CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

El estudio del cambio en Geometría Euclidiana

Tesis que presenta:

Selvin Nodier Galo Alvarenga

para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Ciudad de México Febrero, 2019

Dedicatoria

A mi familia y amigos,

a los que están y a los que están sin estar,

por hacer de mi lo que ahora soy.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el indispensable apoyo brindado para la realización de esta investigación.

Selvin Nodier Galo Alvarenga

Becario n°: 613646

Agradecimientos

Gracias familia, Miguel, abuelo y padre; Clara, abuela y madre, mis viejos por ustedes soy quién soy, hicieron algo bueno de mi, gracias por apoyarme y ser siempre mi inspiración. Reina, mi madre, a ti por siempre estar para mi, por apoyar incondicionalmente cada uno de mis proyectos. Bernardo, mi viejo, no crecí contigo, aprendí a amarte, ahora donde estés eres mi numen. Benigna, Ismael, abuelos, tío Perto, tío David, tío Naldo. July, hermana maravillosa, siempre echándome una mano. Miguel, mi herma, por contagiarme de tu entusiasmo y determinación. Josse, Jaz, Jeimy, hermanitas del alma. Katy y Moisés, tu regalo, mi viejo. Roge, mi tía madre, gracias por tu apoyo; Suyapa, Elías; Orlando gracias por siempre estar para nosotros. A todos mis primos con los que he compartido vida, Carlos, Kary, Yefry, Erick, Edgar, Nelly, David (hijo), Ingrid, Hever, Brayan, Hiuver, Jimmy (padrino), Gerson, Claudia; una lista interminable. A mi gente maraiteña con la que he compartido tanto.

A mis hermanos Katrachos, Gerardo, Melvin, Dirla, Denis, Carlitos por ese mundo de aventuras juntos. Gracias a mis amigxs Katrachxs, tantos nombres, a ti Alejandra; Pamela, Harold, y demás compxs de la normal, por ese compañerismo y cariño.

A mi hermano tico, Rodolfo por ser esa admirable persona que a cada momento acompaña; a mi hermano chileno, Sergio, por compartir tantos momentos, academia, futbol, vida.

A mis compañerxs de generación, Bren y Faby (dos hermanas más en mi extensa familia), Naty, Luis. A mi gente del PIDPDM por aceptarme, compartir y enseñarme tanto, a Juventud Clame.

A mi gente latina, compañeros de vida, Fabián y Naty, Uzziel, Paco, Amnier, Russell, Irving, Pedro, Chucho, Alan, Juven, todo el equipo del Bayer Muxes.

A mi asesor, el Dr. Ricardo Cantoral, por darme la confianza para emprender este reto, por su calidez humana, por sus orientaciones acertadas, por tanto.

A mis maestros de seminario y quienes me acompañaron en algunos momentos de esta aventura Dra. Gisela Montiel, el Dr. Javier Lezama, Dra. Rosa María Farfán, Dra. Claudia Acuña, Dra. Gabriela Buendía, por hacerme crecer con cada orientación.

Dani, gracias por siempre apoyarme, por escucharme, por aconsejarme, por guiarme, por confiar en mi.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), a cada una de las personas que nos apoyaron para cumplir esta meta.

Selvin Galo Alvarenga

Índice

Tabla de Ilustraciones

Resumen

Esta investigación forma parte de la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional, de dónde retomamos la hipótesis de que algunas ideas variacionales viven entre diversas formas de pensamiento, incluso de aquellos del tipo geométrico euclidiano. Con base en ello, desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa realizamos un estudio de las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* de Euclides en confrontación con las proposiciones homólogas del texto escolar *Geometría Plana* de Wentworth y Smith, con la intención de estudiar los usos de las nociones geométricas, sus significados y las prácticas que están asociadas a la construcción de este conocimiento.

Nos percatamos que la *comparación* juega un papel importante en el pensamiento geométrico euclidiano. Y, por otro lado, en estudios del Pensamiento y Lenguaje Variacional resalta que la *variación* como *estudio del cambio* en situaciones de predicción requiere de *comparaciones*; entonces, nos preguntamos sobre la forma en que opera dicha *comparación*, si tienen la misma naturaleza.

Para tal fin, encuadramos al análisis de contenido cualitativo como esquema metodológico, especificando un análisis matemático de contenido como estrategia para el examen de las proposiciones. Como resultado se evidencia la forma en que opera la *comparación* y *el estudio del cambio* en las proposiciones referidas de ambas obras de Geometría euclidiana.

Abstract

This study is part of the line of research Variational Language and Thinking, from where we return the hypothesis of some variational ideas are in different thinking forms, even of the geometric thinking. Based on this, from the Socio-epistemological Theory, we made a study of the propositions on the First Book of Euclid´s Elements in confrontation with their counterpart propositions on the textbook Plane Geometry of Wentworth and Smith. This, with the intention of studying the uses of geometric notions, their meanings and the practices associated to this knowledge construction.

We realize that the comparison plays an important role in the Euclidean geometric thinking. On the other hands, on the Variational Language and Thinking's researches stand out the variation as change study in prediction situations requires of comparisons. Then, we question about how operates this comparison, if they have the same nature.

We carried out a qualitative content analysis as methodological scheme, with a strategy of mathematic content analysis to the proposition's examination. As a result, we show the both comparison and change study operates on the propositions mentioned in the both Euclidean geometrical works.

Introducción

El conocimiento matemático se construye socialmente asociado a un conjunto de prácticas humanas y en su proceso de difusión institucional se lo modifica (Cantoral, 2013), se lo desvincula de dichas prácticas asociadas a su construcción. Se soslayan esencias y se imponen significados en su mayoría ligados a prácticas como la aritmetización (Arrieta, 2003), algebrización (Farfán, 1993), analitización (Cantoral, 1990); programas consistentes en hacer descansar los fundamentos de la matemática en la Aritmética, el Álgebra o el Análisis, respectivamente. Por otro lado, también pueden entenderse como la tendencia en la enseñanza hacia operar con números o símbolos o propiedades. Ejemplo de ello, la aritmetización que se señala en el estudio de Montiel (2005) y de Reyes-Gasperini (2016), hablando de la Trigonometría y la proporcionalidad, respectivamente.

En el caso específico de la Geometría, en tanto conocimiento que aparece asociado a prácticas cotidianas como la agrimensura y reportado por autores como Gow (1884), Heath (1921), Thomas (1939), Wentworth y Smith (1913) estaba vinculado según (Struik, 1980) a la resolución de problemas prácticos; pero, también a la astronomía (Proclo, 1970) y la construcción Seidenberg (1962), entre otras ramas del quehacer humano. En ese sentido, los problemas que en sus inicios resuelve esta disciplina están relacionados con otras ramas, como es el caso de la Astronomía, para resolver problemas astronómicos de la época, o la Óptica donde se usa la Geometría para estudiar del fenómeno visual en aquel contexto griego (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017). Y, por otro lado, se volvió el paradigma del razonamiento deductivo, en tanto que logró abstraer sus propiedades como objetos formales (Boyer, 1986; Mammana y Villani, 1998; Struik, 1980).

Los *Elementos*[1] de Euclides son un referente para la Geometría y se constituyeron como un paradigma para la enseñanza. Está obra es producida en la época helenística (Boyer, 1986), mediante una axiomática deductiva con base en primeros principios (Boyer, 1986, Wentworth y Smith, 1913); algo de esto podemos contemplar desde obras como los *Diálogos* de Platón o desde la época de Tales de Mileto al pensar en las primeras esencias del cosmos, de todo cuanto existe, el *arjé*[2]. La Matemática en general y la Geometría en particular no se desliga de pensar en las esencias sobre las cuales debía construirse, Proclo citado por Vega (1991) nos dice que "sólo si se cuenta con unos elementos de Geometría, cabe entender el resto de esta ciencia" (p. XXII). Aunque, por otro lado, Heath (1921) y Boyer (1986) también nos dicen que los *Elementos* son un texto dirigido a un principiante en Geometría.

La enseñanza tradicional de la Geometría por su centración en el objeto generalmente presta poco o ningún interés al contexto, la época, la racionalidad o las prácticas asociadas a la construcción de los conocimientos geométricos. En palabras de Struik (1980): "la mayor parte de nuestra geometría escolar está tomada, a menudo literalmente, de ocho o nueve de los trece libros" –refiriéndose a los *Elementos*–. Sin embargo, en la enseñanza actual se orienta a aspectos como lo algorítmico, pues la mayor cantidad de problemas están relacionados con encontrar áreas, volúmenes, relaciones proporcionales aritméticas; o en otros casos la mayor importancia se le dedica al método deductivo.

En esta investigación se analizan las 48 proposiciones del *Libro Primero* de los *Elementos* de Euclides mediante un análisis de contenido cualitativo con énfasis matemático, con la intención de estudiar los usos de las nociones geométricas, sus

[1] Obra que consta de trece libros o capítulos escrita por Euclides de Alejandría alrededor del año 300 a. n. e. (Boyer, 1986)
[2] "Principio" aquello de lo cual derivan todas las demás cosas (Ferrater, 1964, p. 480)

significados y las prácticas que están asociadas a la construcción de este conocimiento. Estas proposiciones en contraste con su pareja correspondiente del texto escolar *Geometría Plana* de Wentworth y Smith (1913).

En un primer acercamiento a las obras nos percatamos que la *comparación* juega un papel importante. Por otra parte, en estudios del Pensamiento y Lenguaje Variacional resalta que la *variación* como estudio del cambio en situaciones de predicción, requiere de *comparaciones* (Caballero 2018; Moreno-Durazo, 2018). Entonces nos preguntamos cómo opera esta *comparación* en el contexto geométrico euclidiano, si tienen la misma naturaleza.

En el capítulo 1, denominado Consideraciones Iniciales, describimos los antecedentes que sirven de base para esta investigación, referentes a la *comparación* en diferentes contextos y posteriormente en Geometría euclidiana; además, especificamos el problema de estudio, postulamos los objetivos y planteamos las preguntas de investigación.

Para el capítulo 2, presentamos las Consideraciones Teóricas, específicamente los aspectos y fundamentos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa que emplearemos en el estudio, profundizando sobre las nociones de *uso*, *significado* y *práctica*; así como algunas consideraciones del Pensamiento y Lenguaje Variacional, esbozando lo que consideraremos como *comparación* y estudio del cambio en Geometría euclidiana.

El capítulo 3 está dedicado a presentar las decisiones metodológicas; encuadramos al análisis de contenido cualitativo como esquema metodológico; apuntando a lo matemático de ese contenido como una estrategia para el examen de las proposiciones.

Mientras tanto, en el capítulo 4 analizamos los datos. Se presenta el estudio de las proposiciones correspondientes al Libro Primero de los *Elementos*, en contraste con las proposiciones homólogas del texto escolar referido.

En el capítulo 5 se exhiben los resultados que se obtuvieron después del examen de las proposiciones mediante la estrategia de análisis de contenido cualitativo con énfasis en lo matemático.

Finalmente, en el capítulo 6 se describen las conclusiones de esta investigación y las prospectivas que se abren.

1. Consideraciones Iniciales

1.1. Antecedentes

El contexto de interés para nuestro estudio es la Geometría, por lo que a continuación describimos algunas cuestiones que se han investigado entorno a la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, entre otros aspectos de relevancia.

1.1.1. La Geometría y su enseñanza

Como antecedentes, describiremos *grosso modo* lo que consideran algunos como Geometría y algunas investigaciones recientes sobre la enseñanza y aprendizaje en esta disciplina.

Como una primera interrogante es natural preguntarnos sobre qué es la Geometría, cuándo y cómo surge, entre otros cuestionamientos. Al respecto, desde Gow se considera que la "Geometría es la ciencia del espacio y estudia las relaciones existentes entre partes del espacio" (1884, p. 124), otros historiadores como Struik (1980) y Boyer (1986) la relacionan con el estudio de las formas. Hablando en torno al origen de esta disciplina, algunos autores confluyen en que la Geometría tuvo en sus inicios un carácter visual –decorativo–, sintetizando nuestra realidad mediante dibujos. Al establecerse las grandes civilizaciones del mundo antiguo esta rama de las Matemáticas juega un papel instrumental respecto de disciplinas como la arquitectura, astronomía, geografía; interviniendo en ella aspectos visuales y de cálculo. Posteriormente, con la civilización griega la Geometría florece como ciencia y pasa de aspectos prácticos a un proceso más abstracto y de racionalización (Mammana y Villani, 1998).

Como un marco para la descripción y medida de las figuras, la Geometría fue desarrollada empíricamente en muchas culturas hace miles de años. Como ciencia que abarca una colección de proposiciones abstractas acerca de formas ideales y pruebas de estas, fue fundada alrededor del año 600 a. n. e. en la cultura griega por Tales, quien según la leyenda probó muchos teoremas en Geometría. La famosa escuela pitagórica debe también ser mencionada en este sentido. (Hansen, 1998, p. 10)

Por otro lado, hablando en torno a la enseñanza de la Geometría (Mammana y Villani, 1998) mencionan que:

> "Cuando construimos un currículum escolar es necesario tomar decisiones y ellas dependen del objetivo didáctico que se persigue. Esta necesidad de elección es precisamente lo que dificulta la decisión sobre un coherente y balanceado currículo de geometría para la extensión del aprendizaje en las escuelas; un currículo que debe ser adecuado, en términos de su contenido, métodos y motivaciones, para todos los estudiantes de un cierto entorno social y cultural" (p. 4) [Traducción propia].

Los mismos autores argumentan que debe existir un equilibrio entre las primeras y más intuitivas fases y los aspectos formales y algebraicos; que no se pueden ignorar los aspectos formales, y menos un modelo de pensamiento deductivo riguroso. En ese sentido, plantean un recorrido para enseñanza de la Geometría, que va desde los aspectos visuales hasta los algebraicos y formales. En los primeros grados el enfoque de la Geometría debe ser principalmente informal y exploratorio, dejando la sistematización para los grados posteriores. Hansen (1998) agrega además que en los grados posteriores el estilo de enseñanza no debería seguir el estilo sugerido por

Euclides en los *Elementos* y que nociones como la semejanza, la congruencia y la simetría son fundamentales para muchos argumentos matemáticos y aplicaciones de la matemática, y deberían ser estudiados a detalle. Deja entrever una posición respecto de la secuencia deductiva devenida de una interpretación moderna de los *Elementos*, más a nivel estructural que a nivel de esencia de cada proposición, con una crítica orientada mayormente a los aspectos formales.

También menciona que el lado concreto y abstracto de la Geometría no debe ser formalizado y teorizado desde los primeros grados, pero debe ser experimentado durante la enseñanza y debe ser desarrollado gradualmente en los estudiantes. Al final la diferencia entre una figura concreta y una forma abstracta debe emerger. Las pruebas son útiles cuando actúan como explicación o revelan hechos sorprendentes, que no puedes establecer por sola experimentación (Hansen, 1998, p. 11).

Concordamos en esta parte con los autores en el sentido que la Geometría que nos muestra la enseñanza tradicional es en primera instancia aritmética, en los primeros grados de la escuela. Posteriormente, se nos muestra una Geometría basada en el rigor deductivo.

En cuanto a los procesos de razonamiento, Rina Herhskowitz (1998) señala que "son ahora considerados como una variedad de acciones que los estudiantes toman para comunicar y explicar a los demás, como también a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen". (p. 30). En ese sentido, considera dos aspectos clásicos del razonamiento deductivo: como parte de la cultura humana para ser aprendida por seres humanos y como medio para verificar proposiciones y mostrar su universalidad.

Por otra parte, según Duval (1998) la Geometría involucra tres tipos de procesos cognitivos, que cumplen funciones epistemológicas específicas:

*Procesos de visualizació*n con respecto a la representación del espacio, por la ilustración o por una proposición, por la exploración heurística de una situación compleja, por una mirada sinóptica sobre el mismo, o por una validación subjetiva.

Procesos de construcción con herramientas: construcción de configuraciones que puedan trabajar como un modelo en que las acciones en la representación y los resultados observados están relacionados con el objeto matemático representado.

Razonamiento en relación con los *procesos discursivos* para la extensión del conocimiento, para prueba, para la explicación. (p. 38)

Duval se orienta por el rol de las representaciones en Geometría, primero en la idea de la visualización del espacio mediante figuras, segundo por la utilización de construcciones que reflejan propiedades de los objetos y finalmente sobre los procesos discursivos para la argumentación.

Con lo descrito anteriormente vemos algunas ideas sobre la forma en como ha sido tratada la Geometría y su enseñanza, las consideraciones sobre la prueba geométrica ocupan un lugar importante en ellas, así como los aspectos mas intuitivos. Por otra parte, con la implementación de las tecnologías, han surgido diversidad de investigaciones que se centran en como con la tecnología se puede mediar el conocimiento geométrico, por ejemplo, con los softwares de geometría dinámica (Sinclair et al, 2016).

1.1.2. Aspectos de la comparación

En primer acercamiento a la geometría euclidiana, nos damos cuenta de que la *comparación* juega un rol importante; y, por otro lado, también está en la base del pensamiento variacional. A partir de ello, presentamos aspectos relevantes entorno a esta noción.

Comencemos relatando acerca de nuestra experiencia cotidiana con esta idea, por ejemplo, frecuentemente pensamos en, o expresamos frases como: *hace menos o más calor que ayer*, *el agua está muy fría*, *este material me funciona mejor que este otro* para esta construcción, *esta nota suena más grave o más aguda que esta otra*, *mejor compro este auto que este otro*. A cada momento tomamos la decisión más conveniente dependiendo la situación, el contexto; lo hacemos con base en la consideración de dos cosas para luego comparlas y así vemos la conveniencia sobre cual elegir.

En el ámbito de las Matemáticas y demás ciencias encontramos frases como: *un número mayor, igual o menor que otro*; *un segmento mayor, menor o igual que otro*; *una función mayor o menor que otra* en cierto intervalo; *una pendiente mayor, menor o igual a otra*. En otros casos hablamos de temperaturas, velocidades, aceleraciones, fuerzas, entre otras que podríamos mencionar. En este tipo de expresiones dejamos ver un particular interés por conocer la relación que guardan dos cosas de la misma naturaleza o de naturaleza diferente pero que poseen una propiedad que posibilita establecer dicha relación.

Siguiendo esa idea, consideramos como antecedentes dos grupos de investigaciones, el primero relacionado con las ideas variacionales desde la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional –al cuál dedicaremos un apartado en el capítulo 2–. Por otro lado, en el segundo grupo tenemos los estudios que aluden a la *comparación*, no necesariamente en el mismo sentido que el PyLV; más bien estudios que involucran la comparación, dentro de algunas disciplinas matemáticas, como ser el Álgebra o la Geometría.

Iniciando con el primer conjunto de estudios, Salinas (2003) menciona que: "la *comparación* cuando evoluciona desde etapas tempranas puede ser una herramienta potente en la resolución de problemas de matemáticas superiores" (p. X). Siguiendo esa idea hace alusión a la evolución de la *comparación*. Propone un recorrido sobre la *comparación* desde problemas básicos de aritmética –comparaciones entre números–; pasando por el álgebra –comparaciones entre expresiones algebraicas–; y en el contexto geométrico –comparaciones de segmentos–.

Salinas (2003) conforma a una propuesta para la construcción de la noción de máximos y mínimos para funciones en una variable, donde el valor extremo está representado por el segmento –ordenada– con mayor o menor tamaño en una región de la función; dependiendo donde se ubique la función respecto el eje de las abscisas. De la comparación entre estos valores extremos –en cuanto al tamaño y signo– se determina si es un máximo o un mínimo de la función –ya sea relativo o global–.

Por otra parte, Fernández (2004) en su estudio sobre el Método de Multiplicadores de Lagrange, argumenta que en la optimización de funciones se pone en juego la *comparación*. Que como se describió en párrafos anteriores, Salinas (2003) ya lo había de considerar en su estudio de máximos y mínimos de funciones en el caso particular de funciones en una variable.

Fernández (2004) menciona que una característica trascendental que deberán abordar los jóvenes en la secuencia didáctica que propone para el Método de Multiplicadores de Lagrange es "la *comparación* de las alturas [imágenes] en el punto de restricción… parte vital en la construcción del método" (p. 134). Refiriéndose específicamente a la *comparación* entre los extremos de la función inicial y los extremos de la función resultante de la sumarla con la función restricción. Considera a la función resultante como una traslación –transformación– del extremo de la función inicial.

En los dos trabajos antes descritos la *comparación* tiene un sentido no *secuencial* –pese a que la conclusión buscada refiera a más de dos estados–. Se estudian varios estados, sin importar cual está primero o cual está después.

Estudios posteriores como el de Caballero (2013) que se centra en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato, se interesan por las dificultades alrededor del desarrollo de este pensamiento y el análisis de las prácticas propias del estudio del cambio. Para tal fin, diseña un conjunto de actividades en las que analiza las respuestas de los profesores a situaciones que involucran la puesta en juego de estrategias variacionales. Proponiendo la *comparación* como una de esas estrategias en la base del estudio del cambio.

En una primera aproximación, Salinas (2003) aludiendo a lo fenomenológico asocia la *comparación* a la "acción de establecer diferencias entre estados" (p. 5). Posteriormente, Caballero (2013) agrega la especificación acerca de esos estados; caracterizándolos como consecutivos "uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y la variación en esos estados" (p. 33). Dado que el fenómeno por el cual se interesa Caballero (2013) es de carácter dinámico, discurre que los estados que se comparan deben ser sucesivos, lo que denota una *comparación* con un sentido *secuencial*, es decir, interesa el orden entre los estados. Un aspecto relevante de estos trabajos es que se pasa de comparar estados separados a comparar secuencias de estados.

Por otro lado, Caballero (2018) señala que la *comparación* es imprescindible para la variación, "no se puede hablar de *variación* si no se hacen *comparaciones*" (p. 55).

Siguiendo esa idea, nos interesamos por la forma en la que opera la *comparación* en el pensamiento geométrico euclidiano. En este caso, la *comparación* no precisa ser secuencial o sucesiva; pues, se comparan elementos de las figuras para determinar la relación entre otros elementos de estas o la relación misma entre dichas figuras.

En cuanto al otro grupo de investigaciones encontramos aportaciones como las de Guacaneme (2012) quien, en su estudio del libro V de los *Elementos* de Euclides, considera la *comparación* de magnitudes como un procedimiento matemático, describiendo que para "parejas de magnitudes homogéneas aparece el *proceso general de comparación* para establecer cuándo una *excede*, es *igual* o resulta *inferior* que la otra. A través de estas comparaciones se colige cuándo una magnitud es *igual, desigual, mayor o menor* que otra" (p. 111). Alude a que la *comparación* es necesaria para *inferir o deducir* acerca de la relación –igualdad o desigualdad– que guardan dos magnitudes homogéneas.

Hablando acerca de la *proporción* geométrica Guacaneme (2012) argumenta que "las razones se pueden *comparar* para establecer si están en la *misma* razón, o si una es *mayor* o es *menor* que otra, de manera análoga a como se hace con los números y las magnitudes" (p. 114).

Siguiendo la misma idea, en su trabajo sobre la proporcionalidad Reyes-Gasperini (2016) refiere a la proporción como una relación de relaciones. Reporta la evolución pragmática *comparar–equivaler–conmensurar*, que acompaña la evolución conceptual *razón–proporción–proporcionalidad*. La autora ubica a la *comparación* en el nivel de *acción* –en el modelo de anidación de prácticas–, como el acto de "*elegir y relacionar* las magnitudes" (p. 269). *Equivaler* como la *actividad* de "*construir* una unidad de medida" y *conmensurar* como *práctica socialmente compartida* de "*aritmetizar* la relación" (p. 540). Además, agrega que la *comparación* en torno a la proporcionalidad "es intrínseca a la idea de razón" (p. 550). Argumenta que la "*acción* de *comparar* es intuitiva, deliberada, pues no precisa explicación que fundamente su accionar". Por otro lado, describe que "*Equivaler* es una *actividad* ya que precisa de una mediación, la igualdad de *comparaciones*, en la acción de construir una unidad de medida". Además, afirma que "*medir* es determinar por *comparación* una longitud (extensión, volumen, o capacidad), se compara una magnitud con un patrón de referencia" (p. 552).

Dados estos señalamientos, la *comparación* en el contexto geométrico de la proporcionalidad requiere la consideración de relaciones entre parejas de magnitudes homogéneas, dónde sí dichas parejas de magnitudes tienen la misma relación, entonces son proporcionales. Esto nos habla que la *comparación* en el contexto geométrico euclidiano puede ser entre elementos de las figuras geométricas o entre relaciones de estos elementos.

En torno a otro estudio donde interviene la *comparación* –en este caso orientado a la generalización de patrones con base en el PyLV– se la considera como aquella que "corresponde a la *identificación* de la *transformación* que un valor sufre para convertirse en otro. Implica reconocer la *variación* que existe entre dos valores" (López-Acosta, 2016, p. 29). El autor señala, además, que la *comparación* entre un estado y otro –una figura y otra– del patrón permite identificar el cambio de un caso a otro de la secuencia. Añadiendo que, en los patrones numéricos, la comparación se hace con base en *diferencias* y en los patrones visuales sobre la *agrupación* de elementos. Esas diferencias –en el caso de patrones numéricos– se correlacionan con la desigualdad entre una magnitud y la otra, en el sentido de Guacaneme (2012). Por otra parte, esta *comparación* debe hacerse entre estados consecutivos para poder cuantificar la diferencia, hasta encontrar una constante –carácter estable del cambio–

. Involucrando de esta forma una *comparación* con un carácter secuencial, donde importa el orden de los estados a comparar.

Otra investigación donde encontramos referencia a la *comparación* es la desarrollada por Cabañas (2011) relativa a la *conservación de áreas*, en ella sostiene que la noción de *área* está relacionada a las nociones de *medición, comparación, conservación*, *estimación* y *representación de superficies*. La *conservación* puede verse mediante el *cambio* de la posición de una figura sin modificar su forma. Agrega, además, que la conservación de área puede darse modificando una figura de otras maneras como ser *partiéndola* y *reacomodando* sus partes, y mediante transformaciones analíticas y geométricas.

Con lo mencionado anteriormente, podemos decir que en la *conservación de área* se hace necesaria la *comparación* entre las figuras para determinar si el área es la misma o no, esto mediante argumentaciones con base en las transformaciones sobre las figuras. Para determinar si hubo *conservación del área* se precisa establecer la relación de igualdad entre el área de las figuras a través de la *medición* o la *comparación* entre sus elementos. La *comparación* de la que se hace mención es entre parejas de figuras; pues, se dan dos figuras de las cuales se debe concluir si tienen la misma área, es una *comparación* de carácter no secuencial.

En las investigaciones mostradas se hace explícitamente alusión a la *comparación*, una noción esencial en el estudio del cambio, desde puntos de vista diferentes, en disciplinas diferentes, que van desde la Aritmética, el Álgebra, la Geometría y el Cálculo. El presente estudio se posiciona en el contexto geométrico euclidiano del Libro Primero de los *Elementos* y el texto escolar Geometría Plana, donde interesa establecer relaciones entre elementos de las figuras, dada una relación conocida entre otros elementos de estas figuras. Para establecer dichas relaciones se precisa de construcciones auxiliares y de comparaciones. Por lo que nuestro interés estará puesto sobre la forma en la que opera dicha *comparación* –que como hemos descrito, es de carácter *no secuencial*, pues no importa un orden en lo que se compara– y en la forma en que se estudia el cambio en el contexto geométrico euclidiano.

1.2. Problemática de Investigación

En nuestro diario vivir, actuamos de formas relativas al momento, a la situación, poniendo en juego un bagaje extenso de conocimientos construidos socialmente con anterioridad. Poseemos algunas ideas sobre ciertas nociones, a las que luego vamos agregando significados o formas de uso, resignificando (Reyes-Gasperini, 2016) con base en nuevas experiencias. En todo este proceso, nuestro pensamiento va integrando una variedad de formas de razonamiento, que van desde cuestiones afectivas, emocionales, habilidades de comunicación, lingüísticas, sociales, y en el campo de la matemática, formas de razonar relativas a diferentes áreas del conocimiento matemático dada la racionalidad contextualizada y el relativismo epistemológico (Cantoral, 2013; 2016). Así pues, ponemos en juego razonamientos de índole aritmético, algebraico, geométrico, variacional, entre otros, cuando se nos presenta una situación del tipo matemático –sin dejar atrás formas de razonar perteneciente a otras áreas del conocimiento humano–. En nuestro proceder ante una situación particular, conjugamos una diversidad integral de conocimientos –pertenecientes o construidos en diferentes áreas de conocimiento– como un engranaje que guía nuestra forma de proceder matemáticamente.

Con los antecedentes antes descritos, de donde consideramos de *comparación* en tanto comparación de elementos de las figuras y relaciones entre ellos, y como parte fundamental del estudio del cambio, creemos relevante estudiar la forma en la que operan estas nociones en el pensamiento geométrico euclidiano plasmado en dos obras de naturaleza distinta; una obra marco en cuanto a Geometría se refiere y un texto escolar de Geometría.

Para ello, nos centramos en el estudio de las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* de Euclides, contrastada con su pareja homóloga del texto escolar *Geometría Plana* de Wentworth y Smith, prestando especial atención a la forma en que opera la *comparación* y el *estudio del cambio* en el pensamiento geométrico euclidiano, de ahí que se vuelve relevante la indagación sobre los usos, significados de las nociones puestas en juego y las prácticas asociadas a este conocimiento matemático. Entonces nos planteamos los siguientes objetivos y preguntas de investigación:

Objetivo general

Estudiar los usos, significados y prácticas asociadas al *estudio del cambio* en las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* de Euclides confrontando con las proposiciones homólogas de un texto escolar contemporáneo.

Develar la forma en que opera la *comparación* en tanto noción esencial para el estudio del cambio en el pensamiento geométrico euclidiano.

Objetivos específicos

Identificar usos, significados y prácticas asociadas de las nociones geométricas presentes en las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* de Euclides, en contraste con sus homólogas del texto escolar *Geometría Plana* de Wentworth y Smith.

Identificar la forma en la que opera la *comparación y el estudio del cambio* en las proposiciones del Libro Primero de los Elementos y en las homólogas del texto escolar Geometría Plana de Wentworth y Smith.

Caracterizar lo que se entenderá por estudio del cambio en el contexto geométrico euclidiano del Libro Primero de los Elementos de Euclides.

Contrastar estas nociones en el pensamiento geométrico con las del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Preguntas de investigación

¿Qué usos y significados de las nociones geométricas se asocian a la comparación y estudio del cambio en las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* de Euclides, en contraste con su homóloga del texto escolar Geometría Plana de Wentworth y Smith?

¿Qué prácticas están asociadas a la *comparación y al estudio del cambio* en las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* de Euclides, en contraste con su homóloga del texto escolar Geometría Plana de Wentworth y Smith?

¿Cómo opera la *comparación* y el *estudio del cambio* en el pensamiento geométrico euclidiano plasmado en las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* y en las homólogas del texto escolar *Geometría Plana* de Wentworth y Smith?

¿Cuáles son las semejanzas y diferencias de la *comparación* y *el estudio del cambio* propias del pensamiento geométrico euclidiano con la *comparación y variación* desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional?

2. Consideraciones Teóricas

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa –TSME– sostiene que el conocimiento matemático, aun aquel considerado como avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas (Cantoral, 2013, p. 1). Además, establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las prácticas mediante las cuales y debido a las cuales dichos conocimientos son producidos. (Cantoral, 2013; 2016). Es en el ejercicio de estas prácticas humanas que se manifiesta el uso del conocimiento matemático (Buendía, 2012). Considera por otro lado a los fenómenos de enseñanza y aprendizaje como un "acto social, cultural, política y económicamente constituidos y justificado por instituciones educativas" (Cantoral, 2004, p. 5).

En la TSME se cuestiona acerca del saber, se lo problematiza, antes de hablar del objeto matemático, se habla de un conjunto de prácticas que le dan sentido y significado al objeto. La noción de *práctica* está relacionada a la idea de hegemonía, coerción, consenso, y en tal sentido nociones como uso y costumbre adquieren un papel central (Cantoral, 2004, p. 6). En por ello que se preocupa por el estudio de las prácticas ligadas al proceso de construcción de un conocimiento, que dan sentido a una noción matemática mediante el uso.

Se considera también que "el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento" (Cantoral, 2004, p. 8). De este modo, desde esta postura teórica nos preocupamos por el estudio de la construcción social del conocimiento y su difusión institucional (Cantoral, 2013); por el estudio de las prácticas asociadas a un conocimiento. Interesa entonces estudiar "la construcción social y la difusión institucional del saber –conocimiento puesto en uso– en y desde contextos y situaciones específicas. Y después de esto estudiar en esta construcción social como el saber y pensamiento matemático vive transversalmente en las prácticas" (Espinoza, 2014, pp. 19-20). Por lo que para la presente investigación pretendemos estudiar las prácticas ligadas al conocimiento geométrico euclidiano, mediante las cuales las nociones geométricas adquieren un significado. Consideramos para ello las cuatro *dimensiones del saber*: *didáctica*, referente a cómo se produce la difusión institucional del saber matemático; *cognitiva*, relativa a la apropiación del saber, a la forma en cómo se desarrolla el pensamiento matemático; *epistemológica*, que trata sobre la naturaleza del saber; y *sociocultural* concerniente al estudio situado del saber, histórica, contextual y funcionalmente (Cantoral, 2013; 2016; Reyes-Gasperini, 2016).

La dimensión didáctica nos permite el estudio de la difusión institucional del conocimiento; respecto al estudio en cuestión, consideramos esta dimensión materializada tanto en la obra original como en el texto escolar. Por otro lado, el texto escolar como materialización de esa difusión institucional, se considera como un apoyo del saber y un instrumento de poder, ya que prima una distribución y jerarquía de conocimientos, y promueve ideas dominantes (Cantoral 2000; 2013; González y Sierra, 2004). Ellos son producto de un grupo social y de una época determinada. Ese saber matemático "se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento" (Cantoral, 2004, p. 8)

En cuanto a la *dimensión epistemológica*, esta no se centra evolución de los conceptos, sino en los elementos relevantes presentes en la construcción del conocimiento matemático y que son normados por el momento social, político y cultural en que se desarrollan. En otras palabras, considera que el conocimiento es situado y que debemos tener en cuenta la organización de los grupos humanos que los llevan a construir conocimiento matemático de una forma y no de otra (Soto, 2010). Con esta mirada nos iremos al estudio de la obra de Euclides, considerando aspectos relevantes alrededor de su construcción, lo mismo que para el texto escolar.

La *dimensión cognitiva* permite contemplar los diferentes razonamientos, procedimientos y procesos en los que se evidencia el desarrollo del pensamiento en diversos contextos (Reyes-Gasperini, 2016). En nuestro caso, esta dimensión del saber la vemos reflejada en los *procedimientos, procesos y razonamientos* evidenciados en las obras objeto del presente estudio. Nos auxiliamos de comentarios y de obras históricas que permitan ver la forma –plausible– en que se desarrollaron algunos conocimientos geométricos en los *Elementos* y posteriormente en el texto escolar. Las diferentes formas de razona geométricamente en Grecia y en las antiguas civilizaciones previas como son la egipcia y la mesopotámica.

La dimensión *sociocultural* permite contemplar al saber desde el punto de vista funcional, histórico y situacional. Dando paso a la identificación y estudio de prácticas alrededor del saber en contextos históricos, situacionales, en donde se pone en juego un saber. Esta dimensión principalmente nos ubica en el contexto histórico, dada la naturaleza del estudio; pretendemos en ese sentido, el cuestionarnos sobre el contexto social y cultural de los *Elementos* para identificar esas prácticas alrededor de los conocimientos geométricos en dicha época y los factores o aspectos sociales que posibilitaron su conformación y que dan un sentido a los mismos, una razón de ser.

Aunado a la contemplación del saber en todas sus dimensiones, antes mencionadas, se encuentran los *principios de la TSME* que rigen las consideraciones en torno al estudio de la construcción social del conocimiento matemático: la *racionalidad* *contextualizada*, el *relativismo epistemológico*, la *normatividad* de la práctica social y la *resignificación o significación progresiva* (Cantoral, 2013; 2016; Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014; Reyes-Gasperini, 2016).

La forma con la que se actúa y la manera con la que se razona ante una situación, depende de un momento determinado, de un lugar específico, de una comunidad particular. Actuamos y pensamos dependiendo el contexto; nuestra racionalidad es contextualizada (Cantoral, 2013; Reyes-Gasperini, 2016). Para nuestro caso de estudio, la racionalidad euclidiana vigente al momento de escribirse los *Elementos* es particular, dependiente de dicha época y las previas, de las ideologías vigentes en ese momento, la intencionalidad del tratado es particular.

El caso de las civilizaciones egipcia y babilónica, y en la Grecia clásica –la Geometría previa a Euclides– tienen racionalidades que difieren o confluyen entre ellas, como también con la racionalidad helenística en los *Elementos*. Por otra parte, también la racionalidad en el texto escolar, en el desarrollo de sus proposiciones y explicaciones, puede conservar aspectos o tener nuevos tintes. Por lo que, todo lo anterior representa un punto de particular atención en la realización de nuestro estudio; en la consideración de esas racionalidades emergen cuestiones significativas, aspectos que develan esa forma de hacer Geometría, de plasmarla, de comunicarla.

Un saber es una multitud de saberes con verdades relativos (Reyes-Gasperini, 2016); en contraposición al absolutismo, donde se impone una verdad única. La validez del conocimiento es relativa a su época, a los criterios de validez aceptados en ese contexto; que también deben responder al rigor matemático en general. La práctica social es una construcción que norma nuestro actuar, la manera de razonar, tanto individualmente como colectivamente, domina la manera de pensar de las comunidades, es en cierto sentido universal.

El cuestionamiento sobre las prácticas requiere de una reflexión sobre la idea de jerarquía de prácticas, cómo se organizan. Para ello se propone el modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013), donde dicha praxis se caracteriza y ubica dependiendo la interacción con los objetos en el contexto; van desde lo factual, pasando por lo procedimental, hasta lo conceptual. En una primera lectura en la base del modelo de anidación de prácticas, se explica la coordinación entre acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas. Donde una acción es la interacción directa del sujeto ante el medio, una actividad es una interacción intencional y reiterada; actividades que organizadas conforman una práctica socialmente compartida en tanto que es deliberada y regulada por el contexto (Cantoral, 2013; 2016).

Figura 2.1. Modelo de anidación de prácticas

Fuente: Cantoral (2016, p. 338)

2.1. El discurso Matemático Escolar

Como hemos afirmado anteriormente el conocimiento matemático se construye socialmente asociado a prácticas humanas. Este conocimiento se convierte en saber cuando se ha socializado en ámbitos no escolares (Cantoral, 2013; 2016). La difusión de estos saberes hacia el sistema de enseñanza genera cambios que lo afectan funcional y estructuralmente (Soto y Cantoral, 2014). Una matemática que recibe cierto tipo de modificaciones para ser llevada a la escuela, determinadas por un sistema de razón, lo que se denomina desde la TSME como discurso Matemático Escolar –dME– (Cantoral, 2013; 2016; Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014; Reyes Gasperini, 2016).

Este discurso es un sistema de razón en tanto es legitimado socialmente y delinea las formas de actuar, razonar, argumentar y dar significado por parte de los individuos; delimitando de esta manera lo correcto, lo normal, lo aceptable (Soto 2010; Soto y Cantoral, 2014). En este sentido, este discurso genera violencia simbólica mediante la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos, lo que constituye una forma de exclusión de los actores del sistema educativo (Soto y Cantoral, 2014). En torno al dME, Soto (2010) le atribuye algunas características:

Es atomizado en los conceptos, es decir, se consideran nada más los objetos matemáticos dejando fuera los contextos socioculturales que posibilitaron la constitución de dicho conocimiento.

Tiene un *carácter hegemónico*, en tanto impone ciertos argumentos, procedimientos y significados, ante otros.

Se concibe a la *Matemática como acabada y continua*, dejando ver al conocimiento matemático como preexistente y ordenado.

En cuanto al conocimiento matemático se le otorga principal importancia a su aplicación y no a su funcionalidad, considera este conocimiento como *utilitario más que funcional.*

Es falto de marcos de referencia, para resignificar la matemática escolar, esto debido a la atomización en los conceptos; donde no se presentan prácticas de referencia donde el uso del conocimiento permita su significación.

Consideramos entonces, que un texto escolar lleva implícita o explícitamente una ideología, una forma de ver la matemática –en este caso Geometría euclidiana– propia de una época, dónde prima un modelo de enseñanza y una concepción de esta. En este sentido, un texto escolar es una expresión de ese sistema de razón que impone unos significados, argumentos y procedimientos, frente a otros, dada la racionalidad con la que se piensa la enseñanza y la matemática vigente en ese momento. Por lo tanto, estudiar un texto escolar, nos permitirá esbozar de manera general esos argumentos, procedimientos y significados que priman frente a otros que son opacados.

2.2. Uso y significado

En otro orden de ideas, el conocimiento se significa y resignifica mediante el uso; al respecto Cordero (2006) habla acerca del uso del conocimiento, en tanto sus *funcionamientos y formas*. En ese mismo sentido, Buendía (2012) en su artículo sobre el uso de las gráficas, retomando las consideraciones de Cordero (2006) y otros autores, considera la idea de *forma* en tanto,

> "la apariencia perceptible de la gráfica y la manera en la que el sujeto actúa con ella y sobre ella en cierta tarea… El funcionamiento es para qué le sirve la gráfica al sujeto en cuestión, es el rol de la gráfica en una tarea y cómo funciona en esa tarea" (p. 14).

La autora, está considerando entonces el uso en cuanto a la manera de actuar con y sobre una noción –forma–, agregando que el actuar con y sobre dicha noción, tiene una razón de ser, un para qué, en sentido se uso –funcionamiento–.

Por otro lado, Cabañas (2011) caracteriza *uso* como "las formas en que es empleada o adoptada una noción en un contexto específico. En ese mismo sentido, Rotaeche (2012) agrega que el sujeto puede ser consciente o no del uso de una noción, manipularla explicita o implícitamente, utilizar representaciones típicamente escolares o propias del contexto. Por esa razón debe estudiarse el hacer humano alrededor de un conocimiento matemático prestando particular interés a qué y cómo se hace, por qué y para qué se hace lo que se hace.

Por otro lado, Reyes-Gasperini (2016b) afirma que desde la TSME el aprendizaje del saber matemático escolar radica en la "*significación* situada de los objetos matemáticos mediante el uso" (p. 149). La autora alude a que el aprendizaje no refiere nada más a la aplicación correcta de lo aprendido sino a "la habilidad de *significar* al objeto matemático mediante los usos del conocimiento, es decir, a partir de lo que hago puedo darle significados al conocimiento matemático" (ídem). Por tanto, se pretende dar significado a los objetos mediante el uso, haciéndolo funcional, y es en poniendo en uso ese conocimiento que se dota de significados progresivamente, lo que la autora denomina *resignificación*. Siguiendo esa idea, entonces el *significado* está relacionado con la funcionalidad de una noción, cuando se le da un uso situado. En el contexto de la Geometría euclidiana, por ejemplo, se emplea la circunferencia para construir segmentos congruentes, o para comparar longitudes, tiene la funcionalidad de permitir la obtención de segmentos congruentes.

2.3. Variación y comparación

Ubicándonos dentro de la TSME, encontramos el Pensamiento y Lenguaje Variacional, como una línea de investigación y como una forma de pensamiento, complementándose ambas (Caballero, 2012; Cabrera 2009). Línea de investigación, en tanto estudia las estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y epistemológico; considerando también las funciones cognitivas que desarrollan los seres humanos mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio, tomando en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en diferentes contextos. Consiste en el estudio de las "formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio" Caballero (2018, p. 40).

Por otra parte, el pensamiento y lenguaje variacional, como una forma de pensamiento, es caracterizado por Cabrera (2009) como "aquellas estrategias, formas de razonamientos, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten discutir y comunicar el estudio y análisis del *cambio y la variación*" (p. 55). Al mismo respecto Moreno-Durazo (2018) la considera como una forma de pensamiento participe en el estudio de fenómenos dinámicos.

Respecto a las nociones principales en el PyLV, Cantoral, Molina y Sánchez (2005) explican que:

> La noción de *cambio* denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la *variación*, la estamos entendiendo como una cuantificación del cambio, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. (p. 464)

Por su parte Caballero (2018) asume que *cambio y variación*, aunque relacionadas no significan lo mismo; el *cambio* puede ser percibido mientras que la *variación* la considera como una "abstracción de las propiedades y características del cambio percibido" (p. 16). "El cambio consiste en toda modificación de estado (posición, forma, altura, peso, etc.), la variación se asume como la cuantificación particular de dicho cambio" (ídem, p. 40); aclara que cuantificación refiere al reconocimiento de los aspectos medibles en un fenómeno.

Siguiendo la misma idea, Moreno-Durazo (2018) señala que dentro del PyLV se considera

> Cambio como la manifestación de las modificaciones de estado que da evidencia de la evolución en una situación o fenómeno, mientras que la variación es una construcción del individuo que le permita explicar tal evolución, en otras palabras, decimos que la variación es la cuantificación del cambio (p. 62).

En ese sentido, podemos percatarnos del *cambio* en un fenómeno o un objeto, aludiendo a la relación existente en dos momentos de ese fenómeno; sin embargo, la *variación* existe siempre que nos preguntemos sobre la evolución, las explicaciones causales de ese fenómeno, al cómo se dio el cambio. Podemos decir entonces, que no hay variación sin cambio, pero no todo cambio representa variación. Siguiendo esa idea, consideramos que, en Geometría euclidiana prevalece un tipo de *estudio del cambio,* en las relaciones entre unos elementos de las figuras, el estudio de este cambio conlleva al establecimiento de diferentes relaciones entre otros elementos de las figuras.

Moreno-Durazo (2018) interesada por el uso de lo que denomina *variación* en el diagnostico de enfermedades cardiacas, tipifica un carácter dual de la variación: *temporal*, considerando la evolución de los cambios respecto del tiempo; *espacial*, analizando los cambios en diferentes zonas del corazón. Estas formas de hablar de *variación* en tanto, *temporal y espacial*, aluden las variables en las que se centra la *comparación* de los estados, pues en la primera se comparan dos estados prestando atención a una misma variable en términos de su cambio en el tiempo. Mientras que, en el caso de la variación espacial, se presta atención al cambio en diferentes variables. Por su parte Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez (2018) afirman que "los fenómenos de cambio son descritos por el uso de tres estados lo que permite la articulación entre la variación sucesiva y asumir variaciones constantes de orden superior" (p. 4)

Caballero (2012), en su contraste entre el razonamiento causal de Piaget y el pensamiento y lenguaje variacional argumenta que ambos se interesan por el *proceso de cambio* de un estado a otro, más que por el estado inicial y final de un fenómeno; es decir, es lo que sucede en ese cambio lo que permite observar la causa de ese cambio (p. 17). En ese sentido, el pensamiento y lenguaje variacional se interesa por el cambio y las causas de ese cambio para determinar estados ulteriores.

Caballero (2018) afirma que "la comparación es un instrumento imprescindible para la variación… no se puede hablar de variación si no se hacen comparaciones" (p.55). Por lo que la *comparación* es de fundamental importancia para el estudio del cambio. Siguiendo esta idea, Salinas (2003) y Caballero (2012; 2013; 2018) asocian a la *comparación* con la acción de establecer diferencias entre estados.

La naturaleza de la *comparación* puede variar dependiendo el contexto donde se utilice: en la aritmética podría tener un sentido, en la Geometría otro. Al respecto, Salinas (2003) menciona que "la comparación no siempre se utiliza de la misma manera" (p. 13). Sin embargo, aclara en líneas posteriores que deben existir rasgos que no varían y que permitan reconocerla en cualquier contexto.

Siguiendo esa línea, Caballero (2013) se refiere a la *comparación* de áreas en tanto, "al tener dos o más figuras cerradas, se trata de determinar la relación entre el área de ellas, cual es mayor, menor o si son iguales, incluso encontrar que tan diferentes son las áreas entre sí" (p. 38). Idea que contrasta con los trabajos de Cabañas (2011), en donde se precisa de la comparación de áreas para determinar o concluir si hubo conservación o no; o con la comparación de segmentos que señala Salinas (2003).

La misma idea se vincula con la conmensurabilidad en el contexto geométrico de la proporcionalidad (Reyes-Gasperini, 2016a, Guacaneme, 2013) es decir, que emerge la idea de una unidad de medida como ese patrón que permite comparar dos magnitudes e inferir acerca de su relación. Los señalamientos anteriores refieren a un tipo de *comparación* en el ámbito geométrico que permite establecer la relación entre elementos de las figuras: segmentos, ángulos, áreas; como también la cuantificación o cualificación en caso de ser diferentes.

En el pensamiento y lenguaje variacional la *variación* está ligada la *predicción*. En los primeros trabajos se vincula a la idea de pendiente y derivada en el contexto de las funciones. En los trabajos como los de Caballero (2018) y Moreno-Durazo (2018) la *variación* que impera –siempre con fines predictivos– es la *variación de orden superior* en tanto reconocimiento de más de un orden de variación, es decir, en donde no solamente interesa estudiar el cambio entre dos estados de un fenómeno, sino que interesa la variación de segundo y tercer orden, para analizar su comportamiento. Además, dilucidan la *variación sucesiva* en tanto, la articulación de ordenes de variación para tratar con la evolución de las variables; y el *carácter estable del cambio* asociado al reconocimiento de una regularidad en el cambio, en los ordenes de variación superiores (Caballero, 2018). La *comparación* esta en la base de todas estas ideas: se requiere comparar para estudiar el comportamiento de fenómenos dinámicos.

