

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN AMBIENTE LOGO:
ESTUDIO LONGITUDINAL CON EDUCADORAS EN
FORMACION INICIAL

Tesis que presenta

Miguel Angel García de León Romaní

para obtener el Grado de

Maestro (a) en Ciencias
especialidad Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dra. Mirela Rigo Lemini

México, Distrito Federal

Agosto / 2012

A mi esposa María Dolores Jacobson Sol y mis hijos Carola, Frida y Miguel

AGRADECIMIENTOS

A mi directora de Tesis: Dra. Mirela Rigo Lemini;

A mis sinodales: Dra. Teresa Rojano Ceballos, Dra. Cristianne María Butto Zarzar;

A mis profesores de los seminarios del programa de la maestría: Dra. Teresa Rojano Ceballos, Dra. Martha Valdemoro Álvarez, Dr. Simón Mochón Cohen, Dra. Dora Santos Bernad, Dra. Aurora Gallardo, Dra. Sonia Ursini Legovich y Dr. Ricardo Quintero Zazueta;

Al personal administrativo y de apoyo del Departamento de Matemática Educativa;

A las alumnas de la Licenciatura en educación preescolar que participaron en el estudio;

A mis compañeros y compañeras de estudios;

Al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional;

A la Escuela Nacional para Maestras de Jardines de Niños y a su Directora Lic. Georgina Quintanilla Cerda, por el apoyo recibido durante el tiempo en que se desarrolló esta investigación.

Al Concejo Nacional De Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico recibido para cursar el grado de Maestría en Ciencias en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional con el número de becario 203607.

INDICE

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1-El problema	1
1.1 Planteamiento del tema y la problemática	4
1.1.1 Preguntas de investigación del estudio	6
1.1.2 Objetivos del estudio	6
CAPÍTULO 2- Antecedentes teóricos y empíricos del trabajo	9
2.1. Los trabajos en los que apoyas el análisis.	10
2,1.1 La prueba y la generalización	14
2.2 El lenguaje de programación Logo	15
2.2.1 Logo y la comprensión del álgebra	17
2.3 El concepto de variable	17
2.3.1 Transferencia de Logo a otros contextos	18
2.4 Las categorías de análisis	20
2.4.1 La propuesta de Bertely	20
CAPÍTULO 3- Método	25
3.1 Tipo de estudio y corte	25
3.2 Etapas en las que se desarrollo el estudio	26
3.2.1 Diseño de los instrumentos del estudio	26
3.2.2 El instrumento en Lápiz y Papel (LP)	26
3.2.3 Pruebas preliminares del instrumento en LP	28
3.2.4 El Taller Logo diseño y selección de actividades	29
3.2.5 Pruebas preliminares de Taller en Logo	32
3.3 Aplicación del instrumento en LP	32
3.4 Aspectos de la aplicación del Taller con Logo	32
3.5 Registro de las sesiones de trabajo	33
3.6 La función del investigador	33
CAPÍTULO 4 reporte de resultados en Lápiz y Papel	37

4.1	Presentación de resultados considerando a Mason	37
4.2	Marco Interpretativo para LP	40
4.2.1	Pautas de Estrategias y categorías de Análisis en la experiencia con Lápiz y Papel (LP)	41
4.2.2.	Explicación e ilustración de de las Categorías de Estrategias halladas en el trabajo empírico con lápiz y papel.	43
4.2.3.	Conclusiones de la experiencia de generalización en LP	56
4.3.	Análisis de los resultados por ítem en Lápiz y Papel	59
4.3.1	Resultados por ítem	59
4.3.2	Actuación de las alumnas en LP	64
4.4.	Formas de Registro de las reglas utilizados en la primera experiencia LP	72
	CAPÍTULO 5 Resultados de la experiencia en el Taller con Logo	77
5.1	Marco Interpretativo para Logo: Pautas de Programación halladas en el trabajo empírico en el taller Logo	77
5.1.1	Identificación y explicación de las Pautas de Programación encontradas en el Taller con Logo	79
5.1.2	Ejemplos de Categorías de Programación en Logo	82
5.2	Análisis de los resultados por sesión en el Taller con Logo	97
5.2.1	Desempeño de las alumnas en el taller Logo	99
5.2.2	Conclusiones de la experiencia de generalización en Logo	120
	CAPÍTULO 6 Categorías de Generalización y niveles de Programación en Logo	123
6.1.	Comparativo de los resultados de las dos experiencias Lápiz y Papel y Logo.	123
6.1.1	Comparativo de indicadores generales de rendimiento	124
6.1.2	Comparativo aspectos de generalización	125
6.1.3	Evolución de las alumnas en el estudio	125
	CONCLUSIONES	128
	LISTA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	131
	ANEXOS	137

Resumen

En este documento se presentan los resultados de un estudio longitudinal de corte cualitativo cuyo objetivo central fue indagar la posibilidad de promover habilidades de generalización en un formato de taller con Logo.

El estudio se llevó a cabo en dos ambientes de aprendizaje, el primero en un contexto tradicional en lápiz y papel y el segundo en un ambiente tecnológico con Logo. En el primero se exploraron las habilidades para generalizar de diez alumnas de la licenciatura en educación preescolar mediante problemas tradicionales de secuencias de figuras y numéricas, y el segundo tenía como propósito que estas mismas alumnas realizaran generalizaciones con Logo.

Para efectuar el análisis de la información se definieron cinco categorías originales que se sustentaron en las etapas de generalización de Mason (1996) la teoría de otras investigaciones. Las categorías fueron producto de un análisis exhaustivo en el que se triangularon los datos empíricos de la etapa práctica del estudio, la interpretación del investigador y la teoría tomada de otros autores.

Los resultados del estudio arrojaron las siguientes conclusiones:

En el ambiente de lápiz y papel (LP) se observó que las alumnas no elaboran justificaciones de sus resultados de manera espontánea; adicionalmente al resolver problemas de secuencias matemáticas ellas muestran una tendencia a las estrategias aritméticas en lugar de hacer uso del álgebra; es posible que esto obedezca a su preferencia a la recursividad aritmética, lo que puede estar obstaculizando que ellas logren una fórmula general. Para resolver los problemas en lápiz y papel se valieron de tabulaciones y la aplicación mecánica de reglas de proporcionalidad o una regla de tres. Sólo una alumna formuló una ecuación algebraica en las secuencias de figuras en este ambiente no digital.

En el contexto de Logo los resultados sugieren que este medio favorece el acceso a los procesos de generalización en las alumnas y al uso de una variable genérica, lo que las acerca al pensamiento algebraico. Se puede afirmar que resolver problemas con Logo

promueve la utilización de los conocimientos previos del alumno pero no se observó que este software promoviera conocimientos nuevos en las alumnas de manera autónoma.

La mayoría de las alumnas del estudio mostraron progreso con Logo, sin embargo en este trabajo no se logró clarificar si las alumnas fueron conscientes del sentido de la variable.

Al inicio de la investigación se partió de una hipótesis didáctica que consistía en el supuesto de que con un lenguaje de programación con Logo sería posible tener experiencias de generalización, incluso adquirir ciertas habilidades que no era posible lograr de forma tan eficiente por otros medios. Sin embargo los resultados obtenidos mediante el Taller de Logo sugieren que no es así. En este estudio se aportan evidencias empíricas de que existen diferencias en las generalizaciones en un ambiente tecnológico de Logo, con relación a su grado de dificultad y de los contenidos matemáticos implicados con las que se realizan con ambientes tradicionales como el de lápiz y papel.

Abstract

This paper presents the results of a longitudinal qualitative study whose main purpose was to investigate the possibility of promoting generalization skills in a workshop format with Logo.

The study was conducted in two learning environments, the first in a traditional paper and pencil and the second in a technological environment with 'Logo'. The first explored the ability to generalize than ten students of the bachelor's degree in early childhood education through traditional problems of figures and numerical sequences, and the second was intended that these same students develop generalizations by 'Logo'.

To perform the data analysis defined five original categories were based on the stages of generalization of Mason (1996) and the theory of other investigations. The categories were the result of a thorough analysis in which empirical data were triangulated to the practical stage of the study, interpretation of research and theory taken from other authors.

To perform the data analysis defined five original categories based on the stages of generalization of Mason (1996) and the theory of other investigations. The analysis categories were the result of a thorough review of the theory of other authors, the empirical

data of the study and interpretation of research through theoretical triangulation (Vertely 2000).

Conclusions

In the environment of pencil and paper we observed the students do not elaborate justifications for their results spontaneously, in addition, to solving problems of mathematical sequences students show a tendency to arithmetic strategies and they do not use algebra. It is possible that this obeys to this preference to the arithmetic recursively, this preference may be hindering that they achieve a general formula. In a context of pencil and paper, the students resolved the sequences problems through proportionality or rule of three. Only one student was able to make an algebraic equation in a sequence of shapes in this environment not digital.

In the context of 'Logo' the results suggest that this technology facilitates access to the students to the processes of generalization and the use of a generic variable, while it approaches the students to algebraic thinking. We can think that Logo promotes the use of prior knowledge of the student, nevertheless this software do not promote new knowledge in the students independently.

Most students showed progress with Logo, however in this study did not clarify whether the students were aware of the meaning of the variable.

At the beginning of the research, we start with a hypothesis didactic, consisting of the assumption that with a Logo programming language would be possible to get experiences of generalization, even acquire certain skills that could not otherwise be achieved with the same efficiency. However, the results obtained with workshop of 'Logo' suggest that it isn't like this. This study provide empirical evidence that there are differences between in the technological environment generalizations, specifically with 'Logo', relative to their level of difficulty and mathematical content involved with those carried out with traditional environments such as pencil and paper.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas en la educación pre-escolar

Los estudiantes de educación básica muestran dificultades en el aprendizaje de contenidos matemáticos, en especial con los relacionados a los ejes temáticos sentido numérico y pensamiento algebraico, así como el de forma, espacio y medida, es decir, con contenidos relativos a la aritmética, el álgebra y la geometría. Estas dificultades las confirman los resultados de evaluaciones nacionales, como la Evaluación Nacional del Logro Académico en los Centros Escolares (ENLACE) o la de Exámenes de Calidad y de Logro Educativo (EXCALE) y las evaluaciones internacionales como el Project International Students Assessment (PISA) sobre el rendimiento de los estudiantes en matemáticas.

En el examen de ENLACE, por ejemplo, el 70% de los estudiantes de primaria y 90% de secundaria obtuvieron resultados en matemáticas que los ubican entre los rangos de “Insuficiente” y “Elemental” (SEP 2009).

En exámenes internacionales como el de PISA, en los periodos de 2000 a 2009 los resultados fueron también desfavorables. El bajo desempeño en matemáticas mostrado por México lo ubicaron en los últimos lugares entre los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Los resultados obtenidos por los estudiantes de nuestro país los ubican apenas en el segundo nivel más bajo de un total de siete niveles determinados para este examen (INEE, 2006).

Los resultados de las evaluaciones antes mencionadas aunados a una serie de factores sociales y políticos motivaron a la OCDE a hacer recomendaciones en el sentido de elevar la calidad de la educación en los países miembros. En este orden de ideas, la Secretaría de Educación Pública (SEP) ha emprendido una reforma curricular para el nivel básico (Preescolar, 2004; Secundaria, 2006; Primaria, 2009) en la que se plantea la Articulación de la Educación Básica, la cual pretende promover una educación integral que vincule los tres niveles (SEP 2008).

Los nuevos enfoques curriculares derivados de la reforma de la educación básica, a su vez generan la necesidad de llevar a cabo modificaciones en el desarrollo profesional de los profesores en servicio, al mismo tiempo que mejoren la formación inicial de los futuros docentes, acordes al perfil de egreso de los alumnos de educación básica.

Dentro de este contexto los futuros docentes se verán expuestos a nuevas exigencias pedagógicas y didácticas, entre ellas, deberán desarrollar competencias para crear o adaptar nuevas estrategias de enseñanza y evaluación (SEP 2008).

Uno de los medios para hacer frente a los futuros retos que los profesores enfrentarán puede estar en la actualización docente. En el caso de los contenidos matemáticos el desarrollo profesional, además de los contenidos relacionados con la formación específica de la docencia, es recomendable que incluyan además el desarrollo de habilidades para adquirir nuevos conocimientos. La generalización matemática puede ser una actividad que promueva dicha habilidad, ya que de acuerdo con los trabajos de varios investigadores está relacionada con el aprendizaje de las matemáticas.

En este estudio se analizan los procesos de generalización que se dan en el entorno de las matemáticas. Para poder realizar dicho análisis fue necesario delimitar el tema únicamente a las generalizaciones de patrones contenidos en secuencias numéricas y figurativas. Los procesos de generalización han sido ampliamente estudiados por muchos investigadores en una gran diversidad de contextos, ellos han realizado sus trabajos con alumnos de diferentes edades que asisten a distintos grados escolares desde los infantes de edades muy tempranas como en la educación preescolar, hasta los jóvenes que cursan los últimos grados de la educación básica (incluyendo a los maestros en estos mismos niveles). La mayoría de los reportes de las investigaciones antes mencionadas coinciden en destacar la importancia de la generalización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (por ejemplo: Cañadas y Castro, 2008; Bednarz, Kieran, & Lee, 1996; Mason, Graham, & Johnson-Wilder, 2005; Mason, Graham, Pimm, y Gowar, 1985; Mor, Noss, Hoyles, Kahn, y Simpson, 2006; Ursini, 1993; Ursini y Rojano 2005; Radford 2003; Radford, Bardini y Sabena, 2005;).

El estudio que aquí se expone es una investigación de corte cualitativo con intervención, cuyo propósito principal está dirigido a la solución de un problema real y concreto; este propósito en específico es explorar la posibilidad de desarrollar las habilidades para generalizar de un grupo de diez alumnas de la licenciatura en educación preescolar haciendo uso tecnologías. Con el estudio se pretende identificar la capacidad de generalizar de las estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos. Interesa saber si esta capacidad puede ser modificada mediante actividades realizadas en un taller con lenguaje de programación Logo. Los resultados de la investigación se circunscriben al contexto y a los sujetos de este estudio, sin intenciones de generar teorías aplicables a otros casos (Taylor y Bogdan, 1992).

El presente estudio se centra en el análisis y caracterización de los diferentes tipos de estrategias que utilizan los alumnos cuando resuelven problemas de generalizaciones matemáticas. Dichas estrategias pueden ser desde las explicaciones empíricas basadas en un número reducido de casos, hasta otras más complejas como son las algebraicas sustentadas en una fórmula general, la cual tiene la particularidad de poderse aplicar sobre cualquier término de una secuencia. Para que un alumno logre este último nivel de generalización, es necesario que identifique la estructura de la secuencia dada y que además registre o represente la fórmula general.

El trabajo empírico del estudio se realizó en dos contextos; el primero consistió en la aplicación de un instrumento realizado en Lápiz y Papel en el que de acuerdo con los propósitos del estudio, las alumnas resolvieron problemas clásicos de secuencias numéricas y figurativas, que las llevó a realizar generalizaciones en este ámbito. Para el segundo momento, se diseñó un taller en lenguaje de programación con Logo con el propósito de realizar generalizaciones, interesa explorar la posibilidad de extender las habilidades de generalizar de las alumnas en un ambiente tecnológico.

En el primer acercamiento analítico a la información recabada en la etapa práctica del estudio, se adoptaron como categorías de análisis las distintas fases del circuito de generalización propuesto por Mason (1985). Del resultado de contrastar la propuesta de Mason con la interpretación de la actuación de las alumnas al resolver problemas de secuencias figurativas y numéricas en ejercicios en lápiz y papel, se elaboró un reporte en

el que se distinguieron cuatro niveles de generalización. En un principio se pretendía que dicho reporte jugara el papel de una evaluación diagnóstica que permitiera servir como referente para comparar algún posible avance después de llevar a cabo el Taller con Logo.

Un análisis final que hiciera posible comparar los resultados del diagnóstico con lo realizado con Logo daría cuenta de los avances de las alumnas en sus habilidades para generalizar, sin embargo, la comparación entre las generalizaciones realizadas en estos dos contextos resultó sumamente complicada debido a que se trataba de dos tipos de generalizaciones diferentes que no necesariamente implicaban los mismos grados de abstracción. De esto surgió la necesidad de un análisis más fino que considerara dichas diferencias y que a su vez diera cuenta de las diferentes estrategias que las alumnas emplean cuando se enfrentan con generalizaciones en contextos computacionales en específico con Logo, y a su vez en los contextos más tradicionales como LP. Interesaba asimismo indagar la posibilidad de llevar a cabo comparaciones sobre algunos aspectos análogos en ambos contextos.

Para solventar esta necesidad se decidió hacer un análisis por separado, iniciando con las generalizaciones en lápiz y papel y luego con las generalizaciones en Logo. Para cada uno de los ámbitos se definieron categorías de análisis, lo cual fue posible mediante la triangulación teórica como la descrita por Bertely (2000), una triangulación que relaciona la interpretación del trabajo empírico, la teoría disponible de otros autores y que genera nuevas categorías para el análisis en el vértice central de dicho triángulo. De esta triangulación surgieron cuatro categorías para cada uno de los contextos LP y Logo.

Debido a que estas nuevas categorías implican procesos cognitivos diferentes para un contexto y otro, se hizo necesario identificar algunos parámetros para examinar las diferencias y semejanzas entre ambos. El resultado de esta comparación sugiere que Logo puede ser un ambiente más amable que permite a los alumnos acercarse a la idea de variable genérica con más familiaridad, sin embargo, no fue posible en este análisis comprobar si el grado de conciencia que lograron tener las alumnas con relación de esta variable va más allá de la operatividad en los programas realizados en Logo. Queda pendiente para otra

investigación explorar las posibilidades de transferir estos aprendizajes observados en Logo a los ambientes tradicionales como son los de Lápiz y Papel.

En la presente investigación se identificaron dos diferentes niveles de generalización que corresponden a Logo y LP. En las generalizaciones efectuadas en ambos contextos aparecen contenidos matemáticos, sin embargo estos son diferentes atendiendo a su nivel de abstracción. En LP, para generalizar es preciso identificar un patrón a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de un conjunto, extrapolarlo a otro término de la secuencia, elaborar un registro y justificar los resultados (como en Mason 1985), en esta última etapa se espera que se tenga identificada la regla que rige los elementos de la secuencia.

En Logo el nivel de generalización parece ser más sencillo, se observó que en este caso la generalización tiene efecto cuando se identifican las instrucciones o grupos de instrucciones que se repiten en un programa y se abrevian mediante el comando REPITE. En este caso los grupos de comandos actúan como un patrón dentro de la serie de instrucciones contenidos en el programa. Otra forma de generalizar con Logo se observó en los programas generales en los que se pone en juego una variable genérica.

Las nuevas categorías de análisis que se definieron específicamente para cada contexto no fueron suficientes para llevar a cabo una comparación entre los dos ámbitos debido a las diferencias entre los niveles de abstracción, por lo que fue necesario identificar algunos parámetros análogos para poder confrontar los resultados de los dos contextos LP y Logo. Uno de estos parámetros, por ejemplo, es el número total de reactivos contestados, en éste se observó un incremento de 15 % favorable a Logo. Dicho resultado sugiere que generalizar en Logo podría ser más accesible a los estudiantes. A partir del análisis comparativo de los reactivos contestados se definió otro parámetro, el cual indica el porcentaje de los reactivos contestados en los que además se logró una generalización. Al respecto se observa que los resultados favorecieron nuevamente a Logo, ya que en este se movió de 93 a 98 %. Estos resultados deben de ser considerados con la reserva de las diferencias sobre la idea de generalización en cada contexto explicadas anteriormente.

El documento lo componen seis capítulos con los siguientes contenidos:

En el primer capítulo I: *Antecedentes del estudio: procesos de generalización*, se hace una breve descripción del tema de estudio sobre los procesos de generalización orientados al desarrollo de habilidades matemáticas en especial en el álgebra. Así mismo, se pone a consideración del lector el uso de las tecnologías específicamente la de Logo en los procesos de generalización. En este mismo sentido, se detalla la problemática desde la óptica de algunas de las ideas principales de investigadores que han experimentado con procesos de generalización en ambientes tradicionales y con Logo; trabajos que se han realizado con propósitos similares al que se trata en esta investigación,

En el capítulo II *Antecedentes teóricos y empíricos*, se presentan las referencias teóricas que sustentan el presente estudio. Se hace referencia a los procesos de generalización sustentadas por Mason y por otros investigadores que han coincidido con los enfoques presentados en sus trabajos. Por otra parte, se describe la forma en que se logró llevar a cabo el estudio en dos momentos de análisis, y se detalla el proceso de construcción de las categorías de análisis.

En el capítulo III *Método*, explica el método utilizado para la organización y desarrollo del presente trabajo de investigación, Diseño y aplicación de los instrumentos de investigación, diseño del taller de Logo. Se describe la forma en que se seleccionaron los sujetos de estudio y la aplicación de los instrumentos en especial las hojas de trabajo con los ejercicios en Lápiz y Papel y en Logo.

En el capítulo IV *Resultados en lápiz y papel*, en este capítulo se presentan los resultados obtenidos en el análisis bajo la teoría utilizada por Mason (1985) en relación a la generalización como ruta hacia la raíz del álgebra. También se expone el marco interpretativo que explica y fundamenta el proceso de creación de las nuevas categorías con las que se llevo a cabo el segundo análisis.

En el capítulo V *Resultados de la experiencia en el Taller con Logo*, se expone a modo de marco interpretativo la teoría de algunos investigadores que apoyó la reelaboración de las

categorías de análisis para Logo. Y se da cuenta de los resultados derivados de la aplicación del taller con Logo a partir de las categorías mencionadas.

En el capítulo VI *Categorías de Generalización y niveles de Programación en Logo*, se contrastan los resultados entre los dos contextos LP y Logo utilizando para este fin las categorías de análisis creadas para cada uno de ellos, los resultados enfatizan las diferencias implícitas ya antes mencionadas, y destacan algunos aspectos afines. Por último, se hace una comparación entre un contexto y otro, tomando como instrumento de análisis los indicadores análogos, con los que finalmente se pudieron aportar los resultados entre LP y Logo.

Finalmente, se presentan las conclusiones sobre el estudio de generalización se hacen los comentarios finales sobre los principales logros alcanzados en el presente estudio.

El apartado de Anexos, contiene las tablas de análisis tanto en el ámbito de Lápiz y Papel como las de Logo, y las tablas de análisis de los comparativos entre los dos contextos. También se anexan las distintas tentativas efectuadas en el proceso de la determinación de las categorías de análisis.

CAPÍTULO I.- Antecedentes del estudio: procesos de generalización

En el Plan de Estudios para la Licenciatura en Educación Preescolar 1999 existe una asignatura en la que las futuras educadoras pueden reflexionar sistemáticamente sobre el pensamiento matemático infantil para los preescolares. Sin embargo, este no es propiamente un curso sobre matemáticas y tampoco se les ofrece un espacio curricular en el que ellas pueden estudiar y aprender los contenidos matemáticos escolares que se imparten a nivel de primaria y secundaria.

De lo anterior se infiere que el dominio de estas alumnas para llevar a cabo procesos de abstracción sobre contenidos matemáticos, no se encuentran en los niveles deseables para una licenciatura en educación básica.

Desde esta perspectiva sería deseable que la futura educadora –así como el resto de los docentes de educación primaria- tuviera dos niveles de dominio en relación a los contenidos matemáticos; por un lado, el dominio del contenido, cuyo aprendizaje puede ser la base para el desarrollo de otras habilidades necesarias para el ejercicio de su profesión, y por el otro, el dominio didáctico de las matemáticas y el de su pedagogía, referido más directamente a su profesión ya que en dicho ejercicio enfrentará desafíos al diseñar y aplicar actividades para sus alumnos que pongan en juego el desarrollo del pensamiento matemático infantil.

La generalización matemática se puede encontrar en la solución de problemas matemáticos de diversa índole, unos de los más frecuentes son las secuencias figurativas y numéricas. Cuando un alumno resuelve problemas de secuencias utiliza diversos recursos cognitivos como la percepción y el razonamiento, además de una serie de conceptos matemáticos. Muchos investigadores han sostenido durante varias décadas, que la generalización de patrones acerca a los alumnos a ideas matemáticas poderosas. En este sentido por ejemplo Krutetskii y su equipo encontraron que existe una relación muy cercana entre la habilidad de generalizar y la de estudiar matemáticas (Krutetskii 1976, citado en Ursini 1993). Por su parte, Mason (2005) afirma que existe una relación importante entre los procesos de generalización y el aprendizaje del álgebra; en sus palabras “...el corazón del álgebra escolar reside en expresar generalidad” (Mason, J.; Drury, H. & Bills, E. 2007 p.1). Desde

la perspectiva de este investigador, el reconocimiento de patrones y la generalización son actividades esenciales en el desarrollo del pensamiento matemático, en especial, el algebraico. En este mismo sentido Kieran (1997) deja ver que el análisis de actividades basadas en observación de patrones sobre secuencias gráficas y numéricas puede crear oportunidades para introducir al pensamiento algebraico.

De lo anterior se desprende que la escasez de oportunidades que tienen las educadoras en formación de experiencias como las que describen los investigadores antes citados, disminuye también la posibilidad de desarrollar los esquemas cognitivos y herramientas conceptuales a las que los mismos investigadores hacen referencia.

