



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLÍTECNICO NACIONAL  
UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

**SISTEMA MATEMÁTICO DE SIGNOS EN LA COMPRENSIÓN DE  
LOS MARCOS DE REFERENCIA, SIMULTANEIDAD Y TIEMPO, EN  
LA RELATIVIDAD ESPECIAL**

**T E S I S**

Que presenta

**ANDRÉS FLORES REYNA**

Para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA**

Director de la Tesis      Dr. Eugenio Filloy Yagüe

Ciudad de México

Enero, 2019

## AGRADECIMIENTO A CONACYT



Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo de la beca brindada durante el proceso de formación en la Maestría, realizado en el Departamento de Matemática Educativa – CINVESTAV, IPN

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco muy especialmente a mi director de tesis al **Dr. Eugenio Filloy Yagié**, por su orientación, soporte y visión crítica que me dio luz para un buen aprovechamiento en el desarrollo de esta investigación. Gracias por la ayuda y confianza en mí depositada.

Agradezco al M en C. Vicente Carrión Miranda por su apreciable ayuda y paciencia desde mis primeros pasos por la institución. Sus aportaciones a esta tesis han sido de mucha importancia.

Al Dr. Alejandro Ramírez Rojas, le agradezco profundamente su tiempo y dedicación para corregir el manuscrito final y fungir como miembro del jurado evaluador.

Al Dr. Hugo Mejía le agradezco sus sugerencias y consideraciones durante el desarrollo de la investigación y por ser parte del jurado evaluador

Finalmente, agradezco a mi mamá Julieta y a mis hermanos por su comprensión y apoyo constante. De manera muy especial a Miriam quien ha estado a mi lado compartiendo mis alegrías y angustias, por su apoyo incondicional y su amor de siempre.

A la memoria de mi papá

Belisario Flores Martínez

Esta tesis va dedicada a él.

## Resumen

La naturaleza del pensamiento matemático está inextricablemente interconectada con los procesos cognitivos que dan lugar al conocimiento matemático. Analizar las formas en que los estudiantes se someten a la transición entre los fenómenos de comprensión a los que tienen acceso inmediato y los fenómenos de comprensión, que se encuentran fuera de su experiencia cotidiana, puede ayudar a identificar las habilidades de razonamiento necesarios para que el estudiante llegue a ser competente en el Sistema Matemático de Signos deseado: meta del Modelo de Enseñanza. Este proyecto de investigación relata la comprensión de los estudiantes del tiempo en la relatividad especial. Las leyes de la cinemática clásica se basan, principalmente, en los conceptos de sistema de referencia y de eventos. Un propósito principal es identificar y caracterizar dificultades en las ideas y razonamientos que los estudiantes de primer trimestre de licenciatura en Ingeniería encuentran en su estudio de la relatividad especial. El énfasis de este proyecto de investigación está en la relatividad de la simultaneidad y el papel de los marcos de referencia.

## Abstract

The nature of mathematical thought is inextricably interconnected with the cognitive processes that give rise to mathematical knowledge. Analyzing the ways in which students undergo the transition between comprehension phenomena to which they have immediate access and comprehension phenomena, which are outside of their everyday experience, can help identify the reasoning skills necessary for the student becomes competent in the desired Mathematical System of Signs: goal of the Teaching Model. This research project relates students' understanding of time in special relativity. The laws of classical kinematics are based, mainly, on the concepts of reference system and events. A main purpose is to identify and characterize difficulties in the ideas and reasoning that first-year undergraduate students in Engineering find in their study of special relativity. The emphasis of this research project is on the relativity of simultaneity and the role of frames of reference.

# INDICE

Resumen.....	4
Abstract .....	4
<b>CAPÍTULO 1 Introducción.....</b>	<b>8</b>
1.1 Introducción .....	8
1.2 Estructura de la tesis.....	9
<b>CAPÍTULO 2 Marco de referencia .....</b>	<b>10</b>
2.1 Introducción .....	10
<b>CAPÍTULO 3 Marco teórico y metodológico .....</b>	<b>15</b>
3.1 Teórico .....	15
3.1.1 Modelos teóricos locales .....	15
3.1.1.1 Sistemas matemáticos de signos .....	16
3.1.1.2 Modelo de los procesos cognitivos .....	17
3.1.1.3 Modelo de comunicación .....	17
3.1.1.4 Modelo de enseñanza .....	18
3.1.1.5 Modelo de competencia formal.....	20
3.1.2 La teoría especial de la relatividad.....	23
3.1.2.1 Relatividad galileana-newtoniana .....	24
3.1.2.2 Transformaciones de Galileo .....	25
3.1.2.3 Marco de Referencia Inercial .....	26
3.1.2.4 El experimento de Michelson y Morley.....	29
3.1.2.5 Postulados de la teoría especial de la relatividad .....	34
3.1.2.6 Simultaneidad.....	36
3.1.2.7 Transformaciones galileanas y de Lorentz.....	39
3.2 Metodológico .....	43
3.2.1 Diseño de la investigación.....	43
3.2.2 Descripción de grupo de trabajo.....	44
3.2.3 Diseño de la experimentación .....	45
3.2.4 Recursividad en el uso de los modelos teóricos locales .....	46
<b>CAPÍTULO 4 Clasificación de la población .....</b>	<b>47</b>
4.1 Evaluación diagnostica.....	47

4.2	Objetivos de la evaluación diagnóstica .....	47
4.3	Análisis de datos obtenidos .....	48
4.4	Análisis de dificultades .....	50
4.5	Diagnóstico y clasificación de la población .....	52
	<b>CAPÍTULO 5 Fase de experimentación .....</b>	<b>55</b>
5.1	Metodología de la experimentación .....	55
5.2	Descripción de la clasificación.....	55
5.3	Descripción de la secuencia didáctica .....	56
5.4	Desempeño de alumnos.....	56
5.5	Aspectos cualitativos.....	59
5.5.1	Aplicación de cuestionario .....	59
5.6	Comprensión estudiantil del tiempo en la relatividad especial: simultaneidad y marcos de referencia.....	61
5.7	Introducción .....	61
5.8	Entendimiento de los conceptos de tiempo, simultaneidad y marcos de referencia de los estudiantes .....	62
5.8.1	La creencia de que los eventos son simultáneos si un observador recibe señales de los eventos en el mismo instante.....	62
5.8.1.1	Tendencia a asociar el tiempo de un evento con el momento en que un observador recibe una señal del evento .....	63
5.8.1.2	Tendencia a considerar al observador como dependiente solo de sus experiencias sensoriales personales.....	63
5.8.1.3	Pregunta sobre “Marco de referencia móvil” .....	63
5.8.1.3.1	Descripción de la pregunta.....	63
5.8.1.3.2	Respuesta correcta.....	64
5.8.1.3.3	Pregunta representativa .....	64
5.8.1.3.4	Análisis de resultados.....	65
5.8.2	La creencia de que la simultaneidad es absoluta.....	68
5.8.2.1	Tendencia a tratar la simultaneidad como independiente del movimiento relativo. ....	68
5.8.2.2	Pregunta del “observador” .....	68
5.8.2.2.1	Descripción de la pregunta.....	69
5.8.2.2.2	Respuesta correcta.....	69
5.8.2.2.3	Pregunta representativa .....	69
5.8.2.2.4	Análisis de resultados.....	70

5.8.3 La creencia de que cada observador constituye un marco de referencia distinto.....	72
5.8.3.1 Tendencia a tratar a los observadores en el mismo lugar que en el mismo marco de referencia, independientemente del movimiento relativo .....	72
5.8.3.2 Tendencia a tratar a los observadores en reposo uno con respecto al otro como si estuvieran en marcos de referencia separados .....	73
5.8.3.3 Pregunta de los “Destellos” .....	73
5.8.3.3.1 Descripción de la pregunta.....	73
5.8.3.3.2 Respuesta correcta.....	74
5.8.3.3.3 Pregunta representativa .....	74
5.8.3.3.4 Análisis de resultados.....	75
5.9 Método Gráfico .....	77
5.9.1 Introducción .....	77
5.9.2 Consecuencias del segundo postulado .....	78
5.9.3 Ventajas de un diagrama Espacio-Tiempo.....	78
5.9.4 Descripción de las graficas.....	78
5.9.5 Análisis de resultados:.....	81
5.10 Formalismo de Lorentz .....	84
5.10.1 Pregunta representativa .....	84
5.10.2 Análisis de resultados.....	85
<b>Capítulo 6 Observaciones Generales .....</b>	<b>87</b>
<b>Referencias Bibliográficas .....</b>	<b>90</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>98</b>
<b>Anexo 1.....</b>	<b>98</b>
<b>Anexo 2.....</b>	<b>102</b>
<b>Anexo 3.....</b>	<b>105</b>
<b>Anexo 4.....</b>	<b>109</b>
<b>Anexo 5.....</b>	<b>113</b>

# CAPÍTULO 1

## Introducción

### 1.1 Introducción

Por su utilidad de las aportaciones para la comprensión de fenómenos naturales y sociales, toma la ciencia y el conocimiento científico, mucha relevancia en las sociedades modernas. Por estas y otras razones, además de las estrictamente científicas, el estudio de la teoría de la relatividad especial se justifica.

Para la enseñanza de las ciencias la Teoría de la Relatividad Especial es un tema particularmente característico por su aportación de una serie de conceptos a una estructura teórica preexistente, además de cambios tanto en creencias y presuposiciones en las relaciones estructurales internas de la teoría (Vosniadou, 1994).

Los primeros contactos de los alumnos con la teoría de la relatividad especial implican un indiscutible punto de inflexión en el conocimiento de la física.

La TER les presenta a los alumnos un nuevo escenario frente a la física clásica y que su experiencia cotidiana no le ayuda para reconocer su validez. Los estudiantes esencialmente carecen de razonamientos en términos de propiedades de espacio-tiempo, manteniendo una idea donde afirman que la única forma de causalidad es la influencia física entre las entidades que conforman el mundo material, cuyos límites solo coinciden con el mundo real y que requiere de propiedades fijas y cuerpos extensos para una visión realista de la naturaleza (Pérez y Solbes, 2006), al asumir el alumno como valor real lo que únicamente está en su marco de referencia, plantea un problema (Hewson, 1982). El análisis de la manera en que los estudiantes experimentan la transición entre los fenómenos de comprensión a los que tienen acceso inmediato y los fenómenos de comprensión que se encuentran fuera de su experiencia cotidiana puede ayudarnos a identificar las habilidades de razonamiento que se necesitan para el estudio de las dificultades de los estudiantes con problemas en relatividad especial, dificultades con las ideas de tiempo, posición, eventos y marcos de referencia, muchas de las dificultades que los estudiantes tienen con las ideas de la relatividad especial, como la contracción de la longitud y la relatividad de la simultaneidad, se deben en parte a



un fracaso profundo en la aplicación del formalismo de un marco de referencia en determinar la posición y el tiempo de un evento.

Para interpretar estas observaciones, utilizamos una noción de Sistema Matemático de Signos (SMS) suficientemente amplia y debe ir acompañada de una noción del significado del signo que abarca tanto el significado formal de las matemáticas y su significado pragmático.

## 1.2 Estructura de la tesis

Luego de este primer capítulo introductorio, los capítulos subsiguientes de este trabajo se organizan de la siguiente forma:

En el Capítulo 2 se presenta la revisión de la bibliografía consultada y analizada.

En el Capítulo 3 se desarrolla la metodología llevada a cabo en la investigación, se detallan los modelos teóricos locales, se describe la Estructura Conceptual de Referencia, así como el grupo de trabajo y se diseña el modelo de experimentación.

En el Capítulo 4. Se diseña los instrumentos de exploración considerando la mayoría de los contenidos correspondientes a la comprensión de la relatividad especial y sistema de referencia. Se analizan los datos, y se caracterizan y describen las respuestas de los estudiantes a las diferentes situaciones realizando una clasificación de la población.

En el Capítulo 5. Se dispone de los cuestionarios, que es el instrumento seleccionado y diseñado para la investigación, y con ello, comenzar a obtener información específica respecto al desempeño de los estudiantes al resolver problemas relacionados con los diversos usos de la Teoría Especial de la Relatividad. En este capítulo describimos las preguntas que hemos utilizado para sondear la comprensión del alumno de la simultaneidad y la medición del tiempo de un evento.

Capítulo 6. Por último, se analizan globalmente los resultados obtenidos en las etapas de experimentación y se exponen las observaciones convenientes. También este capítulo contiene los anexos y la bibliografía utilizada.

## CAPÍTULO 2

### Marco de referencia

#### 2.1 Introducción

El interés por la enseñanza de la Teoría Especial de la Relatividad en el nivel superior es introducir a los estudiantes que a van a realizar una carrera universitaria, el interés por las ciencias, en el caso de la física contenidos que introducen las denominadas Física Moderna y Física Contemporánea, que han producido un cambio de las ideas y se contraponen a nuestra vida diaria. Esto expresa la preocupación de brindar a los estudiantes la necesidad de aprender sobre los avances científicos recientes que influyen en el mundo que los rodea, que en muchas perspectivas ha sido resaltado por numerosos investigadores en el área de la enseñanza de las ciencias (Gil et al., 1998; Ostermann y Moreira, 2000; Villani y Arruda, 1998 y Moreira, 2000, etc.).

La Teoría Especial de la Relatividad, cuyo principal referente es Albert Einstein, describe y marca una nueva etapa dentro de la Física; un cambio conceptual y profundo de la idea clásica del mundo y el universo.

El estudio de la Teoría Especial de la Relatividad tiene su diversa y justificada razón en lo estrictamente científico. Para la ciencia la TER tiene cierta continuidad y una aparente diferencia con la física clásica. Desde el punto de vista de la enseñanza de las ciencias, los alumnos al tener su primer acercamiento con la teoría provocan un punto de cambio en la percepción de la Física. Los sistemas físicos clásicos hacen desarrollar la intuición a base que de las experiencias que lo alumnos desarrollan, esto hace que para la enseñanza de la TER sea un verdadero e interesante reto (Toledo et al., 1994).

Notamos que para el común de las personas y los estudiantes, tienen la firme idea que no existe un límite para la velocidad, ya que no es más que la distancia recorrida y el tiempo que tarda en recórrelo. Sin embargo, los estudiantes saben que existe la velocidad de la luz y es

el límite máximo de la velocidad, esto implica una suficiente razón para profundizar y estudiar el tema.

La mayoría de las personas y estudiantes consideran la noción de tiempo como absoluto. Sin embargo, el espacio, en la relatividad que estudiaban Galileo y Newton lo consideran que puede ser relativa, partiendo de que diferentes observadores pueden medir diferentes distancias, dependiendo del Sistema de Referencia.

Esta idea de un sistema de referencia en reposo absoluto se mantiene y hace ver como un obstáculo para la adecuada conceptualización de la Relatividad Especial en los alumnos.

En consecuencia, la secuencia de enseñanza intenta poner el énfasis en la relatividad en la Relatividad Galileana, para luego poder abundar más en la Teoría Especial de la Relatividad.

Los estudiantes de los primeros años de la universidad cuando analizan los aspectos cinemáticos de los objetos, asocian la velocidad y el movimiento de los objetos sin tomar en cuenta un Sistema de Referencia, prevalece la idea de movimiento absoluto (Saltiel y Malgrange, 1980), de tal forma que manifiestan su visión Galileana del movimiento (Posner, Strike, Hewson y Gertzog, 1982).

Para estudios realizados por Panse, Ramadas y Kumar, (1994), los estudiantes consideran que los Sistemas de Referencia son meramente decorativos, o sin función específica alguna (Pietrocola y Zylbersztajn, 1999), los observadores logran los valores correctos de las variables espacial y temporal pero no toman en cuenta el principio de relatividad (Villani y Pacca, 1987).

Muchos estudiantes creen que el Sistema de Referencia está compuesto de límites físicos definidos con lo cual un objeto podría “salirse” del citado sistema de referencia (Ramadas, Barve y Kumar, 1996).

Las dificultades encontradas para el aprendizaje de la Teoría Especial de la Relatividad pueden deberse a la falta de comprensión del concepto de Sistema de Referencia, McDermott

et al. (1987) y Hosson y Kermen (2013), proponen el uso de diagrama de espacio-tiempo que podría ayudar a los alumnos a comprender mejor el concepto de Sistema de Referencia.

Para los estudiantes, las consecuencias de los postulados de la Teoría Especial de Relatividad como la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud, no son considerados como reales, sino percibidas más bien como meras ilusiones ópticas (Angotti, Caldas, Pelizoicar y Rudinger, 1978), o también consideradas como “distorsión de la percepción” (Hewson, 1982). Muchos de los estudiantes que si bien, son capaces de darse cuenta de las ideas básicas de la Teoría Especial de la Relatividad y de sus consecuencias, en particular la relatividad del espacio y el tiempo, aunque siguen pensando en términos de absolutos; esto lo demuestra un estudio realizado sobre un grupo de 40 estudiantes de entre 15 y 16 años (Dimitriadi, Halkia y Stavrou, 2009).

En los estudios de Martins y Pacca (2005) para investigar la construcción de la noción de tiempo que realizaron con estudiantes de nivel primaria y secundaria, pudieron clasificar que los alumnos interpretan al tiempo como asociado a la presencia de un observador, cabe destacar que en estos estudios no se hace ninguna mención a la Teoría Especial de la Relatividad.

En cuanto al tratamiento de la velocidad de la luz, los estudiantes presentan dificultades para comprender la invarianza de la velocidad de la luz respecto del movimiento de la fuente Villani y Pacca (1987).

## 2.2 Aspectos epistemológicos, cognitivos e históricos.

Los estudiantes conservan sus ideas de la física clásica<sup>1</sup> cuando pretenden demostrar las nociones relativistas y no utilizan los conceptos de la Teoría Especial de la Relatividad, estas son algunas de las dificultades que resultan de las propuestas para poder enseñar a Teoría Especial de la Relatividad (Villani y Arruda, 1998).

<sup>1</sup> La física clásica o física newtoniana es una disciplina que se basa en las leyes básicas del movimiento sobre los objetos cotidianos. La física clásica se conoce como tal, con la publicación en 1687 de las Leyes de Newton, formulación matemática de Isaac Newton (1643-1727) en su obra *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Las Leyes de Newton son la base de la física y de la mecánica clásica. Algunas veces, se reserva la frase nominal "física clásica" para la física pre-relativista. Significado de física clásica. ¿Que es física clásica?

Recuperado de: <https://www.significados.com/fisica-clasica/>

Pérez y Solbes (2003, 2006) en sus investigaciones analizan aspectos epistemológicos, históricos y conceptuales referidos a la Teoría Especial de la Relatividad estos estudios lo realizaron con docentes y estudiantes en formación para ser profesores de enseñanza de la Física. El estudio muestra que algunos de los profesores carecen de un aspecto crítico cuando introducen los conceptos de la Teoría Especial de la Relatividad, algunos de los términos que utilizan indican que tienen un desconocimiento de los conceptos básicos de la Teoría. En este trabajo, también se realiza un estudio sobre los libros de texto que más utilizan acerca del tema en cuestión.

Algunos estudios realizados analizan la introducción de la Teoría Especial de la R en los libros de textos más usuales en la escuela secundaria, en el nivel polimodal y nivel universitario en Argentina. Esto lo hacen desde la perspectiva histórica, epistemológica y didáctica (Arriasecq y Greca, 2004, 2005). Estas investigaciones dieron la pauta para una propuesta de diseño para aplicarlo en el aula, realizando un tratamiento en el ámbito de la Historia y la Epistemología (Arriasecq Balverde, 2008).

Pérez Celada (2003), en su investigación con enfoque basado en la Epistemología, la Historia y la Filosofía de las Ciencias, encuentra una aproximación entre las dificultades encontradas en el proceso histórico de la Teoría de la Relatividad con los conflictos que presentan los estudiantes al momento de su aprendizaje.

Pensamos que es posible abordar la enseñanza de la Teoría Especial de la Relatividad aun teniendo en cuenta las dificultades que pueden presentarse para la incorporación de la Teoría en el nivel de enseñanza superior, esa posibilidad prevalece si tomamos en cuenta el interés de los alumnos por el tema, que es uno de los componentes principales que Ausubel et al. (1991) refiere como condición indispensable para un aprendizaje significativo.

Considerando las principales dificultades que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Teoría Especial de la Relatividad en el nivel de enseñanza superior y tomando en cuenta las características de la etapa que transita actualmente la educación en México, es importante lograr mantener el interés de los alumnos en los temas de física. Por

lo tanto, resulta trascendental que los resultados derivados de la investigación en esta tesis, nos permitan procesar, implementar y evaluar una propuesta didáctica en este nivel educativo y que a su vez favorezca su aprendizaje significativo.

El análisis que realizamos en el marco de esta tesis, permite establecer los conceptos principales y con ello se intenta hacer que los alumnos puedan entender y construir en el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad. Estos conceptos son los de espacio, tiempo, y las nociones de sistema de referencia, observador, simultaneidad y evento, necesarios para la comprensión del espacio-tiempo relativista.

Es importante decir que, dentro del campo conceptual de la Teoría Especial de la Relatividad, nos centramos en los factores cinemáticos de la teoría, considerando que los conceptos que involucra son suficientemente importantes para comprender su significación.

Es significativo decir que recurrimos en diversas etapas a representaciones gráficas y algebraicas para destacar los conceptos importantes de la TER, este tipo de representaciones nos permite hacer valoraciones cualitativas para así poder comparar las mediciones obtenidas por diferentes observadores, establecer la simultaneidad o no de acontecimientos, etc.

## CAPÍTULO 3

### Marco teórico y metodológico

#### 3.1 Teórico

##### 3.1.1 Modelos teóricos locales

El Modelo Teórico Local (MTL) propuesto por Filloy (1999) ofrece un marco de referencia teórico y metodológico para la investigación en matemática educativa, plantea un diseño metodológico distinto a lo tradicionalmente utilizado. Como teoría y como metodología, el MTL propone observar los hechos y obtener nuevas observaciones que desentrañen las relaciones de los componentes que entran en juego en la matemática educativa. Se caracteriza por la interconexión entre sus cuatro componentes: modelo de los procesos cognitivos, modelo de enseñanza, modelo de comunicación y modelo de competencia formal. Estos cuatro componentes en el MTL sirven como forma para incorporar al modelo teórico los resultados de otras observaciones, y experimentos, otorgándole al modelo una confiabilidad para el manejo de ciertos fenómenos que ocurren en la matemática educativa (En este caso Física educativa). Es recursivo pues la teoría incorpora la idea que al inicio una investigación en matemática educativa cuenta con un modelo teórico local inicial y que durante el desarrollo éste va cambiando y al final se obtiene un nuevo modelo teórico local desde el cual se mira el problema original de nueva manera. Es local porque, sin pretender ser una teoría ni tener un carácter universal ni replicable en cualquier fenómeno educativo, sirve para explicar fenómenos específicos y para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña un determinado contenido matemático en los sistemas educativos al tomar en cuenta las cuatro componentes. Se argumenta que un modelo teórico local se diseña para observar las interacciones y las contraposiciones en las competencias de uso de un sistema matemático de signos. En esta tesis se requiere estudiar e identificar los tipos de razonamiento utilizados por los estudiantes enfrentados a situaciones relativistas; así como los diversos mediadores: contenido matemático, ambiente de aprendizaje y modelo de enseñanza.

Precisar la naturaleza de las dificultades de este modelo teórico local que impiden la construcción de los conceptos de sistema de referencia y de evento, y por lo tanto, que pueden obstaculizar la comprensión de los elementos de la teoría de la relatividad especial, como la transformación de Lorentz. Estos elementos son expresados mediante un sistema matemático de signos (SMS).

### 3.1.1.1 Sistemas matemáticos de signos

La noción de sistemas matemáticos de signos (SMS) surge de algunas consideraciones que se hace con la finalidad de normar ciertos criterios para el diseño de modelos de enseñanza. “La matemática escolar se articula en una serie de redes conceptuales, relacionadas unas con otras y con la característica de que, con el tiempo, los estudiantes van logrando ser competentes en el uso de redes de conceptos cada vez más abstractos y generales; competencias que requieren de otras anteriormente dominadas. El SMS en el que se expresan y comunican los textos matemáticos correspondientes a tales redes conceptuales tiene una estratificación que se corresponde con los diversos usos, que van dando cuenta de acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y provenientes de estratos del lenguaje (del sms) cada vez más abstractos” (Filloy, 1999).

El nivel que se pretende en los alumnos no ha de ir mucho más allá del manejo comprensivo de los conceptos de tiempo propio y longitud propia. Apuntar el concepto de la relatividad de simultaneidad y la pérdida de la universalidad de los conceptos de espacio y tiempo desde los distintos sistemas inerciales, es decir; en su carácter relativo.

El estudio de sus consecuencias puede basarse en la construcción de expresiones sin su deducción formal a partir de las transformaciones de Lorentz. Filloy argumenta que no se analizan los signos artificiales como tales, ni tampoco los signos que se usan (y sus significados) en abstracto, más bien la atención se pone en los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido.

A continuación, se describe como se elaboraron los componentes del modelo teórico local de la investigación, que son: procesos cognitivos, de comunicación, de enseñanza y de competencia formal.



### 3.1.1.2 Modelo de los procesos cognitivos

Esta componente toma en cuenta los procesos de pensamiento que permiten describir cómo el estudiante procesa su conocimiento, las dificultades que enfrenta y las estrategias de resolución de problemas. También, ayuda a describir las acciones de los sujetos observados al realizar tareas relacionadas con su contenido matemático. Mediante ese proceso, el estudiante comprende más acerca de su propio pensamiento (metacognición) y afina su percepción respecto de él mismo y de lo que va aprendiendo, el direccionamiento de la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión, el uso de la memoria, de los procesos de análisis y síntesis lógicas y las concepciones heurísticas.

En esa componente se analizan los códigos personales que indican las acciones ya realizadas y las que se harán en el proceso de resolución de problemas; se aborda también el uso pertinente de ciertos estratos intermediarios; aquí se entiende que un usuario competente no siempre hace referencia a una gran cantidad de esquemas mentales relacionados con los problemas presentados; si bien, tal usuario puede hacer un uso automático de esquemas mentales, lo importante es el progreso en su capacidad de análisis lógico-semiótico de las situaciones-problemas. Dentro de nuestro modelo teórico local se destacan dos componentes: el modelo de competencia formal y el de los procesos cognitivos, conectado éste con el modelo de comunicación, mediante una secuencia didáctica para la construcción de los conceptos de sistema de referencia y de evento.

### 3.1.1.3 Modelo de comunicación

En esta componente, se analiza el intercambio de mensajes entre sujetos de diversos grados de competencia en el uso de los SMS. Los modelos de comunicación sirven para describir reglas de competencia comunicativa, formación y decodificación de textos. Este intercambio entre sujetos ocurre en la interacción social. Aquí el lenguaje es el vehículo que interconecta y permite intercambiar significados matemáticos. Se toma en cuenta la interacción social entre los aprendices, beneficia el aprendizaje de los conocimientos matemáticos. Dicha comunicación se refleja en los papeles que juegan tanto el investigador mediante su propuesta de actividades, como el desempeño de los estudiantes, fruto de una construcción de hábitos cognitivos y sociales, adquiridos en otros lugares (como la casa, la escuela etc.) además de la escuela.

Este componente se observa bajo la interacción social; específicamente se pretende investigar los efectos de la misma en los distintos dominios matemáticos, las dificultades que presentan en la interacción de los significados matemáticos que desarrollan durante el proceso.

En este sentido, la incorporación del uso de imágenes puede propiciar la discusión en el salón de clases: los alumnos pueden probar y cambiar sus ideas, modificar los niveles de representación desde uno más concreto hasta otro más abstracto y viceversa; se les estimula para que hagan suya la actividad, se provoca la discusión en el salón de clases, se genera la demanda sistemática de recordar y verificar lo que hacen, se reconsidera el proceso y se confrontan dificultades y concepciones.

Para estudiar la componente de los procesos de comunicación recurrimos a tres registros semióticos: el lenguaje común, la herramienta algebraica y la herramienta gráfica.

Con esto proponemos un modelo de discusión matemática que es usado en este estudio con la finalidad de dirigir el proceso de interacción social durante las sesiones de trabajo de la secuencia didáctica

El estudio se realiza con hojas de trabajo, en las cuales se plantean problemas relacionados con los contenidos matemáticos a trabajar y se formulan preguntas que estimulan la discusión. Estas hojas; tienen una doble función: estimular al alumno para que pueda resolver los problemas planteados y hacerlo reflexionar acerca de las actividades, así como sobre el procedimiento y el resultado obtenido, para finalmente sintetizar su reflexión y hacerla explícita al grupo. Esta manera, puede ayudarnos a entender mejor las respuestas de los estudiantes acerca de la comprensión de los contenidos matemáticos en cada actividad, así como abordar las dificultades de manera más detallada en una entrevista clínica con enseñanza.