Luego de las acotaciones anteriores reconocemos que la *comparación* en el sentido de Salinas (2003) es de naturaleza *no secuencial*, pues, se comparan dos estados sin prestar atención al orden, a su secuencia. En el trabajo de Caballero (2012) interesa dicho orden, es decir, interesa saber cual de los dos estados ocurrió primero. Posteriormente en Caballero (2018), Moreno-Durazo (2018), Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez (2018) se alude a la *variación sucesiva* en cuanto a la *comparación* de estados del fenómeno como también la *comparación* de los cambios entre esos estados. En todos estos casos, la *comparación* funge como medio para estudiar el comportamiento de fenómenos dinámicos. Sin embargo, como hemos descrito anteriormente, la *comparació*n se emplea no solamente para hablar de *variación* con fines predictivos, en el sentido de Caballero (2018), Moreno-Durazo (2018), Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez (2018). Postulamos que en el contexto geométrico euclidiano la *comparación* opera de manera similar; ya que permite establecer una relación –igual, mayor o menor que– entre dos elementos de una figura –segmentos, ángulos, área– dada una relación conocida entre otros elementos, esto mediante la construcción de elementos auxiliares.

En el PyLV se requiere el estudio de la causa del comportamiento, es decir, que sucedió para que se diera un comportamiento, su evolución. En el contexto geométrico euclidiano, el interés está centrado en, dada una relación entre ciertos elementos, derivar la relación entre otros elementos.

En la Geometría euclidiana interesa el establecimiento de proposiciones generales, en las cuales se recogen las condiciones necesarias para poder mantener una relación deseada. Por ejemplo, en los criterios de congruencia de triángulos se establecen las condiciones necesarias para que dos triángulos sean congruentes, es, decir, que sean iguales en todas sus partes. En otras palabras, con el hecho de mantenerse iguales tres parejas de elementos, se garantiza la igualdad entre las demás parejas de elementos correspondientes. En el caso del teorema de Pitágoras, la condición para la obtener la igualdad entre las áreas de los cuadrados, es que los catetos estén en ángulo recto.

3. Consideraciones Metodológicas

Desde la TSME se considera que el saber es una construcción social que se significa y resignifica en un tiempo y espacio; para estudiarlo se debe explorar desde la mirada de quien lo construye, quien lo usa, quien lo aprende, desde la perspectiva histórica, cultural e institucional (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Con esto en mente nos proponemos un análisis de contenido sobre las obras antes mencionadas, por ser una tendencia que proporciona y considera aspectos que concuerdan con nuestra postura teórica y que además nos permite un análisis de la obra con consideraciones socioculturales alrededor de su construcción y difusión.

Buscamos por tanto la confrontación entre las proposiciones del libro primero de los *Elementos* con las proposiciones homólogas del texto escolar *Geometría Plana*. De ese diálogo entre obras y de la historia situada, podremos elaborar conclusiones acerca de prácticas asociadas al conocimiento geométrico en su respectivo contexto; aspectos que permanecen invariantes a pesar de la diferencia de épocas y otros que se modifican dada la diferencia de racionalidades.

El saber es conocimiento puesto en uso; es conocimiento que se significa mediante el uso, Cantoral (2013; 2016). En este sentido, la noción de uso se vuelve un aspecto de suma importancia dentro de la TSME y en nuestro estudio retomamos dicha noción. Nos interesamos entonces, por estudiar dentro del contexto geométrico euclidiano el uso que se da a ciertas nociones geométricas, la forma en que se emplean, para qué se emplean, que significados están asociados a ellas.

Entonces, nos preocupamos por el estudio del contenido de las obras, con consideraciones del contexto en donde se desarrollan. Optamos entonces por un análisis de contenido con consideraciones contextuales basadas principalmente en la evolución histórico-epistemológica alrededor de las obras, con la lente desde los principios de la TSME.

Por otro lado, en el análisis nos interesamos por los usos y significados asociados a las nociones geométricas y las prácticas asociadas; la forma en la que opera la *comparación* y el *estudio del cambio* en las proposiciones seleccionadas, por lo que tratamos de responder las interrogantes del tipo qué, cómo y para qué hacen (Buendía, 2012) los autores lo que hacen en las obras a analizar. Acompañamos estas interrogantes con otras del tipo: cómo funciona está comparación, qué se requiere para comparar, con qué finalidad se compara. ¿Tiene esta comparación el mismo sentido de la comparación del pensamiento y lenguaje variacional? o ¿tiene un sentido diferente? Con este tipo de interrogantes nos adentramos en el análisis. Por ello, describimos a continuación aspectos generales del análisis de contenido y posteriormente, lo que proponemos como nuestro análisis de contenido cualitativo con énfasis en lo funcional de la matemática involucrada.

3.1. El análisis de contenido

El análisis de contenido es una "aproximación empírica de análisis metodológicamente controlado de textos dentro de sus contextos de comunicación, siguiendo reglas analíticas de contenido y modelos paso a paso" (Mayring, 2000, p. 2). En el mismo sentido, Bardin (1996) considera el análisis de contenido como:

> El conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones tendentes obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes permitiendo la inferencia de conocimientos

relativos a las condiciones de producción/recepción (contexto social) de estos mensajes (en Tinto, 2013, p. 141)

El autor enfatiza en la característica de reproducibilidad y validez de dichas inferencias y además la profundidad de estas; pues recomienda que deben ir más allá de lo explícito del contenido.

En el mismo orden de ideas, López (2002) alude al análisis de contenido como una técnica que se constituye en "un instrumento de respuesta a esa curiosidad natural del hombre por descubrir la estructura interna de la información" (p. 173). Adelante agrega el mismo autor que "toda comunicación, es decir, todo transporte de información y/o significación de un emisor a un receptor, controlado o no por aquel, debería poder ser descrito y descifrado por las técnicas de análisis de contenido" (p. 174; citando a Bardin, 1986). Por otra parte, también alude a que la importancia del análisis de contenido no radica en las descripciones sino en las inferencias, en lo que estos podrán enseñarnos alrededor de otras cosas.

El análisis de contenido es visto también como una técnica de interpretación de textos con un contenido que al leerse –una lectura científica, instrumento de recogida de información– e interpretarse adecuadamente nos devela conocimientos de aspectos variados y de fenómenos sociales (Andréu, 2000). Esta técnica permite denotar el contenido manifiesto y contenido latente de los datos. Organizarlos en conjuntos para llegar a la regla que justifique la agrupación o integrarlos a interpretaciones que permitan establecer relaciones e inferencias entre los mismos y la teoría previa (Cáceres,2003). En este estudio pretendemos que estas relaciones e inferencias giren en torno a lo funcional, más que lo estructural; es decir, interesa como se entrelazan las ideas matemáticas en una proposición y entre proposiciones mismas. En cuanto a las fases para realizar un análisis de contenido, de manera general, Tinto (2013) describe ocho fases:

Primera fase: objetivos e hipótesis de la investigación.

Segunda fase: Identificación del material objeto de estudio.

Tercera fase: Definición temporal del estudio y de la unidad de análisis.

Cuarta fase: Definición de las categorías de contenido a analizar.

Quinta fase: Sistema de codificación para evaluar las unidades de análisis.

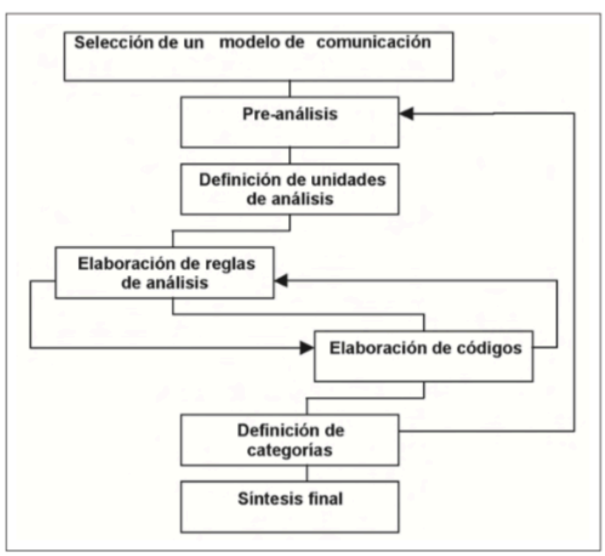
Sexta fase: Codificación de la información en las unidades de análisis.

Séptima fase: Inferencias y análisis de los datos.

Octava fase: Presentación e interpretación de los resultados.

Por otro lado, Cáceres proporciona el bosquejo del procedimiento general de la técnica de análisis de contenido cualitativo, basado en el modelo propuesto por Mayring (2000).

Figura 3.1. Procedimiento general del análisis de contenido



Fuente: Cáceres (2003, p. 58)

Al mismo respecto, Andréu (2000) propone que todo proyecto de investigación que utilice el análisis de contenido debe incluir los siguientes pasos:

1.- Determinar el objeto o tema de análisis.

2.- Determinar las reglas de codificación.

3.- Determinar el sistema de categorías.

4.- Comprobar la fiabilidad del sistema de codificación-categorización.

5.- Inferencias.

Cuyo primer paso, la determinación del objeto de análisis está dada por el problema de investigación; donde se delimita una dirección, un evento, situación, hecho, comportamiento; a la vez que el tiempo, espacio, individuos y el contexto donde se va a investigar.

El segundo paso, la determinación del sistema de codificación alude a transformación sistemática de los datos en unidades en las que se pueda describir de manera precisa las características del contenido. Un primer indicativo para la codificación puede ser la presencia o ausencia de elementos en el texto; un segundo indicativo es el orden referente al orden de aparecimiento de elementos en el texto; como otro indicativo, la presencia simultánea en un momento dado, de dos o más unidades de registro en diferentes niveles de códigos o de contextos, lo que lleva a la asociación entre diferentes niveles de código.

En el tercer paso, plantea el aislamiento y clasificación como parte de la organización de dichos contenidos. Recomienda seguir un criterio de categorización único, siendo exhaustivas, mutuamente excluyentes, significativas, claras y replicables. Como cuarto paso, menciona la confiablidad del sistema de codificación. Finalmente, en cuanto a la inferencia menciona que es en definitiva deducir lo que hay en el texto.

Además, Andréu (2000) plantea al menos cuatro pasos fundamentales para el análisis de contenido cualitativo: Esquema teórico, tipo de muestra, sistema de códigos y control de calidad.

En cuanto al muestreo Andréu aclara que el investigador se debe colocar en la situación donde tenga mayor posibilidad de obtener la información relevante para la teoría buscada. Este puede tener dos modalidades: una opinática, con base en criterios personales –conocimiento, facilidad, voluntariedad–; y una teórica, donde se colecciona, codifica y analiza datos y decide que datos coleccionar con una teoría de partida.

Hablando de los sistemas de códigos alude a que existen diversidad de maneras de categorizar los datos para resumirlos y analizarlos. Contempla tres tipos de categorías: las comunes –conocidas en el cotidiano–, las especiales –utilizadas por grupos sociales específicos– y las teóricas –que surgen del análisis sistemático de los datos–. Posteriormente hace mención de las formas básicas de codificación: la inductiva, donde los elementos relevantes emergen del documento, de un acercamiento sistemático; la deductiva, donde se recurre a la teoría para aplicar elementos centrales; y la mixta, que combina las mencionadas anteriormente.

Respecto al control de calidad, el autor posteriormente menciona que se realiza mediante la "comprobación de que se ha localizado, al menos tentativamente, el núcleo neurálgico y central del fenómeno que se quiere estudiar" (p. 26). Agrega además en líneas posteriores que se trata de alcanzar resultados susceptibles a la reproducibilidad.

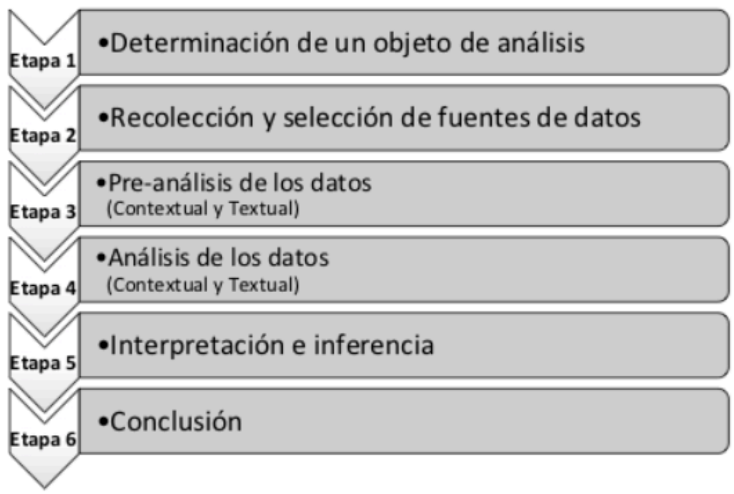
Dado esto, apuntamos hacia un análisis de contenido cualitativo con énfasis matemático, buscando develar lo que hay detrás de las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* –un texto donde se compilan y organizan de manera axiomática los conocimientos matemáticos alrededor del año 300 a. n. e.–. Por lo que, siguiendo el esquema de análisis de contenido cualitativo, desde la postura de la TSME proponemos una estrategia de *análisis de contenido cualitativo con énfasis matemático*, que se centre en el estudio de la matemática involucrada en el contenido en tanto un análisis funcional, más que estructural. Se seguirá el mismo procedimiento del análisis de contenido cualitativo, enfatizando en la funcionalidad de la matemática involucrada en fase del análisis textual, las categorías y las inferencias.

En nuestro caso planteamos un procedimiento que combine tanto algunas de las etapas sugeridas por Tinto (2013) como las etapas del procedimiento general para el análisis de contenido dado en Cáceres (2003); además de elementos que consideremos pertinentes para nuestro estudio en particular.

3.2. Análisis de contenido cualitativo con énfasis matemático

Para nuestro análisis de contenido de corte cualitativo con énfasis en lo matemático, consideramos también la propuesta de esquema metodológico para estudios histórico-epistemológicos desde la TSME por Cruz-Márquez (2018)

Figura 3.2. Esquema metodológico para estudios histórico-epistemológicos



Fuente: Cruz-Márquez (2018, p. 200)

Como primer paso, Cáceres (2003) propone la selección de un *modelo de comunicación;* que en Tinto (2013) corresponde a la *identificación del material de estudio*, y en Cruz-Márquez (2018) a las dos primeras etapas. Esta selección la realizamos desde nuestra postura teórica y siguiendo nuestros objetivos de investigación respecto de las obras seleccionadas. Nos interesa, en este caso rescatar aspectos relativos a la forma de razonar del productor de la comunicación ubicado en su respectiva época. Como antes hemos mencionado, estas obras son seleccionadas con base en los intereses particulares del estudio.

3.2.1. Pre-análisis

Cáceres (2003) citando a Bardin (1996) menciona que el *pre-análisis* implica tres objetivos: "recolectar los documentos o corpus de contenidos, formular guías al trabajo de análisis y establecer indicadores que den cuenta de temas presentes en el material analizado" –con criterios de flexibilidad–. Tinto (2013) hace alusión a esta parte del análisis de contenido como la *definición temporal del estudio y de la unidad de análisis*. Para este fin, seleccionamos la obra de los *Elementos* de Euclides, ya que consideramos que es la primera obra escrita de gran influencia en el pensamiento matemático, donde se agrupan un conjunto de enunciados elementales de Geometría. Para ello, nos dimos a la tarea de obtener diferentes versiones –algunas comentadas–, para contrastar. Por otro lado, en cuanto al texto escolar, optamos por *Geometría Plana* de Wentworth y Smith, por ser un texto muy utilizado en el siglo pasado y aún en la actualidad, pues aparece como parte de la bibliografía de por ejemplo, la Licenciatura en la enseñanza de las Matemáticas de universidades de México, como ser la Universidad Autónoma de Baja California y la Universidad Autónoma de Yucatán.

De los *Elementos* de Euclides analizamos el Libro Primero, considerando que en dicha sección de la obra podemos encontrar aspectos esenciales, relativos a los usos y significados de nociones geométricas involucradas. Para el caso del texto escolar escogemos las proposiciones homólogas a las del Libro Primero de los *Elementos* –en caso de existir–. Para facilitar esta tarea, primeramente, se colocan las proposiciones respectivas a cada obra par a par, describiendo de manera general el procedimiento seguido en cada obra, las semejanzas y diferencias en los procedimientos y la forma de ver las prácticas asociadas a dichos procedimientos. Respondiendo a preguntas orientadoras: ¿qué hacen?, ¿cómo lo hacen?, ¿para que lo hacen?, ¿cómo argumentan lo que hacen?, ¿qué nociones usan?, ¿cómo las usan?, ¿para qué las usan?, ¿cuáles son los significados asociados a esas nociones?

3.2.2. Unidades de análisis

La definición de las unidades de análisis consiste en la selección de trozos de contenido sobre los cuales se comienza el análisis (Aigeneren, 2009; Andréu, 2000; Cáceres, 2003). En nuestro caso, estas unidades serán cada una de las proposiciones del primer libro de los *Elementos*, en conjunto con sus homólogas del texto escolar. Lo anterior debido al contraste que pretendemos realizar entre dos obras pertenecientes a racionalidades diferentes.

3.2.3. Reglas de análisis y códigos de clasificación

Las reglas de análisis indican las condiciones para categorizar y codificar el conjunto de datos analizados; debido al carácter cualitativo de la investigación estas reglas deben ser flexibles y abiertas a modificaciones (Aigeneren, 2008; Cáceres, 2003; Mayring, 2000). Consiste principalmente en la separación del contenido, con base en la unidad de análisis, agrupando las que guarden alguna relación.

Para nuestro caso de estudio, en los *Elementos* encontramos primeros principios, al igual que en el texto escolar Geometría Plana –estos son las definiciones, postulados y nociones comunes–. Adelante, están las proposiciones: teoremas –enunciados susceptibles a ser demostrados mediante argumentación– y problemas de construcción –peticiones de construcción que posteriormente se deben demostrar–. Dentro de estas proposiciones existen diferentes formas de demostración: directa o indirecta –por Reducción al Absurdo–. Podemos también agruparlas por conjuntos de proposiciones que persiguen un objetivo particular. Dentro estos grupos encontramos: las referentes a la congruencia de triángulos, la igualdad de áreas, perpendicularidad, linealidad y paralelismo.

De los *Elementos* consideramos como unidades de análisis cada proposición del Libro Primero; mientras que del texto escolar seleccionamos las proposiciones homólogas a estas –en caso de existir–. Primeramente, se describen los procedimientos realizados en cada obra, las semejanzas y diferencias en dichos procedimientos; se identifica el método de demostración. Seguidamente, las nociones geométricas que se usan, la forma en que se usan, que significado se atribuyen a estas nociones con base en su uso en las proposiciones. Posteriormente, se relata para qué se usa cada proposición y con base en ello se agrupan en las diferentes categorías emergentes. Todo lo anterior responde a preguntas orientadoras, como: ¿qué hacen?, ¿cómo lo hacen?, ¿para qué lo hacen?, ¿cómo argumentan lo que hacen?, ¿qué nociones usan?, ¿cómo las usan?, ¿para qué las usan?, ¿cuáles son los significados asociados a esas nociones?

3.2.4. El desarrollo de categorías

En este punto se deben ordenar y clasificar definitivamente el contenido, como menciona Cáceres (2003) y Mayring (2000) referenciando a Krippendorff (1980, p.76) "cómo son definidas las categorías... es un arte". Estas categorías emergen de los datos, del contenido de los registros de comunicación seleccionados. Además, estas categorías deben ser homogéneas, exhaustivas, exclusivas, objetivas y adecuadas o pertinentes (López, 2002); por lo que, en nuestro caso de estudio buscaremos preservar estas recomendaciones con la mayor fidelidad posible.

Para el caso del análisis de contenido cualitativo en donde no solamente se busca inferir sobre el contenido manifiesto sino sobre el contenido latente y el contexto social donde se desarrolla el mensaje, Andréu (2000) plantea primeramente el desarrollo de dos tipos de categorías: las inductivas y las deductivas; las primeras por el interés de desarrollar categorías lo más cercanas posibles al mensaje; las segundas, se desarrollan a partir de la teoría.

Las proposiciones elegidas para ejemplificar la forma en la que opera la *comparación* son en primera instancia tomadas de las categorías inductivas emergentes del análisis general del libro primero, donde encontramos: la construcción de iguales, la igualdad de triángulos, la perpendicularidad, la linealidad, las desigualdades en triángulos, el paralelismo y la igualdad de áreas.

3.2.5. Interpretación y conclusiones

Este apartado será presentado en la fase de resultados, en él se describirán las inferencias producto del análisis con base en las unidades de análisis y las categorías de análisis desarrolladas en el apartado anterior. Se incluirá la descripción de los resultados obtenidos del análisis de las categorías con base en el uso de las nociones geométricas intervinientes en cada una de ellas.

4. Análisis

4.1. Sobre el contexto de los *Elementos*

Una obra original puede ser considerada como una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual más global (Espinoza, 2009, p.165). Para nuestro estudio optamos por los *Elementos* de Euclides, específicamente el Libro Primero, como una obra histórica de las más influyentes tanto en las matemáticas como en su enseñanza. Nuestra elección por el Libro Primero de los *Elementos* se basa en la creencia o hipótesis de que en las primeras proposiciones podemos encontrar esas esencias de lo geométrico euclidiano, prácticas, usos y significados, por las cuales estamos interesados.

Nos adentraremos en un estudio a profundidad, procurando un análisis textual, acompañado de la componente contextual que dará voz al entorno en el cual se desarrolla la obra. Como bien menciona Espinoza (2009), la variable sociocultural incide significativamente en la construcción del conocimiento.

En cuanto a las dimensiones del saber, primeramente, el análisis de las obras, nos dará cuenta de la dimensión epistemológica y cognitiva; además de la dimensión didáctica; ya que, como confluyen algunos historiadores y comentaristas; y como se deja entrever en su desarrollo, la obra tiene en cierto sentido una finalidad didáctica; pues está orientada a la enseñanza de la Geometría. Por otro lado, el contexto también nos dará cuenta de la dimensión epistemológica y sociocultural del conocimiento en cuestión.

Para el análisis contextual de los *Elementos* de Euclides, estudiamos algunas obras históricas de la Matemática, interesados primordialmente por la Geometría, (Boyer, 1986; Chace, Manning y Archibald, 1927; Gow, 1884; Heath, 1921; Seidemberg, 1962; Struik, 1980; Thomas, 1951;) además de algunos comentarios a estas obras (Proclo, 1970). También dimos lectura a algunos artículos de investigación y demás fuentes que consideramos pertinentes y que nos aportan elementos en cuanto a las circunstancias alrededor de las obras. Con este análisis daremos cuenta de las dimensiones del saber, guiándonos por los principios de la TSME (Cantoral, 2013; 2016; Montiel, 2005; Reyes-Gasperini, 2016): el relativismo epistemológico y la racionalidad contextualizada.

4.1.1. Sobre los orígenes de la Geometría

Son diversas las opiniones en cuanto al origen de la Geometría se refiere. Si bien es cierto, existieron grandes civilizaciones en desarrollo durante el periodo de historia de la antigüedad –la egipcia, la mesopotámica, la hindú, la china, por ejemplo– el uso y desarrollo de la Geometría pudo haber tenido diferentes formas de emerger, utilizarse y desarrollarse, dentro de cada cultura o probablemente previo a la conformación de estas civilizaciones, mediante la interacción del hombre con su entorno. Esto lo vemos plasmado en estas comunidades, con la utilización de algunas partes del cuerpo como unidades de medida de longitud. A partir de ello, podemos pensar que hubo un desarrollo previo de la Geometría aludiendo a su utilidad en la diversidad de monumentales construcciones arquitectónicas monumentales, como las pirámides en Egipto y Mesoamérica, las construcciones babilónicas –zigurats–, los templos en la cultura hindú, las construcciones chinas. También lo podemos ver reflejado en otras representaciones artísticas como la orfebrería y artes pictóricas.

Hablando acerca de la génesis de los conocimientos geométricos, los inicios de esta rama de la matemática pudieron haber sido cualesquiera, ya que como afirma Boyer (1986) "los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura" (p. 24).

Al mismo respecto retomamos un párrafo de Struik (1980) donde plasma su posición en cuanto a la evolución de la Geometría y Aritmética como ciencia

> la matemática oriental se originó como ciencia práctica con el objeto de facilitar el computo del calendario, la administración de la cosecha, la organización de las obras públicas y la recaudación de impuestos. Naturalmente que el énfasis inicial fue sobre la aritmética práctica y la medición. Sin embargo, una ciencia cultivada por siglos por un gremio especial, cuya tarea no es solamente aplicarla sino también enseñar sus secretos, desarrolló tendencias hacia la abstracción. Gradualmente llegaría a ser estudiada por su propia razón… La medición se desarrolló dentro de los principios –pero no más– de una geometría teórica (p. 27).

El autor alude previamente a la razón social del surgimiento de estas ciencias, antecedido por el establecimiento de comunidades que se fueron expandiendo, necesitando de mecanismos de abastecimiento de necesidades básicas como agua permanente, construcciones, almacenamiento de granos, los impuestos mismos para la clase dominante o necesidades derivadas de su sedentarismo alrededor de ríos. Lo que lleva a la necesidad de resolver problemas prácticos; conocimientos que luego se convierten en el saber de una comunidad, con la necesidad de transmitirse a generaciones venideras, evolucionando de cierta manera. Es así como el conocimiento derivado de la percepción del entorno, la construcción y la medición se vuelve un conocimiento cada vez más abstracto –en el sentido de estudiarse por si misma–, una Geometría teórica.

Los primeros registros que se tienen datan de hace unos seis milenios, a eso de los 4,000 años (a. n. e.) con las tablillas mesopotámicas. Lo que nos lleva a referirnos a estas civilizaciones, que tuvieron desarrollo alrededor de esta época. Cualquiera que haya sido el origen de la Geometría, para los fines de nuestro estudio sobre los *Elementos* prestaremos particular atención a la cultura griega y las posibles conexiones de esta con otras civilizaciones. Dicha cultura se vio beneficiada por diferentes circunstancias que a nuestros ojos abrieron paso al desarrollo de la ciencia en general y a la matemática en particular.

Dentro de estas circunstancias que favorecieron el florecimiento de los griegos en la ciencia en general, Heath (1921) hace referencia al hecho que, desde los textos antiguos como la *Odisea* se hace notar el interés de los griegos por viajar a otras tierras y por aprender de la sabiduría de los demás. Otro aspecto relevante fue la ubicación geográfica de Grecia, que por su cercanía les posibilitó acceder a las grandes civilizaciones de la antigüedad antes mencionadas. Hecho que, a nuestro parecer, es motivo por el cual se suele atribuir a esta cultura el origen de algunas ciencias; pues es común que cada vez que se habla respecto de alguna ciencia, por lo general nos referimos a la cultura griega, por su dedicación y grandes logros alcanzados. Otra de las circunstancias mencionas por el historiador, es la capacidad de observación precisa de los griegos, evidenciada por ejemplo en los tratados de Demócrito y Aristóteles.

También cabe resaltar que la estructura política en la antigua Grecia representó una oportunidad para el desarrollo de la ciencia y por ende de la matemática, ya que no contaban con una clase sacerdotal, posibilitando una forma de razonar con base en principios racionales sólidos. Si recordamos en las culturas egipcia y mesopotámicas, existía una clase sacerdotal que regía la forma de actuar de los ciudadanos. Este hecho permite hacer alusión a un origen religioso del amor al conocimiento en el antiguo Egipto, esto debido al tiempo de ocio de este estrato social; pues tenían el tiempo suficiente para dedicarse de lleno a estudios rudimentariamente científicos, como la astronomía y la agrimensura.

Heath (1921) siguiendo las palabras de Aristóteles, menciona que el desarrollo de la ciencia es precedido por desarrollo de las artes, ya que las artes se iniciaron a partir de la experiencia, las primeras como respuesta a las necesidades diarias y después a comodidades; posteriormente del establecimiento de las artes surgen las ciencias, hecho posible solamente donde había un grupo de individuos con tiempo libre para dedicarse a tales faenas. Aludiendo una vez más al origen de las ciencias matemáticas dentro de la cultura egipcia, específicamente.

Como antes se ha mencionado, el hecho de que los pensadores griegos tuvieran la posibilidad de viajar y estudiar con esta clase religiosa en estas grandes civilizaciones, donde pudieron aprender su sabiduría en diversas materias fue una de las grandes oportunidades para su apogeo en la ciencia. Al respecto, se conoce de los viajes de algunos matemáticos griegos por las culturas potámicas, principalmente por la cultura establecida alrededor del Nilo, ejemplo de ello: los viajes de Tales de Mileto, uno de los siete sabios, entre otros: Solón, Pitágoras, Platón y Demócrito, mencionados en escritos de comentaristas griegos (Heath, 1921).

Algunos personajes relevantes en la cultura griega confluyen en que el origen de la Geometría se dio en el antiguo Egipto. Entre ellos por ejemplo Heródoto, referenciado en Heath (1921) habla acerca de la distribución de la tierra en parcelas rectangulares para el cobro de impuestos anuales, en tiempos de Ramsés II alrededor de año 1300 (a. n. e.); historias similares son descritas por Herón, Diodoro y Estrabón. Al mismo respecto, encontramos también en un pasaje del *Fedro* de Platón, mencionando que Sócrates había escuchado que el dios egipcio Teuth, había inventado la aritmética, la ciencia del cálculo, la geometría y la astronomía. Aristóteles también se refiere a Egipto como el punto de inicio de la Geometría, no por la necesidad de medir la tierra, sino más bien, como antes se he descrito, debido a la existencia de los sacerdotes, una clase social con el tiempo suficiente para dedicarse a la Geometría.

Aunque, hay referencia de los tensadores de cuerdas en Egipto hacia el 2300 (a. n. e.), esta al parecer no es una técnica solamente dominada por los egipcios, pues en otras culturas también hubo grandes construcciones (Heath, 1921). Se sabe de la necesidad de utilizar esta práctica especialmente en las esquinas de las rectangulares construcciones, donde se requiere el trazado de ángulos rectos. Se conoce también sobre el uso de las cuerdas divididas en tres longitudes, correspondientes a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo –la primera terna pitagórica 3, 4, 5– en la construcción de los altares y templos de culturas como la hindú. Evidencia de ello se encuentra en los textos geométricos sobre el uso de las cuerdas, los *Sulbasutras*. Dada la necesidad de estas prácticas en la construcción podemos apuntar a que otras culturas también conocían al respecto; por ejemplo, los chinos, aztecas, mayas; culturas totalmente separadas y que dejaron dentro de su legado construcciones monumentales. Por lo tanto, es muy probable que se haya requerido conocer alrededor de técnicas de construcción donde se ponga en juego la perpendicularidad.

4.1.2. La Geometría en Egipto

Con base en la evidencia mostrada en algunos escritos egipcios que prevalecen hasta estos días, podemos estudiar la Matemática que manejaban. Contamos para ello con algunos papiros egipcios: el de Ahmes –o de Rhind– y el de Moscú. El primero de estos, según Chace, Manning y Archibald (1927) data de alrededor de los 1650 (a. n. e.), aunque otros autores como Boyer (1986) y Heath (1921) los fechan como de 1800 (a. n. e.). Este documento contiene una nota de su escritor Ahmes, donde menciona que dicho papiro es semejante a escritos antiguos de la época de Amenemhet III, gobernador egipcio quien según la cronología de Breasted (1911) reinó Egipto de 1849 a 1801 (a. n. e.).

El Papiro de Rhind

Para conocer un poco alrededor de la Geometría trabajada en el antiguo Egipto con nos centraremos en el estudio de Chace, Manning y Archibald (1927) sobre el papiro de Rhind.

En el mencionado documento se encuentra una diversidad de problemas, principalmente aritméticos y geométricos, que en opinión de Boyer (1986) estos últimos son parte de una aritmética aplicada. En lo referente a la Geometría descrita en este papiro, de manera general, se utilizan medidas de capacidad –especialmente para medida de capacidad para los graneros–, medidas de longitud y área para los campos y la construcción de pirámides. Se proporcionan casos de problemas sobre el cálculo de áreas de rectángulos, triángulos y círculos; sobre el cálculo de volúmenes de cilindros y prismas.

Del *problema 41 al 43*, tratan sobre el cálculo de volúmenes de graneros cilíndricos. En el primero de estos se describe un procedimiento para encontrar el volumen del cilindro de diámetro 9 unidades, primero se calcula el área de la base, igualando el cuadrado con lado 8 unidades, en vez de nuestro producto entre la cuarta parte del diámetro y π. De donde resulta que el área de círculo de diámetro 9 es aproximadamente igual al área de cuadrado de lado 8. El resultado queda expresado en codos cúbicos, por lo que después el autor realiza las conversiones para dar el resultado en *hekat*, su unidad de medida para volúmenes.

En el *problema 44*, se describe el método para el cálculo del volumen de un granero rectangular –que en realidad es cúbico, porque todas las medidas de sus aristas son 10 unidades–. En este caso, se multiplican las tres magnitudes y luego se hacen las conversiones a su unidad de medida para volúmenes. Dicho procedimiento encaja completamente con nuestra fórmula para el cálculo de volúmenes de prismas rectangulares.

El siguiente problema, el *45* es exactamente el opuesto al anterior, pues dada la capacidad del granero se pide encontrar la magnitud del lado. Vemos desde esta época un ejemplo de la reversibilidad de pensamiento.

Los *problemas del 48 al 56* tratan sobre el cálculo de áreas. En el *problema 48* se compara el área de un círculo de diámetro 9 unidades y su cuadrado circunscrito, dando como resultado 64 unidades cuadradas para el círculo y 81 unidades cuadradas para el cuadrado. En el *problema 49* se proporciona el procedimiento para el cálculo del área de un rectángulo de tierra con dimensiones 10 por uno; dando como procedimiento el producto de las magnitudes de sus lados. En el siguiente, especifica el cálculo del área de un campo circular de diámetro 9, reafirmando el razonamiento utilizado en el primer problema antes descrito.

Para el *problema 51*, se muestra el procedimiento para encontrar el área de un triángulo con lado 10 unidades y base 4 unidades. Según Boyer (1986) se evidencia en dicho proceso, el producto mitad del producto de la altura por medida de la base. Al respecto, Chace, Manning y Archibald (1927) aclaran que se refiere a la altura y no al lado.

En el *problema 52* se encuentra el área de un triángulo truncado de tierra – es decir, un trapecio– con 20 unidades de lado –altura–, 6 de base –mayor– y 4 de línea truncada –base menor–; dicho problema se resuelve encontrando el producto de la semisuma de las bases por la altura del trapecio. Boyer (1986) menciona que en ambos casos el escritor egipcio se refiere a un triángulo y un trapecio isósceles, diciendo que acude a transformaciones de estos dos en rectángulos, que sería un inicio de la teoría de congruencia de figuras. Si es cierto que el escritor está considerando el lado como la altura, en ambos casos los procedimientos serían tal y como los conocemos en la actualidad, de lo contrario, Chace, Manning y Archibald (1927) aluden a que la medida de la base que considera el escritor egipcio es bastante pequeña, y habla de un triángulo isósceles, por lo que el procedimiento aunque no exacto, sería una buena aproximación, ya que la altura no tendría tanta diferencia con la medida del lado –y al hablar solamente de lado y no de otro, apoya la consideración de hablar de un triángulo isósceles, si ese fuera el caso– y lo mismo sucedería con el triángulo truncado. Heath (1921) nos habla sobre pensar acerca de estos detalles, ya que en las inscripciones del tempo de Horus en Edfu, que fue planeado hacia el 237 (a. n. e.) se refieren a la asignación de parcelas a los sacerdotes y de ellas se deduce que la fórmula que utilizaron para el área de un cuadrilátero es el producto de la semisuma de lados opuestos (p. 124); la cual no concuerda con lo que hoy conocemos. En los problemas siguientes sobre área, trata acerca de la medida de secciones de un triángulo y dada un área de cierta cantidad de campos, encontrar el área de uno de los campos.

En la siguiente sección de problemas se trabaja sobre las pirámides, en particular la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo, en este caso rectángulo; esto se debe al problema de mantener la misma pendiente en la inclinación de todas las caras de una pirámide –cuadrangular–. Ahmes deja el siguiente procedimiento: primero encuentra la mitad de la longitud del lado de la base y luego divide por la altura de la pirámide; de esta manera, lograron mantener igual la inclinación en toda y todas las caras de una pirámide. Para los problemas que siguen se pide encontrar la altura de una pirámide, dada la longitud de su base y la inclinación.

También existen otros papiros que proporcionan evidencia de los trabajos geométricos de los egipcios, como el papiro de Moscú que data alrededor de 1890 (a. n. e.) donde se presenta un problema acompañado de una figura que según Boyer (1986) representa el tronco de una pirámide cuadrangular y se pide calcular el volumen de esta.

Como se ha descrito en los párrafos anteriores, los trabajos de los egipcios en materia de Geometría son principalmente orientados a la solución de problemas aplicados a sus necesidades cotidianas.

Su Geometría con un sentido utilitario resolvía algunas de sus necesidades, que van desde la repartición y medición de la tierra, el cálculo de volúmenes para sus graneros, hasta problemas relacionados con la construcción de las pirámides. Además, como se ha discutido en las líneas anteriores, también se incluyen cuestiones de índole más teórico, como ser la aproximación del área del círculo de diámetro nueve a partir del cuadrado de lado ocho.

Por otro lados, ya se presentan los problemas agrupados por secciones, esto cuenta como el inicio de estructuración de proposiciones; sin embargo hay cierta peculiaridad en el orden de presentación: primero los alusivos a volúmenes de graneros –cilíndricos y rectangulares–, luego los referentes a áreas, en un inicio con la comparación del círculo y el cuadrado, seguido del área del rectángulo, triángulos y trapecios; posteriormente se presentan los que refieren a las relaciones en la construcción de pirámides. En los primeros casos dejan entrever con cierta sutileza, la importancia del círculo, pues comienza con volúmenes de cilindros, en la segunda sección con el área del círculo y el cuadrado, aunque sin un orden lógico al parecer, por la utilización de este último en el primer problema geométrico.

Se han descrito algunos problemas prácticos que dan cuenta de la Geometría de los egipcios alrededor del segundo milenio antes de nuestra era; probablemente tuvieron posteriores desarrollos en el intervalo de tiempo hasta donde se cuenta como los inicios de la geometría en Grecia marcado por las aportaciones de Tales de Mileto.

Pasamos ahora con los estudios geométricos de otra de las grandes civilizaciones antiguas, con las que se cuenta que los griegos tuvieron alguna interacción.

4.1.3. La Geometría en Mesopotamia

Con todo lo mencionado en la sección anterior acerca del trabajo de los egipcios y las diferentes citas ofrecidas por matemáticos helénicos, en una acertada opinión que proporciona Gow (1884) en las palabras de los griegos deberían también dar importancia a la matemática babilónica. Uno de los primeros encuentros con la matemática mesopotámica es el conocimiento que tenían acerca de sus unidades de medida, tanto para longitudes y áreas como para volúmenes.

A lo largo de la extensa historia de los pueblos mesopotámicos, una de las principales invenciones es esta cultura que habitó los valles entre los ríos Éufrates y Tigris es la escritura en forma cuneiforme mediante tablillas hechas en arcilla; vestigios que han llegado hasta nuestros tiempos y gracias a esto se conoce acerca de sus aportaciones en las Matemáticas. Las tablillas antes mencionadas datan cerca de 4,000 (a. n. e.) donde se evidencia principalmente la destreza algebraica de esta cultura. En ese sentido, Struik (1980) resalta el carácter algebraico de la Geometría babilónica, ligada a fórmulas de áreas y volúmenes de figuras rectilíneas simples.

Según Archibald (1949) los Babilonios usaron los siguientes resultados en casos concretos:

El área de un rectángulo es el producto de las longitudes de dos de sus lados adyacentes.

El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de las longitudes de sus catetos.

Los lados catetos correspondientes de dos triángulos rectángulos semejantes son proporcionales.

El área de un trapecio con un lado perpendicular a los lados paralelos es la mitad del producto de esa perpendicular y la suma de las longitudes de los lados paralelos

La perpendicular desde el vértice de un triángulo isósceles a la base, biseca la base. El área del triángulo es el producto de la longitud de la altura y la mitad de la base.

El teorema de Pitágoras, para triángulos con lados correspondientes a los números 12, 16, 20.

El ángulo en un semicírculo es un ángulo recto.

La longitud del diámetro de un círculo es una tercera parte de su circunferencia (pi igual a tres). El área de un círculo es una doceava parte del cuadrado de su circunferencia.

El volumen de un paralelepípedo rectangular es el producto de las longitudes de sus tres dimensiones y el volumen de un prisma recto con una base trapezoidal es igual al área de la base por la altura de prisma.

El volumen de un cilindro circular recto es igual al área de la base por su altura.

El volumen de un trono de cono o de una pirámide cuadrada es igual a la altura multiplicada por la mitad de la suma de las áreas de las bases. Es posible que contaran también con una formula exacta para el volumen de una pirámide cuadrada:

$$V = h\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$$

Donde a y b son las longitudes de los lados de las bases cuadradas. Esto fue conocido por Herón de Alejandría y reducida por la extraordinaria formula aparentemente conocida por los egipcios. (p. 6)

Dentro de ese bagaje de conocimientos que pueden ser atribuidos a la civilización en cuestión, en la tablilla P322 se puede evidenciar el sexto de los enunciados anteriormente presentados; dicha tablilla está escrita en Babilonio antiguo, alrededor de los 1900 y 1600 (a. n. e.). Según la interpretación de Neugebauer y Sachs (1986) trata sobre triángulos pitagóricos, es decir triángulos rectángulos cuyos lados son enteros.

En cuanto a los demás problemas geométricos, en una tablilla se presenta un dibujo de un cuadrado de lado 30 con sus diagonales; en la parte superior de la diagonal aparece el número en sexagesimal que es aproximadamente la raíz de dos y en la parte posterior el valor del producto del lado por la raíz de dos. Para explicar la forma en que los Babilonios encontraron el valor de $\sqrt{2}$ en este problema, Neugebauer y Sachs (1986) sugieren la aproximación alterna por la media aritmética y armónica de aproximaciones previamente encontradas.

En otro problema relativo al área de un trapecio, dadas las bases y la altura. Al realizar el procedimiento el resultado encaja con nuestra forma de calcularlo, es decir, el producto de la altura por la semisuma de las bases. Así, también se encuentran problemas referentes a encontrar el área de círculos con la aproximación de $\pi \approx 3$ y entonces el área seria aproximadamente la doceava parte del cuadrado el diámetro. Posteriormente se muestran problemas alusivos a trapecios divididos por algunas rectas, en unos casos por una paralela a las bases la cual biseca el trapecio. Otros con rectas paralelas a uno de los lados no paralelos de trapecio. Así mismo, en otras tablillas se encuentran problemas similares con triángulos.

Con todo lo detallado anteriormente, se evidencia un desarrollo interesante en cuanto a la Geometría en Mesopotamia, se pueden rescatar resultados tan llamativos como los realizados en la cultura egipcia; en ambos casos a cargo de la clase religiosa. Sin embargo, se hace notoria la diferencia en cuanto lo que resolvían dichos problemas, pues, en las tablillas solamente se consideran los datos numéricos en los problemas, dejando a un lado el contexto. Por otro lado, también dejan a la vista su destreza con los cálculos numéricos con el manejo de la base sexagesimal.

4.1.4. Discusión

Hemos mostrado en las paginas anteriores la forma de hacer Geometría por parte de dos grandes culturas de la antigüedad; hemos podido contemplar a que estaba dedicada esta rama del conocimiento, lo que resolvía, su empleo, su funcionalidad. Por una parte, los egipcios atienden a problemas de construcción y almacenamiento de granos, dejándonos entrever el establecimiento de sus propias unidades de medida y la equivalencia entre estas. Por el otro, la cultura mesopotámica en general, siempre resolviendo problemas prácticos, construye una matemática principalmente algebraica, recordemos que en estas comunidades estaba la interacción de diversas culturas, dedicados principalmente al intercambio de mercancías. Esto llevó a tener una matemática de carácter más algebraico y orientada a los cálculos, apoyado también en la invención de una escritura que facilitaba este hecho. Sus conocimientos geométricos, por lo tanto, estaban más orientados al cálculo, tanto en cuestiones de astronomía, como áreas de figuras y volúmenes de sólidos.

En este sentido resaltamos la opinión de Struik (1980), "en ninguna parte de toda la antigua matemática oriental encontramos algún intento de lo que llamamos una demostración. Ninguna argumentación era expuesta, sino únicamente la prescripción de ciertas reglas: hacer así, hacer aquello" (p. 42). Esto nos lleva a reflexionar sobre la Geometría que hoy encontramos en la escuela. En los primeros grados es de carácter aritmético, se habla sobre las figuras, sus propiedades y luego se pasa al cálculo de áreas y volúmenes. Por otra parte, la otra tendencia es el carácter demostrativo mediante una axiomática deductiva que se pretende desarrollar en grados posteriores. Estas prácticas habituales en la escuela puede ser una tendencia heredada de la Geometría mostrada previamente en estas culturas de la antigüedad.

4.1.5. La Geometría en Grecia

Fueron diversos los aspectos que propiciaron el florecimiento de la cultura griega en la ciencia en general y en la Geometría como tal. Factores de corte social influenciaron la racionalidad, el quehacer y la forma de hacer en esta cultura. Struik (1980) nos menciona, por ejemplo, el reemplazo del Bronce por el Hierro, que además del cambio en el aspecto de las armas militares, posibilitó una mayor inclusión de la población en el comercio y el surgimiento de nuevas urbes libres de injerencia política monárquica, ni religión impuesta, con un tipo diferente de hombre, quien disponía de ocio; estimulando el desarrollo del racionalismo y la perspectiva científica.

Con Tales comienza la Geometría en la Grecia antigua, además de sus aportes en otras ciencias como la Filosofía y otras ramas de las Matemáticas se cuenta en las leyendas, historias y comentarios que tuvo influencia egipcia o cierta interacción con esta cultura. Dentro de sus aportes a la Geometría, tenemos los famosos teoremas que llevan su nombre.

Luego de Tales, en la escuela jónica se sigue con los trabajos de Anaxímenes y se continúa con Anaximandro. Seguidamente, los pitagóricos con sus trabajos principalmente en la Aritmética, dónde el número es la base del cosmos. Posteriormente con los grandes pensadores Sócrates, Platón, Aristóteles, quienes proporcionan sus aportes principalmente en el ámbito filosófico y su concepción acerca del entendimiento de las cosas, aportando también los sólidos platónicos que representan cada uno de los elementos de la naturaleza y la esfera como símbolo de la perfección; pensamiento cuya influencia se ve directamente reflejada en los *Elementos* de Euclides, ya que en el libro décimo tercero se concluye con la inscripción de estos sólidos en la esfera, dejando entrever la relación que guardan sus lados con el diámetro de esta.

4.2. Sobre el contexto del texto escolar

Además de los señalamientos anteriores sobre el contexto de los *Elementos*, estamos también interesados por su difusión institucional y la forma en como han vivido estos conocimientos en la escuela mediante el discurso Matemático Escolar (Cantoral, 2013; Reyes-Gasperini, 2016; Soto, 2010). Esto, con el fin de matizar o contrastar la forma de presentar y desarrollar los conocimientos geométricos, tanto en una época particular de la historia, como en la enseñanza contemporánea.

Para cumplir con tal fin nos dedicaremos a una confrontación entre los *Elementos* de Euclides y el texto escolar *Geometría Plana* de Wentworth & Smith –contrastando también sus diferentes versiones 1899, 1913; la edición mexicana de 1979 y de 2001– . En primera, por ser un texto muy utilizado en la enseñanza de la Geometría durante las décadas pasadas, tanto en los Estados Unidos como en otros países. Como remarca Leach (2017):

> "El último libro de texto de Smith antes de la Primera Guerra Mundial fue una serie de colaboraciones con George Wentworth sobre aritmética, álgebra, geometría y matemáticas vocacionales. Esta elección de coautor es intrigante: Wentworth fue un autor de libros de texto popular a finales del siglo XIX y reconocido en 1890 como uno de los libros de texto de matemáticas más ampliamente utilizados en Estados Unidos, simbolizando lo mejor de la educación matemática en la generación inmediatamente anterior a Smith. La colaboración entre los dos autores es evidencia del deseo de Smith de avanzar en la enseñanza de matemáticas preservando al mismo tiempo continuidad histórica" (p. 23) [traducción propia]

En opinión de Clark (2016) "La edición de 1913 de la ampliamente utilizada Geometría Plana y del Espacio por G. Wentworth y D. E. Smith aún se adhirió al enfoque más suave de Euclides y no intentó incorporar el sistema Hilbertiano" (p. 8) [traducción propia].

Del mismo modo, se puede ver evidenciado en las referencias bibliográficas de los planes de estudio para la carrera de Matemáticas o Enseñanza de las Matemáticas de algunas universidades mexicanas, como es el caso de la Universidad Autónoma de Baja California y la Universidad Autónoma de Yucatán, en la Licenciatura en enseñanza de las Matemáticas.

En segunda instancia, al revisar algunos textos de Geometría bastante utilizados en la actualidad, observamos que hay muy pocas referencias, por ejemplo, en libro en mención no incluye referencias bibliográficas, como algunos otros a los que pudimos acceder como Geometría Plana y del Espacio de Baldor (2004) y Geometría de la serie Matemática Moderna de Moise and Downs (1966).