Es probable que muchas de las dificultades que afrontan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas fueran generadas -desde su primer acercamiento a esta ciencia- a partir de experiencias llevadas a cabo en los planteles escolares del nivel básico. Se puede presumir que muchas de estas experiencias las llevaron a cabo a través de medios tradicionales, es muy probable también, que algunas de estos alumnos hayan experimentado frustración y apatía por las dificultades enfrentadas por con las matemáticas al inicio de su formación, lo que supone que nuevos intentos por desarrollar habilidades de contenido matemático bajo los mismos medios con los que aprendieron la primera vez conducirán a resultados similares

Dentro de este marco de ideas, se hace deseable la exploración de nuevas formas de enseñanza de los mismos contenidos pero desde otros enfoques, con otros medios o diferentes estrategias de enseñanza. En la búsqueda de nuevas formas de enseñanza de las matemáticas, aparece la generalización de patrones. Krutetskii y su equipo encontraron que existe una relación muy cercana entre la habilidad de generalizar y la de estudiar matemáticas (Krutetskii 1976, citado en Ursini 1993). Si bien, la expresión de la generalidad no garantiza un aprendizaje en sí misma, puede ser un indicador de desarrollo cognitivo (Mason, Drury & Bills, 2007). Investigadores como: Mor, Noss, Hoyles, Kahn & Simpson (2006) sostienen que el reconocimiento de patrones y la generalización son fundamentales para el pensamiento matemático y constituye una forma conveniente para conducir a los alumnos al pensamiento algebraico.

Los ordenadores en el campo de la educación han propiciado nuevas posibilidades, tanto en la forma de aprender como en lo que se aprende. Actualmente, la tecnología de la información es vista de tres formas distintas: como un conjunto de habilidades /competencias, como un conjunto de herramientas o vías para hacer lo mismo de siempre pero de un modo mejor y más económico, y como agente de cambio con un impacto revolucionario (Mc Farlane, 2003).

Los resultados en la enseñanza por medio de materiales concretos en computación han sido diversos así Douglas, & Meredith, (1992) reportan logros importantes en sus investigaciones donde aplicaron Logo. Entre ellos se destaca los beneficios que el uso de este lenguaje puede aportar a las minorías en desventaja al proveerlos de un sentido de dominio de su entorno. Estos investigadores afirman que Logo puede hacer posible la exploración de algunos conceptos matemáticos; sin embargo, desde su visión Logo debe de ser utilizado más bien como un marco conceptual para aprender las matemáticas formales, ya que los obstáculos tradicionales para comprender las matemáticas no desaparecen con la simple exposición de conceptos matemáticos en Logo.

Una posible forma de acercar a las alumnas a ideas matemáticas, en específico a la habilidad de generalización, puede ser a través de un lenguaje de programación con Logo. En este sentido, Noss (1985); Hoyles y Noss (1988); Sutherland, 1987, Hoyles y Sutherland, 1989, Ursini (1993) señalan en sus investigaciones en trabajos realizados con Logo la posibilidad de desarrollar comprensión de las variables en este contexto; Hoyles y Noss, Mavrikis, Geraniou, Gutiérrez-Santos & Pearce (2009) dirigen su atención a la construcción de un sistema computacional para apoyar la participación de los estudiantes en generalización.

El presente estudio tiene su sustento en la consideración de que el desarrollo de habilidades de generalización, puede representar un recurso para promover otras habilidades matemáticas y que un medio idóneo para promover dichas habilidades se encuentra en los medios tecnológicos, en especial en el lenguaje de programación de Logo.

1.1 Planteamiento del tema y la problemática.

En el ejercicio de su profesión las alumnas de la licenciatura en educación preescolar deberán enfrentar desafíos al diseñar y aplicar actividades para sus alumnos que pongan en juego el pensamiento matemático. De esta forma, la futura educadora no sólo debe de poseer un conocimiento amplio sobre los propósitos y contenidos de la educación preescolar, sino que también ella misma, como usuaria de las matemáticas, es deseable que posea un dominio sobre contenidos matemáticos cuyo aprendizaje puede ser la base para el desarrollo de otras habilidades necesarias para el ejercicio de su profesión.

Sin embargo, el Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Preescolar presenta una inconsistencia, entre la falta de oportunidades –antes mencionada- para que las futuras educadoras estudien y pongan en práctica conceptos matemáticos y el perfil de egreso de las estudiantes. Lo anterior se puede observar en el documento sobre las Orientaciones Didácticas del Perfil de Egreso de dicho Plan:

“Una de las finalidades que deben cumplir las diversas actividades formativas en la escuela Normal es fomentar el interés de los estudiantes por la investigación científica, introducirlos en las distintas nociones y prácticas que caracterizan al pensamiento científico, lograr que sean usuarios analíticos y críticos de los productos de la investigación y habituarlos a que en sus estudios, durante su trabajo y en su formación continua, apliquen los criterios e instrumentos de la indagación científica (LEP, 1999).

Para cumplir con este perfil del profesional de la educación preescolar, sería necesario que las alumnas tuvieran, entre otros, el dominio de contenidos de las ciencias en general, pero en particular de las matemáticas, que es la disciplina que desde siempre ha sido considerada como el modelo de las ciencias. La importancia de esta ciencia es universalmente reconocida, como se ve en los países asociados a la OCDE, quien en sus evaluaciones internacionales como el examen de PISA, otorga un lugar prominente al dominio de las matemáticas, considerándolo como un parámetro central para evaluar la calidad de la educación de sus países socios.

Para cumplir con este perfil del profesional de la educación preescolar, sería necesario que tuvieran el dominio de contenidos de ciencias en general, pero en particular de las matemáticas, que es una de las disciplinas básicas en el campo de las ciencias. La importancia de esta ciencia es universalmente reconocida, como se ve en los países asociados a la OCDE, quien en sus evaluaciones internacionales como el examen de PISA, otorga un lugar prominente al dominio de las matemáticas, considerándolo como un parámetro central para evaluar la calidad de la educación de sus países socios.

Con base en las consideraciones anteriores, se definieron los propósitos del presente estudio, propósitos que se describen más adelante. Para hacer posible dichos propósitos, una de las innovaciones en el estudio fue la incorporación de nuevas tecnologías, en particular Logo, para fortalecer en las estudiantes de la licenciatura en educación preescolar las competencias antes mencionadas.

Como ya se dijo se han realizado diversas investigaciones en torno al uso de Logo. En ellas se han planteado como propósito el desarrollo de habilidades matemáticas con estudiantes en la etapa aritmética (primaria y secundaria), también con estudiantes pre algebraicos y algebraicos (secundaria y media superior), así como con maestros de educación básica, en pre servicio y en servicio (e.g. Douglas & Meredith, 1992; Noss, & Hoyles; 1996; Ursini, & Rojano, 2005). Considerando estas experiencias en el marco de este trabajo, se consideró interesante realizar un estudio exploratorio con alumnas de la licenciatura en educación preescolar, sólo que en este caso se ha elegido como tema central el desarrollo de la habilidad de generalizar, como origen de otros contenidos matemáticos por las razones ya expuestas.

En suma, el presente trabajo está dirigido a explorar si el lenguaje de programación con Logo puede ayudar a desarrollar procesos de generalización en un grupo de futuras maestras en educación preescolar. Para conseguir lo anterior se comparó su desempeño en actividades de generalización con lápiz y papel con el que ellas presentaron en tareas de generalización después de un curso introductorio con Logo.

Para fines de la investigación se plantearon las siguientes preguntas de investigación

1.1.1 Preguntas de investigación:

¿Será viable una intervención pedagógica para desarrollar procesos de generalización en un formato de taller?

¿El lenguaje de programación Logo promoverá los procesos de generalización?

¿Puede el lenguaje de programación Logo incidir en el desarrollo de habilidades para la generalización matemática?

¿En qué tipo de habilidades o competencias matemáticas puede incidir el lenguaje logo?

¿Existen diferencias entre las generalizaciones que se hacen con Logo de las que se hacen a través de métodos tradicionales como el lápiz y papel? Si existen ¿de qué tipo son?

Para responder a las preguntas de investigación, se propusieron los siguientes objetivos:

1.1.2 Objetivos del estudio

Objetivos generales del estudio

- 1) Identificar la capacidad de generalizar cuando resuelven problemas matemáticos.
- 2) Verificar la viabilidad de una intervención pedagógica en un formato de taller.
- 3) Investigar si el lenguaje de programación Logo promovió los procesos de generalización.

Objetivos específicos

- 4) Diseño y aplicación de una herramienta en Lápiz y Papel (LP) sobre generalización de secuencias numéricas y figurativas.
- 5) Identificación y caracterización de las estrategias que emplean las alumnas en la

resolución de problemas de secuencias numéricas en lápiz y papel (LP) y lo mismo en un programa en Logo

6) Identificación y caracterización de las estrategias que emplean las alumnas en la resolución de problemas de secuencias numéricas en lápiz y papel (LP) y lo mismo en un programa en Logo

7) Diseño y aplicación a educadoras en formación de un curso introductorio de Logo en el que se llevaran a cabo tareas de generalización

8) Identificación de algunas analogías y diferencias entre las estrategias utilizadas por las alumnas en los procesos de generalización en los diferentes contextos de LP y Logo.

CAPÍTULO II Antecedentes del estudio: Procesos de generalización

En este capítulo se hace una exposición de los trabajos de investigación que sustentan el presente estudio. En un primer momento se hace referencia a los resultados de las investigaciones sobre los procesos de generalización realizados por Mason y los que han sido apoyados y continuados por otros investigadores que han coincidido con los enfoques presentados en sus trabajos. Así mismo, se hace referencia a algunos aspectos de las teorías utilizadas por algunos investigadores en sus trabajos sobre la prueba y la justificación. Estos aspectos permiten percibir ciertas coincidencias entre la generalización y los procesos de prueba y justificación, mismos que sirvieron de marco para constituir las categorías de análisis en el presente estudio. En un segundo momento, se hace un resumen de los trabajos sobre el lenguaje de programación con Logo, en el que se hace énfasis sobre los procesos de generalización estudiados por diferentes investigadores en este ambiente. Finalmente la propuesta de María Bertely con relación a las categorías de análisis y patrones emergentes y la triangulación teórica entre tres categorías, sirvió como referente para la construcción de las ‘categorías de generalización para el análisis presentado en el Capítulo 4 del presente estudio.

La habilidad de generalizar está relacionada con la capacidad de aprender matemáticas. Para Krutetskii (1976) “la habilidad de generalizar es una de las características más importantes de la inteligencia”. Este investigador junto con su equipo de colaboradores encontraron una estrecha relación entre la habilidad de aprender matemáticas y la de generalizar. Ellos argumentan que los alumnos que son hábiles en matemáticas fácilmente comprenden lo que es general en diferentes situaciones externas y agregan que esta comprensión es más difícil de alcanzar en el caso de los alumnos que no tienen esta capacidad (Krutetskii, citado en Ursini, 1993, p.30).

Una forma de generalización se da mediante la inducción. Al resolver un problema los alumnos eventualmente se pueden ver inmersos en procesos de razonamiento de tipo inductivo. Este razonamiento se da cuando a partir de la observación de ejemplos particulares se pretende llegar a leyes generales, es decir, desde la observación de casos específicos se trata de descubrir la regularidad y la coherencia (Polya, 1995). En palabras

de este investigador la generalización consiste en pasar de un objeto a un conjunto de objetos entre los cuales figura el primero.

Para Mason, por otra parte, la generalización parte de la identificación de patrones en una sucesión. Describe un circuito de generalización en la que se identifican una serie de fases que van desde la identificación de una regularidad, su expresión oral, hasta la elaboración de un registro y la prueba de su veracidad.

2.1 Los trabajos con los que se sustenta el estudio

A través del tiempo han aparecido diferentes propuestas para introducir a los alumnos al estudio del álgebra como la resolución de problemas, la modelación, las relaciones funcionales y la generalización, estas opciones comparten la intención de hacer el aprendizaje del álgebra más significativo para los estudiantes (Puig y Cerdán, 1990; Filloy & Rubio 1991; Rubio, 1990, 1994 citado en Bednarz, Kieran, & Lee, 1996).

En sus trabajos sobre la generalización Mason (1985) encontró que la generalización constituye un medio que conduce hacia pensamiento algebraico, y afirma que la expresión de la generalidad es una raíz del álgebra y un camino para conducir a los alumnos hacia el álgebra.

De las diferentes didácticas para la enseñanza del álgebra antes mencionadas en este apartado se hablará de una en particular, el enfoque de la generalización de patrones numéricos y geométricos y las leyes que gobiernan las relaciones numéricas. Este enfoque que suscribe Mason de aproximación al álgebra dirige la atención de los estudiantes a una gran variedad de contenidos matemáticos, mismos que están comprendidos en los procesos de generalización tanto de secuencias numéricas como figurativas. La generalización de patrones puede ser vista como una herramienta esencial en el aprendizaje de las matemáticas en especial en el álgebra, debido a que las matemáticas conllevan muchas generalizaciones que pueden aparecer ya sea en fórmulas, procedimientos o en métodos (Mason, Graham, Pimm, y Gowar, 1985 p.31).

La generalización puede acercar a la comprensión de contenidos matemáticos. Estos contenidos pueden estar presentes en diferentes áreas de la matemática como: la aritmética, la geometría, el cálculo, y por supuesto, el álgebra.

En términos muy amplios, la generalización es usualmente considerada como una actividad inductiva empírica en la cual el trabajo con patrones es un ejemplo representativo. Sin embargo, no todo trabajo con patrones implican niveles de generalización similares, por ejemplo, Mor, Noss, Hoyles, Kahn & Simpson (2006) aseguran que las conclusiones sobre patrones que realizan los estudiantes en tareas sobre secuencias tienden a ser superficiales o incidentales en donde prevalece el razonamiento empírico y que otro nivel más complejo implica que dichas conclusiones estén basadas sobre argumentos relacionados con su estructura. Los investigadores antes mencionados sostienen que los alumnos enfrentan dos retos en tareas sobre patrones; el primero es construir el objeto matemático y el segundo hacer su representación algebraica.

Para que un alumno realice una representación formal es indispensable que comprenda la estructura de la secuencia, sin embargo, tal parece que existe una disociación entre la secuencia percibida y su representación. Lo anterior se observa cuando un alumno percibe un patrón y logra determinar un término solicitado, sin embargo, la ecuación que resuelve la secuencia no corresponde a patrón percibido y por consiguiente arroja resultados diferentes y por consiguiente no ha generalizado.

Se ha sugerido que uno de los obstáculos que tienen los alumnos para desarrollar la apreciación de la estructura en secuencias numéricas radica en su tendencia hacia una visión recursiva, es decir, en identificar la relación entre dos términos consecutivos en lugar de visualizar la regla general de la secuencia (Küchemann & Hoyles, 2005, citado en Mor, Noss, Hoyles, Kahn, y Simpson, 2006).

Bajo la idea de que no todas las actividades con patrones conducen a una generalización, Radford (2006) distingue dos tipos de generalizaciones: una de tipo aritmética y la otra algebraica. Los procedimientos inductivos basados en la formulación de reglas mediante ensayo y error en actividades con patrones, para este investigador no conducen a una

generalización; El sostiene que en estos casos esos procedimientos inductivos llevan a un tipo de razonamiento probable, y que en realidad se ajustan más a una hipótesis. En este sentido, este investigador afirma que el álgebra no trata de una adivinanza o del uso de signos, sino de deducir las reglas que rigen una secuencia y su representación por medio de un sistema de símbolos (2006).

Radford (2006) sugiere que la acción de generalizar incluye dos elementos interrelacionados, el primero consiste en percibir una regularidad en una secuencia dada; el segundo consiste en formar un concepto general. Para que la generalización pueda ser considerada como algebraica Radford afirma que la expresión debe satisfacer cualquier término de la secuencia, de no ser así, la generalización es sólo aritmética. Él comprueba en sus trabajos empíricos las diferentes instancias en que se manifiesta la generalización; en éstos ha podido apreciar que “la tarea de generalizar se hace más complicada cuando se les pide a los estudiantes relacionar variables y expresar esta relación en un lenguaje algebraico” La afirmación anterior se sustenta en el hechos de que las propias variables y el lenguaje algebraico son en sí mismos generalizaciones, por lo tanto cuando se generaliza a través de estos elementos se logra un mayor nivel de abstracción (Radford 2003).

Otros grupos de investigadores coinciden con los resultados de los trabajos recién descritos en el sentido de que para los estudiantes resulta una tarea relativamente sencilla el predecir el término siguiente de un conjunto ordenado, mientras que ellos encuentran más difícil, y a veces imposible, el generalizar en el sentido de producir una regla para determinar el valor de un término en una posición arbitraria (véase por ejemplo Hargreaves, Threlfall, Frobisher, y Shorrocks-Taylor, 1999; Bourke y Stacey, 1988; Stacey, 1989).

Carraher, Mara, Martínez y Schliemann (2007), convergen en la misma idea. Consideran que si bien el extender un conjunto ordenado de objetos a otros términos, muestra algún grado de generalización, sin embargo, esto no alcanza a ser una generalización explícita expresada en el lenguaje o formas matemáticas convencionales.

Uno de los investigadores líderes en el tema de la generalización y que ha producido teoría sobre este tema es Mason, quien lleva trabajando sobre generalización por más de dos décadas. Una de sus obras pioneras es *Routes to roots to algebra* (Mason, Graham, Pimm, & Goward, 1985) y una más reciente es *Developing Thinking in Algebra* (Mason, Graham, & Johnson-Wilder, 2005). Otros investigadores han realizado obras sobre generalización y sobre álgebra en las que se percibe el sello de Mason, por ejemplo *Approaches to Algebra* (Bednarz, Kieran, Lee, Radford, 1996), así como los trabajos sobre el tema de Radford (e.g., el de 2006). Y más recientemente Carraher, Martínez y Schliemann (2007) y los de Noss, Hoyles, Mavrikis, Geraniou, Gutierrez, & Santos Darren (2009) en todos estos trabajos aprecian enfoques afines con las ideas de Mason en el sentido de considerar a la generalización de patrones como un medio que favorece el acceso al álgebra.

Mason considera que la generalización es una ruta hacia la raíz del álgebra. En el proceso de generalizar Mason reconoce cuatro etapas en un circuito ascendente en abstracción: Ver, Decir, Registrar y Probar los resultados. En lo que sigue se describe cada una de estas etapas

Ver lo general.- El poder percibir lo que varía y lo que permanece en una secuencia matemática permite al alumno hacer deducciones sobre la regla que rige a la secuencia. Sin embargo, es difícil observar que el alumno ha conseguido ver lo general sino hasta el momento en que él lo expresa. Muchas veces cuando un estudiante logra percibir una regularidad en una sucesión matemática lo manifiesta con una expresión de regocijo.

Decir lo general.- Una de las formas en que un sujeto comunica lo que ‘ve’, es cuando lo ‘dice’ (habitualmente en lenguaje natural). Dicha expresión puede dirigirse a sí mismo o a alguien más. Para Mason ‘Ver’ y ‘Decir’ son una forma de reconocer un patrón y con frecuencia esto sucede cuando logra identificar lo que varía de un primer estado a otro e intenta deducir la regla que rige los elementos del problema. Mason considera que lo más difícil en esta etapa es decir lo que ha variado.

Registrar. Se refiere a comunicar por escrito o con símbolos lo que logró realizar mediante el lenguaje; el registro puede aparecer en una serie de diferentes formatos constituidos por

dibujos, dibujos y palabras, palabras con algunos símbolos o de símbolos apoyados con palabras. Como es fácil discurrir, dichas formas de registro pueden variar desde lo completamente informal hasta lo completamente simbólico. Se debe enfatizar que si se está trabajando con álgebra no importa el tipo de registro que se esté usando y no sólo lo simbólico es álgebra (Mason, J.; Graham, A.; Pimm, D. & Gowar, N. 1985 p.52)

Probar los resultados. Una vez que se ha conseguido generalizar, surge la necesidad de probar el resultado obtenido, para tratar de ver si la regla expresa propiedades generales del patrón como un todo, o si es el resultado de los ejemplos particulares dados (Mason, Graham, Pimm, y Gowar, 1985 p.17).

La cuarta etapa de generalización de Mason alude a que probar los resultados surge de la necesidad de querer convencer a alguien o a sí mismo de la veracidad del resultado del problema de generalización, el cual a su vez nos induce a *ver*, y *decir* el ‘por qué’. Para poder explicar este ‘por qué’ requiere de tener una visión de lo general y de acuerdo a lo afirmado por Mason (1985) implica la reestructuración del ejemplo particular para poder explicar las características generales.

Mason reconoce tres formas de probar las fórmulas: 1) mediante la aplicación directa de la fórmula en los casos en los que es posible conocer el resultado por otros medios, 2) realizando cálculos en nuevas figuras dentro de un rango en el que todavía es posible verificar por otros medios (i.e. dibujando y contando) y 3) comprobando la consistencia interna (e.g. observación ‘*los números son impares*’ Regla expresada *¿siempre dará un número impar? ¿Por qué?*).

Por otra parte, Mason plantea tres tipos de justificación de la generalización en los enunciados matemáticos: cuando el enunciado es siempre verdadero e.g. $n + (n+1) = 2n + 1$; cuando lo es para algunos casos e.g. $X^2 > 4$ siempre que $-2 > X > 2$ y cuando es verdadero para ningún caso e.g. $X^2 = -2$ (en números reales). , y sostiene que “convencerse a sí mismo de que algo es *siempre verdadero* lleva al pensamiento algebraico (2005, p.222).

2.1.1 La prueba y la generalización

Rigo (2009) reconoce dos propósitos en la justificación, uno epistemológico (aseverar explicar, fundamentar) y otro psicológico (conseguir algún conocimiento). Además, en su investigación, destaca dos clases principales de justificaciones: la primera que comprende aquellas justificaciones de las que se obtienen aserciones plausibles o probables y la segunda de las que se desprenden enunciados lógicamente necesarios. Las primeras engloban los tipos de prueba empirismo ingenuo y la experiencia crucial de Balacheff, las demostraciones empíricas de Simón y Blume así como las pruebas experimentales de Blum y Kirsh. De todas ellas, nos dice Rigo, se derivan conclusiones plausibles. En el otro grupo, el de las pruebas formales, se incluyen el ejemplo genérico y experimento del pensamiento de Balacheff, la justificación deductiva y argumento general de Simón y Blume, las instanciaciones y argumentos hipotético deductivos de Reid y las pruebas pre formales y formales de Blum y Kirsh; de estos tipos de justificación se derivan enunciados lógicamente necesarios (Rigo, 2009).

La prueba es ampliamente reconocida como un medio de verificación, y también para generar conocimiento. Gila (1995) asegura que la prueba es el método de verificación preferido por los matemáticos y que su importancia permanecerá en el futuro, Ella define a la prueba como un método no sólo para decir que algo es cierto sino para decir por qué es cierto y afirma que es usada frecuentemente en el salón de clases para promover conocimiento (Gila, H. & Villiers, M. 2008).

Siguiendo la clasificación realizado por Rigo se podría pensar que las inducciones como las plantea Polya arrojarían conclusiones plausibles, mientras que con el circuito de las etapas para generalizar propuesto por Mason, si se llega a la etapa de la prueba de los resultados, se llegarían a conclusiones necesarias.

2.2 El lenguaje de programación Logo

Introducción

En las matemáticas, la presencia de la computadora ha traído nuevos retos para su enseñanza y aprendizaje. Un ejemplo de estos retos para los alumnos (y para algunos docentes) se presenta en el dominio operativo de los sistemas; para otros docentes de las matemáticas los retos consisten en desarrollar los ambientes que estimulen el aprendizaje y

al mismo tiempo propicien la toma de conciencia por parte de los usuarios de los contenidos matemáticos implicados en los procesos y los significados asociados.

Hace más de cuatro décadas Papert (1980) y su equipo de colaboradores, dieron a conocer a la comunidad matemática su lenguaje de programación denominado Logo y afirmaban que dicho software revolucionaría la forma de aprender de los estudiantes y que además promovería la autonomía en la construcción de sus conocimientos. La idea de Papert era que con la programación en un lenguaje de Logo un estudiante dispondría del marco conceptual suficiente para comprender conceptos matemáticos como la geometría y que incluso acercaría a los alumnos a los niveles de abstracción del álgebra, y como consecuencia, a los aprendizajes matemáticos en general. Papert aseguraba que Logo al ser un ambiente de aprendizaje en el que el usuario experimenta el control de su propio aprendizaje, lo que le confiere un sentimiento de poder y de dominio del mundo.

Los resultados que Papert suponía de Logo, hoy sabemos—después de todo este tiempo— que no se han visto totalmente logrados en la práctica. No obstante, no se deben subestimar los ventajas que Logo puede aportar a los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo se tienen suficientes evidencias de que el uso de Logo permite plasmar de manera concreta contenidos de la matemática y de otras disciplinas que son abstractas, y que la programación con Logo puede ser un marco de referencia que de pie a la creación de nuevos conocimientos (Ursini y Rojano, 2005; Douglas y. Meredith, 1992).

Otros investigadores como Sacristán (2003) coinciden en afirmar que el uso de Logo puede desarrollar habilidades matemáticas, ella sostiene que con Logo se desarrollan habilidades matemáticas como son las habilidades lógicas, la ubicación espacial, el uso de medidas y los ángulos, la habilidad de generalizar, la resolución de problemas, la habilidad de formalizar y simbolizar, el desarrollo de concepto de variable en sus diversa interpretaciones y desarrollar el concepto de función entre otros.

Clements y Meredith (1992) reportan en sus investigaciones logros importantes en la aplicación de Logo. Entre estos beneficios que la programación con Logo puede aportar destacan el aumento en el rendimiento de las minorías en desventaja al dotarlos de un

sentido de dominio de su entorno. Para Clements y Meredith (ídem) la programación con Logo acerca a los alumnos desde edades muy tempranas a conceptos aritméticos, también puede ayudar a los niños a alcanzar mayores niveles de pensamiento geométrico, y agregan que Logo puede proveer una "entrada" al uso de la herramienta poderosa del álgebra.

En un ambiente de Logo los alumnos pueden explorar conceptos geométricos, de manera que Logo se presenta como un ambiente idóneo para la reflexión y la construcción de conocimiento de los objetos geométricos..

