



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

**Niveles de razonamiento probabilístico frente a una tarea binomial
de estudiantes de secundaria**

Tesis que presenta

Blanca Flores Valente

Para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias en la

Especialidad de Matemática Educativa

Director de la Tesis: Dr. Ernesto A. Sánchez Sánchez

México, Distrito Federal.

20 de junio de 2014

ÍNDICE

Índice.....	i
Lista de Figuras	iv
Lista de Tablas	v
Resumen.....	- 1 -
1.- Capitulo 1 Introducción y planteamiento del problema.....	- 3 -
2.- Capitulo 2 Antecedentes	- 6 -
2.1. Estudios sobre aleatoriedad.....	- 6 -
2.2. Estudios sobre espacio muestral	- 7 -
2.3. Enfoques clásico y frecuencial de probabilidad.....	- 8 -
2.4. Variación y variabilidad.....	- 11 -
2.5. Variable aleatoria y distribución	- 14 -
2.6. Estudios sobre distribución binomial	- 15 -
3.- Capitulo 3 Marco conceptual.....	- 17 -
3.1. Introducción	- 17 -
3.2. Contenido	- 18 -
3.3. Aspectos cognitivos	- 22 -
3.4. Enseñanza.....	- 25 -
3.5. Taxonomía SOLO	- 26 -
3.6. Probability Explorer	- 30 -
4.- Capitulo 4 Metodología	- 34 -
4.1. Introducción	- 34 -
4.2. Participantes	- 35 -
4.3. Fases de investigación e instrumentos	- 35 -
4.3.1. Fase 1. Actividad I: Presentación del cuestionario diagnostico “Las tres monedas”	- 36 -
4.3.2. Fase 2. Actividad II: Experimentación física	- 37 -
4.3.3. Fase 3. Actividad III: Experimentación con el software Probability Explorer	- 37 -
4.3.4. Fase 4. Actividad IV: Aplicación del Post – Test	- 37 -
4.4. Objetivos y respuestas esperadas de las preguntas del instrumento utilizado	- 38 -
5.- Capitulo 5: Análisis de resultados del Pre – Test	- 46 -

5.1. Introducción	- 46 -
5.2. Resultados del Pre – Test	- 47 -
5.2.1. Análisis de las respuestas a la pregunta 1	- 47 -
5.2.1.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 1	- 48 -
5.2.2. Análisis de las respuestas a la pregunta 2	- 54 -
5.2.2.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 2	- 55 -
5.2.3. Análisis de las respuestas a la pregunta 3	- 61 -
5.2.3.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 3	- 62 -
5.2.4. Análisis de las respuestas a la pregunta 4	- 67 -
5.2.4.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 4	- 68 -
5.2.5. Análisis de las respuestas a la pregunta 5	- 73 -
5.2.5.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 5	- 74 -
5.2.6. Análisis de las respuestas a la pregunta 6	- 77 -
5.2.6.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 6	- 78 -
5.2.7. Análisis de las respuestas a la pregunta 7	- 80 -
5.2.7.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 7	- 81 -
5.2.8. Análisis de las respuestas a la pregunta 8	- 88 -
5.2.8.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 8	- 89 -
5.2.9. Análisis de las respuestas a la pregunta 9	- 93 -
5.2.9.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 9	- 94 -
5.2.10. Análisis de las respuestas a la pregunta 10	- 99 -
5.2.10.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 10	- 100 -
5.2.11. Análisis de las respuestas a la pregunta 11	- 103 -
5.2.11.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 11	- 104 -
5.2.12. Análisis de las respuestas a la pregunta 12	- 110 -
5.2.12.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 12	- 111 -
5.2.13. Análisis de las respuestas a la pregunta 13	- 113 -
5.2.13.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 13	- 114 -
6.- Capitulo 6: Análisis de resultados del Post – Test.....	- 121 -
6.1. Resultados del post-test.....	- 121 -

6.1.1. Análisis de las respuestas a la pregunta 1	121 -
6.1.1.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 1	122 -
6.1.2. Análisis de las respuestas a la pregunta 2	126 -
6.1.2.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 2	128 -
6.1.3. Análisis de las respuestas a la pregunta 3	133 -
6.1.3.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 3	134 -
6.1.4. Análisis de las respuestas a la pregunta 4	140 -
6.1.4.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 4	141 -
6.1.5. Análisis de las respuestas a la pregunta 5	147 -
6.1.5.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 5	148 -
6.1.6. Análisis de las respuestas a la pregunta 6	153 -
6.1.6.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 6	153 -
6.1.7. Análisis de las respuestas a la pregunta 7	158 -
6.1.7.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 7	160 -
6.1.8. Análisis de las respuestas a la pregunta 8	170 -
6.1.8.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 8	170 -
6.1.9. Análisis de las respuestas a la pregunta 9	176 -
6.1.9.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 9	177 -
6.1.10. Análisis de las respuestas a la pregunta 10	183 -
6.1.10.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 10	184 -
6.1.11. Análisis de las respuestas a la pregunta 11	187 -
6.1.11.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 11	189 -
6.1.12. Análisis de las respuestas a la pregunta 12	194 -
6.1.12.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 12	195 -
6.1.13. Análisis de las respuestas a la pregunta 13	199 -
6.1.13.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 13	199 -
7.- Capítulo 7: Discusión y conclusiones	207 -
7.1. Limitaciones del estudio	213 -
7.2. Aporte de la investigación.....	213 -
7.3. Perspectivas a futuro para la investigación.....	214 -

Referencias bibliográficas	- 216 -
----------------------------------	---------

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.3.1 Modelo bi-direccional (Stohl, Rider y Tarr, 2004).....	- 9 -
Figura 2.3.2 Marco conceptual de lo concreto a lo abstracto (Ireland y Watson, 2009)°	- 9 -
Figura 2.3.3 Modelo tentativo para la conexión de las distribuciones experimental y teórica (Prodromou, 2012)	- 10 -
Figura 2.4.1 Posibles gráficas del problema de 50 giros de un apuntador.....	- 13 -
Figura 3.5.1 Modos y formas de conocimiento.....	- 29 -
Figura 3.6.1 Funciones icónica de Probability Explorer 2.0.....	- 31 -
Figura 3.6.2 Resultados de un experimento de 500 lanzamientos de tres monedas.	- 32 -
Figura 5.2.1 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 1	- 53 -
Figura 5.2.2 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 2.....	- 60 -
Figura 5.2.3 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 3.....	- 67 -
Figura 5.2.4 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 4.....	- 73 -
Figura 5.2.5 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 5.....	- 76 -
Figura 5.2.6 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 6.....	- 79 -
Figura 5.2.7 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 7.....	- 88 -
Figura 5.2.8 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 8.....	- 92 -
Figura 5.2.9 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 9.....	- 99 -
Figura 5.2.10 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 10.....	- 102 -
Figura 5.2.11 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 11.....	- 109 -
Figura 5.2.12 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 12.....	- 113 -
Figura 5.2.13 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 13.....	- 120 -
Figura 6.1.1 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 1.....	- 126 -
Figura 6.1.2 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 2.....	- 132 -
Figura 6.1.3 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 3.....	- 139 -
Figura 6.1.4 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 4.....	- 147 -
Figura 6.1.5 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 5.....	- 152 -
Figura 6.1.6 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 6.....	- 158 -

Figura 6.1.7 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 7.....	- 169 -
Figura 6.1.8 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 8.....	- 175 -
Figura 6.1.9 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 9.....	- 182 -
Figura 6.1.10 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 10.....	- 186 -
Figura 6.1.11 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 11.....	- 194 -
Figura 6.1.12 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 12.....	- 198 -
Figura 6.1.13 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 13.....	- 206 -

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.5.1 Descripción de los modos y niveles en la Taxonomía SOLO.....	- 27 -
Tabla 5.1.1 Clasificación del nivel estructural de la Taxonomía SOLO	- 46 -
Tabla 5.2.1 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 1.....	- 52 -
Tabla 5.2.2 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 2.....	- 59 -
Tabla 5.2.3 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 3.....	- 66 -
Tabla 5.2.4 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 4.....	- 72 -
Tabla 5.2.5 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 5.....	- 76 -
Tabla 5.2.6 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 6.....	- 79 -
Tabla 5.2.7 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 7.....	- 87 -
Tabla 5.2.8 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 8.....	- 91 -
Tabla 5.2.9 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 9.....	- 98 -

Tabla 5.2.10 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 10.....	- 101 -
Tabla 5.2.11 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 11.....	- 109 -
Tabla 5.2.12 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 12.....	- 112 -
Tabla 5.2.13 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 13.....	- 119 -
Tabla 6.1.1 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 1.....	- 125 -
Tabla 6.1.2 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 2.....	- 131 -
Tabla 6.1.3 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 3.....	- 138 -
Tabla 6.1.4 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 4.....	- 146 -
Tabla 6.1.5 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 5.....	- 151 -
Tabla 6.1.6 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 6.....	- 156 -
Tabla 6.1.7 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 7.....	- 168 -
Tabla 6.1.8 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 8.....	- 173 -
Tabla 6.1.9 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 9.....	- 181 -
Tabla 6.1.10 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 10.....	- 185 -
Tabla 6.1.11 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 11.....	- 192 -

Tabla 6.1.12 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 12.....	- 197 -
Tabla 6.1.13 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 13.....	- 205 -

RESUMEN

Este trabajo se refiere a cuatro conceptos importantes de probabilidad: variable aleatoria, espacio muestral, frecuencias y distribución, a través de una situación elemental relacionada con la variable aleatoria “el número de águilas” que resultan al lanzar tres monedas ($n = 3$, $p = \frac{1}{2}$). Se realizó con 69 estudiantes de segundo grado de secundaria (13-14 años) quienes no habían llevado previamente instrucción sobre probabilidad. El objetivo consistió en explorar la manera en que los estudiantes razonan al responder 13 preguntas referentes a la situación mencionada.

El desarrollo de la actividad tuvo 4 momentos, 1) una primera aplicación del cuestionario, 2) actividades concretas de lanzamiento de monedas y observación de los resultados de la variable, 3) actividades virtuales con Probability Explorer, de lanzamiento de monedas y observación de la variable de interés y 4) una segunda aplicación del cuestionario. Los datos principales que se analizan son las respuestas de los estudiantes al cuestionario; estas se clasificaron de acuerdo a su nivel de complejidad estructural con base en la Taxonomía SOLO. Como resultado se obtuvieron jerarquías del razonamiento para cada una de las preguntas del cuestionario.

Se informa que hubo un progreso en el razonamiento de los estudiantes gracias a los tres tipos de actividades que se realizaron: lápiz y papel, físicas y computacionales. En efecto, hubo desplazamientos, al pasar del pre-test al post-test, de las frecuencias concentradas en los nivel Preestructural y Uniestructural en el pre-test hacia los niveles Multiestructural y Relacional en el post-test. Con base en estos resultados se afirma que es posible y productivo que los estudiantes del último grado de secundaria trabajen las nociones de variable aleatoria y distribución de probabilidades a un nivel elemental y de manera informal.

ABSTRACT

This work focuses on four important concepts of probability: random variable, sample space, frequency and distribution, through an elementary situation related to the random variable "number of heads" that turn out when throwing three coins ($n = 3$, $p = \frac{1}{2}$). The experiment was conducted with 69 students of 8th year (13-14 years), who had not previously taken probability courses. The objective was to explore the way students answer 13 questions related to the previous situation.

The activity was carried out in four steps: 1) a first application of the questionnaire, 2) the actual tossing of the coin and observing the results of the variable, 3) virtual activities in Explorer Probability of coin tossing and observation of the variable of interest, and 4) a second application of the questionnaire. The main data analyzed were the student responses to the questionnaire; these were classified according to their level of structural complexity based on SOLO Taxonomy. As a result, reasoning hierarchies for each of the survey questions were obtained.

It is reported that there was an improvement in the students' reasoning on account of the three types of activities performed: pencil and paper, physical and computational. Indeed, there were shifts, moving from pre-test to post-test, from the frequencies, which concentrated in Prestructural and Unistructural level in the pre-test to the Multistructural and Relational levels in the post-test. Based on these results it is stated that it is possible and productive that students in the last grade of middle school work the notions of random variable and probability distribution at an elementary level and informally.

CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El azar y la incertidumbre están presentes en el entorno y las experiencias que viven las personas; modelos y cálculos de probabilidad se presentan en diferentes áreas del conocimiento, en procesos técnicos y problemas de la vida diaria. Sánchez y Landín (2014) menciona los siguientes ámbitos: prevención y transmisión de enfermedades, salud y diagnósticos médicos, accidentes y seguros, criminalidad y protección, loterías nacionales y costo de billetes, congestionamiento de tráfico y transporte público, hábitos de vestir y predicciones del clima, empleo y escolaridad, inversiones y negocios, desarrollo y crisis económicas, garantías y calidad de productos, etc.

Las personas aunque no se lo propongan hacen razonamientos que se relacionan con la probabilidad, no siempre los más convenientes u óptimos, pero suficientes para ciertos fines. Aunque no hayan estudiado los conceptos de esta disciplina, realizan inconscientemente inferencias cuando reaccionan ante situaciones que contienen cierta incertidumbre, tomando las decisiones que creen pertinentes, por ejemplo, cuando calculan que pueden pasar una calle con mucho tráfico sin que sean alcanzados por un auto que viene a cierta distancia. También en la manera en que la gente habla se reflejan razonamientos relacionadas con la probabilidad, por ejemplo, cuando usan términos como “quizá”, “puede ser”, “no es muy seguro que”, etc. Todas las personas sacan conclusiones y, a veces, realizan actividades con base en supuestos de los cuales no están totalmente seguros. A pesar de lo anterior, aprender probabilidad en la escuela es una gran dificultad, como comenta Greer y Mukhopadhyay (2005, p. 302) “resulta curioso que dada la penetración de la incertidumbre en nuestras vidas, no desarrollemos adecuadas intuiciones probabilísticas”

En México se comienza a enseñar algo de probabilidad en la secundaria (SEP, 2009), y en el nivel bachillerato se estudia formalmente un curso de probabilidad y estadística, en algunos sistemas de manera obligatoria y en otros es una materia optativa. En cualquier caso, un gran número de estudiantes pasan por tales cursos. Los temas principales que se estudian a lo largo de la secundaria en probabilidad son: Espacio muestral, Enfoques clásico y frecuencial de probabilidad, Regla de la suma (para eventos mutuamente excluyentes), Independencia y regla del producto, Simulación (SEP, 2009). Teniendo en

cuenta currículos de secundaria de tres países (Australia, Reino Unido y Estados Unidos) Jones et al. (2007, p. 914) comentan: "... se hace referencia al hecho de que 'los estudiantes tienen muchas concepciones erróneas e intuiciones pobres acerca de situaciones probabilísticas' (NCTM, 1989, p. 110), y entonces los maestros deben animar a sus estudiantes a hacer conjeturas (basadas sobre sus intuiciones) y contrastar esas conjeturas mediante experimentación".

Por otro lado, Batanero y Sánchez (2005) enumeran algunos de los conceptos que suelen estudiarse en el bachillerato:

En el bachillerato, se espera que los estudiantes determinen la verosimilitud de un evento mediante la construcción de distribuciones de probabilidad para espacios muestrales de una dimensión, calculen e interpreten los valores esperados de variables aleatorias en casos simples y describan espacios muestrales de experimentos compuestos. También se espera que aprendan a identificar eventos mutuamente excluyentes y eventos conjuntos, que entiendan los conceptos de probabilidad condicional e independencia estocástica. Se espera que recurran a sus conocimientos sobre las combinaciones, permutaciones y principios combinatorios para calcular esas diferentes probabilidades (p. 241).

Por su parte, Jones et al. (2007) comenta:

Los principales desarrollos conceptuales nuevos en este nivel [bachillerato] son la inclusión de variable aleatoria y distribución de probabilidad. Todos los currículos [revisados: Australia, Inglaterra, Estados Unidos] se enfocan sobre la noción de distribución de probabilidad y también consideran algunas distribuciones de probabilidad específicas tal como la distribución normal (p. 914-915).

La importancia de la variable aleatoria y distribución binomial en la red conceptual de estocásticos y la inclusión de tal tema en el currículo del nivel medio superior y universitario, hacen pertinente ampliar las investigaciones sobre el tema. Un problema es que por la ubicación y el tipo de ejemplos que se ofrecen se deduce que el tratamiento de los temas de variable aleatoria y distribución se enfocan desde una perspectiva formal, sin recomendaciones de un trabajo previo de sensibilización mediante el cual los estudiantes se familiaricen con al menos algunos fenómenos que van a ser modelados con dichos

conceptos y que establezcan un puente entre lo que el estudiante ya sabe y estos nuevos conceptos. En el presente estudio consideramos que es posible realizar actividades que prefiguren los conceptos de variable aleatoria y distribución desde la secundaria en el contexto de los temas curriculares que son propios de este nivel de estudios. Si así fuera, se podrían diseñar estrategias de enseñanza desde la secundaria para que en el bachillerato los estudiantes fueran capaces de entender tales conceptos al nivel de abstracción que allá se les exige. Entonces la pregunta es: ¿Es posible tratar los temas de variable aleatoria y distribución desde una perspectiva informal? ¿Qué pueden hacer los estudiantes de secundaria en este tema? En este trabajo, se ofrecen respuestas a estas preguntas.

CAPITULO 2 ANTECEDENTES

El contenido probabilístico que se explora en este estudio se relaciona con la noción de distribución binomial en su forma más elemental ($n = 3$, $p = 1/2$), pero la actividad que se utiliza como instrumento para obtener datos se relaciona con otras nociones, en especial: aleatoriedad, espacio muestral, definición clásica y enfoque frecuencial de la probabilidad, variabilidad y variación, variable aleatoria y distribución. En este capítulo se revisan brevemente estudios relacionados con cada uno de esos temas.

2.1. Estudios sobre aleatoriedad

En lo que respecta al concepto de aleatoriedad, Fischbein (1975) propone que la intuición primaria del azar, la distinción entre fenómeno determinista y aleatorio sin instrucción previa, está implícita en la conducta diaria de cada estudiante, incluyendo a aquellos que están en un grado básico de estudio. Además, considera que el razonamiento que tienen los estudiantes está estrechamente relacionado con las tradiciones educativas y culturales a los que este expuesto, lo que origina en explicaciones deterministas univocas y poco espontaneas. Metz (1998) afirma que las tres principales dificultades que presentan los estudiantes con respecto a los conceptos de azar y aleatoriedad son: 1) fallos al interpretar los patrones resultantes de muchas repeticiones de un suceso; 2) la ocurrencia de que una persona o dispositivo puede controlar un suceso y; 3) la creencia de que algún tipo de orden o propósito subyace a los sucesos. Batanero, Serrano y Green (1998) afirman que el concepto de aleatoriedad es el punto primordial en el estudio de la probabilidad, ya que es esencial que el estudiante tenga una correcta comprensión de esta idea para que pueda progresar en el campo del cálculo de probabilidades. Batanero y Serrano (1995) indican que el análisis epistemológico y la investigación psicológica de la aleatoriedad, muestran la complejidad para los estudiantes en el significado del concepto.

De acuerdo con Piaget e Inhelder (1951), la comprensión del azar por parte del estudiante es complementaria a la de la relación causa-efecto. Los niños conciben el azar como resultado de la combinación de una serie de causas independientes que producen un resultado inesperado; Piaget e Inhelder mencionan que para poder concebir las distintas posibilidades existentes en estas situaciones, se requiere un razonamiento combinatorio.

Esto implica que la idea de azar no puede ser comprendida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio del niño, en la etapa de las operaciones formales (estudiantes de nivel básico, sección secundaria). El término de aleatoriedad puede verse como una agregación de conceptos que incluyen el de experimento, suceso, espacio muestral, probabilidad, etc. (Konold, Lohmeier, Pollatsek y Well, 1991); es por esto que la aleatoriedad la podemos percibir como un modelo abstracto que se puede aplicar a situaciones muy variadas.

2.2. Estudios sobre espacio muestral

El *espacio muestral* es otro concepto que se toca en este estudio; de acuerdo a Jones et al. (2007, p. 920) “es un concepto fundamental en el proceso de matematización de los fenómenos aleatorios”. De los estudios sobre el espacio muestral, nos ha llamado la atención un resultado de Jones, Langrall, Thornton, y Mogill (1999), en el que niños de 8-9 años cuando se les pide que describan todos los posibles resultados de una experiencia simple, establecen como espacio muestral *un sólo resultado* o eliminan algunos porque han ocurrido en otras ocasiones; como se ve en este trabajo, es curioso que la conducta de responder con un solo resultado se mantenga con estudiantes con casi el doble de edad de los sujetos de Jones.

El concepto de espacio muestral está estrechamente ligado al razonamiento combinatorio, es por ello que si el estudiante no tiene aún dicho razonamiento, o el orden necesario para obtenerlo, resulta complejo determinar un espacio muestral de un fenómeno dado, como lo indican Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997); sin embargo, existe otro problema, el poco interés por tratar dicho tema en los currículos escolares, según English (2005). Al respecto, Shaughnessy (2003) menciona la importancia de inducir a los estudiantes a la obtención de espacios muestrales en experimentos aleatorios. Por otra parte, Hernández, Ávila, y Sánchez (2005) consideran que es necesario un estudio del proceso de formación del espacio muestral aun en estudiantes de nivel bachillerato, ya que muchos de ellos tienen un conocimiento débil del concepto.

Shaughnessy y Ciancetta (2002) consideran que hay una conexión entre el concepto de espacio muestral en probabilidad y la percepción de la variación esperada en los valores de una variable estadística. Esta reflexión surgió a partir de las observaciones realizadas con estudiantes de la siguiente de probabilidad: Se tienen dos apuntadores, cada uno sobre un disco con una mitad blanca y la otra mitad negra se giran ambos apuntadores y se observa el color sobre el que se detienen. Se les dijo que ganarían un premio si ambas flechas se detenían sobre la zona negra. Se les pidió que decidieran si la probabilidad de ganar el premio era 50-50 (50% de ganar y 50% de perder). Solo 20% de los 273 estudiantes de los grados 6-8 y 43% de 90 estudiantes de grado 9 dijeron que la probabilidad de ganar era menos del 50%. La mayoría de estos estudiantes fueron capaces de describir el espacio muestral de la situación.

2.3. Enfoques clásico y frecuencial de probabilidad

Entre las primeras investigaciones en las que explícitamente se aborda la relación entre los enfoques frecuencial y clásico de probabilidad se encuentra la realizada por Stohl y Tarr (2002), quienes llevaron a cabo una secuencia de instrucción con el fin de determinar cómo las herramientas tecnológicas permiten y limitan el desarrollo de la noción de inferencia a partir de situaciones probabilísticas. Para ello, exploran cómo los estudiantes desarrollan un entendimiento del interjuego de la probabilidad teórica, la probabilidad empírica y el tamaño de la muestra, y cómo utilizan este entendimiento y la herramienta computacional para formular y justificar inferencias basadas en los datos.

Posteriormente, sobre los resultados obtenidos en la tarea f) (*Schoolopoly*) y con base en el esquema de la Figura 2.3.1, Stohl, Rider y Tarr (2004) realizaron un análisis más enfocado en la conexión unidireccional que hacen los estudiantes entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica; en específico, en cómo usan los datos empíricos para hacer inferencias sobre probabilidades desconocidas y cómo utilizan estas probabilidades para decidir sobre la equidad de un dado. De acuerdo con los autores, “es este tipo de razonamiento — de la probabilidad empírica a la probabilidad teórica — el que forma la base para la realización de inferencias” (p. 11).

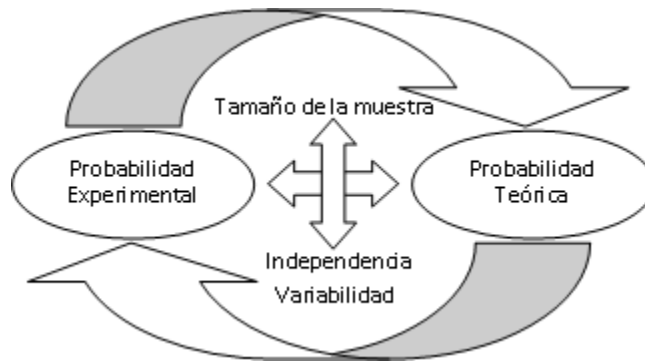


Figura 2.3.1 Modelo bi-direccional (Stohl, Rider y Tarr, 2004)

En este esquema, además de considerar como un elemento importante el tamaño de la muestra, los autores señalan también la necesidad de coordinar los conceptos de independencia y variabilidad muestral con el objetivo de dotar de sentido a la noción de la ley de los grandes números.

Ireland y Watson (2009) realizaron un estudio con el objetivo de identificar cuáles son las conexiones que los estudiantes de secundaria logran establecer entre la interpretación clásica y frecuencial de probabilidad después de trabajar con manipulables (moneadas, dados) y con el software *ThinkerPlots*. Con base en un continuo que va de lo experimental (concreto) a lo teórico (abstracto), donde los elementos que se destacan son los manipulables, el simulador y la ley de los grandes números (Figura 2.3.2), los autores buscan documentar el entendimiento de los alumnos sobre la probabilidad.

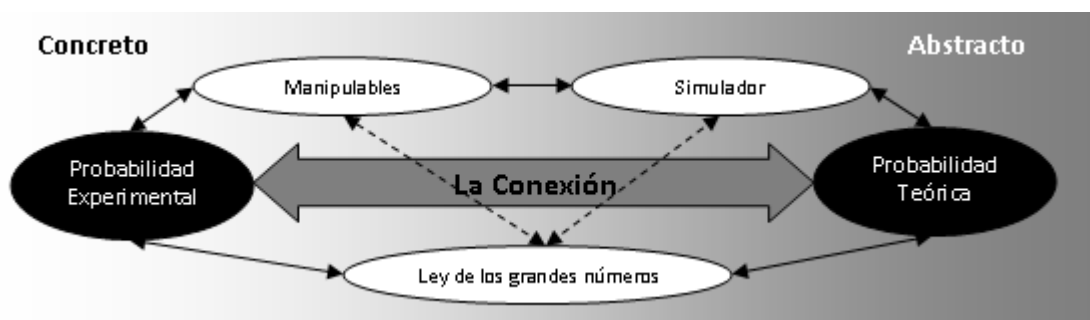


Figura 2.3.2 Marco conceptual de lo concreto a lo abstracto (Ireland y Watson, 2009)^o

A diferencia del esquema propuesto por Stohl et al. (2004), en este modelo se hace evidente el papel preponderante de la ley de los grandes números para la articulación de las interpretaciones frecuencial y clásica de probabilidad. De acuerdo con Ireland y Watson, la

ley de los grandes números es el fundamento que explica lo que ocurre conforme el número de ensayos aumenta (p. 232). Aquí, al parecer, el tamaño de la muestra está representado por los manipulables (resultados a corto plazo) y el simulador (resultados a largo plazo).

Entre los resultados, se tiene que de los cinco elementos que componen el modelo de la Figura 2.3.2 el más difícil de comprender para los estudiantes fue la ley de los grandes números. Al respecto, los autores señalan la incapacidad de algunos alumnos para identificar que un número grande de ensayos destaca el número cargado en el dado, mientras que la mayor variación en muestras pequeñas lo oculta. En consecuencia, sólo dos alumnos lograron conectar los resultados experimentales del simulador con la probabilidad teórica apropiada.

Investigaciones en las que explícitamente se aborde la articulación de las interpretaciones frecuencial y clásica de probabilidad con estudiantes de niveles superiores, al parecer, son pocas. Hasta ahora, para el presente estudio, únicamente se tiene el registro del trabajo realizado por Prodromou (2012), quien investiga, con base en el modelo de la Figura 2.3.3 (Prodromou, 2007), si futuros profesores de primaria pueden construir un vínculo bidireccional entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica cuando razonan sobre las conexiones que existen entre la distribución de datos experimentales y la distribución de datos teóricos.



Figura 2.3.3 Modelo tentativo para la conexión de las distribuciones experimental y teórica (Prodromou, 2012)

Este modelo describe la conexión dual que lograron establecer los estudiantes (15–16 años) entre la distribución de datos experimentales (DD) y la distribución de datos teóricos (MD). Por un lado, cuando la conexión es de MD a DD, esta última distribución tiende a ser vista como generada por la primera (probabilidad como un agente cuasi-causal que provoca la generación aleatoria de datos). Por otro lado, cuando la conexión es de DD a MD, la segunda distribución se percibe como el objetivo hacia el cual la primera distribución tiende (surgimiento como agente causal que explica la variación en los datos). Este modelo es utilizado por la autora para analizar el razonamiento de los futuros profesores en la coordinación de las aproximaciones frecuencial y clásica de probabilidad.

2.4. Variación y variabilidad

Shaughnessy (1997) observó que en la literatura de investigación didáctica no había informes que dieran cuenta de la comprensión de los estudiantes sobre las nociones de dispersión y variabilidad estadística; el mismo Shaughnessy criticó que en la Evaluación Nacional sobre el Progresos de la Educación de los Estados Unidos (NAEP) no hubiera preguntas para evaluar la variabilidad. Para Gal (2005) una de la ‘grandes ideas’ de la probabilidad es la *variación* y en estadística, hay consenso entre educadores estadísticos en que la variabilidad es el aspecto central que le da sentido a la estadística. En consecuencia, en el presente estudio se considera como una componente a tener en cuenta en las respuestas de los estudiantes, es decir, se observa en ellas cómo atienden el aspecto de la variabilidad que en la situación interviene.

Varios autores han elaborado tareas que permiten observar la percepción de la variación en situaciones de azar e incertidumbre. La idea paradigmática que subyace en ellas es la de pedir que hagan predicciones de los resultados de sorteos repetidos de experimentos simples. Una de las primeras tareas que se reporta para investigar las concepciones de variabilidad de los estudiantes es la siguiente, propuesta por Shaughnessy, Watson, Moritz, y Reading (1999): “Una urna tiene 50 dulces rojos, 30 dulces azules y 20 dulces amarillos. Se sacan aleatoriamente 10 dulces de la urna y se cuenta el número de dulces rojos obtenidos. Esta acción se realiza 5 veces”.

La pregunta la formularon en tres modalidades diferentes y cada modalidad la aplicaron a diferentes grupos de estudiantes. Las tres modalidades son:

- a) ¿Cuál es el mínimo y máximo número de dulces rojos que se pudieron haber extraído
- b) Elige de las siguientes listas, aquella que refleje los resultados de “el número de dulces rojos que se obtienen en cada extracción de 10 dulces”
- c) Escribe una lista de lo que crees que sea el número de dulces rojos que salen en cada una de las 5 veces que se sacan 10 dulces.

Las respuestas de los estudiantes se categorizaron con base en la consideración que hicieron de la media y la variación. Fueron clasificadas en “alta”, “cinco” o “baja” de acuerdo a la media de los valores de la respuesta, y como “estrecha”, “razonable” o “amplia” de acuerdo al rango de los valores propuestos o elegidos. Los autores observaron una mejora creciente en la consideración de la media en función del grado de estudios de los sujetos (grados 4, 6, 8 y 12), pero un comportamiento irregular u oscilante en relación con la consideración de la variabilidad. La conclusión es que a pesar de los estudios escolares y la madurez de los estudiantes no hay un progreso regular en su percepción de la variabilidad.

Watson et al. 2003, investigan las respuestas de estudiantes de 3, 5, 7 y 9 grados a una tarea de predicción en la que se les pide el número de veces que caerá cada cara de un dado en 60 lanzamientos del dado. Las respuestas fueron clasificadas en 5 niveles (0-4) de acuerdo a su complejidad estructural utilizando la Taxonomía SOLO. El 20.5% de las respuestas se clasificaron en el nivel 0, 30.2% en el nivel 1, 31.8% en el nivel 2, 8.4% en el nivel 3 y 9.2% en el nivel 4. Sánchez y Trujillo (2008) encontraron que 18% de 327 estudiantes de secundaria, 20% de 214 de bachillerato y 27% de 74 del nivel universitario propusieron respuestas de *apariencia realista*, es decir, frecuencias cuya suma es 60, variando cada frecuencial entre 4 y 16. Los autores aclaran que salvo muy pocas excepciones, no hay respuestas en las que se sugiera un intervalo en el que se encuentre cada frecuencia; es decir, aunque la perciban no saben cómo representar la variabilidad.

Watson et al. (2003) exploraron la percepción de la variación de 189 estudiantes de 7º y 197 de 9º grado con la siguiente tarea: Un apuntador aleatorio que se para sobre un disco que tiene 50% blanco y 50% negro es girado y se observa el color sobre el que se detiene. Se repite la experiencia 50 veces y se observa el número de veces que el apuntador señala la zona negra, obteniéndose así un número entre 1 y 50. Se coleccionan 50 observaciones de éstas después del mismo número de repeticiones del experimento. Al estudiante se le dan tres gráficas (figura 2.4.1) y se le dice que una representa el resultado del experimento y dos son inventadas ¿cuál de ellas es real y cuáles inventadas?

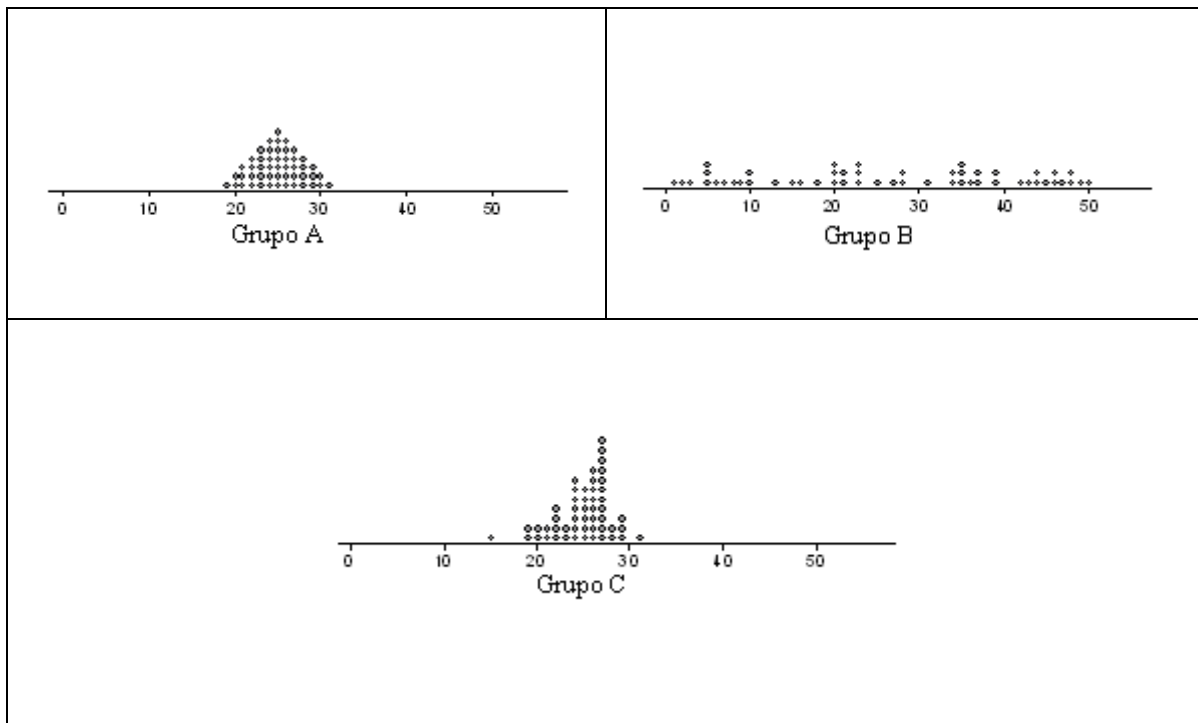


Figura 2.4.1 Posibles gráficas del problema de 50 giros de un apuntador

Los autores informan que 52.6% de los estudiantes de grados 7 y 9 juzgaron correctamente que la gráfica del grupo C representa la situación y que las otras dos eran inventadas. En un experimento similar Sánchez y Trujillo (2008) encontraron que 16% de 327 estudiantes de secundaria, 16% de 214 de bachillerato y 30% de 74 universitarios juzgaron correctamente que las primeras dos distribuciones eran inventadas mientras que la tercera correspondía a la situación.

2.5. Variable aleatoria y distribución

En la revisión de los conceptos que Ortiz de Haro (2002) hace para el análisis de libros de texto, el último que considera es el de *variable aleatoria*. Ésta es una de las ideas fundamentales de la probabilidad de Heitele (1975), sin embargo, Ortiz de Haro (2002) encuentra que son pocos los libros de texto de bachillerato que ofrecen una definición de variable aleatoria, y más bien lo usan implícitamente. Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992) lo incluyen en su libro pero advierten que su definición es muy sutil ya que depende del concepto de función: *es una función con valores numéricos cuyo dominio es un espacio muestral*. Por esta razón conviene buscar -afirman los autores- aproximaciones informales para tratar el concepto en los niveles de secundaria y bachillerato. En la investigación didáctica ocurre algo similar en el sentido de que no es posible ubicar estudios que se refieran directamente a la noción de variable aleatoria; no obstante los estudios sobre la noción de distribución se relacionan con ella.

El concepto de distribución es central en la estadística y la probabilidad. El término distribución abarca dos grandes clases: distribuciones empíricas y distribuciones teóricas. Las primeras son arreglos en los que se describen en una tabla o una gráfica los datos con sus frecuencias; en las distribuciones teóricas se describe en forma de tabla, gráfica o con una fórmula los valores de una variable aleatoria junto con sus probabilidades. Wild (2006) usa una metáfora para enfatizar la relación con la variación: las distribuciones son lentes a través de las cuales se ve la variación en los datos: “La distinción que subyace entre las distribuciones *empíricas* vs las *teóricas* es la diferencia entre la variación que se ve en los datos y un potencial modelo para el proceso que da origen a esa variación” (Wild, 2006, p. 13).

Bakker y Gravemeijer (2004) sostienen que una característica esencial del análisis estadístico es describir y predecir ‘propiedades globales’ de un conjunto de datos; se entiende por ‘propiedades globales’ a las que no son de un valor particular, sino que dependen de una u otra forma de todos los valores del conjunto. Sin embargo, los estudiantes tienden a concebir un conjunto de datos como una colección de valores individuales en lugar de un ‘agregado’ que tiene ciertas propiedades.

2.6. Estudios sobre distribución binomial

Abrahamson (2009a) realiza tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes universitarios frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi binomial). Se propone mostrar cómo un enfoque semiótico ilumina el proceso y el contenido del razonamiento de los estudiantes y, haciéndolo, explica y posiblemente mejora la metodología de la investigación basada en el diseño. Para conseguirlo, le propone a los estudiantes trabajar con tres tipos de dispositivos de mediación: una pala para extraer cuatro canicas, un arreglo de columnas de cuadrados que representan permutaciones organizadas en un arreglo de torres, y una distribución experimental de resultados obtenidos mediante simulación en la computadora. Muestra cómo los estudiantes se apropian de los medios que se les proporcionan materializando, comunicando y elaborando su razonamiento acerca de la distribución en cuestión. En Abrahamson (2009b y 2009c) se reporta una entrevista a profundidad con un niño de 11 años, utilizando los mismos dispositivos de mediación que en el anterior estudio. En la entrevista se muestra el proceso de construcción de una distribución casi-binomial (hipergeométrica) que lleva a cabo el niño con ayuda de la mediación de los diferentes artefactos.

Bill y Gayton (2010) realizan un estudio con dieciocho estudiantes de décimo año para explorar la distinción entre secuencias de monedas y combinaciones de monedas presentadas en actividades de enseñanza. Determinados aspectos de este estudio, como la introducción física y virtual (Fathom) de "monedas", dio a los estudiantes la oportunidad de explorar la distinción entre una secuencia de monedas ordenada (para examinar eventos independientes) y una combinación de monedas sin ordenar (para examinar la distribución binomial), desarrollo la confianza en la simulación como una herramienta matemática legítima, y proporciono una base para un estudio formal de la binomial. Finalmente, los autores concluyen que la comprensión de los estudiantes de la tarea de combinación de monedas fue persistentemente menos desarrollada que su comprensión de la tarea acompañada de secuencias de monedas, y muchos estudiantes continuaron confundiendo ambas tareas. Asimismo mencionan que los conceptos erróneos pueden surgir cuando una secuencia de monedas se reinterpreta como una combinación de monedas, o viceversa.

Por su parte, Maxara y Biehler (2010) realizan un estudio post-curso con estudiantes, futuros profesores de matemáticas, que participaron en un curso introductorio sobre estocástica (probabilidad y estadística). Durante el curso, los estudiantes aprendieron a utilizar el software Fathom para el análisis exploratorio de datos, para la simulación y para la estadística inferencial. Los autores presentan el análisis de tres entrevistas-tareas y reportan las intuiciones de los estudiantes sobre el papel del tamaño de la muestra y su comprensión de la función de n (tamaño de la muestra) y N (número de simulaciones) en las distribuciones muestrales en un contexto de lanzamiento de moneda; particularmente, en la binomial. Finalmente, los autores concluyen que trabajar con el apoyo de simulaciones en Fathom, muestra algunos resultados positivos con las tareas sobre el tamaño de la muestra y las ideas básicas de la ley de los grandes números; además, mencionan que un razonamiento cualitativo para llegar a una conclusión probabilística es aplicar la idea de que en muestras pequeñas hay más variación, lo que implica que la proporción se desvíe más de la media en la muestra pequeña que en la grande.

CAPITULO 3 MARCO CONCEPTUAL

3.1. Introducción

En la literatura sobre metodología no hay una sola definición de Marco Conceptual, por lo que vale la pena aclarar el sentido en el que se utiliza en este trabajo. Aquí se considera conveniente el ajuste que Jabareen (2009) hizo de la caracterización de Miles y Huberman (1994, p. 18); para estos autores: “Un marco conceptual explica, ya sea de forma gráfica o narrativa, las principales cosas que serán estudiadas, –los factores claves, conceptos o variables– y las supuestas relaciones entre ellas”

Jabareen propone restringir dicha caracterización sólo incluyendo los *conceptos*, sin los *factores* ni *variables*, con lo que se logra que el marco sea más conciso y operativo, pues de otra forma se puede volver muy complejo. Cabe aclarar que Marco Conceptual tiene un significado algo más general que lo que se entiende por Marco Teórico, Miles y Huberman (1994) comentan: “Un marco conceptual puede ser rudimentario o muy elaborado, guiado por una teoría o por el sentido común, descriptivo o causal”. El marco conceptual para este trabajo define los conceptos más importantes que se utilizan en la concepción, diseño e interpretación del estudio. Algunos de ellos se tenían claros desde un principio, otros se ajustaron o precisaron durante la investigación y algunos emergieron en el análisis; en su exposición no se tiene en cuenta el momento en el que aparecieron. El principal objetivo del marco en el presente trabajo es ofrecer elementos para que hacer comprensible lo que se hizo, su descripción y resultados.

Los conceptos que se ponen en juego en un estudio en educación matemática y estadística, como el presente, se pueden organizar en cuatro dimensiones. La primera se refiere a los conceptos del *contenido* matemático o estadístico que se está estudiando. La investigación en educación matemática y estadística se distingue por centrarse en el estudio de enseñanza-aprendizaje de contenidos específicos, en contraste, con estudios educativos que estudian conceptos pedagógicos generales. La exposición matemática de tales contenidos se encuentra en textos sobre la materia y en el marco sólo se exponen de manera sucinta enfatizando en algún aspecto que ayude a clarificar algún punto relacionado con el estudio.

La segunda atiende a conceptos relativos al aspecto *cognitivo* que conciernen a conceptos como *aprendizaje*, *razonamiento*, *abstracción*, etc., los cuales generalmente están ligados a teorías de educación matemática e implican ciertas proposiciones e hipótesis teóricas. Se considera que es suficiente una exposición de aspectos locales de la teoría relacionados con el concepto utilizado, sin una exposición más amplia de la teoría general, pues ésta no es necesaria para entender lo que se hace y podría oscurecer en lugar de aclarar los puntos centrales de la investigación.

La tercera dimensión concierne a la *enseñanza*; que se entiende como las acciones que el profesor realiza para propiciar el aprendizaje de sus estudiantes. Los conceptos que aquí interesan son las recomendaciones generales acerca de la manera en que conviene que el profesor actúe en el aula. Hay muchos otros resultados interesantes en esta dimensión, sin embargo, el presente trabajo no es un estudio sobre enseñanza, sino de aprendizaje; no obstante, como se aclara más adelante, hubo episodios de intervención entre el pre y el post-test que implicaron decisiones relativas a esta dimensión.

Finalmente, se considera una dimensión *metodológica* que contiene conceptos relacionados con la obtención de la información sobre el razonamiento de los estudiantes, y sobre el procesamiento de dicha información. El presente estudio contiene aspectos tanto previstos desde un comienzo como emergentes. Se parte de la Taxonomía SOLO tal cual fue establecida por sus autores para organizar las respuestas de los estudiantes, pero en el transcurso del análisis de toman decisiones no previstas por la teoría original. Algo similar ocurre con el presente marco conceptual, como se mencionó arriba.

A continuación se describen los conceptos organizados de acuerdo a las anteriores cuatro dimensiones.

3.2. Contenido

El *contenido* probabilístico que se explora en este estudio se relaciona con la noción de *distribución binomial* en su forma más elemental ($n = 3$, $p = 1/2$); su comprensión implica otras nociones, en especial: *aleatoriedad*, *espacio muestral*, *definición clásica* y *enfoque frecuencial de la probabilidad*, *variabilidad* y *variación*, *variable aleatoria* y *distribución*. Cómo se ve más adelante, la manera en que intervienen estas nociones en el presente

trabajo es sólo de manera muy elemental a través de plantear una situación y una serie de preguntas referidas a ella, sugiriendo actividades durante las cuales los estudiantes las operan sin conocer sus definiciones. En esta sección mencionaremos rasgos importantes de estas nociones para los fines de la presente investigación.

El concepto de *aleatoriedad* es difícil de definir formalmente, incluso para los expertos en probabilidad (Kolmogorov y Uspenky, 1988), sin embargo, todos entendemos la idea intuitiva de aleatoriedad que se relaciona con la impredecibilidad y el desorden. Los fenómenos que estudia la probabilidad son aleatorios y como mencionan Batanero, Serrano y Green (1998) la *aleatoriedad* es el punto inicial en el estudio de la probabilidad, ya que es esencial que el alumno tenga una correcta comprensión de esta idea para que pueda progresar en el campo del cálculo de probabilidades. A pesar de esta afirmación, lo cierto es que en la práctica la mayoría de problemas de probabilidad y los procedimientos que se enseñan no incluyen la aleatoriedad; por ejemplo, un procedimiento para calcular la probabilidad de obtener un águila en tres lanzamientos de una moneda, se puede concebir sin pensar en la aleatoriedad, pues el procedimiento de solución se reduce a un conteo y la aplicación de la definición clásica. En el cuestionario que se construyó en el presente estudio se formulan preguntas que piden al estudiante que sugiera una secuencia de cómo cree que pueden ocurrir 20 sorteos de una experiencia aleatoria; el objetivo es que el estudiante piense en la aleatoriedad.

El concepto de *espacio muestral*, a diferencia del de aleatoriedad tiene una definición precisa: es el conjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio. Sobre la base de este concepto se construye la teoría de la probabilidad, o como lo expresa Jones et al (2007), es una parte fundamental del proceso de matematización de los fenómenos aleatorios. Por ejemplo, Henry (1994) propone una caracterización de una *experiencia aleatoria* como un fenómeno que cumple con tres condiciones:

1. La experiencia debe ser repetible bajo condiciones similares; a una realización de la experiencia se le llama *sorteo*.
2. El resultado de un sorteo de una experiencia no es predecible antes de realizarse (*aleatoriedad*).

3. Debe ser posible describir los resultados de los sorteos de una experiencia aleatoria en un conjunto bien definido (*espacio muestral*).

La intención de Henry es considerar una sub-clase de fenómenos de la clase de “fenómenos aleatorios” que sean fácilmente modelable matemáticamente y para lograrlo incluye entre las tres condiciones fundamentales la de que sea posible describir el espacio muestral del fenómeno. Este concepto es algo engañoso en cuanto a su dificultad, pues “aunque el concepto de espacio muestral es en apariencia un aspecto relativamente directo de las matemáticas de los fenómenos aleatorios, es más sutil y elusivo de lo que aparenta” (Jones et al. 2007, p. 920).

La *definición clásica y el enfoque frecuencial de la probabilidad* son dos maneras de calcular la probabilidad de eventos y su relación es fundamental; la relación clave es la llamada *ley de la estabilización de la frecuencias* (también se llama *la ley de los grandes números* cuando se formula en términos puramente matemáticos). Dada una experiencia aleatoria, a cada realización de la experiencia se le llama *sorteo*. La ley referida de la estabilización de las frecuencias dice que si se realizan muchos sorteos de una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de un evento se aproxima a su probabilidad. Llegar a entender que una probabilidad se proyecta en las frecuencias relativas aclara el tipo de aplicaciones de la teoría y el sentido de la *predicción* en probabilidad. En un experimento aleatorio es imposible predecir lo que va a ocurrir en uno o en pocos sorteos, en cambio, es posible prever un comportamiento general de las frecuencias de un evento cuando se trata de un gran número de sorteos. Un problema de dicha ley y de la ley de los grandes números es que la propiedad se cumple en el límite, cuando el número de sorteos crece al infinito. Entonces, para su aplicación se requiere hacer las consideraciones convenientes para que se vuelva práctico; tales consideraciones hacen uso de las nociones de variabilidad y variación.

La definición de *variabilidad estadística* también es difícil de establecer al igual que la aleatoriedad. Aunque como mencionan Wild y Pfannkuch (1999) la variabilidad es un fenómeno observable en cualquier parte, en el contexto del presente trabajo lo que importa es la variabilidad de las frecuencias absolutas y relativas de los resultados o eventos de sorteos aleatorios de una experiencia. Las frecuencias relativas que se generan al ir

realizando sorteos de una experiencia presentan *variabilidad* aleatoria y la condición que establece la ley de la estabilidad de las frecuencias es que la variabilidad es mucha cuando el número de sorteos son pocos y va disminuyendo cuando el número de sorteos crece. Medir qué significa “mucha y poca variabilidad” es uno de los objetivos de la teoría y consiste en dar un intervalo dentro del cual se encontrarán las frecuencias relativas con cierta probabilidad. . A la medida de la variabilidad se le llama *variación*. No se espera que los estudiantes en el nivel de secundaria sepan o aprendan técnicas para medir la variabilidad, ni siquiera que tengan un sentido cualitativo general acerca de ella; lo que se espera es que para ejemplos particulares de lanzamiento de monedas y dados y de extracción de bolas en urnas se den cuenta que en pocos sorteos las frecuencias relativas estarán alejadas de la probabilidad teórica y que en un gran número de sorteos estarán más próximas, sin ser iguales necesariamente.

Otros dos conceptos importantes en este estudio son los de *variable aleatoria* y *distribución*. Una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral y cuyo contra-dominio son los números reales, es decir, toma valores numéricos. Con relación al concepto de *distribución* hay de dos tipos: Una distribución *empírica* de un conjunto de datos es un arreglo (tabla o gráfica) en el que se presenta cada dato y su frecuencia. Una distribución *teórica* de probabilidad es una función que asocia a cada valor de una variable aleatoria su probabilidad. Estas definiciones requieren del concepto de función, que se estudia en el bachillerato. Es por esta razón que, como comenta Jones et al. (2007), los conceptos de variable aleatoria y distribución se introducen de manera amplia hasta el nivel de bachillerato. En el presente estudio, la noción de variable aleatoria aparece de manera natural en el caso particular que se trabaja y el estudiante no necesita conocer su definición para comprender la situación en la que se presenta. En ésta se menciona “el número de águilas que ocurren al lanzar 3 veces una moneda”, cuyos valores y probabilidad pueden calcular los estudiantes sin necesidad de conocer dicha definición. Con relación a la distribución se pide a los estudiantes que proponga una distribución empírica de posibles resultados para diferentes números de sorteos y para responder debe considerar implícita o explícitamente la distribución binomial para $n=3$ y $p= \frac{1}{2}$.