#### 3.1.1.4 Modelo de enseñanza

El modelo de enseñanza indica en los sistemas educativos, tanto en el modelo en el cual se formaron los profesores, como en aquel con el cual ellos forman a sus estudiantes. Esta componente registra cómo los modelos de enseñanza dirigen lo que los alumnos aprenden, cuándo y cómo. Esta componente sirve para estudiar cómo se diseñan los modelos de enseñanza y las dificultades enfrentadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, inherentes a la organización curricular.

En esta parte del estudio, se plantea una conexión entre la epistemología y la didáctica. Se escoge una ruta para acceder al conocimiento matemático, que en este caso es un Experimento Mental usando lenguaje común esto implica un mal entendimiento de los conceptos de marco de referencia y evento que puede ser un obstáculo importante para pasar del marco conceptual clásico al conceptual relativista. El propósito general de nuestra investigación es identificar una serie de dificultades u obstáculos que los alumnos enfrentan para definir o comprender el objeto matemático, en este caso las nociones de la relatividad especial.

Se desarrolla una secuencia de enseñanza que vincule, aspectos visuales, geométricos y algebraicos, con el propósito; de introducir ese contenido matemático en los primeros años del nivel superior, dotándolo de más significado para los alumnos, basados en una breve descripción de los antecedentes del sistema de referencia de Galileo, que aparecen en el plan y programas de estudio y en los libros de texto. Esta parte sirvió como un elemento más para fundamentar el estudio que se realizó, al argumentar que este contenido matemático ya se explicita en los libros de texto, pero para verificar cómo son introducidos estos temas matemáticos.

Las hipótesis de trabajo es que la transición de la cinemática clásica a la relativista exige un cambio radical en el marco conceptual. En la teoría de la relatividad especial, la velocidad de la luz ( $c$ ) es una constante que conecta el espacio y el tiempo en la estructura unificada del espacio-tiempo<sup>1</sup>. La velocidad de la luz es igual a esa constante y, por lo tanto, es invariante con respecto a cualquier marco de referencia inercial. Además, la simultaneidad de dos eventos no es absoluta (dos eventos en ubicaciones diferentes que ocurren al mismo tiempo en un marco de referencia dado no son simultáneos en todos los demás marcos de referencia). Suponiendo que este cambio en el marco conceptual requiere un conocimiento sólido de los conceptos de marco de referencia y el evento que sustentan las leyes de la cinemática clásica. Un marco de referencia puede ser definido como un conjunto de observadores en reposo entre sí. Estos observadores determinan las mismas distancias y retrasos de tiempo entre cualquier conjunto de eventos donde un evento se define como un hecho que ocurre en un lugar

<sup>1</sup> De acuerdo con la física moderna toda radiación electromagnética (incluida la luz visible) se propaga o mueve con una rapidez constante en el vacío, conocida común como "velocidad de la luz" (magnitud vectorial), en vez de "rapidez de la luz" (magnitud escalar). Esta es una constante física denotada como  $c$ .

determinado en el espacio y en un instante dado en el tiempo. Desarrollando esto se crea el modelo de enseñanza, enfatizando los procesos de resolución problemas, así como su incidencia en el componente cognitivo.

#### 3.1.1.5 Modelo de competencia formal

Este componente aborda el dominio matemático de un sms y sus aplicaciones. Simula la acción competente de un usuario ideal del sms. En el caso más extremo, simula la descodificación, que un sujeto epistémico, hace de las situaciones observadas. Además, aquí en nuestra investigación, se determina a partir de la historia, en el modelo de enseñanza en el que se identifica saltos epistemológicos dentro del proceso histórico, para luego dar una definición formal y proponer la ampliación del análisis fenomenológico<sup>2</sup>. La Estructura Conceptual de Referencia se basa, fuertemente, en los postulados de la Teoría de la Relatividad especial (TER) y los utiliza para obtener los resultados que predice la teoría hasta llegar a la transformación de Lorentz como se muestra en la siguiente figura:

<sup>2</sup> El análisis fenomenológico de freudenthal, para un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. Fuente: Puig, L. Análisis fenomenológico. Vol. 3, Valencia, España.

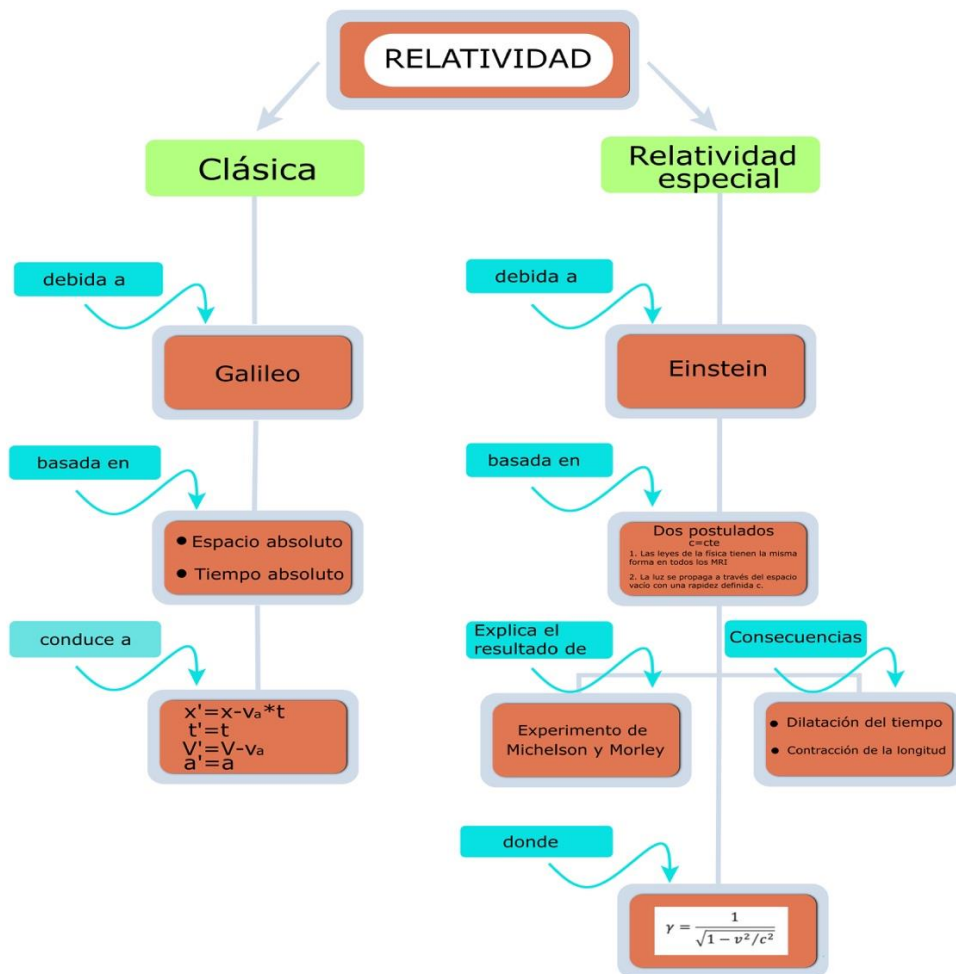


Figura 3.1 Estructura conceptual de referencia de la Relatividad Especial.

Fuente: Adaptado de Física del Siglo XX: Relatividad, Relatividad en la mecánica clásica (2017).

Recuperado de <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mramrodp/2017/04/14/fisica-del-siglo-xx-relatividad/>

De acuerdo con el mapa conceptual para la secuencia de enseñanza se toman los postulados de la TER. Los postulados se formulan como sigue:

*Principio de Relatividad:* Las leyes de la Física son las mismas para todos los observadores inerciales.

*Constancia de la velocidad de la luz:* La velocidad de la luz es constante para todos los observadores inerciales en el vacío y es el límite superior para cualquier velocidad.

Estos postulados hacen ver las predicciones que contraponen las ideas de espacio y tiempo, ideas que son arraigadas por la experiencia cotidiana y dentro de velocidades menores a la de la luz. La importancia de los postulados es que nos permiten seguir organizando los experimentos e ir haciendo previsiones que discrepan al realizar nuevos experimentos.

En el Primer Postulado, se extiende el Principio de Relatividad de Galileo para todos los sistemas físicos, que eran exclusivos solo a la Mecánica Clásica.

Con las transformaciones de Galileo se comprueba que las leyes de Maxwell no son invariables en relación con esta transformación, sabemos que si se evidenciara que las ecuaciones de electromagnetismo son invariables en un Sistema de Referencia Preferencial, el primer postulado resultaría invalida, no sería adaptable al electromagnetismo, al mismo tiempo se excluiría la constancia de la velocidad de la luz  $C$ . Sin embargo, al admitir que es una constante independiente del Sistema de Referencia Inercial, entonces se universaliza la Relatividad.

La generalización que hizo Einstein de los principios de la Relatividad en todos los sistemas físicos, abarcando el electromagnetismo y además de aceptar la constante de la velocidad de la luz para los observadores inerciales, hace que adquiera notabilidad dentro de la Transformación de Lorentz la invariabilidad de las leyes de la física (principio de relatividad), cabe también decir que a bajas velocidades comparadas con la velocidad de la luz se somete a la transformación de Galileo.

La importancia de la propuesta del modelo de enseñanza de la Teoría Especial de la Relatividad en el nivel superior, basándonos en la cinemática clásica, es el estudio de la relación entre los postulados de la TER y los resultados cinemáticos que de ellos resultan.

En este trabajo no partimos de la transformación de Lorentz para deducir, de manera tradicional, los fenómenos de dilatación el tiempo, contracción de la longitud y pérdida de la

simultaneidad. Aprovechamos que estos fenómenos fundamentales surgen mediante situaciones que proponen analizar el encuentro entre diferentes objetos, usando los postulados a partir de conceptos cinemáticos que están al alcance de los estudiantes, usando ideas clásicas de la Teoría de Relatividad de Galileo, que resultan más familiares para después analizar y cuestionar las implicaciones que resultan de la introducción de los postulados y de su uso

Queda fuera del alcance de esta tesis el estudio de los efectos de la dinámica relativista, algunos efectos como la relación entre la masa y la energía.

### 3.1.2 La teoría especial de la relatividad

Algunas teorías revelaban algunos fenómenos físicos; la teoría newtoniana decía como se movían los objetos, explicaba el movimiento ondulatorio etc., la teoría cinética explicaba el comportamiento de los gases y algunos otros materiales, la teoría de maxwell del electromagnetismo anunció la presencia de las ondas electromagnéticas que se comportaban como la luz también explicó fenómenos eléctricos, etc. Pero sin embargo quedaban algunas incógnitas por resolver y que se resolverían con la introducción de dos nuevas teorías, la teoría de la relatividad y la teoría cuántica que transformarían la concepción de la naturaleza. A esta nueva física se le llamo **Física moderna**<sup>1</sup>. A la física, tal como se conocía a finales del siglo XIX, se le llama **Física clásica**.

<sup>1</sup> La física moderna comienza a principios del siglo xx, cuando el alemán Max Planck investiga sobre el “cuanto” de energía. Planck decía que eran partículas de energía indivisibles, y que éstas no eran continuas como decía la física clásica. Por ello nace esta nueva rama de la física. Se conoce, generalmente, por estudiar los fenómenos que se producen a la velocidad de la luz o valores cercanos a ella, o cuyas escalas espaciales son del orden del tamaño del átomo o inferiores. En 1905, Albert Einstein publicó una serie de trabajos que revolucionaron la física, principalmente representados por “La dualidad onda-partícula de la luz” y “La Teoría de la Relatividad” entre otros. Se divide en: La mecánica cuántica y la teoría de la relatividad. Fuente: Wikipedia (2012). Física moderna. Recuperado de [https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica\\_moderna](https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica_moderna)

### 3.1.2.1 Relatividad galileana-newtoniana

Lo que presenta la Teoría Especial de la Relatividad, de la manera cómo los objetos y eventos se observan en diferentes marcos de referencia, ya lo habían explorado Galileo y Newton.

En los marcos de referencia inercial es válido la primera ley de Newton, donde se establece que un objeto permanecerá en reposo o con movimiento uniforme rectilíneo al menos que sobre él actúe una fuerza externa. La Teoría Especial de la Relatividad trata con acontecimientos que se observan y miden en estos señalados marcos de referencia.

Es también un marco inercial un determinado marco de referencia que se mueve con velocidad constante con respecto a un marco inercial ya que también mantiene las leyes de Newton. En el momento que observamos desde algún marco de referencia, significa que estamos en reposo en ese marco de referencia.

Para Galileo y Newton las leyes básicas de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales, por ejemplo, reconocemos que los objetos que van en un tren o un avión, que se desplaza a velocidad constante, se comportan de la misma forma que lo hacen en la Tierra. También la relatividad Galileana-Newtoniana supone que las longitudes de los objetos son las mismas en un marco de referencia y en otro, y que el tiempo transcurre de igual forma en diferentes marcos de referencia, esto desde nuestra experiencia cotidiana.

Esto deriva que, en la mecánica clásica, los intervalos de espacio y tiempo se suponen absolutos, la masa de un objeto y todas las fuerzas, se consideran invariables al cambiar de marco de referencia inercial, en consecuencia, que su medición no cambia de un marco de referencia a otro.

Al comprender que las leyes de la mecánica sean iguales en todos los marcos de referencia inerciales, nos dice que ningún marco de referencia es especial, esto nos proporciona una importante observación que nos indica que todos los marcos de referencia son equivalentes



para describir los fenómenos mecánicos. Por tanto, ningún marco de referencia inercial es mejor que otro.

Dentro de los experimentos que se pueden realizar, no hay alguno que diga que marco está realmente en reposo y que marco está en movimiento, de tal manera que no existe una caracterización de un marco de referencia único que esté en reposo absoluto.

Si bien, surgió una complicación en la mitad del siglo XIX, Maxwell predijo que la luz era una onda electromagnética, a su vez, las ecuaciones de Maxwell establecieron que la velocidad de la luz era de  $3 \times 10^8$  m/s, pero surgió la duda de entonces en que marco de referencia tiene este valor la luz; en esos tiempos se pensó que tendría rapidez diferente en distintos marcos de referencia

### 3.1.2.2 Transformaciones de Galileo

Uno de los puntos que aborda la Mecánica, es la descripción de la manera en que los cuerpos cambian en el espacio y en el tiempo. En otras palabras, que cualquier evento de la naturaleza tiene lugar en un espacio de cuatro dimensiones. Dentro de la teoría de la relatividad se usará el término espacio-tiempo.

Antes de la relatividad de Einstein, la palabra se usaba como espacio y tiempo como dos conceptos independientes, no relacionados. En cambio, actualmente sabemos que para determinar dónde y cuándo tienen lugar determinados hechos, tenemos que indicar cuatro dimensiones, a saber, las tres primeras dan la posición en el espacio, mientras que la cuarta da la posición en el tiempo.

Una observación importante que hacemos de las cosas, es cuando nos referimos al movimiento, cuando un cuerpo se mueve, es porque está cambiando de posición, es decir, para localizar un evento o describir un fenómeno, lo realizamos con respecto a un cuerpo fijo o un sistema de referencia eligiendo un sistema de coordenadas.

Esta observación es importante ya que comprende varios conceptos que nos lleva a establecer sistemas de coordenadas para poder interpretar los conceptos de distancia, trayectoria, cambio de posición, etcétera.

Es trascendente conocer las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos, para entender la finalidad de la mecánica, que no es más que conocer las fuerzas que actúan sobre los cuerpos y así determinar su movimiento.

Gracias a Newton podemos entender las leyes de los movimientos de los cuerpos y saber que la descripción del movimiento, depende del sistema de referencia en que se observe.

Se dice en la mecánica clásica que un “punto de referencia” es el lugar de origen de las coordenadas cartesianas, o polares u otras, esto con respecto a un sistema de referencia, en el caso de coordenadas cartesianas este está formado por tres ejes perpendiculares entre sí.

Esto nos explica que para describir los movimientos de los cuerpos se hace con respecto a un marco de referencia fijo.

Sabemos que la Mecánica de Newton utiliza el concepto de marco de referencia inercial para describir el movimiento de partículas en el espacio y en el tiempo.

### 3.1.2.3 Marco de Referencia Inercial

Una característica de un sistema o marco de referencia inercial es que son válidas las leyes de Newton y además podemos observar que si un cuerpo está libre de fuerzas e inicialmente está en reposo, permanece en reposo o si está inicialmente con velocidad, mantiene dicha velocidad.

La descripción del movimiento en la mecánica clásica, es cuando se indica cómo cambia un cuerpo de lugar con el tiempo, ósea indicar cada punto de trayectoria, en qué momento y en qué tiempo.

Es indispensable tomar en cuenta como comparan, los observadores de dos sistemas inerciales de referencia, los valores numéricos para describir un mismo evento o cualquier otro fenómeno físico que describa el movimiento.

La analogía que contrasta las medidas para la descripción del mismo evento en diferentes sistemas de referencia se llama Transformación.

En la siguiente figura se muestran dos sistemas de referencia S y S', que se mueven con velocidad uniforme entre sí, en la dirección x.

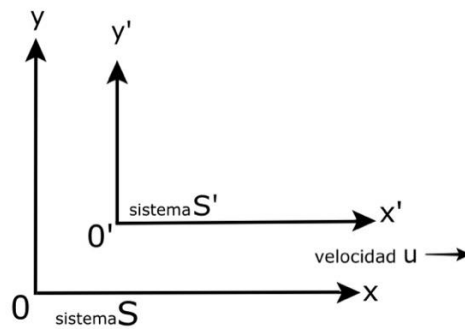


Figura 3-2. Dos sistemas inerciales de referencia. Para el observador en S, el sistema S' parece ser el que se está moviendo en la dirección +X con velocidad u. Para el sistema S', el sistema S, parece estar moviéndose en la dirección negativa de las x, con velocidad  $-u$ . El eje de los tiempos sale perpendicular a la hoja del papel en cada uno de los sistemas.

Se conoce como Transformación de Galileo a la relación entre las coordenadas  $(r, t)$  de un evento vistos por S y las coordenadas  $(r', t')$  vistos por S', y se utilizan para describir los procesos de la naturaleza, cuando las velocidades a las que se realizan son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

Para comprender la derivación de la Transformación de Galileo, supongamos que existen dos observadores, uno en el sistema S y otro en el sistema S', los cuales intercambian información; a su vez observan una partícula en el punto A, moviéndose paralelamente en dirección x.

Denotamos la velocidad por  $v_x$ , y el observador en S' utiliza el símbolo  $v'_x$ . Para poder interpretar el movimiento desde los dos sistemas de referencia, debemos encontrar la relación (transformación), para ello, supongamos que un evento ocurre en A, según se indica en la figura 3-3.

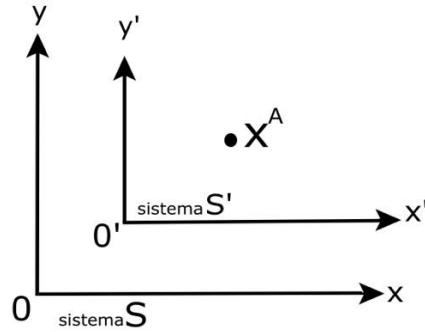


Figura 3-3. El evento A visto en S y en S'. El eje de los Tiempos, en ambos sistemas, sale perpendicular a la hoja de papel.

Estamos admitiendo que los dos sistemas de coordenadas son paralelos.

En el sistema S, señalaríamos que el evento A ocurrió en la posición  $x$ , y en el instante  $t$ . En el sistema S' especificaremos que la posición ocurrió en  $x'$ , y en el instante  $t'$ .

Suponemos que se tiene relojes en ambos sistemas y han sido sincronizados, estableciendo  $t=0$  en el instante en que los orígenes 0 de S, y 0' de S' coinciden. Por lo tanto, dada la sincronización de los relojes, los observadores de S y S' concordarán al reportar los mismos tiempos:

$$t = t' \quad \text{y} \quad t' = t$$

para el instante en que ocurre el evento A.

Es importante mencionar que se está usando el concepto de Newtoniano de tiempo absoluto, donde nos indica que un evento sucede al mismo tiempo sin relación a nada externo, esto se adquiere desde de la perspectiva de la experiencia humana.

Los valores medidos para las otras coordenadas son los siguientes:

Sistema S	Sistema S'
$x = x' + u t'$	$x' = x - u t$
$v_x = v'_x$	$v'_x = v_x - u$
$a_x = a'_x$	$a'_x = a_x$

Estas ecuaciones se llaman Transformaciones de Galileo, sólo son válidas para velocidades muy pequeñas con respecto a la velocidad de la luz  $c$ .

Los observadores S y S', perciben la misma aceleración  $a_x = a'_x$ . Típicamente la fuerza ( $F_x$ ) y la masa ( $m$ ) es en principio un concepto que es independiente del observador, por lo tanto,  $F_x = F'_x$ . Siendo así, ambos observadores estarán de acuerdo que si para uno de ellos (S) es válida la relación:

$$F_x = ma_x,$$

El otro observador (S') también medirá la misma relación (en sus propias coordenadas):

$$F'_x = ma'_x,$$

Esto nos indica que para ambos observadores la 2ª ley de Newton representa lo mismo. Esto sucede con todos los observadores que son inerciales, que están en reposo o se mueven con velocidad uniforme.

#### 3.1.2.4 El experimento de Michelson y Morley

Una onda es una propagación de una perturbación desde el punto en que se produjo hacia el medio que lo rodea, su velocidad depende sólo del medio y no de la velocidad del foco emisor o del receptor. Las ondas materiales requieren un medio elástico para propagarse. La percepción del mundo material para los físicos del siglo XIX, lo basaban en conocimientos de las leyes de la mecánica, de forma que era normal creer que la luz debía viajar en un determinado medio. Un medio que creían debía permear todo el espacio. A este medio lo llamaron Éter y pensaban que la velocidad de luz explicada por las ecuaciones de Maxwell, se propagaba con respecto al Éter.

La tarea para los científicos fue determinar la rapidez de la tierra en relación con un marco absoluto cualquiera que fuera. De los diferentes experimentos que se diseñaron, el más decisivo fue ideado por los físicos estadounidenses Albert Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923). Ellos utilizaron el interferómetro de Michelson para medir la diferencia de rapidez de la luz en distintas direcciones. Deseaban notar una diferencia que resultara de la orientación de sus aparatos con respecto al éter. Esperaban que la velocidad de la luz tuviera diferentes rapidezces dependiendo de la velocidad del éter que pase por la Tierra; parecido al comportamiento de un bote que tiene diferentes rapidezces relativas con respecto a la tierra cuando se mueve corriente arriba, corriente abajo o a través de la corriente.

El experimento de Michelson y Morley<sup>1</sup> se diseñó para medir la rapidez del éter, fluido hipotético invisible, sin peso y elástico, que se consideraba que llenaba todo el espacio y constituía el medio transmisor de todas las manifestaciones de la energía como la luz, esto con respecto a la tierra. De esta forma, Michelson y Morley esperaban encontrar un marco de referencia absoluto, uno que pudiera considerarse en reposo.

La tierra debería mostrar algún movimiento perceptible respecto del éter en alguna dirección, ya que se suponía que el éter llena el espacio vacío y las condiciones donde se presenta al éter como medio donde se desplaza la onda de luz; hacen que la Tierra, en su traslación alrededor del Sol, viaje a una velocidad  $v$  por el espacio, casi 30 Km/s solo por su velocidad de traslación en la órbita.

Admitiendo que el movimiento relativo del éter no puede ser igual, a la vez, en dos direcciones distintas. El experimento de Michelson y Morley pretendía medir cual era la velocidad de luz en la Tierra, en diferentes direcciones, a diversas horas y en distintos momentos del año.

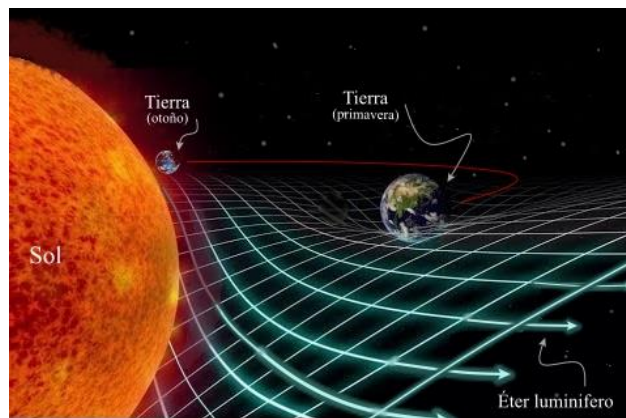


Figura 3-4. Velocidad de luz en la Tierra, en distintas direcciones, a distintas horas y en distintos momentos del año.

Para comprender el experimento lo podemos imaginar similar al de medir la velocidad de una onda de sonido cuando hay viento. Esto es, se trataba con este experimento calcular la velocidad del “viento” del éter luminífero.

<sup>1</sup> El experimento de Michelson y Morley fue uno de los más importantes y famosos de la historia de la física. Realizado en 1887 por Albert Abraham Michelson (Premio Nobel de Física, 1911) y Edward Williams Morley, está considerado como la primera prueba contra la teoría del éter. El resultado del experimento constituiría posteriormente la base experimental de la teoría de la relatividad especial de Einstein.

Este experimento se basó en el principio que se muestra en la figura 3-5a. Es un diagrama del interferómetro de Michelson, y se supuso que el “viento de éter” se desplazaba con rapidez  $v$  hacia la derecha. (De manera alternativa, se supuso que la Tierra se movía hacia la izquierda con respecto al éter, con rapidez  $v$ ). La luz proveniente de la fuente se divide en dos haces mediante un espejo semi-plateado  $M_S$ . Un haz viaja hacia el espejo  $M_1$  y el otro hacia el espejo  $M_2$ . Los haces se reflejan en  $M_1$  y  $M_2$  y se unen de nuevo después de pasar a través de  $M_S$ . Los haces ahora superpuestos interfieren entre sí y el ojo del observador ve la resultante como un patrón de interferencia.

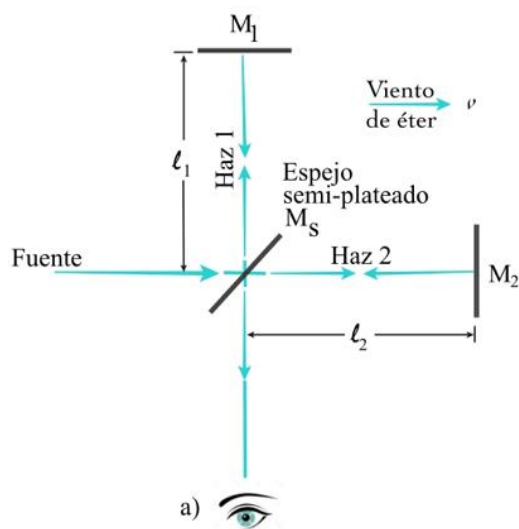


Figura 3-5a. Interferómetro de Michelson.

Imaginemos una analogía de un bote que viaja de arriba abajo y a través de un río cuya corriente se desplaza con rapidez  $v$ , como se ilustra en la figura 3-5b. En agua tranquila, el bote puede viajar con rapidez  $c$  (no la rapidez de la luz, en este caso).

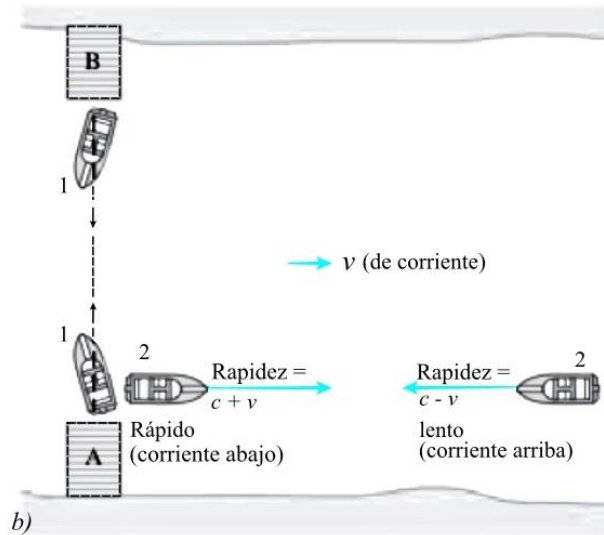


Figura 3-5b. Analogía de un bote que viaja de arriba abajo y a través de un río cuya corriente se desplaza con rapidez  $v$ .

Considere primero el haz 2 en la figura 3-5a, que viaja paralelo al “viento de éter”. En su trayecto de MS a M2, la luz viajaría con rapidez  $c + v$ , de acuerdo con la física clásica; tal como en el caso de un bote que viaja corriente abajo (véase la figura 3-5b), se agrega la rapidez del agua del río a la rapidez del bote (en relación con el agua) para obtener la rapidez del bote en relación con la orilla. Como el haz recorre una distancia  $l_2$ , el tiempo que tarda en ir de MS a M2 sería  $t = l_2/(c + v)$ . Para hacer el viaje de regreso de M2 a MS, la luz se desplaza contra el viento de éter (como el bote que va corriente arriba), de manera que se espera que su rapidez relativa sea  $c - v$ . El tiempo para el viaje de regreso sería  $l_2/(c - v)$ . El tiempo total para que el haz 2 vaya de MS a M2 y de regreso a MS es

$$t_2 = \frac{l_2}{c + v} + \frac{l_2}{c - v} = \frac{2l_2}{c(1 - v^2/c^2)}$$

Ahora considere el haz 1, que viaja a través del viento de éter. Aquí la analogía del bote (figura 3-5b) es especialmente útil. El bote va del embarcadero A al embarcadero B directamente a través de la corriente. Si va directamente, el flujo de la corriente lo arrastrará corriente abajo. Para llegar al embarcadero B, el bote debe dirigirse en un ángulo corriente arriba. El ángulo preciso depende de las magnitudes de  $c$  y  $v$ , pero no es de interés para este análisis por sí mismo.