2.2.1 Logo y la comprensión del álgebra

Recientes investigaciones sugieren que al trabajar con la programación con Logo los alumnos además de poner en juego conocimientos aritméticos y geométricos, pueden ser inducidos a ideas algebraicas básicas. Así lo demuestran investigaciones con alumnos de 12 y 13 años en diferentes contextos, en las que se observó que este entorno de aprendizaje favorece los procesos del álgebra, ya que su práctica propicia que los estudiantes desarrollen su capacidad para reconocer patrones y percibir a la variable como número general, entre otras habilidades necesarias para la comprensión de la sintaxis algebraica, de las expresiones abiertas y de la incógnita (Ursini y Rojano, 2005; Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005).

2.3 El concepto de variable

Ursini y Rojano (2005) afirman que la noción de variable es la vía que lleva a la comprensión de los distintos ámbitos del álgebra entre otras cosas; el de las expresiones abiertas y las ecuaciones, entre otras cosas. De ahí la importancia de la adecuada interpretación en los programas generales con Logo. Las investigaciones sobre la idea de variable y del álgebra sugieren que Logo ayudará a los estudiantes a entender estos conceptos.

Por ejemplo, Noss y Hoyles (1988) afirman que la intervención de un investigador más la ayuda de la computadora pueden facilitar a los estudiantes el desarrollo del concepto de variable. El uso de la variable se presenta en los alumnos de manera casi natural, aunque no siempre existe conciencia por parte estos alumnos de la interpretación y manejo de dichas

variables. En realidad la idea de variable, afirman estos investigadores, les lleva más tiempo y se da mediante una variedad de experiencias con la ayuda pedagógica de parte de un maestro o investigador.

Existen otras opiniones en relación al efecto que Logo puede tener sobre el aprendizaje de la variable. Por ejemplo, Douglas, Clements y Meredith (1992) consideran que en un contexto de Logo las dificultades persisten ya que el uso de las variables no surge de manera espontánea, y aun en los casos en que los alumnos hacen uso de las variables no necesariamente han obtenido la idea precisa de las variables o del álgebra.

En otro orden cosas, Ursini y Rojano (2005) afirman que un niño pone en juego una amplia serie de conceptos y habilidades matemáticas cuando se enfrenta con el uso y la escritura de la programación con Logo. Entre ellas, estas investigadoras destacan el empleo de sus capacidades de análisis y síntesis además de hacer uso de su razonamiento lógico, la idea de generalización y su expresión formal en lenguaje de Logo.

En palabras de Douglas et al. (1988), “La interacción con la computadora puede jugar un rol crucial para que los alumnos desarrollen una comprensión de un método general—el corazón del pensamiento algebraico” La instrucción que hace hincapié en los vínculos entre Logo y el álgebra lleva a una idea más formal y general de variable” (35, 40,41). No obstante, continúan los investigadores, el aprendizaje algebraico se puede construir sobre un posible marco conceptual adquirido por los alumnos a partir de las experiencias con Logo.

2.3.1 Transferencia de Logo a otros contextos

Los conocimientos desarrollados con Logo sin que exista una inducción por parte de un maestro o investigador y en ausencia de actividades específicas, es probable que no trasciendan a otros contextos. Investigaciones realizadas al respecto, sostienen que la transferencia no se da de manera espontánea y que los conceptos matemáticos desarrollados en Logo permanecen en este ambiente. Sin embargo, la intervención pedagógica apropiada junto con actividades elaboradas ex profeso pueden llevar a los estudiantes a generalizar la idea de variable en otros ambientes diferentes a Logo. Sin la ayuda apropiada del investigador o maestro es posible que los estudiantes generen un idea de variable diferente,

concebida únicamente para un ambiente de Logo, en este caso la intervención oportuna del investigador puede ser decisiva para evitar que el estudiante cree conceptos erróneos (Sutherland, citado en Noss y Hoyles 1988; Douglas et al, 1992; Ursini y Rojano 2005).

La intervención del maestro o del investigador en estos procesos instructivos puede darse en diversas formas, una de éstas pueden ser los cuestionamientos que lleven al alumno al análisis de sus respuestas, así como el de crear los ambientes de trabajo que lo motiven a enfrentarse con el problema y para generar sus propias estrategias para desarrollar ideas poderosas en la computadora. En sus trabajos sobre Logo, Hoyles y Noss 1988 afirman que Logo puede ser útil para explorar ideas matemáticas de manera autónoma, no obstante, agregan que las estrategias utilizadas por ellos en su mayoría suelen ser simplemente procesos agregados (ver Hoyles, 1987), de ahí la importancia de contar con la intervención del investigador para evitar que los alumnos lleguen a conclusiones erróneas. Estos investigadores expresan la importancia de la intervención oportuna como sigue: “El rol del investigador fue ayudar a movilizar el conocimiento existente en el sujeto para la solución de su problema—y la computadora le permitió pensar en un nivel simbólico mientras le aportaba una retroalimentación visual” (Hoyles y Noss 1988 p.284).

La representación visual de Logo en la pantalla de un computador, puede servir como un andamiaje en el que el alumno pueda representar un problema en la forma en la que él lo ve. Sin embargo, un andamiaje por medio de la representación visual puede fijar a los estudiantes en este ambiente, impidiendo el análisis de la estructura de sus programas y hacer difícil el desarrollo del pensamiento geométrico. Resulta complicado para estos alumnos abandonar la ayuda visual a menos que la misma naturaleza de los problemas los lleve al análisis y la descripción de los componentes geométricos y de las figuras. (Clements & Meredith, 1992).

Es posible que un maestro pueda promover otro tipo de andamiaje mediante propiciar en los alumnos la construcción de conexiones entre los conocimientos previos que tienen con el aprendizaje de Logo. (Noss y Hoyles 1988 p.284).

Algunas expectativas que no se llegaron a cumplir con Logo.

Clements & Meredith (1992) afirman que aunque el uso de un lenguaje de programación con Logo es prometedor, reconocen que no todas las investigaciones reportan resultados positivos, por ejemplo, los conceptos erróneos persisten sin la guía de un maestro o investigador y los estudiantes por su parte, no suelen dar evidencias del nivel de competencia que en torno a ciertos conceptos ellos han alcanzado a través de ese medio. Como se ha mencionado anteriormente, los investigadores aludidos afirman que la transferencia de los logros conseguidos no se da de manera espontánea y en varios estudios las diferencias entre Logo y los grupos de control no son significativas.

Aunque Ursini y Rojano (2005) sostienen la posibilidad de usar estos ambientes para acercar a los estudiantes a los conceptos implicados en tareas matemáticas, reconocen que un estudiante puede escribir un programa general sin que necesariamente tome conciencia de las ideas matemáticas contenidas en dichas tareas.

Con la programación es posible realizar generalizaciones y acercarse al pensamiento algebraico, sin embargo, es conveniente señalar, como se verá en el presente estudio, que no en todos los casos el uso de una variable genérica implica una generalización de manera espontánea, ya que si no se conduce al alumno a que tome conciencia de la función que juega en un programa la variable general, entonces no se ha generalizando. .

Validación

Finalmente, se debe destacar que una fase importante en el proceso de generalización consiste en probar la veracidad de los resultados logrados. Rojano y Ursini (2005) sostienen que para el caso de una programación en Logo se logran procesos de ‘validación’ casi de manera natural cuando se corre un programa. No obstante, como se mostrará en este escrito, esa validación sólo comprueba la efectividad de un programa, sin que sea equivalente a una prueba en el sentido estricto, como las realizadas en los contextos tradicionales.

2.4 Las categorías de análisis

2.4.1 La propuesta de María Bertely

La propuesta de Bertely (2000) se desarrolla a partir de investigaciones etnográficas llevadas a cabo en el campo educativo. El camino surge de la información recabada directamente del campo de estudio etnográfico que esta investigación describe; esta información se constituyó en el referente empírico de donde se construyeron las primeras interpretaciones de acuerdo con un protocolo de investigación diseñado con anterioridad para tal efecto. A partir de la sistematización de estas primeras interpretaciones de la realidad, resultan las categorías asignadas a la información recabada, en las que se confrontaron los conceptos teóricos de otros autores. De este proceso surge el texto etnográfico de educación.

La propuesta de Bertely (2000) está apoyada en una triangulación teórica en la que se establece un dialogo entre la teoría, la interpretación y la realidad, de la que —después de transitar de manera dialéctica entre estos ámbitos— se diseñan las categorías específicas para realizar el análisis. Estas categorías, advierte Bertely, no pretenden extenderse como recetas para ser aplicadas a otras investigaciones ni afectar los marcos realizados por otros autores. Más bien, deben de ser consideradas exclusivas para un estudio en particular para el cual fueron construidas.

A continuación se ilustra la triangulación entre tres tipos de categorías (p.64)

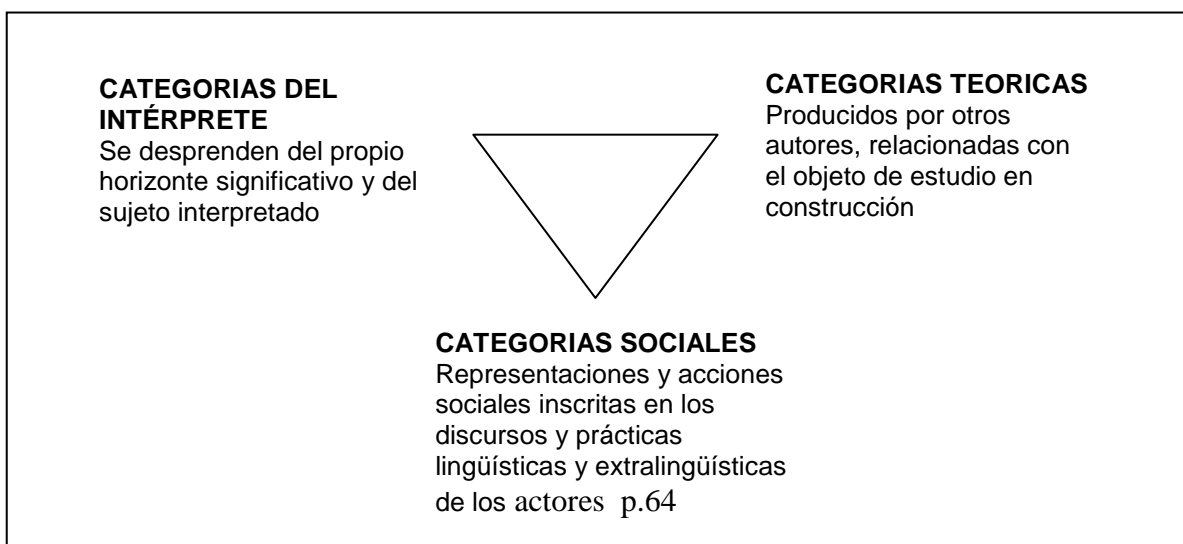


Ilustración 2.01 Triángulo teórico propuesto por Bertely (2000)

En el vértice derecho aparecen las categorías del investigador, surgidas del propio horizonte interpretativo del sujeto interpretado desprendidas de la información recolectada en el campo. En el vértice inferior están las categorías sociales derivadas de las representaciones sociales y en el vértice izquierdo se ubican las categorías de los conceptos teóricos de otros autores relacionados con el objeto de estudio en construcción (Bertely 2000).

Cuando las categorías de otros autores no se ajustan o no satisfacen las necesidades de análisis para una determinada información, dice Bertely, se hace necesario construir las categorías específicas para llevar a cabo el estudio.

La investigación sobre generalización aquí presentada, ha tenido que experimentar un proceso similar que se ajusta al marco propuesto por Bertely. Las categorías para el análisis aquí creadas fueron producto de un transitar de un vértice a otro en la triangulación entre la interpretación de los hechos empíricos, las teorías tomadas de otros autores y las nuevas categorías en construcción. Estas últimas se fueron modificando después de un ‘ir y venir’ exhaustivo alrededor del citado triángulo “etnográfico”.

La definición de cada categoría dio lugar a su análisis correspondiente, lo que derivó en un trabajo intensivo con el que finalmente se pudieron concretar las categorías que se proponen en el presente estudio.

En resumen. La capacidad para generalizar está relacionada con el aprendizaje de contenidos matemáticos y puede ser vista como un medio para acercarse a la idea de variable y del álgebra. Investigadores como Radford sostienen que para que una generalización de una secuencia matemática sea algebraica es necesario que resuelva cualquier término de manera independiente. La determinación de una regla general implica conocer la estructura de la regla que rige los elementos de una secuencia y no de la aplicación de estrategias recursivas.

Las investigaciones sobre la idea de variable sugieren que Logo puede ser conveniente para que los estudiantes comprendan los distintos ámbitos del álgebra. Para Papert creador Logo, un estudiante puede comprender conceptos de la geometría incluso hasta aproximarse a los niveles de abstracción del álgebra.

Una de las cualidades del ambiente de Logo consiste en la ayuda visual que ofrece al alumno la computadora, la cual le resulta difícil abandonar cuando intenta desarrollar los conocimientos logrados en otros ambiente. La transferencia de dichos conocimientos a otros contextos diferentes puede ser posible con la intervención pedagógica apropiada junto con actividades elaboradas expofeso por un maestro o investigador. Es importante resaltar que un estudiante puede escribir un programa general sin que necesariamente tome conciencia de las ideas matemáticas contenidas en el, sin embargo, con la intervención adecuada de un maestro o investigador, esta puede conducir con las actividades específicas para hacer que se haga consiente de los contenidos matemáticos implicados.

Finalmente con relación a las categorías de análisis en los casos en los que las categorías de otros autores no se ajustan o no satisfacen las necesidades de análisis para una determinada información, Bertely (2000) propone una triangulación teórica en la que se establece un dialogo entre la teoría producida por otros investigadores, la interpretación del intérprete y las categorías sociales de los actores en la realidad.

CAPÍTULO III Método

En este capítulo se detallan los aspectos metodológicos de la presente investigación. En primer término se hace una descripción del tipo de estudio y su corte, enseguida se detallan las etapas que siguió el proceso de investigación desde la descripción de los instrumentos, seguida por la explicación de cómo se aplicaron dichos instrumentos así como una revisión general del taller con Logo y para finalizar se explica la forma en que se realizó la selección de los sujetos de estudio y el papel que jugó el investigador en el transcurso de este trabajo.

El “micromundo de la geometría de la tortuga” es quizás el más conocido del lenguaje de programación diseñado por Papert; los elementos principales del micromundo de la tortuga son: la imagen de una tortuga que al desplazarse en la pantalla traza una línea equivalente a su desplazamiento. Los desplazamientos los realiza de acuerdo con las instrucciones que para ello se le dictan a la tortuga, mediante unos comandos llamados primitivas, de manera que se pueden definir formas y figuras dibujadas en la pantalla como resultado de dichos desplazamientos.

3.1 Tipo de estudio y corte

El presente estudio es una investigación longitudinal de corte cualitativo con intervención, cuyo propósito central está dirigido a explorar la posibilidad de desarrollar habilidades de generalización en ambientes tecnológicos. Los resultados de la investigación se circunscriben a los sujetos observados en el presente estudio sin intenciones teóricas aplicables en general (Taylor, S.J. y Bogdan, R., 1992).

En primera instancia en este trabajo se reporta el resultado de un análisis sobre la habilidad para efectuar generalizaciones matemáticas en un contexto de lápiz y papel (LP) que llevaron a cabo nueve alumnas que estudian la licenciatura en educación básica. Posteriormente se explora el desarrollo de esta habilidad de generalización en el mismo grupo de alumnas pero en un contexto tecnológico. En un principio, el propósito era saber si este contexto digital—específicamente si un taller de programación con Logo—podría ayudar a las alumnas a desarrollar sus habilidades de generalización.

3.2 Etapas en las que se desarrolló el estudio

Ya que el propósito principal del estudio está dirigido a desarrollar habilidades de generalización (como se mencionó en capítulos previos), primero se aplicó el instrumento en Lápiz y Papel. Interesaba contrastar los resultados en este contexto con los resultados del que surgieran de la segunda experiencia de generalización con tecnologías particularmente con un lenguaje de programación con Logo. Sin embargo, después de realizar el análisis de los resultados del instrumento en LP, se observaron una serie de conocimientos y habilidades matemáticas que las alumnas ponen en juego al resolver los problemas en este contexto, de tal forma que se juzgó pertinente, como ya se dijo antes, presentar un análisis más fino por separado. Atendiendo a las observaciones anteriores en lo que sigue se indican las etapas que siguió la investigación:

Etapas de la fase práctica de investigación

- Diseño de los instrumentos del estudio
- Pruebas preliminares de los instrumentos
- Aplicación del instrumento en Lápiz y Papel
- Diseño de la secuencia didáctica del taller con Logo
- Aplicación del taller con Logo
- Reporte y análisis de la información

A continuación se describe cada una de las etapas del estudio

3.2.1. Diseño de los instrumentos de investigación

Como ya se dijo, el estudio se llevó a cabo en dos diferentes ámbitos, por lo que fue necesario diseñar instrumentos específicos para cada uno de ellos

3.2.2 El instrumento en lápiz y papel, como se mencionó anteriormente fue diseñado con el propósito de medir la habilidad de los sujetos de estudio para generalizar. Este consistió en una serie de problemas de generalización en secuencias matemáticas ordenadas de manera progresiva i.e. secuenciados de acuerdo con los niveles de abstracción, Tomando como base las distintas etapas de generalización de Mason (ver capítulo 2).

Dentro de este marco de referencia se pidió a las alumnas a identificar un patrón, registrar lo general, finalmente justificar sus resultados mediante una explicación o con cualquier registro aritmético o algebraico. En los últimos problemas del instrumento se esperaba que las alumnas llegaran al uso de una variable genérica en secuencias numéricas como figurativas. El diseño del instrumento se basó en una serie de reactivos organizados por su grado de dificultad, es decir aumentan sus niveles de abstracción de manera gradual, de un reactivo al siguiente.

El primer problema III-3 del instrumento en LP consistió en una secuencia figurativa en la que se solicita extender un patrón a diferentes términos de la secuencia. El problema puede ser resuelto utilizando diferentes estrategias desde las soluciones recursivas aditiva i.e. seguir el patrón término a término hasta llegar al solicitado, o bien recurriendo a la estructura de la secuencia para identificar la regla que rige la secuencia y construir una fórmula general ver Diagrama 3.01

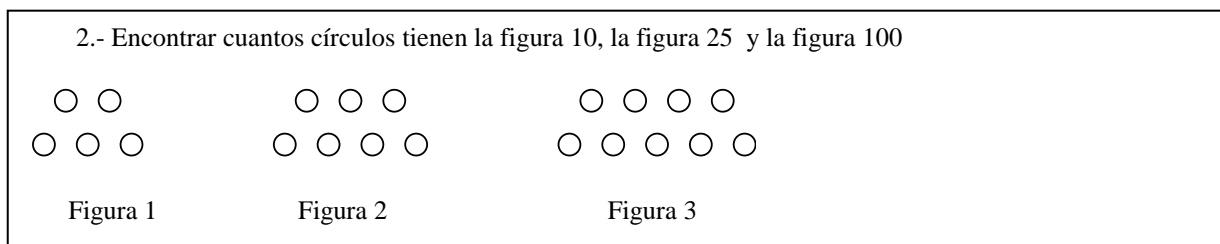
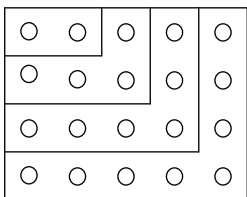


Diagrama 3.01 Reactivo III-3 Instrumento en LP

La consigna del problema III-3 sólo se propone encontrar los términos 10, 25 y 100 sin pedir la justificación de los resultados.

El problema III-4 es una secuencia similar a la anterior, la diferencia es que en ésta se insta a las alumnas a encontrar la regla que representa la relación de los elementos de la secuencia. Lo anterior es posible con la consigna del inciso d) en la que se pide extender el patrón al término 'n'. La consigna anima a las alumnas a utilizar una literal como variable mediante la sintaxis algebraica, y la respuesta sólo puede ser lograda si se conoce la estructura de secuencia i.e. la regla de la secuencia (ver Diagrama 3.02).

3.- Contesta el siguiente problema:



- a) En el primer rectángulo hay dos círculos, ¿cuántos círculos hay en el quinto rectángulo? _____
- b) ¿Cuántos hay en el rectángulo 100? _____
- c) ¿Cómo lo sabes? _____
- d) ¿Cuántos hay en el rectángulo “n”? _____
- e) ¿Cómo lo sabes? _____

Diagrama 3.02 Reactivo III-4 Instrumento en LP

En el problema IV¹ incluye cinco incisos en los que se solicita a las alumnas encontrar el término consecutivo de la secuencia numérica, además se les pide elaborar para cada secuencia la ecuación que represente la regla que resuelve el problema. En lo que sigue aparecen los enunciados de los problemas numéricos contenidos en la tarea IV:

IV SERIES NUMÉRICAS

a) ¿Qué número continua la serie?

b) Si ‘N’ fuera el número de cada término de la secuencia ¿cómo escribirías en lenguaje algebraico el patrón que regula la sucesión? (ver ejemplos)

- 2,4,6,8,10 _____
- 10,20,30,40, _____
- 1,3,9,27,81 _____
- 1,3,7,15,31 _____
- 1,4,10,22,46 _____

- _____ $N \times 2$
- _____ $N \times 3$
- _____
- _____
- _____

Diagrama 3.03 Reactivo IV del instrumento en Lápiz y Papel

3.2.3 Pruebas preliminares del instrumento en LP

Para verificar que este primer instrumento cumpliera con los propósitos deseados, se llevaron a cabo pruebas preliminares con cuatro alumnas elegidas al azar con características similares a las que participarían posteriormente en el estudio principal de generalización. Las estudiantes elegidas para en el estudio así como las que participaron en las pruebas preliminares se encontraban cursando el quinto semestre de la licenciatura en educación

¹ La numeración de los problemas no llevan una secuencia por que se conservó la numeración original

preescolar en la misma institución. El instrumento original en LP contenía cinco problemas, cuatro figurativos y uno de secuencias numéricas. El resultado de las pruebas preliminares dio lugar a que se eliminaran dos problemas figurativos, ya que no aportaban información significativa, por lo que el instrumento final de LP consistió de dos problemas figurativos y uno numérico.

3.2.4 El taller Logo, diseño y selección de las actividades

Se optó por un lenguaje de programación con Logo como medio para acercar a las alumnas a ideas matemáticas— en específico la de realizar generalizaciones—tomando como base los resultados reportados en trabajos realizados por diversos investigadores en diferentes contextos con propósitos similares. En trabajos realizados por investigadores a los que se hizo referencia en el capítulo 2, se tomaron como sujetos de estudio a estudiantes de educación básica, y maestros en pre servicio y en servicio en el nivel básico (Ursini 1993; Ursini y Rojano 2005; y Noss y Hoyles 1996, Clements & Meredith 1992). En el presente estudio de caso se consideró interesante experimentar con estudiantes de la licenciatura en educación preescolar, por lo que el escenario en donde se llevó a cabo la etapa práctica fue una sala de cómputo de una escuela para formación de estas docentes.

Para este segundo contexto del estudio, se diseñó un taller de programación con Logo en un ambiente gráfico. Las estudiantes trabajaron con programas generales tanto en un ambiente gráfico como en uno numérico. En las sesiones finales del taller trabajaron con idea de número general mediante el uso de una variable (Ursini y Rojano 2005). En la sesión 5 las alumnas trabajaron en un ambiente numérico, en esta sesión realizaron generalizaciones con operaciones numéricas utilizando la primitiva “REPITE”.

Cuando los estudiantes trabajan programas generales en un ambiente de programación como el propuesto, implícitamente se ponen en juego ideas matemáticas de diversa índole; en este trabajo se enfatizan los procesos de generalización como una habilidad que pueda promover en las alumnas mayores niveles de dominio matemático. A continuación se describen las sesiones del Taller con Logo.

Primera sesión

Encuadre. Se dio a conocer el plan general del curso, sus propósitos y contenido. Se hizo énfasis en el lenguaje de programación LOGO como un medio para trabajar conceptos matemáticos. Como se dijo en esta primera sesión también se aplicó el instrumento en LP

Segunda sesión

Introducción al lenguaje Logo. En esta sesión las participantes realizaron su primer acercamiento a la programación con Logo; se familiarizaron con los comandos básicos llamados primitivas. Por medio del “juego de la tortuga”, exploraron los comandos, y se familiarizaron con el movimiento de la tortuga. La sesión se realizó en dos momentos; en el primero, los ejercicios se hicieron sin computadora, y en un segundo momento exploraron las mismas primitivas de manera libre con algunos ejercicios trazando una serie de dibujos en la computadora. El propósito de esta sesión fue que las estudiantes se apropiaran de los conocimientos básicos del lenguaje LOGO y exploraran el “micromundo de la tortuga”.

Tercera sesión

Programando con Logo. Después de haber trabajado con instrucciones directas lo hicieron con programas que reprodujeron en diferentes contextos pero ahora de manera abreviada es decir, sin repetir todas las instrucciones. Con esta finalidad, al iniciar los programas de los dibujos antepusieron la palabra “PARA”, enseguida le dieron un nombre al programa y finalmente agregaron la palabra “FIN”. De esta manera al escribir el nombre del programa de forma automática reprodujeron sus dibujos sin repetir todas las órdenes.

Cuarta sesión

Patrones y Regularidades. En esta unidad las alumnas pasaron de la programación directa a la programación con la primitiva “REPITE”. Para lograrlo debieron de identificar patrones, lo que permanece y lo que varía en sus instrucciones, para hacer programaciones abreviadas. Se trabajó con polígonos para resaltar los aspectos regulares de esas figuras. Se realizaron exploraciones de distintos patrones geométricos.

El propósito de esta sesión fue que las participantes reconocieran patrones y los expresaran en lenguaje Logo.

Quinta Sesión

Generalización en un entorno numérico de Logo. En esta sesión, las alumnas se internaron en el entorno numérico de Logo. Los problemas propuestos llevaron a las alumnas a operar con variables. Al final de la sesión aprendieron cómo correr un programa general de Logo. Los propósitos fueron que las alumnas aprendieran la primitiva “ESCRIBE” para obtener en la pantalla el resultado de la operación aritmética.