Como se puede notar el contenido matemático y estadístico asociado a la presente investigación constituye un sistema complejo de conceptos probabilísticos. Por supuesto,

bajo un enfoque formal y tradicional de la enseñanza de la probabilidad, dicho contenido sería inaccesible para los estudiantes de secundaria. Sin embargo, en este trabajo se asume que es posible que ellos comiencen a crear referentes para esos conceptos mediante la realización de actividades y la respuesta a preguntas adecuadas aún sin haberlos estudiado formalmente. Estos supuestos se apoyan en proposiciones referentes al aprendizaje y a la enseñanza, que se exponen en los siguientes apartados.

3.3. Aspectos cognitivos

Se entiende por razonamiento a un proceso del pensamiento que consiste en formular y validar juicios o aseveraciones a partir de observaciones de un fenómeno o experimento o a partir de otras proposiciones ya conocidas. Una persona puede formarse juicios sobre lo que sucede a su alrededor o también puede sacar conclusiones a partir de información dada. En cualquier caso, el razonamiento es susceptible de representarse externamente a través del discurso oral o escrito, y sólo es posible verlo mediante dichas representaciones. Así, el razonamiento tiene una existencia dual, como un proceso del pensamiento y como un tipo de discurso. No hay una identidad entre lo que razona alguien en su pensamiento y la manera en que lo expresa o escribe, el primer proceso es más íntimo y complejo; mientras que el segundo, sobre todo el de los sujetos que aquí se investigan, suele ser muy corto, con varios sobrentendidos. Se entiende por razonamiento probabilístico al razonamiento que se lleva a cabo en relación con situaciones en las que interviene la incertidumbre. En el presente estudio se busca que los estudiantes apliquen y desarrollen su razonamiento probabilístico a partir de una situación simple de juego en la que reflexionen sobre la incertidumbre que subyace en ella.

La anterior caracterización es algo general y abarca dos clases de razonamiento, el formal y el informal. El razonamiento formal se refiere a los procesos de deducción en los que se obtiene una conclusión necesaria a partir de las premisas, de manera que si estas son verdaderas también la conclusión es verdadera. El razonamiento informal se define como el tipo de razonamiento que ocurre en situaciones no-deductivas, en la que una persona construye un modelo de una situación articulando sus dimensiones y factores con base en sus conocimientos actuales, pero también en su sentido común y en sus creencias personales (Perkins, Farady y Bushey, 1991, Ziefler, Garfield, delMas, Reding, 2008). El

razonamiento informal puede consistir de diferentes tipos de comprensión que surgen en una nueva tarea de aprendizaje y combinar el conocimiento del mundo real con conocimiento adquirido en la escuela; además, puede ser un buen comienzo sobre el cual construir conocimiento formal (Gravemeijer y Doorman, 1999). De acuerdo a Garfield, delMas y Chance (2007) la enseñanza podría diseñarse para ayudar a los estudiantes a desarrollar formas específicas de razonamiento informal en relación con sub-sistemas de conceptos particulares de modo que se aprecien sus relaciones y consecuencias. Esta idea es la que se sigue en este trabajo con relación a un sistema de conceptos de probabilidad.

Las respuestas relacionadas con una situación en la que interviene la incertidumbre y que requieren de un razonamiento probabilístico, tienen diferentes grados de calidad dependiendo de la pertinencia de los aspectos que ponen en juego. En un extremo hay respuestas que se basan en los prejuicios o creencias de las personas sobre el fenómeno aleatorio de que se trata; en el otro, se encuentran las respuestas que formulan un modelo adecuado de la situación; entre ambos extremos hay una gran cantidad de niveles de calidad del razonamiento informal utilizado. Esto permite organizar las respuestas en niveles de razonamiento, que van de razonamientos espurios a razonamientos más cercanos a los normativos. Una manera de construir una jerarquía de razonamiento es utilizando la Taxonomía SOLO, que se expondrá unos apartados más adelante. Con respecto a la Taxonomía SOLO conviene precisar que es una teoría neo-piagetiana que reformula el concepto de *etapas de desarrollo* de Piaget sustituyéndolo por *modos de representación*. Hay cierta correspondencia entre los niveles de ambos sistemas, pero su diferencia es en los rasgos característicos que los definen; estos para Piaget son las estructuras de conjunto, mientras que en la Taxonomía SOLO son los niveles de abstracción:

Los modos [de representación] son niveles de abstracción, los cuales progresan de acciones concretas a conceptos y principios abstractos, que forman la base de las etapas de desarrollo (Biggs y Collis, 1991, p. 62).

En este trabajo son importantes los niveles de abstracción al que los estudiantes de secundaria pueden acceder. En particular, no interesa identificar en las respuestas a preguntas relacionadas con una situación binomial, el tipo de abstracción que ponen en juego. Para esto, se toma como referencia la caracterización de Piaget sobre la abstracción

empírica y la abstracción reflejante. Piaget elaboró estos conceptos de manera tardía y no está ampliamente explicado en algún lugar de su obra, sino se hallan breves exposiciones por aquí y por allá (Dubinsky, 1991). Para los fines de este trabajo, utilizaremos la siguiente exposición de Piaget:

Tratándose de la abstracción, tuvimos que distinguir dos formas principales. La primera, llamada *empírica*, consiste en sacar su información de los objetos mismos de los cuales sólo se consideran ciertas propiedades, o sea aquellas que existían en ellos antes de cualquier constatación por parte del sujeto (por ejemplo, el color o el peso). La segunda, llamada *reflejante*, no procede a partir de los objetos sino de la coordinación de las acciones que el sujeto ejerce sobre los mismos –allí está la diferencia con el anterior– o de las operaciones en general del sujeto. Por consiguiente, consiste primero en reflejar, en el sentido de una *trasposición* en un plano superior, lo que se saca de lo inferior, y, por otra parte, de reflexionar, en el sentido de una reflexión mental cuyo papel complementario es reconstruir en el nuevo plano lo abstracto que está contenido en el primero (Piaget, 1984, p. 7).

En nuestra opinión, en el aprendizaje del enfoque clásico de probabilidad se realizan actividades más cercanas a la abstracción empírica, mientras que las actividades para comprender el enfoque frecuencial son más próximas a la abstracción reflejante. Para el estudiante, en el enfoque de la probabilidad clásica, los conceptos básicos emergen de la abstracción de algunas características de una situación aleatoria, el objeto o unidad de análisis es una situación (que identifican con un sorteo de la experiencia), además, hay un procedimiento preciso para obtener un valor único: la probabilidad. En cambio, en el enfoque frecuencial lo que cuenta es lo que haya ocurrido en una secuencia de sorteos, el estudiante determina la razón (frecuencias relativas) del número de veces de un resultado respecto al total de sorteos realizados. Lo más fácil para el estudiante es considerar a esta razón como la probabilidad (que algunos autores llaman ‘probabilidad experimental’), no obstante, es sólo una aproximación que depende de la secuencia específica disponible, pero que cambiará cuando se genere otra secuencia.

3.4. Enseñanza

Los postulados constructivistas sobre el aprendizaje han sido ampliamente aceptados por la comunidad de investigadores educativos, en particular, por los educadores matemáticos y estadísticos (Garfield, 1995). La teoría constructivista sostiene que el aprendizaje es un proceso en el cual los sujetos construyen activamente su propio conocimiento (Von Glasersfeld, 1990). El constructivismo sostiene que el conocimiento que posee una persona no es algo elaborado externamente a él que le haya sido transmitido mediante explicaciones, ni tampoco algo que el sujeto tenga de manera innata, sino que emerge de una combinación de la estructura del conocimiento que tiene el sujeto en conjunción con la actividad que realiza en ciertas condiciones favorables. Con relación a la enseñanza, la teoría asume que su objetivo es proveer de oportunidades a los estudiantes para que realicen dicha construcción y para hacerlo es necesario que el profesor conozca las dificultades que aquellos poseen y los niveles de abstracción que son capaces de alcanzar. En este sentido, es útil la realización de estudios diagnóstico con los estudiantes sobre los temas en los cuales van a comenzar a recibir instrucción, que exploren y ofrezcan información que permita formular hipótesis acerca de los conocimientos que poseen y las dificultades que enfrentan.

Uno de los principales objetivos de una enseñanza inspirada en la filosofía constructivista es que los estudiantes participen activamente en su propio proceso de aprendizaje y sepan que es a través de sus esfuerzos en resolver problemas que dicho aprendizaje va a producirse. La posibilidad de contar con tareas interactivas apoyadas en un programa computacional apropiado (micro-mundo computacional) sirve como un excelente soporte para el aprendizaje autónomo y le permite al estudiante ampliar sus conocimientos mediante exploraciones, ensayo y error, y modelaciones. La tarea del profesor es proporcionar los medios y las tareas y animar a sus estudiantes a ser autónomos y hacerse responsables de su aprendizaje. En este trabajo, en un primer paso se diseñó y aplicó una actividad diagnóstico con dos fines, por un lado proporcionar al profesor y al investigador información sobre el estado de conocimientos y habilidades de razonamiento de los estudiantes. Por el otro, hacerlos reflexionar sobre una situación probabilista. En el siguiente paso, los estudiantes realizaron actividades apoyadas por el software Probability Explorer para responder preguntas sobre la misma situación-problema, en el entendido de

que el involucramiento de los estudiantes con tales actividades y la búsqueda de la solución a las preguntas generan un proceso de aprendizaje. Por último, en un tercer paso, se les volvió a aplicar el cuestionario inicial para observar el aprendizaje logrado.

3.5. Taxonomía SOLO

El modelo de Taxonomía SOLO (The Structure of Observed Learning Outcomes – La estructura de los resultados de aprendizaje observados) de Biggs y Collis (1982) es un sistema de categorías diseñado para evaluar la calidad de una respuesta. Dos aspectos deben tenerse en cuenta cuando se usa la Taxonomía SOLO: los *modos de representación* – niveles de abstracción que van progresando desde las acciones concretas a los principios y conceptos abstractos, lo que forma la base de las etapas evolutivas– (Biggs y Collis 1991, p. 62) y los *ciclos del aprendizaje*. Los modos de representación están fuertemente relacionados con las etapas piagetianas del desarrollo cognitivo. Los ciclos de aprendizaje tienen que ver con describir la estructura de cualquier respuesta desde el punto de vista de su complejidad estructural.

Biggs y Collis (1991) describen los *modos de representación* como niveles de abstracción, progresando desde acciones concretas a conceptos y principios abstractos. El comportamiento de un sujeto puede estar en alguno de estos modos en un momento dado sin excluir que posteriormente, en otra tarea, su comportamiento se ubique en un modo inferior. Esta es una de las diferencias con la teoría de las etapas de Piaget, pues él sí postula que sus etapas son excluyentes en el sentido de que una etapa superior sustituye a la etapa previa. Los modos y las edades promedio en que emergen, son descritos brevemente a continuación:

1. *Sensomotor* (desde el nacimiento). El infante interactúa con el mundo en forma muy concreta y proporciona respuestas motoras a los estímulos sensoriales.
2. *Icónico* (desde los 18 meses). El niño comienza a representar el mundo mediante imágenes que son la internalización de cosas y acciones. Tales imágenes o íconos conservan algunas características esenciales del original, pero no todas y, por tanto, son abstracciones. Éstas se fortalecen con la aparición del lenguaje oral.

3. *Concreto Simbólico* (desde los 6 años). Este modo involucra un avance significativo en la abstracción pues se transita de la representación directa del mundo a través de íconos y del lenguaje oral a la aparición del lenguaje escrito. Éste es un sistema de símbolos de segundo orden aplicado al mundo de la experiencia.
4. *Formal* (desde los 14 años). Se caracteriza por la aparición de sistemas abstractos de alto nivel con los que se pueden representar un gran número de fenómenos y también pueden ser utilizados para generar hipótesis acerca de formas alternativas de ordenar el mundo. Estos sistemas se identifican con el cuerpo de conocimiento de una disciplina.
5. *Post formal* (desde los 20 años). En este nivel se alcanzan los más altos niveles de abstracción que se requieren para estudios post-universitarios, para la práctica profesional y para la investigación. Se caracteriza por el la capacidad de operar a corto plazo con sistemas nuevos y con varios sistemas a la vez.

La Tabla 3.5.1 representa de manera general la relación de niveles en un modo:

Modos		Nivel estructural de la Taxonomía SOLO
Objetivo	4	Relacional. Se integran dos o más aspectos relevantes de la tarea formando una respuesta coherente y con significado.
	3	Multiestructural. En la respuesta se muestran dos o más aspectos relevantes, pero no están integradas de manera conveniente.
	2	Uniestructural. La respuesta se enfoca en un sólo aspecto relevante de la tarea.
Previo	1	Preestructural. La respuesta es irrelevante.
Siguiente	5	Abstracto extendido. Se generaliza la estructura y se consideran nuevas y más características abstractas que representan un nuevo y elevado modo de operación.

Tabla 3.5.1 Descripción de los modos y niveles en la Taxonomía SOLO

La *Taxonomía SOLO* (Structure of the Observed Learning Outcome) –Estructura de los resultados de aprendizaje observados– puede ser usada para evaluar la calidad de aprendizaje de un estudiante, o para señalar objetivos de un currículo (Biggs y Collis, 1982). Con esta taxonomía podemos observar qué tanto ha progresado el estudiante con respecto a cierta habilidad y usarlo para ver su progreso dentro de los modos o etapas que se definieron arriba.

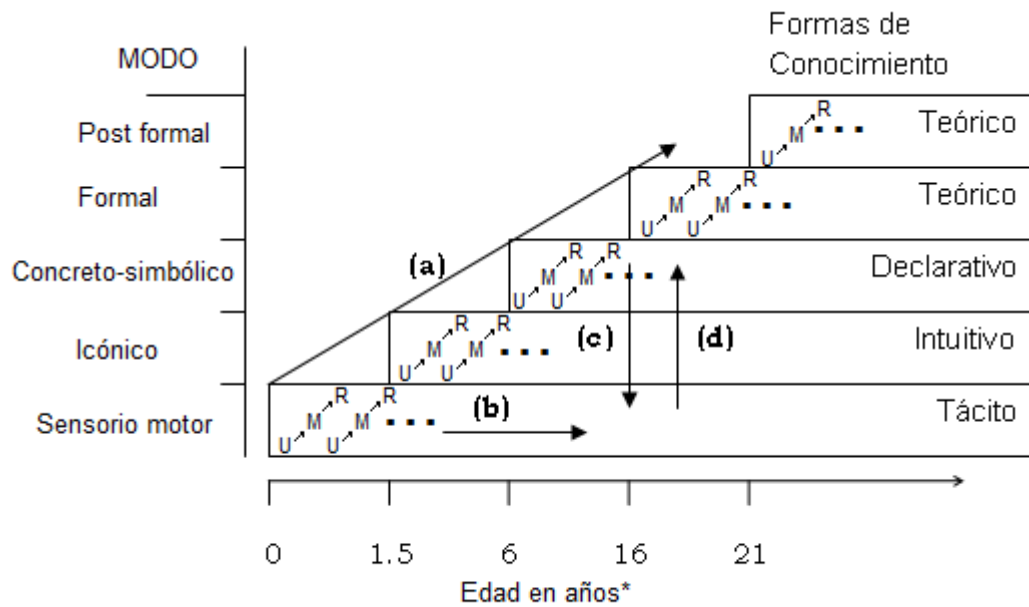
Respuestas *Preestructurales* pertenecen al modo previo, indicando respuestas que indican un bajo nivel de abstracción para la tarea en cuestión.

Las respuestas en el nivel *Abstracto extendido* están en un nivel de abstracción que se prolonga al del siguiente modo, en el que son respuestas de nivel Uniestructural. Los niveles 2, 3 y 4 pueden ser usados para describir los niveles de abstracción alcanzados por los estudiantes que se encuentran en un modo de representación determinado con relación a una tarea específica.

Poniendo juntos los conceptos de modo de representación y niveles del estudiante podemos postular que:

- ⊙ Los modos de representación aparecen generalmente a una edad específica.
- ⊙ Los niveles Uniestructural, Multiestructural y Relacional se repiten dentro de todos los modos; las respuestas en el nivel abstracto extendido indican una transición al siguiente modo más alto.
- ⊙ El incremento de la competencia dentro de algún modo mediante la transición de niveles uniestructurales a relacionales lleva al dominio de una forma de conocimiento.
- ⊙ Tareas específicas

Los modos aparecen típicamente a edades indicadas en la abscisa. Los modos se acumulan indicados y ordenados, permaneciendo como potencia media para el estudiante hasta el final de la vida.



* Las distancias entre las representaciones no son proporcionalas a las diferencias

Figura 3.5.1 Modos y formas de conocimiento

El progreso del ciclo del estudiante de Uniestructural (U), Multiestructural (M) a Relacional (R) dentro de cada modo, la extensión de abstracto relacional a prolongado, convirtiéndose en uniestructural en el siguiente modo, son la naturaleza de los contenidos dentro de cada modo, y la forma de conocimiento más asociada con un modo en particular.

Cada una de las cuatro líneas (a), (b), (c) y (d), representa un aspecto importante del comportamiento inteligente:

- (a) El curso de un desarrollo óptimo. La línea diagonal (a) representa el recorrido o curso del desarrollo como usualmente es estudiado por psicólogos del desarrollo
- (b) El curso de estudiante dentro de un modo (unimodal)
- (c) Facilitación “alta baja” de un orden de estudiante más bajo. El primer ejemplo es el estudiante de los mismos principios aplicados en todos los niveles: en bellas artes (icónico, aumentado por simbólico concreto y formal), hasta conocimiento declarativo (Simbólico concreto, aumentado por formal y post formal).
- (d) Facilitación “baja alta” de un orden de estudiante más alto, como en el papel constructivo y el movimiento progresivo generalmente en educación, que ha

producido los resultados, pero no ha tenido un retroceso adecuado (formal y post formal) en teoría psicológica.

Se considera que el cambio en el modo no puede ser fácilmente atribuido a algún factor particular. El desarrollo parece depender de la confluencia de muchos factores, incluyendo el apoyo social, la base del conocimiento y la habilidad asociada, y la confrontación con problemas particulares que están involucrados cognitivamente.

Cuatro formas de conocimiento emergen de cada uno de los cinco modos: tácito, intuitivo, declarativo y teórico (formal y post formal). Dentro de cada uno el estudiante puede llegar a un nivel de competencia o habilidad que puede ser basado en estudiante unimodal o multimodal.

El presente modelo tiene implicaciones de importancia educacional en las áreas del programa de estudios, método instruccional y valoración.

3.6. Probability Explorer

Probability Explorer 2.0 (2002) es un programa creado por Hollylynne Stohl Lee, profesora de la Universidad de Carolina del Norte (EEUU) el cual surgió de la necesidad de ofrecer a los niños un *micromundo computacional* que les permitiera visualizar e interactuar con simulaciones de algunos experimentos aleatorios comunes en la enseñanza de la probabilidad (lanzamiento de una moneda, dados, bolas y otros definidos por el usuario), en un ambiente *multirepresentacional* que genera resultados a una velocidad definida por el usuario y con la posibilidad de realizar muchísimas pruebas en un solo instante.

Las representaciones disponibles en el micromundo *Probability Explorer*, son representaciones multi-enlazadas, que se actualizan simultáneamente cuando los eventos aleatorios son simulados. Estas representaciones incluyen representaciones de íconos movibles, arrastrando con el cursor. Además en él se puede manipular el número de pruebas (de 1 en 1 o 20 pruebas seguidas, por ejemplo), las cuales se ejecutan con solo un clic en el icono: *correr el experimento* (Run Experiment) representado por un muñeco que corre (ver fig. 3.5.1).

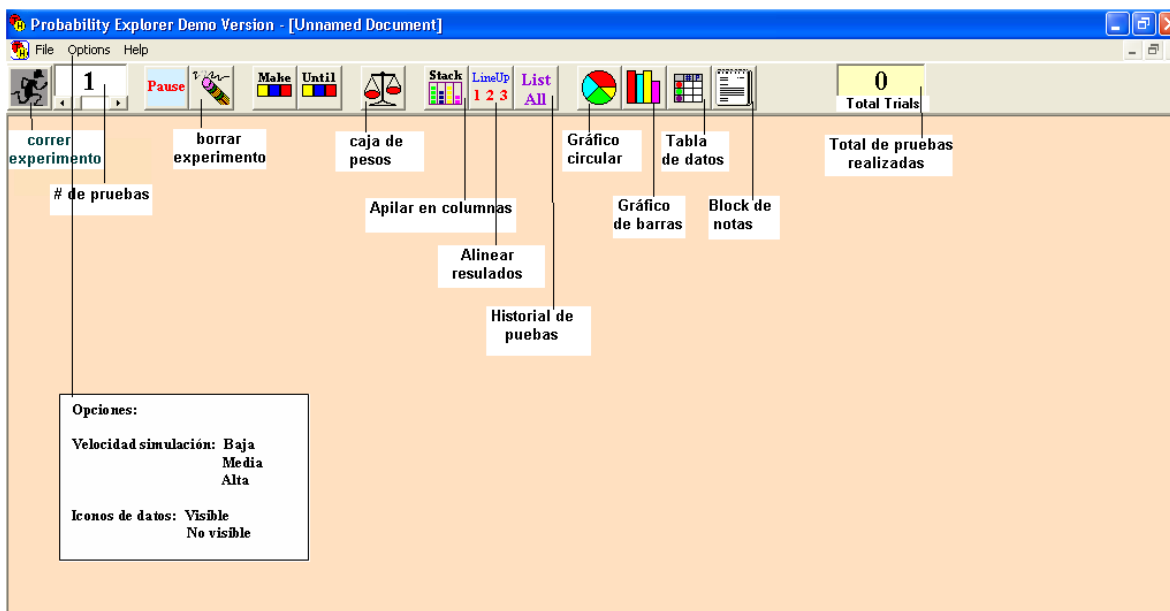


Figura 3.6.1 Funciones icónica de Probability Explorer 2.0

El usuario también puede manipular la velocidad de la simulación en el menú de opciones (simulationspeed) en tres niveles: baja (slow), media (médium) y rápida (fast). Incluye también íconos para crear su propio experimento con dibujos alusivos (balones de diferentes deportes, figuras de estado del tiempo, población, caras, caras de dado de 1 a 9). Para la actividad los estudiantes simularon el lanzamiento de tres monedas sin tener en cuenta el orden HHT –THH - HTH para obtener distribuciones equivalentes a la de la variable aleatoria número de águilas (ver fig. 3.6.2).

En el simulador *Probability Explorer*, el modelo subyacente es el de los procesos aleatorios, no es la probabilidad, sino los experimentos en sí mismos. El objeto fundamental que permite la simulación de cualquier experimento aleatorio, es la función *Run Experiment* que genera secuencias aleatorias que dependen de los eventos y de las propiedades definidas por el usuario. El paquete cuenta con diferentes representaciones pictóricas alusivas que facilitan la construcción, simulación o representación de cualquier experimento aleatorio, conservando en forma virtual los objetos concretos del experimento real y facilitando el proceso de abstracción.

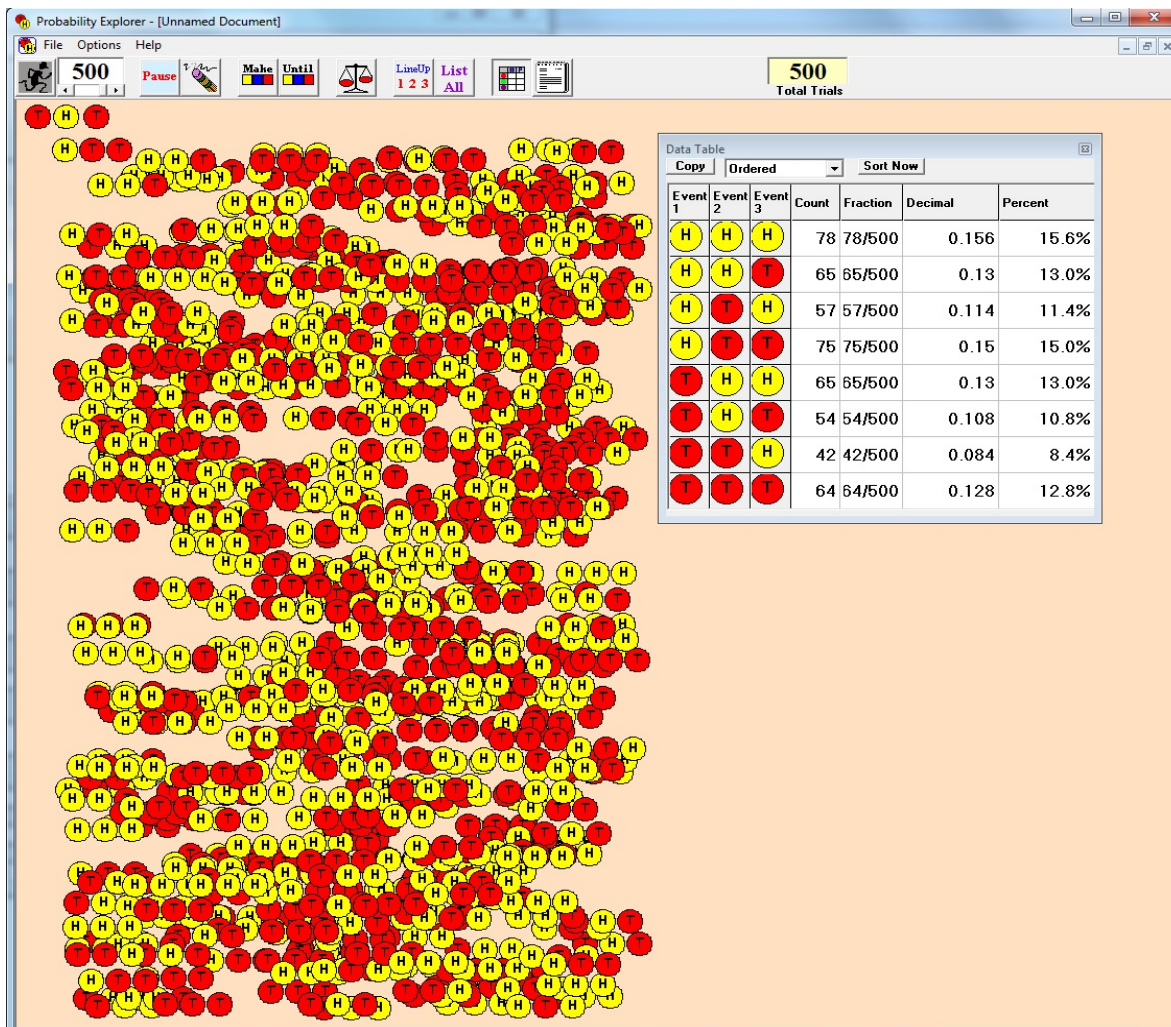


Figura 3.6.2 Resultados de un experimento de 500 lanzamientos de tres monedas.

Ante la pregunta de si la simulación realizada refleja verdaderamente el experimento real, no se puede responder a menos que se repitiera el experimento real un número suficiente de veces para realizar estimaciones y poderlas comparar con las obtenidas por simulación. Una forma de resolver este problema es generando confianza en el uso de la simulación y por ende en sus resultados. Una manera de crear seguridad en la simulación computacional es a través de la interacción social, realizando variadas actividades, confrontando las programaciones y los resultados obtenidos por unos y otros. El uso de otras representaciones para resolver los mismos problemas que se simulan también puede ayudar a generar confianza en el uso de la simulación computacional. Al igual, la realización de experimentos reales con monedas, dados, urnas y otros juegos, y la confrontación de estos resultados es el camino para generar confianza en los simuladores

computacionales, lo que implica una planeación y una inversión de tiempo considerable. Cuando se adquiere esta confianza, la simulación se constituye en un medio para confrontar las intuiciones previas que se puedan tener sobre el azar en un proceso interactivo que le permite al estudiante generar nuevos significados alrededor de los experimentos aleatorios.

Para realizar acciones de control sobre los resultados aleatorios, Probability Explorer posee diversos mecanismos tales como la definición del experimento, el número de pruebas generadas y la posibilidad de repetir el mismo experimento bajo las “mismas condiciones” iniciales. El efecto del empleo de cualquiera de estos mecanismos se puede confrontar con los diversos gráficos que el paquete posee. Probability Explorer puede servir de medio confirmatorio de los resultados obtenidos por otros medios o como generador de conjeturas. Estas características confirmatorias y predictivas permiten su adopción como "laboratorio matemático" que genere la necesidad de los tratamientos matemáticos para dar cuenta de los resultados observables.

CAPITULO 4 METODOLOGÍA

4.1. Introducción

La metodología utilizada en este trabajo es cualitativa y exploratoria, pues consiste en el análisis de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario aplicado antes y después de que los realizaran actividades con el software *Probability Explorer*. Los cuestionarios tienen el objetivo de generar datos sobre la manera de razonar de los estudiantes frente a una situación de probabilidad cuya modelación lleva a una distribución binomial; se espera que el cuestionario aplicado antes de las actividades (pre-test) sea respondido con sus ideas intuitivas acerca de la situación, mientras que las respuestas de su aplicación posterior (post-test) refleje el aprendizaje logrado mediante las actividades. Los tipos de respuestas son de diferente naturaleza (sucesiones de resultados de lanzamiento de una moneda, tablas y gráficas de frecuencia, opiniones escritas sobre una situación, etc.) que se prestan más a un análisis cualitativo que cuantitativo. Por otro lado, aunque las preguntas tienen cierta intencionalidad, no había hipótesis sólidas acerca de las respuestas, sino que el propósito era explorar las ideas emergentes.

Una técnica utilizada para analizar los datos es la proporcionada por la Taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991), de la cual se hizo una breve introducción en el Capítulo 3. Aquí sólo indicaremos nuevamente la definición de los niveles y explicaremos algunos puntos de cómo se aplica. La taxonomía postula tres niveles principales de complejidad estructural de las respuestas: Uniestructural, Multiestructural y Relacional, estos niveles están precedidos por el Nivel Preestructural y seguidos del nivel Abstracto Extendido. Para entender cómo se definen estos niveles conviene pensar que la solución a un problema o tarea requiere de la articulación o integración de dos o más componentes, estas pueden ser definiciones, conceptos o procedimientos. Las respuestas del nivel Preestructural son irrelevantes con relación a la solución del problema, es decir, no consideran ninguna componente pertinente a la solución. En las respuestas del nivel Uniestructural se encuentra sólo una componente aislada, por tanto no resuelve el problema. En las respuestas del nivel Multiestructural se utilizan dos o más componentes de la tarea, pero sin integrarlas; generalmente tampoco aportan la solución a la tarea. Las respuestas a nivel relacional se consideran las componentes necesarias y se relacionan convenientemente para ofrecer una

respuesta satisfactoria. El nivel Abstracto – Extendido se presenta cuando la solución integrada de la tarea forma una componente de una tarea de nivel más abstracto; no se considera en este trabajo pues presupondría otro instrumento para la obtención de datos; por lo demás, no sería útil pues es predecible que ninguno de los estudiantes es capaz de responder tareas que requieran respuestas a este nivel.

A continuación se ofrece un cuadro general de la metodología en el que se especifica quienes participaron en el estudio, los instrumentos utilizados para analizar los datos y la manera en que se procedió.

4.2. Participantes

La población objeto de estudio fue un grupo de 69 estudiantes que cursaban el segundo grado de secundaria, turno matutino, en un colegio particular, ubicado en el Distrito Federal, cuyas edades se encontraban entre los 13 y 14 años, en donde asisten jóvenes cuyo nivel socioeconómico es de clase media – alta. Los estudiantes no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal en los conceptos de probabilidad, además no recibieron información respecto al propósito del estudio.

Se contó con el apoyo del docente titular del curso de matemáticas, quien dirigió el desarrollo de las actividades, que comprende la aplicación de los cuestionarios así como las actividades didácticas. Es un docente de matemáticas con formación de maestría en Educación Matemática del Cinvestav – IPN y que tenía experiencia en el campo de la enseñanza de la probabilidad.

4.3. Fases de investigación e instrumentos

Para el trabajo de campo con los estudiantes se desarrollaron tres actividades principales relacionadas con la situación probabilística del lanzamiento de tres monedas al aire. Se trataba de que respondieran preguntas que se relacionan con varios conceptos de probabilidad, entre ellos los de variable aleatoria y distribución binomial, en su forma más elemental. Entre los instrumentos utilizados, se encuentra la aplicación de un cuestionario diagnóstico, el cual es una adaptación del cuestionario propuesto por Jaimes (2011), la diferencia es que en su situación subyace una binomial con $n=2$, mientras que en el utilizado en el presente estudio subyace una binomial con $n=3$, que sirvió como fuente de

información para conocer las nociones de los estudiantes respecto a este tema. Dos actividades posteriores, la simulación física y una experimental con el software Probability Explorer, las cuales sirvieron de parámetro para valorar las concepciones previas relacionadas con su razonamiento probabilístico frente a la situación presentada. Posteriormente se aplicó nuevamente el diagnóstico como post - test, para analizar si las dos actividades didácticas habían influido en sus concepciones. Después de analizar el diagnóstico nos dimos cuenta que tenía ciertas fallas, pues en unas preguntas los estudiantes no pudieron comprender la pregunta, por lo que para el post - test se le realizaron cambios antes de su aplicación. La realización de todo lo antes descrito requirió de 7 horas – clase para su realización con los estudiantes.

Esta investigación tuvo cuatro fases que son:

Fase 1. Actividad I: Presentación del cuestionario diagnóstico “Las tres monedas”

Fase 2. Actividad II: Experimentación física

Fase 3. Actividad III: Experimentación con el software Probability Explorer

Fase 4. Actividad IV: Aplicación del post - test

4.3.1. Fase 1. Actividad I: Presentación del cuestionario diagnóstico “Las tres monedas”

En esta primera fase el docente presenta a sus estudiantes la situación problema diseñada por el investigador, y les permite realizar algunos ensayos para propiciar una familiarización con la situación aleatoria y que puedan opinar, hacer predicciones, argumentar y proponer ideas en el cuestionario diagnóstico. Una vez realizada la experimentación, se aplicó el cuestionario diagnóstico bajo el siguiente mecanismo: les proporciono solamente la primera página del cuestionario a cada uno de los estudiantes, después solicito que leyeran las instrucciones para que comenzaran a contestar el cuestionario, después de aclarar algunas dudas, los estudiantes comenzaron a contestar el test; en el momento en que el estudiante terminaba la primera página se le retiro otorgándole la siguiente, y así sucesivamente hasta terminar con el cuestionario; esto con el fin de que no influyeran las preguntas posteriores en sus respuestas. Esta actividad tuvo una duración de aproximadamente 1 hora – clase. Además, se les solicito a los estudiantes que

contestaran con tinta y en caso de algún error, encerrarlo entre paréntesis a fin de registrar el cambio en sus respuestas. (Véase anexo A)

4.3.2. Fase 2. Actividad II: Experimentación física

En esta fase el docente titular del grupo, reúne a los estudiantes en equipos de cuatro personas, y realizan la actividad denominada “La carrera” en la cual cada uno de ellos escoge un valor de la variable (0, 1, 2 o 3) y al lanzar las tres monedas avanza una casilla el estudiante cuyo número de águilas corresponda al lanzamiento que salió y así lo realizaron hasta que hubo un ganador. Después se les hicieron unas preguntas para saber su pensar sobre la probabilidad que tiene cada jugador. Todo esto se registró en hojas de trabajo que se repartió a cada estudiante. La duración fue aproximadamente de 1 hora – clase. (Véase anexo B)

4.3.3. Fase 3. Actividad III: Experimentación con el software Probability Explorer

Para poder reforzar la Actividad II, se diseñó esta actividad donde el estudiante usara el programa Probability Explorer que le permitiera observar el comportamiento de la variable con un número mayor de lanzamientos. La actividad se realizó en el centro de cómputo del colegio con la dirección del profesor, donde cada estudiante tenía su propia computadora, esta tuvo una duración de 4 horas – clases: la primera fue para familiarizar a los estudiantes con el software, los comandos entre otras cosas; en la segunda y tercera sesión se inició con la actividad 3, simulación en el software “Probability Explorer”, en la cual tenían que obtener datos simulados en el programa computacional; y en la cuarta sesión se contestó la actividad escrita de manera individual. (Véase anexo C).

4.3.4. Fase 4. Actividad IV: Aplicación del Post – Test

En esta última fase, el profesor aplicó el mismo cuestionario diagnóstico, con algunas modificaciones mínimas; se realizó de la misma forma en que se llevó a cabo la actividad I, con la misma duración y mecánica. (Véase anexo D).

4.4. Objetivos y respuestas esperadas de las preguntas del instrumento utilizado

Pregunta 1: De aquí en adelante, llamaremos **lanzamiento** a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Se realiza un lanzamiento y se observa “el número de águilas que ocurren” (llamado **variable** para esta encuesta). Enlista todos los posibles valores que puede tomar esta variable.

El objetivo de esta pregunta es propiciar que los estudiantes comiencen a tener contacto con la idea de variable aleatoria y observar cómo describen el recorrido de la variable “número de águilas”, relacionado con el lanzamiento de tres monedas.

Los estudiantes pueden centrarse sólo en determinar los valores de la variable o pueden relacionar su respuesta con el espacio muestral. Debe notarse que en la pregunta no se hace referencia al espacio muestral, ni a la probabilidades. La respuesta esperada es:

La variable puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3 águilas.

Aunque se espera que algunos relacionen esos valores con los elementos del espacio muestral, probablemente expresados en la forma: AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA y SSS.

Pregunta 2: Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable “número de águilas que ocurren”. En la siguiente tabla anota en la columna de la izquierda, los posibles valores de la variable y en la columna de la derecha, el número de veces que crees que ocurra cada valor:

Valor de la variable	Frecuencia
Total	

El objetivo de esta pregunta es explorar la manera en que los estudiantes expresan el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación observando la frecuencia que asignan a cada valor de la variable. Hay tres opciones posibles, una es que las frecuencias que

proponen no sigan ningún patrón identificable, otro que reflejen un modelo equiprobable, en el que cada frecuencia sería igual a 250. Finalmente, pueden identificar que la distribución es proporcional a 1, 3, 3, 1. En este caso hay dos opciones, que propongan una frecuencia exactamente proporcional a la distribución o que traten de expresar la presencia de la variabilidad ofreciendo frecuencias aproximadas a los valores esperados pero no iguales. Estas son las respuestas que se consideran de mejor calidad; hay dos posibilidades: las distribuciones de frecuencia plausibles se encuentran en la familia de distribuciones que se describen en la siguiente tabla:

Valor de la variable	0	1	2	3	Total
Frecuencia	$125 + e_1$	$375 + e_2$	$375 + e_3$	$125 + e_4$	1000

Donde los errores suman cero y sus valores absolutos están acotados; el primero y el cuarto por 7 y el segundo y tercero por 10.

O bien algunos, algunos pueden preferir considerar el Espacio Muestral, en cuyo caso sus frecuencias deben estar contenidas en la familia siguiente:

Variable	AAA	AAS	ASA	SAA	SSA	SAS	ASS	SSS	Total
Frecuencia	$125 + e_1$	$125 + e_2$	$125 + e_3$	$125 + e_4$	$125 + e_5$	$125 + e_6$	$125 + e_7$	$125 + e_8$	1000

Donde los errores suman cero y sus valores absolutos están acotados por 7.

Pregunta 3: Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable (a cada ocurrencia le llamaremos: **resultado**):

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	
Total	

Con esta pregunta se busca observar la distribución de probabilidades que los estudiantes asignan a la situación. Probablemente las respuestas que aquí se ofrezcan tendrán relación con las dadas en la pregunta 2. Las probabilidades que asignen a cada valor de la variable pueden ser probabilidades subjetivas, dentro de las que se encuentra la distribución equiprobable, o pueden ser el resultado de la consideración del espacio muestral y la aplicación de la definición clásica de probabilidad. Esta es la respuesta que se evalúa como de mejor calidad y es la siguiente:

Águilas	0	1	2	3	TOTAL
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Pregunta 4: Imagínate que tienes las tres monedas y realizas 16 lanzamientos (de 3 monedas cada uno), escribe los resultados que creas que se obtendrán:

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas																	
1 Águilas																	
2 Águilas																	
3 Águilas																	

El propósito de esta pregunta era explorar la percepción de la aleatoriedad del juego por parte del estudiante al generar una secuencia aleatoria y, además que reflejaran su modelo de probabilidad en la distribución marginal. No obstante, este propósito no fue bien representado en la pregunta ya que 16 repeticiones en un número aún bajo. La restricción a este número de repeticiones obedeció al corto tiempo que se tenía para que respondieran el cuestionario inicial. De cualquier manera, es posible detectar algunos aciertos y fallas, por ejemplo, si se entiende la pregunta y, en estos casos, si expresan patrones que no reflejen la aleatoriedad en sus sucesiones.

Pregunta 5: Uno de tus compañeros considera que cualquier resultado tiene la misma probabilidad de ocurrir, ¿Estás de acuerdo con él? Explica tu respuesta.

Con esta pregunta se pretende identificar si el estudiante se deja llevar por el sesgo de equiprobabilidad o si, por el contrario, tiene claro que la distribución tiene probabilidades mayores en los valores centrales de la variable aleatoria que en valores los extremos. Se espera como respuesta correcta algo como lo siguiente:

No estoy de acuerdo, porque las probabilidades de 1 y 2 es de $\frac{3}{8}$ cada una y de los otros valores de la variable (0 y 3) es de $\frac{1}{8}$.

Pregunta 6: ¿Crees que después de muchos lanzamientos, todos los resultados posibles caerán el mismo número de veces? Justifica tu respuesta.

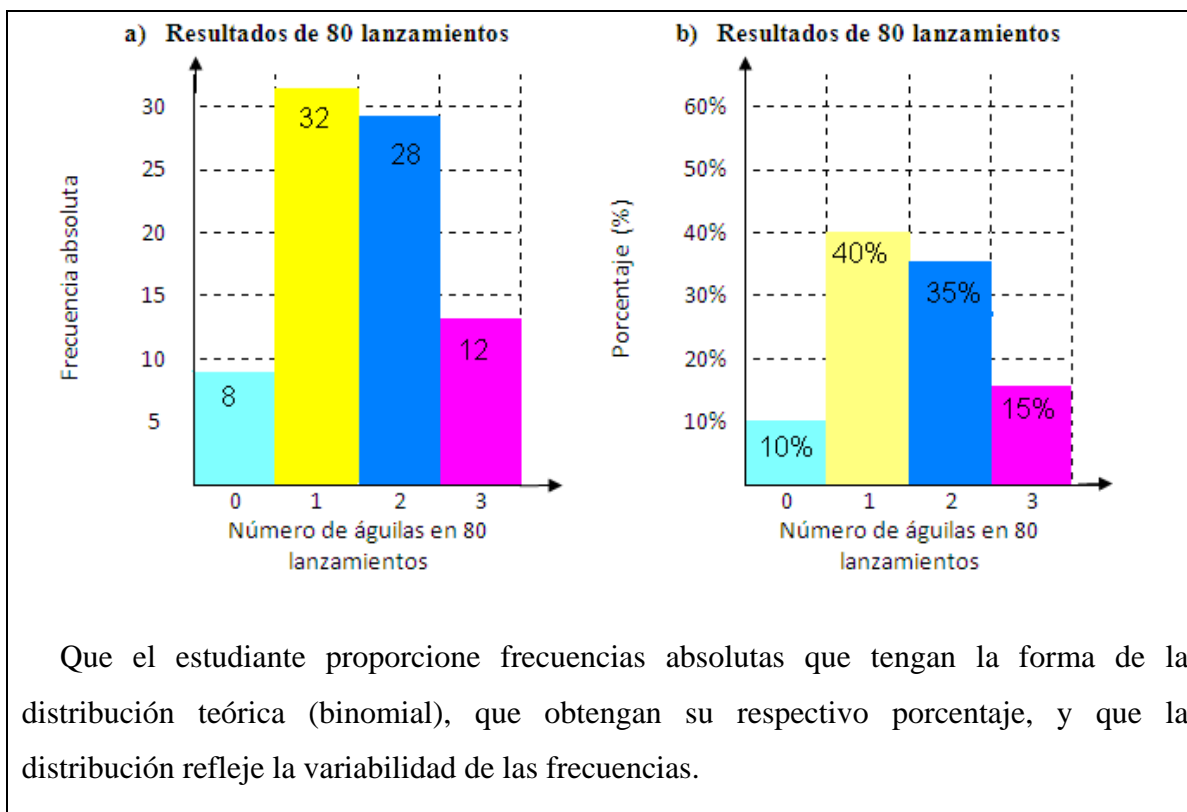
Esta pregunta tiene como fin que los estudiantes nuevamente establezcan una relación entre el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación con una distribución de frecuencias; en este caso, se les sugiere una distribución uniforme para identificar si persiste el sesgo de equiprobabilidad; ellos deben manifestar su desacuerdo con lo sugerido, por ejemplo, podrían responder como sigue:

No. Porque cuando se hacen muchos lanzamientos, los valores de la variable 1 y 2 tienden a ser los más frecuentes, ya que tienen una probabilidad teórica de $\frac{3}{8}$ cada uno, mientras que los valores 0 y 3, tienden a ser los menos frecuentes al tener una probabilidad teórica de $\frac{1}{8}$ cada uno.

Pregunta 7: Imagina que realizas 80 lanzamientos. En el par de ejes coordenados de la izquierda dibuja un diagrama de barras que represente la frecuencia con la que crees que ocurre cada valor de la variable; en el par de ejes de la derecha, dibuja el diagrama correspondiente al anterior pero en porcentajes:

El propósito de esta pregunta es que los estudiantes realicen predicciones de frecuencias absolutas esperadas y la traduzcan a los correspondientes de frecuencias relativas en porcentajes. Se espera que los estudiantes reflejen en sus propuestas el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación y que establezcan una relación plausible entre las

probabilidades y las frecuencias para 80 sorteos. Dicha relación es atribuir a los valores medios de la variable mayor frecuencia que a los valores extremos. Por ejemplo:



Pregunta 8: Considera que en un lanzamiento 3 amigos y tu van a apostar por alguno de los resultados (0, 1, 2 ó 3 águilas), ¿cuál elegirías y por qué?

Con esta pregunta se explora la manera en que los estudiantes aplican su modelo de probabilidad en una situación de apuestas. Algunos conocen que un evento es más probable que otros y, sin embargo, cuando tienen que apostar por algún evento, no utilizan su conocimiento para elegir el más probable, sino que lo hacen con base en creencias o gustos. Una respuesta adecuada sería como al siguiente:

Elegiría 1 o 2 águilas porque son los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de salir ($3/8$ cada una).

Pregunta 9: Piensa y escribe la cantidad de veces que se podría obtener 0, 1, 2 y 3 águilas para cada número de lanzamientos. *En cada columna la suma de los resultados debe ser igual al número de lanzamientos.*

Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

Con esta pregunta se quiere explorar las predicciones de los estudiantes de las distribuciones de secuencias de experimentos de diferentes números de lanzamientos (20, 30, 100, etc.). En particular, observar la forma en que representan en las frecuencias el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación. Aunque en 20 y 30 lanzamientos no se espera que las distribuciones tengan una forma binomial, a partir de 100 ya se deben presentar con claridad que los valores 1 y 2 tienen más frecuencia. Un ejemplo de una solución que consideramos correcta es como la siguiente (resultado de una simulación en Fathom):

Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	2	8	12	11	63	126
1 Águilas	8	12	37	64	188	374
2 Águilas	7	5	38	56	187	376
3 Águilas	3	5	13	19	62	124
Total	20	30	100	150	500	1000

Las respuestas son aproximadas a la probabilidad teórica, no necesariamente debe ser la que se encuentra en la tabla.

Pregunta 10: Describe el criterio que seguiste para distribuir las frecuencias entre los resultados; argumenta tu respuesta:

El objetivo es explorar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones propuestas. El estudiante podrá expresar si considera los distintos aspectos a tener en cuenta, como el modelo probabilísticos que atribuye a la situación y la variabilidad. Por ejemplo, una posible respuesta es:

Tomando en consideración las probabilidades de cada valor de la variable ($1/8$ para 0 y 3, y $3/8$ para 1 y 2) obtuve la parte proporcional para cada número de lanzamientos considerando un margen de error por la variabilidad.

Pregunta 11: Piensa y escribe el porcentaje en que podría ocurrir cada posible resultado para el número de lanzamientos que se indican en la primera fila. *En cada columna la suma de los porcentajes debe ser igual al cien por ciento.*

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

El objetivo es explorar las predicciones de los estudiantes de experimentos a corto, mediano y largo plazo con distribuciones de porcentajes y examinar los argumentos que ofrecen para justificarlas. Una buena respuesta, tendrá porcentajes no muy próximos a la probabilidad teórica cuando el número de repeticiones no son muy grandes (20, 30), pero se van acercando cuando el número de repeticiones crece. Esta intuición prefigura la ley de los grandes números. Un cuadro guía para ver que

Lanzamientos Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%
1 Águilas	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%
2 Águilas	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%
3 Águilas	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Pregunta 12: ¿Por qué piensas que los porcentajes anteriores son razonables?

El objetivo es explorar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones de frecuencias que propusieron. Se esperan respuestas como la siguiente:

Porque se basan en la probabilidad de cada valor de la variable (aprox. 12.5% para los valores de la variable 0 y 3, y 37.5% para los valores de la variable 1 y 2)

Pregunta 13: ¿Cuál crees que será el valor de la probabilidad de ocurrir de cada resultado?

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	

El propósito de esta pregunta averiguar cuál es la distribución de probabilidades que los estudiantes atribuyen a la situación. La respuesta que se considera de mayor calidad es aquella en la que se propone la distribución teórica, es decir, la siguiente distribución.

Águilas	0	1	2	3
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8

CAPITULO 5: ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL PRE – TEST

5.1. Introducción

En este capítulo se analizan los datos obtenidos en el cuestionario diagnóstico llamado “Las tres monedas”, el cual consistía en predecir el comportamiento de un problema de tipo binomial, caso del número de águilas que ocurren al lanzar tres monedas, y las nociones que tienen los estudiantes sobre la variable aleatoria (0, 1, 2 y 3 águilas).

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron de acuerdo a la Taxonomía SOLO; cabe recordar que de acuerdo con esta taxonomía se clasifican las respuestas de los estudiantes y no a los estudiantes. En la Taxonomía SOLO se postulan 5 niveles de complejidad estructural de las respuestas; son las siguientes: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural y Relacional. Un caso especial son los casos en los que no hay respuesta, se clasifican en la categoría denominada “No contestó”. En la tabla 5.1.1 se pueden observar las características que definen cada nivel estructural de acuerdo a ciertos rasgos que presenten las respuestas a las tareas:

Símbolo	Nivel estructural	Características:
P	Preestructural	La respuesta no se refiere a ninguna componente pertinente o su formulación no tiene mucho sentido.
U	Uniestructural	Solo se utiliza una componente de las que se necesitan para responder adecuadamente a la pregunta o se hace referencia a dos o más pero incompletos o con errores fuertes.
M	Multiestructural	Se hace referencia a dos o más de los aspectos relevantes y se relacionan de manera conveniente, dando lugar a la respuesta correcta.
R	Relacional	Se toman en cuenta dos o más aspectos relevantes y se relacionan de manera conveniente, dando lugar a la respuesta correcta.

Tabla 5.1.1 Clasificación del nivel estructural de la Taxonomía SOLO

5.2. Resultados del Pre – Test

En este apartado describiremos los resultados del análisis de las 13 preguntas del cuestionario diagnóstico. En los ejemplos de las primeras dos preguntas, aparece la componente con un subíndice, lo cual significa que el estudiante consideró la componente de forma completa (+); por ejemplo, al considerar el espacio muestral describe los ocho elementos para el lanzamiento de tres monedas. De forma incompleta (-); por ejemplo, tal vez consideró el espacio muestral, sin embargo no escribió todas las combinaciones. Y con un subíndice (0), lo cual indica que en su respuesta utilizó la componente pero no lo indica, por ejemplo, cuando se dice que hay combinaciones pero no se menciona ninguna de ellas.

5.2.1. Análisis de las respuestas a la pregunta 1

Pregunta 1: De aquí en adelante, llamaremos **lanzamiento** a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Se realiza un lanzamiento y se observa “el número de águilas que ocurren” (llamado **variable** para esta encuesta). Enlista todos los posibles valores que puede tomar esta variable.

