes es que les resultó difícil explicar qué pasa con los valores y vectores propios de matrices singulares, en especial identificar los vectores propios correspondientes al valor propio cero. De igual forma les resultó complicado concluir que el espacio generado por los vectores propios, pertenecientes a un valor propio con multiplicidad 2, para matrices de $2x2$, tenía dimensión 2. También tuvieron dificultades para identificar valores propios negativos, ya que en este caso la colinealidad entre los vectores v y $T(v)$ no siempre es clara para los estudiantes, como comentan Gol Tabaghi (2010) y Gol Tabaghi y Sinclair (2013).

1.1.1.3 Los trabajos de Gol Tabaghi bajo diferentes perspectivas teóricas

Los cambios de atención

En su estudio Gol Tabaghi (2010) reportó el análisis de una entrevista realizada a un estudiante (Jack), quien recientemente había concluido un curso de álgebra lineal y había mostrado un buen desempeño en esta asignatura. Dicha entrevista consistió en proporcionar al estudiante una hoja de trabajo, la cual contenía las definiciones de los conceptos valor y vector propio, junto con un "sketch" (entorno dinámico) elaborado con el software de geometría dinámica *The Geometer's Sketchpad*, para explorar la existencia de los valores y vectores propios de algunas matrices de $2x2$ con entradas reales. Este diseño contenía un vector x, que podía ser desplazado sobre la pantalla, y el vector Ax. También era posible que el estudiante modificara las entradas de la matriz A. La autora analizó las interacciones del estudiante y el entorno dinámico, propiciado por el sketch, cuando éste trataba de determinar la existencia de los valores y vectores propios de un grupo de matrices.

La perspectiva teórica bajo la cual Gol Tabaghi (2010) analizó la entrevista fue la teoría del cambio de conciencia de Mason (2008, citado en Gol Tabaghi, 2010). Mason utiliza el constructo *"cambios de atención"* para identificar las diferentes formas de conciencia involucradas en la actividad matemática. Además, distingue entre la conciencia explícita y la implícita, caracterizando a la primera por ser articulable, mientras que la última se refiere a la conciencia que aún no es articulada. Por ejemplo, un estudiante puede resolver la ecuación $\det(A - \lambda I)$ y encontrar los vectores propios asociados al valor λ, sin ser consciente de que está encontrando un vector muy especial que es colineal a su imagen. De acuerdo a este enfoque teórico la conciencia implícita puede "educarse", en el sentido de que ésta se puede refinar a través de experiencias enriquecedoras que permiten el desarrollo de nuevos estados de atención, en donde lo implícito se vuelve explícito. Este desarrollo y refinamiento puede ser percibido por medio de cambios en la estructura de la atención, la cual se compone de niveles macro y micro. El nivel macro se refiere al *qué* es atentido por el estudiante, es decir, en dónde se enfoca su atención; mientras que el nivel micro al *cómo*. En este último nivel se distinguen cinco formas en que la atención puede enfocarse:

- Enfocándose en el todo
- Discerniendo detalles
- Reconociendo relaciones
- Percibiendo propiedades
- Razonando de acuerdo a las propiedades acordadas

Estos estados de atención son los que Gol Tabaghi (2010) utilizó para analizar las acciones del estudiante en el entorno dinámico generado por el uso del software. De acuerdo a lo reportado por la autora, aunque el estudiante conocía muy bien los elementos involucrados en la definición de los conceptos valor y vector propio, le resultó un poco difícil determinar, en primera instancia, mediante el uso del sketch, si una matriz particular dada tenía, o no, valores y vectores propios. Inicialmente el estudiante centró su atención en la definición y el sketch, en donde arrastraba el vector x de forma aleatoria y volvía a la definición, dando evidencia de que no tenía muy claro qué es lo estaba buscando en el sketch, es decir, esperaba a que algo vinera a su mente, mediante la interacción, o bien, una indicación por parte de la entrevistadora (enfocándose en el todo). Conforme el estudiante interactuaba con el sketch y con la entrevistadora, éste comenzó a percibir relaciones entre los vectores x y Ax, que lo condujeron a que un vector propio, de una matriz A, puede percibirse en el sketch cuando x y Ax son colineales. Además, aunque el valor propio no se proporcionaba de forma explícita en el sketch, el estudiante concluyó que este valor podía determinarse relacionando las magnitudes de los vectores x y Ax. La autora concluye diciendo:

> A pesar de su fuerte conciencia algebraica - desarrollada en su curso - la conciencia de Jack continúa creciendo a medida que coordina su conciencia geométrica emergente con su conciencia algebraica. La conciencia geométrica hace especial énfasis en la colinealidad invariable de un número infinito de vectores propios para un valor propio dado, en la centralidad del vector propio y en la posibilidad de tener más de un vector propio. (Gol Tabaghi, 2010, p. 28)

Modalidades de arrastres

En la misma dirección que el trabajo previo y siendo consciente de que la forma en que un estudiante interactúa con el software puede generar cambios en la estructura de la atención que permitan significar los conceptos valor y vector propio, Gol Tabaghi (2014) integró a un nuevo estudio la teoría de los cambios de conciencia de Mason (mencionado anteriormente) y la teoría de la genésis instrumental (Artigue, 2002, citado en Gol Tabaghi, 2014), para poder analizar las actividiades realizadas por tres estudiantes de licenciatura en un sketch, nombrado sketch *eigen*, diseñado con *The Geometer's Sketchpad*.

La génesis instrumental se compone de los procesos de instrumentalización y de la instrumentación. La instrumentalización se enfoca en la herramienta, es decir, al desarrollo de habilidades que permiten el uso adecuado de ella. En contraste, la instrumentación se dirige hacia lo que el estudiante puede hacer con la herramienta. En este trabajo el proceso de instrumentalización fue identificado a través del uso de los estudiantes de diferentes modalidades y estrategias de "arrastre" del vector x en el sketch *eigen*. Las modalidades de arrastre son tomadas del trabajo de Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002, citado en Gol Tabaghi, 2014). Estas modalidades de arrastre son:

- Arrastre errante. Involucra el arrastre del objeto sobre la pantalla de forma aleatoria, sin un plan, con el fin de explorar relaciones de otras partes del objeto y con el sketch.
- Arrastre guiado. Consiste en arrastrar el objeto con el propósito de localizar una configuración particular.
- Arrastre sobre un lugar oculto (Dummy-locus). Se refiere a arrastrar el objeto de tal forma que se preserve la propiedad descubierta.
- Arrastre en línea. Consiste en arrastrar el objeto a lo largo de una línea con el fin de preservar la regularidad de la configuración descubierta.

Por otra parte, el proceso de instrumentación es evidenciado en el estudiante por los cambios en la estructura de su atención sobre el uso de la herramienta tecnológica. En este caso, como menciona Gol Tabaghi (2014, p. 226), la herramienta deja ser el centro de atención y se convierte "en algo que concentra y dirige la atención [del estudiante] de manera particular –una herramienta mediadora.”

En resumen, las diferentes modalidades de arrastre utilizadas por los estudiantes proporcionaron información a la investigadora sobre los cambios de atención producidos. Por ejemplo, el uso del arrastre en línea dio evidencias visibles de este cambio, ya que inicialmente los estudiantes utilizaban el arrastre errante con fines exploratorios en el software, pero una vez que su atención se centró en coordinar la representación geométrica proporcionada por el sketch y la representación algebraica de la definición de los conceptos valor y vector propio, su modo de arrastre cambió. Pues la coordinación entre las representaciones permitió a los estudiantes percibir una propiedad sobre los vectores propios, la colinealidad entre x y Ax.

Además, Gol Tabaghi (2014) identificó una nueva modalidad de arrastre del vector x, la cual nombró *arrastre intencional*. Este tipo de arrastre, en palabras de la autora, “involucra arrastrar un punto con la intención de producir cierta configuración” (p. 234), el cual difiere del arrastre guiado, ya que la configuración en el arrastre intencional es identificada de antemano a diferencia del arrastre guiado. Esta modalidad de arrastre se observó cuando los estudiantes, que previamente habían identificado que un vector propio se percibía en el sketch cuando x y Ax eran colineales, buscan esta misma configuración para encontrar otro conjunto de vectores propios de la matriz.

Hallazgos sobre la interacción de los estudiantes con el software

En este trabajo Gol Tabaghi y Sinclair (2013) combinaron la teoría de la génesis instrumental con la teoría de la cognición encarnada (Radford, 2009, citado en Gol Tabaghi y Sinclair, 2013). Las autoras proponen utilizar la génesis instrumental para explicar la manera en que los estudiantes interactúan con la herramienta tecnológica, que comprende el uso de ésta para un fin. Por otro lado, la teoría de cognición encarnada es empleada para explicar cómo es que las acciones realizadas por el estudiante con la herramienta, permiten la incorporación de los conceptos valor y vector propio a su lenguaje. Esto último se percibió por medio de las expresiones verbales y gestos que utilizaron los estudiantes para referirse a los conceptos.

El estudio se llevó a cabo con cinco estudiantes, de los cuales tres ya habían concluido un curso de álgebra lineal y dos se encontraban cursando uno al momento de la entrevista. Previo al estudio, los estudiantes exploraron los conceptos valor y vector propio de la forma tradicional que se enseña en los libros de texto; es decir, se les enseñó el algoritmo algebraico, el cual consiste en determinar las raíces del polinomio característico para encontrar los valores propios, y posterior a ello resolver un sistema de ecuaciones para determinar los vectores propios. Sin embargo, al realizarse la entrevista ninguno de los estudiantes dio evidencias de recordar estos conceptos.

Al momento de efectuarse el estudio, a los estudiantes se les proporcionó un sketch, al cual se le nombró sketch *eigen*. También se les facilitó una hoja de trabajo con la definición de los conceptos valor y vector propio, y que además contenía la actividad a realizar en el sketch *eigen*. Esta actividad consistía en encontrar los valores y vectores propios de cuatro matrices de $2x2$ con valores reales. De la interacción de los estudiantes con la herramienta tecnológica (sketch *eigen*) para resolver la actividad propuesta, Gol Tabaghi y Sinclair (2013) identificaron los siguientes aspectos del trabajo realizado por los estudiantes:

1) Igualdad versus colinealidad. En la exploración, dentro del entorno dinámico, para encontrar los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se generaron, en un primer momento, dos interpretaciones distintas de la ecuación $Ax = \lambda x$. Por un lado, algunos estudiantes primero determinaron el conjunto de vectores propios asociados al valor $\lambda = 1$, esto propició que interpretaran la ecuación $Ax = \lambda x$ en términos de igualdad; es decir, un vector propio de A ocurría cuando x y su imagen, Ax, tenían la misma longitud y eran paralelos, reduciendo la expresión $Ax = \lambda x$ en $Ax = x$. Por otra parte, otros estudiantes interpretaron la ecuación $Ax = \lambda x$ como la colinealidad de los vectores x y Ax, ya que ellos primero identificaron el conjunto de vectores propios correspondientes al valor propio $\lambda = 2$. A pesar de estas primeras interpretaciones, los estudiantes, mediante el uso del sketch *eigen* y de la herramienta de arrastre, lograron comprender el significado geométrico (colinealidad) del signo de igualdad contenido en la expresión $Ax = \lambda x$.
2) Infinitos vectores asociados a cada valor propio particular. Mediante la interacción con el sketch *eigen* y de arrastrar al vector x en forma de línea, una vez localizado un vector propio de la matriz A, los estudiantes lograron ser conscientes de la existencia de una infinidad de vectores propios correspondientes a un valor propio particular. Como mencionan las

autoras, este hecho es relevante ya que esto, a menudo, permanece escondido en el procedimiento algebraico utilizado para encontrar los vectores propios de una matriz.

3) Representación geométrica de un conjunto de vectores propios asociados a un valor propio negativo. Durante la exploración para encontrar los valores y vectores propios del grupo de matrices, propuesto en la hoja de trabajo, los estudiantes encontraron para una de estas matrices, una posición donde los vectores x y Ax eran colineales, pero tenían dirección opuesta. Esto hizo que los estudiantes nuevamente examinaran la definición de estos conceptos, para poder concluir que en este caso el valor propio (λ) tenía un valor negativo. Gol Tabaghi y Sinclair (2013) resaltaron que la representación geométrica de un vector propio asociado a un valor propio negativo permitió que los estudiantes ampliaran su interpretación de colinealidad, ya que dos vectores pueden ser colineales pero tener direcciones opuestas.
4) Expresiones lingüísticas y gestuales usadas para describir los conceptos valor y vector propio. Como parte del estudio las autoras analizaron las expresiones lingüísticas y gestuales empleadas por los estudiantes para referirse a los conceptos valor y vector propio. Las expresiones lingüísticas usadas por los estudiantes para referirse a los vectores propios fueron: “alinear”, “transformación escalar”, “colineal”, entre otras. Las expresiones anteriores fueron acompañadas con gestos manuales, como se muestra en la Figura 1.1

(a) (b) (c)

Figura 1.1. Movimientos gestuales de los estudiantes para referirse a los vectores propios (Gol Tabaghi y Sinclair, 2013, p. 156).

En la Figura 1.1, el inciso (a) expresa a los vectores x y Ax en la misma dirección; en (b) se representa un vector propio cuyo valor propio es negativo (direcciones opuestas); y en (c) se muestra el gesto (movimiento del dedo índice en forma circular) que empleó un estudiante para referirse a cómo determinar la existencia de todos los valores y vectores propios de una matriz.

Gol Tabaghi y Sinclair (2013) señalaron que mediante el uso del software de geometría dinámica (sketch *eigen*) y a través de la interacción con la tarea y el entrevistador, los estudiantes lograron desarrollar cierta flexibilidad entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético (Sierpinska, 2000, citado en Gol Tabaghi y Sinclair, 2013). Además, argumentaron que el dinamismo geométrico de los vectores propios, facilitado por el uso del software, permitió a los estudiantes desarrollar un modo de pensamiento *dinámico-sintético-geométrico*, el cual permite reconstruir objetos mentales, dotarlos de movimiento y posicionarlos en el espacio.

1.1.2 Una descomposición genética

Salgado y Trigueros (2014, 2015) propusieron una descomposición genética de los conceptos valor y vector propio y espacio propio, de acuerdo a ella diseñaron algunas situaciones de aprendizaje para los estudiantes; lo anterior bajo la perspectiva teórica APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), sobre la cual se proporciona información en el Capítulo 3 de este documento.

Una descomposición genética, en la teoría APOE, es un camino cognitivo conformado de estructuras y mecanismos mentales que un estudiante puede construir, para lograr la comprensión de un determinado concepto matemático. Esta descomposición genética no es única, ya que varios son los factores y consideraciones que pueden intervenir en su diseño. La investigación bajo este enfoque teórico se compone: del análisis teórico, que involucra el diseño de una descomposición genética; implementación de enseñanza, que corresponde al diseño de actividades de acuerdo a la descomposición genética y, por último, la recolección y el análisis de datos.

Como parte de la primera componente de la investigación en APOE, Salgado y Trigueros (2015, p. 106) señalaron los conocimientos previos que, a su consideración, un estudiante debe poseer para iniciar la construcción de los conceptos valor propio, vector propio y espacio propio, los cuales son:

- Los conceptos de matriz y vector como objetos, para realizar acciones sobre ellos.
- El proceso de solución de un sistema de ecuaciones lineales, para poder encontrar e interpretar el conjunto solución.

- Los conceptos de conjunto, conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, espacio nulo de una matriz y conjunto generador de un espacio vectorial, requeridos como procesos con el fin de coordinarlos y generar nuevos procesos.

A continuación, se resume la descomposición genética propuesta por Salgado y Trigueros (2014, 2015), a partir de los conocimientos previos mencionados. En primer lugar, se realizan acciones sobre los objetos matriz y vector. Por un lado, las acciones sobre el vector involucran multiplicarlo por diversos escalares (λv); por otra parte, las acciones que se ejecutan sobre la matriz es la multiplicación por vectores (Av). Ambas acciones se interiorizan en dos procesos distintos, que posteriormente se coordinan en un solo proceso, en donde el estudiante es consciente que Av y λv son vectores. El proceso anterior representado mediante la ecuación $Av = \lambda v$, se encapsula en un objeto (cognitivo); esto permite nombrar a λ y v como valor propio y vector propio, respectivamente. Sobre este nuevo objeto (ecuación) se realizan nuevas acciones que permitan determinar las condiciones que el escalar debe satisfacer para que el sistema $(A - \lambda I)v = 0$ tenga soluciones no triviales. Estas acciones se interiorizan en un proceso, el cual se coordina con el proceso solución de un sistema de ecuaciones lineales, generando un nuevo proceso, el cual permite interpretar el procedimiento de encontrar valores y vectores propios como la solución a un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Este último proceso se coordina con el proceso de espacio nulo de una matriz, permitiendo al estudiante reconocer al conjunto solución de un sistema homogéneo como el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema; dado que se buscan soluciones distintas de cero, significa que el espacio nulo deber ser distinto de cero, es decir, que la matriz del sistema debe ser no invertible, $|A - \lambda I| = 0$. De la coordinación de los procesos anteriores ($(A - \lambda I)v = 0$ y $|A - \lambda I| = 0$) con el proceso de conjunto generador resulta un nuevo proceso, en donde se reconoce que el espacio nulo de la matriz del sistema de ecuaciones es el espacio generado por los vectores propios correspondientes a cada valor propio de la matriz A. La necesidad de comparar los diferentes espacios generados por los diferentes vectores propios de la matriz A, permiten su encapsulación en un objeto, el cual es nombrado espacio propio. La Figura 1.2 ilustra esta descomposición genética.

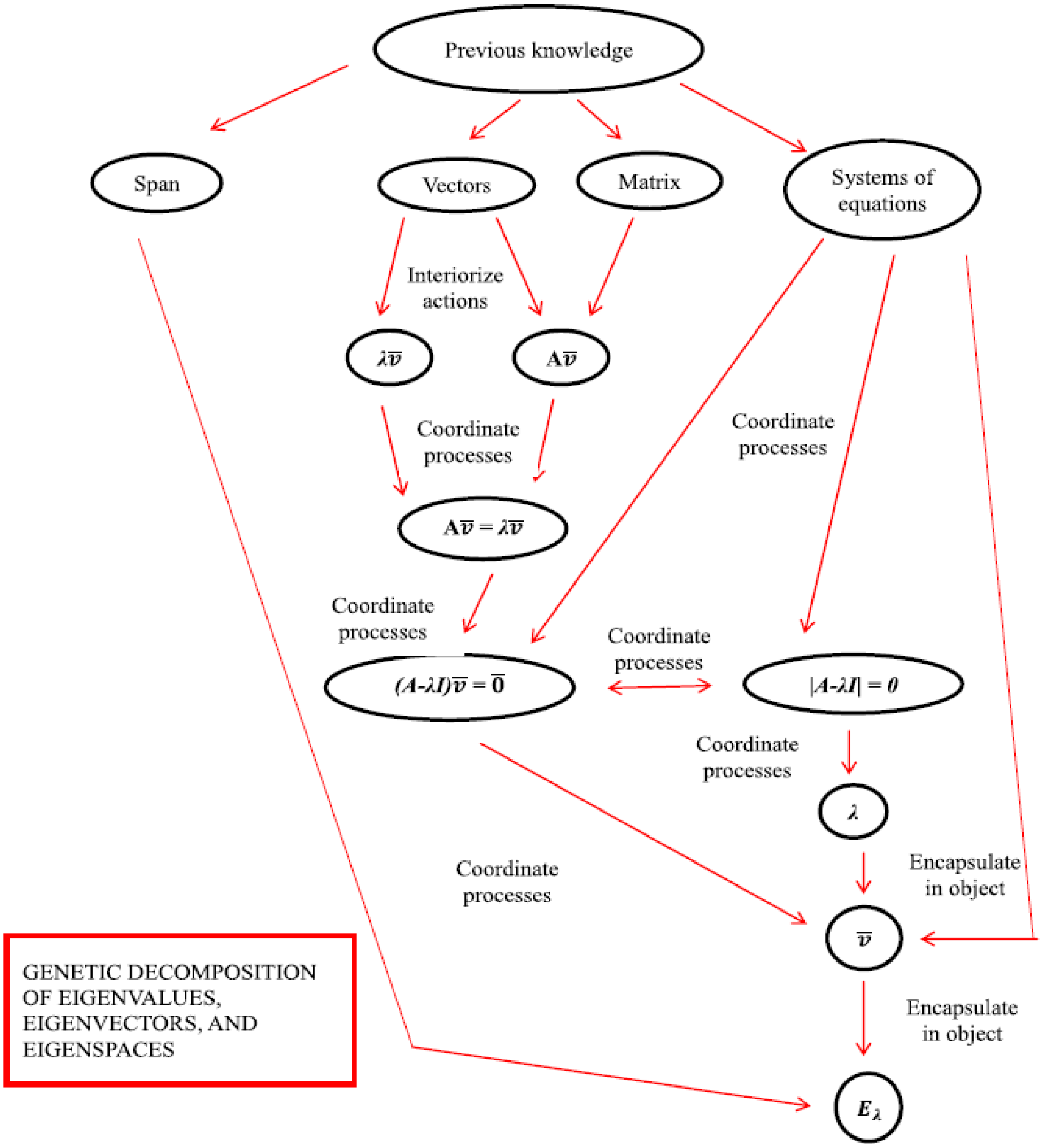


Figura 1.2. Descomposición genética de los conceptos valor propio, vector propio y espacio propio (Salgado y Trigueros, 2015, p. 106)

Con el propósito de favorecer en los estudiantes las construcciones referidas en la descomposición genética se desarrollaron actividades tanto en el contexto geométrico como el algebraico (Salgado y Trigueros, 2014, p. 85). Las actividades diseñadas formaron parte de la instrucción llevada a cabo con estudiantes que cursaban la asignatura de álgebra lineal. Los resultados obtenidos de la investigación dieron evidencia de que los conocimientos previos, considerados por las autoras, son indispensables para promover un aprendizaje más allá de la repetición de algoritmos. De igual forma proporcionaron información sobre las construcciones mentales logradas por los estudiantes y referidas en la descomposición genética, por lo que se considera que ésta es una ruta viable para el aprendizaje de los conceptos valor propio, vector propio y espacio propio.

Además, Salgado y Trigueros (2014) resaltaron que su diseño didáctico permitió superar algunas de las dificultadas identificadas en investigaciones previas; por ejemplo, la mayoría de los estudiantes logró relacionar la representación algebraica y geométrica de los valores y vectores propios. También fueron conscientes de que en la ecuación $Ax = \lambda v$ los elementos de ambos lados representan vectores. Otro punto importante de esta investigación fue que en las actividades también se consideraron valores propios, vectores propios y espacios propios complejos.

En Salgado y Trigueros (2015) se consideró la perspectiva teórica APOE junto con el enfoque de Modelos y Modelación. La consideración de este último enfoque obedece a que la inclusión de situaciones que requieran de la aplicación de los conceptos estudiados, en este caso los conceptos valor y vector propio, podrían despertar el interés de los estudiantes y facilitar su aprendizaje. Por esta razón, en primera instancia se propuso a los estudiantes resolver un problema "realista", el cual fue analizado desde la perspectiva de Modelos y Modelación para tal fin. Sobre el uso de ambas perspectivas teóricas las autoras señalan:

> El objetivo fue demostrar que la solución del problema podría animar a los estudiantes a utilizar y mostrar los conocimientos matemáticos que han construido previamente. La teoría APOE podría ser utilizada para analizar las construcciones mentales utilizadas por los estudiantes y la forma en que pueden estar relacionadas con la introducción de nuevos conocimientos. (Salgado y Trigueros, 2015, p. 105)

Respecto a los hallazgos de la investigación Salgado y Trigueros (2015) mencionan que el trabajo de los estudiantes para encontrar un modelo que permitiera resolver el problema planteado, permitió el desarrollo de estrategias que promovieron el uso de conceptos previamente construidos. Además, favoreció el cuestionamiento propio de los estudiantes, lo que hizo posible que los estudiantes reflexionaran y obtuvieran una mejor comprensión de los conceptos involucrados.

1.1.3 Un estudio a partir de los subespacios invariantes

Camacho y Oktaç (en prensa), señalan que en algunos libros de texto los conceptos valor propio, vector propio y espacio propio son abordados de forma general y con pocas representaciones geométricas en espacios vectoriales donde éstas son posibles (R^2 y R^3); además bajo este enfoque, seguido por los libros de texto, parece asumirse que la generalización y comprensión de estos conceptos en cualquier espacio vectorial “no requiere cambios significativos en la estructura cognitiva de los estudiantes”. En esta dirección las autoras, como parte de un proyecto de investigación doctoral, buscan analizar desde la teoría APOE y del modelo de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak y Richard, 2014, citado en Camacho y Oktaç, en prensa) cómo es que la comprensión de los conceptos valor propio, vector propio y espacio propio se ve afectada al transitar del espacio vectorial R^2 a R^3.

En el trabajo presentado por Camacho y Oktaç (en prensa) se propone estudiar los conceptos valor propio y vector propio a partir del reconocimiento de subespacios invariantes bajo una transformación lineal. Un subespacio invariante es definido, de acuerdo al texto *Linear Algebra* (Friedberg, Insel y Spence, 2003, p. 313) como: Un subespacio W de V es T-invariante si $T(x) \in W, \forall x \in W$, es decir, si $T(W) \subseteq W$, donde $T: V \rightarrow V$ es una transformación lineal. Con base a esta propuesta de estudio de los conceptos en cuestión, las autoras diseñaron una actividad exploratoria, restringida a R^2, con la intención de identificar las construcciones mentales, de acuerdo a la teoría APOE, involucradas en la comprensión de los conceptos valor propio y vector propio a partir del estudio de los invariantes bajo una transformación lineal; así como también las posibles dificultades que podrían surgir desde este enfoque. Con este fin se entrevistó a un profesor de licenciatura mientras resolvía la actividad propuesta. Dicha actividad consistía en describir cómo es que la transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$, representada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, deforma el plano ($R^2$) y a partir de ello encontrar los subespacios invariantes, así como los correspondientes vectores propios de la transformación lineal.

Camacho y Oktaç (en prensa) reportaron dos episodios de la entrevista realizada, los cuales fueron analizados de forma conjunta bajo la teoría APOE y el modelo de Espacios de Trabajo Matemático (ETM). Estos episodios los hemos resumido de la siguiente forma.

- En el primer episodio el profesor intenta resolver el problema desde sus propios conocimientos y habilidades cognitivas. De forma no prevista se evidenció que el profesor poseía una "concepción limitada" sobre matrices de rotación, lo que provocó que éste se rehusara a aceptar que la transformación lineal, propuesta en la actividad, deformara todo el plano en una recta. Esta dificultad fue superada tras considerar el rango de la transformación.
- En el segundo episodio se muestra que mediante el uso e interacción con un applet, diseñado en GeoGebra, el profesor obtiene más información sobre la transformación lineal en cuestión. Por ejemplo, determinar su kernel, caracterizar los elementos del dominio conforme a la región que su respectiva imagen ocupará en la recta obtenida como resultado de la deformación de todo el plano bajo la transformación. Sin embargo, no logra establecer todas las relaciones esperadas entre los subespacios invariantes y los vectores propios.

Como resultado de esta primera experiencia exploratoria Camacho y Oktaç (en prensa) consideran la viabilidad de abordar los conceptos valor y vector propio desde el estudio de los invariantes, si se prepara una etapa de instrumentación con la herramienta tecnológica. Además, este enfoque (de los invariantes) permite "construir el concepto [vector propio] por medio del análisis de la transformación", lo que posibilita interactuar entre los ambientes algebraico y geométrico para obtener mayor información sobre la transformación lineal en cuestión. Respecto al trabajo en R^3 las autoras señalan que: "aunque las dificultades de visualización son mayores [en R^3] consideramos que es posible determinar con mayor claridad las diferencias entre la construcción de los conceptos en este espacio y en $\mathbb{R}^2$".

1.2 Objetivo de la investigación

"Un libro de texto de matemáticas es una manera de preservar [y comunicar] el conocimiento matemático" (Kang y Kilpatrick, 1992, p. 3), además de emplearse como un instrumento en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular del álgebra lineal. En vista del importante papel que puede desempeñar el libro de texto en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, nos hemos interesado por conocer cómo es que los conceptos valor propio y vector propio son abordados en él. Esencialmente nos cuestionamos ¿cómo es organizado el discurso referente a los conceptos valor y vector propio en un libro de texto?, ¿esta organización promueve un aprendizaje adecuado de tales conceptos? Para obtener información al respecto, hemos elegido el texto *Linear Algebra* (Friedberg, Insel y Spence, 2003) el cual es uno de los textos que comúnmente se sugiere dentro de la bibliografía básica de los programas de álgebra lineal consultados para esta investigación (ver sección 3.2.2).

Nuestra investigación se desarrollará desde el punto de vista cognitivo, por lo que hemos visto en la teoría APOE un referente teórico adecuado para describir en términos de construcciones (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y mecanismos mentales, propios de la teoría, si la organización de las actividades propuestas en el texto, referentes a los conceptos *valor propio* y *vector propio*, promueven el aprendizaje de éstos en el estudiante. Es decir, buscamos si el discurso del texto sigue una descomposición genética (aunque sea implícita) para los conceptos de interés. Por lo tanto, el objetivo particular de esta investigación es el siguiente:

Objetivo

Evidenciar si los autores del texto analizado siguen, de manera implícita, una Descomposición Genética (DG) en el desarrollo de los conceptos de **valor y vector propio**; o en su defecto, qué camino cognitivo es el sugerido por ellos para que el lector del texto aprenda tales conceptos.

Las preguntas específicas que nos hemos planteado para tal fin son:

1. ¿Qué conocimientos previos consideran los autores que debe poseer el estudiante (lector) antes de abordar los conceptos valor y vector propio?
2. ¿Qué estructuras mentales están implícitas en la forma en que los autores presentan la definición de los conceptos valor y vector propio?
3. ¿Qué estructuras mentales son promovidas y/o favorecidas en el lector a través de los ejemplos, teoremas y ejercicios que le son presentados por el texto?

Sin embargo, la revisión del texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003) requiere de herramientas metodológicas que permitan realizar un análisis adecuado del mismo, las cuales no son proporcionadas por la teoría APOE. Por tal motivo, se requiere revisar trabajos sobre análisis de textos que nos permitan desarrollar tales herramientas.

CAPÍTULO 2 SITUANDO EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

El uso del libro de texto como instrumento en la práctica docente ha sido de utilidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por una parte, tiene el propósito de exponer, de la mejor manera posible, los conceptos matemáticos que el estudiante debe aprender. Por otra, su uso adecuado permite una mejor comprensión de las ideas matemáticas en los estudiantes, favoreciendo su aprendizaje en esta área del conocimiento, que a menudo resulta difícil para los estudiantes de todos los niveles educativos. En este sentido, el libro de texto se ha desempeñado como mediador en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Rezat, 2006, 2010). Sin embargo, se debe tener presente que varios son los factores que influyen en el aprendizaje de un individuo, como menciona Sunday (2004, p. 114): "[i]ncidentalmente, no es únicamente el libro de texto lo que determina el aprendizaje", pero trabajos de investigación en esta dirección han demostrado que tiene un papel muy importante que no debe ignorarse.

A continuación presentamos un breve panorama sobre la investigación de libros de texto en el área de Educación Matemática, así como algunos trabajos que hemos considerado para el desarrollo de la presente investigación; estas secciones las hemos titulado como: "Investigación en torno al libro de texto de matemáticas" e "Investigación en el nivel superior sobre análisis de libros de texto", respectivamente.

2.1 Investigación en torno al libro de texto de matemáticas

Dado que el libro de texto se ha vuelto nuestro objeto de estudio es preciso definir qué es, o qué se entiende por ello. Desafortunadamente en la mayoría de los trabajos revisados para la presente investigación, los autores no presentan alguna definición del libro de texto; asumen que el lector está familiarizado con dicho término, quizás por ser un término muy común dentro de la didáctica, por lo que sólo se limitan a hablar de él sobre su utilidad e importancia dentro del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. De esta revisión rescatamos el trabajo de Johansson (2003) sobre el libro de texto de matemáticas y su papel dentro del curriculo de estudios, ya que emplea la definición dada por Stray (1994), quien define a un libro de texto como:

> “[U]n libro diseñado para proporcionar una versión pedagógica autoritaria de un área de conocimiento.” (p. 2)

Sin embargo, la definición propuesta por Stray (1994) es para todo libro de texto por lo que no se restringe únicamente al libro de texto de matemáticas. Entonces, ¿cómo podemos diferenciar al libro de texto de matemáticas de los otros, o es que no hay diferencias respecto a los demás?

Por su parte Love y Pimm (1996), aunque no proporcionan directamente una definición del libro de texto de matemáticas, ofrecen una caracterización de él. Hacen evidente la función pedagógica autoritaria del libro de texto, señalada por Stray, al mostrar que el libro de matemáticas, por medio de expresiones como: “haz esto; haz aquello; hazlo en este orden, de esta manera” (p. 372) o bien con la expresión *“esto es así”*, impone autoridad sobre el lector. Otra característica señalada por estos autores es el uso del formato *“explicación-ejemplo-ejercicios”* mediante el cual se organiza la discusión presentada por el texto. A lo anterior pudiésemos agregar que son un tipo especial de texto, puesto que, a diferencia de los demás, que se encuentran dentro de la literatura del conocimiento humano, requieren de una forma especial de lectura para poder interpretar lo que el autor o los autores intentan transmitir. Esta situación es sin duda todo un reto para los estudiantes, principalmente en el nivel universitario.

El libro de texto en la enseñanza de las matemáticas ha tomado diferentes funciones, ya sea como libro de consulta, de ejercicios y problemas, como guía para la práctica docente, entre otros. Ha generado una “práctica escolar determinada por su uso, así como una organización de la enseñanza” (González y Sierra, 2004, p. 389). Por esta razón, en las últimas décadas los investigadores en Educación Matemática, se han interesado en conocer más a fondo las repercusiones que éste tiene dentro del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y, de igual forma, sugerir propuestas que permitan mejorar dicho proceso. Los estudios que se han llevado a cabo con este propósito abordan desde analizar la estructura general de los libros, la forma en que desarrollan un determinado concepto, hasta el uso dado por el docente y el estudiante (e.g. Randahl, 2012; Sidokhine, 2013); e inclusive, se han hecho estudios comparativos de los libros de texto de diferentes países (e.g. Charalambous, Delaney, Hsu y Mesa, 2010).

La investigación de libros de textos de matemáticas es un área de investigación relativamente joven, comparada con otras, en Educación Matemática. Ha presentado un mayor crecimiento en las últimas décadas como menciona Fan (2013), dada su importancia en la enseñanza y el aprendizaje escolar. Este autor señala la importancia de establecer un dominio común para las cuestiones que se aborden en investigaciones futuras, así como de metodologías para llevarlas a cabo, pues hasta ahora no hay una metodología común consolidada que permita realizar estudios en esta área. Además, resalta la necesidad de sustentar con datos empíricos las futuras investigaciones en este ámbito, con el propósito de consolidar a la investigación de libros de texto como un área de investigación científica, puesto que la ciencia moderna demanda una verificación de todo aquello que se analiza teóricamente.

Fan (2013) propone un marco de trabajo en el que se cataloga al libro de texto como una *variable intermedia* en el contexto educativo; con base en ello este autor clasifica las cuestiones de investigación abordadas en algunos trabajos revisados por él y de las que pudieran abordarse en estudios futuros dentro de esta área. Esta clasificación consta de tres grandes rubros: cuestiones sobre los factores que afectan a los libros de texto, a las cuales nombra variables independientes, por ejemplo, el contexto social y las reformas educativas; cuestiones concernientes al libro de texto en sí mismo como sujeto de investigación (variable intermedia); y cuestiones sobre los factores que se ven afectados por el libro de texto, a las cuales se refiere como variables dependientes, como el diseño de la clase. También menciona que la mayoría de las cuestiones abordadas, hasta el momento, se quedan en un nivel descriptivo, por lo que señala que es necesario enfocarse en investigaciones del tipo correlacional y causal, las cuales requieren un cambio de paradigma en los métodos empleados. Además, comenta que es necesaria una mejor comprensión de por qué cierto tratamiento de un tema en específico es mejor que otro para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Fan, Zhu y Maio (2013) identifican los rumbos que han tomado las investigaciones en torno a los libros de texto. Analizaron algunos de los trabajos publicados entre los años de 1980 y 2012, y los clasifican, de acuerdo a las cuestiones abordadas por los autores de estos trabajos, en cuatro grandes categorías. Estas categorías son:

1) Rol de los libros de texto en la enseñanza y el aprendizaje

2) Análisis de libros de texto y comparación
3) Uso del libro de texto
4) Otras áreas

De acuerdo a esta clasificación encontraron que más del 60% de los trabajos revisados abordaban cuestiones referentes a la segunda categoría, lo que señala una notable predominancia respecto de las demás. Por esta razón, hacen una subclasificación de los trabajos que abordan análisis y comparación de libros de texto, dependiendo del tipo de cuestionamientos que en ellos se plantean. Dicha clasificación es la siguiente:

1. Temas y contenidos matemáticos
2. Cognición y pedagogía
3. Género, etnicidad, equidad, cultura y valor
4. Comparación de diferentes libros de texto
5. Conceptualización y cuestiones metodológicas

Fan (2013) y Fan et al. (2013) presentan una categorización de las cuestiones que han sido abordadas en la investigación de libros de texto. En sus trabajos es posible evidenciar un alto índice de trabajos en el nivel básico escolar, pero pocos en el nivel superior educativo, que es donde situamos nuestra investigación; por ejemplo, en Fan et al. (2013) se reporta un solo trabajo en este nivel. Lo anterior nos hace suponer dos cosas, una es que hay poca investigación en este nivel educativo y la otra es que en las investigaciones que involucran al libro de texto, éste tiene un carácter secundario y no central en el estudio; por ejemplo, éste es el caso en los trabajos de Sierpinska (1997), Fallas-Soto (2015) y Montiel (2005), si bien en estos trabajos la problemática analizada no radica en los libros de texto, el estudio de ellos permite a los autores una mejor comprensión de los fenómenos asociados a los objetos de estudio.

2.2 Investigación en el nivel superior sobre análisis de libros de texto

Hemos encontrado pocos estudios sobre libros de texto en el nivel superior educativo, donde se realice o se emplee un análisis de éstos; más aún, que se enfoquen en álgebra lineal. A continuación, se citan algunos trabajos que emplean análisis de libros dentro de su investigación. Primero presentamos tres trabajos en los que se analizan libros de álgebra lineal y, posteriormente, dos trabajos que realizan análisis de libros de áreas distintas al álgebra lineal.

2.2.1 Trabajos que realizan análisis de libros de álgebra lineal

En esta sección citamos los trabajos de Harel (1987), Cook y Stewart (2014) y Sierpinska (1997) quienes realizaron análisis de libros de álgebra lineal dentro de sus investigaciones. Nuestra intención es identificar las herramientas metodológicas utilizadas por los autores en su análisis, para seleccionar aquellas que podrían apoyarnos en nuestra investigación sobre el libro de texto.

2.2.1.1 El trabajo de Harel sobre los enfoques de libros de álgebra lineal

Harel (1987) con el propósito de desarrollar un programa de álgebra lineal en el bachillerato[1] hizo una revisión de 32 libros de álgebra lineal, en los que encontró diferentes enfoques utilizados para la presentación de sus contenidos. A continuación presentamos en qué consisten estos enfoques:

a) <u>Secuencia del contenido</u>. Encontró que los libros de álgebra lineal siguen dos enfoques en la secuencia de los contenidos. El primer enfoque parte de lo concreto (operaciones con matrices) a las ideas abstractas del álgebra lineal, como lo son espacio vectorial y transformación lineal. El segundo enfoque es inverso al primero, ya que parte de lo general a lo particular, es decir, inicia con las ideas abstractas y concluye con la aplicación de estas ideas en situaciones específicas. El primer enfoque es generalmente usado en textos elementales, mientras que el segundo es mayormente utilizado por textos avanzados en la materia.

b) <u>Niveles de generalidad en los modelos de espacios vectoriales</u>. Se reportan cuatro niveles de generalidad presentados en los textos.
    - Nivel 1. Un espacio vectorial cuya dimensión es especificada por un número (1, 2, o 3) y con elementos definidos, es decir, se especifica si sus elementos son, por ejemplo, polinomios o segmentos de línea.

[1] El equivalente de "High School" en el sistema educativo Mexicano.

- Nivel 2. Un espacio vectorial cuya dimensión es especificada por un número y con elementos indefinidos, en este caso no se especifica cuáles son los elementos del espacio vectorial referido; por ejemplo, un espacio vectorial V de dimensión 2.
- Nivel 3. Un espacio vectorial cuya dimensión es un parámetro (n) y sus elementos son definidos, por ejemplo R^n.
- Nivel 4. Un espacio vectorial cuya dimensión es un parámetro y cuyos elementos son indefinidos; por ejemplo, un espacio vectorial V de dimensión n.

c) Material introductorio. El material introductorio tiene como propósito fundamental motivar al estudiante, conectando el conocimiento previo con las nuevas ideas matemáticas. En los libros de álgebra lineal este nuevo material es presentado por medio de diferentes acercamientos como la *analogía*, la *abstracción*, la *isomorfización* y *posposición*. A continuación se explican estos términos.