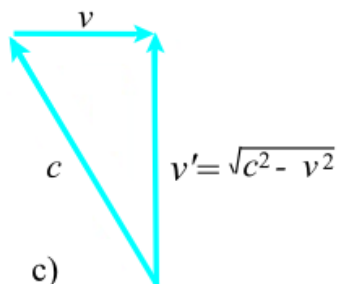


Figura 3-5c. Cálculo de la velocidad del bote (o el haz de luz) que viaja perpendicular a la corriente (o viento de éter).

La figura 3-5c indica cómo calcular la velocidad  $v'$  del bote en relación con la Tierra conforme cruza la corriente. Como  $c$ ,  $v$  y  $v'$  forman un triángulo recto, se tiene que  $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$ . El bote tiene la misma rapidez cuando regresa. Si ahora se aplican estos principios al haz de luz 1 en la figura 3-5a, se espera que el haz viaje con rapidez  $\sqrt{c^2 - v^2}$  para ir de MS a M1 y de regreso. La distancia total recorrida es  $2l_1$ , así que el tiempo requerido para que el haz 1 haga el viaje redondo sería  $2l_1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , o

$$t_1 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Michelson y Morley se dieron cuenta de que podían detectar la diferencia de fase (suponiendo que  $v \neq 0$ ) si giraban su aparato  $90^\circ$ , porque entonces el patrón de interferencia entre los dos haces debía cambiar.

Intentaron en diferentes estaciones del año (la Tierra en diferentes posiciones por su órbita alrededor del Sol). Nunca observaron un corrimiento significativo de franjas.

Una posibilidad para explicar el resultado nulo la plantearon de manera independiente G. F. Fitzgerald y H. A. Lorentz (en la década de 1890), y propusieron que cualquier longitud (incluido el brazo de un interferómetro) se contrae en un factor de  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  en la dirección de movimiento a través del éter. De acuerdo con Lorentz, esto se podría deber al éter que afecta las fuerzas entre las moléculas de una sustancia, que se suponía tenían naturaleza eléctrica. Con el tiempo, esta teoría fue sustituida por la teoría más extensa propuesta por Albert Einstein en 1905: la teoría especial de la relatividad.

### 3.1.2.5 Postulados de la teoría especial de la relatividad

Como resultado de la introducción de Einstein en 1905 de la Teoría de la Relatividad, se logró resolver los problemas que existían a comienzos del siglo XX con relación a la teoría electromagnética y mecánica newtoniana.

Einstein decía que un haz de luz al viajar vería campos eléctricos y magnéticos alternos en reposo cuya magnitud cambiaría en el espacio, pero no cambiaría en el tiempo, esto en vez de una onda electromagnética. Los campos eléctricos y magnéticos al que Einstein se refería, no serían congruentes con la teoría electromagnética de Maxwell. En consecuencia, Einstein argumentaba que no era razonable pensar que la rapidez de la luz relativa a algún observador se podría reducir a cero, o de hecho reducirse en absoluto. Esta idea se convirtió en el segundo postulado de su teoría de la relatividad.

Einstein, en su ensayo de 1905<sup>1</sup>, Propuso disolver la idea del éter y la suposición de un marco de referencia absoluto. Esta idea la concentro en dos postulados:

El primer postulado fue una extensión del principio de relatividad galileano-newtoniano para incluir las leyes de la mecánica, las de la electricidad y el magnetismo, así como el resto de la física.

**Primer postulado (el principio de relatividad): Las leyes de la física tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales.**

El primer postulado también se puede formular como: No existe algún experimento que se pueda realizar en un marco de referencia inercial para indicar si se está en reposo o en movimiento uniforme con velocidad constante.

<sup>1</sup> El primero de sus artículos de 1905 se titulaba Un punto de vista heurístico sobre la producción y transformación de luz. En él, Einstein proponía la idea de «quanto» de luz (ahora llamados fotones) y mostraba cómo se podía utilizar este concepto para explicar el efecto fotoeléctrico.

Wikipedia (2018). Albert Einstein. Recuperado de [https://es.wikipedia.org/wiki/Albert\\_Einstein](https://es.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein)

**Segundo postulado (constancia de la rapidez de la luz): La luz se propaga a través del espacio vacío con una rapidez definida  $c$  independiente de la rapidez de la fuente o el observador.**

Estos dos postulados constituyen los fundamentos de la teoría especial de la relatividad de Einstein. Se le llama “especial” para distinguirla de la posterior “teoría general de la relatividad”, que trata con marcos de referencia no inerciales.

La idea del éter se fue disolviendo al no ser detectado, pero el segundo postulado fue difícil de aceptar, pues infringe el sentido común como el de pensar que la luz viaja a través del espacio vacío. El segundo postulado además dice que sin importar cuál sea la rapidez del observador o de la fuente, la rapidez de la luz en el vacío siempre es la misma  $3.00 \times 10^8$  m/s. Esto nos permite ver que la misma rapidez la mide una persona que sale de la fuente emitida que la que está en reposo con respecto a esa fuente. Lo cual, entra en conflicto con la experiencia cotidiana, ya que era de esperarse tener que sumar la velocidad del observador. Por otra parte, cuando se contienda con la alta velocidad de la luz, no se espera que la experiencia cotidiana sea útil. También es importante comentar que el resultado nulo del experimento de Michelson y Morley es del todo congruente con el segundo postulado.<sup>2</sup>

La propuesta de Einstein desecha la idea de un marco de referencia absoluto, esto hace posible reconciliar la mecánica clásica con la teoría electromagnética de Maxwell. La rapidez de la luz prevista por las ecuaciones de Maxwell no es más la rapidez de la luz en el vacío en cualquier marco de referencia.

La teoría de Einstein requiere que uno descarte las nociones de sentido común acerca del espacio y el tiempo.

<sup>2</sup> El experimento de Michelson y Morley también se puede considerar como evidencia del primer postulado, pues tenía la intención de medir el movimiento relativo de la Tierra en un marco de referencia absoluto. Su fracaso para hacerlo implica la ausencia de cualquiera de tales marcos preferidos.

### 3.1.2.6 Simultaneidad

La teoría de la relatividad nos da como una consecuencia importante el hecho que ya no se puede considerar al tiempo como una cantidad absoluta. Del marco de referencia del observador dependen, el intervalo de tiempo entre dos eventos, e incluso si dos eventos son o no simultáneos, por **evento**, se entiende como un fenómeno o un hecho observable en un momento dado, o un que es un acontecimiento que sucede en una posición y momento determinados, por lo tanto, puede especificarse como un punto en el espacio-tiempo.

Se dice que dos eventos ocurren simultáneamente si ocurren exactamente al mismo tiempo. Si los eventos ocurren en el mismo punto en el espacio y muy cercanos, es más fácil saber que ocurren al mismo tiempo. Pero si los dos eventos ocurren en lugares muy separados, es más difícil saber si son simultáneos, se debe considerar el tiempo, ya que la luz que proviene de los eventos tarda en llegar al observador. Como la luz viaja con rapidez finita, una persona que ve dos eventos debe descubrir cuándo ocurrieron en realidad. Se puede citar que, si se observa que dos eventos ocurren al mismo tiempo, y uno tuvo lugar más lejos del observador que el otro, entonces el más distante pudo ocurrir antes; por tanto los dos eventos no fueron simultáneos.

Supongamos que un observador, llamado O, se ubica exactamente a la mitad entre los puntos A y B, donde ocurren dos eventos, figura 3-6. Suponga que los dos eventos son rayos que caen en los puntos A y B, como se muestra. Para eventos breves como los rayos, pulsos cortos de luz (representados por curvas en la figura 3-6) viajarán hacia fuera desde A y B, y llegarán a O. El observador O “ve” los eventos cuando los pulsos de luz llegan al punto O. Si los dos pulsos llegan a O al mismo tiempo, entonces los dos eventos tuvieron que ser simultáneos. Esto se debe a que los dos pulsos de luz viajaron con la misma rapidez (postulado 2) y, puesto que la distancia OA es igual a OB, el tiempo para que la luz viaje de A a O y de B a O debe ser el mismo. Entonces el observador O puede afirmar definitivamente que los dos eventos ocurrieron de manera simultánea. Por otra parte, si O ve la luz de un evento antes que la del otro, entonces el primer evento ocurrió primero.

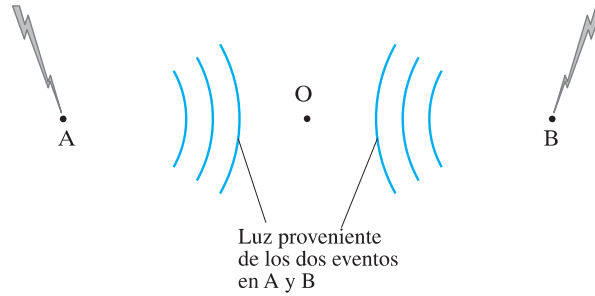


Figura 3-6. Un momento después de que el relámpago llega a los puntos A y B, los pulsos de luz (que se muestran como ondas) viajan hacia el observador O, pero O “ve” el relámpago sólo cuando la luz llega a O.

Si dos eventos son simultáneos para un observador en un marco de referencia, ¿también son simultáneos para otro observador que se mueve con respecto al primero? Llamemos a los observadores  $O_1$  y  $O_2$  y supongamos que están fijos en los marcos de referencia 1 y 2 que se mueven con rapidez relativa  $v$  uno con respecto al otro. Estos dos marcos de referencia se pueden considerar como dos trenes (figura 3-7).  $O_2$  dice que  $O_1$  se mueve hacia la derecha con rapidez  $v$ , como en la figura 3-7a; y  $O_1$  dice que  $O_2$  se mueve hacia la izquierda con rapidez  $v$ , como en la figura 3-7b. Ambos puntos de vista son legítimos de acuerdo con el principio de la relatividad. No existe un tercer punto de vista que diga cuál se mueve “en realidad”.

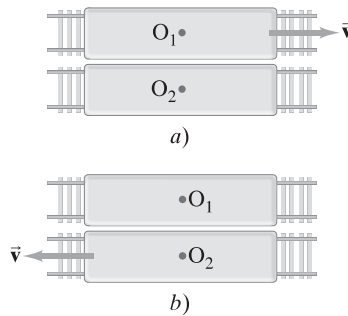


FIGURA 3-7 Los observadores  $O_1$  y  $O_2$ , en dos trenes diferentes (dos marcos de referencia diferentes), se mueven con rapidez relativa  $v$ .  $O_2$  dice que  $O_1$  se mueve hacia la derecha a);  $O_1$  dice que  $O_2$  se mueve hacia la izquierda b). Ambos puntos de vista son legítimos: todo depende del marco de referencia.

Ahora supongamos que los observadores  $O_1$  y  $O_2$  observan y miden dos impactos de los rayos. Los rayos marcan ambos trenes en los puntos a donde llegan: en  $A_1$  y  $B_1$  en el tren de  $O_1$ , y en  $A_2$  y  $B_2$  en el tren de  $O_2$ , figura 3-8a. Supongamos que  $O_1$  está exactamente a

medio camino entre  $A_1$  y  $B_1$ , y que  $O_2$  está a medio camino entre  $A_2$  y  $B_2$ . Póngase primero en el marco de referencia de  $O_2$ , de manera que observe que  $O_1$  se mueve a la derecha con rapidez  $v$ . Suponga también que los dos eventos ocurren simultáneamente en el marco de  $O_2$ , y justo en el instante cuando  $O_1$  y  $O_2$  están opuestos uno con respecto al otro, figura 3-8a. Poco tiempo después, figura 3-8b, la luz proveniente de  $A_2$  y de  $B_2$  llega a  $O_2$  al mismo tiempo (esto se supuso). Puesto que  $O_2$  sabe (o mide) que las distancias  $O_2A_2$  y  $O_2B_2$  son iguales,  $O_2$  sabe que los eventos son simultáneos en el marco de referencia  $O_2$ .

Pero, ¿qué observa y mide el observador  $O_1$ ? Desde nuestro marco de referencia ( $O_2$ ), se puede predecir lo que observará  $O_1$ . Se ve que  $O_1$  se mueve hacia la derecha durante el tiempo que la luz viaja hacia  $O_1$  desde  $A_1$  y  $B_1$ . Como se ilustra en la figura 3-8b, desde el marco de referencia  $O_2$  se puede ver que la luz proveniente de  $B_1$  ya pasó a  $O_1$ , mientras

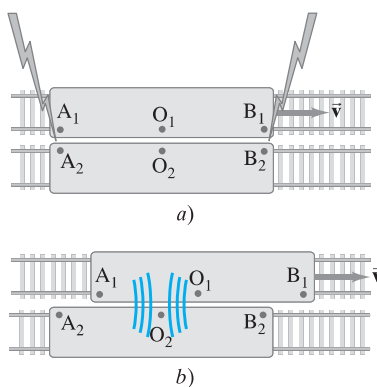


FIGURA 3-8 Experimento mental acerca de la simultaneidad. Tanto en a) como en b) se está en el marco de referencia del observador  $O_2$ , quien ve que el marco de referencia  $O_1$  se mueve hacia la derecha. En a), un rayo llega a los dos marcos de referencia en  $A_1$  y  $A_2$ , y un segundo rayo llega a  $B_1$  y  $B_2$ . b) Un momento después, la luz (que se muestra en gris) proveniente de los dos eventos llega a  $O_2$  al mismo tiempo. De manera que, de acuerdo con el observador  $O_2$ , los dos rayos llegan simultáneamente. Pero en el marco de referencia de  $O_1$ , la luz proveniente de  $B_1$  ya llegó a  $O_1$ , mientras que la luz proveniente de  $A_1$  todavía no llega a  $O_1$ . Por lo tanto, en el marco de referencia de  $O_1$ , el evento en  $B_1$  debe preceder al evento en  $A_1$ . La simultaneidad en el tiempo no es absoluta.

que la luz proveniente de  $A_1$  todavía no llega a  $O_1$ . Esto es,  $O_1$  observa la luz proveniente de  $B_1$  antes de observar la luz que viene de  $A_1$ . Puesto que **1.** la luz viaja con la misma rapidez  $c$  en cualquier dirección y en cualquier marco de referencia, y **2.** la distancia  $O_1A_1$

es igual a  $O_1B_1$ , entonces el observador  $O_1$  sólo puede concluir que el evento en  $B_1$  ocurrió antes que el evento en  $A_1$ . Los dos eventos no son simultáneos para  $O_1$ , aun cuando lo sean para  $O_2$ .

En consecuencia, se encuentra que dos eventos que tienen lugar en diferentes ubicaciones y son simultáneos para un observador, en realidad no son simultáneos para un segundo observador que se mueve en relación con el primero.

Se puede preguntar: ¿Cuál observador tiene razón,  $O_1$  u  $O_2$ ? La respuesta, de acuerdo con la relatividad, es que ambos tienen razón. No existe un mejor marco de referencia que se pueda elegir para determinar cuál observador está en lo correcto. Ambos marcos son igualmente correctos. Sólo se puede concluir que la simultaneidad no es un concepto absoluto, sino relativo. No se está consciente de esta falta de concordancia en la simultaneidad en la vida diaria, porque el efecto sólo es apreciable cuando la rapidez relativa de los dos marcos de referencia es muy grande (cerca de  $c$ ), o las distancias implicadas son muy grandes.

### 3.1.2.7 Transformaciones galileanas y de Lorentz

Examinaremos las matemáticas que relacionan las coordenadas espacio-tiempo de un evento en dos Sistemas de Referencia inercial  $S$  y  $S'$ , consistentemente con los postulados de la Teoría Especial de la Relatividad. Por lo tanto, esta transformación debe dejar invariante el intervalo  $\Delta S$  entre dos eventos cualesquiera al cambiar de sistema a  $S$  a  $S'$ .

Para el punto de vista clásico o galileano, consideremos dos marcos de referencia inerciales  $S$  y  $S'$  que se caracterizan, cada uno, por un conjunto de ejes coordenados, figura 3-9. Los ejes  $x$  y  $y$  se refieren a  $S$ , y  $x'$  y  $y'$  a  $S'$  (no se muestra  $z$ ). Los ejes  $x'$  y  $x$  se traslapan entre sí, y se supone que el marco  $S'$  se mueve hacia la derecha en la dirección  $x$  con rapidez constante  $v$  con respecto a  $S$ . Para simplificar la situación, suponga que los orígenes  $0$  y  $0'$  de los dos marcos de referencia se superponen en el tiempo  $t = 0$ .

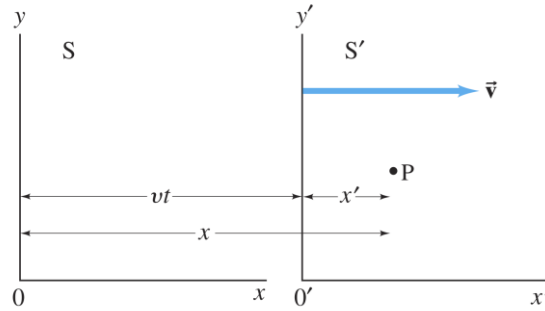


Figura 3-9. El marco de referencia inercial  $S'$  se mueve hacia la derecha con rapidez constante  $v$  con respecto al marco  $S$ .

Ahora considere un evento que ocurre en algún punto  $P$  (figura 3-9) representado por las coordenadas  $x', y', z'$  en el marco de referencia  $S'$  en el tiempo  $t'$ . ¿Cuáles serán las coordenadas de  $P$  en  $S$ ? Como  $S$  y  $S'$  inicialmente se traslapan con precisión, después de un tiempo  $t'$ ,  $S'$  se moverá una distancia  $vt'$ . Por lo tanto, en el tiempo  $t'$ ,  $x = x' + vt'$ . Por otra parte, las coordenadas  $y$  y  $z$ , no se alteran por el movimiento a lo largo del eje  $x$ ; por lo tanto,  $y = y'$  y  $z = z'$ . Finalmente, puesto que el tiempo se supone absoluto en la física galileana-newtoniana, los relojes en los dos marcos concordarán entre sí; de manera que  $t = t'$ . Esto se resume en las siguientes **ecuaciones de transformación galileana**:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \quad \text{[galileana] (3-1)}$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas de un evento en el marco  $S$  cuando se conocen las coordenadas en el marco  $S'$ . Si se conocen las del marco  $S$ , entonces las coordenadas  $S'$  se obtienen a partir de

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad \text{[galileana]}$$

Estas cuatro ecuaciones son la transformación “inversa” y se obtienen muy fácilmente de las ecuaciones 3-1. Note que el efecto es simplemente intercambiar cantidades primas y no primas, y sustituir  $v$  por  $-v$ . Esto tiene sentido pues, desde el marco  $S'$ ,  $S$  se mueve hacia la izquierda (dirección  $x$  negativa) con rapidez  $v$ .



Suponemos que el punto P en la figura 3-9 representa una partícula que se mueve. Sean  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u'_z$  las componentes de su vector velocidad en S'. (Se usa  $u$  para distinguirla de la velocidad relativa de los dos marcos,  $v$ ). Ahora  $u'_x = dx'/dt'$ ,  $u'_y = dy'/dt'$  y  $u'_z = dz'/dt'$ . La velocidad de P vista desde S tendrá componentes  $u_x$ ,  $u_y$  y  $u_z$ . Se puede demostrar cómo se relacionan éstas con las componentes de velocidad en S' al diferenciar las ecuaciones 3-1. Para  $u_x$  se obtiene

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + vt')}{dt'} = u'_x + v$$

pues  $v$  se supuso constante. Para las otras componentes,  $u'_y = u_y$  y  $u'_z = u_z$ , de manera que se tiene

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z \end{aligned} \quad \text{[galileana] (3-2)}$$

Éstas se conocen como **ecuaciones de transformación galileana de velocidad**. Se ve que las componentes  $y$  y  $z$  de velocidad no cambian, pero las componentes  $x$  difieren por  $v$ :  $u_x = u'_x + v$ .

Las transformaciones galileanas, ecuaciones 3-1 y 3-2, sólo son válidas cuando las velocidades implicadas son mucho menores que  $c$ . Se puede ver, por ejemplo, que la primera de las ecuaciones 3-2 no funcionará para la rapidez de la luz: la luz que viaja en S' con rapidez  $u'_x = c$  tendría rapidez  $c + v$  en S, mientras que la teoría de la relatividad insiste en que debe ser  $c$  en S. Así que, se necesita un nuevo conjunto de ecuaciones de transformación para lidiar con velocidades relativistas.

Deducimos la ecuación requerida al observar de nuevo la figura 3-9. Se tratará la suposición simple de que la transformación es lineal y de la forma

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z' \quad \text{(i)}$$

Esto es, modificamos la primera de las ecuaciones 3-1 multiplicando por una constante  $\gamma$  que todavía se tiene que determinar ( $\gamma = 1$  no relativista). Pero se supone que las ecuaciones  $y$  y  $z$  no cambian, pues no hay contracción de la longitud en estas direcciones. No se supondrá una forma para  $t$ , pero se le deducirá. Las ecuaciones inversas deben tener la misma forma

sólo que con  $-v$  en lugar de  $v$ . (El principio de relatividad lo demanda, pues  $S'$  que se mueve hacia la derecha con respecto a  $S$  es equivalente a  $S$  que se mueve hacia la izquierda con respecto a  $S'$ ). Por lo tanto,

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \text{(ii)}$$

Ahora, si un pulso de luz sale del origen común de  $S$  y  $S'$  en el tiempo  $t = t' = 0$ , después de un tiempo  $t$  habrá recorrido una distancia  $x = ct$  o  $x' = ct'$  a lo largo del eje  $x$ . En consecuencia, a partir de las ecuaciones (i) y (ii) anteriores,

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t', \quad \text{(iii)}$$

$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t \quad \text{(iv)}$$

Sustituimos  $t'$  de la ecuación (iv) en la ecuación (iii) y encontramos  $ct = \gamma(c + v) \gamma(c - v)(t/c) = \gamma^2(c^2 - v^2) t/c$ . Cancelamos la  $t$  en cada lado y despejamos  $\gamma$  para encontrar

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ahora que se encontró  $\gamma$ , sólo se necesita encontrar la relación entre  $t$  y  $t'$ . Para ello, combinamos

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \text{con} \quad x = \gamma(x' + vt')$$

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(\gamma[x' + vt'] - vt).$$

Despejamos  $t$  para obtener  $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$  en resumen,

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned} \quad \text{(3-3)}$$

Estas ecuaciones se conocen como la **transformación de Lorentz**. Lorentz las propuso por primera vez en 1904, en una forma ligeramente diferente, para explicar el resultado nulo del experimento de Michelson y Morley y para hacer que las ecuaciones de Maxwell tomaran la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. Un año después Einstein las dedujo de manera independiente con base en su teoría de la relatividad. Observe que no sólo se modificó la ecuación  $x$  en comparación con la transformación galileana, sino también la

ecuación  $t$ ; de hecho, en esta última ecuación se ve directamente cómo se mezclan las coordenadas espacio y tiempo.

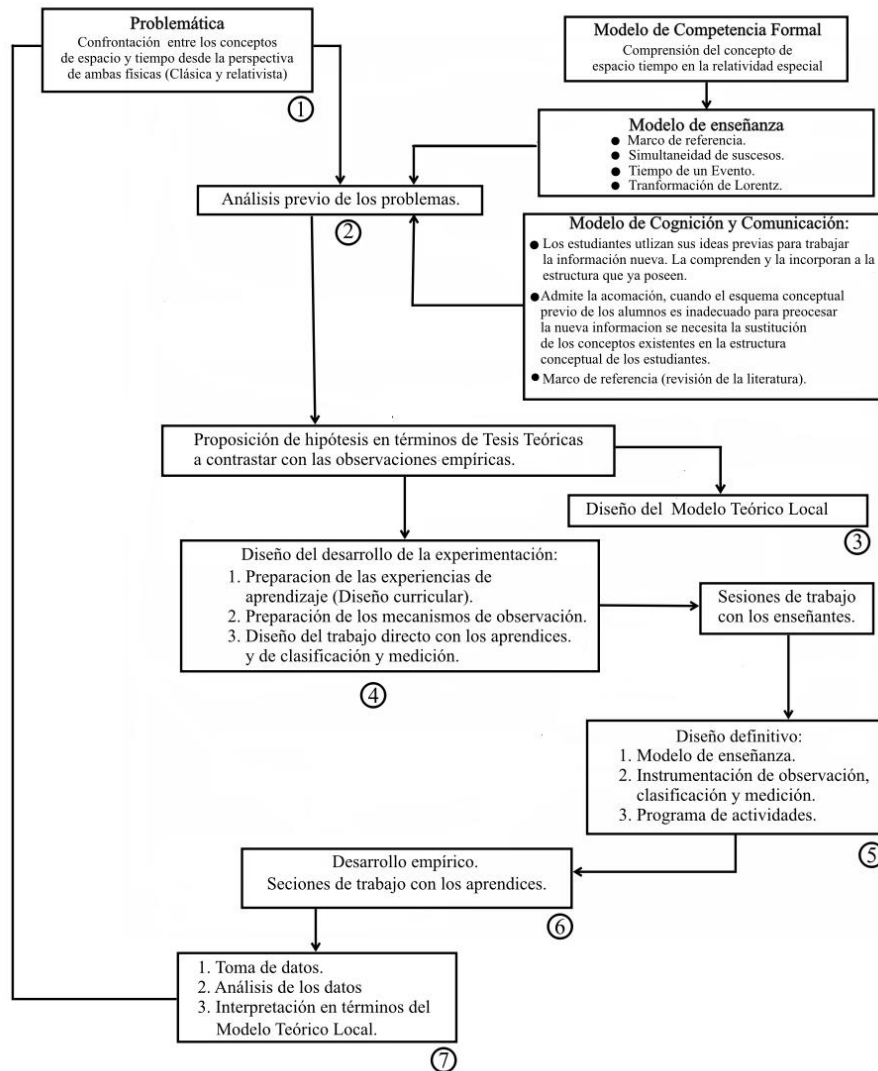
## 3.2 Metodológico

### 3.2.1 Diseño de la investigación

El diseño de la experimentación se organizó con base en la elaboración de un Modelo Teórico Local que nos proporciona un marco teórico y metodológico de la investigación, desde el punto de vista teórico caracteriza el tipo de investigación, su alcance y su fundamento (Filloy, 1999). El diseño del experimento de acuerdo con las directrices de nuestro programa de investigación se describe en forma general en el esquema A).

Deseamos enfatizar que hemos introducido nuestros elementos teóricos (modelos teóricos locales (MTL) y sistemas de signos matemáticos (SMS)) como la contraparte teórica con la que se diseñan e interpretan las observaciones experimentales. Los modelos teóricos locales es una teoría producida que nos proporciona soporte para la observación.