Aprendieron cómo representar y operar un elemento variable de un programa. Conocieron el proceso para deducir un método general y su expresión en Logo, así como la forma de correr un programa general de Logo.

Sexta sesión

Generalización en un “Micromundo de la geometría de la tortuga”.

Partiendo de los conocimientos geométricos previos de las alumnas se les ayudó a deducir y expresar un procedimiento general para dibujar figuras geométricas de diferentes tamaños con un mismo programa. Las actividades propuestas incluyeron un proceso de generalización y su expresión. Se introdujo a las alumnas a la sintaxis para escribir un programa general. Los programas propuestos por ellas fueron primero de manera directa, después, ellas mismas identificaron un patrón para llegar a un programa abreviado como el del ejemplo siguiente

```
PARA CUADRO
REPITE 4 [AV 50 GD 90]
FIN
```

Séptima sesión

Proyecto final: En esta última sesión, las participantes del taller tuvieron que escribir programas generales para realizar diferentes figuras con el comando REPITE, en estos programas las alumnas debían operar las distintas variables en la solución de los problemas propuestos.

El propósito de esta última sesión fue el de evaluar a cada sujeto en su capacidad para generalizar ya que al realizar el ejercicio ellas debían los combinar los conocimientos logrados en el curso y dar evidencias de sus habilidades de generalización.

3.2.5 Pruebas preliminares del Taller en Logo

Como ya se apuntó el diseño del taller con Logo se sustentó en los trabajos realizados por Ursini y Rojano (2005) sobre el aprendizaje del álgebra con este lenguaje de programación (ver apartado 2.2.4 en este mismo capítulo), por lo que el instrumento se consideró suficientemente probado por dichas investigadoras y no requería de ninguna prueba adicional. Por ello únicamente se le hicieron pequeñas modificaciones al diseño original.

3.3 Aplicación del instrumento en LP

El instrumento en LP fue aplicado a veinte alumnas en la primera sesión del taller para identificar los posibles niveles de dominio de generalización que ellas manifiestan cuando realizan actividades con patrones. La sesión tuvo una duración de dos horas de las que los primeros quince minutos se dedicaron a informar a las participantes sobre los contenidos del Taller. Enseguida se procedió a aplicar el instrumento en LP. Con la información recabada en este instrumento se llevo a efecto un análisis con base en el circuito de generalización de Mason. Considerando los resultados de este análisis fueron seleccionadas diez alumnas para el taller con Logo. Más adelante se describe los criterios de selección.

La recolección de datos de este primer instrumento se llevó a cabo en las hojas de trabajo del instrumento; para tal efecto, se pidió a las alumnas ajustarse a las instrucciones especificadas para cada problema y que todas las operaciones o representaciones (como gráficos tablas o cualquier otro algoritmo usadas en la solución del problema) quedaran registradas en el instrumento, es decir, en las mismas hojas de trabajo. El tiempo para resolver los problemas fue libre, hasta que la última alumna terminó el ejercicio. No fue necesario extender el horario mas allá de las dos horas acordadas en un principio.

3.4 Aspectos de la aplicación del taller con Logo.

Como se ha señalado, el taller consistió de 7 sesiones de 2 horas de duración cada una. Se tuvieron que hacer algunas adecuaciones por ejemplo:

La mayoría del grupo enfrentaba algunas dificultades en las actividades propuestas, lo que motivó que por ejemplo Nancy y Miriam manifestaran sus intenciones de abandonar el taller. La solución fue hacer que trabajaran en pareja y así sus resultados fueron mejores y se logró que permanecieran en el taller.

Para la sesión tres parecía que algunas alumnas encontraban más difícil la resolución de los problemas planteados, mostraban dificultades con el software y empezaron a retrasarse con respecto al resto de sus compañeras, por lo que se optó por repetir la sesión tres para reforzar a las que así lo requerían con otros ejercicios. Esta estrategia permitió nivelar el grupo en el manejo del programa y dar la oportunidad a que todo el grupo continuara sin diversificarse.

En la quinta sesión se incluyó la variable general en los programas, así para la sexta sesión las alumnas pudieron deducir y expresar un procedimiento general para dibujar algunas figuras geométricas en diferentes tamaños, además de que conocieron la sintaxis para escribir un programa general.

3.5 Registro de las sesiones de trabajo

Al igual que en el instrumento con Lápiz y Papel, la recolección de los datos en Logo se llevó a cabo mediante las hojas de trabajo i.e. se recuperaron todos los programas elaborados por las alumnas y se reescribieron para su análisis. Asimismo, se solicitó a las estudiantes registrar al revés de sus hojas de trabajo las dificultades encontradas y de qué manera se resolvieron en cada caso.

3.6 La función del investigador

La función del investigador se dio ajustada a la investigación participante. En este caso el investigador cumple dos funciones: como conductor del taller y como investigador. Para optimizar los resultados de las alumnas, las instrucciones son las mínimas indispensables para permitirles la libertad para que hagan sus propios descubrimientos y resuelvan los

problemas por sí mismas. De esta forma la función principal del instructor es facilitar y acompañar a las estudiantes durante el taller, hacer las intervenciones necesarias, organizar las discusiones grupales para orientar el trabajo y así evitar que lleguen a conclusiones equivocadas. En ningún caso da la solución de los problemas que las alumnas pueden resolver sin ayuda.

Al inicio de cada sesión indica de manera breve la forma en que deben ser realizadas cada una de las actividades. También en todas las sesiones despierta el interés de los participantes mediante preguntas que a su vez orientan la actividad hacia los propósitos específicos en cada caso. Para solucionar las dudas surgidas durante una sesión, organiza las discusiones grupales para evitar que las alumnas lleguen a conclusiones erróneas.

El rol como investigador fue de observar, registrar y cuestionar para corroborar alguna información. Así mismo, después de cada sesión se realizó una revisión de los resultados logrados por las alumnas para efectuar los ajustes necesarios en la siguiente sesión. En la investigación se acentuó la atención hacia las alumnas que mostraron algún razonamiento diferente al resto del grupo, o cuando su desempeño fue diferente al esperado.

3.7 Elección de los sujetos de estudio

Con la finalidad de que el grupo fuera diversificado, se eligieron a diez alumnas con diferentes niveles de desempeño en habilidades de generalización. Se consideraron tres niveles con base a su habilidad para percibir un patrón y generalizarlo. De esta forma el nivel alto consideró los resultados superiores a 70 %, para uno medio de 56 a 69 % y el nivel bajo a los resultados de 55 % o menor. Los sujetos elegidos fueron tres alumnas con el rendimiento más alto (Tanya, Lina y Aida) cuatro con rendimiento medio (Gema, Ana, Laura y Coni) y tres con calificaciones bajas (Nora Mary y Yola). Para observar con mayor detalle los niveles de las alumnas ver 'Resultados globales del estudio basado en las categorías de Mason' en la Tabla 4.1 en el capítulo IV.

Los nombres originales de los sujetos de estudio fueron cambiados por motivos de confidencialidad.

En resumen

La investigación se llevó a cabo en dos ambientes diferentes; lápiz y papel y en Logo. El instrumento de investigación en LP consistió en una serie de problemas clásicos de secuencias matemáticas. Para Logo, se diseñó un taller basado en los trabajos realizados por Ursini y Rojano (2005) con relación al aprendizaje de álgebra. Únicamente se hicieron pruebas preliminares para el instrumento en LP.

La función del investigador consistió por lado como conductor en las actividades de las alumnas y por otro lado como investigador.

La selección de los sujetos del estudio fue realizada de acuerdo a los resultados logrados por las alumnas en la aplicación del instrumento en LP, se procuró lograr un grupo heterogéneo con base a los distintos niveles en el ejercicio en este ámbito.

CAPÍTULO IV Reporte de resultados en lápiz y papel

4.1 Presentación de resultados considerando la teoría de Mason

Un aspecto interesante en la teoría de Mason (1985) consiste en la descripción del proceso por el que transita un alumno cuando generaliza. Dicho alumno al ir avanzando por estas etapas, se sitúa en niveles de abstracción más elevados en un recorrido cíclico ascendente, parecido a una forma helicoidal.

En el marco de este trabajo se llevó a cabo un primer análisis de los datos empíricos obtenidos en la etapa práctica a partir de las etapas de generalización de Mason, que para fines del estudio se tomaron como categorías. Cabe aclarar que en este estudio se sintetizaron en una sola las dos primeras etapas de Mason (Ver y Decir lo general). Las etapas propuestas en el primer análisis fueron las siguientes:

- i. Percepción de un patrón (para Mason “Ver” y “Decir” lo general)
- ii. Registro de la regularidad percibida
- iii. Justificación de los resultados (para Mason probar lo general)

En los procesos de generalización, y particularmente en el descrito por Mason (1986), la justificación (vid. iii) es una práctica a la que difícilmente acceden los estudiantes. En relación a este punto, Audibert (1982) señala que son muy pocos los alumnos que se interesan en un proceso de producción de pruebas y aún menos frecuente, los que realizan una demostración² (Audibert 1982, citado en Balacheff 2000 p.1).

Con las tres categorías descritas se realizó un primer análisis de resultados en el que se confrontaron los obtenidos en las dos experiencias: en lápiz y papel (LP) y en Logo. En la Tabla T 4.1 se presentan los porcentajes logrados por las alumnas en cada una de las categorías consideradas en este análisis

² Este autor entiende la “prueba” como una justificación de menor rigor y la demostración como pruebas axiomatizadas, i.e, como las usadas por los matemáticos.

		Porcentajes Experiencia en LP			Porcentajes Experiencia en logo		
		CATEGORIAS DE ANÁLISIS			CATEGORIAS DE ANÁLISIS		
Alumna	Nivel	Percibir	Registrar	Justificar	Percibir	Registrar	Justificar*
TANIA	Alto	89	89	33	90	90	90
AIDA	Alto	78	78	78	80	80	80
LINA	Alto	78	67	67	67	67	67
ANA	Medio	67	67	67	41	41	41
GEMA	Medio	67	78	33	75	75	75
LAURA	Medio	67	67	33	78	78	78
CONI	Medio	67	67	67	89	89	89
NORYMAR	Bajo	44	44	44	45	45	45
YOLA	Bajo	55	55	11	63	63	63
PROMEDIO		68	68	44	70	70	70

Tabla T 3.1 Porcentajes por categoría/ alumna basado en las etapas de generalización de Mason
 * La verificación la que ocurre cuando se corre un programa de Logo se substituyó por justificación

Como se puede observar en la Tabla 4.1, las diferencias en las puntuaciones logradas por las alumnas en las etapas de “percibir un patrón” y “registrarlo” fueron apenas de dos puntos porcentuales. En la mayoría de los casos se percibe un pequeño avance favorable a la experiencia con Logo.

En la etapa “justificar” se advierten, en cambio, mayores diferencias. Mientras en LP el grupo obtuvo un promedio de 44 puntos, en Logo el grupo alcanzó un promedio de 70 (ver Tabla 4.1). Sin embargo, no se puede afirmar que dichas diferencias obedecen a un incremento en las habilidades para justificar como efecto de la aplicación de recursos tecnológicos en los procesos de generalización. Estas diferencias pueden responder a que en un programa con Logo los estudiantes pueden revisar y, en su caso, cambiar algunas de las instrucciones planteadas en una figura y, mediante la revisión y experimentación, llegar a la respuesta correcta del problema. Por lo anterior, el incremento en el puntaje de las justificaciones con Logo pueden ser más bien atribuidas al hecho de que el mismo software lleva a cabo la verificación al momento de correrlo, y no necesariamente al incremento en la habilidad del usuario para justificar sus respuestas.

En la afirmación anterior se deben diferenciar los programas con instrucciones directas en los que cada vez que se introduce una orden simultáneamente se pueden verificar los efectos de esta instrucción en la figura sobre la pantalla, proceso que no requiere justificación. La justificación (verificación) de este tipo de programas no fueron considerados en el comparativo de la tabla 4.1.

En programas modulares la verificación del programa sólo se puede ver en la pantalla cuando éste se corre. Esta acción equivale a la verificación de la estrategia llevada a cabo por el usuario para elaborar una determinada figura, tipo de justificación fueron las que se se consideraron el comparativo de los dos contextos en el capítulo VI.

Como ya se ha mencionado, como objetivo original del presente estudio interesaba saber si en el marco de un ambiente tecnológico era posible promover las habilidades de generalización de nueve alumnas de la carrera de la licenciatura en educación preescolar. Se ha dicho también que la teoría de generalización de Mason no resultó un marco analítico suficiente para hacer un análisis en más detalle con el cual se pudiera dar cuenta de los tipos de estrategias y justificaciones empleadas por las alumnas dado que Mason no detalla los procesos previos a través de los cuales el individuo llega a las etapas que él describe, por lo que resultó necesario considerar otros elementos para el análisis de los resultados empíricos obtenidos en esta investigación.

Con estas consideraciones en mente y con la idea de verificar en qué medida se alcanzó el objetivo del trabajo, se consideró importante contar con un marco interpretativo que permitiera profundizar en las categorías de Mason, detallarlas y complementarlas, de modo que fuera posible además de observar el proceso seguido por nuestros sujetos de estudio, conocer el estado de cada una de sus respuestas mediante indicadores específicos. Para este análisis fue necesario considerar lo siguiente:

- En las hojas de trabajo de la experiencia en LP se observaron diferentes formas de expresión en los registros elaborados por las alumnas. En dichos registros se podían identificar diferentes niveles de complejidad en las estrategias empleadas por ellas,

por lo que se juzgó conveniente exponerlas de manera detallada. Dichas estrategias van desde la simple adivinación, hasta las fórmulas algebraicas.

- Era deseable una categoría para indicar los casos en los que si bien una determinada alumna no siguió todo el proceso de generalización descrito por Mason sí logró una generalización incompleta sin utilizar álgebra ni elaborar una representación. En estudios realizados con niños de 12-13 años Ursini (1993) reporta que cuando no se sigue todo el circuito de generalización los alumnos tienen problemas para elaborar expresiones algebraicas. No obstante, el completar el circuito no es lo único relevante en el estudio que aquí se expone, ya que los propósitos están dirigidos al análisis del desarrollo de habilidades de generalización y no sólo a las propiamente algebraicas.
- Algunas respuestas en los reactivos del estudio hacen alusión a un nivel pre-algebraico o con tendencia a lo aritmético; dichas respuestas sugirieron la necesidad de definir sub-categorías específicas para distinguirlas de aquellas en las que se emplea el álgebra.
- Era deseable especificar en las generalizaciones, los distintos niveles de justificaciones dadas por las alumnas, recurriendo a los fundamentos teóricos que ofrecen otros autores.

4.2. Marco Interpretativo

A partir de las consideraciones anteriores, se llevó a cabo la revisión de la teoría de otros investigadores expertos en el tema de la generalización y la justificación (ver marco teórico) y en paralelo, se continuó con el análisis de las estrategias empleadas por las alumnas en la resolución de los problemas. Como resultado de esta revisión, tanto a nivel teórico como de los datos empíricos, se volvieron a analizar las respuestas, lo que arrojó la identificación de patrones de estrategias empleadas por las alumnas, a los que en el marco de este trabajo se denominaron “Categorías de Estrategias”.

Se trata de estándares de estrategias que tienen en común el mismo procedimiento para resolver un problema y que se repite en diferentes problemas y en alumnas distintas. Dichas Pautas de Estrategias fueron agrupadas de forma jerárquica atendiendo a los

procesos de razonamiento implicados, desde aquellos basados únicamente en procedimientos Azarosos, los que implican procesos Inductivos. A continuación se presentan las Pautas de Estrategias que resultan relevantes para este estudio.

4.2.1 Pautas de Estrategias y las Categorías de Análisis para la experiencia con Lápiz y Papel (LP)

En lo que sigue se caracterizan y describen las Pautas de Estrategias asociadas a los procesos de generalización que se identificaron en la experiencia de Lápiz y Papel que se llevó a cabo en el marco del presente trabajo, y que sirvieron para definir las Categorías de Análisis para este contexto. Posteriormente a partir de estas categorías de estrategias se exponen las categorías de generalización G, G1, G2, G3, G4 sus fundamentos teóricos y se presentan algunos ejemplos representativos.

Pautas de Estrategias

Procesos Azarosos

A : Adivinanza. Esta pauta comprende los casos en los que las alumnas no identificaron algún patrón, o su resultado surgió de estrategias de aproximaciones; en este último caso, aunque sus respuestas llegan a ser correctas, pareciera que llegaron a ellas de manera fortuita (confrontar con inducción ingenua de Radford 2006).

Procesos Algorítmicos

AR : Aplicación Rutinaria. Esta pauta de estrategias se identifica en los casos en donde un alumno aplica alguna regla de manera mecánica apoyada en sus creencias, reglas o conocimientos aprendidos, sin que muestre comprensión de la estructura de la regla que está tratando de aplicar. Por ejemplo, cuando aplica rutinariamente reglas de proporcionalidad, factor escalar o regla de tres. En el caso de secuencias no proporcionales los resultados son equivocados y se puede afirmar que no es una generalización. Cabe decir sin embargo, que en secuencias proporcionales se puede llegar al resultado correcto en un nivel de generalización muy sencillo.

Procesos de transición

ID : Inducciones Falsas. Esta pauta de Estrategias podría ubicarse como una etapa de transición entre los procesos intuitivos y los inductivos. En esta categoría las alumnas parecen percibir alguna regularidad, sin embargo dicha regularidad es independiente de la estructura de los elementos de la secuencia. El tipo de razonamiento empleado por ellas sugiere procesos inductivos de manera aun incipiente, en donde dichas alumnas exhiben claros intentos por llegar a una regla general sin tener una comprensión clara de los usos de la variable i.e. sin mostrar dominio sobre un sistema de signos algebraicos. Bajo dichas condiciones las respuestas en su mayoría son erróneas.

Procesos inductivos

AE : Análisis exhaustivo. Esta pauta se caracteriza porque el alumno es capaz de identificar un “Patrón de comportamiento aritmético” entre los términos concretos de la secuencia, pero no genera o registra una regla algebraica. El alumno en este caso puede distinguir un comportamiento aritmético regular entre dos términos sucesivos particulares de la secuencia, es decir, entre dos números específicos, de modo que razona e identifica regularidades siempre teniendo como referencia los números concretos. De esta forma, para calcular el $n^{\text{ésimo}}$ término de la secuencia, él precisa partir de un término particular y luego aplicar en todos los términos subsiguientes la regularidad detectada, es decir, en forma exhaustiva, hasta llegar al término que busca. De manera natural, recurre al registro tabular para llevar a cabo su procedimiento concreto y exhaustivo.

En el marco de este escrito se acepta que las resoluciones que siguen la Categoría AE descansan en procesos de Generalización, aun y cuando éstos se den en forma inacabada, i.e. sin regla ni justificación. Para algunos investigadores, como Bednarz, N; Kieran, C & Lee, L. 1996, la generalización es usualmente considerada como una actividad inductiva empírica en la cual se van acumulando ejemplos y detectando patrones. A diferencia de esta postura, Mason (1985), de acuerdo a su circuito de generalización, ésta se da cuando se puede representar la regla resultante del proceso de generalización con cualquier registro.

RA : Recursivo aritmético. Al igual que en la anterior, en esta categoría RA el alumno

reconoce un patrón aritmético y de forma iterativa lo extiende al término solicitado, sólo que en este caso además de identificar el algoritmo aritmético, él elabora un registro de la regla mediante una representación simbólica con álgebra. No obstante, para su cálculo, sigue dependiendo del valor del término anterior. En suma, en esta Categoría el alumno enuncia una regla algebraica, no obstante, en este caso las variables involucradas hacen referencia al término precedente. Así que, aunque en esta categoría ya se ofrece una regla, no es todavía general. Es entendible por esto que su aplicación funcione sólo con términos pequeños; en los más grandes esta categoría recursivo simbólica resulta poco práctica y en los términos mayores, es inviable.

RG : Regla General. En este caso se enuncia una regla general algebraica que hace referencia al n 'ésimo término de la sucesión. Esta categoría entonces, se reconoce por la presencia de una fórmula general en la que la variable hace las veces de un número general. A diferencia de la categoría anterior, con la fórmula algebraica que explica la relación general de los términos de la secuencia es posible realizar los cálculos para determinar cualquier término de la secuencia, sin necesidad de conocer el valor de ningún otro, es decir, de manera independiente. Esta Categoría de Estrategias EG representa a los procedimientos generales con el mayor nivel de abstracción en este estudio.

4.2.2 Explicación e ilustración de las Categorías de Análisis G0, G1, G2, G3 y G4 halladas en el trabajo empírico con lápiz y papel.

En lo que sigue se presentan algunos ejemplos de las Categorías de Análisis derivadas de las pautas de estrategias para resolver problemas de secuencias, matemáticas antes descritas y se fundamentan teóricamente.

Procesos Azarosos

G0 : Categoría Adivinación (A):

En esta Categoría, como se dijo, pareciera que se procede al azar ya que no hay representación alguna, ni intentos de justificar los resultados. No se percibe si el estudiante utilizó algún algoritmo aritmético para determinar el resultado, ya que no hay ningún registro de la regla, de ahí que la respuesta sea vista como surgida de una adivinación. En la pauta de estrategias Adivinación los alumnos parecen no percibir algún patrón.

La Categoría Adivinación se puede ilustrar en el caso de Tanya. En IV-5, en la secuencia numérica 1,4,10,22,46... ella determinó el término consecutivo y respondió 54 sin registrar la regla que rige la relación de los elementos de la secuencia. En este caso, el resultado correcto es 94, una posible regla recursiva sería $2 \times N + 2$ (asignando a N el valor del término anterior al solicitado). Como se puede observar, el resultado dado por Tanya no guarda ninguna relación con la secuencia que lo genera, de donde es plausible suponer que la pauta de estrategia que ella utilizó fue Adivinación.

Otro ejemplo de esta categoría lo encontramos en la respuesta de Ana al ejercicio III-3-3. En el Diagrama 4.01 aparece una representación de su respuesta.

12.- Encontrar cuántos círculos tiene la figura 100

	<p>1) 2) 3)</p>	<p>Figura 100 <u>143.</u></p>
--	---	----------------------------------

Diagrama 4.01. Producción de Ana en el ítem III-3-3

Una regla recursiva que resuelva el problema puede ser $N+2$ en donde N representa el valor del término anterior. Radford (2006) en investigaciones realizadas en las que utilizó el mismo problema del ítem III-3, reporta las siguientes respuestas: $2N+3$, siendo N número del término; o bien $(N+1)+(N+2)$ en este caso N representa los círculos del primer renglón de la figura y la segunda N los de la segunda línea (Radford 2006). Como se observa en su respuesta de Ana no hizo ningún registro, además su estrategia y resultado fueron incorrectos, por lo que se consideró que dicha respuesta se derivó de una Estrategias de Adivinación.

Otro ejemplo de una resolución que se ajusta a esta Categoría de Estrategias Adivinación se encuentra en la respuesta de Ana en III-4-d. En el Diagrama 4.02 aparece su producción

	<p>¿Cuántos círculos hay en el rectángulo n? <u>n círculos</u></p>
--	---

Diagrama 4.02 Producción de Ana en III-4-d

A la pregunta de cuántos círculos hay en el rectángulo n, ella contestó tautológicamente “n círculos” sin dar ninguna explicación de su respuesta. En su afirmación Ana parece interpretar a la variable involucrada como número general es decir, una variable que representa alguna cantidad desconocida que no puede, ni necesita ser determinada, una variable dentro de una fórmula que representa una regla. (Cfr. Ursini et al 2005). Dado que ella no explica el porqué de su respuesta en la segunda parte del problema, es plausible suponer que ella no conoce la regla de la secuencia y que su respuesta pudo ser producto de adivinación.

Procesos Algorítmicos

G1 : Categoría Aplicación Rutinaria (AR):

Es frecuente ver en los alumnos la aplicación mecánica de una regla aprendida por habituación o reiteración. Éste puede ser el caso de la regla de tres, cuando se aplica de manera mecánica sin tener conciencia de la estructura del problema. Rigo (2009) sostiene que es muy común en las clases de matemáticas “respaldar la veracidad de un enunciado en el contexto histórico social en que se accedió a él, como por costumbre, o porque lo dijo el profesor” (p.152.). En estos casos, la justificación de las afirmaciones matemáticas o de las reglas se da por habituación.

Un ejemplo de esta Categoría de Estrategias se puede observar en el ítem III-4-c en el que Aída obtiene su respuesta con una regla de tres (ver Diagrama 4.03).

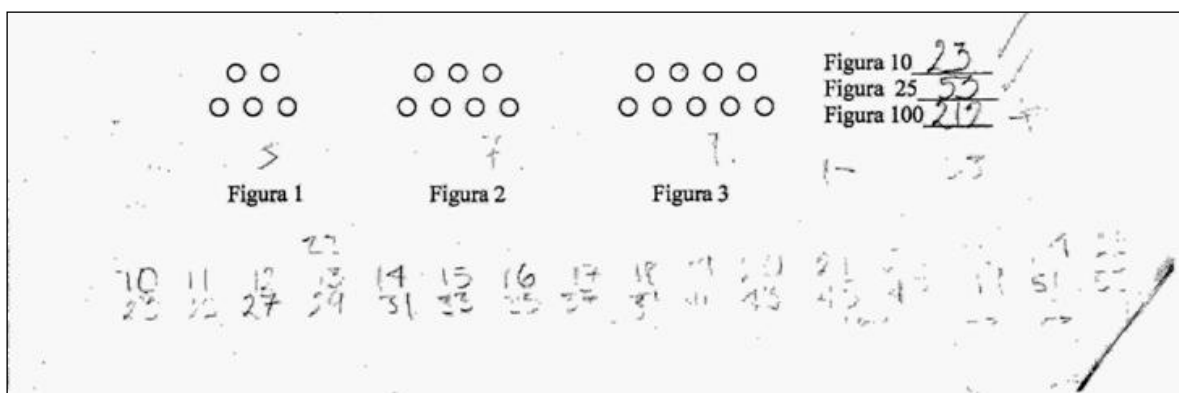


Diagrama 4.3 Producción de Aída en III-3

Aída calculó primero el término F10 con una estrategia exhaustiva, como se aprecia en el

Diagrama 4.3; es decir, al pie de cada figura, Aída anotó el número de círculos de cada grupo: 5 , 7 , 9... y lo extendió hasta el décimo término, al que le hizo corresponder el número 23. Para resolver el término 25 se apoyó en una especie de tabulación dentro de la misma Categoría de Estrategias AE. Finalmente, el término F100 lo resolvió mediante un procedimiento de proporcionalidad, lo que implicó un cambio de estrategia hacia una categoría “aplicación rutinaria” AR. Como ya se ha dicho en este mismo apartado, esta Categoría de Estrategias AR conduce a resultados erróneos cuando la secuencia numérica no es proporcional, por lo que la respuesta que Aída calculó para este reactivo fue errónea.