  - *Analogía*. Describe similitudes entre las nuevas ideas que serán aprendidas con ideas que son familiares al lector, pero que están fuera del área de interés inmediato. Se reportan dos tipos de analogías. El primer de tipo de analogía es con contenido no matemático, y el otro tipo de analogía es con ideas matemáticas.
  - *Abstracción*. Prepara al estudiante para introducirlo a las nuevas ideas abstractas, mediante la aplicación de estas ideas en situaciones específicas; es decir, se presenta al estudiante un ejemplo concreto del concepto general que será aprendido.
  - *Isomorfización*. Es una estrategia para motivar la definición de operaciones matemáticas. Con el fin de eliminar lo arbitrario que pudiera parecerle al estudiante la definición de una operación matemática, se impone un isomorfismo entre dos estructuras matemáticas, donde una de ellas es familiar para el estudiante.
  - *Posposición*. El material introductorio es presentado simplemente por enunciados que muestran la necesidad, importancia y centralidad de las ideas que serán aprendidas, aunque la necesidad e importancia de estas ideas no es obvia. En otras palabras, el autor *pospone* al estudiante la verdadera relevancia

del contenido que será aprendido. Frecuentemente esta estrategia es empleada en textos avanzados.

d) Encarnamiento. En álgebra lineal el principio de encarnamiento es encontrado en el proceso de traducir las definiciones generales y teoremas, en términos de situaciones dadas; contrario a la abstracción, el encarnamiento viene después de que el concepto general es presentado.

e) Simbolización. La definición de un objeto matemático consiste de variables, a su vez, algunas de éstas se codifican mediante símbolos, otras no. Las variables que no son codificadas en símbolos, se fijan a través de la discusión del texto sobre el objeto en cuestión. En la codificación de variables se encuentran variables superfluas, que en ocasiones, solo complican la comprensión del estudiante sobre el objeto que representan. La simbolización es reportada como poco uniforme en los libros de texto analizados.

De estas herramientas, empleadas por Harel (1987) para el análisis de los textos, se considerarán para la presente investigación: la secuencia del contenido y el material introductorio. El siguiente trabajo hace uso de estas dos herramientas para el análisis de un concepto en particular.

2.2.1.2 El trabajo de Cook y Stewart sobre la presentación de la multiplicación de matrices en textos de álgebra lineal

En este trabajo Cook y Stewart (2014) analizaron 17 textos introductorios de álgebra lineal con la intención de investigar cómo es presentada la multiplicación de matrices en estos textos, al considerarla como la primera multiplicación abstracta con la que se enfrentan los estudiantes universitarios. De igual forma, indagan sobre el motivo o razón detrás del enfoque empleado para la presentación de esta operación en los textos y las implicaciones pedagógicas que este pudiera tener, aunque de esto último se habla poco. Los textos revisados son considerados por Cook y Stewart (2014) como textos modernos ya que han sido publicados en la última década.

Para el análisis de los textos utilizaron el trabajo de Harel (1987). Debido a que dicho trabajo proporciona elementos para un macro análisis de los textos, Cook y Stewart (2014) sólo toman algunos de ellos, ya que su estudio se enfoca en un tema particular. Los elementos considerados para el análisis son: secuencia de contenidos y presentación del material introductorio.

Secuencia de contenidos. Examinaron la secuencia en la cual los autores de los textos procedieron para definir la multiplicación de matrices. Básicamente encontraron dos tipos de secuencia en las que se define la operación.

- Producto punto-combinación lineal (PP-CL). En esta secuencia la multiplicación de matrices es definida primero en términos del producto punto (PP) de vectores columna y renglón, antes de introducirla como combinación lineal (CL) de vectores columna. Esta secuencia fue la más común en los textos analizados.
- Combinación lineal-producto punto (CL-PP). Esta trayectoria inicia con sistemas de ecuaciones lineales, donde Ax es definida como combinación lineal (CL) de las columnas de A y entonces el producto AB de matrices se define en términos del producto matriz-vector. En esta secuencia el producto punto (PP) surge como un método para realizar los cálculos más rápidamente o para calcular una entrada especifica de la matriz.

Material introductorio. La organización de las técnicas mediante las cuales se presenta el material introductorio (analogía, abstracción, isomorfización, posposición, explicadas en Harel, 1987) proporciona a los autores un medio efectivo para clasificar los fundamentos y explicaciones dadas en el texto para presentar la multiplicación de matrices, dependiendo de la trayectoria seguida (CL-PP o PP-CL).

- En la secuencia CL-PP el fundamento utilizado en los textos para definir la multiplicación de matrices mediante CL, es la *isomorfización*, es decir, haciendo notar que de esta forma un sistema de ecuaciones podría ser visto de forma equivalente como una ecuación matricial o vectorial.
- En la secuencia PP-CL la justificación de la operación variaba en los textos, utilizando la *analogía*, *abstracción* y *posposición*. Esta última estrategia fue la más común en los textos; en ella la fundamentación de la operación se posponía hasta que el lector aprendiera más sobre un determinado tema, por ejemplo, hasta que se aborda la composición de

transformaciones lineales la definición de multiplicación de matrices, previamente dada, parece natural.

2.2.1.3 El trabajo de Sierpinska sobre los formatos de interacción y lectores modelo

Sierpinska (1997) con el afán de comprender la interacción entre la terna tutor, libro de texto y estudiante, describe algunas herramientas para analizar los libros de texto que empleó en su estudio. Su trabajo se realizó con estudiantes que tomaban un curso de álgebra lineal en el nivel universitario. La autora toma como referente el trabajo realizado por Bruner[2], sobre los "*formatos"* de interacción que emplean los niños cuando aprenden el lenguaje. Las ideas de Bruner son llevadas por la autora al contexto del aprendizaje de las matemáticas, ya que le resultan útiles para comprender el uso dado al libro de texto por el estudiante y el tutor.

Las herramientas que utiliza la autora para analizar los dos libros de álgebra lineal que emplea dentro de su estudio, son las siguientes:

1) <u>El lector modelo.</u> La autora retoma en su trabajo el "*lector modelo*" de Eco[3]; este lector es referido como aquel que posee ciertas competencias, que el autor del libro considera como requisitos indispensables, para la interpretación adecuada del contenido que él intenta transmitir al lector. Este lector, usualmente, es establecido en el prefacio del libro de texto, aunque no siempre. Además, comenta que todo texto contribuye, de cierta forma, a construir a su lector modelo, por lo que señala que "el lector modelo no es únicamente presupuesto por el texto, es además creado por el texto" (p. 5).
2) <u>La capa matemática y didáctica de un libro de álgebra lineal.</u> Menciona que existen dos capas: la matemática referente a las definiciones, teoremas, demostraciones, ejercicios, entre otros, que usualmente se encuentran en los libros de matemáticas; y la didáctica, referente a formatos explícitos que guían al lector, por un lado, como usuario que aprende del texto, y por el otro, como intérprete de la capa matemática. Respecto a la capa didáctica,

[2] Bruner, J S. (1985). The Role of Interaction Formats in Language Acquisition. En J. P Forgas (ed), *Language and social situations* (pp. 31-46). New York: Springer-Verlag.
[3]Eco, U. (1979). The role of the reader: Explorations in the semiotics of texts. Bloomington: Indiana University Press.

la autora menciona que hay textos donde esta capa es importante y otros donde no es tan relevante, catalogando a estos textos como *fuertes o débiles*, respectivamente.

3) Diferentes estrategias de formatos de interpretación y de uso en los textos.
    - Formatos de interpretación. En cuanto a las estrategias empleadas en los textos para lograr la interpretación de la capa matemática, los textos se pueden clasificar como *abiertos* o *cerrados* a interpretaciones erróneas del contenido. Un texto abierto[4], prevé la posibilidad de divergencia en las interpretaciones del lector; por el contario, un texto cerrado concibe una única interpretación. En la mayoría de los textos, se aborda la diversidad de interpretaciones como estrategia para eliminarlas, mediante la resolución de ejercicios.
    - Formatos de uso. Referente al uso de los libros de texto, algunos proporcionan un amplio rango de libertad al estudiante que usa el libro para aprender, otros son más restrictivos en su uso. Por tanto, se puede hablar de textos *liberales* y *apodícticos*, en cuanto a su uso. Por ejemplo, los libros constructivistas son considerados como apodícticos, ya que no admiten otro uso más que el secuencial, página a página.

2.2.2 Trabajos de análisis de libros en otras áreas de matemáticas

En la presente sección citamos el trabajo de Sidokhine (2013) quien, de acuerdo a los intereses de su investigación, realizó algunas modificaciones a criterios propuestos por otros autores. También, citamos a Lithner (2004) y García y Llinares (1994) cuyos trabajos se enfocan en el análisis de los ejercicios o tareas presentadas en los textos.

2.2.2.1 El trabajo de Sidokhine sobre el análisis de libros de texto de teoría de la medida

El trabajo de maestría de Sidokhine (2013) presenta un análisis de los libros de teoría de la medida que usualmente se utilizan en un curso de maestría. La investigación, a diferencia de Sierpinska (1997), está centrada en analizar la terna profesor, libro de texto y conocimiento matemático. Su

[4] En el sentido de Eco.

interés radica en comprender qué es lo que motiva a un profesor utilizar un determinado libro de texto en su curso, así como el uso dado por él; de igual manera, comprender cómo es que el contenido matemático y la organización didáctica difiere de un libro a otro. Para abordar esto último analiza cuatro libros de teoría de la medida.

El marco de trabajo bajo el cual realiza el análisis de los textos es tomado del trabajo de Sierpinska (1997) y Eco (1979) (citado en Sidokhine, 2013), a los que hace algunas adaptaciones para los fines de su investigación. Las adaptaciones que realiza, para el análisis de los libros de texto, son las siguientes:

Libros de texto abiertos y cerrados. Eco (1979) (citado en Sidokhine, 2013) define a los libros de textos como *abiertos* y *cerrados*, según la libertad de interpretaciones que el lector puede hacer del texto. Las interpretaciones están relacionadas con el lector modelo que el autor del texto propone. Sidokhine (2013) comenta que “en un libro de texto, sin embargo, la libertad de interpretaciones es restringida por el significado matemático” (p. 30), además, en “raras ocasiones presentan una variedad de enfoques para un concepto […]” (p. 30). Esto le permite adaptar la definición de Eco de libro abierto y cerrado, de la siguiente forma:

a) Un libro con texto abierto “[…] es un libro de texto que busca presentar varias interpretaciones posibles de un mismo tema, lo cual podría hacer, por ejemplo, incluyendo en la discusión definiciones o ejemplos equivalentes.” (p. 30)

b) Un libro con texto cerrado, es un libro de texto “[…] que se limita a una sola interpretación posible, evitando otras por diversas estrategias tales como la omisión de definiciones equivalentes.” (p. 30)

El lector modelo y empírico. El lector modelo es el lector que es capaz de interpretar el texto de manera similar al autor del libro, lo que implica que satisface los requerimientos solicitados, de manera implícita o explícita, por el autor (Eco, 1979, citado en Sidokhine, 2013). El lector empírico es referido por Sidokhine (2013) como “[…] cualquiera que lea el texto (pragmáticamente)” (p. 31). Este lector puede, o no, coincidir con el lector modelo establecido.

Según Sidokhine (2013), siendo que el libro de texto es utilizado como instrumento de aprendizaje y de enseñanza, existen dos tipos de lectores: el estudiante y el profesor. Esta consideración le permite hablar del *lector modelo estudiante* y del *lector modelo profesor*, que a su vez, implica la existencia del *lector empírico estudiante* y el *lector empírico profesor*. Pero, sólo se enfoca en los lectores que conciernen al profesor, pues su investigación busca estudiar la relación profesor, libro de texto y conocimiento matemático.

Caracterizar al lector modelo para un investigador, que no es el autor del texto, es todo un reto, comenta Sidokhine (2013), por lo que en su investigación el lector modelo es reconstruido a partir de la revisión del prefacio del libro, de su contenido y estructura, del contexto histórico en el que fueron escritos y de las entrevistas aplicadas a algunos profesores que impartían la materia.

<u>Libros liberales y apodícticos</u>. Sierpinska (1997) utiliza los términos de *liberal* y *apodíctico* para referirse a las estrategias de formateo que emplean los autores para el uso del libro de texto. De esta forma, los libros liberales proporcionan al estudiante un cierto rango de libertad para su uso; por el contrario, los libros apodícticos son más restrictivos en cuanto a ello. Ejemplo de libros apodícticos son los libros constructivistas, éstos proporcionan al lector actividades de forma secuenciada con el fin de lograr la construcción o aprehensión de un concepto, que de no realizarse así, difícilmente permitirán el aprendizaje del tema tratado. Respecto a los libros liberales Sidokhine (2013) comenta que son raros, ya que un libro de este tipo debería proporcionar diferentes enfoques de un concepto, lo que permitiría diferentes usos del texto por parte del lector. Por ejemplo, un libro de texto pudiera presentar el concepto de integral de las siguientes formas, como un problema geométrico, analítico o físico, lo cual no es común en los textos. Lo anterior muestra una fuerte relación entre el formato de uso y de interpretación que emplean los textos.

Como consecuencia de su interés por conocer el uso que el profesor le da al libro de texto, Sidokhine (2013) redefine los términos de liberal y apodíctico, según la libertad que los libros proporcionan al profesor para su uso. Define a un *libro liberal* como aquel que proporciona al profesor diferentes enfoques matemáticos y didácticos de un concepto, brindándole considerable libertad para preparar sus clases. Es decir, no impone un desarrollo particular de un tema, lo que permite al profesor desarrollarlo en su clase de la forma que considere más apropiada. Un *libro* *apodíctico* es redefinido como aquel que restringe su uso al profesor, proporcionándole un solo enfoque (matemático y didáctico) del contenido.

Problemas de práctica y producción. Otro aspecto importante que considera Sidokhine (2013) es el conjunto de problemas que presentan los libros de texto y los clasifica en dos categorías: problemas de práctica y problemas de producción. Por *problemas de práctica* se refiere a aquellos donde el resultado final al que se llega, no es un nuevo resultado del objeto en cuestión; esto no implica que en los pasos involucrados en la solución del problema no se genere nuevo conocimiento sobre el objeto. Por el contrario, los *problemas de producción* son problemas donde el resultado final es nuevo, respecto al conocimiento que tenía el estudiante de ese objeto antes de resolver el problema.

La sección de problemas del libro proporciona información sobre su organización, así como del tipo de *lector modelo profesor* que el autor del libro espera. Al respecto, Sidokhine (2013) escribe:

> […] si muchos de los resultados importantes se dejan como ejercicios para los estudiantes, se puede especular que el autor asume que el instructor [profesor] tiene muy poca participación en la actividad de aprendizaje de los estudiantes dentro del aula, pero más a través de las tareas. (p. 34)

Revisión histórica. Sidokhine (2013) realiza una revisión histórica del surgimiento de la teoría de la medida. Esta revisión la utilizó como criterio para comparar la estructura y organización de los contenidos en los libros de texto analizados:

> […] buscamos si ellos siguieron el desarrollo histórico del tema o eligieron un camino alternativo como un enfoque puramente axiomático por medio de la definición de Caratheodory. (p. 2)

En su estudio esta información se vuelve relevante, puesto que le permite evidenciar las razones que motivaron el diseño y la organización de los contenidos en los libros de texto, así como identificar los aciertos didácticos que la organización del texto permite al profesor y al estudiante.

2.2.2.2 El trabajo de Lithner sobre análisis de ejercicios de cálculo

Lithner (2004) realizó un análisis de 598 ejercicios, tomados de tres libros de cálculo que usualmente se emplean en Suecia para un curso. Su objetivo era estudiar algunas de las estrategias que un estudiante (lector del libro) pudiera utilizar para resolver los ejercicios propuestos por el texto. En su análisis el autor no se centra en algún concepto en particular de cálculo.

Para realizar el análisis de los ejercicios el autor se apoyó en trabajos previos realizados por él (Lithner, 2000, 2003, citados en Lithner, 2004). En ellos se propone una estructura simplificada, de cuatro pasos, para describir el razonamiento empleado en la solución de una tarea, aunque el autor es consciente de que el razonamiento real es mucho más complejo. La solución de una tarea es vista por el autor como "[…] resolver un conjunto de subtareas de diferente tamaño y carácter" (p. 406), que hace evidente al proponer una *estructura del razonamiento* por medio de cuatro pasos, como se menciona a continuación:

1. Situación problemática. Referida como la situación donde no es obvio cómo proceder.
2. Elección de estrategia. Tratar de elegir una estrategia que resuelva la dificultad presentada, apoyándose en el cuestionamiento ¿la estrategia resolverá la dificultad?
3. Implementación de la estrategia. Implementar y evaluar la estrategia mediante la pregunta: ¿La estrategia resolvió la dificultad?
4. Conclusión. Obtención de un resultado.

Lithner (2004) propone dos categorías de razonamiento que un estudiante (lector del texto) puede emplear al resolver las tareas matemáticas del texto, estas son: el *razonamiento plausible (RP) y el razonamiento superficial,* dentro de las cuales se pueden clasificar algunos tipos de razonamiento, como se comenta a continuación.

<u>Razonamiento plausible.</u> Una de las características de este tipo de razonamiento es que la argumentación se basa en las propiedades matemáticas intrínsecas de los componentes[5] que

[5] El "termino componente incluye objetos matemáticos, transformaciones, y conceptos que pudieran ser explícitamente o implícitamente involucrados en el razonamiento." (Lithner, 2004, p. 407)

intervienen en el razonamiento, lo que implica un conocimiento profundo de ellas. En su trabajo Lithner (2004) reporta dos variantes de este tipo de razonamiento: el *razonamiento plausible local (RPL)*y el *razonamiento plausible global (RPG).*

<u>Razonamiento superficial.</u> En contraste al razonamiento plausible, el razonamiento superficial no requiere de un conocimiento profundo de las propiedades de los componentes, y se basa en experiencias previas del individuo. El autor señala que existen varios tipos de razonamiento superficial que un estudiante puede utilizar; por ejemplo, buscar palabras clave, repetir algoritmos, identicar similitudes entre ejemplos y ejercicios. Este último es identificado por el autor, como el más probable a emplearse al resolver un ejercicio del texto.

Por lo tanto, el razonamiento empleado en la solución de un ejercicio, el cual es identificado como la situación problema, dependerá del razonamieto empleado en la elección de la estrategía solución, catalogándose como:

- Razonamiento basado en la identificación de similitudes (RIS): si la elección de la estrategía esta apoyada en identificar similitudes con un ejemplo, regla, definición, teorema o cualquier otra situación descrita previamente en el texto. En este caso el modelo de solución se aplica tal cual, sin cambio alguno.
- RPL: si la elección de la estrategía se basa principalmente en reproducir la solución de una situación similar, pero uno o varios pasos de este procediemiento son modificados empleando el RP.
- RPG: si la elección de la estrategía depende de analizar y considerar las propiedades matemáticas intrínsecas de los componentes en el ejercicio. Es decir, en este caso el estudiante carece de modelos de solución, por lo que el mismo debe proponerlos.

De los 598 ejercicios revisados por Lithner (2004) y de los porcentajes reportados en cada categoría (RIS, RPL, RPG) podemos inferir[6] que aproximadamente el 84% de los ejercicios (presentados en

[6] La inferencia es hecha por nosotros, a partir de los porcentajes que se presentan en Lithner (2004). El porcentaje estimado en cada categoría es: 66% en RIS, 18% en RPL y 16% en RPG.

los tres textos) pueden resolverse mediante el uso de RIS y RPL, dajando sólo un 16% a ejercicios que requieren de RPG en su solución. Respecto a lo anterior y a manera de conclusión el autor comenta lo siguiente:

> […] los resultados de este estudio indican que una mayor proporción de ejercicios no muy difíciles de RPG deben ser incluidos en los libros de texto. De lo contrario, la mayoría de los estudiantes no tendrá oportunidad de practicar el RPG, e hipotéticamente, a largo plazo, esto puede conducir a una débil comprensión conceptual y a un enfoque en estrategias superficiales de solución. (Lithner, 2004, p. 426)

2.2.2.3 Los referentes propuestos por Llinares y García para analizar tareas matemáticas

Aunque en el trabajo de García y Llinares (1994) se analizaron libros de texto del nivel de secundaria, consideramos importante incluirlo en esta revisión bibliográfica, ya que señalaron la importancia de considerar las diferentes perspectivas[7] de un concepto para determinar si las tareas, presentes en los libros de texto, favorecen su comprensión.

García y Llinares (1994) destacaron la importancia de analizar las tareas matemáticas propuestas a los estudiantes, ya que éstas son un medio para generar el aprendizaje. Además, resaltaron que la relación entre la tarea y la actividad que tiene que realizar el estudiante para resolverla, puede llegar a influir en la forma que éste concibe las matemáticas. Debido a que el libro de texto es una de las principales fuentes de tareas, a la que recurre comúnmente un profesor, decidieron analizar las tareas presentadas en varios libros de texto, enfocándose en el concepto de función.

Las tareas, referentes al concepto de función, que analizaron García y Llinares (1994) fueron tomadas de libros de texto del nivel secundaria[8], publicados entre los años 1975 y 1991, con mayor difusión en Sevilla, España. El referente teórico utilizado por estos autores para el análisis de las

[7] Aquí García y Llinares (1994) se refieren a la perspectiva proceso y objeto del concepto función.
[8] En España, la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se sitúa entre las edades 14-16 años.

tareas fue la cognición situada[9], bajo la cual se asume que "el conocimiento es producto tanto de la tarea como de la situación en la que se da" (p. 14). De esta forma señalan dos factores que influencian el conocimiento matemático generado en el ámbito escolar:

1) La presentación textual de la tarea (tipo de contenido, representación instruccional empleada, etc.)
2) La naturaleza de la actividad que el propio contexto en el que se presenta la tarea demanda del estudiante.

De acuerdo a las características anteriores y a resultados de investigaciones previas que consideran que la comprensión, de un determinado concepto matemático, puede ser alcanzada por medio de la transición entre sus diferentes representaciones y transformaciones involucradas en ellas; García y Llinares (1994) proponen los siguientes referentes a considerar en su análisis de las tareas:

1) Los sistemas de representación utilizados en la tarea y, las traslaciones entre ellos, que demanda de forma implícita o explícita la solución de la tarea. En el caso del concepto de función estas representaciones pueden ser: la descripción verbal, tabla, gráfica o su expresión algebraica (fórmula). La tabla mostrada en la Figura 2.1 es tomada como base para estudiar las transiciones entre las diferentes representaciones del concepto función. Cabe aclarar que García y Llinares (1994) refinaron las categorías, inicialmente propuestas en el cuadro, en un sistema más acorde al análisis de las tareas.

[9] Brown, J.S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, January-February, 32-42.

PROCESO DE TRASLACIÓN				
a de	situación, descripción verbal	tablas	gráficas	fórmula, expresión algebraica
situación, descripción verbal				
tablas				
gráficas				
fórmula, expresión algebraica				

Figura 2.1. Modos de representación del concepto función y sus traslaciones (Janvier, 1987, citado en García y Llinares, 1994)

2) Las diferentes perspectivas (proceso y objeto) del concepto función. Las perpectivas proceso y objeto del concepto función son tomadas por García y Llinares (1994) del trabajo de Dubinsky y Harel (1992, citados en García y Llinares, 1994), estos autores caracterizaron estas perspectivas como:

> Una concepción proceso de función implica una transformación dinámica de cantidades de acuerdo a algunos medios repetibles que, dada la misma cantidad original, siempre producirán la misma cantidad transformada. El sujeto es capaz de pensar en la transformación como una actividad completa empezando con objetos de algún tipo, haciendo alguna cosa con estos objetos, y obteniendo nuevos objetos como resultado de lo que ha sido hecho […]. Una función es concebida como un objeto si es posible desarrollar acciones sobre ella, en general acciones que la transforman (globalmente). (Dubinsky y Harel, 1992, citados en García y Llinares, 1994, p. 17)

Aunque García y Llinares (1994) consideraron las perspectivas proceso y objeto de función, en el análisis de las tareas mostradas como ejemplos en su trabajo, no se hace evidente la relación de estas perspectivas con la tarea y su solución, sólo mencionan: "De forma particular podemos ver como las tareas que aparecen como ejemplos en este trabajo pueden demandar diferentes perspectivas (proceso, objeto)" (p. 22), sin que esto sea explícito en su análisis. Por otra parte, el tipo de representación del concepto función utilizado en la presentación de la tarea y la traslación entre sus diferentes representaciones, que la solución de la tarea demanda, son el principal punto de atención en este trabajo. No obstante, García y Llinares (1994) comentan que las representaciones y perspectivas del concepto función son los referentes a considerar para determinar si las tareas, planteadas en los libros de texto, favorecen, o no, la compresión del concepto en estudio, ya que la comprensión de un determinado concepto implica poder transitar entre sus diferentes representaciones y perspectivas.

CAPÍTULO 3 MARCO TEÓRICO Y ELEMENTOS METODOLÓGICOS

En este capítulo se describen los aspectos teóricos y metodológicos empleados en el análisis del libro de texto, objetivo de nuestro estudio. Se inicia con una descripción de los elementos de la teoría APOE, considerados para esta investigación; y posterior a ello, se presentan los criterios propuestos, a raíz de la revisión bibliográfica realizada, para efectuar tal análisis.

3.1 Teoría APOE

La teoría APOE es una teoría constructivista y cognitiva, propuesta por Ed Dubinsky, tomando como base el principio de *abstracción reflexiva* de Piaget, utilizada para explicar cómo es que conceptos matemáticos abstractos son construidos en la mente de un individuo. Esta teoría sustenta que para lograr la comprensión de un determinado concepto matemático un individuo debe transitar por las construcciones mentales de Acción, Proceso, Objeto y Esquema (de aquí las siglas APOE), por medio de los mecanismos de interiorización, encapsulación, desencapsulación, reversión, coordinación y tematización (Arnon et al., 2014).

El principio de abstracción reflexiva era considerado por Piaget como el principal mecanismo para realizar toda construcción mental, y también como el mecanismo mediante el cual toda estructura lógica-matemática puede desarrollarse en la mente de un individuo (Arnon et al., 2014, p. 6). De acuerdo a Piaget, este principio consta de dos partes:

> La primera parte involucra reflexión, en el sentido de conciencia y pensamiento contemplativo, sobre lo que Piaget llamó contenido y operaciones sobre ese contenido, y en el sentido de reflexionar el contenido y las operaciones de un nivel cognitivo inferior a uno más alto […]. La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y las operaciones en la etapa superior, que da lugar a operaciones sobre sí mismas que se convierten en contenido al que nuevas operaciones pueden ser aplicadas (Piaget, 1973). (citado en Arnon et al., 2014, p. 6)

Estas ideas sobre la abstracción reflexiva fueron reinterpretadas por Dubinsky para el estudio del aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados, describiendo las etapas mencionadas por Piaget mediante las estructuras mentales de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, y los mecanismos por los cuales cada una de estas estructuras se pueden desarrollar. A continuación se describen estas estructuras y mecanismos.

3.1.1 Estructuras y mecanismos mentales

Acción

Una de las premisas que aborda la teoría APOE es que la construcción de un nuevo concepto se apoya en la transformación de conceptos previos; por tal motivo éstos deben percibirse previamente por el individuo como objetos. Por lo tanto, una *acción* es una transformación de objetos (previamente construidos), percibida por el individuo como externa, en el sentido de que cada paso de la transformación requiere realizarse de forma explícita y, además, es necesario de un estímulo externo para poder ejecutarlos (Arnon et al., 2014, p. 19).

Por ejemplo, un individuo con una *concepción*[10] acción del concepto vector propio de un operador lineal, requiere conocer tanto al vector como al operador lineal de forma explícita, para poder evaluar directamente el operador en el vector y determinar si la imagen obtenida es, o no, un múltiplo del vector inicial; en caso afirmativo puede nombrar al vector como un vector propio del operador lineal.

La estructura de acción es considerada como la más simple dentro de la teoría, pero no por ello menos importante, ya que es fundamental en la construcción del concepto.

Proceso

Un *proceso* es considerado como una acción interiorizada, es decir, "interna"; en la que el individuo es consciente y tiene control sobre la transformación producida por la acción. Esto es caracterizado por la habilidad de imaginar, saltar o revertir los pasos involucrados en la transformación, sin la necesidad de un estímulo externo. La *interiorización* es el mecanismo que permite el cambio de

[10] El término *concepción* es utilizado dentro de la teoría APOE para referirse a la comprensión o idea que un individuo puede tener sobre algún concepto.

acción a proceso, el cual es logrado mediante la repetición y reflexión sobre las acciones (Arnon et al., 2014, pp. 20-21).

Respecto al concepto vector propio, una concepción proceso consiste en la habilidad del individuo de pensar en el vector propio de un operador lineal $T: V \to V$, como un vector v, no específico, del espacio vectorial, para el cual se satisface la condición $T(v) = \lambda v$; de igual forma el individuo puede determinar las condiciones que permiten su existencia.

Los procesos no sólo provienen de la interiorización de acciones; también se considera que éstos pueden ser construidos a partir de otros procesos mediante el mecanismo de *coordinación*, e inclusive de la *reversión* de procesos. La Figura 3.1 ilustra estos mecanismos.

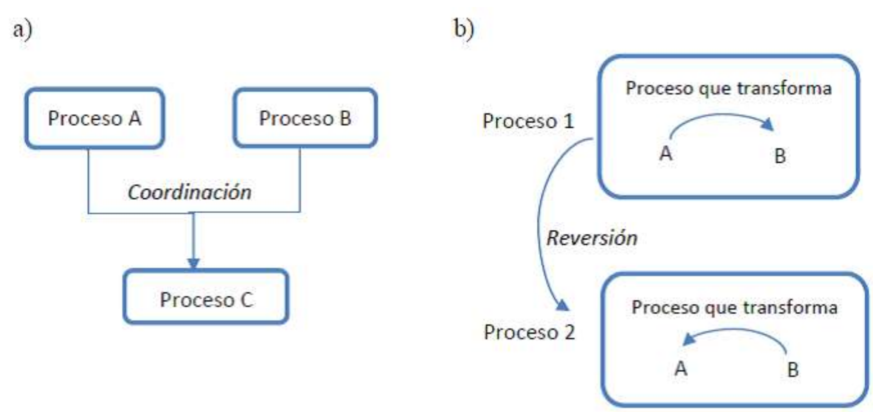


Figura 3.1. Mecanismos de coordinación y reversión

Objeto

Cuando un individuo toma conciencia sobre el proceso y es capaz se concebirlo como un todo al que puede transformar, mediante la aplicación de acciones o procesos, se dice entonces que el proceso ha sido encapsulado en un *objeto* cognitivo (Asiala et al., 1996, p. 11). El mecanismo que permite este cambio de conciencia sobre el proceso es la *encapsulación*. Sin embargo, algunos estudios realizados bajo el marco de la teoría APOE han mostrado que lograr la encapsulación de procesos como objetos a menudo resulta difícil para los estudiantes, pues se requiere de un gran cambio de conciencia para percibir algo dinámico (proceso) como un ente estático (objeto) al que es posible manipular.

Retomando el caso del vector propio, una concepción objeto de este concepto permite al individuo realizar acciones sobre él, como pueden ser: comparar dos vectores propios, asociados a un mismo valor propio, y determinar si uno es combinación lineal del otro; aplicar el operador lineal de forma iterativa sobre el vector propio; o bien, considerarlo como un elemento del *espacio propio* sobre el cual puede actuar.

Una vez encapsulado un proceso en un objeto, si el individuo requiere regresar al proceso que dio origen al objeto, es posible hacer esto mediante el mecanismo de *desencapsulación*.

Esquema

Un esquema, de un concepto matemático en particular, es una colección coherente de acciones, procesos, objetos e inclusive de otros esquemas, relacionados de forma consciente o inconsciente en la mente de un individuo, los cuales puede emplear en la solución de una situación o problema matemático que involucre el concepto en cuestión. La coherencia del esquema es referida como la habilidad del individuo para reconocer en qué situaciones el esquema es aplicable y en cuáles no (Trigueros, 2005, p. 11).

El esquema es considerado como una estructura dinámica que está en constante desarrollo y evolución conforme el individuo va aprendiendo. Aunque, pudiera pensarse que esta estructura empieza a construirse una vez logrados los objetos (por la progresión Acción, Proceso, Objeto), puede que su construcción inicie desde que el individuo realiza acciones. Dentro de la teoría una forma de estudiar el desarrollo de un esquema es por medio de la triada *intra*-, *inter*- y *trans*- propuesta por Piaget y García (1989) (citados en Arnon et al., 2014), que lo clasifica en alguna de estas etapas según el nivel de relaciones que un individuo puede establecer entre los componentes del esquema y otras estructuras cognitivas. Es posible que un esquema sea considerado como un objeto (cognitivo), mediante el mecanismo de *tematización*, sobre el cual es posible aplicar nuevas acciones o procesos.

Por ejemplo, el esquema del concepto valor y vector propio puede incluir relaciones entre los conceptos espacio propio, espacio vectorial, dimensión, polinomio característico, matriz asociada a un operador lineal, entre otros, a los que un individuo pude recurrir al enfrentarse a un problema o situación, como diagonalizar un operador lineal.

La Figura 3.2 muestra la relación existente entre los mecanismos y estructuras mentales, anteriormente mencionadas.

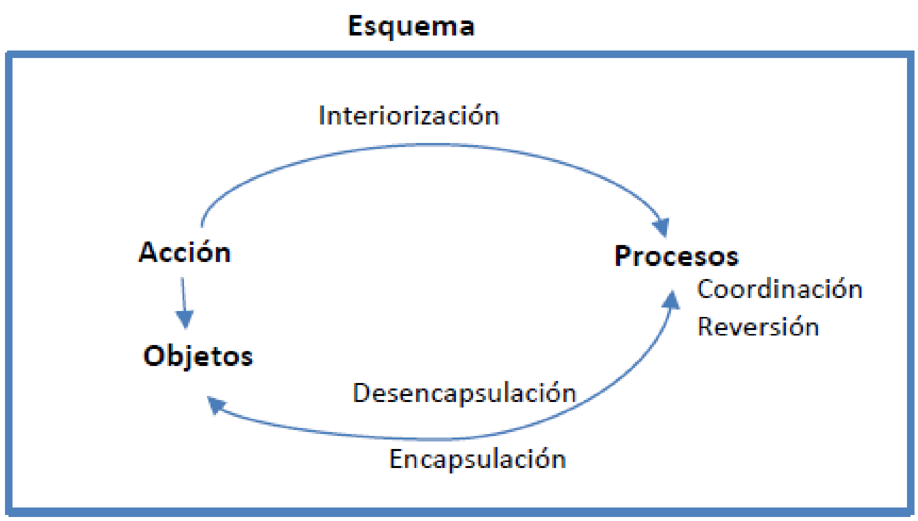


Figura 3.2. Estructuras y mecanismos mentales (basado en Arnon et al., 2014, p. 18)

Si bien no es posible observar directamente las estructuras mentales (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) en un individuo que aprende, estas estructuras pueden ser inferidas a partir de la observación sobre lo que el individuo puede hacer, o no, al enfrentarse a una determinada situación o problema matemático (Dubinsky, 1991, p. 12). De esta forma se puede caracterizar en qué fase de construcción, de algún concepto matemático específico, se encuentra el individuo.

3.1.2 Descomposición genética

El principal objetivo de la teoría APOE es explicar cómo es que un individuo construye en su mente el conocimiento matemático, así como entender las posibles dificultades en su proceso de construcción. La forma en que se describe, dentro de la teoría, el aprendizaje de un concepto matemático en un individuo, es mediante una *descomposición genética*, la cual, es un modelo hipotético que describe por medio del uso de estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) y mecanismos (interiorización, encapsulación, desencapsulación, reversión, coordinación y tematización) el camino cognitivo que un individuo podría seguir para construir dicho concepto. Una descomposición genética es referida como *preliminar* hasta que se obtienen datos empíricos que permiten su validación.

El diseño de una descomposición genética preliminar, para algún concepto en particular, puede basarse en los siguientes recursos (Arnon et al., 2014, pp. 33-34):

- La experiencia del investigador como profesor y/o estudiante en relación con la comprensión del concepto matemático.
- Investigaciones previas en Educación Matemática, sobre las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del concepto.
- Observaciones de cursos. El análisis de las observaciones, del trabajo de estudiantes que aprenden el concepto, permite identificar elementos de una descripción cognitiva del concepto, que posteriormente puede verificarse empíricamente.
- Desarrollo histórico del concepto. Un estudio de este tipo puede señalar las construcciones mentales que un individuo puede realizar, de acuerdo al desarrollo histórico del concepto.
- Materiales de texto. El enfoque didáctico empleado en este tipo de materiales puede ayudar al investigador a detectar algunas consideraciones en el aprendizaje del concepto matemático en cuestión.
- Análisis de datos empíricos (transcripciones de entrevistas). La comparación de extractos de entrevista, como un estudio piloto, permite evidenciar las diferencias en el desempeño de los estudiantes ante tareas específicas; estas diferencias pueden señalar la presencia o ausencia de alguna estructura mental. Las construcciones mentales implicadas por este tipo de análisis pueden constituir parte de una descomposición genética.

Mediante la consideración de uno o varios de los factores anteriormente mencionados, una descomposición genética preliminar (en lo sucesivo, simplemente descomposición genética) puede diseñarse para describir las estructuras y mecanismos mentales que, a consideración del investigador, son viables para el aprendizaje de un determinado concepto matemático.

Otro aspecto importante que debe tomarse en cuenta en el diseño de una descomposición genética son las estructuras previas que un individuo requiere haber construido para poder iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto, ya que, a menudo, “[u]n nuevo concepto […] surge como la transformación de un concepto existente" (Arnon et al., 2014, p. 28). En este sentido, una descomposición genética describe las acciones[11] (cognitivas) que son necesarias realizar sobre objetos previos, las cuales se interiorizan en procesos y estos, a su vez, se encapsulan en objetos; además, puede incluir una descripción de cómo estas estructuras se relacionan y organizan en un esquema.

Es importante aclarar que una descomposición genética no es una descripción matemática del concepto en estudio, es un modelo epistemológico y cognitivo del concepto (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, p. 96), ya que considera la naturaleza matemática del concepto y su posible desarrollo en la mente del individuo. Otro aspecto que parece conveniente resaltar es que una descomposición genética, para algún concepto en específico, no es única, pues depende de las consideraciones que haya tomado el investigador para su diseño, así como también de las estructuras previas que posea el individuo o individuos que aprenden; lo importante es que la descomposición genética permita explicar, en término de construcciones mentales, los aciertos y dificultades del individuo al aprender dicho concepto.

Por ejemplo, Roa-Fuentes y Oktaç (2010) propusieron dos descompociones genéticas para el concepto de transformación lineal. El primer camino propuesto parte del objeto *transformación* previo al de transformación lineal, que es poco común en la enseñanza de dicho concepto; mientras que el segundo se enfoca en la manera en que comunmente se aborda el concepto tanto en la enseñanza como en los libros de álgebra lineal. Sin embargo, sólo se encontraron datos empíricos que permitieran la validación del segundo camino:

> En general, el tipo de construcciones que un estudiante logra sobre un concepto, está determinado por la manera en que éste es presentado por primera vez. Ahora, ya que las definiciones que presentan los textos guía de álgebra lineal en general, no hacen referencia a la existencia del objeto transformación previo al de transformación lineal,

[11] Es conveniente aclarar que una descomposición genética no necesariamente inicia con la aplicación de acciones sobre objetos; ésta puede iniciar, por ejemplo, mediante la coordinación de procesos.

no encontramos datos, que de manera evidente, hagan referencia al primer camino descrito en nuestra descomposición genética […] (Roa-Fuentes y Oktaç, 2012, p. 214)

Lo anterior muestra el papel tan importante que puede tener el libro de texto tanto en el diseño de una descomposición genética como en las construcciones que un individuo pudiese desarrollar sobre algún concepto en particular. Por tal motivo, se considera que la presente investigación proporcionará elementos teóricos para el diseño de una descomposición genética de los conceptos valor propio y vector propio, a partir del análisis de cómo éstos son abordados en un texto de álgebra lineal y la respectiva crítica.

3.1.3 Ciclo de investigación

La investigación basada en el marco teórico APOE consiste de tres componentes: análisis teórico; diseño e implementación de enseñanza; y análisis y verificación de datos; los cuales se ilustran en la Figura 3.3 junto con sus relaciones.

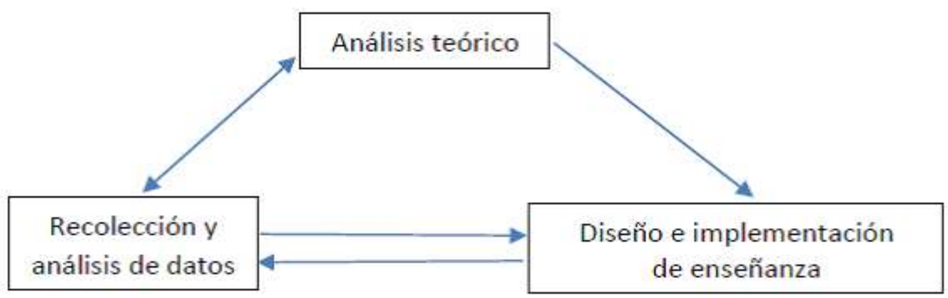


Figura 3.3. Ciclo de investigación (basado en Arnon et al., 2014, p. 94)

- Análisis teórico. La investigación, bajo el paradigma APOE, inicia con el análisis teórico del concepto a estudiar, es decir, con el diseño de una descomposición genética (preliminar). Como se mencionó anteriormente, una descomposición genética es un modelo compuesto de estructuras y mecanismos mentales que un individuo requiere construir para lograr el aprendizaje de un determinado concepto; ésta puede diseñarse tomando en cuenta los factores descritos anteriormente. Asiala et al. (1996, p. 5) señalan dos cuestionamientos que deben guiar el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? y ¿Cómo esa comprensión puede ser lograda por un estudiante?