## A) Esquema del diseño de la experimentación



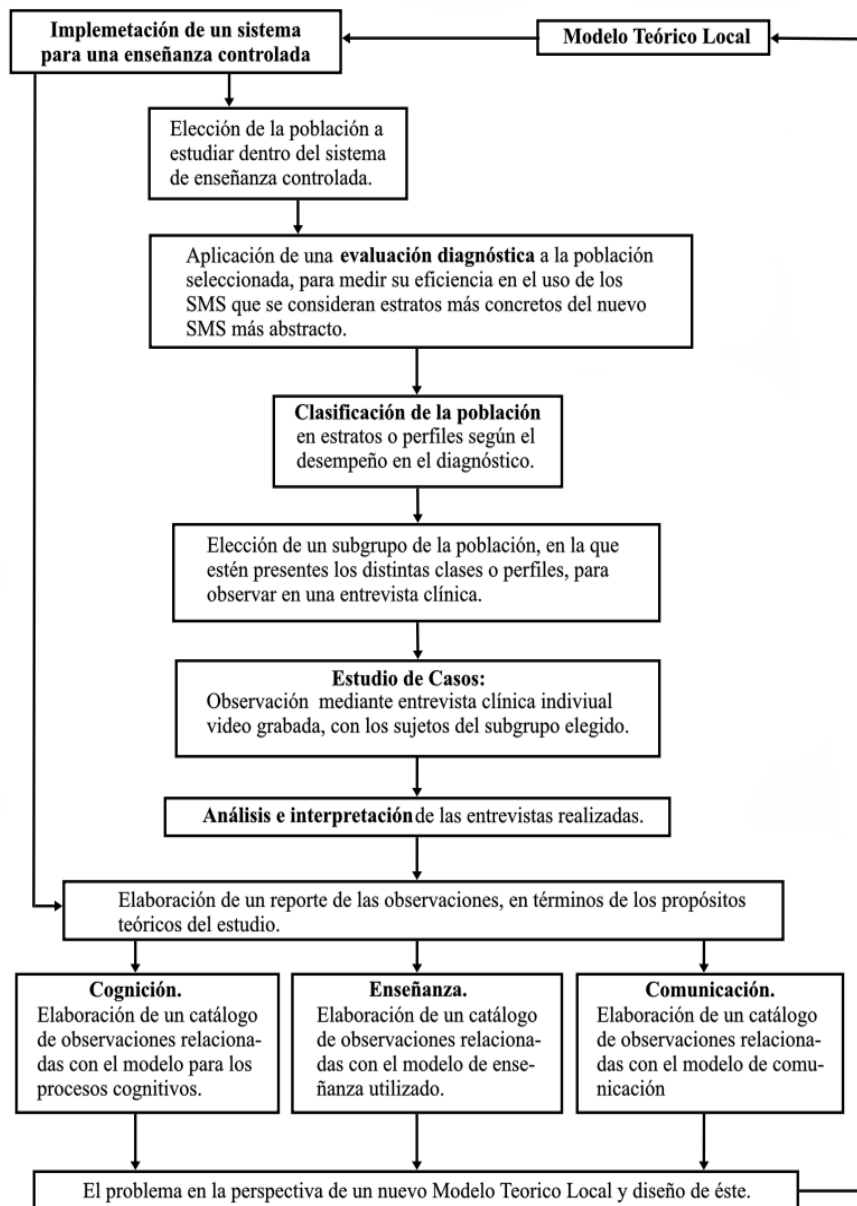
### 3.2.2 Descripción de grupo de trabajo

En el desarrollo de la experimentación se realizaron los cuestionarios con alumnos del curso de Introducción a la Física del trimestre lectivo 17P. La materia Introducción a la Física, la cursan alumnos del primer trimestre de las diferentes carreras de Licenciatura en Ingeniería, todas las carreras pertenecen al Departamento de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco (ubicada en Av. San Pablo Xalpa 180, Col. Reynosa Tamaulipas, CP 02200, Ciudad de México).

### 3.2.3 Diseño de la experimentación

Desde el punto de vista metodológico, la noción de Modelo Teórico Local conlleva una determinada manera de organizar la investigación que es coherente con ella. Las distintas etapas del trabajo de investigación pueden observarse conjuntamente mediante el diagrama de flujo del esquema B).

B) Esquema del desarrollo de la experimentación



### 3.2.4 Recursividad en el uso de los modelos teóricos locales

La recurrencia es una característica importante de una investigación organizada con base en la elaboración de un Modelo Teórico Local, en esta recurrencia, puede suceder que las tesis teóricas enmarcadas en el primer Modelo Teórico Local, demuestren ser insuficientes para estudiar e interpretar las observaciones experimentales realizadas en la etapa de desarrollo empírico, en los diagramas se comienza con un cuadro que representa el área bajo investigación, y al final de todo el proceso hay un retorno al principio, finalmente se llega a una fase de análisis e interpretación. Sobre la base de los resultados de esta fase, el área del problema inicial se enmarca dentro de la perspectiva de un nuevo Modelo Teórico Local, cuyo diseño vuelve a las primeras etapas del diagrama, para poder iniciar nuevamente el proceso descrito.

## **CAPÍTULO 4**

### **Clasificación de la población**

#### 4.1 Evaluación diagnóstica

Se elaboró un cuestionario (Anexo 1) con el objetivo de abordar el tema de la teoría de la relatividad especial desde una perspectiva exploratoria y sondear opiniones y con ello poder afinar los niveles que requirieran los ítems en los cuestionarios, asimismo para que esto permita identificar las dificultades que se presenten de los conceptos previos que los alumnos deberían manejar antes de abordar la teoría especial de relatividad y ayudar en las secuencias didácticas que integran el modelo de enseñanza.

Para el desarrollo de dicho cuestionario, se diseñó considerando la mayoría de los contenidos correspondientes a la comprensión de la relatividad especial y sistema de referencia.

#### 4.2 Objetivos de la evaluación diagnóstica

El primer tema se pretende determinar qué nivel de comprensión tiene los alumnos en el tema de principios de la relatividad, en la traducción e interpretación de expresiones escritas en lenguaje natural y lenguaje coloquial, si es correcta. El segundo tema es observar que tanto el alumno domina el tema de sistema de referencia en base a sus elementos. El tercer tema es analizar como los alumnos resuelven preguntas sobre sistema inercial, en base a conocimientos previos. El cuarto tema, se pretende observar la comprensión que tiene los alumnos al realizarles preguntas sobre simultaneidad, cuando esta expresada en lenguaje natural. El quinto tema se pretende analizar como el alumno resuelve algunas cuestiones que involucren el concepto de espacio absoluto, como interpretan el enunciado de lenguaje natural y como llegan a la resolución de problemas.

Tabla 4.1

Contenidos Matemáticos (CM) que integran el Cuestionario Inicial de Diagnóstico

Sección	Contenido matemático (CM)	Clave del (CM)
Primera	CM_01 Comprensión de los principios de la relatividad especial	(CPRE)
Segunda	CM_02 Dominio sobre sistema de referencia	(DSR)
Tercera	CM_03 Análisis sobre sistema inercial	(ASI)
Cuarta	CM_04 Comprensión sobre simultaneidad	(CSS)
Quinta	CM_05 Comprensión del concepto de espacio absoluto	(CEA)

### 4.3 Análisis de datos obtenidos

La figura 4.1 nos muestra el resultado de los cuestionarios de la prueba inicial, que se refiere a los conceptos de la relatividad clásica.

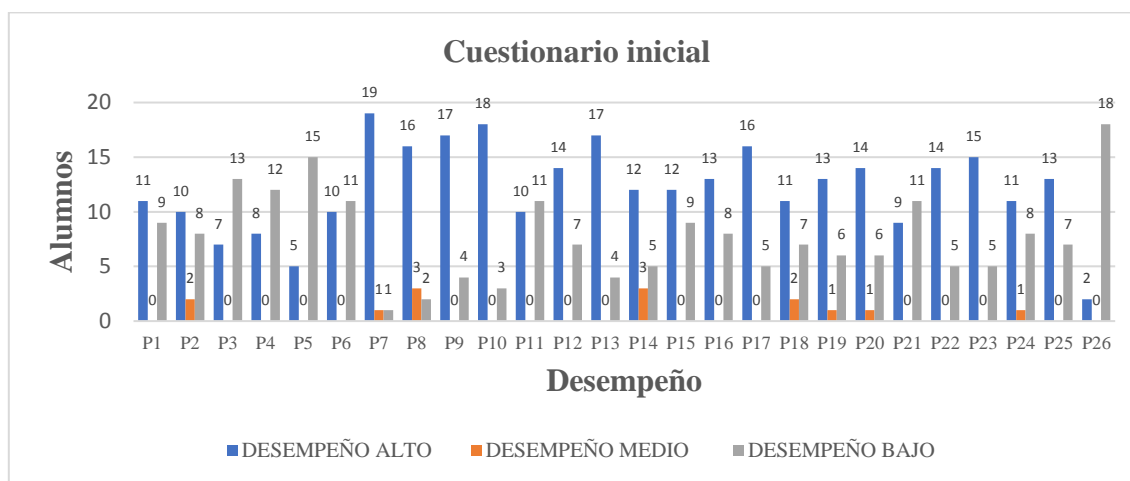


Figura 4.1: Desempeño de los alumnos en el cuestionario inicial

En las siguientes gráficas podemos ver el desempeño de los alumnos por sección



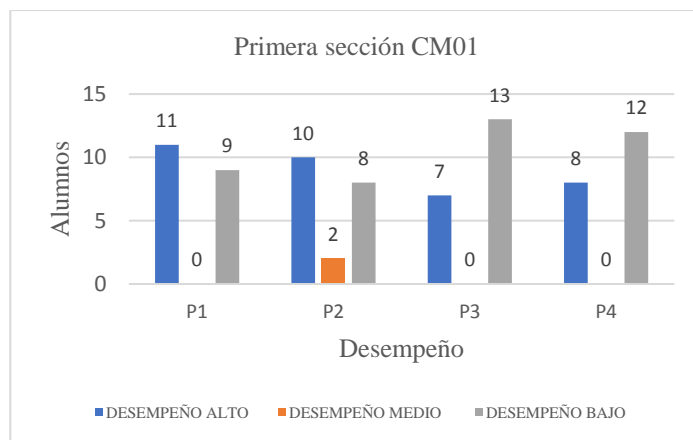


Figura 4.2: Desempeño de los alumnos en la primera sección CM01

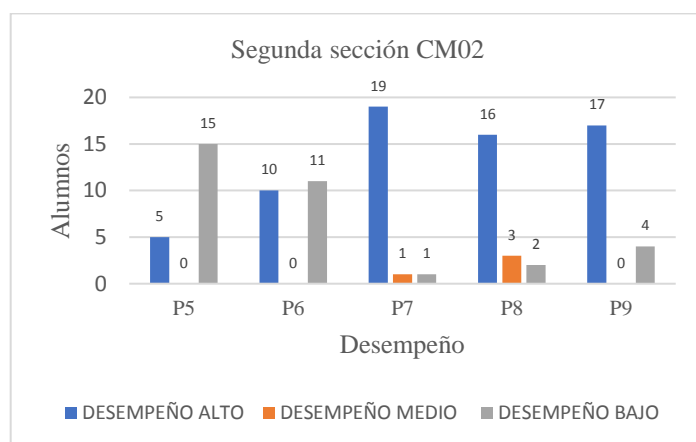


Figura 4.3: Desempeño de los alumnos en la primera sección CM02

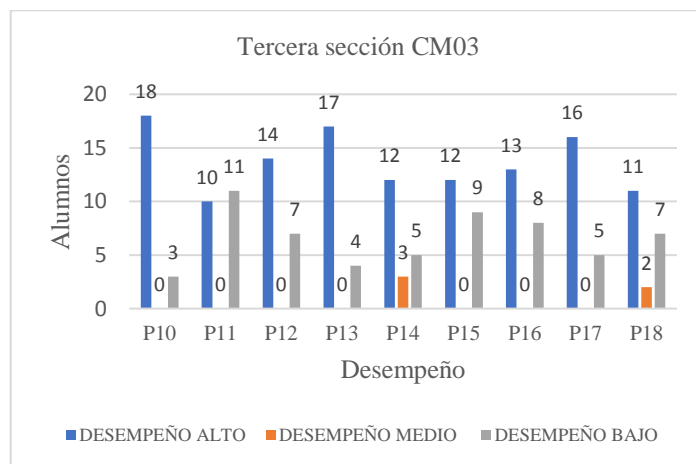


Figura 4.4: Desempeño de los alumnos en la tercera sección CM03

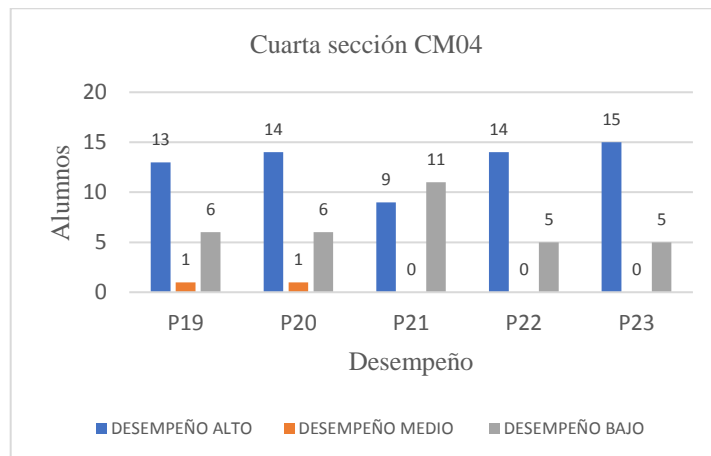


Figura 4.5: Desempeño de los alumnos en la cuarta sección CM04

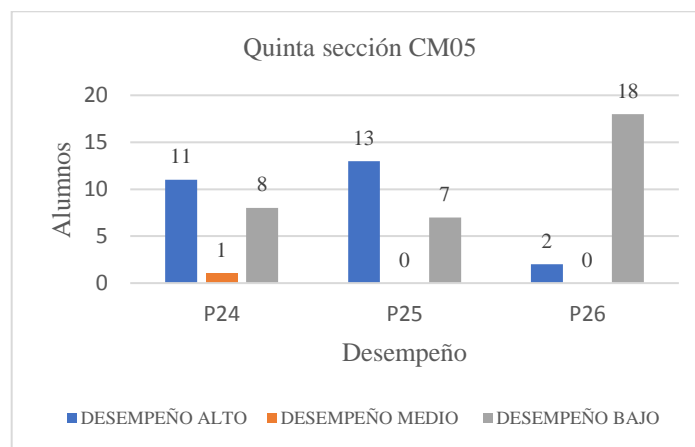


Figura 4.6: Desempeño de los alumnos en la quinta sección CM05

#### 4.4 Análisis de dificultades

Caracterizamos las posibles dificultades de los alumnos para comprender la TER dentro de las siguientes representaciones donde los conocimientos de los principios básicos son insuficientes, se considera que la falta de ciertos conocimientos básicos por parte del alumno impide el aprendizaje de la TER, falta de comprensión del concepto de Sistema de referencia, Es de importancia para la comprensión de la TER que el alumno elija adecuadamente los sistemas de referencia inerciales.

Los conceptos previos necesarios que debe tener el alumno para la comprensión de la TER, se pueden mencionar los temas conceptuales de física, como conceptos de mecánica clásica,

que nos refiere a las transformadas de Galileo, los principios de Galileo y al movimiento relativo.

Otros temas que se identifican como dificultades son la comprensión del concepto de sistema de referencia, conceptos de mecánica clásica y conocimientos matemáticos insuficientes. Además de las razones epistemológicas, que se atribuye a las dificultades de los alumnos para comprender la TER están el cambio de paradigma, la historia y filosofía del conocimiento científico.

La dificultad de una deducción o afirmación que se opone a lo que uno podría imaginarse a primera vista, ya que los alumnos creen que los conceptos no son cotidianos, o que no corresponden al mundo donde viven, consideran que la TER involucra conceptos muy abstractos.

Es importante observar que la dificultad para aprender significativamente la TER son los antecedentes de los conceptos previos que el alumno ya debiera forjado y que son indispensables para un aprendizaje significativo de la TER

Una de las ideas importantes que brinda la importancia de la TER es que los alumnos comprendan que las teorías físicas se pueden modificar, la TER crea un cambio de conceptos propios, tiempo y espacio, permite un análisis epistemológico como producción de conocimientos por rupturas en el desarrollo de la ciencia, otro aporte de la TER es que permite el análisis de los comportamientos de la experimentación y los aportes de trabajos científicos anteriores dentro de nuevas teorías.

La TER es un tema relevante y debería ser incorporado en los planes de estudio de Física a nivel licenciatura, sin embargo parecería que carecen de una comprensión profunda de los conceptos relevantes para interpretar correctamente la TER y sus alcances, Interpretamos este hecho asumiendo que es posible que los alumnos no hayan tenido oportunidad de profundizar y reflexionar sobre los conceptos centrales implicados en la TER ya que la mayoría no ha realizado cursos de tratamiento en el tema, que a nivel licenciatura suele desarrollarse como un tema dentro de los varios analizados en una materia.

Las aportaciones del área de la Enseñanza de la Física son muy importantes para la elaboración de material didáctico que pudieran utilizarse para la comprensión y enseñanza de la TER, material donde se presente una discusión profunda de los aspectos conceptuales relevantes.

Se considera que es un tema relevante para ser abordado en el nivel licenciatura dado que brinda al estudiante la posibilidad de analizar que las teorías físicas evolucionan en el tiempo (Ej.: "comprender que la Física no termina en Newton"; "una nueva manera de interpretar los fenómenos"; "ayuda a los alumnos a ver a la Física como una ciencia en constante avance donde los conceptos pueden modificarse ... a medida que se profundizan los estudios"; "muestra el carácter dinámico de la Física")(Arriasecq, 2008).

#### 4.5 Diagnóstico y clasificación de la población

Lo parte más importante de un análisis cualitativo es cuando se presenta la información obtenida, que deberá ser sintetizada para poder obtener sus significados, sentidos, categorías y finalmente en un reporte de observaciones. También implica una estructuración de manera que favorezca la producción de representaciones funcionales, de sus correspondientes representaciones externas (representaciones espontáneas) y procesos de transformación entre representaciones, esto nos proporciona una estructura del perfil de los estudiantes.

El principal instrumento utilizado en la investigación es el cuestionario, este que recoge de forma organizada los indicadores de las variables implicadas en el objetivo de la investigación.

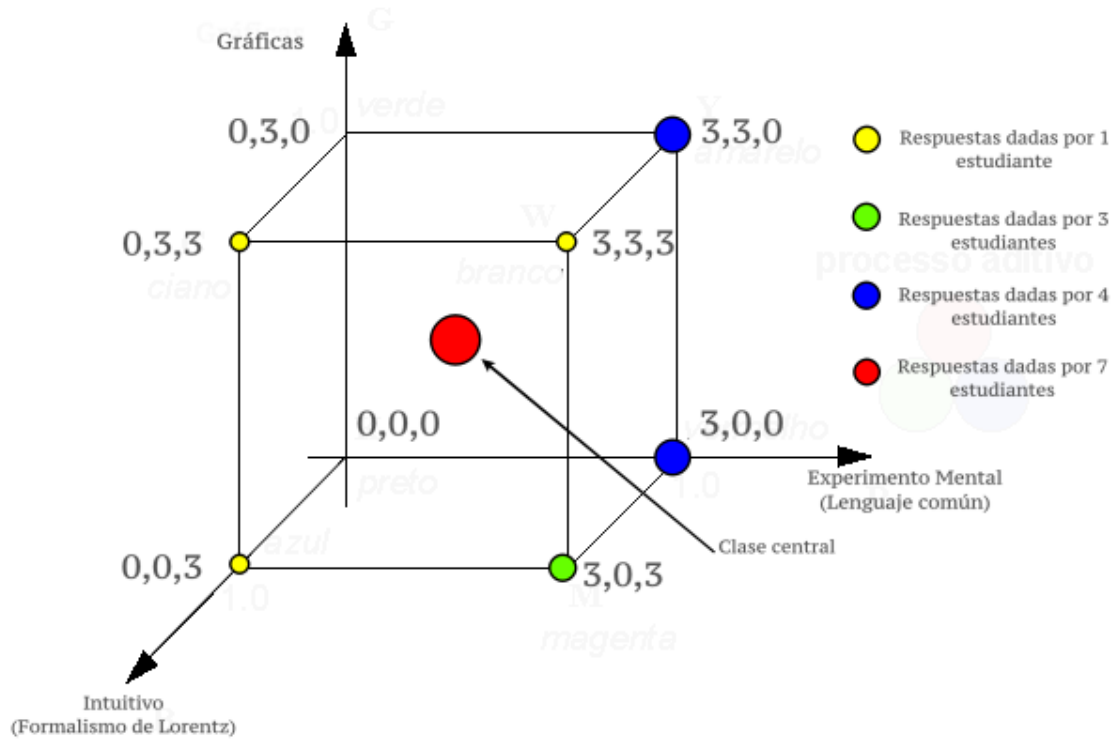
Para la elaboración del instrumento de observación clasificamos a la población de acuerdo a tres ejes. El primero tiene que ver con los aspectos cualitativos de los sujetos en el uso de los SMS más concretos, (aplicando experimentos mentales usando lenguaje común), el segundo, proponemos trabajar con referencia a situaciones concretas con una herramienta gráfica (de espacio-tiempo) para "hacer visibles" las consecuencias de la invariancia de la velocidad de la luz y poner en funcionamiento las definiciones de "sistema de referencia" y de "eventos".

El tercer eje de competencia trata de agrupar aquellas competencias que tiene que ver con los usos intuitivos y espontáneos de los estratos del SMS más concretos que utilizarán en las descodificaciones de las nuevas situaciones de enseñanza como inferir la comprensión de los conceptos de la relatividad especial que se requiera en el modelo de enseñanza que se está utilizando.

La siguiente tabla muestra la representación tridimensional de “Clases de clase”:

Clase de clase	No. de alumnos
000	0
300	4
030	0
003	1
330	4
033	1
303	3
333	1
Central	7

Modelo tridimensional representado en un cubo, donde se muestra en qué posición, de acuerdo a sus coordenadas, queda ubicado cada clase con sus diferentes números de alumnos.



## CAPÍTULO 5

### Fase de experimentación

#### 5.1 Metodología de la experimentación

En esta investigación de orden cualitativo se trabajó en el aula aplicando las actividades del modelo de enseñanza diseñadas. La fase experimental desarrollada en el trabajo se llevó a cabo a través de las siguientes etapas, la elaboración y aplicación de cuestionarios de lápiz y papel, el análisis de las actuaciones de los alumnos y clasificación de observaciones sobre los procesos de producción de sentido. Las tareas que forman los cuestionarios las diseñamos en torno a dos fases de experimentación: Conceptos de física clásica y Temas de la relatividad especial. En base en esto, se identificaron las dificultades y tendencias cognitivas que tuvieron los alumnos al resolver los distintos cuestionarios.

#### 5.2 Descripción de la clasificación

Para la elaboración del instrumento de observación clasificamos a la población de acuerdo a tres ejes. El primero tiene que ver con los aspectos cualitativos de los sujetos en el uso de los SMS más concretos, (aplicando experimentos mentales usando lenguaje común), el segundo, proponemos trabajar con referencia a situaciones concretas con una herramienta gráfica (de espacio-tiempo) para "hacer visibles" las consecuencias de la invariancia de la velocidad de la luz y poner en funcionamiento las definiciones de "sistema de referencia" y de "eventos". El tercer eje de competencia trata de agrupar aquellas competencias que tiene que ver con los usos intuitivos y espontáneos de los estratos del SMS más concretos que utilizarán en las descodificaciones de las nuevas situaciones de enseñanza como inferir la comprensión de los conceptos de la relatividad especial que se requiera en el modelo de enseñanza que se está utilizando.

### 5.3 Descripción de la secuencia didáctica

Cada actividad de enseñanza está dividida en fases para que mediante las actividades de aprendizaje el alumno pueda modificar su estado mental cada vez más hacia un estado de mayor conocimiento sobre el tema.

### 5.4 Desempeño de alumnos





La siguiente Tabla 5.1 muestra el comportamiento que tuvieron los alumnos al participar en los diferentes cuestionarios que les fueron aplicados, podemos también observar en la Figura 5-1 que conforme fue aumentando el grado de dificultad en las preguntas, fue bajando el porcentaje de alumnos sin contestar de 89% a 54%.

Tabla 5.1

*Comportamiento de los alumnos*

REVISIÓN DE ALUMNOS								
ALUMNO	EDAD	CARRERA	ESCUELA DE PROCEDENCIA	DX	ACT 1	ACT 2	ACT 3	ACT 4
ATR	18	ING FISICA	CEB 4/1					
AEEG	18	ING FISICA	COLBACH					
AGLG	19	ING FISICA	BACHILLERES 17					
AMS	23	ING FISICA	CECYTE OAXACA					
ARO	-	-	-					
ADOH	19	ING FISICA	UVM ROMA					
AITS	19	ING FISICA	CBTIS					
ADH	-	ING FISICA	-					
BLT	19	ING INDUSTRIAL	CATIS					
BVF	18	ING ELECTRICA	PREPARATORIA PLANTEL AZTECA					
CRG	18	ING FISICA	E.P.O.					
CCH	20	ING FISICA	PREPARATORIA OFICIAL					
CRC	20	ING INDUSTRIAL	CETIS 141					
DJBO	18	ING FISICA	COLBACH 12					
EDBS	24	ING FISICA	-					
EICG	22	ING FISICA	CEDAR FRIDA KAHLO					
ENTL	19	ING ELECTRICA	CONALEP					
EERM	19	ING FISICA	COLBACH 7					
IAAR	18	ING FISICA	ESCUELA TECNOLÓGICA NICOLAS ROMERO					
IGRA	20	ING INDUSTRIAL	BACHILLERATO TECNOLÓGICO JUSTO SIERRA					
IAE	-	-	-					
IRM	24	ING FISICA	CONALEP					
JPT	23	ING FISICA	E.P.O 103					
JAGD	19	ING COMPUTACION	CECYTE 9					
JAGA	18	ING FISICA	CECYT 8					
JPVZ	-	-	-					
JCCO	18	ING FISICA	ANEXO A LA NORMAL DE ATLACOMULCO					
JCMD	-	-	-					
LESG	19	ING FISICA	PARTICULAR					
OTF	21	ING FISICA	CECYTE					
RCJ	18	ING ELECTRICA	ANEXO A LA NORMAL DE CHALCO					
RAAM	19	ING FISICA	PREPARATORIA OFICIAL NO. 82					
RFSS	19	ING INDUSTRIAL	CCH AZCAPOTZALCO					
RZM	26	ING FISICA	COLBACH					
SMNC	18	ING FISICA	E.P.O 47					
VAAG	19	ING FISICA	BACHILLERES					
VLVM	21	ING FISICA	COLBACH					

	Contestaron algo
	Entregaron pero no contestaron
	No entregaron/o no estuvieron
	Hicieron todas las actividades

Dx	Total 37	contestaron 33	89%
Act 1	Total 37	contestaron 32	86%
Act 2	Total 37	contestaron 27	73%
Act 3	Total 37	contestaron 24	65%
Act 4	Total 37	contestaron 20	54%



la figura 5.1 Representa el porcentaje de alumnos que contestaron los cuestionarios

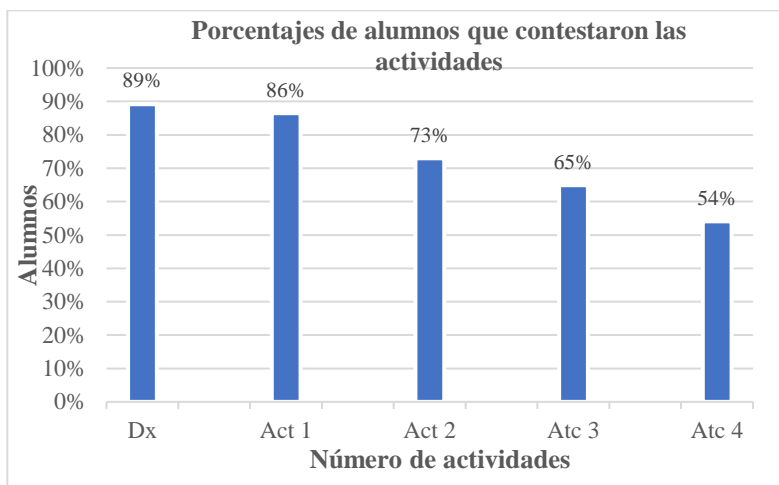


Figura 5.1.

En cuanto al desempeño de los alumnos en el cuestionario A2, en la Figura 5.2, se muestra el resultado por pregunta, para las ultimas preguntas la mayoría de los alumnos tuvo un desempeño bajo.