***Objetivo:** Propiciar que los estudiantes comiencen a tener contacto con la idea de variable aleatoria y observar cómo describen el recorrido de la variable “número de águilas”, relacionado con el lanzamiento de tres monedas.*

Los estudiantes pueden centrarse sólo en determinar los valores de la variable o pueden relacionar su respuesta con el espacio muestral. Debe notarse que en la pregunta no se hace referencia al espacio muestral, ni a la probabilidades.

Respuesta esperada:

La variable puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3 águilas.

Aunque se espera que algunos relacionen esos valores con los elementos del espacio muestral, probablemente expresados en la forma: AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA y SSS.

Componentes de la respuesta 1:

Para esta pregunta sobre identificar el recorrido de la variable aleatoria se tomaron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

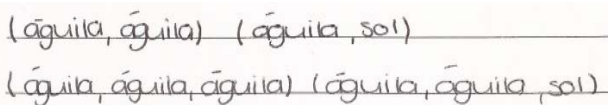
- a) Identifica la variable aleatoria, es decir el número de águilas que puede ocurrir en el lanzamiento de tres monedas. (Número de águilas: 0, 1, 2 y 3 águilas)
- b) Percibe la unidad de análisis, es decir; percibe que el problema se trata del lanzamiento de tres monedas y describe resultados de al menos una combinación con una secuencia de águilas y soles de longitud 3.
- c) Considera el Espacio Muestral (EM) relacionados con el lanzamiento de tres monedas (8 posibles combinaciones: AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA y SSS.)

5.2.1.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 1

Considerando la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas en base a la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, los cuales se mostraran solo algunos a continuación:

Ejemplos de respuestas sin nivel estructural

No contesto (NC): Que el estudiante no conteste la pregunta, o bien ponga respuestas pero las borre o las encierre entre paréntesis pues se les dio la instrucción de que lo que estuviera incorrecto lo encerrara entre paréntesis. Por lo tanto podemos concluir que el estudiante C04 no da respuesta a la pregunta.

Estudiante C04:	Respuesta: 
-----------------	---

Ejemplos de nivel Preestructural


Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o mencione algo que no esté relacionado con la pregunta, como una manifestación de la falta de comprensión de la pregunta o bien diga cosas sin sentido.

Ejemplos de respuestas en el nivel Preestructural		
Estudiante:	Respuesta:	Comentario:
A10:	sol, águila y así	Las respuestas no reflejan ninguna componente, y muestra el desconocimiento de la pregunta, y en algunos casos su respuesta no tiene sentido.
A20:	ZAP, PAZ, AZP, PPP, AAA, ZZZ	
C08:	La lance y la mayor callo águila y solo dos veces sol	
C14:	Cada una de las variables tiene el 50%	Percibe la unidad de análisis para el lanzamiento de una o dos monedas, o bien da respuesta a otro tipo de pregunta, por lo que al no entender la pregunta su respuesta no refleja ninguna componente.
C15:	SA, AS, AA, SS	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las tres que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplo de la componente b⁺ (completa):	Comentario:
Estudiante A15: Una en la primera, una en la segunda, una en la tercera porque son dos opciones y seria mitad y mitad	Solo percibe la unidad de análisis, pues considera que se trata del lanzamiento de tres monedas.

Ejemplo de la componente b⁺ (completa) y c⁻ (incompleta):	Comentario:
Estudiante C12: 	Percibe la unidad de análisis, y considera el espacio muestral, aunque lo hace de manera incompleta dando solo tres elementos de las ocho combinaciones del EM.

Ejemplo de la componente b^+ (completa) y c^- (incompleta):		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	
C01:	águila, sol, águila - águila, sol, sol - águila, águila, águila	Percibe la unidad de análisis, y considera el EM aunque lo hace de manera incompleta, da un ejemplo de combinación para cada valor de la variable, aunque no identifica cuando el valor de la variable es cero, es decir SSS, por lo que su respuesta se encuentra en uniestructural.
B21:	AAA, AAS, ASS, ASA, SAA, SSA, SAS	Aunque escribe el EM, dando siete de los ocho elementos, lo hace de manera incompleta pues no identifica cuando la variable toma el valor de cero (SSS).

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o tres componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplo de las componente b^+ (completa), a^- (incompleta) y c^0 (no indicada):		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	
A21:	1, 2 y 3. Porque puede que en una caiga águila y en las demás sol o puede que caiga 2 águilas y la otra sol o las 3 águilas	Percibe la unidad de análisis e identifica los valores de la variable aunque lo hace de manera incompleta pues indica solo tres de los cuatro valores que puede tomar; no identifican cuando la variable toma el valor de cero, es decir cuando no cae ninguna águila y es de la forma SSS. Y aunque no indica o escriben el EM lo consideran, pero de manera incompleta.
C16:	Yo pienso que puede ser desde 1 “variable” hasta que las tres monedas caigan águila = 3 variable	

Ejemplo de las componentes a^- (incompleta), b^0 y c^0 (no indicadas):		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	Identifica solo tres valores que puede tomar la variable, faltando identificar cuando toma el valor de cero águilas, es decir cuando en el lanzamiento cae puros soles y es de la forma SSS. Y aunque no lo indican, perciben la unidad de análisis, y el EM, este de manera incompleta pues no detecto SSS.
A07:	Puede ser 1, 2 o 3 porque puede caer un águila o dos y también tres o ningún sol	
C02:	1, 2, 3 águilas	

Ejemplo de las componentes b^+ y c^+ (completas):		Comentario:
Estudiante:	Respuestas:	Identifican las ocho combinaciones del espacio muestral, y perciben la unidad de análisis al considerar cada combinación, pues comprenden que se trata para el lanzamiento de tres monedas, sin embargo no identifica los valores que la variable puede tomar (0, 1, 2 y 3).
A04:	Tres monedas: A,A,A; A,A,S; A,S,A; S,A,A; S,S,S; S,S,A; S,A,S; A,S,S	
B05:	SAS, SAA, AAA, AAS, ASS, ASA, SSS, SSA. 8	
B19:	AAA, AAS, ASA, SAA, SSS, SSA, SAS, ASS	
C20:	sol-sol-sol / sol-sol-águila / sol-águila-sol / águila-sol-sol / águila-águila-águila / águila-águila-sol / águila-sol-águila / sol-águila-águila	

Ejemplo de las componentes b^+ (completa), a^- y c^- (incompletas):	
Estudiante A08:	
Comentario:	Considera solo seis elementos del espacio muestral, y les asigna el valor que toma cada variable, no se percata que la variable puede tomar también el valor de 0 águilas, por lo que su respuesta es incompleta. Percibe la unidad de análisis.

Ejemplo de las componentes b^+ (completa), a^- y c^- (incompletas):	Comentario:
Estudiante C24: Combinado con sol: ASS/ AAA/ ASA/ SSS solo hay un águila por cada moneda y solo ocurrirán 3	Percibe la unidad de análisis, y da ejemplos del EM para cada valor que puede tomar la variable, identifica solo un valor que ésta puede tomar.

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente las tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplo de las componentes a^+, b^+ y c^+ (completas):	
Comentario: Implícitamente identifica todos los valores que puede tomar la variable pero no los escribe. Percibe la unidad de análisis al considerar las combinaciones para el lanzamiento de tres monedas.	
Estudiante B20:	<i>(ASA, AAA, SAS, SSA, SSS, AAS, SAA), 3 águilas, 2 águilas, 1 águila o en alguna ocasión ninguna.</i>

La tabla 5.2.1 presenta la clasificación de las respuestas de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 1										
P	NINGUNA COMPONENTE	A10	A20	C06	C07	C08	C13	C14	C15	C19
U	b^+ y c^-	A01	A03	A05	A06	A09	A11	A13	A14	A16
		A17	A18	A22	A23	B01	B02	B03	B04	B06
		B07	B08	B09	B12	B13	B14	B15	B16	B21
		B22	C01	C03	C09	C10	C12	C17	C18	C22
	b^+	A15								C23
M	b^+, a^- y c^0	A21	C16							
	a^-, b^0 y c^0	A07	C02							
	b^+ y c^+	A02	A04	A12	A19	B05	B10			
		B11	B17	B18	B19	C20				
	b^+, a^- y c^-	A08	C11	C21	C24					
R	a^+, b^+ y c^+	B20	C05							
NC: El estudiante C04 no contestó la pregunta 1.										

Tabla 5.2.1 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 1

Como podemos observar la mayor parte de las respuestas dadas por los estudiantes se concentran en el nivel Uniestructural, las cuales representan el 55% (38/69); mientras que para el nivel Multiestructural contiene 28% (19/69), y para el nivel relacional sólo fue el 3% (2/69). De estos 59 estudiantes que contienen al menos una componente, todos contienen la componente **b**, esto significa que perciben que se trata del lanzamiento de tres monedas, y también la mayoría contiene la componente **c**, es decir, proporcionaron al menos una combinación del espacio muestral para el lanzamiento de tres monedas. Sólo el 17% (10/59) de las respuestas que contienen alguna componente, consideraron la componente **a**, es decir identificaron el recorrido de la variable aleatoria “el número de águilas”, sin embargo de estas solo el 3% (2/59) identificaron todos los posibles valores que la variable puede tomar (0, 1, 2 y 3 águilas).

El nivel preestructural está formado por el 13% (9/69) de las respuestas y un 1.4% (1/69) no contesto a la pregunta; quiere decir que en el 14% de las respuestas se reflejó falta de comprensión, ya que no se consideró ninguna componente. A continuación se muestra en la figura 5.2.1 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 1 de los diferentes niveles de la taxonomía:

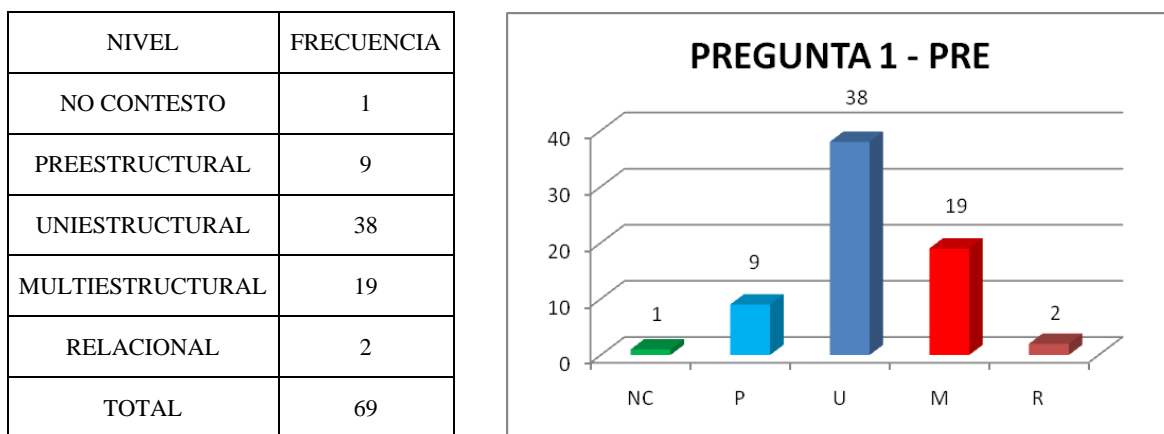


Figura 5.2.1 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 1

En este caso, casi todos los estudiantes entendieron la pregunta, pues la mayoría de sus respuestas se encuentra en los niveles uniestructural, multiestructural y relacional. Sin embargo, el objetivo de la pregunta era observar si el estudiante identificaba el recorrido de la variable, es decir el número de águilas que puede tomar el valor de la variable en el lanzamiento de tres monedas, y solo el 2/69 (3%) pudo hacerlo correctamente.

Los estudiantes utilizan con más frecuencia los símbolos descriptivos del espacio muestral (las unidades: AAA, AAS, ...) y no son proclives a utilizar los valores de la variable. Estos son más abstractos que aquellos, pues sólo se centran en la ocurrencia de águila, desechando la sucesión precisa. También parece que al estar definida la variable en términos del número de águilas, inhibe en los estudiantes el evento de ausencia de águilas (SSS) y tienden a omitirla y a no considerar el valor cero. Así, parece que el paso del espacio muestral a la variable aleatoria encierra ciertas dificultades.

5.2.2. Análisis de las respuestas a la pregunta 2

Pregunta 2: Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable “número de águilas que ocurren”. En la siguiente tabla anota en la columna de la izquierda, los posibles valores de la variable y en la columna de la derecha, el número de veces que crees que ocurra cada valor:

Valor de la variable	Frecuencia
Total	

Objetivo: Explorar la manera en que los estudiantes expresan el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación observando la frecuencia que asignan a cada valor de la variable.

Respuesta esperada:

Hay tres opciones posibles, uno es que las frecuencias que proponen no sigan ningún patrón identificable, otro que reflejen un modelo equiprobable, en el que cada frecuencia sería igual a 250. Finalmente, pueden identificar que la distribución es proporcional a 1, 3, 3, 1. En este caso hay dos opciones, que propongan una frecuencia exactamente proporcional a la distribución o que traten de expresar la presencia de la variabilidad ofreciendo frecuencias aproximadas a los valores esperados pero no iguales.

Estas son las respuestas que se consideran de mejor calidad; hay dos posibilidades: las distribuciones de frecuencia plausibles se encuentran en la familia de distribuciones que se describen en la siguiente tabla:

Valor de la variable	0	1	2	3	Total
Frecuencia	$125 + e_1$	$375 + e_2$	$375 + e_3$	$125 + e_4$	1000

Donde los errores suman cero y sus valores absolutos están acotados; el primero y el cuarto por 7 y el segundo y tercero por 10.

O bien algunos, algunos pueden preferir considerar el Espacio Muestral, en cuyo caso sus frecuencias deben estar contenidas en la familia siguiente:

Variable	AAA	AAS	ASA	SAA	SSA	SAS	ASS	SSS	Total
Frecuencia	$125 + e_1$	$125 + e_2$	$125 + e_3$	$125 + e_4$	$125 + e_5$	$125 + e_6$	$125 + e_7$	$125 + e_8$	1000

Donde los errores suman cero y sus valores absolutos están acotados por 7.

Componentes de la respuesta 2:

Para esta pregunta se tomó en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- Identifica los valores de la variable aleatoria o elementos del EM
- Las frecuencias suman 1000 o 100%
- Los valores de la variable 1 y 2 de la distribución propuesta tiene mayor frecuencia
- Las frecuencias varían levemente respecto a los valores teóricos de la distribución

5.2.2.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 2

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios. A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplo:			Comentario:
Estudiante A01:	Valor de la variable	Frecuencia	El estudiante no percibe la unidad de análisis, es decir, no representa un lanzamiento de tres monedas.
	S	1	
	A	1	
	S	1	
	A	1	
Total			
Estudiante A20:	Valor de la variable	Frecuencia	Los estudiantes A20 y C15 no entienden el problema, lo cual hace que sus respuestas no tengan sentido en el contexto del problema.
	500	ZAP	
	200	AAA	
	100	PAZ	
	100	PPP	
Total	ZZZ		
Estudiante C15:	Valor de la variable	Frecuencia	
	SA	205 de 1000	
	AS	100 de mil	
	SS	78 de mil	
	AA	308 de mil	
	Total	691	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder a la pregunta o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplo de las componentes a⁻ (incompleta):			Comentario:
Estudiante B09:	Valor de la variable	Frecuencia	Considera el EM, aunque lo hace de manera incompleta, pues no escribe los ocho elementos, por lo que la respuesta solo alcanza el nivel uniestructural.
	AAA	Puede ser mil	
	ASA	Puede ser mil	
	AAS	Puede ser mil	
	SAA	Puede ser mil	
Estudiante C02:	Valor de la variable	Frecuencia	Considera los valores que la variable puede tomar, sin embargo lo hace de manera incompleta, pues no detecta que la variable puede tomar el valor de cero, es decir cuando el lanzamiento de tres monedas es de la forma SSS. Y aunque da una frecuencia, esta no es próxima a la distribución teórica.
	3	50	
	2	30	
	1	70	
	Total	150	

Ejemplo de las componentes b^+ (completa):			Comentario:
Estudiante A06	Valor de la variable	Frecuencia	
	Águila	500	
	Sol	200	
	Águila	200	
	sol	100	
	Total	1000	
Estudiante A15	Valor de la variable	Frecuencia	
	32	200	
	25	400	
	28	100	
	41	300	
	Total	1000	
Estudiante C22	Valor de la variable	Frecuencia	
	3	250	
	2	250	
	2	250	
	2	250	
	Total	1000	

Ejemplo de las componentes b^+ (completa) y a^- (incompleta):			Comentario:
Estudiante A04:	Valor de la variable	Frecuencia	
	AAA	250	
	SSS	250	
	ASS	250	
	SSA	250	
	Total	1000	
Estudiante A21:	Valor de la variable	Frecuencia	
	1	250	
	2	500	
	3	250	
	Total	1000	
Estudiante C06:	Valor de la variable	Frecuencia	
	SAS	300	
	ASS	200	
	AAS	100	
	SSA	400	
	Total	1000	

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlos entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplo de las componentes a^+ y b^+ (completas):		Comentario:												
Estudiante A05	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Valor de la variable</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>AAS=2 variable</td> <td>50% de 1000</td> </tr> <tr> <td>ASS=1 variable</td> <td>20% de 1000</td> </tr> <tr> <td>AAA=3 variable</td> <td>10% de 1000</td> </tr> <tr> <td>SSS=0 variable</td> <td>20% de 1000</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>1000</td> </tr> </tbody> </table>	Valor de la variable	Frecuencia	AAS=2 variable	50% de 1000	ASS=1 variable	20% de 1000	AAA=3 variable	10% de 1000	SSS=0 variable	20% de 1000	Total	1000	Representa un elemento del EM para cada valor que la variable puede tomar en el lanzamiento de tres monedas y eso le sirve para indicar los valores que puede tomar esta variable. Sin embargo al proponer sus frecuencias, estas no son próximas a la distribución teórica, por lo que su respuesta es incompleta, pues solo suma 1000.
	Valor de la variable	Frecuencia												
	AAS=2 variable	50% de 1000												
	ASS=1 variable	20% de 1000												
	AAA=3 variable	10% de 1000												
	SSS=0 variable	20% de 1000												
Total	1000													
Estudiante C11	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Valor de la variable</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0 águilas</td> <td>250</td> </tr> <tr> <td>1 águila</td> <td>250</td> </tr> <tr> <td>2 águilas</td> <td>250</td> </tr> <tr> <td>3 águilas</td> <td>250</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>1000</td> </tr> </tbody> </table>	Valor de la variable	Frecuencia	0 águilas	250	1 águila	250	2 águilas	250	3 águilas	250	Total	1000	Percibe la unidad de análisis al identificar los valores que la variable puede tomar para el caso del lanzamiento de tres monedas. Sin embargo debido a que no percibe los elementos del EM, cuando propone sus frecuencias, divide los 1000 lanzamientos entre cuatro que es el número de los valores que la variable puede tomar (0, 1, 2 y 3), por lo tanto, la distribución de frecuencias que propone no es la adecuada.
	Valor de la variable	Frecuencia												
	0 águilas	250												
	1 águila	250												
	2 águilas	250												
	3 águilas	250												
Total	1000													

Ejemplo de las componentes b^+ y c^+ (completas) y a^- (incompleta):		Comentario:												
Estudiante A16:	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Valor de la variable</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>AAA</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>AAS</td> <td>300</td> </tr> <tr> <td>ASS</td> <td>500</td> </tr> <tr> <td>SSS</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>1000</td> </tr> </tbody> </table>	Valor de la variable	Frecuencia	AAA	100	AAS	300	ASS	500	SSS	100	Total	1000	Le asigna mayor frecuencia a las secuencias de los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir (1 y 2). Percibe el espacio muestral aunque lo hace de manera incompleta y su frecuencia suma 1000 lanzamientos.
	Valor de la variable	Frecuencia												
	AAA	100												
	AAS	300												
	ASS	500												
	SSS	100												
Total	1000													

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes y esto le permite llegar a la solución.

Ejemplo de las componentes a^+ , b^+ y c^+ (completas):		Comentario:												
Estudiante B20:	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Valor de la variable</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>1000</td> </tr> </tbody> </table>	Valor de la variable	Frecuencia	3	100	2	400	1	400	0	100	Total	1000	Percibe la unidad de análisis, al identificar todos los posibles valores que la variable puede tomar en el lanzamiento de tres monedas. Y en las frecuencias que propone, la distribución tiene forma de campana. Le da el mismo valor a los valores de la variable 0 y 3 e igual a los valores 1 y 2. Asignándole más frecuencia los de mayor probabilidad. Lo cual podría indicar que sabe que los valores 0 y 3 y 1 y 2 tienen la misma probabilidad, y que estos últimos valores de la variable, tienen mayor probabilidad.
	Valor de la variable	Frecuencia												
	3	100												
	2	400												
	1	400												
	0	100												
Total	1000													

La tabla 5.2.2 presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 2									
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A03	A10	A20	B01	B06	C03	C07
		C14	C15	C19	A11	A19	B03	B08	B09
U	a^- (incompleta)	B10	B11	B13	B18	B19	B22	C02	C17
	b^+ (completa)	A06	A07	A15	C13	C21	C22	C18	C20
	b^+ (completa) y a^- (incompleta)	A02	A04	A08	A09	A12	A13	A14	C23
		A17	A18	A21	A22	A23	B02	B07	B12
		B14	B16	B17	B21	C04	C06	C08	C09
M	a^+ y b^+ (completas)	A05	B05	C11	C16		C10	C12	C24
	b^+ y c^+ (completas) y a^- (incompleta)	A16	B04	C05					
	b^+ (completa), a^- y c^- (incompletas)	B15	C01						
R	a^+ , b^+ y c^+ (completas)	B20							

Tabla 5.2.2 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 2

Como podemos observar, la mayor parte de las respuestas dadas por los estudiantes se concentran en el nivel Uniestructural, las cuales representan el 70% (48/69); mientras que para el nivel Multiestructural representan el 13% (9/69), y para el nivel relacional solo representa el 1/69 (1.4%) se encuentran en este nivel estructural.

De estos (58) estudiantes que contienen al menos una componente, el 90% (52/58) contiene la componente **a**, es decir identificaron de manera incompleta o completa el recorrido de la variable aleatoria “el número de águilas” o bien proporcionaron al menos una combinación del espacio muestral para el lanzamiento de tres monedas, el 72% (42/58) propuso frecuencias cuya suma es igual a 1000 o 100%. Sobre la componente **c**, solo el 10% (6/58) asignó mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2, y solo el 2% (1/58) propuso su frecuencia próxima a la distribución teórica.

En el nivel preestructural se encuentran el 16% (11/69) de las respuestas dadas por los estudiantes. A continuación se muestra en la figura 5.2.2 las frecuencias de cada nivel a la pregunta 2, y su respectiva gráfica:

NIVEL	FRECUENCIA
PREESTRUCTURAL	11
UNIESTRUCTURAL	48
MULTIESTRUCTURAL	9
RELACIONAL	1
TOTAL	69

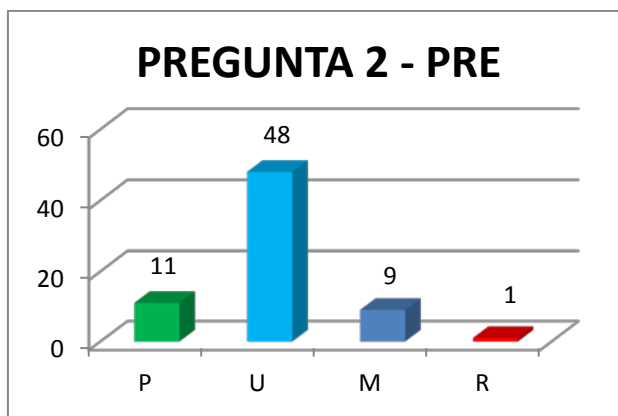


Figura 5.2.2 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 2

Se puede suponer, con base en la figura 5.2.2 que los estudiantes entendieron la pregunta, pues la mayoría de las respuestas contiene al menos una componente. Predominan, sin embargo, los niveles preestructural y uniestructural, y pocas respuestas se clasifican en los niveles altos. La mayoría sólo percibe que el experimento consiste en lanzar tres monedas pero no acierta en describir de manera completa los valores de la variable o los elementos del espacio muestral, ni en prever unas frecuencias razonables.

5.2.3. Análisis de las respuestas a la pregunta 3

Pregunta 3: Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable (a cada ocurrencia le llamaremos: **resultado**):

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	
Total	

Objetivo: Observar la distribución de probabilidades que los estudiantes asignan a la situación.

Respuesta esperada:

Probablemente las respuestas que aquí se ofrezcan tendrán relación con las dadas en la pregunta 2. Las probabilidades que asignen a cada valor de la variable pueden ser probabilidades subjetivas, dentro de las que se encuentra la distribución equiprobable, o pueden ser el resultado de la consideración del espacio muestral y la aplicación de la definición clásica de probabilidad. Esta es la respuesta que se evalúa como de mejor calidad y es la siguiente:

Águilas	0	1	2	3	TOTAL
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Componentes de la respuesta 3:

Para esta pregunta se tienen en cuenta las siguientes componentes:

- Da un número fraccionario o un número porcentual para cada valor de la variable.
- En las frecuencias que propone la suma es igual a 1, 100% o bien alguna potencia de 10.
- La distribución dada es próxima o igual a la distribución teórica. Que la distribución tenga forma de campana.

5.2.3.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 3

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas con base en la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de estos, se muestran algunos ejemplos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplo de respuestas que se encuentran en el nivel preestructural:					
En los siguientes ejemplos los estudiantes con su respuesta muestran muy baja comprensión de la pregunta, pues puede decirse que no consideran ninguna componente. No representan las probabilidades con números fraccionarios o porcentajes, donde su suma sea igual a 1 o 100%, ni asignan mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2.					
Estudiante A14:	Águilas	Probabilidad	Estudiante A20:	Águilas	Probabilidad
	0	50		0	5
	1	20		1	10
	2	10		2	4
	3	14		3	2
	Total	94		Total	21
Estudiante B01:	Águilas	Probabilidad	Estudiante C17:	Águilas	Probabilidad
	0	80%		0	0
	1	70%		1	3 oportunidades
	2	99%		2	1
	3	50%		3	2
	Total	299%		Total	6

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder los ejercicios o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplo de respuestas que contienen la componente a:

Comentario: Los siguientes ejemplos da un número fraccionario o un número porcentual para cada valor de la variable, sin embargo la suma no corresponde al 100% o a 1, ni tiene forma de campana.

Estudiante A17:	Águilas	Probabilidad	Estudiante B01:	Águilas	Probabilidad
	0	0/1000		0	80%
	1	100/1000		1	70%
	2	200/1000		2	99%
	3	300/1000		3	55%
	Total	600/1000		Total	299%
Estudiante B17:	Águilas	Probabilidad	Estudiante C19:	Águilas	Probabilidad
	0	25%		0	4.96%
	1	20%		1	8%
	2	30%		2	1.6%
	3	20%		3	1.44%
	Total	95%		Total	16%

Ejemplo de respuestas que contienen la componente b:

Comentario: La suma de las frecuencias que propone es igual a 100, o bien alguna potencia de 10, sin embargo no asigna mayor frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad, ni asigna números porcentuales o fraccionarios.

Estudiante B14:	Águilas	Probabilidad	Estudiante C24:	Águilas	Probabilidad
	0	30		0	250
	1	20		1	250
	2	20		2	250
	3	30		3	250
	Total	100		Total	1000

Ejemplo de respuestas que contienen la componente c:

Comentario: El estudiante propone frecuencias con una distribución en forma de campana, sin embargo estas no suman 1 o 100% o bien alguna potencia de 10, ni propone números fraccionarios o porcentuales, por lo que se encuentra en el nivel uniestructural.

Estudiante A07:		El estudiante A07 toma en cuenta que son ocho posibilidades de que ocurra cada valor de la variable, y aunque le asigna correctamente la frecuencia de acuerdo a las posibilidades que tiene cada valor de la variable no lo asigna como fracción; se olvida o no percibe que la probabilidad es un número entre cero y uno. Por lo tanto solo se queda en uniestructural, pues su distribución es en forma de campana.
Águilas	Probabilidad	
0	1	
1	3	
2	3	
3	1	
Total	8	

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes a y b:

Comentario: Los estudiantes asignan un número porcentual o fraccionario para cada valor de la variable, cuya suma es igual a 1 o al 100%. Sin embargo en la frecuencia que propone no le asigna mayor probabilidad a los valores 1 y 2, es decir no se percató que estos valores tienen mayor probabilidad de ocurrir.

Estudiante B11:	Águilas	Probabilidad	Estudiante C23:	Águilas	Probabilidad
	0	10%		0	$\frac{1}{4}$
	1	30%		1	$\frac{1}{4}$
	2	30%		2	$\frac{1}{4}$
	3	30%		3	$\frac{1}{4}$
	Total	100%		Total	4/4

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes b y c:			
Estudiante A09:			Comentario:
	Águilas	Probabilidad	El estudiante propone frecuencias que tiene una distribución en forma de campana, y la suma corresponde a 100 o bien alguna potencia de 10, sin embargo no propone números porcentuales ni fraccionarios.
	0	10	
	1	45	
	2	35	
	3	10	
	Total	100	

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes a, b y c.					
En su respuesta propone frecuencias en números porcentuales o fraccionarios cuya suma corresponde al 100%, o a 1. Además, la distribución de sus frecuencias tiene una distribución en forma de campana.					
Estudiante A02:	Águilas	Probabilidad	Estudiante B13:	Águilas	Probabilidad
	0	10%		0	10%
	1	40%		1	40%
	2	30%		2	40%
	3	20%		3	10%
	Total	100%		Total	100%
Estudiante B16:	Águilas	Probabilidad	Estudiante C01:	Águilas	Probabilidad
	0	20%		0	10%
	1	30%		1	35%
	2	30%		2	40%
	3	20%		3	15%
	Total	100%		Total	100%

La tabla 5.2.3 presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas a la pregunta 3.

PRE-TEST – PREGUNTA 3											
P	NINGUNA COMPONENTE	A05	A06	A10	A12	A13	A14	A15	A19	A20	B02
		B07	B08	B12	B18	B20	C06	C14	C17	C22	
U	a	A17	B01	B06	B09	B10	B15	B17	B21	C02	C09
	b	A01	B04	B14	C03	C08	C24				C19
	c	A03	A07	A21	C12						
M	a y b	A04	A08	A09	A11	A16	A18	A22	B03	B05	B11
		B19	B22	C04	C05	C07	C10	C11	C13	C15	C16
	b y c	A23							C18	C21	C23
R	a, b y c	A02	B13	B16	C01						
NC: El estudiante C20 no contestó la pregunta.											

Tabla 5.2.3 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 3

De acuerdo a la tabla anterior, 19 respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel preestructural (19 de 69), por lo que podemos mencionar que aproximadamente el 27.5% mostró con su respuesta, una clara incomprensión de la pregunta o bien no supo darle respuesta, proponiendo respuestas inadecuadas.

Mientras que aproximadamente el 30% (21/69) se encuentra en el nivel uniestructural, el 35% (24/69) se encuentra en el nivel multiestructural, y solo el 6 % (4/69) se ubica en el nivel relacional. De las (49) respuestas que contienen al menos una componente, el 77.5% (38/49) contienen la componente **a**, es decir, propusieron frecuencias como un número porcentual o fraccionario, y solo el 70% (34/49) contiene la componente **b**, donde la suma de esas frecuencias que proponen corresponde al 100% o a 1, o bien a una potencia de 10. Sobre la componente **c**, solo el 18% (9/49) la contiene, es decir solo 9 de las respuestas dadas por los estudiantes propusieron frecuencias con una distribución en forma de campana considerando que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir.

A continuación se muestra en la figura 5.2.3 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 3 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	1
PREESTRUCTURAL	19
UNIESTRUCTURAL	21
MULTIESTRUCTURAL	24
RELACIONAL	4
TOTAL	69

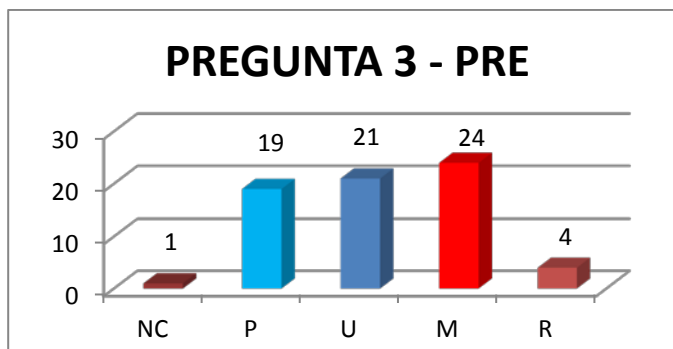


Figura 5.2.3 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 3

Como podemos observar, solo 19 de las 69 respuestas dadas por los estudiantes no entendió la pregunta o bien no pudo representar su respuesta de forma correcta. Podemos observar que las respuestas de varios estudiantes se encuentran en los niveles esperados (uniestructural, multiestructural y relacional), pues el 71% representa estos niveles. Cabe mencionar que aunque hubo buenos resultados, la mayoría de los estudiantes no reconoce que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir pues solo un 13% (9/69) le asignaron mayor frecuencia, sin embargo conviene notar que para esta pregunta el 26% (18/69) distribuyó sus frecuencias como si fueran resultado de una distribución equiprobable.

Un objetivo al hacer esta pregunta consiste en evaluar los valores subjetivos que los estudiantes asignan a la distribución de probabilidad y compararlos con los teóricos. Los resultados indican que solo el 6% (4/69) del total propusieron frecuencias como un número porcentual o fraccionario cuya suma es igual a 1 o al 100% y su distribución tiene forma de campana.

5.2.4. Análisis de las respuestas a la pregunta 4

Pregunta 4: Imagínate que tienes las tres monedas y realizas 16 lanzamientos (de 3 monedas cada uno), escribe los resultados que creas que se obtendrán:

Resultados	Lanzamientos																Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
0 Águilas																	
1 Águilas																	
2 Águilas																	
3 Águilas																	

Objetivo: *Explorar la percepción de la aleatoriedad del juego por parte del estudiante al generar una secuencia aleatoria y, además que reflejara su modelo de probabilidad en la distribución marginal.*

El propósito no fue bien representado en la pregunta ya que 16 repeticiones en un número aún bajo. La restricción a este número de repeticiones obedeció al corto tiempo que se tenía para que respondieran el cuestionario inicial. De cualquier manera, es posible detectar algunos aciertos y fallas, por ejemplo, si se entiende la pregunta y, en estos casos, si expresan patrones que no reflejen la aleatoriedad en sus sucesiones.

Componentes de la respuesta 4:

En esta pregunta sobre generar secuencias aleatorias se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) La elección de un sólo valor de la variable por lanzamiento verificando que en el total, la suma corresponda al número de lanzamientos (16 lanzamientos).
- b) Se proponen frecuencias próximas a la distribución teórica, o bien su distribución tiene forma de campana.
- c) Sentido aleatorio (la ausencia de patrones determinísticos).
- d) Consideración de rachas. Una secuencia adecuada tiene alrededor de tres rachas de longitud 2.

5.2.4.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 4

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas con base en la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se mostraran solo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido, por ejemplo genere secuencias donde no cumpla con ninguna componente, o bien responda con un claro desconocimiento del sentido de la pregunta.

El estudiante A06 no entiende la pregunta por lo que selecciona todas las casillas y les asigna frecuencias, la suma no corresponde al total de 16 lanzamientos.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	30
1 Águilas	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	32
2 Águilas	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	31
3 Águilas	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	32

El estudiante A13, a pesar de que la suma concuerda con los 16 lanzamientos, el estudiante no selecciona todas las casillas, y además seleccionó más de un resultado en el mismo lanzamiento, por lo que su respuesta se encuentra en el nivel preestructural, pues no entendió del todo la pregunta.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas			x			x					x			x			4
1 Águilas	x								x			x			x		4
2 Águilas		x								x						x	3
3 Águilas	x			x			x					x				x	5

El estudiante C06 no entiende la pregunta, pues selecciona más de una vez las casillas, y la suma no corresponde al total de lanzamientos.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	6
1 Águilas	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	5
2 Águilas	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	8
3 Águilas	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Usa sólo una componente de las que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos pero de manera incompleta o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Comentario: Elije solo una casilla para cada uno de los lanzamientos y la suma corresponde al total. Sin embargo, su distribución no se aproxima a la distribución teórica, ni tiene forma de campana y además da indicios de no percibir la aleatoriedad al exhibir patrones (determinísticos).

Los siguientes casos han sido clasificados en uniestructural. La secuencia que propone B16 presenta un claro patrón; en B20 y C02 no son tan evidentes los patrones en su secuencia, no obstante se revelan al observar que los resultados de la secuencia se van alternando, lo que lleva a que la máxima racha es de longitud 1.

Estudiante B16:

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	X				X				X				X				4
1 Águilas		X				X				X				X			4
2 Águilas			X				X				X				X		4
3 Águilas				X				X				X				X	4

Estudiante B20:

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas			X		X				X			X			X		5
1 Águilas		X					X			X			X			X	4
2 Águilas	X			X													3
3 Águilas						X		X			X			X			4

Estudiante C02:

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas		X				X								X			3
1 Águilas	X		X		X		X		X		X		X		X		8
2 Águilas				X								X				X	3
3 Águilas								X		X							2

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a y d:

El estudiante B17 entiende la pregunta, y lo expresa al seleccionar solo una casilla para cada lanzamiento y la suma corresponde al total, además considera una secuencia relativamente adecuada al dar dos rachas de longitud 2, no obstante, no percibe la forma de la distribución, y las frecuencias de sus secuencias no son próximas a la distribución teórica.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas											X	X				X	3
1 Águilas	X		X			X			X						X		5
2 Águilas		X						X						X			3
3 Águilas				X	X		X			X			X				5

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres o más componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a, b, c y d:

Estudiante A08: El estudiante selecciona solo una casilla para cada lanzamiento y la suma corresponde al total de lanzamientos (16 lanzamientos). Su distribución de frecuencias tiene forma de campana y es moderadamente próxima a la distribución teórica. Da indicios de su sentido aleatorio al no generar patrones en su selección de casillas. También presenta una racha de longitud 3 y otra de 2.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas				X							X						2
1 Águilas	X		X					X		X		X	X			X	7
2 Águilas		X			X	X	X							X			5
3 Águilas									X						X		2

Estudiante A22: El estudiante elige solo una casilla para cada lanzamiento y la suma corresponde a los 16 lanzamientos. Además su distribución de frecuencias tiene la forma de campana aunque su aproximación a la teórica es relativamente baja, propone una racha de 2 y una de 4 en su secuencia.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas										X							1
1 Águilas	X			X	X						X					X	5
2 Águilas			X			X	X	X	X			X		X			7
3 Águilas		X											X		X		3

En la tabla 5.2.4 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 4									
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A03	A06	A10	A11	A12	A13	A14
		A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	B03
		B04	B06	B08	B09	B10	B11	B12	B13
		B14	B15	B18	B21	C01	C03	C05	C06
		C09	C12	C13	C14	C17	C19	C22	C23
U	a	A02	A09	A23	B01	B02	B05	B07	C24
		B16	B20	C02	C07	C08	C10	C16	C21
M	a y d	B17							
R	a, b y d	A04	A07	B19	C04	C18			
	a, b, c y d	A05	A08	A22	B22	C11	C15		
NC: El estudiante C20 no contestó la pregunta.									

Tabla 5.2.4 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 4

Los resultados de la tabla anterior la mayoría de respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel preestructural 41 de 69, es decir, el 59% mostró con su respuesta una incomprensión de la pregunta o bien no consideró ninguna de las componentes que se propusieron. Esto nos llevó a hacer modificaciones a la pregunta para el post-test ver anexo D), pues dicho porcentaje se desvía de los esperado.

Por otro lado el 22% (15/69) se encuentra en el nivel uniestructural, solo el 1.5% (1/69) en el nivel multiestructural, y el 16 % (11/69) en el relacional. De las 27 respuestas que contienen al menos una componente, el 100% contienen la componente **a**, es decir eligieron solo una variable por casilla y la suma corresponde a los 16 lanzamientos. El 41% (11/27) contiene la componente **b**, es decir tomo en cuenta la aleatoriedad al proponer frecuencias con una distribución en forma de campana, o próxima a la distribución teórica, el 44% (12/27) considero la componente **d**, es decir propuso una secuencia aleatoria adecuada de alrededor de tres rachas de longitud 2, y no más de una racha de longitud 5. Y por último solo 22% (6/27) en su respuesta reflejo el sentido aleatorio al no proponer patrones determinísticos.

A continuación se muestra en la figura 5.2.4 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 4 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	1
PREESTRUCTURAL	41
UNIESTRUCTURAL	15
MULTIESTRUCTURAL	1
RELACIONAL	11
TOTAL	69

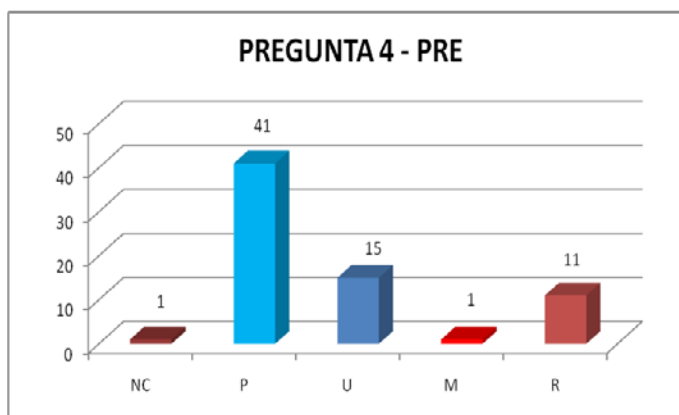


Figura 5.2.4 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 4

Como podemos observar la mayoría de los estudiantes no entendió la pregunta o bien no pudo representar su respuesta de forma correcta, pues las respuestas del 61% se encuentran en los niveles preestructural o no contesto la pregunta. Solo el 39% alcanzó un nivel estructural, en el que al menos contiene una componente. Un objetivo de esta pregunta es explorar la intención y la manera en que los estudiantes consideran la aleatoriedad. El resultado es que pocos (9%) son los que logran proponer secuencias con ciertas características de la aleatoriedad.

5.2.5. Análisis de las respuestas a la pregunta 5

Pregunta 5: Uno de tus compañeros considera que cualquier resultado tiene la misma probabilidad de ocurrir, ¿Estás de acuerdo con él? Explica tu respuesta.

Objetivo: Identificar si el estudiante se deja llevar por el sesgo de equiprobabilidad o si, por el contrario, tiene claro que la distribución tiene probabilidades mayores en los valores centrales de la variable aleatoria que en valores los extremos.

Respuesta esperada:

No estoy de acuerdo, porque las probabilidades de 1 y 2 es de $\frac{3}{8}$ cada una y de los otros valores de la variable (0 y 3) es de $\frac{1}{8}$.

Componentes de la respuesta 5:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Su respuesta a la pregunta anterior es NO. Puede o no dar un argumento, sin embargo este no tiene elementos sólidos que demuestre una explicación sólida.
- b) Argumenta su respuesta identificando los valores de la variable aleatoria que tienen mayor probabilidad de ocurrir o bien los valores menos probables.
- c) Justifica su respuesta mencionando la probabilidad teórica de cada valor de la variable aleatoria. Su argumento se basa en el valor teórico de probabilidad del evento más probable o de la distribución completa.

5.2.5.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 5

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas de la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos ejemplos.

Ejemplos para el nivel preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplos:		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	
A03:	Sí, porque tiene dos lados, entonces la probabilidad que caiga sol es 50% y que caiga águila 50%	Las respuestas de los estudiantes reflejan que no perciben la unidad de análisis, pues sólo se refieren al lanzamiento de una moneda. No reflejan ninguna componente que lleve a la respuesta correcta.
A08:	Sí, hay la misma probabilidad de que salga sol o águila pues cada una es igual a 1 de 2	
B20:	Sí, porque todo puede pasar y si es posible que tengan la misma probabilidad, ya que es un evento independiente y no influye el número de “águilas en este caso”	
C01:	Sí, porque todos tienen el mismo lado de caras, ninguno tiene ventaja o desventaja	
A01:	Sí, porque es el azar	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder los ejercicios o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	
A12:	No, estoy de acuerdo pues porque es muy raro que te pueda salir la misma probabilidad	No está de acuerdo con la pregunta que se le realiza, sin embargo su argumento se basa en ideas idiosincráticas, o en su intuición, y no proporciona una justificación basada en algunas de las otras componentes, por lo que su respuesta solo se queda en el nivel uniestructural.
A19:	No, porque puede cambiar la probabilidad de los lanzamientos	
A20:	No porque es al azar	
B14:	No, porque todo es al azar y puede tener diferente resultado	
C05:	No, porque no se puede estar seguro de que tengan la misma probabilidad	
C18:	No, porque cada determinado número de lanzamientos sale distinto	

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (U): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlos entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:	Comentario:
Estudiante B16 Respuesta: No, porque es menos probable que las tres monedas caigan del mismo lado	Su respuesta es NO y la argumenta mencionando uno de los valores de la variable menos probable (SSS o AAA), sin embargo al no considerar todos los valores de la variable y la probabilidad de cada uno, su respuesta solo alcanza el nivel multiestructural.

Para el nivel Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para este nivel.

En la tabla 5.2.5 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 5											
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09	A10
		A11	A13	A14	A15	A16	A17	A21	A22	A23	B02
		B03	B04	B05	B06	B07	B08	B09	B10	B11	B13
		B15	B17	B18	B20	B21	B22	C01	C02	C03	C04
		C06	C07	C09	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
U	a	A12	A18	A19	A20	B01	B12	C19	C22	C23	C24
M	a y b	B16				B14	B19	C05	C17	C18	C21

NC: Los estudiantes C08 y C20 no contestaron la pregunta.

Tabla 5.2.5 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 5

Como podemos observar en la tabla 5.2.5, la mayoría de las respuestas (81%) se encuentran en el nivel preestructural o en la categoría de no contestó, pues no se encontró en su respuesta alguna componente, la mayoría mencionó que no se sabía qué probabilidad saldría pues era cuestión del azar.

Mientras que el 17% (12/69) de las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel uniestructural, es decir 12 estudiantes no están de acuerdo con que los valores de la variable tienen la misma probabilidad de ocurrir, sin embargo su justificación se basa en intuiciones y en ideas idiosincráticas y solo un 1.4% (1/69) se ubica en el multiestructural justificando su respuesta al proporcionar los valores menos probables de la variable.

A continuación se muestra en la figura 5.2.5 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 5 de los diferentes niveles de la taxonomía:

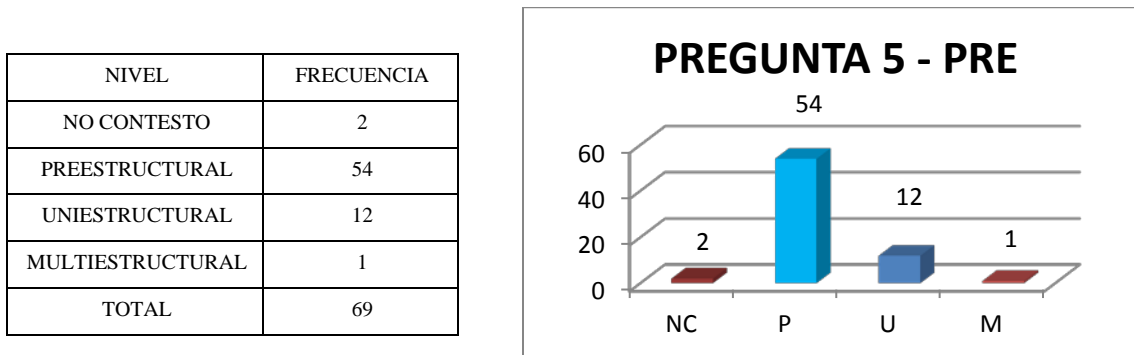


Figura 5.2.5 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 5

Como podemos observar en las frecuencias anteriores para esta pregunta, el nivel de respuestas de los estudiantes solo llega hasta el nivel multiestructural. La mayoría de respuestas se encuentran en el nivel preestructural, lo cual menciona que la mayoría no entendió la pregunta o en su respuesta no tiene idea que es más probable que los valores de la variable 1 y 2 son más probables teóricamente de salir, o bien no pudo expresar sus ideas de forma verbal.

5.2.6. Análisis de las respuestas a la pregunta 6

Pregunta 6: ¿Crees que después de muchos lanzamientos, todos los resultados posibles caerán el mismo número de veces? Justifica tu respuesta.

Objetivo: Esta pregunta tiene como fin que los estudiantes nuevamente establezcan una relación entre el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación con una distribución de frecuencias; en este caso, se les sugiere una distribución uniforme para identificar si persiste el sesgo de equiprobabilidad; ellos deben manifestar su desacuerdo con lo sugerido.

Respuesta esperada:

No. Porque cuando se hacen muchos lanzamientos, los valores de la variable 1 y 2 tienden a ser los más frecuentes, ya que tienen una probabilidad teórica de $\frac{3}{8}$ cada uno, mientras que los valores 0 y 3, tienden a ser los menos frecuentes al tener una probabilidad teórica de $\frac{1}{8}$ cada uno.

Componentes de la respuesta 6:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- Su respuesta es **NO** y argumenta la respuesta identificando los valores de la variable aleatoria que tienen mayor probabilidad de ocurrir o bien los valores menos probables.
- Su respuesta es **NO** y justifica su respuesta mencionando la probabilidad teórica de cada valor de la variable aleatoria. Su argumento se basa en el valor teórico de probabilidad del evento más probable o de la distribución completa.

c) Su respuesta refleja que toma en cuenta la variabilidad.

5.2.6.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 6

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación.

Ejemplos para el nivel preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplos:		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	
A07:	No, porque no importa cuántos lanzamientos sean, sigue siendo azar.	El estudiante no aporta ninguna componente de las necesarias para responder la pregunta.
A16:	No, porque ya pasaron	
A17:	No, porque no sabemos si saldrá águila o sol, porque los dos tienen 50% de probabilidad	
B08:	Tal vez si pero no soy o mejor dicho no vengo del futuro	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder los ejercicios o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente b:	Comentario:
Estudiante A11: No, todos los lanzamientos tienen diferente probabilidad	Aunque no menciona la probabilidad de cada valor de la variable, ni cuales son más probables, distingue que no todos tienen la misma probabilidad.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente c:	Comentario:
Estudiante C15: Más o menos porque pueden caer los resultados cercanos pero no iguales	Identifican la variabilidad de los datos

Para los demás niveles Multiestructural y Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para cada nivel.

En la tabla 5.2.6 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 6											
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09	A10
		A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21
		A22	A23	B01	B02	B03	B04	B05	B06	B07	B08
		B10	B11	B12	B14	B15	B17	B18	B19	B20	B21
		B22	C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C09	C10
		C11	C12	C13	C14	C16	C17	C18	C19	C20	C21
U	a	A11	B09	B13	C15				C22	C23	C24
NC: El estudiante C20 no contestó la pregunta.											

Tabla 5.2.6 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 6

Como podemos observar en la tabla 5.2.6, que la mayoría de las respuestas a esta pregunta se encuentra en el nivel preestructural, pues su respuesta la argumenta la mayoría con el azar, es decir con resultados que no se pueden predecir, y no consideran que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir, por lo que en su respuesta no se encontraron componentes. Sólo el 6% (4/69) contiene una componente (a), en los cuales su respuesta fue un “No”, y la argumentaron al identificar los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir o bien los menos probables. A continuación se muestra en la figura 5.2.6 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 6 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	1
PREESTRUCTURAL	64
UNIESTRUCTURAL	4
TOTAL	69

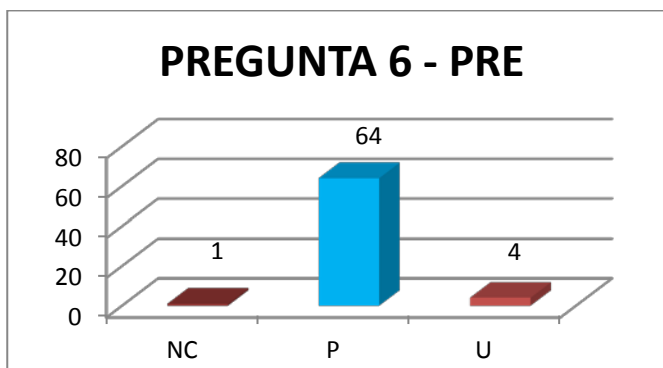


Figura 5.2.6 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 6

De acuerdo a la figura 5.2.6, el nivel de respuestas de los estudiantes sólo llega hasta el nivel uniestructural. La mayoría de respuestas se encuentran en el nivel preestructural, lo cual menciona que la mayoría no pudo explicar de forma correcta su respuesta, sus ideas o intuiciones de manera que reflejara alguna componente.