- Diseño e implementación de enseñanza. Una vez diseñada una descomposición genética, ésta puede implementarse en el aula mediante el ciclo de enseñanza ACE que integra: **A**ctividades, Discusión en **C**lase y **E**jercicios (ACE, por sus siglas en inglés). Este método de enseñanza tiene como propósito apoyar el desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética (Arnon et al., 2014, p. 57). Esta componente del ciclo de investigación permite generar los datos empíricos que serán analizados en la tercera componente.
- Recolección y análisis de datos. Esta parte del ciclo de investigación permite la validación de la descomposición genética mediante el análisis de los datos obtenidos en la etapa anterior. Las preguntas que guían este análisis son: ¿Los estudiantes desarrollaron las construcciones mentales previstas por el análisis teórico?, ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático? (Arnon et al., 2014, p. 94). A partir de las respuestas obtenidas para estos cuestionamientos el investigador puede hacer modificaciones a la primera o segunda componente del ciclo de investigación, para incluir aquellos elementos que no habían sido considerados en el análisis teórico o en la implementación de la enseñanza. Una vez realizadas las modificaciones, si es que las hubo, se vuelve a iterar el ciclo completo hasta que se pueda responder satisfactoriamente a los dos cuestionamientos planteados; de esta forma se obtiene una descomposición genética validada.

Desde el punto de vista planteado por el paradigma de investigación basado en la teoría APOE, el presente trabajo forma parte de la primera componente de este ciclo de investigación; si bien es cierto que la intención de esta investigación no es proponer una descomposición genética para los conceptos valor y vector propio, sí intenta ejemplificar el análisis de un texto de álgebra lineal, haciendo evidente la forma en que estos conceptos son tratados en él. Lo anterior podría servir de base para:

1. el diseño de una descomposición genética de los conceptos valor y vector propio,
2. estudios futuros cuya intención sea considerar un libro de texto para el diseño de una descomposición genética de algún concepto en particular.

En particular nuestro trabajo puede ilustrar suposiciones empleadas por los autores de libros de texto sobre el aprendizaje del álgebra lineal, que podrían ser contraproducentes en el desarrollo cognitivo de los conceptos en cuestión.

3.2 Consideraciones Metodológicas

A continuación se describen los elementos que se consideraron para el análisis del texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b), enfocándose, principalmente, en el estudio de los conceptos valor y vector propio.

3.2.1 A qué llamamos libro de texto

En este trabajo se utilizará el término "libro de texto" para referirnos al libro que comúnmente utilizan profesores y estudiantes a lo largo de un curso escolar como apoyo en su proceso de enseñanza-aprendizaje de una determinada área de las matemáticas, en este caso, del álgebra lineal. De acuerdo a la definición de libro de texto presentada por Stray (1994), éste debe tener una intención pedagógica autoritaria sobre un área de conocimiento. Si bien, la intención pedagógica puede no ser evidente en los libros universitarios de matemáticas debido a su fuerte énfasis en teoremas y demostraciones que exige el rigor matemático, lo cual sólo permite percibir su parte autoritaria más no su intención pedagógica, esto no quiere decir que ésta esté ausente. Al respecto, Love y Pimm (1996, p. 375) señalan que con el simple hecho de mostrar en una "secuencia lógica" los contenidos, el libro asume una función pedagógica, pues de esta forma indica al lector lo que necesita aprender en primer lugar, en segundo, y así sucesivamente, hasta terminar los contenidos que en él se abordan. Es decir, el libro va preparando al lector para cubrir los temas de forma secuencial. Con esta observación asumimos que el libro *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b), es un libro de texto de acuerdo a la definición de Stray (1994). En lo sucesivo, cuando consideremos que esto no generará confusión, utilizaremos las palabras "texto" y "libro" como sinónimos de "libro de texto".

3.2.2 Sobre la elección del libro de texto

Para la elección del libro, considerado para esta investigación, se revisaron los programas de álgebra lineal de algunas carreras ofrecidas en cuatro instituciones académicas del país. Las cuales son: la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), la Universidad de Colima (UCOL), la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) y el Instituto Politécnico Nacional (IPN). A continuación se describen las carreras consultadas de estas instituciones.

- **UNAM.** Se consultó el programa de estudios de la asignatura de Álgebra Lineal I (Facultad de Ciencias UNAM, 1983) incluida dentro de los planes de estudio de las licenciaturas en Matemáticas[12], Matemáticas Aplicadas, Física, Física Biomédica (Facultad de Ciencias UNAM, 2015), Actuaría y Ciencias de la Computación ofrecidas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Los dos primeros textos incluidos dentro de la bibliografía básica del programa son: *Linear Algebra: An Introductory Approach* de Charles Curtis (1984) y *Álgebra Lineal* de Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence (1982). El programa de la licenciatura en Física Biomédica hace referencia a la cuarta edición de los textos anteriores y en su idioma original, como en el caso del texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b).
- **UCOL.** Se revisó el programa de Álgebra Lineal que se imparte, indistintamente, para las licenciaturas en Matemáticas y en Física (Facultad de Ciencias UCOL, 2014a, 2014b). Debido a que el programa oficial de la asignatura no señala la bibliografía a utilizarse en el curso, se consultó a uno de los profesores que regularmente imparte esta materia para obtener dicha información. Este profesor[13] mencionó que los libros que regularmente utiliza en su curso son: *Linear Algebra Done Right* de Sheldon Axler (1997) y la cuarta edición del texto *Linear Algebra* de Friedberg, Insel y Spence (2003b).
- **UAZ.** De esta universidad se consultaron los programas de álgebra lineal de las licenciaturas en Matemáticas (Unidad Académica de Matemáticas UAZ, 2011), Física (Unidad Académica de Física UAZ, 2011) y el de las ingenierías Mecánica, Eléctrica y Civil (Unidad Académica de Ingeniería AUZ, 2007). Los dos textos principalmente sugeridos, en esta universidad, para licenciatura en Matemáticas son: la cuarta edición del

[12] El programa de estudios de la asignatura de álgebra lineal es el mismo para las licenciaturas mencionadas, excepto en el caso de la licenciatura en física biomédica.

[13] Información del contacto: Dr. Andrés Pedroza; andres_pedroza@ucol.mx, Facultad de Ciencias, Universidad de Colima.

texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b) y *Álgebra Lineal* (Hoffman y Kunze, 2006). Mientras que para la licenciatura en Física se sugieren los textos: *Álgebra Lineal* (Grossman, 2004) e *Introduction to Linear Algebra* (Strang, 2003). Para las ingenierías los dos textos básicos son: *Introducción al Álgebra Lineal* (Anton, 2003) y *Álgebra Lineal* (Grossman, 2004).

- **IPN.** Se revisó el programa de álgebra lineal, impartido bajo el nombre de Álgebra 3, incluido en los planes de estudios de las licenciaturas en Física, Matemática e Ingeniería Matemática de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM IPN, 2011). El programa oficial de la asignatura sugiere cuatro libros de texto como apoyo para este curso (ver anexo A). Además, se consultó la página personal, disponible en internet, de uno de los profesores que imparte tal curso en esta institución. La literatura principal sugerida por este profesor (Maximenko, 2013) incluye la tercera edición del texto *Linear Algebra* de la serie Schaum (Lipschutz y Lipson, 2001) y la cuarta edición de *Álgebra Lineal* de Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence (2003a). Esta literatura es complementada con los textos sugeridos en el programa oficial, entre otros.

Se reconoce que la revisión realizada no fue exhaustiva; sin embargo, esta pequeña revisión permitió evidenciar que el texto *Linear Algebra* de Friedberg, Insel y Spence es uno de los textos que comúnmente se sugiere dentro de la bibliografía básica de los programas de álgebra lineal enfocados al área de ciencias. Por tal motivo, se decidió tomar este texto para su análisis. Se eligió la cuarta edición del texto por ser la más referida y, en su idioma original, ya que suele ser común entre los profesores, que imparten el curso, recurrir a la versión en inglés del texto.

3.2.3 El lector que se ha considerado para el texto

Como comenta Sidokhine (2013), el libro de texto puede tener dos lectores: el profesor y el estudiante. Para esta investigación se asumirá que el lector del libro de texto es un estudiante, quien aprende por primera ocasión los conceptos valor y vector propio. Además, se supondrá que este lector sigue de “forma lineal” la lectura del texto; en el sentido de que no se salta capítulos o secciones de ejercicios, de acuerdo a la secuencia de contenidos presentada por el texto, a menos que esto le sea indicado, como por ejemplo, cuando el lector revisa la sección de apéndices que proporciona el texto, las notas al pie de página, o bien la sección de respuestas a ejercicios.

3.2.4 Criterios a considerar para el análisis del libro de texto

La presente investigación es un primer acercamiento cognitivo a los conceptos valor propio y vector propio, desde el punto de vista en que estos son abordados en un texto de álgebra lineal. Para su estudio nos hemos apoyado en la teoría APOE, ya que este enfoque permite describir las estructuras y mecanismos mentales que podrían estar implícitos en el desarrollo de los conceptos valor propio y vector propio, a través del libro de texto. Debido a la ausencia de trabajos previos sobre análisis de textos con la teoría APOE, proponemos, a partir de la revisión bibliográfica realizada, los siguientes criterios para el análisis del texto.

1) **Estructura general del texto.** La estructura del texto proporcionará información sobre la organización de su contenido, así como de un posible uso sugerido por el mismo; es decir, se trata de reconocer si el texto sugiere al lector alguna forma de lectura que pudiera apoyar su aprendizaje. Conforme a la secuencia de contenidos, presentada por el índice del texto, se pretende identificar el enfoque que, de acuerdo a Harel (1987), es empleado en la presentación de dichos contenidos. De igual forma, nos interesa determinar los conocimientos previos y las estructuras mentales de éstos, requeridas por el lector para abordar los conceptos valor y vector propio. Pues, según Love y Pimm (1996, p. 384) este orden lógico de los contenidos refleja la idea del texto sobre "la secuencialidad del aprendizaje y la dependencia entre los temas". Sin embargo, este orden lógico de los conceptos no siempre coincide con el orden cognitivo en que éstos son aprendidos. Cabe aclarar que las estructuras mentales requeridas de cada uno de los conocimientos previos serán identificadas al momento de la presentación y definición de los conceptos valor y vector propio en el libro.
2) **Presentación y definición de los conceptos valor y vector propio.** ¿Qué motiva en el texto el estudio de los conceptos valor y vector propio? De acuerdo a esta pregunta se identificará si estos conceptos son presentados mediante alguna situación o problema que motive su definición y estudio; o si por el contrario, el texto simplemente se limita a presentar, de manera súbita, la definición de estos conceptos sin motivar su estudio. En caso que se presente un problema o situación con la finalidad de motivar el estudio de los

conceptos en cuestión, se analizarán las estructuras[14] y mecanismos mentales que deben ser movilizados por el lector para afrontar tal situación o problema. Respecto a la definición de los conceptos, se revisará si el texto proporciona definiciones equivalentes, como puede ser definir los conceptos valor y vector propio en términos de operadores lineales y matrices; o bien, si se restringe a una sola definición. Lo anterior permitirá catalogar al libro como un *libro con texto abierto* o *cerrado*, de acuerdo a Sidokhine (2013). Dependiendo de la definición o definiciones presentadas en el texto, se identificarán las construcciones mentales implícitas en ellas mediante el cuestionamiento: ¿Qué estructuras mentales, en término de la teoría APOE, están implícitas en la definición de los conceptos valor y vector propio?

3) **Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto.** Llinares y García (1994) comentan que “todo texto lleva tras de sí una determinada filosofía, una forma de «ver» el contenido matemático escolar” (p. 13), lo cual condiciona el tipo de tareas o problemas presentados en él. Dada la importancia de los ejemplos y ejercicios, presentados por el texto, como medios para generar el aprendizaje matemático (Llinares y García, 1994, p. 20), se pretende identificar las construcciones mentales que son requeridas y/o promovidas en ellos. Puesto que los ejemplos del texto, de cierto modo, ofrecen al lector modelos de solución que pueden imitar al momento de enfrentar los ejercicios o problemas (Love y Pimm, 1996; Lithner, 2004), será mediante la relación Ejemplos-Ejercicios que se determinarán las estructuras mentales, referentes a los conceptos valor y vector propio, que son mayormente favorecidas en este texto. Es decir, se evidenciará si los ejercicios propuestos realmente promueven el desarrollo de las estructuras cognitivas de proceso, objeto u esquema, o si sólo demandan aplicar algoritmos, recordar teoremas o definiciones, en tal caso solo se fomentarían acciones (cognitivas) de los conceptos valor y vector propio.
4) **El lector modelo.** Este lector es referido por Sierpinska (1997) y Sidokhine (2013), como aquel capaz de interpretar los contenidos del texto de la misma forma que lo haría el autor del libro; tal lector requiere de ciertos conocimientos indispensables para iniciar con la

[14] Nos referimos a las estructuras mentales de los conocimientos previos.

lectura del texto. De acuerdo a estos autores, el lector modelo puede ser inferido a partir del prefacio del texto, donde se establecen los conocimientos con los que debe de contar. Además, Sierpinska (1997) comenta que el lector modelo no sólo es previsto por el autor, sino que también es construido a través del texto. Es decir, conforme el lector avanza en la lectura del texto, éste adquiere más herramientas, habilidades y conocimientos que le permiten afrontar los contenidos posteriores que, a menudo, son más complejos. Es en este sentido que se plantea la pregunta: ¿cuáles son las estructuras mentales que el lector modelo debe poseer para cubrir satisfactoriamente el desarrollo de los conceptos valor y vector propio? la cual permitirá obtener información sobre el desarrollo cognitivo, de los conceptos previos, que se espera haya logrado el lector al momento de abordar los conceptos valor y vector propio.

Es importante resaltar que el análisis del texto se centrará, principalmente, en el capítulo o capítulos, donde se estudien los conceptos valor y vector propio. De igual forma, el análisis no contempla estudiar si las estructuras mentales de los conocimientos previos, requeridas para abordar los conceptos valor y vector propio, fueron promovidas por el libro de texto, ya que esto implicaría un estudio similar al de esta investigación.

CAPÍTULO 4 REVISIÓN DEL LIBRO *LINEAR ALGEBRA* DE STEPHEN H. FRIEDBERG, ARNOLD J. INSEL Y LAWRENCE R. SPENCE

En este capítulo presentamos el análisis del texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b). El análisis que aquí se presenta se realizó conforme a los criterios propuestos en la sección de consideraciones metodológicas del capítulo anterior. El capítulo se divide en cuatro secciones, las cuales corresponden a los criterios propuestos: Estructura general del libro; Presentación y definición de los conceptos valor propio y vector propio; Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto; y finalmente El lector modelo.

4.1 Estructura general del libro

Este libro presenta como parte de su estructura la siguiente secuencia de contenidos del álgebra lineal: espacios vectoriales, transformaciones lineales y matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, diagonalización (en este capítulo es donde se abordan los conceptos valor y vector propio); posteriormente se estudian espacios con producto interno y formas canónicas (Figura 4.1). De acuerdo a la clasificación de Harel (1987) respecto a la secuencia de los contenidos, el libro presenta un enfoque del tipo *general a lo particular*, es decir, desarrolla toda la teoría de espacios vectoriales y transformaciones lineales, para después aplicar estas ideas abstractas al estudio de matrices; estas últimas permiten una simplificación de los cálculos empleados en el álgebra lineal. Además, Harel menciona que este tipo de enfoque es frecuente en textos avanzados, como es el caso de este texto, ya que los autores del texto aclaran que este libro es recomendable para un segundo curso de álgebra lineal, aunque puede utilizarse para un primer curso con un fuerte enfoque teórico (Friedberg et al., 2003b, p. ix).

Contents

*Sections denoted by an asterisk are optional.

v

vi Table of Contents

Table of Contents vii

Figura 4.1. Contenidos del libro de álgebra lineal (Friedberg et al., 2003b, pp. v-vii)

Los siete capítulos que componen el libro se dividen en varias secciones; cada sección al finalizar presenta una serie de ejercicios. Con el símbolo (†) son marcados los ejercicios que no son opcionales, ya que ellos son referidos en secciones posteriores, por lo que su solución es requerida. En todos los capítulos, excepto en el capítulo tres, se presenta al menos una sección opcional, señalada con (*); la decisión de abordar estas secciones u omitirlas se deja a consideración del lector. Al término de cada uno de los capítulos se proporciona un índice de los conceptos tratados en ese capítulo, para que al lector le sea más fácil ubicar algún concepto de su interés. También se presenta, al final del libro, un apartado con respuestas a algunos ejercicios seleccionados que, aunque no es especificado por los autores, se puede utilizar como medio para verificar los resultados obtenidos por el lector en los ejercicios. Por último, incluye cinco apéndices en los que se abordan brevemente conceptos básicos de conjuntos, funciones, campos, números complejos y polinomios, que se emplean a lo largo del libro.

Conforme a la organización de los contenidos empleada en el libro, podemos ver que los *conocimientos previos* que los autores consideran que el lector debe poseer, antes de abordar los conceptos valor y vector propio, son:

- Espacio vectorial
- Transformación lineal y su relación con matrices (matriz asociada a una transformación lineal)
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Determinante

Estos conceptos son estudiados en los primeros cuatro capítulos del texto, respectivamente. El diagrama de la Figura 4.2 muestra la dependencia directa entre los capítulos del libro y algunas de sus secciones. De acuerdo a ello, el estudio completo de los tres primeros capítulos es indispensable para abordar los temas posteriores. A diferencia del capítulo 4, sobre el “determinante”, que no requiere de una lectura completa, ya que, como se comenta en el texto, este concepto sólo se limita a “calcular y establecer las propiedades de los valores propios” (Friedberg et al., 2003b, p. 199), los cuales son abordados en el capítulo siguiente; debido a ello, el lector no requiere de un estudio profundo del concepto *determinante*, por lo cual, se sugiere al lector cubrir las primeras tres secciones del capítulo 4, o bien, sólo abordar la última sección donde se presenta un resumen de lo anterior. Respecto al capítulo 5, donde se estudian los conceptos valor y vector propio, el diagrama muestra que las primeras dos secciones del capítulo son suficientes para abordar el capítulo 6, mientras que para el capítulo 7 se requiere de la sección 4 del capítulo 5, además de las dos secciones anteriores. Sin embargo, la sección 3 del capítulo 5, en la cual se estudian algunas aplicaciones de la diagonalización de operadores y matrices, no es considerada como esencial para los temas posteriores, por lo que es señalada como opcional.

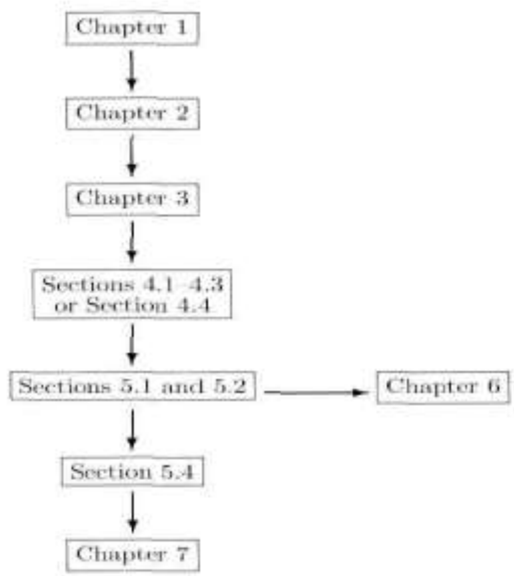


Figura 4.2. Dependencia entre los capítulos del texto y algunas de sus secciones (Friedberg et al., 2003b, p. xi)

En resumen, el diagrama de la Figura 4.2 sugiere una forma de lectura, la cual permitiría cubrir el material esencial del texto (espacios vectoriales, transformaciones y matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, diagonalización y espacios con producto interno) en un semestre. A consideración de los autores, lo anterior puede ser posible si: el curso dispone de cuatro horas a la semana, se omiten varias de las secciones señaladas como opcionales y parte de la discusión sobre el determinante que se aborda en el capítulo 4 y, además, si los estudiantes ya han tenido un primer acercamiento al álgebra lineal, como por ejemplo un primer curso. También mencionan que la organización del texto permite que se adapte a diferentes cursos para que sea enseñado su contenido, variando de tres a ocho horas por semana, por lo que proporciona cierta libertad al profesor de la materia para cubrir su contenido.

El libro aborda aplicaciones en áreas como ecuaciones diferenciales, economía, geometría y física, pero, según los autores, no son esenciales para el desarrollo de las ideas matemáticas del texto, por lo que éstas pudieran ser omitidas según considere el profesor. Por consiguiente, la aplicación de los conceptos del álgebra lineal en estas áreas tiene un carácter secundario y no principal dentro de este texto, debido al fuerte enfoque abstracto que manejan los autores en el desarrollo de los contenidos.

4.2 Presentación y definición de los conceptos valor y vector propio

Los conceptos valor propio y vector propio son estudiados en el capítulo 5, titulado Diagonalización. En este capítulo el problema central es diagonalizar un operador lineal T. Los operadores lineales son definidos en el capítulo 2 del texto como:

> Transformaciones lineales que mapean un espacio vectorial V en sí mismo (Friedberg et al., 2003b, p. 112).

Y una transformación lineal es definida como:

> **Definición**. Sean V y W espacios vectoriales (sobre F). Decimos que una función $T: V \to W$ es una transformación lineal de V en W si, para todo $x, y \in V$ y $c \in F$, tenemos:
>
> $T(x + y) = T(x) + T(y)$, y
> $T(cx) = cT(x)$.
>
> (Friedberg et al., 2003b, p. 65)

A partir de las definiciones anteriores podemos decir que un *operador lineal* sobre V, donde V es un espacio vectorial, es una transformación lineal cuyo dominio y codominio coinciden; el cual es representado en el libro *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b) como $T: V \to V$. Por lo tanto, un operador lineal al ser una transformación lineal permite al lector utilizar todos los resultados (teoremas, corolarios, proposiciones, entre otros) sobre transformaciones lineales, vistos anteriormente en el texto, para el estudio de los operadores lineales. Esto implicaría que los resultados sobre transformaciones lineales establecidos de forma general, tendrán que ser reinterpretados por el lector para el caso de operadores lineales; en términos de la teoría APOE el esquema de *transformación lineal* se estaría enriqueciendo al establecer estas relaciones con el operador lineal.

4.2.1 Presentación de los conceptos

El estudio de los conceptos valor propio y vector propio es motivado en este texto a partir del problema de diagonalizar un operador lineal T. De acuerdo a esta problemática la discusión del capítulo 5 gira en torno a dos preguntas fundamentales que formulan los autores: ¿Cuándo es T diagonalizable? y ¿Cómo diagonalizar T? Desde el punto de vista de APOE, para el lector el concepto de operador lineal debe de percibirse como un objeto cognitivo, puesto que se requiere aplicar una acción sobre T, la cual es diagonalizar.

El material introductorio del capítulo se presenta *posponiendo* (Harel, 1987) la importancia y centralidad de diagonalizar un operador lineal. Los autores únicamente anticipan, por un lado, que el hecho de que T sea diagonalizable permitirá comprender más fácilmente la forma en que actúa el operador T sobre el espacio vectorial V, aunque no se dan más detalles de ello; por otro lado, mencionan que el hecho de que T sea diagonalizable también permitirá simplificar la solución de muchos problemas en los que se involucra operadores lineales. Como se mostrará a continuación los conceptos valor y vector propio surgen al resolver el problema de diagonalizar un operador lineal T.

Aunque la idea de diagonalización ya había sido presentada en el material introductorio del capítulo, es formalizada como la definición principal. Antes de presentar la definición, se hace referencia a un ejemplo concreto visto en la sección 2.5 del capítulo de Transformaciones Lineales y Matrices; en este ejemplo se obtiene una matriz diagonal que representa a una transformación en particular (reflexión sobre la recta $y = 2x$) respecto a una base distinta de la estándar para R^2; seguido de ello se presentan las siguientes definiciones:

> **Definiciones**. Un operador lineal T sobre un espacio vectorial V de dimensión finita es diagonalizable si existe una base ordenada β para V tal que[15] $[T]_\beta$ es una matriz diagonal. Una matriz cuadrada A es llamada diagonalizable si L_A es diagonalizable. (Friedberg et al., 2003b, pp. 245-246)

La definición anterior presenta el concepto de diagonalización para operadores lineales y matrices. En la primera parte de la definición, referente a T, podemos ver que se requiere de una concepción objeto del concepto de base ordenada del espacio vectorial V, ya que es necesario pensar en el conjunto de todas las posibles bases para V y, de ese conjunto elegir aquella que satisfaga la condición de que $[T]_\beta$ sea diagonal. La verificación del cumplimiento de la condición sobre la matriz $[T]_\beta$ requiere desencapsular el proceso de base ordenada y coordinarse junto con el proceso de matriz asociada a T, esto para cada base de V (Figura 4.3). En la segunda parte de la definición, para matrices cuadradas, se hace referencia al operador lineal L_A, este operador es definido[16] de la siguiente forma:

$$L_A: F^n \to F^n$$
$$L_A(v) = Av,$$

donde $v \in F^n$, y F es un campo (R o C). Este operador lineal es de suma importancia, pues éste permite transferir las "[…] propiedades de transformaciones [lineales] a propiedades análogas con matrices y viceversa" (Friedberg et al., 2003b, p. 92). En este texto la multiplicación de matrices por vectores es vista como una transformación lineal, en particular con matrices cuadradas como un operador lineal, sobre el cual se conoce la forma en que actúa sobre los vectores del espacio vectorial (multiplicación por una matriz); por lo tanto, el hecho de que una matriz cuadrada A sea diagonalizable dependerá de si el operador lineal L_A, asociado a la matriz A, es diagonalizable. Al parecer los autores del texto tratan de hacer énfasis en el hecho de que toda matriz representa una transformación lineal, por ello proponen de esta forma la definición de digonalización de A. Esta

---

[15] $[T]_\beta$ representa la matriz asociada al operador lineal T, respecto a la base β para el espacio vectorial V.

[16] La definición del operador lineal L_A, presentada aquí, es una adaptación de la definición general presentada en la página 92 del texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b).

primera definición que se aborda en el capítulo, a primera vista parece simple, pero vemos que detrás de ella hay un gran trabajo cognitivo que no se hace evidente en la definición.

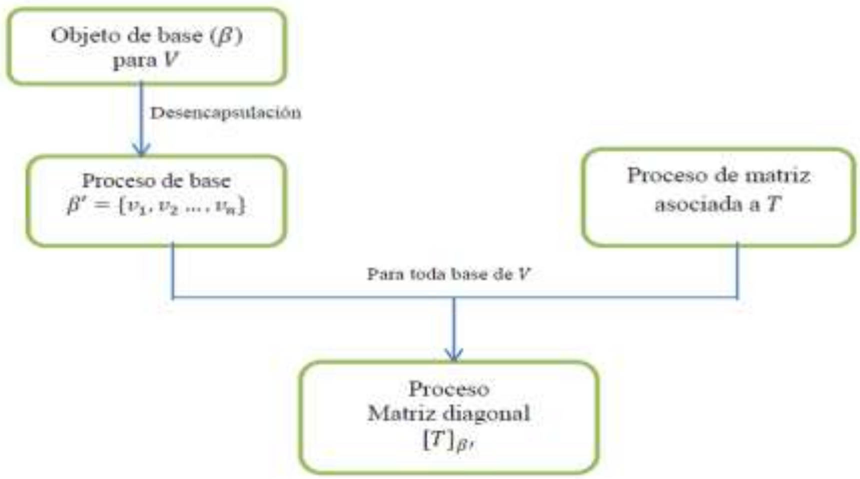


Figura 4.3. Proceso de matriz diagonal

El enfoque, de lo general a lo particular, que emplea el libro es evidenciado en la motivación que los autores proponen para los conceptos valor y vector propio. Como se mencionó anteriormente, el problema inicial es cómo diagonalizar un operador lineal; en este contexto los conceptos valor y vector propio son motivados de la siguiente forma:

> Queremos determinar cuándo un operador T sobre un espacio vectorial V es diagonalizable, y si es así, cómo obtener una base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ para V tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal. Note que, si $D = [T]_\beta$ es una matriz diagonal, entonces para cada vector $v_j \in \beta$, tenemos
>
> $$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij} v_i = D_{jj} v_j = \lambda_j v_j \ ,$$
>
> donde $\lambda_j = D_{jj}$.
>
> Conversamente, si $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ordenada para V, tal que $T(v_j) = \lambda_j\, v_j$ para algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2\,, \dots, \lambda_n$, entonces claramente

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(Friedberg et al., 2003b, p. 246)

La motivación que presentan los autores es mostrada en dos direcciones. En la primera dirección el lector requiere de una concepción objeto de matriz diagonal $D = [T]_\beta$ asociada al operador T. Posteriormente este objeto se desencapsula en el proceso mediante el cual se obtuvo la matriz; en este punto el lector es consciente de que las columnas de la matriz diagonal, asociada a T, son los escalares que permiten escribir las imágenes de T como combinación lineal de los vectores en la base ordenada β de V; entonces para cada columna de la matriz diagonal se revierte el proceso que permite escribir la imagen de un vector bajo T como combinación lineal de vectores la base de llegada, esto para encontrar el vector imagen $T(v)$ cuyos escalares de la combinación lineal son dados por las columnas de la matriz diagonal, obteniendo el proceso $T(v_j) = \lambda_j\, v_j$, como se muestra a continuación

$$\begin{gathered} \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = \lambda_1 v_1 = T(v_1) \\ 0v_1 + \lambda_1 v_2 + \cdots + 0v_n = \lambda_2 v_1 = T(v_2) \\ \vdots \\ 0v_1 + 0v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_n v_1 = T(v_n) \end{gathered}$$

En la otra dirección, se tiene que coordinar el proceso de base ordenada y el proceso $T(v_j) = \lambda_j\, v_j$, esto mediante el proceso de matriz asociada a una transformación lineal (TL), el cual permite encontrar la matriz asociada al operador T (ya que es una transformación lineal) respecto a la base β. Esta matriz resulta ser una matriz diagonal debido a la condición $T(v_j) = \lambda_j\, v_j$, impuesta sobre el operador lineal respecto a β. De esta forma se obtiene el proceso matriz diagonal, el cual posteriormente debe encapsularse en el objeto $[T]_\beta$. El diagrama de la Figura 4.4 ilustra la discusión anterior.

Por lo tanto, los conceptos valor y vector propio son motivados en este texto como una condición necesaria que un operador lineal T debe satisfacer para que éste se pueda diagonalizar.

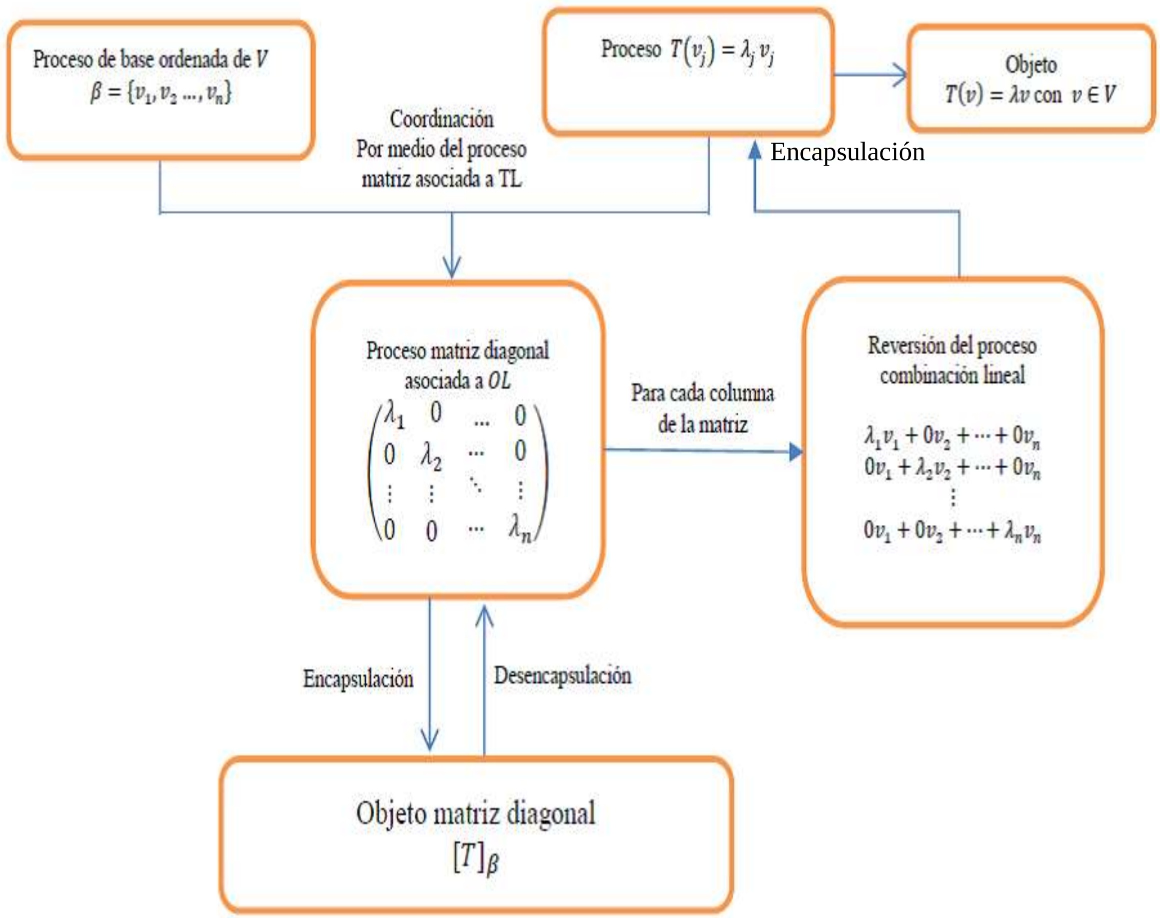


Figura 4.4. Diagrama que ilustra la obtención del objeto valor y vector propio de un operador lineal (superior derecha)

4.2.2 Definición de los conceptos

Posterior a la motivación del estudio de los conceptos valor y vector propio, el texto presenta dos definiciones de estos conceptos; una para operadores lineales y la otra para matrices.

> **Definiciones**. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V. Un vector distinto de cero $v \in V$, es llamado un vector propio de T si existe un escalar λ tal que $T(v) = \lambda v$. El escalar λ es llamado el valor propio correspondiente al vector propio v.
>
> Sea A en $M_{nxn}(F)$. Un vector distinto de cero $v \in F^n$ es llamado un vector propio de A si v es un vector propio de L_A; es decir, si $Av = \lambda v$ para un escalar λ. El escalar λ

es llamado el valor propio de A correspondiente al vector v. (Friedberg et al., 2003b, p. 246)

Las definiciones presentadas son matemáticamente equivalentes, desde el punto de vista de que toda transformación lineal se puede representar mediante una matriz, y a toda matriz le corresponde una transformación lineal. Además en ambas su comprensión requiere de una concepción proceso de los conceptos valor y vector propio, ya que el lector necesita pensar que si un vector v, distinto de cero y no específico, de los respectivos espacios vectoriales (V o F^n) es un vector propio de T o A entonces su imagen bajo T o A es un múltiplo escalar de sí mismo; además, tanto el operador lineal como la matriz no son específicos. Sin embargo, las estructuras mentales demandadas localmente en cada una de las definiciones son distintas, como se muestra a continuación.

La definición presentada para operadores lineales requiere de una concepción objeto de vector y una concepción proceso de operador lineal, las cuales se relacionan de la siguiente forma: al considerarse al vector v como un elemento del espacio vectorial V, puede ser concebido como un objeto sobre el cual puede actuar el operador lineal T; la concepción proceso de operador lineal permite al lector ser consciente que la imagen de v bajo T, es decir, $T(v) = \lambda v$ es algún elemento (vector) de V, que resulta ser un múltiplo escalar del vector inicial.

Por otra parte, en la definición mostrada para matrices debe recordarse que L_A es un operador lineal tal que $L_A: F^n \to F^n$, y es definido como $L_A(v) = Av$, para cada vector columna $v \in F^n$, donde F es un campo (R o C). En este caso, como en la definición anterior, el lector requiere de una concepción proceso de operador lineal, que le permita ser consciente que un elemento v (objeto vector) de F^n es transformado en otro elemento (λv) de F^n mediante L_A; además, requiere de una concepción objeto de matriz (A) para realizar el producto Av, ya que esta es la forma en que L_A actúa sobre v. Lo anterior puede interpretarse mediante las expresiones 1) y 2), respectivamente.

$$L_A(v) = \lambda v$$

$$L_A(v) = Av = \lambda v.$$

Este libro puede catalogarse como un *libro con texto abierto* de acuerdo a Sidokhine (2013), debido a que no se limita a una sola definición de los conceptos valor y vector propio. Al presentar dos definiciones equivalentes para estos conceptos proporciona al lector cierta libertad para elegir la definición con la que se sienta más cómodo para trabajar. Como se verá más adelante, en la sección 3 de este documento, las dos definiciones se utilizan indistintamente para establecer resultados sobre los valores y vectores propios, pues la intención del libro es "enfatiza[r] la relación simbiótica entre las transformaciones lineales y matrices" (Friedberg et al., 2003b, p. ix)

En la definición presentada para los conceptos valor y vector propio en términos de operadores lineales podemos notar que el proceso $T(v_j) = \lambda_j v_j$, para cada $v_j \in \beta$, generado en la motivación previa a la definición, se encapsula en la ecuación $T(v) = \lambda v$, para algún $v \in V$; la cual, debe percibirse como un objeto para poderla manipular y determinar el grupo de vectores para los cuales se satisface. Se resalta que hay un distanciamiento entre la motivación y la definición presentada; en la motivación los vectores propios pertenecen a una base finita, mientras que en la definición de vector propio esta condición no es precisada, es decir, es más general.

Las ideas de la motivación junto con la definición de los conceptos valor y vector propio son resumidas en el primer teorema del capítulo, cuya demostración no se muestra ya que resulta ser la motivación anteriormente presentada. El teorema establece lo siguiente:

> **Teorema 5.1.** Un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión n es diagonalizable si y sólo si existe una base ordenada β para V que consista de vectores propios de T. Más aún, si T es diagonalizable, $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ordenada de vectores propios de T, y $D = [T]_\beta$, entonces D es una matriz diagonal y D_{jj} es el correspondiente valor propio de v_j con $1 \leq j \leq n$. (Friedberg et al., 2003b, p. 246)

El proceso de diagonalización, en este libro, es presentado como un caso particular del proceso de matriz asociada a T, el cual es más general, pues en él se asume que T es una transformación lineal entre espacios vectoriales que pueden ser distintos y, por consecuencia las bases serían distintas para el dominio y el codominio. Diagonalizar un operador lineal se reduce a un caso particular en el que la transformación lineal tiene el mismo espacio vectorial como dominio y codominio ($T: V \to V$) y usualmente se suele utilizar la misma base para ambos. Ahora bien, de todo el conjunto de bases del espacio vectorial V, respecto a las cuales se puede representar T, se busca una base tal que la matriz asociada a T sea diagonal.

4.3 Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto

En este apartado se presenta el análisis de las estructuras mentales, referentes a los conceptos valor y vector propio, requeridas y/o promovidas en cada uno de los ejemplos, resultados establecidos y ejercicios presentados en cada una de las secciones que componen el capítulo 5 del libro. La presente sección se divide en cuatro secciones, mismas que corresponden a las secciones del capítulo 5 del texto analizado. Aclaramos que la numeración seguida para los ejemplos que se presentan a continuación, no corresponde fielmente a la del texto; debido a que ésta se reiniciaba al inicio de cada sección y para evitar confusiones en este documento, se optó por enumerar a los ejemplos de acuerdo al capítulo, sección y número en que eran presentados en libro.

4.3.1 Valores y vectores propios

Los primeros tres ejemplos que se muestran en esta primera sección, posteriores a la definición de los conceptos valor y vector propio y del Teorema 5.1, son ejemplos específicos de operadores lineales en los cuales se muestra, primero la existencia de dos valores y vectores propios para una matriz cuadrada de $2x2$, luego la no existencia de ellos para un operador y finalmente, la existencia de infinitos valores y vectores propios para un operador lineal.

Ejemplo 5.1.1. En este primer ejemplo se presenta una matriz A de $2x2$ con entradas en R y dos vectores v_1 y v_2 con valores específicos, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; el ejemplo busca verificar que los dos vectores dados son vectores propios de la matriz A y, por consiguiente, encontrar los valores propios correspondientes para esos vectores. Mediante la multiplicación de la matriz por cada uno de los vectores, se verifica que cada uno (v_1 y v_2) son vectores propios de A, con los correspondientes valores propios $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 5$, respectivamente. Siendo que los vectores v_1 y v_2 forman una base ordenada para R^2 y son vectores propios de A; por el Teorema 5.1 la matriz A es diagonalizable con respecto a la base ordenada $\beta = \{ v_1, v_2\}$.

$$[L_A]_\beta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo se requiere una concepción acción de vector propio, ya que sólo implica un cálculo que involucra una matriz y dos vectores específicos; esta acción consiste en multiplicar los vectores v_1 y v_2 con la matriz A y encontrar los respectivos escalares, para determinar si los vectores dados son vectores propios de A.