Los conocimientos geométricos básicos como ser las construcciones con regla y compás, la congruencia y la semejanza se han considerado como conocimientos elementales, creemos que por esta razón no se incluyen referencias bibliográficas en los libros mencionados anteriormente; o tal vez por la época en que fueron escritas las obras. Por lo mismo, creemos que el texto escolar en mención es bastante representativo en cuanto a la enseñanza de la Geometría. Otra de las cuestiones interesantes alrededor de este texto es que es muy cercano a la obra de Euclides en cuanto a su forma y métodos de demostración. Puesto que las primeras ediciones son alrededor de los 1890, anterior a los intentos de formalización de Hilbert y de posteriores; como evidencia de ello, aún demuestra los teoremas de congruencia por superposición de segmentos.

En el caso del texto de Moise and Downs, este es muy utilizado en los espacios pedagógicos en la formación de matemáticos y profesores de matemáticas en algunos países, como es el caso de México, Costa Rica y Honduras. Según palabras de los autores del texto, los postulados del texto están basados en o son modificaciones de los postulados de Birkhoff (1884, 1944), matemático estadounidense posterior a Hilbert –quien hace un primer intento de axiomatizar la geometría–. Birkhoff propone una axiomatización diferente a la de Hilbert; como se puede observar en el texto de Moise and Downs (1972), su axiomatización parte de la teoría de la medida, principalmente de segmentos y ángulos. Asocia desde un inicio los segmentos y los ángulos con los números reales y sus propiedades –más cercano a una teoría de conjuntos–.

4.3. Análisis Textual

4.3.1. Descripción general de los primeros seis libros de los *Elementos*

Previo a la centración en el primer libro de la conocida obra de Euclides, consideramos pertinente una descripción *grosso modo* de los primeros seis libros. Esto por que creemos que cada uno tiene como objetivo finalizar con una proposición particular.

El Libro Primero culmina con la demostración del teorema de Pitágoras y su recíproco, resultado ampliamente conocido por los geómetras previos a Euclides, pero como menciona Proclo (1970) en su comentario al libro primero, es una demostración auténtica de Euclides.

Aunque posteriormente se proponga la construcción de un cuadrado igual a una figura rectilínea dada, podemos decir que el Libro Segundo concluye con la extensión del teorema de Pitágoras para triángulos que no son rectángulos: los obtusángulos y acutángulos–. Para ello, desarrolla a lo largo del libro, la relación entre las áreas comprendidas por rectas, que se asemeja de alguna manera a la aplicación de áreas que ya se ha presentado en la P44 del Libro Primero con la aplicación a un segmento de un paralelogramo en un ángulo dado.

La conclusión del Libro Tercero –sobre círculos y líneas en él– es igualmente una relación entre áreas definidas por una tangente y una secante a un círculo, que viene continuar con la misma idea que el teorema de Pitágoras, establecer una relación de igualdad entre áreas.

Para el caso del Libro Cuarto, trata la inscripción de polígonos regulares en el círculo, partiendo de la definición de inscripción y circunscripción. Comienza por la inscripción de triángulos, pasando por los cuadrados, pentágonos y hexágonos; y concluyendo con la inscripción de un pentadecágono regular.

En el quinto libro establece la teoría de las proporciones entre magnitudes homogéneas (Puertas, 1991, p. 182). Concluye en la proposición 25, tomando cuatro magnitudes proporcionales y estableciendo la relación de desigualdad entre la suma de la magnitud mayor y menor con la suma de las dos restantes.

Para el Libro Sexto establece la semejanza entre figuras, aludiendo a la igualdad de ángulos uno a uno y la proporcionalidad entre lados correspondientes. Concluye en la proposición 31 con la extensión del teorema de Pitágoras, seguida la P32 referente a triángulos con bases alineadas y la P33 sobre la proporcionalidad entre ángulos centrales o inscritos y las circunferencias –arcos– que comprenden dichos ángulos.

Se observa que estos primeros libros tratan sobre temáticas o intereses específicos y culminan con algunas proposiciones particulares que engloban en gran medida el empleo de las proposiciones previas. Para demostrarlas se requiere el uso de nociones y herramientas geométricas más elementales, construidas previamente. Veamos un poco más a profundidad el Libro Primero de los *Elementos*, sobre el cual centramos nuestro estudio.

4.3.2. El libro primero de los *Elementos*

En los libros descritos anteriormente Euclides presta particular interés a la igualdad –en la actualidad, congruencia o equivalencia– entre nociones geométricas: líneas, ángulos, figuras, áreas.

Las proposiciones que adelante se describen son retomadas de Puertas (1991), y de Çamorano (1576) y las figuras tomadas de tanto de Çamorano (1576), como de Fitzpatrick (2008) en el caso de los *Elementos* de Euclides. En cuanto a las proposiciones del texto escolar, son retomadas considerando varias ediciones de Wentworth y Smith (1913; 1989; 2001).

El Libro Primero se inicia con la construcción de segmentos iguales a otros dados, esto para argumentar relaciones de igualdad en proposiciones posteriores. Por ejemplo, el triángulo equilátero que se construye en la proposición 1 –en adelante para referirnos a las proposiciones de los *Elementos*, solamente escribiremos la letra "P" seguida del número de la proposición– permite obtener segmentos iguales; triángulo del cual posteriormente se usa la congruencia entre sus lados para encontrar segmentos congruentes que posibilitaran el establecimiento de la congruencia de triángulos, por ejemplo.

Proposición en los Elementos
P1 Prob. 1
Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

Sea AB la recta finita dada.

Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero.

Descríbase con centro en A y la distancia AB el círculo BCD (Post. 3) y con centro en B y a la distancia BA descríbase otro círculo ACE (Post. 3) y a partir del punto C donde las circunferencias se cortan, trácese las rectas CA y CB hasta los puntos A y B (Post. 1).

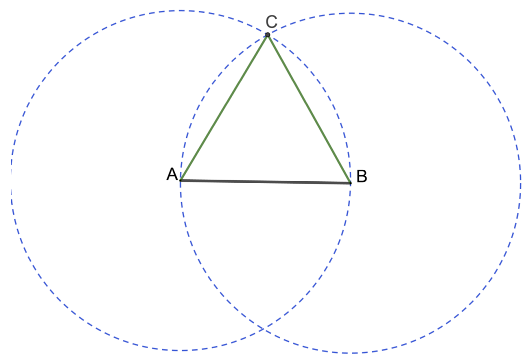


Figura 4.1. Triángulo equilátero

Y porque A es el centro del círculo CBD, AC será igual a AB (D15), puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo CAE, BC es igual que AB (D15); luego CA y CB son iguales a AB; las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí (NC1); por lo tanto, CA es también igual a CB; luego las tres CA, AB y BC son iguales entre sí.

Por consiguiente, el triángulo ABC es equilátero y ha sido construido sobre la recta finita dada AB. Que es lo que había que hacer.

En esta primera proposición se hace uso de la circunferencia para obtener segmentos iguales, esto por la propiedad de la circunferencia que permite la delimitación de una infinidad de segmentos congruentes a los que ahora llamamos radios. Y que Euclides asocia con la propiedad: todas las rectas que caen sobre ella desde un punto dentro de ella son iguales entre sí. Una vez construidas las circunferencias, traza los segmentos AC y BC, formando el triángulo ABC.

Dada la construcción anterior, se sigue la argumentación del por qué el triángulo que construido es equilátero. Para ello se toman primero dos de los segmentos –a saber, AC y AB– y se comparan; como ambos son radios de la misma circunferencia, entonces son iguales. Seguidamente se toman otros dos segmentos –esta vez BC y AB– se comparan y se concluye que son iguales, por ser también radios de una misma circunferencia. Ahora bien, falta establecer la relación entre los tres segmentos. En este punto, entra en juego la transitividad de la relación de igualdad, expresada términos de la noción común NC1: "cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí" (Puertas, 1991, p. 13). Como dos de los segmentos son igual a otro, entonces son iguales entre sí. De este modo se llega a la igualdad –congruencia– entre los tres segmentos.

Observemos ahora en el texto escolar la proposición homóloga a la construcción de un triángulo equilátero.

Proposición homóloga en el texto escolar
E.4. Construir un triángulo cuyos lados sean todos iguales. Sea AB la recta dada. Se trata de construir un triángulo cuyos lados sean iguales a AB. Haciendo con centro en A y en B, y con radio AB, arcos que se corten en C. Trácese las rectas AC y BC.

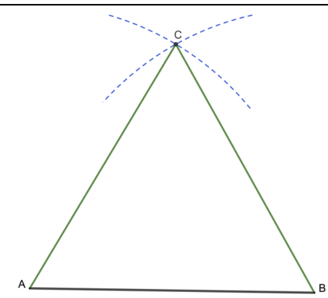


Figura 4.2. Triángulo equilátero II

El triángulo ABC es el pedido.

Como se observa en el texto escolar, se trazan arcos y no las circunferencias completas, además de que solamente se presenta el procedimiento de construcción de un triángulo equilátero, sin presentar las argumentaciones que validen la construcción realizada. Es importante recalcar que se hace mención explícitamente de la construcción de arcos mediante el uso del compás actual. Podemos decir entonces que, en el texto escolar, inicialmente se relega el proceso de argumentación en los problemas de construcción.

En esencia los procedimientos son similares, pues se hace uso de la circunferencia para obtener segmentos iguales. Sin embargo, en el texto escolar referido solamente se construyen los arcos "convenientes", lo que no permite observar claramente las circunferencias de las cuales si sabemos explícitamente que los radios son iguales.

Proposición en los *Elementos*

P2 Prob. 2

Hacer una línea recta igual a otra línea recta dada desde un punto dado. (Poner en un punto dado como extremo, una recta iguala a una recta dada, Puertas, 1991, p. 17).

Sea A el punto dado y BC la recta dada. Así pues, hay que poner en el punto A una recta igual a BC.

Trácese desde A hasta B la recta AB (Post. 1) y constrúyase sobre ella el triángulo equilátero ABD (P1) y sean AE, BH el resultado de prolongar en línea recta DA y DB (Post. 2); con centro en B y distancia BC descríbase el círculo CHF, y a su vez con centro en D y distancia DH, descríbase el círculo HKG (Post. 3).

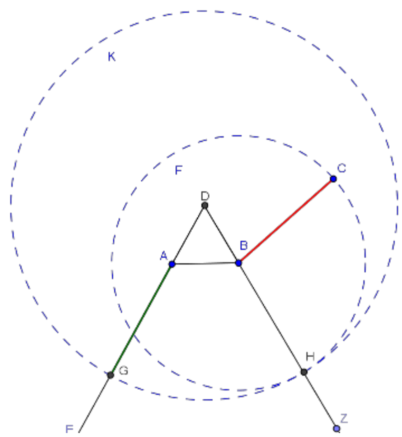


Figura 4.3. Segmentos iguales

Así pues, como el punto B es el centro del círculo CHF, BC es igual que BH. Como a su vez el punto D es el centro del círculo HKG, DG es igual que DH, cuyas partes respectivas DA y DB son iguales. Luego la parte restante AG es igual a la parte restante BH (NC3). Pero se ha demostrado también que BC es igual a BH; por lo tanto, cada una de las rectas AG, BH es igual a BC. Y las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí (NC1); luego AG es también igual a BC.

Por consiguiente, en el punto dado A se ha puesto la recta AG que es igual a la recta dada BC.

En el caso de la *P2,* se utiliza posteriormente para trazar un segmento congruente a otro dado en cualquier punto sobre el plano. En esta se vale el triángulo equilátero y circunferencias para obtener segmentos congruentes, de los cuales se sabe la relación de igualdad entre sus lados y radios, respectivamente. Se pone en juego lo que conocemos como propiedad aditiva, –enunciada en los *Elementos* como noción común–, al tener los "todos" iguales y las partes iguales, los restos también deben ser iguales. Que reconocemos como: conocida la relación de igualdad entre partes y todos, se establece la relación de igualdad entre las partes restantes.

Es interesante el uso del triángulo equilátero en este caso, pues nada más se necesita para obtener la congruencia de dos segmentos y no de tres; sin embargo, al utilizar el triángulo equilátero se simplifica el procedimiento. Explicaré este razonamiento, por ejemplo: si tenemos el segmento dado y el punto a donde queremos construir otro igual a este y unimos un extremo del segmento con el punto y trazamos la mediatriz –P10–, cualquier punto en dicha mediatriz permite la construcción deseada –el punto medio facilita aun más dicha construcción–. Pero, este enunciado se presenta hasta la décima proposición y se construye mediante el triángulo equilátero. Además, resaltamos que en la mediatriz se encuentra implícitamente la noción de triángulo isósceles, del cuál podemos considerar que el triángulo equilátero es un caso particular.

Para esta proposición no se encuentra una similar en el texto escolar debido a la diferencia entre las herramientas utilizadas; pues en la época correspondiente al texto escolar ya se utiliza escolarmente el compás como herramienta para trasladar distancias, mientras que Euclides construye un método basado en los primeros principios.

Aquí encontramos una diferencia entre ambas racionalidades, en los *Elementos* subyace una racionalidad platónica; las matemáticas debían depender lo menos posible del mundo material, de instrumentos. Su compás y su regla no graduada permitían construir una infinidad de segmentos congruentes –circunferencia– y trazar líneas rectas que se pueden extender hasta donde se desee, respectivamente. Mientras que en la enseñanza actual se impone una unidad de medida; el trazar segmentos congruentes, ya sea con regla o con compás depende de esa unidad de medida, donde la métrica decimal es un procedimiento impuesto; donde en muchas ocasiones no se profundiza en el significado de está práctica cotidiana del ser humano –refiriéndonos a *medir*–. No se reflexiona sobre la esencia de este tipo de construcciones que son la base de la Geometría Euclidiana.

Proposición en los *Elementos*

P3 Prob. 3

Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una recta igual a la menor.

Sean AB y C las dos rectas desiguales, sea AB la mayor de ellas.

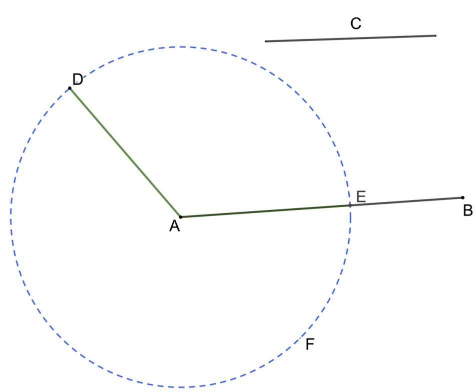


Figura 4.4. Segmentos iguales II

Así pues, hay que quitar de la mayor, AB una recta menor, C.

Colóquese sobre el punto A la recta AD igual a la recta C (P2) y con centro en A y distancia AD descríbase el círculo DEF (Post. 3), y como el punto A es el centro del círculo DEF, AE es igual a AD, pero también C es igual a AD; luego cada una de las rectas AE, C es igual a AD; de modo que también AE es igual a C (NC1).

Por consiguiente, dadas dos rectas desiguales: AB, C. Se ha quitado de la mayor, AB, la recta AE igual a la menor, C.

En la *P3* se presenta el procedimiento para, en cierta manera, cortar un segmento menor de otro mayor, sin importar la ubicación de ambos en el plano. Podemos contemplar dos casos de esta construcción: el primero, cuando los segmentos comparten un extremo, basta entonces, con trazar una circunferencia cuyo centro sea ese extremo común y la distancia igual que el segmento menor.

En el caso contrario, ya se cuenta con un método general para trazar un segmento congruente a otro en cualquier punto en el plano; de este modo se traza un segmento igual al segmento menor en un extremo del segmento mayor y luego se traza una circunferencia con ese radio. Se obtiene de esta manera un segmento igual a uno dado, sobre o en una recta.

En esta proposición se usa la circunferencia para obtener un segmento congruente a otro dado; la circunferencia permite establecer la relación de la igualdad a partir de la comparación del segmento inicial y el obtenido la final del procedimiento. Se construyen elementos auxiliares intermedios –segmentos iguales– que permiten la comparación entre el segmento inicial y el obtenido al final.

En este primer grupo de proposiciones que van desde la P1 a la P3 se sientan las bases para la construcción u obtención de segmentos congruentes, ya sea por medio de la circunferencia o del triángulo equilátero. Posteriormente esta construcción de segmentos iguales será necesaria para obtener la relación de igualdad entre otros elementos como ser ángulos y triángulos; esto mediante los criterios de congruencia u otras herramientas geométricas. Este grupo conforma una primera categoría: la construcción de segmentos iguales.

De la misma manera que en la proposición anterior, no se presenta una proposición similar en el caso del texto escolar, debido al uso del compás para construir segmentos iguales a uno dado en otros puntos del plano. Desde este primer grupo de proposiciones se destaca, la construcción de iguales –segmentos– para establecer la relación –igualdad– buscada entre elementos por medio de la comparación.

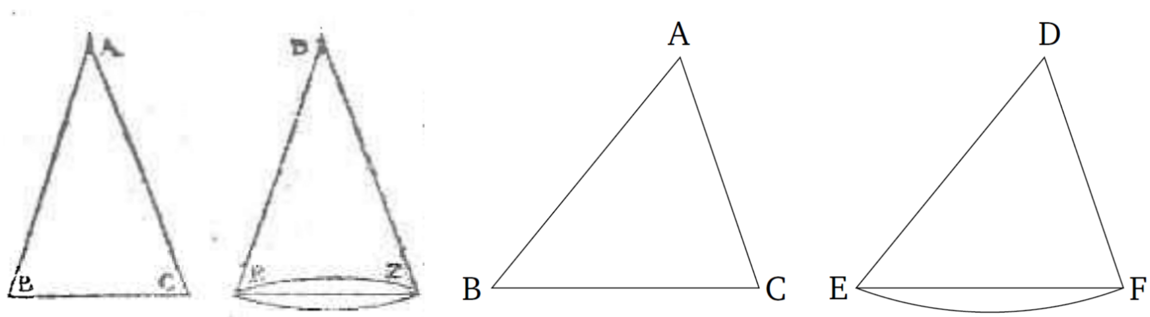
Proposición en los *Elementos*

P4 T1

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y el ángulo comprendido bajo rectas iguales, tendrán las bases iguales y el triángulo será igual al otro triángulo. Y los ángulos restantes, los subtendidos por lados iguales serán también iguales respectivamente.

Sean ABC y DEF dos triángulos que tienen dos lados AB y AC iguales a los dos lados DE y DF respectivamente… Y sea el ángulo BAC igual EDF.

Figura 4.5. Triángulos iguales



Fuente: Çamorano (1576) Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que la base BC es igual a la base DF y el triángulo ABC será igual al triángulo DEF. Entonces los ángulos subtendidos por lados iguales serán iguales respectivamente.

Por lo que aplicado ("sobrepuesto" en Çamorano, 1576) el triángulo ABC al triángulo DEF. Colocando el punto A sobre D y la recta AB sobre la recta DE, coincide también el punto B con el punto E, por ser igual AB con DE. Al coincidir AB con DE, coincidirá también AC con DF, por ser igual el ángulo BAC con EDF. De modo que también el punto C coincidirá con el F, al ser igual AC con DF.

También porque el punto C coincidirá con el F, la base BC coincidirá con la EF (cae). Porque si habiendo coincidido el punto B con el E y el punto C con el F, no coincide la base BC con la EF entonces dos rectas encerrarán superficie lo que es imposible. Por lo tanto, la base BC coincidirá con la base EF y serán iguales. Luego, todo el triángulo ABC coincidirá con el DEF y será igual a él y los ángulos restantes coincidirán con los restantes y serán iguales a ellos.
Por consiguiente, cuando dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y el ángulo comprendido bajo rectas iguales, tendrán las respectivas bases iguales y el triángulo será igual al otro triángulo. Y los ángulos restantes, los subtendidos por lados iguales serán también iguales respectivamente. Lo que había que demostrar

Para la *P4* se propone lo que conocemos en la actualidad como criterio de congruencia “Lado-Angulo-Lado, LAL”. En esta proposición se establece el mínimo de relaciones de igualdad entre elementos –lados o ángulos– correspondientes congruentes en dos triángulos, para establecer la relación de igualdad entre todos los demás elementos correspondientes de los triángulos. Dentro de esos elementos correspondientes se encuentra también el área –esta es la única proposición con la que se puede obtener la igualdad de áreas, las demás proposiciones referentes a la congruencia de triángulos solamente aseguran la igualdad entre elementos correspondientes–.

Al parecer, en la demostración de esta proposición se usa la idea aplicación o superposición de figuras; sin embargo, nos preguntaríamos: ¿para qué propone entonces las tres anteriores? Este hecho ha sido fuente de varias críticas alrededor de la historia, lo que lleva en libros de texto más actuales a instaurar como criterios de congruencia a las proposiciones referentes a la congruencia de triángulos, es decir, son considerados como postulados.

Previo a la descripción consideramos pertinente profundizar en algunas cuestiones relevantes en cuanto a la igualdad de cosas geométricas –segmentos, ángulos, figuras– o congruencia. Específicamente, una figura rectilínea esta compuesta por algunos elementos: los lados que son segmentos, los ángulos y la figura misma, que ahora llamamos superficie o área cuando nos referimos a la medida de esta. Para hablar de igualdad de dos figuras, una primera forma que se emplea en la obra euclidiana es la igualdad entre todos sus elementos y ello garantiza la igualdad de las figuras y del área.

Por otro lado, la igualdad de las áreas no garantiza que las figuras sean iguales –congruentes–, esto lo vemos en las proposiciones al final del primer libro. El caso del perímetro no aparece explícitamente en los *Elementos*, de hecho, se utilizaba la misma palabra para denominar a la circunferencia y al círculo; algo que también destacamos, dado que en las figuras rectilíneas no tenemos dos nombres diferentes para el borde y el interior.

Para hablar de igualdad de figuras se precisa entonces hablar de igualdad entre segmentos e igualdad entre ángulos. Pero, de qué manera se puede hablar de igualdad sin aludir a una métrica, pues esto es mediante comparaciones de estos elementos.

Cuando dos segmentos rectilíneos o rectas finitas son iguales –congruentes– se puede decir que coinciden el uno con el otro. Al coincidir, también coinciden los extremos de uno con los extremos del otro. Esta afirmación tiene una doble implicación, ya que podemos decir que, sí coinciden los extremos de dos segmentos rectilíneos, entonces los segmentos son iguales. Dicho de otra forma, si se tienen dos puntos, el segmento rectilíneo que los une, es único.

Para el caso de los ángulos, podemos determinar si son iguales si coinciden sus lados. De manera similar, es una doble implicación, ya que, si coinciden los lados de dos ángulos, estos son iguales. Otra manera de visualizar en la obra euclidiana la igualdad de ángulos se puede expresar de la siguiente manera: si se tienen dos parejas de segmentos iguales respectivamente y se forman dos ángulos con cada pareja de ellos, se pueden unir los extremos de los lados de los ángulos con un segmento –ese segmento subtiende al ángulo–. De esta manera, si ese segmento que subtiende un ángulo es igual con el que subtiende a otro, dada la igualdad de los lados del ángulo, entonces podemos decir que los ángulos serán iguales. Esto es estudiado posteriormente al inscribir ángulos en la circunferencia, dónde la igualdad de las circunferencias que subtienden –arcos– conlleva a la igualdad de los ángulos subtendidos.

Dadas las reflexiones anteriores acerca de la igualdad geométrica, veamos el procedimiento seguido en los *Elementos* para establecer la relación de igualdad entre dos triángulos.

Primero toma el lado AB del primer triángulo y construye un segmento igual a este en el lado ED del segundo triángulo, como son iguales entonces el extremo B estará en la misma posición que E. Luego, toma el lado AC y construye un segmento igual a este sobre EF, y como los ángulos BAC y EDF son dados iguales, coincidirá AC con EF y de igual manera el extremo C con el F. Finalmente, obtiene dos puntos B y C, que coinciden con los extremos E y F; por esa razón el tercer lado del primer triángulo debe coincidir con el tercer lado del segundo triángulo. De no ser así, los dos segmentos encerrarán superficie, lo que no es posible dada la NC10. Por lo tanto, coincidirá el tercer lado del primer triángulo con el tercer lado del segundo y por la NC7, las cosas que coinciden son iguales.

De modo que, al coincidir los lados del primer triángulo con los lados del segundo, los ángulos formados por lados iguales también coinciden, son iguales; de esta forma, todo el primer triángulo coincide con el segundo; entonces son iguales. De ahí la insistencia del geómetra helenístico, por concluir con la relación entre los terceros lados, dada la relación entre dos parejas de lados correspondientes.

Con lo descrito previamente, contemplamos el papel preponderante de la construcción de iguales; dado que, conocida la relación entre ciertos elementos, permite el establecimiento de la relación desconocida entre otros elementos por medio de la comparación.

En otro orden de ideas, centrándonos en los triángulos o cualquier otra figura, conocer un lado, es, en suma, tener un segmento dado, el cual delimita una única distancia –una circunferencia–. En ese mismo sentido, conocer el ángulo entre dos segmentos dados limita una dirección única del segundo segmento respecto del primero, es decir, la posición relativa entre los dos segmentos es única dado el ángulo entre ellos. Por lo que, en términos de construcción, en esta proposición se tienen dos segmentos que se deben unir con cierta abertura o inclinación por uno de sus extremos, restringiendo los otros extremos de los segmentos –restringiendo las posiciones de dichos puntos en el plano–. Por ello, el tercer lado que debe unir esos dos puntos tiene una distancia única, restringida por ellos. Al tomar el segundo grupo de elementos y hacer lo mismo, el tercer lado tendrá la misma distancia que el tercer lado del primer triángulo.

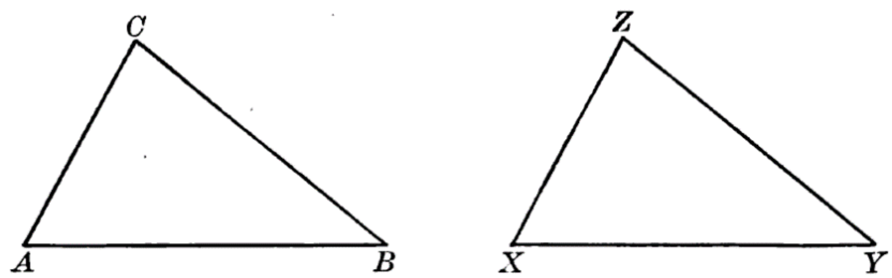
Proposición homóloga en el texto escolar

P2 Teorema

E. 68. Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo contenido de uno son iguales respectivamente a dos lados y el ángulo contenido del otro.

Probar que ABC es congruente con XYZ.

Figura 4.6. Triángulos congruentes



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Colóquese el triángulo ABC sobre el XYZ, de suerte que A caiga sobre X y AB sobre XY. N° 53, 5°

Entonces B caerá sobre Y, pues AB es igual que XY.

AC caerá a lo largo de XZ porque el ángulo A es igual que el X

Finalmente, C caerá sobre Z, porque AC es dado igual que XZ.

Por lo tanto, BC coincidirá con YZ. N° 53, 1°

Pues una línea recta y solo una puede ser trazado por dos puntos dados.

En consecuencia, los dos triángulos coinciden y son congruentes. LCDD

Para esta proposición se observa el procedimiento de demostración mediante la superposición de figuras. En el texto escolar se mueve el primer triángulo completo para colocarlo sobre el segundo triángulo de tal modo que coincida A caiga sobre X y AB coincida con XY, luego AC caerá sobre XZ y con ello C caerá también sobre Z; finalmente BC coincidirá con YZ.

En el caso de los *Elementos* el procedimiento realizado se hace con base en las proposiciones previas, ya que con ellas puede trazar segmentos iguales a uno dado en cualquier parte del plano. Partiendo de la igualdad de tres parejas de elementos particulares de dos triángulos, se compara los terceros lados de los triángulos, con lo que se llega al establecimiento de la relación de igualdad entre todos los elementos correspondientes de los triángulos.

En ambos casos, aunque con terminologías o ideas propias de cada obra, debido a la diferencia de épocas y de contextos, la prueba de la proposición conjuga la idea de *comparación*, en tanto segmentos con la misma longitud; lo que conlleva a que la posición entre sus extremos sea la misma. Destacamos entonces, que la comparación de tres elementos –en este caso dos lados y el ángulo comprendido– mediante la construcción de iguales en un caso y sobreponiéndolos en otro, permite establecer la relación entre los demás elementos correspondientes de los triángulos –lados, ángulos y áreas–. Posteriormente esta proposición será usada para la comparación de elementos; se tendrá entonces que comparar elemento a elemento, al tener los tres necesarios permitirá llegar a la congruencia de cualquiera de los demás elementos, alguno necesario para la petición explicitada en el enunciado.

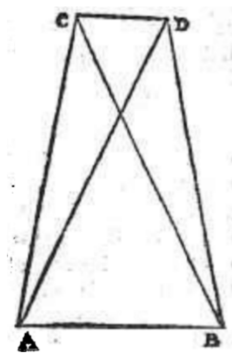
De manera similar, se estudian cada una de las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* en contraste con su similar del texto Geometría Plana, que por cuestiones de practicidad presentaremos en este capítulo nada más las proposiciones: P7, P8, P22, P24, P25 y P26, para ejemplificar la categoría de congruencia. Las demás serán agregadas en el apartado de anexos.

Proposición en los *Elementos*

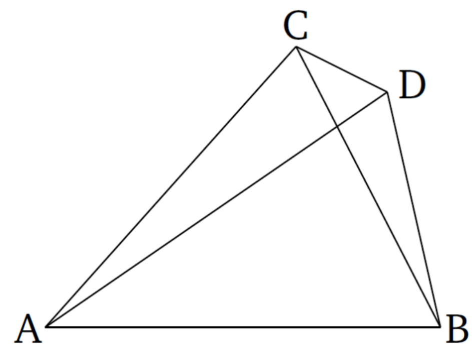
P7 T4

No se podrán levantar sobre una misma línea recta dos líneas rectas iguales respectivamente a otras dos rectas dadas, de modo que se encuentren en dos puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos que las rectas dadas.

Figura 4.7. Intersección única



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Si es posible hacerlo, constrúyanse sobre la misma recta AB, otras dos rectas AD y DB iguales respectivamente a dos rectas dadas AC, CB, que se encuentren en dos puntos diferentes C y D por el mismo lado y que tengan los mismo extremos, de modo que CA sea igual a DA y tenga el mismo extremo que ella: A, y CB sea igual a DB y tenga el mismo extremo que ella: B, y trácese CD.

Puesto que AC es igual a AD, también es igual el ángulo ACD al ángulo ADC (P5), por tanto, el ángulo ADC es mayor que el ángulo DCB; luego el ángulo CDB es mucho mayor que el ángulo DCB. Puesto que CB es a su vez igual a DB, también es igual el ángulo CDB al ángulo DCB. Pero también se ha demostrado que también es mucho mayor que él; lo cual es imposible.

Por consiguiente, no se podrán levantar sobre una misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas dadas de modo que se encuentren en dos puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos que las rectas dadas.

La *P7* es particular, ya que es utilizada solamente para demostrar la *P8* y trata sobre la imposibilidad de que dos segmentos iguales a otros dos, respectivamente, se encuentren en dos puntos distintos al levantarlos sobre los extremos de un segmento dado. Está proposición está íntimamente vinculada con la P8 y la P22; la primera relativa a la igualdad de los ángulos correspondientes de dos triángulos, dada la igualdad de los lados. La segunda es la construcción de un triángulo dados sus tres lados. Implícitamente, implica la unicidad de la intersección de dos circunferencias cada una construidas sobre un extremo de un segmento dado.

En el fondo lo que se hace en los *Elementos* es variar la posición de la intersección de los dos segmentos, lo que conlleva a la imposibilidad de que se encuentren en dos puntos. Esta proposición interesa para establecer la relación de igualdad entre dos triángulos dada la relación de igualdad entre sus tres parejas de lados correspondientes –Criterio Lado-Lado-Lado–. Plantea en cierta forma, la construcción dos segmentos sobre otros dos, los cuales son congruentes con ellos, no se podrán encontrar sino solamente en un punto. El punto de intersección de los dos segmentos corresponde al lugar geométrico de la intersección de dos circunferencias, es decir el punto pertenece a las dos circunferencias, se encuentra a una distancia invariante hacia un extremo y a otra distancia invariante del otro extremo. Lo que se desarrolla en la proposición es asumir que se podrán encontrar en otro punto, cercano o lejano a este, asumiendo entonces que el punto de intersección de esas circunferencias no es uno, sino dos. Lo anterior conlleva al establecimiento de una imposibilidad, por lo tanto, ese punto es único.

Como en algunos de los casos anteriores, en el texto escolar no hay una proposición similar a la P7, dado que es una estrategia bastante auténtica, lo que conocemos como un lema; previo al establecimiento de la proposición que corresponde a nuestro criterio de congruencia “LLL”.

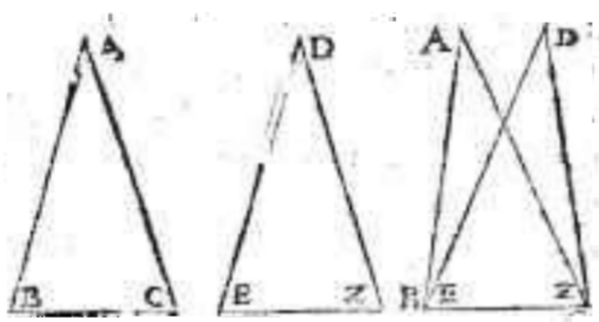
Proposición en los *Elementos*

P8 T5

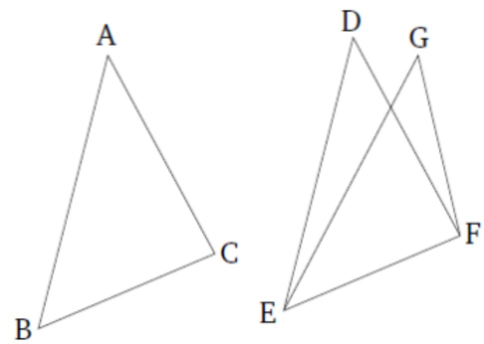
Si dos triángulos tienen dos lados del uno respectivamente iguales a dos lados del otro y tienen también iguales bases, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por lados iguales.

Sea ABC y DEF dos triángulos que tienen los dos lados AB y AC iguales respectivamente a DE y DF; y tengan también la base BC igual a la base EF.

Figura 4.8. Triángulos iguales II



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

El ángulo BAC es también igual al ángulo EDF.

Si se aplica el triángulo ABC al triángulo DEF y se pone el punto B sobre el punto E y la recta BC sobre la EF, coincidirá también el punto C con el punto F por ser igual BC a EF; y al coincidir BC con EF coincidirán también BA, CA con ED, DF. Pues si coincide la base BC con la EF y los lados BA, AC no coinciden con los lados ED, DF, sino que se desvían como EG, GF, podrán ser construidas sobre una misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas dadas que se encuentren en distintos puntos por el mismo lado y con los mismos extremos. Pero no pueden construirse (P7); por lo tanto, no es posible que, aplicada la base BC a la base EF, no coincidan los lados BA, AC con los lados ED, DF. Luego coincidirán; de modo que también el ángulo BAC coincidirá con el ángulo EDF y será igual a él.

Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro y tienen las bases respectivas iguales, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales.

Con la P7, se asegura que, en la P8, al tener dos triángulos con dos lados del uno respectivamente iguales a dos lados del otro y las bases –terceros lados– también iguales, entonces los ángulos comprendidos por los lados iguales serán iguales. Comienza aplicando el triángulo ABC al DEF de tal modo que el lado BC esté sobre el EF, con lo que coinciden sus extremos, B con E y C con F. Luego, los lados BA y CA deben también coincidir con los lados ED y FD respectivamente, sino sucede así, entonces BA y CA se encontrarán en otro punto G, lo que contradice la P7.

Se realiza la demostración de esta proposición por el método de aplicación con la utilización de la proposición previa, la cual asegura que esos dos segmentos –lados correspondientes– iguales se tendrán que encontrar en un único punto, formando un único triángulo. Finalmente, al coincidir los dos lados de los ángulos, a saber, BA con ED y CA con FD, los ángulos formados por ellos son iguales.

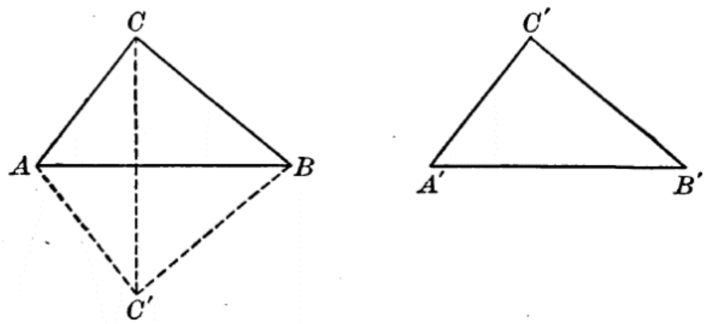
En la presente proposición se establece la relación de igualdad entre los ángulos que están formados por parejas de lados iguales coincidentes. Dadas las relaciones de igualdad conocidas entre las tres parejas de lados correspondientes de dos triángulos, entonces se establece la relación de igualdad de los ángulos comprendidos por parejas de lados iguales. Este resultado es inmediato de la proposición anterior, cuyo razonamiento radica en proponer otro punto –que puede ser muy cerca o no– de coincidencia entre los dos segmentos, lo que lleva a una imposibilidad. El realizar un cambio en la relación buscada, conlleva a una imposibilidad, por lo que la relación no debe ser otra, que la buscada.

Proposición homóloga en el texto escolar

P6 Teorema

80. Dos triángulos son congruentes si tres de los lados de uno son congruentes respectivamente con los tres lados del otro.

Figura 4.9. Triángulos congruentes II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sean ABC y A´B´C´ dos triángulos con AB igual que A´B´, AC igual que A´C´ y BC igual que B´C´.

Demostrar que el triángulo ABC es congruente con A´B´C´.

Sean AB y A´B´ los lados mayores de los triángulos. Voltéese el triángulo A´B´C´ y colóquese de modo que A´B´ coincida con su igual AB.

El vértice C´ caerá abajo del lado AB, como se ve, y por tanto el $\Delta A'B'C'$ quedará en la posición ABC´.

Trácese CC´.

Ahora bien, AC = AC´ y BC = BC´ Por hipót.

$\therefore \angle ACC' = \angle CC'A$ y $\angle C'CB = \angle BC'C$. N° 74.

$\therefore \angle ACC' + \angle C'CB = \angle CC'A + \angle BC'C$. N° 52, 1°

O lo que es lo mismo,

$\angle ACB = \angle BC'A$ N° 52, 8°

$\therefore \Delta ABC = \Delta ABC'$ N° 68

$\therefore \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (el triángulo A´B´C´ es el ABC´ en otra posición) LCDD

Mediante la superposición de figuras en el texto de Wentworth y Smith se realiza un procedimiento similar al empleado en el teorema sobre el triángulo isósceles, pues la superposición del triángulo es de manera distinta, ya que no se sobreponen correspondientemente la totalidad los elementos. Se inicia dejando caer uno de los lados A´B´ sobre AB, luego los demás caen al lado opuesto del segmento AB; lo que lleva a la congruencia de parejas de ángulos usando para ello el triángulo isósceles, dado que se tiene la congruencia de dos de los lados de un triángulo. Posteriormente a la congruencia de los triángulos por el criterio LAL.

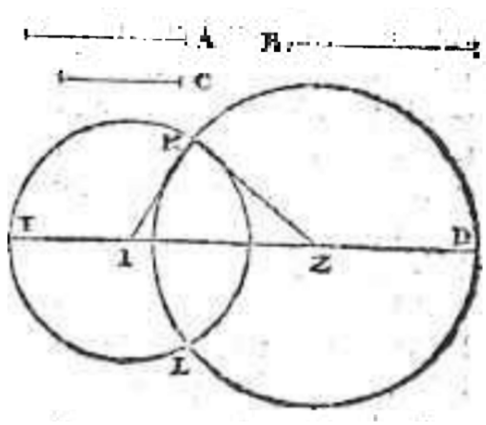
Por un lado, Euclides construye una proposición previa que le permite concluir con la imposibilidad de que dos parejas de segmentos respectivamente congruentes se puedan unir por los extremos de un mismo segmento de manera que se encuentren en puntos diferentes. Con ello demuestra la P8, mediante la construcción de un triángulo auxiliar. Por su parte, en el texto escolar se hace uso de la superposición igualmente de un segmento para dejar caer los lados restantes, no sobre los correspondientes, sino en lados opuestos del mencionado segmento. El procedimiento presentado en los *Elementos* concluye con la igualdad del ángulo, mientras que en el de Geometría Plana, se llega hasta la congruencia de los triángulos. Aunque a partir de la igualdad de la pareja de ángulos se puede establecer la igualdad de los triángulos mediante la *P4*.

Proposición en los *Elementos*
P22 P8
Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos (de las) rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que la restante.

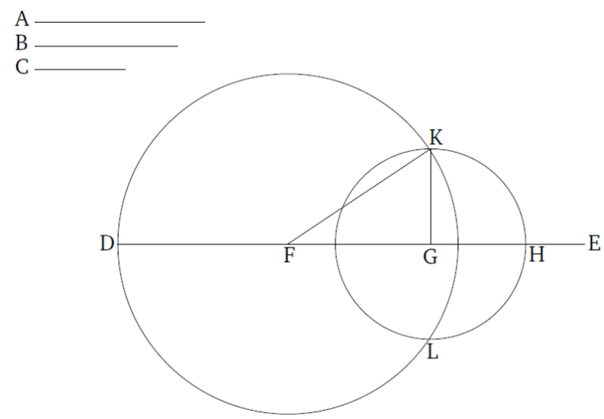
Sean A, B, C, las tres rectas dadas, y dos de estas, tomadas de cualquier manera, sean mayores que la restante: A, B mayores que C; A, C mayores que B; y además B, C mayores que A.

Así pues, hay que construir un triángulo con rectas iguales a las A, B, C.

Figura 4.10. Construcción de un triángulo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Póngase una recta DE, limitada por D e ilimitada en dirección de E, y hágase DF igual a A, y FG igual a B y GH igual a C (P3); y con el centro F y distancia FD descríbase el círculo DKL; asimismo, con el centro G y la distancia GH descríbase el círculo KLH, y trácense KF, KG.

Digo que se ha construido el triángulo KFG con tres rectas iguales a A, B, C.

Pues como el punto F es el centro del círculo DKL, FD es igual a FK; pero FD es igual a A, entonces KF es igual a A. Y como el punto G es el centro del círculo LKH, GH es igual a GK: pero GH es igual a C; entonces KG es también igual a C. Pero también FG es igual a B; luego las tres rectas KF, FG, GK, son iguales a las tres rectas A, B, C.

Por consiguiente, se ha construido el triángulo KFG con las tres rectas KF, FG y GK que son iguales a las tres rectas dadas, A, B, C.

Previo a la construcción de un triángulo cuyos lados sean iguales a tres rectas dadas, se establecen relaciones entre líneas, esto es, la perpendicularidad, la linealidad; y las desigualdades entre elementos de un triángulo.

En la P22 –el octavo problema– se plante la construcción de un triángulo dado sus lados, se comienza construyendo los segmentos DF, FG y GH iguales a los segmentos dados, sobre una misma recta, DE. Luego se trazan dos circunferencias, una con centro en F y con distancia –radio– igual a DF y otra con centro en G con la distancia correspondiente al tercer lado dado. La intersección de esas dos circunferencias es el tercer vértice del triángulo, los otros son los puntos F y G. De manera general, primero se construyen los segmentos sobre una misma recta y luego se trazan las circunferencias, lo que garantiza construir segmentos iguales en posiciones requeridas.

Esta proposición inicia construyendo tres segmentos iguales a los dados, sobre una misma recta, esto posible mediante las *P2* y *P3*, lo cual consideramos no es estrictamente necesario, lo relevante de este hecho es construir dos segmentos sobre los extremos del otro. Con el empleo de las circunferencias se posibilita delimitar una infinidad de segmentos iguales a unos dados, en otras palabras, esto permite construir un segmento igual al dado, en una infinidad de posiciones diferentes, de las cuales las únicas que cumplen lo requerido es la intersección de las dos circunferencias, posición que es la buscada.

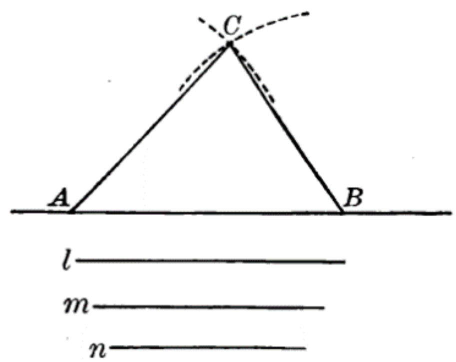
En el proceso de argumentación, se recurre a la comparación de los lados del triángulo construido con los segmentos dados al inicio y las circunferencias mediante las cuales fue construido permite este enlace.

Vemos en esta proposición el invariante ya mencionado en la mayoría de los casos anteriores, se construyen iguales que posibiliten la construcción deseada y posteriormente la argumentación de esta mediante la comparación que permiten las construcciones auxiliares realizadas.

Proposición homóloga en el texto escolar

E1.5 Construir un triángulo que tenga sus lados igual respectivamente a tres líneas dadas.

Figura 4.11. Construcción de un triángulo II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Dadas las tres rectas l, m y n

¿Qué se requiere?

Sobre una línea trazar con el compás un segmento AB igual a l.

Con A como centro y m como radio trazar un círculo; con B como centro y n como radio trazar otro círculo. Dibujar AC y BC. Entonces ABC es el triángulo requerido.

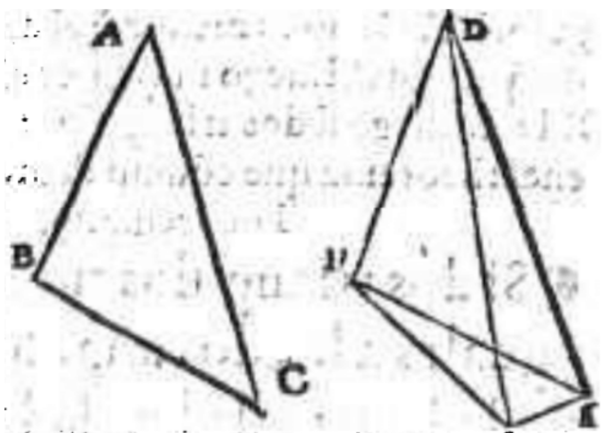
Por su parte en el texto escolar, al contar con un compás que se puede mantener fijo, se arrastran los segmentos para construir los círculos con radios iguales a los segmentos dados. En esencia es el mismo procedimiento, con la salvedad que no se trazan los segmentos alineados; además de que se trazan arcos y no las circunferencias completas, elementos que permiten la comparación entre los segmentos, para establecer la relación entre los lados del triángulo construido y los segmentos dados. Aunque no se presentan las argumentaciones de la construcción realizada, en procedimiento es el mismo, cada uno con las herramientas propias.

Proposición en los *Elementos*

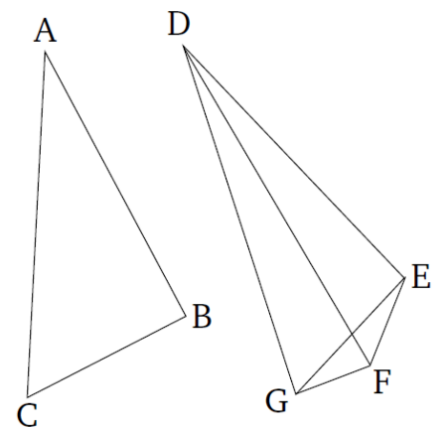
P24 T15

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero uno tiene el ángulo comprendido por rectas iguales mayor que el otro, también tendrá la base mayor que la otra.

Figura 4.12. Lados congruentes y ángulo mayor, lado mayor I



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Sea ABC, DEF dos triángulos que tienen los dos lados AB, AC, iguales a los dos lados DE, DF, respectivamente: AB a DE y AC a DZ, pero el ángulo correspondiente a A sea mayor que el ángulo correspondiente a D.

Digo que la base BC también es mayor que la base EF. Pues como el ángulo BAC es mayor que el ángulo EDF, constrúyase en la recta DE y en su punto D el ángulo EDG igual al ángulo BAC (P23), y hágase DG igual a una de las dos rectas AC, DF, y trácense EG, FG.

Como AB es igual a DE, y AC a DG, las dos rectas BA, AC son iguales respectivamente a las dos rectas ED, DG; y el ángulo BAC es igual al ángulo EDH;

por tanto, la base BC es igual a la base EG (P4). Asimismo, como DF es igual a DG, el ángulo DGF es también igual al ángulo DFG (P5); por tanto, el ángulo DFG es mayor que el ángulo EGF; entonces el ángulo EFG es mucho mayor que el ángulo EGF. Y dado que EFG es un triángulo que tiene el ángulo EFG mayor que el ángulo EGF y al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor (P9), entonces el lado EG es también mayor que el lado EF. Pero EG es igual a BC; por tanto, BC es mayor que EF.

Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero tienen uno de los ángulos comprendidos por las rectas iguales mayor que el otro, también tendrán la base mayor que la otra.

La P24 trata el caso en el cual se tienen dos triángulos, con dos parejas de lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido por los lados del primer triángulo mayor que el ángulo comprendido por los lados del segundo triángulo, para concluir que el tercer lado del primero será también mayor que el tercer lado del segundo.

Se comienza construyendo en el segundo triángulo un ángulo igual al conformado por los lados del primer triángulo. Con ello se tienen dos parejas de lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido igual, se obtienen triángulos iguales y con ello los terceros lados BC y EG son iguales. Se continúa prestando atención a los ángulos auxiliares dado que se formó el triángulo isósceles DFG, de donde se obtiene una igualdad de ángulos, DFG con DGF. Se sigue comparando los ángulos, DGF con el EGF, llegando a una desigualdad, dado que el segundo es parte del primero. Con esa desigualdad y dada la igualdad entre DFG con DGF, se tiene la desigualdad entre DFG y EGF. A su vez como DFG es parte del EFG. Por lo tanto, es mucho mayor entre EFG que EGF. Cada uno de los cuales se opone a los lados de los cuales se requiere saber su relación.