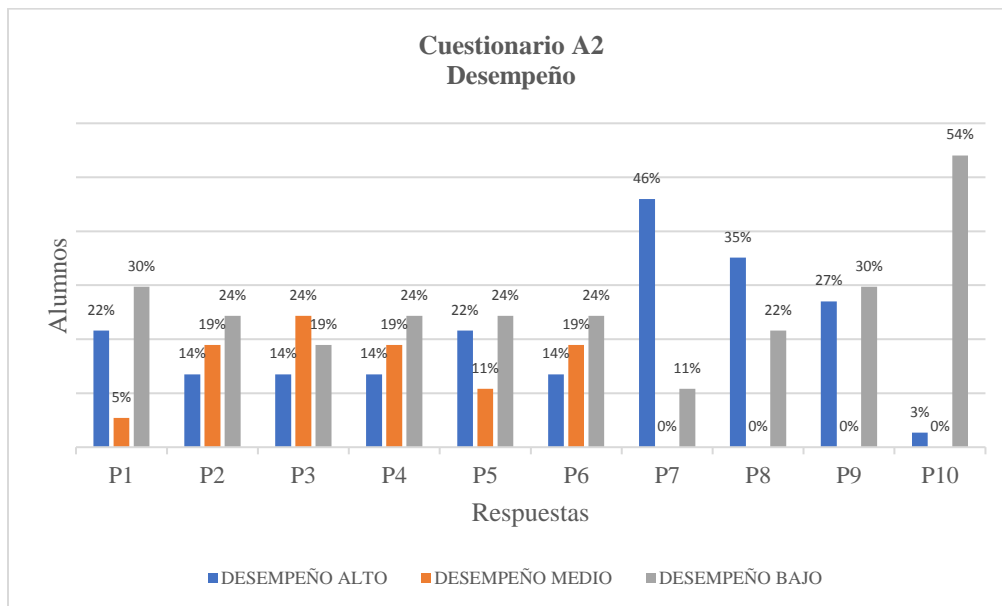


Figura 5.2

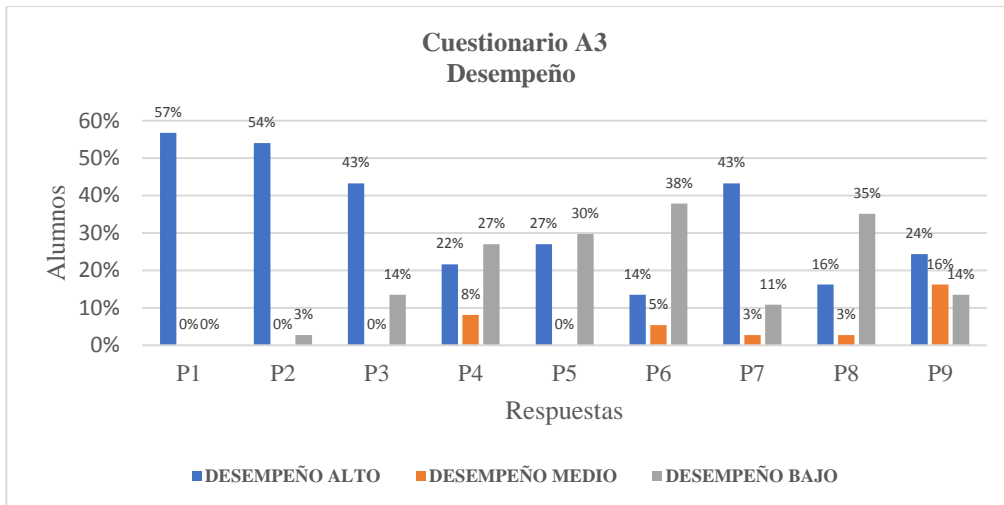


Figura 5.3

En el cuestionario A3 que no muestra la figura 5.3, las primeras preguntas los alumnos tienen un desempeño alto y al final del cuestionario un desempeño bajo.

La observación que hacemos para el cuestionario A4 que se presenta en la figura 5.4, tenemos un desempeño alto en las primeras preguntas y más bajo a partir de la pregunta P5.

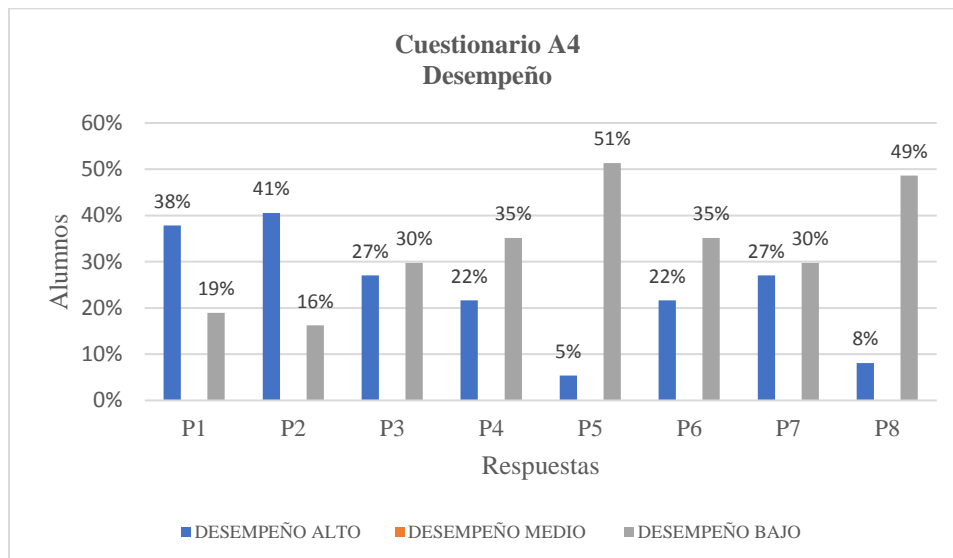


Figura 5.4

En el cuestionario A5 de la Figura 5.5, el desempeño casi fue nulo, se presentó un desempeño muy bajo

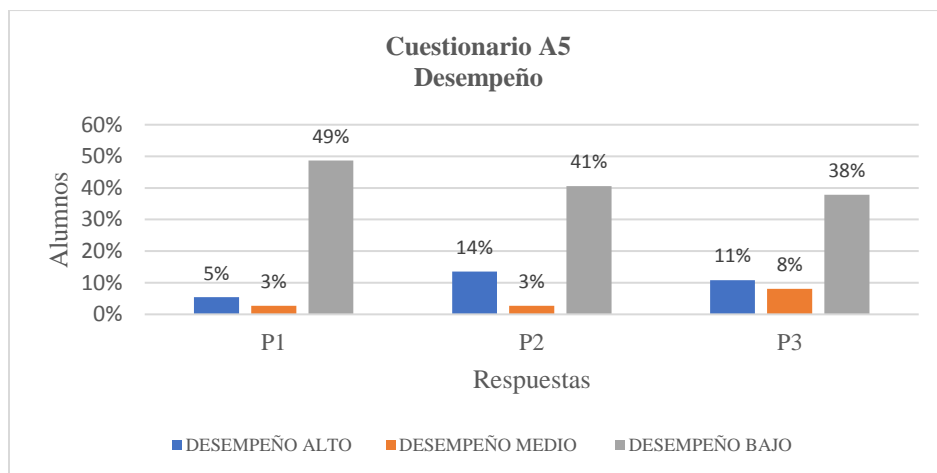


Figura 5.5

## 5.5 Aspectos cualitativos

Exploramos los conceptos clásicos de posición o sitio, distancia, evento o suceso, tiempo o duración, movimiento, velocidad. Precisamos cuándo dos o más eventos son simultáneos. Diferenciamos entre eventos simultáneos y eventos copuntuales; simultaneidad local y simultaneidad a distancia. Definimos e ilustramos los sistemas de referencia y así distinguirlos de los sistemas de coordenadas. Además de establecer las características de los sistemas inerciales a partir del principio de relatividad de Galileo e Ilustrar las transformaciones de Galileo aplicadas al concepto clásico de velocidad relativa.

### 5.5.1 Aplicación de cuestionario

Pregunta P1A2. *¿Por qué sería correcto considerar un vehículo que lleva una velocidad constante como sistema de referencia sin embargo sería incorrecto considerarlo como tal mientras está frenando?*

Es importante considerar que un sistema de referencia está definido como un conjunto de puntos que se puede considerar en reposo y respecto al cual se puede describir el movimiento de otros objetos. El reposo es un caso de velocidad constante, por lo tanto, si un vehículo se mueve con velocidad constante entonces puede ser considerado como un sistema de

referencia. Si está frenando, su velocidad está variando y en ese caso no puede decirse que sea constante.

Pregunta P2A2 *¿Puede en un espacio no muy extenso, una sala de clases, por ejemplo, haber más de un sistema de referencia?*

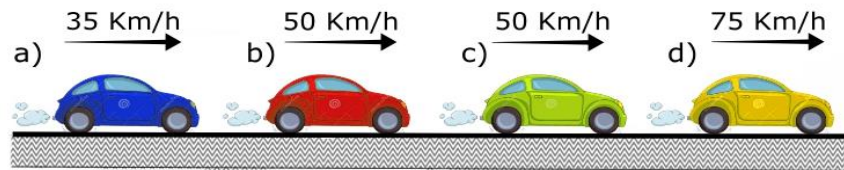
En un mismo espacio, tal como se propone, puede haber muchos sistemas de referencias, y cada uno cumplir con los requisitos que necesita para serlo. Basta que cada uno de ellos consista en un conjunto de puntos que se mueven con velocidad constante (incluyendo el reposo como uno de ellos).

Pregunta P3A2 *¿Qué consideraciones debe tener un piloto de un avión para que, al lanzar una bomba, dé en el blanco?*

El movimiento de un cuerpo visto por un observador depende del marco de referencia inercial en el cual se haya situado, es decir, que el movimiento de una partícula que se desplaza dentro de un marco de referencia inercial se considera relativo, pues depende del marco desde el cual la observamos. Si aplicamos las leyes de Newton a la bomba que es lanzada desde el interior del avión en movimiento, la bomba aun antes de ser lanzada y el avión llevan la misma velocidad (Movimiento Rectilíneo Uniforme); esto sería verdad para cualquier bomba, independientemente de su peso. La ley de la inercia nos dice que un cuerpo (MRU) continuará avanzando en una trayectoria horizontalmente recta, mientras no actúe sobre él alguna fuerza externa. Por eso, una vez que la bomba y el avión se aceleran hasta alcanzar una velocidad constante, ninguna fuerza se necesita para mantenerlos en movimiento rectilíneo uniforme.

La bomba y el avión se mueven todo el tiempo con la misma velocidad y en la misma dirección, pues ambos tienen la propiedad de la masa inercial. Ahora, cuando es lanzada verticalmente hacia abajo, su velocidad descendente no depende de su velocidad horizontal y la bomba sigue avanzando hacia adelante, por eso es que se desplaza en una trayectoria parabólica, por encima del observador en tierra.

Pregunta P4A2. Hay cuatro automóviles en una carretera, a, b, c y d que se mueven como se señala en la figura que sigue.



Si las velocidades indicadas son respecto a la carretera, y al conductor del auto “c” le preguntaran: ¿cuáles son las velocidades de los demás automóviles?, respecto a él, ¿qué respondería?

El conductor del auto c) respondería: El auto a) retrocede a razón de 15 km/h, el auto b) permanece en reposo y el auto d) me adelanta a razón de 25 km/h. Aquí la importancia del concepto de movimiento relativo.

## 5.6 Comprensión estudiantil del tiempo en la relatividad especial: simultaneidad y marcos de referencia

### 5.7 Introducción

En este apartado informamos la comprensión que tienen los alumnos sobre el Tiempo en la Relatividad Especial. La importancia se basa en la relatividad de la simultaneidad y el papel de los marcos de referencia. Vemos que la principal dificultad que presentan los estudiantes es determinar el momento en que ocurre un evento, reconociendo la equivalencia de los observadores en reposo uno respecto al otro y aplicando la definición de simultaneidad y explorando las creencias de los estudiantes sobre el concepto de un marco de referencia y sus características.

Presentamos como se obtuvo de manera gradual una imagen detallada del pensamiento del estudiante mediante el diseño sucesivo de un conjunto de tareas de investigación.

Se analizan los protocolos de los estudiantes en cada situación con el objeto de estudiar el proceso de conceptualización y reformular la secuencia de situaciones diseñada que se ha descrito en el Capítulo 3.

## 5.8 Entendimiento de los conceptos de tiempo, simultaneidad y marcos de referencia de los estudiantes

Dividimos esta sección en tres partes que están profundamente relacionadas. La primera parte se fundamenta de manera importante en una interpretación dominante y constante de la simultaneidad del alumno que depende del observador. Los estudiantes creen que cuando los observadores reciben las señales de los eventos es determinante para señalar el orden cronológico de los eventos distantes. La Parte 2 presenta evidencia de que muchos estudiantes tienen una profunda convicción de que la simultaneidad es absoluta. También esta parte describe cómo los estudiantes frecuentemente intentan conciliar estas dos creencias contradictorias entre sí y con lo que se les ha enseñado sobre la relatividad de la simultaneidad. Las interpretaciones y creencias de los estudiantes sobre la simultaneidad descritas en las Partes 1 y 2 tienen implicaciones directas en la comprensión del estudiante sobre el comportamiento de un observador en un marco determinado. La Parte 3 está dedicada a una exploración de las creencias de los estudiantes sobre el concepto de un marco de referencia.

### 5.8.1 La creencia de que los eventos son simultáneos si un observador recibe señales de los eventos en el mismo instante

El cuestionario sobre el marco de referencia móvil, es una revisión de lo que cree el estudiante sobre la simultaneidad. Para ver esto, especificamos no solo la velocidad sino también una ubicación para el observador en movimiento y formulando la pregunta para describir los destellos como eventos de espacio-tiempo. Al elegir la ubicación del observador de forma adecuada, tratamos de distinguir entre los estudiantes que obtuvieron una respuesta correcta por razones correctas y los estudiantes que pensaron que la ubicación del observador afecta el orden temporal de los eventos. Al describir los destellos como eventos, intentamos dejar claro a los estudiantes que el intervalo de tiempo de interés no es el que existe entre la

recepción de las señales de luz por parte del observador en movimiento, sino más bien la que existe entre la emisión de las señales por los eventos.

5.8.1.1 Tendencia a asociar el tiempo de un evento con el momento en que un observador recibe una señal del evento

A pesar de que se les ha dicho explícitamente que los eventos de interés son el Evento 1 (A produce un destello) y el Evento 2 (B produce un destello), la mayoría de los estudiantes atribuyen el tiempo de cada destello al momento en que un observador ve el destello. Los estudiantes sobre los problemas escritos cometen este error.

5.8.1.2 Tendencia a considerar al observador como dependiente solo de sus experiencias sensoriales personales

La falta de distinción entre el momento de un evento y el momento en que un observador ve que ocurre ese evento, no parece ser un error superficial, sino que parece tener raíces profundas. Muchos estudiantes no reconocieron que un observador no está aislado, sino que tiene acceso a la información provista por otros observadores en su marco.

5.8.1.3 Pregunta sobre “Marco de referencia móvil”

5.8.1.3.1 Descripción de la pregunta

Todas las preguntas sobre marco de referencia móvil involucran dos puntos, A y B, que estallan simultáneamente de acuerdo con un observador en reposo en un punto fijo, a mitad de camino entre los puntos. Un marco se mueve a una velocidad relativista dada desde A a B, a los estudiantes se les hacen preguntas que prueban sus creencias sobre el orden de los destellos en el marco móvil.

#### 5.8.1.3.2 Respuesta correcta

Se puede obtener una respuesta correcta para todas las versiones por razonamiento cualitativo o cuantitativo o por un diagrama de espacio-tiempo. El siguiente es un ejemplo de un argumento cualitativo aceptable como correcto.

En el marco móvil, la luz de los dos destellos se mueve hacia afuera a la velocidad de la luz en frentes de onda esféricos desde dos puntos que son estacionarios. En ese marco, el observador en el punto fijo, que recibe ambas señales simultáneamente, se mueve hacia atrás (es decir, en la dirección de una flecha que apunta desde el frente del móvil hacia la parte posterior). De acuerdo con el observador del marco móvil, el observador fijo está más cerca del centro de la señal del punto A en el instante en que el observador recibe ambas señales. El observador del marco móvil por lo tanto concluye que el punto B destello primero ya que su señal viaja más lejos para llegar al observador fijo al mismo tiempo que la señal del punto B.

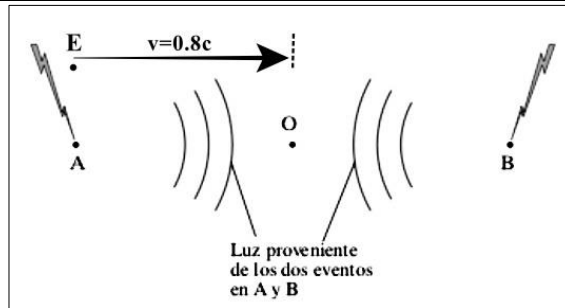
También se puede obtener una respuesta correcta usando la transformación de Lorentz, para el tiempo:  $\delta t = \gamma (\delta t' - v \delta x' / c^2)$ , donde  $\gamma = (1 - v^2 / c^2)^{-1/2}$ . En este contexto,  $\delta t' = t_B' - t_A'$  y  $\delta t = t_B - t_A$  son los tiempos transcurridos entre los destellos de A y B en el marco de móvil y el marco fijo, respectivamente,  $v$  es la velocidad del móvil con respecto al punto fijo y  $\delta x' = x_B' - x_A'$  es la separación de coordenadas espaciales entre los puntos en el marco fijo. Tomando la dirección positiva para ser dirigida de A a B, entonces  $v > 0$  y  $\delta x' > 0$ . Dado que  $\delta t' = 0$  (destellos simultáneos en el marco fijo), luego  $\delta t < 0$ .

#### 5.8.1.3.3 Pregunta representativa

##### Pregunta P1A3

- Un móvil E, atraviesa el espacio a una velocidad constante de  $0,8c$  con respecto a la tierra. E avanza desde A hacia B y alcanza a O en el instante en que O percibe las luces emitidas por los dos destellos.





**Q5. ¿E percibe las luces de ambos destellos al mismo tiempo?**

- a. Si, el percibe la luz de ambos destellos al mismo tiempo
- b. No, el percibe la luz del destello de A primero
- c. No, el percibe la luz del destello de B primero
- d. No sabe

Justificación:

**Q6. En el marco de referencia de E, ¿Las luces de los destellos son emitidas al mismo tiempo?**

- a. Si, ambas son emitidas al mismo tiempo
- b. No, la luz del destello de A se emite primero
- c. No, la luz del destello de B se emite primero
- d. No sabe

Justificación:

#### 5.8.1.3.4 Análisis de resultados

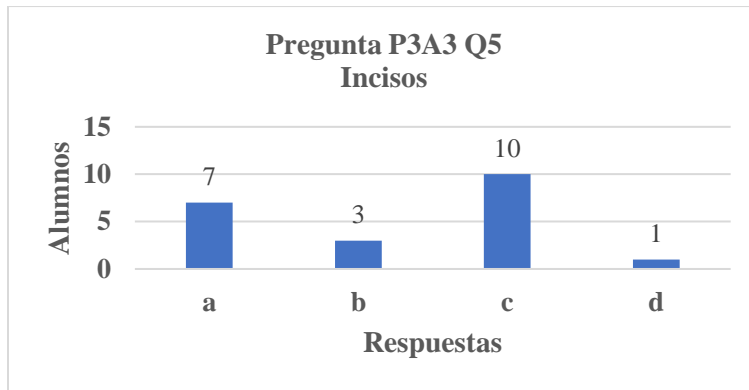


Figura 5.6

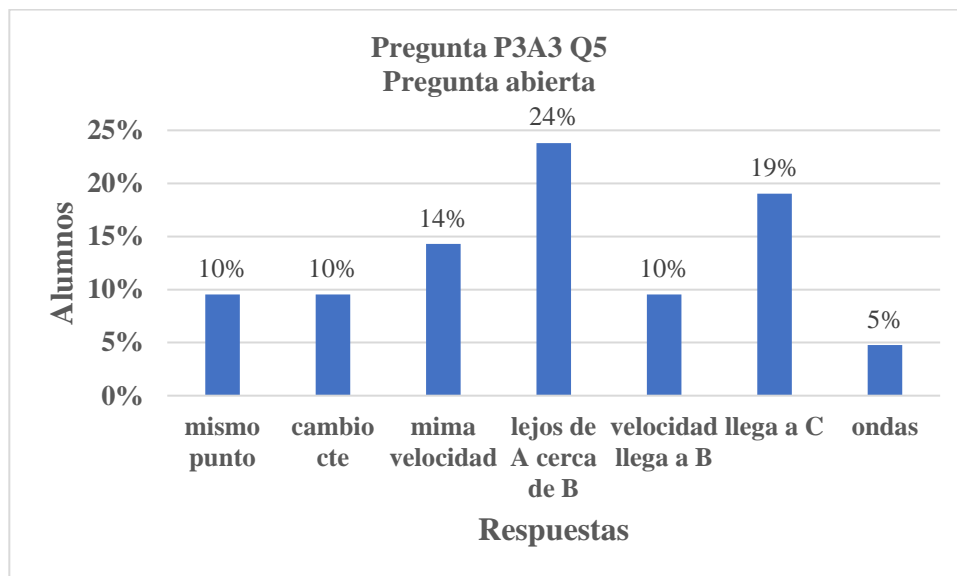


Figura 5.7

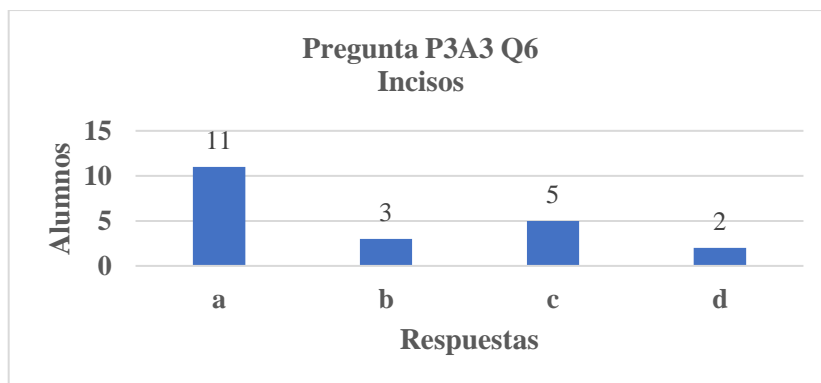


Figura 5.8

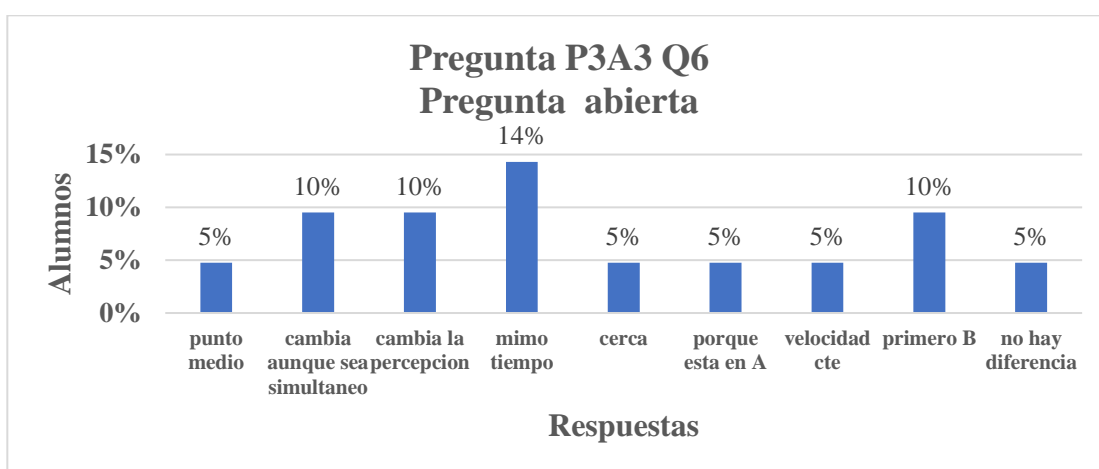


Figura 5.9

En cada pregunta, menos del 25% de los estudiantes dieron una respuesta correcta (ignorando el razonamiento). El análisis de las respuestas (ver figura 5.6 y 5.7) de los estudiantes, reveló que la tendencia a asociar el tiempo de un evento con el momento en que un observador recibe una señal del evento, lo atribuyen el tiempo de cada evento al momento en que un observador ve los destellos. La falta de distinción entre el momento de un evento y el momento en que un observador ve que ocurre ese evento no parece ser un error superficial, algunos estudiantes consideran al observador como dependiente solo de sus experiencias sensoriales personales. algunos no reconocen que un observador no está aislado, sino que tiene acceso a la información provista por otros observadores en su marco.

Las respuestas muestran que muchos estudiantes asocian muy fuertemente el tiempo de un evento con el momento en que un observador recibe una señal del evento. En consecuencia,

muchos estudiantes juzgan si los eventos lejanos son simultáneos solo en función del orden cronológico de las señales recibidas. Las dificultades parecen estar íntimamente ligadas a sus ideas de marcos de referencia (Figura 5.8 y 5.9).

#### 5.8.2 La creencia de que la simultaneidad es absoluta

Como se describió anteriormente, encontramos que muchos estudiantes no aplican espontáneamente la idea de la relatividad de la simultaneidad. Con frecuencia los estudiantes afirman que los observadores en diferentes lugares determinan diferentes ordenamientos de tiempo para eventos basados en la recepción de señales de los eventos. Nuestros resultados sugieren que muchos estudiantes creen que la simultaneidad es relativa sólo en el sentido limitado de que las señales de los eventos llegan a diferentes observadores en diferentes momentos, y que, fundamentalmente, la simultaneidad es absoluta.

##### 5.8.2.1 Tendencia a tratar la simultaneidad como independiente del movimiento relativo.

Algunos estudiantes declararon explícitamente que la relatividad de la simultaneidad no está directamente relacionada con el movimiento relativo.

Hemos encontrado que los estudiantes a menudo incorporan la relatividad de la simultaneidad en su propio marco conceptual de una manera que les permite seguir creyendo en la simultaneidad absoluta. Lo hacen tratando el tiempo de un evento como el instante en que el observador observa ese evento y atribuyendo la relatividad de la simultaneidad al tiempo de traslado de la señal. Tales creencias incorrectas pueden aislar a los estudiantes de obtener una comprensión de la relatividad de la simultaneidad como consecuencia de la invariancia de la velocidad de la luz.

##### 5.8.2.2 Pregunta del “observador”

En este apartado, se les pregunta a los estudiantes sobre el orden relativo de dos eventos para un observador y un segundo observador en reposo, uno respecto del otro. La pregunta fue diseñada para investigar si los estudiantes tratarían incorrectamente la simultaneidad como relativa, incluso para dos observadores en el mismo marco de referencia.

### 5.8.2.2.1 Descripción de la pregunta

La pregunta del observador explora la comprensión del estudiante de los marcos de referencia y la simultaneidad dentro de un solo marco de referencia. El contexto es similar al de la pregunta del Marco de referencia móvil: dos puntos, A y B, de repente destellan y un observador en reposo a medio camino entre ellos ve los destellos en el mismo instante. La pregunta del observador difiere de la pregunta del Marco de Referencia Móvil en que un segundo observador no se mueve, sino que permanece en reposo en relación con el punto fijo del punto A. Se les pregunta a los estudiantes si el punto A destella antes, después o en el mismo instante que el punto B en el marco de referencia del segundo observador.

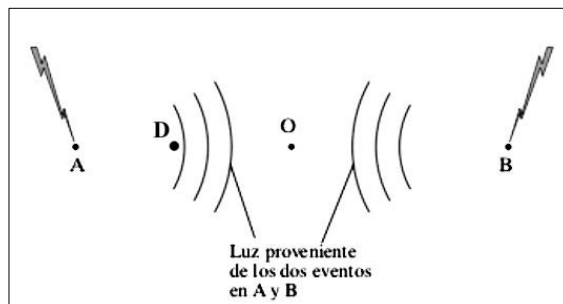
### 5.8.2.2.2 Respuesta correcta

Para responder correctamente a la pregunta del observador, los estudiantes deben ser capaces de aplicar la definición de simultaneidad y comprender el papel de un marco de referencia al establecer una coordenada de tiempo común para los observadores en reposo uno respecto del otro. Como el observador y el segundo observador están en el mismo marco de referencia, obtienen la misma respuesta para el orden de los destellos. Dado que el observador es equidistante de los puntos, los tiempos de viaje de la señal son los mismos. Por lo tanto, los destellos ocurrieron al mismo tiempo en el marco del observador y el segundo observador.

### 5.8.2.2.3 Pregunta representativa

#### **Pregunta P2A3**

- En un espacio, D permanece inmóvil en el punto medio de la distancia entre A y O.



Q3 ¿D percibe la luz de ambos destellos al mismo tiempo?

- a. Si, el percibe la luz de ambos destellos al mismo tiempo

- b. No, el percibe la luz del destello de A primero
- c. No, el percibe la luz del destello de B primero
- d. No sabe

Justificación:

Q4 En el sistema de referencia de D, ¿Las luces de los destellos son emitidas al mismo tiempo?

- a. Si, ambas son emitidas al mismo tiempo
- b. No, la luz del destello de A se emite primero
- c. No, la luz del destello de B se emite primero
- d. No sabe

Justificación:

En las preguntas de “observador”, se les pregunta a los estudiantes (**Pregunta P2A3**), sobre el orden relativo de dos eventos para dos observadores en reposo uno respecto del otro. La pregunta es presentada para investigar si los estudiantes tratarían incorrectamente la simultaneidad como relativa, incluso para dos observadores en el mismo marco de referencia.