Ejemplo 5.1.2. En él se proporciona un operador lineal T sobre R^2, el cual rota cada vector del espacio vectorial por un ángulo de $\frac{\pi}{2}$. Este ejemplo es un caso de un operador lineal que muestra la no existencia de valores y vectores propios para el operador. El argumento que utilizan los autores para demostrar la no existencia de ellos, es geométrico, pues hacen uso de que los vectores $T(v)$ y v sean colineales; de hecho, los autores comentan: "es claro geométricamente que para cualquier vector v distinto de cero, los vectores v y $T(v)$ no son colineales; por lo tanto $T(v)$ no es múltiplo de v" (Friedberg et al., 2003b, p. 247). Sin embargo, no proporcionan alguna representación gráfica de $T(v)$ y v. En este ejemplo se requiere de una *concepción proceso geométrico*[17] de vector propio, la cual permitiría al lector ser consciente que un vector propio de cualquier operador lineal, en R^2 o R^3, se presenta cuando los vectores v y $T(v)$ son colineales. En este ejemplo particular, la concepción proceso (geométrico) de vector propio implicaría una concepción proceso de operador lineal que permita al lector imaginar mentalmente el movimiento de rotación de todos los vectores en R^2 y así concluir que en efecto, no existen vectores que sean colineales con su imagen. Desafortunadamente previo a este ejemplo no hay representaciones geométricas de vectores propios que promuevan en el lector el desarrollo de la concepción requerida.

Ejemplo 5.1.3. Este ejemplo considera el espacio de funciones infinitamente diferenciables $C^\infty(R)$, que incluye a las funciones polinomiales, exponenciales, a las funciones seno y coseno, entre otras. Hasta el momento, es la primera ocasión en que se hace uso de este conjunto $C^\infty(R)$ en el libro de texto, el cual es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{F}(R, R)$ (el conjunto de todas las funciones de R a R) y, entonces, un espacio vectorial. Por lo tanto, es posible considerar el operador

[17] Agregamos este adjetivo para distinguir entre los procesos cognitivos de valor y vector propio en los contextos algebraico y geométrico.

lineal $T: C^{\infty}(R) \to C^{\infty}(R)$ definido como $T(f) = f'$, es decir, la derivada de f. Los autores infieren que el lector no tendrá problema en demostrar que el conjunto $C^{\infty}(R)$ es un espacio vectorial, así como en probar que T es lineal, pues se refieren a ellos con las expresiones "*claramente"* y "*es fácil verificar*", respectivamente. En este ejemplo el lector requiere de una concepción objeto de función, ya que necesita pensar en la función como un elemento[18] del espacio vectorial $C^{\infty}(R)$. Para determinar los valores y vectores propios del operador lineal, los autores comentan: "supongamos que f es un vector propio de T correspondiente al valor propio λ" (Friedberg et al., 2003b, p. 248), entonces se debe satisfacer $f' = T(f) = \lambda f$. Para ello el lector debe tener una concepción proceso de los conceptos valor y vector propio, ya que necesita pensar en f como un vector arbitrario del espacio vectorial $C^{\infty}(R)$ para el cual, si es un vector propio de T, debe existir un escalar λ tal que cumple con $f' = T(f) = \lambda f$. Esta expresión resulta ser una ecuación diferencial de primer orden cuyas soluciones son de la forma $f(t) = ce^{\lambda t}$, para alguna constante c. Aquí hay que notar que el lector debe tener conocimiento básico sobre cómo resolver ecuaciones diferenciales de este tipo, aunque se aborda un poco al respecto en una sección señalada como opcional en el capítulo 2. De la última expresión se puede notar que cada $\lambda \in R$ es un valor propio de T cuyo correspondiente vector propio es $ce^{\lambda t}$ con $c \neq 0$, pues se tiene que $T\left(ce^{\lambda t}\right) = \lambda\left(ce^{\lambda t}\right)$. Además, si $\lambda = 0$ entonces los correspondientes vectores propios para este valor son las funciones constantes. Por lo tanto, este operador lineal tiene infinitos valores propios y consecuentemente infinitos vectores propios. Debido a que no es posible encontrar una base finita de vectores propios para el espacio vectorial $C^{\infty}(R)$, el operador T no es diagonalizable aun cuando existen valores y vectores propios para T.

La estrategia de interpretación (Sierpinska, 1997) que se intuye están siguiendo los autores para evidenciar la importancia de las condiciones del Teorema 5.1, es la de considerar ejemplos donde alguna de sus condiciones falla y, por ende no se puede garantizar la diagonalización del operador lineal. En el ejemplo 5.1.2, el operador no es diagonalizable debido a que no existe una base de vectores propios para R^2; y en el ejemplo 5.1.3 la dimensión del espacio vectorial, sobre el cual se

[18] Aquí f es un vector del espacio vectorial $C^{\infty}(R)$.

define el operador, no es finita, por lo que no es posible encontrar una base finita de vectores propios para el espacio $C^{\infty}(R)$. De los ejemplos mostrados, el ejemplo 5.1.1 es el único que cumple con las condiciones del Teorema 5.1 y por lo tanto el único diagonalizable.

Hasta el momento, los autores sólo han enfatizado la importancia de la existencia de una base de vectores propios, para que una matriz o un operador lineal sea diagonalizable. Sin embargo, para obtener esa base, primero se requiere de encontrar los valores y vectores propios del operador o matriz. En virtud de ello el siguiente teorema determina un método mediante el cual, es posible encontrar los valores propios de un operador lineal, por lo que se trata de un resultado importante del capítulo.

> **Teorema 5.2.** Sea $A \in M_{nxn}(F)$. Entonces un escalar λ es un valor propio de A si y sólo si $det(A - \lambda I_n) = 0$. (Friedberg et al., 2003b, p. 248)

La demostración de este resultado se basa en la condición de que 'el determinante de una matriz sea igual a cero' es equivalente a que 'el operador lineal asociado a esa matriz sea no invertible'. De la definición de valor propio para una matriz, se tiene que un escalar λ es un valor propio de A si y sólo si existe un vector $v \in F^n$ distinto de cero tal que $A(v) = \lambda v$, esto implica que $(A - \lambda I_n)(v) = 0$. La expresión anterior es la definición del operador lineal $L_{(A-\lambda I_n)}$ que es representado por la matriz $(A - \lambda I_n)$. De este operador lineal nos interesa encontrar su correspondiente espacio nulo, es decir, para qué vectores se cumple la condición $L_{(A-\lambda I_n)}(v) = 0$; como $v \neq 0$ implica que el espacio nulo del operador lineal no consiste únicamente en el vector cero, por lo tanto $L_{(A-\lambda I_n)}$ es no invertible, que es equivalente a $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Seguido del teorema se proporciona la definición del polinomio característico para una matriz.

> **Definición.** Sea $A \in M_{nxn}(F)$. El polinomio $f(t) = det(A - tI_n)$ es llamado el polinomio característico de A. (Friedberg et al., 2003b, p. 248)

En lo sucesivo, en el texto se trata de construir e ilustrar un algoritmo que permita encontrar los valores y vectores propios de un operador lineal. La intención del siguiente ejemplo es ilustrar que efectivamente al calcular $det(A - \lambda I_n)$ para la matriz A se obtiene un polinomio, cuyas raíces son los valores propios de la matriz A.

Ejemplo 5.1.4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(R)$, se pide encontrar los valores propios de esta matriz haciendo uso del polinomio característico. Realizando los cálculos correspondientes se obtiene:

$$det(A - tI_2)=\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 4 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1).$$

Por lo tanto, los valores característicos de la matriz A son 3 y -1. Abordar este ejemplo requiere de una concepción acción de valor y vector propio, ya que se trata de aplicar un procedimiento para una matriz específica.

Dada la relación entre matrices y transformaciones lineales, en particular con operadores lineales, se busca definir el polinomio característico para un operador lineal a partir de la definición dada para matrices. Para ello debe tenerse presente que la matriz que representa a una transformación lineal depende de la base que se elija para el espacio vectorial, en el que se define la transformación. Las matrices que representan a una misma transformación lineal respecto a bases distintas se les denomina matrices similares, por lo que una pregunta muy natural que pudiera hacerse el lector es ¿las matrices similares generan polinomios característicos distintos para un mismo operador lineal? O equivalentemente ¿el polinomio característico de un operador lineal depende de la base que se elija para obtener la matriz asociada a dicho operador? Estos posibles cuestionamientos, del lector, son atendidos por los autores mediante un ejercicio, en el cual se pide demostrar que las matrices similares tienen el mismo polinomio característico. Esto permite a los autores hacer la siguiente definición del polinomio característico para un operador lineal.

> **Definición.** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita n, con una base ordenada β. Definimos el polinomio característico $f(t)$ de T como el polinomio característico de $A = [T]_\beta$. Es decir,
>
> $$f(t) = det(A - tI_n).$$

(Friedberg et al., 2003b, p. 249)

La definición anterior muestra que λ es un valor propio del operador T si y sólo si λ es un valor propio de la matriz $A = [T]_{\beta}$. Además, el polinomio característico del operador T, denotado por $det(T - tI)$, no depende de la elección de la base β para el espacio vectorial V, este último resultado es dejado como ejercicio para el lector.

Ejemplo 5.1.5. Este ejemplo ilustra el polinomio característico de un operador lineal pero también ilustra el polinomio característico de una matriz. En el ejemplo se considera al espacio de los polinomios de grado menor o igual a dos ($P_2(R)$) y el operador lineal $T\big(f(x)\big) = f(x) + (x+1)f'(x)$; β es la base ordenada estándar del espacio vectorial $P_2(R)$, y $A = [T]_{\beta}$ es la matriz asociada al operador. Entonces la matriz que representa al operador respecto a la base β es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando el polinomio característico de A se tiene

$$det(A - tI_3) = \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 2-t & 2 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t)(3-t) = -(t-1)(t-2)(t-3)$$

Las raíces del polinomio obtenido son 1, 2 y 3; por lo tanto, éstos son los únicos valores propios del operador T.

Con los ejemplos 5.1.4 y 5.1.5 los autores suponen que el lector podrá inferir que el polinomio característico de una matriz cuadrada de nxn es un polinomio de grado n, donde el coeficiente líder o principal del polinomio es 1 o -1, según si el polinomio es de grado par o impar, por lo que enuncian el siguiente teorema:

Teorema 5.3. Sea $A \in M_{nxn}(F)$.

a) El polinomio característico de A es un polinomio de grado n, con coeficiente líder $(-1)^n$.

b) A tiene a lo más n distintos valores propios. (Friedberg et al., 2003b, p. 249)

Seguido del resultado anterior se presenta el siguiente teorema, el cual junto con el anterior proporciona al estudiante un camino para encontrar los valores y vectores propios de un operador lineal o una matriz. Aunque su demostración así como la del resultado previo se dejan como ejercicio para el lector.

Teorema 5.4. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V, y λ un valor propio de T. Un vector $v \in V$ es un vector propio de T correspondiente a λ si y sólo si $v \neq 0$ y $v \in N(T - \lambda I)$. (Friedberg et al., 2003b, p. 250)

Los Teoremas 5.2 y 5.4 abordan las condiciones que debe satisfacer, en primer lugar, un escalar λ del campo (F), para que éste sea un valor propio de un operador lineal ($det(A - \lambda I_n) = 0$). Segundo, se aborda la condición que un vector v, del espacio vectorial V, debe satisfacer para que este vector[19] sea un vector propio correspondiente a un valor propio específico ($v \in N(T - \lambda I)$). El pensar en las condiciones sobre λ y v que permiten que la igualdad $T(v) = \lambda v$ sea cierta, requiere de una concepción proceso de valor y vector propio; sin embargo, este proceso es distinto al que pudiera ser interiorizado a través de la realización de acciones como las propuestas en el ejemplo 5.1.1, ya que en este caso primero debe pensarse en el valor propio para después encontrar sus respectivos vectores propios (reversión). En el texto, la ecuación $T(v) = \lambda v$ debe ser percibida como un objeto para poder hacer las manipulaciones algebraicas necesarias con el fin de encontrar los valores y vectores propios, aunque, desde el punto de vista de la teoría APOE la ecuación $T(v) = \lambda v$, no es el objeto mental valor y vector propio; puesto que, este último, demanda en el lector un alto grado de consciencia sobre los elementos involucrados en la ecuación.

---

[19] El vector debe estar en el *espacio nulo o kernel* de la transformación $T - \lambda I$, el cual en el texto es denotado por $N(T - \lambda I)$.

El procedimiento para encontrar los vectores propios de un operador a partir de sus valores propios, es ilustrado en el texto por el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.6. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, que se abordó en el ejemplo 5.1.4 donde se encontró que sus respectivos valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$, se pide encontrar sus correspondientes vectores propios. Primero se buscan los vectores propios correspondientes al valor $\lambda_1 = 3$. Sustituyendo este valor en la expresión $A - \lambda I$ se tiene que:

$$B_1 = A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

A la matriz B_1 se le asocia la transformación lineal L_{B_1}, entonces un vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ es un vector propio correspondiente al valor $\lambda_1 = 3$ si y sólo si es distinto de cero y además $x \in N(L_{B_1})$; es decir, si es una solución no trivial del siguiente sistema homogéneo de ecuaciones.

$$L_{B_1}(x) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 1x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El lector requiere hacer uso de una concepción proceso de solución de sistemas de ecuaciones, para poder encontrar la solución al sistema de ecuaciones lineales generado; también requiere de una concepción proceso de conjunto solución de un sistema de ecuaciones para poder interpretar las soluciones al sistema. El conjunto solución del sistema anterior es dado por:

$$\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in R\right\}.$$

La concepción proceso de conjunto solución debe coordinarse por medio del conector lógico $(\wedge)$ con el proceso de vector propio, de esta forma el lector sería consciente que los vectores en el conjunto solución son vectores que pertenecen al espacio nulo del operador L_{B_1} “y” además son vectores propios de este operador lineal. Por consiguiente, el lector interpretaría que todos los múltiplos del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con $t \neq 0$ son vectores propios correspondientes a un mismo valor propio $(\lambda_1 = 3)$.

Similarmente se buscan los vectores propios correspondientes para el valor $\lambda_2 = -1$; el sistema de ecuaciones obtenido, para este valor propio, es el siguiente[20]

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones correspondiente es el conjunto $\left\{t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} : t \in R\right\}$, así que todos los vectores propios correspondientes al valor propio $\lambda_2 = -1$ son generados por el vector $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Por último, se hace uso de una *concepción proceso del concepto de base ordenada* al establecer que el conjunto, formado al tomar un vector de cada uno de los conjuntos solución, es una base para el espacio vectorial R^2.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Por lo tanto, mediante el uso del Teorema 5.1 es posible determinar que la transformación L_A es diagonalizable y por consecuencia, también lo es la matriz A.

En el capítulo 2 referente a transformaciones lineales y matrices, se mostró la relación existente entre dos matrices similares. Esta relación es la siguiente: si B y C son matrices similares entonces $C = Q^{-1}BQ$, es decir, están relacionadas por medio de una matriz Q, que es invertible y permite obtener C a partir de B, o viceversa. Específicamente si $A = [L_A]_\beta$ es la matriz asociada al operador $L_A: F^n \to F^n$ respecto a la base estándar β para F^n; y γ es una base de F^n tal que la matriz $[L_A]_\gamma$ es diagonal, entonces $[L_A]_\beta$ y $[L_A]_\gamma$ son similares y están relacionadas por una matriz Q; para poder establecer esta relación entre las dos matrices se requiere de una concepción objeto del concepto de matriz asociada. La matriz $Q = [I]_\gamma^\beta$ es la matriz de cambio de coordenadas, en este caso

[20] Algunos detalles de cálculo que se han omitido pueden consultarse en la página 251 del libro *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b).

particular la j-esima columna de la matriz es el j-esimo vector de la base γ. La discusión anterior se aborda en el capítulo 2 dentro del Teorema 2.23 y su respectivo corolario. En este capítulo se hace uso de este resultado para mostrar la relación entre vectores propios y la diagonalización de un operador o matriz.

Lo anterior se ilustra con el ejemplo 5.1.6, donde γ es la base construida con los vectores propios de la matriz A, así que:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A = [L_A]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente matriz diagonal con respecto a la base γ:

$$[L_A]_\gamma = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que los valores de la matriz diagonal, son los correspondientes valores propios de los vectores propios que forman las columnas de la matriz Q. De esta forma los autores proporcionan una forma, casi directa, de encontrar la matriz diagonal que representa a un operador lineal una vez obtenida la base de vectores propios para el espacio vectorial.

Como se ha visto en la exposición del texto, el problema de encontrar los vectores propios de un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita, se ha reducido al problema de encontrar los vectores propios de una matriz; esta matriz es la asociada al operador lineal. En lo siguiente, los autores hacen evidente la relación existente entre los valores y vectores propios de una matriz y un operador, apoyándose en el hecho de que un espacio vectorial de dimensión finita sobre F es isomorfo al espacio vectorial F^n. El diagrama de la Figura 4.5, presentado en el libro de texto, muestra la relación entre matrices y operadores lineales.

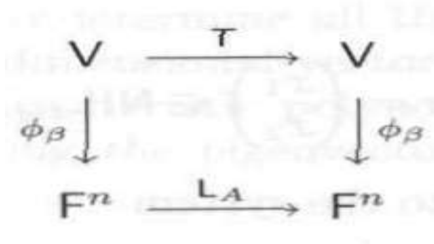


Figura 4.5. Relación entre el operador lineal $\boldsymbol{T}$ y el operador $\boldsymbol{L_A}$ (Friedberg et al., 2003b, p. 252)

Con la ayuda del diagrama anterior, se muestra que $v \in V$ es un valor propio de T correspondiente al valor λ si y sólo si[21] $\phi_\beta(v) = [v]_\beta$, donde $[v]_\beta$ es el vector coordenado relativo a la base β, y es un vector propio de A correspondiente al valor λ. Una de las direcciones de esta afirmación se muestra a continuación, la cual requiere de una concepción *proceso de valor y vector propio* de T. Si $v \in V$ es vector propio de T correspondiente al valor λ, entonces $T(v) = \lambda v$; se desea mostrar que v es un vector propio de la matriz A. Esto se realiza mediante la composición de las transformaciones L_A , ϕ_β y T. La dirección de las composiciones es seguida por las flechas del diagrama de la Figura 4.5 y se muestra en la relación siguiente:

$$A[v]_\beta = A\phi_\beta(v) = L_A\,(\phi_\beta(v)) = \phi_\beta\big(T(v)\big) = \phi_\beta(\lambda v) = \lambda\phi_\beta(v) = \lambda[v]_\beta.$$

(Friedberg et al., 2003b, p. 252)

Como $\phi_\beta(v) \neq 0$ por el hecho de que es un isomorfismo, $\phi_\beta(v)$ es un vector propio de A. En la relación anterior además de emplear una concepción proceso de vector y valor propio de T, también se hace uso de una concepción proceso y objeto de composición de transformaciones, pues son requeridas para mostrar la equivalencia entre las composiciones que muestran las dos direcciones con las que se puede llegar a F^n, esta equivalencia es expresada por la igualdad $L_A\,(\phi_\beta(v)) = \phi_\beta\big(T(v)\big)$. El proceso anterior se revierte para demostrar que si $v \in V$ y $\phi_\beta(v)$ es un vector propio de A correspondiente al valor λ, entonces v es un vector propio de T correspondiente a λ; de hecho esto es dejado como ejercicio para el lector.

---

[21] $\phi_\beta\colon V \to F^n$ definida como $\phi_\beta(v) = [v]_\beta$ para $v \in V$, es la representación estándar de V con respecto a la base β. De hecho, ϕ_β es un isomorfismo entre V y F^n.

Una formulación equivalente, a la discutida anteriormente, es enunciada por los autores de la siguiente forma: "si λ es un valor propio de A (y por lo tanto de T), un vector $y \in F^n$ es un vector propio de A correspondiente al valor λ si y sólo si ${\phi_\beta}^{-1}(y)$ es un vector propio de T correspondiente al valor λ" (Friedberg et al., 2003b, p. 252). Las dos formas equivalentes que se abordan en el texto permiten al lector relacionar, por medio de ϕ_β, un vector propio en F^n de una matriz con el correspondiente vector propio en V para el operador T. Esta transición de vectores propios entre estos espacios vectoriales, crean un proceso cognitivo que permite encontrar valores y vectores propios en alguno de estos espacios vectoriales (F^n o V) y transferirlos al otro, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.7. En él se retoma el operador lineal $T\big(f(x)\big) = f(x) + (x+1)f'(x)$ sobre el espacio vectorial $P_2(R)$ visto en el ejemplo 5.1.5, para el cual su representación matricial respecto a la base estándar β es la siguiente:

$$[T]_\beta = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Además, se había encontrado que los respectivos valores propios de T son los valores 1, 2 y 3. Por lo tanto, se buscan los correspondientes vectores propios para estos valores como se mostró en el ejemplo anterior, obteniendo los siguientes conjuntos solución para cada uno de los correspondientes valores.

Para $\lambda_1 = 1$ el conjunto solución es $\left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : a \neq 0, a \in R\right\}$

Para $\lambda_2 = 2$ el conjunto solución es $\left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : a \neq 0, a \in R\right\}$

Para $\lambda_3 = 3$ el conjunto solución es $\left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : a \neq 0, a \in R\right\}$

El lector requiere de una concepción proceso de vector propio para poder interpretar que cada valor de $a \neq 0$, en los respectivos conjuntos solución, representa un vector propio para el valor propio correspondiente. Así mismo, se debe ser consciente de que cada uno de estos vectores están en el espacio vectorial F^3, y que se requiere de encontrar los correspondientes vectores propios en $P_2(R)$. Para lograr esto, se deben coordinar los procesos de combinación lineal de cada conjunto solución en las bases respectivas de los dos espacios vectoriales (en este caso son las bases estándar) por medio del isomorfismo ${\phi^{-1}}_{\beta}$, como se puede ver a continuación.

Para $\lambda_2 = 2$ el conjunto solución es $\left\{a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} : a \neq 0, a \in R\right\}$; pero como $a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = a(e_1 + e_2)$, aplicando ${\phi^{-1}}_{\beta}$ se obtiene la respectiva base del conjunto solución en $P_2(R)$:

$${\phi^{-1}}_{\beta}\big(a(e_1 + e_2)\big) = a{\phi^{-1}}_{\beta}(e_1 + e_2) = a(1 + x).$$

El mismo procedimiento se puede efectuar de forma análoga para los otros conjuntos solución, obteniendo $a1$ y $a(1 + 2x + x^2)$ para los respectivos valores propios 1 y 3. Por lo tanto, el conjunto $\{1, 1 + x, 1 + 2x + x^2\ \}$ es una base ordenada de vectores propios para $P_2(R)$, de modo que el operador lineal $T\big(f(x)\big) = f(x) + (x + 1)f'(x)$ es diagonalizable.

Posterior a toda esta discusión teórica el texto analiza, más que representar, el efecto geométrico que produce un operador lineal T sobre sus vectores propios, en el contexto de un espacio vectorial V sobre R. Para un vector propio v de T, los autores escriben: "podemos pensar en $W = gen(\{v\})$, el subespacio de dimensión 1 generado por v, como una línea en V que pasa a través de 0 y v" (Friedberg et al., 2003b, p. 254). Además, demuestran que T actúa sobre cualquier vector de W multiplicándolo por el escalar λ. Por ejemplo, si $w \in W$ y $w = cv$, para algún escalar c, entonces:

$$T(w) = T(cv) = cT(v) = c\lambda v = \lambda w.$$

La Figura 4.6 muestra el efecto que puede generar T sobre sus vectores propios, según el valor de λ. Se contemplan cinco posibles casos para el valor de λ; éstos se describen a continuación.

- Caso 1. Si $\lambda > 1$, entonces T expande los vectores de W por un factor de λ.

- Caso 2. Si $\lambda = 1$, T actúa sobre los vectores de W como la transformación identidad, es decir, deja fijo a los vectores.
- Caso 3. Si $0 < \lambda < 1$, T contrae a los vectores de W por un factor de λ.
- Caso 4. Si $\lambda = 0$, T actúa como la transformación cero sobre los elementos de W.
- Caso 5. Si $\lambda < 0$, entonces T revierte la orientación de los vectores en W.

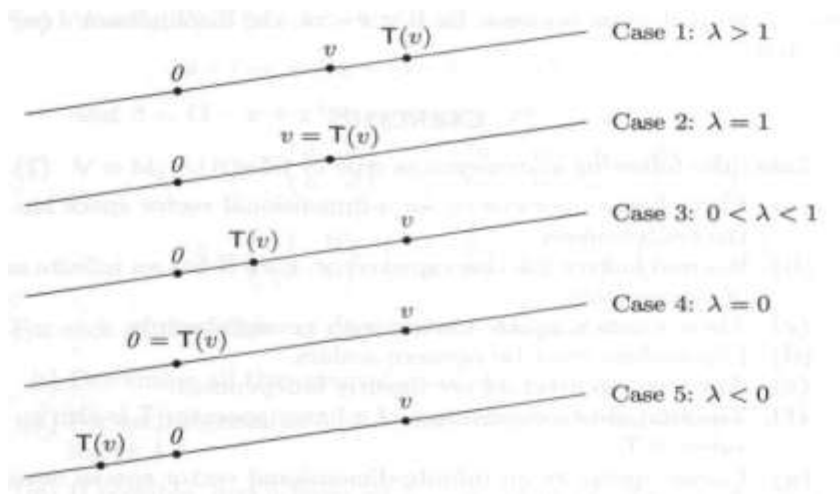


Figura 4.6. Efecto del operador T sobre v según el valor propio λ (Friedberg et al., 2003b, p. 255)

La comprensión de tales efectos demanda en el lector una *concepción proceso (geométrico) de valor y vector propio*, ya que implica imaginar el producto λv para todo vector v en W y para cada valor propio λ que satisfaga las condiciones de los casos 1, 3 y 5. En los casos 2 y 4 donde el valor de λ es específico, sólo se requiere imaginar el cumplimiento del producto $0 \cdot v$ y $1 \cdot v$, respectivamente, para todo vector propio en W. Es importante aclarar que las concepciones mentales de los conceptos valor y vector propio en el contexto geométrico, algebraico y matricial no necesariamente son las mismas. Por ejemplo, en el contexto geométrico una concepción acción de vector propio consistiría en verificar si un vector v específico y su respectiva imagen $T(v)$ son colineales; por su parte, en el contexto algebraico esto se muestra observando si $T(v)$ es un múltiplo escalar de v. Al parecer, lo anterior no es considerado por los autores, pues presentan la Figura 4.6 como si fuese lo más natural después de haber visto los conceptos valor y vector propio en los contextos algebraico y matricial; sin considerar que esto pudiese generar un obstáculo para quien lee el texto. La comprensión adecuada de la Figura 4.6 sólo se logra después de haber representado gráficamente varios vectores propios de un operador; esto permitiría crear de forma gradual la noción del efecto producido por un operador lineal sobre sus vectores propios, el cual los autores de este texto presentan de manera súbita.

Otra referencia geométrica a la que los autores recurren, para que el lector comprenda el comportamiento de los valores y vectores de un operador lineal, son los ejemplos de transformaciones lineales de la sección 2.1 del capítulo 2, donde se presenta a una rotación, reflexión y una proyección. Sin embargo, dichas representaciones no son mostradas en la presente sección, por lo que el lector tiene que recurrir al capítulo correspondiente; además, en las representaciones sólo se muestra el efecto que produce la transformación lineal sobre un vector general en el plano, por lo que el lector requiere fuertemente de una concepción *proceso de operador lineal* para poder identificar los vectores propios de cada una de las transformaciones.

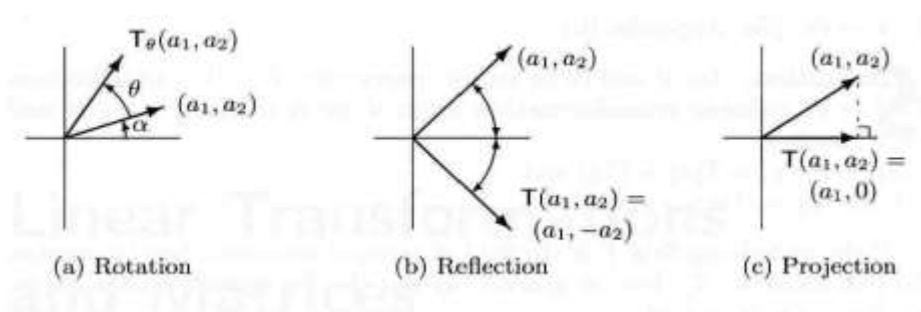


Figura 4.7. Representaciones geométricas de transformaciones lineales (Friedberg et al., 2003b, p. 66)

Por ejemplo, para el caso de la reflexión sobre el eje x (inciso (b) de la Figura 4.7) es necesaria una *concepción proceso geométrico de valor y vector propio*, además de una concepción proceso de operador lineal para poder determinar que los únicos vectores propios que tiene T son los vectores e_1 y e_2, con sus respectivos valores propios de 1 y -1. Y que, por lo tanto, el operador reflexión actúa como el operador lineal identidad sobre todos los vectores del eje x (es el espacio generado por e_1); en cambio su efecto sobre los vectores del eje y (generado por e_2) es un cambio de orientación.

En el caso de la rotación por un ángulo $0 < \theta < \pi$ (inciso (a) de la Figura 4.7) los autores tratan de conectar las tres representaciones del operador para demostrar que una rotación no tiene vectores propios. Se denota por T_θ al operador rotación por el ángulo θ, que se expresa algebraicamente de la siguiente forma:

$$T_\theta(a_1, a_2) = (a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta, a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta).$$

Apoyándose en la representación gráfica del operador lineal comentan: "[e]ntonces para cualquier v, los vectores v y $T_\theta(v)$ no son colineales [...]" (Friedberg et al., 2003b, p. 255), por lo tanto T_θ no tiene vectores ni valores propios. Esta información es confirmada utilizando la representación matricial de T_θ, con respecto a la base estándar β para R^2, para calcular el polinomio característico:

$$\det([T_\theta]_\beta - tI_2) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{pmatrix} = t^2 - (2\cos\theta)t + 1.$$

De esto se concluye que el polinomio característico no tiene ceros reales, lo que justifica la inexistencia de los vectores y valores propios para cualquier rotación no trivial en R^2.

Pese a que los autores del texto proporcionan al lector algunos elementos en el contexto geométrico como apoyo para comprender los conceptos valor y vector propio, lo cierto es que su desarrollo en este contexto es menos favorecido en el discurso del texto.

4.3.1.1 Ejercicios

En esta primera sección (5.1) del capítulo 5 se presentan 26 ejercicios al lector. Estos han sido agrupados en la Tabla 4.1, según la construcción mental (acción, proceso, objeto) de los conceptos valor y vector propio, requerida y/o promovida en ellos.

La agrupación dada por acción y proceso (análogamente para proceso y objeto), obedece a que en ocasiones un solo ejercicio contenía más de dos incisos y, la construcción mental de los conceptos valor y vector propio requerida o promovida en cada uno de ellos era distinta; por tal razón se optó por agruparlos de esta forma. A continuación, se muestran algunos ejemplos de los ejercicios.

Tabla 4.1. Agrupación de los ejercicios de la sección 5.1, según la construcción mental promovida y/o requerida en su solución

Construcción mental promovida y/o requerida	Cantidad de ejercicios	Porcentaje[22]
Acción	1	4%
Proceso	9	35%
Acción y proceso	4	15%
Objeto	7	27%
Proceso y objeto	2	8%
Otra[23]	3	11%

Acción

2.- Para cada uno de los siguientes operadores lineales sobre el espacio vectorial V y base ordenada β, calcule $[T]_\beta$, y determine si β es una base de vectores propios de T.

a) $V = R^2, T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10a - 6b \\ 17a - 10b \end{pmatrix}$, y $\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

b) $V = P_1(R)$, $T(a + bx) = (6a - 6b) + (12a - 11b)x$ y $\beta = \{3 + 4x, 2 + 3x\}$[…] (Friedberg et al., 2003b, p. 256).

El ejercicio consta de seis incisos (aunque aquí solamente se muestran dos), en los que es necesario encontrar la matriz asociada de cada operador lineal respecto a la base dada. Notamos que se demanda en el lector una *concepción acción de matriz asociada*, ya que tanto el operador lineal como la base son específicos en cada inciso. Esta acción requiere evaluar el operador lineal en los respectivos vectores de la base; de este modo se verifica si los vectores de la base dada son vectores propios del operador lineal, lo que implica una *concepción acción de valor y vector propio*. La matriz asociada a la transformación $[T]_\beta$, resulta ser diagonal cuando los vectores de la base β son vectores propios de T.

[22] El porcentaje mostrado es una aproximación, ya que se aplicó el redondeo de las cantidades.

[23] En esta categoría nos referimos a los ejercicios que en su formulación y/o solución no utilizan los conceptos valor y vector propio.

Proceso

> **9.-** Pruebe que los valores propios de una matriz triangular superior M son las entradas de la diagonal de M (Friedberg et al., 2003b, p. 258).

El lector requiere calcular $det(M - \lambda I)$, el cual es el polinomio característico de M, cuyas raíces son los valores propios de M, y resultan ser las entradas de la diagonal de M. Al realizar la demostración el lector necesita pensar en valores y vectores propios no específicos, de manera general.

Objeto

De los enunciados de falso y verdadero (ejercicio 1), mostramos un inciso donde se requiere una concepción objeto de valor y vector propio.

> e) Cualesquiera dos vectores propios son linealmente independientes (Friedberg et al., 2003b, p. 256).

Para responder a este enunciado es necesario concebir a los vectores propios como objetos, pensarlos como elementos de un conjunto de dos elementos, compararlos y verificar si para cualesquiera dos vectores propios de un operador T, uno no puede ser múltiplo del otro. Por ejemplo, los múltiplos escalares de un vector propio de T, correspondientes a un mismo valor propio λ, siguen siendo vectores propios de T.

4.3.2 Diagonalizabilidad

En la sección anterior se mostró que no todos los operadores lineales son diagonalizables, como el caso de las rotaciones en R^2. Una condición necesaria, para la diagonalización de un operador lineal, que se encontró en la discusión anteriormente expuesta, es que debe existir una base formada por vectores propios para el espacio vectorial. El propósito de esta sección es desarrollar un método eficiente que permita determinar si un operador lineal es diagonalizable. Esto implica revisar más a fondo el papel que desempeñan los conceptos valor y vector propio en la diagonalización del operador. Una de las características primordiales, como se vio anteriormente, es su existencia, la cual se basa en el hecho de que el polinomio característico tenga sus ceros dentro del campo; otra característica es que el conjunto formado por los vectores propios de un operador sea una base para el espacio vectorial, dominio del operador lineal. En los ejemplos 5.1.1, 5.1.6 y 5.1.7 de la sección anterior, se verificaba que el conjunto que se obtenía al tomar un vector propio correspondiente a cada valor propio (distinto), en efecto era una base para el espacio vectorial V, lo que permitía diagonalizar a T. Los autores mencionan que este método de construcción, en general, no produce una base de vectores propios para el espacio vectorial. Pero, es posible bajo ciertas condiciones como lo muestran los siguientes dos resultados.

> **Teorema 5.5.** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V, y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valores propios distintos de T. Si $v_1, v_2, \dots, v_k$ son los vectores propios de T tal que λ_i corresponde a v_i $(1 \leq i \leq k)$, entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente. (Friedberg et al., 2003b, p. 261)

> **Corolario.** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión n. Si T tiene n distintos valores propios, entonces T es diagonalizable. (Friedberg et al., 2003b, p. 261)

Estos dos resultados están fomentando la construcción de un proceso (cognitivo) al que llamaremos *proceso de base de vectores propios*. Este proceso resulta de una coordinación de dos procesos, el proceso de base y el proceso de conjunto de vectores propios. Inferimos la construcción de este proceso de la siguiente forma. En el Teorema 5.5 se utiliza una concepción objeto de valor y vector propio, pues por un lado está implicada una comparación entre los valores propios para verificar que sean distintos; por otro lado, se debe pensar en los vectores propios, correspondientes a cada uno de los diferentes valores propios, como elementos de un conjunto, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, para los cuales se satisface que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ con $1 \leq i \leq k$. El proceso (cognitivo) conjunto de vectores propios se coordina, mediante una proposición lógica, con el proceso de base ordenada para determinar si el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es una base, es decir, si el conjunto es linealmente independiente y que puede generar el espacio vectorial V cuando $k = n$. En caso afirmativo, el lector puede concebir al conjunto de vectores propios como una base mediante la cual puede diagonalizar al operador T.

Como se mencionó anteriormente, los ejemplos 5.1.1, 5.1.6 y 5.1.7 de la sección anterior requerían de una concepción *acción de base de vectores propios*. Pues, en ellos se tenía que verificar que el conjunto de vectores propios, obtenidos en cada uno de los ejemplos, era una base. Ahora, con una concepción proceso de base de vectores propios el estudiante puede determinar si un operador es diagonalizable, conociendo si sus valores propios son distintos, como se muestra en el ejemplo 1 de esta sección del libro al que nos referiremos como el ejemplo 5.2.1.

Ejemplo 5.2.1. Se tiene la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(R)$, para la cual el polinomio característico resulta ser:

$$\det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = t(t-2),$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$, y por lo tanto también son valores propios del operador $L_A: R^2 \to R^2$, los cuales son distintos. Así que los vectores propios correspondientes a cada uno de estos valores son linealmente independientes y, generan el espacio R^2, por lo tanto existe una base de vectores propios que diagonaliza al operador L_A (y por lo tanto A). Lo anterior no es explicitado en el discurso que acompaña el ejemplo; los autores sólo se limitan a mencionar que por el corolario anterior la matriz A es diagonalizable.

Antes de continuar con su discurso, los autores aclaran que la conversa de Teorema 5.5 es falsa, es decir, si T es diagonalizable no necesariamente es cierto que tiene n valores propios distintos. Como ejemplo de ello utilizan el operador lineal identidad, el cual es diagonalizable y sólo tiene un valor propio $\lambda = 1$. Lo que está implícito en ello es el papel de la multiplicidad del valor propio, como se mostrará posteriormente. Se ha visto que la existencia de los valores propios está determinada por la existencia de los ceros del polinomio característico; por tal razón los autores presentan la siguiente definición.

> **Definición.** Un polinomio $f(t)$ en $P(F)$ se descompone sobre F si existen escalares $c, a_1, a_2, \dots, a_n$ (no necesariamente distintos) en F tales que
>
> $$f(t) = c(t - a_1)(t - a_2)\dots(t - a_n).$$

(Friedberg et al., 2003b, p. 262)

Con el propósito de ejemplificar la definición se presentan dos polinomios. El primer ejemplo es el polinomio $t^2 - 1$ el cual se descompone en los factores $(t + 1)(t - 1)$ dentro de R. Por el contrario, el polinomio $(t^2 + 1)(t - 2)$ no se descompone en factores lineales en R, pero sí se descompone en C en los factores $(t + i)(t - i)(t - 2)$. Los autores aclaran que cuando se hable de que el polinomio característico de un operador o matriz se descompone se entenderá que se descompone sobre F, el campo del espacio vectorial.

El siguiente teorema junto con la definición anterior permite que el lector piense en la posibilidad de que si el polinomio característico de un operador lineal se descompone, entonces el polinomio característico puede tener ceros repetidos y por lo tanto el operador lineal en cuestión tendría valores propios repetidos.

Teorema 5.6. El polinomio característico de cualquier operador lineal diagonalizable se descompone. (Friedberg et al., 2003b, p. 262)

Al igual que en el Teorema 5.5 los autores aclaran que la conversa de este teorema es falsa, es decir, si el polinomio característico de un operador o matriz se descompone no necesariamente implica su diagonalización y, hacen referencia al ejemplo 3, que abordan más adelante, donde se muestra un caso de un operador lineal no diagonalizable con esta característica. Por lo tanto, hacen ver al lector que la condición de que el polinomio característico se descomponga es una condición necesaria pero no suficiente para diagonalizar operadores lineales. Además, se resalta que si un operador lineal es diagonalizable y no todos los ceros del polinomio característico (valores propios) son distintos, entonces el polinomio tiene ceros repetidos. Por tal motivo la multiplicidad de un valor propio permitirá determinar si el operador lineal es diagonalizable. Enseguida de esto presentan la definición de multiplicidad de un valor propio junto con un ejemplo de ello.

Definición. Sea λ un valor propio de un operador lineal o matriz con el polinomio característico $f(t)$. La multiplicidad (algebraica) de λ es el entero positivo k más grande para el cual $(t - \lambda)^k$ es un factor de $f(t)$. (Friedberg et al., 2003b, p. 263)

Ejemplo 5.2.2. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ el polinomio característico es

$f(t) = -(t-3)^2(t-4)$, cuyos valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 4$, con multiplicidades 2 y 1 respectivamente. El ejemplo sólo demanda una concepción acción de valor propio.

La siguiente definición es motivada a partir de una reflexión descrita por los autores sobre el efecto de la multiplicidad de un valor propio en la diagonalización de un operador. Esta reflexión consiste básicamente en lo siguiente: si un operador T es diagonalizable entonces existe una base β de vectores propios de T, tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal en la que aparecen los valores propios correspondientes a los vectores propios de la base β; estos valores aparecen en la diagonal tantas veces como su multiplicidad, así que la base β contendrá tantos vectores propios (linealmente independientes) correspondientes a un mismo valor propio como la multiplicidad de éste. Por tal motivo, los autores señalan que es importante estudiar el número de vectores propios linealmente independientes asociados a un valor propio dado, es decir, centran la atención del lector en estudiar el espacio generado por los vectores propios correspondientes a un valor propio.

> **Definición.** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V, y λ un valor propio de T. Definimos $E_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\} = N(T - \lambda I_V)$. El conjunto E_λ es llamado el espacio propio de T correspondiente al valor propio λ. Análogamente, definimos el espacio propio de una matriz cuadrada A como el espacio propio de L_A. (Friedberg et al., 2003b, p. 264)

La comprensión de la definición de espacio propio (de un operador o matriz) requiere la construcción de un proceso cognitivo. En este proceso se coordinan el proceso valor y vector propio ($T(x) = \lambda x$) junto con el proceso de subconjunto de V, lo que permitiría al estudiante ver a E_λ como un subconjunto de vectores de V que satisfacen una propiedad muy especial. El lector con una concepción esquema de espacio vectorial puede verificar si este conjunto es un subespacio de V, en particular un espacio vectorial, y entonces buscar una base para este espacio. La búsqueda de esta base le permitiría pensar que el número de vectores propios linealmente independientes, correspondientes al valor λ, determinarán la dimensión del espacio E_λ. Los autores asumen que esto será evidente para el lector pues comentan que es claro que E_λ es un subespacio de V que consiste del vector cero y de los vectores propios de T correspondientes al valor propio λ, por lo tanto la dimensión de este espacio dependerá del número de vectores propios linealmente independientes para este valor propio. El siguiente teorema relaciona la multiplicidad de un valor propio con la dimensión de su correspondiente espacio propio.