Específicamente, para el término F100, Aída realizó el planteamiento siguiente:

Si en F25 hay 53 en F100 hay 212

Porque $\frac{100 \times 53}{25} = 212$

Así, mediante el procedimiento anterior llegó a la respuesta 212, cuando el resultado correcto es 203.

Otro ejemplo de esta Categoría de Estrategias Aplicación Rutinaria (AR) se puede observar en el ítem III-4-c, en la producción de Ana y NoryMar. En ambos casos, estas dos estudiantes contestaron: mediante una regla de tres. En el caso particular de Ana, ella explicó “...si en 10 rectángulos hay 20 círculos, en 100 hay 200”

Debido a que en este caso la secuencia es proporcional, la respuesta fue correcta. Este resultado puede ser justificado fácilmente de manera visual ya que el patrón es evidente. Cuando un término de un problema es demasiado grande para ser resuelto en forma recursiva, la Categoría de Estrategias más frecuentemente utilizada por las alumnas estuvo basada en la proporcionalidad.

Procesos de transición

G1 : Categoría de Inducciones Falsas (ID).

La categoría G1 contiene dos Categorías de Estrategias; Inducciones Falsas ID junto con la de Aplicación Rutinaria AR.

En el problema IV-3 en el inciso uno se produjeron resultados similares en la totalidad de las alumnas, quienes resolvieron este inciso con la expresión $N \times 3$. La coincidencia de las

respuestas, sugieren la posibilidad de que la solución haya sido inducida por los ejemplos dados en el mismo instrumento. En el Diagrama 4.04. se muestra la representación realizada por Coni en el ítem IV-3.

2, 4, 6, 8, 10 _____	<u>N x 2</u>
10, 20, 30, 40, _____	<u>N x 10</u>
1, 3, 9, 27, 81 _____	<u>N x 3</u>
1, 3, 7, 15, 31 _____	
1, 4, 10, 22, 46 _____	

Diagrama 4.04 Producción de Coni en IV-3

En el ítem IV, se ofrecieron dos reactivos resueltos como ejemplos para ilustrar el ejercicio, dichos ejemplos pudieron haber centrado la atención de las alumnas en una forma de respuesta inducida hacia la estrategia Inducciones Falsas (ver Diagrama 4.04).

La respuesta de Coni N x 3, pareciera coincidir con la Categoría de Estrategias de Adivinación, no obstante, partiendo del hecho de que dicha alumna no calculó el término sucesor de la secuencia solicitado en la columna de lado izquierdo en el Diagrama 4.7, entonces la representación de la regla Nx3 sugiere una inducción ocasionada por los ejemplos dados al principio del ítem, de lo que se deduce que la respuesta dada por Coni corresponde a la Categoría de Estrategias Inducciones Falsas (Ver Diagrama 4.03). De las respuestas de las alumnas a este inciso se puede deducir que al menos tres de ellas recurrió a la estrategia Inducciones Falsas, aun y cuando resolvieron con la expresión $3xN$

Otro ejemplo que cae dentro de la Categoría de Estrategias Inducción Falsas, es la respuesta que Lina dio a al ítem IV (analizado en el párrafo anterior). La representación de su resolución aparece en el Diagrama 4.06.

Ejemplo dado	2, 4, 6, 8, 10...	<u>12</u>	<u>N x 2</u>
Ejemplo dado	10, 20, 30, 40,...	<u>50</u>	N x 10
IV-3	1, 3, 9, 27, 81...	<u>243</u>	<u>N x 3</u>
IV-4	1, 3, 7, 15, 31...	<u>63</u>	<u>N x 4</u>

Diagrama 4.06. Producción de Lina en el ítem IV

Como ya se dijo, en el Capítulo III y como se puede observar en el Diagrama 4.06, en el ejercicio IV se solicitó para cada secuencia determinar el término sucesor y además representar la regla que resuelva la secuencia con una fórmula algebraica.

Lina dio las respuestas correctas a la primera parte del problema es decir determinó el término que sigue a cada secuencia, y en la segunda parte no logró la fórmula ninguna de las secuencias solicitadas en el segundo inciso. Esto hace suponer que ella no encontró la regla general.

En relación a la primera parte del problema, al no encontrar la regla general, es posible que los resultados que ella asentó ahí, sean producto de una estrategia de tipo exhaustivo. Esta estrategia implicaría seguir un proceso como el que a continuación se ilustra:

Secuencia original	1	3	7	15	31→	<u>63</u>
Diferencias entre términos		3-1	7-3	15-7	31-15		↑
		↓	↓	↓	↓		⋮
		=2	=4	=8	=16→	= <u>32</u>

Las diferencias entre dos términos consecutivos no son constantes, se van incrementando de forma regular y también pueden ser organizadas en otra secuencia; 2, 4, 8, 16... Como se observa la diferencia entre cada dos términos se va duplicando respecto al anterior, por lo que se concluye que la diferencia en el par siguiente debe de ser 32 y así el valor del término solicitado es 63. Hasta aquí no se ha definido la estructura de la regla, únicamente se ha percibido un patrón en las diferencias entre los términos y se ha generalizado de manera recursiva.

En la segunda parte del problema Lina registró como regla de la sucesión la expresión $N \times 4$. Pareciera en este caso, que ella no atendió a la estructura de los elementos matemáticos del problema, sino que su respuesta la pudo haber inducido de los resultados de los ítems precedentes: de $N \times 2$, a $N \times 3$ y de ahí, a $N \times 4$ (ver Diagrama 4.06)

Lo antes dicho sugiere también una disociación entre el proceso de generalización de la secuencia que ella realizó al calcular el término solicitado en la primera parte del problema,

y la simbolización de la regla. Lina resolvió el ítem como si se tratara de dos problemas independientes. Cabe aquí lo que sostiene Yishay Mor (2006): La formulación algebraica frecuentemente está desconectada de la actividad de la cual procede [...] que ni esclarece el problema ni aporta un significado para validar su respuesta. La afirmación anterior coincide con lo que investigadores como Hargreaves et al. han puntualizado “Los estudiantes pueden predecir el término siguiente en un conjunto ordenado, mas encuentran difícil, si no imposible generalizar, producir una regla para determinar el valor de un término en una posición arbitraria” (Hargreaves, Threlfall, Frobisher, & Shorrocks-Taylor, 1999; Orton & Orton, 1999; Bourke & Stacey, 1988; Stacey, 1989 citado en Carraher et al. 2007).

Procesos Inductivos

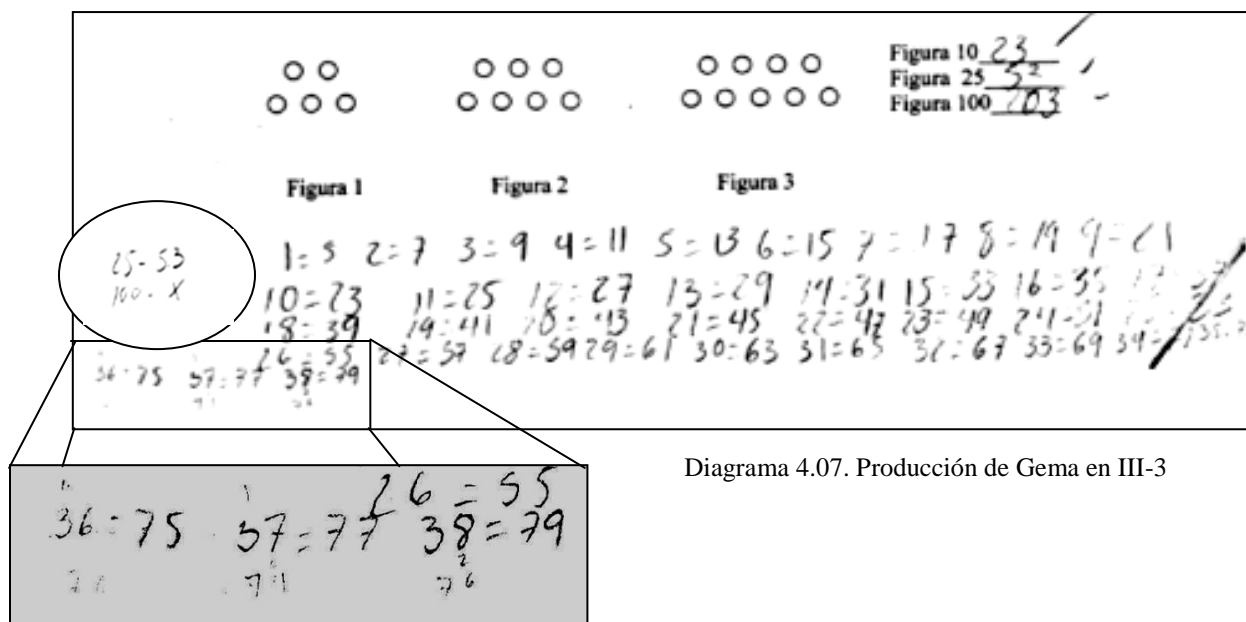
G2 Categoría Análisis Exhaustivo (AE). En esta categoría se determina el valor del término siguiente con base en el valor del término anterior, no hay representación ni hay álgebra.

La actividad de identificar y registrar patrones ha sido considerada por varios investigadores como una forma prominente para introducir a los alumnos al álgebra; sin embargo, Radford (2006) considera necesario diferenciar entre las generalizaciones en las que se ha formulado la regla general y las que surgen de identificar las relaciones entre dos términos consecutivos mediante recursividad. Este segundo tipo de generalizaciones apuntado por Radford fue el más recurrido por las alumnas para la solución de los problemas en el presente estudio. Este tipo de estrategias por recursividad dan lugar a generalizaciones a las que Radford (2006) llama aritméticas y afirma que dan lugar a una expresión que no satisface cualquier término de la secuencia de manera independiente. Investigadores como Filloy y Rojano en sus trabajos sobre la transición de la aritmética al álgebra, nos hablan de la tendencia de los niños a permanecer en un nivel aritmético cuando se inician en el álgebra. Es precisamente en esta etapa de transición de la Aritmética al Álgebra en la suponemos se encuentran la mayoría de las alumnas que participaron en el estudio, en la que observamos a las alumnas recurrir con más frecuencia a las Categorías de Estrategias Aplicación Rutinaria AR y en algunos casos la de Análisis Exhaustivo AE.

Yishay Mor, Richard Noss, Celia Hoyles et al. aseguran que las generalizaciones sobre regularidades o patrones que realizan los estudiantes tienden a ser superficiales o incidentales, y que en su mayoría ellos proceden sobre la base de un razonamiento empírico. Este es el caso de las estudiantes que contestaron el cuestionario. En las secuencias numéricas ellas tienden a identificar la relación de dos términos consecutivos y mediante una iteración exhaustiva de la regularidad encontrada, determinan el valor de algún término específico. La falta de visión de la estructura de las relaciones de dicha secuencia, parece ser un obstáculo para que ellas puedan alcanzar la regla general de la secuencia (siguiendo las ideas de Mor, Noss, Kahn and Simpson 2006).

Algunos ejemplos de la Categoría de Estrategias Análisis Exhaustivo:

En los primeros problemas F10 y F25 se observa como Gema auxiliándose con una tabulación percibió que el patrón de la secuencia aumenta dos unidades cada vez; esta regularidad la extendió de forma recursiva (AE) hasta los términos 10 y 25. Nótese la tentativa que hace en el término 100 de resolver mediante una regla de tres, (ver expresión encerrada en el círculo en el diagrama 4.07).



Finalmente encontró la regla que rige la secuencia (multiplicando el número del evento de la secuencia por 2) en los términos 36, 37 y 38 (ver el recuadro) y aumentado tres unidades.

Este último cálculo llevó a Gema a una fórmula general y no corresponde ya a la Categoría de Estrategias Análisis Exhaustivo (Ver la Categoría Estrategia General más adelante).

Más ejemplos de la Categoría Análisis Exhaustivo (AE) se observan en Aida III-3-3 (ver Diagrama 4.03).

Una evidencia del uso de la Categoría de Estrategias Análisis Exhaustivo, es la presencia de tabulaciones o tablas; éstas son usadas para extender un patrón hasta un término deseado. El uso de una tabla facilita la definición precisa del término solicitado, sin embargo, no todos los casos fueron así, un error en la tabulación puede ser extendido a cualquier otro término de la secuencia. Lo anterior podría explicar respuestas como la de NoryMar en III-3-2. En este ítem la respuesta de esta alumna para el término 25 fue 55 en lugar de 53, lo que sugiere un error en la tabulación, ya que tal resultado corresponde al término 26. El mismo error fue extendido hasta el término 100 con la misma diferencia 205 en lugar de 203 (Ver NoryMar en el Diagrama 4.08).

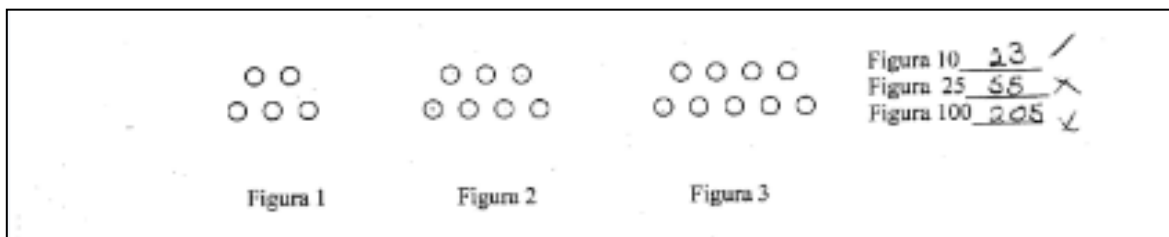


Diagrama 4.08 Producción de NoryMar en III-3-2 y 3

G3 *Categoría Recursivo Aritmético (RA)*: Como se explicó en los párrafos precedentes, esta categoría se basa en procesos recursivos, y para el cálculo del término “n” se recurre a algún algoritmo aritmético que parte de algún término precedente y se extiende el patrón hasta el término solicitado. En este caso hay claramente un algoritmo aritmético, hay registro de la regla y hay álgebra. Küchemann & Hoyles (2005) afirman que hay una tendencia hacia una visión recursiva en los estudiantes, quienes prefieren identificar la relación entre dos términos consecutivos, en lugar de mirar la regla general de la secuencia.

La Categoría de Estrategias Recursivo Aritmético se presentó con más frecuencia en los problemas de secuencias numéricas. En éstos, se accedió al resultado mediante la iteración de un patrón operado con un algoritmo aritmético. Esta categoría es semejante a la de

Análisis Exhaustivo en el hecho de que en ambas hay que identificar un patrón y extenderlo de manera recursiva al término deseado; sólo que el caso de la categoría Recursivo Aritmético (RA) además hay que representar simbólicamente la regla de la secuencia.

La Categoría de Estrategias RA únicamente fue observada en el ítem IV, en donde se solicitó a las alumnas indicar el término consecutivo inmediato; en el mismo problema se les pidió hacer una justificación de su respuesta mediante una ecuación algebraica. Como ejemplo se puede observar la producción de Aida en el ítem IV en el diagrama 4.09, sus respuestas en los tres reactivos se clasificaron dentro de la Categoría de Estrategias Recursivo Aritmético.

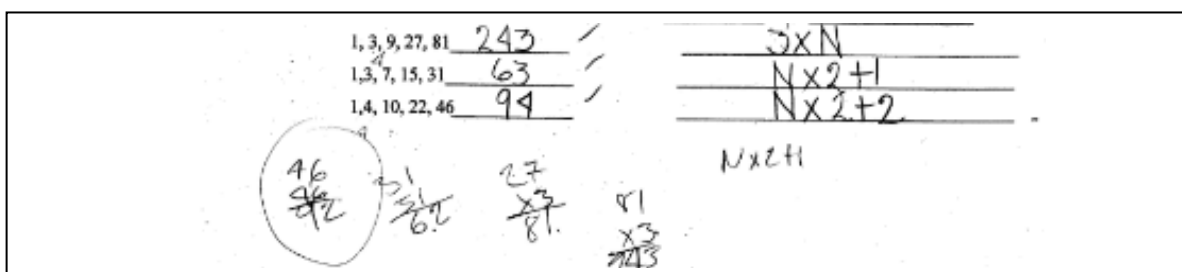


Diagrama 4.09 Producción de Aida en el ítem IV

En la primera parte del problema, Aida extendió la secuencia al siguiente elemento mediante aproximaciones por ensayo y error (lo que se observa en las operaciones que asentó en la misma hoja de trabajo, en donde ella duplica el término anterior y luego ajusta el resultado sobre el valor del término siguiente). En el primer reactivo del ítem IV Aida formuló la regla mediante la expresión $3xN$, en donde N representa el valor del término anterior (ver Diagrama 4.09). Dicha fórmula corresponde a la pauta de estrategias Recursiva Aritmética, debido a su dependencia con el valor del término anterior. De esta forma Aida detectó la regla de la secuencia en cada caso, tomando como base el término anterior y representándolo mediante una expresión algebraica. Otros ejemplos similares al de Aida, en los que se llegó a la regla de la secuencia mediante una estrategia recursiva, se observan en Ana y en Gema en el ítem IV (Diagrama 4.09).

Un patrón puede ser observado de distintas maneras dependiendo de cómo es percibido por cada alumno, de ahí que las representaciones que elaboran de la regla, sean asimismo diversas. La mayoría de las respuestas de las alumnas en el primer reactivo del ítem IV coincidieron en la expresión $3 \times N$, dicha recurrencia puede indicar que las alumnas están percibiendo el patrón de manera similar. Otra explicación de dicha recurrencia en la

mayoría de las respuestas en este ítem, alude a la posibilidad de una inducción generada por el planteamiento de los problemas precedentes (ver Diagrama 4.06).

Por otra parte, dentro de la Categoría de Estrategias Recursivo Aritmético se observó una forma de generalización la cual a pesar de dar un resultado equivocado, tanto la solución como su expresión son congruentes, y corresponden a esta categoría, pero la regla es tan sólo una aproximación. Se trata de una generalización más sencilla este caso se da en Lina en el ítem IV-5. En la secuencia 1, 4, 10, 22, 46... resolvió 92 con la expresión $N \times 2$. Efectivamente al aplicar dicha fórmula el resultado es 92, el cual fue incorrecto debido a que la regla fue incompleta. El resultado correcto es 94; por lo tanto, no resuelve la secuencia. Desde la propuesta de Mason la expresión de Lina no es una generalización algebraica, debido a que el resultado es incorrecto, no obstante para los propósitos del presente proyecto de investigación implica una generalización, si bien una más sencilla, pero que muestra avances en el proceso de desarrollar habilidades de generalizar y cumple con las condiciones expresadas en la Categoría de Estrategias Recursivo Aritmético.

G4 Categoría Estrategia General (EG): En esta categoría se define la regla a través de una expresión algebraica capaz de satisfacer las condiciones de la secuencia en cualquier término de manera independiente.

Radford (2006) sugiere que para que una generalización sea algebraica, debe concretarse en una regla cuya expresión aplique para cualquier término de la secuencia, y afirma que los estudiantes cuando se inician en el álgebra tienden a recurrir a otros aspectos más accesibles para ellos que a la estructura.

Todas las secuencias consideradas en la experiencia en LP son susceptibles de ser expresadas en cualquiera de las Categorías de Estrategias identificadas en este estudio desde Adivinación hasta la Regla General. Como se explicó en el Capítulo 3 sobre metodología las indicaciones dadas en el instrumento de la primera experiencia fueron diferentes para cada grupo de ejercicios; en III-3 se solicitó calcular el valor del término siguiente de una secuencia figurativa, sin pedir de manera explícita ni el registro ni la

justificación de sus respuestas. En los otros dos grupos III-4 y IV se animó a las alumnas a producir formulas generales, las cuales implícitamente contienen una justificación. En el ítem IV las alumnas no elaboraron registros de reglas generales, ésta categoría sólo se observó en los ítem III-3 y III-4.

En el ítem III-3 las alumnas en su mayoría respondieron con una regla recursiva $3xN$, una posible regla general hubiera sido $2N+3$; sin embargo, la mayoría de la alumnas respondió de manera recursiva. Sólo las respuestas de Gema contienen de manera implícita una regla general. En este caso esta alumna después de haber resuelto los dos primeros reactivos F10 y F25 mediante una estrategia recursiva, para el término F100 ella descubrió la regla general al ir tabulando de manera exhaustiva término por término como se muestra en el Diagrama 4.08, dicha estrategia de implica la regla $n \times 2 + 3$.

Parece que Gema procedió conforme a lo que propone Mason. Para obtener una fórmula, él sugiere establecer una regla recursiva que muestre cómo construir los siguientes términos desde los precedentes mediante un patrón (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). (Ver recuadro en el Diagrama 4.08). En este mismo ítem III-3 el resto de las estudiantes en este trabajo no pudieron lograr este nivel de generalización.

En el diagrama 4.10 se muestran algunas posibilidades de reglas generales para cada ítem

ÍTEM	SECUENCIAS					<u>RESULTADO</u>	EXPRESIÓN DE UNA REGLA RECURSIVA	EXPRESIÓN DE UNA REGLA GENERAL
III-3	5	7	9	11	13	<u>15</u>	$f(n) = N + 2$ *	$f(n) = 2n + 3$
III-4	2	4	6	8	10	<u>12</u>	$f(n) = N + 2$	$f(n) = 2n$
IV-3	1	3	9	27	81	<u>243</u>	$f(n) = 3N$	$f(n) = 3^{n-1}$
IV-4	1	3	7	15	31	<u>63</u>	$f(n) = 2(N-1)+1$	$f(n) = 2^n - 1$
IV-5	1	4	10	22	46	<u>94</u>	$f(n) = 2(N-1)+2$	$f(n) = 3(2^{n-1}) - 2$

Diagrama 4.10. Secuencias numéricas expresión de la regla recursiva—regla general. Ítem IV

* (n representa el número de término en cuestión y N el valor del término anterior a n).

Es posible distinguir el significado que la variable tiene en la Pauta Recursiva Aritmética y el que tiene en la Regla General. En el primer caso, N representa el valor del término

anterior al que se pretende calcular y es necesario conocerlo para calcular el término solicitado; pareciera que el significado de la literal N está más cerca al de una incógnita que de una variable.

En el segundo caso, la literal n representa cualquier término de la secuencia y por tanto, se trata de una variable que puede ser interpretada como número general.

En este sentido Ursini apunta que alumnos de tercero de secundaria consideran que una expresión del tipo $3+a+a+a+10$ representa una ecuación mal planteada, debido a que interpretan a la 'a' como incógnita y no como número general. La dificultad para interpretar a la variable como número general puede obedecer a que en este nivel educativo se pone mayor énfasis en el uso de la variable como incógnita, y por tanto los alumnos consideran que es necesario encontrar su valor. (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005).

Un ejemplo de lo antes dicho se observó en Gema III-4-e, ítem en el que se le pidió determinar el número de círculos en el rectángulo n ; a esto ella respondió "No sé porque no se qué valor se le dé a n ". Es evidente que Gema en su explicación manifiesta su capacidad para reconocer una letra como una incógnita dentro de una expresión algebraica, pero no el de una variable como número general.

En relación al ítem III-4, Tanya fue la única alumna que elaboró un registro en donde se representa una variable genérica (Ver Diagrama 4.11).

a) En el primer rectángulo hay dos círculos, ¿Cuántos círculos hay en el quinto rectángulo? 10 ✓

b) ¿Cuántos círculos hay en el rectángulo 100? 200 ✓

c) ¿Cómo lo sabes? Por que el # de círculos es el doble del # del rectángulo ✓

d) ¿Cuántos círculos hay en el rectángulo n ? $2n$ ✓

e) ¿como lo sabes? Por que $2n$ equivale al doble de n ✓

Diagrama 4.11 Producción de Tanya en III-4

Se trata del inciso d) en el que Tanya propone como regla la expresión $2n$, respuesta que se ajusta a la Categoría de Estrategias de la Regla General (EG).

Tanya en III-4-c en un primer momento percibió que de un rectángulo a otro aumentaban dos unidades, este hecho revela que encontró un patrón. Lo anterior se deduce de su explicación que ella da de la regla “Porque el # de círculos es el doble del # del rectángulo” Para elaborar la expresión “ $2n$ ”, Tanya simbolizó el número del rectángulo con la literal “ n ” y relacionó la cantidad de círculos de cada figura con dicha variable. En el último reactivo del ítem en III-4-d hace la justificación de su resultado en lenguaje natural afirmando “ *$2n$ equivale al doble de n* ”. Lo anterior da muestras claras de que está interpretando a la variable como número genérico.

Reconocer una variable no sólo como incógnita sino como número general permite a los alumnos manipular la ecuación y también hacer cálculos. Dicha comprensión favorece a su vez la aceptación por parte de estos alumnos de expresiones abiertas en las que la variable se presenta en ambos lados de la ecuación.