#### 5.8.2.2.4 Análisis de resultados

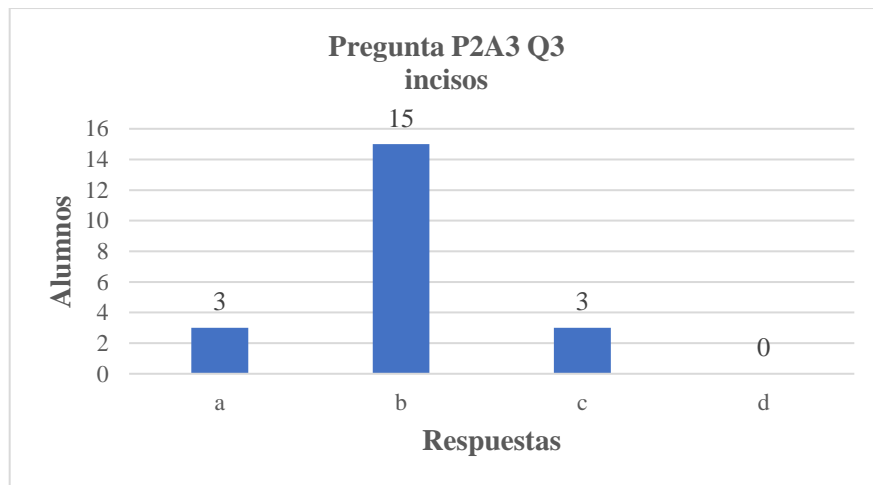


Figura 5.10. Resultados por reactivos de opción múltiple P2A3

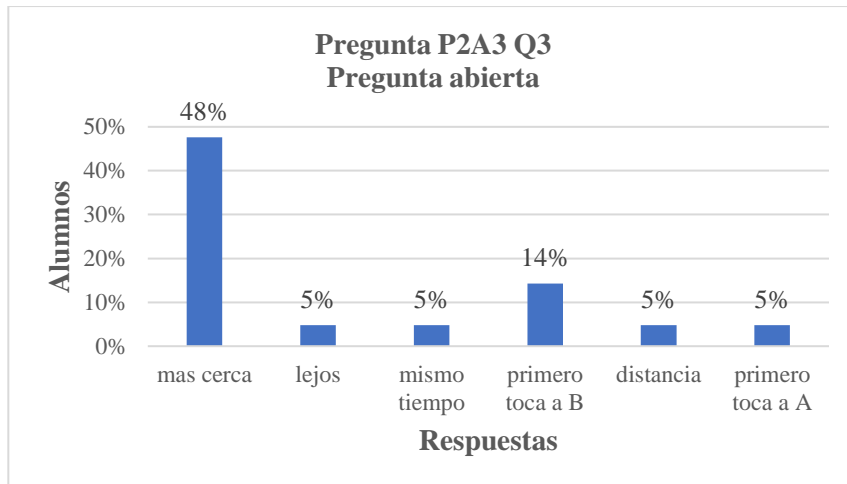


Figura 5.11. Resultados de preguntas abiertas del cuestionario P2A3.

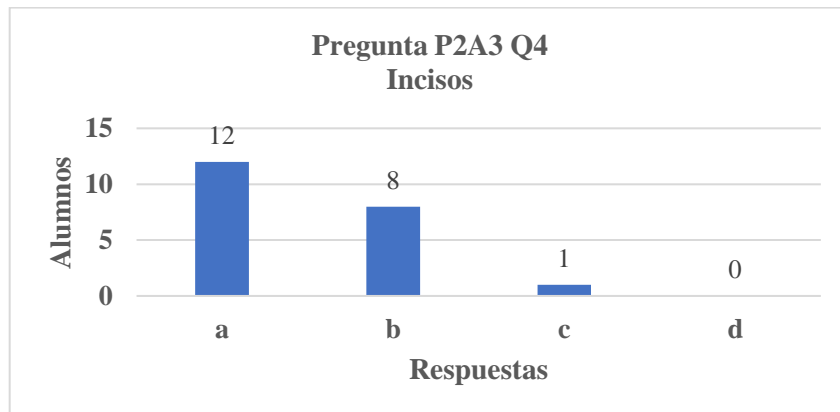


Figura 5.12. Resultados por reactivos de opción múltiple P2A3

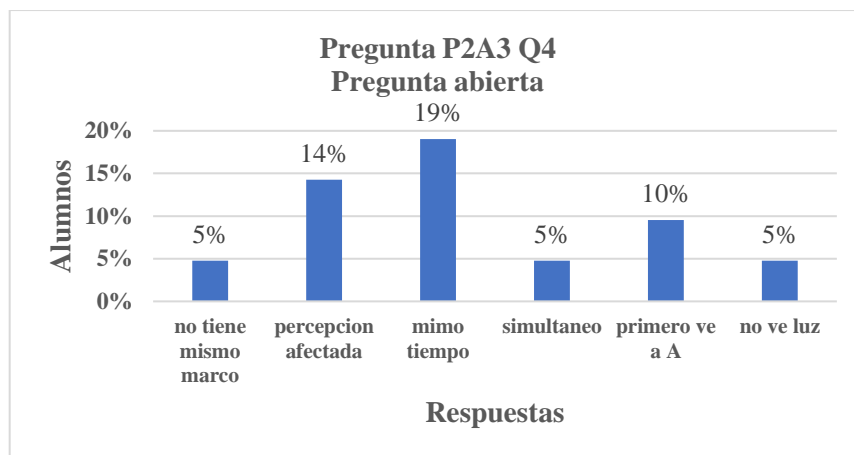


Figura 5.13. Resultados de preguntas abiertas del cuestionario P2A3.

Con base en las respuestas a los cuestionarios de diagnóstico aplicados a un grupo de 21 estudiantes (ver figura 5.10 y 5.11), se observa que los estudiantes tienen un dominio deficiente de los contenidos evaluados con ese instrumento, pues la mayoría de los ejercicios y problemas fueron contestados de manera errónea. Es importante señalar que las mayores dificultades se presentaron al contestar la parte del cuestionario de preguntas abiertas con respecto a la parte de reactivos de opción múltiple (figura 5.10 y 5.12). El 48% dice que percibe la luz del punto A porque está más cerca, el 14% que cree que percibe la luz de los destellos porque la luz sale al mismo tiempo considerando que el marco esta inmóvil.

### 5.8.3 La creencia de que cada observador constituye un marco de referencia distinto

La cuestión del Marco de referencia móvil discutida hasta ahora había sido originalmente diseñada para probar la comprensión de la simultaneidad por parte de los estudiantes. Sin embargo, encontramos que las concepciones de los estudiantes sobre la simultaneidad y los marcos de referencia están fuertemente entrelazadas. Por lo tanto, planteamos otras preguntas para investigar las creencias de los estudiantes sobre la simultaneidad, los marcos de referencia y el papel de los observadores.

#### 5.8.3.1 Tendencia a tratar a los observadores en el mismo lugar que en el mismo marco de referencia, independientemente del movimiento relativo

Algunos estudiantes parecen haber interpretado la pregunta ¿Hay un marco en el que los eventos son simultáneos?, Para significar ¿Hay un observador que ve los eventos al mismo



tiempo? Algunos estudiantes aparentemente creen que un conjunto de observadores en reposo relativo el uno al otro, no estaría de acuerdo con que los destellos sean simultáneos, ya que tales observadores no recibirían la luz de los dos destellos en el mismo instante.

5.8.3.2 Tendencia a tratar a los observadores en reposo uno con respecto al otro como si estuvieran en marcos de referencia separados

La mayoría de los estudiantes que respondieron a la pregunta del observador, afirmaron incorrectamente que el punto A aparece primero en el marco del segundo observador.

Los estudiantes que creyeron que un "marco de referencia" consiste en un solo observador en un lugar particular, también creían que los observadores en diferentes lugares (pero en reposo uno respecto al otro) estaban "en diferentes marcos de referencia" en el sentido de que llegaron a conclusiones diferentes sobre los tiempos de los eventos.

5.8.3.3 Pregunta de los "Destellos"

En la pregunta de destellos, a los estudiantes se les da el intervalo de tiempo entre dos eventos no simultáneos en un marco y se les pregunta si hay un segundo marco en el que los eventos son simultáneos. Al igual que en las versiones de la pregunta sobre marco de referencia móvil, no se hace mención de un observador específico en el segundo marco. Sin embargo, los estudiantes a menudo planteaban espontáneamente el tema de la ubicación del observador.

La pregunta de destellos es la inversa de la pregunta del marco de referencia móvil. A los estudiantes se les dice que dos eventos ocurren en momentos diferentes en un marco dado y se les pregunta si hay otro cuadro en el que los eventos son simultáneos.

5.8.3.3.1 Descripción de la pregunta

En la pregunta destellos, se produce un destello en cada punto A y B que están separados con una longitud adecuada. En el marco de un observador en reposo, el destello en el extremo B ocurre un tiempo  $c$  después de los destellos en el extremo A. Se pregunta a los estudiantes si hay un marco en el que las explosiones son simultáneas.

### 5.8.3.3.2 Respuesta correcta

Dos destellos ocurren en los extremos A y B con una longitud adecuada  $d$ . En el marco de referencia del observador en reposo, el primer destello ocurre en el extremo A, y el segundo destello ocurre en el extremo B a tiempo  $e$  más tarde.

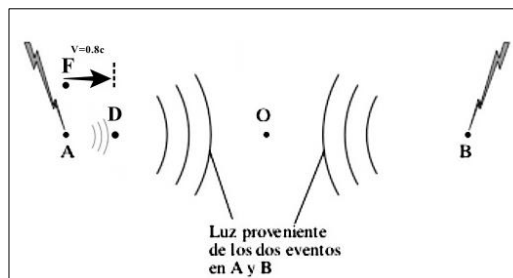
¿Hay un marco de referencia en el que los dos destellos ocurren en el mismo instante?

Se puede encontrar una respuesta correcta mediante el uso de las transformaciones de Lorentz. La separación espacial  $d$  entre los destellos y la separación de tiempo  $c$ . Por lo tanto, la duración del tiempo entre los destellos  $c$  es cero en un cuadro que se mueve de izquierda a derecha con velocidad  $d/c$ .  $c t = \gamma (e - d/c)$

### 5.8.3.3.3 Pregunta representativa

#### Pregunta P3A3

- F también cruza el espacio en un móvil de A a B. F alcanza a D en el momento en que este percibe la luz del destello de A.



Q7. ¿F percibe las luces de ambos destellos al mismo tiempo?

- Si, F percibe la luz de los destellos al mismo tiempo
- No, F percibe la luz del destello de A primero
- No, F percibe la luz del destello de B primero
- No sabe

Justificación:

Q8. En el marco de referencia de F, ¿Las luces de los destellos son emitidas al mismo tiempo?

- a. Si, ambas son emitidas al mismo tiempo
- b. No, la luz del destello de A se emite primero
- c. No, la luz del destello de B se emite primero
- d. No sabe

Justificación:

#### 5.8.3.3.4 Análisis de resultados

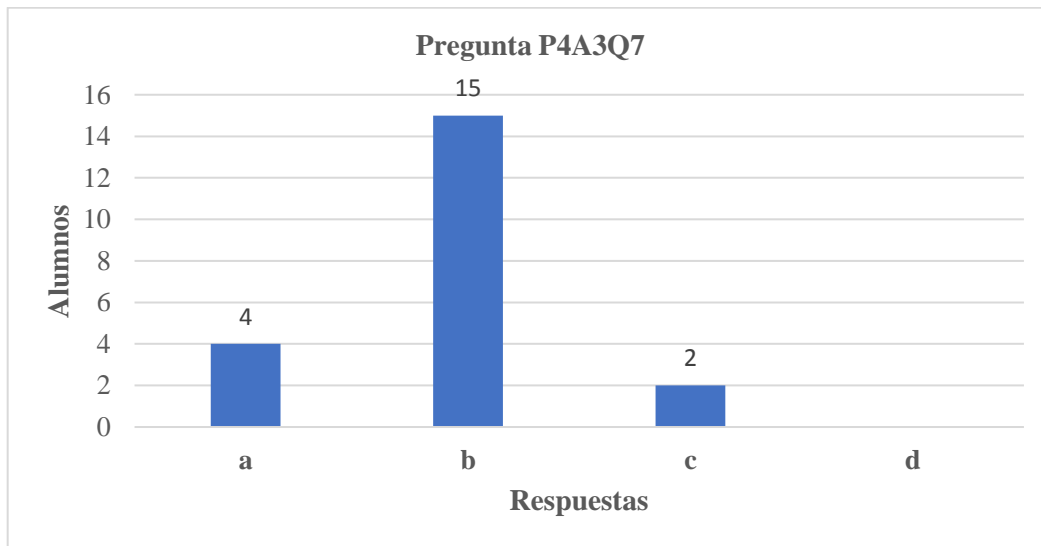
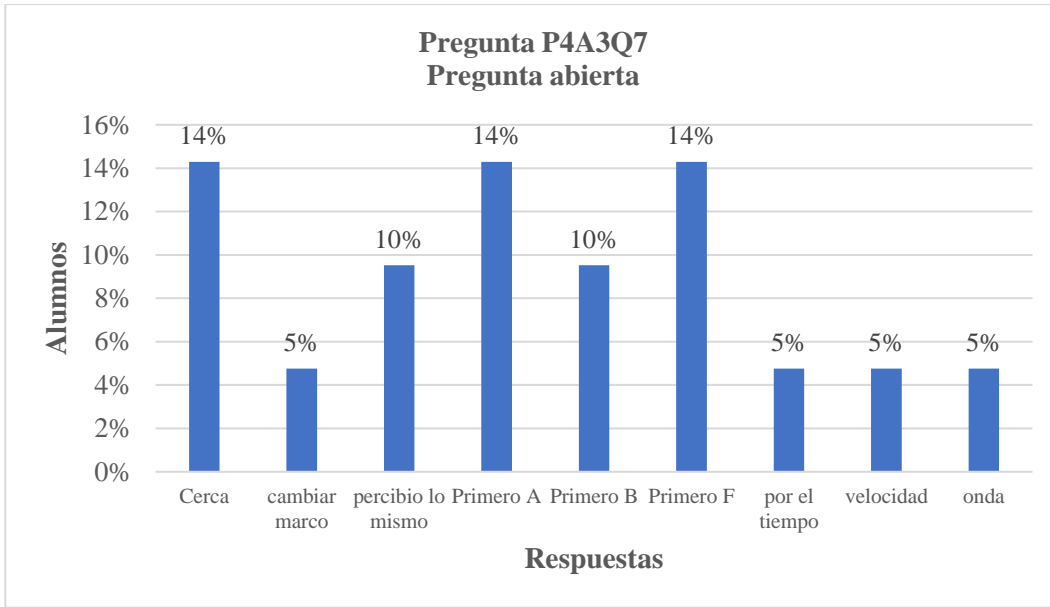
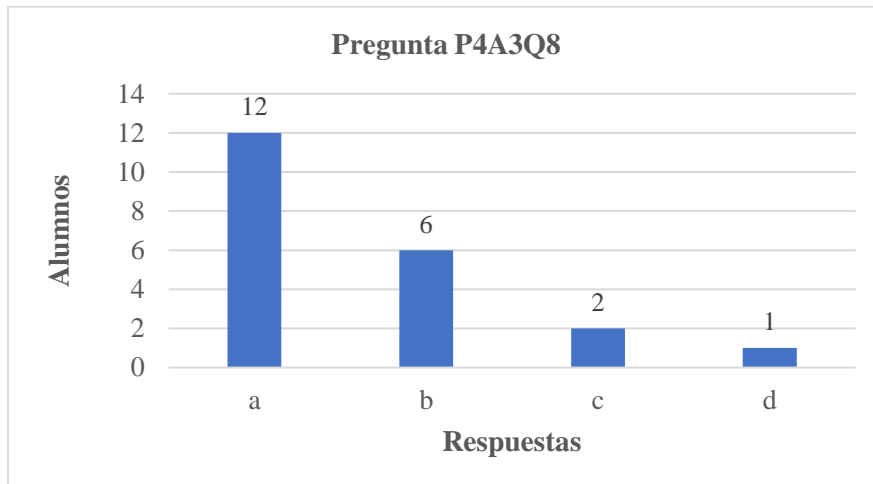


Figura 5.14



*Figura 5.15*



*Figura 5.16*

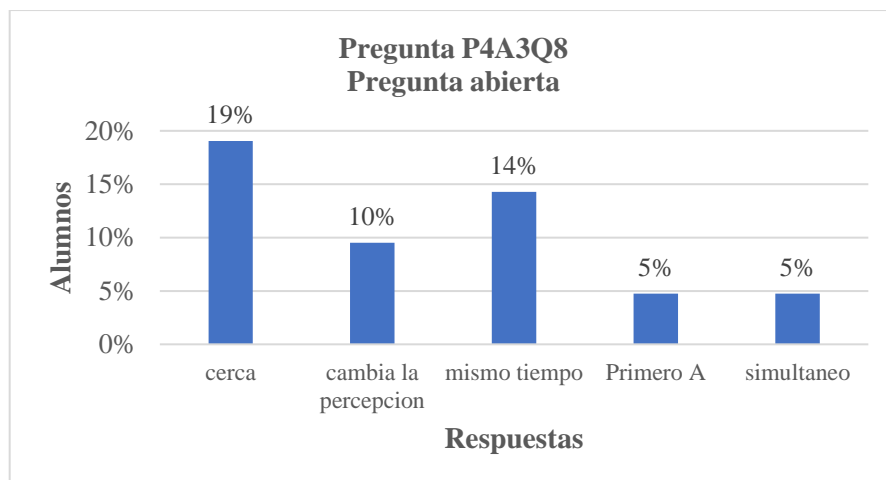


Figura 5.17

Las preguntas del cuestionario P3A3 nos debe dar la información de cómo movilizan los estudiantes el concepto de evento; en la figura 5.14 y 5.15, nos muestra que el 14 % de los estudiantes identifican con sus repuestas que se requiere un razonamiento sobre la posición espacio temporal del observador y no sobre su velocidad y viceversa. En la pregunta sobre el marco de referencia identifican que los destellos son al mismo tiempo (ver figura 5.16) pero en sus repuestas abiertas (figura 5.17) se basan en que reciben primero los destellos de A porque están cerca de A.

## 5.9 Método Gráfico

### 5.9.1 Introducción

Para poder determinar cómo los estudiantes entienden los conceptos de marco de referencia y evento, que son dos conceptos claves para comprender la relatividad especial. Los análisis de las respuestas obtenidas muestran que los conceptos de evento y referencia no se dominan completamente, lo que tiene la consecuencia particular de que algunos estudiantes consideran que el orden en que se perciben dos eventos determina el orden en que ocurren estos eventos. Utilizaremos un método gráfico que señala una característica fundamental de la relatividad restringida, la invariancia de la velocidad de la luz.

### 5.9.2 Consecuencias del segundo postulado

Para estudiar las consecuencias del segundo postulado de Teoría Especial de la Relatividad que nos indica: "la velocidad de la luz en el vacío es lo mismo en todos los sistemas de referencia inercial" (Einstein,1990). Más específicamente, es para que los estudiantes sepan que el valor de una duración es relativo a un marco de referencia inercial dado y para conocer las nociones de duración y duración medida. Detrás de estas nociones se ocultan otras nociones, las de referencia y de evento. Presentamos el uso de una herramienta "gráfica" para "mostrar" las consecuencias de la invariancia de  $c$  y la forma en que se incorporan el marco de referencia y las definiciones de eventos.

### 5.9.3 Ventajas de un diagrama Espacio-Tiempo

Presentamos un diagrama de espacio-tiempo que ilustra las respuestas esperadas. Los diagramas de tiempo espacial (gráficos bidimensionales, una coordenada de tiempo, una coordenada de espacio) tienen la ventaja de agrupar la información disponible en diferentes eventos y ofrecen una forma de visualización de las consecuencias de la invariancia del sistema de referencia inercial. Aquí, las líneas del universo agrupan todas las posiciones de una entidad en el espacio-tiempo. Al elegir  $ct$  en lugar de  $t$  en la ordenada y unidades idénticas para cada uno de los ejes, la línea del universo de un fotón se representa como una línea recta inclinada a  $45^\circ$  con respecto al eje de la abscisa. Las líneas universales de los fotones (de la luz) están en color en el diagrama.

### 5.9.4 Descripción de las graficas

Llamaremos E y C, a unos observadores que están en el mismo punto del espacio-tiempo en el momento en que llega la luz de los eventos, ambos perciben los destellos al mismo tiempo. De la misma manera el observador F se encuentra en el mismo punto del espacio-tiempo que el observador D cuando la luz que proviene del punto A llega a ellos, el observador F recibe la luz de este punto primero. Los observadores E y F definen un marco de referencia ya que tienen la misma velocidad con respecto a la distancia que separa los dos marcos de referencia inerciales diferentes, el orden de los eventos "emisión de destellos de A" y "emisión de destello de B" y la duración que separa estos dos eventos son idénticos para E y para F.

Cuando E está a la altura de C, es equidistante de A y B y recibe luz de ambos destellos. Antes de este evento, estaba más cerca de A que de B. Así que podemos decir que cuando A activó su destello, E estaba más cerca de A de lo que estaba cuando recibió la luz. De la misma manera, cuando B activó su destello, se encontraba más alejado de E que en el momento de la recepción. Así que, con respecto a E, la luz del evento de B tenía una distancia mayor para viajar que el destello de A, y la velocidad del destello de cada evento era la misma. Dado que llegan al mismo tiempo al punto de encuentro C, esto significa que la luz de B se emitió anteriormente en el punto del marco de referencia móvil.

Este razonamiento se expresa visualmente en un diagrama espacio-temporal que ilustra las respuestas esperadas sobre la investigación de la comprensión del espacio-tiempo por parte del alumno en la relatividad especial.

Descripción de ejercicio con gráfica P1A4\_1:

t1: instante en el que C emite una señal hacia A y B, evento E1.

t2 y t3: instante en el que A y B reciben la señal de C y en el que emiten su destello, eventos E2 y E3.

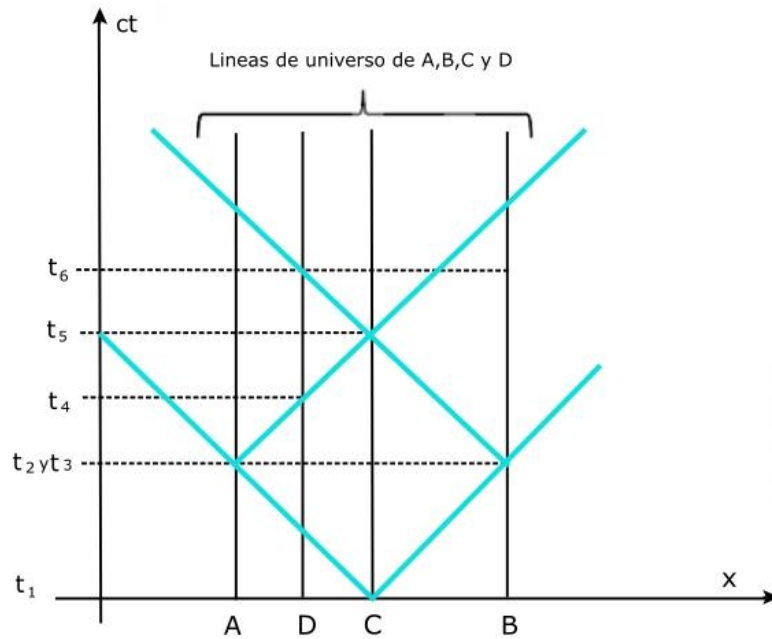
t4: instante en el que D recibe los fotones del destello emitido por A, evento E4.

t5: instante en el que C recibe los fotones de los dos destellos emitidos por A y por B, evento E5.

t6: instante en el que D recibe los fotones de el destello emitido por B, evento E6....

Figura 1: Diagrama espacio-temporal que representa la situación de los destellos.

Fuente: De Hosson, C. (2013). Identificar dificultades de estudiantes en relatividad especial: Las nociones de “sistema de referencia” y de “evento. *El Cálculo y su Enseñanza*, Volumen 4, © 2013, Cinvestav-IPN, México, D.F.



P1A4\_1 ¿En que instante activan A y B el destello simultáneamente?

- a)  $t_1=t_2$
- b)  $t_2=t_4$
- c)  $t_3=t_5$
- d)  $t_2=t_3$

P1A4\_2 ¿En que instante C recibe los fotones de ambos destellos?

- a)  $t_1$
- b)  $t_2$
- c)  $t_3$
- d)  $t_5$

P1A4\_3 ¿D recibe los fotones en el instante  $t_4$  emitidos por?

- a) A
- b) C
- c) B
- d) E

P1A4\_4 ¿D recibe los fotones emitido por B en el instante?

- a)  $t_3$
- b)  $t_2$
- c)  $t_5$
- d)  $t_6$



En el sistema de referencia que se representa en el diagrama espacio-temporal ver pregunta P1A4, los observadores A, B, C y D son inmóviles. Su línea de universo es una línea recta vertical pues su coordenada espacial no cambia en el tiempo. Las líneas azules inclinadas representan las líneas de universo de los fotones. Al escoger  $ct$  en lugar de  $t$  en el eje de las ordenadas y unidades idénticas para cada uno de los ejes, la línea de universo de un fotón se representa mediante una línea recta inclinada  $45^\circ$  con respecto al eje de las abscisas.

### 5.9.5 Análisis de resultados:

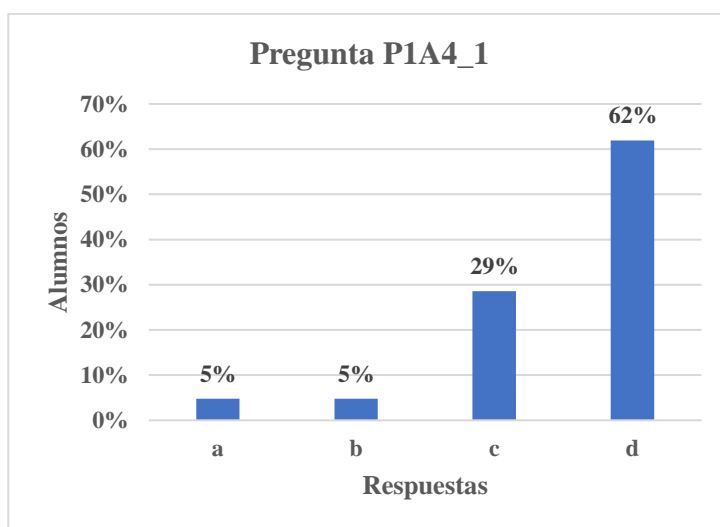


Figura 5.18

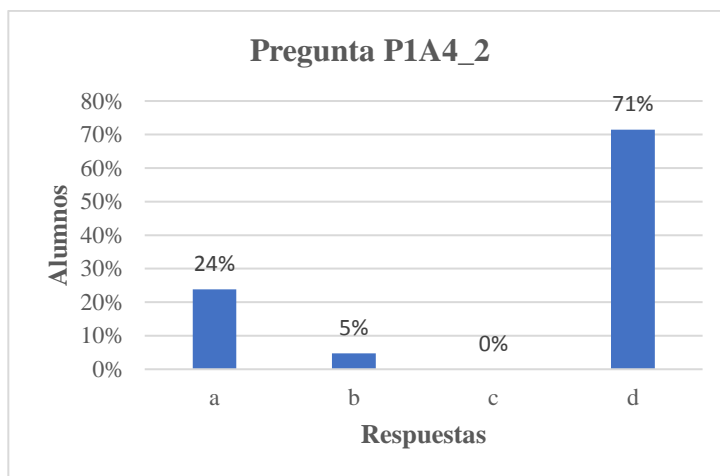


Figura 5.19

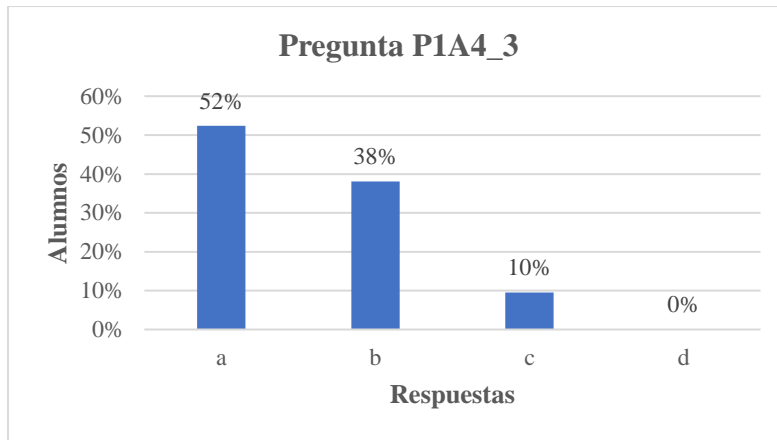


Figura 5.20

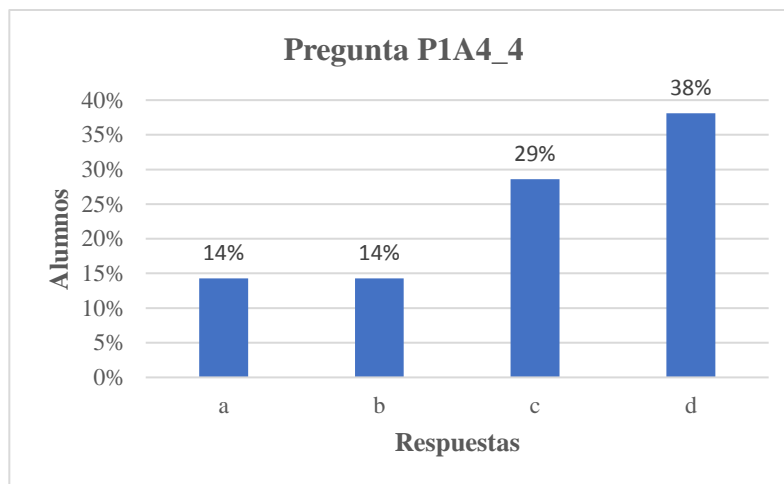


Figura 5.21

La mayoría de los estudiantes no son capaces de producir un razonamiento basado únicamente en la localización espacio-temporal de un observador y un razonamiento localizado en el espacio y en el tiempo, el 29% solo se basa en cuando reciben la señal, ver figura 5.18 El orden en el cual dos eventos son percibidos determina el orden en el cual estos se produjeron. En consecuencia, la no simultaneidad de dos eventos no es un problema pues aparece relacionado a la no simultaneidad de su percepción. En la figura 5.19 el 24% de los estudiantes solo razonan la emisión del destello. Algunas de las respuestas permiten inferir un uso inapropiado del concepto de sistema de referencia que suele reducirse a un solo individuo. El 38% de los estudiantes dice que C, figura 5.20, se basa en el momento del destello y no analiza el marco de referencia de A. Para la pregunta P4 el 29% ver figura 5.21, el 29% solo ve la emisión y no el tiempo.