> **Teorema 5.7.** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V, y λ un valor propio de T con multiplicidad m. Entonces $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m$. (Friedberg et al., 2003b, p. 264)

El teorema introduce la necesidad de concebir al espacio E_λ como un objeto, puesto que se requiere considerar su dimensión, además de compararla con la multiplicidad del valor propio λ. A su vez implica una desencapsulación de este objeto ya que es necesario pensar en los elementos (vectores propios) de E_λ que podrían formar una base para este espacio.

Los siguientes dos ejemplos (5.2.3 y 5.2.4) tienen la intención de mostrar al lector que el único caso de interés, para diagonalizar T, será cuando la dimensión de E_λ coincida con la multiplicidad del valor propio λ.

Ejemplo 5.2.3. A este ejemplo los autores habían hecho referencia anteriormente[24], cuando se mencionó que la condición de que el polinomio característico de un operador lineal se descomponga sobre el campo, no es una condición suficiente para garantizar su diagonalización. El ejemplo considera al operador $T\big(f(x)\big) = f'(x)$ sobre el espacio vectorial $P_2(R)$, y la base estándar β para este espacio. Con una concepción proceso de valor y vector propio se determinan los valores propios de la matriz asociada a este operador respecto a la base estándar; esta matriz es la siguiente:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[24] Este es el ejemplo 3 del texto, mencionado anteriormente.

Para esta matriz el polinomio característico resulta ser $-t^3$, así que el operador sólo tiene un valor propio ($\lambda = 0$) con multiplicidad 3. Al buscar los vectores propios para este valor se resuelve $T\big(f(x)\big) = f'(x) = 0$, que es equivalente a buscar el espacio propio correspondiente a este valor $E_\lambda = N(T - \lambda I) = N(T)$. Para este ejemplo el espacio propio resulta ser el espacio nulo del operador lineal T, el cual consiste de todos los polinomios constantes. Así que la dimensión del espacio propio E_λ es 1, ya que $\{1\}$ es una base para este espacio. Por consiguiente, este operador lineal no es diagonalizable, debido a que no fue posible encontrar una base formada de vectores propios para $P_2(R)$.

Ejemplo 5.2.4. En él se aborda el caso de un operador que tiene diferentes valores propios y con distinta multiplicidad. El operador a considerar es definido sobre R^3 de la siguiente forma:

$$T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1 + a_3 \\ 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ a_1 + 4a_3 \end{pmatrix}.$$

Para este operador la matriz asociada respecto a la base estándar β resulta ser la matriz $[T]_\beta$ que a continuación se muestra:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

El ejemplo demanda una concepción proceso de valor y vector propio, para determinar los valores propios de T (raíces del polinomio característico). Para este caso el polinomio característico del operador es $p(t) = -(t-5)(t-3)^2$, así que sus valores propios son 5 y 3 con multiplicidad 1 y 2, respectivamente. El conjunto de vectores propios correspondientes (espacio propio) para cada uno de los valores, es mostrado como el espacio solución de un sistema de ecuaciones lineales. Así que el conjunto de vectores propios para el valor $\lambda_1 = 5$ es determinado de la siguiente forma:

$$E_{\lambda_1} = N(T - \lambda_1 I) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

El espacio propio es el espacio nulo de la matriz mostrado $T - \lambda_1 I$, o bien es el espacio solución al sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{gathered}
-x_1 + x_3 = 0 \\
2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\
x_1 - x_3 = 0
\end{gathered}
$$

Por lo tanto el conjunto solución a este sistema de ecuaciones es generado por el conjunto:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Este conjunto es una base para el espacio $E_{\lambda_1} = N(T - \lambda_1 I)$, por lo que la dimensión de dicho espacio es 1. De forma análoga el espacio propio E_{λ_2}es el espacio solución al sistema:

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_3 = 0 \\
2x_1 + 2x_3 = 0 \\
x_1 + x_3 = 0
\end{gathered}
$$

cuyo conjunto solución es generado por los vectores:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Estos vectores forman una base para E_{λ_2}, así que la dimensión de este espacio es 2. Los autores evidencian que la dimensión de cada uno de los espacios propios, para cada valor propio, coincide con la multiplicidad de cada valor propio. Más aún, señalan que la unión de la base de estos espacios

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

es una base para todo el espacio R^3 y consecuentemente el operador T es diagonalizable.

El resultado obtenido en el ejemplo anterior es formalizado a través de los siguientes teoremas:

Teorema 5.8. Sea T un operador diagonalizable sobre un espacio vectorial V, y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ los distintos valores propios de T. Para cada $i = 1,2, \dots, k$, sea S_i un subconjunto finito linealmente independiente del espacio propio E_{λ_i}. Entonces $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ es un subconjunto de V linealmente independiente. (Friedberg et al., 2003b, p. 267)

Teorema 5.9. Sea T un operador diagonalizable sobre un espacio vectorial V tal que el polinomio característico de T se descompone. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ los distintos valores propios de T. Entonces

a) T es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad de λ_i es igual a $dim(E_{\lambda_i})$ para cada i.

b) Si T es diagonalizable y β_i es una base ordenada de E_{λ_i} para cada i, entonces $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$ es una base ordenada de V que consiste de vectores propios de T. (Friedberg et al., 2003b, p. 268)

En estos teoremas se fomenta una concepción objeto de espacio propio, pues se requiere comparar la dimensión de los diferentes E_{λ_i} con la multiplicidad de cada valor propio λ_i, para encontrar una base que permita diagonalizar al operador T. También se fomenta una concepción *proceso de base de vectores propios* para cada uno de estos espacios, ya que si cada S_i es un subconjunto linealmente independiente de vectores propios de E_{λ_i}, entonces el lector podrá determinar que el conjunto S_i es una base para este espacio propio, si el número de vectores propios de S_i coincide con la dimensión del espacio E_{λ_i}. Posteriormente este proceso debe encapsularse en un objeto (*objeto base ordenada de vectores propios*) para construir una base para el espacio vectorial V, la cual es formada por la unión de cada una de las bases encontradas, por separado, para cada espacio propio E_{λ_i}. La base encontrada $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$ es la base que permite diagonalizar al operador T.

A manera de resumen los autores proporcionan al lector una "prueba" para verificar si un operador es diagonalizable, la cual consiste en verificar dos condiciones, como se muestra a continuación.

Prueba de diagonalización

Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión n. Entonces T es diagonalizable si y sólo si las siguientes dos condiciones son ciertas.

1) El polinomio característico de T se descompone.
2) Para cada valor propio λ de T, la multiplicidad de λ es igual[25] a $n - rank(T - \lambda I)$. (Friedberg et al., 2003b, p. 269)

Aunque estas condiciones son dadas en términos de un operador T, los autores aclaran que estas mismas condiciones pueden aplicarse para el caso de matrices. Sin embargo, para reinterpretar esta prueba en términos de matrices se requiere que el lector tenga presente varias relaciones, una de ellas es la relación entre matrices y operadores lineales; además es necesario vincular los conceptos polinomio característico, multiplicidad y rango con los conceptos valor propio y vector propio, estos últimos son centrales para diagonalizar una matriz u operador lineal. Por lo antes mencionado, consideramos que el lector requiere de un esquema de valor y vector propio. Los siguientes ejemplos muestran una aplicación de esta prueba.

Ejemplo 5.2.5. Se desea determinar si la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3x3}(R).$$

Mediante una concepción acción de valor y vector propio se determina el polinomio característico de la matriz, en este caso es $\det(A - tI) = -(t-4)(t-3)^2$. La primera condición es satisfecha puesto que el polinomio se descompone y por tanto los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidades 1 y 2, respetivamente. Ahora se verifica la segunda condición; para

[25] La expresión $n - rank(T - \lambda I)$ indica la dimensión del espacio nulo de la transformación $T - \lambda I$; la cual, en este texto se representa por $Nullity(T - \lambda I)$. Por el teorema de la dimensión de espacios vectoriales se tiene: $Nullity(T - \lambda I) = dim(V) - rank(T - \lambda I)$

el caso de λ_1 se satisface esta condición debido a que la multiplicidad de este valor es 1. Pero, para el valor propio λ_2 esta condición no se satisface. La matriz que resulta de evaluar λ_2 en $A - \lambda I$ es:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango[26] 2, así que $3 - rank(A - \lambda_2 I) = 1$; este valor no coindice con la multiplicidad del valor propio λ_2. Por lo tanto, la matriz A no es diagonalizable. Es importante señalar que en este ejemplo los autores hacen uso del rango de una matriz en lugar de encontrar el espacio propio correspondiente a cada valor propio, como en los ejemplos anteriores. Esto muestra que el lector debe de poseer conocimiento de ello, por tal razón estos aspectos sobre matrices se abordan antes (capítulo 3 del texto) de tratar el tema de la diagonalización.

Ejemplo 5.2.6. Este ejemplo tiene dos partes; la primera es verificar que el operador $T\big(f(x)\big) = f(1) + f'(0)x + (f'(0) + f''(0))x^2$ definido sobre el espacio vectorial $P_2(R)$ es diagonalizable y, la segunda es encontrar la matriz diagonal para el operador. Como se ha visto en los ejemplos anteriores, primero el operador T es “trasladado” al terreno de las matrices, mediante la matriz asociada $[T]_\beta$, donde el cálculo de los valores y vectores propios es más fácil. Una vez encontrada una base para los espacios propios correspondientes a cada valor propio de la matriz $[T]_\beta$ en el espacio vectorial F^n, estos vectores se “trasladan” al espacio vectorial inicial en el cual está definido el operador lineal T, esto se hace mediante el isomorfismo ϕ_β del que se habló anteriormente. Esta transición entre las representaciones algebraica y matricial de un operador (transformación) es desarrollada y fortalecida a través de los ejemplos que los autores proponen. Con lo anterior en mente, primero se obtiene la matriz asociada al operador T respecto a la base estándar representada por α.

$$B = [T]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[26] El rango de una matriz es el número de vectores (renglón o columna) linealmente independientes.

Con una concepción acción de valor y vector propio se encuentran los valores propios de la matriz B, los cuales son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidades 1 y 2 respectivamente, que corresponden a las raíces del polinomio característico $-(t-1)^2(t-2)$. Para el valor propio λ_2 la segunda condición de la prueba de diagonalización se satisface ya que su multiplicidad es 1. En caso del valor propio λ_1 se tiene:

$$3 - rank(B - \lambda_1 I) = 3 - rank\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

así que la segunda condición también se satisface para este valor. Por lo tanto, la matriz B es diagonalizable, consecuentemente también el operador T. La segunda parte consiste en buscar una base γ para R^3 de vectores propios; ello requiere de encontrar el espacio propio de cada valor propio. Con una concepción proceso de espacio propio es posible determinar el conjunto de vectores propios para cada valor, así como una base para ellos:

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base para cada uno de los espacios propios es $\gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, respectivamente. Entonces una base de vectores propios para R^3 es formada por la unión de cada una de las bases anteriores:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora por medio del isomorfismo ϕ_β la base γ se transforma en una base para $P_2(R)$, en este caso la base correspondiente es

$$\beta = \{1, -x + x^2, 1 + x^2\},$$

donde es posible observar que los vectores en γ son los vectores coordenados relativos a la base α de los vectores en la base β. Respecto a esta base el operador T se representa en la siguiente matriz diagonal

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cuyas entradas de la diagonal principal corresponden a los valores propios del operador.

Estos últimos ejemplos podrían fomentar en el lector el aprendizaje de un algoritmo para determinar los valores y vectores propios de un operador o matriz, así como para diagonalizar el mismo o la misma. Esto se debe a que todo el desarrollo teórico, abordado anteriormente, concluye con una prueba que resume todo; la cual podría ser aplicada de manera mecánica y no consciente de todo lo involucrado en ella. Desde el punto de vista de la teoría APOE, el desarrollo de esquemas permite crear y/o fortalecer relaciones dentro del mismo concepto (en nuestro caso, los conceptos valor y vector propio) así como con otros conceptos. Los siguientes ejemplos son una aplicación de la diagonalización de un operador o matriz, donde por consiguiente están involucrados los conceptos valor y vector propio, pues recordemos que éstos surgen, al menos en este texto, en la solución al problema de la diagonalización de un operador lineal.

Ejemplo 5.2.7. El ejemplo muestra cómo calcular la potencia n de una matriz A, donde n es un entero positivo. La matriz es dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ésta es una matriz cuadrada de $2x2$ cuyas entradas están en R. La estrategia a seguir es demostrar que la matriz dada es diagonalizable; si es diagonalizable entonces es similar a una matriz diagonal D y se relacionan por medio de una matriz Q invertible tal que $D = Q^{-1}AQ$, esto por la definición de matrices similares. Se define al operador lineal $L_A: R^2 \to R^2$ como $L_A(x) = Ax$, por lo que se busca diagonalizar a L_A. Una concepción acción de valor y vector propio permite al lector encontrar los valores y vectores propios del operador L_A, que equivale a encontrar los valores y vectores propios de la matriz A, para lo cual se conoce un procedimiento y además la matriz A es específica;

de esta forma se determina que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Con una concepción proceso de espacio propio se determinan los espacios propios E_{λ_1} y E_{λ_2} correspondientes a cada uno de los valores propios encontrados, así mismo con una concepción proceso de base el lector puede determinar una base para ellos. Una concepción objeto de base de vectores propios permite construir una base para el espacio R^2, mediante la unión de las bases encontradas para cada uno de los espacios propios. Las bases para cada uno de los espacios propios son representadas por γ_1 y γ_2, respectivamente. Explícitamente son dadas por:

$$\gamma_1 = \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ y } \gamma_2 = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 = \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Por lo tanto, γ es una base para R^2. La matriz Q es construida[27] con los vectores de la base γ, por lo que se obtiene la matriz

$$Q = \begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix},$$

con los vectores de γ como columnas. Siendo que el operador L_A es diagonalizable, también lo es la matriz A, entonces es similar a una matriz diagonal D tal que se satisface la siguiente relación:

$$Q^{-1}AQ = D = [L_A]_\gamma = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

Para encontrar A^n se despeja A de la expresión anterior obteniendo $A = QDQ^{-1}$. Consecuentemente se obtiene:

$$A^n = (QDQ^{-1})^n.$$

[27] La construcción de la matriz Q se apoya en un resultado del capítulo 2 de libro, el cual dice*: "Corolario. Sea $A \in M_{nxn}(F)$ y γ una base ordena para F^n. Entonces $[L_A]_\gamma = Q^{-1}AQ$ donde Q es una matriz de nxn cuya j-ésima columna es el j-ésimo vector de γ."* (Friedberg et al., 2003b, p. 115)

La deducción de la igualdad $A^n = QD^nQ^{-1}$ es mostrada en el libro (Friedberg et al., 2003b, p. 272), esta igualdad permite realizar el cálculo directo de A^n, obteniendo:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2-2^{n+1} \\ -1+2^n & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

4.3.2.1 Aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales

La siguiente es una aplicación de la diagonalización de operadores, en la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, el cual no es marcado como ejemplo. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x'_1 & = & 3x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 & = & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x'_3 & = & -x_1 - x_2 + x_3 \end{array}$$

donde para cada $i = 1, 2, 3$, $x_i = x_i(t)$ es una función diferenciable de valor real en la variable t. La solución trivial del sistema es la función $x_i(t)$ igual a cero para cada una de las i. La estrategia seguida en la solución es similar a la del ejemplo anterior. Primero el sistema de ecuaciones es trasladado al contexto de matrices, donde A es la matriz de coeficientes del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y se define la función diferenciable $x: R \to R^3$ como:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales inicial es equivalente al siguiente sistema:

$$x' = Ax$$

donde x' denota la derivada de la función $x(t)$. Después se busca diagonalizar a la matriz A de coeficientes, esto implica una concepción proceso de valor y vector propio, y también una concepción proceso de espacio propio y una concepción proceso de base para determinar una base de vectores propios para el espacio R^3. Los autores asumen que esto no será problema para el lector puesto que se omiten los detalles y sólo muestran la matriz Q (la matriz formada por vectores propios, como en el ejemplo anterior) y la matriz diagonal D que resulta de la diagonalización de A.

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dado que A y D son matrices similares están relacionadas por medio de la matriz Q, entonces $Q^{-1}AQ = D$. Despejando A de la expresión anterior y sustituyendo en el sistema $x' = Ax$ se obtiene que $x' = QDQ^{-1}x$, equivalentemente $Q^{-1}x' = DQ^{-1}x$. El siguiente paso en la solución es hacer una especie de cambio de variable, definiendo la función $y: R \to R^3$ como $y(t) = Q^{-1}x(t)$; al lector se le pide que demuestre que la función $y(t)$ es diferenciable y que $y' = Q^{-1}x'$. Esto permite transformar el sistema $Q^{-1}x' = DQ^{-1}x$ en el sistema $y' = Dy$ donde es más fácil encontrar la solución del sistema inicial. Lo anterior demanda en el lector una concepción objeto del producto de una matriz y un vector, de esta forma es consciente que $Q^{-1}x$ y $Q^{-1}x'$ son vectores en R^3, mismos que puede "etiquetar" como y y y', respectivamente, para generar el sistema $y' = Dy$.

$$\begin{pmatrix} {y_1}'(t) \\ {y_2}'(t) \\ {y_3}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1(t) \\ 2y_2(t) \\ 4y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Esto genera tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} {y_1}' &= 2y_1 \\ {y_2}' &= 2y_2 \\ {y_3}' &= 4y_3 \end{aligned}$$

que se pueden resolver individualmente; por el ejemplo 5.1.3 (visto anteriormente) se obtiene que la solución general a cada ecuación es $y_1(t) = c_1e^{2t}$, $y_2(t) = c_2e^{2t}$ y $y_3(t) = c_3e^{4t}$, donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias. Finalmente, despejando x de $y(t) = Q^{-1}x$ se obtiene la solución general al sistema inicial:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = x(t) = Qy = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 e^{2t} - c_3 e^{4t} \\ -c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{4t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Esta solución puede ser escrita como:

$$x(t) = e^{2t} \left[c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + e^{4t} \left[c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

donde los vectores dentro de los corchetes son vectores propios arbitrarios pertenecientes a los espacios propios E_{λ_1} y E_{λ_2}, respectivamente. Por lo tanto, si se tiene una *concepción objeto de vector propio*, el lector puede operar los vectores (en los corchetes) y ser consciente de que la combinación lineal de dos vectores propios, correspondientes a un mismo valor propio, genera otro vector propio dentro del mismo espacio propio; similarmente para la multiplicación de un vector propio por un escalar. De esta forma la solución anterior puede reescribirse de una forma más simple:

$$x(t) = e^{2t} z_1 + e^{4t} z_2.$$

La expresión anterior implica ser consciente de que los vectores z_1 y z_2 son vectores propios arbitrarios tales que $z_1 \in E_{\lambda_1}$ y $z_2 \in E_{\lambda_2}$.

4.3.2.2 Sumas directas

Esta subsección es marcada como opcional dentro la sección 5.2 del texto. Los autores primero introducen la definición de suma de subespacios, posteriormente la de suma directa, seguido de un ejemplo para cada definición. También se presenta un teorema donde se muestran enunciados equivalentes a la definición de suma directa. Dado que nuestro interés está en conocer la relación entre los conceptos valor y vector propio y la suma directa de subespacios, nos centraremos en lo que a ello concierne[28]. A continuación se muestra la definición de suma directa de subespacios.

[28] Si se desea conocer los ejemplos y el resultado mencionado pueden revisarse las páginas 274-278 del libro.

Definición. Sean $W_1, W_2, \dots, W_k$ subespacios de un espacio vectorial V. Diremos que V es la suma directa de los subespacios $W_1, W_2, \dots, W_k$ y lo denotaremos como $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$, si

$$V = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

y $W_j \cap \sum_{i \neq j} W_i = \{0\}$ para cada j $(1 \leq j \leq k)$. (Friedberg et al., 2003b, p. 275)

En esencia la definición de suma directa dice que cualquier vector en V puede escribirse de forma única sumando elementos de cada subespacio W de V. El siguiente teorema relaciona el concepto de suma directa de subespacios con los conceptos valor y vector propio.

Teorema 5.11. Un operador lineal T sobre un espacio vectorial V de dimensión finita es diagonalizable si y sólo si V es la suma directa de los espacios propios de T. (Friedberg et al., 2003b, p. 278)

El teorema requiere concebir al espacio propio, asociado a cada uno de los distintos valores propios de T, como un objeto cognitivo, puesto que se requiere realizar la suma directa de cada uno de estos espacios; además, se debe pensar en una base para cada uno de estos subespacios de V, por lo que también se requiere de una concepción proceso de base. Posteriormente es necesario contar con una concepción objeto de base ordenada, esto para determinar que la unión de las bases de cada espacio propio es una base para todo el espacio vectorial V, lo que implica que todo elemento de V puede escribirse de forma única, y entonces el espacio vectorial V es la suma directa de los espacios propios. También dentro del teorema está implícita una concepción proceso de valor y vector propio, ya que si el operador T es diagonalizable deben de existir valores propios de T cuyo conjunto de vectores propios, correspondientes a cada valor, generan los diferentes espacios propios de T.

Ejemplo 5.2.10. Este ejemplo tiene como propósito mostrar la aplicación del teorema anterior; para ello se considera el operador lineal T sobre R^4 definido por $T(a, b, c, d) = (a, b, 2c, 3d)$. Para encontrar los valores y vectores propios del operador lineal, primero el lector requiere de encontrar la matriz asociada a este operador respecto a una base para R^4. Generalmente en el texto, para tal fin se utiliza la base estándar del espacio vectorial en cuestión; en este caso, la matriz asociada al operador T con respecto a la base estándar sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, con una concepción acción de valor y vector propio el lector puede determinar los respectivos valores y vectores de esta matriz; obteniendo que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$ son los valores propios del operador T, el primero de ellos con multiplicidad 2. Después de determinar el conjunto de vectores propios para cada uno de estos valores propios, es necesaria una concepción proceso de espacio propio para obtener los espacios propios generados por los diferentes conjuntos de vectores propios, de esta forma se obtiene que los subespacios:

$$W_1 = \{(a, b, 0,0): a, b \in R\}, W_2 = \{(0, 0, c, 0): c \in R\} \text{ y } W_3 = \{(0, 0, 0, d): d \in R\},$$

son los espacios propios de T. Además, se requiere de una concepción objeto de espacio propio para comparar la dimensión de cada espacio propio con la multiplicidad de los valores propios y verificar que el operador es diagonalizable cuando éstas coinciden (dimensión y multiplicidad). Finalmente, el lector puede escribir al espacio vectorial R^4 como la suma directa de los tres subespacios propios obtenidos, así que:

$$R^4 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3.$$

4.3.2.3 Ejercicios

Esta sección consta de 23 ejercicios propuestos al lector, los cuales hemos agrupado de la siguiente forma de acuerdo a las construcciones mentales requeridas y/o promovidas en su solución. En esta sección (5.2), como hemos visto, los conceptos valor y vector propio se relacionan con otros conceptos como espacio propio, dimensión, suma directa de subespacios, por lo que la mayoría de los ejercicios emplean estos conceptos ya sea en su formulación o en su solución.

Tabla 4.2. Agrupación de los ejercicios de la sección 5.2, según la construcción mental promovida y/o requerida en su solución

Construcción mental promovida y/o requerida	Cantidad de ejercicios	Porcentaje[29]
Acción	7	30.5%
Proceso	1	4.5%
Objeto	3	13%
Esquema	6	26%
Otra[30]	6	26%

Acción

En la sección se abordaron ejemplos con aplicaciones del proceso de diagonalización, en el cual intervienen los conceptos valor y vector propio, de un operador lineal o matriz; en ellos se desarrollaron algoritmos para resolver problemas similares. Por lo anterior algunos de los ejercicios propuestos al lector, sólo requieren de aplicar estos algoritmos utilizados en el texto. Por lo tanto, sólo demandan en el estudiante una concepción acción de éstos, como se muestra a continuación.

2). Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{nxn}(R)$, determine si A es diagonalizable y si A es diagonalizable, encuentre una matriz Q invertible y una matriz diagonal D tal que $D = Q^{-1}AQ$.

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots d)\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$ (Friedberg et al., 2003b, p. 279)

3). Para cada uno de los siguientes operadores T sobre el espacio vectorial V, determine si T es diagonalizable y si es así, encuentre una base β para V tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal.

[29] El porcentaje mostrado es una aproximación, ya que se aplicó el redondeo de las cantidades.

[30] En esta categoría nos referimos a los ejercicios que en su formulación y/o solución no utilizan los conceptos de valor y vector propio, como es el caso de los ejercicios sobre sumas directas de subespacios.

(a) $V = P_3(R)$ y T es definido por $T(f(x)) = f'(x) + f''(x)$, respectivamente.

(e) $V = C^2$ y T es definido por $T(z, w) = (z + iw, iz + w)$. (Friedberg et al., 2003b, p. 280)

En estos ejercicios (2 y 3) se presentan varios incisos con diferentes matrices y operadores lineales, con el propósito de aplicar el criterio de diagonalizabilidad desarrollado en esta sección. La forma de proceder en estos ejercicios es similar a los ejemplos 5.2.5 y 5.2.6; por lo tanto, la construcción mental requerida en estos ejercicios es una concepción acción de valor y vector propio; primero se deben encontrar los valores propios para cada una de las matrices o los operadores, posteriormente una base de vectores propios, si es que existe, que permita diagonalizar la matriz u operador en cuestión.

14). Encuentre la solución general a cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones (Friedberg et al., 2003b, p. 281)

a)

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 3x - y \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x'_1 &= 8x_1 + 10x_2 \\ x'_2 &= -5x_1 - 7x_2 \end{aligned}$$

El algoritmo para encontrar la solución a cada uno de los sistemas de ecuaciones es similar al único ejemplo mostrado en “aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales”, por lo que el ejercicio sólo demanda una concepción acción de valor y vector propio; como en los dos ejercicios anteriores, se procede a encontrar los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes de cada sistema de ecuaciones, esto permite diagonalizar esta matriz. El resto de la solución, como se mostró en el ejemplo, es hacer manipulaciones algebraicas con la matriz diagonal encontrada y la matriz inicial, para expresar el sistema inicial en un sistema más simple que permita encontrar la solución.

Proceso

15). En este ejercicio se proporciona el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{ccc} x'_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{array}$$

y se pide "probar que la función diferenciable $x: R \to R^n$ es una solución al sistema si y sólo si es de la forma:

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}z_1 + e^{\lambda_2 t}z_2 + \cdots + e^{\lambda_k t}z_k,$$

donde $z_i \in E_{\lambda_i}$ con $i = 1,2,\dots,k$" (Friedberg et al., 2003b, p. 282).

A diferencia del ejercicio 14) (anterior), en este sistema no se proporcionan de forma explícita los coeficientes del sistema, lo que genera la siguiente matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz debe ser diagonalizada para encontrar la solución al sistema de ecuaciones diferenciales. Esto implica encontrar los valores y vectores propios de esta matriz, por lo tanto el ejercicio demanda una concepción proceso de valor y vector propio, puesto que el lector debe pensar en el vector propio como un vector general del espacio vectorial que satisface $Av = \lambda v$. En el ejercicio se hace referencia a que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los distintos valores propios de la matriz A. Es importante señalar la relación entre los problemas 14) y 15), pues podemos inferir que la intención de los autores es que primero el lector repita el algoritmo, de encontrar la solución a sistemas de ecuaciones, en sistemas específicos de ecuaciones diferenciales donde los coeficientes de las variables (funciones) y el número de ecuaciones son conocidos, antes de abordar un caso más general, donde los coeficientes y el número de ecuaciones del sistema no son dados explícitamente. Este procedimiento coincide con las intenciones didácticas de la teoría APOE, pues se sugiere partir de *acciones* específicas sobre objetos, las cuales mediante la repetición y reflexión sobre ellas permite interiorizarlas en un *proceso* (cognitivo) donde el individuo tiene mayor control de ellas.

Objeto

> **1).** b) Dos distintos vectores propios correspondientes a un mismo valor propio son siempre linealmente independientes. (Friedberg et al., 2003b, p. 279)

El inciso anterior corresponde a uno de los enunciados de falso y verdadero que se presentan en el ejercicio 1. Con el propósito de que el lector responda al enunciado de forma acertada, requiere pensar en todos los vectores propios que pudieran existir para un mismo valor propio (λ). Esto le permitirá compararlos entre sí y determinar si éstos son siempre linealmente independientes, o bien determinar cuándo es que ellos pueden ser linealmente dependientes.

> **12).** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita.
>
> a) Recuerde que para cualquier valor propio λ de T, λ^{-1} es un valor propio de T^{-1} (Ejercicio de la sección 5.1). Demuestre que el espacio propio de T correspondiente a λ es el mismo espacio propio de T^{-1} correspondiente a λ^{-1}. (Friedberg et al., 2003b, p. 281)

La solución a este ejercicio requiere demostrar que los espacios propios E_λ de T y $E_{\lambda^{-1}}$ de T^{-1} son iguales, lo cual matemáticamente se demuestra por medio de una doble contención de los conjuntos. E_λ y $E_{\lambda^{-1}}$ son conjuntos (específicamente son subespacios vectoriales) de vectores propios, por lo que un vector propio debe ser concebido en la mente del lector como un elemento de estos conjuntos. Concebir al vector propio como un objeto permitirá, al lector, demostrar que un elemento en E_λ es también un elemento de $E_{\lambda^{-1}}$ y viceversa. De la misma manera, comparar los dos espacios propios requiere de una concepción objeto.

Esquema

6).

a) Justifique la prueba de diagonalización y el método de diagonalizacion establecidos en esta sección.
b) Formule los resultados en a) para matrices. (Friedberg et al., 2003b, p. 280)

El ejercicio demanda en el estudiante (lector) una reflexión profunda, no sólo superficial[31], de los resultados vistos en la sección. El establecer las relaciones entre los conceptos de valor y vector propio y su papel dentro del proceso de diagonalización de un operador o matriz, permitirá justificar que la existencia de valores y vectores propios es esencial en la construcción de una base que permita lograr tal objetivo. Así mismo, el estudiante será consciente del porqué de la necesidad de introducir los conceptos de polinomio característico, multiplicidad, espacio propio, y la relación entre ellos.

8). Suponga que $A \in M_{nxn}(F)$ tiene dos distintos valores propios, λ_1 y λ_2, y que la $dim\left(E_{\lambda_1}\right) = n - 1$. Demuestre que A es diagonalizable. (Friedberg et al., 2003b, p. 280)

En este ejercicio intervienen los conceptos de valor y vector propio, espacio propio, dimensión, base y diagonalización. Demostrar que la matriz A es diagonalizable requiere encontrar una base formada de vectores propios de A. El enunciado supone dos valores propios distintos λ_1 y λ_2 (concepción objeto de valor propio), los cuales generan espacios propios distintos E_{λ_1}y E_{λ_2}(concepción objeto de espacio propio). De estos dos espacios propios se sabe que $dim\left(E_{\lambda_1}\right) = n - 1$; siendo que la dimensión de F^n es n, implica que la dimensión de E_{λ_2}es 1, entonces al menos posee un vector propio. Una concepción objeto de base permite al lector pensar en las bases para estos subespacios y unirlas para crear una base (se debe verificar que la unión de estas bases sea

[31] En el sentido de que no sólo se haya aprendido de memoria los teoremas o proposiciones vistos en las dos secciones.

un conjunto linealmente independiente y genere el espacio vectorial) de vectores propios, para el espacio vectorial F^n la cual diagonaliza a la matriz A.

4.3.3 Límites de matrices y cadenas de Markov

Esta sección del capítulo es marcada como opcional, por lo que el lector puede no abordarla. En ella se desarrolla una aplicación de la diagonalización de matrices al cálculo de límites de matrices y a procesos estocásticos: cadenas de Markov. Los autores asumen que el lector tiene conocimiento sobre límite de sucesiones de números reales y de la aritmética básica de los números complejos, la cual puede revisarse en el apéndice D del texto.

A partir del límite de una sucesión de números reales, los autores introducen la noción de límite de una sucesión de números complejos, para después dar la definición de límite de una sucesión de matrices cuyas entradas son números complejos. La definición establece que una sucesión de matrices converge a un límite L, el cual es una matriz, si cada una de las sucesiones de números, definidas en cada una de las entradas de la matriz, converge[32]. El siguiente ejemplo ilustra la definición presentada en el texto.

Ejemplo 5.3.1. Se pide calcular el límite de la siguiente matriz

$$A_m = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m} & \left(-\frac{3}{4}\right)^m & \frac{3m^2}{m^2+1} + i\left(\frac{2m+1}{m-1}\right) \\ \left(\frac{i}{2}\right)^m & 2 & \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \end{pmatrix}.$$

El límite de esta matriz existe si cada una de las sucesiones: $1-\frac{1}{m}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^m$, $\frac{3m^2}{m^2+1} + i\left(\frac{2m+1}{m-1}\right)$, $\left(\frac{i}{2}\right)^m$, 2, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ existe, cuando $m \to \infty$. En este caso el límite de cada una de las sucesiones anteriores existe, por lo tanto, el límite de la matriz A_m existe cuando $m \to \infty$, y es igual a la matriz:

[32] Omitiremos algunos de los resultados que se desarrollan previo a la aplicación de la diagonalización de matrices, ya que nuestro interés es dónde intervienen los conceptos valor y vector propio. Si se desea conocer todos los detalles puede consultarse la sección 5.3 del texto, pp. 283-312.

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3+2i \\ 0 & 2 & e \end{pmatrix}.$$

Seguido de esto se muestra un resultado análogo a $\lim_{m\to\infty} ca_m = c \lim_{m\to\infty} a_m$, que se tiene para el caso de sucesiones de números reales, en el contexto de matrices. En lo sucesivo del texto se busca determinar las condiciones que permitan garantizar que el límite[33] de una sucesión de matrices, cuyas entradas son números complejos, exista. Es aquí donde los conceptos de valor propio y vector propio entran en juego. Antes de enunciar el primer teorema que involucra los conceptos de valor propio y vector propio, se define el conjunto S de la siguiente forma:

$$S = \{\lambda \in C : |\lambda| < 1 \ o \ \lambda = 1\}.$$

Este conjunto consta, geométricamente, del número complejo 1 y del interior del disco unitario centrado en el origen, donde $|\lambda|$ indica el módulo, o valor absoluto, de un número complejo. El texto emplea el término de valor absoluto de un número complejo, suponiendo que esto no generará confusión en el lector, sin embargo, se debe tener presente la diferencia que existe entre el valor absoluto de un número real y el de un número complejo.

> **Teorema 5.13.** Sea A una matriz cuadrada con entradas complejas. Entonces $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe si y sólo si las siguientes dos condiciones son ciertas:
>
> a) Cada valor propio de A está contenido en S.
>
> b) Si 1 es un valor propio de A, entonces la dimensión del espacio propio correspondiente a 1 es igual a la multiplicidad de 1 como valor propio de A. (Friedberg et al., 2003b, p. 285)

La demostración de este teorema no se incluye en esta sección, ya que requiere de otros conceptos que se abordarán en los capítulos sucesivos del texto. Al respecto los autores señalan que una demostración del teorema basada en la teoría de formas canónicas de Jordan, se verá en un ejercicio

[33] El límite de la sucesión de interés en esta sección es: $\lim_{m\to\infty} A^m$.

del capítulo 7 (formas canónicas), donde se aborda este tema; también proporcionan una referencia externa donde puede revisarse esta demostración.

El teorema está fomentando un esquema de valor propio y vector propio, ya que por un lado se debe encontrar los valores propios de la matriz A y determinar si el valor absoluto de cada uno de estos valores está dentro del conjunto S, lo que implica que deben ser percibidos como un objeto por el estudiante. Por otra parte, cuando un valor propio de la matriz A es 1, se debe comparar la dimensión del espacio propio generado para este valor con la multiplicidad algebraica del mismo. Lo verificación de lo anterior permitirá determinar si el límite de A^m existe; para tal caso el estudiante requiere de una concepción proceso de límite de sucesión de matrices.

Como se mencionó anteriormente los autores no proporcionan la demostración del Teorema 5.13, pero sí muestran al lector mediante algunos ejemplos la necesidad de las dos condiciones para garantizar la existencia de $\lim_{m\to\infty} A^m$. La justificación de la primera condición a) es de tipo teórico, que requiere de una concepción objeto de valor y vector propio. La justificación se basa en una contradicción matemática; para ello se supone que λ es un valor propio de A tal que $\lambda \notin S$ y el $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe, entonces si v es un valor propio correspondiente al valor λ, se tiene:

$$\lim_{m\to\infty} A^m\, v = \lim_{m\to\infty} (\lambda^m v).$$

El limite anterior no existe debido a que la sucesión λ^m diverge, pues $\lambda > 1$; lo que contradice la suposición inicial.

Para mostrar la necesidad de la condición del inciso b), los autores muestran una matriz que no satisface esta condición:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz B no satisface la condición *b)* del Teorema 5.13; esto puede verificarse con una concepción proceso de valor y vector propio (encontrar los valores y vectores propios de B). Asimismo una concepción objeto de espacio propio permite corroborar que la multiplicidad algebraica del valor propio $\lambda = 1$ es dos, mientras que la dimensión del espacio propio correspondiente a este valor es 1. Una concepción proceso de sucesión de matrices permite al lector comprender que el término m-ésimo de la sucesión B^m, con m positivo y entero, puede verse como:

$$B^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\lim_{m\to\infty} B^m$ no existe, ya que m diverge. Lo anterior muestra al lector que existen matrices para las cuales la sucesión de potencias de la matriz $(A, A^2, A^3, \ldots)$ no converge. Sin embargo, como señalan los autores: "[en] la mayoría de las aplicaciones que involucran límites de matrices, las matrices son diagonalizables" (Friedberg et al., 2003b, p. 286). Un esquema de valor y vector propio, permite al lector ser consciente que si una matriz es diagonalizable entonces la multiplicidad (algebraica) de cada uno de sus valores propios coincide con la dimensión de sus correspondientes espacios propios; por lo que en caso de que la matriz A sea digonalizable la condición *b)* del Teorema 5.13 se satisface automáticamente. Con la reflexión anterior en mente, se presenta el siguiente teorema.

Teorema 5.14. Sea $A \in M_{nxn}(C)$ que satisface las siguientes dos condiciones.

i). Cada valor propio de A está contenido en S.

ii). A es diagonalizable.

Entonces $\mathop{lim}_{m\to\infty} A^m$ existe. (Friedberg et al., 2003b, p. 286)

El teorema fomenta el esquema de valor y vector propio, puesto que la matriz A sea diagonalizable implica que: existen sus valores y vectores propios, que la dimensión de cada uno de los espacios propios correspondientes a cada valor propio coincide con la multiplicidad de estos valores, además de que es posible construir una base de vectores propios para C^n tal que la matriz A sea diagonal respecto a esta base. Lo anterior permite al estudiante ser consciente de que la matriz A es similar a una matriz diagonal D, por lo tanto, existe una matriz Q(formada de vectores propios) invertible tal que $D = Q^{-1}AQ$. Esta matriz diagonal D, cuyas entradas en la diagonal son los valores propios de A, debe percibirse como un elemento de la sucesión $D, D^2, D^3, \ldots, D^m$, la cual converge ya que las sucesiones de valores propios en la diagonal λ_i^m converge por el hecho de que los valores propios de A están en el conjunto S. Esta misma concepción objeto de D, permite calcular $\lim_{m\to\infty} A^m$ utilizando la relación $D = Q^{-1}AQ$.

Para ilustrar el teorema anterior los autores proporcionan al estudiante la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{15}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es diagonalizable, lo que implica que es similar a una matriz diagonal D tal que $D = Q^{-1}AQ$, donde las columnas de Q son vectores propios de A. En este caso las matrices Q, D y la matriz D^m, que representa la m-ésima potencia de D, son dadas por:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ y } D^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^m & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^m \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, un cálculo directo muestra

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty} (QDQ^{-1})^m = \lim_{m\to\infty} QD^mQ^{-1} = Q\left(\lim_{m\to\infty} D^m\right)Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seguido de este ejemplo, el cual es una aplicación directa del teorema anterior, los autores presentan al lector dos problemas como ejemplos, cuya solución requiere del cálculo del límite de una sucesión de matrices ($\lim_{m\to\infty} A^m$). Estos problemas están relacionados con procesos estocásticos que involucran *Cadenas de Markov*. Por tal razón, los autores introducen algunos conceptos básicos de probabilidad en el proceso de solución a los problemas.

La matriz A describe la siguiente situación:

> [S]uponga que la población de cierta área metropolitana se mantiene constante, pero hay un movimiento continuo de personas entre la ciudad y los suburbios. Las entradas

> de la matriz A representan las probabilidades de que alguien que esté viviendo en la ciudad o en los suburbios al primero de Enero, esté viviendo en alguna de estas regiones el primero de Enero del siguiente año. (Friedberg et al., 2003b, p. 288)

Esta matriz se representa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{Ciudadanos que actualmente viven en la ciudad} & \text{Ciudadanos que actualmente viven en los suburbios} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Vivir en la ciudad el siguiente año} \\ \text{Vivir en los suburbios el siguiente año} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.90 & 0.02 \\ 0.10 & 0.98 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Las entradas de la matriz A, como ya se mencionó, representan la probabilidad de que un individuo que vive en la ciudad o en los suburbios, esté viviendo en la misma región o en otra (ciudad o suburbios) el siguiente año. Por ejemplo, la probabilidad de que un individuo que vive en la ciudad, esté viviendo el siguiente año en los suburbios es de 0.10, que corresponde a la entrada A_{21} de la matriz A, similarmente para las demás entradas. En este contexto tanto la matriz como sus componentes toman un significado y nombre especial; por ello los autores emplean la terminología correspondiente, como lo son los términos matriz estocástica, vector de probabilidad, estado, paso (etapa).