Al final se compara el ángulo EGF con el EFG, dado que son los ángulos que se oponen a los lados que se requiere relacionar; pero, también es mayor que el otro ángulo FEG. Al usar la *P19*, se deja entrever la generalidad de esta, dado que solamente dice al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor, esto para cualquier pareja de ángulos en el triángulo, no solamente el mayor de todos.

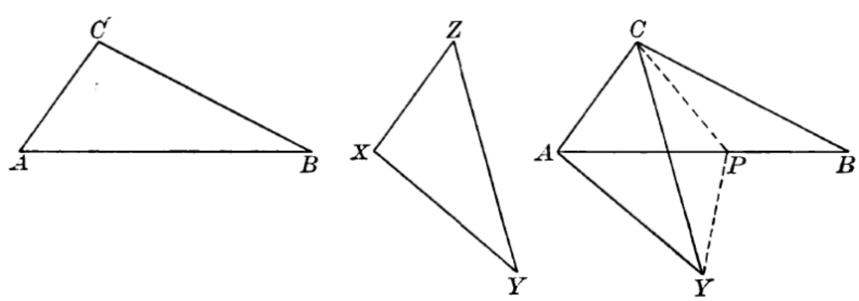
Esta proposición es un ejemplo de una conexión extensa entre relaciones, se hacen una diversidad de comparaciones y se establecen diversas relaciones que llevan al establecimiento de la relación requerida, dada la construcción de iguales al inicio, donde se utiliza tanto los triángulos iguales, como el triángulo isósceles y la relación ángulo mayor lado mayor.

Proposición homóloga en el texto escolar

P23 Teorema

115. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero el ángulo comprendido del primer triángulo mayor que el ángulo comprendido del segundo, entonces el tercer lado del primero es mayor que el tercer lado del segundo.

Figura 4.13. Lados congruentes y ángulo mayor, lado mayor II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Dados los triángulos ABC y XYZ, con CA igual que ZX, BC igual que YZ, pero con el ángulo C mayor que el ángulo Z.	
Probar que $AB > XZ$	
Colocar los triángulos tal que Z coincida con C y ZX caiga sobre CA. Entonces X caerá sobre A, luego ZX es dado igual que CA y ZY cae dentro del ángulo ACB, luego el ángulo C dado es mayor que el ángulo Z.	
Supongamos CP trazada bisecando el $\angle YCB$ y dibujar YP	
Entonces $CP = CP$	Ident.
$CY = CB$	Por hipót.
y $\angle YCP = \angle PCB$	Por constr.
$\therefore \Delta PYC$ *es congruente con* ΔPBC	N° 68
$\therefore PY = PB$	N° 67
Ahora, $AP + PY > AY$	N° 53, 3°
$\therefore AP + PB > AY$	N° 52, 8°
$\therefore AB > AY$	
$\therefore AB > XY$	N° 52, 8°, LCDD

En esta proposición los autores hacen uso del método de superposición de figuras, para llegar a la relación de desigualdad buscada. Se usa la bisectriz para obtener ángulos congruentes que lleven a la obtención de lados congruentes y se plantea una desigualdad entre los lados de uno de los triángulos auxiliares, la cual lleva a la desigualdad buscada dada la congruencia de algunos de los lados involucrados.

Observamos en el caso de estas dos proposiciones homólogas que, dada la relación entre los ángulos se llega a la misma relación entre los lados opuestos a estos ángulos. Aunque se usan estrategias diferentes; en ambas obras se involucra la construcción de elementos auxiliares iguales como ser triángulos y bisectrices, que conllevan a la obtención de elementos iguales; con lo que se llega al establecimiento de la desigualdad buscada entre los ángulos. En el primer caso se vale de la relación ángulo mayor lado mayor; en le segundo, la desigualdad entre los lados de un triángulo.

Proposición en los *Elementos*

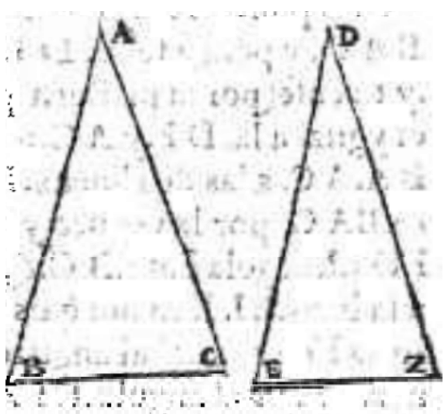
P25 T16

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero tienen la base (del uno) mayor que la base (del otro), también tendrán el ángulo comprendido por las rectas iguales (del uno) mayor que el del otro.

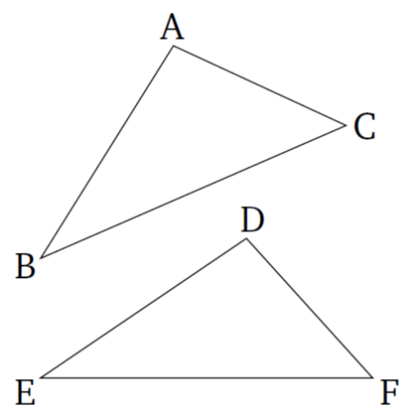
Sean ABC, EDF dos triángulos que tienen los dos lados AB, AC iguales a los dos lados DE, DF, respectivamente; pero sea la base BC mayor que la base EF.

Digo que el ángulo BAC es también mayor que el ángulo EDF.

Figura 4.14. Lados congruentes y lado mayor, ángulo mayor I



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues si no, o bien es igual o bien menor; ahora bien, el ángulo BAC no es igual al ángulo EDF; pues la base BC también sería igual a la base EF (P4); pero no lo es. Por tanto, el ángulo BAC no es igual al ángulo EDF; pero el ángulo BAC tampoco es menor que el ángulo EDF; pues la base BC también sería menor que la base EF (P24); pero no lo es; por tanto, el ángulo BAC tampoco es menor que el ángulo

EDF. Pero se ha demostrado que tampoco es igual; luego el ángulo BAC es mayor que el ángulo EDF.
Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero tienen la base (del uno) mayor que la base del otro, también tendrán el ángulo comprendido por las rectas iguales (del uno) mayor que el del otro.

En la P25 se propone el recíproco del enunciado previo; pues, se desea establecer la relación entre los ángulos comprendidos, dada la relación de igualdad entre las parejas de lados correspondientes que los forman y la desigualdad de los lados que los subtienden. En otras palabras, si en dos triángulos se tienen dos parejas de lados correspondientes congruentes, pero el tercer lado del primero es mayor que el tercer lado en el segundo triángulo, entonces el ángulo comprendido por los primeros dos lados del será mayor que el ángulo correspondiente en el segundo triángulo.

Se utiliza el método de demostración indirecta, probando la imposibilidad de que sea igual o menor. En el primer caso, no pueden ser iguales dado que por la *P4* los triángulos serán y sus terceros lados también; esto contradice la hipótesis inicial de desigualdad entre los terceros lados. Tampoco puede ser menor, ya que, por la P24 el tercer lado del primer triángulo sería menor que el tercer lado del segundo, que igualmente contradice la hipótesis inicial.

En el caso de esta proposición como hemos visto, se usa el método indirecto, analizando lo que sucede cuando dada la hipótesis inicial, se propone algo diferente a la conclusión planteada en el enunciado.

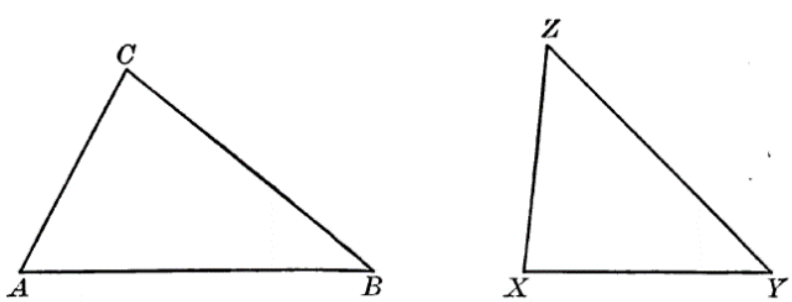
Previo a la *P26* se plantea la relación entre los terceros lados correspondientes de dos triángulos con dos pares de lados correspondientes congruentes, dada la relación entre en los ángulos comprendidos por estos lados correspondientes. Lo mismo para el tercer ángulo, dada la relación entre los terceros lados. Estas proposiciones representan los casos opuestos de la P4 y la P8, respectivamente, dado que en aquellas dadas unas igualdades se plantean otra u otras igualdades, mientras que estas, dada la desigualdad de los ángulos o lados, se plantea la desigualdad del elemento opuesto a estos. Estas dos proposiciones corresponden a la categoría "desigualdades en dos triángulos", ya que se establecen las relaciones entre terceros elementos correspondientes en dos triángulos, dadas las igualdades y desigualdades entre tres de los elementos correspondientes.

Proposición homóloga en el texto escolar

P24 Teorema

116. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero el tercer lado del primer triángulo mayor que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo opuesto al tercer lado del primero es mayor que el ángulo opuesto al tercer lado del segundo.

Figura 4.15. Lados congruentes y lado mayor, ángulo mayor II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Dados los triángulos ABC y XYZ, con CA igual que ZX y BC igual que YZ, pero con AB mayor que XY.

Probar que $\angle C$ *es mayor que el* $\angle Z$

Ahora, el $\angle C$ es igual que el $\angle Z$, o menor que el $\angle Z$, o es mayor que el $\angle Z$.

Pero si $\angle C$ fuera igual que el $\angle Z$,

El ΔABC sería igual al ΔXYZ Nº 68

AB sería por lo tanto igual a XY Nº 67

Si C fuese menor que Z,

AB sería menor que XY Nº 115

Como estas dos conclusiones son contrarias al supuesto de que AB es mayor que XY, síguese que C no puede ser ni igual a Z, ni menor que Z, y, por lo tanto,

$\angle C > \angle Z$ LCDD

El procedimiento seguido en el texto de Wentworth y Smith es el mismo que aparece en los *Elementos*, dado que se usa también el método indirecto para llegar a la imposibilidad de las demás opciones posibles, dada la relación inicial. Esta forma de razonamiento permanece invariante a pesar de la diferencia de las épocas. Consiste en el cambio de la relación buscada, manteniendo las mismas condiciones dadas, lo que lleva a la contradicción con las relaciones iniciales.

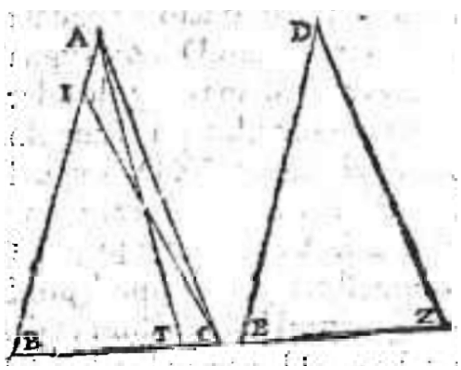
Proposición en los *Elementos*

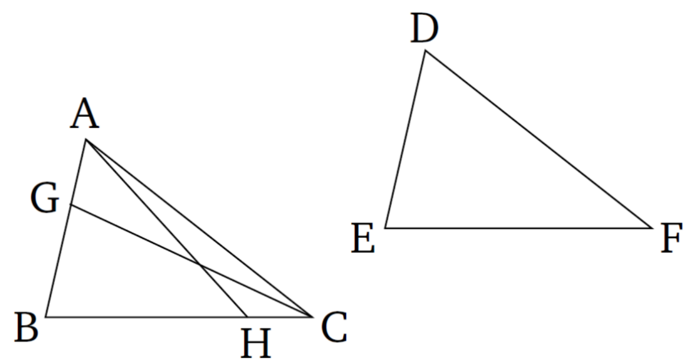
P26 T17

Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro, y un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante (igual) al ángulo restante.

Sean ABC, DEF dos triángulos que tienen los dos ángulos ABC, BCA iguales respectivamente a los dos ángulos DEF, EFD; y tengan también un lado igual a un lado, en primer lugar, correspondiente a los ángulos iguales: BC igual a EF.
Digo que también tendrán los lados restantes iguales respectivamente a los lados restante: AB a DE y AC a DF y el ángulo restante al ángulo restante: BAC a EDF
Pues si AB no es igual a DE, uno de ellos es mayor.
Sea AB el mayor y hágase BG igual a DE, y trácese GC.

Figura 4.16. Triángulos iguales III





Fuente: Çamorano (1576)

Fuente: Fitzpatrick (2008)

Así pues, como BG es igual a DE, y BC a EF, los dos lados BG, BC son iguales respectivamente a los dos lados DE, EF; y el ángulo GBC es igual al ángulo DEF; por tanto, la base GC es igual a la base DF, y el triángulo GBC es igual al triángulo DEF, y los ángulos restantes, subtendidos por lados iguales, serán también iguales (P4); por tanto, el ángulo GCB es igual al ángulo DFE. Pero se ha supuesto que el ángulo DFE es igual al ángulo BCA; por lo tanto, el ángulo BCG es también igual al ángulo BCA, el menor al mayor; lo cual es imposible. Por tanto, AB no es desigual a DE. Luego es igual. Pero también BC es igual a EF; entonces, los dos lados AB, BC son iguales respectivamente a los dos lados DE, EF; y el ángulo ABC es igual al ángulo DEF; por tanto, la base AC es igual a la base DF, y el ángulo restante BAC es igual al ángulo restante EDF (P4).

Pero sean iguales a su vez los lados que subtienden a los ángulos iguales, como AB a DE.

Digo, asimismo, que los lados restantes también serán iguales a los lados restantes: AC a DF y BC a EF y además el ángulo restante BAC es igual al ángulo restante EDF.

Pues si BC no es igual a EF, uno de ellos es mayor. Sea el mayor, si es posible, BC y hágase BH igual a EF, y trácese AH. Y puesto que BH es igual a EF y AB a DE, los dos lados AB, BH son iguales respectivamente a los dos (lados) DE, EF; y comprenden ángulos iguales; por tanto, la base AH es igual a la base DF y el triángulo ABH es igual al triángulo DEF, y los ángulos restantes, subtendidos por los lados iguales serán también iguales (P4); por tanto, el ángulo BHA es igual al ángulo EFD. Pero el ángulo EFD es igual al ángulo BCA. Entonces el ángulo externo BHA del triángulo AHC es igual al (ángulo) interno y opuesto BCA; lo cual es imposible; por tanto, BC no es desigual a EF; luego es igual. Pero también AB es igual a DE. Entonces los dos lados AB, BC son iguales respectivamente a los dos lados DE, EF; y comprenden ángulos iguales; por tanto, la base AC es igual a la base DZ, y el triángulo ABC es igual al triángulo DEF, y el ángulo restante BAC es igual al ángulo restante EDF (P4).

Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro, un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante igual al ángulo restante.

La P26 se estudia el resultado que se obtiene al tener dos triángulos con dos ángulos del primero respectivamente iguales a dos ángulos del segundo y un lado cualquiera del primero igual con un lado del otro –correspondiente al ahora criterio ALA–.

Se consideran dos casos: el primero cuando lo lados iguales son los comprendidos por los ángulos congruentes y de igual manera que en la proposición anterior, se utiliza la Reducción al Absurdo, al considerar que, si una pareja cualquiera de los otros lados correspondientes no es igual, entonces, uno de ellos es mayor. Siendo ese lado mayor el AB del primer triángulo, se corta de él un segmento BG igual que lado DE del otro triángulo, haciendo uso de la P3. Con ello, llega a la congruencia de dos triángulos por la *P4*, un auxiliar con el segundo triángulo de los iniciales. Esto lleva a una contradicción con la hipótesis inicial respecto de un par de los ángulos congruentes, ya que uno de los ángulos resulta igual al otro, siendo parte del ángulo con el cual es congruente. Con ello esa pareja de lados no pueden ser desiguales sino iguales. Con esto ya tiene los elementos necesarios para aplicar la *P4* y obtener la congruencia de los demás elementos correspondientes de los triángulos, llegando a lo solicitado en la primera parte del enunciado.

En el segundo caso, donde la pareja de lados congruentes no son los correspondientes los ángulos congruentes sino uno que comprende el ángulo, se utiliza de igual manera el mismo razonamiento. De igual manera se usa la *P4* para llegar a la congruencia de triángulos, lo que conlleva a la congruencia de dos ángulos, uno externo igual a uno interno y opuesto, que contradice la *P16*. De este modo la pareja de lados debe ser congruente y con la *P4* llega a la congruencia deseada.

Para esta proposición observamos primeramente la puesta en juego de demostración indirecta como herramienta –método– en la cual se considera un cambio en la relación buscada, lo que conlleva a la imposibilidad de un resultado al compararlo con una proposición o resultado previo.

En esta proposición se consideran las combinaciones de parejas de elementos iguales para poder concluir con la congruencia de dos triángulos: dos ángulos y un lado, sin importar la relación entre ese lado y los ángulos.

Ambas demostraciones son por Reducción al Absurdo, comenzando con el caso opuesto a la conclusión buscada, siguiendo un procedimiento similar, con la salvedad que en el primer caso llega a una contradicción por la congruencia de dos ángulos, uno de los cuales es parte del otro. Mientras que en el segundo caso se llega a la contradicción por la congruencia entre un ángulo externo con un interno y opuesto. Se parte entonces de la construcción de segmentos iguales, que permite el establecimiento de la congruencia, con la cual se llega a la contradicción, que a su vez desemboca en el establecimiento de la relación buscada.

Por otra parte, el conjunto de proposiciones desde la P1 a la P26 según la opinión de Puertas (1991) es la primera sección del libro primero de los *Elementos* donde Euclides trata principalmente "los triángulos, su construcción y propiedades en el sentido de la relación entre sus partes, lados y ángulos, y la comparación entre triángulos diferentes en lo que se refiere a sus partes y a sus áreas en los casos particulares en que son congruentes" (p. 49). Más específicamente, podemos mencionar que se trata de la comparación entre elementos homogéneos dadas ciertas relaciones iniciales, es decir, segmentos con segmentos, ángulos con ángulos y áreas con áreas; o relaciones lado ángulo o viceversa.

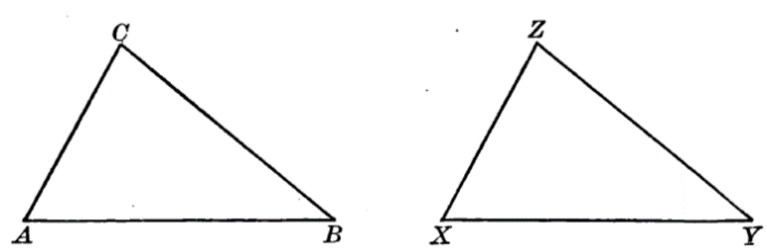
Esta proposición forma parte de la categoría "congruencia de triángulos" junto con las *P4* y *P8*. En las tres se establecen las posibles combinaciones de tres elementos con las cuales se puede concluir con la congruencia de dos triángulos. En ese sentido, en el pensamiento geométrico euclidiano en el primer Libro de los *Elementos*, lo mismo que en el texto escolar de Wentworth y Smith, se evidencia intensión de estudiar todos los posibles casos de combinaciones entre elementos que permiten establecer la relación de congruencia entre dos triángulos. Consideramos que, en esta forma de razonamiento, se involucra el estudio del cambio, en el sentido que la congruencia es la igualdad de las figuras dada la invariante de la forma y el tamaño. De la misma manera que se realizan cambios en las relaciones entre elementos de los triángulos, las cuales puedan garantizar una relación de igualdad en los demás elementos. Siguiendo esa misma idea, cabe resaltar que en una buena parte de estas proposiciones, su desarrollo radica en realizar cambios en las relaciones, lo que conlleva a una imposibilidad.

Proposición homóloga en el texto escolar

P3 Teorema

72. Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado incluido de uno, son iguales respectivamente a dos ángulos y el lado incluido del otro.

Figura 4.17. Triángulos congruentes III



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sean los triángulos ABC, XYZ en que los ángulos A y B son iguales respectivamente a los X e Y, y AB es igual a XY.

Demostrar que $\Delta ABC = \Delta XYZ$.

Colóquese el ΔABC sobre el ΔXYZ de suerte que AB coincida con su igual XY.

N° 53, 5°

Los lados AC y BC tomarán respectivamente las direcciones de XZ, YZ

(síguese esto de que se supone $\angle A = \angle X, \angle B = \angle Y$)

$\therefore C$ caerá sobre Z. N° 55

(Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto)

$\therefore$ los dos triángulos son iguales. N° 16

(Dos figuras son iguales cuando pueden hacerse coincidir en todas sus partes)

Es interesante la forma de demostrar este teorema por parte de Wentworth y Smith, ya que utiliza el método de superposición usado igualmente para los demás criterios de congruencia. Se hace coincidir AB con XY; y como los ángulos A, B son iguales que X, Y; los lados AB, AC caerán sobre XY, XZ respectivamente. Entonces C caerá sobre Z, dado que dos rectas no pueden encontrarse en dos puntos, con lo que se llega a que los triángulos son congruentes. En este caso el establecimiento de la relación de congruencia entre los dos triángulos se da mediante la superposición de elementos, valiéndose de la igualdad de los elementos que los componen.

Proposición en los *Elementos*

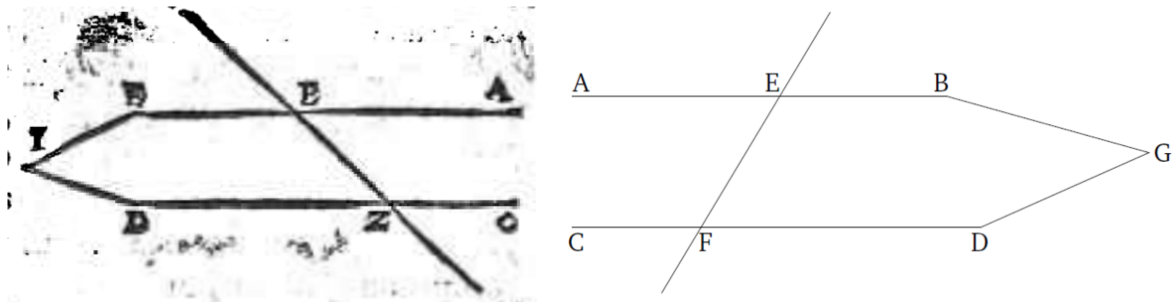
P27 T18

Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.

Así pues, al incidir sobre las dos rectas AB, CD haga la recta EF los ángulos alternos AEF, EFD iguales entre sí.

Digo que AB es paralela a CD.

Figura 4.18. Paralelismo



Fuente: Çamorano (1576)　　Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues si no, prolongadas AB, CA, se encontrarán o bien en el sentido de B, A, o bien en el sentido de A, C. Prolónguense y encuéntrense en el sentido de B, D en G. Entonces el ángulo externo AEF del triángulo GEF es igual al ángulo interno y opuesto EFG; lo cual es imposible (P16); por tanto, AB, CD prolongadas no se encuentran en cl sentido de B, D. De manera semejante demostraríamos que tampoco en el sentido dc A, C; pero las rectas que no se encuentran en ninguno de los dos sentidos son paralelas (D23); por tanto, AB es paralela a CA.

Por consiguiente, si una recta al incidir sobre dos rectas hace ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas.

En la P27 se establece la relación de paralelismo entre dos rectas, dada la relación de igualdad entre los ángulos alternos formados por la incidencia de otra recta sobre las primeras. El criterio que se sigue para la definición de paralelas en los *Elementos* es el de *no intersección*, que está relacionado con la etimología misma de la palabra paralélelas: "junto la una a la otra" (Serrano, 2000).

Para esta proposición se usa el método de demostración indirecta, asumiendo el caso contrario, es decir, teniendo ángulos alternos iguales y que las rectas se encuentren en algún punto. Lo que lleva a la comparación entre dos ángulos alternos, uno es externo del triángulo EGF y el otro es interno y opuesto, resultan ser congruentes los cual contradice la P16. Entonces las rectas no se encuentran y entonces son paralelas.

La presente proposición consideramos que emerge de la desigualdad entre dos ángulos internos de un triángulo con dos ángulos rectos –linealidad–; que a su vez involucra la desigualdad entre el ángulo externo de un triángulo con el interno y opuesto. En las definiciones presentadas en libro primero de los *Elementos* se consideran solamente los ángulos convexos, es decir, los menores que dos rectos o que una línea, con los que se forman las figuras rectilíneas. Al estar dos rectas alineadas es imposible la construcción de un triángulo con otra recta que una sus extremos: si tomamos dos rectas y estudiamos lo que sucede con sus posiciones relativas, a medida la inclinación entre ellas cambia, encontraremos un caso extremo, en el cual ya no se sigue cumpliendo la posibilidad de construcción de un triángulo. En ese caso los otros dos ángulos triángulo se anulan, por lo que no se puede construir el triángulo y el que une las dos rectas iniciales sería igual a dos rectos.

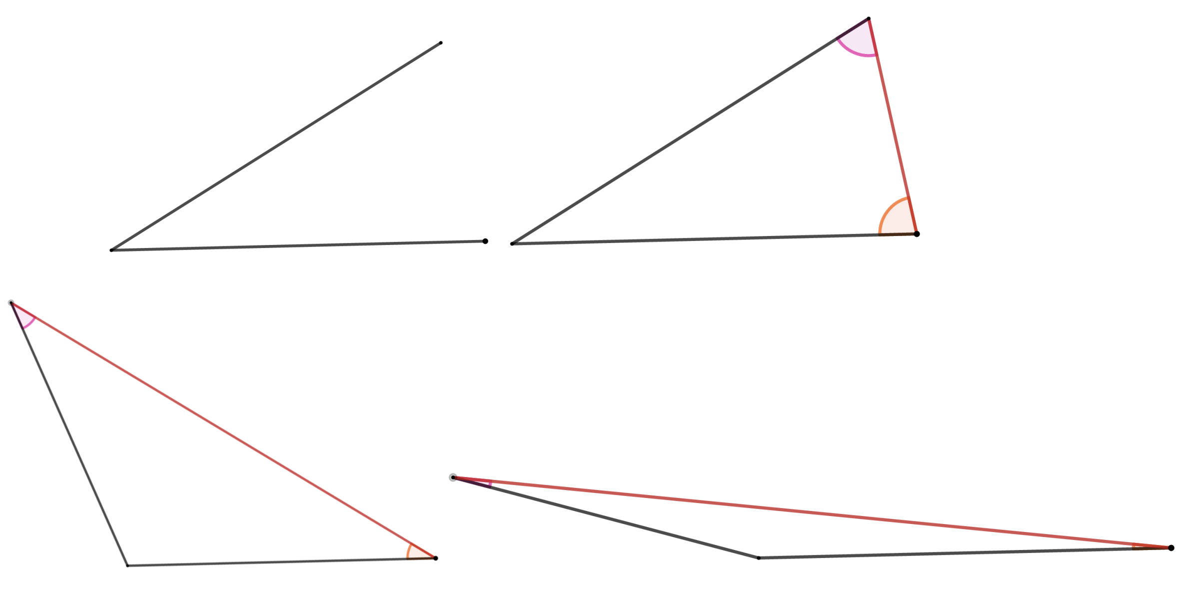


Figura 4.19. Posibilidad de construcción de un triángulo

Siguiendo esa misma idea, si se tienen dos rectas y alguna otra que incide sobre estas, consideremos el caso en el que el ángulo entre la recta incidente y una de las primeras es recto –figura 4.20–. Si cambia la inclinación entre la segunda recta y la recta incidente, habrá un punto en el cual no se podrá formar un triángulo. Esto es, a medida la inclinación se acerca a un ángulo recto, al rebasar el ángulo recto por la derecha, se pasará a formar un triángulo al lado izquierdo de la recta incidente.

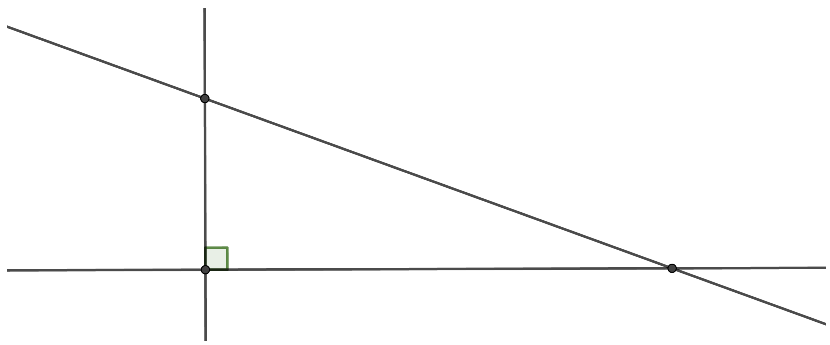


Figura 4.20. Rectas incidentes

En Geometría euclidiana un elemento geométrico cumple una condición o no: son iguales o no, está en una recta o no lo está, son perpendiculares o no, están alineados o no. El mundo de posibilidades al cambiar la posición de un punto se reduce a dos o tres casos, está en la generalidad de los enunciados, como vemos en la descripción anterior. En este sentido vemos evidencia de la idea del estudio del cambio, en tanto, estudiar o analizar lo que sucede al cambiar la relación entre dos elementos geométricos.

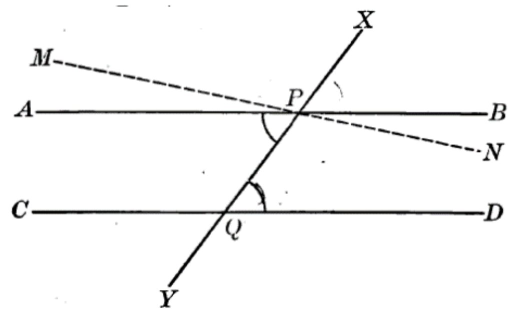
Finalmente, con esta proposición se inicia la siguiente categoría: "paralelismo", donde se establecen las relaciones entre los ángulos formados por dos paralelas y una recta que incide sobre ellas, o viceversa: dada la relación entre los ángulos se establece la relación de paralelismo entre las dos rectas. Se culmina en la *P32* con la suma de ángulos internos en un triángulo. Este conjunto de proposiciones son consecuencia de la perpendicularidad, que conduce a la linealidad, a las desigualdades en un triángulo, hasta llegar a la relación entre los tres ángulos internos de un triángulo con la linealidad o dos rectos.

Proposición homóloga en el texto escolar

P17 Teorema

101. Cuando dos líneas en el mismo plano son cortadas por una transversal, si los ángulos alternos internos son iguales, las dos líneas son paralelas.

Figura 4.21. Paralelismo II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sea XY la transversal que forma con las rectas AB y CD los ángulos alternos internos iguales APQ, DQP.

Demostrar que AB es ∥ a CD.

Puesto que no se sabe aún si AB es ∥ a CD, supongamos que MN es la recta que pasa por P y es ∥ a CD.

Demostraremos ahora que AB coincide con MN.

En primer lugar, $\angle MPQ = \angle DQP$. N° 100

(si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales)

Ahora bien, $\angle APQ = \angle DQP$. Por hipót.

$\therefore \angle APQ = MPQ$ N° 52, 7°

(Dos cantidades iguales a una tercera o a cantidades iguales son iguales entre sí)

∴ $AB \; y \; MN$ deben coincidir	N° 23
(definición de ángulos iguales)	
Sabemos que MN es la ∥ a CD	Por hipót.
∴ AB, que coincide con MN, es ∥ a CD.	LCDD

Los autores presentan una forma particular de demostrar que las rectas son paralelas, pues se supone otra recta que, si es paralela a una de las primeras, lo que conlleva al establecimiento de la relación de igualdad entre una pareja de ángulos, uno de ellos igual a uno de los primero, entonces las rectas deben coincidir. Es una prueba escolarmente típica de la unicidad de la paralela a una recta por un punto dado, que vemos también en las demostraciones del cálculo y las ecuaciones diferenciales. A diferencia del razonamiento en los *Elementos*, en este caso la demostración es directa, dado que no se niega la conclusión, sino que se llega a la igualdad, dada la construcción auxiliar.

Observamos que la idea detrás de esta peculiar proposición es igual en ambas obras, en el texto de Wentworth y Smith, previo al establecimiento del paralelismo, plantea la siguiente proposición: "92. Dos rectas situadas en un mismo plano y perpendiculares a una tercera no pueden encontrarse, por más que se prolonguen" (2001, p.46). Los autores definen el paralelismo de la misma manera que se presenta en los Elementos, optando por la no intersección, que ya se deja ver en la cita anterior y que va acorde con la reflexión planteada párrafos arriba, solamente que en la obra euclidiana no se explicita los de los ángulos rectos, más se encuentra implícito en la cadena de proposiciones que arriba se mencionan. Además, los autores agregan el postulado de las paralelas, que habla sobre la unicidad del paralelismo entre dos rectas.

5. Resultados

Para este apartado de resultados consideraremos a profundidad algunas proposiciones que consideramos engloban la mayoría de los enunciados del Libro Primero de los Elementos; y que además aportan elementos para responder a nuestros cuestionamientos iniciales.

Obtuvimos en la obra Euclides las siguientes categorías de análisis:

- La construcción de iguales
- El triángulo isósceles
- La congruencia de triángulos
- La perpendicularidad
- La linealidad
- Las desigualdades en un triángulo
- Las desigualdades en dos triángulos
- El paralelismo
- La igualdad de área

Dentro de la primera categoría se encuentra la construcción de segmentos y ángulos iguales a unos dados. Cómo primera noción para construir u obtener rectas iguales se usa el circulo –única figura para la cual tenemos un nombre tanto para su perímetro como para su superficie–. El círculo en los *Elementos* es definido como la figura cuyo límite es una sola línea, denominada circunferencia, la cual tiene la propiedad de que todas las rectas trazadas desde el centro hacia esta son iguales. Resaltamos además que en la obra euclidiana se denota indistintamente con la palabra circunferencia a la línea completa y a una parte de ella –arcos–; mientras que en el texto escolar se usan nada más los arcos de circunferencia para obtener los radios con los que se formarán las figuras requeridas o pedidas. Como parte de la confrontación con el texto escolar, encontramos que en la primera parte de este se da un procedimiento sin una argumentación, y las construcciones se realizan con arcos, no con circunferencias completas. Consideramos que el no trazar la circunferencia completa, obstaculiza visualizar la totalidad de la situación, ya que las propiedades son definidas respecto del círculo y no de los arcos. Se usa la propiedad que define el círculo para la construcción de un triángulo equilátero, del cual a su vez es usada la propiedad de igualdad entre sus lados para obtener rectas congruentes.

Por otra parte, la circunferencia permite variar la posición de un segmento, determinando una región donde es posible obtener otro segmento igual a uno dado, en una infinidad de posiciones diferentes, esto teniendo un extremo invariante, el centro.

Siguiendo esa misma idea, hay dos posibles casos para construir un segmento igual que otro dado, primero que compartan un extremo; segundo, en cualquier parte del plano. En la *P1*, se hace con el extremo común mediante el uso de la circunferencia. En la *P2*, se construye en cualquier parte del plano mediante el triángulo equilátero y círculos. Para la *P3*, se quiere quitar de un segmento mayor un segmento igual a uno dado, por lo que se usa la *P2* y el círculo.

También se construyen ángulos iguales a otros dados, es el caso de la bisección de un ángulo, donde se usa el triángulo equilátero y la congruencia para obtener los ángulos iguales. La categoría de equivalencia de área está íntimamente relacionada con esta, ya que se construyen figuras con diferente forma, pero con superficie equivalente a estas o a una parte, ejemplo de ello es el teorema de Pitágoras.

El triángulo isósceles se usa para obtener ya sean segmentos u ángulos iguales, por lo que forma parte de la categoría de construcción de iguales.

En la categoría de congruencia de triángulos se requiere de la categoría anterior para obtener las relaciones de igualdad entre elementos, suficientes para obtener como consecuencia la igualdad de las figuras, esto es, igualdad en forma y tamaño, contrario de la equivalencia que es la igualdad de superficie, sin mantener la condición de forma. En esta categoría se usa la construcción de iguales, para establecer la relación deseada. En ellas vemos el estudio del cambio entre las posibles relaciones de igualdad de los elementos para determinar la relación de congruencia entre los triángulos.

La perpendicularidad se obtiene a través de la construcción de iguales, dado que es definida en los *Elementos* como la relación entre dos rectas, dada la igualdad entre los ángulos adyacentes formados en su intersección. Y de esta se deriva la linealidad, dado que si los ángulos adyacentes son iguales entonces las rectas están alineadas, es decir, dos segmentos que están en línea recta. La perpendicularidad también lleva al paralelismo, por lo mencionado en el análisis, en las figuras 48 y 49. En este caso, en el contraste con el texto escolar vemos que el tratamiento de los ángulos está mas orientado a su medida, de donde podemos ver en el discurso Matemático Escolar, la clasificación de los ángulos con base en su medida en grados y no a la relación que guardan con el ángulo recto, que lleva implícita la idea de comparación, previo a la medición.

En cuanto a las desigualdades en un triángulo, se observa el estudio del cambio en las relaciones entre elementos. Primero se establecen todas las posibles relaciones, en un triángulo: relacionando los ángulos internos con los externos, luego los lados de este. Después en dos triángulos se establecen las relaciones entre los terceros lados o ángulos dada la relación conocida entre otras parejas de elementos. Estas últimas desigualdades llevan al establecimiento del último criterio de congruencia mostrado en los Elementos –ALA–. Y las desigualdades en un triángulo conllevan al paralelismo, dada la imposibilidad de la construcción de este y posteriormente a la relación bastamente conocida entre los tres ángulos internos y dos ángulos rectos. Todo esto, previo a la equivalencia de superficie que es trabajada por el autor de los Elementos como consecuencia del paralelismo y no en términos de fórmulas algebraicas, como se deja ver en el texto escolar en cuestión.

En el paralelismo se estudian todas las relaciones entre los ángulos formados al intersecarse dos paralelas por una secante. En los *Elementos* se definen paralelas en términos de no intersección, sin embargo, cualquiera que vea las proposiciones correspondientes a la categoría de equivalencia de área, diría que se pone en juego la propiedad de equidistancia. Más, lo que hace es definir la figura formada por la unión de los extremos de dos rectas iguales y paralelas, lo que conocemos como paralelogramo. Una vez definida dicha figura, alude a la propiedad de: la diagonal lo divide en dos figuras iguales, refiriéndose a superficie; no a la congruencia, para esta utiliza los criterios establecidos previamente. También establece la igualdad entre ángulos y lados opuestos en el paralelogramo mediante la congruencia.

Estas dos últimas relaciones son usadas para establecer las equivalencias de superficie entre paralelogramos que comparten base entre paralelas o tienen bases iguales entre paralelas, no en términos de base y altura con expresiones algebraicas asociadas como lo deja ver el texto escolar. Es más bien el establecimiento de la relación entre las superficies de paralelogramos con diferente forma mediante el uso ciertas propiedades geométricas que conservan. Con ello, se prosigue al establecimiento de relaciones y construcción de figuras equivalentes a otras dadas; tal es el caso del paralelogramo y el triángulo que tienen la misma o igual base y están entre paralelas.

En las categorías anteriores se establecen relaciones entre los elementos que conforman una figura: entre los lados, entre los ángulos y entre las superficies. Se hace un estudio de la variedad de posibilidades para establecer relaciones entre parejas o grupos de elementos, dadas las relaciones conocidas. Al enfocarnos en la congruencia de triángulos, destacamos que se trata de la conservación de forma y tamaño, se conservan los lados y ángulos de los triángulos, sin importar su posición. Las proposiciones son generalizaciones, o un triángulo está en la misma posición respecto de otro o está en otra posición; se estudia el cambio de relaciones entre sus elementos para obtener la igualdad entre todos sus elementos, un invariante. Por otro lado, en la conservación de superficie es un tipo de igualdad diferente, no hay coincidencia de elementos: la forma cambia, es diferente, los elementos de las figuras son diferentes, sus lados, sus ángulos; pero su superficie es equivalente.

En el estudio de todos los enunciados del primer libro y después de las acotaciones dadas en las páginas anteriores, destacamos internamente en cada proposición prácticas como: *la identificación de elementos relacionados*, *la construcción de iguales*, que prevalecen en la mayoría de las proposiciones en las diferentes categorías, son de las primeras acciones realizadas, a lo que se recurre como primera interacción ante las situaciones geométricas planteadas. Otra práctica recurrente después de la construcción de elementos iguales es el *establecimiento de relaciones* entre otros elementos mediante la *comparación*, ya sean relaciones de igualdad, desigualdad, perpendicularidad, linealidad, paralelismo o equivalencia de superficie.

De forma global, desde las definiciones se deja ver las consecuencias que tiene el *estudio del cambio en las relaciones de los elementos de las figuras*; por ejemplo, se toma el ángulo recto como referencia, en tanto que este deviene de la igualdad entre los ángulos adyacentes al cortarse dos rectas. De este modo, si la relación entre un ángulo y el ángulo recto es mayor, entonces se llama obtuso, si la relación cambia, es opuesta, entonces el ángulo es agudo.

En el mismo sentido, los limites, extremos o términos de las cosas juegan un papel importante: los términos de las líneas son puntos, de estas hay dos tipos, las rectas y las curvas; los términos de las superficies son líneas, están también pueden ser curvas o planas.

En la definición de figura como lo contenido o delimitado por uno o varios límites –en el sentido de que encierren superficie–, se denota la idea de generalidad, el estudio del cambio. Esto es, cuando se tiene un solo límite es posible formar es una curva cerrada, de estas, en los *Elementos* se presta particular atención al círculo. Cuando se tienen dos, las únicas posibilidades de generar una figura son: el semicírculo, al juntar una curva con una recta, o dos superficies curvas como una lúnula, o la encerrada por dos círculos.

En el estudio particular de las figuras rectilíneas: con tres rectas se puede formar un trilátero, siempre que se cumplan ciertas condiciones. La cantidad de líneas para formar una figura puede variar, del estudio de esta variedad de figuras, surge el paralelismo. Dos rectas por más que se extiendan existen dos posibilidades: o se encuentran o no se encuentran –paralelismo–, si se encuentran puede formarse un triángulo. Con cuatro se forma un cuadrilátero y un multilátero cuando se comprende por más de cuatro rectas.

De los triláteros se puede tomar una relación; por ejemplo, considerando los lados, y estudio las posibles variaciones: cuando los tres son iguales se llama equilátero, cuando nada más dos son iguales se llama isósceles y cuando ninguno es igual que otro, entonces se llama escaleno.

Si ahora se estudian las relaciones entre los ángulos, un referente como ya se ha mencionado es la perpendicularidad un emergente de la igualdad entre ángulos adyacentes: rectángulo cuando uno de los ángulos es recto y los demás agudos; obtusángulo cuando uno de los ángulos es obtuso, es decir, mayor que un recto y los demás agudos; acutángulo cuando los tres son agudos.

Para los cuadriláteros, se propone el estudio de dos propiedades: la igualdad y la perpendicularidad entre sus lados; el cuadrado cumple ambas, el rectángulo una de ellas, el rombo la otra; el romboide cumple con la igualdad entre lados y ángulos opuestos, sin ser equilátera ni rectangular; los demás son llamados trapecios. Los paralelogramos debido a que la propiedad de que los define es el paralelismo e igualdad entre opuestos, son definidos hasta la *P34*.

En los párrafos anteriores se ha mostrado que en el carácter de generalidad de las definiciones y estudio de las diferentes figuras, se establece una o varias relaciones, de la cual se analizan todos los cambios posibles.

En términos generales, en cuanto a los métodos de demostración, en los *Elementos* se destaca primeramente el uso del método *sintético*, tanto para demostraciones *directas* como *indirectas* o por *reducción al absurdo*; sin embargo, autores como González Urbaneja señalan que los griegos llegaban al establecimiento de las relaciones planteadas en los enunciados mediante el método *analítico*. Por su parte, Wentworth y Smith (1913) emplean los métodos de demostración: *sintético*, consistente en la concatenación de axiomas, postulados y teoremas ya demostrados, lo que conduce a lo que se desea demostrar verdadero; posteriormente agrega que es el más común. El otro método es el de *superposición*, que radica en colocar una figura sobre otra y demostrar dadas los supuestos, las dos figuras deben coincidir en todas sus partes y ser iguales (p. 35).

El método *analítico* es descrito posteriormente: "cuando la verdad de una proposición se hace depender de la otra no demostrada aún, pero que se demuestra en el curso mismo del razonamiento y de la cual la que se trata de demostrar se deduce necesariamente" (p. 80). Se aclara que su empleo es necesario cuando en la situación no se ve claramente el camino a seguir para aplicar el método sintético. A la postre de nuestro análisis consideramos que este método es aplicable a todas las proposiciones, no solamente cuando el sendero a seguir para llegar a la relación requerida no es palpable sintéticamente.

Para el caso de la demostración por reducción al absurdo, Wentworth y Smith (2001) describen que consiste en suponer que "la proposición que trata de demostrarse no es verdadera, y de tal suposición se deducen consecuencias que son absurdas o falsas, las cuales demuestran por tanto que la suposición en cuestión es también falsa" (p. 83).

Lo anterior nos lleva a afirmar que el libro primero de los *Elementos* es una presentación de proposiciones de manera sintética, sin dejar explícita la forma en como se llegó al establecimiento de las relaciones plasmadas en cada enunciado, dadas las condiciones iniciales. Sin embargo, implícitamente se infiere la forma de pensamiento geométrico euclidiano influenciada por la escuela platónica, donde se presta particular interés a lo finito, además de la culminación de la obra en su libro decimotercero con la inscripción de los sólidos platónicos en la esfera.

En esta forma de pensamiento se evidencia principalmente el sentido de generalidad de las proposiciones, ya sea en si misma o en grupos de ellas. Tal es el caso de la construcción de segmentos iguales en las primeras tres proposiciones: primero, si el punto donde quiero trazar el segmento igual al dado es un extremo del segmento dado, entonces basta con trazar una circunferencia. De otro modo, si cambio la ubicación de ese punto respecto de los extremos del segmento dado, dicho punto puede estar en cualquier otra parte del plano, ya sea que en el segmento o no. Para ello, entonces propone la *P2*, así se puede trazar en cualquier punto del plano. A lo anterior, Wentworth y Smith lo denominan *continuidad*, ejemplificando con una propiedad que se cumple sin importar la disposición de alguna noción geométrica respecto de otra u otras.

Veamos las instrucciones generales que Wentworth y Smith (2001) sugieren de guía para realizar las demostraciones:

1) Dibújense las figuras con la mayor exactitud posible.
2) Dése a las figuras la forma más general posible.
3) Después de dibujar la figura, indíquese con precisión qué es lo que se da o supone, y qué es lo que ha de demostrarse.
4) Empréndase entonces la demostración por el método sintético, si se puede. Si no, pruébese el analítico, diciendo que la proposición es cierta si tal o cual lo es, y que ésta lo es si otra lo es, y así sucesivamente hasta llegar a una ya demostrada.
5) Si hay que demostrar la igualdad de dos rectas, trátese de demostrar que son lados homólogos de triángulos iguales, o lados de un triángulo isósceles, o lados opuestos de un paralelogramo, o segmentos comprendidos entre paralelas equidistantes.
6) Si hay que demostrar la igualdad de dos ángulos, trátese de demostrar que son ángulos alternos internos o correspondientes formados por paralelas, u homólogos de triángulos iguales, o adyacentes a la base de un triángulo isósceles, u opuestos de un paralelogramo, o complementos o suplementos de un mismo ángulo.
7) Si hay que demostrar que un ángulo es mayor que otro, véase si es ángulo externo de un triángulo, o si es opuesto a mayor lado que el otro ángulo.

8) Para demostrar que una recta es mayor que otra, véase si se opone a mayor ángulo en un triángulo, o si es una oblicua cuyo pie dista más que el de la otra del pie de la perpendicular (p. 84).

En las instrucciones anteriores, a partir del numeral quinto observamos un análisis detallado de las estrategias o razonamientos seguidos en los *Elementos* para tratar con cualquier proposición concerniente a la igualdad o desigualdad entre rectas y ángulos. De hecho, prácticamente sigue el orden de las categorías que mostramos previamente, primero la congruencia establecida a partir de la *P4*; la construcción de iguales mediante el triángulo isósceles; la perpendicularidad, el paralelismo. En ellas se dejar ver el uso de nociones geométricas como el círculo, el triángulo ya sea equilátero, isósceles, rectángulo; el paralelogramo, el paralelismo, la congruencia o las relaciones de desigualdad entre los elementos de los triángulos.

Por otro lado, Wentworth y Smith (2001) también proponen métodos para resolver problemas geométricos específicamente, indicando que los tres más comunes son: *por análisis, por síntesis y por lugares geométricos*. Acotan que los casos en que el método *sintético* puede aplicarse son raros, que el más general y casi siempre el mejor es el *analítico*. En cuanto al método analítico describen dos pasos: primero, "se supone el problema resuelto y se ve qué consecuencias se deducen de las condiciones supuestas" (p. 140). Segundo, "se ve si es posible construir una figura que satisfaga estas consecuencias, consideradas ahora como condiciones del problema" (ídem). El tercero, cuando se quiere determinar un punto que está sujeto a dos condiciones.

En cuanto a las instrucciones generales para los problemas de construcción proponen:

> dibújese con alguna exactitud una figura de forma general. Si el método de resolución no saltare a la vista, véase si el problema se reduce a determinar la intersección de

> dos lugares geométricos. Si no es el caso, supóngase el problema resuelto y aplíquese el método analítico (p. 145).