Otras soluciones similares a la de Tania en III-4 se observaron en Lina y Coni para este mismo problema, todas estas respuestas queda comprendidas dentro de la Categoría de Estrategias ‘Estrategia General’.

4.2.3 Conclusiones de la experiencia con LP

Las Categorías de Estrategias en la resolución de problemas de secuencias numéricas en LP van de lo aritmético a lo algebraico. Desde esta perspectiva se destacan los procesos exhaustivos los cuales son totalmente aritméticos. En éstos, no es necesaria la identificación de una regla ya que no se distingue la estructura de la secuencia, por esta razón no satisfacen el n 'ésimo término de la sucesión de forma independiente.

Las Categorías de Estrategias identificadas van de lo concreto a lo simbólico y de lo finito al infinito potencial, pasando por el infinito actual. Rigo y Waldegg (1992) apuntan que Aristóteles considera el infinito por aumento y el infinito por disminución, el primero además de aplicarse a la extensión de magnitudes del espacio y tiempo, se aplica también a

los procesos recursivos en los que cada paso del proceso se determina por el paso previo. Aristóteles también consideró que estos dos tipos de infinito se pueden presentar bajo dos formas de existencia: como infinito potencial y como infinito actual; el infinito potencial se acepta asociado a procesos que pueden continuarse indefinidamente, pero sin alcanzar nunca el límite, lo que sí se consigue con el infinito actual. De lo anterior se infiere que estos procesos del infinito por aumento o disminución están relacionados con el infinito potencial.

De acuerdo con lo afirmado en el párrafo anterior se puede afirmar que las resoluciones inscritas en las Pautas de Análisis Exhaustivo, se circunscriben al ámbito de los procesos finitos. En el caso de las resoluciones recursivas se da un manejo de procesos que se pueden prolongar tanto como se quiera, es decir, se comportan de acuerdo a procesos potencialmente infinitos. Por último, en el caso de la EG pareciera que la resolución deja ver la aceptación de procesos actualmente infinitos en el sentido de que la variable involucrada en la fórmula general hace inferencia a conceptos actualmente infinitos. Esto, no obstante, es sólo una consideración para el presente análisis, no significa que las alumnas hayan tenido conciencia del tipo de infinito involucrado en sus estrategias.

Los procesos exhaustivos nunca dejan los números concretos ni lo finito. Pareciera que en este caso el alumno ve a la secuencia sólo como una sucesión de términos que se tienen que concretar para 'ver' la secuencia (como percibir un patrón en Mason). La visión está muy atada a lo concreto y a los procesos finitos, lo anterior en consecuencia hace a los procesos de tabulación un tipo de registro privilegiado. Pareciera que la idea de secuencia no evoca en estos casos los procesos indefinidos y ningún tipo de proceso infinito.

En contraposición los procesos recursivos para cada paso dependen del anterior, se acercan a la idea de infinito por aumento visto como Aristóteles. En este tipo de procesos se identifica la regla dictada por la estructura de los elementos, por tanto se emplea tanto la aritmética generalizada tanto como el álgebra.

CATEGORÍAS	G0	G1	G2	G3	G4	
PROBLEMA	A	AR/IND	AE	RA	EG	TOTAL
III-3-1	-	-	5	-	-	5
III-3-2	-	-	5	-	-	5
III-3-3	1	2	1	-	1	5
Sub Total	1	2	11	-	1	15
III-4-a	-	2	2		4	8
III-4-b	-	2	2	-	4	8
III-4-c	-	2	2	-	4	8
III-4-d	1	-	-	-	1	2
III-4-e					1	1
Sub Total	1	6	6	-	14	27
IV-3	-	-	-	7	-	7
IV-4	2	-	-	3	-	5
IV-5	2	-	-	4	-	6
Sub Total	4	-	-	14	-	18
TOTAL	6	8	17	14	15	60

Diagrama 4.12 Resumen de estrategias por Categoría de Estrategias/ ítem en LP

Resumen de estrategias en LP

La elección de las Estrategias que hacen las alumnas cuando resuelven problemas de secuencias, no sólo están influidas por los conocimientos matemáticos que poseen sobre los contenidos del problema; existen otros factores que pueden estar induciendo el tipo procedimiento a seguir para obtener su respuesta. En el ítem III-3 la mayor incidencia fue en la Categoría Análisis Exhaustivo.

Recuérdese que en este ítem no se pidió ni el registro ni la justificación de la regla lo que sugiere dos posibilidades: primero, las respuestas de las alumnas de manera espontánea tienden a basarse en soluciones de tipo concreto apoyadas en algoritmos aritméticos y eluden en lo posible los cálculos de tipo algebraico, y en segundo lugar, únicamente con el apoyo del investigador y cuando se le requiere de manera explícita, las alumnas logran producir algún tipo de justificación (ver diagrama 3.12).

Siguiendo este orden de análisis, en el ítem III-4, más de la mitad de las respuestas del ítem coincidieron con la Categoría Estrategia Regla General, siendo este ítem en el que agrupó más del 90 % de respuestas de todo el instrumento en esta pauta. Lo anterior se explica

tanto por tratarse de una secuencia sencilla en la que el patrón es evidente, como por la estructura misma del problema, la cual implica una generalización muy sencilla.

Por último, en el ítem IV casi en 80% de las resoluciones se ajustan a la Categoría de Estrategias Recursivo Aritmético. En este caso como en el anterior, pudo haber cierta inducción en el planteamiento del problema hacia el tipo de estrategia, sin embargo, tómesese en cuenta, que las fórmulas generales que satisfacen las condiciones de las secuencias, parecen estar fuera del dominio algebraico de las alumnas (e.g. $2(2^{n-1}) + 2$). Las consideraciones anteriores pudieron ser la causa de que no se obtuviera ninguna respuesta vinculada a la categoría Regla General en este ítem.

4.3 Análisis de los resultados por Ítem en Lápiz y Papel (LP).

4.3.1 Resultados por Ítem

En este apartado se hace un análisis de las respuestas dadas por las alumnas, en cada uno de los ítems que componen el instrumento en LP. La Tabla 3.3 muestra los resultados dados por ellas. Para su construcción se consideraron además de las categorías de Generalización, descritas en el anterior capítulo, otros indicadores, como número de respuestas, generalizaciones con error y sin error, entre otros; estos indicadores se describen en lo que sigue.

Como se ha dicho, el instrumento consta de tres problemas III-3, III-4 y IV con tres reactivos cada uno, se aplicó a nueve alumnas, resultando 81 posibles respuestas en total. Todos los indicadores se reportan tanto en número de casos como en porcentaje.

En el renglón correspondiente al parámetro ‘contestaron’ se anotaron el total de respuestas obtenidas en cada ítem. El porcentaje se calculó sobre el número de reactivos totales i.e. sobre los veintisiete posibles de cada ítem (nueve alumnas por tres reactivos, igual a 27).

En el indicador ‘No contestaron’ se totalizan los reactivos en los sin respuesta. Es importante aclarar que éste, no incluye los reactivos sin respuesta por ausencia de la alumna a la sesión. El porcentaje se calculó sobre la base de un total de 27 posibles respuestas

Indicadores \ Problema		III-3		III-4		IV		TOTAL	
		Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
A.- Contestaron	(A/A+B)	25	93	19	70	20	74	64	79
B.- No contestaron	(B/A+B)	2	7	8	30	7	26	17	21
C.- Generalizaron sin error	(C/A)	20	80	15	79	15	75	49	78
D.- Generalizaron con error	(D/A)	5	20	3	16	3	15	11	17
E.- No generalizó	(E/A)	-	-	1	5	2	10	3	5
G.- Adivinación G0	(G/A)	1	7	1	5	5	28	7	14
H.- Aplicación Rutinaria Inducciones Falsas G1	(H/A)	1	7	8	42	-	-	9	18
I.- Análisis Exhaustivo G2	(I/A)		86	2	11	-	-	14	27
J.- Recursivo Aritmético G3	(J/A)	-	-	6	31	13	72	19	37
K.- General G4	(K/A)	-	-	2	11	-	-	2	4
L.-Sin clasificar	(L/A)	11	44	-	-	-	-	11	20

Tabla T 4.3 Resultados de la experiencia en Lápiz y Papel.

En el parámetro ‘Generalizaron sin error’ se incluyen todas las respuestas que se respondieron correctamente, y que incluyen o no, según la pregunta, la representación de la regla, es decir, se resume el total de generalizaciones correctas según lo solicitado en cada problema. El porcentaje se calculó con relación al número de reactivos contestados y no sobre el total de posibles respuestas, ya que de este modo se excluyen los reactivos sin respuesta por ausencia de la alumna en la sesión.

En el parámetro ‘Generalizan con error’ se incluyen los casos en los que hubo un intento de generalización aunque no haya tenido un resultado correcto o exacto, según lo que se solicitaba. El error pudo haber consistido en saltarse un paso, en el caso de generalizaciones recursivas, por ejemplo. Sumado a su recíproco (generaliza sin error) totaliza el número de reactivos con repuesta y su porcentaje se calculó sobre las mismas bases de cálculo del indicador anterior.

En el parámetro ‘No generalizan’ se anotaron los reactivos en los que las alumnas no tuvieron éxito en la respuesta ni muestran en ella algún intento por generalizar o una

generalización implícita i.e. las alumnas ni obtuvieron un resultado correcto ni lograron generalizar.

G0, G1, G2, G3, y G4 (ver pg. 40) Simbolizan las Categorías de Generalización. Cada categoría corresponde a una Categoría de Estrategias, con excepción del nivel G1 el cual engloba dos categorías que son Aplicación Rutinaria (AR) e Inducciones Falsas (ID) ver diagrama 3.13

Estrategia	Categorías de Generalización
Adivinanza (A)	G0
Aplicación Rutinaria (AR)	G1
Inducciones Falsas (ID)	
Análisis Exhaustivo (AE)	G2
Recursivo Aritmético (RA)	G3
Regla General (RG)	G4

Diagrama 3.13 Categoría de generalización de acuerdo con las Categorías de Estrategias

En el indicador ‘Sin catalogar’ contabiliza las generalizaciones que a pesar de ser correctas, no fue posible ubicarlas en alguna categoría específica, debido a que no presentan ningún registro ni evidencias de la estrategia empleada en su resolución. Este indicador no contiene los reactivos en los que las alumnas no generalizaron.

En lo que sigue se hace el análisis de las respuestas obtenidas en cada ítem.

En el ítem III-3 las alumnas contestaron 93 % del total de los reactivos. Este porcentaje de respuestas disminuyó en los restantes dos problemas del instrumento. En el ítem III-4 fue de 70% y en el ítem IV las alumnas respondieron 74 % de los reactivos del problema. Como se observa los porcentajes de los reactivos contestados del instrumento, disminuyeron del primer ítem con respecto a los dos siguientes. La explicación a dicho comportamiento puede encontrarse en la forma en que fueron planteados los problemas; en III-3 se pidió únicamente calcular el término consecutivo de una secuencia, no se exigió ni justificar ni expresar la regla de manera formal; en cambio, en los ítems siguientes III-4 y IV se animó a las alumnas a justificar sus respuestas mediante una ecuación. Lo anterior sugiere que tanto percibir la estructura de la secuencia como simbolizarla de manera

algebraica, representan para las estudiantes un mayor grado de dificultad, en comparación con sólo calcular algún término de la secuencia. Cualquier registro de la regla como los solicitados en los ítems III-4 y IV del instrumento implican un nivel más elevado de abstracción. Por otra parte, las expresiones algebraicas que satisfacen los resultados de los ítems III-4 y IV implican niveles cognitivos más complejos que los del III-3.

Las consideraciones anteriores coinciden con los resultados obtenidos por las alumnas en el reactivo III-4-d. Con excepción de Tanya, el resto de sus compañeras no contestó el reactivo, lo que sugiere que cuando las alumnas se enfrentan con condiciones diferentes en la solución de un problema, originadas por la presencia de una variable genérica, les es más difícil y en ocasiones imposible deducir la regla general. En el ítem III-4-d, la interpretación de la estructura de la regla de la secuencia parece haber dificultado a las alumnas la obtención de los resultados correctos. Sin embargo, la explicación a la disminución en el número de aciertos de los ítems III-4 y IV, parece estar relacionado no sólo con la identificación y representación de la regla, sino también con el nivel de dificultad de la expresión algebraica de la regla. Las ecuaciones para los ítems III-3 y III-4 son lineales e.g. $2n+3$, en cambio, en el caso de las secuencias numéricas del ítem IV las ecuaciones que satisfacen las condiciones de la secuencia, son exponenciales e.g. para el reactivo IV-3 se resuelve con una expresión como 3^{n-1} .

Como se puede observar en la tabla 3.1, alrededor de 80% de las generalizaciones se lograron sin error, mientras el resto de las generalizaciones se realizaron con algún error en el cálculo. La mayoría de estas equivocaciones se debieron a que la respuesta fue producto de adivinación y en el resto de los reactivos, debido a fallas que cometieron las alumnas al intentar hacer la correspondencia entre los términos y sus valores en la tabla. La mayoría de estas imprecisiones ocurrieron en el ítem III-3 en los términos 25 y 100. Por el contrario, las respuestas para el término 5 en su totalidad fueron correctas. La ocurrencia de errores en la tabulación de los términos de una secuencia resultó ser más frecuente en la medida en que se incrementó el valor del término solicitado.

En el ítem IV, con secuencias numéricas, se observó una disociación entre el cálculo del término solicitado y la simbolización de la regla, ya que algunas alumnas calcularon de

manera independiente el valor del término solicitado y después intentaron simbolizar la regla sin entender la estructura de la secuencia. Lo anterior las llevó a cometer errores tanto en el valor del término calculado como en la ecuación que satisface la regla.

Con respecto a las categorías de generalización, en la Tabla 3.1 se observa que el total de las respuestas se dividió en tres partes. Cerca de una tercera parte aproximadamente, se ubicó en las categorías más bajas, la G0 (Adivinación) y G1 (Aplicación Rutinaria e Inducciones Falsas) que representan las respuestas en las que no hay generalización o la hay en su forma más sencilla lograda por aplicación de una regla de manera automática; la otra tercera parte (aproximada) se ubicó en una categoría la G2 (Análisis Exhaustivo) que es la categoría intermedia de tipo aritmética sin registro de la regla; y un poco más de la tercera parte correspondió a la Categoría G3 (Estrategia recursiva aritmética) en la que se llega al registro de una fórmula algebraica pero de tipo recursiva. En la categoría G4 (Regla General) la se caracteriza por una fórmula general, únicamente se observaron 2 respuestas, equivalentes a 4% del total.

Con relación a la categoría G3 (Estrategia recursiva aritmética), que como se dijo sumó cerca de 40% del total de las generalizaciones logradas por las alumnas, éste porcentaje se logró en los ítems III-4 y IV, ya que en el ítem III-3 no hubo ningún caso en esta categoría. En realidad, el mayor porcentaje proviene del ítem IV, ya que 72% de las generalizaciones en este ítem se ubicaron en esa categoría. Como se señala en la descripción de las categorías, el nivel G3 implica álgebra sin alcanzar una fórmula general, además de que debe incluir el registro de la regla mediante un sistema de signos específico.

El 4% de las generalizaciones del estudio en LP fue en la categoría más alta G4; sólo una minoría las alumnas lograron una fórmula general en ejercicios en Lápiz y Papel lo que se puede explicar como ya se dijo por la dificultad de las expresiones. Por el contrario ellas logran representar a través de fórmulas algebraica recursivas de manera exitosa que satisfacen las condiciones de la secuencia para términos consecutivos.

Cabe enfatizar que en el ítem III-3 las alumnas no lograron las categorías G3 y G4. Las instrucciones para resolver este reactivo no pedían registrar la regla o alguna justificación

de manera explícita. Interesaba indagar si las alumnas harían de manera espontánea (i.e. sin ningún tipo de inducción o apoyo del investigador) algún intento de justificación o al menos el registro de la regla (ver ítem III-3 en la tabla 4.1). Lo anterior concuerda con la afirmación de Rigo (2009 p.142) con respecto a la justificación “En las clases de aritmética en el nivel elemental **no suelen aparecer** de manera espontánea las demostraciones formales o los argumentos de carácter universal”. En el presente estudio tanto en secuencias numéricas como en las figurativas, las alumnas no producen de manera espontánea ni justificaciones ni representaciones de la regla de la secuencia y por consiguiente, las respuestas se ubicaron en G2 (análisis exhaustivo, cuando se calcula el término solicitado de siguiendo el patrón término a término) o en categorías más bajas e.g. adivinación (G0).

4.3.2 Actuación de las alumnas en LP

Tanya

En III-3 Tanya respondió correctamente los tres términos solicitados, sin embargo únicamente asentó las respuestas sin un registro del tipo de estrategias que utilizó para realizar sus cálculos; por consiguiente no se pudieron catalogar. En III-4 resolvió todos los incisos del problema acertadamente, en este ítem, Tanya fue la única en representar la regla de la secuencia, en III-4-d con la fórmula general con la expresión $2n$. Con esta respuesta ella mostró su capacidad para reconocer una variable genérica en secuencias figurativas. En cambio, en problemas numéricos no elaboró ninguna expresión que justificara sus respuestas. Lo anterior sugiere que Tanya tiene aun dificultades para expresar de manera algebraica las condiciones de un problema, no obstante que ella mostró a través de sus explicaciones que comprende el significado de la variable en la ecuación general que ella misma elaboró.

En suma, en la experiencia con LP Tanya logró generalizar en ocho de los nueve reactivos del instrumento. Sin embargo, como se dijo, únicamente fue posible clasificar cuatro de estos reactivos, ya que fueron los únicos en los que se encontraron evidencias de las estrategias utilizadas por la alumna. De estos, tres se ubicaron en la categoría G3-G4 que equivalen a 75 % de lo codificado. Las respuestas de Tanya por tanto se ubican en las Categorías más altas en la experiencia con LP.

Gema

Más de la mitad de las respuestas (59%) de Gema en el instrumento en LP, corresponden a la categoría G2, es decir su dominio se expresa dentro del campo de lo aritmético con tendencia hacia lo prealgebraico. En sus trabajos se observa cómo en el ítem III-3 Gema hace uso de diversas estrategias para resolver una misma secuencia, la mayoría de ellas dentro de lo aritmético: primero en III-3-1, Gema construyó una tabla para resolver el término F 10 de manera recursiva, en la Pauta de Estrategias Análisis Exhaustivo. Luego, haciendo uso de la misma tabla calculó el término 25. Al final, para calcular el término 100, intentó una solución mediante regla de tres, correspondiente a la Pauta de Estrategias AR, la cual no concretó, y finalmente descubrió el patrón y calculó el término 100 mediante una Estrategia Recursivo Aritmético correspondiente a la categoría G3. De esta manera en un mismo problema calculó dos reactivos en la categoría G2 y para el tercer reactivo, después de intentar una estrategia en G1, finalizó con un resultado dentro de la categoría G3.

Las respuestas de Gema en el ítem III-4 percibió un patrón en el primer reactivo de este ítem, ella no ve la totalidad de la figura y aunque sólo observa una línea de círculos de la figura (en sentido horizontal) generalizó y definió el patrón como lo percibió (ver Diagrama 4.14).

4. Contesta el siguiente problema:

a) En el primer rectángulo hay dos círculos, ¿Cuántos círculos hay en el quinto rectángulo? 6

b) ¿Cuántos círculos hay en el rectángulo 100? 101

c) ¿Cómo lo sabes? X que según yo se va aumentando un círculo por cada uno.

Diagrama 4.14 Producción de Gema en III-4

En el ítem III-4-d Gema no resolvió el valor del término n y explicó “porque no sé qué valor le dan a n”. Con esta respuesta confirma que no está comprendiendo el uso de una variable como número general y en cambio pareciera que ella la interpreta como incógnita.

Al igual que Ana y Aida, Gema, logró exitosamente la representación de la regla en los reactivos del ítem IV. Dichas representaciones corresponden a la categoría de generalización G3, en consecuencia ella consiguió 33 % de sus generalizaciones en esta categoría. Como se comentó, Gema mostró tendencia a lo numérico y por lo que se refiere a procesos de generalización, a pesar de lograr expresiones algebraicas, éstas fueron recursivas y no generales. En el Diagrama 4.15 se muestran las expresiones elaboradas por Gema:

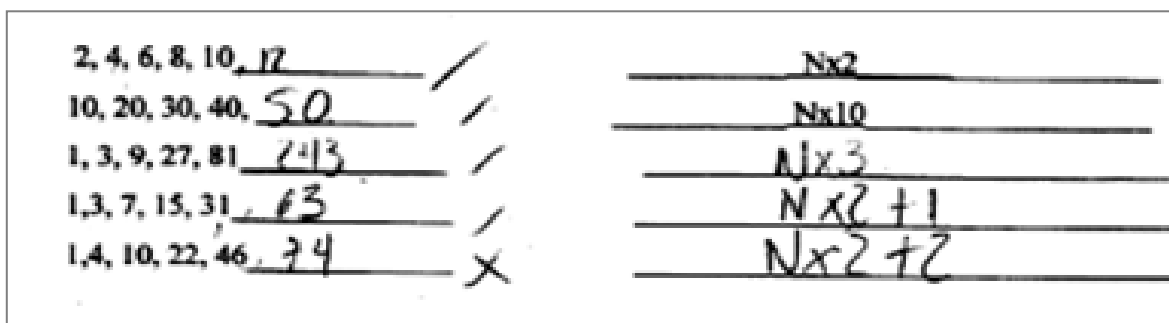


Diagrama 4.15 Producción de Gema en el ítem IV

En todos los reactivos la variable N representa el valor del término anterior, por lo que Gema no logró una fórmula general.

Lina

En la producción de Lina en LP, se observan resultados contrapuestos y estrategias diversificadas debido a que, por un lado, 60% de las generalizaciones (susceptibles de clasificar) se ubicaron en la categoría G3, mientras que el 40 % restante, lo realizó en la categoría G0 i.e. en estos reactivos no generalizó. No contestó los reactivos d y e del ítem III-4, lo que sugiere que Lina tiene dificultad para tratar con variables generales, lo cual exhibe cierta semejanza con los procedimientos usados en una etapa prealgebraica, y por tanto con un incipiente manejo del álgebra y apegada a lo aritmético. La hipótesis anterior se confirma con su actuación en los ítems IV-4 y IV-5 en los que efectuó algunas inducciones ingenuas, al intentar simbolizar la regla para las secuencias correspondientes y contestó después de los ejemplos dados, con expresiones que no tienen nada que ver con la secuencia que las generó, pero que guardan algún vínculo con las representaciones de dichos ejemplos. En el diagrama 4.16 se muestra las respuestas dadas por Lina:

2, 4, 6, 8, 10	12	Nx2
10, 20, 30, 40,	50	Nx10
1, 3, 9, 27, 81	243	$N \times 3$ ✓
1,3, 7, 15, 31	63	$N \times 4$ ✓
1,4, 10, 22, 46	92	$N \times 2$ ✓

Diagrama 4.16 Producción de Lina en los ítems IV-4 y 5

En el Diagrama 4.16 se muestra la actuación de Lina en secuencias numéricas. En el Ítem IV-3 acertó en el término de la secuencia y su representación, mediante una estrategia recursiva.

Lina inducida por los ejemplos dados en el problema y con la respuesta del ítem anterior, resolvió el ítem IV-4 con la ecuación $N \times 4$, la cual no guarda ninguna relación con la secuencia que la produce. En este ejemplo se puede apreciar cómo Lina generalizó la secuencia de manera independiente a la simbolización de la regla, ya que después de calcular con éxito el término solicitado, registró una expresión ajena a la secuencia inducida por las expresiones precedentes, lo que la ubica en la Pauta de Estrategias ID. Finalmente en el Ítem IV-5 Lina resolvió el reactivo con un resultado aproximado. Tanto el valor del término (92) como su expresión ($N \times 2$) son congruentes, aun que no resuelven correctamente la secuencia. Este tipo de respuestas muestran un esfuerzo por parte de las alumnas por generalizar sin lograrlo, es decir cuyo resultado implica una generalización, que aunque incompleta aporta un resultado aproximado, en el que tanto la respuesta como la expresión fueron incorrectas, por lo que esta respuesta se clasificó en la Categoría G0 que corresponde a una estrategia por Adivinación.

Ana

La producción de Ana en la experiencia en Lápiz y Papel muestra resultados heterogéneos, con mayor ocurrencia en las categorías bajas G0 y G1 (en las que se ubicaron el 44% de los resultados calificables). De los tres reactivos del ítem III-3 ella resolvió dos de manera recursiva y para el término más grande F100 acudió a la estrategia adivinación (G0).

Ana parece no entender el significado de la variable usada como número general. El ítem III-4 lo resolvió aplicando una regla de tres de manera mecánica consiguiendo un resultado correcto, en este caso ella no identifica el patrón. Es posible que por esta razón, ella tampoco haya intentado identificar y simbolizar la regla general de la secuencia (por lo que

se consideró en la categoría G1). Por otra parte, en los tres reactivos del ítem IV, Ana generalizó con éxito, pero efectuó las representaciones simbólicas de la regla con base en un proceso recursivo, por lo que sus respuestas en este ítem se ubicaron en la categoría G3. Las respuestas de Ana sugieren que aun cuando el ítem III-4-d aparentemente es más sencillo, el uso de ejemplos en el ítem IV animó a Ana a usar una variable en una fórmula general y por consiguiente a lograr la categoría G3 en los reactivos de este ítem.

Aída

Después de Tanya, Aída obtuvo la mayor cantidad de generalizaciones algebraicas, éstas se ubicaron en la categoría G3 y sumaron 63 % del total de sus respuestas en el instrumento de LP. En todos los problemas que se le plantearon, percibió el patrón y definió la regla. Para sus cálculos hizo uso de estrategias variadas, sobre todo en el ítem III en el que se distinguen tabulaciones y la aplicación de reglas de proporcionalidad. En dicho ítem resolvió dos primeros reactivos F 10 y F 25 de manera recursiva; en el tercer reactivo utilizó una estrategia recursiva en la Pauta AR. Debido a que la secuencia no es proporcional, el resultado que presenta fue aproximado pero erróneo. En el Diagrama 4.17 se muestran las evidencias que registró Aída sobre las estrategias usadas en la solución del ítem III-3.