Tres de los términos anteriores son usados de manera genérica de la siguiente forma. Una matriz M de nxn es llamada *matriz de transición o matriz estocástica* si sus entradas son no negativas y sus columnas suman 1. Sus "renglones y columnas corresponden a n estados, y la entrada M_{ij} representa la probabilidad de moverse del estado j al estado i en un paso" (Friedberg et al., 2003b, p. 288). Posteriormente, se describe la relación entre la multiplicación usual de matrices con el cálculo de probabilidades de pasar de un estado a otro después de cierto número de *pasos*; es decir, si se desea conocer la probabilidad de que un individuo que vive en la ciudad y que después de dos años esté viendo en los suburbios, basta con calcular A^2 y observar la entrada de la matriz que relaciona estos dos *estados*.

Otro factor que es agregado a este contexto es el porcentaje de la población que vive en el área metropolitana. Para la situación anterior se menciona que en el año 2000, 70% de la población vivía en la ciudad, mientras que el 30% restante en los suburbios. Esta relación se expresa por medio del siguiente vector.

$$\begin{array}{l} \text{Proporción de residentes en la ciudad} \\ \text{Proporción de residentes en los suburbios} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.30 \end{pmatrix} = P$$

El vector P es denominado *vector de probabilidad* ya que sus entradas son distintas de cero y suman 1. La siguiente parte requiere que el lector posea una *concepción proceso de multiplicar una matriz por un vector*, pues los autores se refieren a AP como el vector cuyas componentes (entradas) muestran la proporción[34] de la población que estará viviendo para el 2001 en la ciudad y los suburbios, respectivamente, es decir, después de un paso, que en este ejemplo son años. Esto se extiende para los vectores A^2P y A^mP. El comparar las entradas de los vectores AP y A^2P:

$$AP = \begin{pmatrix} 0.636 \\ 0.364 \end{pmatrix}, A^2P = \begin{pmatrix} 0.57968 \\ 0.42032 \end{pmatrix},$$

permite, después de todo este preámbulo, plantear la siguiente pregunta al lector: ¿La población de la ciudad eventualmente se agotará si esta tendencia continúa? En otras palabras, se desea conocer cuáles son las entradas del vector A^mP, cuando m se hace muy grande. El resolver el cuestionamiento planteado requiere que el estudiante emplee un esquema de valor y vector propio, más aun, la solución encontrada requiere ser interpretada por el estudiante dentro del contexto planteado, no únicamente proporcionar un cálculo.

[34] Los autores aclaran que a menudo es útil considerar las entradas de una matriz o vector de probabilidad como porcentajes en lugar de probabilidades.

$$\lim_{m\to\infty} A^m P = LP = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

En la expresión anterior, L es la matriz resultante de calcular $\lim_{m\to\infty} A^m$. Por lo tanto, el vector LP muestra que eventualmente una sexta parte de la población estará viviendo en la ciudad. Además, los autores hacen notar que el vector LP no sólo es un vector de probabilidad sino que también es un vector propio de la matriz A, correspondiente al valor propio 1. Dado que el espacio propio correspondiente al valor 1 de la matriz A (de este ejemplo) tiene dimensión 1, esto garantiza que el vector LP es único y no depende del vector P de probabilidad. Esto se le pide al lector que lo demuestre, como ejercicio, junto con otros resultados correspondientes a matrices de transición y al vector de probabilidad como: el producto de dos matrices de transición es otra matriz de transición, que el producto de una matriz de transición y un vector de probabilidad es otro vector de probabilidad; estos resultados no involucran los conceptos de valor y vector propio, por tal motivo no los presentamos aquí.

Este primer ejemplo presentado por los autores, es nombrado un *proceso estocástico*, el cual consiste en la transición de estados entre los elementos de un conjunto, donde el cambio a un estado particular a otro es descrito por la probabilidad (de transición). Esta probabilidad puede depender de varios factores como por ejemplo: del tiempo, de todos los estados previos, entre otros. Por el contrario, si un proceso sólo depende de dos factores (generalmente del estado en cuestión y el tiempo) se denomina *proceso de Markov*. Si el número de estados posibles, en los que puede transitar un objeto[35], es finito entonces se nombra *cadena de Markov*. El ejemplo anterior, es una cadena de Markov de dos estados (vivir en la ciudad o en los suburbios).

[35] Aquí nos referimos a objeto como cualquier cosa física o evento del que se desea conocer la probabilidad de tránsito de un estado a otro en un determinado periodo de tiempo.

El otro ejemplo, donde se aplica el cálculo de $\lim_{m\to\infty} A^m$, es similar al anterior. El contexto cambia ligeramente, aunque se sigue abordando una cadena de Markov; ahora la matriz de probabilidad es una matriz de $4x4$, que representa la siguiente situación:

> A cierta comunidad colegial le gustaría obtener información sobre la probabilidad de que algunos estudiantes en varias categorías se gradúen. La escuela clasifica a un estudiante como freshman o sophomore[36] dependiendo del número de créditos que el estudiante ha aprobado. Los datos de la escuela indican que, de un semestre de otoño al siguiente, 40% de los sophomores se graduará, 30% seguirá siendo sophomore, y 30% desertará. Para freshmen, los datos muestran que 10% se graduará el siguiente otoño, 50% será sophomores, 20% seguirá siendo freshmen, y 20% desertará. Durante el presente año, 50% de los estudiantes en la escuela son sophomores y 50% son freshmen. (Friedberg et al., 2003b, p. 291)

Lo anterior se representa mediante una cadena de Markov con cuatro estados posibles para un estudiante, estos son: 1) que se gradúe, 2) que sea sophomore, 3) que sea freshman y 4) que deserte; y la matriz de transición correspondiente es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El orden de representación de los estados en la matriz corresponde a la numeración anterior de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, aunque esto no es aclarado en el texto, por lo que el lector debe tener la pericia para determinarlo según las entradas de la matriz. Las cuestiones que en este problema interesan resolver son tres:

[36] Términos ingleses para designar a los estudiantes de primer y segundo año, respectivamente.

1) Conocer el porcentaje de estudiantes que habrá en cada una de estas categorías (graduados, sophomores, freshmen, desertores) para el siguiente otoño.
2) Conocer el porcentaje de estudiantes en estas categorías dentro de dos años.
3) Conocer la probabilidad de que uno de sus actuales estudiantes se gradúe.

Para responder estas cuestiones se procede de forma similar al ejemplo anterior, es decir, dada la matriz A y el vector de probabilidad:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se debe calcular el producto AP para el cuestionamiento 1 y A^2P para el cuestionamiento 2, lo cual sólo requiere de una concepción acción de producto de matrices donde una de las matrices es un vector, por parte del estudiante. Mientras que para el cuestionamiento 3 se requiere de la diagonalización de la matriz A para poder calcular el $\lim_{m\to\infty} A^m$, por lo tanto, involucra una concepción esquema de los conceptos de valor y vector propio, ya que se requiere encontrar todos los valores y vectores propios de la matriz A, y posterior a ello encontrar una base de vectores propios, si es que existe, que permita escribir a la matriz A como una matriz diagonal. Los detalles de los cálculos pueden revisarse en el texto, así como las respuestas a los cuestionamientos presentados (véase las páginas 292-293).

La intención de estos dos ejemplos es mostrar al lector situaciones de procesos estocásticos donde el $\lim_{m\to\infty} A^m$ es requerido. Dentro de este contexto la matriz A es una matriz de transición para la cual no siempre existe el límite anterior, como lo hacen ver los autores considerando la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz no existe $\lim_{m\to\infty} M^m$, ya que las potencias impares de M resultan ser M, mientras que para las potencias pares es la matriz identidad. La razón por la cual el límite de las potencias de M no existe, se debe a que la matriz M no satisface la primera condición del Teorema 5.13, es decir, la matriz tiene como uno de sus valores propios a -1; de hecho el lector con una concepción proceso de valor y vector propio puede verificar que los valores propios de la matriz M son 1 y -1, de los cuales sólo uno pertenece al conjunto S (definido anteriormente).

Sumado a lo anterior se resalta que aunque exista dicho límite para la matriz de transición, éste no siempre es fácil de calcular. Pero existe una clase importante de matrices de transición para las cuales el $\lim_{m\to\infty} M^m$ existe y es fácil de calcular, estas son las *matrices regulares* como se define a continuación.

> **Definición.** Una matriz de transición es llamada regular si alguna potencia de la matriz contiene únicamente entradas positivas. (Friedberg et al., 2003b, p. 294)

Ejemplo 5.3.2. Este ejemplo muestra las matrices de transición obtenidas en los dos problemas anteriores. La matriz

$$\begin{pmatrix} 0.90 & 0.02 \\ 0.10 & 0.98 \end{pmatrix},$$

es una matriz regular, ya que todas sus entradas son positivas y cualquier potencia de esta matriz seguirá teniendo entradas positivas. En contraste, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 1 \end{pmatrix},$$

es no regular, ya que la primera columna de A^m es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para cualquier potencia m. El ejemplo requiere una concepción proceso de multiplicación de matrices, es decir, se requiere que el lector pueda imaginar el producto de m veces la matriz A y ser consciente de que el producto obtenido es una nueva matriz, de la cual puede hablar de sus entradas. En este ejemplo también es aclarado al lector que una matriz puede, inicialmente, contener ceros en sus entradas pero que eventualmente éstos desaparecen, tras el producto de m veces la matriz, y todas sus entradas se vuelven positivas, como el caso de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es regular, dado que todas las entradas de M^2 son positivas.

El resto de la sección del capítulo es dedicado a demostrar que el límite de una sucesión de potencias de matrices regulares existe. En el camino a ello, se desarrollan algunos resultados concernientes a las magnitudes de los valores propios de cualquier matriz, por ello nueva terminología es introducida.

Definición. Sea $A \in M_{nxn}(C)$. Para $1 \leq i, j \leq n$, se define a $\rho_i(A)$ como la suma de los valores absolutos de las entradas del renglón i de A, y se define a $\nu_j(A)$ como la suma de los valores absolutos de las entradas de la columna j de A. Por lo tanto

$$\rho_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

y

$$\nu_j(A) = \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

La suma renglón de A, denotada por $\rho(A)$, y la suma columna de A, denotada por $\nu(A)$, son definidas como

$\rho(A) = max\{\rho_i(A): 1 \leq i \leq n\}$ y $\rho(A) = max\{\nu_j(A): 1 \leq j \leq n\}$. (Friedberg et al., 2003b, p. 295).

Ejemplo 5.3.3. La intención de este ejemplo es sólo ilustrar el grupo de definiciones enunciadas en el párrafo anterior. Para ello se considera la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3-4i \\ -2+i & 0 & 6 \\ 3 & 2 & i \end{pmatrix}.$$

En él sólo se demanda el cálculo de los valores absolutos de cada una de las entradas de la matriz A y sumar estos valores, ya sea en cada fila o columna para determinar los valores de $\rho_i(A)$ o $\nu_j(A)$. Mediante una manipulación aritmética se puede corroborar que: $\rho_1(A) = 7$, $\rho_2(A) = 6 + \sqrt{5}, \rho_3(A) = 6, \nu_1(A) = 4 + \sqrt{5}, \nu_2(A) = 3$ y $\nu_3(A) = 12$. Por lo tanto, la suma renglón y suma columna son $\rho(A) = 6 + \sqrt{5}$ y $\nu(A) = 12$, respectivamente.

Previo a demostrar que el mínimo entre los valores de $\rho(A)$ y $\nu(A)$ es una *cota superior* para los valores absolutos, de los valores propios de una matriz, dicen al lector que en el ejemplo anterior la matriz A no tiene valores propios con valor absoluto mayor a $6 + \sqrt{5}$.

Para llegar a demostrar el hecho anterior en su forma general, introducen un nuevo concepto y un ejemplo que ayude a la visualización geométrica de dicho concepto. Para una matriz A de nxn, se define: "el i-ésimo disco de Gerschgorin C_i como el disco en el plano complejo con centro en A_{ii} y radio $r_i = \rho_i(A) - |A_{ii}|$; es decir,

$C_i = \{z \in C: |z - A_{ii}| < r_i\}$" (Friedberg et al., 2003b, p. 296).

Con la siguiente matriz se ilustra la definición del disco de Gerschgorin.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 2i & -3 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz, C_1 es el disco centrado en $1 + 2i$ con radio 1, y el disco C_2 está centrado en -3 y su radio es 2. Dichos discos se visualizan geométricamente en la Figura 4.8.

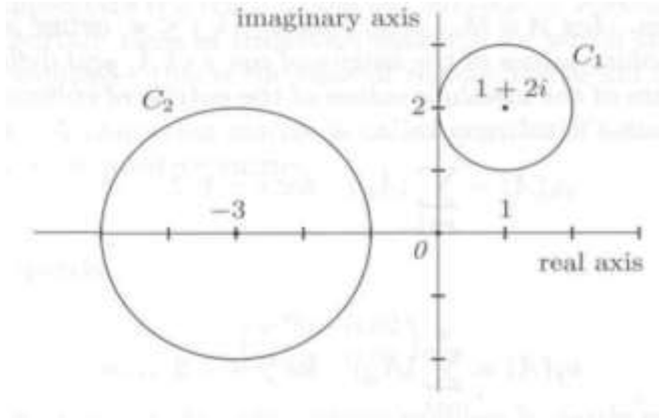


Figura 4.8. Visualización geométrica de los discos de Gerschgorin de la matriz A (Friedberg et al., 2003b, p. 296)

Antes de enunciarse y demostrarse el Teorema del disco de Gerschgorin, el resultado es utilizado en este ejemplo para decir que los valores propios de A están contenidos en estos dos discos (C_1, C_2) y por esta razón el cero no es un valor propio de A, ya que no está contenido en ninguno de los discos. Posterior a esto se presenta el teorema utilizado.

> **Teorema 5.16 (Teorema del disco de Gerschgorin).** Sea $A \in M_{nxn}(C)$. Entonces cada valor propio de A está contenido en un disco de Gerschgorin. (Friedberg et al., 2003b, p. 296)

En este resultado los valores propios de la matriz A son considerados como objetos, dentro del teorema, ya que deben percibirse como elementos al interior de los discos de *Gerschgorin.* En la representación geométrica de los discos de *Gerschgorin* del ejemplo anterior, los valores propios de la matriz A debieran considerarse como puntos contenidos en estos discos (C_1, C_2) mostrados en el plano complejo. Por otra parte, esta contención de los valores propios en los discos de *Gerschgorin* es representada algebraicamente por la siguiente expresión:

$|\lambda - A_{kk}| \leq r_k$ (Friedberg et al., 2003b, p. 297)

donde λ es un valor propio, A_{kk} es la entrada de la matriz A y r_k es el radio del disco. Hemos de notar aquí una sutil diferencia entre la expresión anterior y la presentada en la definición del disco de *Gerschgorin* ($|z - A_{ii}| < r_i$, p. 296); en la definición, se hace alusión a un disco abierto ($<$), mientras que en la demostración del Teorema 5.16 y de los siguientes corolarios se utilizan discos cerrados (≤). De hecho se afirma en la demostración del Teorema 5.16: "mostraremos que λ está en C_k, es decir, $|\lambda - A_{kk}| \leq r_k$" (Friedberg et al., 2003b, p. 297). Lo anterior parece tratarse de un error en la definición del disco de *Gershgorin* presentada por el texto, pues en la literatura se define como un disco cerrado (véase el texto García[37], 1995, p. 171). Los siguientes corolarios requieren de una concepción objeto de valor propio.

Corolario 1. Sea λ un valor propio de $A \in M_{nxn}$. Entonces $|\lambda| \leq \rho(A)$. (Friedberg et al., 2003b, p. 297)

El corolario requiere de una concepción objeto de valor propio, a este objeto se le aplica el valor absoluto (acción) cuyo valor se compara con el valor de la suma renglón $\rho(A)$ de la matriz A.

Corolario 2. Sea λ un valor propio de $A \in M_{nxn}$. Entonces

$|\lambda| \leq min\{\rho(A), \nu(A)\}$. (Friedberg et al., 2003b, p. 297)

Similarmente al corolario anterior, al objeto valor propio le es aplicado el valor absoluto para posteriormente compararse con el mínimo entre la suma renglón $\rho(A)$ y la suma columna $\nu(A)$. En este corolario también hay una comparación entre el valor $\rho(A)$ y $\nu(A)$, por lo tanto son requeridos como objetos; recordemos que estos valores son los máximos de los conjuntos: suma de los valores absolutos de todos los renglones y suma de los valores absolutos de todas columnas de A, respectivamente.

Corolario 3. Si λ es un valor propio de una matriz de transición, entonces $|\lambda| \leq 1$. (Friedberg et al., 2003b, p. 298)

Este resultado muestra que el valor absoluto de los valores propios de una matriz de transición (o estocástica) son acotados por el valor de 1. En él, como en los dos corolarios anteriores, se

[37] García, F. (1995). *Lecciones prácticas de cálculo numérico* (Vol. 18). Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

considera al valor propio como un objeto cognitivo al que se le aplica el valor absoluto y posteriormente este valor se compara con 1.

El siguiente teorema asegura que el valor 1 es un valor propio de toda matriz de transición.

> **Teorema 5.17.** Cada matriz de transición tiene al 1 como valor propio. (Friedberg et al., 2003b, p. 298)

El teorema evoca una *reversión del proceso vector propio*, es decir, se considera un escalar específico del campo, en este caso el valor de 1, el cual se desea mostrar que es un valor propio de la matriz A, donde A es una matriz de transición. Para ello se debe evidenciar que existe un vector v, en el espacio vectorial en cuestión, tal que $Av = v$. La demostración del teorema consiste en utilizar un resultado previo que menciona: "*A y A^T* tienen los mismos valores propios" (Friedberg et al., 2003b, p. 259). Utilizando el resultado anterior la *reversión del proceso de valor y vector propio* es utilizada para mostrar que el valor 1 es un valor propio de A^T. Como A es una matriz de transición las entradas de sus columnas suman 1, por lo tanto las filas (o renglones) de A^T suman 1 y si $u \in R^n$ es un vector columna, cuyas entradas son todas 1, se obtiene que $A^T u = u$. Así que 1 es un valor propio de A^T y consecuentemente un valor propio de A.

> **Teorema 5.18.** Sea $A \in M_{nxn}(C)$ una matriz en la cual cada una de sus entradas es positiva, y sea λ un valor propio de A tal que $|\lambda| = \rho(A)$. Entonces $\lambda = \rho(A)$ y $\{u\}$ es una base para E_λ, donde $u \in C^n$ es el vector columna en el cual cada una de sus entradas es igual a 1. (Friedberg et al., 2003b, p. 298)

En este teorema se considera al valor propio λ de A como un objeto cognitivo, que satisface la propiedad de que $|\lambda| = \rho(A)$. La propiedad anterior señala que el valor absoluto, del valor propio en cuestión, debe ser igual al máximo del conjunto que contiene las sumas de los renglones de la matriz A (definido anteriormente). Además el lector debe pensar en el espacio propio correspondiente a este valor y mostrar que dicho espacio tiene dimensión uno; es decir, si v es un vector propio correspondiente a este valor propio, que satisface la condición demandada, debe mostrar que v es un múltiplo de vector u y por ende el vector u es una base para E_λ, que necesariamente tiene dimensión 1. Por lo tanto, el teorema promueve una concepción esquema de valor y vector propio.

Dos consecuencias inmediatas del teorema anterior, son mostradas en forma de corolarios cuya demostración es propuesta como ejercicio para el lector.

> **Corolario 1.** Sea $A \in M_{nxn}(C)$ una matriz en la cual cada una de sus entradas es positiva, y sea λ un valor propio de A tal que $|\lambda| = \nu(A)$. Entonces $\lambda = \nu(A)$, y la dimensión de $E_\lambda = 1$. (Friedberg et al., 2003b, p. 299)

Como podemos observar las hipótesis de este corolario son muy similares a las del Teorema 5.18; la única diferencia está en la condición $|\lambda| = \nu(A)$. Si bien la idea de su demostración es utilizar el teorema anterior, el lector requiere de una concepción objeto de valor propio, la cual le permitirá usar el resultado de que los valores propios de la matriz A y su transpuesta, A^t, son los mismos, así como también la dimensión de sus respectivos espacios propios; estos hechos ya han sido probados en las secciones anteriores. Entonces podrá establecer la relación $|\lambda| = \rho(A^t) = \nu(A)$ para aplicar el Teorema 5.18.

> **Corolario 2.** Sea $A \in M_{nxn}(C)$ una matriz de transición en la cual cada una de sus entradas es positiva, y sea λ un valor propio de A diferente de 1. Entonces $|\lambda| < 1$. Más aún, el espacio propio correspondiente al valor propio 1 tiene dimensión 1. (Friedberg et al., 2003b, p. 299)

El Corolario 2 establece que el valor absoluto de los valores propios, de una matriz de transición, es acotado por 1; el efectuar esta comparación entre el valor absoluto y el valor 1 requiere en el lector una concepción objeto de valor propio, de hecho esto ya se ha mencionado previamente (Corolario 3, anteriormente citado). También es necesaria una concepción objeto de espacio propio para determinar que el espacio, correspondiente al valor 1, tiene dimensión uno.

El siguiente teorema, como mencionan los autores "extiende el resultado del Corolario 2 a matrices regulares de transición" (Friedberg et al., 2003b, p. 299), cuya consecuencia inmediata, mostrada en el corolario posterior, es que $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe, siempre y cuando A sea una matriz regular de transición diagonalizable.

Teorema 5.19. Sea A una matriz regular de transición, y sea λ un valor propio de A. Entonces:

a) $|\lambda| \leq 1$.

b) Si $|\lambda| = 1$, entonces $\lambda = 1$, y la $dim(E_\lambda) = 1$. (Friedberg et al., 2003b, p. 300)

En el resultado anterior se requiere de una concepción objeto de valor propio que permita al lector aplicar el valor absoluto y comparar el valor obtenido con el valor de 1, como ya se ha indicado previamente. De forma similar es requerida una concepción objeto de espacio propio para poder determinar la dimensión del espacio propio correspondiente al valor 1. En este caso es por medio de la contención de dos conjuntos, la cual se explica a continuación: como A es regular existe un $s \in \mathbb{N}$ tal que A^s tiene todas sus entradas positivas y si E_λ y $E_{\lambda'}$ denotan los espacios propios de A y A^s, respectivamente, para el valor 1, entonces $E_\lambda \subseteq E_{\lambda'}$, generando la siguiente desigualdad:

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \dim(E_{\lambda'}).$$

Dado que $\dim(E_{\lambda'}) = 1$, por resultados anteriores, y además se sabe que $\dim(E_\lambda)$ es al menos 1, se tiene que $\dim(E_\lambda) = 1$.

Corolario. Sea A una matriz regular de transición que es diagonalizable. Entonces $\lim_{\mathrm{m}\to\infty} A^m$ existe. (Friedberg et al., 2003b, p. 300)

Este resultado es una aplicación directa del Teorema 5.1 y del 5.14, anteriormente mencionados. Hemos de distinguir aquí dos casos: 1) Es posible que el lector sea consciente de las relaciones existentes entre el proceso de diagonalización de la matriz A y el $\lim_{\mathrm{m}\to\infty} A^m$; en ese caso podemos decir que el corolario está promoviendo un *esquema de valor y vector propio*. Recordemos que la diagonalización de A implica la existencia de valores y vectores propios, encontrar una base de vectores propios de A que permita diagonalizarla y usar esta matriz diagonal para calcular $\lim_{\mathrm{m}\to\infty} A^m$.

2) Por otro lado, si el lector no es consciente de las relaciones anteriores, entonces sólo se estaría promoviendo una concepción *acción de límite de una sucesión de potencia de matrices*, ya que sólo bastaría conocer si las hipótesis de los Teoremas 5.19 y 5.14 son satisfechas y concluir el resultado inmediatamente, sin conocer a fondo el papel que juegan para obtener la conclusión del enunciado.

De hecho, si el lector posee un esquema de valor y vector propio, puede ser consciente de que la condición de que la matriz A sea una matriz regular de transición es suficiente para garantizar la existencia de $\lim_{m\to\infty} A^m$, independientemente de si es o no diagonalizable. Al respecto los autores del texto señalan que este resultado requiere de demostrar que la multiplicidad de 1 como valor propio de A es 1, lo cual no está dentro de los alcances de la presente sección del libro, por lo que la demostración de este hecho es pospuesta para el siguiente capítulo. Sin embargo, este resultado es asumido dentro de la presente sección, en el siguiente teorema donde se enuncian algunas propiedades de A como matriz regular de transición.

Teorema 5.20. Sea A una matriz regular de transición de nxn. Entonces:

a) La multiplicidad de 1 como valor propio de A es 1.

b) $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe.

c) $L = \lim_{m\to\infty} A^m$ es una matriz de transición.

d) $AL = LA = L$.

e) Las columnas de L son idénticas. De hecho, cada columna de L es igual a el único vector de probabilidad v que es además un vector propio de A correspondiente al valor propio 1.

f) Para cualquier vector de probabilidad w, $\lim_{m\to\infty} A^m w = v$. (Friedberg et al., 2003b, p. 300)

En general el teorema anterior fomenta un *esquema de valor y vector propio*, salvo en los incisos c) y d) donde no se requieren dichos conceptos. Por ejemplo, en a) y b) como se mencionó anteriormente, es necesario establecer relaciones entre el proceso de diagonalización de A y el límite de la sucesión de potencias de A. El inciso e) requiere de una concepción *proceso de valor* *y vector propio* y de una concepción proceso de multiplicación de matrices, ésta es requerida para establecer que del producto AL se obtiene la matriz L y $AL = L$ por d); la concepción de valor y vector propio permite al lector identificar que cada columna de L es un vector propio de A correspondiente al valor propio 1, más aún, cada columna de L es un vector de probabilidad, pero como el vector de probabilidad es único por a), entonces todas las columnas de A son iguales.

El vector v mencionado en el inciso e) del teorema anterior es de tal importancia que recibe un nombre especial, tal nombre es presentado al lector en la definición siguiente.

> **Definición.** El vector v en el Teorema 5.20 (e) es llamado el vector de probabilidad fijo o vector estacionario de la matriz regular de transición A. (Friedberg et al., 2003b, p. 301)

Posterior a todo el desarrollo teórico presentado a lo largo de la sección, el cual culmina con el Teorema 5.20, se presentan algunos ejemplos de *cadenas de Markov* cuya matriz de transición es regular.

Ejemplo 5.3.4. Este ejemplo plantea la siguiente situación:

> Una encuesta en Persia mostró que en un día particular 50% de los Persas prefieren una barra de pan, 30% prefieren una jarra de vino, y 20% prefieren “tú a mi lado en el desierto”[38]. Una encuesta posterior, aplicada un mes más tarde, produjo los siguientes datos: de los que prefirieron una barra de pan en la primera encuesta, 40% continuaron prefiriendo la barra de pan, 10% prefirió ahora una jarra de vino, y el 50% prefiere “tú”; de los que prefirieron la jarra de vino en la primera encuesta, 20% prefiere ahora la barra de pan, 70% continuo prefiriendo la jarra de vino, y 10% prefiere ahora “tú”; de los que prefirieron “tú” en la primera encuesta, 20% prefiere la barra de pan, 20% prefiere ahora la jarra de vino, y 60% continuaron prefiriendo “tú”. (Friedberg et al., 2003b, p. 301)

[38] “thou beside me in the wilderness” (Friedberg et al., 2003b, p. 301)

Si se asume que esta tendencia continúa, la situación anterior puede ser descrita por una cadena de Markov con tres estados, que corresponden a cada una de las preferencias obtenidas en la encuesta. De este modo, la matriz de transición y el vector de probabilidad inicial son los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.20 & 0.20 \\ 0.10 & 0.70 & 0.20 \\ 0.50 & 0.10 & 0.60 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

En dicha matriz los estados correspondientes: pan, vino y "tú", son representados de izquierda a derecha, y de arriba abajo, respectivamente; análogamente para el vector P. Con los datos anteriores es posible predecir el porcentaje de Persas que habrá en cada estado en encuestas posteriores, el cual es determinado por el producto $A^m P$, donde m indica el número de meses consecutivos a la primera encuesta aplicada.

Para hacer notar al lector la posible convergencia del producto $A^m P$, los autores presentan los siguientes productos:

$$AP = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix}, A^2P = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.32 \\ 0.42 \end{pmatrix}, A^3P = \begin{pmatrix} 0.252 \\ 0.334 \\ 0.414 \end{pmatrix}, A^4P = \begin{pmatrix} 0.2504 \\ 0.3418 \\ 0.4078 \end{pmatrix}.$$

Esto sólo requiere, por parte del estudiante, de una concepción acción de producto de matrices donde una de ellas es un vector. Siendo que la matriz A es regular (todas sus entradas son positivas) el predecir el porcentaje de preferencias de los Persas, a lo largo del tiempo, consiste en encontrar *el vector de probabilidad fijo* de A. A continuación se muestran dos formas de obtenerlo, las cuales son sugeridas por los autores del texto.

El primer caso requiere de una concepción *esquema de valor y vector propio*. Esto permite identificar al lector que el vector de probabilidad fijo es el único vector de probabilidad que satisface que $Av = v$, y que por lo tanto v es un vector propio de A correspondiente al valor propio 1. Teniendo presente lo anterior, se determina el conjunto solución del sistema homogéneo de ecuaciones generado por $(A - I)v = 0$. Una vez obtenido dicho conjunto, el lector puede notar que el vector $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ es una base para el conjunto solución y que el único vector que satisface que es vector propio de A y además vector de probabilidad (sus entradas deben sumar 1) es el vector:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{5+7+8} \\ \frac{7}{5+7+8} \\ \frac{8}{5+7+8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.35 \\ 0.40 \end{pmatrix}.$$

En el segundo caso el vector fijo de probabilidad es obtenido de calcular $\lim_{m\to\infty} A^m$. Calcular el límite anterior consiste en la aplicación directa del algoritmo que ha sido desarrollado y presentado en esta sección del texto a través de los ejemplos. En este caso sólo se demanda en el lector una *concepción acción de límite de una sucesión de potencia de matrices*, puesto que se aborda un caso particular de matrices (matrices regulares de transición) para el cual existe un algoritmo a seguir que permite calcular su límite. Es preciso señalar, dado nuestro interés, que dentro de este algoritmo se emplea una concepción *acción de valor y vector propio*, ya que sólo se debe encontrar los valores y vectores propios de la matriz en cuestión, y para tal caso también existe un algoritmo a seguir. La matriz resultante de calcular el límite se muestra a continuación (para mayor detalle sobre los cálculos puede consultarse la página 303 del texto).

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.35 & 0.35 & 0.35 \\ 0.40 & 0.40 & 0.40 \end{pmatrix}$$

En cualquiera de los dos casos, conforme el tiempo transcurre, se obtiene que el 25% de los Persas prefieren un trozo de pan, 35% una jarra de vino y 40% *"tú a mi lado en el desierto"*.

Ejemplo 5.3.5. De forma similar al ejemplo anterior se plantea una situación que puede ser descrita por medio de una cadena de Markov de tres estados. La situación expresa lo siguiente:

> Los agricultores en Larmon siembran una cosecha al año, ya sea de maíz, soja o trigo. Porque creen en la necesidad de rotar sus cultivos, estos agricultores no siembran el mismo cultivo en años sucesivos. De hecho, de la superficie total en la que se siembra un cultivo en particular, exactamente la mitad se siembra con uno de los otros dos

> cultivos durante el siguiente año. Este año, se plantaron 300 acres[39] de maíz, 200 acres de soja y 100 acres de trigo. (Friedberg et al., 2003b, p. 303)

En la situación descrita se proporciona la cantidad (en acres) de terreno que es designado para cada uno de los cultivos, mas no se menciona explícitamente el porcentaje del total de terreno (600 acres) que corresponde a cada uno. Tomando en cuenta lo anterior se presenta la matriz A y el vector de probabilidad P, respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{300}{600} \\ \frac{200}{600} \\ \frac{100}{600} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

La matriz A es la matriz de transición cuyos estados corresponden a la siembra de maíz, soja o trigo. Las entradas del vector P indican la porción de terreno que es destinada a cada cultivo (maíz, soja y trigo, respectivamente). Por lo tanto, la porción de terreno destinada a cada cultivo en m años corresponde a las coordenadas del vector $A^m P$, y la porción que eventualmente se designará, a cada uno de ellos, corresponde a las coordenadas de $\lim_{m\to\infty} A^m P$. El cálculo del límite anterior requiere primero de conocer $\lim_{m\to\infty} A^m$, que al igual que en el ejemplo anterior, es posible calcular de dos maneras; la primera involucra un *esquema de valor y vector propio*, y la segunda una concepción *acción de límite de sucesión de potencias de matrices*, como se describió en el ejemplo anterior. Los autores emplean la primera opción (esquema de valor propio) para determinar el vector probabilidad fijo de A, el cual resulta ser el vector v:

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

[39] Unidad de medida de superficie (usada para la agricultura) utilizada en países como Estados Unidos y Reino Unido.

Siendo $L = \lim_{m\to\infty} A^m$ y conociendo el vector de probabilidad v, es posible determinar L directamente, ya que A es una matriz regular. Por resultados anteriores, L es una matriz cuyas columnas son idénticas al vector de probabilidad fijo, así que se tiene que:

$$L = \lim_{m\to\infty} A^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Una concepción *acción de producto de matrices* en la que una de ellas es un vector, permite obtener el $\lim_{m\to\infty} A^m P$; más aún, si la porción obtenida se multiplica por el escalar 600 (total de la superficie destinada para el cultivo) se determinará la superficie que eventualmente será destinada a cada cultivo. En el ejemplo se obtiene que eventualmente 200 acres de cada cultivo serán plantados por año.

Antes de que los autores presenten al lector una aplicación un poco más interesante de cadenas de Markov, es aclarado que la presente sección se enfocó al estudio de matrices regulares de transición; sin embargo, mencionan la existencia de otro tipo interesante de matrices de transición que se pueden representar como:

$$\begin{pmatrix} I & B \\ O & C \end{pmatrix},$$

donde I denota la matriz identidad y O la matriz cero. Los estados correspondientes a la submatriz identidad se les llama estados absorbentes, ya que una vez que se llega a ellos no es posible salir. Una cadena de Markov que es representada por este tipo de matriz se le denomina cadena de Markov absorbente. Ejemplo de ello es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual fue utilizada en uno de los primeros ejemplos de la sección 5.3 del texto, más específicamente en el problema donde se deseaba conocer el porcentaje de estudiantes, de una comunidad estudiantil, que se graduaría. En la matriz es posible observar que los estados correspondientes a las columnas 1 y 4 son estados absorbentes, los cuales pueden representarse mediante una submatriz identidad si se reordenan las columnas y renglones de la matriz anterior sin alterar los estados de transición. El reordenamiento de las columnas y renglones produce la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0.3 & 0.2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 \end{array}\right).$$

En esta última matriz es posible observar cuatro submatrices; del lado izquierdo se encuentra la submatriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la submatriz cero $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, respectivamente. Las columnas de la submatriz identidad corresponden a los estados absorbentes de la matriz más grande (conformada por las cuatro submatrices); como se recordará estos estados (columnas) corresponden a que un estudiante se gradué o deserte, por lo que una vez llegado a ellos no es posible que un estudiante pueda pasar a alguno de los otros estados restantes. Además de este ejemplo proporcionan algunas referencias bibliográficas para el lector que desee conocer más sobre este tipo de matrices (véase las páginas 304-305 del libro).

4.3.3.1 Una aplicación

A continuación se muestra una aplicación de matrices de transición y de valores y vectores propios, en un contexto de reproducción de especies. De hecho, la situación descrita obedece a la ley de Hardy-Weinberg[40] que actúa en la genética de poblaciones.

[40] Esta ley establece que la composición genética de una población permanece en equilibrio mientras no actúe la selección natural o ningún otro factor y no se produzca alguna mutación en la población.

> En especies que se reproducen sexualmente, las características de un descendiente con respecto a un rasgo genético particular son determinadas por un par de genes, cada uno heredado de los padres. Los genes de un rasgo particular son de dos tipos, que son denotados por G y g. El gen G representa la característica dominante, y g representa la característica recesiva. El descendiente con genotipos GG o Gg exhibe la característica dominante, mientras que un descendiente con un genotipo gg exhibe la característica recesiva. (Friedberg et al., 2003b, p. 305)

Si se desea conocer la proporción de la población que habrá con cada genotipo (GG, Gg, gg) en futuras generaciones, se debe considerar que cada genotipo masculino (GG, Gg, gg) combinado con cada genotipo femenino (GG, Gg, gg) tiene diferente probabilidad de generar descendientes con genotipos GG, Gg y gg. Por ejemplo, si en la población sólo se permitiera la reproducción del genotipo masculino Gg, entonces éste se combinaría con los tres genotipos femeninos (GG, Gg, gg) para generar descendencia con genotipos GG, Gg y gg.

A continuación se muestra la matriz B de transición que muestra las respectivas probabilidades de generar descendientes de cada genotipo (GG, Gg, gg), al combinarse el genotipo masculino Gg con los diferentes genotipos femeninos GG, Gg y gg, respectivamente. Por ejemplo, si se combina el genotipo femenino Gg con el genotipo masculino Gg, habrá cuatro descendientes con genotipos: GG, Gg, Gg y gg (formados por un gen de cada progenitor), lo cual es representado en la segunda columna de la matriz B.

Genotipos femeninos

Genotipo de los Descendientes

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{GG} & \text{Gg} & \text{gg} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{GG} \\ \text{Gg} \\ \text{gg} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array} = B$$

Análogamente las matrices A y C muestran las probabilidades de generar descendientes de cada genotipo (GG, Gg, gg), al combinarse los genotipos masculinos GG y gg con los diferentes genotipos femeninos (GG, Gg, gg), respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si el vector P denota la proporción de la población adulta con genotipos GG, Gg y gg, respectivamente.

$$P = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Entonces el caso general, en el que todos los genotipos masculinos son considerados en la reproducción de la especie, es representado por la matriz M, la cual es una combinación lineal de las tres matrices anteriores.

$$M = pA + qB + rC.$$

Lo anterior demanda en el lector una concepción proceso de combinación lineal, ya que el lector debe ser consciente de que la proporción de descendientes en la población con genotipos GG, Gg y gg dependerá del "peso" (p, q y r, no son conocidos) que tengan las matrices A, B y C en la población actual; de esta forma puede obtener la matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} p + \frac{1}{2}q & \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q & 0 \\ \frac{1}{2}q + r & \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r & p + \frac{1}{2}q \\ 0 & \frac{1}{4}q + \frac{1}{2}r & \frac{1}{2}q + r \end{pmatrix}.$$

Por cuestiones de practicidad se simplifica M; para ello se realizan algunas manipulaciones algebraicas que sólo involucran acciones sobre ella, obteniendo

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}a & 0 \\ b & \frac{1}{2} & a \\ 0 & \frac{1}{2}b & b \end{pmatrix},$$

donde $a = p + \frac{1}{2}q$ y $b = \frac{1}{2}q + r$, además $a + b = 1$. El producto MP denota las proporciones de la primera generación de descendientes con genotipos GG, Gg y gg, respectivamente. Identificar que MP es un vector requiere que el lector tenga una concepción proceso del producto de una matriz por un vector.

$$MP = \begin{pmatrix} a^2 \\ 2ab \\ b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}.$$

Ahora considerando las nuevas proporciones de genotipos en la población y además, bajo el supuesto de que no hay ninguna restricción para la reproducción entre la primera generación, se obtiene una nueva matriz de transición de la misma forma que se obtuvo M, la cual es denotada por $\widetilde{M}$.

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} p' + \frac{1}{2}q' & \frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}q' & 0 \\ \frac{1}{2}q' + r' & \frac{1}{2}p' + \frac{1}{2}q' + \frac{1}{2}r' & p' + \frac{1}{2}q' \\ 0 & \frac{1}{4}q' + \frac{1}{2}r' & \frac{1}{2}q' + r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & \frac{1}{2}a' & 0 \\ b' & \frac{1}{2} & a' \\ 0 & \frac{1}{2}b' & b' \end{pmatrix}.$$

En la matriz anterior $a' = p' + \frac{1}{2}q'$ y $b' = \frac{1}{2}q' + r'$. Mediante un cálculo algebraico es posible demostrar que $\widetilde{M} = M$; así que la distribución de genotipos entre los descendientes de la segunda generación es dada por:

$$\widetilde{M}(MP) = M^2P = \begin{pmatrix} a^2 \\ 2ab \\ b^2 \end{pmatrix} = MP.$$

Como se puede observar en la relación anterior, la proporción de la población con genotipos GG, Gg y gg de la segunda generación es la misma que el de la primera, es decir, se logra un equilibrio genético después de la primera generación; a esto se le conoce como la ley de Hardy-Weinberg. La presente aplicación fomenta, en el lector, un *esquema de valor y vector propio*, ya que se debe identificar que el vector MP es un vector propio de M, correspondiente al valor propio 1, lo cual no es aclarado por los autores; y a partir de ello deducir que MP es el vector de probabilidad fijo de M.