Nuestro objetivo de la pregunta era evaluar el juicio emitido por el estudiante sobre la situación aleatoria bajo un número grande de lanzamientos de los cuales solo el 6% tenían la noción que la probabilidad no es la misma para todos los valores de la variable.

5.2.7. Análisis de las respuestas a la pregunta 7

Pregunta 7: Imagina que realizas 80 lanzamientos. En el par de ejes coordenados de la izquierda dibuja un diagrama de barras que represente la frecuencia con la que crees que ocurre cada valor de la variable; en el par de ejes de la derecha, dibuja el diagrama correspondiente al anterior pero en porcentajes:

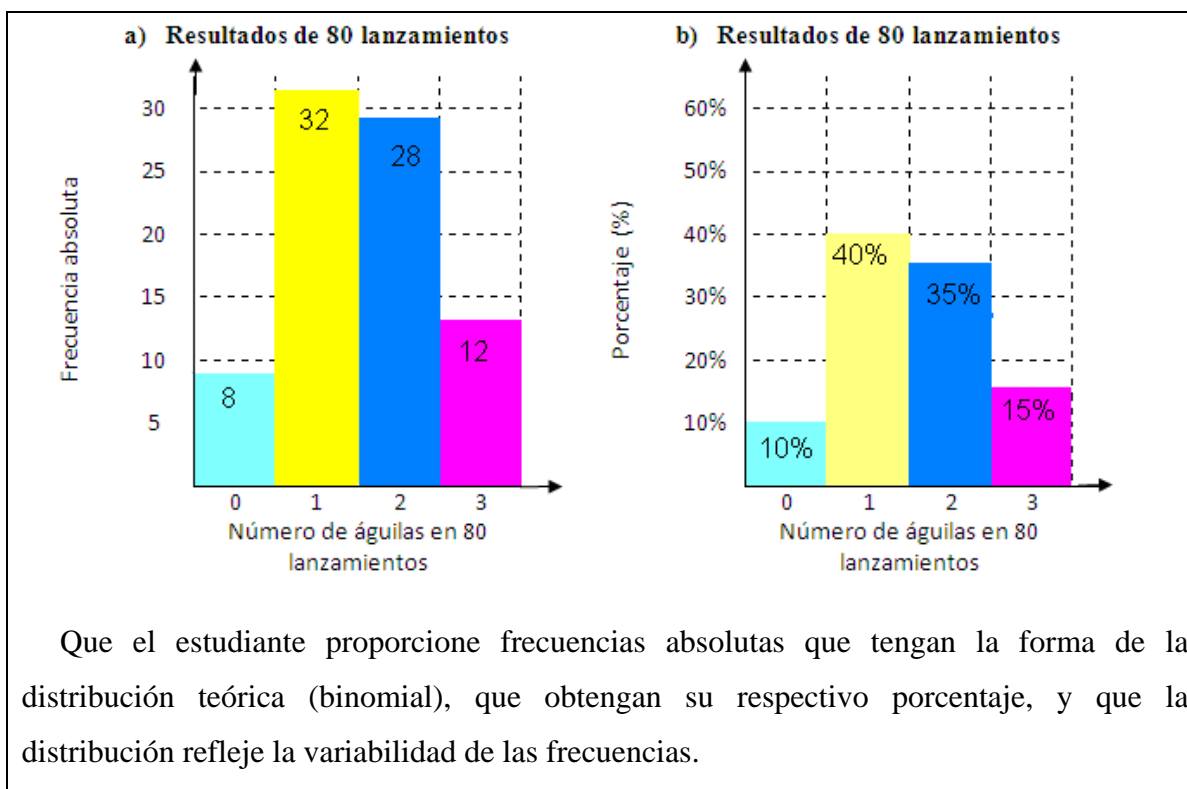
***Objetivo:** Que los estudiantes realicen predicciones de frecuencias absolutas esperadas y la traduzcan a los correspondientes de frecuencias relativas en porcentajes. Se espera que los estudiantes reflejen en sus propuestas el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación y que establezcan una relación plausible entre las probabilidades y las frecuencias para 80 sorteos. Dicha relación es atribuir a los valores medios de la variable mayor frecuencia que a los valores extremos.*

Componentes de la respuesta 7:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Asigna las frecuencias tomando en cuenta el número de lanzamientos (la suma corresponde a los 80 lanzamientos). Y representa bien el porcentaje de cada frecuencia absoluta.
- b) Asigna mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2 formando una gráfica en forma de campana, aunque no se aproxime a la probabilidad teórica.
- c) Asigna frecuencias correspondientes a la probabilidad teórica o se aproximan notablemente en $\pm 5\%$.
- d) Toma en cuenta la variabilidad.

Respuesta esperada:



5.2.7.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 7

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación.

Ejemplos para el nivel preestructural

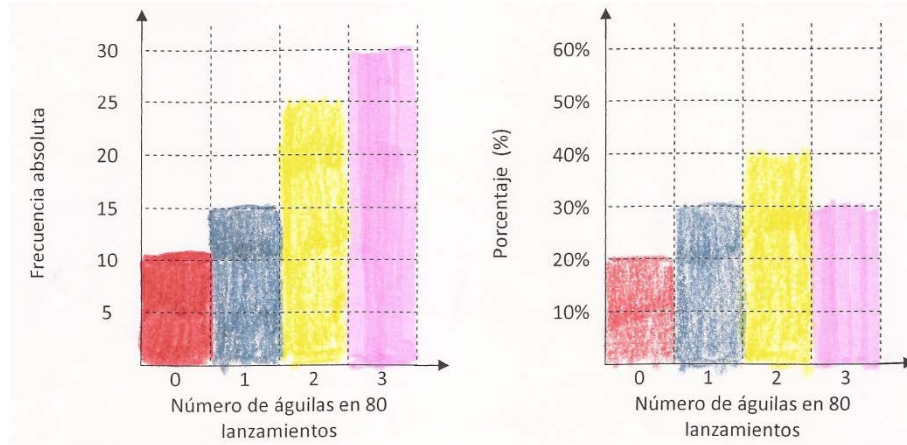
Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplos de respuestas que no contienen ninguna componente:

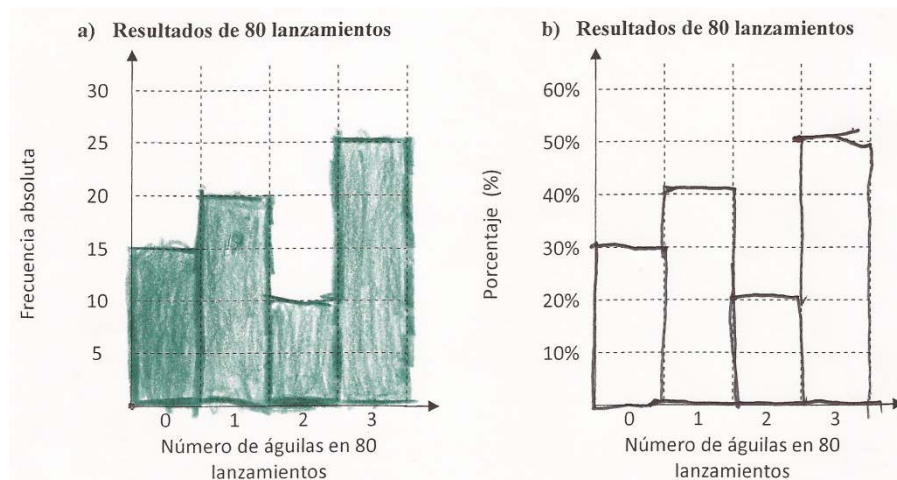
Comentario: Los estudiantes con su respuesta muestran muy baja comprensión de la pregunta, pues puede decirse que no consideran ninguna componente de las necesarias para responder la pregunta.

Ejemplos de respuestas que no contienen ninguna componente:

El estudiante A11, propone frecuencias absolutas cuya suma es 80 lanzamientos, pero no coinciden sus porcentajes relativos pues suman 120%.



Las graficas de estudiante C18, reflejan inconsistencias, pues las frecuencias que propone suman 70 lanzamientos, y su grafica de porcentajes corresponde al 140%, no supo sacar porcentajes, pues hizo la gráfica al doble de valores.



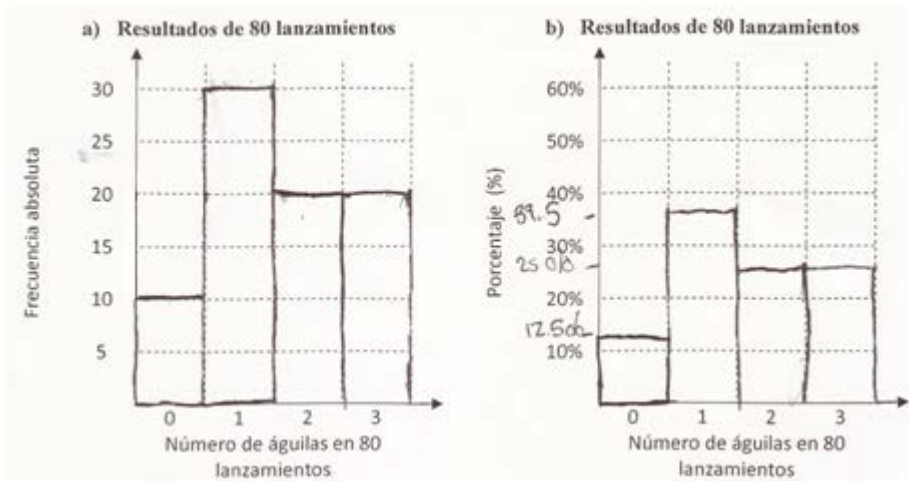
Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder los ejercicios o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

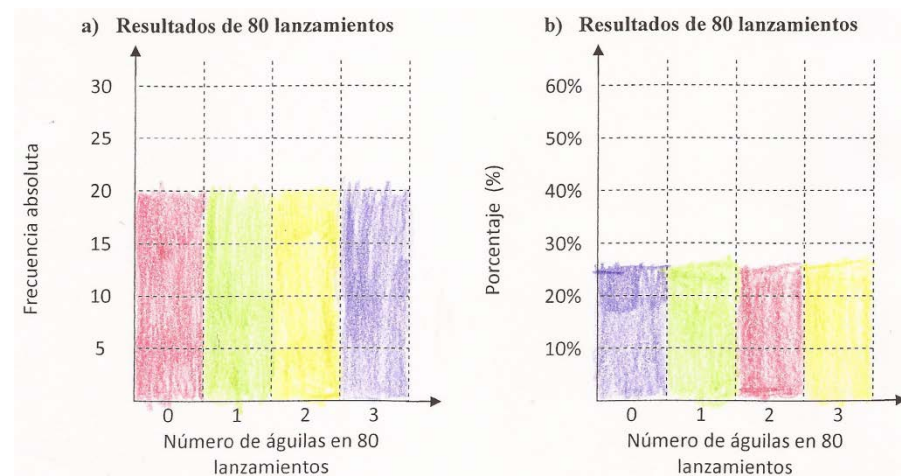
Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Comentario: Los estudiantes asignan frecuencias tomando en cuenta los 80 lanzamientos, y la suma corresponde al total, además representan de forma correcta su porcentaje respectivo. Sin embargo sus distribuciones no contienen alguna otra componente por lo que se quedan en el nivel uniestructural.

Estudiante B20:

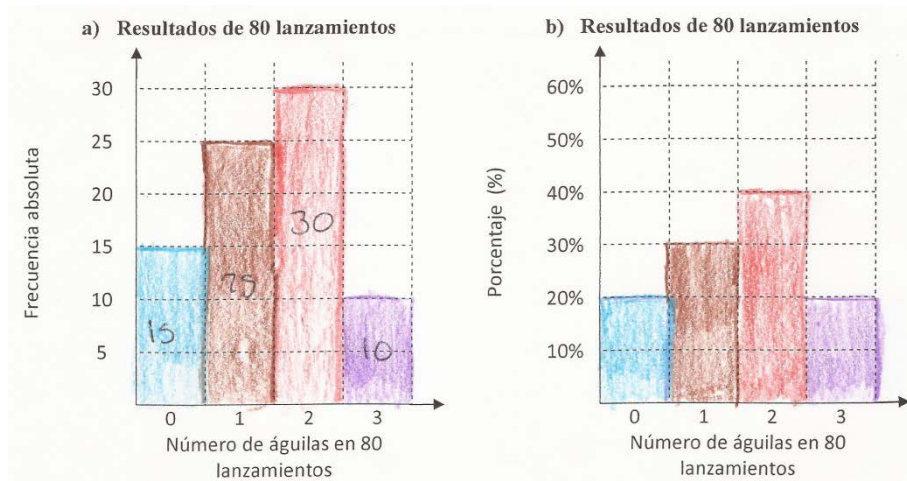


Estudiante C13:

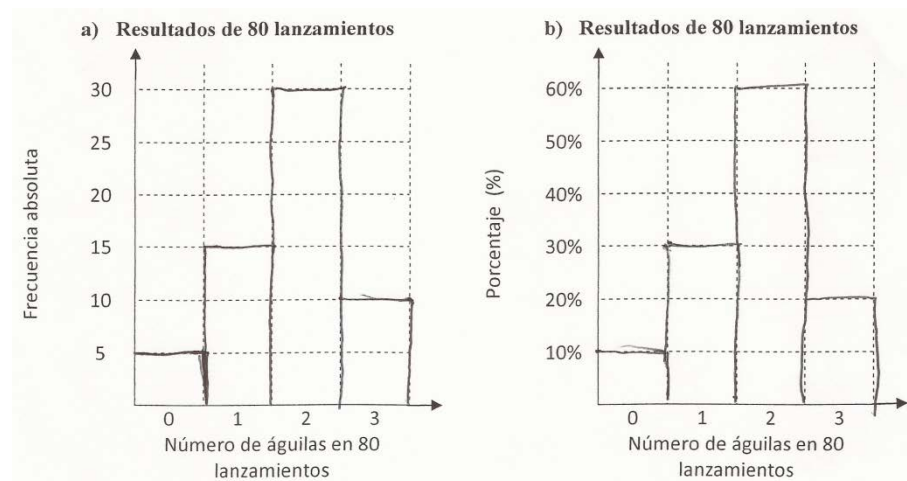


Ejemplos de respuestas que contienen la componente b:

El estudiante A04, le asigna más frecuencia a los valores de la variable 1 y 2, la cual es muy cercana a la probabilidad teórica, sin embargo su grafica de frecuencias absolutas no coincide con las frecuencias relativas.



Las gráficas del estudiante A21 muestran inconsistencias pues las frecuencias que proponen suman 60 lanzamientos, y su grafica de porcentajes corresponde al 120%, no supo sacar porcentajes, pues hizo la gráfica al doble de valores, sin embargo le asigna mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2.

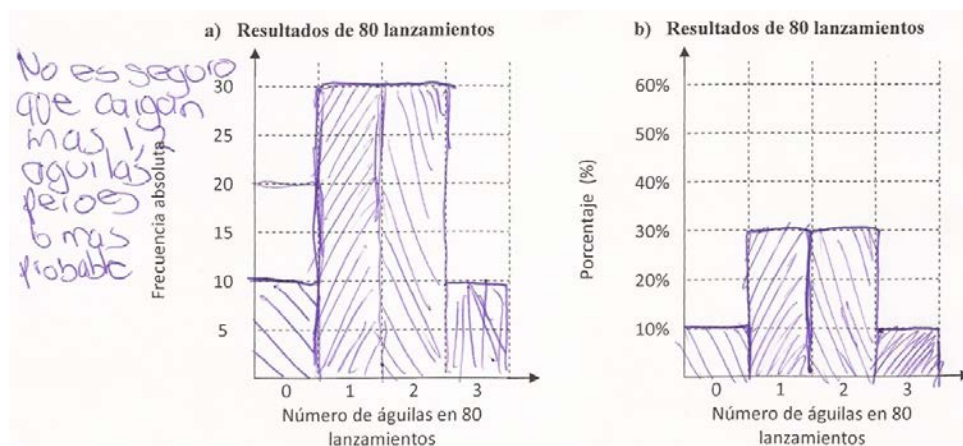


Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlos entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente b y c:

Estudiante B13: El estudiante mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2, los cuales tienen mayor probabilidad, y además las frecuencias que le asigna con exactamente las de la probabilidad teórica, sin embargo el estudiante no representa bien el porcentaje de las frecuencias absolutas, por lo que se respuesta se queda en el nivel multiestructural

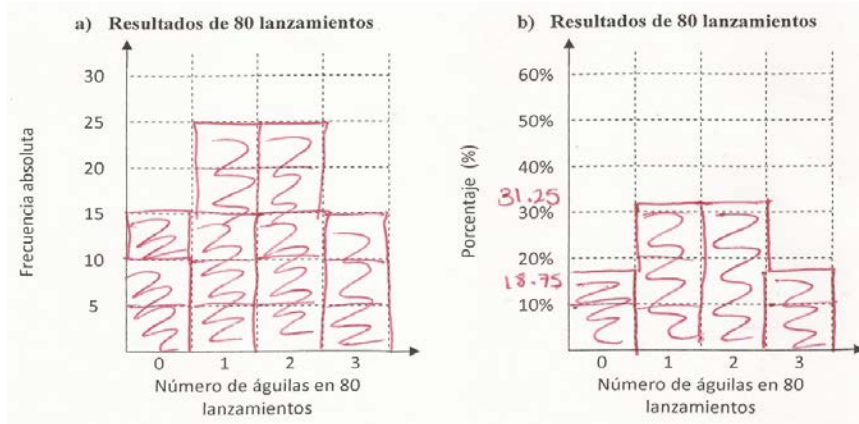


Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

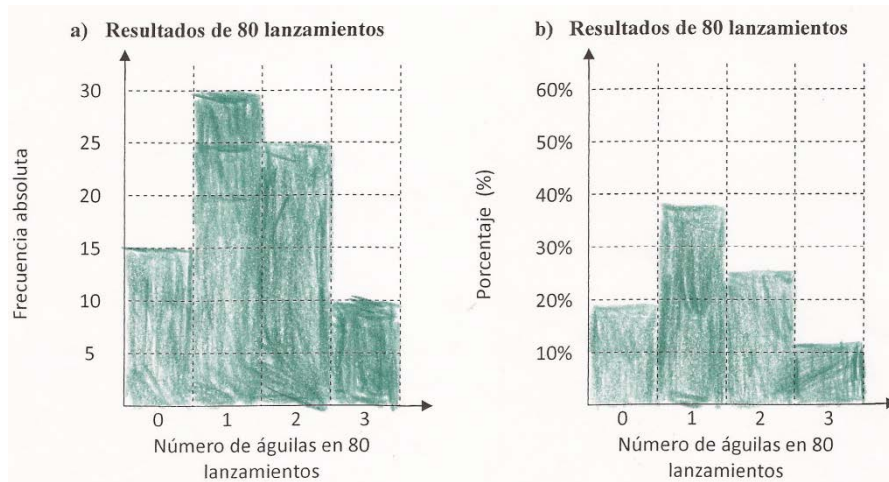
Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:

Estudiante A08: El estudiante asigna frecuencias aproximadas a la probabilidad teórica, dándole más probabilidad a los valores 1 y 2, y además representa bien su respectivo porcentaje de las frecuencias absolutas.



Ejemplos de respuestas que contienen la componente b, c, d:

El estudiante C02, propone frecuencias aproximadas a la probabilidad teórica, dándole más probabilidad a los valores 1 y 2, y además da variabilidad a sus frecuencias, sin embargo no representa bien su respectivo porcentaje de las frecuencias absolutas.



En la tabla 5.2.7 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 7									
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A03	A06	A10	A11	A13	A14	A15
		A16	A18	A19	A22	A23	B02	B03	B04
		B06	B07	B08	B09	B10	B12	B14	B15
		B17	B18	B19	C03	C06	C07	C08	C11
		C16	C17	C18	C19	C21	C22	C23	C24
U	a	B20	C09	C10	C13			A02	A04
	b	A05	A07	A12	A17	A20	A21	B01	B05
		B11	B21	B22	C01	C04	C05	C12	C15
M	b y c	A09	B13	B16					
R	a, b y c	C02							
	b, c y d	A08							
NC: Los estudiantes C14 y C20 no contestaron la pregunta.									

Tabla 5.2.7 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 7

En esta ocasión, más de la mitad de las respuestas proporcionadas por los estudiantes se encuentran en el nivel preestructural (40/69), el 31% (22/69) de las respuestas en el nivel uniestructural, y el 4% y 2% para los niveles uniestructural y multiestructural respectivamente. La mayoría de las respuestas contienen a la componente b, quiere decir que de los que contestaron la pregunta con alguna componentes (27/69), la mayoría (23/27) le asigno una frecuencia mayor a los valores de la variable que tienen mayor probabilidad, que son 1 y 2. Aunque pareciera que por el grado que tienen, ya deberían saber realizar graficas con su respectivo porcentaje, solo el 7% represento bien las frecuencias absolutas con sus respectivos porcentajes.

A continuación se muestra en la figura 5.2.7 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 7 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	2
PREESTRUCTURAL	40
UNIESTRUCTURAL	22
MULTIESTRUCTURAL	3
RELACIONAL	2
TOTAL	69

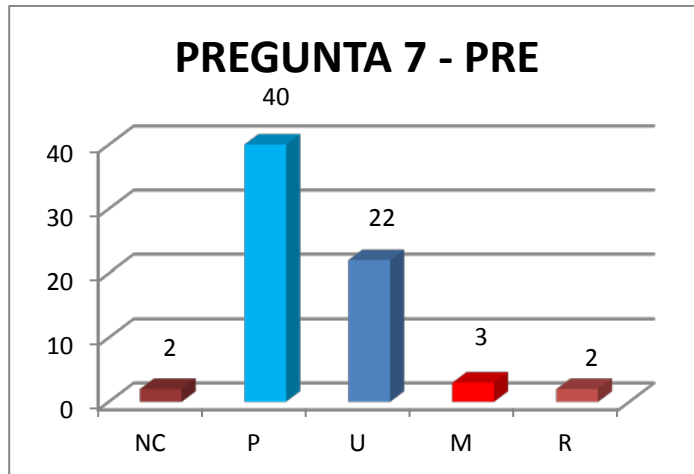


Figura 5.2.7 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 7

Como podemos observar, la mayoría de los estudiantes no entendió la pregunta o bien no pudo representar su respectiva respuesta. Solo el 40% (27/69) obtuvieron al menos una componente.

De las (27) respuestas que contienen al menos alguna componente solo el 18.5% representaron bien su porcentaje respectivo de las frecuencias absolutas, y el 85% tomo en cuenta que las probabilidades de los valores de la variable no son los mismos, y que para los valores de 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir, por lo que al proponer frecuencias asignaron mayor probabilidad a estos valores de la variable, y su distribución quedo en con una distribución en forma de campana. Sin embargo nuestro objetivo era que los estudiantes realizaran predicciones a corto plazo sobre distribuciones de frecuencias en términos de valores absolutos y relativos (%) para 80 lanzamientos de tres monedas, tomando en cuenta la probabilidad y la distribución. Sólo 1/69 distribuyó las frecuencias tomando en cuenta la distribución teórica.

5.2.8. Análisis de las respuestas a la pregunta 8

Pregunta 8: Considera que en un lanzamiento 3 amigos y tu van a apostar por alguno de los resultados (0, 1, 2 ó 3 águilas), ¿cuál elegirías y por qué?

Objetivo: Explorar la manera en que los estudiantes aplican su modelo de probabilidad en una situación de apuestas. Algunos conocen que un evento es más probable que otros y, sin embargo, cuando tienen que apostar por algún evento, no utilizan su conocimiento para elegir el más probable, sino que lo hacen con base en creencias o gustos.

Respuesta esperada:

Elegiría 1 o 2 águilas porque son los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de salir ($3/8$ cada una).

Componentes de la respuesta 8:

En esta tarea relacionada con la toma de decisiones bajo incertidumbre, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las de cada estudiante:

- a) Identifica los valores de la variable aleatoria que tienen mayor probabilidad de ocurrir o bien los valores menos probables sin proporcionar el valor teórico.
- b) Menciona la probabilidad teórica de cada valor de la variable aleatoria. Su argumento se basa en el valor teórico de probabilidad del evento más probable o de la distribución completa.
- c) Justifica su respuesta con los resultados que le salieron en la experimentación física.

5.2.8.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 8

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente, tal vez debido a las siguientes opciones: No se decide por algún valor de la variable, o elige todas porque piensa que tienen la misma probabilidad de caer, elige solo una y explique su respuesta con base en un razonamiento subjetivo como por ejemplo, porque es mi número favorito, o de tipo idiosincrático (porque es a la suerte).

Ejemplos:		Comentario:
Estudiante:	Respuestas:	
A01:	2 porque me gustan los no par	Las respuestas se basan en las preferencias o gustos del estudiante, o dice que no sabe o que le da igual argumentando que es una experiencia al azar.
B08:	Elegiría un número pues porque me gustan esas clases de números	
B19:	Ninguna de las 4 porque todas tienen la misma probabilidad	
C10:	Elegiría 2 pero solo estoy apostando al azar	
C23:	2, me gusta el dos	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder a la pregunta o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:		Comentario:
Estudiante:	Respuestas:	
A07:	Dos porque es más probable que tres o cero	Identifica en su respuesta a los valores de la variable que son más probables, mencionando que tienen mayor probabilidad de caer.
B06:	1 porque hay más posibilidades	
B09:	2 o 1 son más probabilidades que caigan 0 o 3	

Ejemplos de respuestas que contienen la componente b:		Comentario:
Estudiante:	Respuestas:	
A11:	2, es el que en la mayor veces cae y la probabilidad es de 40%	Elige un valor de la variable que es más probable, y argumenta su respuesta al mencionar la probabilidad y aunque no es la correcta (37.5%) es muy cercana

Ejemplos de respuestas que contienen la componente c:		Comentario:
Estudiante:	Respuestas:	
A13:	Elegiría dos, porque en mi tabla cayo más veces	Elige uno o los dos valores de la variable que son más probables, argumentando su respuesta en la experimentación que realizó antes del diagnóstico, lo cual le permitió observar que 1 y 2 eran más probables.
C01:	Dos águilas, por intuición y experiencia sé que es raro que salga tres águilas o ninguna	
C16:	2 águila, porque al observar fue el que más se repetía	

Para los demás niveles Multiestructural y Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para cada nivel. En la tabla 5.2.8 se muestra la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 8								
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A10	A15	A16	A18	B03	B04
		B05	B08	B10	B14	B15	B18	B19
		B20	B21	C04	C05	C06	C08	C09
		C10	C13	C21	C23	C24		
U	a	A02	A03	A05	A07	A08	A09	A12
		A14	A17	A19	A20	A21	A22	A23
		B01	B02	B06	B07	B09	B11	B12
		B13	B16	B17	B22	C02	C03	C07
		C11	C12	C15	C17	C18	C19	C22
	b	A11						
	c	A04	A06	A13	C01	C16		
NC: Los estudiantes C14 y C20 no contestaron la pregunta.								

Tabla 5.2.8 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 8

Como se muestra en la tabla 5.2.8 el 38% (26/69) se encuentran en el nivel preestructural, basando sus respuestas en razonamientos subjetivos ya sea porque les gustan esos números o argumentos de tipo idiosincrático, no apostarían porque todo puede pasar (ya que es al azar). De las (41) respuestas que contienen una componente, la mayoría

(35/41) contiene la componente a, es decir eligen uno o los dos valores de la variable con mayor probabilidad y basan su respuesta en la probabilidad (subjetiva) de ganar, lo que significa que la mayor parte de estos identificó correctamente los valores de la variable con mayor probabilidad de ganar, aunque su argumentación sea del tipo subjetivo y no con fundamento probabilístico. Por otro lado sólo uno (1/41) presentó la componente b, argumentando sus respuestas en la probabilidad, y aunque no proporciono la probabilidad teórica, su aproximación fue muy cercana. El 12% (5/41) de los que reflejaron una componente en su respuesta contiene la componente c, basando sus respuestas en la experimentación que realizaron antes del cuestionario. A continuación se muestra en la figura 5.2.8 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 8 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	2
PREESTRUCTURAL	26
UNIESTRUCTURAL	41
TOTAL	69

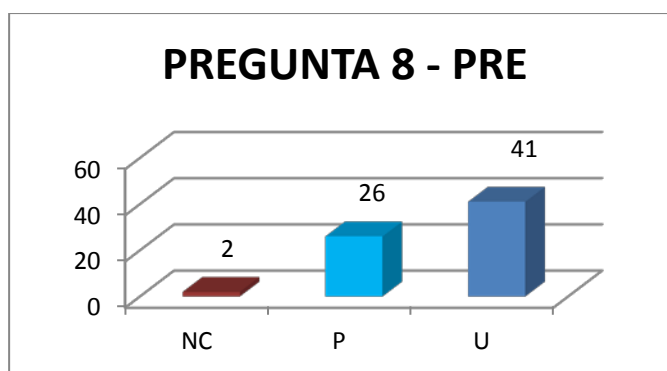


Figura 5.2.8 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 8

Con los resultados anteriores se puede observar que más de la mitad (59%) de los estudiantes en su respuesta reflejó alguna componente, sin embargo haciendo un análisis más exhaustivo se pudo observar que de las respuestas el 74% (51/69) elegiría un valor de la variable con mayor probabilidad (1 y 2), siendo el 2 el más elegido, sin embargo con su argumento no reflejan ninguna componente, pues su explicación es más del tipo idiosincrático, es decir eligen el valor de la variable solo porque les gustan los pares, o porque creen que podrá salir más veces, o porque le gusta el dos. Sin embargo nuestro objetivo era indagar sobre los argumentos de una medida de probabilidad y ver si el estudiante relaciona esta medida con el recorrido de la variable aleatoria o el espacio muestral, lo cual para esta pregunta no tenemos evidencia de que alguna pregunta refleje que se tomó en cuenta los valores de la variable más probables y que se utilizó el espacio muestral para explicar que tiene mayor probabilidad los valores 1 y 2.

5.2.9. Análisis de las respuestas a la pregunta 9

Pregunta 9: Piensa y escribe la cantidad de veces que se podrías obtener 0, 1, 2 y 3 águilas para cada número de lanzamientos. *En cada columna la suma de los resultados debe ser igual al número de lanzamientos.*

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

Objetivo: Explorar las predicciones de los estudiantes de las distribuciones de secuencias de experimentos de diferentes números de lanzamientos (20, 30, 100, etc.). En particular, observar la forma en que representan en las frecuencias el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación. Aunque en 20 y 30 lanzamientos no se espera que las distribuciones tengan una forma binomial, a partir de 100 ya se deben presentar con claridad que los valores 1 y 2 tienen más frecuencia. Un ejemplo de una solución que consideramos correcta es como la siguiente (resultado de una simulación en Fathom).

Respuesta esperada:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	2	4	12	18	63	126
1 Águilas	7	11	37	56	188	374
2 Águilas	8	12	38	57	187	376
3 Águilas	3	3	13	19	62	124
Total	20	30	100	150	500	1000

Las respuestas son aproximadas a la probabilidad teórica, no necesariamente debe ser la que se encuentra en la tabla.

Componentes de la respuesta 9:

Para esta pregunta sobre predicciones a corto, mediano y largo plazo, de seis experimentos con distribuciones de frecuencia en términos absolutos, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Asigna o distribuya las frecuencias absolutas tomando en cuenta el número de lanzamientos (la suma de las frecuencias absolutas corresponda al número de lanzamientos).
- b) Asigna mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2 aunque no se aproxime a la probabilidad teórica.
- c) Asigna frecuencias correspondientes a la distribución teórica, o bien, cercanas a la distribución teórica ($\pm 5\%$).
- d) Manifiesta el sentido de variabilidad, al dar o asignar frecuencias absolutas próximas a la probabilidad teórica, pero no iguales.

5.2.9.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 9

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante proporcione frecuencias donde la suma no corresponda al número de lanzamientos. Asigne frecuencias que no tienen relación entre sí, es decir no reflejen alguna característica de la distribución teórica. No hay un patrón consistente de distribución y aleatoriedad de las frecuencias. No muestra consistencia en su representación tabular. O bien la respuesta no se encuentra en términos absolutos.

Ejemplos de respuestas que no contienen ninguna componente:

Comentario: El estudiante A03 no entiende la pregunta, pues en su respuesta no reflejan ninguna componente. Al asignar las frecuencias en cada columna, la suma no corresponde al total de lanzamientos.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	9	7	8	2	5	10
1 Águilas	3	2	4	6	1	7
2 Águilas	10	5	1	6	6	9
3 Águilas	7	8	4	5	2	8
Total	3	4	10	9	5	1

Comentario: El estudiante A11 asigna frecuencias que no tienen relación entre sí.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas			45			
1 Águilas		20				695
2 Águilas				75		
3 Águilas	4				80	
Total	12	20	0	150	240	695

Comentario: El estudiante B09 no asigna las frecuencias en términos absolutos. Selecciona todas las casillas y justifica su respuesta al decir que puede ser cualquiera.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	✓	✓	✓	✓	✓	✓
1 Águilas	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2 Águilas	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3 Águilas	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Total	20	30	100	150	500	1000

Comentario: El estudiante C10 asigna frecuencias en términos absolutos, y la suma corresponde al total de lanzamientos, sin embargo al repartir equitativamente las frecuencias para cada valor de la variable, para los lanzamientos 30 y 150 asigna frecuencias en decimales. No percibe que los lanzamientos solo pueden darse en valores enteros, por lo que se encuentra en el nivel preestructural.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	5	7.5	25	37.5	125	250
1 Águilas	5	7.5	25	37.5	125	250
2 Águilas	5	7.5	25	37.5	125	250
3 Águilas	5	7.5	25	37.5	125	250
Total	20	30	100	150	500	1000

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las cuatro que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos o tres pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Comentario: Los estudiantes asignan frecuencias tomando en cuenta el número de lanzamientos, pues la suma corresponde al total de lanzamientos. Sin embargo sus frecuencias no son próximas a la distribución teórica, ni tienen una distribución en forma de campana.

Estudiante A01:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	2	4	10	50	100	50
1 Águilas	4	6	20	50	100	400
2 Águilas	6	12	50	25	100	500
3 Águilas	8	8	20	25	200	50
Total	20	30	100	150	500	1000

Estudiante B12:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	5	10	25	80	125	250
1 Águilas	5	10	25	20	125	250
2 Águilas	5	5	25	30	125	250
3 Águilas	5	5	25	20	125	250
Total	20	30	100	150	500	1000

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o tres componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:

Comentario: Los estudiantes asignan como frecuencias valores absolutos, que suman el total de lanzamientos. Además asignan más frecuencia a los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir, es decir 1 y 2.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:

Estudiante A04:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	1	2	9	14	49	90
1 Águilas	8	11	32	47	152	320
2 Águilas	10	15	50	75	250	500
3 Águilas	1	2	9	14	49	90
Total	20	30	100	150	500	1000

Estudiante A05:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	5	6	15	20	80	150
1 Águilas	6	8	25	50	180	250
2 Águilas	6	9	40	50	200	400
3 Águilas	5	7	20	30	70	200
Total	20	30	100	150	500	1000

Estudiante B13:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	3	6	20	25	100	100
1 Águilas	7	9	30	50	150	400
2 Águilas	7	9	30	50	150	400
3 Águilas	3	6	20	25	100	100
Total	20	30	100	150	500	1000

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:

Comentario: El estudiante A08 asigna frecuencias en valores absolutos, en donde cada frecuencia representa el 15% y 35% para los valores de la variable, siendo el mayor porcentaje para los valores 1 y 2. La suma corresponde al total de lanzamientos.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:

Estudiante A08:

9. Piensa y escribe la cantidad de veces que se podrías obtener 0, 1, 2 y 3 águilas para cada número de lanzamientos. En cada columna la suma de los resultados debe ser igual al número de lanzamientos.

Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	4	5	15	23	75	150
1 Águilas	6	10	35	52	175	350
2 Águilas	6	10	35	52	175	350
3 Águilas	4	5	15	23	75	150
Total	20	30	100	150	500	1000

Handwritten notes: 20 100 5, 15%, 35%, 35%, 15%, 20 100 35, 15%, 5-3, 20 100, 30 100, -15, 30 100 15, 150 100 15, 500 100 15, 4 15, 350, 100.

Página - 3 - de - 4 -

En la tabla 5.2.9 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 9											
P	NINGUNA COMPONENTE	A03	A06	A10	A11	A13	A18	A19	B01	B04	B08
		B09	B10	B15	B18	C07	C10	C16	C22	C23	
U	a	A01	A02	A07	A09	A12	A14	A15	A16	A17	A20
		A21	A22	A23	B02	B03	B05	B07	B11	B12	B14
		B16	B17	B19	B21	B22	C01	C02	C03	C04	C05
		C06	C08	C09	C11	C12	C13	C15	C17	C18	C19
M	a y b	A04	A05	B06	B13	B20				C22	C24
R	a, b y c	A08									

NC: Los estudiantes C14 y C20 no contestaron la pregunta.

Tabla 5.2.9 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 9

La tabla anterior muestra que 28% de las respuestas se encuentran en el nivel preestructural, mientras que el nivel uniestructural está integrado por el 60%, para el nivel multiestructural se encuentra el 7% y el relacional solo representa el 1% de las respuestas. Cabe mencionar que para las respuestas que contienen componentes, el 100% contiene la componente a, es decir, tomaron en cuenta que el número de lanzamientos debe coincidir con la suma de las frecuencias absolutas. Para la componente b, solo el 12.5% contiene esta

componente, es decir solo seis de las 48 respuestas que reflejaron alguna componente, asignaron mayor frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad.

A continuación se muestra en la figura 5.2.9 la frecuencia de respuestas, y su respectiva gráfica, a la pregunta 9 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	2
PREESTRUCTURAL	19
UNIESTRUCTURAL	42
MULTIESTRUCTURAL	5
RELACIONAL	1
TOTAL	69

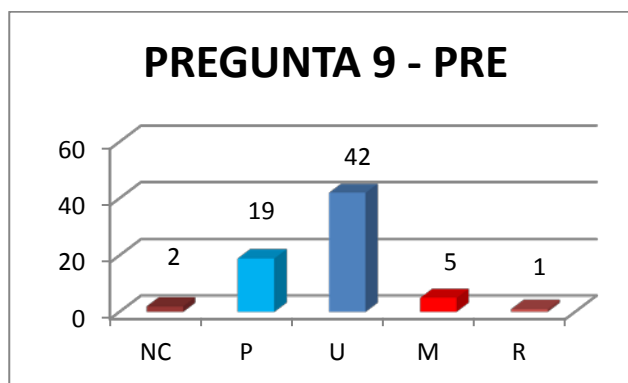


Figura 5.2.9 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 9

Como podemos observar la mayoría (48/69) de las respuestas contienen al menos una componente, sólo el 30% (21/69) se encuentran en el nivel preestructural o en la categoría no contestó. Sólo 1.5% (1/69) distribuyó las frecuencias absolutas tomando en cuenta el número de lanzamientos y la distribución teórica.

5.2.10. Análisis de las respuestas a la pregunta 10

Pregunta 10: Describe el criterio que seguiste para distribuir las frecuencias entre los resultados; argumenta tu respuesta:

Objetivo: Explorar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones propuestas.

El estudiante podrá expresar si considera los distintos aspectos a tener en cuenta, como el modelo probabilísticos que atribuye a la situación y la variabilidad.

Respuesta esperada:

Tomando en consideración las probabilidades de cada valor de la variable ($1/8$ para 0 y 3, y $3/8$ para 1 y 2) obtuve la parte proporcional para cada número de lanzamientos considerando un margen de error por la variabilidad.

Componentes de la respuesta 10:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- Argumenta su respuesta tomando en cuenta los valores de la variable más probable o bien los menos probables.
- Argumenta su respuesta mencionando la probabilidad teórica de los valores de la variable o bien considerando el Espacio Muestral (EM).
- Justifica su respuesta por la experimentación que realizó anteriormente.
- En su respuesta refleja que considera la variabilidad.

5.2.10.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 10

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante argumente su respuesta en creencias personales o subjetivas no relacionadas con aleatoriedad, o bien argumentos alejados de la norma.

Ejemplos de respuestas que no contienen componente alguna:		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	Los argumentos de sus respuestas se basan en juicios subjetivos o en la equiprobabilidad.
A01:	Me gustó ponerlos así	
A06:	Sume los números	
A11	Solamente imaginé los lanzamientos y una aproximación a las veces que caería	
B21:	Divide el número de lanzamientos entre 4, así haría ver que los cuatro resultados tienen las mismas probabilidades	
C19:	Dividí el número en partes desiguales, y con eso , la sume y me daban los resultados	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos o tres pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen componente a:		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	
A04:	Por la gráfica me di cuenta que si cae 3 veces águila y 0 veces es igual su % pero 2 es la mitad de los lanzamientos.	Identifica uno o los dos valores de la variable que son más probables o bien uno o los dos que son menos probables.
A05:	Que como son 3 monedas los resultados más probables son 2 y 1 y las 3 águilas o 0 águilas sería más difícil por ser mayor cantidad.	
B16:	1 o 2 es más probable a que todos caigan igual.	
B20:	Por el número de águilas que se pedían, y por el número de lanzamientos, y por la probabilidad de que es muy difícil que salgan 3 águilas ya que son 3 resultados iguales y cero porque tendrían que caer también 3 resultados iguales como sería sol en este caso	

Para los demás niveles Multiestructural y Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para cada nivel.

En la tabla 5.2.10 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 10											
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A02	A03	A06	A07	A08	A09	A10	A11	A12
		A13	A14	A15	A16	A18	A19	A20	A21	A22	A23
		B01	B02	B03	B04	B05	B06	B07	B08	B09	B10
		B11	B12	B13	B14	B15	B17	B18	B19	B21	B22
		C01	C02	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10	C11
		C12	C13	C15	C17	C19	C21	C22	C23	C24	
U	a	A04	A05	A17	B16	B20	C18				
NC: Los estudiantes C03, C14, C16 y C20 no contestaron la pregunta.											

Tabla 5.2.10 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 10

Podemos observar en la tabla 5.2.10 que la mayoría de las respuestas se encuentran en el nivel preestructural, es decir la mayoría de los estudiantes no pudieron reflejar en su respuesta alguna componente de las descritas, la mayoría baso sus respuestas en sus creencias personales o subjetivas, y no argumentos como la probabilidad teórica, o los valores de la variable que tienen mayor probabilidad. Solo el 9% (6/69) contiene la componente a es decir argumenta la respuesta tomando en cuenta los valores de la variable más probables o bien los menos probables.

A continuación se muestra en la figura 5.2.10 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 5 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	4
PREESTRUCTURAL	59
UNIESTRUCTURAL	6
TOTAL	69

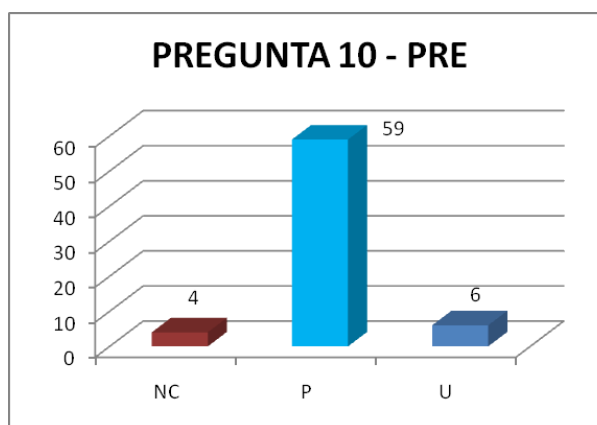


Figura 5.2.10 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 10

En las frecuencias mostradas en la figura 5.2.10 para esta pregunta, el nivel de respuestas de los estudiantes solo llega hasta el nivel uniestructural. La mayoría de respuestas se encuentran en el nivel preestructural.

Nuestro objetivo de la pregunta era explorar el tipo de argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones de frecuencias absolutas a corto plazo, de los cuales solo el 9% de las respuestas reflejaron que tomaron en cuenta los valores de las variables más probables o bien los menos probables.

5.2.11. Análisis de las respuestas a la pregunta 11

Pregunta 11: Piensa y escribe el porcentaje en que podría ocurrir cada posible resultado para el número de lanzamientos que se indican en la primera fila. *En cada columna la suma de los porcentajes debe ser igual al cien por ciento.*

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

Objetivo: Explorar las predicciones de los estudiantes de experimentos a corto, mediano y largo plazo con distribuciones de porcentajes y examinar los argumentos que ofrecen para justificarlas.

Respuesta esperada:

Una buena respuesta, tendrá porcentajes no muy próximos a la probabilidad teórica cuando el número de repeticiones no son muy grandes (20, 30), pero se van acercando cuando el número de repeticiones crece. Esta intuición prefigura la ley de los grandes números. Un cuadro guía para ver es:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%
1 Águilas	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%
2 Águilas	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%
3 Águilas	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Componentes de la respuesta 11:

Para esta pregunta sobre predicciones a corto, mediano y largo plazo, de seis experimentos con distribuciones de frecuencia en términos relativos, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Asigna o distribuya las frecuencias relativas tomando en cuenta que la suma de las frecuencias relativas corresponda al 100%.
- b) Asigna mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2 aunque no se aproxime a la probabilidad teórica.
- c) Asigna frecuencias relativas correspondientes a la probabilidad teórica o bien cercanas en un $\pm 2.5\%$
- d) Manifiesta un sentido de variabilidad al dar o asignar frecuencias absolutas próximas a la probabilidad teórica, pero no iguales.

5.2.11.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 11

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas en base a la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, los cuales se mostraran solo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Ejemplos de respuestas que no contienen ninguna componente:						
Estudiante B09 “Todo es probable”: El estudiante proporciona frecuencias donde la suma no corresponde al 100%, argumentando su respuesta en aspectos de incertidumbre, diciendo que todo puede ser posible.						
Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	100%	100%	100%	100%	100%	100%
1 Águilas	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2 Águilas	100%	100%	100%	100%	100%	100%
3 Águilas	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta refleje alguna de las siguientes características: proporcione frecuencias relativas donde la suma no corresponda al 100%, asigne frecuencias que no reflejan alguna característica de la distribución teórica, que no haya un patrón consistente de distribución y aleatoriedad de las frecuencias o bien que su respuesta no se encuentra en términos relativos.

El estudiante C07 asigna frecuencias que no tienen relación entre sí, pues no reflejan alguna característica de la distribución teórica.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	10%					
1 Águilas				25%		
2 Águilas					40%	
3 Águilas				25%		
Total	10%			50%	40%	

El estudiante C21: Asigna frecuencias relativas, donde la suma no corresponde al 100%, sino que corresponde al total de lanzamientos en porcentaje.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	5%	7%	25%	37%	125%	250%
1 Águilas	5%	7%	25%	37%	125%	250%
2 Águilas	5%	8%	25%	38%	125%	250%
3 Águilas	5%	8%	25%	38%	125%	250%
Total	20%	30%	100%	150%	500%	1000%

El estudiante C22 no refleja alguna característica de la distribución teórica, y la suma no corresponde al 100%, al parecer asigno frecuencias con un patrón, en los lanzamientos para 1 y 2 águilas, fue aumentando de 10 en 10%, y para el de 1 y 3, en todos puso 0% y 100% respectivamente.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	0%	0%	0%	0%	0%	0%
1 Águilas	5%	15%	25%	35%	45%	55%
2 Águilas	10%	20%	30%	40%	50%	60%
3 Águilas	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Total	115%	135%	155%	175%	195%	1100%

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos o tres pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Comentario: Los estudiantes proporcionan frecuencias en valores relativos, los cuales la suma corresponde al 100%; sin embargo en su respuesta no se encuentra alguna otra componente como que le asigne más frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad, por lo que su respuesta se encuentra en el nivel uniestructural.

Estudiante A01:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	20%	10%	20%	20%	20%	20%
1 Águilas	20%	20%	10%	50%	10%	50%
2 Águilas	50%	50%	20%	10%	20%	20%
3 Águilas	10%	20%	50%	20%	50%	10%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Estudiante B21:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	25%	25%	25%	25%	25%	25%
1 Águilas	25%	25%	25%	25%	25%	25%
2 Águilas	25%	25%	25%	25%	25%	25%
3 Águilas	25%	25%	25%	25%	25%	25%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Estudiante C12:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	5%	10%	10%	15%	25%	25%
1 Águilas	15%	20%	15%	25%	25%	30%
2 Águilas	40%	30%	35%	30%	30%	30%
3 Águilas	20%	40%	10%	30%	20%	15%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o tres componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:

Comentario: En su respuesta el estudiante refleja que percibe que la probabilidad para los valores de la variable 1 y 2 es mayor por lo que al asignar las frecuencias, asigna más valor a los valores 1 y 2, y la suma corresponde al 100%, y debido a que sus valores no son próximos a la distribución teórica su respuesta se queda en el nivel multiestructural.

Estudiante A05:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	15%	10%	15%	10%	5%	5%
1 Águilas	30%	35%	20%	30%	30%	30%
2 Águilas	40%	35%	40%	50%	50%	60%
3 Águilas	10%	20%	25%	10%	15%	5%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Estudiante C04:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	10%	20%	14%	10%	15%	10%
1 Águilas	30%	30%	35%	40%	35%	40%
2 Águilas	40%	40%	35%	30%	35%	20%
3 Águilas	20%	10%	16%	20%	15%	30%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:

Comentario: El estudiante A08 distribuye sus frecuencias tomando en cuenta que la suma corresponda al 100%, además percibe que los valores de la variable 0 y 3 tienen la misma probabilidad al igual que los valores 1 y 2 y que además la probabilidad de estos últimos valores es mayor que la de 0 y 3, por lo que le asigna mayor frecuencia, sin embargo no sabe con certeza cuál es la probabilidad teórica, pero la que proporciona es muy próxima en $\pm 2.5\%$. Su respuesta no muestra sentido de variabilidad.

Lanzamientos Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	15%	15%	15%	15%	15%	15%
1 Águilas	35%	35%	35%	35%	35%	35%
2 Águilas	35%	35%	35%	35%	35%	35%
3 Águilas	15%	15%	15%	15%	15%	15%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Comentario: El estudiante C01 distribuye sus frecuencias tomando en cuenta que la suma corresponda al 100%, percibe que la probabilidad de los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad que los de 0 y 3, por lo que le asigna mayor frecuencia a 2 y 1, y aunque no es la probabilidad teórica, su distribución es próxima a la distribución teórica en un $\pm 2.5\%$. Sin embargo a pesar que asigna una variabilidad en los datos, no se percibe que el haya tomado en cuenta la variabilidad, pues le da los mismos valores a todos los valores de la variable.

Lanzamientos Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	10%	10%	10%	10%	10%	10%
1 Águilas	35%	35%	35%	35%	35%	35%
2 Águilas	40%	40%	40%	40%	40%	40%
3 Águilas	15%	15%	15%	15%	15%	15%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

En la tabla 5.2.11 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 11											
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A03	A10	A12	A14	A16	A19	B02	B08	B09
		B10	B11	B14	B18	B20	C06	C07	C13	C15	C19
U	a	A02	A06	A09	A11	A13	A15	A17		C21	C22
		A18	A20	A21	A22	A23	B01	B03	B04	B05	B06
		B07	B12	B13	B15	B17	B19	B21	B22	C03	C05
M	a y b	A04	A05	A07	B16	C04	C08	C09	C10	C11	C12
R	a, b y c	A08	C01	C02			C16	C17	C18	C23	C24

NC: Los estudiantes C14 y C20 no contestaron la pregunta.