Ahondando en su tratamiento de los problemas de construcción, indican que inicialmente se dieron las reglas para algunas construcciones geométricas, sin dar demostración de ellas, debido a que no se habían demostrado los teoremas que las validan. Siguiendo las aclaraciones que presentan en el prefacio, donde mencionan que las definiciones se darán a medida que se van necesitando, con problemas sencillos en la introducción para acostumbrar al estudiante al uso de instrumentos principales de dibujo. Por lo que, valiéndose de dicha aclaración con tinte pedagógico, al inicio de la obra presentan un conjunto de problemas de los cuales solamente presentan el proceso de construcción y en una sección al final del tratamiento de la Geometría plana, dedican unas cuantas páginas a problemas de construcción con su debida argumentación mediante la demostración.

Algunas definiciones que dan los autores están orientadas al estudio de la variación, tal es el caso del *límite*, el cual definen de la siguiente manera: "cuando una variable se puede hacer variar de tal manera que se aproxime sin cesar a una constante y que la diferencia entre las dos pueda hacerse y mantenerse tan pequeña como se quiera, la constante se llama límite" (Wentworth y Smith, 2001, p. 114). Definición en el contexto de lo geométrico, con influencias del análisis matemático, dada la época en la que es producida la obra. Ejemplifican la definición anterior con la variación de una cuerda donde su límite superior sería el diámetro y el inferior sería cero. Una segunda idea es el principio de *continuidad* como: el principio en virtud del cual se emplean variaciones continuas para aplicar un teorema general a casos particulares (p.125). Aludiendo que en la generalidad de un teorema se encuentra el estudio de la variación de los casos particulares de este.

En cuanto a las definiciones dadas en el libro primero de los *Elementos* destacamos: la *recta* como finita con posibilidad de extensión hasta donde se deseé; en Wentworth y Smith se define también segmento a pesar de su uso indistinto con recta, además de distancia o longitud en términos de las unidades de medida convencionales. Luego de definir líneas rectas y curvas, pasa a definición de *ángulo plano* como inclinación entre dos líneas, considerando nada más los ángulos convexos, restringidos a la no linealidad de las líneas que lo conforman. Se pasa luego a la consideración de los *ángulos rectilíneos* como formados por rectas, definiendo primeramente la *perpendicularidad* en términos de la igualdad entre los dos ángulos adyacentes al intersecarse dos rectas, cada uno de los cuales se designa como *rectos*. Tomando el ángulo recto como referencia, define los demás respecto de su relación con este, los mayores son los *obtusos* y los menores a este son *agudos*. Por su parte en Wentworth y Smith se presta particular atención a la medida de los ángulos en grados tanto en decimal como sexagesimal; además de su consideración de los demás ángulos, es decir, el *llano*, el *perígono*; incluyendo la idea de ángulo como giro de un segmento.

Posteriormente se define *figura* como lo contenido por uno o varios términos, el *círculo* como la figura contenida por una sola línea, figura que puede ser vista como producida por una recta. El *semicírculo* –*medio círculo* en Çamorano– es el contenido por dos líneas: una curva que es la circunferencia y una recta que es el diámetro.

Las anteriores son figuras formadas por líneas curvas y rectas, posteriormente se pasa a definir las *figuras rectilíneas* –con una no se puede formar más que una recta, con dos rectas se forma un ángulo rectilíneo– con tres rectas es posible formar un *trilátero* –nuestro bien conocido *triángulo,* aludiendo a ángulos y no a lados–; con cuatro rectas se forma un *cuadrilátero* y un *multilátero* –*polígono*, que igualmente alude a ángulos– con más de cuatro rectas.

En el libro primero se estudian principalmente los triángulos y los cuadriláteros, por lo que se presenta la clasificación de triángulos con base en la relación reciproca entre los sus lados y con base en uno de sus ángulos. Triángulo *equilátero* como aquel que tiene sus tres lados iguales y es usado en las proposiciones para obtener rectas iguales al igual que el isósceles, que también es usado para obtener ángulos iguales. El escaleno es el triángulo más general en términos de los lados, por lo que cuando la proposición lo requiere se utiliza este para tratar el caso más general. Por otro lado, sabemos que dos ángulos de un triángulo siempre deben ser agudos y se clasifican los triángulos en términos de ese tercer ángulo: en los *triángulos rectángulos* ese tercer ángulo es recto, en los *triángulos obtusos* es obtuso y en los *triángulos agudos* agudo. Vemos entonces en cada caso la dependencia del ángulo recto, pues ese tercer ángulo determina la relación de los restantes, en el rectángulo, esos dos juntos son iguales a un recto, en el obtuso son juntos son menores que un recto, y en el agudo mayores que un recto. De los anteriores en el primer libro se usa principalmente el rectángulo, por la igualdad entre los ángulos adyacentes para el teorema de Pitágoras y su recíproco.

En cuanto a los cuadriláteros están igualmente definidos en términos de la relación recíproca entre sus lados y la perpendicularidad: así el *cuadrado*, es equilátero y rectangular; el *rectángulo* es rectangular pero no equilátero; el *rombo* es equilátero más no rectangular. Así, están abarcadas todas las posibles variaciones de las relaciones, por lo que luego se define *romboide* como aquel cuadrilátero que no es ni equilátero ni rectangular sin embargo sus lados y ángulos opuestos son iguales entre sí. Finalmente culmina denominando *trapecios* a los demás cuadriláteros.

De los cuadriláteros anteriores en el libro primero solamente se trabaja sobre el cuadrado, poniendo en juego en el teorema de Pitágoras su relación de igualdad entre todos sus lados para obtener rectas iguales y la perpendicularidad para obtener ángulos iguales. El otro cuadrilátero al cual se dedica una sección del primer libro es el *paralelogramo*; el cuál no entra en las definiciones anteriores dado que la propiedad que lo define es el paralelismo y es estudiado principalmente en términos de superficie, dado que es definido implícitamente como la figura contenida entre pares de rectas iguales y paralelas por lo que sería un tipo especial de romboide; además, su diagonal lo divide a la mitad, propiedad necesaria para establecer la equivalencia entre el triángulo y la mitad del paralelogramo, dado que comparten o tienen igual base y están entre las mismas paralelas. Mientras tanto, en Wentworth y Smith, el área es vista más en términos algebraicos, incluyendo las fórmulas y considerando la característica de equidistancia entre las paralelas para deducir igualdad entre las alturas de el triángulo y el paralelogramo, considerando al área como la cuantificación de la superficie mediante unidades cuadradas.

Cómo ultima definición están las rectas paralelas, en términos de la propiedad de no intersección al prolongarlas indefinidamente en ambos sentidos –de ambas partes en Çamorano, 1576–.

De las anteriores definiciones, las nociones principalmente usadas en el libro primero de los *Elementos* dadas las propiedades que con las cuales se define, destacamos: el círculo, el triángulo equilátero, el triángulo isósceles, el paralelogramo, el cuadrado para obtener rectas iguales. El triángulo isósceles, la perpendicularidad, el triángulo rectángulo, el paralelogramo, el cuadrado, para obtener ángulos iguales. Para obtener la equivalencia de superficies, se usa la congruencia, el paralelismo, la aplicación.

Podemos contemplar en lo descrito anteriormente el *estudio del cambio* desde lo geométrico, en los sentidos antes descritos: la disposición de una figura o noción respecto de otra, la forma y tamaño de una figura respecto de otra, el cambio en las relaciones entre elementos de las figuras.

Finalmente, del análisis de las proposiciones referidas, encontramos que se encuentran asociadas prácticas como: la identificación de relaciones, la construcción de elementos iguales que otros, la comparación entre elementos, el establecimiento de relaciones entre elementos.

6. Conclusiones

Concluyendo nuestro estudio y atendiendo a los cuestionamientos iniciales consideramos que las nociones principalmente usadas en el libro primero de los *Elementos* son: el círculo, el triángulo equilátero, el triángulo isósceles, el paralelogramo, el cuadrado, cuya funcionalidad esta en establecer relaciones de igualdad entre rectas –segmentos–; agregada a estas, también con la misma finalidad es posteriormente usada la congruencia de triángulos. En el mismo sentido, el triángulo isósceles, la perpendicularidad, el triángulo rectángulo, el paralelogramo y el cuadrado son requeridos para establecer la relación de igualdad entre ángulos. Finalmente, para establecer la relación de igualdad entre superficies se usa la congruencia, el paralelismo y la igualdad entre rectas finitas –segmentos–.

Desde los antecedentes y los primeros acercamientos a los *Elementos* de Euclides nos percatamos de que la *comparación* juega un papel fundamental en el pensamiento geométrico euclidiano, como lo afirma Proclo refiriéndose a Euclides "el autor ha construido triángulos y los ha comparado con respecto a su igualdad o desigualdad, estableciendo su existencia por construcción y su identidad o diferencia por comparación" (Proclo, 1970, p.275) [traducción propia]. Por otro lado, sabemos de los estudios en el Pensamiento y Lenguaje Variacional que la *variación* requiere de *comparaciones*. Dado esto, nos preguntamos si toda *comparación* está relacionada con *estudio del cambio*. Entonces, nos dedicamos a estudiar la forma en la que opera *la comparación y el estudio del cambio* en el pensamiento geométrico en las proposiciones del Libro Primero de los *Elementos* en contraste con sus homólogas del texto escolar *Geometría Plana* de Wentworth y Smith.

En cuanto a las prácticas asociadas al pensamiento geométrico euclidiano observables en el libro primero de los *Elementos*, en contraste con las proposiciones homólogas del texto escolar *Geometría Plana*, destacamos: la identificación de relaciones dadas entre elementos, la construcción de elementos iguales, la comparación, el establecimiento de nuevas relaciones entre elementos. Aclarando que en los *Elementos* estas prácticas descansan puramente en lo geométrico euclidiano, mientas que, en el texto escolar, por ejemplo, la comparación se realiza en un sentido aritmético o algebraico. Consideramos que, de esta forma se hace descansar, aunque no en su totalidad, la geometría en cuestiones aritméticas o numéricas. Además, se emplean herramientas como el compás y la regla, imponiendo con ellas un sistema métrico decimal. Por su parte, en la obra euclidiana se propicia la construcción de elementos de referencia que posibiliten la comparación y establecimiento de relaciones entre otros elementos.

Identificamos entonces que la *comparación* en la Geometría de Euclides es una praxis recurrente, por lo que la consideramos como una *práctica*. Previo a ella se precisa de *la identificación de relaciones dadas*, lo que permite encadenar comparaciones, que se requieren para *establecer las relaciones entre elementos* –rectas, ángulos, superficies–, ya sean de igualdad, desigualdad o equivalencia. Relaciones que a la vez son usadas posteriormente para establecer otras relaciones como: la congruencia, la perpendicularidad, la linealidad, el paralelismo y equivalencias. Por ejemplo, cuando se comparan dos ángulos, si contar con una unidad de medida con la cual medirlos y establecer una relación entre ellos, entonces se crea un ángulo especial de referencia: el ángulo recto, un ángulo externo, o dos ángulos adyacentes alineados. Esta unidad de medida es un ente cualitativo que permite establecer la relación entre dos ángulos. Ante la imposibilidad de medir se compara, para llegar a una relación buscada; como no se puede hacer una comparación directa, entonces se construyen elementos auxiliares con los cuales se pueda realizar la comparación de los elementos deseados.

El estudio del cambio se encuentra presente en los *Elementos* y en el texto escolar desde las definiciones mismas, en el estudio de la variedad de relaciones posibles entre elementos de las figuras y la clasificación de estas.

Hablando sobre lo que denominamos *estudio del cambio* en el contexto geométrico euclidiano, reportamos que un primer sentido, refiere al estudio de las posibles relaciones dadas entre elementos de las figuras, lo que lleva al establecimiento de diferentes relaciones entre otros elementos de las mismas figuras. Ejemplo de ello, son las definiciones de los tipos de triángulos según la relación entre sus lados o según la relación de sus ángulos respecto de un ángulo de referencia –el ángulo recto–; o, por otro lado, como la relación entre dos rectas lleva al surgimiento de la perpendicularidad, la linealidad, el paralelismo, la igualdad. Dichas relaciones se establecen mediante comparaciones entre los elementos.

En los estudios del pensamiento y lenguaje variacional, la *variación* tiene un carácter dinámico, interesa, por ejemplo, como cambia la posición respecto del tiempo o como cambia una variable respecto de otra, en un mismo fenómeno o en dos fenómenos diferentes.

En el contexto geométrico euclidiano, lo que cambia es la relación entre los elementos –llámense segmentos, ángulos, superficies, disposición– interesa conocer la relación de un elemento respecto de otro, importa establecer una nueva relación entre dos elementos dada una relación previa y como cambia esta nueva relación, dado un cambio en la relación previa. Por su parte en el PyLV incumbe la cuantificación de la relación; además, el estudio del cambio involucra, pequeños cambios o cambios muy cercanos que garanticen el mismo comportamiento o la misma relación entre las variables. Mientras que, en Geometría euclidiana, un cambio es un cambio, sin importar que tan pequeño o cercano sea. Por ejemplo, dos rectas que se cortan y forman dos ángulos adyacentes iguales, son perpendiculares. Si cambia la relación entre las rectas, estas ya no son perpendiculares y se puede hablar entonces de linealidad, la relación que guardan es que forman dos ángulos rectos o iguales a dos rectos. Es decir, un cambio en la relación dada conlleva al establecimiento de una relación diferente.

En otro sentido, el *estudio del cambio* está presente en la utilización del método de reducción al absurdo para determinar una imposibilidad al realizar un cambio en una relación dada o buscada. Esto es, mediante un cambio en la relación de dos elementos se llega al establecimiento de dos relaciones diferentes entre otros elementos, relaciones que son imposibles de darse al mismo tiempo.

Finalmente, en cuánto a las prospectivas de la presente investigación, consideramos que un estudio a profundidad de los subsecuentes libros de los *Elementos* puede aportar aspectos de relevancia en cuanto al funcionamiento del pensamiento geométrico euclidiano, así como su contraste con textos escolares más actuales. Además, dado el análisis contextual de la obra euclidiana, creemos que sería enriquecedor estudiar la forma en que se llega al establecimiento de algunas proposiciones, ya que los *Elementos* son una exposición deductiva de enunciados geométricos de los que no se conoce mucho acerca de su construcción.

Referencias Bibliográficas

Aigeneren, M. (2009). *Análisis de contenido: Una introducción*. Material compilado para el Área de Estrategias de Investigación Social. Universidad de Antioquia, Facultad de Ciencias Sociales, Departamento de Sociología. Medellín: Colombia. Recuperado de: https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/ceo/article/download/1550/1207

Andréu, J. (2000). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada.* Fundación Centro Estudios Andaluces, Universidad de Granada, 10(2), pp. 1-34. España: Universidad de Granada.

Archibald, R. (1949) *Outline of the History of Mathematics*. Ohio, USA: Mathematical Association of America, Inc.

Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio*. Vigésima reimpresión. México: Publicaciones Cultural.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Tercera reimpresión. Madrid: Alianza editorial.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores *Educación Matemática, 24(2),* pp. 9-35. México: Grupo Santillana.

Caballero, M. (2012). *Uso de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los profesores de bachillerato* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Caballero, M., y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 1197-1205.

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación de área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Cabañas-Sánchez, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 1031-1040.

Cabrera, L. (2009). El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Cáceres (2003). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Revista de la escuela de psicología facultad de filosofía y educación Pontificia Universidad Católica de Valparaíso*, 2, pp. 53-82.

Cantoral, R. (2004). Pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, pp. 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Un estudio sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Un estudio sobre la construcción social del conocimiento*. 2da edición. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 7(3)*, pp. 91-116.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, pp. 463-8. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. y Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education, 50(1-2),* pp. 77-89. Doi: https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Chace, A., Manning, H. y Archibald, R. (1927). *The Rhind mathematical papyrus. Volume I*. Mathematical Association of America. Ohio, USA.

Clark, D. (2016). The Teaching of Geometry. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/303288656_The_Teaching_of_Geometry.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión Socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un* *reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México; Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Cruz-Márquez, G. (2018). De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Çamorano, R. (1576). *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides*. Traducción a la lengua española. Sevilla, España.

Duval, R. (1998). Reasoning in geometry. In C. Mammana y V. Villani (Ed.). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century. An ICMI study* (pp. 29-83). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses*. Tesis de Doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Espinoza, L., Vergara, A. y Valenzuela D. (2017). La geometría escolar en crisis: una confrontación con la olvidada "óptica de Euclides". *Revista Premisa, 19 (74)*

Fernández, (2004). *El Método de Multiplicadores de Lagrange*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ferrater, J. (1964). *Diccionario de Filosofía*. 5ta edición. Buenos Aires, Argentina: Editorial Sudamericana.

Fitzpatrick, R. (2008) *Euclid´s Elements of Geometry*. Edited and provide with the modern English translation of: The Greek Text of J. L. Heiberg (1883-1885).

Guacaneme, E. (2012). *Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

González, M. y Sierra M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo xx. *Enseñanza de las ciencias 22(3),* 389–408.

Gow, J. (1884) *A Short History of Greek Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hansen, V. L. (1998). Geometry: past and future. In C. Mammana y V. Villani (Ed.). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century. An ICMI study* (pp. 9-28). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Heath, T. (1921). *A History of Greek mathematics. Volume* I. Oxford, USA: At the Clarendon Press.

Herhskowitz, R. (1998). Reasoning in geometry. In C. Mammana y V. Villani (Ed.). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century. An ICMI study* (pp. 29-83). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Leach, J. (2017). American Education Reform and the Humanism of Mathematics, 1890-1940". Undergraduate Honors Theses. Paper 1066. USA: College of William and Mary. W&M Scholar Works. Recuperado de: https://scholarworks.wm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2078&context=honorstheses.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. XXI, *Revista de Educación, 4,* 167-179. Huelva, España: Universidad de Huelva.

López-Acosta, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria hipotética de aprendizaje basada en el pensamiento y lenguaje variacional*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). Introduction. In C. Mammana y V. Villani (Ed.). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century. An ICMI study* (pp. 1-8). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum Qualitative Sozialforschung/Forum: Qualitative Social Research, 1(2).* Disponible en: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0002204.

Moise, E. y Downs, F. (1966) Geometría Moderna. Massachusetts, USA: Addison-Wesley.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 55-82). México: Lectorum.

Moreno-Durazo, A. (2018). Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Neugebauer, O. y Sachs, A. (1986) *Mathematical Cuneiform Texts*. American Oriental Society. USA: Cushing-Malloy, Inc. Michigan.

Proclo (1970). A commentary on the first book of Euclid´s Elements (G. Morrow, Trad.). New Jersey, USA: Princeton University Press. (Original works published ca. 410-485).

Puertas, M. (1991). Traducción anotada. En Vega y Puertas (Trad.), *Los Elementos. Libros I-IV*. (pp. 7-184) Madrid: Gredos.

Reyes-Gasperini, D. (2016a). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Reyes-Gasperini, D. (2016b). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Barcelona: Gedisa.

Rotaeche, R. (2012). Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico. Memoria Predoctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de

Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Seidenberg, A. (1962). The ritual origin of Geometry.

Serrano, E. (2000). Etimología de algunos términos matemáticos. *Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, SUMA (35)* 87-96. Disponible en: https://revistasuma.es/IMG/pdf/35/087-096.pdf.

Sinclair, N., Bartolini, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016) Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, 48, pp. 691–719. Doi: 10.1007/s11858-016-0796-6

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema 28 (50).* pp. 1525-1544.

Soto, D. y Reyes-Gasperini, D. (2011). En búsqueda de la exclusión en el discurso matemático escolar. En Lestón, P. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 24*. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Struik, D. (1980). *Historia concisa de las matemáticas* (P. Lezama y Noriega, Trad.). México: Instituto Politécnico Nacional. (Trabajo original publicado en 1948).

Thomas, I. (1951). Selections illustrating the history of Greek mathematics. Cambridge, USA: Harvard University Press.

Tinto, J. (2013). El análisis de contenido como herramienta de utilidad para la realización de una investigación descriptiva. Un ejemplo de aplicación práctica utilizado para conocer las investigaciones realizadas sobre la imagen de marca de España y el efecto país de origen. *Provincia, 29*. (pp. 135-173). Mérida, Venezuela: Universidad de los Andes.

Vega, L. (1991). Introducción general. En Vega y Puertas (Trad.), *Los Elementos. Libros I-IV*. (pp. 7-184) Madrid: Gredos.

Wentworth, G. y Smith, D. (1913). *Plane Geometry*. Boston, USA: The Atheneum Press.

Wentworth, G y Smith, D. (1979). *Geometría Plana y del Espacio*. Séptima edición. México: Porrúa.

Wentworth, G y Smith, D. (2001). *Geometría Plana y del Espacio*. Vigesimotercera edición. México: Porrúa.

Anexos

Complemento del análisis

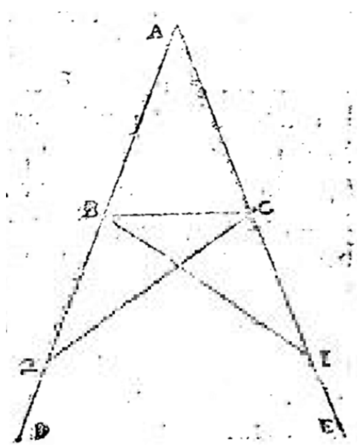
Proposición en los *Elementos*

P5 T2

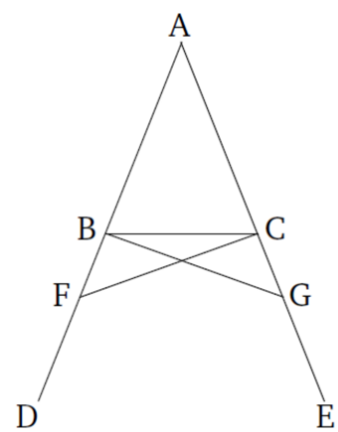
Los ángulos de los triángulos isósceles que están sobre la base son iguales entre sí. Y extendidas las líneas rectas iguales, serán también iguales entre sí los ángulos que están debajo de la base.

Sea el triángulo isósceles ABC que tenga el lado AB igual al lado AC, y sea BD y CE el resultado de la prolongación de los lados AB y AC, respectivamente. Digo que el ángulo ABC es igual que el ángulo ACB y que el ángulo CBD es igual que el BCE.

Figura 4.22. Triángulo isósceles



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Tómese al azar un punto F en la recta AD, y quítese de la mayor AE, la recta AG igual a la menor AF (P3) y trácense las rectas FC y BG.

Como AF es igual con AG, y AB igual a AC, las dos rectas FA y AC son iguales respectivamente a las dos rectas GA y AB, y comprenden el ángulo común FAG, por lo tanto, la base FC es igual a la base GB, y el triángulo AFC será igual que el AGB, y los ángulos restantes serán también iguales respectivamente (P4). Como AF es igual que AG, cuyas partes AB y AC son iguales entonces la parte restante BF será igual a CG. Se ha demostrado también que FC es igual que BG, entonces las dos rectas BF y FC son iguales a las dos rectas CG y GB, respectivamente y el ángulo BFC es igual que el CGB y su base común es BC; por lo tanto, el triángulo BFC será igual que el CGB y los ángulos restantes serán también iguales respectivamente. Así que es igual el ángulo FBC al ángulo GCB. Como se ha demostrado que el ángulo entero ABG es igual que ACF, cuyas partes respectivas CBG, BCF son iguales entonces el ángulo restante ABC es igual al restante ACB y están en la base de ABC. Se ha demostrado también que el ángulo FBC es igual que el GCB, situados debajo de la base.

Por consiguiente, en los triángulos isósceles, los ángulos que están sobre la base son iguales entre sí. Y prolongadas las rectas iguales, serán también iguales entre sí los ángulos que están debajo de la base.

La *P5* es referente a los ángulos en la base de un triángulo isósceles, que posteriormente se usará para obtener ángulos congruentes, dados dos segmentos congruentes. En este caso se construyen elementos auxiliares; pues, se prolongan los lados congruentes y se ubica en una de esas rectas un punto obteniendo un segmento más largo que el lado de triángulo; para luego cortar de la otra recta un segmento igual que el anterior. Dado que con ello obtiene dos pares de segmentos congruentes y ángulo que comparten ambos pares de segmentos, usa la P4 para obtener dos triángulos congruentes, cuyos ángulos respectivos serán congruentes. Después, vuelve a usar la P4, ahora con otro conjunto de lados y ángulos, lo cual resulta en la congruencia de otro par de ángulos. Por restar partes iguales de todos iguales, los resultados son iguales, concluye con la congruencia de ángulos buscada.

Partiendo de la igualdad de los dos lados de un triángulo isósceles, destacamos la construcción de elementos iguales –segmentos– para establecer la congruencia entre triángulos; que permite finalmente establecer la igualdad de los ángulos en la base del triángulo. La construcción de iguales posibilita la comparación de elementos.

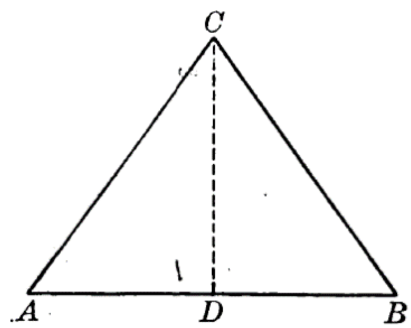
Proposición homóloga en el texto escolar

P4 Teorema

74. En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a lados iguales son iguales.

Y en el **E7.2** agrega lo referente a los ángulos debajo de la base.

Figura 4.23. Triángulo isósceles II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sea ABC un triángulo isósceles en que AC es igual a BC.

Demostrar que $\angle A = \angle B$

Trácese la bisectriz CD del ángulo ACB. Entonces en los triángulos ADC y BDC,

$AC = BC$, por hipót.

$CD = CD$. Identidad

$\angle ACD = \angle DCB$, (por construcción)

$\therefore \Delta ADC = \Delta BDC$. N° 68

$\therefore \angle A = \angle B$. N° 67 LCDD

Para demostrar esta proposición se construye la bisectriz y por medio del teorema de congruencia anterior, llega a la igualdad buscada entre los ángulos en cuestión. La secuencia de proposiciones que se sigue en el texto escolar en cuestión es diferente a la estructura de los Elementos. Puntualizando en el caso de la bisectriz, para demostrar la construcción se requiere del criterio de congruencia "LLL" y en el texto escolar dicho teorema aparece después. Como ya hemos mencionado anteriormente en la primera parte del texto escolar, que se corresponde con el libro primero de los Elementos, no se presenta argumentación en los problemas de construcción.

Podemos resaltar en esta proposición, en el caso de ambas obras, que el establecimiento de la relación de los ángulos se hace a partir de la comparación de dos segmentos. Pues para llegar a la congruencia buscada entre los ángulos se parte de la congruencia entre los lados; mediante la construcción de elementos auxiliares congruentes –segmentos– se pasa a la congruencia de triángulos, que conlleva finalmente a la congruencia de ángulos.

A partir de esta proposición y la anterior, se observa en el texto escolar, la escritura de la demostración en columnas, cuya justificación se referencia por el número del enunciado que valida dicho paso.

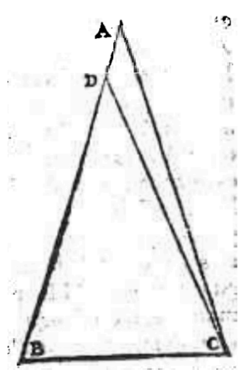
Proposición en los *Elementos*

P6 T3

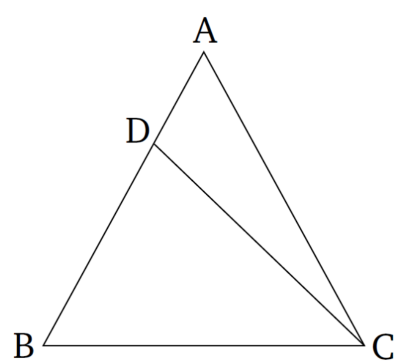
Si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales.

Sea el triángulo ABC, que tenga el ángulo ABC igual al ángulo ACB.

Figura 4.24. Triángulo isósceles III



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

También tendrá el lado AB igual al AC. Porque si no uno de ellos será el mayor. Sea AB el mayor, córtese del mayor AB una recta menor igual a AC (P3) y sea esta BD y tírese DC. Porque el lado BD es igual al AC y común la línea BC. Luego los lados BD y BC son iguales respectivamente a los lados AC y CB; y el ángulo DBC al ACB. Luego la base DC es igual a la base AB (P4) y el triángulo DBC será igual al triángulo al triángulo ACB. Es el menor al mayor, lo cual es imposible. Luego AB no es desigual al AC, será entonces igual.
Si los dos ángulos…

En la P6, trabaja el recíproco de la proposición precedente mediante el método de demostración por reducción al absurdo. Se comienza suponiendo que, teniendo ángulos iguales los lados serán desiguales, entonces corta del lado mayor un segmento igual que el lado menor. Con lo que se llega a la congruencia del triángulo inicial con un triángulo auxiliar, de donde una pareja de ángulos resulta congruente, siendo uno parte del otro, lo que no es posible; por lo tanto, los lados deben ser iguales. Esta proposición, al igual que la anterior se usarán posteriormente para obtener elementos congruentes, en este caso, serán segmentos.

Inicialmente se requiere establecer la relación de igualdad entre los lados de un triángulo, dada la relación de igualdad entre dos de sus ángulos. Al no ser posible una conclusión directa, se busca una contradicción al negar lo que se quiere probar, posibilitando entonces la construcción de iguales, que lleva a una contradicción, con lo que se asiente la primera conclusión.

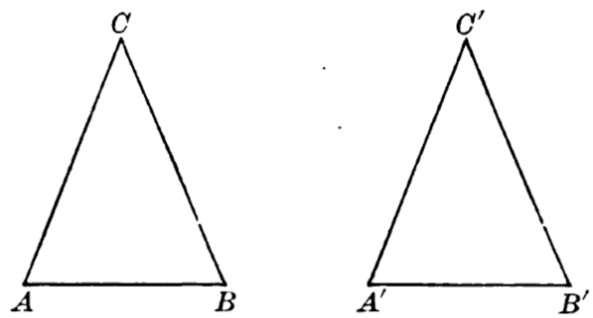
Estas dos proposiciones conforman otra categoría: triángulo isósceles, y son referentes a las propiedades que guardan los lados y ángulos en un triángulo isósceles. Posteriormente serán puestas en juego para obtener segmentos y ángulos congruentes, requeridos para la congruencia de otros elementos de los cuales se desconoce su relación.

Proposición homóloga en el texto escolar

P5 Teorema

76. Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a ángulos iguales son iguales y el triángulo es isósceles.

Figura 4.25. Triángulo isósceles IV



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sea ABC un triángulo en que los ángulos A y B son iguales. Demostrar que

$AC = BC$

Supóngase que el triángulo A´B´C´, es el triángulo ABC transportado a otra posición.

Voltéese el triángulo A´B´C y colóquese sobre el triángulo ABC tal que B´caiga sobre A y A´ en B.

Entonces B´A´ coincide con AB.   N° 51, 1°

$\angle A' = \angle B'$ Por hipót.

$\angle A = \angle A'$ Por hipót.

$\therefore \angle A = \angle B'$ N° 52, 7°

$\therefore B'C'$ tomará la dirección de AC.

De manera similar A´C´ tomará la dirección de BC.

Luego C´ caerá a la vez en AC y BC, y por lo tanto en C.

$\therefore B'C' = AC$

Pero B´C´ es lo mismo que BC.

$\therefore AC = BC$, LCDD

En este teorema, se parte de la suposición de un segundo triángulo igual que el dado, siguiendo con la superposición de uno sobre el otro, pero no en el mismo orden de correspondencia, sino otro. Compara dos ángulos, que por hipótesis son congruentes, a la vez que uno de ellos es congruente con un tercero también por hipótesis, lo que resulta en la congruencia de otra pareja de ángulos. Al ser iguales los ángulos se garantiza que al sobreponer un segmento sobre el otro, el primero caerá sobre el segundo. Lo que lleva a que un extremo caiga sobre dos de los segmentos, siendo este su punto de intersección; orillando a la congruencia de una pareja de segmentos, uno de los cuales es congruente con otro segmento por construcción, llegando de esta forma a la conclusión deseada.

En los *Elementos*, se llega por reducción al absurdo a un triángulo menor congruente con uno mayor, partiendo de la construcción de un lado del triángulo menor igual a un lado del triángulo mayor. Por otra parte, en el texto escolar se construye un triángulo auxiliar congruente con el dado, llegando por la superposición a la congruencia de los mismos triángulos en orden de correspondencia diferente con el que fueron construidos.

Proposición en los *Elementos*

P9 Prob. 4

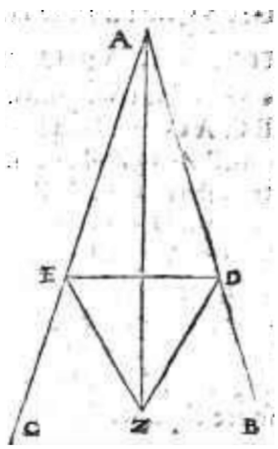
Dividir un ángulo rectilíneo dado, en dos partes iguales.

Sea BAC el ángulo rectilíneo dado.

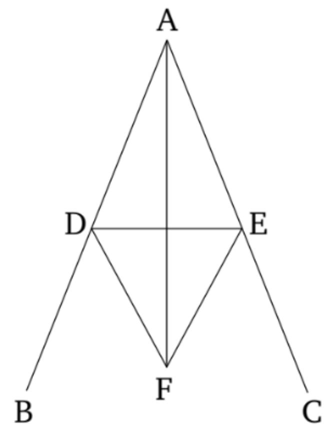
Así pues, hay que dividirlo en dos partes iguales.

Tómese en la línea AB, un punto D y córtese de AC la recta AE igual a AD (P3) y trácese DE, y constrúyase sobre DE el triángulo equilátero DEZ (P1), y trácese AZ. El ángulo BAC ha sido dividido en dos partes iguales por la recta AZ.

Figura 4.26. Mitad de un ángulo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues como AD es igual a AE y AZ es común, rectas DA, AZ son iguales respectivamente a las rectas EA, AZ. Y la base DZ es igual a la base EZ; por lo tanto, el ángulo DAZ es igual al ángulo EAZ (P8).

Por consiguiente, el ángulo rectilíneo dado BAC ha sido dividido en dos partes iguales por la recta AZ.

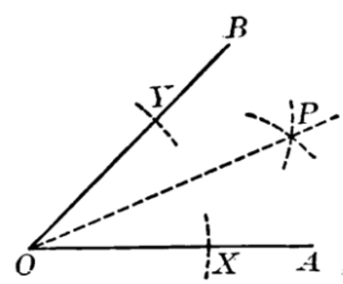
Para la *P9* se presenta el procedimiento para dividir un ángulo en dos partes iguales o lo que es lo mismo, trazar la bisectriz de un ángulo. Para ello se utiliza el triángulo equilátero, con el que se obtienen segmentos congruentes y con el criterio de congruencia Lado-Lado-Lado se llega a la congruencia dos triángulos, que a su vez conduce a la congruencia de dos ángulos que al ser ambos partes del ángulo inicial entonces serán la mitad de este. Dado que lo que se busca construir son dos ángulos iguales, se opta por llegar a la congruencia de triángulo solamente mediante lados, para ello se construye el triángulo equilátero. Tanto en los problemas de construcción como en los teoremas, se sigue una misma idea, para obtener la construcción deseada, dividir un ángulo en dos partes iguales, se construyen segmentos iguales sobre los lados del ángulo, y luego se construye un triángulo equilátero dada la P1, con lo que se obtienen segmentos iguales, llegando a la congruencia de dos triángulos, y con esta relación finalmente se llega a la congruencia de ángulos que son ambos parte del ángulo inicial.

Proposición homóloga en el texto escolar

E 1.8 Trazar la bisectriz de un ángulo dado.

Sea AOB el ángulo dado.

Figura 4.27. Bisectriz



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Haciendo centro en O, y con un radio conveniente, trácese un arco que corte a OA en C y a OB en D.

De C como centro, y con CD por radio, trácese un arco, y trácese otro análogo con el mismo radio, haciendo centro en D. Sea P el punto de intersección de estos dos arcos.

Trácese la recta OM.

Esta recta es la bisectriz del ángulo.

Como en los demás problemas de construcción solamente se presenta el procedimiento de construcción, sin proporcionar las argumentaciones que fundamentan dicha construcción. En esencia es el mismo proceso, sin mencionar el triángulo equilátero y sin trazar los segmentos auxiliares que permiten la construcción de triángulos congruentes que llevan a la congruencia de los dos ángulos en los que se divide el ángulo inicial. Además, se utiliza el compás para trazar segmentos congruentes sobre los lados del ángulo.

Se construyen dos ángulos que resultan ser iguales dada la construcción, al ser iguales y ser ambos, parte del mismo ángulo, entonces son la mitad de dicho ángulo. Esto mediante el trazado de segmentos iguales que permiten el establecimiento de la relación buscada entre dos ángulos.

Proposición en los *Elementos*

P10 Prob. 5

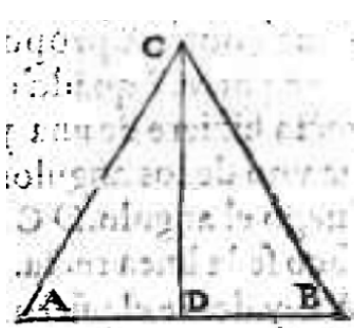
Dividir en dos partes iguales una línea recta finita dada.

Sea AB la línea dada.

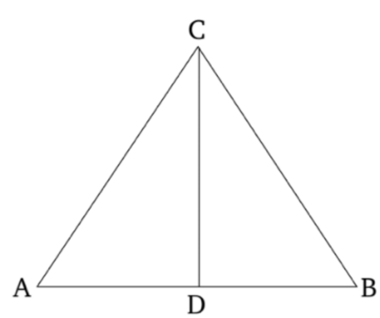
Así pues, hay que dividir en dos partes iguales la recta finita AB.

Constrúyase sobre ella el triángulo equilátero ABC (P1) y divídase en dos partes iguales el ángulo ACB mediante la recta CD (P9).

Figura 4.28. Mitad de un segmento



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

La recta AB ha sido dividida en dos partes iguales en el punto D.

Pues como la recta AC es igual a la recta AB y la recta CD es común entonces las dos rectas AC, CD son iguales respectivamente a las dos rectas BC, CD; y el ángulo ACD es igual al otro ángulo BCD; por lo tanto, la base AD es igual a la base BD (P4).

Por consiguiente, la recta finita dada AB ha sido divida en dos partes iguales en el punto D.

En la P10 se vislumbra el procedimiento para dividir un segmento en dos partes iguales –encontrar el punto medio de un segmento– valiéndose nuevamente del triángulo equilátero para obtener segmentos congruentes y luego usar la proposición anterior para obtener ángulos congruentes. Luego, con el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado llegar a la congruencia de triángulos para finalmente llegar a la congruencia de dos segmentos que son cada uno la mitad del segmento dado.

Las P9 y P10 comparten el hecho de ser problemas de construcción para obtener mitades de ángulos y segmentos, respectivamente; posteriormente serán puestas en juego para obtener segmentos y ángulos congruentes, que llevan a su vez a la congruencia de triángulos, con lo que podemos obtener nuevamente la congruencia de otros elementos.

Proposición homóloga en el texto escolar

E1.7. Dividir una recta dada en dos partes iguales.

Sea AB la recta dada.

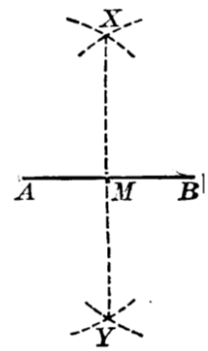
Se trata de dividir AB en dos partes iguales.

De A como centro y con AB por radio trácese un arco. De B como centro, y con el mismo radio, trácese otro arco.

Estos dos arcos se cortarán en los puntos C y D.

Trácese la recta CD.

Figura 4.29. Mitad de un segmento II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Esta recta corta AB en M, punto medio de AB.

Wentworth y Smith hacen en este caso simplemente uso de arcos de circunferencia; aunque lo que en el fondo lo que se construye con ellos son segmentos congruentes. Lo que en los Elementos sería construir dos triángulos equiláteros uno a cada lado del segmento dado y trazar un segmento uniendo los vértices opuestos al segmento común a ambos triángulos. En ambos casos se valen del triángulo equilátero para la construcción de elementos congruentes, que llevan a la obtención de los segmentos congruentes que se requieren en el enunciado. Estás dos proposiciones comparten la característica de ser la división de ángulo y un segmento en dos partes iguales, de otro modo, también son para la construcción de iguales.

Proposición en los *Elementos*

P11 Prob. 6

Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto en ella.

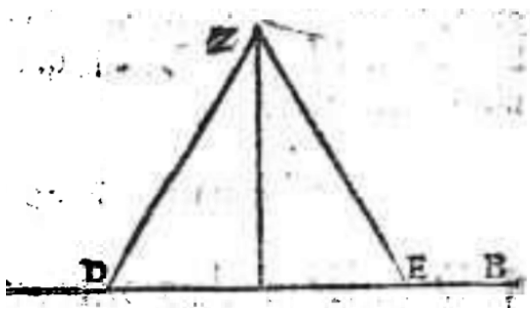
Sea AB la recta dada y sea C el punto dado en ella.

Hay que trazar una recta que forme ángulos rectos con la recta AB desde el punto C.

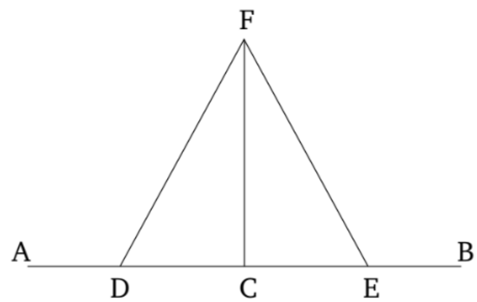
Tómese el punto D al azar sobre la recta AC y hágase CE igual a CD (P3), y constrúyase sobre DE el triángulo equilátero FDE (P1) y trácese FC.

Ha sido trazada la línea recta FC que forma ángulos rectos con la recta dada AB, desde el punto C dado en ella.

Figura 4.30. Perpendicular



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Como DC es igual a CE y CF es común, los dos lados DC y CF son iguales respectivamente a los dos lados EC y CF; y la base DF es igual a la base FE; por lo tanto, el ángulo DCF es igual al ángulo ECF (P8) y son ángulos adyacentes. Y cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto (D10), por lo tanto, cada uno de los ángulos DCF y FCE es recto.

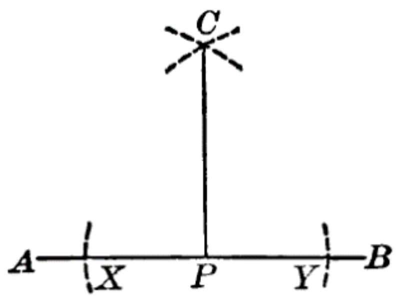
Por consiguiente …

La P11 es un problema de construcción en donde se muestra el procedimiento para trazar una perpendicular a una recta dada desde un punto en ella. Para ubicar dos puntos a la misma distancia del punto dado C usa la P3, que implícitamente lleva consigo el uso de la circunferencia. Posteriormente usa el triángulo equilátero para obtener segmentos congruentes con los cuales mediante el criterio Lado-Lado-Lado, encontrar la congruencia entre los dos ángulos adyacentes –que se forman entre las dos rectas–, al ser estos congruentes entonces son rectos. En ese sentido, construir una perpendicular no es más que construir dos ángulos adyacentes iguales en la intersección de dos rectas.

Proposición homóloga en el texto escolar

E1.1 De un punto dado en una recta dada, trazar una perpendicular a la recta.

Figura 4.31. Perpendicular II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sea AB la recta y P el punto dado.

Se trata de levantar en el punto P una recta perpendicular a AB.

Haciendo con centro en P y un radio conveniente, se traza X e Y, con centro en X e Y se trazan arcos con radio XY que se corten en P. PC es la perpendicular buscada.

Utiliza la circunferencia para encontrar dos puntos en la recta que estén a la misma distancia del punto dado en ella, luego mediante arcos de circunferencia encuentra un punto fuera de ella –la intersección de los arcos– y trazando la recta que une este último con el punto dado, obtiene la perpendicular.

En los Elementos se ubica un punto sobre la recta y usa la P3 que permite cortar de una recta un segmento congruente con uno dado; de esta manera encuentra dos puntos sobre la recta que están a la misma distancia del punto dado. Luego traza el triángulo equilátero y con la congruencia de triángulos llega a la congruencia de dos ángulos adyacentes cuyos lados no comunes están alineados. Por su parte en el texto escolar, también se llega a la misma construcción, en el fondo utilizando las mismas construcciones auxiliares, un triángulo equilátero.

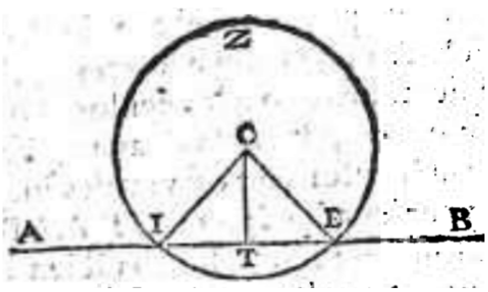
Proposición en los *Elementos*

P12 Prob 7

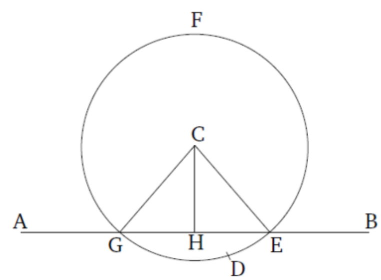
Trazar una recta perpendicular a una recta infinita dada, desde un punto dado que no está en ella.

Sea AB la recta infinita dada y C el punto fuera de ella.

Figura 4.32. Perpendicular III



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Hay que trazar una línea recta perpendicular a la recta infinita dada AB desde el punto dado C que no está en ella.

Tómese al azar, el punto D al otro lado de la recta AB (en Çamorano, 1576: "en una parte de la misma línea recta") y con centro en C y distancia CD descríbase el círculo EFG (Post. 3) y divídase en dos partes iguales la recta EG en H (P10), y trácense las rectas CG, CH, CE (Post. 1)

Ha sido trazada la recta CH perpendicular a la recta infinita dada AB desde el punto dado C que no está en ella.

Como GH es igual a HE y HC es común, los dos lados GH, HC son iguales respectivamente a los dos lados EH y HC; y la base CG es igual a la base CE; por lo tanto, el ángulo CHG es igual al ángulo EHC (P8). Y son adyacentes. Ahora bien,

cuando una recta levantada sobre otra recta hace los ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto, y la recta que se ha levantado se llama perpendicular a aquella sobre la que está (D10).
Por consiguiente, se ha trazado la recta…

En la P12, igualmente un problema de construcción, se plantea el procedimiento para trazar una recta perpendicular a una recta dada, esta vez por un punto que no está en ella. Empieza trazando una circunferencia con centro en el punto mencionado y que corte en dos puntos a la recta dada; luego divide el segmento resultante por la mitad y en conjunto con dos radios de la circunferencia antes trazada que van hasta los puntos de corte, obtiene los segmentos congruentes necesarios para aplicar el criterio de congruencia Lado-Lado-Lado y concluir con la congruencia de los ángulos adyacentes que serán rectos.

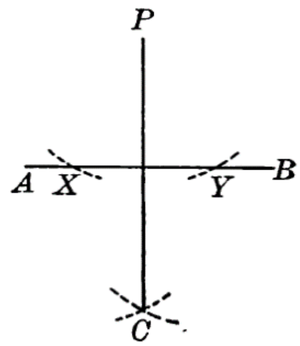
En las *P11* y *P12*, propone el método para trazar rectas que formen ángulos rectos (perpendicularidad) amparándose en la D10, donde se enuncia que: si una recta levantada sobre otra forma ángulos adyacentes iguales, entonces cada uno de esos ángulos es recto y la recta es llamada perpendicular. La demuestra mediante la P8, valiéndose en la primera del uso del triángulo equilátero, y en la segunda de la circunferencia para encontrar un segmento en la recta finita dada.

Este grupo de proposiciones que va desde la P9 a la P12 forman parte también de la categoría: construcción de iguales. En las bisecciones por basarse en la construcción de ángulos y segmentos iguales; en las perpendiculares, por consistir en la construcción de ángulos adyacentes iguales entre dos rectas.

Proposición homóloga en el texto escolar

E1.2 Desde un punto fuera de una recta dada trazar una perpendicular a la recta.

Figura 4.33. Perpendicular IV



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sean AB la recta y P el punto dado.

Se trata de bajar del punto P una perpendicular a la recta AB.

De P como centro, y un radio conveniente, descríbanse arcos que corte AB en X e Y.

Haciendo centro primero en X y luego en Y, descríbanse con un mismo radio dos arcos que se corten en un punto C. Trácese con la regla una recta por P y C, la cual será la perpendicular requerida.

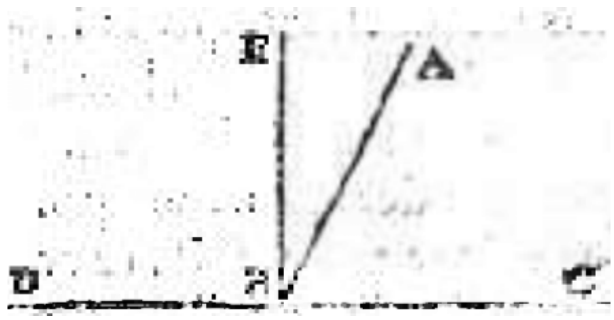
Se realiza un procedimiento similar en el E1.1, construyendo una circunferencia y arcos con radios iguales; si embargo, en la construcción no resulta tan evidente la congruencia deseada entre los ángulos adyacentes que serán iguales, por lo tanto, rectos. Es un proceso más general que el planteado en los Elementos, por lo que requiere más esfuerzo en las argumentaciones que lo hacen válido. Los procedimientos en ambas obras son en esencia iguales, solamente que en el texto escolar se debe aludir a la congruencia entre las semi-cuerdas cortadas por un radio.