En el diagrama espacio-temporal de la figura P1A4\_2, los observadores A, B, C y D ya no son inmóviles, sino que son animados de un movimiento en el sentido del espacio decrecientes. Nos interesamos ahora en los mismos eventos D, E, F como correspondientes de los eventos en el sistema de referencia anterior. Las líneas azules representan las líneas de universo de los fotones, las líneas negras representan las líneas de universo de A, B, C y D en el sistema de referencia de E y F. Con esta herramienta visualizamos la consecuencia del postulado de Einstein en cuanto a la invariancia de la velocidad de la luz: su valor (escalar) no cambia por cambio de sistema de referencia inercial. Gráficamente, las líneas de universo de los fotones son idénticas en ambos diagramas, cual sea el sistema de referencia considerado.

Descripción de ejercicio con gráfica P1A4\_2:

t'1: instante en el que C envía una señal a A y B.

t'2: momento en el que B recibe la señal de C y en el que dispara su destello.

t'3: momento en el que A recibe la señal de C y en la que dispara su destello.

t'4: instante en el que D y F reciben los fotones del destello emitido por A.

t'5: instante en el que C y E reciben los fotones de los destellos emitidos por A y B.

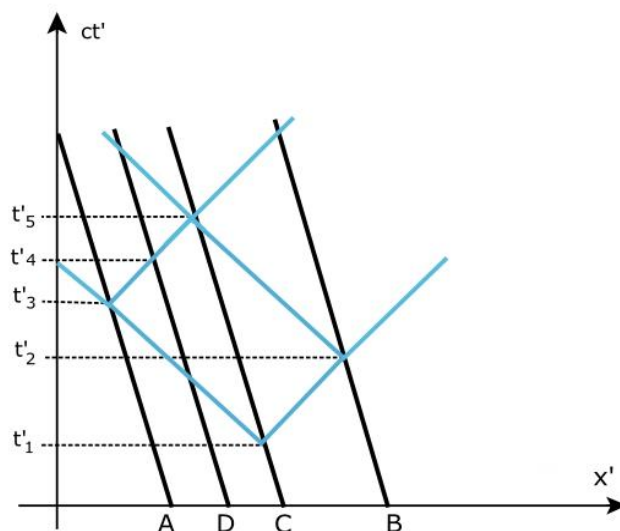


Figura P1A4\_2: diagrama de espacio-temporal que representa la situación en el marco de referencia móvil Nota: las distancias entre A, B, C y D no son las mismas que en el gráfico anterior debido al cambio marco de referencia.

Fuente: De Hosson, C. (2013). Identificar dificultades de estudiantes en relatividad especial: Las nociones de “sistema de referencia” y de “evento. *El Cálculo y su Enseñanza*, Volumen 4, © 2013, Cinvestav-IPN, México,

## 5.10 Formalismo de Lorentz

Aquí tratamos de agrupar aquellas competencias que tiene que ver con los usos intuitivos y espontáneos de los estratos del SMS más concretos que utilizarán en las descodificaciones de las nuevas situaciones de enseñanza como inferir la comprensión de los conceptos de la relatividad especial.

La transformación de Lorentz relaciona las coordenadas espacio-tiempo de un evento en dos Sistemas de Referencia inercial  $S$  y  $S'$ , además, es una generalización de las ecuaciones de transformación galileanas, pero compatibles con los postulados de la TER. Por lo tanto, esta transformación debe dejar invariante el intervalo  $\Delta S$  entre dos eventos cualesquiera al cambiar de sistema  $S$  a  $S'$ :

Estas relaciones establecieron la base matemática de la teoría de la relatividad especial de Einstein, ya que las transformaciones de Lorentz precisan el tipo de geometría del espacio-tiempo requeridas por la teoría de Einstein.

### 5.10.1 Pregunta representativa

P3A5. Una astronave de longitud  $L_0$  en su sistema de referencia, parte de la Tierra con velocidad  $V$ . Más tarde, se emite tras ella una señal luminosa que llega a la cola del cohete en el instante, según los relojes de la astronave y de la Tierra. Determinar cuándo llega la señal a la cabeza del cohete, según los relojes del mismo y según los relojes de la Tierra. La señal se refleja en la cabeza del cohete y se dirige a la cola del cohete. Determinar cuándo alcanza la cola del cohete según los relojes de la nave y de la Tierra.<sup>1</sup>

- Respecto al sistema ligado al cohete, la distancia que debe recorrer para llegar a la cabeza es  $L_0$ , manteniéndose el cohete en reposo respecto a su propio sistema de coordenadas.

El tiempo necesario es  $\tau = \frac{L_0}{c}$ . Además, después de reflejarse, el tiempo  $c$  que tarda la señal en volver a la cola es el mismo  $\tau$ .

<sup>1</sup> Pregunta P3A5 obtenido de: tema 4. Relatividad especial  
Recuperado de:

[https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwimzrz3\\_\\_eAhXrq4MKHdq\\_A7oQFjAAegQICRAC&url=http%3A%2F%2Fwww.dfmf.uned.es%2F~aperea%2Fmaterial\\_docente%2FMyO%2Ftema4\\_2.pdf&usg=AOvVaw0hfyBUWcLalQ10dL5h9LjO](https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwimzrz3__eAhXrq4MKHdq_A7oQFjAAegQICRAC&url=http%3A%2F%2Fwww.dfmf.uned.es%2F~aperea%2Fmaterial_docente%2FMyO%2Ftema4_2.pdf&usg=AOvVaw0hfyBUWcLalQ10dL5h9LjO)

- Respecto al sistema de la Tierra, el cohete tiene una longitud contraída  $L = L_0 / \gamma$ . Cuando la señal se dirige hacia la cabeza del cohete su velocidad es  $c$  y la cabeza se aleja de la señal con velocidad  $V$ . Por tanto, la velocidad relativa entre la señal y la cabeza del cohete es  $c - V$ . El tiempo que tarda en llegar a la cabeza, medido por la Tierra, será

$$t_1 = \frac{L}{c - V} = \frac{L_0}{\gamma (c - V)}$$

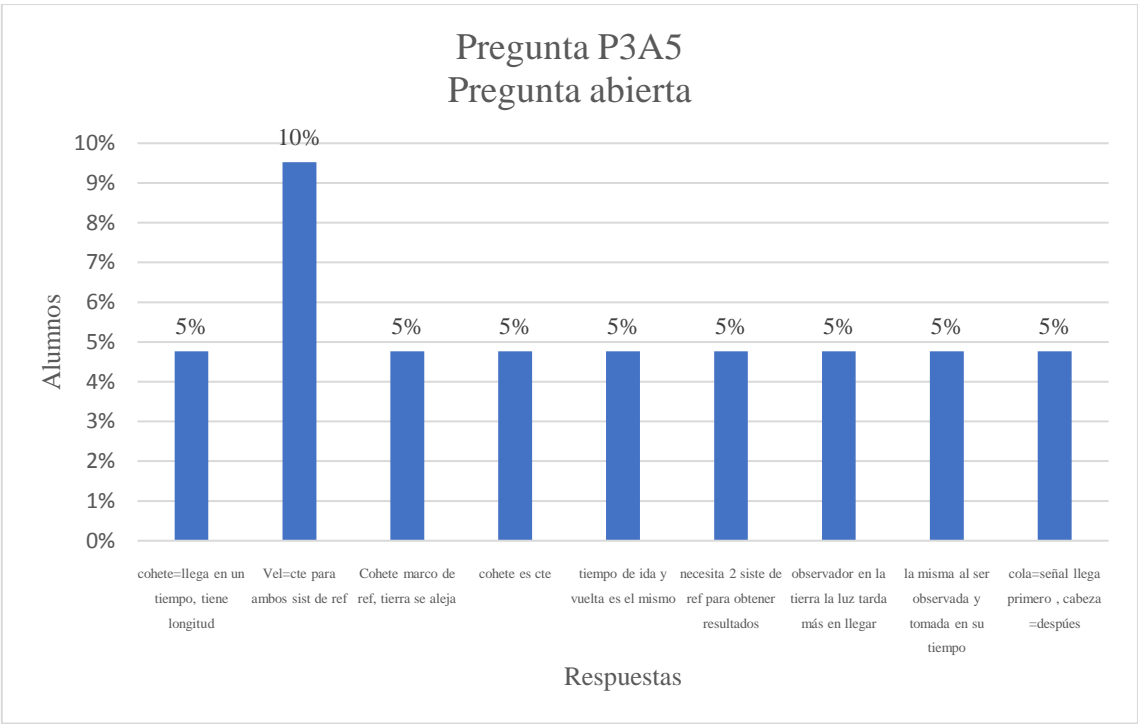
- y de forma análoga para el viaje de la cabeza a la cola, la velocidad relativa es  $c + V$ , y el tiempo empleado es

$$t_2 = \frac{L}{c + V} = \frac{L_0}{\gamma (c + V)}$$

**¿Al ver la solución del problema a que conclusión llegarías?**

#### 5.10.2 Análisis de resultados

Se les proporciono a los estudiantes la respuesta del problema P3A5, con la intención que los estudiantes infirieran, analizaran, visualizaran y abstraieran la mayor información con respecto a la comprensión de los conceptos de la relatividad especial como marco de referencia, evento y simultaneidad. Las características de las respuestas al problema planteado nos proporcionan la información que depende del marco de referencia será la distancia. Para el marco de la tierra se ve la longitud contraída por la velocidad de la luz. La conclusión es que la simultaneidad de sucesos tiene carácter relativo, y depende del sistema de referencia. La figura 5.22 presentan las diferentes respuestas dadas por los alumnos, el 10% nos dice que la velocidad es constante en los diferentes marcos de referencia



*Figura 5.22*

## Capítulo 6

### Observaciones Generales

En este trabajo presentamos los resultados de una investigación sistemática de la comprensión del estudiante de la relatividad especial. Durante esta investigación, que se llevó a cabo entre estudiantes de cursos de física de los primeros trimestres de las diversas carreras de ingeniería, identificamos dificultades persistentes con las definiciones de la posición y el tiempo de un evento y con el concepto de un marco de referencia.

Se formalizaron los resultados de la Teoría Espacial de la Relatividad (TER) sin recurrir a una formulación matemática que no resulta accesible para los estudiantes. Se parte de los conceptos de la Física Clásica para arribar a los resultados cinemáticos de la TER, con situaciones concretas que involucran una matemática sencilla y anticipa la conceptualización partiendo de ejemplos numéricos para arribar a generalidades a través del uso de cálculo y gráficas, para luego cuestionarlas como consecuencia de la introducción de los postulados y de su uso.

Hemos planteado una serie de preguntas de cuestionario, diseñados para evaluar la comprensión conceptual del alumno y hemos comparado la separación espacial con la longitud del objeto y poder realizar cálculos de separación espacial mediante las transformaciones de Galileo o Lorentz. Al observar las dificultades y el rendimiento de los estudiantes, obtuvimos una comprensión cada vez más detallada y coherente de cómo los estudiantes aprenden física.

Pudo observarse, que, para los estudiantes, el movimiento uniforme y el reposo en un dado Sistema de Referencia inercial es equivalente. Sin embargo, existe el obstáculo del Teorema implícito que establece que el movimiento es absoluto. Por otra parte, este es un concepto errado galileano que prevalece, que no está específicamente relacionado con la TER.

Muchos estudiantes no piensan en un marco de referencia como un sistema de observadores que determina la misma posición y tiempo para cualquier evento. En cambio, parecen establecer un marco de referencia con un punto de vista. Interpretan declaraciones de la

dependencia del marco del tiempo de un evento para indicar que los observadores en diferentes lugares reciben señales de eventos en diferentes momentos.

Al necesitar de un sentido confiable de lo que significa la posición de un evento, los estudiantes tienden a asociar eventos con objetos en movimiento, una asociación que puede ser el fundamento de la aparente creencia de que la separación espacial entre dos eventos es idéntica a la distancia entre dos objetos. Esta incongruente igualdad parece estar en la raíz de la aplicación indiscriminada de la contracción de la longitud y la imposibilidad de aplicar las transformaciones de Lorentz.

Los estudiantes parecen creer que es parte normal de la relatividad que los observadores disientan sobre la realidad que los rodea. Una parte importante de la Teoría especial de la Relatividad, es que depende tanto de la invarianza y como de su variabilidad. Sin embargo, esa creencia errónea permite a los estudiantes evadir la verdadera relatividad de la simultaneidad. Los alumnos reconocen la necesidad de comparar resultados de mediciones de tiempo para establecer la simultaneidad de sucesos que ocurren en el mismo lugar. Sin embargo, no contemplan la posibilidad de simultaneidad de sucesos que ocurren en lugares diferentes y que, por lo tanto, requieren de más de un observador ubicados en diferentes lugares.

En lo que respecta al Primer Postulado se puso en evidencia que los estudiantes trataron sus ideas en más de un sistema de representación, lo cual podría indicar un nivel de conceptualización apropiado, que se manifestó al exponerse en diversos formatos representacionales. En general, se obtuvieron respuestas mayoritariamente correctas y parecería indicar que los estudiantes comprenden bien el principio de inercia y el de relatividad clásico, los estudiantes pueden relacionar los ejemplos ideales con hechos de la vida cotidiana donde esto sucede.

Con relación al Segundo Postulado, los estudiantes saben que la velocidad de la luz es constante, pero debido a su elevado valor, piensan que la luz es instantánea. Por esta razón predicen incorrectamente la simultaneidad en el caso de la luz para todos los observadores. Los estudiantes tenían mucha información sobre la velocidad de la luz, pero no les resulta sencillo explicitarlo en los cálculos.



Las dificultades de los estudiantes con el espacio-tiempo parecen tener su arraigo en las dificultades con el concepto de un marco de referencia. Parecen asumir que el concepto que se utiliza en el ámbito científico no difiere del utilizado en el lenguaje cotidiano, relacionándolo con situaciones en este contorno. Al mismo tiempo cuando se refieren a el concepto de tiempo, efectúan errores tales como confundir magnitudes con unidades y no establecen claramente las relaciones entre estos conceptos y el significado del proceso de medición de la magnitud tiempo. Sus representaciones acerca del tiempo son, en principio, pobres y al mismo tiempo un obstáculo para progresar en la adquisición de conceptos científicos en el campo conceptual de la TER. La propia base científica del concepto de espacio y sus propiedades dista de ser asumida conceptualmente por los alumnos.

En síntesis, sin un manejo real y profundo de los conceptos de espacio, tiempo, sistema de referencia, simultaneidad, observador y proceso de medición en Física Clásica parece ser muy poco probable que los alumnos logren una comprensión conceptual científicamente correcta de los aspectos más relevantes de la TER.

Los alumnos, muestran un aprendizaje escasamente significativo y se consolidan poco las nuevas concepciones en los estudiantes además de una comprensión insuficiente de los conceptos básicos de espacio y tiempo dista de ser asumida por los alumnos.

Se observa que es posible una enseñanza correcta de los fundamentos de la relatividad, que propicie en los estudiantes un cambio actitudinal, metodológico y conceptual.

Es interesante indagar en la zona colindante con los primeros niveles de la enseñanza universitaria, en este caso se podría profundizar en aspectos cuya complejidad y extensión exige una mayor madurez y que adicionalmente iluminarían estrategias transferibles hacia otros niveles educativos.

## Referencias Bibliográficas

Alemán B. R. (1997). *Errores comunes sobre relatividad entre los profesores de enseñanza secundaria. Enseñanza de las Ciencias*, (15) 3, pp. 301-307.

Alemán B. R. y Pérez S. J. (2000). *Enseñanza por cambio conceptual: de la Física Clásica a la Relatividad. Enseñanza de las Ciencias*, (18) 3, pp. 463-471.

Angotti, J. A., Caldas, I. L., Delizoivov, D., Rüdinger, E y Pernambuco, M. (1978). *Teaching relativity with a different philosophy. American Journal of Physics*, (46) 12, pp. 1258-1262.

Arriasecq B. I. (2008). *La enseñanza y el aprendizaje de la teoría especial de la relatividad en el nivel medio/polimodal*. Tesis doctoral.

Arriasecq, I. y Greca, I. (2004). *Enseñanza de la teoría de la relatividad especial en el ciclo polimodal: dificultades manifestadas por los docentes y textos de uso habitual*. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, Vol. 3, No 2, pp. 211-227

Arriasecq, I. y Greca, I. (2005). *Análisis de aspectos relevantes para el abordaje de la Teoría de la Relatividad Especial en los últimos años de la enseñanza media desde una perspectiva contextualizada histórica y epistemológicamente*. Primera Parte. Revista de Enseñanza de la Física. Vol. 18, No 1, pp. 17-28.

Arriasecq, I. y Greca, I. (2007). *Approaches to Special Relativity Theory in School and University Textbooks in Argentina. Science & Education*, (16) 1, pp. 65-86.

Arriasecq, I. y Adúriz-Bravo, A. (2006). *Albert Einstein: un físico genial ... ¿y que más? Memorias del IV Congreso Iberoamericano de Educación Científica*, Lima, Perú. Organizado por el Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica.

Arriassecq, I. y Greca, I. (2002). *Algunas consideraciones históricas, epistemológicas y didácticas para el abordaje de la Teoría Especial de la Relatividad en el nivel medio y polimodal*. *Ciência & Educação*, (8) 1, pp. 55-69.

Arriassecq, I. y Greca, I. (2003). *Enseñanza de la Teoría Especial de la Relatividad en el ciclo polimodal: dificultades manifestadas por los docentes y textos de uso habitual*. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, (3) 2, Artículo 7, en <http://www.saum.uvigo.es/reec>. ISSN: 1579-1513.

Arriassecq, I. y Greca, I. (2004). *Análisis de algunos aspectos de la enseñanza de la Teoría Especial de la Relatividad en el nivel polimodal argentino a partir de un estudio de caso*, II ENCUENTRO IBEROAMERICANO SOBRE INVESTIGACIÓN BÁSICA EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS, 21 a 24 de septiembre de 2004, Universidad de Burgos, España.

Arriassecq, I. y Greca, I. (2006). *Introducción de la Teoría de la Relatividad Especial en el nivel medio /polimodal de enseñanza: identificación de Teoremas-en-Acto y determinación de objetivos-obstáculo*. *Revista Investigações em Ensino de Ciências* (<http://www.if.ufrgs.br/ienci>), (11), 2.

Arriassecq, I., Greca, I. y Stipcich, S. (2004). *Dificultades para la conceptualización de algunos tópicos de la Teoría Especial de la Relatividad en alumnos de nivel polimodal*. 7° Simposio de Investigación en Educación en Física. Santa Rosa, La Pampa, 7 al 9 de octubre de 2004. Asociación de profesores de Física de la Argentina y Universidad Nacional de la Pampa. Publicado el artículo completo. CD (I.S.B.N. 950 - 863 - 063 -9).

Arruda, S. y Villani, A. (1996). *Sobre as origens da relatividade especial: relações entre quanta e relatividade em 1905*. *Caderno Catarinense*, (13). 1, pp. 32-47.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1991). *Psicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo*. México: Ed. Trillas.

Butto, C & Delgado, J. (2012). *Rutas hacia el álgebra: actividades en Excel y Logo*, México, D.F, UPN-SEP, CONACYT. Horizontes Educativos.

De Hosson, C. (2013). *Identificar dificultades de estudiantes en relatividad especial: Las nociones de “sistema de referencia” y de “evento*. *El Cálculo y su Enseñanza*, Volumen 4, © 2013, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Einstein, A. (1983). *Cómo veo el mundo*. Bs. As.: Ediciones Siglo Veinte

Einstein, A. (1999). *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*. Ediciones Altaya, S.A.

Einstein, A. (2006). *Teoría de la Relatividad*. Colección Labor servicios editoriales. Buenos Aires.

Enrique Ordaz Romay. *Análisis básico del experimento de Michelson y Morley (1887)*. Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid (España).

Experimento Michelson-Morley. Wikimedia. Recuperado de:  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Experimento\\_de\\_Michelson-Morley](http://es.wikipedia.org/wiki/Experimento_de_Michelson-Morley)

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E.; Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Giancoli, Douglas C, (2009). *Teoría especial de la relatividad*. En *Física para ciencias con física moderna*. México: Pearson Educación, 951-986

Gil Pérez, D., Senent, F. y Solbes, J. (1998). *Análisis crítico de la introducción de la física moderna en la enseñanza media. Enseñanza de la Física*, 2 (1), pp. 16-21.

Griffiths, D. (1989). *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Hake, R. (1998). *Interactive engagement versus traditional methods: a six-thousand-student study of mechanics test data for introductory physics courses*, American Journal of Physics. 66, 64

Hawking, S. (2007). *El universo en una cáscara de nuez*. Editorial Crítica Planeta. Barcelona.

Hernández, L. y Guerrero R. (s.f.). Física moderna I. Recuperado de:

<http://es.scribd.com/doc/36040835/Fisica-moderna-I#scribd>

Hewson, P. W. (1982). *A case study of conceptual change in special relativity. The influence of prior knowledge in learning. European Journal of Science Education*, 4 (61), pp. 61-78.

Hosson, C. y Kermen, I. (2013). *Identificar dificultades de estudiantes en relatividad especial: Las nociones de “sistema de referencia” y de “evento”*. El Cálculo y su Enseñanza. Vol.4. Cinvestav-IPN, México, D.F. [http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el\\_calculo/](http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/)

Hosson, C., Kermen, I. y Maisch, C. (2011). *Learning scenario for a 3D virtual environment: the case of Special Relativity*. Université Paris Diderot-Paris. Recuperado de:

<http://tesis.com.es/documentos/ensenanza-aprendizaje-teoria-especial-relatividad-nivel-mediopolimodal/>

Hosson, C., Kermen, I., Parizot, E. (2010). *Exploring students' understanding of reference frames and time in Galilean and special relativity*, European Journal of Physics 31, 1527.

Interferómetro de Michelson. Wikimedia. Recuperado de:

[http://es.wikipedia.org/wiki/Interfer%C3%B3metro\\_de\\_Michelson](http://es.wikipedia.org/wiki/Interfer%C3%B3metro_de_Michelson)

Lorentz transformation. Wikimedia. Recuperado de:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz\\_transformation](http://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation)

Lorentz, H. (1899). *Simplified Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Systems*. Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 1, 427–442.

Martins, A. y Pacca, J. (2005). *O conceito de tempo entre estudantes de ensino fundamental e médio: uma análise à luz da epistemologia de Gaston Bachelard*. *Investigações em Ensino de Ciências*, 10 (3). Recuperado de:  
[http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol10/n3/v10\\_n3\\_a2.html](http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol10/n3/v10_n3_a2.html).

McDermott, L.C, Rosenquist, M.L. y Van Zee, E.H. (1987). *Student difficulties inconnecting graphs and physics: examples from kinematics*. *American Journal of Physics*. N° 55, p. 503-513.

McDermott, L.C. (1990). *A perspective on teacher preparation in physics and other sciences: The need for special courses for teachers*. *American Journal of Physics*. 58, 734

McDermott, L.C. y Shaffer P.S. (1992). *Research as a guide for curriculum development: An example from introductory electricity, Part I: Investigation of student understanding*, *Am. J. Phys.* 60, 994; Printer's erratum to Part I, *American Journal of Physics*. 61, 81 (1993)

Ostermann, F. y Moreira, M. A. (2000). *Física contemporânea en la escuela secundaria*. *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (3), pp. 391-404.

Panse, S., Ramadas, J. y Kumar, A. (1994). *Alternative conceptions in Galilean Relativity: Frames of references*. *International Journal of Science Education*. (16), pp. 63-82.

Pérez Celada, H. (2003). *La teoría de la relatividad y su didáctica en el bachillerato: análisis de dificultades y una propuesta de tratamiento*. Tesis doctoral. Recuperado de:

Pérez, H. y Solbes, J. (2003). *Algunos problemas en la enseñanza de la relatividad*. Enseñanza de las Ciencias, 21 (1), pp. 135-146.

<http://www.meet-physics.net/recerca-didactica/TesiDoctoralHectorPerezRelativitat.pdf>

Pérez, H. y Solbes, J. (2006). *Una propuesta sobre enseñanza de la relatividad en el bachillerato como motivación para el aprendizaje de la física*. Enseñanza de las Ciencias, (24) 2, pp. 269-279.

Pietrocola, M. y Zylbersztajn, A. (1999). *The use of the principle of relativity in the interpretation of phenomena by undergraduate students*. International Journal of Science Education, 21 (3), 261-276.

Posner, G., Strike, A., Hewson, P. y Gertzog, W. (1982). *Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change*. Science Education, (66), pp. 211-227.

Pozo, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata. Pozo, J. I. (1993). *Psicología y didáctica de las ciencias de la naturaleza: ¿concepciones alternativas?* Infancia y Aprendizaje, (62) pp. 187-204.

Ramadas, J., Barve, S., y Kumar, A. (1996). *Alternative conceptions in Galilean Relativity: Inertial and non-inertial observers*. Science Education, (18), pp. 615-619.

Resnick, R. (1977). *Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad*. México: Ed. Limusa.

Saltiel E y Malgrange J. L. (1980) *Spontaneous ways of reasoning in elementary kinematics* Eur. American Journal of Physics. 1 73–80

Savage C. M., Searle A. y McCalman L. (2007). *Real time relativity: exploration learning of special relativity*. American Journal of Physics. 75 791–8

Scherr R. (2007). *Modeling student thinking: an example from special relativity*. American Journal of Physics, 75 (3): 272–280.

Scherr R. E. (2001). An investigation of student understanding of basic concepts in special relativity. PhD thesis, University of Washington.

Scherr R., Schaffer P. y Vokos S. (2001). *Student understanding of time in special relativity: simultaneity and references frames*. American Journal of Physics, 69 (S1): 24–35.

Shahen Hacyan. (s. F). Relatividad para principiante. Recuperado de [bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen2/ciencia3/.../sec\\_7.html](http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen2/ciencia3/.../sec_7.html)

Tipler, P., y Mosca, G. (2008). *Física para la ciencia y la tecnología*. VOL. I, 6ª ED. Barcelona. Editorial Reverté. Pág 1181

Tipler, P.A. y Llewellyn R.A. (1999). *Modern Physics*, W.H. Freeman and company, New York, NY.

Toledo, B., Arriasecq, I. y Santos, G. (1997). *El pasaje de la Física clásica a la relativista desde la perspectiva del cambio conceptual*. Enseñanza de las Ciencias, 15 (1), pp. 79-90.

Villani, A. (1981). *O confronto Lorentz-Einstein e suas interpretações* (partes I, II, III, e IV). Revista de Ensino de Física, (3) 1, 2, 3 y 4.

Villani, A. (1992). *Conceptual Change in Science and Science Education*. Science Education, 76(2), pp. 223-237.

Villani, A. y Arruda, S. (1998). *Special Theory of Relativity, Conceptual Change and History of Science*. Science & Education, 7 (2), pp. 85-100.



Villani, A. y Pacca, J. (1987). *Students' spontaneous ideas about the speed of light*. International Journal of Science Education, (9), pp. 55-66.

Villaseñor, M. (s.f). *Física moderna i fascículo 4. Teoría de la relatividad especial*.