Tabla 5.2.11 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 11

Como podemos observar en la tabla 5.2.11, un gran número de respuestas se ubica en el nivel preestructural (31%), la mayoría (53%) de las respuestas se encuentran en el nivel uniestructural, para el nivel multiestructural se encuentra el 7% y el relacional solo representa el 4% de las respuestas. Cabe mencionar que para las respuestas que contienen componentes (45/69), el 100% contiene la componente a, es decir, tomaron en cuenta que el número de lanzamientos debe coincidir con el 100%. Para la componente b, solo el 11% la contiene, es decir solo 8/ 45 respuestas que reflejaron alguna componente, asignaron mayor frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad, es decir, a los valores 1 y 2. Sólo el 3/45 contienen la componente c, es decir, no solo le asignaron más valores a los valores de la variable 1 y 2, sino que la distribución que le asignaron es muy próxima a la distribución teórica.

A continuación se muestra en la figura 5.2.11 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 11 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	2
PREESTRUCTURAL	22
UNIESTRUCTURAL	37
MULTIESTRUCTURAL	5
RELACIONAL	3
TOTAL	69

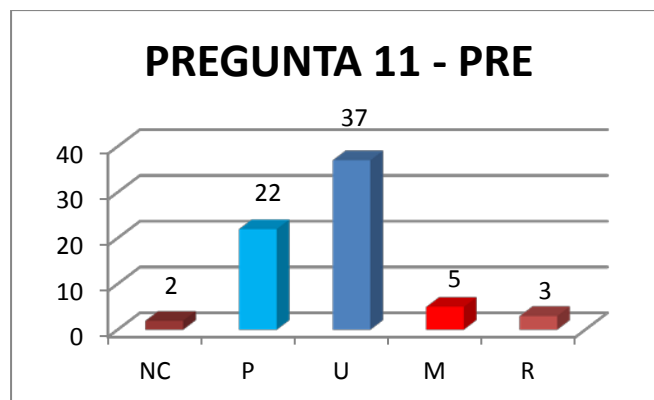


Figura 5.2.11 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 11

Los resultados del análisis de esta pregunta muestra que la mayoría (45/69) de las respuestas contienen al menos una componente, sólo el 34% (24/69) se encuentran en el nivel preestructural o en la categoría no contestó. Nuestro objetivo era que los estudiantes realizaran predicciones de experimentos a corto, mediano y largo plazo con distribuciones de frecuencia relativa, tomando en cuenta la probabilidad y la distribución teórica, y solo 4% (3/69) distribuyó las frecuencias absolutas tomando en cuenta que cada columna tenía que corresponder al 100%, además las frecuencias que asignan no solo tienen forma de campana, sino que se aproximan a la distribución teórica.

5.2.12. Análisis de las respuestas a la pregunta 12

Pregunta 12: ¿Por qué piensas que los porcentajes anteriores son razonables?

Objetivo: Explorar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones de frecuencias que propusieron.

Respuesta esperada:

Porque se basan en la probabilidad de cada valor de la variable (aprox. 12.5% para los valores de la variable 0 y 3, y 37.5% para los valores de la variable 1 y 2)

Componentes de la respuesta 12:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Argumenta su respuesta tomando en cuenta los valores de la variable más probable o bien los menos probables.
- b) Argumenta su respuesta mencionando la probabilidad teórica de los valores de la variable o bien considerando el Espacio Muestral (EM)
- c) Justifica su respuesta por la experimentación que realizó anteriormente
- d) En su respuesta refleja que considera la variabilidad

5.2.12.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 12

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante base sus respuestas en creencias personales o subjetivas no relacionadas con la aleatoriedad, o bien argumentos incorrectos. O simplemente en su respuesta no refleje ninguna componente de las que se necesitan para responder la pregunta.

Ejemplos de respuestas sin algún componente:		Comentario:
Estudiante:	Respuestas:	El estudiante menciona algún factor por el que el valor tiene que ser 100% sin tomar en cuenta los antecedentes de la variable ni el contexto del problema
A21:	Porque el total te tiene que dar 100%	
C09:	Porque si sumas o multiplicas $25 \times 4 = 100$	
C22:	Porque me guie por la proporcionalidad	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos o tres pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:		Comentario:
Estudiante:	Respuestas:	Hay evidencia en la respuesta de que el estudiante se percata de las variables más probables.
A05:	porque 1 águila y 2 águilas son lo más probables y 0 águilas y 3 águilas son los menos probables	
A07:	porque es más probable 2 0 1 águila	

Ejemplos de respuestas que contienen la componente c:		Comentario:
Estudiante:	Respuestas:	Su respuesta la basa en los resultados de la experimentación que realizó antes del diagnóstico.
B01:	Fue lo que más me salió en el ejercicio que nos puso al principio	
C16:	porque fue lo que yo vi en nuestros lanzamientos	

Ejemplos de respuestas que contienen la componente d:	Comentario:
<p>Respuesta del estudiante B20: porque yo creo que conforme van siendo más lanzamientos la probabilidad de la variable puede llegar a un punto más estable, pero en algunas veces, la variable de menos frecuencia, su probabilidad va siendo menor en algunos casos.</p>	<p>La primera parte de su comentario expresa una intuición de la estabilidad de las frecuencias relativas; sin embargo, en la segunda parte su idea se aleja de la norma.</p>

Para los demás niveles Multiestructural y Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para cada nivel. En la tabla 5.2.12 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 12									
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A02	A06	A08	A09	A10	A11	A12
		A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20
		A21	A22	A23	B02	B03	B04	B05	B06
		B07	B08	B09	B10	B11	B12	B13	B14
		B15	B16	B17	B18	B19	B21	B22	C01
		C02	C04	C05	C08	C09	C10	C11	C12
		C13	C15	C17	C18	C21	C22	C23	C24
		U	a	A04	A05	A07			
c	A03		B01	C03	C07	C16	C19		
d	B20								
NC: Los estudiantes C06, C14 y C20 no contestaron la pregunta.									

Tabla 5.2.12 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 12

De acuerdo a la clasificación descrita en la tabla 5.2.12, la mayoría de las respuestas se encuentra en el nivel preestructural, debido a que en sus respuestas no reflejan ninguna componente pues basan su argumentación en creencias personales o subjetivas. Podemos mencionar que esta clase de respuestas en las que el estudiante tiene que argumentar lo que hizo, a la mayoría se les hace difícil explicarlo, aunque lo hayan realizado de manera correcta. No pueden ofrecer argumentos, los cuales contengan alguna componente de las descritas. De las diez respuestas que contienen alguna componente, el 60% basó su argumento en la componente c, mencionando que fue debido a la experimentación que

realizaron antes de la aplicación del cuestionario, el 30% se percató que los valores de la variable para 1 y 2 son más probables que los valores 0 y 3, y de esa manera distribuyó su frecuencia relativa.

A continuación se muestra en la figura 5.2.12 la frecuencia y su respectiva gráfica a la pregunta 5 de los diferentes niveles de la taxonomía:

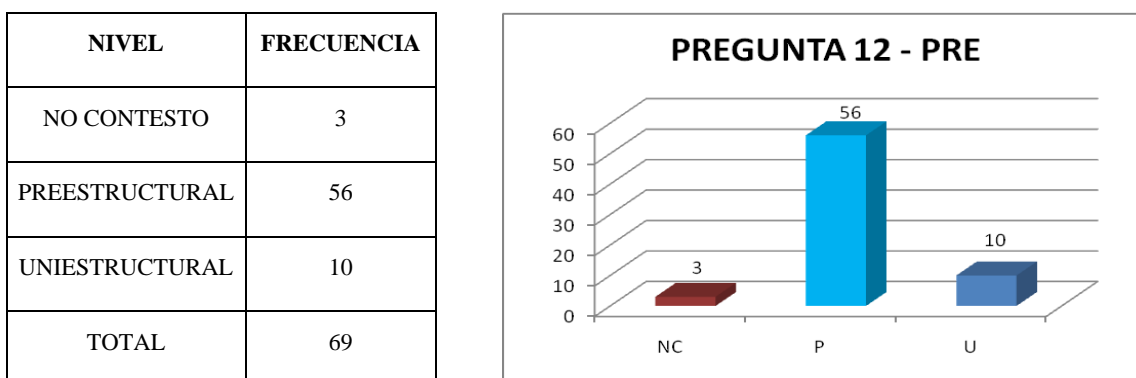


Figura 5.2.12 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 12

Como podemos observar en las frecuencias anteriores para esta pregunta, el nivel de respuestas de los estudiantes solo llega hasta el nivel uniestructural. La mayoría de respuestas se encuentran en el nivel preestructural, lo cual nos muestra que la mayoría no pudo explicar de forma correcta su respuesta, sus ideas o intuiciones de manera que reflejara alguna componente.

Nuestro objetivo de la pregunta era evaluar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones de frecuencias relativas a corto plazo, de los cuales el 4% de las respuestas reflejaron que tomaron en cuenta los valores de las variables más probables o bien los menos probables, el 8% argumentó su respuesta en experimentos pasados.

5.2.13. Análisis de las respuestas a la pregunta 13

Pregunta 13: ¿Cuál crees que será el valor de la probabilidad de ocurrir de cada resultado?

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	

Objetivo: Averiguar cuál es la distribución de probabilidades que los estudiantes atribuyen a la situación.

Respuesta esperada:

La respuesta que se considera de mayor calidad es aquella en la que se propone la distribución teórica, es decir, la siguiente distribución.

Águilas	0	1	2	3
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8

Componentes de la respuesta 13:

Para esta pregunta se tienen en cuenta las siguientes componentes:

- a) Da un número fraccionario o un número porcentual para cada valor de la variable.
- b) En las frecuencias que propone la suma es igual a 1, 100% o bien alguna potencia de 10.
- c) La distribución dada es próxima o igual a la distribución teórica. Que la distribución tenga forma de campana.

5.2.13.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 13

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas con base en la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de estos, se muestran algunos ejemplos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplo de respuestas que se encuentran en el nivel preestructural:
En los siguientes ejemplos los estudiantes con su respuesta muestran muy baja comprensión de la pregunta, pues puede decirse que no consideran ninguna componente. No representan las probabilidades con números fraccionarios o porcentajes, donde su suma sea igual a 1 o 100%.

Ejemplo de respuestas que se encuentran en el nivel preestructural:			
Estudiante A14:		Estudiante B08:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	ASS	0	0
1	SSA	1	1
2	ASA	2	2
3	AAA	3	3
Estudiante B19:		Estudiante C22 :	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	No se sabe	0	0,0,0,0,0,0
1	No se sabe	1	
2	No se sabe	2	
3	No se sabe	3	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las definidas arriba, que se utilice dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplo de respuestas que contienen la componente a:			
Comentario: Los siguientes ejemplos dan un número porcentual para cada valor de la variable, sin embargo la suma no corresponde al 100%, ni su distribución tiene forma de campana, asignándole más frecuencia a los valores 1 y 2.			
Estudiante A10:		Estudiante A20:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	50%	0	10%
1	50%	1	20%
2	50%	2	50%
3	50%	3	10%

Comentario: Los siguientes ejemplos dan un número fraccionario para cada valor de la variable, sin embargo la suma no corresponde a 1, ni su distribución tiene forma de campana, asignándole más frecuencia a los valores 1 y 2.

Estudiante C05:		Estudiante C17:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	2/4	0	1/3
1	3/4	1	1/3
2	1/2	2	2/3
3	4/4	3	2/3

Ejemplo de respuestas que contienen la componente b:

Comentario: La suma de las frecuencias que propone es igual a 1, o bien a un múltiplo de 10, sin embargo no asigna mayor frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad, ni asigna números porcentuales o fraccionarios.

Estudiante A06:		Estudiante C08:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	0	0	10
1	30	1	20
2	20	2	20
3	50	3	50

Ejemplo de respuestas que contienen la componente c:

Comentario: El estudiante A07 propone frecuencias con una distribución en forma de campana, sin embargo estas no suman 1 o 100%, ni son números fraccionarios o porcentuales.

Águilas	Probabilidad
0	1
1	5
2	5
3	1

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes a y b:																					
<p>Comentario: Los estudiantes asignan un número porcentual o fraccionario para cada valor de la variable, cuya suma es igual a 1 o al 100%. Sin embargo en la frecuencia que propone no le asigna mayor probabilidad a los valores 1 y 2, es decir no se percata que estos valores tienen mayor probabilidad de ocurrir.</p>																					
<p>Estudiante A09:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>25%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>25%</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>25%</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>25%</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	25%	1	25%	2	25%	3	25%	<p>Estudiante A16:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>10%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>20%</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>30%</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>40%</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	10%	1	20%	2	30%	3	40%
Águilas	Probabilidad																				
0	25%																				
1	25%																				
2	25%																				
3	25%																				
Águilas	Probabilidad																				
0	10%																				
1	20%																				
2	30%																				
3	40%																				
<p>Estudiante B10:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{4}$	<p>Estudiante B22:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>$\frac{1}{4}$ del 100%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>$\frac{1}{4}$ del 100%</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$\frac{1}{4}$ del 100%</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$\frac{1}{4}$ del 100%</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	$\frac{1}{4}$ del 100%	1	$\frac{1}{4}$ del 100%	2	$\frac{1}{4}$ del 100%	3	$\frac{1}{4}$ del 100%
Águilas	Probabilidad																				
0	$\frac{1}{4}$																				
1	$\frac{1}{4}$																				
2	$\frac{1}{4}$																				
3	$\frac{1}{4}$																				
Águilas	Probabilidad																				
0	$\frac{1}{4}$ del 100%																				
1	$\frac{1}{4}$ del 100%																				
2	$\frac{1}{4}$ del 100%																				
3	$\frac{1}{4}$ del 100%																				
<p>Estudiante C15:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>25 de 100</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>30 de 100</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>10 de 100</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>35 de 100</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	25 de 100	1	30 de 100	2	10 de 100	3	35 de 100	<p>Estudiante C23:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>$\frac{1}{4}$ o 25%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>$\frac{1}{4}$ o 25%</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$\frac{1}{4}$ o 25%</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$\frac{1}{4}$ o 25%</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	$\frac{1}{4}$ o 25%	1	$\frac{1}{4}$ o 25%	2	$\frac{1}{4}$ o 25%	3	$\frac{1}{4}$ o 25%
Águilas	Probabilidad																				
0	25 de 100																				
1	30 de 100																				
2	10 de 100																				
3	35 de 100																				
Águilas	Probabilidad																				
0	$\frac{1}{4}$ o 25%																				
1	$\frac{1}{4}$ o 25%																				
2	$\frac{1}{4}$ o 25%																				
3	$\frac{1}{4}$ o 25%																				

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes a y c:

Águilas	Probabilidad	Comentario: El estudiante C03 propone frecuencias en números fraccionarios cuya distribución es en forma de campana, sin embargo la suma no corresponde a 100 o bien alguna potencia de 10.
0	2 / 10	
1	4 / 10	
2	5 / 10	
3	1 / 10	

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes b y c:

Águilas	Probabilidad	Comentario: El estudiante A19 propone frecuencias que tiene una distribución en forma de campana, asignándole más frecuencia a los valores 1 y 2 cuya suma corresponde a 10, sin embargo no propone números porcentuales ni fraccionarios.
0	1	
1	4	
2	3	
3	2	

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes a, b y c.

Comentario: En su respuesta propone frecuencias en números porcentuales o fraccionarios cuya suma corresponde al 100% o a 1. Además, la distribución de sus frecuencias tiene una distribución en forma de campana.

Estudiante B13:		Estudiante C01:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	1/8	0	10%
1	3/8	1	35%
2	3/8	2	40%
3	1/8	3	15%

En la tabla 5.2.13 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas.

PRE-TEST – PREGUNTA 13										
P	NINGUNA COMPONENTE	A02	A03	A13	A14	A23	B07	B08	B09	B12
		B14	B18	B19	C10	C13	C16	C19	C22	
U	a	A10	A15	A20	B04	B06	B21	C05	C11	C17
	b	A06	C08							
	c	A07								
M	a y b	A01	A04	A09	A11	A12	A16	A18	A22	B01
		B02	B05	B10	B11	B15	B17	B20	B22	
		C06	C07	C09	C12	C15	C18	C21	C23	
	b y c	A19								
a y c	A21	C03	C24							
R	a, b y c	A05	A08	A17	B03	B13	B16	C01	C02	C04
NC: Los estudiantes C14 y C20 no respondieron a la pregunta.										

Tabla 5.2.13 Clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 13

Mediante la tabla 5.2.13, podemos ver que 19 respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en los niveles preestructural y en la categoría de no contesto (19 de 69), por lo que podemos mencionar que aproximadamente el 27.5% mostró con su respuesta, una clara incomprensión de la pregunta o bien no supo darle respuesta, proponiendo respuestas inadecuadas.

Mientras que aproximadamente el 17% (12/69) se encuentra en el nivel uniestructural, el 42% (29/69) se encuentra en el nivel multiestructural, y solo el 13% (9/69) se ubica en el nivel relacional. De las (50) respuestas que contienen al menos una componente, el 92% (46/50) contienen la componente a, es decir, propusieron frecuencias como un número porcentual o fraccionario, y solo el 76% (38/50) contiene la componente b, donde la suma de esas frecuencias que proponen corresponde a 1, al 100% o bien a una potencia de 10. Sobre la componente c, solo el 28% (14/50) la contiene, es decir solo 14 de las respuestas dadas por los estudiantes propusieron frecuencias con una distribución en forma de campana considerando que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir.

A continuación se muestra en la figura 5.2.13 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 13 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	2
PREESTRUCTURAL	17
UNIESTRUCTURAL	12
MULTIESTRUCTURAL	29
RELACIONAL	9
TOTAL	69

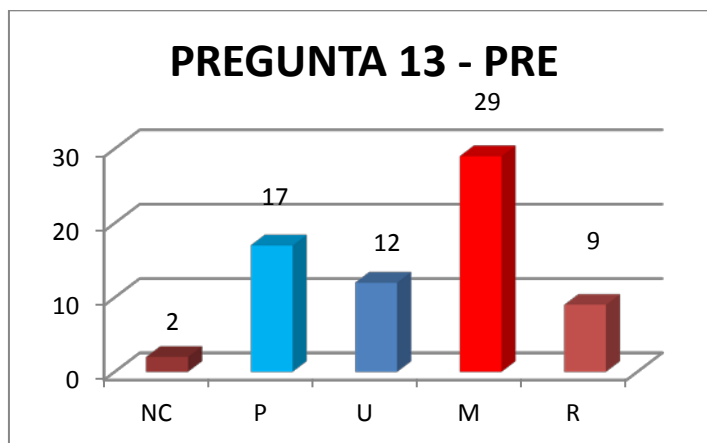


Figura 5.2.13 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 13

Como podemos observar solo 19 de las 69 respuestas dadas por los estudiantes no entendió la pregunta o bien no pudo representar su respuesta de forma correcta. Podemos observar que las respuestas de varios estudiantes se encuentran en los niveles esperados (uniestructural, multiestructural y relacional), pues el 72% representa estos niveles. Cabe mencionar que aunque hubo buenos resultados, la mayoría de los estudiantes no reconoce que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir pues solo un 20% (14/69) le asignaron mayor frecuencia, sin embargo conviene notar que para esta pregunta a comparación de la pregunta 3, para los niveles multiestructural y relacional las respuestas de los estudiantes aumentaron en un 7% para cada nivel.

Un objetivo al hacer esta pregunta consiste en evaluar los valores subjetivos que los estudiantes asignan a la distribución de probabilidad y compararlos con los teóricos. Los resultados indican que solo el 13% (9/69) del total propusieron frecuencias como un número porcentual o fraccionario cuya suma es igual a 1 o al 100% y su distribución tiene forma de campana.

CAPITULO 6: ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL POST – TEST

En este capítulo se analizan los datos obtenidos en el post-test, recordemos que se aplicó el mismo cuestionario del diagnóstico, aunque con algunas modificaciones (ver anexo D).

6.1. Resultados del post-test

En este apartado describiremos los resultados del análisis de las 13 preguntas del post-test que realizaron los estudiantes. En los ejemplos de las primeras dos preguntas, aparece la componente con un subíndice, lo cual significa que el estudiante consideró la componente de forma completa (+); por ejemplo, al considerar el espacio muestral describe los ocho elementos para el lanzamiento de tres monedas. De forma incompleta (-); por ejemplo, tal vez consideró el espacio muestral, sin embargo no escribió todas las combinaciones. Y con un subíndice (0), lo cual indica que en su respuesta utilizó la componente pero no lo indica, por ejemplo, cuando se dice que hay combinaciones pero no se menciona ninguna de ellas.

6.1.1. Análisis de las respuestas a la pregunta 1

Pregunta 1: De aquí en adelante, llamaremos lanzamiento a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Se realiza un lanzamiento y se observa “el número de águilas que ocurren” (llamado variable para esta encuesta). Enlista todos los posibles valores que puede tomar esta variable.

***Objetivo:** Propiciar que los estudiantes comiencen a tener contacto con la idea de variable aleatoria y observar cómo describen el recorrido de a variable aleatoria “número de águilas”, relacionado con el lanzamiento de tres monedas.*

Los estudiantes pueden centrarse sólo en determinar los valores de la variable o pueden relacionar su respuesta con el espacio muestral. Debe notarse que en la pregunta no se hace referencia al espacio muestral, ni a la probabilidades.

Respuesta esperada:

La variable puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3 águilas.

Aunque se espera que algunos relacionen esos valores con los elementos del espacio muestral, probablemente expresados en la forma: AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA y SSS.

Componentes de la respuesta 1:

Para esta pregunta sobre identificar el recorrido de la variable aleatoria se tomaron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Identifica la variable aleatoria, es decir el número de águilas que puede ocurrir en el lanzamiento de tres monedas. (Número de águilas: 0, 1, 2 y 3 águilas)
- b) Percibe la unidad de análisis, es decir; percibe que el problema se trata del lanzamiento de tres monedas y describe resultados de al menos una combinación con una secuencia de águilas y soles de longitud 3.
- c) Considera el espacio muestral (EM) relacionados con el lanzamiento de tres monedas (8 posibles combinaciones: AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA y SSS.)

6.1.1.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 1

Considerando la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas con base en la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos de nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o mencione algo que no esté relacionado con la pregunta, como una manifestación de la falta de comprensión de la pregunta o bien diga cosas sin sentido.

Ejemplo:		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	
A20:	ZZZ, AAA, ZAP, PAZ, AZP, PZA, AZP,AAZ, APP, PAA	Con su respuesta el estudiante no refleja ninguna componente y muestra el desconocimiento de la pregunta pues su respuesta no tiene sentido.

Ejemplo:		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	Podría pensarse que al decir 7, se refiere a que son 7 combinaciones o formas que pueden obtenerse en un lanzamiento de tres monedas, sin embargo el estudiante no justifica su respuesta, por lo que pondríamos palabras que no dijo el estudiante, por lo tanto su respuesta se queda en el nivel preestructural.
A22:	7	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder adecuadamente a la pregunta o se hace referencia a dos o más pero incompletos o con errores fuertes.

Ejemplo de la componente b⁺ (completa) y c⁻ (incompleta):		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	Percibe la unidad de análisis y considera el espacio muestral, sin embargo lo hace de manera incompleta, por lo que se queda en el nivel uniestructural.
A03	SSS, AAA, SAS, ASA, SSA, AAS	
A11	AAA, ASS, ASA, SSA, SSS, SAS, SAA (7)	

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o tres componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplo de las componentes b⁺ y c⁺ (completas):		Comentario:
Estudiante:	Respuesta:	Identifica las ocho combinaciones del espacio muestral, y percibe la unidad de análisis al considerar cada combinación, pues comprenden que se trata para el lanzamiento de tres monedas.
A05:	AAA, AAS, ASS, ASA, SSS, SSA, SAA, SAS	

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente las tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplo de las componente a^+ (completa) b^0 y c^0 (no indicadas):




El estudiante B04: Identifica todos los valores que la variable puede tomar, y aunque no lo menciona para relacionar el número de águilas tuvo que percibir la unidad de análisis de tres monedas, al considerar al menos una secuencia de águilas y soles de longitud 3, por lo que su respuesta se ubica en el nivel relacional.

Respuesta del estudiante B04: 0, 1, 2 y 3 águilas

Ejemplo de las componente a^+ , b^+ y c^+ :

El estudiante B22 escribe todos los posibles valores que la variable puede tomar, además considera el espacio muestral de manera completa, sin embargo lo tacha y escribe solo las variables, por lo tanto hay muestra de que considera el espacio muestral, y a su vez que percibe la unidad de análisis.

~~AAA, AAS, ASS, SSS, SSA, SAA, SAS, ASA~~
~~0 águilas, 1 águila, 2 águilas, 3 águilas~~

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retroceso  Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

Podemos observar en la tabla 6.1.1 que solo el 3% se encuentra en el nivel preestructural, es decir solo 2 de 68 reflejaron en su respuesta la falta de comprensión hacia la pregunta ya que no consideró ninguna componente.

POST-TEST – PREGUNTA 1											
P	NINGUNA COMPONENTE	A20		A22							
U	$b^+ y c^-$	A02	A03	A06	A10	A11	A18	A19	B07	B11	B16
		B17	C06	C07	C08	C14	C19				
M	$b^+ y c^+$	A01	A04	A05	A07	A08	A09	A12	A13	A14	A15
		A17	A21	A23	B05	B08	C02	C04	C10	C18	C20
		C21									
R	$a^+, b^0 y c^0$	A16	B01	B04	B06	B09	B10	B14	B15	B18	B19
		B20	B21	C01	C03	C05	C09	C11	C12	C13	C15
		C16	C17	C22	C23	C24					
	$a^+, b^+ y c^+$	B12	B13	B22	B23						
NC: Los estudiantes B02 y B03, no realizaron el post-test											
Se agregó un estudiante a realizar este cuestionario B23.											

Tabla 6.1.1 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 1

Mientras que el 97% reflejó con su respuesta al menos una componente; la moda de las respuestas dadas por los estudiantes se concentran en el nivel Relacional, con 42.5% (29/68); el nivel multiestructural contiene el 31% (21/68), y el nivel uniestructural solo el 23.5% (16/68).

De las 66 respuestas que contienen al menos una componente, todos contienen las componentes **b** y **c**, es decir perciben que el problema se trata del lanzamiento de tres monedas y proporcionaron al menos una combinación del espacio muestral para el lanzamiento de tres monedas. Solo el 44% (29/66) de los que contienen alguna componente, consideraron la componente **a**, es decir identificaron el recorrido de la variable aleatoria “el número de águilas”, es decir en el 43% (29/68) se identificaron todos los posibles valores que la variable puede tomar (0, 1, 2 y 3 águilas).

En la tabla 6.1.1 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnóstico (post-test). Se puede observar que el 64% (43/67) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 28% (19/67) respuestas se quedaron en el nivel que originalmente se encontraban y solo un 7% (5/67) manifestaron un retroceso en su respuesta.

A continuación se muestra la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 1 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
PREESTRUCTURAL	2
UNIESTRUCTURAL	16
MULTIESTRUCTURAL	21
RELACIONAL	29
TOTAL	68

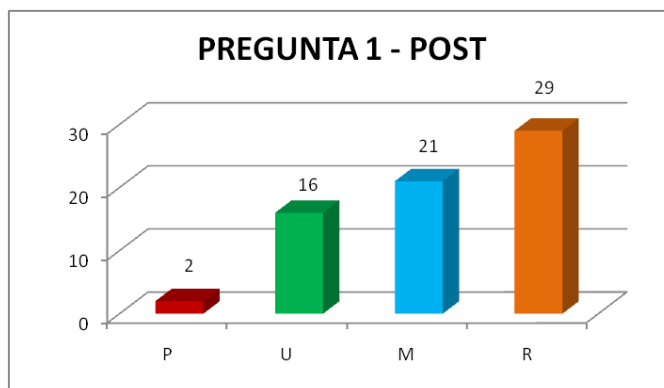


Figura 6.1.1 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 1

Como podemos observar, la mayoría de los estudiantes entendieron la pregunta, pues sus respuestas se encuentra en los niveles uniestructural, multiestructural y relacional. Conviene destacar que el 43% describe correctamente el recorrido de la variable.

En el cuestionario previo los estudiantes utilizan con más frecuencia los símbolos descriptivos del espacio muestral (las unidades: AAA, AAS, ...) sin utilizar los valores de variable, después de las actividades el 54% representó el espacio muestral mientras que un 43% representó los valores del recorrido de la variable, relacionándolo con la descripción del espacio muestral.

6.1.2. Análisis de las respuestas a la pregunta 2

Pregunta 2: Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable “número de águilas que ocurren”. En la siguiente tabla anota en la columna de la izquierda, los posibles valores de la variable y en la columna de la derecha, el número de veces que crees que ocurra cada valor:

Valor de la variable	Frecuencia
Total	

Objetivo: Explorar la manera en que los estudiantes expresan el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación observando la frecuencia que asignan a cada valor de la variable.

Respuesta esperada:

Hay tres opciones posibles, uno es que las frecuencias que proponen no sigan ningún patrón identificable, otro que reflejen un modelo equiprobable, en el que cada frecuencia sería igual a 250. Finalmente, pueden identificar que la distribución es proporcional a 1, 3, 3, 1. En este caso hay dos opciones, que propongan una frecuencia exactamente proporcional a la distribución o que traten de expresar la presencia de la variabilidad ofreciendo frecuencias aproximadas a los valores esperados pero no iguales.

Estas son las respuestas que se consideran de mejor calidad; hay dos posibilidades: las distribuciones de frecuencia plausibles se encuentran en la familia de distribuciones que se describen en la siguiente tabla:

Valor de la variable	0	1	2	3	Total
Frecuencia	$125 + e_1$	$375 + e_2$	$375 + e_3$	$125 + e_4$	1000

Donde los errores suman cero y sus valores absolutos están acotados; el primero y el cuarto por 7 y el segundo y tercero por 10.

O bien algunos, algunos pueden preferir considerar el Espacio Muestral, en cuyo caso sus frecuencias deben estar contenidas en la familia siguiente:

Variable	AAA	AAS	ASA	SAA	SSA	SAS	ASS	SSS	Total
Frecuencia	$125 + e_1$	$125 + e_2$	$125 + e_3$	$125 + e_4$	$125 + e_5$	$125 + e_6$	$125 + e_7$	$125 + e_8$	1000

Donde los errores suman cero y sus valores absolutos están acotados por 7.

Componentes de la respuesta 2:

Para esta pregunta se tomó en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Identifica los valores de la variable o elementos del espacio muestral

- b) Las frecuencias suman 1000 o 100%
- c) Los valores de la variable 1 y 2 de la distribución propuesta tiene mayor frecuencia
- d) Las frecuencias varían levemente respecto a los valores teóricos de la distribución

6.1.2.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 2

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios. A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder a la pregunta o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplo de las componentes a⁺ (completa):																									
Comentario: Considera todos los valores que la variable puede tomar, sin embargo aunque da una frecuencia, esta no es próxima a la distribución teórica.																									
Estudiante A10:		Estudiante B23:																							
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">Valor de la variable</th> <th style="width: 50%;">Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">100</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">120</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">140</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">160</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">Total</td><td style="text-align: center;">520</td></tr> </tbody> </table>	Valor de la variable	Frecuencia	0	100	1	120	2	140	3	160	Total	520	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">Valor de la variable</th> <th style="width: 50%;">Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">700</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">50</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">40</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">10</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">Total</td><td style="text-align: center;">800</td></tr> </tbody> </table>	Valor de la variable	Frecuencia	0	700	1	50	2	40	3	10	Total	800
Valor de la variable	Frecuencia																								
0	100																								
1	120																								
2	140																								
3	160																								
Total	520																								
Valor de la variable	Frecuencia																								
0	700																								
1	50																								
2	40																								
3	10																								
Total	800																								

Ejemplo de las componentes b⁺ (completa) y a⁻ (incompleta):
Comentario: Percibe la unidad de análisis al considerar secuencias de águilas y soles de longitud 3, sin embargo, no considera todas las combinaciones; pues solo describe 4 de las 8 combinaciones, por lo que su respuesta es incompleta, además las frecuencias que propone suman 1000 lanzamientos pero no son próximas a la distribución teórica (no son plausibles), por lo tanto su respuesta se queda en el nivel uniestructural.

Ejemplo de las componentes b^+ (completa) y a^- (incompleta):

Estudiante A06:		Estudiante C19:	
Valor de la variable	Frecuencia	Valor de la variable	Frecuencia
ASS	500	AAA	220
AAS	200	AAS	180
AAA	200	SSA	65
SSS	100	SSS	535
Total	1000	Total	1000

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlos entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplo de las componentes a^+ y b^+ (completas):

Comentario: Percibe la unidad de análisis al identificar los valores que la variable puede tomar para el caso del lanzamiento de tres monedas. Sin embargo debido a que no percibe los elementos del EM, cuando propone sus frecuencias, no asigna mayor frecuencia a los valores de la variable que tienen mayor probabilidad (1 y 2), por lo tanto, la distribución de frecuencias que propone no es la adecuada.

Estudiante A02:		Estudiante A19:	
Valor de la variable	Frecuencia	Valor de la variable	Frecuencia
0	170	0	250
1	160	1	250
2	520	2	250
3	150	3	250
Total	1000	Total	1000

Estudiante A21:		Estudiante A23:	
Valor de la variable	Frecuencia	Valor de la variable	Frecuencia
0	500	0	215
1	200	1	127
2	200	2	358
3	100	3	300
Total	1000	Total	1000

Ejemplo de las componentes a⁺ y c⁺ (completas):

Comentario: El estudiante A14 identifica los valores que la variable puede tomar y le asigna mayor frecuencia a los que tienen mayor probabilidad de ocurrir (1 y 2). Sin embargo al sumar sus frecuencias estas no dan el total de 1000 lanzamientos.

Valor de la variable	Frecuencia
0	100
1	300
2	300
3	100
Total	800

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes y esto le permite llegar a la solución.

Ejemplo de las componentes a⁺ y b⁺ y c⁺(completas):

Comentario: Identifica todos los posibles valores que puede tomar la variable en el lanzamiento de tres monedas. Además proponen frecuencias con una distribución en forma de campana, asignándole más frecuencia a los valores 1 y 2 de la variable; no obstante, sus respuestas no dan indicios de la variabilidad en los datos, y las frecuencias no son cercanas a las que se derivarían de la distribución teórica.

Estudiante A15:

Valor de la variable	Frecuencia
0	100
1	300
2	500
3	100
Total	1000



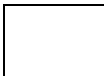
Estudiante C18:

Valor de la variable	Frecuencia
0	195
1	305
2	305
3	195
Total	1000

Ejemplo de las componentes a⁺, b⁺, c⁺ y d⁺ (completas):

Comentario: En los siguientes ejemplos, los estudiantes además de percibir la unidad de análisis e identificar todos los posibles valores que puede tomar la variable (el número de águilas), asignan frecuencias próximas a la distribución teórica y además consideran la variabilidad en los datos.

Ejemplo de las componentes a ⁺ , b ⁺ , c ⁺ y d ⁺ (completas):			
Estudiante B19:		Estudiante B21:	
Valor de la variable	Frecuencia	Valor de la variable	Frecuencia
0	139	0	120
1	371	1	380
2	391	2	350
3	99	3	150
Total	1000	Total	1000

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retroceso  Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 2									
U	a	A10	B23	C06					
	b y a ⁻ (incompleta)	A06	C19						
M	a y c	A01	A14						
	a y b	A02	A03	A19	A21	A23	B04	B06	B07
R	a, b y c	B14	B15	B17	C03	C09	C14	C20	C21
		A04	A05	A07	A08	A09	A11	A12	C22
		A13	A15	A16	A17	A18	A20	A22	B01
		B05	B08	B09	B10	B11	B12	B13	B16
		B18	B20	B22	C02	C05	C07	C08	C10
	C12	C13	C15	C17	C18				
a, b, c y d	B19	B21	C01	C04	C11	C16	C23	C24	
NC: Los estudiantes B02 y B03, no realizaron el post-test									
Se agregó un estudiante a realizar este cuestionario B23									

Tabla 6.1.2 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 2

De acuerdo a la tabla 6.1.2, la mayor parte de las respuestas dadas por los estudiantes se concentran en el nivel Relacional que representan el 65% (44/68); en el nivel Multiestructural se ubica el 28% (19/68), y en el nivel Uniestructural solo el 7% (5/68) lo representa.

De las respuestas dadas por los estudiantes el 100% (68/68) contiene la componente a, es decir identificaron de manera incompleta o completa el recorrido de la variable aleatoria “el número de águilas” o bien proporcionaron al menos una combinación del espacio muestral para el lanzamiento de tres monedas, el 93% (63/68) propuso frecuencias cuya suma es igual a 1, 100% o alguna potencia de 10. Sobre la componente c, solo el 68% (46/68) asignó mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2, y solo el 13% (/68) propuso su frecuencia próxima a la distribución teórica. Para esta pregunta no hubo respuestas en el nivel preestructural.

En la tabla 6.1.2 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al post-test. Se puede observar que el 88% (59/67) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 12% (8/67) respuestas se quedaron en el nivel que originalmente se encontraban y no hubo ninguna respuesta que manifestara un retroceso. A continuación se muestra en la figura 6.1.2 las frecuencias de cada nivel a la pregunta 2, y su respectiva gráfica:

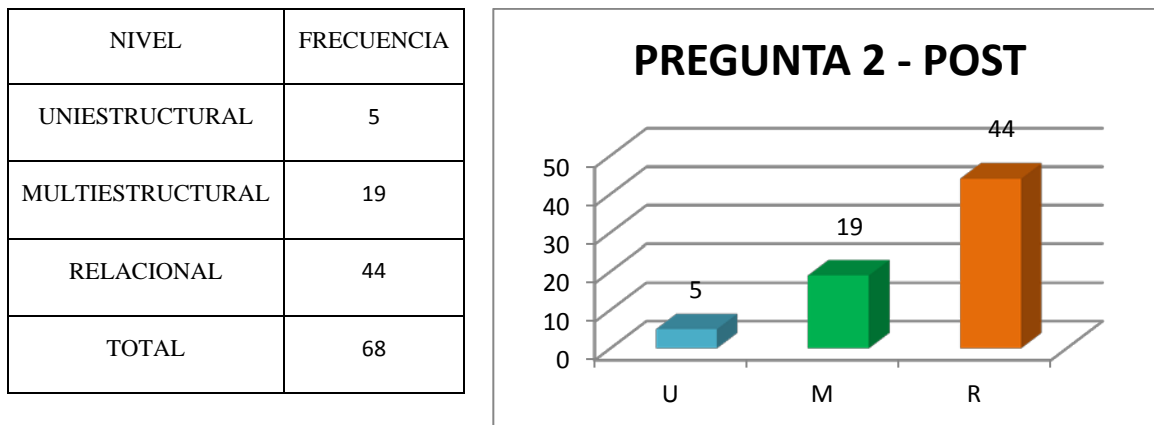


Figura 6.1.2 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 2

Se puede concluir, con base en los resultados que muestra la figura 6.1.2, que los estudiantes entendieron la pregunta, pues la mayoría de las respuestas se encuentran en el nivel relacional, es decir llegaron a la respuesta correcta.

6.1.3. Análisis de las respuestas a la pregunta 3

Pregunta 3: Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable (a cada ocurrencia le llamaremos: resultado):

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	
Total	

Objetivo: Observar la distribución de probabilidades que los estudiantes asignan a la situación.

Respuesta esperada:

Probablemente las respuestas que aquí se ofrezcan tendrán relación con las dadas en la pregunta 2. Las probabilidades que asignen a cada valor de la variable pueden ser probabilidades subjetivas, dentro de las que se encuentra la distribución equiprobable, o pueden ser el resultado de la consideración del espacio muestral y la aplicación de la definición clásica de probabilidad. Esta es la respuesta que se evalúa como de mejor calidad y es la siguiente:

Águilas	0	1	2	3	TOTAL
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Componentes de la respuesta 3:

Para esta pregunta se tienen en cuenta las siguientes componentes:

- Da un número fraccionario o un número porcentual para cada valor de la variable.
- En las frecuencias que propone la suma es igual a 1, al 100% o bien alguna potencia de 10.
- La distribución dada es próxima o igual a la distribución teórica. Que la distribución tenga forma de campana.

6.1.3.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 3

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas con base en la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de estos, se muestran algunos ejemplos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplos de respuestas que se encuentran en el nivel preestructural:				
	Águilas	Probabilidad		Comentario: El estudiante A11, no propone una frecuencia, argumentando que no se sabe, lo deja a la incertidumbre.
	0	100 no se sabe		
	1	100		
	2	100		
	3	100		

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder los ejercicios o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplo de respuestas que contienen la componente a:					
Comentario: El estudiante propone como frecuencias números porcentuales o fraccionarios, aunque la suma no corresponda al 100% o a 1, ni tenga distribución en forma de campana.					
Estudiante A01:			Estudiante B17:		
	Águilas	Probabilidad		Águilas	Probabilidad
	0	252/1000		0	40%
	1	248/1000		1	15%
	2	500/1000		2	20%
	3	100/1000		3	35%
	Total	1100/1000		Total	110%

Ejemplo de respuestas que contienen la componente b:

Comentario: Que en la suma de sus frecuencias que asigna a cada valor de la variable, corresponda a 1 o a 100%, o bien a un número múltiplo de 10. Sin embargo no asigna mayor probabilidad a los valores de la variable 1 y 2.

Estudiante A06:

Águilas	Probabilidad
0	500
1	200
2	200
3	100
Total	1000

Estudiante A19:

Águilas	Probabilidad
0	10
1	20
2	40
3	30
Total	100

Ejemplo de respuestas que contienen la componente c:

Águilas	Probabilidad
0	250
1	385
2	280
3	90
Total	1005

Comentario: El estudiante A17, en las frecuencias que propone, asigna mayor frecuencia a los valores 1 y 2, teniendo así una distribución en forma de campana. Sin embargo la frecuencia que propone no está dada en números porcentuales ni fraccionarios cuya suma sea 1 o 100%. Por lo que se queda en el nivel uniestructural.

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a y b:

Comentario: Asignan un número fraccionario o porcentual a la probabilidad para cada valor de la variable cuya suma es igual a 1 o bien a 100. Aunque no se percata que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a y b:

Estudiante A23:		Estudiante C06:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	2/8	0	25
1	1/8	1	25
2	3/8	2	45
3	2/8	3	5
Total	8/8	Total	100

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes b y c:

Águilas	Probabilidad	<p>Comentario: La distribución que propone el estudiante B07 tiene forma de campana, pues le asigna mayor frecuencia a los valores 1 y 2, en la cual la suma es igual a 100, sin embargo las frecuencias que propone no están dadas en valores porcentuales ni fraccionarios.</p>
0	15	
1	35	
2	35	
3	15	
Total	100	

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a y c:

Comentario: Los estudiantes B10 y B12 asignan un número fraccionario o porcentual a la probabilidad para cada valor de la variable, en la cual asignan mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2, sin embargo la suma no corresponde a 1, 100% o bien alguna potencia de 10.

Estudiante B10:		Estudiante B12:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	1/8	0	10%
1	3/8	1	50%
2	4/8	2	45%
3	2/8	3	5%
Total	10/8	Total	110 %

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a, b y c:																									
<p>Comentario: Los siguientes ejemplos proponen como frecuencias números porcentuales o fraccionarios en los cuales le asigna mayor frecuencia a los valores con mayor probabilidad (1 y 2), teniendo así una distribución en forma de campana, en la cual la suma corresponde a 1 o al 100%.</p>																									
<p>Estudiante A07:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">Águilas</th> <th style="width: 85%;">Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1/8</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">3/8</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">3/8</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">1/8</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">Total</td><td style="text-align: center;">8/8 =1</td></tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	1/8	1	3/8	2	3/8	3	1/8	Total	8/8 =1	<p>Estudiante A22:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">Águilas</th> <th style="width: 85%;">Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">10%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">40%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">40%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">10%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">Total</td><td style="text-align: center;">100%</td></tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	10%	1	40%	2	40%	3	10%	Total	100%
Águilas	Probabilidad																								
0	1/8																								
1	3/8																								
2	3/8																								
3	1/8																								
Total	8/8 =1																								
Águilas	Probabilidad																								
0	10%																								
1	40%																								
2	40%																								
3	10%																								
Total	100%																								
<p>Estudiante C04:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">Águilas</th> <th style="width: 85%;">Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">14.5%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">35%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">38%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">12.5%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">Total</td><td style="text-align: center;">100%</td></tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	14.5%	1	35%	2	38%	3	12.5%	Total	100%	<p>Estudiante C23:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">Águilas</th> <th style="width: 85%;">Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">12.1%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">34.7%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">35.7%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">17.5%</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">Total</td><td style="text-align: center;">100%</td></tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	12.1%	1	34.7%	2	35.7%	3	17.5%	Total	100%
Águilas	Probabilidad																								
0	14.5%																								
1	35%																								
2	38%																								
3	12.5%																								
Total	100%																								
Águilas	Probabilidad																								
0	12.1%																								
1	34.7%																								
2	35.7%																								
3	17.5%																								
Total	100%																								

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica. A22 Retroceso A20 Permanencia Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 3										
P	NINGUNA COMPONENTE	B08								
U	a	A01	A11	B17	C09		C12	C19		
	b	A06	A12	A13	A19	A20	B19	C13	C20	C21
	c	A17								
M	a y b	A02	A23		C06		C17		C22	
	a y c	B10				B12				
	b y c	A03		B07			C15			
R	a, b y c	A04	A05	A07	A08	A09	A10	A14	A15	A16
		A18	A21	A22	B01	B04	B05	B06	B09	B11
		B13	B14	B15	B16	B18	B20	B21	B22	B23
		C01	C02	C03	C04	C05	C07	C08	C10	C11
		C14	C16	C18	C23	C24				
Se agregó un estudiante a realizar este cuestionario B23.										

Tabla 6.1.3 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 3

Conforme a la tabla 6.1.3, solo el 1.5% de las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel preestructural (1/68), es decir solo una respuesta demostró la falta de comprensión a la pregunta o bien no supo darle respuesta a la pregunta, al no saber representar la probabilidad ya sea como un número porcentual o como un número fraccionario.

Mientras que el 24% (16/68) se encuentra en el nivel uniestructural, el 15% (10/68) se encuentra en el nivel multiestructural, y un 60% (41/68) se encuentra en el nivel relacional. De las (67) respuestas que contienen al menos una componente, el 87% (58/67) contienen la componente b, es decir propusieron frecuencias donde la suma corresponde al 100% o a 1 o bien a un múltiplo de 10, y un 81% (54/67) contiene la componente a, es decir propusieron frecuencias en números fraccionarios o porcentuales. Sobre la componente c, el 70% (47/67) la contiene, es decir propusieron frecuencias con una distribución en forma de campana o con una distribución cercana o igual a la teórica.

En la tabla 6.1.3 se clasificaron las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnostico (post-test). Podemos observar que el 74% (49/66) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 18% (12/66) respuestas se quedaron en el nivel que originalmente se encontraban y solo un 8% (5/66) manifestaron un retroceso en su respuesta. A continuación se muestra en la figura 6.1.3 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 3 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
PREESTRUCTURAL	1
UNIESTRUCTURAL	16
MULTIESTRUCTURAL	10
RELACIONAL	41
TOTAL	68

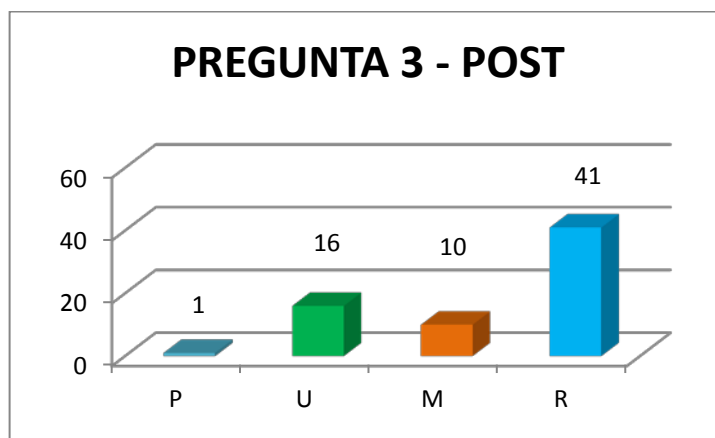


Figura 6.1.3 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 3

Como podemos observar en la gráfica 6.1.3, la mayoría de los estudiantes entendió la pregunta pues podemos observar que la mayoría se encuentran en los niveles uniestructural, multiestructural y relacional, solo el 1.5% (1/68) demostró con su respuesta la falta de comprensión a la pregunta. Una de las hipótesis que se tenía era que los estudiantes distribuirían la probabilidad de forma equitativa, lo cual en esta pregunta solo el 1.5% (1/68) distribuyó su frecuencia tomando en cuenta la equiprobabilidad, por lo tanto nuestra hipótesis no es válida.

Sin embargo nuestro objetivo de la pregunta era evaluar los valores subjetivos que da el estudiante para la distribución de probabilidad y compararlos con los teóricos, de los cuales solo el 60% (41/68) del total propusieron frecuencias con distribución en forma de campana. Cabe mencionar que de las respuestas solo el 20% (14/68) propuso como frecuencias la probabilidad teórica, es decir solo 14 de 68 (20%) identificó la probabilidad teórica para el lanzamiento de tres monedas.

6.1.4. Análisis de las respuestas a la pregunta 4

Pregunta 4: Imagínate que tienes las tres monedas y realizas 16 lanzamientos (de 3 monedas cada uno), escribe los resultados que creas que se obtendrán. Para cada columna marca con una X una casilla de la fila que coincide con la variable “el número de águilas”. Al final, la suma de las X de cada fila representará el número de veces que ocurre cada valor de la variable.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas																	
1 Águilas																	
2 Águilas																	
3 Águilas																	

Objetivo: Explorar la percepción de la aleatoriedad del juego por parte del estudiante al generar una secuencia aleatoria y, además que reflejaran su modelo de probabilidad en la distribución marginal.

El propósito no fue bien representado en la pregunta ya que 16 repeticiones en un número aún bajo. La restricción a este número de repeticiones obedeció al corto tiempo que se tenía para que respondieran el cuestionario inicial. De cualquier manera, es posible detectar algunos aciertos y fallas, por ejemplo, si se entiende la pregunta y, en estos casos, si expresan patrones que no reflejen la aleatoriedad en sus sucesiones.

Componentes de la respuesta 4:

En esta pregunta sobre generar secuencias aleatorias se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- La elección de un sólo valor de la variable por lanzamiento verificando que en el total, la suma corresponda al número de lanzamientos (16 lanzamientos).
- Se proponen frecuencias próximas a la distribución teórica, o bien su distribución tiene forma de campana.
- Sentido aleatorio (la ausencia de patrones determinísticos).
- Consideración de rachas. Una secuencia adecuada tiene alrededor de **tres** rachas de longitud 2.

6.1.4.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 4

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas con base en la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación.

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido, por ejemplo, que genere secuencias donde no cumpla con ninguna componente, o bien responda con un claro desconocimiento del sentido de la pregunta.

Comentario: El estudiante A06, no entiende la pregunta por lo que selecciona todas las casillas y les asigna frecuencias, la suma no corresponde al total de 16 lanzamientos.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	8	2	1	2	8	5	1	2	8	5	1	2	8	5	1	2	61
1 Águilas	2	8	5	8	5	2	2	8	5	8	2	8	2	2	2	8	61
2 Águilas	5	5	8	1	1	8	8	5	2	2	8	1	1	1	5	5	61
3 Águilas	1	1	2	5	2	1	5	1	1	1	5	5	5	8	8	1	61

Comentario: El estudiante B04, no selecciona todas las casillas, y además seleccionó más de un resultado en el mismo lanzamiento, y la suma no corresponde al total de lanzamientos. Por lo que su respuesta se encuentra en el nivel preestructural.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	X					X				X				X			4
1 Águilas	X								X			X					3
2 Águilas			X							X			X				3
3 Águilas						X							X				2

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder sólo utilice una componente de las que se necesitan para responder la pregunta o utilice dos pero incompletas o con errores.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Comentario: Elije sólo una casilla para cada uno de los lanzamientos y la suma corresponde al total. Sin embargo, su distribución no se aproxima a la distribución teórica, ni tiene forma de campana y además da indicios de no percibir la aleatoriedad al exhibir patrones (determinísticos).