Proposición en los *Elementos*

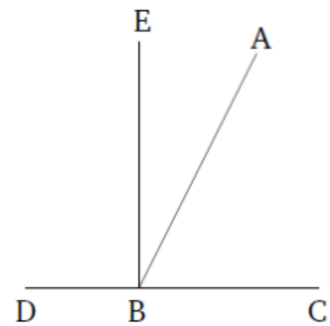
P13 T6

Si una línea recta levantada sobre otra forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien iguales a dos rectos.

Figura 4.34. Linealidad



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Forme una recta cualquiera AB levantada sobre la recta DC los ángulos CBA, ABD. Digo que los ángulos CBA, ABD son o bien dos rectos o iguales a dos rectos.

Si CBA es igual a ABD, son dos rectos (D10). Pero si no, trácese desde el punto B la recta BE que forme ángulos rectos con CD (P11); entonces los ángulos CBE, ABD son dos rectos; dado que el ángulo CBE es igual a los dos ángulos CBA, ABE, añádase al uno y a los otros el ángulo EBD; entonces los ángulos CBE, EBD son iguales a los tres ángulos CBA, ABE, EBD (NC2). Como el ángulo DBA es igual a su vez a los dos ángulos DBE, EBA añádase al uno y los otros el ángulo ABC; entonces los ángulos DBA, ABC son iguales a los tres ángulos DBE, EBA, ABC (NC2). Pero se ha demostrado que también los ángulos CBE, EBD son iguales a esos mismo tres; ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí (NC1); por tanto, los ángulos CBE, EBD son también iguales a los ángulos DBA, ABC. Pero los ángulos CBE, EBD son dos rectos; por tanto, los ángulos DBA, ABC son también iguales a dos rectos.

Por consiguiente…

La P13, versa sobre una recta que se levanta sobre otra, entonces, formará dos ángulos rectos o iguales a dos rectos. Al cortarse dos rectas, si los ángulos adyacentes que se forman son iguales, entonces son rectos. Aquí pone en juego un significado diferente al que solemos potenciar hoy en día sobre los ángulos rectos, esto es, al cortarse dos rectas, si se forman ángulos adyacentes iguales, entonces son ángulos rectos. En caso de no ser iguales se realiza un trazo auxiliar valiéndose de la P11 para trazar la perpendicular; luego, se parte del hecho de que la suma de dos ángulos conforma otro ángulo. Después de un juego de comparaciones determina que dos parejas de ángulos son iguales a la suma de tres, con lo que llega a que la suma de esos dos ángulos es igual a dos rectos.

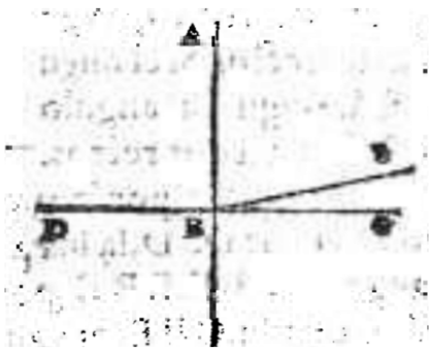
No se encuentra un enunciado homólogo en el texto escolar, creemos que por la aritmetización de la clasificación de los ángulos o por la evidente validez del enunciado sin prueba alguna como se menciona en la siguiente proposición homóloga del texto escolar.

Está proposición relaciona la perpendicularidad con la linealidad, es decir, en la racionalidad euclidiana no hay cabida para los ángulos llanos, solamente se consideran los ángulos convexos, o sea, los menores que dos ángulos rectos. Para hacer referencia a ellos se alude a dos ángulos rectos.

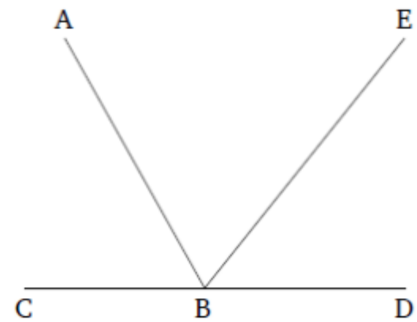
Proposición en los *Elementos*
P14 T7
Si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado (de ella) ambas rectas estarán en línea recta.

Sean dos rectas BC, BD que con una recta cualquiera AB y en un punto B de ella y sin estar colocadas en el mismo lado (de la recta AB), formen dos ángulos adyacentes ABC, ABD iguales a dos rectos.

Figura 4.35. Linealidad II



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que BD está en línea recta con CB.

Pues si BD no está en línea recta con BC, esté BE en línea recta con CB.

Dado que la recta AB ha sido levantada sobre la recta CBE, entonces los ángulos ABC, ABE son iguales a dos rectos (P13); pero también los ángulos ABC, ABD son iguales a dos rectos; por tanto, los ángulos CBA, ABE son iguales a los ángulos CBA, ABD (Post. 4 y NC1). Quítese de ambos el ángulo común CBA; luego el ángulo restante ABE es igual al ángulo restante ABD (NC3), el menor al mayor; lo cual es imposible. Por lo tanto, BE no está en línea recta con CB. Y de modo semejante demostraríamos esto de cualquier otra que no sea la recta BD. Por lo tanto, CB está en línea recta con BD.

Por consiguiente…

Para la P14, propone que el recíproco de la precedente: teniendo dos rectas forman con otra, ángulos adyacentes iguales a dos rectos, entonces las dos rectas están alineadas. Inicia suponiendo que no están alineadas por lo que existe otra que está alineada, valiéndose de la precedente entonces los ángulos adyacentes formados por estas dos rectas serán igual a dos rectos. Por hipótesis tiene otro par de ángulos cuya suma es igual a dos rectos; por resta llega a una igualdad de ángulos, donde la parte es igual al todo, lo que es imposible; por lo tanto, llega a la conclusión deseada.

Al suponer una recta que si está alineada se consigue generar una igualdad entre ángulos con base en la P13. Luego de esto, entonces se llega a la igualdad entre una parte y su todo, lo que no es posible; por lo tanto, esa recta supuesta no está alineada sino la inicial. Al final de la demostración se concluye diciendo que lo mismo se puede probar para cualquier otra recta que no sea la inicial. Evidenciando de esta manera que variar mínimamente o considerar todas las posibles rectas, lleva a la misma conclusión, es decir, si cambiamos la hipótesis inicial, las rectas no estarán alineadas.

Proposición homóloga en el texto escolar

E43. Propiedades de los ángulos suplementarios. Es suficientemente evidente para ser tomado sin prueba que:

1. Los dos ángulos adyacentes que forman una línea recta son juntos iguales a un ángulo llano.
2. Si la suma de dos ángulos adyacentes es igual a un ángulo llano, sus lados exteriores están en la misma recta.

Como podemos destacar de la expresión literal en el enunciado "es suficientemente evidente para ser tomado sin prueba", lo toma como un conocimiento básico, por lo que no necesita dar una prueba; luego se mencionan las propiedades que cumplen los ángulos adyacentes que forman una línea recta.

Debemos rescatar que la validez de una proposición es relativa a una comunidad en su contexto; lo que es válido sin prueba alguna para un grupo de personas, puede ser no válido para otros. Como podremos contemplar adelante, en los Elementos está proposición será usada para la demostración de proposiciones posteriores, donde se deja ver su importancia y relevancia; la misma permite por ejemplo demostrar el teorema de Pitágoras, la suma de ángulos internos en un triángulo, sin hacer necesaria mención del ángulo llano, sino más bien de su equivalencia con dos ángulos rectos.

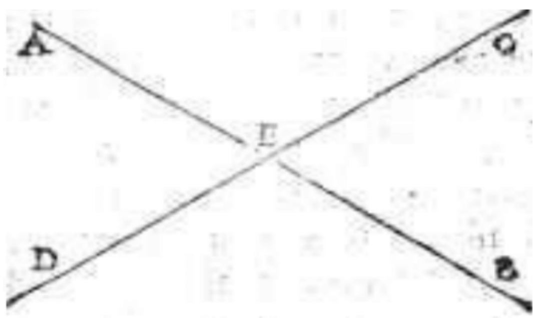
Proposición en los *Elementos*

P15 T8

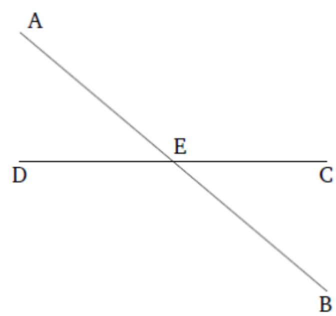
Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí.

Córtense las dos rectas AB, CD en el punto E.

Figura 4.36. Ángulos en el vértice



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que el ángulo AEC es igual al ángulo DEB y el ángulo CEB al AED.

Dado que la recta AE ha sido levantada sobre la recta CD formando los ángulos CEA, AED, entonces los ángulos CEA, AED son iguales a dos rectos (P13). Dado que la recta AE ha sido levantada a su vez sobre la recta AB formando los ángulos AED, DEB entonces los ángulos AED, DEB son iguales a dos rectos. Pero se ha demostrado que los ángulos CEA, AED son iguales a dos rectos; luego los ángulos CEA, AED son iguales a los ángulos AED, DEB (Post. 4 y NC1). Quítese de ambos AED; entonces, el ángulo restante CEA es igual al ángulo restante BED (NC3); de manera semejante demostraríamos que también los ángulos CEB, DEA son iguales. Por consiguiente…

La P15 es lo que conocemos en la actualidad como el teorema de *ángulos opuestos por el vértice*; en este caso, se vale de la P13 para encontrar dos sumas de ángulos, las cuales cada una de ellas es igual a dos rectos. Restando el ángulo común en ambas sumas, concluye con la igualdad deseada. Pone en juego nuevamente, la noción de ángulo recto como la igualdad entre ángulos adyacentes –significado soslayado en el dME– y la noción común de quitar partes iguales de todos iguales, entonces los restos son iguales.

Las *P13*, *P14* y *P15* conforman la categoría de la linealidad y tratan acerca de los ángulos formados por dos rectas que se cortan, específicamente sobre la idea de ángulos rectos como la igualdad de los ángulos adyacentes formados al levantar una recta sobre otra. Con ello se puede concluir que dos rectas están alineadas y la igualdad entre los ángulos no consecutivos formados alrededor del punto de intersección entre dos rectas que se cortan –ángulos opuestos por el vértice–. Desde la P10 hasta la P15 podemos concluir que se trabaja sobre la perpendicularidad para llegar a la linealidad, dejando entrever la íntima relación entre ambas nociones y cómo una lleva a la otra.

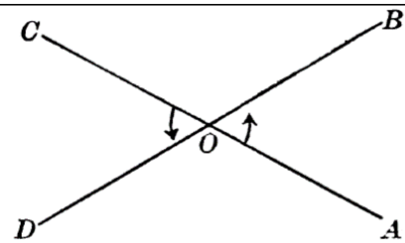
En estas tres nuevamente se deja ver la construcción o planteamiento de igualdades dadas las hipótesis iniciales, que conllevan por medio de comparaciones al establecimiento de las relaciones buscadas entre rectas y ángulos.

Proposición homóloga en el texto escolar

P1 T1

60. Si dos líneas se intersecan, los ángulos en el vértice son iguales.

Figura 4.37. Ángulos en el vértice II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Dadas las líneas AC y BD que se intersecan en O.

Probar que $\angle AOB = \angle COD$

$\angle AOB + \angle BOC = un \angle \, llano$	N° 43
Similarmente $\angle BOC + \angle COD = un \angle \, llano$	N° 43
$\therefore \angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$	N° 56, 6°
$\therefore \angle AOB = \angle COD$	N° 52, 1°, LCDD

En el caso de esta proposición en el texto escolar es el primer teorema que se presenta. Parte de la suma de dos ángulos que es igual un ángulo llano, la que iguala con otra suma de ángulos que también es igual a un ángulo llano. Como ambas sumas tienen un termino común, al quitarlo los resultados son iguales. De forma explícita, después del establecimiento de las igualdades primeras se refleja una separación hacia lo aritmético, empezando el tratamiento de los ángulos con una simbología semejante a la actual.

En esta proposición se evidencia el mismo razonamiento que la presentada en los Elementos: toman dos ángulos opuestos por el vértice, y los comparan mediante el uso de la proposición referente a ángulos adyacentes alineados. Toman dos sumas de ángulos que resultan ambas ser iguales a dos rectos –o un ángulo llano en Wentworth y Smith– con lo que llegan a la congruencia buscada entre los ángulos. Con la introducción de una aritmética con una simbología particular, en contraposición con la retórica euclidiana.

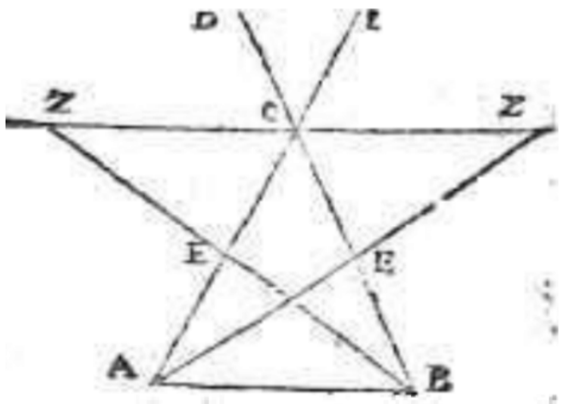
Proposición en los *Elementos*

P16 T9

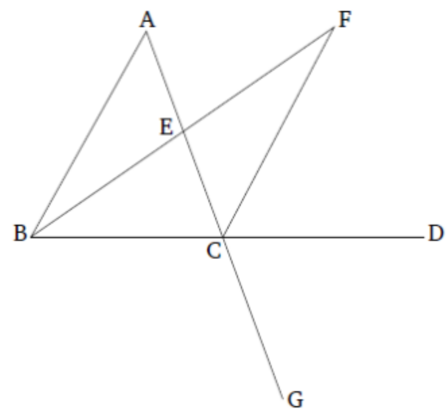
En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.

Sea el triángulo ABC y prolónguese uno de sus lados, BC, hasta D.

Figura 4.38. Ángulo externo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que el ángulo externo ACD es mayor que cada uno de los ángulos internos y puestos, CBA y BAC.

Córtese en dos partes iguales AC por el punto E y trazada BE prolónguese en línea recta hasta F y hágase EF igual a BE (P3), y trácese FC (Post. 1), y prolónguese por el otro lado AC hasta G (Post. 2).

Así pues, como AE es igual a EC y BE a EF, los dos lados AE, EB son iguales respectivamente a los dos lados CE, EF; y el ángulo AEB es igual al ángulo FEC; pues son opuestos por el vértice (P16). Entonces la base AB es igual a la base FC y el triángulo ABE es igual al triángulo FEC y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales son respectivamente iguales (P4), entonces, es igual el ángulo BAE al ángulo ECF. Pero el ángulo ECD es mayor que el ángulo ECF (NC5); luego el ángulo ACD es mayor que el ángulo BAE. Así pues, de manera semejante, si se divide en dos la recta BC, se demostrará que también el ángulo BCG, es decir el ángulo ACD (P15) es mayor que el ángulo ABC.

Por consiguiente…

La P16 se trabaja mediante construcciones auxiliares, trazando segmentos congruentes –a partir de puntos medios y la P3 para el trazado de segmentos congruentes– y con ángulos opuestos por el vértice, genera triángulos congruentes que llevan a la congruencia entre un ángulo interior BAC y el ángulo ACF que es una parte del ángulo exterior ACD. Partiendo de la noción común: el todo es mayor que la parte, llega a la conclusión deseada. Para ello, compara el ángulo externo con uno de los ángulos auxiliares generados mediante congruencia, lo que conlleva a la comparación entre el ángulo externo y el ángulo interno del triángulo, concluyendo con la desigualdad deseada.

Con esta proposición se inicia el grupo correspondiente a las desigualdades en un triángulo, primero que un ángulo interno es menor que un externo, siguiendo luego que dos internos son menores que dos rectos. Consideramos que estas proposiciones son fundamentales para el establecimiento del paralelismo en la P27, en especial la presente, son el vínculo entre la linealidad –es decir, dos ángulos rectos– y el paralelismo

Dada la proposición inicial se requiere establecer la relación de desigualdad entre dos ángulos, cosa que no es posible, sino mediante la construcción de iguales, esto es, segmentos iguales, ángulos iguales, triángulos iguales, que posibiliten la comparación entre los ángulos en cuestión.

En esta proposición vemos la puesta en juego de una secuencia de comparaciones – que en el caso del PyLV puede ser visto como una seriación– donde solamente es posible siguiendo una secuencia en esas comparaciones, no me puedo saltar a comparar el ángulo exterior con el interior sin antes pasar por un ángulo intermedio.

Proposición homóloga en el texto escolar

111. Corolario 3. Todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los internos opuestos y por tanto mayor que cada uno de los dos.

En el texto de Wentworth y Smith no se presenta demostración de los corolarios, estos aparecen inmediatamente después de un teorema, son un resultado inmediato de ellos. Aparece después del teorema sobre la suma de ángulos internos en un triángulo, cuya prueba es la misma que se presenta en la P32, con la inclusión de la aritmética y una simbología particular.

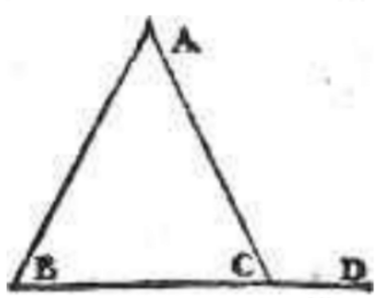
Proposición en los *Elementos*

P17 T10

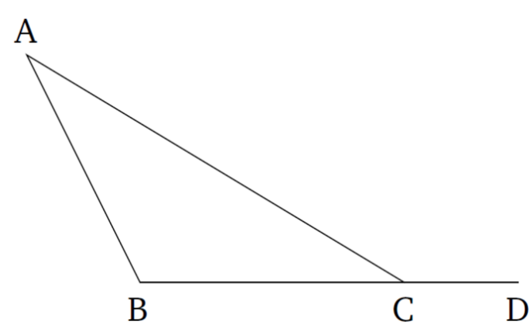
En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.

Sea ABC el triángulo.

Figura 4.39. Dos ángulos menores que dos rectos



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que dos ángulos del triángulo ABC tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.

Prolónguese BC hasta D (Post. 2). Puesto que el ángulo ACD es un ángulo externo del triángulo ABC, es mayor que el interno y opuesto ABC (P16). Añádase a ambos ACB; entonces los ángulos ACD, ACB son mayores que los ángulos ABC, BCA. Pero los ángulos ACD, ACB son iguales a dos rectos (P13); por lo tanto, los ángulos ABC, BCA son menores que dos rectos.

Y de manera semejante demostraríamos que también los ángulos BAC, ACB son menores que dos rectos, así como los ángulos CAB, ABC.

Por consiguiente…

Para demostrar esta proposición se vale de la anterior para decir que un ángulo exterior es mayor que cualesquiera de los dos ángulos internos y opuestos, toma uno de ellos el ABC y el externo ACD; les agrega a ambos el ángulo ACB; por lo que la desigualdad se mantiene y como el externo junto con el adyacente son iguales a dos rectos; entonces, dos internos cualesquiera son menores que dos rectos.

Vemos en este caso que para establecer la relación de desigualdad buscada entre dos ángulos internos cualesquiera y dos ángulos rectos, establece una relación de desigualdad conocida subyacente de la proposición anterior. Luego se agregan partes iguales a los desiguales, por lo que obtiene resultados desiguales, que luego se comparan para concluir con la desigualdad deseada.

Es válido decir en este momento, que en todas las proposiciones anteriores se partía de la construcción o establecimiento de relaciones de igualdad para concluir con una relación de igualdad o desigualdad como es el caso de la P16; sin embargo, en esta proposición se parte del establecimiento de una relación de desigualdad, para agregar iguales, lo que lleva a establecer la relación de desigualdad final.

No aparece una proposición homóloga en el texto de Wentworth y Smith, dado que se plantea como teorema inicial la suma de los ángulos internos en un triángulo y de ahí devienen algunos corolarios de los cuales no se presenta prueba.

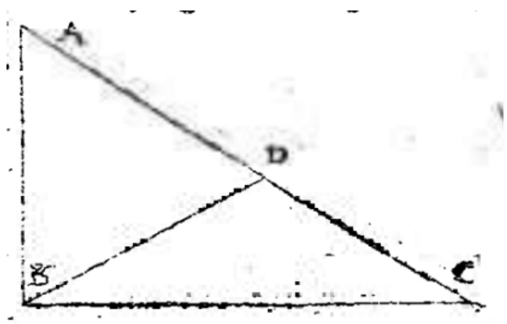
Proposición en los *Elementos*

P18 T11

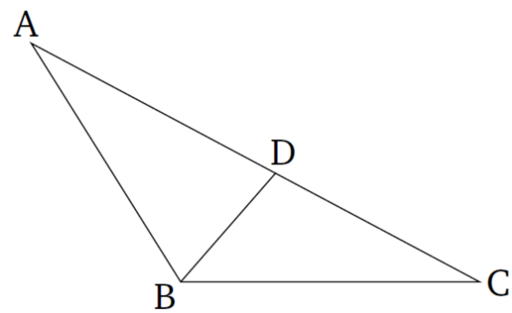
En todo triángulo, el lado mayor subtiende el ángulo mayor.

Sea ABC el triángulo que tiene el lado AC mayor que AB.

Figura 4.40. Lado mayor, ángulo mayor



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que el ángulo ABC es también mayor que el ángulo BCA.

Pues como AC es mayor que AB, hágase AD igual a AB (P3) y trácese BD.

Puesto que ADB es un ángulo externo del triángulo BCA, es mayor que el interno y opuesto DCB (P16); pero el ángulo ADB es igual al ángulo ABD, puesto que el lado AB es también igual a AD; por tanto, el ángulo ABD es también mayor que el ángulo ACB; luego el ángulo ABC es mucho mayor que ACB.

Por consiguiente…

La P18 es referente a la relación entre el ángulo mayor y el lado mayor en un triángulo, es decir, dado que un lado es mayor que los demás, entonces el ángulo que subtiende este lado también será mayor que los demás ángulos. Se parte de trazar un segmento congruente a uno de los lados menores del triángulo, mediante la P3, con lo que genera un triángulo isósceles, del cual se obtienen dos ángulos congruentes, uno de ellos el ABD es parte del ángulo mayor ABC, el otro ADB queda como externo de uno del triángulo BCD, por lo que es mayor que ángulo interno y opuesto BCD; y que a su vez es un ángulo interno del triángulo ABC. Al comparar el ángulo mayor ABC –el todo– con un ángulo auxiliar ABD –parte de este– que a su vez es congruente con el ángulo ADB, y este último es externo de uno de los triángulos, por lo que es mayor que el interno BCD, que es a su vez ángulo interno del triángulo ABC, se llega a la desigualdad buscada. Vemos entonces como una secuencia de comparaciones entre ángulos auxiliares construidos iguales, posibilitan el establecimiento de la relación de desigualdad deseada.

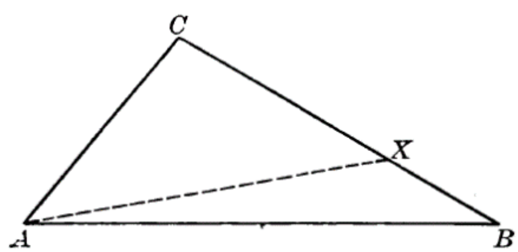
En esta proposición se establece una relación entre elementos de naturaleza distinta, pues, hay una relación entre un ángulo y un lado.

Proposición homóloga en el texto escolar

P21 Teorema

113. Si dos lados de un triángulo son desiguales, los ángulos opuestos a estos lados son desiguales, y el ángulo opuesto al lado mayor es mayor.

Figura 4.41. Lado mayor, ángulo mayor II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Dado el triángulo ABC con el lado BC mayor que AC

Probar que $\angle BAC > \angle B$.

En CB suponga CX igual a CA.

Trazar AX	Post. 1
Entonces $\Delta\, AXC$ es isósceles.	Nº 62
Entonces $\angle CXA = \angle XAC$	Nº 74
Pero $\angle CXA > \angle B$.	Nº 111
También $\angle BAC > \angle XAC$	Nº 52, 10º
Sustituyendo en esta desigualdad para $\angle XAC$ que es igual a $\angle CXA$, tenemos	
$\angle BAC > \angle XAC$,	Nº 52, 9
Y $\angle CXA > \angle B$,	
$\therefore \angle BAC > \angle B$.	Nº 52, 9, LCDD

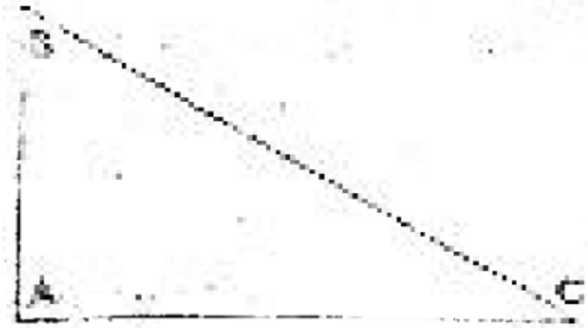
Se realiza el mismo procedimiento de demostración que en los *Elementos*, agregando en la parte inicial del enunciado la aclaración acerca de los lados desiguales. Se crean elementos auxiliares con los cuales poder establecer la relación entre los ángulos en cuestión, esto es, se crea un triángulo auxiliar con el cual se obtiene un ángulo externo con el que se pueden relacionar ambos ángulos del triángulo inicial. Aquí el establecimiento de la relación de desigualdad entre los ángulos en cuestión se da mediante la construcción de ángulos auxiliares comparables con cada uno de los iniciales.

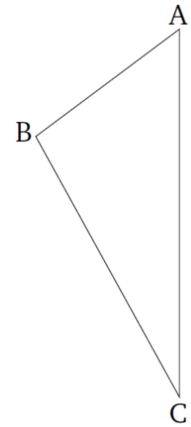
Proposición en los *Elementos*

P19 T12

En todo triángulo, al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.

Figura 4.42. Ángulo mayor, lado mayor





Fuente: Çamorano (1576) Fuente: Fitzpatrick (2008)

Sea ABC el triángulo que tiene el ángulo ABC mayor que el ángulo BCA.
Digo que el lado AC es también mayor que el lado AB.
Porque si no, o bien AC es igual a AB o menor; ahora bien, AC no es igual a AB; pues entonces sería también igual el ángulo ABC al ángulo ACB (P5), pero no lo es; por tanto, AC no es igual a AB. Ni tampoco AC es menor que AB; pues entonces sería menor el ángulo ABC que el ángulo ACB (P18); pero no lo es; por tanto, AC no es menor que AB. Pero se ha demostrado que tampoco es igual. Por tanto, AC es mayor que AB.
Por consiguiente…

En la P19 se demuestra el recíproco del teorema anterior, el lado mayor se opone al ángulo mayor y se recurre al método de demostración indirecta, pues se desea probar que, dado el ángulo mayor, el lado opuesto a este debe ser mayor que cualesquiera de los otros dos lados. Entonces, se prueba la imposibilidad de los otros dos posibles casos –que sea igual o menor a cualquiera de ellos–. En el primer caso se pone en juego la propiedad del triángulo isósceles –P5–, ya que si es igual el lado AC–que se desea probar mayor–, el ángulo mayor sería igual que uno de los menores, lo que no puede ser, dada la hipótesis inicial. Para probar que tampoco es menor usa la proposición anterior; dado que, si es menor, entonces el ángulo que por hipótesis es mayor, sería menor que uno de los otros dos. Con lo que la única opción posible es que el lado mayor se opone al ángulo mayor. Dada entonces, una hipótesis, construyo iguales o desiguales que me llevan a casos imposibles, que se contradicen con la hipótesis inicial; de esta manera se establece la relación buscada.

Vemos en esta proposición el análisis de las posibles opciones, de que manera dada una hipótesis inicial puedo variar mis resultados, llegando a que la única opción posible es la que se desea probar.

Proposición homóloga en el texto escolar

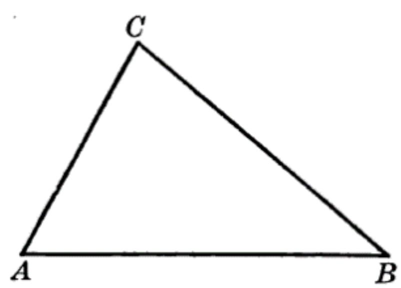
P22 Teorema

114. Si dos ángulos de un triángulo son desiguales, los lados opuestos a estos ángulos son desiguales, y el lado opuesto al ángulo mayor es mayor.

Dado el triángulo ABC en que el ángulo A es mayor que el B

Probar que $BC > CA$

Figura 4.43. Ángulo mayor, lado mayor II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

BC o es igual que CA, o menor que CA, o mayor que CA.

Pero si BC fuera igual que CA entonces el $\angle A$ debiera ser igual que el $\angle B$. N° 74

Y si CA fuera mayor que BC entonces el $\angle B$ debiera ser igual que el $\angle A$. N° 113

Pero si CA no es mayor que BC, es la única otra forma de decir que BC no es menor que CA.

Tenemos entonces, dos conclusiones a ser consideradas,

$\angle A = \angle B$, y $\angle A < \angle B$

Pero estas conclusiones son contrarias a las dadas, ya que el $\angle A$ es mayor que el $\angle B$.

Por lo tanto, BC no puede ser igual que CA o menor que CA, sin violar la condición dada, $\therefore BC > CA$. LCDD

En esta prueba se usa el método de demostración indirecta tal como se hace en los *Elementos*; esto es, demostrar que un lado es mayor que otro, demostrando la imposibilidad de que pueda ser igual o menor.

En ambos casos se usa la propiedad del triángulo isósceles para llegar a la contradicción cuando se supone que los lados sean iguales y la precedente para el caso en que sea menor.

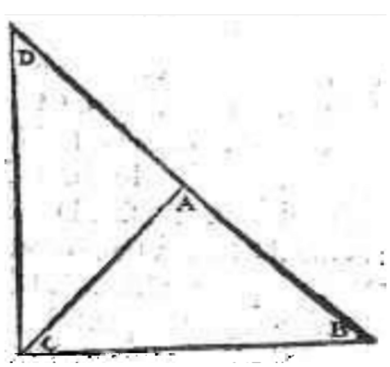
Proposición en los *Elementos*

P20 T13

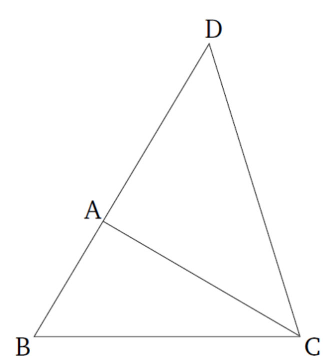
En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.

Sea ABC el triángulo.

Figura 4.44. Desigualdad triangular



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que dos lados del triángulo ABC tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, los lados BA, AC mayores que BC, los lados AB, BA mayores que AC, y los lados BC, CA mayores que AB.

Prolónguese por el otro lado BA hasta el punto D, y hágase AD igual a CA y trácese DC.

Como AD es igual a AC, también el ángulo ADC es igual al ángulo ACD (P5); por tanto, el ángulo BCD es mayor que el ángulo ADC (NC5); y puesto que DCB es un triángulo que tiene el ángulo BCD mayor que el ángulo BDC, y al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor (P19), entonces DB es mayor que BC. Pero DA es igual que AC; por tanto, los lados BA, AC son mayores que BC; de manera semejante demostraríamos que los lados AB, BC son también mayores que CA y los lados BC, CA mayores que AB.

Por consiguiente …

La P20 se dedica a la desigualdad triangular, específicamente, si se toman cualesquiera dos lados de un triángulo, juntos son mayores que el restante. Inicia extendiendo un lado BA del triángulo de modo que ese segmento exterior AD sea igual a al lado AC del triángulo. Construye el triángulo isósceles ACD para tener en el triángulo BCD un ángulo mayor BCD, al cual se opone un lado mayor BD, formado por dos de los lados del triángulo inicial, BA y AC, ese lado mayor del triángulo BCD es mayor que el lado BC, que a su vez es lado del triángulo inicial ABC. De esa manera llega a la conclusión deseada, que dos lados cualesquiera de un triángulo son mayores que el tercero.

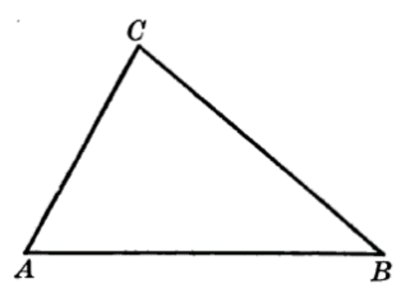
En este grupo de proposiciones – de la P16 a la P20– trabaja sobre las desigualdades y relaciones entre elementos de un triángulo –ángulos internos, ángulos externos, lados–. Por ejemplo, en la P16, la relación entre un ángulo externo y cada uno de los internos y opuestos. En la P17, la desigualdad entre cualesquiera dos ángulos de un triángulo y dos ángulos rectos, que tiene que ver con la forma euclidiana de ver o concebir a las rectas paralelas en los *Elementos* –que ha generado el surgimiento de nuevas geometrías–; pues la característica o propiedad por la que se orienta es que si no son paralelas pues formarán un triángulo, los dos ángulos internos del mismo lado, serán entonces menores que dos ángulos rectos, que tiene que ver también con la linealidad de segmentos o rectas. Las P18 y P19 refieren a la relación entre los ángulos y lados en un triángulo, en el sentido de al ángulo mayor le corresponde el lado mayor –opuestamente–. La P20 es la desigualdad entre los lados de un triángulo, la suma de dos cualesquiera de ellos, no solo una correspondencia, sino para cualquier par de ellos, su suma debe ser mayor que el tercer lado.

Proposición homóloga en el texto escolar

P20 Teorema

112. La suma de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado y la diferencia entre cualesquiera dos lados es menor que el tercer lado.

Figura 4.45. Desigualdad triangular II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Dado el triángulo ABC, con el lado mayor AB.

Probar que $BC + CA > AB$

$BC + CA > AB$ N° 53, 3°

(una línea recta es el camino más corto entre dos puntos) LCDD

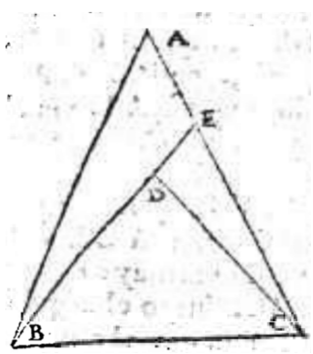
Demuestra esta proposición con el postulado que dice: El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une, dado que el segmento AB une los puntos A y B, y, por otro lado, AC, CB también los unen, pero pasando por C. Hay infinidad de formas para unir los puntos AB si variamos un poco la manera de unirlos, ninguna será más corta que el segmento lineal que los une.

Proposición en los *Elementos*

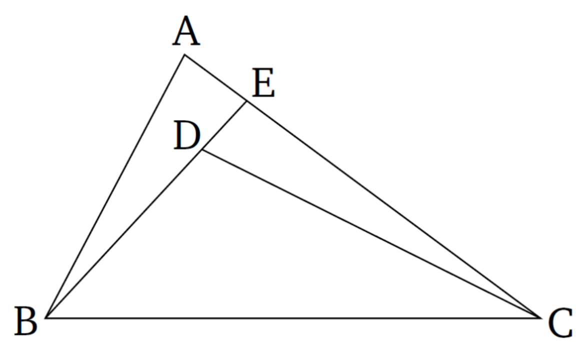
P21 T14

Si a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos rectas que se encuentren en el interior (de él), las rectas construidas serán menores que los dos lados restantes del triángulo, pero comprenderán un ángulo mayor.

Figura 4.46. Triángulo interior



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Sobre BC, uno de los lados del triángulo ABC, a partir de los extremos B. Constrúyanse dos rectas BD, DC que se encuentren en el interior de él.

Digo que BD, DC son menores que los dos lados restantes del triángulo BA, AC, pero comprenden el ángulo BDC mayor que el ángulo BAC.

Prolónguese BD hasta E. Y puesto que en todo triángulo dos lados son mayores que el restante (P20), entonces los dos lados, AB, AE del triángulo ABE son mayores que BE; añádase a uno y a los otros el lado EC, entonces BA, AC son mayores que

BE, EC. Asimismo, puesto que los lados CE, ED del triángulo CED son mayores que CD, añádase a uno y a los otros el lado DB; entonces CE, EB son mayores que CD, DB. Pero se ha demostrado que BA, AC son mayores que BE, EC; entonces BA, AC son mucho mayores que BD, DC.

Asimismo, como en todo triángulo, el ángulo externo es mayor que el interno y opuesto (P16); entonces en el triángulo CDE el ángulo externo BDC es mayor que el ángulo CED. Por la misma razón, también en el triángulo ABE el ángulo externo CEB es mayor que el ángulo BAC (es BAE). Pero se ha demostrado que el ángulo BDC es mayor que el ángulo CEB; luego el ángulo BDC es mucho mayor que el ángulo BAC.

Por consiguiente…

La P21 es un enunciado un tanto interesante en tanto que se demuestra que al construir a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo dos rectas que se encuentren en el interior del este, estas rectas serán menores que los lados restantes, pero comprendiendo un ángulo mayor. Puertas (1991) agrega una nota tomada de los comentarios de Proclo, referente a lo evidente de este teorema desde época de los epicúreos, diciendo que la percepción de validez de una proposición como esta es diferente de la prueba científica de esta (p. 40).

En esta proposición se comienza con el trazado de un segmento auxiliar extendiendo uno de los lados del triángulo interior hasta encontrar el lado del triángulo. Se vale de la desigualdad en la proposición precedente, para plantear varias desigualdades que llevan a la relación buscada. En suma, se realizan construcciones auxiliares que posibilitan comparación entre segmentos y sumas de segmentos para llegar a establecer la relación requerida.

En la segunda parte del enunciado, referente a la relación entre los ángulos formados por los lados del triángulo y los segmentos que se encuentran en el interior de este, se basa en la desigualdad entre el ángulo externo y los internos y opuestos en un triángulo. Las construcciones auxiliares, considerando los ángulos internos y externos, permiten la comparación entre los ángulos y el establecimiento de la relación de desigualdad que guardan.

Este conjunto de proposiciones –de la P16 a la P21– conforman la categoría: desigualdades en un triángulo. Versan sobre las posibles desigualdades en un triángulo, primero entre un ángulo interno y un ángulo externo, segundo entre dos ángulos internos y dos ángulos rectos, tercero se establece la relación entre el ángulo mayor y el lado mayor y viceversa, cuarto las desigualdades entre los lados de un triángulo, finalizando con las desigualdades entre los lados y ángulos de un triángulo y los lados y ángulos de un triángulo en el interior del primero. Una secuencia bastante interesante para establecer en la P22 la construcción de un triángulo dado sus tres lados, que está íntimamente relacionada con la desigualdad entre dos lados del triángulo con el tercero, dada la aclaración que plantea en la P22.

En cierto sentido, se deja entrever entre las proposiciones antes mencionadas como en el afán de generalizar constructivamente las relaciones entre los elementos de un triángulo, se recurre a ir variando, es decir, cambiando las relaciones. Primero se toma un ángulo externo y se establece su relación con el ángulo interno y opuesto.

Luego se toman dos ángulos y se establece su relación de desigualdad con dos ángulos rectos, íntimamente relacionado con el paralelismo –P27 y P32– dado que, si cada uno de estos ángulos es recto, entonces, no es posible formar el triángulo, esas rectas –en el sentido euclidiano– jamás se encontrarán por más que se extiendan. El descubrimiento de lo mencionado anteriormente quizá tuvo que ver con la observación de lo que sucede al cambiar la inclinación entre las rectas, hasta acercarse a un ángulo recto, concluyendo así con la idea del paralelismo tan criticada en los *Elementos*. Lo anterior es una conjetura propia, con base en el análisis del pensamiento geométrico euclidiano a través de las proposiciones del primer libro, dado que esta obra tiene más un carácter didáctico, hecho que ya mencionan autores como Boyer (1986). Entonces, no se muestra evidencia clara de la construcción del conocimiento que llevó al establecimiento de las proposiciones en el incluidas; es más una presentación de proposiciones en sentido sintético, es decir, se demuestran de manera lineal comenzando por la hipótesis hasta llegar a la conclusión. Sin embargo, hay evidencia del uso del método analítico, mencionado en Proclo (González, s.f), consistente en partir de la conclusión hacia atrás, hasta llegar a una relación conocida como válida. También el pensamiento inductivo pudo haber tenido importancia en la construcción de conjeturas que probadas con base en primeros principios –definiciones, postulados, nociones comunes– se vuelven teoremas.

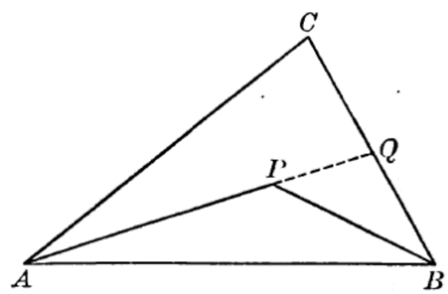
Posteriormente se puedo haber tomado los tres lados y establecer su relación con dos ángulos rectos, la cual se expone en la P32. Sin embargo, para ello se requiere del establecimiento del paralelismo, que como antes hemos mencionado se vincula a la P17. Por lo anterior, una vez agotadas las relaciones posibles entre ángulos, después de variar las posibles opciones, pasa a la relación entre el lado y el ángulo mayor y viceversa. En las dos anteriores destacamos que implícitamente se está comparando un ángulo y un lado con los demás de un triángulo, dado que es el opuesto al lado y ángulo mayor respectivamente. Luego se pasa en la P20, a exponer la relación de desigualdad entre dos lados de un triángulo con el tercero, agotando con ella todas las opciones posibles de comparación. Por otra parte, en la P21, se expone lo que sucede al variar la posición del vértice del triángulo al interior de este, resultando las relaciones de desigualdad entre parejas de segmentos, el caso en el que el punto está en el exterior, de cierta forma está incluido en dicha proposición, estando restringida su posición a la posición de los lados del triángulo inicial.

Proposición homóloga en el texto escolar

P7 Teorema

81. La suma de dos líneas desde un punto dado a los extremos de una línea dada es mayor que la suma de otras dos líneas similarmente trazadas, pero incluidas en estas.

Figura 4.47. Triángulo interior II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Dados CA y CB, dos líneas trazadas desde C a los extremos de la línea AB; PA y PB dos líneas similarmente trazadas, pero dentro de CA y CB.

Probar que $CA + CB > PA + PB$

Prolongar AP hasta encontrar CB en Q. N° 53, 2°

Entonces $CA + CQ > PA + PQ$ N° 53, 3°

De manera similar, $BQ + PQ > PB$ N° 53, 3°

Sumando las desigualdades tenemos

$CA + CQ + BQ + PQ > PA + PQ + PB$ N° 52, 5°

Sustituyendo CQ+ BQ que es igual a CB, tenemos

$CA + CB + PQ > PA + PQ + PB$ N° 52, 8°

Quitando PQ de ambos lados de la desigualdad, tenemos

$CA + CB > PA + PB$ N° 52, 4° LCDD

Como se observa en el texto escolar, se evidencia el mismo razonamiento que en los Elementos, con la aritmética y simbología similar a la que usamos actualmente. El establecimiento de las desigualdades se hace mediante la comparación de los segmentos formados después de los trazos auxiliares. Aunque, retomando la demostración en el enunciado anterior se podría haber realizado un razonamiento similar, ya que la recta que une dos puntos es la menor, por lo que la unión mayor serían los lados del triángulo, dado que los otros dos segmentos están en el interior del triángulo.

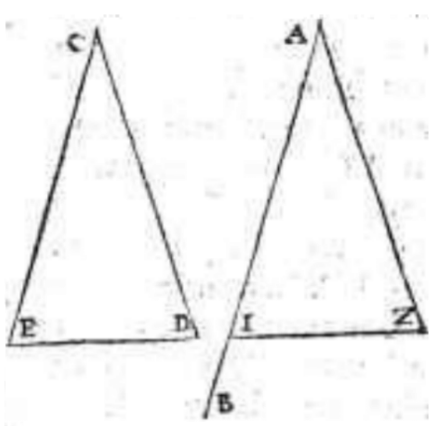
Proposición en los *Elementos*

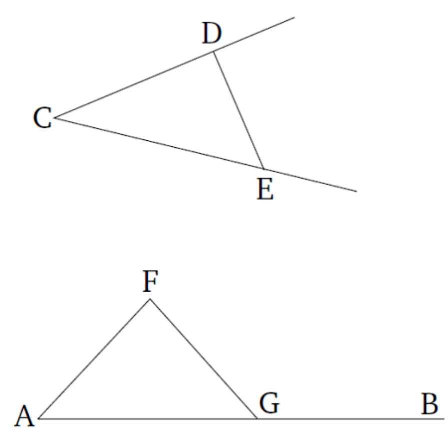
P23 P9

Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

Sea AB la recta dada, A uno de sus puntos y DCE el ángulo rectilíneo dado.

Figura 4.48. Construcción de un ángulo





Fuente: Çamorano (1576)

Fuente: Fitzpatrick (2008)

Así pues, hay que construir un ángulo rectilíneo igual al ángulo dado DCE sobre la recta dada AB y en su punto A.

Tómese al azar los puntos D, E en las rectas CD, CE, respectivamente, y trácese DE. Y con tres rectas que son iguales a las tres rectas CD, DE, CE, constrúyase el triángulo AFG de modo que CD sea igual a AF, CE a AG, y además DE a FG (P22). Pues bien, dado que las dos rectas DC, CE son iguales a las dos rectas FA, AG, respectivamente, y la base DE es igual a la base FG, entonces el ángulo DCE es igual al ángulo FAG (P8).
Por consiguiente…

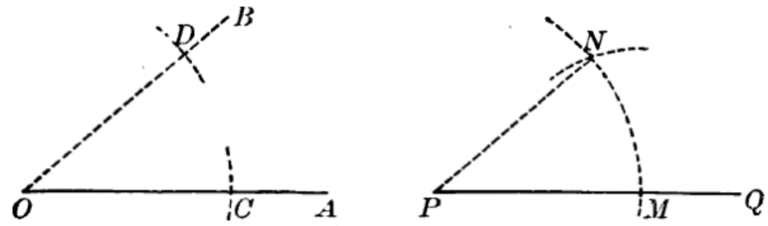
Para la P23, el siguiente problema de construcción, presenta el procedimiento para trazar un ángulo igual a otro, sobre una recta y en un punto de ella. Aclarando que no es solamente trazar un ángulo congruente con otro dado, sino que hacerlo sobre otra recta y que el vértice del ángulo sea un punto de esa recta dada. Se comienza tomando dos puntos en los lados que forman el ángulo y trazando un segmento auxiliar uniendo esos puntos, con lo que se forma un triángulo. Luego como ya tiene tres lados, traza el triángulo igual a este en la recta dada, con ayuda de la proposición previa. Por la P8 –Criterio LLL– los triángulos son congruentes con lo que los ángulos también lo serán y de esa manera se llega a la construcción deseada.

Vemos que la construcción de iguales –esta vez, segmentos– es la clave para poder comparar los resultados obtenidos y establecer la igualdad que se requiere.

Proposición homóloga en el texto escolar

E1.6 Desde un punto dado en una línea dada, construir una línea haciendo un ángulo igual a un ángulo dado.

Figura 4.49. Construcción de un ángulo II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sea P el punto dado en la línea PQ y el ángulo AOB el dado.

¿Qué es lo que se requiere?

Con centro en O y cualquier radio trazar un arco que corte AO en C y a BO en D.

Con centro en P y radio OC trazar un arco que corte a PQ en M. Con M como centro y radio CD dibujar un arco que corte al arco anterior en N, y trazar PN.

Entonces el ángulo MPN es el requerido.

Busca la misma idea de construir dos triángulos congruentes, manteniendo la medida de sus lados mediante arcos construidos con el uso del compás. Así pues, traza arcos en el ángulo inicial, que luego traslada a la recta dada. De igual manera, no se presentar la justificación de la construcción dada.

Las dos proposiciones anteriores entran en la categoría de construcción de iguales; pues, cuando se construye un triángulo dados sus lados, no es más que construir segmentos iguales en una posición tal que se forme un triángulo; igualmente para la construcción del ángulo. La misma construcción final, es construir iguales, y en su construcción también se acude a la construcción de segmentos congruentes para poder establecer la relación que se pide en la construcción.

Proposición en los *Elementos*

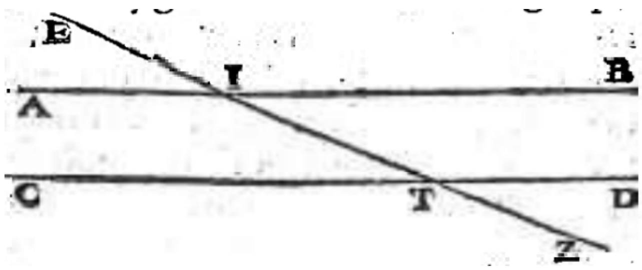
P28 T19

Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí.