Recuperado de:

[http://www.conevyt.org.mx/bachillerato/material\\_bachilleres/cb6/5sempdf/fimo1pdf/fasciculo4.pdf](http://www.conevyt.org.mx/bachillerato/material_bachilleres/cb6/5sempdf/fimo1pdf/fasciculo4.pdf)

Vokos, S., Shaffer P.S., Ambrose B.S. y McDermott L.C. *Student understanding of the wave nature of matter: Diffraction and interference of particles*. Phys. Educ. Res., American Journal of Physics. Suppl. 68, S42-S51 (2000)

# ANEXOS

## Anexo 1

### Cuestionario A1Pi

#### UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

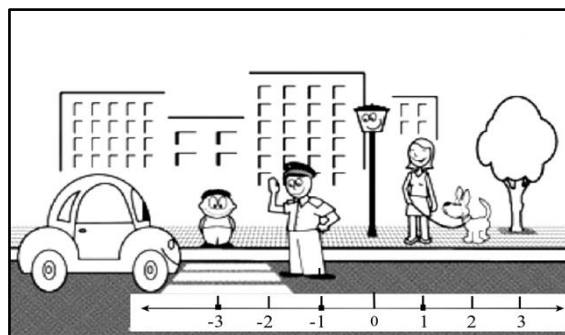
Nombre:	Fecha:
Materia:	Trimestre:
Licenciatura:	Edad:

#### Tema 1:

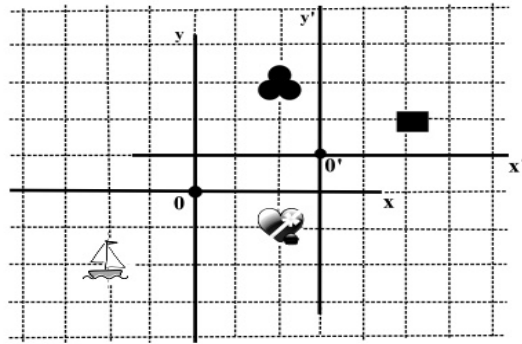
- P1A1. En una discusión entre dos personas, cuando una de estas no está de acuerdo, utiliza la expresión “todo es relativo”. ¿A qué se está refiriendo?
- P2A1. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por el término "relatividad".
- P3A1. ¿Hay diferentes teorías de la relatividad?
- P4A1. ¿Cuál es la máxima velocidad que puede adquirir un cuerpo en el universo?

#### Tema 2:

- P5A1. La descripción del movimiento de los cuerpos depende del sistema de referencia en que se observe. Si te hacen la pregunta:  
¿Con respecto a qué se mueven los cuerpos? ¿Cuál sería tu respuesta?
- El siguiente esquema presenta la posición de los cuerpos en el tiempo t.



- a) P6A1. ¿Cuál es el marco de referencia utilizado según la recta numérica?
- b) P7A1. Determina la ubicación de las personas con respecto al punto de referencia.
- Determina la posición de los siguientes objetos de acuerdo a sus coordenadas en los dos sistemas.



P8A1.

Sistema de referencia	(x,y) Barco	(x,y) Corazón	(x,y) Trébol	(x,y) Cuadro
<b>0</b>				

Sistema de referencia	(x,y) Barco	(x,y) Corazón	(x,y) Trébol	(x,y) Cuadro
<b>0'</b>				

- a) P9A1. ¿Que diferencia encuentras entre los dos marcos de referencia?

### Tema 3:

**Nota:**

**Sistema de referencia:** Es un patrón que sirve para analizar las leyes del movimiento.

**Sistema de referencia Inercial:** Es aquel en el que un objeto se moverá con velocidad constante, si no se le perturba; por lo tanto, un marco inercial es aquel en el que no existe aceleración.

Sabiendo esto, contesta las siguientes preguntas:

- Un automóvil que viaja con rapidez constante por un camino recto y nivelado.
- a) P10A1. ¿El marco de referencia de este automóvil es un marco de referencia inercial?
- b) P11A1. ¿Lo es si el auto tomó una curva con rapidez constante?
- c) P12A1. ¿Lo es si el auto desacelera al tomar en neutral una pendiente cuesta arriba?

d) P13A1. ¿Lo es si frena?

➤ Estas viajando en un autobús y haces malabares con tres naranjas, y deseas analizar el movimiento de las naranjas mediante la aplicación de las leyes de Newton.

a) P14A1. Da dos condiciones que deben cumplirse para que el interior del autobús se utilice como un marco de referencia inercial.

b) P15A1. Si las ventanas del autobús estuvieran cubiertas y el camino estuviera perfectamente liso, ¿podrías determinar si el autobús se está moviendo o no?

c) P16A1. ¿Te daría alguna pista el movimiento de las naranjas para saber si el autobús se estaba moviendo o no?

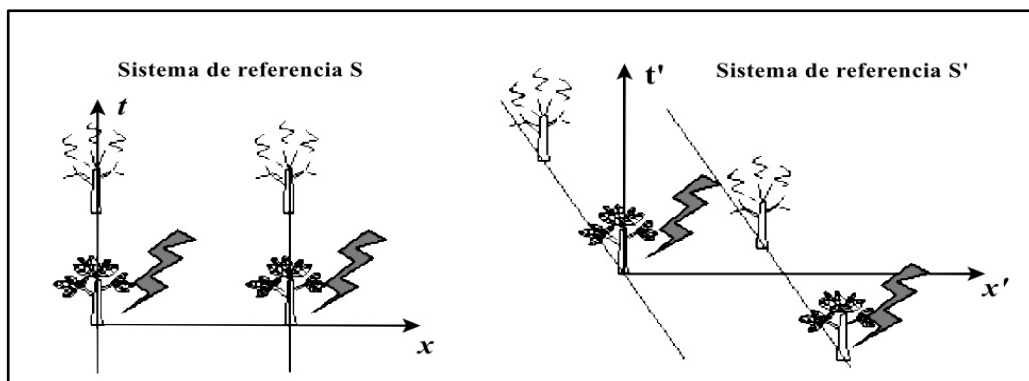
d) P17A1. Si analizas el movimiento de las naranjas mientras el autobús está moviéndose a 60km/h y de nuevo lo analizas mientras está el autobús este detenido, ¿llegarías a las mismas respuestas?

➤ Considera estar de pie en la superficie de la Tierra y haces malabares con tres naranjas. Dado que la Tierra está girando y orbitando el Sol.

P18A1. ¿Es posible analizar el movimiento de las naranjas dentro del contexto de un marco de referencia inercial?

#### Tema4:

➤ P19A1. Según la siguiente figura, dos rayos caen al mismo tiempo, un observador los ve desde **la tierra** y otro observador desde **una nave espacial**.



¿Podrías decir cuál marco de referencia es el del observador de la tierra y cuál marco de referencia es el del observador que va en la nave espacial? ¿Por qué?

- P20A1. En tu experiencia diaria, cuando dos eventos ocurren al mismo tiempo, ¿Puedes afirmar que son simultáneos?
- P21A1. Si dos sucesos son simultáneos en un marco de referencia inercial. ¿Es posible que No sean simultáneos en un marco de referencia inercial diferente?
- P22A1. Dos láseres situados sobre una nave espacial en movimiento se disparan simultáneamente. Un observador sobre la nave espacial afirma que vio los pulsos de luz de manera simultánea. ¿qué condición se necesita para que otro observador diga lo mismo?
- P23A1. ¿Es cierto que los sucesos simultáneos siempre tienen lugar en el mismo punto?

#### **Tema5:**

##### **Nota:**

**Movimiento Absoluto:** Es el que realiza un cuerpo con respecto a otro que se considera fijo.

**Movimiento Relativo:** Es el cuerpo que se mueve dentro de un objeto en movimiento.

- P24A1. Si tomamos al sol como un punto de referencia, el cual comparáramos con el movimiento de los planetas. ¿En este ejemplo el sol se podría considerar como un sistema de referencia absoluta?
- P25A1. Una persona que camina y observa un conjunto de aves volar. ¿En este ejemplo la persona se considera un sistema de referencia relativa?
- P26A1. Suponga que a unos astronautas se les paga de acuerdo con la cantidad de tiempo que pasan viajando en el espacio. Después de un largo viaje a una rapidez cercana a la velocidad de la luz. ¿A la tripulación se le debería pagar de acuerdo con un reloj con base a la tierra o con el reloj de su nave espacial?

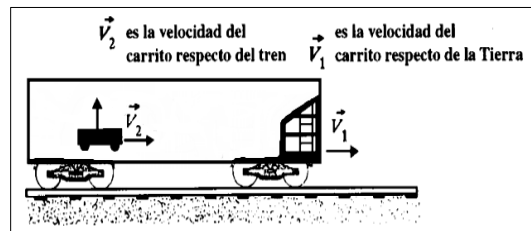
## Anexo 2

### Cuestionario A2

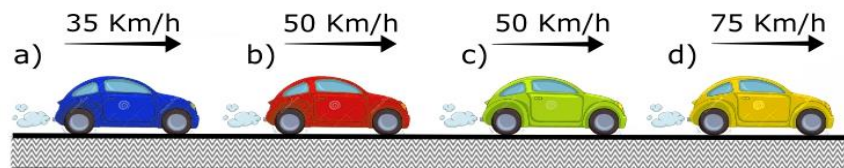
#### Universidad autónoma metropolitana

Nombre:	Fecha:
---------	--------

- P1A2. ¿Por qué sería correcto considerar un vehículo que lleva una velocidad constante como sistema de referencia sin embargo sería incorrecto considerarlo como tal mientras está frenando?
- P2A2. ¿Puede en un espacio no muy extenso, una sala de clases, por ejemplo, haber más de un sistema de referencia?
- P3A2. ¿Qué consideraciones debe tener un piloto para que, al lanzar una bomba, dé en el blanco?

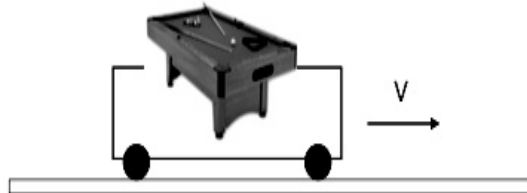


- P4A2. Si una pelota es lanzada hacia arriba desde el carrito, ¿cuál es su trayectoria desde los siguientes puntos de vista?
  - a) ¿Para un observador en el carrito?
  - b) ¿Para un observador en el vagón de tren?
  - c) ¿Para un observador fijo en un punto de la superficie terrestre?
- P5A2. Hay cuatro automóviles en una carretera, a, b, c y d que se mueven como se señala en la figura que sigue.



Si las velocidades indicadas son respecto a la carretera, y al conductor del auto “c” le preguntaran: ¿cuáles son las velocidades de los demás automóviles?, respecto a él, ¿qué respondería?

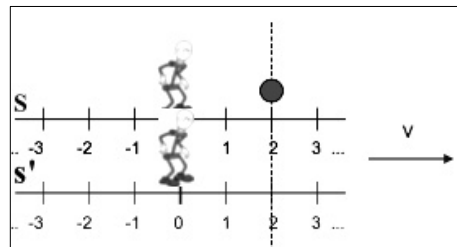
- P6A2. Cuando estoy alineando mi tiro, el tren se ralentiza y se acerca a la estación. No he tocado la bola blanca. ¿Qué sucede con la bola?



- a) Gira al frente del tren
- b) Gira a la parte posterior del tren
- c) Permanece inmóvil

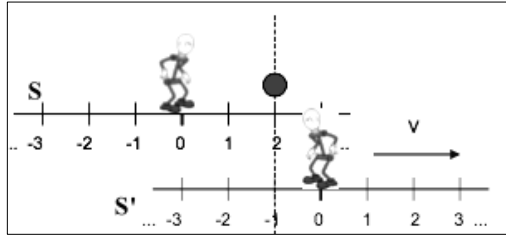
¿Sigue siendo un marco de referencia inercial?

- P7A2. En el tiempo  $t = 0$ , los dos marcos coinciden. Una bola está en reposo en el marco S. Su posición es:



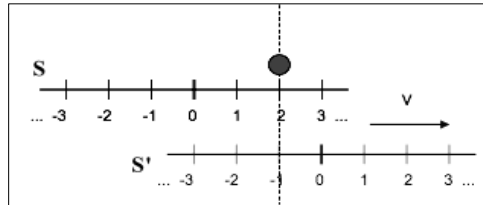
- a)  $x=3\text{m}$  en S,  $x'=3\text{m}$  en S'
- b)  $x=0\text{m}$  en S,  $x'=0\text{m}$  en S'
- c)  $x=2\text{m}$  en S,  $x'=2\text{m}$  en S'

- P8A2. El marco S 'se mueve hacia la derecha (relativo a S) en  $v = 1\text{m/s}$ . En el instante  $t = 3$  Seg., la posición de la bola es:



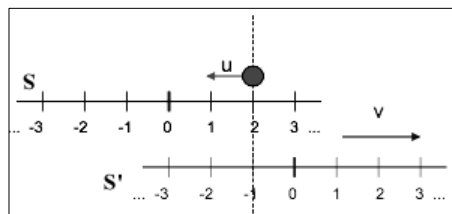
- a)  $x=3\text{m}$  en S,  $x'=2\text{m}$  en S'
- b)  $x=0\text{m}$  en S,  $x'=0\text{m}$  en S'
- c)  $x=2\text{m}$  en S,  $x'=-1\text{m}$  en S'

➤ P9A2. En el tiempo 0, la pelota estaba en  $x = x'$ . En el tiempo  $t$  más tarde, la pelota está todavía en  $x$  en S, pero ¿dónde está en S' al mismo tiempo  $t$ ?



- a)  $x' = x$
- b)  $x' = x + vt$
- c)  $x' = x - vt$

➤ P10A2. Ahora la bola se mueve también en S, con velocidad  $u = -1$  m/s. ¿Es la pelota más rápida o más lenta, como se mide en el cuadro S'?



- a) rápida
- b) Lenta
- c) misma velocidad



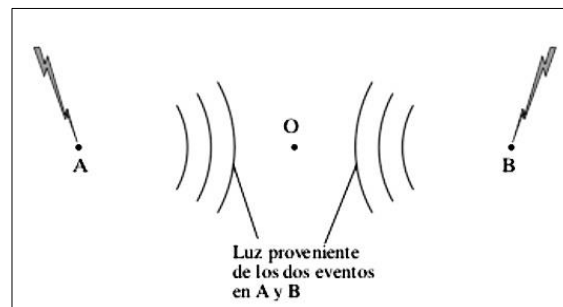
## Anexo 3

### Cuestionario A3

#### UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

<b>Nombre:</b>	<b>Fecha:</b>
----------------	---------------

- Estas con dos amigos A y B que se encuentran frente a frente, cada uno ubicado en un extremo de una calle y en un instante determinado, les pides que te tomen una foto con destello (considera que el tiempo de reacción de A y B son iguales).



**P1A3. ¿O percibe la luz de los dos destellos al mismo tiempo?**

- Si, O percibe la luz de los destellos al mismo tiempo
- No, O percibe la luz del destello de A primero
- No, O percibe la luz del destello de B primero
- No sabe

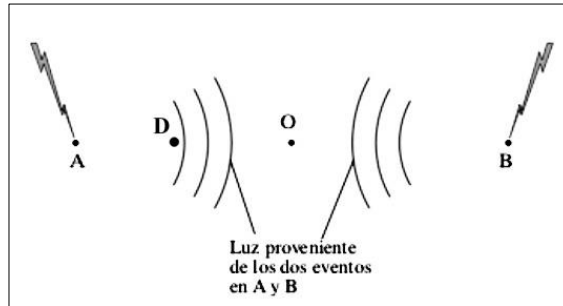
Justificación:

**P2A3. En el marco de referencia de O, ¿Las luces de los destellos son emitidas al mismo tiempo?**

- Si, ambas son emitidas al mismo tiempo
- No, la luz del destello de A se emite primero
- No, La luz del destello de B se emite primero
- No sabe

Justificación:

- En la calle, D permanece inmóvil en el punto medio de la distancia entre A y O.



**P3A3 ¿D percibe la luz de ambos al mismo tiempo?**

- a. Si, el percibe la luz de ambos destellos al mismo tiempo
- b. No, el percibe la luz del destello de A primero
- c. No, el percibe la luz del destello de B primero
- d. No sabe

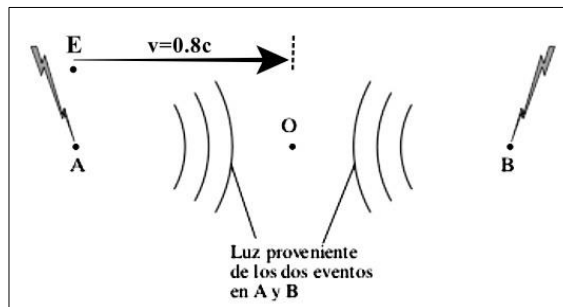
Justificación:

**P4A3. En el sistema de referencia de D, ¿Las luces de los destellos son emitidas al mismo tiempo?**

- a. Si, ambas son emitidas al mismo tiempo
- b. No, la luz del destello de A se emite primero
- c. No, la luz del destello de B se emite primero
- d. No sabe

Justificación:

- E atraviesa la calle en una moto, a una velocidad constante de  $0,8c$  con respecto a la tierra. E avanza desde A hacia B y alcanza a C en el instante en que C percibe las luces emitidas por los dos destellos.



**P5A3. ¿E percibe las luces de ambos destellos al mismo tiempo?**

- c. Si, el percibe la luz de ambos destellos al mismo tiempo
- d. No, el percibe la luz del destello de A primero
- e. No, el percibe la luz del destello de B primero

f. No sabe

Justificación:

**P6A3. En el marco de referencia de E, ¿Las luces de los destellos son emitidas al mismo tiempo?**

c. Si, ambas son emitidas al mismo tiempo

d. No, la luz del destello de A se emite primero

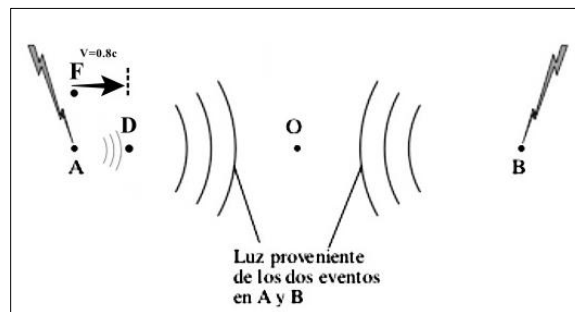
e. No, la luz del destello de B se emite primero

f. No sabe

Justificación:

- F también cruza la calle en una moto a la misma velocidad y en el mismo sentido que E.

F alcanza a D en el momento en que este percibe la luz del destello de A.



**P7A3. ¿F percibe las luces de ambos destellos al mismo tiempo?**

a. Si, F percibe la luz de los destellos al mismo tiempo

b. No, F percibe la luz del destello de A primero

c. No, F percibe la luz del destello de B primero

d. No sabe

Justificación:

**P8A3. En el marco de referencia de F, ¿Las luces de los destellos son emitidas al mismo tiempo?**

a. Si, ambas son emitidas al mismo tiempo

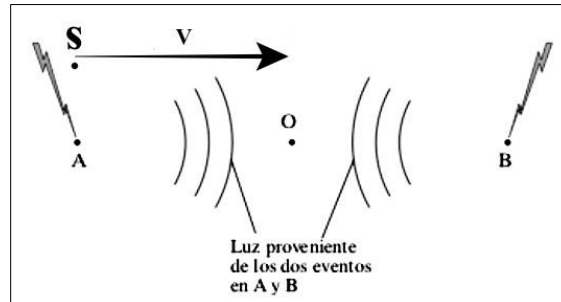
b. No, la luz del destello de A se emite primero

c. No, la luz del destello de B se emite primero

d. No sabe

Justificación:

- P9A3. Si dos eventos son simultáneos para un observador en un marco de referencia.



¿también son simultáneos para otro observador que se mueve con respecto al primero?

## Anexo 4

### Cuestionario A4

#### UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Nombre:	Fecha:
---------	--------

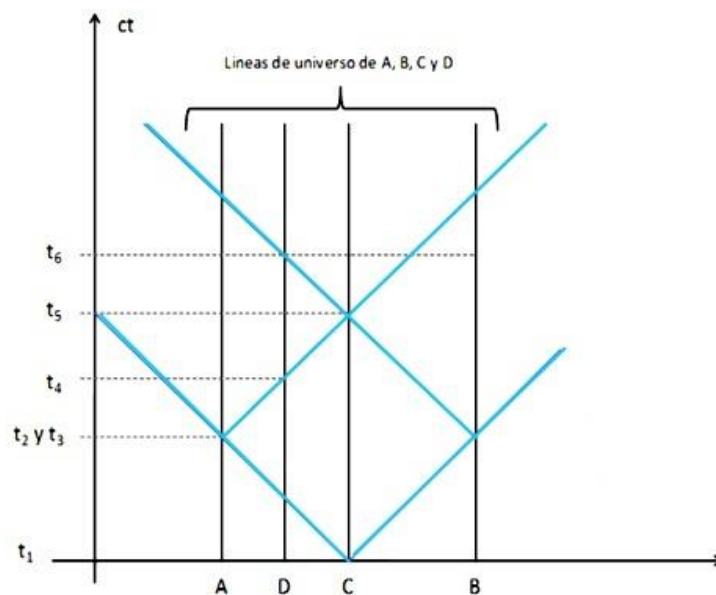


Diagrama de espacio-tiempo de la situación “de la toma de foto” en el sistema de referencia de la calle.

Un diagrama de espacio y tiempo permite identificar el instante y la posición donde ocurren los eventos. El movimiento de los observadores y de los fotones se representa con líneas rectas llamadas “líneas de universo”.

En la primera gráfica, la escena se estudia en el sistema de referencia del evento. En este sistema de referencia, los observadores A, B, C y D son inmóviles. Su línea de universo es una línea recta vertical pues su coordenada espacial no cambia en el tiempo. Las líneas azules inclinadas representan las líneas de universo de los fotones. Al escoger ct en lugar de t en el eje de las ordenadas y unidades idénticas para cada uno de los ejes, la línea de universo de

un fotón se representa mediante una línea recta inclinada  $45^\circ$  con respecto al eje de las abscisas.

**P1A4\_1. ¿En que instante se activan A y B el destello simultáneamente?**

- a.  $t_1=t_2$
- b.  $t_2=t_4$
- c.  $t_3=t_5$
- d.  $t_2=t_3$

**P1A4\_2. ¿En que instante C recibe los fotones de ambos destellos?**

- a.  $t_1$
- b.  $t_2$
- c.  $t_3$
- d.  $t_5$

**P1A4\_3. ¿D recibe los fotones en el instante  $t_4$  emitidos por?**

- a. A
- b. C
- c. B
- d. E

**P1A4\_4. ¿D recibe los fotones emitido por B en el instante?**

- a.  $t_3$
- b.  $t_2$
- c.  $t_5$
- d.  $t_6$

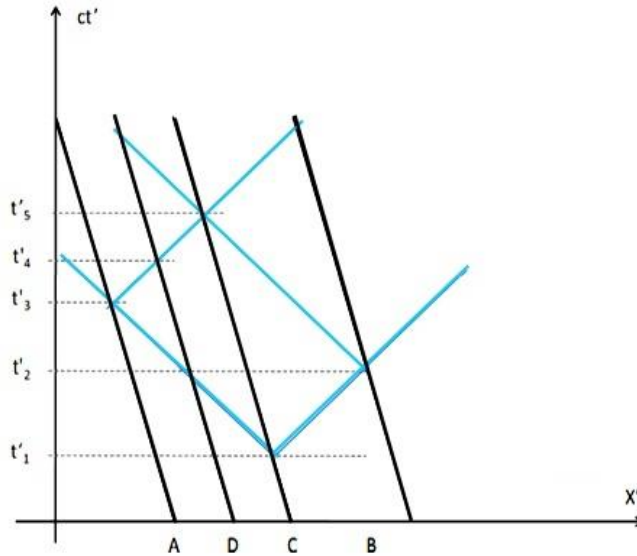


Diagrama de espacio-tiempo de la situación “la toma de foto” en el sistema de referencia de las motos. En este diagrama, las distancias entre A, B, C y D no son las mismas que en el diagrama anterior por razones de contracción de las longitudes.

En este sistema de referencia, los observadores A, B, C y D ya no son inmóviles, sino que son animados de un movimiento en el sentido del espacio decrecientes. Nos interesamos ahora en los mismos eventos D, E, F como correspondientes de los eventos en el sistema de referencia anterior. Las líneas azules representan las líneas de universo de los fotones, las líneas negras representan las líneas de universo de A, B, C y D en el sistema de referencia de E y F. Gracias a esta herramienta visualizamos la consecuencia del postulado de Einstein en cuanto a la invariancia de la velocidad de la luz: su valor (escalar) no cambia por cambio de sistema de referencia inercial. Gráficamente, las líneas de universo de los fotones son idénticas en ambos diagramas, cual sea el sistema de referencia considerado.

**P2A4\_1. ¿En que instante se activan A y B el destello simultáneamente?**

- e.  $t_1=t_2$
- f.  $t_2=t_4$
- g.  $t_3=t_5$
- h.  $t_2=t_3$

**P2A4\_2. ¿en que instante C recibe los fotones de ambos destellos?**

- e.  $t_1$

f. t2

g. t3

h. t5

**P2A4\_3. ¿D recibe los fotones en el instante t4 emitidos por?**

e. A

f. C

g. B

h. E

**P2A4\_4. ¿D recibe los fotones emitido por B en el instante?**

e. t3

f. t2

g. t5

h. t6



## Anexo 5

### Cuestionario A5

#### UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Nombre:	Fecha:
---------	--------

P1A5. La luz de una señal procedente del centro de una barra en reposo de longitud  $L_0$ , alcanza sus extremos simultáneamente. Calcular el tiempo, medido en un reloj en reposo, si la barra se mueve con velocidad  $V$  según su eje.

Sea  $L$  la longitud de la barra en el sistema en reposo. La distancia entre la señal luminosa emitida y el extremo izquierdo de la barra disminuye una distancia  $c + V$  en cada segundo. El tiempo que tarda en llegar al extremo izquierdo es

$$t_{iz} = \frac{L}{2(c+V)}$$

desde el momento del destello. La distancia entre la señal emitida y el extremo derecho de la barra, disminuye  $c - V$  en cada segundo. El tiempo que tarda en llegar al extremo derecho es

$$t_d = \frac{L}{2(c-V)}$$

El tiempo de retraso es (la señal alcanza el extremo izquierdo antes)

$$\Delta t = t_d - t_{iz} = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{c-V} - \frac{1}{c+V} \right) = \frac{LV}{c^2 - V^2}$$

Debido a la contracción de la longitud, para el sistema en movimiento, la longitud de la barra es

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0$$

con lo cual, el retraso temporal en la recepción de la onda luminosa es

$$\Delta t = \frac{1}{\gamma} \frac{L_0 V}{c^2 - V^2} \neq 0$$

¿Al ver la solución del problema a que conclusión llegarías?

P2A5. Dos naves viajan con velocidades opuestas sobre una estación espacial. Son

**testigos de dos acontecimientos A y B, que conforme a las observaciones de la nave 1, se producen durante el tiempo  $t$ , y conforme a las observaciones de la nave 2, durante el tiempo  $t$  pero en sentido inverso (primero B luego A). Calcular el tiempo y el lugar de los sucesos, según el sistema de referencia de la estación espacial y comprobar si A y B tienen relación de causalidad.**

Supongamos que en el sistema de referencia de la estación espacial, el suceso B tuvo lugar a una distancia  $x_0$  del suceso A, después de un tiempo  $t_0$ . Para ello, utilizando la transformación de Lorentz entre la estación espacial y las dos naves, se debe cumplir

$$\text{nave 1: } t = \gamma \left( t_0 - \frac{Vx_0}{c^2} \right)$$

$$\text{nave 2: } -t = \gamma \left( t_0 + \frac{Vx_0}{c^2} \right)$$

De las dos ecuaciones anteriores despejamos el tiempo medido en el sistema de referencia de la estación espacial

$$t_0 = 0$$

y la posición del suceso B en este mismo sistema de referencia

$$x_0 = -\frac{ct^2}{\gamma V}$$

**¿Al ver la solución del problema a que conclusión llegarías?**

- Una astronave de longitud  $L_0$  en su sistema de referencia, parte de la Tierra con velocidad  $V$ . Más tarde, se emite tras ella una señal luminosa que llega a la cola del cohete en el instante, según los relojes de la astronave y de la Tierra. Determinar cuándo llega la señal a la cabeza del cohete, según los relojes del mismo y según los relojes de la Tierra. La señal se refleja en la cabeza del cohete y se dirige a la cola del cohete. Determinar cuándo alcanza la cola del cohete según los relojes de la nave y de la Tierra.
- Respecto al sistema ligado al cohete, la distancia que debe recorrer para llegar a la cabeza es  $L_0$ , manteniéndose el cohete en reposo respecto a su propio sistema de coordenadas. El tiempo necesario es  $\tau = \frac{L_0}{c}$ . Además, después de reflejarse, el tiempo  $c$  que tarda la señal en volver a la cola es el mismo  $\tau$ .
- Respecto al sistema de la Tierra, el cohete tiene una longitud contraída  $L = L_0 / \gamma$ . Cuando la señal se dirige hacia la cabeza del cohete su velocidad es  $c$  y la cabeza se aleja de la señal con velocidad  $V$ . Por tanto, la velocidad relativa entre la señal y la cabeza del cohete es  $c - V$ . El tiempo que tarda en llegar a la cabeza, medido por la Tierra, será

$$t_1 = \frac{L}{c - V} = \frac{L_0}{\gamma (c - V)}$$

- y de forma análoga para el viaje de la cabeza a la cola, la velocidad relativa es  $c + V$ , y el tiempo empleado es

$$t_2 = \frac{L}{c + V} = \frac{L_0}{\gamma (c + V)}$$

¿Al ver la solución del problema a que conclusión llegarías?