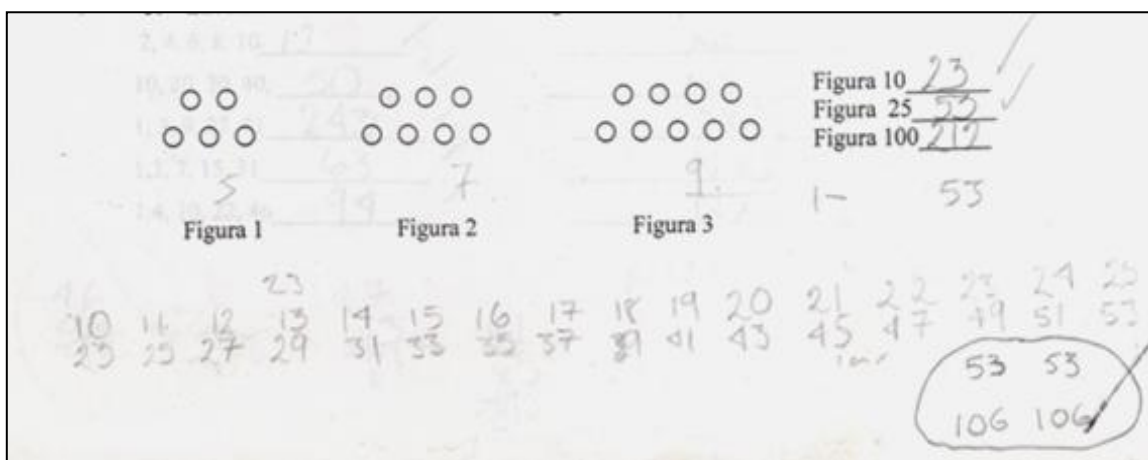


Diagrama 4.17 Producción de Aida en el Ítem III

Las respuestas de Aida sugieren un mayor dominio aritmético, aunque Aida, al igual que la mayoría de sus compañeras no contestó el ítem III-4-d i.e. no logró concretar ninguna fórmula con una variable genérica, sí identificar el patrón de la secuencia figurativa y acertó en sus respuestas a los reactivos a, b y c del ítem III-4.

En el ítem IV, de secuencias numéricas, Aida representó la regla mediante expresiones algebraicas, aunque dichas formulas fueron de tipo recursivo. En suma, las respuestas de Aida en el instrumento en LP aluden a un estado prealgebraico; no obstante como ya se ha reiterado, dicha afirmación no se refiere ni a su pensamiento ni a los procesos cognitivos de la alumna, sino a las estrategias y a las operaciones que ella realizó cuando resolvió del instrumento aplicado en el marco de este trabajo. Dichas estrategias, como se ha observado en este estudio, son inducidas en mayor medida por otros factores como el tipo de problema, su planteamiento o la forma de presentar los datos entre otros.

Laura

De los resultados de todas las alumnas que participan en la experiencia en LP, se observó una tendencia a lo aritmético principalmente en Laura, Yola, NoryMar y Coni. En el caso de Laura, de los nueve reactivos del instrumento ella contestó seis y sólo dejó registro en tres de éstos. En el ítem III-3, ella generalizó con éxito, pero no registró ninguna evidencia que permitiera identificar las estrategias usadas por ella y que permitiera ubicarla en alguna categoría de generalización. En III-4 contestó los incisos a, b y c, sin embargo, ella no generalizó para el término n ni justificó la regla de la secuencia con una ecuación algebraica general.

En el diagrama 4.18 se muestra la respuesta de Laura al ítem III-4:

a) En el primer rectángulo hay dos círculos, ¿Cuántos círculos hay en el quinto rectángulo? 10 ✓

b) ¿Cuántos círculos hay en el rectángulo 100? 200 ✓

c) ¿Cómo lo sabes? Si en el 1º hay dos, en el 5º hay 10, se están duplicando las cantidades, de ahí que al 100 equivale al 200. ✓

Diagrama 4.18 Producción de Laura en el Ítem III-4

En el razonamiento de Laura en el inciso c del ítem III-4, se puede advertir que utilizó una estrategia de proporcionalidad para resolver el problema. Cuando ella afirma ‘en el 1º hay dos, en el 5º hay diez, entonces al 100º le corresponde 200’, Laura está identificando un

patrón, sin embargo dicho patrón no lo extendió hasta el término solicitado de manera recursiva, sino que dedujo el resultado mediante la proporcionalidad que ella identificó entre los términos anteriormente resueltos. A pesar de lo anterior, su declaración contiene la regla de los elementos de manera implícita, aunque Laura no logró ni definir la regla ni registrarla.

Lo anterior deja ver la tendencia de Laura a lo aritmético mencionada anteriormente. Al igual que el caso de Ana, y probablemente por los mismos motivos Laura no contestó los reactivos III-4 d y e debido a que no identificó el patrón de la secuencia y por consiguiente no logró generalizar para el término n mediante una regla general. Así mismo sólo resolvió uno de tres reactivos de las secuencias numéricas del Ítem IV, lo que sugiere su dificultad para percibir un patrón en contextos numéricos así como para elaborar expresiones algebraicas.

Yola

De los resultados globales de la experiencia en LP, Yola mostró uno de los resultados más bajos en generalización entre las nueve alumnas que participaron en el estudio. De los tres reactivos (que fue posible clasificar de todo el instrumento) dos se ubicaron en la Categoría de Generalización G0 lo que equivale al 67% de las tres respuestas.

En sus estrategias Yola exhibió la mayor tendencia aritmética con relación al resto de sus compañeras. En el ítem III-3 resolvió dos de tres reactivos, pero sin dejar registros, razón por la que no fue posible clasificarlos. No dio respuesta al ítem III-4, excepto por el inciso a), el cual resolvió acertadamente.

Finalmente, en el inciso IV, de secuencias numéricas, contestó con acierto los tres términos de las secuencias solicitados, no obstante no logró hacer dos de las expresiones correspondientes a estos términos. Sus expresiones sugieren que intentó representar la regla de manera independiente a sus cálculos específicos y que probablemente fueron producto de adivinación.

NoryMar

Al igual que la mayoría de sus compañeras NoryMar resolvió el ítem III-3 mediante

tabulación. A pesar de que no dejó evidencias de haber utilizado una tabla (ya que borro sus registros) lo anterior se deduce de los resultados que ella dio a los términos solicitados. NoryMar resolvieron los términos solicitados con error, sin embargo, sus respuestas se aproximaron tanto al resultado correcto (55 en lugar de 53 y 205 en lugar de 203), que la diferencia en las cifras sugiere que ella cometió un error de conteo al saltar un término en la secuencia de la tabla, por lo que sus respuestas fueron catalogadas en la pauta de estrategias Análisis Exhaustivo que corresponde la categoría G2.

Al igual que Ana y Laura, NoryMar resolvió los incisos a, b y c del ítem III-4 mediante regla de tres. Como ya se comentó en los casos de Ana y Laura, resolver el ítem mediante regla de tres o por proporcionalidad, no requiere que la alumna identifique la regla que rige la secuencia y por tanto es posible que por ello, estas alumnas no contestaron los incisos d) y e) del problema.

Del ítem IV únicamente NoryMar contestó el reactivo 3. Los resultados sugieren que ella tiene dificultades para elaborar ecuaciones para simbolizar un problema y por tanto esta alumna también muestra una tendencia hacia lo aritmético.

Coni

Coni contestó dos de los tres reactivos del problema III-3. A pesar de que ella no elaboró ningún tipo de registro en dicho problema, se pueden percibir en sus hojas de trabajo vestigios de haber utilizado una tabulación como estrategia para calcular los términos solicitados. En el ítem III-4 resolvió los incisos a), b), y c) mediante la Pauta Aplicación Rutinaria, específicamente con una Regla de tres; en el Diagrama 4.19 se muestra la respuesta de Coni al ítem III-4.

a) En el primer rectángulo hay dos círculos, ¿Cuántos círculos hay en el quinto rectángulo? 10

b) ¿Cuántos círculos hay en el rectángulo 100? 200

c) ¿Cómo lo sabes? Por que multiplico el número del rectángulo por 2

Diagrama 4.19 Producción de Coni al ítem III-4

La explicación de Coni a sus respuestas de los incisos a) y b) del ítem III-4, muestran una tendencia a los números concretos en lugar de aplicar la regla de la secuencia. Es quizás por esta razón que no haya contestado los reactivos d) y e), en los que se le pidió generalizar para el término n y explicar la regla general.

En el ítem IV Coni no resolvió ningún reactivo, lo que probablemente sugiere que tiene dificultades para percibir patrones en secuencias numéricas, la tendencia que mostró hacia lo aritmético y su habilidad para generalizar con estrategias recursivas en secuencias figurativas, no lo manifestó en las secuencias numéricas, por lo que ella no logró generalizar en este ítem. Los resultados de Coni al instrumento en LP, ubican a esta alumna en el nivel más bajo de generalización de las nueve alumnas observadas.

4.4 Formas de Registro de las reglas utilizados en la primera experiencia LP

Mason señala la existencia de formas variadas de registro en las tareas de generalización éstas pueden ser con lenguaje natural acompañado de dibujos; utilizar sólo palabras es un paso más difícil, una tercera etapa se refiere al uso de palabras y símbolos cuando surge la necesidad de abreviar las explicaciones y finalmente el uso únicamente de símbolos, para alcanzar esta última un alumno requiere de más tiempo (1985).

Balacheff (2000) refiere tres periodos en el desarrollo del álgebra con relación a su representación: el primero cuando el alumno expresa en un lenguaje natural; el segundo cuando éste lo hace mediante el uso de abreviaciones y el tercero en el que aparecen los símbolos específicos que le permiten el cálculo. Las representaciones pueden ser: con lenguaje natural, mediante símbolos aritméticos, con la combinación de símbolos y signos propios o bien con álgebra (Mason et al. 1985).

En consecuencia con lo antes dicho, para el registro de los procedimientos para resolver un problema, los alumnos se valen de diferentes formas de representación. Con frecuencia estas formas de representación revelan el tipo de estrategia usada, además de que en muchos casos implican la justificación de los resultados, aun sin que el alumno sea consciente de dicha justificación. Tal es el caso de las tabulaciones; una tabla puede exhibir por ejemplo, un procedimiento recursivo.

Las formas de registro que elaboraron las alumnas en el estudio varían desde el lenguaje natural hasta los registros completamente con signos específicos; desde lo aritmético a lo algebraico. Para muchos expertos, únicamente es álgebra lo que se expresa con la simbolización específica. Sin embargo se puede estar trabajando con álgebra sin importar el tipo de registro que se esté usando (según opinión de Mason, Graham, Pimm, & Gower, 1985 p.52)

En este apartado se presentan los registros elaborados por las alumnas en la experiencia en Lápiz y Papel. Los registros aquí inscritos se refieren a la forma de representación ya sea de la regla de los elementos de la secuencia, o de la estrategia usada para resolver el problema o bien, de los esquemas y apuntes de los que cada alumna se sirvió en el cálculo de los términos solicitados en el ítem. Muchos de estos registros exhiben las pautas que siguió una alumna en la resolución de cada problema. Enseguida se enumeran los registros que aparecieron con mayor frecuencia en el estudio en Lápiz y Papel.

- i. SR.- Sin registro. No elaboró registró alguno, en algunos casos no resolvió el problema o no contestó.
- ii. NAT.- Natural.- En esta forma de registro las alumnas se basaron en el lenguaje natural para explicar lo general, Mason (1985) afirma que el registro de un patrón puede involucrar una variedad de formatos; por ejemplo, dibujos, dibujos apoyados con palabras, la mayor parte con palabras y algunos símbolos, o la mayor parte símbolos con algunas palabras. Por lo dicho por Mason se puede entender que el hecho de registrar puede seguir un proceso en el que su forma más concreta es con dibujos y enseguida se ubican los registros con palabras. Un ejemplo de esta forma de registro se observa en las respuestas de Tanya en el ítem III-4-c (ver ilustración 4.20).

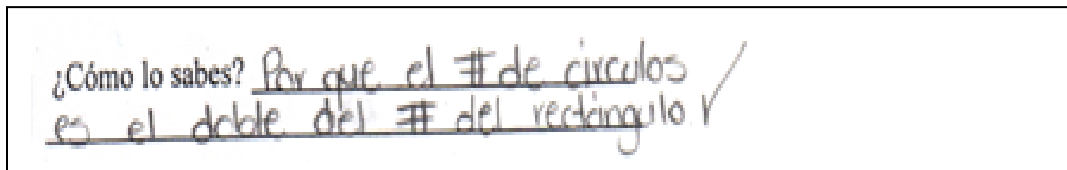


Ilustración 4.20 Registro de Tanya en la respuesta de ítem III-4-c

- iii. ART- Aritmético.- Los registros numéricos realizados por las alumnas para resolver una secuencia fueron los más recurridos por ellas, debido posiblemente a su tendencia de permanecer en los números concretos. Este tipo de registros fueron utilizados por las estudiantes cuando efectuaron generalizaciones de tipo recursivo, en los casos donde aplicaron estrategias basadas en lo numérico. Un ejemplo de registro aritmético lo realizó Aida en III-3-3 en el que llevó a cabo algunos cálculos mediante proporcionalidad para intentar la solución del problema planteado en ese ítem. (ver Diagrama 4.21)

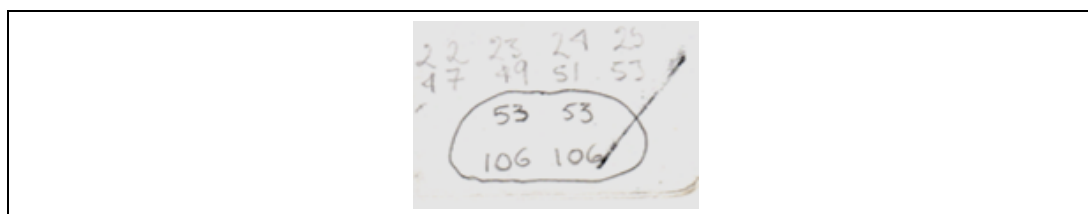


Ilustración 4.21 Registro de Aida en ítem III-3-3

- iv. TAB.- Tabular. Como su nombre lo indica, este registro hace alusión al uso de tablas y de tabulaciones. Generalmente este tipo de registro se notó asociado a procesos recursivos en los que se emplearon estrategias basadas en la aplicación de reglas de manera rutinaria. El Ítem III-3 pudo haber inducido a las alumnas a elaborar este tipo de registros ya que en este ítem se presentaron la mayoría de los casos observados de los registros tabulares. Un ejemplo se observa en el diagrama 4.22 en donde Gema efectuó una tabulación.

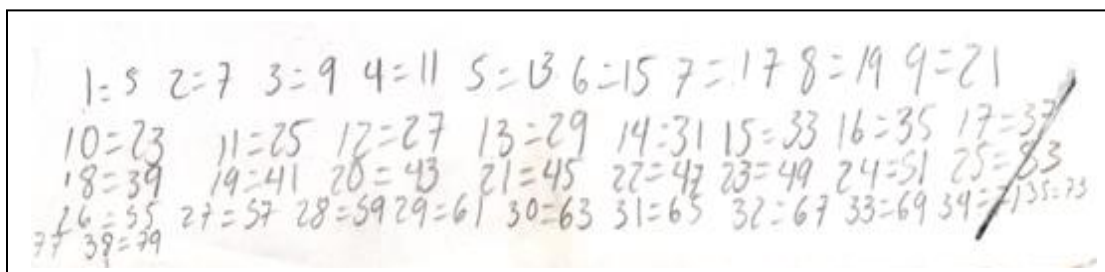


Ilustración 4.22 Tabulación realizada por Gema en III-3

- iv. ALG- Algebraicos.- Este forma de registro se produjo únicamente en los procesos en los que las alumnas consiguieron respuestas mediante procesos algebraicos i.e. lograron crear una formula general. La mayoría de esta clase de registro se observó en el ítem IV con ejercicios numéricos, y en el ítem III3-4-d. En la ilustración 4.23 se muestra la producción de Ana en la que elaboró un registro algebraico.

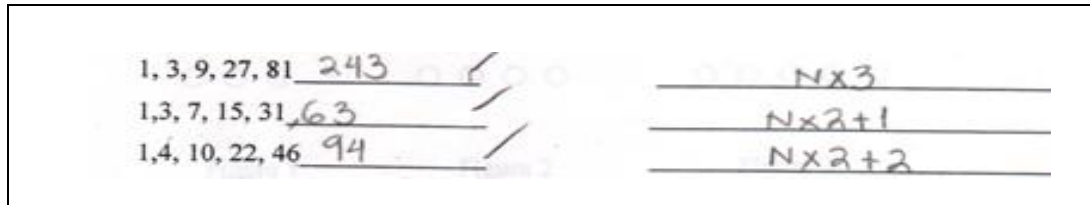


Ilustración 4.23 Producción de Ana en el ítem IV

En la experiencia con Logo la totalidad de los registros se hicieron en lenguaje de programación Logo, mediante las primitivas o comandos propios de este lenguaje de programación.

Resumen del capítulo IV

Las alumnas no justifican de manera espontánea las respuestas a sus generalizaciones

En su mayoría ellas muestran una tendencia a lo aritmético y muy rara vez logran resolver un problema a través del álgebra

En las estrategias que emplearon para resolver un problema en una secuencia se observó la tendencia a la recursividad aritmética. El principal obstáculo para entender la estructura de una secuencia fue esta misma disposición a las estrategias recursivas.

Tanya fue la única que utilizó una variable genérica en sus respuestas en las secuencias figurativas. La estrategia más recurrida por las alumnas cuando no entendieron la estructura de la secuencia dada fue la Aplicación Rutinaria, ellas aplicaron alguna regla de proporcionalidad o una regla de tres.

En las generalizaciones de secuencias numéricas las alumnas optaron por la estrategia Inducciones Falsas de la Categoría de Generalización G1, lo que se observó cuando la mayoría de ellas generaron la ecuación $N \times 3$ siguiendo las respuestas de los ejemplo dados en el problema e.g. $N \times 2$; $N \times 10 \dots$

CAPÍTULO V Resultados de la experiencia en el Taller con Logo

La segunda parte del estudio consistió en el diseño y aplicación de un Taller para utilizar el lenguaje de programación con Logo. El propósito principal de este Taller fue apoyar el desarrollo de habilidades de generalización en los sujetos de estudio. Como se había dicho Mason (1985) ve a la generalización como una raíz y una ruta para acceder al álgebra; tomando como base dicha afirmación, se diseñaron una serie de actividades de generalización en ambientes virtuales.

Como se apuntó en capítulos precedentes el diseño de la secuencia didáctica del taller en Logo se basó en los trabajos realizados por Ursini y Rojano. Ellas experimentaron con este software con la finalidad de enseñar álgebra con Logo; dada la similitud en los propósitos de sus estudios con el presente trabajo, las sesiones del Taller de Generalización con Logo conservan las mismas secuencias didácticas que usaron estas investigadoras para enseñar álgebra (2005).

5.1 Marco interpretativo para Logo

Categorías de Programación hallados en el trabajo empírico en el taller Logo

De la misma forma en que se crearon categorías de estrategias a partir de las respuestas de los problemas en LP (anteriormente presentadas), y que fueron resultado de un proceso iterativo entre la consulta de los trabajos sobre el tema y los resultados empíricos de esta investigación; en los ejercicios del Taller con Logo también se reconocieron cinco categorías de programación, las cuales fueron construidas en forma triangular recurrente, tomando como base los trabajos sobre el tema, en este caso el de Ursini 1993; Ursini y Rojano, 2005; Olson, Kieren & Ludwig, 1987 y las producciones de las alumnas.

En lo que sigue se describen estas Categorías de Programación para Logo.

(A). L0 : Adivinanza. La respuesta no produce la figura deseada y se generan trazos erráticos que parecieran ser resultado del uso de las instrucciones aplicadas sin conciencia de su significado o de una especie de adivinación.

L1 : Instrucciones Directas (*ID*). La figura es resultado de realizar cada uno de los trazos específicos siguiendo directamente la totalidad de las instrucciones dadas; el usuario monitorea el proceso con base en la imagen visual de la figura en la pantalla.

L2 : Programa Directo (*PD*). A una serie de instrucciones directas que integran la totalidad de las órdenes para crear una figura, se le designa con algún nombre propio; con sólo teclear el nombre se puede reproducir la figura sin repetir todas las órdenes lo que ofrece la posibilidad de aplicar el comando en diferentes contextos. La serie de instrucciones de un programa directo puede ser abreviada con el comando *REPITE*. Este programa implica generalizaciones en su forma más sencilla.

L3 : Programa Modular (*PM*). Esta pauta de respuestas resulta de la iteración de programas etiquetados es decir de Programas Directos (*PD*), los que se estructuran a través de instrucciones directas (*ID*). Como resultado se obtienen nuevas figuras a partir de la repetición de una figura original (generada a través del *PD*) que hace las veces de un patrón. Esta pauta de programación puede también ser abreviada con el comando “*REPITE*”. En estos casos se suelen promover una sucesión de generalizaciones. En esta Pauta y en las anteriores se trabaja sobre números concretos.

L4 : Programa General (*PG*). Dada una figura generada a través de cualquiera de las pautas anteriores, en la categoría *PG* es posible generar esta figura en diferentes escalas de la original, siempre y cuando esté dentro de los límites que permite el software y el hardware en uso. Para esto se introduce una variable genérica, la que representa el factor escalar que se desee. La estrategia *PG* se ubica en el nivel más alto de abstracción en los programas llevados a cabo en el taller con Logo en el presente estudio. La aplicación del *PG* está condicionada a la deducción de una regla matemática, la cual deberá ser registrada mediante

dicho programa, además de que es indispensable el uso de una variable genérica para que pueda ser considerado general.

5.1.1 Identificación y explicación de las Categorías de Análisis L0, L1, L2, L3 y L4, halladas a partir de las Categorías de Programación en el Taller con Logo

En investigaciones realizadas en 1987, Olson y sus colaboradores relacionaron la secuencia de niveles de construcción del conocimiento geométrico de Van Hiele, con ciertos niveles de construcción de conocimiento que se da en la Geometría de la Tortuga de Logo y estudiaron sus relaciones teóricas (Olson, Kieren, y Ludwig, 1987).

Una vez identificadas y definidas las categorías de Programación recién descritas, se detectó un paralelismo notable entre ellas y las categorías definidas en los trabajos de Olson y sus colaboradores. Sin embargo, se consideró que los niveles de pensamiento aplicados al aprendizaje de la geometría, propuestos por Van Hiele-Geldof (1958), se ajustaban de forma más aproximada a los aquí planteados si se desfasaba un nivel hacia arriba. Esto significa que el nivel 0 de Van Hiele se ajusta mejor al nivel 1 de las Pautas de Programación detectadas en el presente estudio.

Cabe aclarar que el nivel cuatro los niveles de aprendizaje de la geometría plana propuesta por van Hiele no fue logrado por las estudiantes en el presente estudio. Dicho nivel describe las competencias de los estudiantes como sigue “Los estudiantes en este nivel de desarrollo pueden apreciar un estándar moderno de rigor como ejemplificado por el trabajo de Hilbert. Los estudiantes en este nivel pueden desarrollar una teoría sin alguna interpretación concreta”.

Las categorías de análisis para la experiencia en el Taller con Logo se presentan en la tabla T 5.1 en la que aparece un análisis comparativo entre las categorías aquí definidas, las propuestas por Van Hiele y las sugeridas por Olson et al quedaron como se indica en la Tabla T 5.1

TABLA T 5.1 Categorías de Programación y su fundamentación teórica

Categorías de análisis del estudio	Niveles de aprendizaje de la geometría	Niveles de aprendizaje matemático con Logo
Definidas a partir los resultados del Taller con Logo (sustentadas en Ursini y Rojano).	Según Van Hiele (citado en Olson, A.; Kieren, T. and Ludwig, S. (1987) en la Geometría Plana	Geometría de la Tortuga Logo (Olson, A.; Kieren, T. and Ludwig, S. 1987)
L0-Adivinanza. (A)	Nivel 0	
La figura, es resultado del uso de instrucciones sin sentido cuyo significado no se comprende; la respuesta no produce la figura deseada, se generan trazos erráticos que parecieran ser resultado de una especie de adivinación.	(Nota; al correr al siguiente el nivel 0, esta categoría quedó sin descripción)	<p>En este nivel una orden primitiva de Logo es utilizada como una entidad independiente.</p> <p>En este sentido estas primitivas existen como objetos intocables que deben ser utilizados como un todo. Aun no han sido percibidas las propiedades efectivas de estas órdenes</p>
L1- Instrucciones Directas (ID)	Nivel 1	
La figura es resultado de realizar cada uno de los trazos específicos siguiendo directamente la totalidad de las instrucciones dadas; el usuario monitorea el proceso con base en la imagen visual de la figura en la pantalla. No precisa de validación ya que no es necesario correr el programa para confirmar su veracidad.	Un estudiante en este nivel reconoce objetos por su apariencia global, es decir distingue sus propiedades pero no interrelaciona estas propiedades de otros objetos. Los estudiantes pueden identificara un triángulo, un cuadrado, o un cubo, pero no logra percibir las relaciones entre figuras ni de sus propiedades.	En la Geometría de la Tortuga, en este nivel el alumno puede construir las figuras mediante una secuencia de primitivas con conocimiento pleno las propiedades de las figuras. En este nivel aun no son advertidas por ejemplo las semejanzas entre las secuencias de instrucciones para construir cuadrados y rectángulos. La creación de una secuencia de primitivas para formar una figura requiere del apoyo de la imagen visual; en este nivel aun no se dispone de un análisis lógico para programar una secuencia de comandos que genere una figura basada en los conocimientos del alumno.