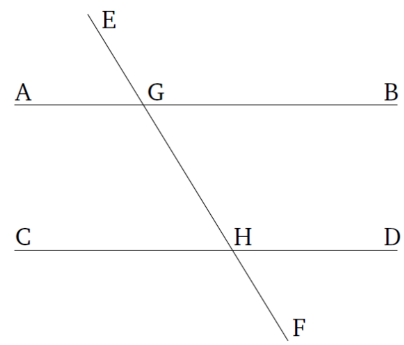
Así pues, al incidir sobre las dos rectas AB, CD, haga la recta EF el ángulo externo EGB igual al interno y opuesto GHD o los ángulos internos del mismo lado: BGH, GHD iguales a dos rectos.

Digo que AB es paralela a CD (P27).

Figura 4.50. Paralelismo III



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues como el ángulo EGB es igual al ángulo GHD, mientras que el ángulo EGB es igual al ángulo AGH (P15); entonces el ángulo AGH también es igual al ángulo GHD, y son alternos; por tanto, AB es paralela a CD (P27).

Como los ángulos BGH, GHD son iguales a su vez a dos rectos, también los ángulos AGH, BGH son iguales a dos rectos, por tanto, los ángulos AGH, BGH son iguales a los ángulos BGH, GHD; quítese de ambos el ángulo BGH; entonces el ángulo restante AGH es igual al ángulo restante GHD (NC3), y son alternos. Por tanto, AB es paralela a CD (P27).

Por consiguiente…

En la P28 se trabaja sobre en como la relación de igualdad entre los ángulos lleva a la relación de paralelismo entre las rectas. Primero, la igualdad entre el externo con el interno y opuesto del mismo lado; segundo, la igualdad entre los dos ángulos internos del mismo lado con dos ángulos rectos.

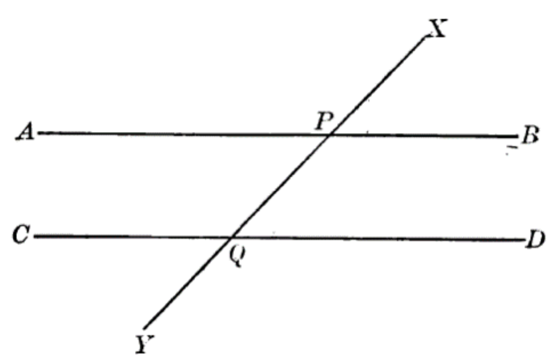
Para el primer caso, usa la P15 –ángulos opuestos por el vértice– partiendo de la relación de igualdad entre dos ángulos alternos internos y por la precedente se llega a la conclusión deseada. En el caso de que los ángulos internos del mismo lado juntos sean iguales a dos rectos, se comienza por comparar la suma de esos, con la suma de otro par de ángulos –uno de los internos y su adyacente– que son también iguales a dos rectos, al restar el ángulo común queda la igualdad entre dos ángulos, los cuales son alternos internos y con la proposición precedente concluye igualmente el paralelismo de las rectas.

Observamos, como partiendo de una relación conocida entre dos ángulos opuestos por el vértice, se llega mediante comparación al establecimiento de la relación buscada entre otra pareja de ángulos, en el segundo caso se involucra también la comparación entre todos y sus partes, resultantes de sustraer de los todos, una parte común.

Proposición homóloga en el texto escolar

E103 Corolario 1°. Si dos rectas situadas en un plano forman con una transversal, ángulos correspondientes iguales, esas dos rectas son paralelas.

Figura 4.51. Paralelismo IV



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

E105 Corolario 3°. Si una transversal corta dos rectas de modo que los ángulos externos y por tanto los internos de un mismo lado de la transversal son suplementarios, las rectas son paralelas.

Como ya hemos mencionado en páginas anteriores, en el texto escolar no se presenta demostración de los corolarios. Sin embargo, sugiere que este es consecuencia directa del enunciado 101, que corresponde en el texto escolar a la proposición mostrada anteriormente; la cual se demuestra iniciando con el supuesto de una paralela que luego coincidirá con la otra recta que se quiere probar paralela. Por lo anterior, los autores entonces sugieren en mismo razonamiento.

Proposición en los *Elementos*

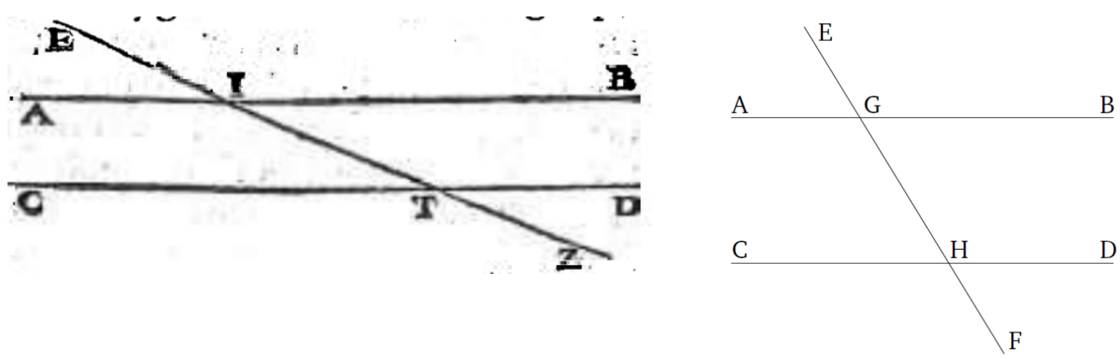
P29 T20

La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos.

Incida la recta EF sobre las rectas paralelas AB, CD.

Digo que hace iguales los ángulos alternos AGH. GHD, y el ángulo externo EGB igual al interno y opuesto GHD, y los internos del mismo lado: BGH, GHD, iguales a dos rectos.

Figura 4.52. Paralelismo V



Fuente: Çamorano (1576)	Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues si AGH no es igual a GHD, uno de ellos es mayor.

Sea AGH el mayor; añádase a ambos el ángulo BGH; entonces los ángulos AGH, BGH son mayores que los ángulos BGH, GHD. Pero los ángulos AGH, BGH son iguales a dos rectos (P31). Por tanto, los ángulos BGH, GHD son menores que dos rectos. Pero las rectas prolongadas indefinidamente a partir de ángulos menores que dos rectos se encuentran (Post. 5); luego las rectas AB, CD, prolongadas indefinidamente se encontrarán; pero no se encuentran, porque se las ha supuesto paralelas; por tanto, el ángulo AGH no es desigual al ángulo luego es igual. Pero el ángulo AGH es igual al ángulo EGB, (P15); por tanto, el ángulo EGB es también igual al ángulo GHD (NC1). Añádase a ambos BGH; entonces los ángulos EGB, BGH son iguales a los ángulos BGH, HGD (NC2). Pero los ángulos EGB, BGH son iguales a dos rectos (P13); por tanto, los ángulos BGH, GHD son también iguales a dos rectos.

Por consiguiente…

El caso de la P29 es el enunciado recíproco de las tres proposiciones previas de los *Elementos*; dadas la relación de paralelismo entre las rectas y la incidencia de otra sobre ellas, entonces establece la igualdad de ángulos alternos, el externo con un interno y opuesto, y los internos del mismo lado a dos ángulos rectos.

Para el caso de los ángulos alternos se comienza utilizando el método de demostración indirecta, suponiendo que uno ellos, el AGH es mayor que el GHD, agrega a cada uno de ellos el ángulo BGH –adyacente al primero e interno del mismo lado con el otro–; AGH junto con BGH –los adyacentes– son iguales a dos rectos, por lo que los internos del mismo lado son menores que dos rectos, entonces las rectas se encontrarán de ese lado, por el Post. 5; ello contradice la hipótesis inicial, entonces los ángulos no pueden ser desiguales, entonces deben ser iguales.

Para el segundo caso, el de los ángulos externo con el interno y opuesto, parte del primer caso, y solamente usa la P15 –ángulos opuestos por el vértice– para llegar al resultado deseado, al comparar un externo con el interno y opuesto. En el tercer caso se vale de la igualdad anterior y de la igualdad de ángulos adyacentes a dos rectos para concluir con lo deseado.

En esta proposición se reúnen los recíprocos de las tres previas, iniciando la demostración con la negación de la conclusión, lo que lleva por comparación al establecimiento de la relación de desigualdad entre dos ángulos internos del mismo lado con dos rectos, llegando a la contradicción con la hipótesis inicial del paralelismo de las rectas. Una vez probado el caso anterior, parte de esta relación de igualdad conocida para establecer el paralelismo entre las rectas.

En cuanto a las proposiciones homólogas a esta en el texto escolar, nada más las enuncia como corolarios, sin una prueba de estos.

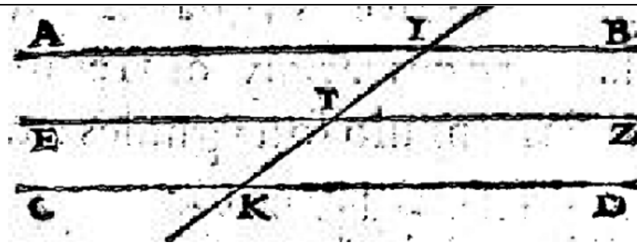
Proposición en los *Elementos*

P30 T21

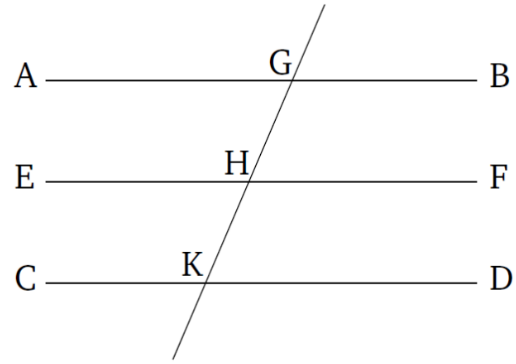
Las paralelas a una misma recta son también paralelas entre sí.

Sean cada una de las rectas AB, CD paralelas a EF.

Figura 4.53. Transitividad del paralelismo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que también AB es paralela a CD.

Pues incida sobre ellas la recta GK. Y dado que la recta GK ha incidido sobre las rectas paralelas AB, EF, entonces el ángulo AGK es igual al ángulo GHF (P29). Como a su vez la recta GK ha incidido sobre las rectas paralelas EF. CD, el ángulo GHF es igual al ángulo GKD (P29). Pero se ha demostrado también que el ángulo AGK es igual al ángulo GHF. Por tanto, el ángulo AGK también es igual al ángulo GKD (NC1); y son alternos. Por tanto, AB es paralela a CD.

Por consiguiente…

En la P30 se establece la relación de paralelismo entre dos rectas paralelas a una misma recta, que sería una extensión de la Noción Común sobre la relación igualdad entre cosas iguales a una misma cosa. En este caso, es una comparación en cuanto a una relación diferente, ya que no es igualdad, ni desigualdad, sino paralelismo. Inicia con el primer par de rectas paralelas, de las que toma y compara los ángulos alternos internos, para luego en la otra pareja de rectas para comparar uno de los ángulos anteriores –que es externo– con su correspondiente interno y opuesto. Con ello, se concluyen con la igualdad entre alternos internos de las rectas, llegando así por la P29 al paralelismo buscado entre las rectas. En este caso realiza igualmente una secuencia de comparaciones entre ángulos para llegar a la igualdad entre un par de ángulos que son alternos internos, con ello al paralelismo.

Proposición homóloga en el texto escolar
96. Corolario 2. Dos líneas paralelas a una tercera son paralelas la una a la otra.

Se comenta bajo este corolario que si se encontraran serían dos paralelas por un mismo punto (el punto donde se encuentran) con lo que contradicen el postulado de las paralelas del N° 94. Este razonamiento va acorde a la P17 del texto de Wentworth y Smith, proponiendo una contradicción con el postulado de la unicidad de las paralelas. En este caso es frágil la relación o contraste que se puede establecer con la proposición homóloga en los Elementos, dada la escasez de argumentos explícitos en el texto escolar.

Proposición en los *Elementos*

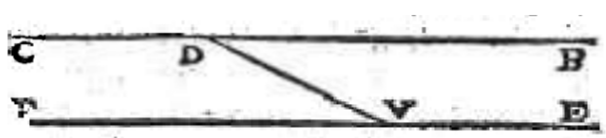
P31 P10

Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.

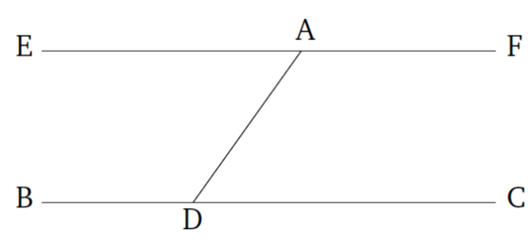
Sea A el punto dado y BC la recta dada.

Hay que trazar por el punto A una línea recta paralela a BC.

Figura 4.54. Construcción de una paralela



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Tómese al azar un punto D en BC y trácese AD; y constrúyase en la recta DA y en el punto A de ella el ángulo DAE igual al ángulo ADC (P23); y sea AF el resultado de prolongar en línea recta EA.

Y dado que la recta AD al incidir sobre dos rectas BC, EF ha hecho iguales los ángulos alternos EAD, ADC entonces EAZ es paralela a BC (P27).
Por consiguiente…

La P31 –el décimo problema de construcción– es el procedimiento para trazar por un punto dado, una recta paralela a una recta dada. Se inicia tomando un punto cualquiera en la recta y se traza el segmento que une ese punto con el punto dado; luego con la P23 –construcción de un ángulo congruente a uno dado– se traza un ángulo igual al ADC, de manera que sean alternos. De esta manera obtiene ángulos alternos internos congruentes que tienen como consecuencia el paralelismo entre las rectas. La forma de asegurar el paralelismo de las rectas es la comparación de los ángulos alternos internos construidos iguales y con base en los resultados de las proposiciones previas se llega al resultado deseado.

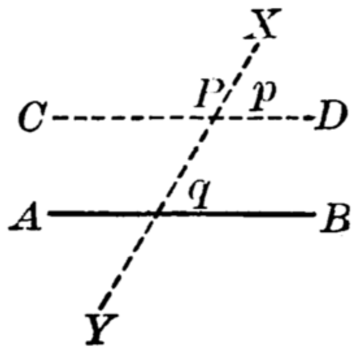
Con esta proposición se culmina el establecimiento del paralelismo entre rectas, la misma se requiere para demostrar la proposición siguiente con la que se terminan de establecer las relaciones entre elementos de un triángulo.

Proposición homóloga en el texto escolar

233. Corolario. Por un punto situad fuera de una recta, trazar una paralela a esa recta.

Sean AB la recta y P el punto dado.

Figura 4.55. Construcción de una paralela II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Por P trácese una recta cualquiera XPY que corte a AB.

Trácese CD de suerte que $\angle p$ sea igual a $\angle p$.

La recta CD será la paralela buscada.

No se presenta demostración dado que es un corolario, el cual aparece inmediatamente después del problema de construcción de una recta por un punto de otra de tal manera que formen un ángulo igual a uno dado. El procedimiento seguido es el mismo, por lo que su demostración debería descansar en las propiedades del paralelismo, de la misma manera que se prosigue en los *Elementos*.

Proposición en los *Elementos*

P32 T22

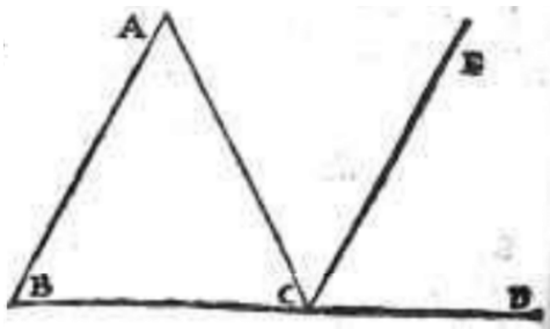
En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.

Sea ABC el triángulo, y prolónguese uno de sus lados BC, hasta D.

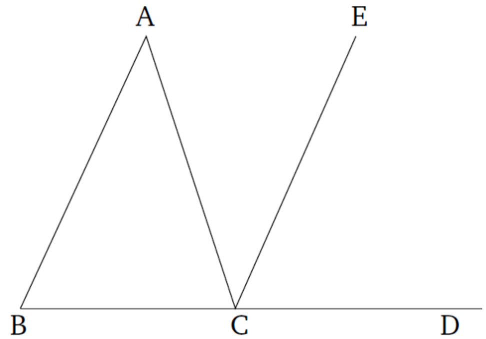
Digo que el ángulo externo ACD es igual a los dos internos y opuestos, CAB, ABC, y los tres ángulos internos del triángulo, ABC, BCA, CAB son iguales a dos rectos.

Pues trácese por el punto C la recta CE paralela a la recta AB (P31).

Figura 4.56. Suma de ángulos internos



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Y puesto que AB es paralela a FE y AC ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos BAC, ACE son iguales entre sí (P29). Puesto que, a su vez, AB es paralela a CE y la recta BA ha incidido sobre ellas, el ángulo externo ECD es igual al interno y opuesto ABC (P29). Pero se ha demostrado que el ángulo ACE es también igual al ángulo BAC; por tanto, el ángulo entero ACD es igual a los dos internos y opuestos BAC, ABC.

Añádase al uno y a los otros el ángulo ACB; entonces los ángulos ACD, ACB son iguales a los tres ángulos ABC, BCA, CAB. Pero los ángulos ACD, ACB son iguales a dos rectos (P13); por tanto, los ángulos ACB, CBA, CAB son también iguales a dos rectos.

Por consiguiente…

La P32 es la correspondiente a la igualdad entre el ángulo externo de un triángulo a los dos internos y opuestos; junto con la igualdad de los ángulos internos a dos ángulos rectos. Para esta proposición se hace uso del paralelismo, trazando una paralela a uno de los lados del triángulo, por el vértice opuesto a dicho lado. Lo que lleva a la igualdad de ángulos alternos internos y por otro lado el externo con el interno y opuesto, ambos conforman el ángulo externo del triángulo.

Para la segunda parte de este enunciado se considera la igualdad del caso anterior, se agregan a ambos el ángulo interno adyacente ACB, como el externo y el interno son adyacentes son iguales a dos rectos, entonces los tres ángulos que son iguales a los tres internos son también iguales a dos rectos, que es lo que se requería.

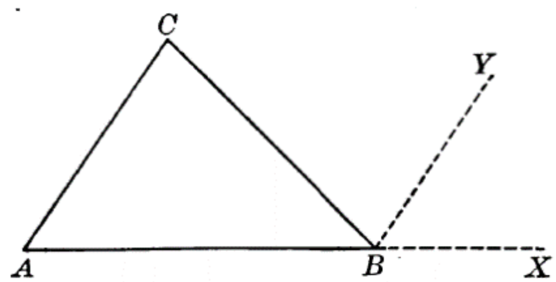
Con esta proposición se culmina la primera parte del estudio de las relaciones entre los elementos del triángulo que se inicia desde la proposición primera, que se retoma posteriormente con el establecimiento de las relaciones entre las áreas. Hasta este punto, se plantearon en la primera categoría, la construcción de elementos iguales, la cual incluye tanto segmentos como ángulos; en la segunda, la combinación mínima de elementos que garantizan la congruencia entre dos triángulos. La construcción misma de la perpendicular se basa en la construcción de dos ángulos adyacentes iguales; de donde emerge la linealidad entre dos rectas, que posibilita es estudio de las relaciones de desigualdad entre los elementos del triángulo, de la cual a su vez emerge el paralelismo. Como vemos cada una de las categorías hasta ahora están íntimamente vinculadas y relacionadas, una conlleva a la otra, de ahí que resalten autores como (agregar cita), la genialidad del escritor de los Elementos para estructurar los conocimientos elementales de Geometría en dicha obra.

En la P27 según Puertas (1991, p. 49) comienza la segunda parte del libro I de los *Elementos* referente a uso de las paralelas. Este grupo de proposiciones que va desde la teoría de las paralelas pasando por la igualdad entre los tres ángulos internos de un triángulo y dos ángulos rectos, hasta llegar a las P33 y P34 donde usa las paralelas para definir o introducir el paralelogramo y las propiedades de este cuadrilátero. Más específicamente en las P27 y P28 se plantean las condiciones necesarias para concluir con el paralelismo de las rectas dada la incidencia de otra recta sobre ellas; mediante la comparación de ángulos alternos; ángulos externos con su interno y opuesto; y ángulos internos del mismo lado. En la P29 se presenta el reciproco de las dos proposiciones anteriores, es decir, si tengo dos rectas paralelas sobre las cuales incide otra recta, entonces los ángulos formados cumplen ciertas relaciones, unos son iguales y los otros juntos son iguales a dos rectos. En estas proposiciones se pone en juego la linealidad que conlleva a dos ángulos rectos y los ángulos opuestos por el vértice.

Proposición homóloga en el texto escolar

111. Corolario 3. Todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los internos opuestos y por tanto mayor que cada uno de los dos.

*Figura 4.57. S*uma de ángulos internos II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

P19 Teorema

107. La suma de los tres ángulos en un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

Sea ABC un triángulo cualquiera.

Demostrar que $\angle A + \angle B + \angle C = 2\,rt.$

Trácese BY ∥ a AC, y prolónguese AB hasta X.

$\angle XBY + \angle YBC + \angle CBA = 2\,rt.$ N° 34

También. $\angle A = \angle XBY,$ N° 102

Y además, $\angle C = \angle YBC,$ N° 100

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 2\,rt.$ LCDD

Se realiza el mismo procedimiento dado en los Elementos, digamos que un mayor énfasis en lo algebraico, dadas las simplificaciones aritméticas de la época. Con la salvedad de que se basa en la figura para considerar que los tres ángulos alrededor del punto B son iguales a dos rectos. Respecto al corolario, este será inmediato del teorema, por lo que no se da la demostración.

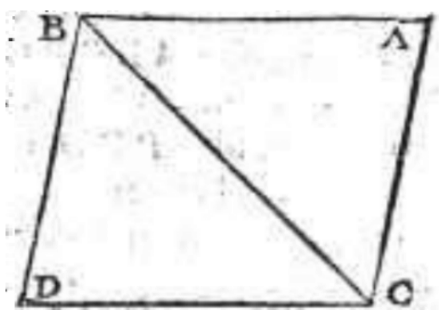
Proposición en los *Elementos*

P33 T23

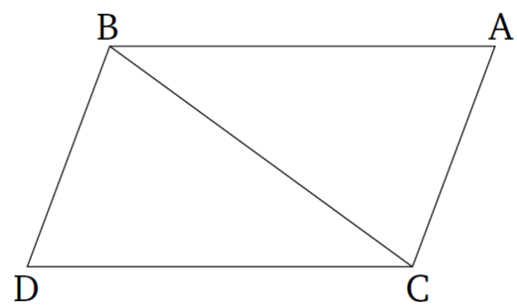
Las rectas que unen por (los extremos que están en) el mismo lado a (rectas) iguales y paralelas son también ellas mismas iguales y paralelas.

Sean AB, CD las rectas iguales y paralelas y trácense uniéndolas por (los extremos de) el mismo lado las rectas AC, BD.

Figura 4.58. Paralelogramo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Digo que AC, BD son también iguales y paralelas.

Trácese BC. Y puesto que AB es paralela a CD y BC ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos ABC, BCD son iguales entre sí (P29). Y puesto que AB es igual que CD y BC es común, las dos rectas AB, BC son iguales a las dos rectas BC, CD; y el ángulo ABC es igual al ángulo BCD; por tanto, la base AC es igual a la base BD, y el triángulo ABC es igual al triángulo BCD, y los ángulos restantes, subtendidos por los lados iguales, serán también iguales respectivamente (P4); por tanto, el ángulo ACB es igual al ángulo CBA, Y dado que la recta BC que incide sobre las dos rectas

AC, BD ha hecho iguales entre sí los ángulos alternos, entonces AC es paralela a BD (P27). Pero se ha demostrado que también es igual a ella.
Por consiguiente…

En la P33 se establece la igualdad y paralelismo entre las rectas que unen rectas paralelas e iguales, en este caso solamente interesa la igualdad y paralelismo entre los dos pares de rectas que unen a las primeras. Para ello, comienza trazando un segmento auxiliar, la recta BC, que funge de recta incidente a las dos paralelas AB y CD, con lo que se encuentra una pareja de ángulos iguales, los ABC y BCD. Esto posteriormente conlleva a la congruencia de dos triángulos; de esta manera obtiene la igualdad buscada entre las rectas BD y AC. Para la segunda parte del enunciado, el paralelismo entre las rectas, parte de la relación de igualdad entre los triángulos, de donde se deduce la igualdad de dos ángulos ACB y DBC, que son alternos internos y aplica nuevamente el paralelismo que lo lleva a que los segmentos también son paralelos.

En el texto escolar de Wentworth y Smith no se encuentra una proposición similar, dado que la proposición anterior de los *Elementos* constituye en cierto sentido un estudio sobre lo que sucede al unir dos rectas iguales y paralelas con otras dos rectas en sus extremos. En las definiciones del libro primero de los Elementos, específicamente en la D22, describe lo que será cada cuadrilátero con base en las posibles combinaciones entre ángulos y lados, de los cuales solamente se estudia el cuadrado en proposiciones posteriores a esta. Por ejemplo, cuadrado es el cuadrilátero equilátero y rectangular; rombo como equilátero, pero no rectangular. Llama la atención su definición de romboide como la figura que tiene los lados y ángulos opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular. A todos los demás cuadriláteros les llama trapecios.

En el caso del paralelogramo interviene otra propiedad entre los lados opuestos, el paralelismo; a la ve la etimología misma de la palabra paralelogramo nos da algunas pistas dado que solo se agrega el sufijo gramo que alude a línea (Serrano, 2000); esto nos orienta a la figura formada por la unión de dos rectas paralelas por otras dos rectas. Entonces, esta proposición es la construcción de esta figura, a la cual se referirá como áreas paralelogramas en la siguiente proposición.

Proposición en los *Elementos*

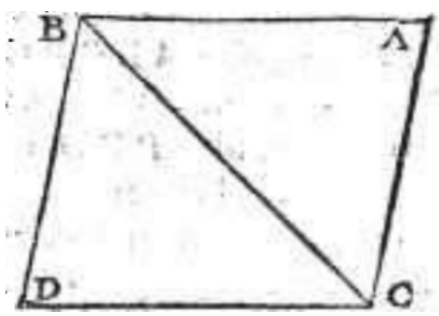
P34 T24

En las áreas de paralelogramos los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal las divide en dos partes iguales.

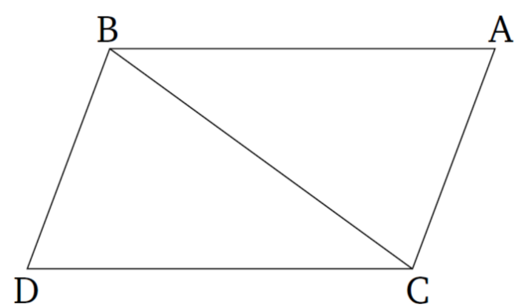
Sea ACDB el área de paralelogramo, y su diagonal BC.

Digo que los lados y los ángulos opuestos del paralelogramo ACDB son iguales entre sí, y (que) la diagonal BC lo divide en dos partes iguales.

Figura 4.59. Paralelogramo II



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues como AB es paralela a CD, y la recta BC ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos ABC, BCD son iguales entre sí (P29). Como a su vez AC es paralela a BD, y BC ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos ACB, CBD son iguales entre sí (P29). Entonces ABC, BCD son dos triángulos que tienen los dos ángulos ABC, BCA iguales respectivamente a los dos ángulos BCD, CBD y un lado igual a un lado, el correspondiente a los ángulos iguales, común a ellos: BC; así pues, también tendrá los lados restantes iguales respectivamente a los lados restantes, y el ángulo restante (igual) al ángulo restante (P26); por tanto, el lado AB es igual al lado CD, el lado AC al BD, y además el ángulo BAC es igual al ángulo CDB. Y dado que el ángulo ABC es igual al ángulo BCD, y el ángulo CBD al ángulo ACB, entonces el ángulo entero ABD es igual al ángulo entero ACD (NC2). Pero se ha demostrado que el ángulo BAC también es igual al ángulo CDB.

Por consiguiente, en las áreas de paralelogramos los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí.

Digo entonces que también la diagonal las divide en dos partes iguales.

Pues como AB es igual a y BC es común, las dos AB, BC son iguale respectivamente a las dos CD, BB; y el ángulo ABC es igual al ángulo BCD. Por tanto, la base AC es también igual DB. Y el triángulo ABC es también igual al triángulo BCD (P4).

Por consiguiente…

En la P34 se establece las propiedades de la figura o superficie entre rectas paralelas –delimitada por rectas paralelas (Puertas, 1991)–, específicamente que los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí y además la diagonal lo divide a la mitad –en su caso utiliza el término diámetro–. En este caso como desea concluir con la igualdad de los lados y ángulos opuestos se vale del paralelismo para llegar a la igualdad entre dos parejas de ángulos; al tener la diagonal común, llega a la congruencia de los dos triángulos, con lo que tiene la igualdad entre los lados opuestos y una pareja de ángulos opuestos. Para demostrar la igualdad entre la otra pareja de ángulos opuestos, lo hace por medio de la suma de ángulos –que son las partes iguales que formarán todos iguales–.

En cuanto a la parte del enunciado en la que la diagonal divide al paralelogramo a la mitad; dado que tiene la igualdad entre parejas de lados y ángulos, prueba la congruencia de las dos áreas mediante la P4 –Criterio LAL– el único que habla acerca de la congruencia de áreas.

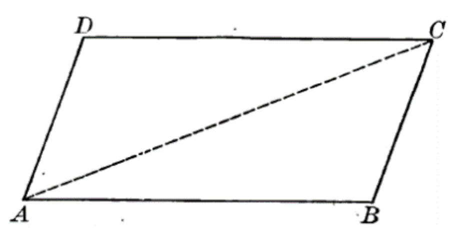
Es en esta proposición que aparece por primera vez este cuadrilátero, no lo define previamente; sin embargo, podemos ver una clara definición entre las líneas de esta proposición, considerando que una figura es la delimitada por uno o varios límites o términos, esta figura está delimitada por dos parejas de rectas iguales y paralelas. Propiedad diferente a las demás con las cuales define los demás cuadriláteros al inicio del libro primero. En dicha proposición vemos como usa el paralelismo para encontrar ángulos iguales, que llevan al establecimiento de relaciones de igualdad y paralelismo entre los lados opuestos de la figura.

Proposición homóloga en el texto escolar

P26 Teorema

125. En todo paralelogramo, cada lado es igual a su opuesto.

Figura 4.60. Paralelogramo II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sea ABCD un paralelogramo cualquiera.

Demostrar que BC = AD, y AB = DC.

Trácese la diagonal AC.

En los triángulos ABC y ADC,

$AC = AC.$ Ident.

$\angle BAC = \angle DCA,$

$\angle ACB = \angle CAD,$ N° 100

$\therefore \Delta ABC = \Delta ADC,$ N° 72

$\therefore BC = AD, AB = DC,$ LCDD

124. Corolario.

Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, y cualesquiera ángulos consecutivos son suplementarios.

126. Corolario 1.

Una diagonal divide a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.

En el texto escolar de Wentworth y Smith solamente se plantea inicialmente la congruencia entre los lados opuestos del paralelogramo, sin incluir la relación de paralelismo entre los opuestos, dado que define previamente al paralelogramo como la figura con lados opuestos paralelos. Para demostrarlo la igualdad entre lados opuestos, utiliza el criterio de congruencia de triángulos ALA; teniendo los ángulos alternos internos iguales, por el paralelismo y un lado común. Obteniendo de esta manera la congruencia de triángulos, que conlleva a la congruencia de los lados en cuestión.

Bajo el corolario 124 se agrega: Dibújese un paralelogramo y demuéstrese que dos ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios. Aplíquese el principio del n° 58, demostrando que los suplementos de dos ángulos opuestos son iguales.

En ambas obras vemos la puesta en juego de las mismas propiedades para establecer las relaciones de igualdad buscadas –también de paralelismo, en Euclides–, parten del paralelismo para encontrar ángulos iguales, con la diagonal y la hipótesis obtienen segmentos congruentes que llevan a la congruencia de triángulos, que a su vez resulta en la congruencia de lados y ángulos opuestos.

Proposición en los *Elementos*

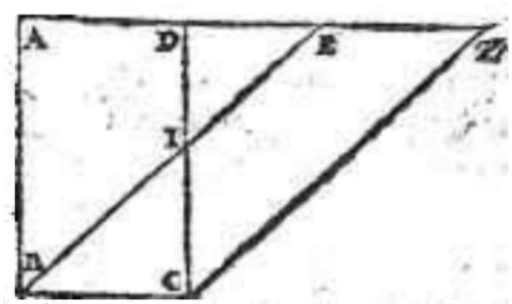
P35 T25

Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

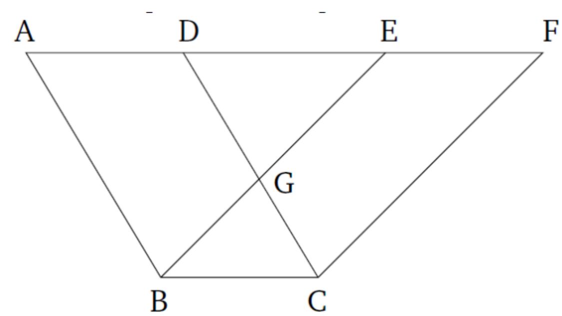
Sean ABCD, EBCF los paralelogramos (que están) sobre la misma base BC y entre las mismas paralelas AF, BC.

Digo que (el paralelogramo) ABCD es igual al paralelogramo EBCF.

Figura 4.61. Paralelogramos iguales



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues como ABCD es un paralelogramo, AD es igual a BC (P34). Por lo mismo, EF también es igual a BC; de modo que también AD, es igual a EF (NC1); y DE es común; por tanto, la recta entera AE es igual a la recta entera DF (NC2). Y AB es también igual a DC (P34); entonces los dos lados EA, AB son iguales respectivamente a los dos lados FD, DC; y el ángulo FDC es igual al ángulo EAB, el externo al interno (P29); por tanto, la base EB es igual a la base FC, y el triángulo EAB será igual al triángulo FDC (P4); quítese de ambos el triángulo DGE; entonces el trapecio restante ABGD es igual al trapecio restante EGCF (N C3); añádase a ambos el triángulo GBC, entonces el paralelogramo entero ABCD es igual al paralelogramo entero EBCF (NC2).

Por consiguiente…

En la P35 se comienza el estudio de las relaciones entre áreas, en este caso de paralelogramos que tienen la misma base y están entre las mismas paralelas. Se Inicia con la igualdad entre los lados opuestos de los paralelogramos AD con BC y EF con BC –uno de los cuales es la base común–, obteniendo así la igualdad entre AD y EF; a los que se agrega la misma recta DE, obteniendo resultados iguales AE, DF. Otro par de lados son iguales AB y DC, por ser opuestos de uno de los paralelogramos, los ángulos FDC y EAB comprendidos por las rectas correspondientes iguales son iguales por el paralelismo. Con lo que se obtiene la congruencia de los triángulos ABE y DCF por la P4 –criterio LAL–. De dichos triángulos quita el triángulo común DEG, obteniendo dos áreas trapezoidales iguales ABGD y FCGE, a las que les agrega la misma área BCG, resultando con ello, áreas paralelogramas iguales.

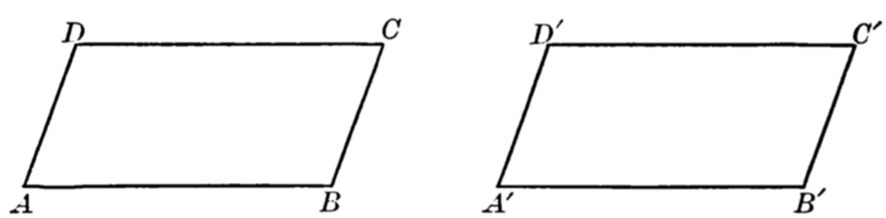
La secuencia de relaciones que se van estableciendo en cada parte de esta proposición es extensa. De manera general, primero se establece la congruencia de triángulos mediante la igualdad de elementos, luego se considera su área –debido a que es la relación que se desea establecer– de la cual se quitan y agregan partes iguales, llegando de esta manera al resultado deseado.

Proposición homóloga en el texto escolar

P30 Teorema

132. Si dos lados adyacentes de un paralelogramo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a los de otro, los dos paralelogramos son iguales.

Figura 4.62. Paralelogramos iguales II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sean ABCD, A´B´C´D´ dos paralelogramos en que $AB = A´B´, AD = A´D´ \ y \ \angle A = \angle A´$

Demostrar que los dos paralelogramos son iguales.

Demostración. Colóquese el paralelogramo ABCD sobre el A´B´C´D´ de tal suerte que AB coincida con su igual A´B´. Nº. 53, 5º

El lado AD tomará la dirección de A´B´.

(síguese esto de que se supone que $\angle A = \angle A´$)

D caerá en D´.

(síguese esto de que se supone que $AD = A´D´$)

Ahora bien, DC y D´C´ son paralelas a A´B´ que pasan por el punto D´.

$\therefore DC$ tomará la dirección de D´C´. Nº 94.

(Por un punto cualquiera puede trazarse una paralela a una recta dada, y solo una)

También, BC, B´C´ son paralelas a A´D´ que pasan por B.

$\therefore BC$ tomará la dirección de B´C´. Nº 94.

$\therefore C$ caerá sobre C´. Nº 55.

$\therefore$ los dos paralelogramos coinciden y son por tanto iguales. LCDD.

Por su parte, en el texto de Wentworth y Smith la relación con la cual se establece la igualdad de los paralelogramos es diferente, pues se plantea un cierto criterio de congruencia análogo a los criterios de congruencia para los triángulos, emergente de la racionalidad propia y de la importancia que adjudican los autores en el texto a la demostración por superposición. Mientras que, en los Elementos la igualdad de paralelogramos se da en torno a la forma en que se define la figura, considerando sus límites y proponiendo la igualdad de la superficie entre esos límites, valiéndose de la igualdad de la superficie de las figuras en las que se puede descomponer.

Los autores del texto escolar en cuestión posteriormente definen el área del paralelogramo como el producto de su base por su altura, dejando entrever su interés por la aritmetización de la noción de área, un tanto divorciada de la idea de congruencia que plantean en esta proposición.

Proposición en los *Elementos*

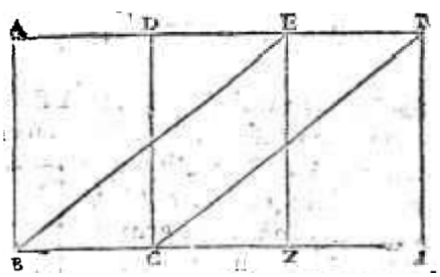
P36 T26

Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

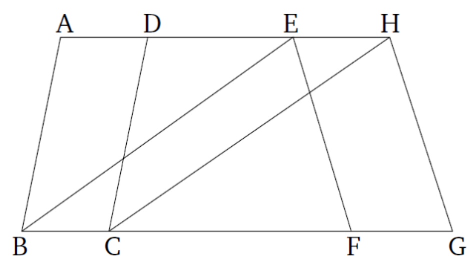
Sean ABCD, EFGH los paralelogramos que están sobre bases iguales BC, FG y entre las mismas paralelas AH, BG.

Digo que el paralelogramo ABCD es igual al paralelogramo EFGH.

Figura 4.63. Paralelogramos iguales III



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Trácense pues, BE y CH. Y dado que BC es igual a FG, mientras que FG es igual a EH, entonces BC es también igual a EH (NC1). Pero son también paralelas. Y EB, HC las unen; pero las rectas que unen por los extremos del mismo lado rectas iguales y paralelas son iguales y paralelas (P33); por tanto, EBCH es un paralelogramo (P34). Y es igual a ABCD: pues tiene la misma base que él, BC y está entre las mismas paralelas que él: BC, AH (P35). Por lo mismo EFGH es también igual al mismo EBCH (P35). De modo que el paralelogramo ABCD es también igual a EFGH (NC1).

Por consiguiente…

En la P36 igualmente demuestra la igualdad entre áreas formadas por líneas paralelas, esta vez tienen la base igual y están entre las mismas paralelas –en el caso anterior tenían la misma base, es decir compartían una base–. Para ello, construye un paralelogramo igual a los dos dados, por medio del cual compara los dos en cuestión, dado que este nuevo comparte bases con los dos primeros.

Proposición homóloga en el texto escolar

323. Corolario 1. Dos paralelogramos cuyas bases y alturas son iguales son equivalentes.

Observamos en este caso que, en el texto escolar, como ya se ha enfatizado previamente, se interesa por el cálculo aritmético o simbólico algebraico de las áreas de los paralelogramos, más que por la noción misma de equivalencia de área.

Proposición en los *Elementos*

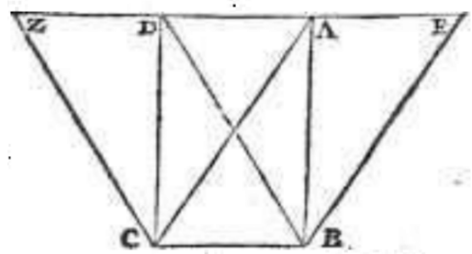
P37 T27

Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

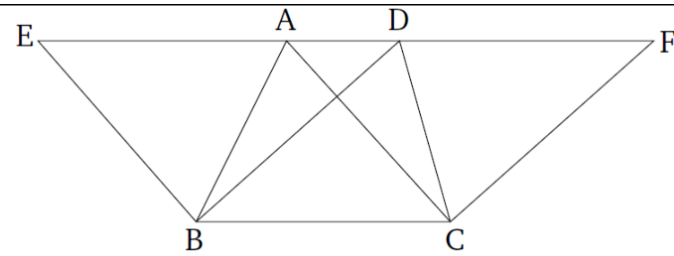
Sean ABC, DBC los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas AD, BC.

Digo que el triángulo ABC es igual al triángulo DBC.

Figura 4.64. Triángulos iguales



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Prolónguese AD en ambos sentidos hasta E, F y por el punto B trácese BE paralela a CA (P31), y por el punto C trácese CF paralela a BA (P31). Entonces cada una de las (figuras) EBCA, DBCF es un paralelogramo; y son iguales: porque están sobre la misma base BC y entre las mismas paralelas BC, EF (P35); y el triángulo ABC es la mitad del paralelogramo EBCA: porque la diagonal AB lo divide en dos partes (iguales) (P34); y el triángulo DBC es la mitad del paralelogramo DBCF: porque la diagonal DC lo divide en dos partes (iguales) (P34). [Pero las mitades de cosas iguales son iguales entre sí]. Por tanto, el triángulo ABC es igual al triángulo DBC. Por consiguiente…

En la P37 y P38 se trabajan los mismos resultados de las proposiciones anteriores, pero con triángulos. La primera de ellas se dedica a la igualdad de los triángulos que comparten la base y se encuentran entre las mismas paralelas. Se comienza trazando dos segmentos auxiliares, paralelos a uno de lados de cada triángulo formando así dos paralelogramos que comparten una base, por lo que son iguales. Y los triángulos en cuestión son las mitades de los paralelogramos anteriormente mencionados, por ende, son iguales, ya que las mitades de todos iguales son iguales –NC6–.

Esta proposición será posteriormente utilizada en la demostración del teorema de Pitágoras –P48– para obtener la igualdad de áreas entre los triángulos que están en la misma base y entre las mismas paralelas. En la prueba de este enunciado vemos que a partir de la construcción de paralelogramos con los cuales podemos comparar los triángulos en cuestión, se llega al establecimiento de la relación de igualdad entre ellos.

Proposición en los *Elementos*

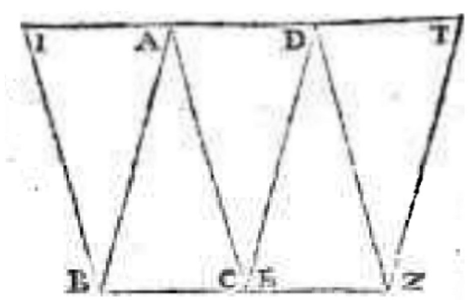
P38 T28

Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

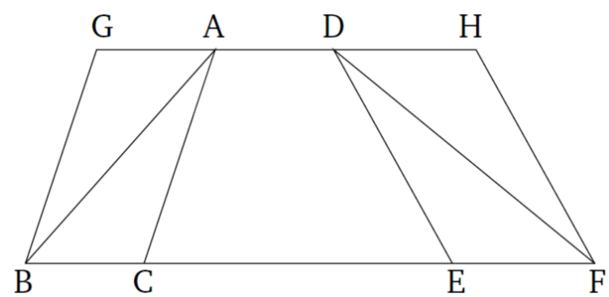
Sean ABC, DEF los triángulos (que están) sobre las bases iguales BC, EF y entre las mismas paralelas BF, AD.

Digo que el triángulo ABC es igual al triángulo DEF.

Figura 4.65. Triángulos iguales II



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Prolónguese, pues, AD en ambos sentidos hasta G, H, y por el punto B trácese BG paralela a CA (P31), y por el punto F trácese FH paralela a DE. Entonces cada una de las (figuras) GBCA, DEFH es un paralelogramo; y GBCA es igual a DEFH: porque está sobre las bases iguales BC, EF y entre las mismas paralelas BF, GH (P36); y el triángulo ABC es la mitad del paralelogramo GBCA: porque la diagonal AB lo divide en dos partes iguales (P34); y el triángulo FED es la mitad del paralelogramo DEFH: porque la diagonal DF lo divide en dos partes iguales (P34); [y las mitades de las mismas cosas son iguales entre sí] Por tanto, el triángulo ABC es igual al triángulo DEF.

Por consiguiente…

La P38 parte de una idea similar a la proposición anterior, esta vez los triángulos no tienen la misma base, sino que la base es igual. Para trabajarla también realiza un razonamiento similar al anterior; pues, se trazan paralelas a uno de los lados del triángulo conformando dos paralelogramos que tienen iguales bases y están entre las mismas paralelas; por la P36 los paralelogramos son congruentes, y como cada triángulo es la mitad de los paralelogramos congruentes, también ellos son congruentes; de esta manera se llega a la conclusión requerida.

Vemos entonces que, para llegar a la congruencia de los triángulos con igual base entre las mismas paralelas, se inicia con la comparación de paralelogramos construidos a partir de segmentos auxiliares, los cuales son iguales, y al ser los triángulos la mitad de cada paralelogramo se obtiene con ello el resultado deseado al llegar a establecer la igualdad entre las áreas de los triángulos.

Proposición homóloga en el texto escolar
326. Corolario 1. Todos los triángulos que tienen bases y alturas iguales respectivamente son equivalentes.

Previo a este corolario en el texto escolar se plantea el teorema que enuncia que el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura. Con lo anterior los triángulos que tengan iguales bases y alturas serán equivalentes. Cómo se denota en el corolario, ya se hace referencia a la equivalencia de áreas, esto debido a que los triángulos pueden tener diferente forma, pero sus áreas ser equivalentes.

Proposición en los *Elementos*
P39 T29

Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

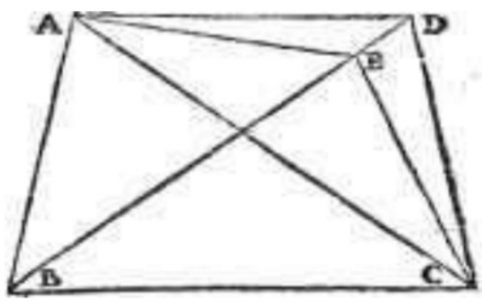
Sean ABC, DBC triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado de ella.

Digo que también están sobre las mismas paralelas.

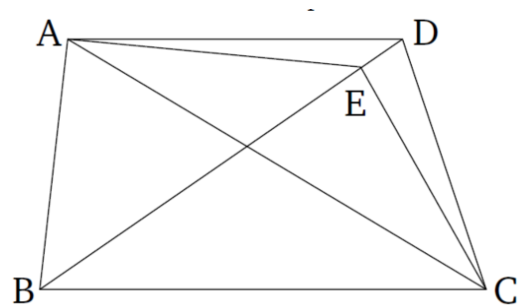
Trácese AD.

Digo que AD es paralela a BC.

Figura 4.66. Triángulos iguales III



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues si no trácese por el punto A la recta AE paralela a BC (P31), y trácese EC. Entonces el triángulo ABC es igual al triángulo EBC: porque está sobre la misma base que él, BC, y entre las mismas paralelas (P37). Pero ABC es igual a DBC, por tanto, ABC es también igual a EBC (NC1), el mayor al menor; lo cual es imposible; por tanto, AE no es paralela a BC. De manera semejante demostraríamos que ninguna otra (lo es) excepto AB; por tanto, AD es paralela a BC.

Por consiguiente…

Las P39 y P40 son respectivamente los recíprocos de cada una de las proposiciones anteriores. En ellas, dados los triángulos congruentes con la misma e igual base respectivamente, se llega al paralelismo entre las dos rectas: la que pasa por sus bases y la que une sus vértices opuestos a las bases.

Para la primera, se demuestra indirectamente por reducción al absurdo, suponiendo que la recta que une los vértices opuestos a las bases no es paralela a la base; luego se trazan la que se supone si es paralela. Con ello se llega a la congruencia de dos triángulos que tienen la misma base y están entre las mismas paralelas, por medio de la P37; pero dada la hipótesis habrá entonces tres triángulos congruentes; en una pareja de ellos resulta que uno de ellos una parte del otro, lo que no es posible. Con lo anterior se concluye que entonces la recta auxiliar trazada no es paralela y de la misma forma se probaría que ninguna otra recta es paralela; por lo tanto, la recta que une los vértices es la paralela a la base de los triángulos.