El estudiante B11, ha sido clasificado en uniestructural ya que presenta un patrón de secuencias que se van alternando, lo cual lleva que exhiba una sola racha de longitud 2 y además, es la racha más larga.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	X				X		X								X		4
1 Águilas		X						X						X		X	4
2 Águilas			X	X						X		X					4
3 Águilas						X			X		X		X				4

Ejemplos de respuestas que contienen la componente b:

Comentario: Los estudiantes proponen frecuencias próximas a la distribución teórica, o bien su distribución tiene forma de campana, sin embargo no cumplen con alguna otra componente.

El estudiante A18, se encuentra en el nivel uniestructural ya que la frecuencia que propuso es la de la probabilidad teórica, sin embargo, selecciona casillas más de una a la vez y se brinca otras. Al parecer trató de elaborar una gráfica de frecuencias con las proporciones de la distribución teórica.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	X	X															2
1 Águilas	X	X	X	X	X	X											6
2 Águilas	X	X	X	X	X	X											6
3 Águilas	X	X															2

Ejemplos de respuestas que contienen la componente d:

Comentario: Propone en su secuencia tres rachas de longitud 2, sin embargo, al seleccionar las casillas selecciona más de una a la vez o la suma no corresponde al total de lanzamientos, además su distribución de frecuencias no tienen forma de campana.

El estudiante B01, solo considera tres rachas de longitud 2, sin embargo las frecuencias tienen la forma de la distribución binomial, selecciona una casilla dos veces.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas			X					X								X	3
1 Águilas	X			X													2
2 Águilas		X			X		X		X	X			X			X	7
3 Águilas						X					X	X		X	X		5

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a y b:

Comentario: En su distribución de frecuencias asigna mayor probabilidad a los valores de la variable 1 y 2, además la suma corresponde a los 16 lanzamientos. Sin embargo presenta patrones determinísticos y no tiene rachas.

El estudiante C10, muestra claros patrones determinísticos, ya que la secuencia de las casillas 1-6 se reproduce de 7 a 12 y luego de 13 a 16. Su máxima racha es de longitud 1.

Resultados \ Lanzamientos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	X						X						X				3
1 Águilas			X		X				X		X				X		5
2 Águilas				X		X				X		X				X	5
3 Águilas		X						X						X			3

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a y d:

Comentario: El estudiante solo selecciona una casilla por valor de la variable, verificando que el total de lanzamiento corresponda a los 16, además considera en su secuencia alrededor de tres rachas de longitud 2.

El estudiante B17, podemos ver que propone frecuencias que no tiene forma de campana, el total corresponde a los 16 lanzamientos, sin embargo se observan que el patrón de las casillas 1-4 se reproduce en las casillas 12-15. Presenta tres rachas de longitud 2.

Resultados \ Lanzamientos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	X			X			X					X			X		5
1 Águilas		X	X			X							X	X			5
2 Águilas					X			X			X						3
3 Águilas									X	X						X	3

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes c y d:

Comentario: El estudiante refleja el sentido aleatorio pues en su distribución que propone no se encuentran patrones determinísticos, además considera en su secuencia alrededor de tres rachas de longitud 2.

El estudiante A20, se puede observar que no seleccionó una casilla por lo que la suma no corresponde al total, además las frecuencias que propone es casi uniformes, y aunque se aproxima a una binomial no corresponde a los 16 lanzamientos. Sin embargo no se perciben patrones repetidos, y en su secuencia considero rachas de longitudes 2, 3 y 4.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas			X							X	X						3
1 Águilas	X	X						X				X					4
2 Águilas				X									X	X	X	X	5
3 Águilas					X	X	X										3

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres o más componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a, b y c:

Comentario: El estudiante C11 refleja el sentido aleatorio pues en la distribución que propone no se encuentran patrones, además la frecuencia que propone tiene una distribución en forma de campana y corresponde a los 16 lanzamientos. Sin embargo no presenta una secuencia adecuada, al considerar rachas.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas		X					X										2
1 Águilas					X					X		X		X	X	X	5
2 Águilas	X			X		X		X			X						6
3 Águilas			X						X				X				3

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a, b y d:

Comentario: El estudiante elige sólo una casilla por valor de la variable, en la cual la suma corresponde al total de lanzamientos, y su distribución es en forma de campana. Además considera en su secuencia alrededor de tres rachas de longitud 2.

El estudiante C24 considera mayor frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad, la suma corresponde a los 16 lanzamientos y no se perciben patrones. Sin embargo considera tres rachas de longitud 3, lo cual es muy poco probable que ocurra en una secuencia adecuada.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas	X							X	X								3
1 Águilas			X	X	X		X			X							5
2 Águilas		X				X					X	X	X				5
3 Águilas														X	X	X	3

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a, c y d:

Comentario: Al elegir las casillas el estudiante elige solo una por valor de la variable, en la cual la suma corresponde al total de lanzamientos, no presenta patrones determinísticos y considera en su secuencia alrededor de tres rachas de longitud 2. Sin embargo la distribución que propone no se aproxima a la distribución teórica.

El estudiante A17, en su distribución no propone mayor valores a los valores de la variable 1 y 2, sin embargo presenta todas las demás componentes.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas						X				X						X	3
1 Águilas	X		X	X			X						X	X			6
2 Águilas		X						X	X						X		4
3 Águilas					X						X	X					3

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a, b, c y d:

Comentario: El estudiante selecciona solo una casilla para cada lanzamiento y la suma corresponde al total de lanzamientos (16 lanzamientos). Su distribución de frecuencias tiene forma de campana y es moderadamente próxima a la distribución teórica. Da indicios de su sentido aleatorio al no generar patrones en su selección de casillas. También presenta rachas. El estudiante C21, cumple con todas las componentes.

Lanzamientos \ Resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas						X					X	X					3
1 Águilas	X		X	X				X					X	X			6
2 Águilas		X			X				X						X	X	5
3 Águilas							X			X							2

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica. A22 Retroceso A20 Permanencia Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 4											
P	NINGUNA COMPONENTE	A03	A06	A10	A11	A12	B04	B08	B09	B15	C07
		C12	C20								
U	a	A02	A04	A19	A21	B06	B10	B11	B13	B16	B19
		C06	C15	C22							
	b	A18									
	d	A09	B01	B23	C08	C17	C23				
M	a y b	A08	B18	B21	C02	C03	C04	C10	C14		
	a y d	A05	B07	B17	C09	C19					
	c y d	A20									
R	a, b y c	A07	B20	C11	C24						
	a, b y d	A14	A22	B12	C01	C16	C18				
	a, c y d	A17	A23								
	a, b, c y d	A13	A15	A16	B05	B14	B22	C05	C13	C21	
Se sumó el estudiante B23 a realizar este cuestionario. A01 no contestó el cuestionario.											

Tabla 6.1.4 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 4

Estableciendo los resultados en tabla 6.1.4, el 18% de las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel preestructural (12/68), es decir, en 12 de las 68 respuestas se ofrecen evidencias de que no se comprendió la pregunta o bien no se refleja ninguna de las componentes que se propusieron para el análisis. Por otro lado el 29% (20/68) se encuentra en el nivel uniestructural, un 20.5% (14/69) en el nivel multiestructural, y el 30 % (21/69) en el relacional.

De las 55 respuestas que contienen al menos una componente, el 85% (47/55) contienen la componente a, es decir eligieron solo una variable por casilla y la suma corresponde a los 16 lanzamientos. El 51% (28/55) contiene la componente b, ya que tomaron en cuenta la aleatoriedad al proponer frecuencias con una distribución en forma de campana, o próxima a la distribución teórica, solo en un 29% (16/55) de las respuestas se observa la componente c, pues reflejan un sentido aleatorio y no se perciben patrones determinísticos. Sobre la componente d, el 52% (29/55) propuso una secuencia aleatoria adecuada de alrededor de tres rachas de longitud 2, y no más de una racha de longitud 4.

En la tabla 6.1.4. se presentan las tablas y gráficas de frecuencia de respuestas de acuerdo a su nivel estructural, en la cual se puede observar que hubo cambios importantes respecto a las frecuencias correspondientes del cuestionario diagnóstico (pre-test); En el

57% (37/65) de las respuestas hubo un avance de nivel estructural respecto al que se encontraban originalmente; mientras que el 31% (20/65) se quedaron en el nivel que originalmente se encontraban y solo un 12% (8/65) manifestaron un retroceso en su respuesta.

A continuación se muestra en la figura 6.1.4 la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 4 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	1
PREESTRUCTURAL	12
UNIESTRUCTURAL	20
MULTIESTRUCTURAL	14
RELACIONAL	21
TOTAL	68

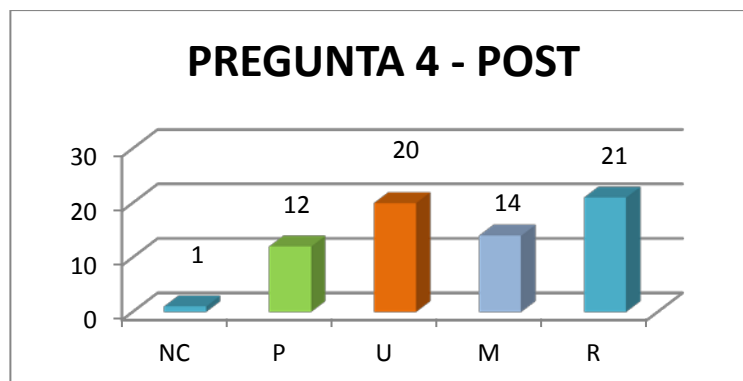


Figura 6.1.4 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 4

6.1.5. Análisis de las respuestas a la pregunta 5

Pregunta 5: Uno de tus compañeros considera que cualquier resultado tiene la misma probabilidad de ocurrir, ¿Estás de acuerdo con él? Explica tu respuesta.

Objetivo: Identificar si el estudiante se deja llevar por el sesgo de equiprobabilidad o si, por el contrario, tiene claro que la distribución tiene probabilidades mayores en los valores centrales de la variable aleatoria que en valores los extremos.

Respuesta esperada:

No estoy de acuerdo, porque las probabilidades de 1 y 2 es de $\frac{3}{8}$ cada una y de los otros valores de la variable (0 y 3) es de $\frac{1}{8}$.

Componentes de la respuesta 5:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Su respuesta a la pregunta anterior es NO. Puede o no dar un argumento, sin embargo este no tiene elementos sólidos que demuestre una explicación sólida.
- b) Argumenta su respuesta identificando los valores de la variable aleatoria que tienen mayor probabilidad de ocurrir o bien los valores menos probables.
- c) Justifica su respuesta mencionando la probabilidad teórica de cada valor de la variable aleatoria. Su argumento se basa en el valor teórico de probabilidad del evento más probable o de la distribución completa.

6.1.5.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 5

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas de la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos ejemplos.

Ejemplos para el nivel preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Comentario: Las respuestas de los estudiantes no reflejan ninguna componente que lleve a la respuesta correcta. Basan su respuesta en el azar y en sus ideas o intuiciones.

Ejemplos para el nivel preestructural	
Estudiante:	Respuesta:
A02:	Si porque esto es al azar
B04:	Sí, es juego de azar nada esta predicho
B08:	Si porque las monedas son al azar, no se puede adivinar qué es lo que va caer
C15:	Si porque es azar la probabilidad y no sabes que caerá
C22:	Sí, porque se podría repetir y siempre saldría 16 sumando con los demás

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder la tarea o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Comentario: Aunque no saben argumentar su respuesta, tienen la noción que los valores de la variable no tienen la misma probabilidad de ocurrir, sin embargo basan su explicación solo en intuiciones, por lo que su respuesta no contiene alguna otra componente.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:	
Estudiante:	Respuesta:
A03:	No porque puede salir cualquier resultado en el lanzamiento
A23:	No, ya que depende del lanzamiento y el número de variables
B01	No, porque mucha casualidad y puede que no pueda ocurrir eso
B19:	No, porque no predisco el futuro
C17:	No, porque hay otras posibilidades de resultado y todos pueden variar
C20:	No, porque cualquier resultado es diferente uno de otro pero generalmente caen más águilas

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Que al responder utilice dos componentes de las que se necesitan para responder a la pregunta o bien utilice dos o más pero sin relacionarlas de manera conveniente.

Comentario: Argumenta su respuesta identificando los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir o bien los valores menos probables. Sin embargo no menciona la probabilidad teórica de cada uno de los valores de la variable. En su argumento, da evidencia de que el estudiante se percata de las variables más probables.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:	
Estudiante:	Respuesta:
A08:	No, hay más probabilidades de que caiga 1 y 2 águilas
A12:	No, porque yo creo que es más probable que te salgan 1 o 2 águilas que 0 o 3 águilas
C07:	No, porque es más fácil que salga 1A o 1 S que 3 A o 3S
C24:	No, 0 y 3 águilas tienen menor probabilidad de salir que 1 y 2




Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y c:	
Estudiante C11: No porque gracias al espacio muestral podemos ver que cada variable tiene diferentes opciones	Comentario: Su respuesta es NO, y la justifica con los elementos del espacio muestral, y aunque no menciona los valores de la variable que tienen mayor probabilidad, si menciona que no todos tienen la misma probabilidad, por lo que su respuesta se queda en el nivel multiestructural.

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes y esto le permite llegar a la solución.

Comentario: Su respuesta es NO, y la justifica mencionando la probabilidad que tiene cada valor de la variable, mencionando así cuales son los más probables o bien los menos probables.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:	
Estudiante B09:	No, en el espacio muestral se enseña que 0 águila tiene $\frac{1}{8}$ y 1 y 2 $\frac{3}{8}$ cada uno y 3 $\frac{1}{8}$
Estudiante B21:	No porque en un lanzamiento existen 8 opciones, en las cuales 1 y 2 águilas salen 3 veces y 0 y 3 águilas solamente una

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retroceso  Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 5									
P	NINGUNA COMPONENTE	A02	A04	A06	A09	A11	A22	B04	B05
		B08	B11	B12	B14	B15	B17	B23	C03
		C05	C08	C09	C15	C19	C21	C22	
U	a	A03	A10	A14	A15	A17	A19	A20	A23
		B01	B06	B07	B16	B19	C01	C02	C06
		C14	C17	C20					
M	a y b	A05	A07	A08	A12	A13	A16	A18	A21
		B10	B18	B20	C04	C07	C10	C12	C13
		C16	C18	C23	C24				
	a y c	C11							
R	a, b y c	B09	B13	B21	B22				
NC: El estudiante A01 no contestó la pregunta									

Tabla 6.1.5 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 5

Como podemos observar en la tabla 6.1.5, casi una tercera parte de las respuestas (35%) se encuentra en los niveles preestructural o en la categoría de no contesto (24/68), pues en su respuesta no se encontró alguna componente de las que se necesitan para responder a la pregunta. Entre sus argumentos la mayoría basa sus respuestas en que “si están de acuerdo con la afirmación, pues es cuestión del azar, por lo tanto puede ocurrir cualquier cosa”.

Para los demás niveles, solo un 28% (19/68) se ubica en el nivel uniestructural, un 31% en el nivel multiestructural (21/68) y solo un 6% (6/68) se ubica en el nivel Relacional; de estas (44) respuestas que contienen al menos alguna componente, el 100% (44/44) contienen la componente **a**, es decir, su respuesta es “no”, pues no están de acuerdo con la afirmación de que todos tienen la misma probabilidad de ocurrir. De los argumentos que proporcionan el 55% (24/44) confirma su respuesta al proporcionar los valores de la variable que tienen mayor probabilidad, o bien los menos probables (**componente b**), solo

un 11% (5/44) contiene la componente **c**, es decir justifica su respuesta al mencionar la probabilidad que tiene cada uno de los valores de la variables.

En la tabla 6.1.5 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnostico (post test). Se puede observar que el 59% (39/66) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 33% (22/66) respuestas se quedaron en el nivel que originalmente se encontraban y solo un 8% (5/66) manifestaron un retroceso en su respuesta. En la figura 6.1.5 se muestra la tabla de frecuencias por nivel estructural y la respectiva gráfica.

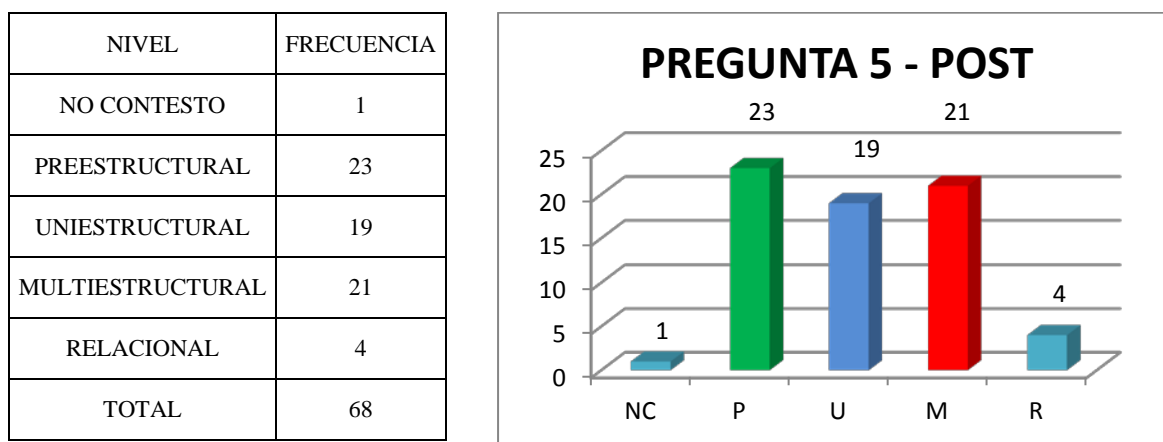


Figura 6.1.5 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 5

De acuerdo con los resultados mostrados en la frecuencia y gráfica de la figura 6.1.5, un 35% de las respuestas se encuentran en los niveles preestructural y en la categoría de no contestó, las cuales no destacan ninguna componente de las que se necesitan para responder a la pregunta. Podemos mencionar que a la mayoría le cuesta expresar sus ideas en este tipo de preguntas verbales.

Se sospechaba que esta pregunta indicaría respuestas en las que se manifestara el sesgo de equiprobabilidad, pero no ha sido así, en cambio, las respuestas preestructurales se caracterizan por darle mucha fuerza a la aleatoriedad (cualquier cosa puede ocurrir); los estudiantes no piensan en la probabilidad, sino en la ocurrencia de una experiencia, en este sentido caen en el enfoque del resultado aislado.

6.1.6. Análisis de las respuestas a la pregunta 6

Pregunta 6: ¿Crees que después de muchos lanzamientos, todos los resultados posibles caerán el mismo número de veces? Justifica tu respuesta.

Objetivo: Esta pregunta tiene como fin que los estudiantes nuevamente establezcan una relación entre el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación con una distribución de frecuencias; en este caso, se les sugiere una distribución uniforme para identificar si persiste el sesgo de equiprobabilidad; ellos deben manifestar su desacuerdo con lo sugerido.

Respuesta esperada:

No. Porque cuando se hacen muchos lanzamientos, los valores de la variable 1 y 2 tienden a ser los más frecuentes, ya que tienen una probabilidad teórica de $\frac{3}{8}$ cada uno, mientras que los valores 0 y 3, tienden a ser los menos frecuentes al tener una probabilidad teórica de $\frac{1}{8}$ cada uno.

Componentes de la respuesta 6:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Su respuesta es **NO** y argumenta la respuesta identificando los valores de la variable aleatoria que tienen mayor probabilidad de ocurrir o bien los valores menos probables.
- b) Su respuesta es **NO** y la justifica mencionando la probabilidad teórica de cada valor de la variable aleatoria.
- c) Su respuesta refleja que toma en cuenta la variabilidad.
- d) Su respuesta se basa en la experimentación realizada.

6.1.6.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 6

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación.

Ejemplos para el nivel preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplos para el nivel preestructural	
Comentario: El estudiante no aporta ninguna componente de las necesarias para responder la pregunta.	
Estudiante:	Respuesta
A02:	A lo mejor porque esto es al azar
A10:	No porque sería muy extraño porque esto es azar
A20:	No, pues porque no se puede predecir el futuro
B06:	Sí, porque cuando caigan puede ocurrir de nuevo
B19:	No, son cosas del destino
C06:	No porque sería casi imposible hacerlo

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder la tarea o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Comentario: Su respuesta la basa mencionando los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir, o bien mencionando los menos probables.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:	
Estudiante:	Respuesta
A08:	No, siempre va haber más probabilidad de que caiga 1 o 2 águilas
A18:	No, 1 y 2 águilas tienen más posibilidades
B10:	No porque caen más en uno y en dos
B13:	No, se pierde más y se hace más probable a 1 o 2
B18:	No, porque caen más resultados en 1 y 2
C02:	No, porque la probabilidad de 2 águilas es más alta
C10:	No, está comprobado que siempre caerán más veces los 1 y 2 águilas

Ejemplos de respuestas que contienen la componente b:	
Comentario: Aunque no menciona la probabilidad de cada valor de la variable, ni cuales son más probables, distingue que no todos tienen la misma probabilidad.	
Estudiante:	Respuesta
A11:	No, la probabilidad es diferente
A23:	No ya que tienen diferente probabilidad
B09:	No, no tiene la misma posibilidad

Ejemplos de respuestas que contienen la componente c:	
Comentario: Argumentan su respuesta con base en la variabilidad de los datos. Aunque no perciben que cada valor de la variable tiene diferente probabilidad, perciben que los datos van a tener variabilidad.	
Estudiante:	Respuesta
A21:	No, porque siempre van a variar
B04:	No, son variables los resultados
B12:	Si, después de muchos lanzamientos la probabilidad va dando resultados más continuos
B20:	No, porque nunca se sabe si van a caer el mismo número de veces, ya que es muy complicado que un valor o variable tenga dos veces el mismo resultado ya por la variabilidad que hay entre todos los posibles resultados pero no habrá mucha diferencia entre ellos si habrá pero no tanta



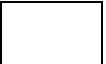
Ejemplos de respuestas que contienen la componente d:	
Comentario: En su respuesta refleja el conocimiento que adquirió en las experiencias que realizó en las actividades previas	
Estudiante C21: No, ya que yo igual tenía esa misma hipótesis hasta que realizamos lanzamientos, donde 1 y 2 águilas eran más frecuentes	

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Que al responder utilice dos o más componente de las que se necesitan para responder la tarea.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:
Comentario: El estudiante identifica los valores de la variable que tienen mayor probabilidad y les asigna una probabilidad y aunque no menciona la probabilidad teórica, si se acerca a la distribución teórica
Estudiante C01: No, las variables de "1" y "2", al caer más siempre tendrán mayor porcentaje que estará entre "30" y 40% y los demás no pasa de un 20%

Para el nivel Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para este nivel.

En la tabla 6.1.6 se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retroceso  20 Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 6											
P	NINGUNA COMPONENTE	A02	A03	A04	A06	A07	A09	A10	A14	A15	A16
		A17	A19	A20	A22	B01	B05	B06	B07	B08	B11
		B14	B15	B17	B19	B23	C03	C05	C06	C07	C08
		C09	C11	C12	C13	C14	C16	C17	C18	C19	C20
		C22	C23	C24							
U	a	A05	A08	A18	B10	B13	B16	B18	C02	C10	C15
	b	A11	A23	B09	B22						
	c	A13	A21	B04	B12	B20	B21	C04			
	d	C21									
M	a y b	C01									
NC: El estudiante A01 y A12 no contestaron la pregunta.											

Tabla 6.1.6 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 6

Conforme a la tabla 6.1.6, la mayoría de las respuestas a esta pregunta se encuentra en el nivel preestructural. Sobre los demás niveles, solo un 1/68 (1.5%) se encuentra en el nivel multiestructural y un 32% (22/68) se ubica en el nivel uniestructural. De las (23) respuestas que contienen al menos una componente, el 47% (11/23) contiene la componente a, es decir el 16% del total de respuestas, su respuesta fue “No” y la argumentó al identificar los valores de la variable aleatoria que tienen mayor probabilidad de ocurrir o bien los menos probables. Un 22% (5/23) de las respuestas dadas contienen a la componente b, es decir su respuesta fue un “No” y lo argumentaron al decir que las probabilidades de cada variable no son iguales. Sobre la componente c, un 30% (7/23) justifican su respuesta en que los datos tienen variabilidad, por lo tanto aunque se acerquen no tendrán la misma frecuencia; aunque no identifican que algunos valores de la variable son más probables que otros, si saben que la variabilidad influye en los datos. Y por último en la componente d, el 4% (1/23) justificó su respuesta en actividades que se realizaron previas al post-test, lo cual dejó ver que había valores de la variable con mayor probabilidad, su respuesta la justificó de la siguiente manera: “No, ya que yo igual tenía esa misma hipótesis hasta que realizamos lanzamientos, donde 1 y 2 águilas eran más frecuentes”.

En la tabla 6.1.3 se clasificaron las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnóstico (post-test). Podemos observar que el 29% (19/65) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, y el 71% (46/65) respuestas se quedaron en el nivel en el que se encontraban y no hubo ningún retroceso en las respuestas, esto se debió a que la mayoría ya se encontraba en el nivel preestructural. A continuación se muestra en la figura 6.1.6 las frecuencias por nivel estructural, y su respectiva gráfica de la pregunta 6:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	2
PREESTRUCTURAL	43
UNIESTRUCTURAL	22
MULTIESTRUCTURAL	1
TOTAL	68

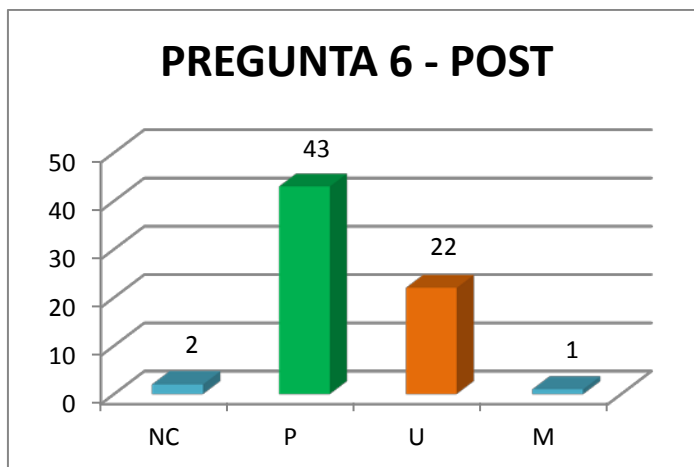


Figura 6.1.6 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 6

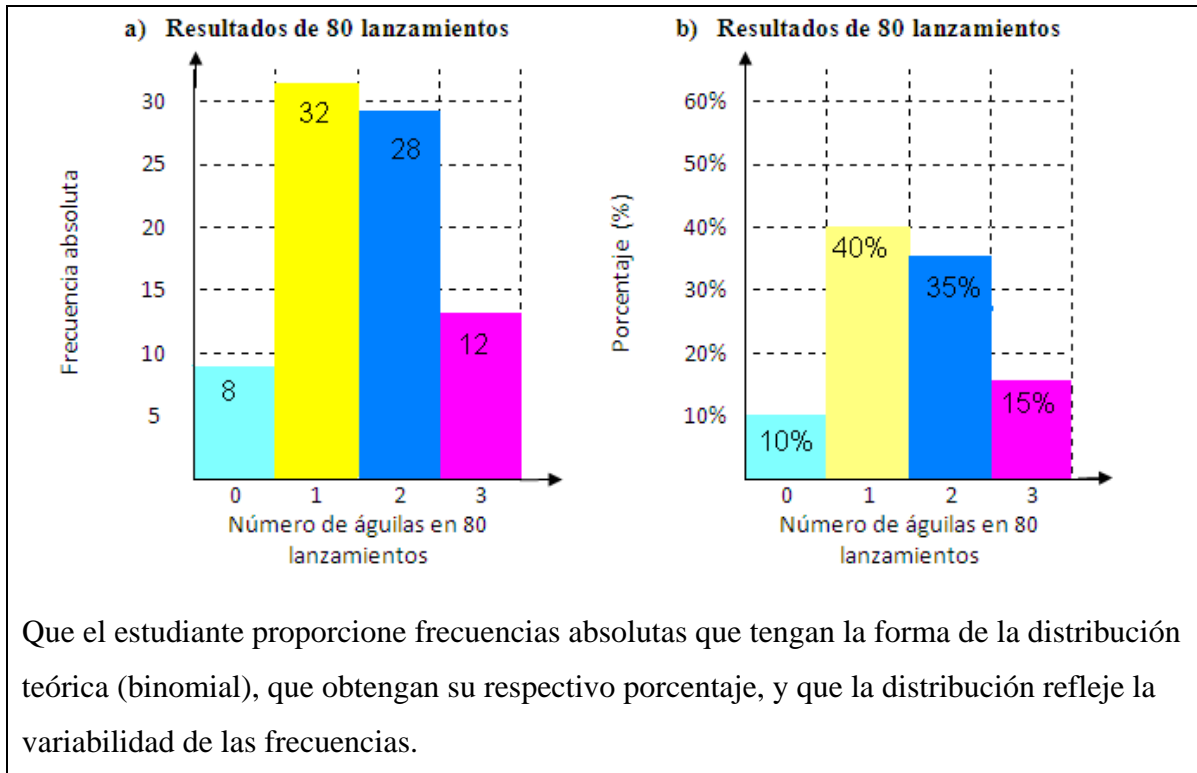
Como podemos observar en la figura 6.1.6, el nivel de respuestas de los estudiantes sólo llega hasta el nivel multiestructural. Aproximadamente en el 34% (23/68) de las respuestas se indica que la probabilidad no es la misma para todos los valores de la variable. En el 72% (49/68) de las respuestas se asienta que los valores de la variable no caerán el mismo número de veces después de muchos lanzamientos; sin embargo, en las justificaciones sólo en el 34% (23/68) de los casos se presentó alguna de las componentes dadas. Hemos observado, mediante este trabajo, que los estudiantes tienen dificultades para escribir las respuestas de manera que expresen sus ideas e intuiciones.

6.1.7. Análisis de las respuestas a la pregunta 7

Pregunta 7: Imagina que realizas 80 lanzamientos. En el par de ejes coordenados de la izquierda dibuja un diagrama de barras que represente la frecuencia con la que crees que ocurre cada valor de la variable; en el par de ejes de la derecha, dibuja el diagrama correspondiente al anterior pero en porcentajes:

***Objetivo:** Que los estudiantes realicen predicciones de frecuencias absolutas esperadas y la traduzcan a los correspondientes de frecuencias relativas en porcentajes. Se espera que los estudiantes reflejen en sus propuestas el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación y que establezcan una relación plausible entre las probabilidades y las frecuencias para 80 sorteos. Dicha relación es atribuir a los valores medios de la variable mayor frecuencia que a los valores extremos.*

Respuesta esperada:



Componentes de la respuesta 7:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- Asigna las frecuencias tomando en cuenta el número de lanzamientos (la suma corresponde a los 80 lanzamientos). Y representa bien el porcentaje de cada frecuencia absoluta.
- Asigna mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2 formando una gráfica en forma de campana, aunque no se aproxime a la probabilidad teórica.
- Asigna frecuencias correspondientes a la probabilidad teórica o se aproximan notablemente en $\pm 5\%$.
- Toma en cuenta la variabilidad.

6.1.7.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 7

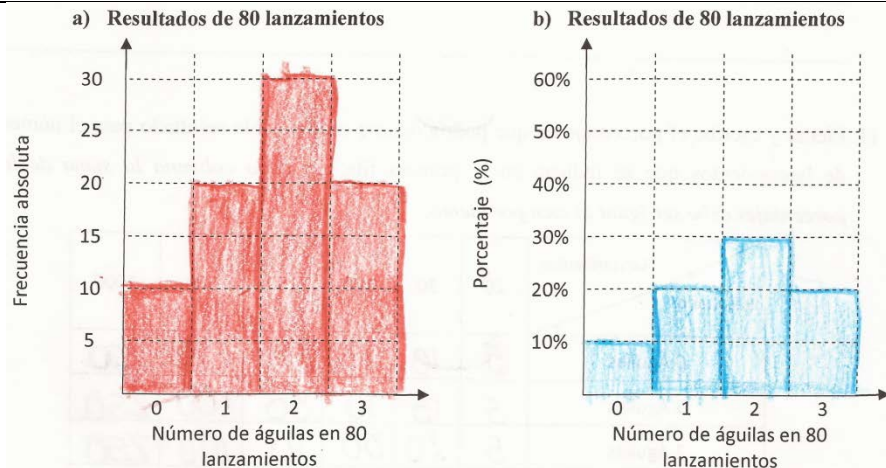
Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación.

Ejemplos para el nivel preestructural

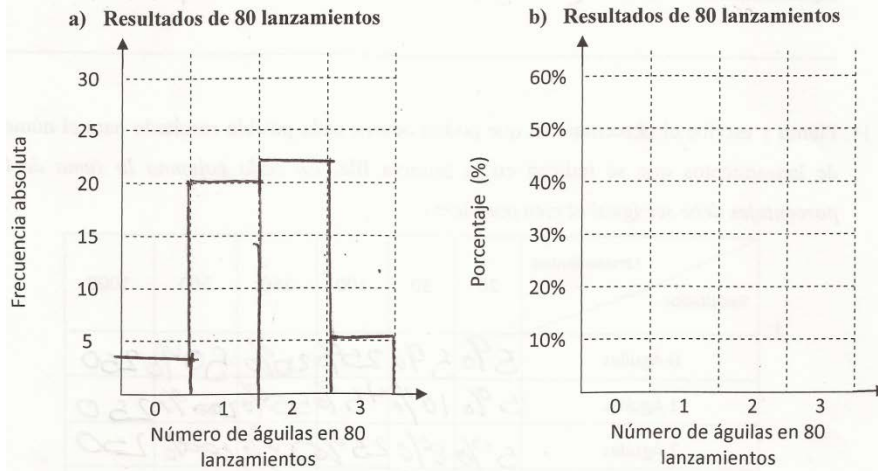
Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplos de respuestas que no contienen ninguna componente:

Comentario: Los estudiantes no presentan ninguna componente para el análisis. El estudiante A19, propone frecuencias absolutas cuya suma es 80 lanzamientos, pero no coinciden sus porcentajes relativos pues suman 80%. En ambos casos se asigna la misma frecuencia a los valores 1 y 4.



Comentario: El estudiante C06, propone frecuencias absolutas cuya suma es aproximadamente 55 lanzamientos, y además no representó los porcentajes respectivos.



Ejemplos para el nivel Uniestructural

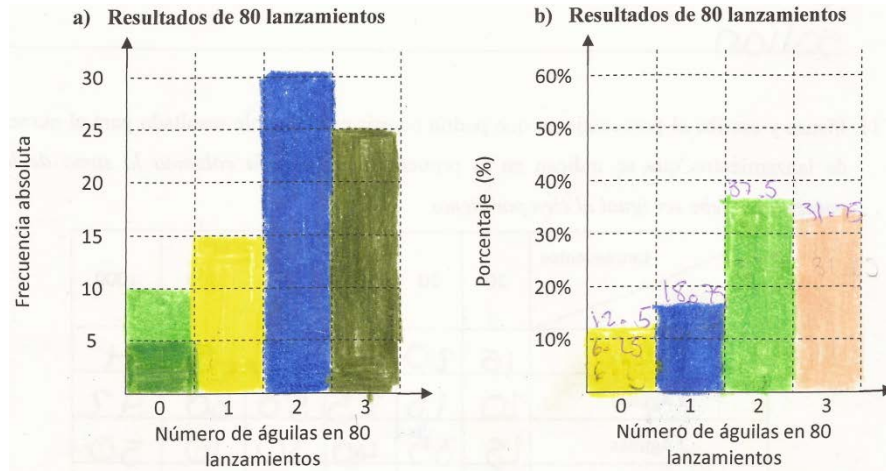
Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder los ejercicios o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

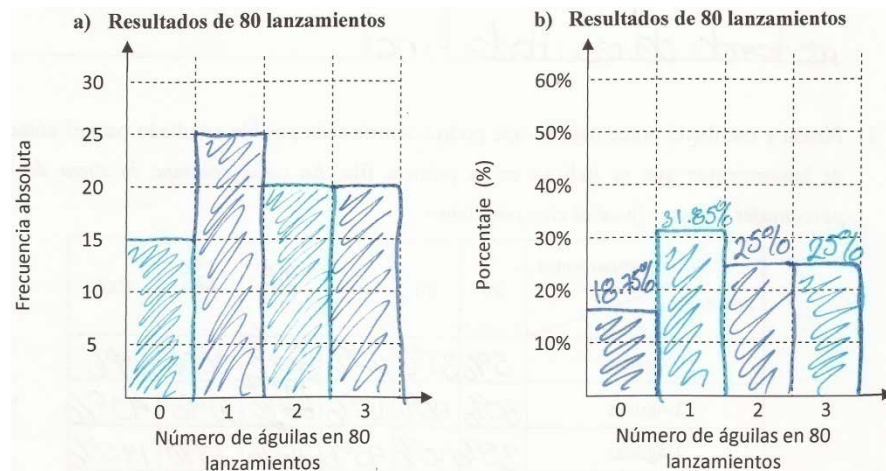
Comentario: En las respuestas se asignan frecuencias tomando en cuenta los 80 lanzamientos, y la suma corresponde al total, además representan de forma correcta su porcentaje respectivo. Sin embargo, sus distribuciones no contienen alguna otra componente por lo que se quedan en el nivel uniestructural.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Estudiante B15:



Estudiante B17:

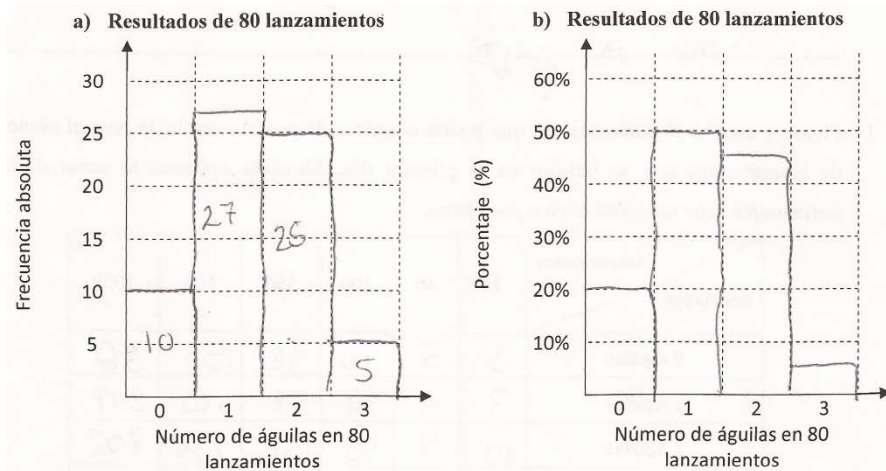


Ejemplos de respuestas que contienen la componente b:

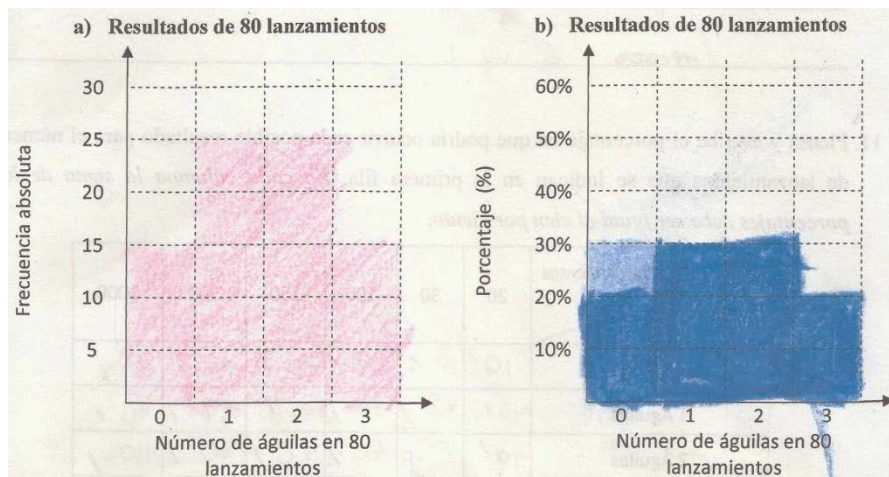
Comentario: Los estudiantes solo asignaron mayor frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad (1 y 2 águilas) sin embargo no presentan alguna otra componente.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente b:

Comentario: El estudiante A03, propone frecuencias absolutas cuya suma es 67 lanzamientos, y no coinciden sus porcentajes.



Comentario: El estudiante C10, propone frecuencias absolutas asignándole la misma frecuencia a los valores 1 y 2, y a los de 0 y 3, sin embargo la suma es 70 lanzamientos, y no coinciden sus porcentajes respectivos.



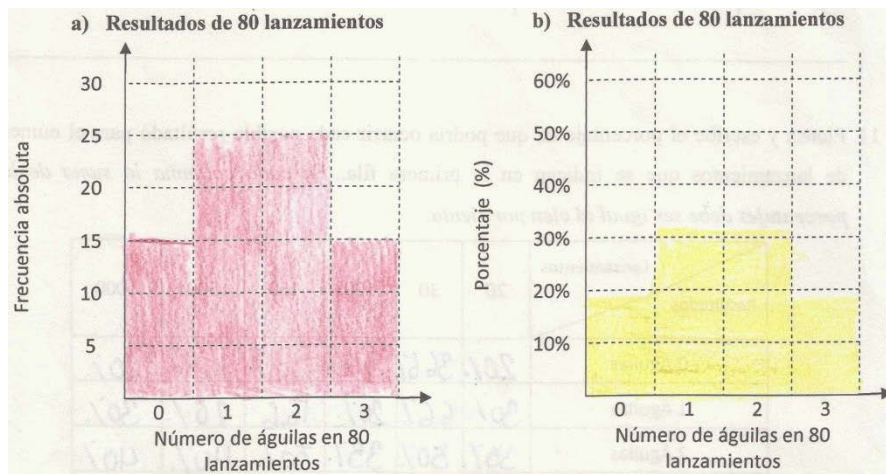
Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlos entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

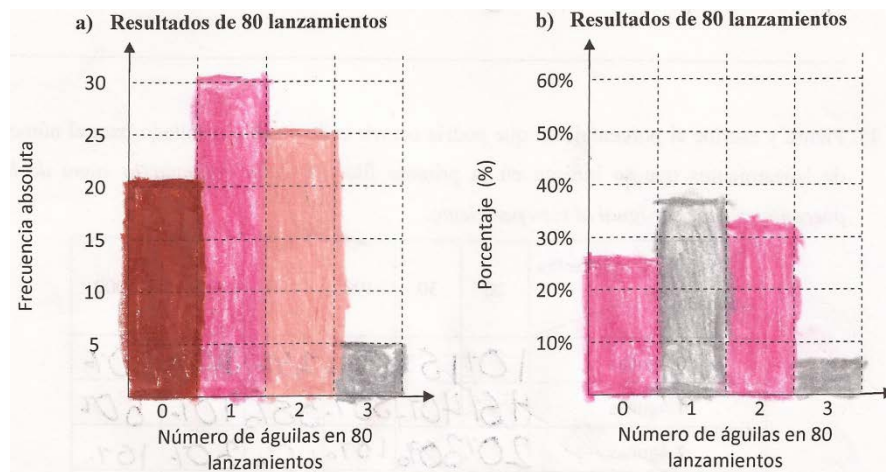
Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:

Comentario: El estudiante asigna mayor frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad y además representa bien los porcentajes respectivos.

El estudiante A02, propone frecuencias absolutas cuya suma es 80 lanzamientos, y sus porcentajes relativos coinciden pues suman 100%. Además asigna mayor probabilidad a 1 y 2, y la propone igual para los valores 1 y 2 y para los valores 0 y 3.

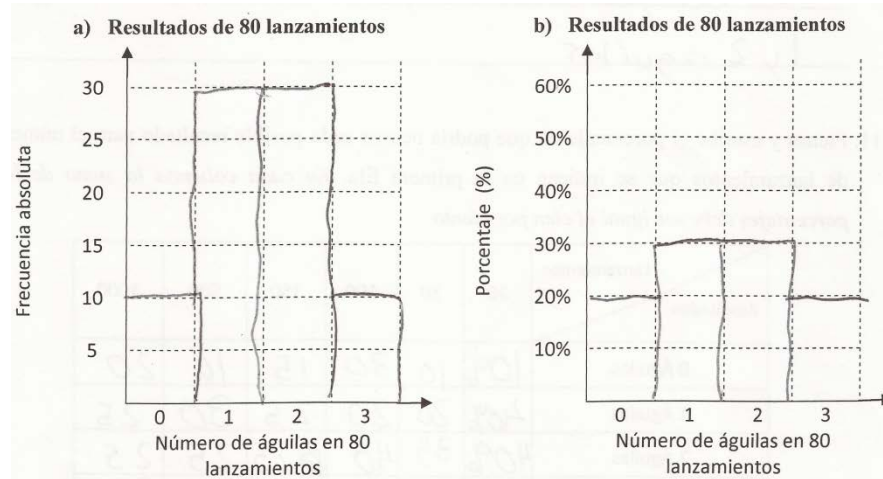


El estudiante C18, propone frecuencias absolutas cuya suma es 80 lanzamientos, y sus porcentajes relativos se corresponden y suman 100%.



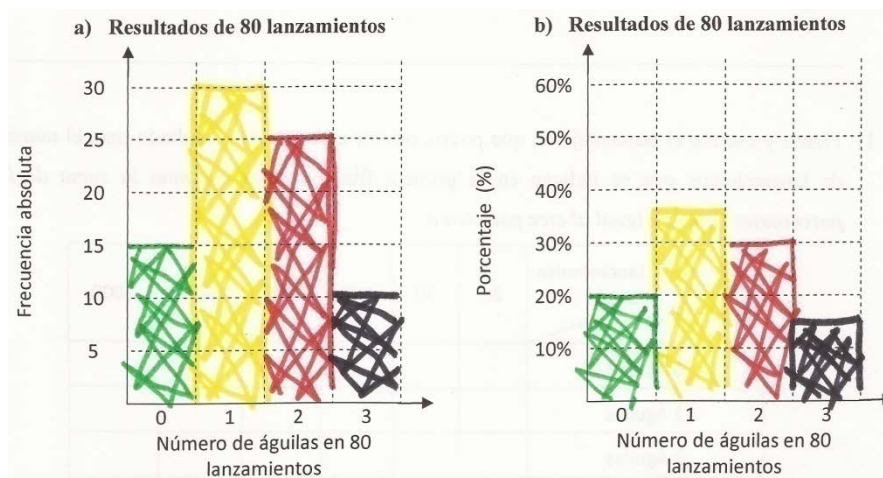
Ejemplos de respuestas que contienen la componente b y c:

Comentario: El estudiante A22, asigna mayor frecuencias a los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir en el lanzamiento de tres monedas. Además, las frecuencias que propone coinciden con los valores esperados de la distribución teórica. Pero la frecuencia asignada no coincide el porcentaje respectivo.



Ejemplos de respuestas que contienen la componente b y d:

Comentario: El estudiante C16, propone frecuencias asignando mayor frecuencia a los valores de la variable (1 y 2) y lo hace tomando en cuenta la variabilidad en los datos, sin embargo, las frecuencias que propone no coincide con los porcentajes respectivos.

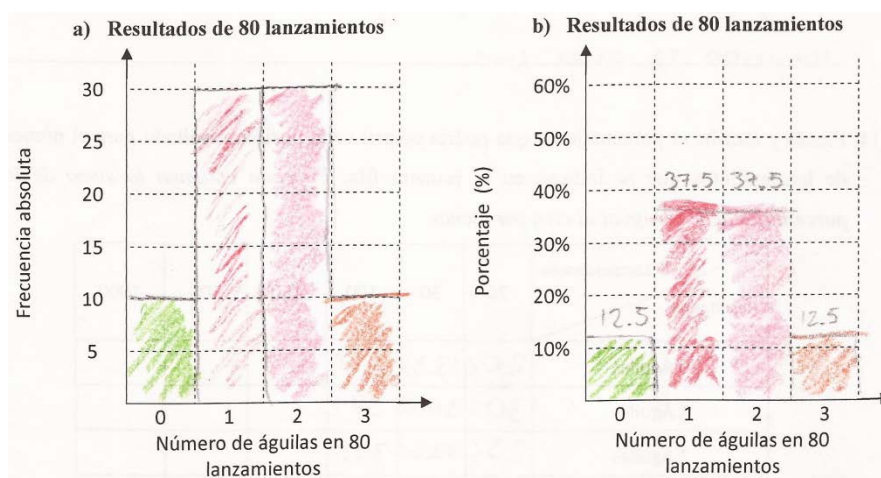


Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:

Comentario: El estudiante B18 asigna frecuencias aproximadas a la probabilidad teórica, dándole más probabilidad a los valores 1 y 2, y además representa bien el respectivo porcentaje de las frecuencias.

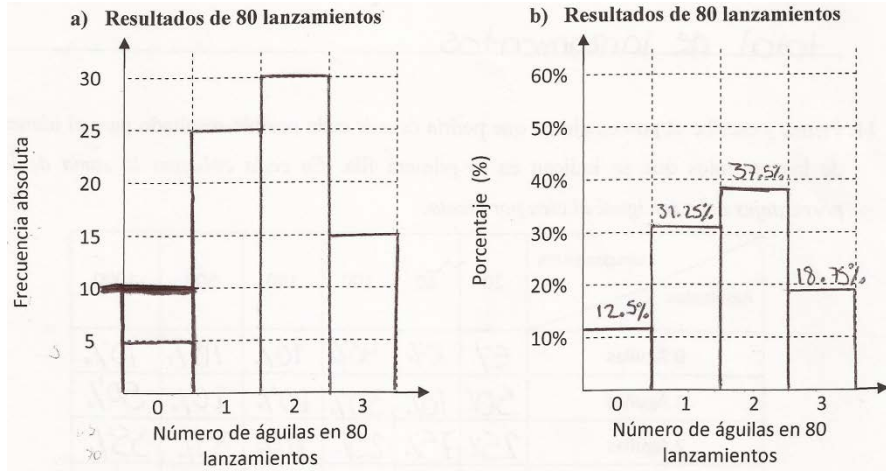


Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y d:

Comentario: El estudiante A21, propone frecuencias absolutas cuya suma es 80 lanzamientos, y los porcentajes se corresponden con las frecuencias y suman el 100%. Además le asigna mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2, indicando la variabilidad.

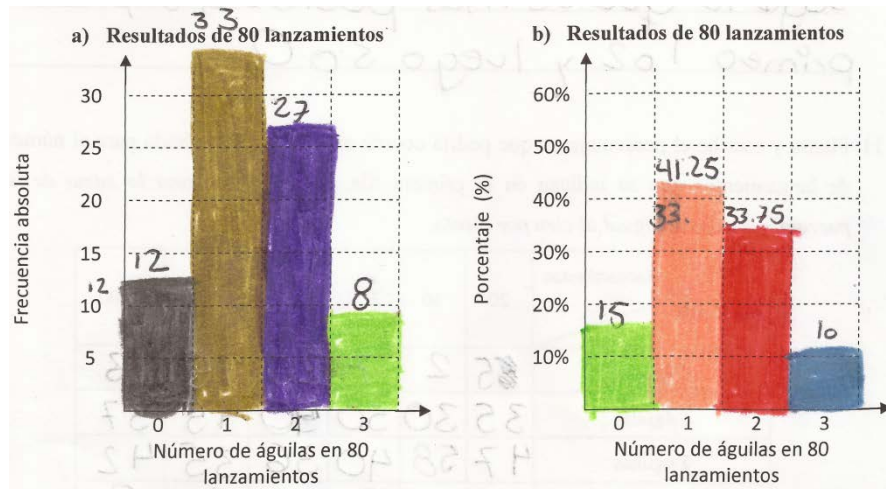
Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y d:




Estudiante A21:



Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b, c y d:

Comentario: El estudiante B09 utiliza todas las componentes para llegar a una respuesta de buen nivel estructural.