4.3.3.2 Ejercicios

La presente sección consta de 24 ejercicios propuestos para el lector, los cuales hemos agrupado en la siguiente tabla según las construcciones mentales requeridas y/o promovidas en su solución. Hemos de aclarar que dentro de la categoría de "otra", la cual tiene mayor número de ejercicios, se han agrupo los ejercicios que no hacen uso de los conceptos de valor y vector propio ya sea en su formulación o resolución. Por ejemplo, ejercicios en los que se pide demostrar propiedades de las matrices de transición: sumas, productos; sucesiones de potencias de matrices (en general); determinar si una matriz es regular, entre otros. Los resultados de los ejercicios anteriores, son usados eventualmente en ejercicios donde los conceptos de valor y vector propio intervienen, por ejemplo, determinar cómo son los valores propios de una matriz regular de transición.

Tabla 4.3. Agrupación de los ejercicios de la sección 5.3, según la construcción mental promovida y/o requerida en su solución

Construcción mental promovida y/o requerida	Cantidad de ejercicios	Porcentaje[41]
Acción, Proceso u Objeto	1	4%
Objeto	1	4%
Esquema o Acción	10	42%
Otra	12	50%

Acción, proceso u objeto

Dentro de esta categoría sólo tenemos un ejercicio, de hecho es el ejercicio 1, en el cual se pide al lector que determine si cada una de las afirmaciones presentadas es cierta o falsa.

[41] El porcentaje mostrado es una aproximación, ya que se aplicó el redondeo de las cantidades.

> **1).** Etiqueta los siguientes enunciados como verdaderos o falsos (Friedberg et al., 2003b, p. 307)

> g) Cada matriz de transición tiene al 1 como valor propio. (Friedberg et al., 2003b, p. 308)

La afirmación del enunciado es cierta, de hecho es el Teorema 5.17 que se vio en la presente sección, por lo que el lector puede decir "por el teorema visto, el enunciado es cierto"; en tal caso se trataría de una *concepción acción de valor propio*, pues sólo requiere que el lector recuerde uno de los resultados que se abordaron en la sección.

> h) Una matriz de transición no puede tener a -1 como valor propio. (Friedberg et al., 2003b, p. 308)

El enunciado demanda de una *reversión del proceso cognitivo vector propio*, ya que dado el escalar -1, como valor propio de $A \in M_{nxn}(R)$, debe imaginarse un vector $v \in R^n$ que satisfaga que $Av = -v$, para poder concluir que la afirmación es cierta o falsa. Esto se reduce a determinar si la ecuación $(A + I)v = 0$, tiene solución distinta de la trivial. De hecho, puede tomar el caso simple cuando A es una matriz de $2x2$ y resolver el sistema de ecuaciones generado por la ecuación; de esta forma encontraría que el sistema tiene infinitas soluciones distintas de la trivial, por lo tanto el enunciado es falso.

> f) Sea z un número complejo tal que $|z| < 1$. Entonces la matriz
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & z & -1 \\ z & 1 & 1 \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix}$$
>
> no tiene al 3 como valor propio. (Friedberg et al., 2003b, p. 308)

Determinar la veracidad o falsedad del enunciado requiere de la aplicación de una las consecuencias inmediatas del Teorema del disco de Gerschgorin, específicamente del corolario 1 (véase la página 297 del texto analizado), el cual afirma que si λ es un valor propio de A entonces $|\lambda| \leq \rho(A)$. Por lo tanto, debe efectuarse una comparación entre el supuesto valor propio, 3, y el máximo valor de la suma renglón de los valores absolutos de cada entrada de la matriz. Así que realizando los cálculos necesarios se obtiene que:

$$3 = |3| \leq \rho(A) = |z| + 2 < 3.$$

Efectuar tal comparación requiere de una concepción *objeto de valor propio*. La expresión anterior permite al lector concluir que el enunciado es falso, pues se llega a que $3 < 3$.

Objeto

Otro ejercicio que requiere de una concepción objeto de valor y vector propio es el ejercicio 17), que se enuncia a continuación.

> **17).** Demuestre los dos corolarios del Teorema 5.18. (Friedberg et al., 2003b, p. 311)

La concepción mental requerida, por el lector, para realizar la demostración de los dos corolarios es una concepción objeto de valor propio, lo cual fue descrito en la página 122 de este documento.

Esquema o Acción

> **2).** Determine si el limite $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe para cada una de las siguientes matrices A, y calcule el límite si existe. (Friedberg et al., 2003b, p. 308)

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad \text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 2i & 4i & \frac{1}{2} + 5i \\ 1 + 2i & -3i & -1 - 4i \\ -1 - 2i & 4i & 1 + 5i \end{pmatrix}$$

En este ejercicio se presenta una lista de 10 matrices, de las cuales dos tienen entradas números complejos.

> **13).** En 1975, la industria automovilística determinó que el 40% de los propietarios de automóviles estadounidenses conducían automóviles grandes, el 20% conducía automóviles de tamaño intermedio, y el 40% conducía automóviles pequeños. Una segunda encuesta en 1985 mostró que el 70% de los propietarios de automóviles grandes en 1975 todavía poseía automóviles grandes en 1985, pero el 30% había

> cambiado a un automóvil de tamaño intermedio. De los que poseían automóviles de tamaño intermedio en 1975, el 10% había cambiado a automóviles grandes, 70% continuó conduciendo automóviles de tamaño intermedio, y el 20% había cambiado a automóviles pequeños en 1985. Por último, de los propietarios de automóviles pequeños en 1975, 10% poseía automóviles de tamaño intermedio y 90% automóviles pequeños en 1985. Suponiendo que estas tendencias continúan, determine los porcentajes de estadounidenses que son dueños de automóviles de cada tamaño en 1995 y los correspondientes porcentajes eventuales. (Friedberg et al., 2003b, p. 311)

Los ejercicios anteriores, 2) y 13), son muy similares a algunos de los ejemplos presentados en la sección, por lo que existe ya una estrategia a seguir para obtener la solución demandada en cada uno de ellos. Ambos ejercicios requieren calcular $\lim_{m\to\infty} A^m$, para lo cual es necesario diagonalizar las respectivas matrices; en el ejercicio 13) primero debe encontrarse la matriz de transición que describe la situación del problema. Diagonalizar una matriz requiere de encontrar sus valores y vectores propios, determinar una base para los respectivos espacios propios, comparar la dimensión de estos espacios con la multiplicidad de los valores propios de matriz y obtener una base de vectores propios que permita escribir, a la matriz en cuestión, como una matriz diagonal; sin embargo, a lo largo del presente capítulo se han desarrollado algoritmos que permiten encontrar cada uno de los elementos anteriores, sin necesidad de que el lector conozca a fondo por qué dichos algoritmos funcionan. Por tal motivo, los ejercicios se pueden resolver mediante la aplicación de algoritmos de forma mecanizada; en tal caso sólo se demandaría, en el lector, una *concepción acción de valor y vector propio*. Por el contrario, si el lector es consciente de las relaciones entre los elementos involucrados en la diagonalización de la matriz, estaría empleando el *esquema de valor y vector propio*. Además, este esquema permitiría al lector tomar “atajos” para obtener la solución del problema más fácilmente, como en el ejercicio 7) que se presenta a continuación. Es preciso señalar que este esquema de valor y vector propio, o en su defecto acciones, es empleado al interior de una acción más global, la cual consiste en obtener el límite de una sucesión de potencias de una matriz.

> **7).** Un jugador comienza un juego de cambio colocando una marca en el cuadro 2, marcado como inicio [Véase la Figura 4.9]. Un dado es lanzado, y la marca es movida

un cuadro a la izquierda si el resultado es 1 o 2 y un cuadro a la derecha si es 3, 4, 5 o 6. Este proceso continúa hasta que la marca esté en el cuadro 1, en cuyo caso se gana el juego, o en el cuadro 4, en el cual se pierde el juego. ¿Cuál es la probabilidad de ganar este juego? Sugerencia: En lugar de diagonalizar la matriz de transición adecuada A, es más fácil representar e_2 como una combinación lineal de vectores propios de A y aplicar A^n al resultado. (Friedberg et al., 2003b, p. 309)

Ganar 1	Inicio 2	3	Perder 4

Figura 4.9. Tabla del juego descrito en el problema 7

El problema se puede resolver aplicando el proceso de diagonalización a la matriz A, que en este caso es una matriz de transición de cuatro estados (ganar, inicio, casilla 3, perder), y omitir la sugerencia dada por los autores; la solución estaría dada por $\lim_{n\to\infty} A^n e_2$, donde $e_2 = (0,1,0,0)$ es el vector de probabilidad, cuyas coordenadas corresponde a las casillas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. En el caso anterior el lector sólo estaría ejecutando, sobre la matriz, *acciones de valor y vector propio y de límite de la sucesión de potencias de la matriz* A, sin percatarse que al final lo que interesa es la segunda columna de $\lim_{n\to\infty} A^n$ ya que en ésta se encuentra la solución al problema, específicamente en la primera entrada, como se observa a continuación.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Ganar} \\ \text{Inicio} \\ \text{Casilla 3} \\ \text{Perder} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Ganar} & \text{Inicio} & \text{Casilla 3} & \text{Perder} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

Puesto que la entrada $A_{12} = \frac{1}{3}$ representa la probabilidad de transición del estado de inicio al de ganar, se requiere conocer su comportamiento en el $\lim_{n\to\infty} A^n$; específicamente esta entrada corresponde a la primera coordenada del vector columna, determinado por el producto $\lim_{n\to\infty} A^n e_2$. Considerando lo anterior, utilizar la sugerencia proporcionada en el ejercicio ahorra bastante trabajo algorítmico, pero requiere de una fuerte conexión del concepto valor y vector propio con el concepto de combinación lineal.

Siendo que la matriz de transición es una matriz de $4x4$, a lo más tiene cuatro valores propios distintos. Mediante una concepción proceso de valor y vector propios es posible determinar los valores y vectores propios de la matriz A. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ son los valores propios de A y v_1, v_2, v_3, v_4 sus correspondientes vectores propios, entonces una concepción *acción de combinación lineal* permite al lector encontrar escalares a_1, a_2, a_3, a_4 específicos tales que:

$$e_2 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4.$$

Como lo que interesa es calcular $\lim_{n\to\infty} A^n e_2$, entonces:

$$\begin{aligned} A^n e_2 &= A^n(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4) \\ &= a_1 A^n v_1 + a_2 A^n v_2 + a_3 A^n v_3 + a_4 A^n v_4 \end{aligned}$$

Una concepción objeto de valor y vector propio permite determinar y usar que $A^n v = \lambda^n v$, la cual es una aplicación[42] iterativa de A sobre v; esto permite obtener la siguiente relación:

$$A^n e_2 = a_1 \lambda_1^n v_1 + a_2 \lambda_2^n v_2 + a_3 \lambda_3^n v_3 + a_4 \lambda_4^n v_4$$

En la expresión anterior es evidente el requerimiento de la concepción objeto de valor y vector propio, puesto que en este caso la acción que se ejecuta sobre ellos es la suma aritmética; pero, a

[42] El resultado $A^n v = \lambda^n v$ previamente ha sido dejado como ejercicio en la sección de 5.1 del texto, véase el ejercicio 15, p. 259. La demostración del resultado requiere de una concepción objeto de valor y vector propio, para aplicar de forma iterativa la transformación T o A sobre el valor y vector propio. Por ejemplo, si v es un vector propio de T entonces $T(v) = \lambda v$, por lo tanto $T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$.

su vez, también es necesaria la concepción objeto para aplicar el límite, de nuestro interés, en cada miembro de la expresión.

$$\lim_{n\to\infty} A^n e_2 \quad = \quad a_1 \lim_{n\to\infty}(\lambda_1^n v_1) + a_2 \lim_{n\to\infty}(\lambda_2^n v_2) + a_3 \lim_{n\to\infty}(\lambda_3^n v_3) + a_4 \lim_{n\to\infty}(\lambda_4^n v_4)$$

Por lo tanto, la existencia del límite $\lim_{n\to\infty} A^n e_2$ recae sobre los valores propios de A, así que el vector deseado es una combinación lineal de vectores propios, cuyos escalares dependen del límite de cada valor propio. De hecho, si $|\lambda| < 1$ o $\lambda = 1$, esto implica la existencia del límite anterior, por consiguiente algunos escalares serán ceros, lo que simplifica aún más los cálculos.

4.3.4 Subespacios Invariantes y el Teorema de Cayley-Hamilton

En la presente sección se desarrolla el concepto de subespacio invariante, aunque su definición ha sido ya presentada al lector, dentro de la sección 2.1 de ejercicios del capítulo 2, en el que se abordan las transformaciones lineales y matrices. Así que se retoma la definición de subespacio invariante y posteriormente se ilustra por medio de dos ejemplos.

> **Definición**. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V. Un subespacio W de V es llamado un subespacio T-invariante de V si $T(W) \subseteq W$, es decir, si $T(v) \in W$ para todo $v \in W$. (Friedberg et al., 2003b, p. 313)

Las estructuras mentales que están implícitas en la definición son: concepción proceso de transformación lineal y objeto de espacio vectorial. La concepción objeto de espacio vectorial es requerida para identificar a W como un subconjunto de V que preserva la estructura de espacio vectorial, es decir, un subespacio vectorial, así que en particular W es un espacio vectorial, el cual es requerido como objeto para aplicar sobre él la transformación lineal T (operador lineal). Por lo tanto, el proceso cognitivo subespacio T-invariante consiste en verificar que la imagen de todo elemento de W (objeto) sigue siendo elemento de W.

Seguido de la definición de subespacio T-invariante son presentados dos ejemplos. El primero de ellos consiste en una lista de subespacios, ya conocidos por el lector, que son T-invariantes. El segundo ejemplo aborda un caso un poco más específico. A continuación se presentan estos dos ejemplos.

Ejemplo 5.4.1. “Suponga que T es un operador sobre un espacio vectorial V. Entonces los siguientes subespacios de V son T-invariantes:

1. $\{0\}$
2. V
3. $R(T)$
4. $N(T)$
5. E_λ, para cualquier λ de T.” (Friedberg et al., 2003b, p. 313)

La demostración de ello es dejada como ejercicio al lector (ejercicio 3). Los primeros cuatro casos ($\{0\}, V, R(T), N(T)$) ya han sido dejados como ejercicios anteriormente[43], por lo que se puede asumir que el lector ya conoce que estos subespacios son T-invariantes. En el caso del espacio propio E_λ, sus elementos son los vectores propios correspondientes al valor propio λ, los cuales deben ser percibidos como objetos, a los que se les puede aplicar el operador lineal T (concepción proceso de transformación lineal) para determinar que su imagen es otro vector propio correspondiente al mismo valor propio λ.

Ejemplo 5.4.2. El ejemplo presenta un operador lineal particular sobre R^3, así como dos subespacios particulares de R^3. El operador lineal T sobre R^3 es definido por

$$T(a, b, c) = (a + b, b + c, 0).$$

Los subespacios son el plano-xy $= \{(x, y, 0): x, y \in R\}$ y el eje x $= \{(x, 0,0): x \in R\}$. Los autores asumen que para el lector es claro que estos subespacios son T-invariantes, pues inmediatamente comentan “son subespacios T-invariantes de R^3” (Friedberg et al., 2003b, p. 313), sin demostrarlo

[43] Véase la página 77 de la sección 2.1 del texto.

explícitamente. El ejemplo demanda una concepción acción de subespacio T-invariante, ya que tanto el operador como los subespacios sobre los cuales actúa son dados explícitamente.

Posteriormente es definido el concepto de subespacio T-cíclico de V generado por x, como el subespacio:

$$W = gen(\{x, T(x),\ T^2(x), \dots\}),$$

donde x es un elemento de V distinto de cero[44]. Este subespacio permite, de manera fácil, determinar si W es un subespacio T-invariante, además desempeña un papel muy importante en el estudio de operadores no diagonalizables que se abordarán en los siguientes capítulos del libro, según comentan los autores.

Los ejemplos 5.4.3 y 5.4.4, referidos en el texto como ejemplos 3 y 4, abordan ejemplos de operadores lineales sobre los espacios vectoriales R^3 y $P(R)$, y en ellos se determina el subespacio T-cíclico de un elemento particular del espacio vectorial[45]. Sin embargo, centraremos nuestra atención en cómo la teoría general de los espacios invariantes es vinculada con el esquema de valor y vector propio.

Como se mencionó anteriormente, aplicar la transformación lineal (en este caso, operador lineal) T sobre un subespacio W de V, requiere de una concepción objeto de subespacio vectorial, pero, a la vez, el esquema de transformación lineal se enriquece al considerar que la nueva transformación $T: W \to W$ es un operador lineal sobre W, donde la propiedad de que W sea T-invariante es fundamental para ello; este nuevo operador lineal puede ser estudiado por sí solo. La concepción objeto de subespacio vectorial permite obtener la restricción del operador lineal $T: V \to V$ al subespacio W la cual es denotada por T_W. Siendo T_W un operador lineal es posible hablar de su matriz asociada, respecto de alguna base ordenada de W y de su polinomio característico, entre

[44] Es importante aclarar que $T^2(x) = T(T(x))$, indica composición del operador lineal.

[45] En la página 314 del texto se presentan los ejemplos 3 y 4, referidos al concepto de subespacio T-cíclico.

otras propiedades de T_W que permiten obtener información de $T: V \to V$, como lo muestran los resultados siguientes.

Teorema 5.21. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, y W un subespacio T-invariante de V. Entonces el polinomio característico de T_W divide al polinomio característico de T. (Friedberg et al., 2003b, p. 314)

Teorema 5.22. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, y W un subespacio T-cíclico de V generado por un vector distinto de cero $v \in V$. Sea $k = dim(V)$. Entonces:

a) $\{v,\ T(v), T^2(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ es una base para W.

b) Si $a_0 v + a_1\, T(v) + a_2 T^2(v) + \cdots + a_{k-1} T^{k-1}(v) + T^k(v) = 0$, entonces el polinomio característico de T_W es
$f(t) = (-1)^k (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{k-1} t^{k-1} + t^k)$. (Friedberg et al., 2003b, p. 315)

Los teoremas anteriores son presentados al lector, seguido de un ejemplo para cada caso. Una consecuencia de estos resultados es el Teorema de Cayley-Hamilton, que será utilizado en capítulos posteriores. Sin embargo, hasta el momento, los resultados presentados no muestran una relación directa con los conceptos de espacio propio, valores y vectores propios de un operador lineal. Los teoremas anteriores abordan cuestiones más generales sobre espacios T-invariantes, que se desarrollan un poco ajenas a los conceptos anteriores; la única conexión, por el momento, fue la presentada al principio de la sección al decir que el espacio propio E_λ es un espacio T-invariante.

El siguiente teorema permite relacionar la diagonalizabilidad de un operador lineal con los subespacios T-invariantes como se muestra en la discusión posterior.

Teorema 5.24. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, suponga que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$, donde W_i es un subespacio T-invariante de V para cada i $(1 \leq i \leq k)$. Suponga que $f_i(t)$ es el polinomio característico de T_{W_i} $(1 \leq i \leq k)$. Entonces $f_1(t) \cdot f_2(t) \cdots f_k(t)$ es el polinomio característico de T. (Friedberg et al., 2003b, p. 318)

Posterior a este resultado los autores presentan al lector una breve descripción de cómo es que se relaciona con operadores diagonalizables. Al respecto comentan: Si T es un operador diagonalizable sobre el espacio vectorial V, con valores propios $\lambda_{1,}\lambda_{2,},\ldots,\lambda_k$ distintos, entonces, por resultados anteriores, V es la suma directa de los espacios propios correspondientes a cada valor propio λ_i. Ahora bien, como se sabe que cada espacio propio E_{λ_i} es un subespacio T-invariante, es posible definir el operador T_{W_i} para cada uno de estos espacios (propios) y aplicar el teorema anterior. El polinomio característico de cada T_{W_i} es $(\lambda_i - t)^{m_i}$, donde m_i representa la dimensión de E_{λ_i}. Por lo tanto, haciendo uso del Teorema 5.24, el polinomio característico $f(t)$ del operador T es el producto:

$$f(t) = (\lambda_1 - t)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - t)^{m_2} \cdots (\lambda_k - t)^{m_k}.$$

Esta relación establecida entre subespacios T-invariantes y operadores diagonalizables permite que el esquema de valor y vector propio se enriquezca. Por ejemplo, en las secciones anteriores se brindó al lector una manera de encontrar los respectivos espacios propios de un operador lineal T a partir de su polinomio característico, determinando sus valores propios y el espacio que éstos generan; ahora, es posible determinar el polinomio característico de T a partir de los espacios propios, y aún más, obtener la matriz asociada a la transformación T, por medio de las matrices asociadas a cada espacio propio. Desafortunadamente, no se proporcionan ejemplos que ayuden a hacer más evidente esta relación. En su lugar se presenta un ejemplo con dos subespacios invariantes en R^4, que no son espacios propios.

Ejemplo 5.4.5. Este ejemplo es referido en el texto como el ejemplo 8, en él se muestra un operador lineal T sobre R^4 definido como:

$$T(a, b, c, d) = (2a - b, a + b, c - d, c + d),$$

y los subespacios de R^4, $W_1 = \{(s, t, 0,0): s, t \in R\}$ y $W_2 = \{(0,0, s, t): s, t \in R\}$. Las concepciones proceso y objeto de subespacio T-invariante permiten al lector identificar que W_1 y W_2 son invariantes bajo el operador lineal T, y que el espacio vectorial R^4 se puede escribir como la suma directa de estos espacios, $R^4 = W_1 \oplus W_2$. El esquema de espacio vectorial es utilizado para determinar una base para cada uno de los subespacios T-invariantes, así como determinar la matriz asociada de los operadores T_{W_1} y T_{W_2} respecto a estas bases.

Las bases ordenadas canónicas para cada subespacio son $\beta_1 = \{e_1, e_2\}$ y $\beta_2 = \{e_3, e_4\}$, respectivamente. La matriz asociada a cada una de las transformaciones, respecto a las bases β_1 y β_2 son las siguientes matrices:

$$B_1 = [T_{W_1}]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = [T_{W_2}]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una concepción objeto de base ordenada es utilizada para determinar que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ es una base ordenada para el espacio vectorial R^4, sobre la cual se puede obtener la matriz asociada a la transformación T.

$$A = [T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la matriz A se puede observar que

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix},$$

es decir, la matriz A es obtenida por adherir las matrices B_1 y B_2 en su diagonal. Esto permite a los autores del libro brindar la siguiente definición al lector.

Definición. Sea $B_1 \in M_{mxm}(F)$, y $B_2 \in M_{nxn}(F)$. Definimos la suma directa de B_1 y B_2, denotada por $B_1 \oplus B_2$, como la matriz A de $(m+n)x(m+n)$, tal que

$$A = \begin{cases} (B_1)_{ij} & \text{Para } 1 \leq i,j \leq m \\ (B_2)_{(i-m),(j-m)} & \text{Para } m+1 \leq i,j \leq n+m \\ 0 & \text{De otro modo.} \end{cases}$$

Si $B_1, B_2, \dots, B_k$ son matrices cuadradas con entradas en F, entonces definimos, la suma directa de $B_1, B_2, \dots, B_k$ recursivamente por

$$B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k = (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_{k-1}) \oplus B_k.$$

Si $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k$, entonces escribimos

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & O & \dots & O \\ O & B_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & B_K \end{pmatrix}$$ (Friedberg et al., 2003b, p. 320)

La definición anterior es ilustrada con un ejemplo de tres matrices.

Ejemplo 5.4.6. Dadas las siguientes matrices B_1, B_2 y B_3 se calcula la matriz A que es la suma directa de las matrices anteriores.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = (3) \text{ y } B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

El ejercicio sólo demanda una concepción objeto de matriz, para poderlas operar según la definición presentada previamente.

Los ejemplos 5.4.5 y 5.4.6 preparan al lector para enunciar el siguiente teorema, el cual es una generalización del ejemplo 5.4.5 e incluye la definición de suma directa de matrices ejemplificada en 5.4.6.

Teorema 5.25. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, y sea $W_1, W_2, \dots, W_k$ subespacios T-invariantes de V tal que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$. Para cada i, sea β_i una base ordenada para W_i, y $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_k$. Sea

$A = [T]_\beta$ y $B_i = [T_{W_i}]_{\beta_i}$ para $i = 1,2, \dots, k$. Entonces $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k$. (Friedberg et al., 2003b, p. 321)

El teorema demanda una concepción objeto de subespacio T-invariante, al establecer en la hipótesis que el espacio vectorial V es la suma directa de ellos; una concepción proceso y objeto de base ordenada, las cuales son requeridas para encontrar una base para cada espacio W_i T-invariante y cuya unión de bases resulta en una base para V. Por último, una concepción objeto de matriz asociada a cada uno de los operadores T_{W_i}, es necesaria para obtener la matriz A como suma directa de cada $[T_{W_i}]_{\beta_i}$.

4.3.4.1 Ejercicios

En esta sección se proponen 42 ejercicios al lector. Estos ejercicios, en su mayoría, se enfocan en demostrar propiedades de los espacios T-invariantes, T-cíclicos; del polinomio característico de la restricción de T a un subespacio W, (T_W), entre otros. Sin embargo, estos conceptos se pueden desarrollar de forma independiente a los conceptos de valor y vector propio. Es por ello que hemos centrado nuestra atención en los ejercicios que buscan relacionar los conceptos previamente mencionados, con los conceptos de valor y vector propio, que son de nuestro interés. Teniendo en cuenta lo anterior, hemos encontrado únicamente 14 ejercicios que requieren de objeto o esquema de valor y vector propio, como se muestra en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4. Agrupación de los ejercicios de la sección 5.4, según la construcción mental promovida y/o requerida en su solución

Construcción mental promovida y/o requerida	Cantidad de ejercicios	Porcentaje[46]
Objeto	4	9%
Esquema	10	24%
Otro	28	67%

[46] El porcentaje mostrado es una aproximación, ya que se aplicó el redondeo de las cantidades.

Objeto

> **8).** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial con un subespacio W T-invariante. Pruebe que si v es un vector propio de T_W con correspondiente valor propio λ, entonces lo mismo es cierto para T. (Friedberg et al., 2003b, p. 322)

Aunque demostrar la afirmación es bastante sencillo matemáticamente, cognitivamente requiere de una concepción objeto de vector propio, esquema de espacio vectorial y transformación lineal. Como v es un elemento de W, que es un subespacio T-invariante de V, la concepción objeto de v y el esquema de espacio vectorial permite al lector percibir que a su vez v es un elemento de V, y como tal, es posible aplicar el operador T sobre él. El esquema de transformación lineal es necesario al considerar que T_W es la misma transformación que T, sólo que es aplicada a un espacio vectorial más pequeño contenido en V, entonces se establece la relación:

$$T(v) = T_W(v) = \lambda v.$$

Mostrando así que v es también un vector propio de T.

> **23).** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, y W un subespacio T-invariante de V. Suponga que $v_1, v_2, \dots, v_k$ son vectores propios de T correspondientes a distintos valores propios. Pruebe que si $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ está en W, entonces $v_i \in W$ para todo i. Sugerencia: Use inducción matemática sobre k. (Friedberg et al., 2003b, p. 324)

La concepción objeto de vector propio es necesaria para operarlos aritméticamente y percibir a esta suma como un elemento de W; esto permite al lector aplicar el principio de inducción matemática sobre el número de vectores propios (k), para demostrar que si $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ está en W necesariamente $v_1, v_2, \dots, v_k$ también están en W.

Esquema

> **24).** Pruebe que la restricción de un operador T diagonalizable a cualquier subespacio T-invariante no trivial es diagonalizable. Sugerencia: Use el resultado del ejercicio 23. (Friedberg et al., 2003b, p. 324)

El esquema de valor y vector propio permite al lector relacionar los conceptos valor y vector propio, espacio propio y base ordenada, los cuales son requeridos para mostrar que el subespacio W es diagonalizable, es decir, que existe una base de vectores propios para W. Dado que T es diagonalizable y está definido sobre un espacio vectorial V, del cual W es un subespacio, la concepción objeto de espacio propio de V permite al lector considerar que los diferentes espacios propios, correspondientes a distintos valores propios de T, se pueden intersectar con el subespacio W, generando espacios propios para W. En cada espacio propio producido por la intersección de W con algún espacio propio de V, es posible determinar una base de vectores propios, los cuales deben ser percibidos como objetos para tal fin. Entonces, una posible base de vectores propios para W, podría ser generada por la unión de bases de los subespacios propios de W. El proceso cognitivo de base ordenada es requerido junto con la sugerencia presentada en el ejercicio, para determinar que en efecto la unión de bases, de cada espacio propio de W, genera una base de vectores propios para el subespacio W T-invariante.

> **36).** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Pruebe que T es diagonalizable si y sólo si V es la suma directa de subespacios T-invariantes de dimensión uno. (Friedberg et al., 2003b, p. 327)

El lector debe ser consciente de que un espacio propio es además un espacio T-invariante, es decir, es invariante bajo el operador lineal T. Esta nueva forma de percibir al espacio propio le permite considerar que los subespacios T-invariantes de dimensión uno, son espacios propios generados por un sólo vector (propio). Por lo tanto, puede evocar resultados que relacionen los conceptos de diagonalización, espacios propios y suma directa de subespacios. De esta forma, puede concluir que V es la suma directa de subespacios de dimensión uno si y sólo si el conjunto generado al tomar un vector propio de cada subespacio forma una base para V, respecto a la cual T se puede diagonalizar.

4.4 El lector modelo

Aunque el requisito mínimo que se pide al lector del libro *Linear Algebra* (Friedberg, Insel y Spence, 2003) es que haya tomado un curso de cálculo durante un año, los autores aclaran que se requiere de la sofisticación matemática típica de los últimos dos años de las matemáticas superiores. Esto último puede ser un problema para el lector, ya que los cursos de álgebra lineal, en el sistema educativo mexicano, generalmente son impartidos durante los primeros semestres de las licenciaturas o ingenierías. De hecho los autores del texto aclaran que:

> Este libro es especialmente adecuado para un segundo curso de álgebra lineal que hace hincapié en los espacios vectoriales abstractos, aunque se puede utilizar en un primer curso con un fuerte énfasis teórico. (Friedberg et al., 2003b, p. ix)

Lo anterior exige en el lector modelo un alto nivel de abstracción para poder comprender las ideas matemáticas que los autores intentan mostrar en este libro. Además de los conocimientos en cálculo es deseable que el lector esté familiarizado con los conceptos de conjunto y campo, puesto que estos conceptos son necesarios para el estudio de los espacios vectoriales, que son el primer tema abordado en este libro; no obstante, los conceptos anteriores (conjunto y campo) son tratados brevemente en el apartado de apéndices del libro, donde de igual forma se abordan los conceptos función, números complejos y polinomios, los cuales son utilizados a lo largo del libro.

Sierpinska (1997) menciona que el lector modelo es también construido a través del texto. En la revisión realizada en la sección anterior sobre las construcciones mentales promovidas y/o requeridas en los ejemplos, resultados (teroemas, corolarios, proposiciones) y ejercicios, referentes a los conceptos valor propio y vector propio, hemos identificado principalmente el uso de dos esquemas que están en constante interacción; estos son el *esquema de espacio vectorial* y el *esquema de transformación lineal*. Sin embargo, como ya se ha mencionado anteriormente, la intención de esta investigación no es indagar si la construcción de tales esquemas es promovida en el lector.

Por lo tanto el lector modelo debe poseer, además del prerrequisito señalado anteriormente, un esquema sólido de transformación lineal y de espacio vectorial; estos esquemas se enriquecen e interactúan al intentar dar solución al problema de diagonalizar operadores lineales, generando nuevo conocimiento (valores y vectores propios) mediante la construcción y reconstrucción de acciones, procesos u objetos, con el fin de resolver el problema (Cottrill et al., 1996, p. 170).

El esquema de transformación lineal es central en el desarrollo de los conceptos valor propio y vector propio, puesto que éstos surgen como una condición necesaria sobre los operadores lineales para poder ser diagonalizables. Además, el esquema de transformación lineal permite al lector ser consciente en el tránsito entre la representación algebraica (T) y matrical ($[T]_{\beta}$), manejada constantemente en el texto, para encontrar los valores y vectores propios de un operador lineal, ya que resolver este problema a menudo resulta más fácil en términos de matrices. Respecto al esquema de espacio vectorial, éste permite al lector considerar a los vectores propios de un operador lineal como vectores especiales, que satifacen una condición muy importante ($T(v) = \lambda v$), con los cuales es posible construir una base para el espacio vectorial en cuestión; además, considerarlos como subespacios (espacio propio) de un espacio vectorial y hablar de las propiedades de estos subespacios como la dimensión y su relación con la multiplicidad de los valores propios; o bien, que estos subespacios (formados por vectores propios) tienen la propiedad de ser invariantes bajo el operador lineal en cuestión (T-invariantes).

CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones de la presente investigación. En primer lugar se señalan las conclusiones respecto a las preguntas y el objetivo de investigación, enfatizando dos procesos cognitivos inferidos del análisis. Posteriormente se comentan algunas recomendaciones a considerar en el estudio de los conceptos valor y vector propio, así como algunas sugerencias para investigaciones futuras.

5.1 Sobre las preguntas y el objetivo de la investigación

En la presente investigación se plantearon tres cuestionamientos iniciales, cuyas respuestas podrían ayudar a inferir un camino cognitivo que guía el discurso del texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b) para los conceptos valor y vector propio, en particular la existencia de una descomposición genética de forma implícita. Estos mismos cuestionamientos motivaron los criterios propuestos para analizar este texto.

Sobre el cuestionamiento ¿Qué conocimientos previos consideran los autores que debe poseer el estudiante (lector) antes de abordar los conceptos valor y vector propio?, hemos mencionado en el capítulo anterior (sección 4.1) que los conocimientos previos que el texto considera como necesarios para abordar los conceptos valor y vector propio, son:

- Espacio vectorial
- Transformaciones lineales y su relación con matrices
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Determinantes

De estos temas, los primeros dos son requeridos como esquemas; siendo central en este estudio el esquema de transformación lineal, ya que es a partir del problema de diagonalizar operadores lineales que se motiva, en el texto analizado, el estudio de los conceptos valor y vector propio. La cualidad de que un operador lineal sea diagonalizable depende de su representación matricial (matriz asociada a una transformación lineal), la cual a su vez depende de la elección de una base ordenada para el espacio vectorial en el que se define dicho operador. Por lo tanto, el problema de diagonalizar consiste en buscar, si es que existe, una base ordenada que permita representar a un operador lineal mediante una matriz diagonal. Es dentro de este contexto que surgen los conceptos valor y vector propio, como un camino viable para resolver el problema de diagonalizar un operador lineal. El esquema de transformación lineal permite al lector tener presente varias relaciones entre el concepto transformación lineal y otros conceptos, como por ejemplo, espacio vectorial, base ordenada, matriz asociada a una transformación lineal y dimensión; los cuales intervienen en la solución del problema de diagonalización. Además, como el esquema de transformación lineal incluye al concepto transformación y sus diferentes representaciones, matricial (A) y algebraica (T) (Maturana, Parraguez y Trigueros, 2015); esto permite determinar los valores y vectores propios de un operador lineal en alguna de su representaciones, que a menudo suele ser mediante matrices por simplicidad, y posteriormente determinar sus equivalentes en otra representación. Un caso de lo anterior es el ejemplo 5.1.7, en el cual se presenta un operador lineal sobre $P_2(R)$; el problema es resuelto en el contexto de matrices y a partir de ello se determinan los equivalentes valores y vectores propio en el espacio vectorial inicial ($P_2(R)$). En el libro que analizamos, esta relación entre los vectores propios de matrices y operadores lineales es dada por medio del isomorfismo ϕ_β, del cual se habló en la página 77 de este documento.

Respecto a la pregunta ¿Qué estructuras mentales están implícitas en la forma en que los autores presentan la definición de los conceptos de valor y vector propio?, se ha identificado que las estructuras mentales involucradas en las dos definiciones, presentadas por el texto, localmente son distintas (ver sección 4.2.2). Por ejemplo, en la definición dada en términos de la representación algebraica de operador lineal, $T(v) = \lambda v$, se requiere de una concepción objeto de vector (v) y una concepción proceso de operador lineal (T); estas concepciones permiten al lector identificar que un vector v, elemento de un espacio vectorial, es un vector propio de T si su imagen bajo T es un múltiplo escalar del vector inicial, es decir, λv. Por otra parte, en la definición dada para matrices, $Av = \lambda v$, el vector v y la matriz A son requeridos como objetos, esto para poder operarlos bajo multiplicación y de esta forma reconocer que un vector v es vector propio de A si el producto Av es un múltiplo escalar del vector v. Se resalta que ambas definiciones demandan de una concepción proceso de los conceptos valor y vector propio, ya que se debe pensar en un vector no específico cuya transformación mediante T o A genera un múltiplo escalar de sí mismo (λv). Las dos definiciones presentadas en el libro de texto son matemáticamente equivalentes[47], sin embargo en términos de estructuras mentales son distintas. De acuerdo a Hillel (2000) los diferentes lenguajes de descripción de los objetos del álgebra lineal comúnmente se emplean como equivalentes, aunque no lo son; este hecho es evidenciado en las definiciones dadas por el texto, respecto a las estructuras mentales exigidas en cada una de ellas para su comprensión.

En la Tabla 5.1 se muestra la diferencia existente entre una concepción acción de vector propio, en los casos de la representación algebraica, matricial y geométrica de un operador lineal. En el texto analizado son mayormente utilizadas la representación matricial y la representación algebraica cuando el espacio vectorial V en cuestión es de dimensión finita, por ejemplo R^n o $P_n(R)$; en contraste la representación geométrica es menos favorecida. Pese a que el texto proporciona algunas representaciones geométricas para visualizar el efecto que produce un operador lineal T sobre sus vectores propios según el correspondiente valor propio (Figura 4.6), dichas representaciones son bastante generales y no hay casos previos que permitan apoyar a su entendimiento.

[47] Desde el punto de vista de que toda transformación lineal se puede representar mediante una matriz, y a toda matriz le corresponde una transformación lineal.

<table>
<tr><th colspan="3">Concepción acción de vector propio</th></tr>
<tr><td>Algebraica</td><td>Matricial</td><td>Geométrica</td></tr>
<tr>
<td>Espacio vectorial: V

$T(v) = \lambda v$

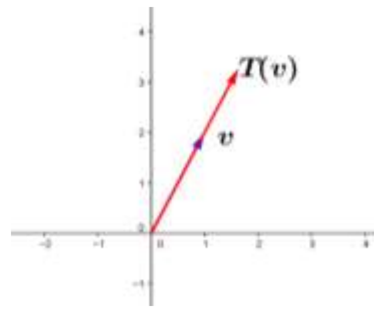
La acción consiste en evaluar el operador T en el vector v, y comparar la imagen del vector, $T(v)$, con el vector inicial. Esta comparación permite determinar si el vector imagen es un múltiplo escalar del vector v.</td>
<td>Espacio vectorial: F^n

$Av = \lambda v,$

donde $A \in M_{nxn}(F)$ y

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$

La acción consiste en multiplicar el vector coordenado v con la matriz A y comparar si el vector producto de la multiplicación, Av, es un múltiplo escalar del vector coordenado inicial.</td>
<td>Espacio vectorial: R^2



Una acción consiste en graficar v y su imagen $T(v)$; posteriormente se comparan estos vectores y se determina si son colineales. Esta acción realizada en R^2, es similar en R^3.</td>
</tr>
</table>

Tabla 5.1. Concepción acción de vector propio en las tres representaciones de un operador lineal

El tercer cuestionamiento fue: ¿Qué estructuras mentales son promovidas y/o favorecidas en el lector a través de los ejemplos, teoremas y ejercicios que le son presentados por el texto? Respecto a los ejemplos presentados en el texto se ha evidenciado que la concepción *acción de valor y vector propio* es la más favorecida en ellos, puesto que en la mayoría de los ejemplos se abordan casos específicos de operadores lineales o matrices en donde se requiere determinar sus valores y vectores propios. Mientras que en los resultados teóricos como teoremas y proposiciones las concepciones *proceso y objeto de valor y vector propio* son las que se favorecen más, ya que en ellos, por su carácter general, se requiere pensar en vectores y valores propios no específicos sobre los cuales se ejecuta alguna acción, como por ejemplo la comparación (ver Teorema 5.5 y 5.8). Sin embargo, los ejemplos que demandan de una concepción acción son presentados después de algún teorema o proposición, los cuales requieren de una estructura cognitiva más elaborada (proceso u objeto) para su comprensión. Bajo el enfoque teórico APOE y con el fin de construir el significado de algún concepto matemático, se sugiere abordar casos específicos antes de afrontar casos más generales, ya que mediante la reflexión sobre los casos específicos (ejemplos) se podría facilitar la interiorización de acciones, y por ende la comprensión de los teoremas o proposiciones presentadas en el libro de texto.

5.1.1 Sobre los ejercicios

En cuanto a los ejercicios planteados en el texto, estos no son presentados conforme a la progresión propuesta por la teoría APOE, es decir, primero ejercicios que demanden de una concepción acción y posteriormente aquellos que requieran de proceso u objeto. En su defecto el texto propone, en todas sus secciones de ejercicios, que el lector responda a enunciados de falso y verdadero, con el fin de que tenga presente propiedades de los conceptos valor y vector propio que no son abordadas dentro de su discusión, y sobre las cuales el lector debe reflexionar antes de abordar ejercicios más complejos. Sin embargo, en el análisis realizado se ha evidenciado que este tipo de ejercicios a menudo requieren de un concepción proceso u objeto de los conceptos valor y vector propio, por lo que desde nuestro análisis consideramos que sería más pertinente para el lector responder a estos enunciados al finalizar la sección respectiva de ejercicios, ya que de esta forma se fomentaría la reflexión sobre los ejercicios anteriormente realizados, los cuales incluyen la realización de acciones.