En la proposición en cuestión, se prueba en cierto modo la unicidad de la recta que pasa por los vértices de los triángulos y es paralela a la base. Por su parte en el texto escolar, dado que el interés por el área se centra en la expresión algebraica o fórmula para su cálculo, no en la relación existente entre el paralelismo, que es lo que conserva la altura. Pareciera un tanto más general la fórmula; sin embargo, el ubicar los triángulos entre las mismas paralelas representa el mismo hecho, dado que ya se han construido las proposiciones necesarias para construir un triángulo igual que otro en cualquier ubicación en el plano.

Proposición en los *Elementos*

P40 T30

Los triángulos iguales que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

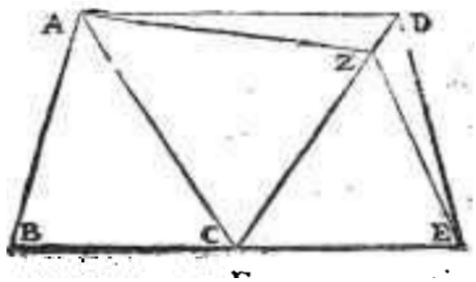
Sean ABC, CDE triángulos iguales que están sobre las bases iguales BC, CE y en el mismo lado.

Digo que también están entre las mismas paralelas.

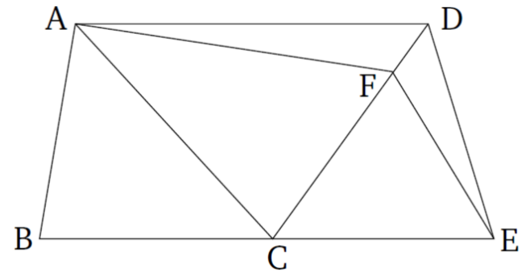
Pues trácese AD.

Digo que AD es paralela a BE

Figura 4.67. Triángulos iguales IV



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues si no, por el punto A trácese AF paralela a BE (P31), trácese demás FE. Entonces el triángulo ABC es igual al triángulo FCE: porque están sobre las bases iguales BC, CE y entre las mismas paralelas BE, AF (P38). Pero el triángulo ABC es igual al triángulo ACE; por tanto, el triángulo DCE es también igual al triángulo FCE (NC1), el mayor al menor: lo cual es imposible; por tanto, AF no es paralela a BE. De manera semejante demostraríamos que ninguna otra (lo es) excepto AD; por tanto, AA es paralela BE.

Por consiguiente…

La P40 de igual manera la realiza por reducción al absurdo, proponiendo que, si la recta que une los vértices no es paralela a la recta que incluye las bases opuestas a dichos vértices, entonces otra lo será. Se obtienen de esta manera dos triángulos congruentes por la P38, los mismos que son congruentes con otro debido a la hipótesis inicial. Pero uno de ellos es parte del otro, por lo que no pueden ser congruentes, entonces la supuesta recta no es paralela a la recta que incluye las bases antes mencionadas.

Tal como se hizo en la proposición precedente, del mismo modo se puede probar que ninguna otra recta lo es, entonces la recta que une los vértices es la paralela buscada.

Este grupo de proposiciones que van desde la *P35* a la *P40* se trabaja sobre las áreas de figuras –paralelogramos y triángulos– para que cumplen ciertas características: tienen la misma o igual base, además de estar entre las mismas paralelas. En los primeros casos se trabaja iniciando con las figuras –paralelogramos y triángulos– que tienen igual bases y entre mismas paralelas, requiriendo la relación entre sus áreas, que mediante comparaciones le llega a la igualdad dichas áreas. En el segundo caso se inicia con las mismas o iguales bases y áreas iguales, requiriendo la conclusión acerca de que estarán entre paralelas. Vemos en estos casos el uso del paralelismo para obtener la congruencia de figuras como paralelogramos y triángulos o viceversa. Destacamos entonces como el paralelismo y la igualdad de las bases son condiciones necesarias para hablar de la igualdad de las áreas de figuras como paralelogramos y triángulos.

Proposición en los *Elementos*

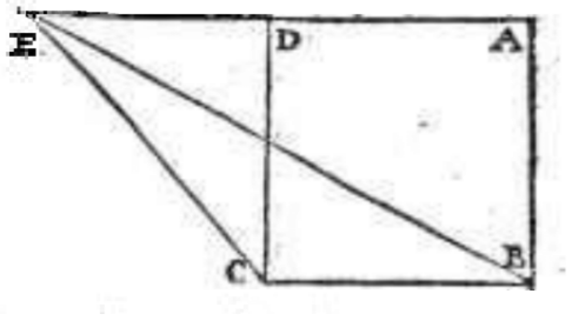
P41 T31

Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

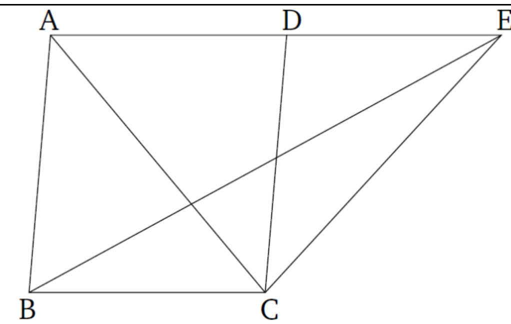
Tenga el paralelogramo ABCD la misma base, BC, que el triángulo EBC y esté entre las mismas paralelas BC, AE.

Digo que el paralelogramo ABCD es el doble del triángulo BEC.

Figura 4.68. Paralelogramo doble del triángulo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues trácese AC. Entonces el triángulo ABC es igual al triángulo EBC: porque está sobre la misma base que él BC, y entre las mismas paralelas BC, AE (P37). Pero el paralelogramo ABCD es el doble del triángulo ABC: porque la diagonal AC lo divide en dos partes (iguales) (P34); de modo que el paralelogramo ABCD es también el doble del triángulo EBF (NC5).

Por consiguiente…

En la P41 se establece la relación entre un paralelogramo y un triángulo, que comparten la base y se encuentran entre las mismas paralelas. Se inicia trazando la diagonal del paralelogramo, dividiéndolo por la mitad según la *P34*. Entonces, el triángulo ABC que es la mitad del paralelogramo comparte la base con el triángulo inicial, además encuentran entre las mismas paralelas; de ese modo estos dos últimos triángulos ABC y EBC son iguales. Por lo tanto, el triángulo ABC que es la mitad del paralelogramo es congruente con el triángulo inicial, por lo que este último es también la mitad del paralelogramo. Dicho de otra manera, el paralelogramo es el doble del triángulo con el que comparte la base, estando ambos entre las mismas paralelas.

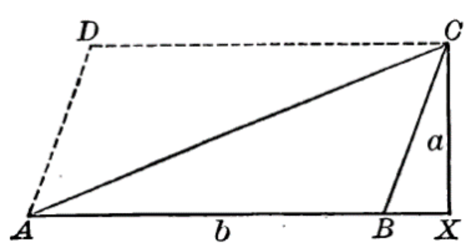
En esta proposición se requiere el establecimiento de la relación entre un paralelogramo y un triángulo, dadas ciertas relaciones entre algunos de sus elementos. Para establecer dicha relación, se construye un triángulo igual que es la mitad del paralelogramo, el cual permite la comparación entre las figuras iniciales y con ello la cuantificación de la relación entre el paralelogramo y el triángulo. Se establece entonces la relación entre figuras, que será fundamental para tener un cambio de forma manteniendo invariante la cantidad de superficie. En ese sentido, como mencionamos previamente, la igualdad de algunos elementos correspondientes de dos figuras rectilíneas, como ser lados y ángulos, garantiza la igualdad de todos los demás elementos correspondientes de estas, incluyendo su interior, su superficie. Mientras que, si cambiamos un poco la afirmación anterior, el área puede ser igual sin ser iguales las figuras; el libro primero se centra principalmente en el estudio de la conservación de la forma y tamaño, es decir la igualdad entre figuras rectilíneas; sin embargo, a partir del establecimiento del paralelismo se comienza con un tipo diferente de igualdad, una que no depende de la igualdad en la forma de la figura, la igualdad de superficie, que continuará en los libros posteriores. Este mismo estudio, involucra el estudio de las relaciones que garantizan invariantes al estudiar diversidad de casos y la variación en las combinaciones o relaciones entre lados y ángulos, paralelismo, perpendicularidad, linealidad.

Proposición homóloga en el texto escolar

P5 Teorema

325. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura.

Figura 4.69. Paralelogramo doble del triángulo II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sea el triángulo ABC con altura a y base b.

Probar que el área de $\Delta ABC = \frac{1}{2}ab$.

Con AB y BC como lados adyacentes constrúyase el paralelogramo ABCD. N° 238

Entonces, $\Delta ABC = \frac{1}{2}\square\ ABCD$. N° 126

Pero el área de $\square\ ABCD = ab$ N° 322

$\therefore$ el área de $\Delta ABC = \frac{1}{2}ab$ LCDD

Por su parte en el texto escolar, la demostración del enunciado homólogo se basa en justificaciones algebraicas como ser la fórmula para el área del paralelogramo con a como base y b como altura, para luego llegar a la conclusión de que el triángulo es la mitad del paralelogramo por lo tanto su área es igual a $\frac{ab}{2}$.

En el fondo las ideas detrás de ambos casos radican en como la igualdad entre las bases y el hecho de estar las figuras entre las mismas paralelas –que garantiza una misma distancia entre ambas, es decir altura– garantiza la relación entre las áreas del triángulo y el paralelogramo, sin importar la forma que tengan. Con la salvedad que en el texto en mención se orienta por la algebrización de las propiedades.

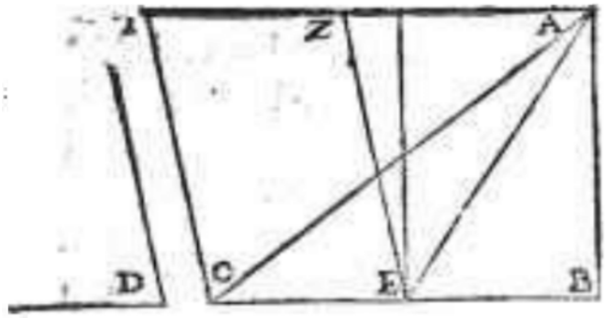
Proposición en los *Elementos*

P42 Prob 11. Construir en un ángulo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

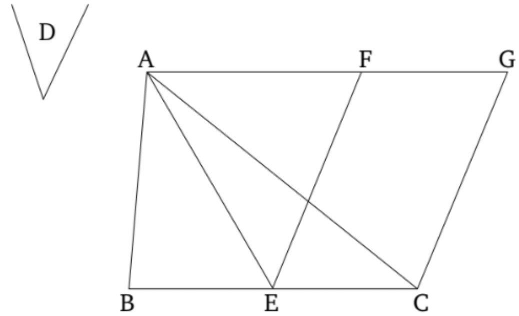
Sea el triángulo ABC y D, el ángulo rectilíneo dado.

Hay que construir un paralelogramo igual al triángulo ABC en el ángulo rectilíneo D.

Figura 4.70. Paralelogramo igual a un triángulo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Divídase BC en dos por el punto E (P10), trácese AE (Post. 1) y constrúyase la recta EC y en su ´punto E el ángulo CEF, igual al ángulo D (P23) y por el punto A, trácese AG paralela a EC (P31); y por el punto C trácese CG paralela a EF (P31). Entonces FECH es un paralelogramo (P34). Y como BE es igual EC, el triángulo ABE es también igual al triángulo AEC: porque están sobre las bases iguales BE, EC y entre las mismas paralelas BC, AG (P38); por tanto, el triángulo ABC es el doble es el doble de AEC. Pero también el paralelogramo FECG es el doble del triángulo AEC: porque tiene la misma base que él y está entre las mismas paralelas (P41); por lo tanto, el paralelogramo FECG es igual al triángulo ABC y tiene el ángulo CEF igual al ángulo dado D (NC5).

Se dio el paralelogramo FECG igual al triángulo ABC sobre el ángulo CEF igual al ángulo dado D. lo que se quería hacer.

Dada la relación establecida en la P41 se pasa en la P42, el undécimo problema de construcción, a instaurar el procedimiento de construcción de un paralelogramo igual a un triángulo dado, cuyo ángulo entre los lados adyacentes esté también dado. Este problema de construcción forma parte de la categoría de construcción de iguales, ya que se obtiene una figura superficialmente igual a un triángulo.

Como consecuencia de la proposición previa se conoce que el paralelogramo es el doble del triángulo con la misma base, estando también ambos entre las mismas paralelas. Se comienza entonces dividiendo en dos partes iguales la base del triángulo dado, mediante la P10. Luego se traza un ángulo igual que el ángulo dado por ese punto medio, valiéndose de la P23. Se continúa construyendo la recta paralela a la base por el vértice del triángulo aplicando la P31, y la paralela al segundo lado del ángulo construido previamente. Con la recta AE que une el vértice con el punto medio de la base se forman dos triángulos congruentes por tener bases iguales y estar entre las mismas paralelas. Derivado de tal hecho se concluye que el triángulo inicial es el doble de cada uno de los mencionados anteriormente. Además, el paralelogramo formado con los segmentos auxiliares es también el doble de uno de esos triángulos, por tener la misma base y estar entre las mismas paralelas. De este modo el paralelogramo es igual que el triángulo inicial, dado que los dobles de una misma cosa son también iguales entre sí.

En esta proposición que forma parte de la categoría de construcción de iguales, se construye un paralelogramo que es igual a un triángulo dado, además con un ángulo dado. Para verificarlo se comparan ambas figuras mediante propiedades constituidas en proposiciones previas, haciendo uso del hecho de que un paralelogramo es el doble del triángulo con la misma base y entre las mismas paralelas, por lo que si se construye un paralelogramo cuya base es la mitad de la base del triángulo, se llega a la condición deseada. La base funge como medio de comparación para el establecimiento de la relación buscada. Divisamos de esta manera, la variación necesaria en la base para que sea posible la construcción de un paralelogramo igual que un triángulo dado. Una variante puede ser tranzar una paralela por el punto medio entre las paralelas y construir un paralelogramo con la misma base que el triángulo.

Para la proposición en cuestión se usa la relación entre el paralelogramo y el triángulo con la misma base, determinada en la proposición anterior; a la vez se usará para la división de una figura rectilínea cualquiera en triángulo y después trazar paralelogramos iguales a dichos triángulos, dado que se establece la condición necesaria garantía para la equivalencia entre las áreas.

Proposición homóloga en el texto escolar
E350. Corolario 1. Construir un cuadrado equivalente a un triángulo dado.

Como sugerencia se menciona que el lado del cuadrado es la media proporcional entre la base y la mitad de la altura. En el problema previo a este corolario se construye un cuadrado equivalente a un paralelogramo dado; valiéndose de la construcción da la media proporcional entre la base y la altura del paralelogramo; cuyo proceso de demostración se basa en la relacionar expresiones algebraicas para el área de las figuras. En este caso el cuadrado sería un caso especial, no se seguiría el mismo procedimiento que para el paralelogramo, dado que ninguna de las dimensiones del cuadrado coincidirá con las dimensiones del triángulo.

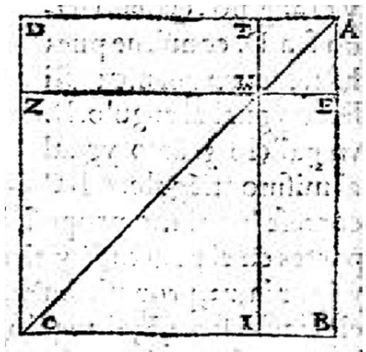
De cualquier manera, estas proposiciones representan el caso en el que la variación de la forma permite la conservación del área, es decir, no importa que forma tengan las figuras rectilíneas, se podrá construir otra de diferente forma, pero con la misma superficie; considerando para ello las condiciones necesarias que permitan el establecimiento de la relación de igualdad entre las áreas. En los Elementos esas condiciones son el paralelismo y la mitad de la base, en el texto de Wentworth y Smith es la media proporcional entre la base y la mitad de la altura.

Proposición en los *Elementos*
P43 T33
En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.

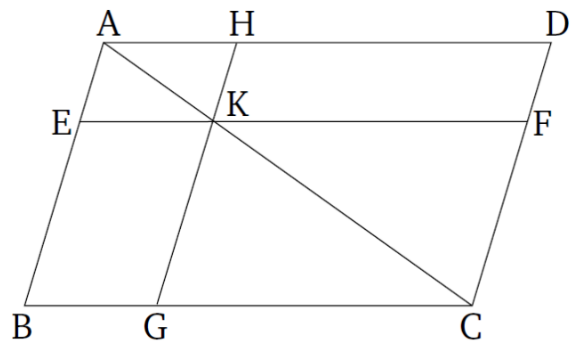
Sea ABCD el paralelogramo y AC su diagonal, y sean EH, FG los paralelogramos (situados) en torno a AC, y sean BK, KD los llamados complementos.

Digo que cl complemento BK es igual al complemento KD.

Figura 4.71. Complementos en un paralelogramo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues, como ABCD es un paralelogramo y AC su diagonal, el triángulo ABC es igual al triángulo ACD (P34); como EH es a su vez un paralelogramo y AK es su diagonal, el triángulo AEK es igual al triángulo AHK. Por la misma razón el triángulo KFC es también igual al triángulo KGC. Así pues, como el triángulo AEK es iguala al triángulo AHK, y el triángulo KFC al KGC, el triángulo AEK junto con KGC es igual al triángulo AHK junto con KFC (NC2); pero también el triángulo entero ABC es igual al triángulo entero ADC; por tanto, el complemento restante BK es igual al complemento restante KD (NC3).

Por consiguiente…

La P43 es referente a la congruencia de los complementos de los paralelogramos trazados en torno a la diagonal de un paralelogramo, que son también paralelogramos formados por paralelas a los lados adyacentes. Para comparar estas áreas –complementos– se parte de la división del paralelogramo principal en dos triángulos iguales por su diagonal, misma que divide a los dos paralelogramos AK y KC trazados en torno a la diagonal. Por lo que se tienen todos iguales, los triángulos

ABC y ADC; además también se tienen partes iguales, los triángulos AEK con AHK y KCF con KCG. Por la noción común "de los todos iguales se restan partes iguales, entonces los restos son iguales" quita los triángulos anteriormente mencionados de los triángulos ABC y ADC, obteniendo así los complementos iguales, que es lo que se requería en la proposición.

En el desarrollo de la mencionada proposición se parte de la congruencia de triángulos, que lleva a la equivalencia de áreas, quitando partes iguales de todos iguales se llega a la igualdad de los complementos. Estos complementos tienen cierta relevancia en la geometría de los Elementos, especialmente en el libro segundo, debido a que ambos complementos junto con cualquiera de los paralelogramos en torno a la diagonal forman lo que se conoce se define como gnomon, una figura bastante utilizada que deviene según nos referencia Puertas (1991) de instrumentos que servían para medir el tiempo que posteriormente se relaciona con la perpendicularidad.

Proposición en los *Elementos*

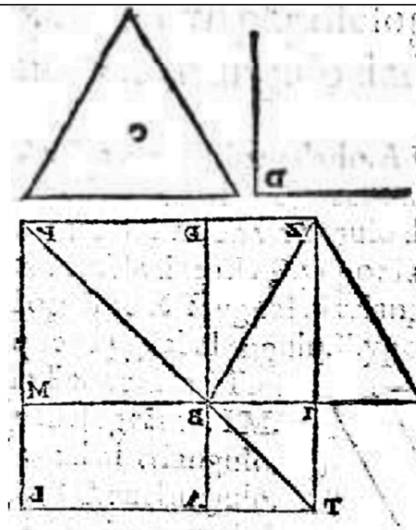
P44 P12

Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

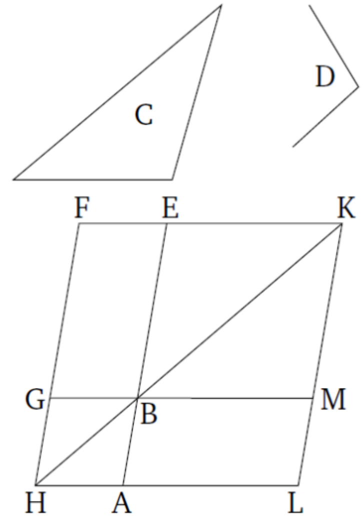
Sea AB la recta dada, C el triángulo dado y D, el ángulo rectilíneo dado.

Así pues, hay que aplicar a la recta dada AB, en un ángulo igual a D, un paralelogramo igual al triángulo dado C.

Figura 4.72. Aplicar paralelogramo igual a un triángulo



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Construýase el paralelogramo BEFG igual al triángulo C en el ángulo EBG, que es igual al D (P42): y hágase de manera que BE esté en línea recta con AB y prolónguese hacia el otro lado FG hasta H y por el punto A trácese AH paralela a una de las dos rectas BG, EF (P31), y trácese HB. Y dado que la recta HF incide sobre las paralelas AH, EF, entonces los ángulos AHF, HFE iguales a dos rectos (P29). Por tanto, los ángulos BHG, GFE son menores que dos rectos y las rectas prolongadas indefinidamente a partir de ángulos menores que dos rectos, se encuentran (Post. 5); luego HB, FE prolongadas se encontrarán. Prolónguense y encuéntrense en K, y por el punto K trácese KL paralela a las dos rectas EA, FH (P31) y prolónguense HA, GB hasta los puntos L, M.

Entonces FHLK es un paralelogramo y HK su diagonal, y AG, ME los paralelogramos situados en torno a HK, LB y BF los llamados complementos; por tanto, LB es igual a BF (P43). Pero BF es igual al triángulo C; luego LB es también igual a C (NC1). Y como el ángulo GBE es igual al ángulo ABM (P15), mientras que el ángulo GBE es igual a D, entonces el ángulo ABM es también igual al ángulo D.

Por consiguiente…

La P44 constituye el duodécimo problema de construcción y es relativo a la aplicación de un paralelogramo igual a un triángulo dado a un segmento dado en un ángulo dado. La aplicación de áreas se puede realizar por yuxtaposición, por exceso o por defecto, dependiendo la relación que tenga la longitud del área respecto de un segmento dado. En el caso de esta proposición pertenece igualmente a la categoría "construcción de iguales", en ella se pretende construir un paralelogramo igual a un triángulo dado sobre un segmento dado, en un ángulo dado, de manera que se yuxtaponga con dicho segmento, esto es, que la base del paralelogramo sea el segmento dado.

Para tratar con esta proposición se comienza trazando un paralelogramo igual al triángulo en el ángulo requerido valiéndose de la P42, de manera que uno de los lados del paralelogramo esté alineado con el segmento dado AB. Se prolonga el lado FG opuesto al lado BE, y por el extremo A del segmento dado se traza una paralela AH a uno de los lados del paralelogramo BG o EF, y traza la recta HB.

Mediante el paralelismo encuentra dos ángulos AHF y HFE que juntos son iguales a dos rectos; luego toma el ángulo BHG que es parte de uno de AHF, junto con el ángulo GFE, por lo que juntos son menores que dos rectos, por el Post. 5; entonces se puede formar un triángulo, es decir que las rectas HB y FE se encuentran en un punto K. Luego, por ese punto K se traza una paralela KL a la recta AE, que incluye la base del paralelogramo y el segmento dado inicialmente. Se continúa prolongan las rectas HA y GB para formar paralelogramos, de modo que estén en torno a la diagonal del paralelogramo HFKL. Mediante la precedente se tienen paralelogramos en torno a la diagonal, por lo que sus complementos son iguales; uno de ellos es el paralelogramo construido al inicio, el otro tiene como base el segmento dado; y dado que el ángulo con el que se pidió construir el primero es el ángulo dado y este queda opuesto por el vértice con el ángulo del paralelogramo construido sobre el segmento dado, se llega a la construcción buscada.

De manera general en esta proposición, primero se construye un paralelogramo igual al triángulo dado en el ángulo dado, donde uno de los lados de ese paralelogramo esté alineado con el segmento dado. Luego se construye un paralelogramo más grande, donde el construido previamente es complemento. Y el otro complemento será entonces el paralelogramo aplicado a la recta dada en el ángulo dado.

Concluimos de esta proposición, que no importa la longitud del segmento dado, ni la forma del triángulo dado, se podrá entonces construir otro paralelogramo que tenga como uno de sus lados el segmento dado y el cual tenga la misma área del triángulo dado. Cualquiera que sea la recta y el ángulo dados –en el sentido euclidiano–, se podrá construir sobre ella un paralelogramo igual a un triángulo dado. Cambia la forma, conservando el área.

Proposición en los *Elementos*

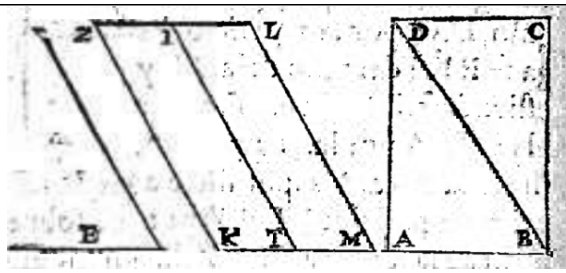
P45 P13

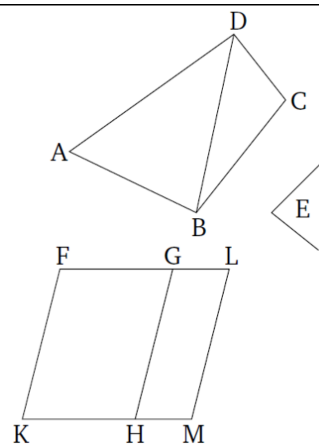
Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una (figura) rectilínea dada.

Sea ABCD la (figura) rectilínea dada y E el ángulo rectilíneo dado.

Así pues. hay que construir en el ángulo dado E, un paralelogramo igual a la figura rectilínea dada ABCD.

Figura 4.73. Paralelogramo igual a una figura rectilínea





Fuente: Çamorano (1576)

Fuente: Fitzpatrick (2008)

Trácese DB, y constrúyase en el ángulo HKF, que es igual a E, el paralelogramo FH igual al triángulo ABD (P42); y aplíquese a la recta GH, el paralelogramo GM igual al triángulo DBC en el ángulo GHM que es igual a E (P44). Y puesto que el ángulo E es igual a cada uno de los dos ángulos HKF, GHM, también el ángulo HKF es, por tanto, igual al ángulo GHM (NC1). Añádase a ambos el ángulo KHG; entonces los ángulos FKH, KHG son iguales a los ángulos KHG, GHM. Pero los ángulos FKH, KHG son iguales a dos rectos (P29); por tanto, los ángulos KHG, GHM son también iguales a dos rectos. Entonces en una recta cualquiera GH y en un punto de ella H, las dos rectas KH, HM, no colocadas en el mismo lado, hacen los ángulos adyacentes iguales a dos rectos; luego KH está en línea recta con HM (P14); y como la recta HG incide sobre las paralelas KM, FG, los ángulos alternos MHG, HGF son iguales entre sí (P29); añádase a ambos el ángulo HGL; entonces los ángulos MHG, HGL son iguales a los ángulos HGF, HGL (NC2). Pero los ángulos MHG, HGL son iguales a dos rectos (P29); luego los ángulos HGF, HGL son también iguales a dos rectos (NC1); por tanto, FG está en línea recta con GL (P14). Y dado que FK es igual y paralela a HG (P34), pero también HG a ML, entonces también KF es igual y paralela ML (NC1; P30); y las rectas KM, FL las unen (por sus extremos); luego también KM, FL son iguales y paralelas (P33); por tanto, KFLM es un paralelogramo.

Y dado que el triángulo ABD es igual al paralelogramo FH, y el triángulo ABC al paralelogramo GM, entonces la figura rectilínea entera ABCD es igual al paralelogramo entero KFLM.
Por consiguiente…

Para la P45 se plantea la construcción en un ángulo dado, de un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada; se desarrolla el caso particular de cuadrilátero cualquiera. Concierne esta proposición igualmente que la proposición anterior a la categoría de "construcción de iguales" por el hecho de que se construyen figuras igual que otras en cuanto a superficie.

Inicia trazando una recta entre vértices no consecutivos del cuadrilátero ABCD, dividiéndolo en dos triángulos, ABD y BCD. Con base en la P42 se traza un paralelogramo FGHK, igual al triángulo ABD con uno de sus ángulos, el HKF igual que el ángulo E dado. Sigue consecuentemente con la aplicación de un paralelogramo GHML igual al segundo triángulo BCD en el que se divide el cuadrilátero, sobre la base GH del paralelogramo FGHK y en el ángulo E dado, por medio de la proposición anterior.

Luego tiene dos paralelogramos que forman otro cuadrilátero, el cual se debe probar que es paralelogramo. Para esto, se comparan dos ángulos HKF y GHM que por construcción son iguales, al sumarles el mismo ángulo KHG los resultados son iguales, pero la primera pareja de ellos HKF, KHG son igual a dos rectos por ser internos del mismo lado entre paralelas–P29–; entonces, los segundos GHM, KHG también son iguales a dos rectos, además, son adyacentes; por lo tanto, KH está alineado con HM.

Para probar la linealidad del otro par de rectas FG y GL, realiza el mismo razonamiento anterior, partiendo de la igualdad de los ángulos alternos MHG, HGF;

se les suma a cada uno, el ángulo HGL adyacente a uno de ellos; una pareja de ellos MHG, HGL, es igual dos rectos, por lo que la otra pareja HGF, HGL también; entonces, las rectas FG y GL están alineadas.

Una vez que lados opuestos KH, HM y FG, GL de ambos paralelogramos están alineados, sigue probar la congruencia y paralelismo de los lados opuestos del cuadrilátero FKML. Se llega a dicha conclusión, debido al paralelismo e igualdad entre las rectas FK y LM que son unidas por KM y FL; por lo tanto, son también iguales y paralelas. De este modo, se llega a la petición requerida en el problema.

En esta proposición se presenta el caso particular del paralelogramo que es igual a un cuadrilátero dado; de la misma manera se puede presentar cualquier figura, el procedimiento será el mismo: construir paralelogramos alineados, iguales a cada uno de los triángulos en los que se divide la figura rectilínea dada. La conservación de área permite variar la forma de la figura manteniendo la equivalencia de áreas, esto mediante la aplicación de áreas sobre la base del paralelogramo anterior.

Proposición en los *Elementos*

P46 P14

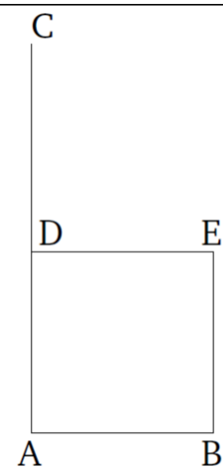
Trazar un cuadrado a partir de una recta dada.

Sea AB la recta dada.

Así pues, hay que trazar un cuadrado a partir de AB.

Figura 4.74. Construir un cuadrado

Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Trácese la recta AC que forme ángulos rectos con la recta AB desde su punto A, y hágase AD igual a AB (P3); y por el punto D trácese DE paralela a AB, y por el punto B trácese BE paralela a AD (P31). Entonces ADEB es un paralelogramo; por tanto, AB es igual a DE, y AD a BE (P34). Pero AB es igual a AD; luego las cuatro rectas BA, AD, DE, EB son iguales entre sí; entonces el paralelogramo ADEB es equilátero. Además, digo que también es rectangular. Pues dado que la recta AD incide sobre las paralelas AB, DE, entonces los ángulos BAD, ADE son iguales a dos rectos (P29). Pero el ángulo BAD es recto; por tanto, el ángulo ADE también es recto. Ahora bien, en las áreas de paralelogramos los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí (P34); por tanto, cada uno de los ángulos opuestos, ABD, BED también es recto; luego ADEB es rectangular. Pero se ha demostrado que también es equilátero.
Por consiguiente…

La P46 es el problema de construcción de un cuadrado a partir de un segmento dado. Esta proposición se incluye dentro de la categoría de construcción de iguales, dado que consiste en la construcción de cuatro segmentos iguales a uno dado, en una posición tal que se forme un cuadrado, cumpliendo además con la perpendicularidad entre ellos.

Para dar solución se inicia trazando una recta AC perpendicular al segmento AB dado por uno de sus extremos A; con ayuda de la P3, se corta de la recta AC un segmento AD igual que el segmento dado AB y por el extremo D de ese segmento AD se traza una paralela DE al segmento AB dado. Por el otro extremo B del segmento dado se traza otra paralela a AD la perpendicular traza al inicio. Entonces la figura formada es un paralelogramo y, por tanto, los lados opuestos son iguales y paralelos; pero, además son iguales los cuatro por la construcción hecha, al cortar de la perpendicular el segmento igual al dado inicialmente. Debido a ello el paralelogramo es equilátero, falta probar que es rectangular. Para ello se comienza usando el paralelismo para obtener que dos ángulos internos del mismo lado son iguales a dos rectos, al ser uno recto el otro también debe serlo. Por el hecho de ser iguales los ángulos opuestos en un paralelogramo, los ángulos restantes son rectos. De esta forma la figura construida es un cuadrado.

En esta proposición observamos como primero se construye un paralelogramo, que debe tener las características de un cuadrado, esto es, según su definición, tener la propiedad de ser equilátero y rectangular a la vez. Entonces inicia primero la comparación de los lados, llegando a la conclusión que todos son congruentes, dado que dos adyacentes se construyeron congruentes y los otros paralelos a estos. Luego se comparan los ángulos, primero una pareja de consecutivos que, al ser internos del mismo lado entre paralelas son congruentes, de donde se deduce que son rectos, ya que uno de ellos lo es; finalmente, por ser congruentes los ángulos opuestos de un paralelogramo, entonces todos son rectos.

Extrañamente, en el texto escolar no se presenta el procedimiento de construcción de un cuadrado, cuyos lados sean iguales a uno dado.

Proposición en los *Elementos*

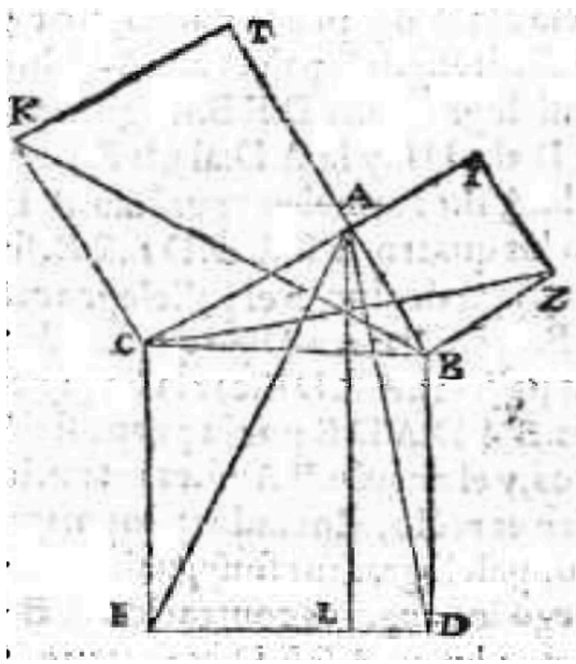
P47 T33

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

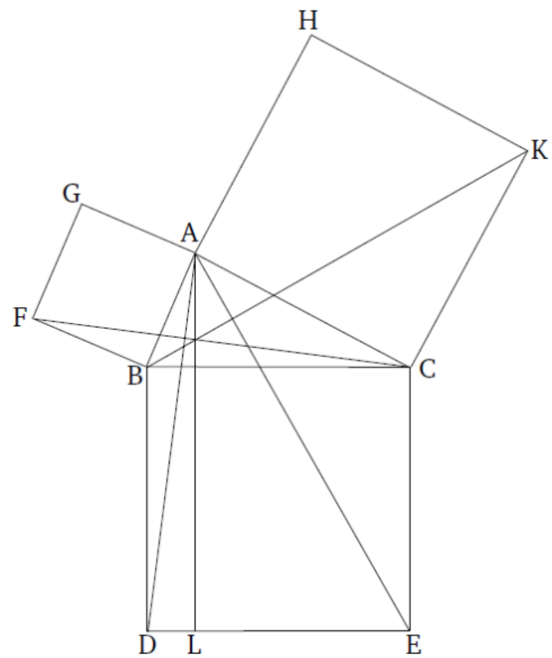
Sea ABC el triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto BAC.

Digo que el cuadrado de BC es igual a los cuadrados BA, AC.

Figura 4.75. Teorema de Pitágoras



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Trácese pues a partir de BC el cuadrado BDEC, y a partir de BA, AC los cuadrados GB, HC (P46), y por el punto A trácese AL paralela a una de las dos rectas BD, CE (P31); y trácese AD, FC (Post. 1). Y dado que cada uno de los ángulos BAC, BAG es recto, entonces en una recta cualquiera BA y por un punto de ella, A, las dos rectas AC, AG, no colocadas en el mismo lado, hacen los ángulos adyacentes iguales a dos rectos; por tanto, CA está en línea recta con AG (P14). Por la misma razón, BA también está en línea recta con AH. Y como el ángulo DBC es igual al ángulo FBA –porque cada uno de ellos es recto– añádase a ambos el ángulo ABC; entonces el ángulo entero DBA es igual al ángulo entero FBC (NC2); y como DB es igual a BC, y FB a BA (cuadrado), los dos lados DB, BA son iguales respectivamente a los dos lados FB, BC; y el ángulo DBA es igual al ángulo FBL; entonces la base AD es igual a la base FC, y el triángulo ABD es igual al triángulo FBC (P4); y el paralelogramo BL es el doble del triángulo ABD: porque tienen la misma base y están entre las mismas paralelas BD. AL (P41): pero el cuadrado GB es el doble del triángulo FBC: porque tienen a su vez la misma base FB y están entre las mismas paralelas FB, HC (P41); [pero los dobles de cosas iguales son iguales entre si]. por tanto, el paralelogramo BL es también igual al cuadrado GB (NC5). De manera semejante, trazando las rectas AE, BK se demostraría que también el paralelogramo CL es igual al cuadrado HC; por tanto, el cuadrado entero BDEC es igual a los cuadrados GB, HC (NC2). Asimismo, el cuadrado BDEC ha sido trazado a partir de BC, AC. Por tanto, el cuadrado del lado BC es igual a los cuadrados de los lados BA, AC.

Por consiguiente, en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto. Q. E. D.

La P47 es el reconocido teorema de Pitágoras donde se plantea en los triángulos rectángulos, la relación de igualdad entre los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto, con el cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto.

Primeramente, se trazan los tres cuadrados, uno en cada lado del triángulo, mediante la proposición anterior; luego, por A, el vértice del ángulo recto, se traza una paralela AL a los lados BD, CE, del cuadrado construido sobre el lado mayor. Además, traza dos segmentos auxiliares AD y FC que resultan en la determinación de dos triángulos cada uno de los cuales tienen la misma base que el cuadrado sobre el lado menor y sobre mayor del triángulo respectivamente.

Hasta ahora se han trazado las construcciones auxiliares; por lo que para seguir con el conjunto de argumentaciones que llevarán al establecimiento de la igualdad requerida, inicia con la prueba de la linealidad de GA con AC y BA con AH; esto debido a que se forman ángulos adyacentes iguales y además cada uno de ellos es recto.

Luego se busca la congruencia de los ángulos FBC y CBD, cada uno de los cuales contiene un ángulo recto y un ángulo común a ambos; por lo que ellos son congruentes. Dado que se tiene la congruencia de dos pares de lados BC con BD y AB con BA por ser parejas de lados de un mismo cuadrado, con ello se obtiene la congruencia de los triángulos ABD, FBC. Cada uno de estos triángulos comparte la base con un paralelogramo y están entre las mismas paralelas. FBC es la mitad del cuadrado ABFG –paralelogramo–y ABD es la mitad del paralelogramo BL, que es parte del cuadrado construido sobre el lado mayor. Al ser cada paralelogramo de los anteriores el doble de triángulos congruentes, entonces son ellos mismos congruentes, es decir, el cuadrado ABFG es igual que el paralelogramo BL –en área–.

Siguiendo la misma idea anterior se demostraría para el caso del cuadrado ACKH y el paralelogramo LC; llegando de esta manera a la igualdad entre el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto con los cuadrados de los lados que lo comprenden.

Se llega a la conclusión deseada mediante la comparación de segmentos y ángulos, poniendo en juego otros elementos como ser el paralelismo, la linealidad asociada a la perpendicularidad, además de algunas nociones comunes. La comparación también tiene un papel transversal, como práctica que posibilita el establecimiento de relaciones –ya sea de igualdad o desigualdad, paralelismo, perpendicularidad, linealidad– entre elementos –segmentos, rectas, ángulos, figuras, áreas– mediante el uso de nociones geométricas construidas previamente –definiciones, postulados, nociones comunes, proposiciones–.

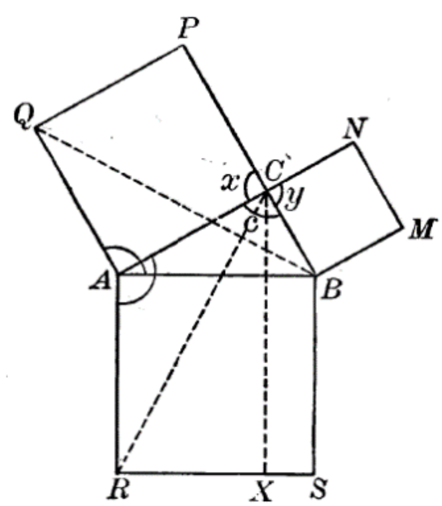
Con esta proposición y su reciproco se cierra el primer libro de los Elementos, para dar paso en el libro segundo a un tratamiento con mayor profundidad de la aplicación de áreas, que inicia en las proposiciones del libro primero relativas a los paralelogramos. En ella vemos como se obtienen la igualdad entre cuadrados, dado que la única posible conservación de áreas entre estas figuras es relacionando más de uno, debido a que la conservación refiere a la variación de la forma, manteniendo la equivalencia de áreas.

Proposición homóloga en el texto escolar

P10 Teorema

337. El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Figura 4.76. Teorema de Pitágoras II



Fuente: Wentworth y Smith (2001)

Sea AS, BN, CQ lo cuadrados construidos sobre los lados del triángulo ABC, rectángulo en C.

Demostrar que $AS = BN + CQ$

Trácense CX, paralela a BS, y también CR, BQ. Puesto que los ángulos C y X son rectos, la línea BCP es recta. N° 43 Como $AR = AB, AC = AQ$, N° 65 Y $\angle RAC = \angle BAC + 1rt = \angle BAQ$, N° 52, 1° Los triángulos ARC y ABQ son iguales. N° 68 Además, el rectángulo $AX = 2\Delta ARC$. N° 325 (Tienen la misma base AR y una misma altura RX) Asimismo, el cuadrado $CQ = 2\Delta ABQ = 2\Delta ARC$; N° 325 $\therefore AX$ es equivalente a CQ N° 52, 7° De igual manera se demuestra que el rectángulo BX es equivalente al cuadrado BN. Ahora bien, $AS = BX + AX$. N° 52, 10° $\therefore AS = BN + CQ$, N° 52, 8°. LCDD

Se realiza la misma prueba que en los Elementos, pero con la inclusión de algunos razonamientos más cercanos al Álgebra. Inicia probando la linealidad de PC con CB y AC con CN, en este caso mediante la proposición de ángulos opuestos por el vértice. Lo demás es equivalente. Con respecto al texto escolar, dadas algunas de las proposiciones previas en cuanto al área, se está más interesado por la cuantificación de la superficie, que en la noción de conservación misma. Consideramos entonces, la conservación como una variación de la forma que no afecta la superficie al interior de los límites de la forma. Por otro lado, todo el estudio de la congruencia es en torno a la variación de la posición, manteniendo la forma de la figura.

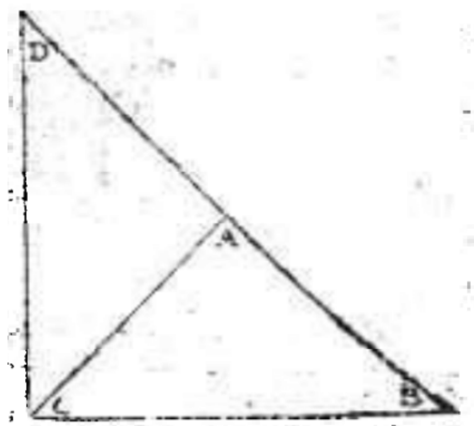
Proposición en los *Elementos* **P48 T34**

Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

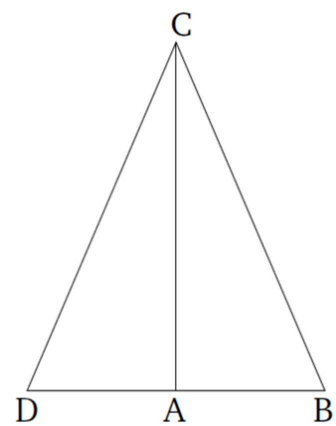
Sea pues, el cuadrado del lado BC del triángulo ABC, igual a los cuadrados de los lados BA, AC.

Digo que el ángulo BAC es recto.

Figura 4.77. Recíproco del teorema de Pitágoras



Fuente: Çamorano (1576)



Fuente: Fitzpatrick (2008)

Pues trácese la recta) AD que forme ángulos rectos con la recta AC desde el punto A y hágase DA igual a BA, y trácese DC. Puesto que DA es igual a AB, el cuadrado de DA es también igual al cuadrado de AB. Añádase a ambos el cuadrado de AC; entonces los cuadrados de DA, AC son iguales a los cuadrados de BA, AC. Pero el cuadrado de DC es igual a los cuadrados de DA, AC: porque el ángulo DAC es recto (P47); pero el cuadrado de BC es igual a los cuadrados de BA, AC: porque esto es ĺo que se ha supuesto; por tanto, el cuadrado de DC es igual al cuadrado de BC; de modo que también el lado DC es igual al lado BC; y como DA es igual a AB, y AC es común, los dos lados DA, AC son iguales a los dos lados BA, AC; y la base DC es igual a la base BC; por tanto, el ángulo DAC es igual al ángulo BAC (P8). Pero DAC es recto; luego también es recto el ángulo BAC.

Por consiguiente, si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

En la P48 se propone el recíproco del teorema de Pitágoras, enunciado de la siguiente manera: si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes es recto.

Se inicia trazando una perpendicular al lado CA; luego en ella se corta un segmento AD igual al lado AB, por lo que los cuadrados de estos dos últimos segmentos serán iguales. Luego se añade a cada uno de estos cuadrados el cuadrado de AC, obteniendo de esta forma la igualdad entre las sumas de dos cuadrados, una de las cuales por hipótesis es igual al cuadrado CB y la otra suma también es igual al cuadrado CD, dado que el triángulo ACD es rectángulo. Entonces, el cuadrado de CD es igual que el cuadrado de CB, por que son iguales a sumas iguales de cuadrados. Si los cuadrados son iguales, lo son también sus lados. De esa manera se llega a la congruencia de tres parejas de segmentos que forman dos triángulos, por lo que los triángulos son congruentes. Al ser congruentes, sus ángulos correspondientes son congruentes; en uno de ellos el ángulo CAD es recto; por lo tanto, su correspondiente BAC es recto, obteniendo la conclusión deseada.

En esta proposición parte de la construcción de un triángulo rectángulo auxiliar que resulta ser congruente con el triángulo inicial, por lo que el ángulo correspondiente en el triángulo inicial es también recto. Para llegar a ello, parte de la comparación de segmentos y luego de sus cuadrados; posteriormente compara sumas de cuadrados, resultando ser iguales. Con lo que se llega nuevamente a cuadrados iguales, de los cuales sus lados son también iguales; obteniendo así la congruencia de dos triángulos donde luego se comparan unos de sus ángulos, concluyendo de esta forma el resultado deseado.

La última categoría que emerge de las unidades de análisis es: conservación de área, es referente a la equivalencia de áreas dado el cambio de forma de la figura; con ello no se alude a la deformación o transformación continua de una figura para convertirse en otra, ni mucho menos, debido a que esto se da en un entorno estático. Más bien, refiere a la comparación entre dos figuras con forma diferente que encierran una superficie equivalente, dado el cumplimiento de ciertas propiedades como la igualdad entre algunos de sus lados, paralelismo, perpendicularidad.

Este grupo de proposiciones se apertura con la conformación de una superficie por dos parejas de rectas paralelas; un cuadrilátero conocido como paralelogramo que viene definido en los *Elementos* por una propiedad diferente con la que se definen los demás cuadriláteros. Se define por el paralelismo de sus lados, los demás se definen por la igualdad de sus lados o por lo rectangular de sus ángulos.

Luego del establecimiento de este nuevo cuadrilátero en las *P33* y *P34*, pasa al estudio de las condiciones necesarias para garantizar la equivalencia de superficie, al tener formas diferentes, primero entre paralelogramos: *P35* y *P36*; luego con triángulos *P37* y *P38*. Posteriormente, dado que el paralelismo garantiza la equivalencia de superficie, entonces presenta los recíprocos, es decir, la equivalencia de áreas garantiza el paralelismo: *P39* y *P40*.

En la *P41* se establece la relación entre el paralelogramo y el triángulo que comparten base y están entre las mismas paralelas. En la P*43* se postula la relación entre los complementos de los paralelogramos formados en torno a la diagonal de un paralelogramo, los cuales son equivalentes en área; proposición que permitirá la aplicación de paralelogramos iguales a un triángulo dado en la *P44* y *P45*.

La *P47*, la reconocida relación entre los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto con el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto en un triángulo rectángulo, el teorema atribuido a la escuela pitagórica. En esta se establece la igualdad de dos cuadrados juntos, con un tercer cuadrado, se ponen en juego una gama de propiedades, la construcción de iguales, la perpendicularidad, la linealidad, el paralelismo, la congruencia de triángulos, la conservación de áreas. La P48, con la que se culmina el primer libro de los Elementos, es el recíproco de la proposición anterior; dada la relación entre los cuadrados se pretende establecer la relación de perpendicularidad entre dos de los lados del triángulo.