A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retroceso  Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 7									
P	NINGUNA COMPONENTE	A06	A10	A11	A14	A15	A19	A20	C06
		C09	C15	C19	C20	C22			
U	a	A01	A09	B14	B15	B17	B23	C03	C14
	b	A03	A04	A05	A12	A13	B04	B07	B11
		C05	C10	C13	C17				
M	a y b	A02	A07	A08	B19	B22	C01	C18	
	b y c	A18	A22						
	b y d	A23	B13	C16					
R	a, b y c	B08	B10	B16	B18				
	b, c y d	B05							
	a, b y d	A16	A17	A21					
	a, b, c y d	B01	B06	B09	B12	B20	B21	C02	C04
C07		C08	C11	C12	C21	C23	C24		

Tabla 6.1.7 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 7

Como se puede observar en la tabla 6.1.7, aproximadamente una quinta parte (19%) de las respuestas proporcionadas por los estudiantes se encuentran en el nivel preestructural (13/68), el 29% (20/68) de las respuestas en el nivel uniestructural, y el 18% (12/68) se encuentran en el nivel multiestructural y la moda de las respuestas se encuentran en el nivel relacional con un 34% de las respuestas dadas por los estudiantes (23/68).

De las 55 respuestas que contienen al menos alguna componente, el 67% (37/55) de las respuestas contienen la componente **a**, es decir asignaron frecuencias tomando en cuenta el número de lanzamientos, pues la suma corresponde a los 80 lanzamientos y representaron bien el porcentaje de cada frecuencia absoluta, sumando el 100%. Sobre la componente **b**, el 85% (47/55) de las respuestas la contiene, es decir, de las respuestas que mostraron alguna componente el 85% propuso frecuencias mayores a 1 y 2; con esto la distribución de frecuencias propuesta tiene forma de campana. El 40% (22/55) de las respuestas la

contienen las componentes **c y d**, en ellas, se asignaron frecuencias que le dan una forma de campana a la gráfica correspondiente, se tiene que la distribución es próxima a la distribución teórica y se refleja la variabilidad.

En la tabla 6.1.7 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnóstico (post-test). Se puede observar que el 64% (43/67) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 28% (19/67) respuestas se quedaron en el nivel que originalmente se encontraban y solo un 7% (5/67) manifestaron un retroceso en su respuesta.

A continuación se muestra en la figura 6.1.7 la frecuencia de respuestas por niveles estructurales de la pregunta 7 y la respectiva gráfica:

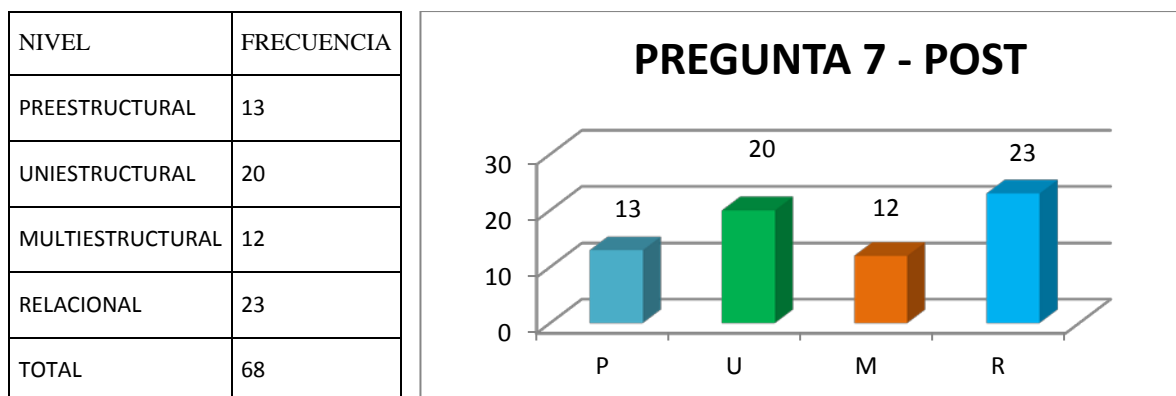


Figura 6.1.7 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 7

Como se puede observar, la moda de las respuestas se encuentra en el nivel relacional, con 34% (23/68) de las respuestas. El 29% (20/68) en el nivel uniestructural, el 19% en el nivel preestructural y solo un 18% (12/68) se encuentra en el nivel multiestructural.

Con esta pregunta se pudo constatar que 34% (23/68) de las respuestas dadas por los estudiantes propusieron frecuencias razonables desde el punto de vista normativo. Conviene señalar que la causa por la que gran parte de las respuestas se clasificaron en el nivel preestructural fue la falta de habilidad para hacer coincidir su propuesta de distribución en porcentajes con la respectiva propuesta de frecuencias absolutas.

6.1.8. Análisis de las respuestas a la pregunta 8

Pregunta 8: Considera que en un lanzamiento 3 amigos y tu van a apostar por alguno de los resultados (0, 1, 2 ó 3 águilas), ¿cuál elegirías y por qué?

Objetivo: Explorar la manera en que los estudiantes aplican su modelo de probabilidad en una situación de apuestas. Algunos conocen que un evento es más probable que otros y, sin embargo, cuando tienen que apostar por algún evento, no utilizan su conocimiento para elegir el más probable, sino que lo hacen con base en creencias o gustos.

Respuesta esperada:

Elegiría 1 o 2 águilas porque son los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de salir ($3/8$ cada una).

Componentes de la respuesta 8:

En esta tarea relacionada con la toma de decisiones bajo incertidumbre, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las de cada estudiante.

- a) Menciona uno o los dos valores de la variable más probables y lo argumenta con alguna de las siguientes componentes:
- b) En su argumentación señala que hay valores de la variable que son más probables, aunque no mencione cuáles.
- c) Argumenta con base en la probabilidad teórica de cada valor de la variable aleatoria.
- d) Justifica su respuesta con base en los resultados que le salieron en la experimentación física o simulada.

6.1.8.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 8

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente, tal vez debido a las siguientes opciones: No se decide por algún valor de la variable, o elige todas porque piensa que tienen la misma probabilidad de caer, elige solo una y explique su respuesta con base en un razonamiento subjetivo como por ejemplo, porque es mi número favorito, o de tipo idiosincrático (porque es a la suerte). Los siguientes ejemplos basan las respuestas en sus preferencias o gustos.

Ejemplos para el nivel preestructural	
Estudiante:	Respuesta:
A10:	2 porque es mi número favorito
B08:	2 águilas porque me siento confiado con ese número
B23:	3 es mi número de la suerte y hay muchas probabilidades de que caiga
C09:	2 o 3 águilas porque hay más posibilidad de ganar

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder sólo utilice una componente de las que se necesitan para responder a la pregunta o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Comentario: Los siguientes ejemplos identifican en su respuesta a los valores de la variable que son más probables, mencionando que tienen mayor probabilidad de caer.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:	
Estudiante:	Respuesta:
A05:	1 águila porque es más probable
A18:	1 o 2 son los que tienen más probabilidades
C11:	1 porque es el que más probabilidad tiene de salir
C24:	por 2 porque tiene más probabilidades de salir

Ejemplos de respuestas que contienen la componente c:	
Comentario: Elige uno o los dos valores de la variable que son más probables, argumentando su respuesta en la experimentación que realizó antes del diagnóstico.	
Estudiante:	Respuesta:
A06:	2 águilas porque una vez hicimos eso y 2 veces gane escogiendo 2 águilas
A21:	El 1 porque basándome en los resultados de experimentos anteriores es el más frecuente
B11:	2 águilas, porque mis graficas dicen que es el más probable

Ejemplos para el nivel Multiestructural



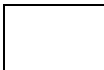
Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlos entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:	
Comentario: Menciona los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir y justifica su respuesta mencionando las combinaciones.	
Estudiante:	Respuesta:
B13:	1 y 2 hay más combinaciones (3)
B21:	1 águila porque de 8 opciones tiene 3 opciones de salir

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y c:	
Comentario: Menciona los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir y argumenta su respuesta en el conocimiento que adquirió al realizar las actividades previas.	

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y c:	
Estudiante:	Respuesta:
B06:	1 o 2 porque siempre he pensado que tienen más posibilidades, también porque lo vi en mi experimentación
C01:	1 águila, según los porcentajes si se hace menos de 100 lanzamientos, tiene mayor probabilidad de caer la variable "1 águila"
C04:	2 o 1 porque durante los experimentos son los que más han salido

Para el nivel Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para este nivel.

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retroceso  Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 8								
P	NINGUNA COMPONENTE	A10	B08	<i>B23</i>	C09	<i>C19</i>	C20	
U	a	A01	A02	A03	A04	A05	A07	A09
		A11	A12	A13	A15	A16	A17	A18
		A19	A20	A22	A23	B01	B04	B05
		B07	B09	B10	B12	B14	B15	B16
		B17	B19	B20	B22	C02	C03	C05
		C06	C07	C08	C10	C11	C12	C13
		C14	C15	C16	C17	C18	C21	C24
	c	A06	A08	A14	A21	B11	C22	C23
M	a y b	B13	B21					
	a y c	B06	B18	C01	C04			

Tabla 6.1.8 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 8

Al analizar los resultados establecidos en la tabla 6.1.8, la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel uniestructural, el cual representa un 82% (56/68) de las respuestas. Un 9% (6/64) se encuentra en el nivel preestructural y multiestructural para cada uno representado.

De las (62) respuestas que contienen al menos una componente, el 100% (62/62) contiene la componente **a**, es decir eligen uno o los dos valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir y basan su respuesta en la probabilidad (subjetiva) de ganar, lo que significa que la mayor parte de estos identificó correctamente los valores de la variable con mayor probabilidad de ganar, aunque su argumentación sea del tipo subjetivo y no con fundamento probabilístico, lo que significa que la mayor parte de estos identificó correctamente los valores de la variable con mayor probabilidad de ganar, aunque su argumentación sea del tipo subjetivo y no con fundamento probabilístico.

Sobre la componente **b**, solo un 3% (2/62) argumentó su elección del valor de la variable con mayor probabilidad en el espacio muestral, al mencionar que de las ocho opciones la variable que eligió tiene 3 opciones de salir. Y un 18% (11/62) contiene la componente **c**, en la cual argumentó su elección de la variable con mayor probabilidad en los experimentos previos realizados en las actividades físicas y simuladas, lo cual le ayudó a observar que los valores de la variable no tienen la misma probabilidad y observó que había valores que tenían mayor probabilidad de salir.

En la tabla 6.1.8 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnóstico (post-test). Se puede observar que el 39% (26/67) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 50% (40/67) respuestas se quedaron en el nivel que originalmente se encontraban y solo un 1.5% (1/67) manifestaron un retroceso en su respuesta.

A continuación se muestra en la figura 6.1.8 la frecuencia y su respectiva gráfica a la pregunta 8 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
PREESTRUCTURAL	6
UNIESTRUCTURAL	56
MULTIESTRUCTURAL	6
TOTAL	68

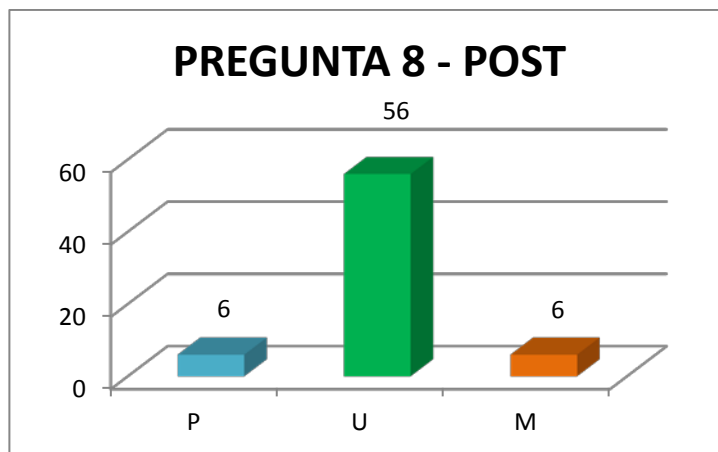


Figura 6.1.8 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 8

Conforme a la figura 6.1.8, el 91% (62/68) de las respuestas dadas por los estudiantes reflejo alguna componente, eligiendo algún valor de la variable con mayor probabilidad y argumentando su respuesta ya sea en la probabilidad subjetiva o en el espacio muestral o en la experimentación que realizo previamente.

Haciendo un análisis más exhaustivo se pudo observar que de las respuestas el 96% (65/68) elegiría uno de los dos valores de la variable con mayor probabilidad (1 o 2), siendo el “2” el más elegido por los estudiantes, representado por un 51.5% (35/68) mientras que un 25% (17/68) elegiría el valor de la variable “1” y solo un 19% (13/68) elegiría los dos valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir.

Sin embargo nuestro objetivo era indagar sobre los argumentos de una medida de probabilidad y ver si el estudiante relaciona esta medida con el recorrido de la variable aleatoria o el espacio muestral, lo cual para esta pregunta solo un 3% (2/68) mostró evidencia de su elección de los valores de la variable más probable debido a que considero el espacio muestral.

6.1.9. Análisis de las respuestas a la pregunta 9

Pregunta 9: Piensa y escribe la cantidad de veces que se podría obtener 0, 1, 2 y 3 águilas para cada número de lanzamientos. *En cada columna la suma de los resultados debe ser igual al número de lanzamientos.*

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

Objetivo: Explorar las predicciones de los estudiantes de las distribuciones de secuencias de experimentos de diferentes números de lanzamientos (20, 30, 100, etc.). En particular, observar la forma en que representan en las frecuencias el modelo de probabilidad que atribuyen a la situación. Aunque en 20 y 30 lanzamientos no se espera que las distribuciones tengan una forma binomial, a partir de 100 ya se deben presentar con claridad que los valores 1 y 2 tienen más frecuencia. Un ejemplo de una solución que consideramos correcta es como la siguiente (resultado de una simulación en Fathom).

Respuesta esperada:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	2	4	12	18	63	126
1 Águilas	7	11	37	56	188	374
2 Águilas	8	12	38	57	187	376
3 Águilas	3	3	13	19	62	124
Total	20	30	100	150	500	1000

Las respuestas son aproximadas a la probabilidad teórica, no necesariamente debe ser la que se encuentra en la tabla.

Componentes de la respuesta 9:

Para esta pregunta sobre predicciones a corto, mediano y largo plazo, de seis familias de experimentos en las que se piden las distribuciones de frecuencias absolutas, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Asigna o distribuye las frecuencias absolutas tomando en cuenta el número de lanzamientos (la suma de las frecuencias absolutas corresponde al número de lanzamientos).
- b) Asigna mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2 aunque no se aproxime a la probabilidad teórica.
- c) Asigna las frecuencias correspondientes a la distribución teórica, o bien, cercanas a la distribución teórica ($\pm 5\%$).
- d) Manifiesta el sentido de variabilidad, al dar o asignar frecuencias absolutas próximas a la probabilidad teórica, pero no iguales.

6.1.9.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 9

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante proporcione frecuencias donde la suma no corresponda al número de lanzamientos. Asigna frecuencias que no tienen relación entre sí, es decir no reflejan alguna característica de la distribución teórica. No hay un patrón consistente de distribución y aleatoriedad de las frecuencias. No muestra consistencia en su representación tabular. O bien la respuesta no se encuentra en términos absolutos.

Comentario: El estudiante A06, no entiende la pregunta, pues en su respuesta no reflejan ninguna componente. Al asignar las frecuencias en cada columna, la suma no corresponde al total de lanzamientos.

Ejemplos para el nivel Preestructural

Estudiante A06:

Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	1	1	3	3	1	3
1 Águilas	2	2	2	2	2	2
2 Águilas	3	3	1	1	3	1
3 Águilas	1	2	3	1	3	2
Total	7	8	9	7	9	8

Comentario: El estudiante A11, no asigna frecuencias en términos absolutos.

Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	✓			✓		
1 Águilas			✓		✓	
2 Águilas		✓				✓
3 Águilas				✓	✓	
Total	20	30	100	150	500	1000

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las cuatro que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos o tres pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Comentario: Los estudiantes asignan frecuencias tomando en cuenta el número de lanzamientos, pues la suma corresponde al total de lanzamientos. Sin embargo sus frecuencias no son próximas a la distribución teórica, ni tienen una distribución en forma de campana.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Estudiante A01:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	5	10	10	25	100	100
1 Águilas	5	1	20	50	100	300
2 Águilas	5	5	50	50	200	200
3 Águilas	5	14	20	25	100	400
Total	20	30	100	150	500	1000

Estudiante B23:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	5	7	10	10	100	250
1 Águilas	10	20	30	20	125	375
2 Águilas	2	1	25	35	125	250
3 Águilas	3	2	35	85	150	125
Total	20	30	100	150	500	1000

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o tres componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:

Comentario: El estudiante A07 proporciona como frecuencias valores absolutos que suman el total de lanzamientos. Además asigna más frecuencia a los valores de la variable que tienen mayor probabilidad, 1 y 2.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	3	5	10	10	40	100
1 Águilas	7	10	50	60	100	300
2 Águilas	8	10	30	50	300	500
3 Águilas	2	5	10	30	60	100
Total	20	30	100	150	500	1000

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:

Comentario: El estudiante asigna frecuencias en valores absolutos, en donde las frecuencias que propone son muy próximas a la distribución teórica. Proponiendo porcentajes entre el 33.3% y el 40% para los valores 1 y 2. Y para 0 y 3 valores entre 10% y 16.7% de probabilidad. Además al asignar la misma frecuencia, podemos entender que sabe que los valores de la variable tienen la misma probabilidad para 1 y 2 y para 0 y 3.




Estudiante C10:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	2	5	10	25	50	100
1 Águilas	8	10	40	50	200	400
2 Águilas	8	10	40	50	200	400
3 Águilas	2	5	10	25	50	100
Total	20	30	100	150	500	1000

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y d:

Comentario: El estudiante C01 asigna las frecuencias en cada columna, en donde la suma corresponde al total de lanzamientos. Esta frecuencia que propone le asigna mayor valor a los valores de la variable 1 y 2, además manifiesta el sentido de la variabilidad al asignar frecuencias cercanas en los valores con igual probabilidad.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	4	6	15	32	54	150
1 Águilas	7	9	36	42	195	360
2 Águilas	6	10	35	45	198	350
3 Águilas	3	5	14	31	53	140
Total	20	30	100	150	500	1000

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retroceso  Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 9											
P	NINGUNA COMPONENTE	A06	A10	A11	C22						
U	a	A01	A02	A03	A14	A19	A20	A21	A22	A23	B04
		B05	B06	B07	B08	B10	B11	B12	B14	B15	B17
		B19	B20	B23	C02	C03	C06	C08	C09	C12	C13
		C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20	C21		
M	a y b	A07	A09	A12	A13	A15	A16	A17	B13	C04	C05
		C07	C11	C23	C24						
R	a, b y c	A04	B22	C10							
	a, b y d	A05	A08	A18	B01	B09	B16	B18	B21	C01	

Tabla 6.1.9 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 9

Como podemos observar en la tabla 6.1.9 muy pocas respuestas se encuentran en el nivel preestructural, pues representan solo el 6% (4/68) de las respuestas dadas por los estudiantes, es decir solo 4 de los 68 estudiantes no entendieron la pregunta pues la frecuencia que asignaron no se encuentra en valores absolutos y la suma no corresponde con el número de lanzamientos.

Además podemos darnos cuenta que la mayoría de respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel uniestructural representado con un 56% (38/68), para el nivel multiestructural lo representa aproximadamente una cuarta parte de las respuestas pues corresponde al 20.5% (14/68), mientras que para el nivel relacional lo contiene solo un 18% (12/68) de las respuestas.

De las (64) respuestas que contienen al menos una componente el 100% contienen la componente **a**, pues todos asignaron frecuencias absolutas en donde la suma corresponde al total de los lanzamientos. Sobre la componente **b**, el 41% (26/64) la contiene, es decir 26 de las 64 respuestas asignaron mayor frecuencia a los valores de la variable que tienen mayor

probabilidad de ocurrir. El 38% (26/68) de los estudiantes tienen la noción que para el lanzamiento de tres monedas la probabilidad de que ocurra la variable el número de águilas (0, 1, 2 y 3 águilas) no es la misma, y que para los valores 1 y 2 es mayor, aunque no sepan teóricamente cuál es. Para la componente **c**, solo un 5% (3/64) propuso frecuencias absolutas cercanas a la distribución teórica y un 14% (9/64) indicó en sus frecuencias la variabilidad (**d**).

En la tabla 6.1.9 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnóstico (post-test). Se puede observar que el 49% (33/67) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 47% (32/67) respuestas se quedaron en el nivel en el que se encontraban y solo un 3% (2/67) manifestaron un retroceso en su respuesta. A continuación se muestra en la figura 6.1.9 las frecuencias por nivel estructural y su respectiva gráfica a la pregunta 9.

NIVEL	FRECUENCIA
PREESTRUCTURAL	4
UNIESTRUCTURAL	38
MULTIESTRUCTURAL	14
RELACIONAL	12
TOTAL	68

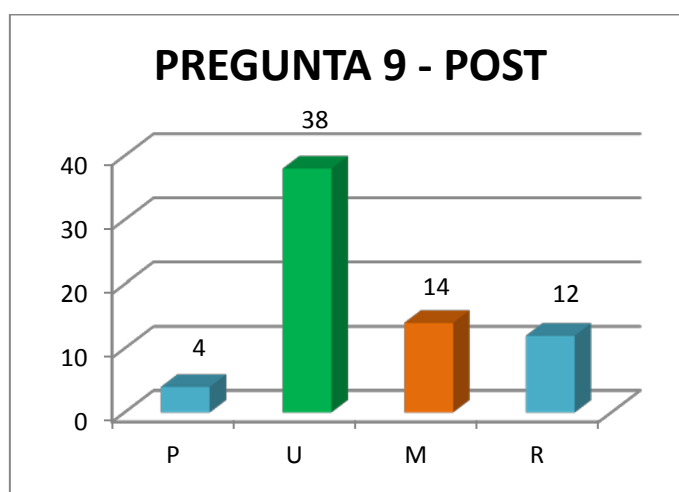


Figura 6.1.9 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 9

Los resultados mostrados en la figura 6.1.9 destaca que la mayoría de las respuestas (94%) contienen al menos alguna componente (64/68). Y la moda en las respuestas se encuentra en el nivel uniestructural, representado por un 56% (38/68) de las respuestas dadas por los estudiantes, es decir 38 de las respuestas solo asignaron frecuencias en las que la suma corresponde al total de lanzamientos, sin embargo, no asignaron mayor frecuencia a los valores de la variable con mayor probabilidad, ni asignaron las frecuencias de acuerdo a la distribución teórica.

Nuestro objetivo para esta pregunta era que realizaran predicciones de experimentos a corto, mediano y largo plazo con distribuciones de frecuencia absoluta, tomando en cuenta la probabilidad y la distribución teórica, de los cuales solo 18% (12/68) propuso frecuencias absolutas tomando en cuenta que la suma corresponda al número de lanzamientos y además la frecuencia se aproxima a la distribución teórica.

6.1.10. Análisis de las respuestas a la pregunta 10

Pregunta 10: Describe el criterio que seguiste para distribuir las frecuencias entre los resultados; argumenta tu respuesta:

Objetivo: Explorar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones propuestas.

El estudiante podrá expresar si considera los distintos aspectos a tener en cuenta, como el modelo probabilísticos que atribuye a la situación y la variabilidad.

Respuesta esperada:

Tomando en consideración las probabilidades de cada valor de la variable ($1/8$ para 0 y 3, y $3/8$ para 1 y 2) obtuve la parte proporcional para cada número de lanzamientos considerando un margen de error por la variabilidad.

Componentes de la respuesta 10:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Argumenta su respuesta tomando en cuenta los valores de la variable más probable o bien los menos probables.
- b) Argumenta su respuesta mencionando la probabilidad teórica de los valores de la variable o bien considerando el Espacio muestral (EM).
- c) Justifica su respuesta por la experimentación que realizó anteriormente.
- d) En su respuesta refleja que considera la variabilidad.

6.1.10.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 10

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante argumente su respuesta en creencias personales o subjetivas no relacionadas con aleatoriedad, o bien argumentos alejados de la norma. Los siguientes ejemplos se basan en juicios subjetivos.

Ejemplos de respuestas que no contienen componente alguna:
Estudiante A01: Mmm solo puse los resultados para que sumaran el resultado
Estudiante A03: Sumo y luego resto y luego volví a jugar
Estudiante A10: Sumo y así
Estudiante C05: Dividiendo entre dos y sacando los demás
Estudiante C15: Lo hice así porque tenía que salir el resultado

Ejemplos para el nivel Uniestructural


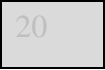

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos o tres pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen componente a:	
Estudiante A13: Mi criterio fue que las posibilidades caen más en 1 águila y 2 águilas	Comentario: Identifica uno o los dos valores de la variable que son más probables o bien uno o los dos que son menos probables. En su respuesta, hay evidencias de que el estudiante se percata de los valores más probables.
Estudiante B09: seguí lo que es más posible que pase primero 1 o 2 y luego 3 o 0	
Estudiante B12: poner más en 1 y 2 águilas ya que con más lanzamientos son esas más probables de salir	
Estudiante B19: 1 y 2 águilas porque tienen más probabilidad	

Ejemplos de respuestas que contienen componente b:	
Estudiante A14: Por el espacio muestral	Comentario: Argumenta su respuesta apelando al espacio muestral, aunque no especifica qué entiende como espacio muestral ni qué aspecto del él apoya la afirmación.

Ejemplos de respuestas que contienen componente c:	
Estudiante C11: Lo hice así porque con los demás experimentos me salían el 1 y 2 más grande y 3 y 0 los más pequeños	Comentario: Argumenta su respuesta en el conocimiento que adquirió al realizar las actividades previas.
Estudiante C16: Basado en resultados anteriores	

Para los demás niveles Multiestructural y Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para cada nivel.

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retroceso  Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 10										
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A02	A03	A04	A06	A07	A09	A10	A11
		A15	A17	A19	A20	A21	A23	B01	B04	B06
		B08	B10	B13	B15	B17	B18	B20	B21	B23
		C03	C05	C09	C15	C20	C22	C23		
U	a	A05	A12	A13	A16	A18	A22	B05	B09	B11
		B12	B16	B19	B22	C01	C10	C13	C14	C17
	b	A08	A14	C06	C12	C24				C18
	c	C02	C04	C07	C08	C11	C16	C19	C21	
NC: Los estudiantes B07 y B14 no contestaron la pregunta.										

Tabla 6.1.10 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 10

Podemos observar en la tabla 6.1.10 que el 50% (34/68) de las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel preestructural, pues en sus respuestas no reflejaron ninguna componente de las descritas, la mayoría basó sus respuestas en sus creencias personales o subjetivos, y no dio argumentos basados en la probabilidad teórica, o en los valores de la variable que tienen mayor probabilidad. Un 47% (32/68) se ubica en el nivel uniestructural, es decir solo reflejaron una componente de las que se necesitan para responder a la pregunta. El 59% (19/32) de estas respuestas contienen la componente **a**, pues argumentan su distribución de frecuencias absolutas para la pregunta 9, tomando en cuenta los valores de la variable más probables o bien los menos probables. Un 16% (5/32) consideran la componente **b**, al argumentar su respuesta en las combinaciones del espacio muestral y un 25% (8/32) justificó su respuesta en las experimentaciones que se realizaron previamente.

En la tabla 6.1.10 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnóstico (post-test). Se puede observar que el 45% (29/65) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 51% (33/65) respuestas se quedaron en el nivel en el que se encontraban y solo un 5% (3/65) manifestaron un retroceso en su respuesta.

A continuación se muestra en la figura 6.1.10 las frecuencias por nivel estructural y su respectiva gráfica a la pregunta 10.

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	2
PREESTRUCTURAL	34
UNIESTRUCTURAL	32
TOTAL	68

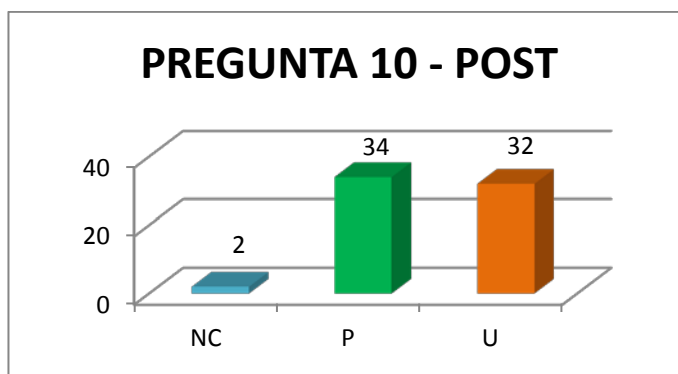


Figura 6.1.10 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 10

Se puede notar en las frecuencias de la figura 6.1.10; el nivel de respuestas de los estudiantes solo llega hasta el uniestructural. La mitad de respuestas se encuentran en el nivel preestructural, lo cual nos muestra que la mayoría no pudo explicar de forma correcta su respuesta, sus ideas o intuiciones de manera que reflejara alguna componente.

Nuestro objetivo de la pregunta era evaluar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones de frecuencias absolutas a corto plazo, mediano y largo plazo, de los cuales solo el 47% (32/68) de las respuestas reflejaron que tomaron en cuenta los valores de las variables más probables o bien los menos probables, considerando el espacio muestral o la experimentación que realizaron previamente.

Se puede observar en los resultados globales del estudio que las preguntas en las que se debe responder mediante una argumentación verbal, son muy difíciles para los estudiantes, ya que les cuesta trabajo expresar sus ideas, intuiciones o procedimientos.

6.1.11. Análisis de las respuestas a la pregunta 11

Pregunta 11: Piensa y escribe el porcentaje en que podría ocurrir cada posible resultado para el número de lanzamientos que se indican en la primera fila. *En cada columna la suma de los porcentajes debe ser igual al cien por ciento.*

Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

Objetivo: *Explorar las predicciones de los estudiantes de experimentos a corto, mediano y largo plazo con distribuciones de porcentajes y examinar los argumentos que ofrecen para justificarlas.*

Respuesta esperada:

Una buena respuesta, tendrá porcentajes no muy próximos a la probabilidad teórica cuando el número de repeticiones no son muy grandes (20, 30), pero se van acercando cuando el número de repeticiones crece. Esta intuición prefigura la ley de los grandes números. Un cuadro guía para ver es:

Lanzamientos Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%
1 Águilas	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%
2 Águilas	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%	Levemente próximo a 37.5%
3 Águilas	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%	Levemente próximo a 12.5%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Componentes de la respuesta 11:

Para esta pregunta sobre predicciones a corto, mediano y largo plazo, de seis experimentos con distribuciones de frecuencia en términos relativos, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- Asigna o distribuye las frecuencias relativas tomando en cuenta que la suma de las frecuencias relativas corresponda al 100%.
- Asigna mayor frecuencia a los valores de la variable 1 y 2 aunque no se aproxime a la probabilidad teórica.
- Asigna frecuencias relativas correspondientes a la probabilidad teórica o bien cercanas en un $\pm 2.5\%$
- Manifiesta un sentido de la variabilidad al dar o asignar frecuencias absolutas próximas a la probabilidad teórica, pero no iguales.

6.1.11.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 11

Con base en las anteriores componentes, se analizaron las respuestas de los estudiantes, obtenidas en los cuestionarios, de las cuales se muestran sólo algunas a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta refleje alguna de las siguientes características: proporcione frecuencias relativas donde la suma no corresponda al 100%; asigne frecuencias que no reflejan alguna característica de la distribución teórica; que no muestre consistencia en su representación tabular o bien que los números que propone en su respuesta no sean porcentajes.

Ejemplos de respuestas que no contienen ninguna componente:

Comentario: El estudiante A11, no asigna frecuencias en términos relativos.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas			X			
1 Águilas	X					X
2 Águilas		X	X		X	
3 Águilas				X		X
Total	20	30	200	150	500	2000

Comentario: El estudiante C06, asigna frecuencias relativas donde la suma no corresponde al 100%, sino que suma el porcentaje total de cada columna.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	5%	5%	25%	25%	50%	250
1 Águilas	5%	10%	45%	50%	200%	250
2 Águilas	5%	10%	25%	50%	200%	250
3 Águilas	5%	5%	5%	25%	500%	250
Total	20%	30%	100%	150%	500%	1000%

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder sólo utilice una componente de las que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos o tres pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:

Comentario: Los estudiantes proporcionan frecuencias en valores relativos cuya suma corresponde al 100%; sin embargo, en su respuesta no hay señales de que use alguna otra componente.

Estudiante A01:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	10%	50%	30%	10%	20%	10%
1 Águilas	20%	30%	40%	5%	30%	10%
2 Águilas	30%	10%	20%	40%	20%	80%
3 Águilas	40%	10%	10%	45%	30%	10%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Estudiante B08:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	15%	30%	70%	60%	50%	40%
1 Águilas	15%	20%	10%	10%	30%	40%
2 Águilas	15%	30%	10%	10%	10%	10%
3 Águilas	55%	20%	10%	20%	10%	10%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o tres componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:

Comentario: En su respuesta el estudiante refleja que percibe que la probabilidad para los valores de la variable 1 y 2 es mayor; además la suma corresponde al 100%. Sin embargo, los valores que propone no son próximos a la distribución teórica.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:

Estudiante B01:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	10%	10%	7%	7%	10%	10%
1 Águilas	20%	25%	40%	40%	25%	35%
2 Águilas	50%	50%	45%	45%	50%	35%
3 Águilas	20%	15%	8%	8%	15%	20%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Estudiante C02:

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	12.5%	16.66%	20%	20%	20%	13.5%
1 Águilas	25%	23.33%	25%	26.66%	26%	34%
2 Águilas	50%	43.33%	35%	33.33%	34%	39%
3 Águilas	12.5%	16.66%	20%	20%	20%	13.5%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:

Comentario: El estudiante A04 distribuye sus frecuencias tomando en cuenta que la suma corresponde al 100%, además percibe que los valores de la variable 0 y 3 tienen la misma probabilidad al igual que los valores 1 y 2 y que la probabilidad de estos últimos valores es mayor que la de 0 y 3. La distribución que proporciona es muy próxima en + 2.5% a la distribución teórica. Su respuesta no muestra sentido de variabilidad.

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	10%	10%	10%	10%	10%	10%
1 Águilas	40%	40%	40%	40%	40%	40%
2 Águilas	40%	40%	40%	40%	40%	40%
3 Águilas	10%	10%	10%	10%	10%	10%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a, b y c:

Comentario: El estudiante C07 distribuye sus frecuencias tomando en cuenta que la suma corresponda al 100%, percibe que la probabilidad de los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad que los de 0 y 3, por lo que le asigna mayor frecuencia a 2 y 1. Su distribución es próxima a la distribución teórica en un $\pm 2.5\%$. En las frecuencias que propone se refleja que considera sólo de forma muy leve a la variabilidad.

Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas	10%	15%	15%	15%	15%	10%
1 Águilas	40%	40%	35%	40%	30%	40%
2 Águilas	40%	35%	35%	30%	40%	40%
3 Águilas	10%	10%	15%	15%	15%	10%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica. Retroceso 20 Permanencia Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 11											
P	NINGUNA COMPONENTE	A03	A10	A11	A14	A17	A19	A20	C06	C19	C22
U	a	A01	A02	A06	A15	A16	A21	A22	B04	B05	B07
		B08	B12	B14	B15	B16	B17	B23	C03	C05	C08
		C09	C12	C13	C15	C17	C18	C20	C23		
M	a y b	A05	A07	A08	A09	A12	A18	A23	B01	B06	B09
		B10	B11	B13	B18	B19	B20	B21	C02	C04	C11
		C21	C24								
R	a, b y c	A04	B22	C01	C07	C10	C14				
NC: Los estudiantes A13 y C16 no contestaron la pregunta.											

Tabla 6.1.11 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 11

Al establecer los resultados en la tabla 6.1.11, muy pocas respuestas se encuentran en el nivel preestructural, pues representan solo el 15% (10/68) de las respuestas dadas por los estudiantes, es decir, sólo 10 de los 68 estudiantes no entendieron la pregunta pues la frecuencia que asignaron no se encuentra en valores relativos y la suma no corresponde al 100%. Gran parte de respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel uniestructural representado con un 41% (28/68); en el nivel multiestructural se ubicaron 32% (22/68) de las respuestas, mientras que en el nivel relacional se tiene un 9% (6/68) de las respuestas.

De las (56) respuestas que contienen al menos una componente, el 100% contiene la componente **a**, pues todos asignaron frecuencias relativas cuya suma corresponde al 100%. Sobre la componente **b**, el 50% (28/56) la contiene, es decir 28 de las 56 respuestas asignaron mayor frecuencia a los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir, es decir propusieron mayor frecuencia a los valores 1 y 2, aunque la frecuencia que asignaran no se aproxime a la distribución teórica. En resumen, el 41% (28/68) de los estudiantes saben que la distribución no es equiprobable, y que para los valores 1 y 2 es mayor, aunque no sepan teóricamente cuál es. Con relación a la componente **c**, sólo un 11% (6/56) propuso frecuencias absolutas cercanas a la distribución teórica.

En la tabla 6.1.11 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnostico (post-test). Se puede observar que el 45% (29/65) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 46% (30/65) respuestas se quedaron en el nivel en el que se encontraban y solo un 9% (6/65) manifestaron un retroceso en su respuesta. A continuación se muestra en la figura 6.1.11 las frecuencias por nivel estructural y su respectiva grafica a la pregunta 11:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	2
PREESTRUCTURAL	10
UNIESTRUCTURAL	28
MULTIESTRUCTURAL	22
RELACIONAL	6
TOTAL	68

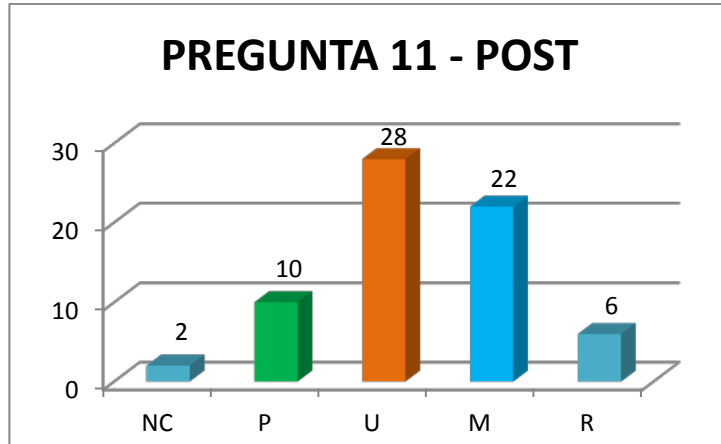


Figura 6.1.11 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 11

Como se puede observar, la mayoría de las respuestas (82%) contiene al menos alguna componente (56/68). La moda en las respuestas se encuentra en el nivel uniestructural, representado por un 41% (28/68) de las respuestas, en estas las respuestas sólo asignaron frecuencias relativas cuya suma es 100%.

Con esta pregunta se pretendía que los estudiantes realizaran predicciones de experimentos a corto, mediano y largo plazo con distribuciones de frecuencia relativas, tomando en cuenta la probabilidad y la distribución teórica. Sólo 9% (6/68) propuso frecuencias cuya suma es 100% y con frecuencias próximas a la distribución teórica.

6.1.12. Análisis de las respuestas a la pregunta 12

Pregunta 12: ¿Por qué piensas que los porcentajes anteriores son razonables?

Objetivo: Explorar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones de frecuencias que propusieron.

Respuesta esperada:

Porque se basan en la probabilidad de cada valor de la variable (aprox. 12.5% para los valores de la variable 0 y 3, y 37.5% para los valores de la variable 1 y 2)

Componentes de la respuesta 12:

Para esta pregunta se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar las respuestas de cada estudiante:

- a) Argumenta su respuesta tomando en cuenta los valores de la variable más probable o bien los menos probables.
- b) Argumenta su respuesta mencionando la probabilidad teórica de los valores de la variable o bien considerando el Espacio muestral (EM)
- c) Justifica su respuesta por la experimentación que realizó anteriormente
- d) En su respuesta refleja que considera la variabilidad

6.1.12.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 12

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación en los niveles estructurales de respuestas, se analizaron los resultados a la pregunta 12; de los cuales se muestran sólo algunos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante base sus respuestas en creencias personales o subjetivas no relacionadas con la aleatoriedad, o bien ofrezca argumentos incorrectos. En general, en su respuesta no refleja ninguna componente de las que se necesitan para responder la pregunta.

Ejemplos de respuestas sin algún componente:	
Estudiante A01: porque dan 100	Comentario: Con excepción de A01, sus justificaciones son sólo afirmaciones generales sin sustancia. A01 sólo menciona que sus porcentajes suman 100.
Estudiante A03: porque yo lo hice	
Estudiante A09: hice las operaciones	
Estudiante B06: porque lo voy poniendo de acuerdo a lo que creo posible	
Estudiante B12: porque los saque por el método	
Estudiante C01: porque siguen lo lógico de cuantas veces cayeron	

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder la pregunta o utiliza dos o tres pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a:	
Estudiante A08: Porque hay más probabilidades de que salga 1 o 2 águilas	Comentario: En sus argumentos, se percatan de valores más probables de la variable.
Estudiante B15: porque 1 y 2 tienen más probabilidad de salir así	

Ejemplos de respuestas que contienen la componente c:	
Estudiante B01: Porque es lo que más pienso que saldrá porque lo comprobé en los experimentos	Comentario: Argumentan sus respuestas con base en el conocimiento que adquirieron al realizar las actividades previas.
Estudiante C02: Porque en las simulaciones salieron algo similar	
Estudiante C10: porque en base a los lanzamientos hechos comprobé que 0 y 3 era el 10% y 1 y 2 de 40%	

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o tres componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen la componente a y b:	
Estudiante B20: Porque yo creo que si se distribuyen de manera proporcional, ya que los mayores resultados se encuentra en 1 y 2 ya que son las variables que mayor probabilidad tienen, 0 y 3 águilas son los que menos valor tendrán y no se llevan mucha diferencia entre todos los resultados	Comentario: En su argumento, se evidencia de que se percata de los valores más probables, y además tiene en cuenta la variabilidad en los datos, aunque son muy cercanos a los valores esperados de la distribución.

Para el nivel Relacional no hubo respuestas por parte de los estudiantes que cumplieran con las componentes necesarias para este nivel.

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica. 22 Retroceso 20 Permanencia Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

POST-TEST – PREGUNTA 12										
P	NINGUNA COMPONENTE	A01	A02	A03	A04	A06	A07	A09	A10	A11
		A12	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21
		B04	B05	B06	B07	B08	B12	B19	B21	B22
		B23	C01	C03	C05	C09	C12	C13	C16	C18
		C19	C20	C22	C23	C24				
U	a	A08	A22	B09	B14	B15	B16	C11	C15	C17
	c	A05	A23	B01	B11	B17	C02	C04	C07	C08
		C10	C14	C21						
M	a y d	B20								
NC: Los estudiantes A13, B10, B13, B18 y C06 no contestaron la pregunta.										

Tabla 6.1.12 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 12

Con base a los resultados de la tabla 6.1.12, la mayoría de las respuestas se encuentra en el nivel preestructural, debido a que no reflejan ninguna componente y basan su argumentación en creencias personales o subjetivas. Se puede que a la mayoría se les hace difícil escribir un argumento, aunque aparentemente lleguen a la respuesta correcta. La mayoría (60%) de las respuestas está en el nivel preestructural, y el 7% (5/68) ni siquiera respondió a la pregunta. De las (22) respuestas que contienen alguna componente, en el 45% (10/22) de ellas se argumentó con la componente **a**, tomando en cuenta los valores de la variable que tienen mayor probabilidad. Con relación a la componente **c**, un 55% (12/22) argumentó su respuesta en la experimentación que realizaron en las actividades física y simulada, y sólo 4.5% (1/22) mencionó en su respuesta la variabilidad en los datos.

En la tabla 6.1.12 se clasifican las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnóstico (post-test). Se puede observar que el 31% (19/62) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 60% (37/62) respuestas se quedaron en el nivel en el que se encontraban y solo un 10% (6/62) manifestaron un retroceso en su respuesta.

A continuación se muestra en la figura 6.1.12 las frecuencias por nivel estructural y su respectiva gráfica:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	5
PREESTRUCTURAL	41
UNIESTRUCTURAL	21
MULTIESTRUCTURAL	1
TOTAL	68

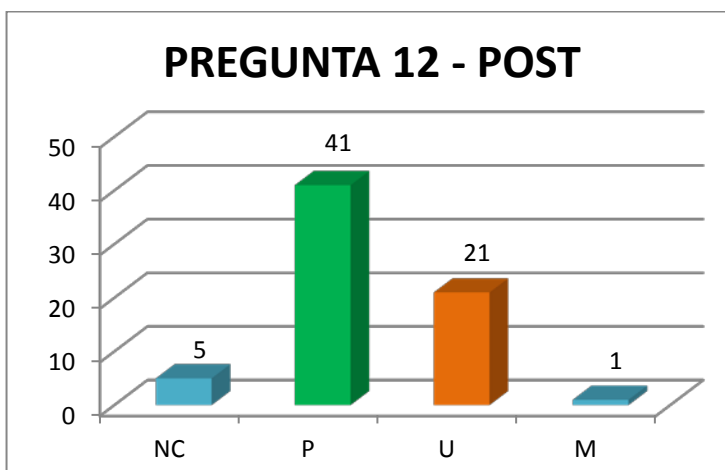


Figura 6.1.12 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 12

Como se puede observar en las frecuencias de la figura 6.1.12, el nivel de respuestas de los estudiantes solo llega hasta el nivel multiestructural. La mayoría de respuestas se encuentran en el nivel Preestructural, lo cual nos muestra que la mayoría no pudo explicar de forma correcta su respuesta, sus ideas o intuiciones de manera que reflejara alguna componente.

Nuestro objetivo de la pregunta era explorar el tipo de argumentos de los estudiantes dieron para justificar las distribuciones de frecuencias relativas a corto plazo. Se concluye que sólo el 15% de las respuestas reflejaron que identificaron los valores de la variable con mayor probabilidad; sólo un 1.5% considero la variabilidad en los datos y un 18% argumentó su respuesta con base en el recuerdo de los experimentos anteriores.

6.1.13. Análisis de las respuestas a la pregunta 13

Pregunta 13: ¿Cuál crees que será el valor de la probabilidad de ocurrir de cada resultado?

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	

Objetivo: Averiguar cuál es la distribución de probabilidades que los estudiantes atribuyen a la situación.

Respuesta esperada:

La respuesta que se considera de mayor calidad es aquella en la que se propone la distribución teórica, es decir, la siguiente distribución.

Águilas	0	1	2	3
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8

Componentes de la respuesta 13:

Para esta pregunta se tienen en cuenta las siguientes componentes:

- Da un número fraccionario o un número porcentual para cada valor de la variable.
- En las frecuencias que propone la suma es igual a 1, 100% o bien alguna potencia de 10.
- La distribución dada es próxima o igual a la distribución teórica. Que la distribución tenga forma de campana.

6.1.13.1. Ejemplos de los niveles para las respuestas a la pregunta 13

Con base en la información anterior, incluyendo la clasificación del nivel estructural de respuestas con base en la Taxonomía SOLO, se analizaron los resultados obtenidos en los cuestionarios, de estos, se muestran algunos ejemplos a continuación:

Ejemplos para el nivel Preestructural

Preestructural (P): Que el estudiante en su respuesta no refleje ninguna componente o diga cosas sin sentido.

Ejemplos de respuestas que se encuentran en el nivel preestructural:																					
<p>Comentario: El estudiante A20 repartió equitativamente, sin embargo la suma de las frecuencias es igual a 32, y no cumple con alguna componente. Podría pensarse que el ocho fue que conoce que son ocho posibilidades que pueden ocurrir en el lanzamiento de tres monedas, sin embargo se pondrían palabras en el estudiante. Para el estudiante C19 distribuye frecuencias que suman 20, sin embargo las frecuencias que propone no están en números relativos ni fracciones por lo que su respuesta no se encuentra elementos que cumplan alguna componente.</p>																					
Estudiante A20:	Estudiante C19:																				
<table border="1"><thead><tr><th>Águilas</th><th>Probabilidad</th></tr></thead><tbody><tr><td>0</td><td>8</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>8</td></tr></tbody></table>	Águilas	Probabilidad	0	8	1	8	2	8	3	8	<table border="1"><thead><tr><th>Águilas</th><th>Probabilidad</th></tr></thead><tbody><tr><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr></tbody></table>	Águilas	Probabilidad	0	5	1	4	2	8	3	3
Águilas	Probabilidad																				
0	8																				
1	8																				
2	8																				
3	8																				
Águilas	Probabilidad																				
0	5																				
1	4																				
2	8																				
3	3																				

Ejemplos para el nivel Uniestructural

Uniestructural (U): Que al responder solo utilice una componente de las que se necesitan para responder los ejercicios o utiliza dos pero incompletas o con errores fuertes.

Ejemplo de respuestas que contienen la componente a:
<p>Comentario: El estudiante propone como frecuencias números porcentuales o fraccionarios, aunque la suma no corresponda al 100% o a 1, ni tenga distribución en forma de campana. Sin embargo percibe que la probabilidad se da en números porcentuales o fraccionarios.</p>

Ejemplo de respuestas que contienen la componente a:

<p>Estudiante B04:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td align="center">0</td> <td align="center">1/8</td> </tr> <tr> <td align="center">1</td> <td align="center">2/8</td> </tr> <tr> <td align="center">2</td> <td align="center">3/8</td> </tr> <tr> <td align="center">3</td> <td align="center">8/8</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	1/8	1	2/8	2	3/8	3	8/8	<p>Estudiante C20:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td align="center">0</td> <td align="center">2/50</td> </tr> <tr> <td align="center">1</td> <td align="center">25/50</td> </tr> <tr> <td align="center">2</td> <td align="center">30/50</td> </tr> <tr> <td align="center">3</td> <td align="center">45/50</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	2/50	1	25/50	2	30/50	3	45/50
Águilas	Probabilidad																				
0	1/8																				
1	2/8																				
2	3/8																				
3	8/8																				
Águilas	Probabilidad																				
0	2/50																				
1	25/50																				
2	30/50																				
3	45/50																				

Ejemplo de respuestas que contienen la componente b:

Comentario: Que en la suma de sus frecuencias que asigna a cada valor de la variable, corresponda a 1 o a 100%, o bien a una potencia de 10. Sin embargo no percibe que la probabilidad es mayor para los valores de la variable 1 y 2 y que las probabilidades se dan en números porcentuales o fraccionarios.

<p>Estudiante A10:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td align="center">0</td> <td align="center">100</td> </tr> <tr> <td align="center">1</td> <td align="center">200</td> </tr> <tr> <td align="center">2</td> <td align="center">300</td> </tr> <tr> <td align="center">3</td> <td align="center">400</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	100	1	200	2	300	3	400	<p>Estudiante A19 :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td align="center">0</td> <td align="center">20</td> </tr> <tr> <td align="center">1</td> <td align="center">40</td> </tr> <tr> <td align="center">2</td> <td align="center">10</td> </tr> <tr> <td align="center">3</td> <td align="center">30</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	20	1	40	2	10	3	30
Águilas	Probabilidad																				
0	100																				
1	200																				
2	300																				
3	400																				
Águilas	Probabilidad																				
0	20																				
1	40																				
2	10																				
3	30																				

Ejemplo de respuestas que contienen la componente c:

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Águilas</th> <th>Probabilidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td align="center">0</td> <td align="center">12</td> </tr> <tr> <td align="center">1</td> <td align="center">28</td> </tr> <tr> <td align="center">2</td> <td align="center">34</td> </tr> <tr> <td align="center">3</td> <td align="center">15</td> </tr> </tbody> </table>	Águilas	Probabilidad	0	12	1	28	2	34	3	15	<p>Comentario: El estudiante A03, en las frecuencias que propone, asigna mayor frecuencia a los valores 1 y 2, teniendo así una distribución en forma de campana. Sin embargo la frecuencia que propone no está dada en números porcentuales ni fraccionarios cuya suma sea 1 o 100%. Por lo que se queda en el nivel uniestructural.</p>
Águilas	Probabilidad										
0	12										
1	28										
2	34										
3	15										

Ejemplos para el nivel Multiestructural

Multiestructural (M): Para llegar a la solución toma en cuenta dos o más componentes, aunque sin relacionarlas entre sí. Puede no llegar a la respuesta correcta debido a un error leve o a la falta de integración de las componentes.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a y b:

Comentario: Asignan un número fraccionario o porcentual a la probabilidad para cada valor de la variable cuya suma es igual a 1 o bien al 100%. Aunque no se percata que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir, por lo que al asignar la probabilidad no le asigna mayor frecuencia a estos valores de la variable.