Otro aspecto que resaltamos sobre el análisis de los ejercicios, es que hay una notable incidencia de ejercicios que sólo requieren en su solución de una concepción acción de los conceptos valor y vector propio (Tabla 5.2); en estos ejercicios es suficiente con recordar algún algoritmo presentado en los ejemplos mostrados en el texto, o bien sólo recordar alguna definición o resultado (teorema o proposición) para resolver el ejercicio. No obstante, puede suceder que para el caso en el que se requiera utilizar resultados teóricos, el lector sea consciente de las relaciones entre los conceptos involucrados en los teoremas o proposiciones y los utilice de forma apropiada; en ese caso se podría hablar de un esquema de los conceptos de estudio (valor y vector propio). Lo anterior sólo pudiese ser constatado mediante una entrevista directa con el usuario del texto que se enfrenta a tal situación.

Construcción mental	Porcentaje[48]
Acción	34.8%
Proceso	25.7%
Objeto	27.2%
Esquema	39.3%

Tabla 5.2. Porcentaje de ejercicios clasificados de acuerdo a la estructura mental requerida

Si bien el texto presenta un porcentaje notable de ejercicios en los que sólo se fomentan acciones, esto no debe considerarse como algo negativo, ya que en la teoría APOE la realización de acciones es fundamental en la construcción del concepto de interés, siempre y cuando se promueva la reflexión sobre estas acciones.

5.1.2 Dos procesos cognitivos inferidos en el texto

Respecto a los ejemplos presentados en el libro de texto, consideramos los tres primeros ejemplos mostrados en el capítulo 5 del libro analizado, como representativos de su intención didáctica sobre el aprendizaje de los conceptos valor y vector propio; ya que la forma en que un concepto es presentado por primera vez a un estudiante, en este caso a un lector, influye en su manera de comprender dicho concepto. Además, estos ejemplos son los referentes con los que puede contar el lector para seguir el desarrollo del discurso presentado alrededor de los conceptos valor y vector propio.

El ejemplo 5.1.1, mostrado en el contexto matricial, presenta un par de vectores específicos y se desea determinar si son vectores propios de una matriz A particular, por lo que sólo demanda de

[48] Se aclara que los porcentajes no suman estrictamente el 100%, ya que algunas cantidades fueron repetidas; por ejemplo, el número de ejercicios considerados en la categoría de acción o esquema, se consideran las cantidades tanto como para acción y esquema, respectivamente.

una concepción *acción de vector propio*; para ello tanto la matriz como los vectores deben ser percibidos como objetos para realizar las manipulaciones aritméticas correspondientes. Inmediatamente después se presenta el ejemplo 5.1.2 que requiere de una concepción *proceso de vector propio* en el contexto geométrico. Sin embargo, este proceso no proviene de la interiorización de la acción presentada en el ejemplo 5.1.1, puesto que el ejemplo 5.1.2 requiere pensar en si los vectores del espacio vectorial en cuestión (R^2) y sus respectivas imágenes bajo el operador lineal, mostrados en el ejemplo, son o no colineales. Por otra parte, el ejemplo 5.1.3 también requiere de una concepción proceso, pero en el contexto algebraico. El proceso requerido en el ejemplo 5.1.3 tampoco proviene directamente de la interiorización de la acción motivada en el ejemplo 5.1.1. Resaltamos que si bien el libro define la multiplicación de matrices por un vector como un operador lineal, L_A mencionado en el Capítulo 4 de este documento, las estructuras mentales demandadas en cada representación, algebraica y matricial, no son las mismas; en ambas se requiere de una concepción objeto de vector, pero el operador lineal en su representación algebraica (T) debe ser proceso y la matriz A debe percibirse como un objeto. Aunque estas dos representaciones a lo largo del discurso que aborda el texto, referente a los conceptos valor y vector propio, se relacionan por medio de la matriz asociada a un operador lineal, o más generalmente a una transformación lineal[49], consideramos que debe estudiarse más a fondo cómo es que ocurre esta transición. ¿Realmente es tan natural para el lector o estudiante pasar de una representación a otra por medio de la matriz asociada, como se muestra en el libro de texto? ¿Cuáles son las posibles dificultades que podrían presentarse?

Como se ha mencionado, el proceso requerido en el ejemplo 5.1.3 no proviene de la interiorización de la acción involucrada en el ejemplo 5.1.1; no obstante en el libro de texto sí se presenta en la sección correspondiente de ejercicios, un ejercicio con varios incisos, a saber el ejercicio 2 (Friedberg et al., 2003b, p. 256), que promueve la realización de acciones cuya interiorización permitiría obtener el proceso demandado en el ejemplo 5.1.3. Esto implicaría que el lector tendría que recurrir, en primera instancia, a la sección de ejercicios y después volver al ejemplo 5.1.3; pero

[49] Debe recordarse que un operador lineal es una transformación lineal, en donde el dominio y codominio son el mismo espacio vectorial. En el texto analizado frecuentemente se representa como $T: V \rightarrow V$.

¿quién le indica que debe de hacer esto? Recordemos que para esta investigación hemos supuesto a un estudiante como lector quien por primera vez está aprendiendo los conceptos valor y vector propio. El texto evidentemente no hace este tipo de recomendaciones o sugerencias al lector. En el ámbito escolar un profesor con experiencia sobre el tema podría hacer tal sugerencia sobre el libro de texto a sus estudiantes, sin embargo, hablar sobre el posible uso que un profesor da al libro de texto compete a otra categoría de investigación sobre los libros de texto.

Volviendo la discusión hacia los ejemplos, señalamos que la acción presentada en el ejemplo 5.1.1, debe ser interiorizada en el proceso mental que permite concebir al lector que un vector v del espacio vectorial F^n es un vector propio de una matriz A de nxn, si para este vector v existe un escalar λ en F tal que se satisface que $Av = \lambda v$; este proceso lo denominaremos *proceso vector propio*[50], ya que cognitivamente hablando se debe pensar primero en el vector antes que en el valor (escalar), como sucede en los ejemplos 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.3. De acuerdo a la discusión seguida en el libro de texto, el proceso vector propio debe revertirse para generar otro proceso, al que denominaremos *proceso valor propio*, puesto que ahora se debe pensar primero en el escalar y en las condiciones que se tienen que satisfacer para que el escalar λ del campo F, sea un valor propio de una matriz A. Lo anterior se infiere del Teorema 5.2 (Friedberg et al.,2003b, p. 248), el cual estable que un escalar λ es un valor propio de una matriz A si y sólo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Las definiciones relacionadas con estos dos procesos se presentan a continuación en términos de operadores lineales y matrices, respectivamente.

Proceso vector propio

- "Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V. Un vector distinto de cero $v \in V$, es un vector propio de T si existe un escalar λ tal que $T(v) = \lambda v$".
- "Sea A en $M_{nxn}(F)$. Un vector distinto de cero $v \in F^n$ es llamado un vector propio de A si […] $Av = \lambda v$ para un escalar λ". (Friedberg et al., 2003b, p. 246)

[50] Aunque este proceso se presenta en el contexto matricial, consideramos que al igual que en el ejemplo 5.1.1, los ejemplos 5.1.2 y 5.1.3, mostrados en los contextos geométrico y algebraico, respectivamente, el énfasis está sobre el vector.

Proceso valor propio

- Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V. Un escalar λ es un valor propio de T si existe un vector distinto de cero $v \in V$, tal que $T(v) = \lambda v$.
- Sea A en $M_{nxn}(F)$. Un escalar λ es un valor propio de A si existe un vector $v \in F^n$ distinto de cero, tal que $Av = \lambda v$.

El proceso al que denominamos *vector propio* es el presentado en las definiciones dadas por el libro; en este proceso se parte de la existencia del objeto vector y se requiere encontrar al escalar que satisfaga la condición planteada ($T(v) = \lambda v$ o $Av = \lambda v$). Por otra parte, determinar si un escalar λ, del campo sobre el cual se define el espacio vectorial en cuestión, es un valor propio de un operador lineal o de una matriz requiere encontrar, al menos, un vector que satisfaga que: $T(v) = \lambda v$ o $Av = \lambda v$, para los respectivos casos. A este último proceso es al que damos el nombre de proceso *valor propio*, el cual no se hace explícito en las definiciones presentadas por el libro de texto. Un ejemplo de una situación donde se requiere este proceso es el Teorema 5.17, el cual establece que: "Cada matriz de transición tiene al 1 como valor propio" (Friedberg et al., 2003b, p. 298). Demostrar que una matriz A de transición, no específica, tiene al valor 1 como valor propio requiere de encontrar un vector para el cual se cumpla que $Av = 1v$ (ver página 123 de este documento).

La teoría APOE señala que un proceso puede revertirse y generar un nuevo proceso, esto por medio del mecanismo de reversión (Arnon et al., 2014, p. 23). Consideramos que la reversión de un proceso no necesariamente implica realizar los pasos de la acción interiorizada (proceso) en orden inverso; más bien debe entenderse en términos de objetos de entrada y salida. Es decir, si en un proceso se parte del objeto A (entrada) y se obtiene el objeto B (salida), entonces su proceso inverso iniciaría con B (entrada) y se obtendría A como salida (ver Figura 3.1 b). El siguiente ejemplo podría ayudar a entender la situación anterior:

> Un estudiante de cálculo puede haber interiorizado la acción de tomar la derivada de una función y ser capaz de hacer esto satisfactoriamente con varios ejemplos, utilizando varias técnicas que a menudo se enseñan y aprenden en los cursos de cálculo. Si el proceso se interioriza, el alumno podría revertirlo para resolver

> problemas en los que se da una función y se desea obtener una función cuya derivada sea la función original. (Dubinsky, 1991, p. 106)

Es en este sentido que planteamos que el proceso valor propio es inverso al proceso vector propio, ya que en este último se inicia con el vector y se encuentra el escalar, contrario a como ocurre en el proceso valor propio. Además, los procedimientos para determinar si un escalar o vector es un valor o vector propio, respectivamente, son distintos. Por ejemplo, en términos de matrices para determinar si un escalar es un valor propio de una matriz conlleva a resolver un sistema de ecuaciones lineales, mientras que para determinar si un vector es vector propio de una matriz requiere de la multiplicación de la matriz por el vector, como en el ejemplo 5.1.1, donde las ecuaciones resultantes son considerablemente más simples.

Otro aspecto importante que señalamos del Teorema 5.2 y que es el elemento clave de su demostración, es la definición del concepto valor propio presentada dentro de la demostración de este teorema, la cual dice: "Un escalar λ es un valor propio de A si y sólo si existe un vector distinto de cero $v \in F^n$, tal que $Av = \lambda v$, es decir, $(A - \lambda I_n)(v) = 0$" (Friedberg et al., 2003b, p. 248). En esta definición parece señalarse la dependencia entre el vector y el escalar, es decir, entre el vector propio y el valor propio por medio del conector lógico *"si y sólo si";* sin embargo, esto no es evidenciado en las definiciones presentadas inicialmente en el texto. Lo anterior nos hace inferir que los procesos vector propio y valor propio, mencionados anteriormente, deben coordinarse en un solo proceso al que llamaremos *proceso valor y vector propio*. De hecho, el Teorema 5.4 (Friedberg et al., 2003b, p. 250), el cual es expresado en términos de un operador lineal T, relaciona los valores y vectores propios del operador por medio de su kernel o nucleo al establecer que un vector v es un vector propio de T, correspondiente al valor propio λ, si y sólo si $v \in N(T - \lambda I)$. Sin embargo, los ejemplos posteriores a este resultado sólo demandan de una concepción acción de valor y vector propio pero en el contexto matricial, ya que en ellos se requieren encontrar los valores y vectores propios de matrices particulares. Para afrontar este tipo de ejemplos el lector requiere de reinterpretar el resultado del Teorema 5.4 en términos de matrices, es decir, debe tener presente que un vector v es un vector propio de una matriz A, correspondiente al valor propio λ, si y sólo si v está en el espacio nulo de la matriz $A - \lambda I_n$; pero esta parte es obviada por el texto al pasar directamente a ejemplos con matrices, lo que podría propiciar que el lector conciba al procedimiento de encontrar valores y vectores de matrices como ajeno al Teorema 5.4.

Respecto a la coordinación de los procesos valor propio y vector propio en un solo proceso, estamos sugiriendo la coordinación de un proceso con su respectivo proceso inverso. Consideramos necesaria esta coordinación para los conceptos valor y vector propio, ya que un individuo debe ser consciente de la dependencia conjunta entre estos conceptos, es decir, no se puede hablar del vector propio sin su correspondiente valor propio y viceversa. Los procesos valor propio y vector propio sólo enfatizan la implicación de uno de estos conceptos a partir del otro, más no la dependencia conjunta de estos conceptos. Por este motivo sugerimos que la coordinación de los procesos valor propio y vector propio debe darse mediante el conector lógico "si y sólo si" ($\Leftrightarrow$). De esta forma un individuo puede ser consciente que un vector v es vector propio de un operador lineal o matriz "si y sólo si" existe un escalar λ tal que: $T(v) = \lambda v$ o $Av = \lambda v$, según sea el caso. Desafortunadamente esta parte es obviada por el texto, ya que a través de su discurso frecuentemente se habla solo de alguno de ellos (valor propio o vector propio) asumiendo que el lector es consciente de esta dependencia entre los conceptos. De acuerdo a lo anterior, no se puede pretender que con el simple hecho de enfatizar en la definición sólo una relación implicativa ($\Rightarrow$) entre los conceptos valor y vector propio, el lector va a ser consciente de la otra relación implicativa que permanece tácita en la definición.

5.1.3 ¿Hay un camino cognitivo en el texto?

A partir de los elementos mencionados anteriormente a continuación se describe el camino que inferimos se está siguiendo en el libro de texto para el desarrollo de los conceptos valor y vector propio. Este camino matemáticamente consiste en la búsqueda de una solución al problema de diagonalizar operadores lineales, lo cual genera que el estudio de los conceptos valor y vector propio se desarrolle conforme a ello. En primer lugar, pensar en las condiciones que debe satisfacer una base para un espacio vectorial V, de dimensión finita, para que la matriz asociada al operador respecto a esta base sea diagonal, genera la condición $T(v_j) = \lambda_j v_j$, donde los v_j son los vectores de la base finita deseada. La condición anterior permite nombrar al vector v_j y el escalar λ_j como vector propio y valor propio, respectivamente. De hecho, las definiciones presentadas en el libro son bastante generales, ya que no se limitan a operadores lineales sobre espacios vectoriales de dimensión finita. A partir de aquí, se infiere el proceso vector propio y el proceso valor propio, mencionados en la sección anterior, los cuales subyacen en las representaciones algebraica y matricial de operador lineal utilizadas frecuentemente por el libro de texto. El proceso valor propio es el que permite el desarrollo del estudio de los conceptos valor y vector propio, con el propósito de encontrar un algoritmo eficiente que permita encontrar en primer lugar los valores propios de un operador lineal y posterior a ello sus respectivos vectores propios. En esta dirección se introducen los conceptos polinomio característico, descomposición del polinomio característico, multiplicidad algebraica, para construir una base de vectores propios, mediante la coordinación del proceso de base con el proceso de vector propio. El concepto espacio propio es motivado en el texto haciendo ver al lector la posibilidad de que los valores propios de un operador lineal pueden repetirse, por lo que consideran conveniente dar un nombre al conjunto de vectores propios correspondientes a un mismo valor propio. Dicho concepto (espacio propio) juega un papel importante en la diagonalización de un operador lineal, pues con los ejemplos 5.2.3 y 5.2.4 presentados en la sección correspondiente a diagonalizabilidad se muestra al lector que la multiplicidad de un valor propio y la dimensión de su respectivo espacio propio determinarán cuándo un operador lineal es diagonalizable. Una vez establecido un criterio sobre la diagonalizabilidad de un operador lineal, se presentan varios ejemplos al lector en los que la diagonalizabilidad debe ser aplicada, por ejemplo al calcular estados estacionarios de una cadena de Markov o al calcular la potencia (entera) de una matriz. Finalmente se introduce la noción de subespacio T-invariante, en el que se muestra al lector que todos los espacios propios son T-invariantes, y que a partir de estos espacios se pueden estudiar las nociones anteriormente abordadas, considerando la restricción de un operador T en sus respectivos subespacios invariantes y a partir de ellos obtener información sobre todo el operador lineal T, como por ejemplo la descomposición del polinomio característico asociado al operador T (ver página 146 de este documento).

Recordemos que el objetivo de la presente investigación fue evidenciar si el texto analizado sigue de manera implícita una descomposición genética, a través del discurso desarrollado en torno a los conceptos valor y vector propio; o en su defecto, qué camino cognitivo es el sugerido para que el lector del texto aprenda tales conceptos. Con base en los cuestionamientos planteados para este fin, señalamos que no hay una descomposición genética implícita al seguir directamente las actividades presentadas en el libro de texto, pues se ha visto, por ejemplo, que hay acciones sobre las cuales no se promueve su interiorización, los ejemplos y ejercicios mostrados al lector por lo general no siguen la progresión Acción-Proceso-Objeto sugerida por la teoría APOE; además el libro cambia de una representación a otra, ignorando que las estructuras mentales, referentes a los conceptos valor y vector propio, requeridas en cada representación son distintas. Incidentalmente, se puede desarrollar una descomposición genética a partir del contenido y en una buena parte de la estructura propuesta por el libro de texto. Para ello rescatamos los procesos vector propio, valor propio y el proceso valor y vector propio inferidos del análisis, ya que consideramos estos elementos como esenciales para la comprensión de los conceptos valor propio y vector propio.

5.1.4 Elementos para el diseño de una descomposición genética

A continuación proponemos una "aproximación" a una descomposición genética para los conceptos valor y vector propio, enfocándonos en la representación matricial y considerando los procesos anteriormente mencionados, obtenidos del análisis del texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b). Utilizamos el término "aproximación" para enfatizar que no es una descomposición genética completa, ya que está basada en los elementos que consideramos se deben tomar en cuenta en el aprendizaje de los conceptos de interés y que resultaron de la presente investigación.

La descomposición genética podría iniciar realizando acciones, como la que propone el texto en el ejemplo 5.1.1; para ello se debe partir de una matriz A y un vector v específicos, los cuales deben ser percibidos como objetos por el individuo con el fin de manipularlos aritméticamente. La acción consiste en multiplicar el vector v con la matriz A y comparar si el producto obtenido Av, es un múltiplo escalar del vector v, es decir, si existe un escalar λ tal que $Av = \lambda v$.

La acción antes mencionada, se repite con diferentes matrices y vectores, y una vez que el individuo reflexiona sobre esta acción se interioriza en el Proceso vector propio, lo cual permite al individuo pensar en un vector propio v no específico de A para el cual existe un escalar λ, tal que cumple con la propiedad de que $Av = \lambda v$. Un individuo con esta concepción puede determinar si el siguiente enunciado es falso o verdadero: "si una matriz real tiene un vector propio, entonces tiene un número infinito de vectores propios" (Friedberg et al., 2003b, p. 256).

Una vez que el indivio ha interiozado el proceso vector propio puede revertirlo para construir el proceso valor propio. Este último proceso es inverso al primero en el sentido de los objetos de entrada y salida, como se mencionó anteriormente. Con una concepción proceso de valor propio un individuo puede pensar en un valor propio λ no especifico de una matriz para el cual existe un vector v distinto de cero tal que $Av = \lambda v$. Con lo descrito anteriormente, los procesos vector propio y valor propio mantienen una relación de dependencia o implicación, la cual se cristaliza al coordinar ambos procesos, por medio del conector lógico $\Leftrightarrow$, en un único proceso "valor y vector propio". El proceso anterior permite a un individuo ser consciente de la dependencia mutua entre el vector propio y el valor propio, es decir, en la dupla (v, λ); así mismo no se puede pensar y/o usar uno sin referirse al otro.

Posteriormente el proceso valor y vector propio se encapsula en el objeto valor y vector propio el cual tiene dos componentes (v, λ). Una vez encapsulado el proceso valor y vector propio sobre este se pueden ejecutar acciones, como por ejemplo la suma de vectores propios o la comparación entre los valores propios de una matriz; además en este punto el individuo es consciente que, aunque se hable únicamente del valor propio o del vector propio como objeto, necesariamente el otro está presente, aunque no sea especificado. El diagrama de la Figura 5.1 resume toda la discusión anterior.

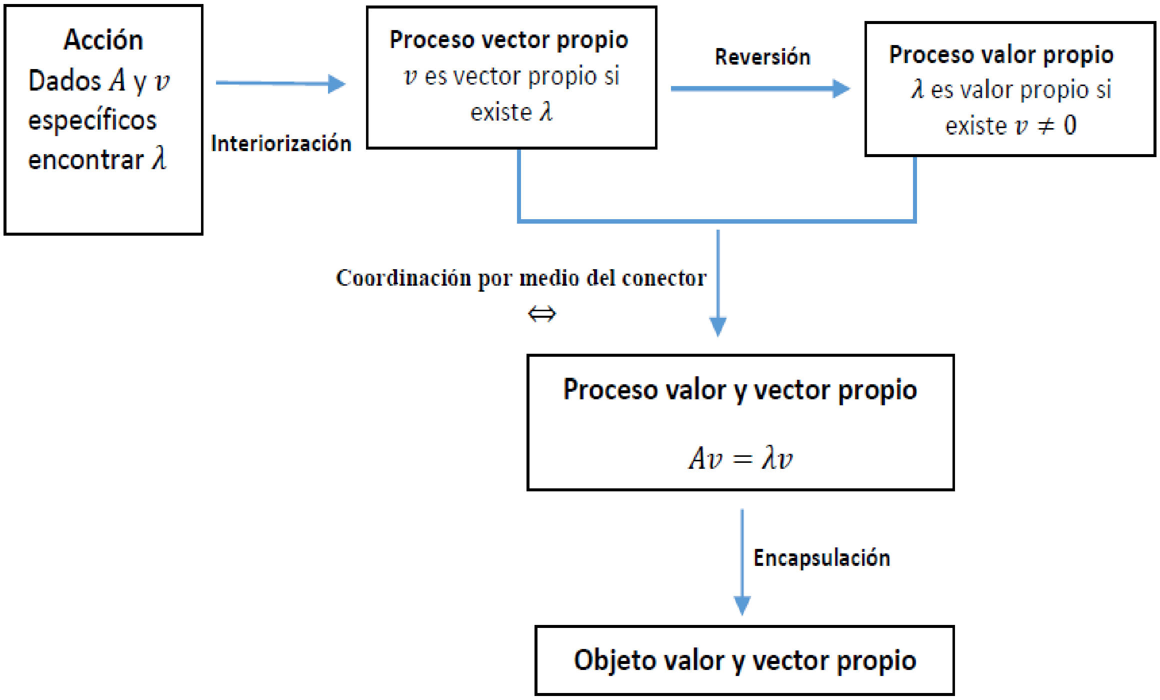


Figura 5.1. Aproximación a una descomposición genética para los conceptos valor y vector propio, a partir de los elementos obtenidos del análisis de Friedberg et al. (2003b).

Otra posible forma de obtener el proceso valor propio puede ser mediante la interiorización de acciones como la siguiente: ¿7 es un valor propio de $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$? (Lay, 2012, p. 267). Con este tipo de acciones la interpretación del Teorema 5.2, el cual relaciona un valor propio con el determinante de una matriz, puede ser más fácil para el lector. Sin embargo, en el texto de Friedberg et al. (2003b) no se proporciona este tipo de acciones al lector, por lo que esta forma de obtener el proceso valor propio ha sido descartada en nuestra aproximación a una descomposición genética para los conceptos valor y vector propio.

De acuerdo a nuestro análisis concluimos que el texto *Linear Algebra* de Friedberg et al. (2003b) no es adecuado para un estudiante que por primera ocasión estudia los conceptos valor y vector propio; pues como se ha mencionado, el texto requiere de que el lector sea capaz de inferir algunas relaciones entre el valor propio y el vector propio, mismas que no son evidentes en las definiciones formales presentadas por el texto para operadores lineales y matrices. Además, aunque las estructuras mentales de acción, proceso, objeto y esquema, para los conceptos en cuestión, están presentes en el texto y no necesariamente en la progresión sugerida por la teoría APOE, no se promueven los mecanismos por los cuales se accede a estas estructuras. En contraste a lo anterior, consideramos adecuada una descomposición genética que contemple en su diseño los elementos de la Figura 5.1 para el desarrollo de los conceptos valor y vector propio, misma que requeriría unos ajustes en Friedberg et al. (2003b).

5.2 Algunas recomendaciones

A partir de la revisión realizada sobre el libro de texto, consideramos que se debe tener presente la diferencia cognitiva que puede existir en las implicaciones dadas por una definición matemática, ya que estas por lo general son bicondicionales ($\Leftrightarrow$), y suelen presentarse al lector como una sola implicación ($\Longrightarrow$), asumiendo que la otra implicación, en dirección opuesta, es clara para el lector y que no generará dificultades. Sin embargo, puede que esto no sea así, ya que en términos cognitivos se requeriría de la reversión de alguna de ellas, como ocurre con los conceptos valor y vector propio; En el caso de estos conceptos, las definiciones presentadas en Friedberg et al. (2003b) sólo enfatizan la relación: vector propio implica la existencia del valor propio, mientras que la relación inversa permance tácita en las definiciones. Por lo anterior se deben proponer actividades que permitan el desarrollo de ambas implicaciones, y así lograr una comprensión adecuada de la definición de estos conceptos. En este sentido Gol Tabaghi (2010) menciona que en un ambiente dinámico, generado por el uso de algún software de geometría dinámica, primero se encuentran los vectores propios de un operador lineal (o transformación) y después el valor propio correspondiente a dicho vector; contrario a como sucede en el caso algebraico, donde primero se determinan los valores propios, como raíces del polinomio característico, y posteriormente se resuelve un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los vectores propios correspondientes.

Por otro lado se recomienda proponer ejercicios en los que se requiera determinar valores y vectores propios de operadores lineales definidos sobre espacios vectoriales de dimensión no finita, ya que en este tipo de problemas no se cuenta con un algoritmo específico para enfrentar tal situación, por lo que el lector tendría que partir propiamente de la definición de los conceptos para poder llegar a una solución al problema planteado; como en el ejemplo 5.1.3, donde se trabaja con el operador derivada definido sobre el espacio vectorial $C^{\infty}(R)$ (ver página 68 de este documento).

La necesidad de representaciones geométricas en el texto analizado es evidente, puesto que las escasas representaciones utilizadas no permiten una comprensión adecuada de los conceptos valor y vector propio ya que estas son bastante generales, además de que son presentadas mucho después de abordar casos específicos con matrices y operadores lineales, donde sería conveniente apoyar dichos ejemplos con representaciones geométricas. Mediante las representaciones geométricas específicas, se puede introducir de forma gradual la noción de colinealidad que existe detrás de la definición de los conceptos valor y vector propio. Inclusive el texto puede retar al lector proponiendo actividades en las que se pida al lector representar gráficamente eigenfunciones[51], es decir, vectores propios como los mostrados en el ejemplo 5.1.3.

5.3 Sugerencias para investigaciones futuras

De acuerdo a Fan (2013), el libro de texto es considerado como una variable intermedia que tiene implicaciones inmediatas en la enseñanza escolar, por lo que el análisis de un libro de texto no puede considerarse ajeno a esta realidad. Por lo tanto, el análisis realizado en la presente investigación podría ser utilizado para estudiar de qué forma las construcciones mentales favorecidas en el libro, reveladas en este análisis para el estudio de los conceptos valor y vector propio, son motivadas a través del uso dado al libro de texto en el aula, sugerido por el profesor ya sea por su experiencia personal o por la normatividad impuesta por la entidad educativa (programas de estudio).

Respecto a identificar elementos de alguna descomposición genética en los textos, cabe mencionar que hoy en día se dispone de una gran variedad de libros de álgebra lineal bajo diferentes enfoques en el desarrollo de su contenido; por otro lado, también encontramos notas disponibles en internet que algunos profesores elaboran para sus cursos, a partir de otros textos y de su experiencia docente. Quizá en este tipo de documentos sea posible encontrar un camino cognitivo más cercano a una descomposición genética, que pueda ser más efectiva para el aprendizaje de los conceptos valor y vector propio.

[51] También llamadas funciones propias.

Una investigación similar a esta, puede realizarse considerando la perspectiva de los registros de representación semiótica de Duval, con el propósito de estudiar más a fondo el tránsito entre la representación algebraica, matricial y geométrica de los vectores y valores propios de un operador lineal, y las posibles dificultades que pueden obstaculizar la comprensión de estos conceptos.

5.4 Aportaciones de este estudio

El objetivo de este trabajo fue investigar un posible camino cognitivo seguido por el libro de texto Friedberg et al. (2003b), implícitamente, para el desarrollo de los conceptos valor y vector propio; como se mencionó anteriormente, nuestro análisis evidenció la ausencia de tal camino cognitivo que guie al lector en el aprendizaje de dichos conceptos. No obstante, este análisis evidenció algunos elementos, utilizados en el desarrollo matemático de los conceptos valor y vector propio, que pudieran limitar u obstaculizar el aprendizaje del lector, quien por primera ocasión estudia dichos conceptos. Estos elementos se mencionan a continuación.

- Subordinar lo geométrico a lo algebraico. Es decir, los autores del texto consideran que una vez vistos los conceptos valor y vector propio en un contexto puramente algebraico, para el lector será fácil interpretar el significado geométrico que dichos conceptos encierran, como por ejemplo la colinealidad (ver ejemplo 5.1.2, p. 68), aun cuando en el libro se carece de representaciones geométricas específicas de los conceptos involucrados.
- Tránsito inmediato entre la representación algebraica y matricial. Varios de los resultados matemáticos presentados en el texto son establecidos en el contexto algebraico o matricial, e inmediatamente después son requeridos en el otro contexto. En términos cognitivos esto implica transitar entre las diferentes estructuras mentales requeridas en cada contexto (ver Figura 5.1), lo cual no es una tarea fácil y mucho menos inmediata para el lector.
- La relación tácita entre los conceptos valor propio y vector propio. En la sección 5.1.2 se habló sobre la relación que permanece tácita entre estos conceptos y que no es evidenciada en las definiciones presentadas por el texto, pero que en algunos ejemplos y resultados se asume como evidente para al lector.
- Enfatizar algoritmos matemáticos. Si bien el libro analizado es bastante teórico, el discurso matemático desarrollado en torno a los conceptos valor y vector propio, es resumido en la aplicación de algoritmos, como el de diagonalizar operadores lineales o matrices, los cuales

son ilustrados en los ejemplos y requeridos en varios de los ejercicios sin mayor esfuerzo que el de imitar los procedimientos antes vistos.

El análisis local, bajo el enfoque cognitivo de APOE, de las definiciones, ejemplos, teoremas y ejercicios, presentados por el texto, nos ha permitido: 1) ser consciente de la problemática que un lector del texto *Linear Algebra* (Friedberg et al., 2003b) podría enfrentarse al estudiar los conceptos valor y vector propio, y que muy probablemente no sea exclusiva de este texto; 2) y en vista de dicha problemática hacer algunas recomendaciones para el estudio de estos conceptos, como por ejemplo, dar elementos para el diseño de una Descomposición Genética (sección 5.1.4) para los conceptos en cuestión. Asimismo como resultado del proceso de análisis del texto hemos propuesto una metodología para analizar libros de texto usando la teoría APOE, la cual se detalla en la sección 3.2.4; si bien la metodología propuesta responde a los intereses de esta investigación, no descartamos que sirva de base para futuros estudios en esta dirección.

El análisis de libros de texto tiene como propósito incidir en la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Es por ello que dichos análisis deben ayudar a comprender las problemáticas asociadas a los objetos de estudio y de igual forma contribuir en su solución. Sunday (2014, p.114) comenta que no es posible catalogar a un libro de texto como efectivo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, salvo en términos relativos; sin embargo, sí podemos elegir al más idóneo para dicho fin, siempre y cuando contemos con herramientas de estudio adecuadas que nos permitan hacer tal elección. En este sentido, deben tomarse en consideración varios factores como por ejemplo, los propósitos de los programas de estudio, la población a quien se dirigirá, los conocimientos previos, entre otros.

5.5 Algunas preguntas

A continuación planteamos algunos cuestionamientos, derivados de esta investigación, que podrían servir para futuras investigaciones en torno a los conceptos valor propio y vector propio.

¿Respecto a los conceptos valor y vector propio, cómo se pueden caracterizar las estructuras mentales que permiten a un individuo transitar entre las diferentes representaciones de estos conceptos?

¿En términos cognitivos, qué papel desempeña el concepto del determinante en la búsqueda de los valores y vectores propios de un operador lineal?

¿ En términos cognitivos, qué se requiere para revertir el proceso vector propio y obtener el proceso valor propio, presentados en esta investigación? En general, ¿qué elementos permiten revertir un proceso para obtener otro?

¿Qué conceptos matemáticos, diferentes a los conceptos valor y vector propio, se pueden estudiar por medio de la coordinación de dos procesos inversos? ¿Bajo qué circunstancias es posible coordinar un proceso con su proceso inverso?

Referencias

Anton, H. (2003). *Introducción al Álgebra Lineal*. México: Limusa.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS issues in mathematics education* (Vol. 6, pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Axler, S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Nueva York: Springer.

Camacho, G. y Oktaç, A. (en prensa). Exploración de una transformación lineal de R^2 en R^2. Acercamiento a la construcción de vectores y valores propios a través de subespacios invariantes. En *Actas Quinto Simposio Internacional ETM*. Florina, Grecia.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. y Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12* (2), 117-151.

Cook, J. P. y Stewart, S. (2014). Presentation of matrix multiplication in introductory linear algebra textbooks. En T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene y M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 518-522). Denver, Colorado. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/RUME17.pdf.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15* (2), 167-192.

Curtis, C. W. (1984). *Linear Algebra: An Introductory Approach*. Nueva York: Springer.

Dorier, J.-L. (2002). Teaching linear algebra at university. En L. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, ICM* (Vol. III, pp. 875-884). Beijing, China: Higher Education Press. Recuperado de http://www.mathunion.org/ICM/ICM2002.3/ICM2002.3.ocr.pdf.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer Academic.

ESFM IPN. (2011). Programa de estudios de la asignatura Álgebra 3. Recuperado de http://www.polarisesfmmat.globered.com/?counter=5#comentarios.

Facultad de Ciencias UCOL. (2014a). Documento Curricular de la Licenciatura en Física. Recuperado de http://sistemas2.ucol.mx/planes_estudio/pdfs/pdf_DC88.pdf

Facultad de Ciencias UCOL. (2014b). Documento Curricular de la Licenciatura en Matemáticas. Recuperado de http://sistemas2.ucol.mx/planesestudio/pdfs/pdf_DC57.pdf.

Facultad de Ciencias UNAM. (1983). Programa de estudios de la asignatura Álgebra Lineal I de la licenciatura en matemáticas. Recuperado de http://www.fciencias.unam.mx/asignaturas/5.pdf.

Facultad de Ciencias UNAM. (2015). Programa de estudios de la asignatura de Álgebra Lineal I de la licenciatura en física biomédica. Recuperado de http://www.fciencias.unam.mx/asignaturas/1330.pdf.

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden* (Tesis de Maestría). CINVESTAV-IPN, México.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *45* (5), 765-777.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *45* (5), 633-646.

Friedberg, S. H., Insel, A. J. y Spence, L. E. (1982). *Álgebra Lineal*. México: Publicaciones Cultural.

Friedberg, S. H., Insel, A. J. y Spence, L. E. (2003a). *Álgebra Lineal*. México: Pearson Educación.

Friedberg, S. H., Insel, A. J. y Spence, L. E. (2003b). *Linear Algebra*. Nueva Jersey: Prentice Hall.

García, M. M. y Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (18), 13-25.

Gol Tabaghi, S. (2010). Shifts of attention in DGE to learn eigen theory. En *Proceedings of the 5th Annual Mathematics Education Doctoral Students Conference* (pp. 20-29). Faculty of Education Simon Fraser University. Recuperado de https://www.sfu.ca/content/sfu/education/mathphd/program-expectations/meds-c/past-meds-conferences/_jcr_content/main_content/download_6/file.res/2010_Proceedings.pdf

Gol Tabaghi, S. (2014). How dragging changes students' awareness: Developing meanings for eigenvector and eigenvalue. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 14* (3), 223-237.

Gol Tabaghi, S. y Sinclair, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning, 18* (3), 149-164.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (3), 389-408.

Grossman, S. (2004). *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. México: McGraw-Hill.

Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. For the *Learning of Mathematics, 7* (3), 29-32.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht: Kluwer Academic.

Hoffman, K. y Kunze, R. (2006). *Álgebra Lineal*. Nueva York: Prentice Hall.

Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum* (Tesis de Licenciatura). Lulea University of Technology, Suecia. Recuperado de http://epubl.ltu.se/1402-1757/2003/65/LTU-LIC-0365-SE.pdf

Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics, 12* (1), 2-7.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with cabri and maple. *Linear Algebra and its Applications, 432* (8), 2100-2111.

Lay, D. (2012). *Linear Algebra and Its Applications.* Maryland: Addison-Wesley.

Lipschutz, S. y Lipson, M. (2001). *Schaum's Outline of Linear Algebra*. McGraw-Hill.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior, 23* (4), 405-427.

Love, E. y Pimm, D. (1996). ‘This is so’: a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 371-409). Dordrecht: Kluwer Academic.

Maturana, I., Parraguez, M. y Trigueros, M. (2015). El Esquema del Concepto Transformación Lineal. Una Mirada a tres Interpretaciones desde la Teoría APOE. En *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.*

Maximenko, E. (2013). Programa de Álgebra III. Recuperado de http://esfm.egormaximenko.com/algebra3.html

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica* (Tesis de Doctorado). CICATA. IPN, México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/montiel 2005.pdf

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (4), 373-385.

Randahl, M. (2012). First-year engineering students' use of their mathematics textbook opportunities and constraints. *Mathematics Education Research Journal, 24* (3), 239-256.

Rezat, S. (2006). A model of textbook use. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 409-416). Praga, República Checa: PME.

Rezat, S. (2010). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 1260-1269). Lyon, Francia: Institut National De Recherche Pédagogique. Recuperado de http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg7-22-rezat.pdf.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15* (2), 199-232.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática, 26* (3), 75-107.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100-120.

Sidokhine, F. (2013). *On some measure theory textbooks and their use by some professors in graduate-level courses* (Tesis de Maestría). Concordia University, Canada. Recuperado de http://spectrum.library.concordia.ca/977490/1/Sidokhine MScF2013.pdf

Sierpinska, A. (1997). Formats of interaction and model readers. *For the Learning of Mathematics, 17* (2), 3-12.

Soto, J. L. y García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in R^2 and R^3. En *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level*. Recuperado de http://users.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap370.pdf.

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley Cambridge.

Stray, C. (1994). Paradigms regained: towards a historical sociology of the textbook. *Journal of Curriculum Studies*, *26* (1), 1-29.

Sunday, A. S. (2014). Mathematics textbook analysis: a study on recommended mathematics textbooks in school use in southwestern states of Nigeria. *European Scientific Journal, 10* (10), 140-151.

Thomas, M. O. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal, 23* (3), 275-296.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17* (1), 5-31.

Unidad Académica de Física UAZ. (2011). Programa de Álgebra Lineal para la Licenciatura en Física. Recuperado de http://fisica.uaz.edu.mx/web/attachments/article/43/Programa-AlgebraLineal-PlanCreditos.pdf.

Unidad Académica de Ingeniería AUZ. (2007). Programa de Álgebra Lineal para Ingeniería Mecánica. Recuperado de http://mecanica.uaz.edu.mx/c/document_library/get_file?uuid=898d11c9-33d8-4bc5-8f88-3581713417d2&groupId=44395

Unidad Académica de Matemáticas UAZ. (2011). Programa de Álgebra Lineal II para la Licenciatura en Matemáticas. Recuperado de http://matematicas.reduaz.mx/web/licenciatura/programas/4-Algebra Lineal II.pdf.

Lista de Figuras

Anexo A

Programa de Álgebra Lineal ESFM-IPN

ASIGNATURA:ALGEBRA 3 CLAVE:0313
TEMARIO
UNIDAD 1 PRODUCTOS INTERNOS
TEMAS

Transformaciones ortogonales

Funciones lineales y operaores adjuntos

Productos interno y operadores positivos

UNIDAD 2 FORMAS BILINEALES Y CUADRATICAS
TEMAS

Definiciones de función bilineal y forma bilineal

Cambio de base

Formas bilineales equivalentes matrices equivalentes

Rango de una forma bilineal

Formas cuadráticas. Cambio de base. Matrices congruentes

Formas cuadráticas diagonales bajo congruencias

Invariantes de una matriz simétrica bajo congruencia

Valores, propios Vectores propios
Reducción ortogonal de una forma cuadrática

UNIDAD 3 OPERADORES NORMALES Y DE SEMEJANZA
TEMAS

Teorema de Coyley-Hamilton

Semejanza y matrices diagonales

Espacios vectoriales complejos Producto interior. Matrices unitarias y hermitianas

Teorema espectral

Subespacios invariantes y descomposición primaria

Operadores Nilpotentes y subespacios T-cíclicos
Forma canónica de Jordan

BIBLIOGRAFIA
Elementos of Linear Algebra and Matrix Theory Moore; Mc. Graw Hill
Lectures on Linear Algebra Gel'fand; Interscience
Elements of Linear Algebra L. J. Paige and J. D. Swift; Blaisdell
Foundations of Linear Algebra A. I. Mal'cev; Freeman

Recuperado el10 de junio del 2015, de la fuente:
http://www.polarisesfmmat.globered.com/?counter=5#comentarios