Estudiante A06:

Águilas	Probabilidad
0	10%
1	50%
2	20%
3	20%

Estudiante A11:

Águilas	Probabilidad
0	15%
1	25%
2	30%
3	30%

Estudiante C09:

Águilas	Probabilidad
0	25%
1	25%
2	25%
3	25%

Estudiante C22:

Águilas	Probabilidad
0	10%
1	30%
2	30%
3	30%

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes b y c:

Comentario: La distribución que propone el estudiante tiene forma de campana, pues le asigna mayor frecuencia a los valores 1 y 2, percibe que estos valores de la variable tienen mayor probabilidad de ocurrir, además que la suma de la probabilidad es igual a 100, sin embargo olvida o no sabe que las frecuencias de la probabilidad se dan en valores porcentuales o fraccionarios.

Ejemplo de respuestas que contienen las componentes b y c:

Estudiante A01:		Estudiante B16:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	10	0	15
1	35	1	35
2	35	2	35
3	20	3	15

Ejemplos para el nivel Relacional

Relacional (R): En su respuesta relaciona de manera conveniente tres componentes para llegar a la solución.

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a, b y c:

Comentario: El estudiante propone como frecuencias números porcentuales o fraccionarios en los cuales le asigna mayor frecuencia a los valores con mayor probabilidad (1 y 2), teniendo así una distribución en forma de campana, en la cual la suma corresponde a 1 o al 100%, y aunque asigna frecuencias plausibles a la probabilidad teórica, estas no son muy próximas, sin embargo cumple con las componentes propuestas.

Estudiante A17:		Estudiante A09:	
Águilas	Probabilidad	Águilas	Probabilidad
0	7%	0	1/6
1	50%	1	2/6
2	30%	2	2/6
3	13%	3	1/6

Ejemplos de respuestas que contienen las componentes a, b y c:

Comentario: Los estudiantes A04 y A22 proponen frecuencias muy cercanas a la probabilidad teórica, proponiendo valores porcentuales. Cumpliendo con las componentes propuestas.

Estudiante A04:

Águilas	Probabilidad
0	10%
1	40%
2	40%
3	10%




Estudiante A22:

Águilas	Probabilidad
0	15%
1	40%
2	35%
3	10%

Estudiante C04:

Águilas	Probabilidad
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Comentario: El estudiante C04, propone frecuencias en números fraccionarios cuya suma corresponde a 1. Además, la distribución de sus frecuencias es la distribución teórica.

A continuación se presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes del post-test de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas. El color sobre cada código del estudiante indica.  Retrosoceso  Permanencia  Avance en el nivel de razonamiento de la respuesta respecto al cuestionario anterior.

Como podemos observar mediante la tabla 6.1.13, solo el 3% de las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en el nivel preestructural (2/68), es decir solo dos respuestas demostraron la falta de comprensión a la pregunta o bien pudieron dar respuesta a la pregunta, al no saber representar la probabilidad ya sea como un número porcentual o como un número fraccionario. Y un 6% (4/68) no proporciono respuesta a la pregunta.

POST-TEST – PREGUNTA 13									
NC	NO CONTESTÓ	B07	B10	B13	B18				
P	NINGUNA COMPONENTE	A20	C19						
U	a	B04	C20						
	b	A10	A19						
	c	A03							
M	a y b	A02	A06	A11	A12	C09	C15	C17	C22
	b y c	A01	B16						
R	a, b y c	A04	A05	A09	A13	A17	A22	A23	B14
		B17	C12	C21	C23				
	a, b y c PROBABILIDAD TEÓRICA	A07	A08	A14	A15	A16	A18	A21	B01
		B05	B06	B08	B09	B11	B12	B15	B19
		B20	B21	B22	B23	C01	C02	C03	C04
		C05	C06	C07	C08	C10	C11	C13	C14
		C16	C18	C24					
Se agregó un estudiante a realizar este cuestionario B23.									

Tabla 6.1.13 Clasificación de respuestas de acuerdo a su progreso, nivel de razonamiento y componentes involucradas a la pregunta 13

Mientras que el 7% (5/68) se encuentra en el nivel uniestructural, el 15% (10/68) se encuentra en el nivel multiestructural, y un 69% (47/68) se encuentra en el nivel relacional. De las (62) respuestas que contienen al menos una componente, el 92% (57/62) contienen la componente **a**, es decir propusieron como frecuencias un número fraccionario o un número porcentual para cada valor de la variable, y un 95% (59/62) contiene la componente **b**, es decir la suma de las frecuencias dadas es igual a 1, al 100% o bien a algún múltiplo de 10. Sobre la componente **c**, el 81% (50/62) la contiene, es decir propusieron frecuencias con una distribución en forma de campana o con una distribución cercana o igual a la teórica.

En la tabla 6.1.13. Se clasificaron las respuestas de acuerdo a su nivel estructural y a las componentes involucradas, en la cual podemos observar si hubo o no un cambio en sus respuestas respecto al cuestionario diagnostico (pre-test). Podemos observar que de los que respondieron a la pregunta, el 73% (46/63) tuvo un avance en el nivel estructural en el que se encontraban originalmente, el 19% (12/63) respuestas se quedaron en el nivel que originalmente se encontraban y solo un 8% (5/63) manifestaron un retroceso en su

respuesta. Además en la gráfica podemos observar que en el nivel relacional esta una categoría que incluye las componentes a, b y c y además proporcionaron la probabilidad teórica, y podemos observar que el 51% (35/68) propuso como frecuencias exactamente la probabilidad teórica, es decir de las 47 respuestas que se encuentran en el nivel relacional el 74% (35/47) demostraron con su respuesta saber la probabilidad teórica para el lanzamiento de tres monedas.

A continuación se muestra la frecuencia y su respectiva grafica a la pregunta 13 de los diferentes niveles de la taxonomía:

NIVEL	FRECUENCIA
NO CONTESTO	4
PREESTRUCTURAL	2
UNIESTRUCTURAL	5
MULTIESTRUCTURAL	10
RELACIONAL	47
TOTAL	68

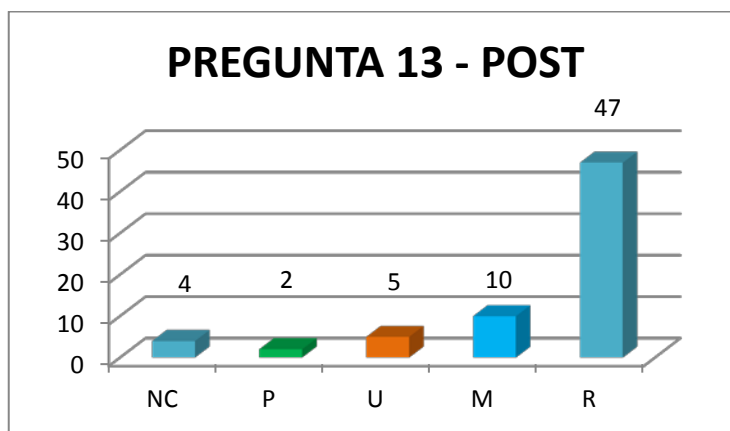


Figura 6.1.13 Clasificación por nivel de razonamiento a la pregunta 13

Como podemos observar mediante la gráfica de la figura 6.1.13. La mayoría de los estudiantes entendió la pregunta pues podemos observar que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en los niveles uniestructural, multiestructural y relacional, solo en el 9% (6/68) demostró con su respuesta la falta de comprensión a la pregunta pues se encuentran en los niveles preestructural y en la categoría de no contestó.

El objetivo de esta pregunta es explorar los valores subjetivos de la distribución que asigna el estudiante y compararlos con los teóricos. Se encontró que 51% (35/68) del total propusieron frecuencias exactamente a la probabilidad teórica para el lanzamiento de tres monedas, y un 18% propuso en sus frecuencias una distribución en forma de campana plausible a la distribución teórica. Es decir el 69% propusieron frecuencias plausibles a la distribución teórica, que cumplen con las componentes propuestas.

CAPITULO 7: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La presente investigación se diseñó con el propósito de responder las siguientes preguntas: ¿Es posible tratar, y cómo, los temas de variable aleatoria y distribución desde una perspectiva informal con estudiantes de secundaria? ¿Qué pueden hacer estos estudiantes en este tema?

La respuesta a la primera pregunta es que sí es posible y productivo que los estudiantes del último grado de secundaria aprendan aspectos de esos conceptos, a un nivel elemental y de manera informal, mediante actividades con situaciones de azar y preguntas acerca de ellas que hagan que emerjan algunos aspectos que prefiguran los conceptos mencionados. En las actividades que realizaron los estudiantes no se les enseñaban explícitamente los conceptos ni se les decía como responder a las preguntas, sino sólo se les daban indicaciones de cómo llevar a cabo las simulaciones físicas y con el software y, con lo observado, se les pedía que respondieran las preguntas que estaban formuladas en sus hojas de trabajo. Varios de ellos respondieron algunas preguntas de manera conveniente desde la aplicación previa (pre-test) y la mayoría mejoró con las actividades apoyadas con el software.

Las siguientes descripciones resumidas ofrecen un panorama de lo que pueden hacer los estudiantes con relación a las nociones de variable aleatoria y distribución después de las actividades con el software:

1. Describen los valores de la variable aleatoria de la situación planteada (lanzamiento de 3 monedas) y lo asocian con los elementos del espacio muestral
2. Proponen distribuciones de frecuencias absolutas que plausiblemente se corresponden con el experimento, es decir, pueden ser resultados de sorteos de una distribución binomial
3. Asignan probabilidades a los valores de la variable para formar una distribución de probabilidades. Un 60% de la población examinada determinó la distribución teórica o una aproximación a ella.
4. Exhibieron secuencias sin patrones ni muchas rachas de tamaño 1, de modo que sus secuencias eran plausiblemente resultado de un experimento aleatorio.

5. Aunque hay una mejoría en cuanto a caer en el sesgo de equiprobabilidad, no se logra superar del todo, habiendo estudiantes que caen aun en él en la pregunta 5 aún después de las actividades (post-test).
6. Tienen dificultades para argumentar con base en la distribución, que el evento “todos los resultados posibles caerán el mismo número de veces”, no obstante, rechazan el evento pero apoyados en la variabilidad
7. Se manifiestan dificultades para traducir una distribución de frecuencias absolutas a la correspondiente en frecuencias relativas

A continuación se especifica para cada pregunta, lo logrado después de las actividades. Las frecuencias de respuestas por niveles para la pregunta 1, indican que con la realización de las actividades, los estudiantes fueron capaces de interpretar la pregunta de la manera deseada y buena parte de ellos ofrecieron respuestas en la que desplegaron el recorrido de la variable y el espacio muestral. Con las acciones realizadas con el software, se manejaron en la práctica los elementos del espacio muestral y, de los elementos observados, obtuvieron los valores de la variable. En particular, con la experiencia, percibieron naturalmente que la unidad de análisis de la probabilidad no es sólo una experiencia, sino una familia de experiencias. La evidencia de este progreso se observa en las respuestas a la pregunta 1, pues varios de los estudiantes que en el pre-test habían respondido en el sentido del sesgo del resultado aislado, en el post-test modificaron sus respuestas y propusieron varios o todos los elementos de la variable aleatoria.

Con relación a la pregunta 2, también hubo desplazamientos de las frecuencias concentradas en el nivel pre-estructural y uniestructural en el pre-test, a su concentración en los niveles multiestructural y relacional en el post-test. El mejoramiento en la descripción de los valores de la variable aleatoria y del espacio muestral, influyó para este aumento, ya que en la pregunta 2 se requería escribir los valores de la variable en la primera columna de la tabla; conviene mencionar que en el pre-test muchos estudiantes fueron incapaces de llenarla de la manera esperada. Hubo también varias respuestas en las que además se ofrecieron frecuencias razonables, pues el nivel relacional en el post-test contiene 65% de las respuestas. Nuevamente es de suponer que la actividad con el software permitió que los estudiantes se dieran cuenta de que hay un patrón que gobierna las frecuencias empíricas

(simuladas), a saber, que los valores 0 y 3 suelen tener menos frecuencia que los valores 1 y 2. Conviene destacar que la actividad y la misma pregunta propician que los estudiantes piensen en familias de experimentos y no en experimentos individuales, de esta manera ya no ofrecen respuestas teniendo en mente un solo experimento.

Las frecuencias de respuestas de la pregunta 3 también muestran una mejoría del pre-test al post-test. Al responder la pregunta en el post-test la mayoría propuso distribuciones que cumplen las condiciones de ser números decimales o porcentuales y de sumar 1 o 100%; además, las 41 respuestas (60%) que se ubicaron en el nivel relacional se acercan a las probabilidades teóricas, es decir, asignan mayor probabilidad al 1 y 2 y menos al 0 y 3. En muchos casos se puede deducir que la respuesta obtenida fue resultado de una aplicación informal del enfoque frecuencial de probabilidad y en dos casos, del resultado del análisis del espacio muestral y la aplicación de la definición clásica. Estas respuestas informales de los estudiantes, se basan en ideas que ellos generaron durante su actividad y no provienen de la aplicación de las definiciones, pues estas no se introdujeron ni se explicaron durante la intervención. Es de esperar que el significado que atribuyen a la distribución sea la de una estructura subyacente en los experimentos, que representa, de manera aproximada, los patrones que se presentan en la práctica. No es posible afirmar esto con certeza, pero el sólo hecho de proponer una distribución con las características señaladas ya es indicio de que se comienza a entender este objeto asociado a las acciones realizadas y no como una receta dada por una definición.

El análisis de la pregunta 4 se basó en un estudio previo sobre el comportamiento de las rachas en un experimento del lanzamiento de 3 monedas simulado en el software *Fathom*. Las respuestas de esta pregunta en el pre-test se concentraron en el nivel preestructural debido a que muchos estudiantes no entendieron bien la pregunta. En efecto, muchas respuestas llenaban varias o todas la entradas de las columnas (se debía elegir sólo una) o dejaban columnas vacías. En cambio, las respuestas del post-test se distribuyeron de manera más homogénea entre los niveles; obteniéndose cerca de un 30% en el nivel relacional. Esto sugiere que los estudiantes después de las actividades tomaron en cuenta conceptos como la aleatoriedad y propusieron frecuencias con una distribución en forma de campana.

En la pregunta 5, es muy claro el impacto en los estudiantes de la actividad previa al post-test que incluía actividades físicas y simulaciones en el software, puesto que sólo un estudiante pudo justificar su respuesta antes de dichas actividades, por el contrario, fueron 25 en el post-test que justificaron la respuesta correcta con base en lo que observaron de las experimentaciones previas tanto físicas como simuladas con el software. En valores relativos, hubo 41% de respuestas en nivel Uniestructural y Multiestructural comparado con el 1.5% que se obtuvo al comienzo del estudio.

Con relación a la pregunta 6, la mayoría de respuestas se clasificaron en preestructural tanto en el pre-test (94%) como en el post-test (66%); puede decirse que hubo un progreso modesto. La tendencia es a rechazar que ocurra el evento “los resultados posibles caerán el mismo número de veces”, pero sus argumentos no se basan en considerar que la distribución tienen menor probabilidad para los valores 0 y 3 y mayor probabilidad para los valores 1 y 2; en su lugar utilizan argumentos relacionados con el azar. Para el post-test un 34% alcanzó los niveles uniestructural y multiestructural, identificando los valores más probables, y un 4% muestra evidencia que las actividades realizadas le ayudaron a comprender que los valores 1 y 2 tienen mayor probabilidad, pues al principio tenía la hipótesis de que la probabilidad es la misma para todos los posibles valores de la variable. Con esta pregunta se revela una tendencia de varios estudiantes a caer en el sesgo de equiprobabilidad, al dar respuestas como: “Si, porque todo puede pasar y si es posible que tengan la misma probabilidad, ya que es un evento independiente y no influye el número de águilas en este caso”

Con relación a la pregunta 7, los estudiantes tenían que representar gráficamente las frecuencias que atribuían a los resultados de hacer 80 veces el experimento. En el pre-test la mayoría de respuestas se concentraron en los niveles preestructural (58%) y uniestructural (32%), mientras que en el post-test, las frecuencias de las respuestas se distribuyeron entre los niveles uniestructural (29%), multiestructural (18%) y relacional (34%). Esto indica un progreso sin duda influenciado por la actividad con el software. Conviene señalar que una causa por la que gran parte de las respuestas se clasificaron en el nivel preestructural fue una inadecuada traducción de la distribución en frecuencias absolutas a porcentajes, esto indica que tienen dificultades en el manejo de los porcentajes.

Para la pregunta 8, recordemos que el objetivo principal es explorar la manera en que los estudiantes aplican su modelo de probabilidad en una situación de apuestas; de acuerdo a los resultados, los estudiantes muestran una inclinación a escoger los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir, pero no especifican la probabilidad de su elección en sus justificaciones; la mayoría de éstas se concentró en el nivel uniestructural, tanto en el pre-test (59%) como en el post-test (82%). Lo anterior hace suponer que muchos estudiantes saben los motivos de su elección, que pueden ser de concebir un buen modelo de probabilidad, pero lo hacen explícito en sus respuestas.

Respecto a las predicciones de la pregunta 9, de experimentos a corto, mediano y largo plazo, 15 de los 19 que se encontraban originalmente en el nivel preestructural en el pre-test tuvieron un avance para el post-test, y aunque originalmente las respuestas se concentraron en los niveles igual o inferior al Uniestructural, para el post-test la mayoría siguió concentrándose en el nivel Uniestructural. En el pre-test 9% (6/69) asignaron mayor frecuencia a los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir, mientras que en el post-test aumentó al 38%. Además, para el pre-test solo un estudiante representó las frecuencias muy cercanas a la probabilidad teórica, en contraste, en el post-test, 12 vincularon la probabilidad teórica para los experimentos de corto, mediano y largo plazo.

El nivel de razonamiento en las respuestas a la pregunta 10 tiene un comportamiento similar a los resultados de la anterior pregunta, ya que si bien hubo una mejoría de respuestas en el post-test que el pre-test, el nivel de respuestas en su mayoría no sobrepasó el nivel uniestructural, donde sólo se ubicó el 9%. Para el post-test solo el 47% se encontró en el nivel uniestructural, es decir 26 estudiantes (38%) de los que habían contestado sin ninguna componente ahora lo hacen.

En la pregunta 11 se les pidió a los estudiantes aportar frecuencias relativas de la misma cantidad de lanzamientos que en la pregunta 9. En el pre-test, las respuestas se concentran en los niveles uniestructural y preestructural, solo el 12% de los estudiantes asignaron mayor frecuencia (8/69) a los valores más probables; para el post-test se concentraron en uniestructural, multiestructural y relacional. De los cuales el 41% asignaron mayor frecuencia a los valores de la variable que tienen mayor probabilidad de ocurrir, es decir propusieron mayor frecuencia a los valores 1 y 2.

Al analizar los argumentos utilizados por los estudiantes para justificar la respuesta de la pregunta anterior, se obtuvieron resultados similares a la pregunta 10, lo anterior puede deberse a que los argumentos tienen relación directa con los valores de la variable que son más probables y su comportamiento bajo cierto número de lanzamientos. Así, las respuestas en ambos cuestionarios (pre y post) arrojaron una mayoría en el nivel uniestructural, con el único avance que se redujeron las respuestas preestructurales y aumentaron las multiestructurales. Los argumentos mencionados por los estudiantes se apoyan en las experiencias realizadas previamente, lo cual los llevo a proponer mayor frecuencia a los valores 1 y 2.

Cabe mencionar que para las preguntas 5, 6, 8, 10 y 12, las respuestas son abiertas, es decir, los estudiantes tienen que expresar su respuesta verbalmente. Por ello, hemos observado, mediante este trabajo, que los estudiantes tienen dificultades para escribir las respuestas de manera que expresen sus ideas e intuiciones. En preguntas en las que no es necesario argumentar ofrecen respuestas acertadas

Respecto a la pregunta 13 podemos observar que la mayoría de las respuestas se encuentran en los niveles uniestructural, multiestructural y relacional, cubriendo el 72% de ellas. Cabe mencionar que aunque hubo buenos resultados, la mayoría de los estudiantes no reconoce que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor probabilidad de ocurrir pues solo un 20% (14/69) le asignaron mayor frecuencia. Sin embargo, en el pre-test solo un estudiante propuso la probabilidad la teórica, el cual representa el 1.5%, mientras que para el post-test lo hizo el 51% (35/68).

En general, las actividades realizadas han proporcionado referentes con cierto nivel de concreción para los conceptos abstractos básicos de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencia, probabilidad y distribución. El manejo de estas nociones en la actividad y su uso para responder las preguntas del post-test ya no está basado totalmente en su conocimiento intuitivo, sino que reflejan la asociación a acciones realizadas y abstracciones de los resultados de esas acciones. En particular, la aparentemente sencilla tarea de describir los valores de la variable aleatoria es muy difícil, pues la formulación de la pregunta le sugiere a los estudiantes significados diferentes al pretendido, como el de pensar en el resultado de una sola experiencia. En cambio, en el post-test los estudiantes ya

tienen más claro que las preguntas que se le formulan se refieren a familias de experimentos. El razonamiento informal que desarrollan durante las actividades y que aplican en la respuesta del post-test los coloca en una mejor posición que los que no realizan tales actividades para el estudio formal de los conceptos probabilistas mencionados.

7.1. Limitaciones del estudio

Una limitación fue el tiempo en que se tuvo que planificar y llevar a cabo el estudio, esto hizo que el diseño de la exploración fuera algo apresurado e impidió que se realizara una exploración antes del estudio definitivo. Se tuvo que hacer éste, sin tener oportunidad de ajustar el instrumento completamente. Así mismo, durante el análisis surgieron muchas dudas sobre la interpretación de ciertas respuestas de los estudiantes, la cuales se hubieran podido aclarar con una entrevista a los estudiantes correspondientes. No obstante, la falta de tiempo impidió hacerlo.

El periodo de toma de datos se realizó previo al término del año escolar, de manera que al final del período de exploración los estudiantes estaban muy inquietos y poco concentrados en las respuestas que dieron a las últimas actividades que se les propusieron.

Para la simulación por medio del software se presentaron problemas a la hora de manejarlo por parte de los estudiantes, con lo cual se consumió más tiempo del que se tenía planeado originalmente (1 hora/clase) para su uso, ya que el docente que nos apoyó para este programa no se dio abasto en una sola clase, y al ser el único capacitado para su manejo, los encargados del laboratorio no pudiera aportar ayuda.

7.2. Aporte de la investigación

Los resultados de esta investigación aportan evidencias de que es plausible fomentar la introducción y el desarrollo de conceptos tan importantes dentro de la probabilidad y la estadística, a saber: variable aleatoria y espacio muestral; estos a partir de razonamientos informales, con miras a lograr un acercamiento real a la formalidad de estos conceptos, familiarizando así al estudiante con algunos fenómenos que van a ser modelados con tales temas y creando un puente entre lo que ya sabe y los nuevos conceptos.

Sin duda, elaborar actividades y test eficaces y/o prácticos que involucren todos estos conceptos no es tarea fácil; no obstante los resultados aquí mostrados apoyan que es un buen principio diseñar actividades basadas en situaciones aleatorias que permitan acercamientos informales a los conceptos variable aleatoria y distribución, como la actividad propuesta en el presente trabajo.

En la enseñanza se debe proporcionar condiciones para que los estudiantes conozcan diferentes herramientas que puedan ser utilizadas para el aprendizaje de nuevos conocimientos, como el uso del software Probability Explorer. Programas computacionales que generen datos de resultados de simulaciones de juegos de azar, como lanzamiento de monedas y dados, extracciones al azar de bolas contenidas en urnas y otros juegos populares son recursos útiles para el aprendizaje de la probabilidad. En el caso de Probability Explorer los datos se representan en la pantalla de forma icónica, reproduciendo el aspecto que presentan esos juegos en la realidad. Simultáneamente, o después, los datos pueden ordenarse, apilarse y graficarse automáticamente, obteniéndose diversas representaciones de los conjuntos de resultados: tablas de datos agrupados, pictogramas, gráficas circulares, todo esto en una mínima cantidad de tiempo considerable, pero sobre todo, libre de errores a la hora de mostrar los resultados. Se puede afirmar que el uso de estas herramientas tecnológicas favoreció el aprendizaje de los estudiantes. Es evidente que si hay una mejoría que hace que los estudiantes logren identificar variable aleatoria y el espacio muestral y darle un sentido a estos conceptos.

7.3. Perspectivas a futuro para la investigación

Mejorar el instrumento a fin de que pueda incluirse como recurso didáctico dentro de la planeación de los docentes en el momento de que dicho tema sea estudiando dentro de los planes y programas de estudio. Precisar las características de dicho recurso que permiten el desarrollo del pensamiento probabilístico de los estudiantes; esto con el fin de comunicarlo a los maestros y para que dichas características sirvan para construir otros recursos similares.

Hacer estudios longitudinales, por ejemplo, observar estudiantes que hayan aprendido mediante actividades como las que se utilizaron en este trabajo, cuando vayan en nivel preparatoria y observar si logran alcanzar una mejor comprensión de los conceptos.

La idea sería establecer si el familiarizarse con conceptos probabilísticos a partir de razonamientos informales los prepara para que sean capaces de entender tales conceptos al nivel de abstracción que en el bachillerato o universidad se les exige.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), pp. 27-47.
- Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction*, 27(3), pp. 175-224.
- Abrahamson, D. (2009c). A students synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researcher's lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), pp.195-226. [En línea: www.iejme.com]
- Bakker, A. & Gravemeijer, K. P. E. (2004).Leraning to reason about distribution.En D. Ben – Zvi& J. Garfield (Eds.).The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking.Dordrecht, TheNetherlands: KluwerAcademicPress.
- Batanero y Sánchez (2005) What is the nature of nigh school student's conceptions and misconceptions about probability. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for teaching and learning (39-63)*. New York: Springer.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. UNO, 15-28.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils.*Educational Studies in Mathematics* 32, 181-199; 1997.
- Batanero, C., Serrano, L. & Green, D. R. (1998).Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (1), 113-123.
- Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982).Evaluating the Quality of Learning: The SOLO taxonomy. Nueva York: Academic Press.
- Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Bill, A. & Gayton, P. (2010) Coin-sequences and coin-combinations taught as companion tasks. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010. Ljubljana, Slovenia*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking (95-126)*. New York: Springer.
- English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 121-141)*. New York: Springer.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel
- Gal. I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for teaching and learning (39-63)*. New York: Springer.
- Garfield, delMas, Chance (2007). Using Students' informal notions of variability to develop an understanding of formal measures of variability. En M. C. Lovett & P Shah (Eds.), *Thinking with Data (117-148)*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Garfield, J. B. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review*, 63(1), 23-54.
- Gravemeijer, K.P.E. y Doorman, (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1-3), 111-129.
- Greer y Mukhopadhyay (2005) Teaching and Learning the Matematization of Uncertainty: Historical, Cultural, Social and Political Contexts. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for teaching and learning (297-324)*. New York: Springer.

- Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. London: Longman.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. En *Educational Studies in Mathematics*, 6, (187-205).
- Henry, M. (1994). L'enseignement des probabilités – perspectives historiques, épistémologiques et didactiques. Desancon: IREM de Besancon.
- Hernández, R., Ávila, R. y Sánchez, E. (2005). Dificultades con las nociones de experiencia aleatoria y evento de estudiantes de bachillerato. Memorias del Quinto Congreso Ibero-americano de Educación Matemática (CIBEM V). Porto, Portugal: Facultad de Ciencias de la Universidad de Porto. (En CD).
- Ireland, S. y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 339–370.
- Jabareen, Y. (2009). Building a conceptual framework: Philosophy, definitions, and procedure. *International Journal of Qualitative Methods*, 8(4).
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., Mogill, A. T. (1999). Student's probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 909-955. Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.
- Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 909-955. Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.
- Kolmogorov, A. N., Uspensky, V. A. (1988). Algorithms and Randomness. *SIAM Theory of Probability and Applications*, 32, 389-412.
- Konold, C., Lohmeier, J., Pollatsek, A. & Well, A. (1991). Novices views on randomness. Comunicación presentada en el XIII PMEConference.
- Maxara, C. & Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards*

- an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010. Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.*
- Metz, K. E. (1998). Emergent understanding and attribution of randomness: Comparative analysis of reasoning of primary grade children and undergraduates. *Cognition and Instruction*, 16, 285-365.
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis. An expanded sourcebook*. London, UK: Sage Publications.
- Ortiz de Haro, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. J. (2002). *La Probabilidad en los Libros de Texto*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. En el Resumen actualizado de la Tesis Doctoral: Ortiz de Haro, J. J., Batanero C. y Serrano L., (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Universidad de Granada.
- Perkins, D. N., Farady, M. y Bushey, B. (1991). Everyday reasoning and the roots of intelligence. In J. F. Voss, D. N. Perkins, and J. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 83-105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). The origin of the idea of chance in children. New York: Norton. [Trabajo original en francés: La Genese de l'idee de hasard chez l'enfant, 1951].
- Piaget, J. (1984). *Investigaciones sobre la Generalización*. México DF: Premia Editora.
- Prodromou, T. (2007). Making connections between the two perspectives on distribution. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 801-810). Larnaca, Chipre.
- Prodromou, T. (2012) Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM Mathematics Education* 44:855-868.

- Sánchez, E. y Trujillo, K. (2008). Exploración de la noción de variación en situaciones de azar. *Revista Publicaciones, No. 38.*, pp. 119-132
- Sánchez, E., y Landín, P. R. (2014). Levels of probabilistic reasoning of high school students about binomial problems. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking, Presenting Plural Perspectives*. New York: Springer.
- Shaughnessy, J. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.) *People in mathematics education* (Proceeding of the 20th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 1, pp. 6-22), Rotoura, New Zealand: MERGA.
- Shaughnessy, J. M. (2003). Research on students' understanding of probability. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 216-226). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Shaughnessy, J. M., & Ciancetta, M. (2002). Student's understanding of variability in a probability environment. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, Cape Town, South Africa. [CD-ROM] Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Shaughnessy, J. M., Watson, J., Moritz, J., & Reading, C. (1999). School mathematics student's acknowledgment of statistical variation. In C. Maher (Chair), *There's more to life than centers*. Pre-session Research Symposium, 77th Annual National Council of Teachers of Mathematics Conference, San Francisco, CA.
- Sthol, H. y Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 319–337.
- Stohl, H., Rider, R. y Tarr, J. (2004). *Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technology environment*. Recuperado en Junio 5, 2013, de <http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf>
- Von Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph No. 4*.

- Watson; J.M. y Moritz, J.B. (2003). The development of comprehension of chance language: evaluation and interpretation. *School Science and Mathematics, 103*, 65-80.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*, 223-265.
- Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal, 5*(2). pp. 10 – 25.
- Ziefler, A., Garfield, J., delMas, R. & Reding, Ch. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58.

APÉNDICE A.- CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

Actividad: # 1

Tipo: Individual

INSTRUCCIONES: *Lee con atención las siguientes preguntas y responde en el orden en el que se te piden sin que cambies tus respuestas en caso de que te arrepientas. Contesta todo lo que se pide de acuerdo a tus conocimientos, tu imaginación o tu intuición; no olvides justificar cada una de ellas.*

Las tres monedas

1. De aquí en adelante, llamaremos **lanzamiento** a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Se realiza un lanzamiento y se observa “el número de águilas que ocurren” (llamado **variable** para esta encuesta). Enlista todos los posibles valores que puede tomar esta variable:

2. Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable “número de águilas que ocurren”. En la siguiente tabla anota en la columna de la izquierda, los posibles valores de la variable y en la columna de la derecha, el número de veces que crees que ocurra cada valor:

Valor de la variable	Frecuencia
Total	

3. Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable (a cada ocurrencia le llamaremos: **resultado**):

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	
Total	

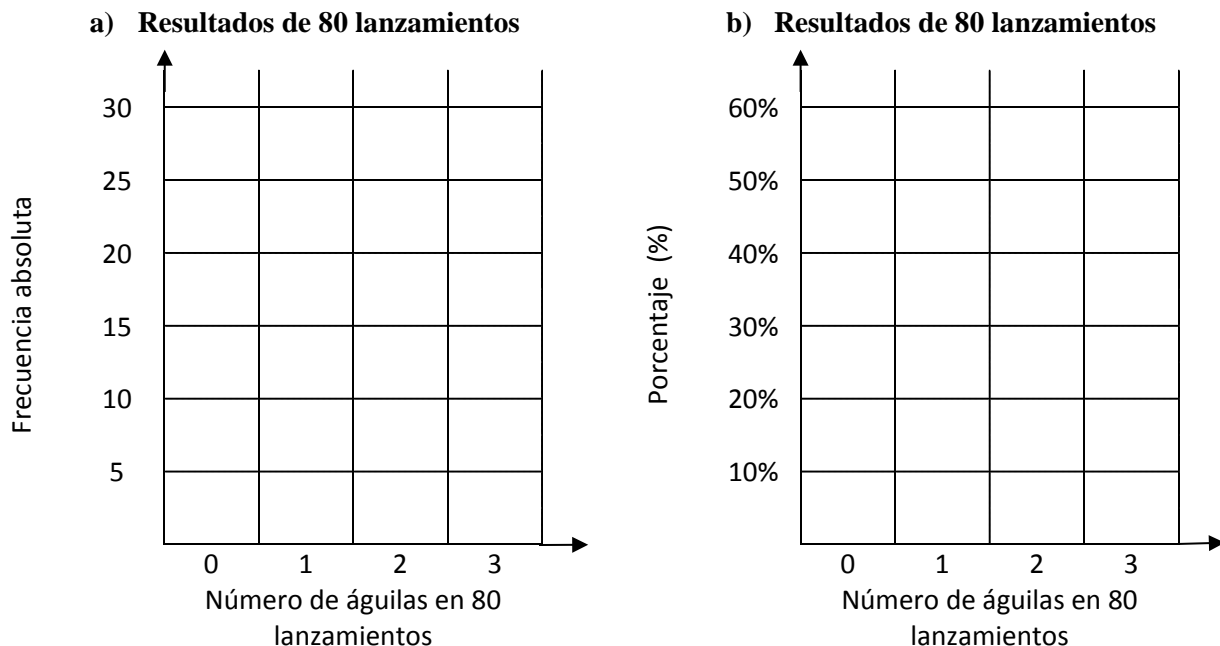
4. Imagínate que tienes las tres monedas y realizas 16 lanzamientos (de 3 monedas cada uno), escribe los **resultados** que creas que se obtendrán:

Lanzamientos Resultados	Lanzamientos																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
0 Águilas																	
1 Águilas																	
2 Águilas																	
3 Águilas																	

5. Uno de tus compañeros considera que cualquier resultado tiene la misma probabilidad de ocurrir, ¿Estás de acuerdo con él? Explica tu respuesta.

6. ¿Crees que después de muchos lanzamientos, todos los resultados posibles caerán el mismo número de veces? Justifica tu respuesta.

7. Imagina que realizas 80 lanzamientos. En el par de ejes coordenados de la izquierda dibuja un diagrama de barras que represente la frecuencia con la que crees que ocurre cada valor de la variable; en el par de ejes de la derecha, dibuja el diagrama correspondiente al anterior pero en porcentajes:



8. Considera que en un lanzamiento 3 amigos y tu van a apostar por alguno de los resultados (0, 1, 2 ó 3 águilas), ¿cuál elegirías y por qué?

9. Piensa y escribe la cantidad de veces que se podrías obtener 0, 1, 2 y 3 águilas para cada número de lanzamientos. *En cada columna la suma de los resultados debe ser igual al número de lanzamientos.*

Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

10. Describe el criterio que seguiste para distribuir las frecuencias entre los resultados; argumenta tu respuesta:

11. Piensa y escribe el porcentaje en que podría ocurrir cada posible resultado para el número de lanzamientos que se indican en la primera fila. *En cada columna la suma de los porcentajes debe ser igual al cien por ciento.*

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

12. ¿Por qué piensas que los porcentajes anteriores son razonables?

13. ¿Cuál crees que será el valor de la probabilidad de ocurrir de cada resultado?

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	

APÉNDICE B.- SIMULACIÓN FÍSICA

Actividad: # 2

Tipo: Equipo

INSTRUCCIONES: *Reúnanse en equipos de cuatro integrantes y hagan lo que se pide en cada una de las hojas de actividades. Se trata de lanzar 3 monedas (de la misma denominación) y avanzar una casilla en la tabla, que se proporcionan en esta hoja, dependiendo de las águilas que salgan. Cada uno de ustedes elegirá 1 de las 4 filas de de la tabla, de tal forma que ninguno elija la misma fila que otro integrante del equipo. Una vez preparados para jugar, lancen 3 monedas y marquen con una X la primera casilla de la fila cuyo número es el número de águilas que salieron. Repitan el lanzamiento tantas veces hasta que todas las celdas de alguna fila queden marcadas; diremos que el jugador de esa fila llegó primero a la meta.*

La carrera

Casillas	1	2	3	4	5	META
Águilas						
0 Iniciales: _____						
1 Iniciales: _____						
2 Iniciales: _____						
3 Iniciales: _____						

En total realicen 4 carreras, para cada una marquen los resultados en cada una de las 4 hojas que tienen. Al finalizar responda cada quien las preguntas en la hoja correspondiente.

1. ¿Cuántos lanzamientos (de tres monedas al mismo tiempo) se necesitaron en esta carrera para que hubiera un ganador? _____

2. ¿Quién gano en la carrera de tu hoja? Anota sus iniciales y el número de águilas con la que jugó, incluso si fuiste tú mismo.

3. ¿Por qué piensas que ganó (o ganaste si es el caso)?

4. ¿Ocurrió lo mismo con las otras tres carreras? En caso de que no, anota la variable “el número de águilas” del ganador o ganadores.

5. Porque crees que ocurrió lo anterior

APÉNDICE C.- SIMULACIÓN PROBABILITY

Actividad: # 3

Tipo: Individual

1. Comienza a simular 4 experimentos de **20 lanzamientos**, y escribe los resultados en la siguiente tabla:

N° Águilas	Experimento 1		Experimento 2		Experimento 3		Experimento 4		TOTAL 80 lanzamientos	
	<i>k</i>	%	<i>k</i>	%	<i>k</i>	%	<i>k</i>	%	<i>k</i>	%
0 águilas										
1 águilas										
2 águilas										
3 águilas										
Total										

2. Comparando las frecuencias relativas (porcentaje %) de los 4 experimentos que realizaste en Probability Explorer, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué opinas de los porcentajes para cada valor de la variable, son parecidos, muy diferentes, iguales, etc.?

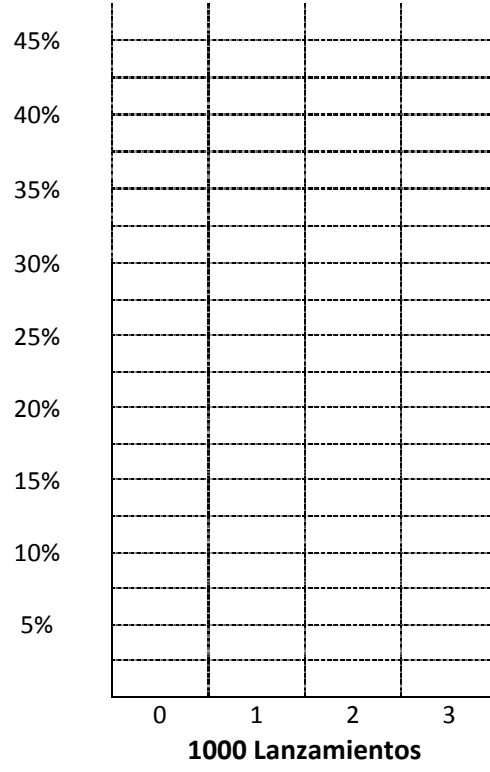
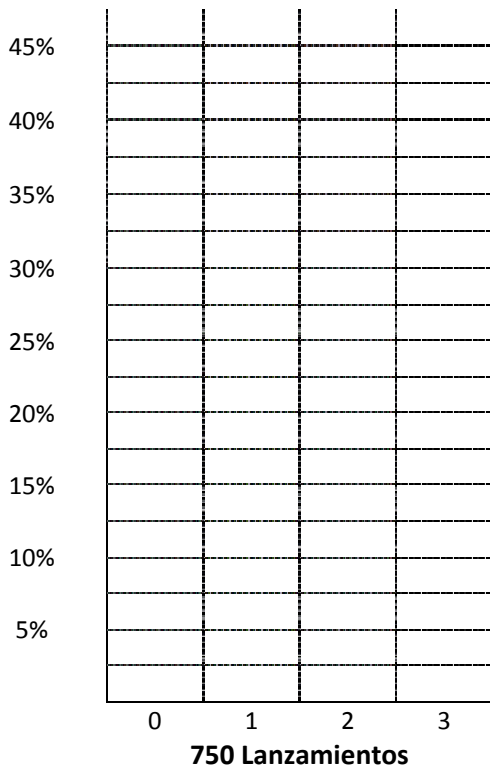
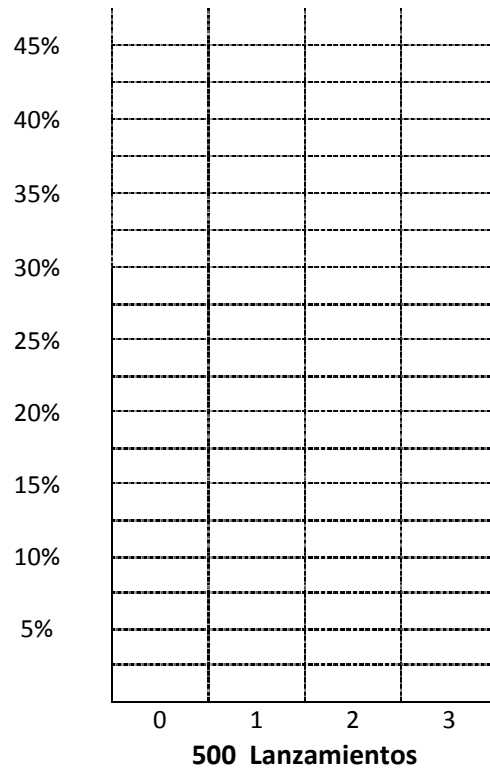
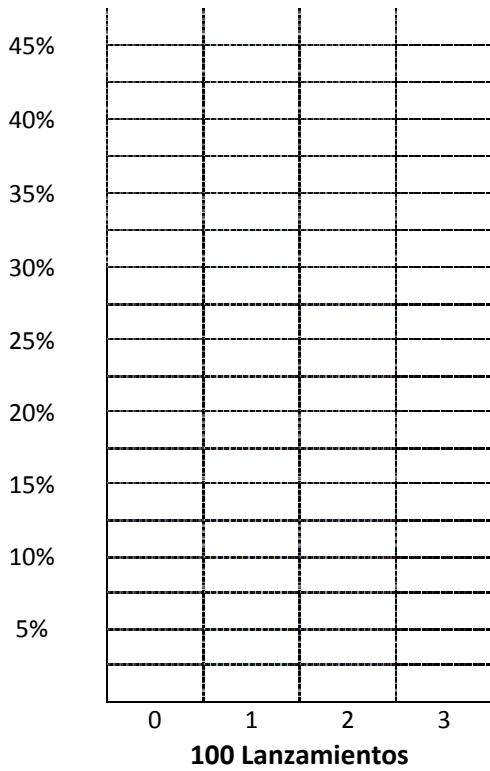
b) ¿Crees que los resultados hasta ahora simulados, pueden ocurrir en la realidad?

c) ¿Podrías decir que alguno o algunos valores de la variable tienen ventaja sobre los otros? (En caso de que SI, describe cuáles y por qué, en caso de que NO justifiquen su respuesta).

3. Ahora simula los siguientes experimentos y escribe los resultados en la siguiente tabla.

N° Águilas	100 lanzamientos		500 lanzamientos		750 lanzamientos		1000 lanzamientos		TOTAL 2350 lanzamientos	
	<i>k</i>	%	<i>k</i>	%	<i>k</i>	%	<i>k</i>	%	<i>k</i>	%
0 águilas										
1 águilas										
2 águilas										
3 águilas										
Total										

4. Grafica las frecuencias relativas (porcentaje %) de éxito para los 4 experimentos registrados en la tabla anterior:



5. Observa los gráficos anteriores y menciona si existe alguna similitud entre los gráficos y cuáles, si consideras que no hay similitudes, menciona qué los diferencia.

6. Comparando los gráficos, ¿Qué podrías concluir sobre lo que ocurre con los resultados cuando aumenta el número de lanzamientos? ¿Si se aumenta más lanzamientos podría cambiar la gráfica?

7. Comparando **la forma** de los gráficos de porcentaje para 100, 500, 750, 1000, lanzamientos ¿Cómo podrías describir el comportamiento del valor de la variable, es decir del número de águilas que ocurren?

8. ¿Puedes escribir una conclusión general de lo que sucede con el lanzamiento de 3 monedas?

9. Comparando **los porcentajes** de frecuencias de éxito para 100, 500, 750, 1000, 2350 lanzamientos, ¿Qué podrías concluir?, ¿Se aproximan a ciertos valores? ¿A cuáles? Menciona cuando ocurre lo anterior.

10. ¿Podrías decir que alguno o algunos valores de la variable tienen ventaja sobre los otros? (En caso de que SI, describe cuáles y por qué, en caso de que NO justifiquen su respuesta).

11. ¿Podrías predecir el resultado de 320 lanzamientos? (En caso de que SI, ¿cuál sería su predicción? y por qué, en caso de que NO explíquen por qué).

12. Indica la probabilidad de que salga cada valor de la variable y menciona debajo de la tabla como obtuviste tales probabilidades:

Número de Águilas	0	1	2	3	TOTAL
<i>Probabilidad</i>					

13. Imagina que tú y 3 amigos van a apostar por alguno de los valores de la variable (0, 1, 2 ó 3 águilas), ¿cuál elegirías y por qué?

APÉNDICE D.- POST-TEST

Actividad: # 4

Tipo: Individual

INSTRUCCIONES: *Lee con atención las siguientes preguntas y responde en el orden en el que se te piden sin que cambies tus respuestas en caso de que te arrepientas. Contesta todo lo que se pide de acuerdo a tus conocimientos, tu imaginación o tu intuición; no olvides justificar cada una de ellas.*

Las tres monedas

1. De aquí en adelante, llamaremos **lanzamiento** a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Se realiza un lanzamiento y se observa “el número de águilas que ocurren” (llamado **variable** para esta encuesta). Enlista todos los posibles valores que puede tomar esta variable:

2. Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable “número de águilas que ocurren”. En la siguiente tabla anota en la columna de la izquierda, los posibles valores de la variable y en la columna de la derecha, el número de veces que crees que ocurra cada valor:

Valor de la variable	Frecuencia
Total	

3. Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable (a cada ocurrencia le llamaremos: **resultado**):

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	
Total	

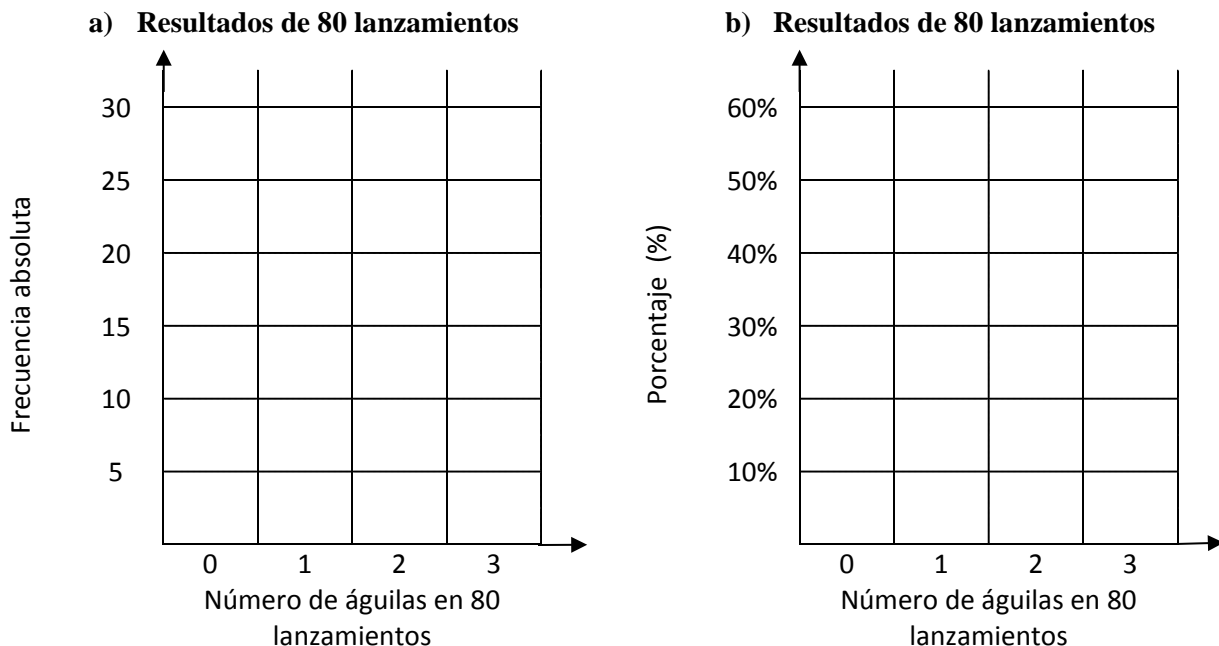
4. Imagínate que tienes las tres monedas y realizas 16 lanzamientos (de 3 monedas cada uno), escribe los **resultados** que creas que se obtendrán. Para cada columna marca con una X una casilla de la fila que coincide con la variable “el número de águilas”. Al final, la suma de las X de cada fila representará el número de veces que ocurre cada valor de la variable.

Resultados \ Lanzamientos	Lanzamientos																Total	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
0 Águilas																		
1 Águilas																		
2 Águilas																		
3 Águilas																		

5. Uno de tus compañeros considera que cualquier resultado tiene la misma probabilidad de ocurrir, ¿Estás de acuerdo con él? Explica tu respuesta.

6. ¿Crees que después de muchos lanzamientos, todos los resultados posibles caerán el mismo número de veces? Justifica tu respuesta.

7. Imagina que realizas 80 lanzamientos. En el par de ejes coordenados de la izquierda dibuja un diagrama de barras que represente la frecuencia con la que crees que ocurre cada valor de la variable; en el par de ejes de la derecha, dibuja el diagrama correspondiente al anterior pero en porcentajes:



8. Considera que en un lanzamiento 3 amigos y tu van a apostar por alguno de los resultados (0, 1, 2 ó 3 águilas), ¿cuál elegirías y por qué?

9. Piensa y escribe la cantidad de veces que se podrías obtener 0, 1, 2 y 3 águilas para cada número de lanzamientos. *En cada columna la suma de los resultados debe ser igual al número de lanzamientos.*

Lanzamientos \ Resultados	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

10. Describe el criterio que seguiste para distribuir las frecuencias entre los resultados; argumenta tu respuesta:

11. Piensa y escribe el porcentaje en que podría ocurrir cada posible resultado para el número de lanzamientos que se indican en la primera fila. *En cada columna la suma de los porcentajes debe ser igual al cien por ciento.*

Resultados \ Lanzamientos	20	30	100	150	500	1000
0 Águilas						
1 Águilas						
2 Águilas						
3 Águilas						
Total						

12. ¿Por qué piensas que los porcentajes anteriores son razonables?

13. ¿Cuál crees que será el valor de la probabilidad de ocurrir de cada resultado?

Águilas	Probabilidad
0	
1	
2	
3	