Categorías de análisis del estudio	Niveles de aprendizaje de la geometría	Niveles de aprendizaje matemático con Logo
L2- Programa Directo PD	Nivel 2	
<p>A una serie de instrucciones directas que integran la totalidad de las órdenes para crear una figura, se le designa con algún nombre propio; con sólo teclear el nombre se puede reproducir la figura sin repetir todas las órdenes lo que ofrece la posibilidad de aplicar el comando en diferentes contextos. La serie de instrucciones de un programa directo puede ser abreviada con el comando REPITE. Este programa implica generalizaciones en su forma más sencilla.</p>	<p>Los estudiantes que han alcanzado este nivel pueden establecer relaciones entre las propiedades de una figura y entre las figuras mismas. Las propiedades de una figura pueden ser ordenadas lógicamente como clases de figuras geométricas.</p>	<p>Los comandos necesarios para trazar una figura no surgen de un experimento visual, sino de los conocimientos que tiene el usuario acerca de ella. Inicialmente se crea el programa sin el comando REPITE, es decir primero se realiza la secuencia de comandos necesarios para la figura ordenados individualmente. Más tarde, el comando "REPITE" se utiliza después de observar patrones en la sucesión de órdenes primitivas o como resultado del análisis de la figura geométrica pretendida.</p>
L3- Programa Modular (PM)	Nivel 3	
<p>Programa Modular (PM). Esta pauta de respuestas resulta de la iteración de programas etiquetados es decir de Programas Directos (PD), los que se estructuran a través de instrucciones directas (ID). Como resultado se obtienen nuevas figuras a partir de la repetición de una figura original (generada a través del PD) que hace las veces de un patrón. Esta pauta de programación puede también ser abreviada con el comando "REPITE". En estos casos se suelen promover una sucesión de generalizaciones. En esta Pauta y en las anteriores se trabaja sobre números concretos.</p>	<p>En el plano de la geometría, los estudiantes que alcanzan este nivel conocen la deducción para desarrollar toda la teoría de la geometría considerada. Para estos estudiantes el razonamiento deductivo es significativo en un sentido global.</p>	<p>En este nivel los procedimientos individuales del nivel anterior son agrupados y son relacionados en maneras más inclusivas llevando finalmente a estructuras organizativas globales. La deducción en este nivel se ha convertido en una parte de su trabajo en la Geometría de Tortuga. Logo tiene varias características del lenguaje que requieren deducción lógica para la aplicación apropiada. Un ejemplo de esta característica es la recursividad.</p>

Categorías de análisis del estudio	Niveles de aprendizaje de la geometría	Niveles de aprendizaje matemático con Logo
L4- Programa general PG	Nivel 4	
Además de ser un programa etiquetado, incluye variables genéricas. Este nivel de programación fue el más alto observado en las respuestas en el taller con Logo, a pesar de que la inclusión de una variable genérica no garantiza que las alumnas interpreten a la variable de esa forma. La inclusión de la variable pueden hacerse sobre programas modulares o en programas etiquetados i.e. se pueden presentar en las diferentes Categorías de Programación	<p>En el plano de la geometría, los estudiantes en este nivel de desarrollo pueden apreciar un estándar moderno de rigor.</p> <p>Los estudiantes que alcanzan este nivel pueden hacer uso de la deducción para desarrollar toda la teoría sin darle alguna interpretación concreta.</p>	<p>No es claro lo que estudiantes en este nivel podrían hacer. No se dispone de resultados empíricos. La tarea de leer un programa de Logo que contiene múltiples niveles de recursión y predecir la figura Geométrica de la Tortuga que probablemente resultaría, requiere el desarrollo en este nivel. Más allá de que el reconocimiento de estructuras recursivas comunes a través de procedimientos diferentes de Logo probablemente también requeriría este nivel del desarrollo.</p>

TABLA T 5.1 Categorías de Programación y su fundamentación teórica

En lo que sigue se presentan algunos ejemplos de las Categorías de Programación ya descritas.

5.1.2 Ejemplos de Categorías de Programación en Logo

L0- Adivinanza. (A)

Cuando un alumno se inicia en el manejo de un lenguaje de programación Logo, puede de inmediato interactuar con la computadora. Desde un principio consigue experimentar con las primitivas para intentar algunos dibujos aun sin tener conocimientos específicos de cómputo. En ocasiones estos dibujos pueden ser sólo algunos trazos erráticos, otras veces los alumnos logran crear figuras diferentes a lo solicitado, y con frecuencia dejan a un lado el problema original y consideran a la figura realizada como su producción final. Una situación semejante a la descrita la encontramos en la producción de Tanya, al dibujar un sobre en la sesión 2. (ver ilustración 5.01)



Diagrama 5.01 Producción de Tanya en la sesión 2

La figura lograda por Tanya, que ella consideró como producto final, poco se ajusta a la figura pedida y aunque ella sin duda trató de hacerla, pareciera que procedió por ensayo y error y adivinación en la categoría L0.

Otro caso de respuesta por adivinación lo encontramos en NoryMar. Después de haber realizado algunos dibujos con éxito, fallan en el siguiente procedimiento, que da la impresión de que lo produjeron conforme a una Pauta de Adivinación en la categoría L0, en la ilustración 5.02 aparece su respuesta

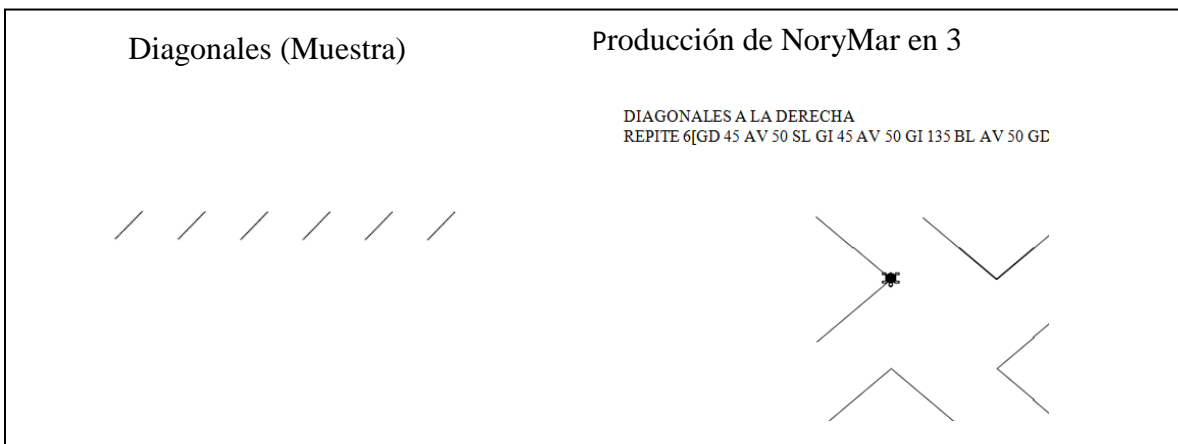


Diagrama 5.02 Dibujo de Diagonales de NoryMar

L1- Instrucciones Directas (ID)

Como se dijo, en la Categoría de Programación Instrucciones Directas, correspondiente a la categoría L1, el usuario puede ir observando en la pantalla la imagen de la figura al momento en la que la está produciendo. De este modo, la corrección de la estrategia puede ser confirmada de manera concreta y directa, o en palabras de Ursini y Rojano (2005) “...trabajar de este modo permite a los alumnos comprobar inmediatamente el efecto de las órdenes tecleadas y acercarse al objeto prefijado por tanteo y aproximaciones sucesivas”.

Un ejemplo de esta Categoría de Programación se observa en la respuesta que dio Ana en la sesión 4 a la solicitud de dibujar un hexágono regular. En estrategia ella insiste en el uso de las Instrucciones Directas para realizar sus programas (ver Diagrama 5.03).

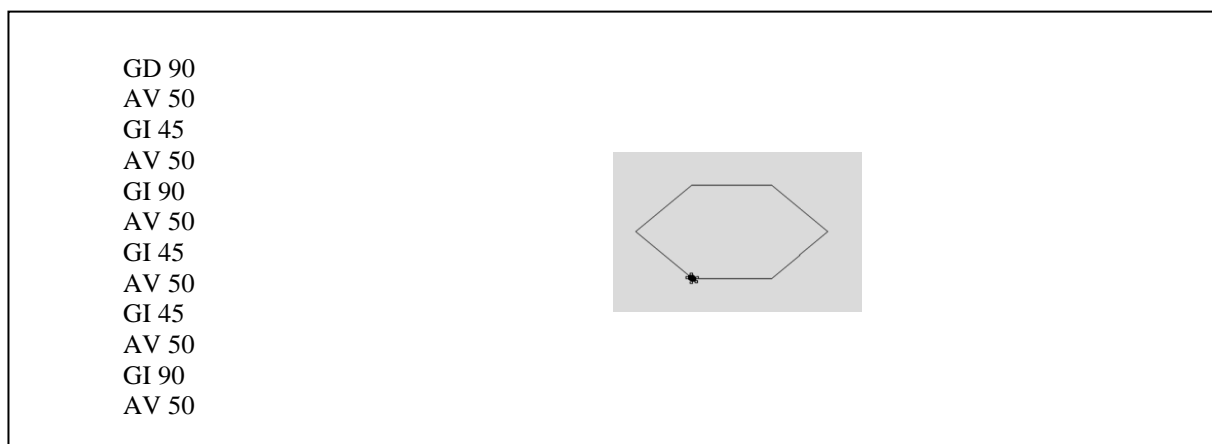


Diagrama 5.03 Programa de un hexágono de ANA sesión 4.2

La irregularidad de la figura del hexágono producida por Ana parece confirmar lo dicho por Olson et al. (1987) con relación a que en este nivel los alumnos no tienen conciencia de las propiedades de una figura. Ana simplemente crea un polígono hexagonal, el cual no cumple con las especificaciones de un hexágono regular.

Los programas elaborados por Aida, Yola y NoryMar, fueron similares a los realizados por Ana en la categoría. Todos estos programas siguen la pauta Instrucciones Directas y fueron elaborados en su mayoría en la sesión 4, siendo esta sesión la única en la que las alumnas trabajaron con esta Categoría de Programación L1.

L 2 Programa Directo (PD)

Como ya se ha dicho anteriormente, un Programa Directo se compone de una serie de instrucciones directas a las que se les ha asignado un nombre propio; esta particularidad permite que este tipo de programas se puedan replicar en diferentes contextos sin necesidad de repetir todas las instrucciones, usando la sintaxis apropiada para escribirlo y correrlo directamente.

En esta pauta de programación, un grupo de instrucciones hacen las veces de un patrón, el cual permite repetir un grupo de instrucciones tantas veces como se quiera sin necesidad de

enunciarlas de manera individual. Al trabajar de esta forma se aprovecha la posibilidad que da este lenguaje de programación para producir generalizaciones, es decir, percibir un patrón dentro de un esquema de comandos que conforman una figura. Ursini & Rojano con relación a lo anterior afirman; “Logo es un ambiente que ofrece facilidad para producir patrones, descubrir regularidades y expresarlas de manera formal” (2005).

Para acceder a la Categoría de Programación “Programa Directo”, los estudiantes con frecuencia pasan por una etapa de transición, en la que primero diseñan una figura con instrucciones directas (ID) y posteriormente le asignan una etiqueta o nombre para convertirlo en un programa directo (PD). Con la práctica, un alumno logra acceder a esta categoría de programación sin que medie la secuencia de instrucciones directas. En un programa PD al usuario no le es posible verificar la validez en la pantalla de los efectos de cada instrucción tecleada, por lo que únicamente puede comprobar la corrección de su programa hasta el momento en que lo corre.

La mayoría de los ejemplos que se ubicaron en la Categoría de Programación L2 se produjeron en las sesiones 3 y 4. En el diagrama 5.04 se muestra un ejemplo de un programa en esta categoría que se encontró en el trabajo realizado por Yola en la sesión tres:



Ilustración 5.04 Producción de Yola en la sesión 3

El hecho de que un alumno muestre haber alcanzado el dominio para elaborar programas directos, no garantiza que optará por esta Pauta de Programación en todos los casos en los que se enfrenta a algún problema. Como un ejemplo de ello está el trabajo de Gema, realizado en la sesión cuatro. Gema resolvió los primeros problemas del ítem 4 mediante Programas Directos (PD), sin embargo, en el problema 4.4, ella elaboró una figura (Aspa)

con Instrucciones Directas ID. En el diagrama 5.05 se exhibe la figura de una aspa con instrucciones directas ID elaborado por Gema.

Enseguida en este mismo ítem Gema elaboró un Programa Directo repitiendo el grupo de comandos anteriores para crear la figura “ASPITA” en la que repitió la primera figura cuatro veces. (Ver Diagrama 5.05)

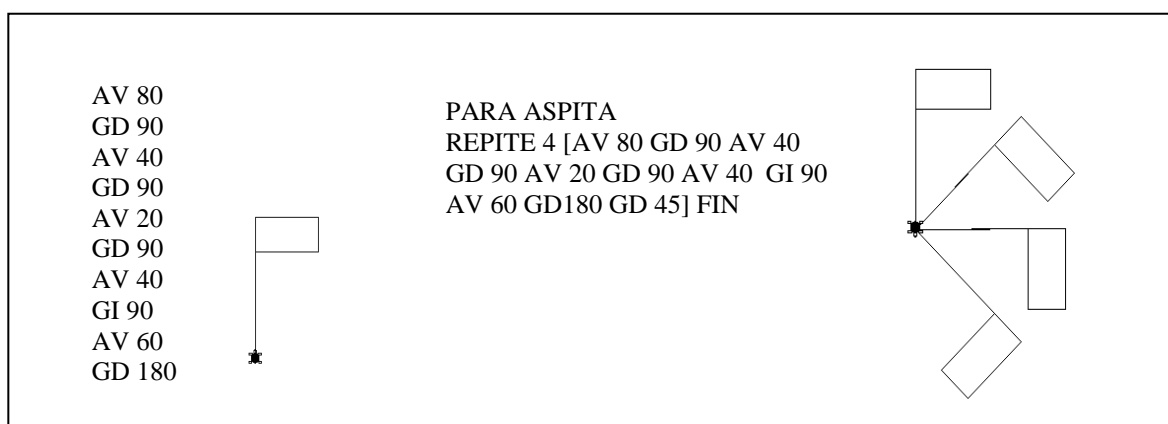


Diagrama 5.05 Producción de Gema en el ítem 4.4

Otro ejemplo de la Categoría de Programación L2 en la pauta de programación PD (en este caso en un ambiente numérico), lo encontramos en la actividad que Ana llevó a cabo en la sesión cinco. En el ítem 5.1 se pide elaborar un Programa General (ver descripción PG en la Tabla 5-1); no obstante, Ana, por su parte, no incluyó en su programa una variable genérica, así su trabajo se ajusta a una Categoría de Programación PD. (Diagrama 5.06)

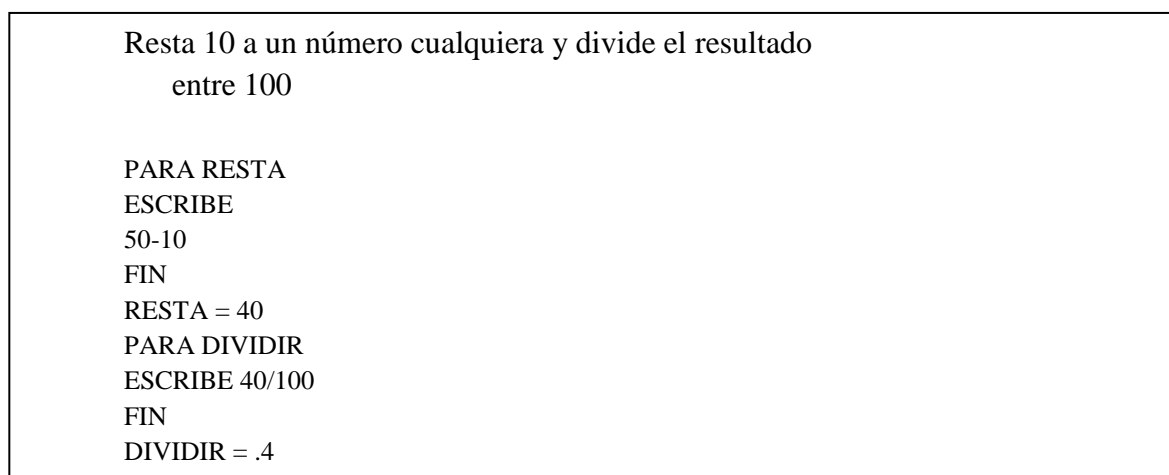


Diagrama 5.06 Programa de Ana En el inciso 1 de la Sesión 5

Como se puede apreciar en su trabajo, Ana en lugar de utilizar una variable general para representar a un número cualquiera, permanece en el dominio de los números concretos.

L3- Programas Modular (PM)

Como se ha dicho, un programa abreviado puede hacer las veces de un patrón cuando se le utiliza para construir nuevas figuras mediante la iteración de dicho programa, el cual puede ser estructurado de acuerdo a las necesidades de la figura que se desea formar. Como sostienen Ursini & Rojano (2005) "...una vez que se ha escrito un programa directo puede ser usado dentro de otro programa con sólo teclear su nombre y Logo reconoce a este programa como un primitiva más".

Para inducir a las alumnas a elaborar Programa Modular en la categoría L3, en el taller con Logo se diseñaron cuatro problemas, los que corresponden a los reactivos 3.1, 3.2 y 3.3 de la sesión tres y al problema 5.5 de la Sesión cinco.

En la sesión tres únicamente Tania y Coni lograron la categoría L3; el resto de sus compañeras en esta misma sesión elaboraron programas Directos (PD) correspondientes a la categoría L2. Con estos resultados pareciera que tanto Tanya como Coni accedieron con mayor facilidad a niveles de mayor abstracción. En el diagrama 5.07 se muestra la forma en que Tanya generó primero el programa CUADRO y después utilizó este mismo programa como un patrón para elaborar la figura TORRE.

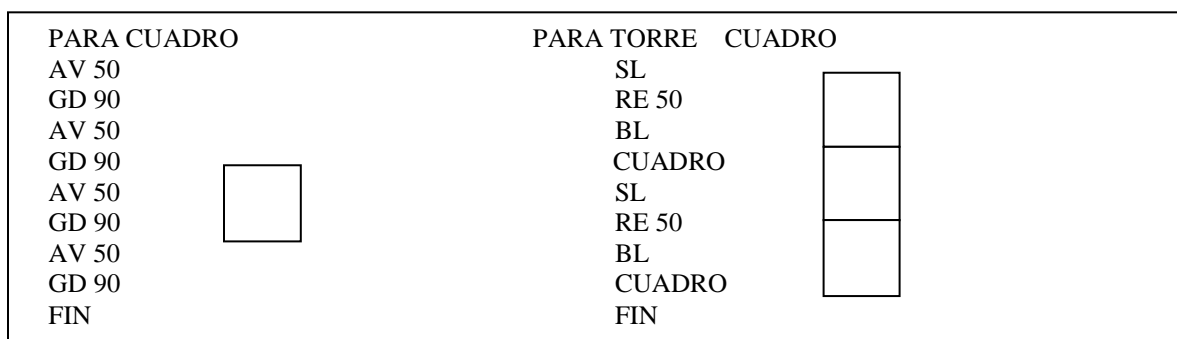


Diagrama 5.07 Producción de Tanya en la sesión 3.1

Para CUADRO, Tanya dejó atrás las Instrucciones Directas (en el que se sigue cada una de las instrucciones monitoreadas en la pantalla) y elaboró la figura con base en un PD (i.e un

programa etiquetado el cual como ya se dijo puede replicarse sin necesidad de escribir todas las instrucciones). Para elaborar el programa TORRE utilizó el programa CUADRO previamente definido y lo aplicó como una primitiva para crear una nueva figura siguiendo la Pauta de Programación PM en la categoría L3.

Como ya antes se explicó, para elaborar un PM se requiere primero crear un programa PD (un programa etiquetado) para aplicarlo repetidamente en otro programa. Este proceso se observa en las respuestas que Tanya dio a los ítems 4.4 y 4.5, en las que formó un PM en la categoría L-3. Ella primero definió el Programa Directo “Bandera”, con el cual construyó un segundo programa replicando la primera figura, enseguida abrevió este mismo programa (PM) con el comando REPITE (Ver Diagrama 5.08).

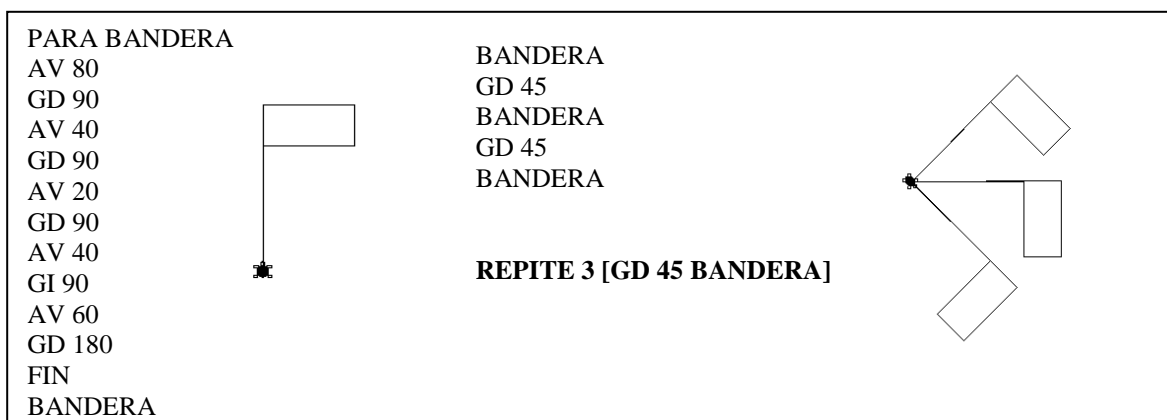


Diagrama 5.08 Respuestas de Tanya Ítems 4.4 y 4.5

En este ejemplo Tanya está generalizando dos veces; en la primera utiliza como patrón el programa BANDERA, y en la segunda el patrón GD 45 BANDERA acompañado del comando REPITE (ver Diagrama 5.07).

En el ítem 4.5, otras dos alumnas, además de Tanya, lograron hacer Programas con Instrucciones Directas. Uno de estos casos fue el de Laura quien hizo uso de tres Pautas de Programación para dar solución a los problemas planteados en los ítems 4.4 y 4.5; el primer programa fue en el ítem 4.4, el cual resolvió con Instrucciones Directas ID (se muestra al lado izquierdo del Diagrama 5.08), el segundo programa (también de la primera figura) lo realizó mediante un Programa Directo PD. El hecho de efectuar dos programas diferentes

para la misma figura sugiere que Laura utilizó el programa Instrucciones Directas como una transición al Programa Directo, sin embargo, no se puede asegurar que se trate de una transición, debido a que se componen de instrucciones diferentes. Finalmente en el ítem 4.5 Laura elaboró un Programa con Instrucciones Directas a partir del PD “BANDERA” el cual lo repitió a modo de patrón tres veces para formar la figura.

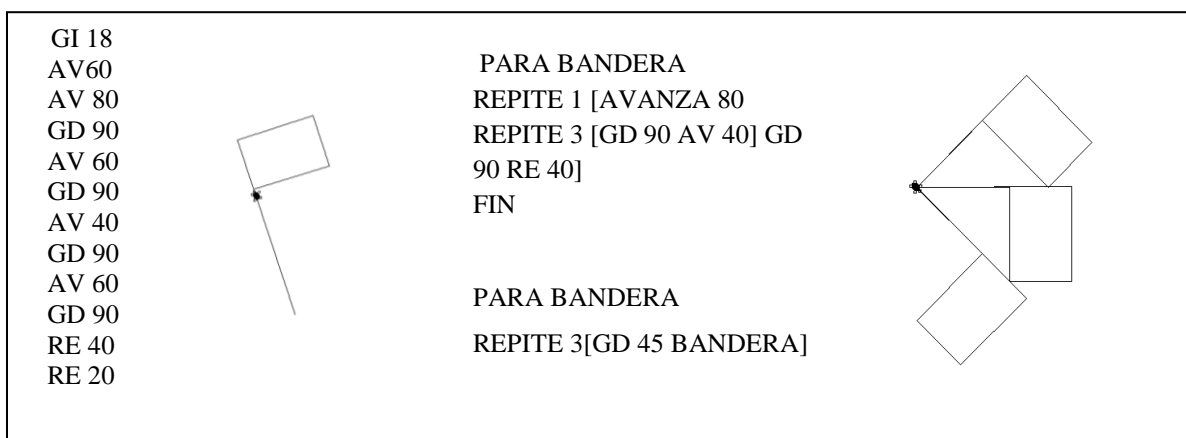


Diagrama 5.09 Producción de en Sesión 4 Laura

L4- Programa General (PG)

Un Programa General se caracteriza, como ya se explicó, por tener una serie de combinaciones de programas etiquetados y organizados a través de la introducción de variables genéricas. Esta Pauta de Respuestas se forma agregando una variable genérica a cualquiera programa de Logo, como los ya presentados anteriormente. Las variables pueden estas representadas por una literal o algún nombre propio, y se ajustan a esta Pauta de Programación siempre que dichas variables hagan las veces de números generales.

Mason afirma que el trabajo con la generalización de patrones permite a los alumnos desarrollar su comprensión del álgebra, y agrega que esta disciplina es el lenguaje idóneo para expresar la generalidad (1985). Una postura semejante adoptan Butto y Rojano (2004), cuando afirman que el trabajo que hacen los niños con patrones numéricos o figurativos en Logo, los acerca a la construcción de reglas generales prealgebraicas y algebraicas. En el proyecto *Logo Math* (como se cita en Butto, C. & Rojano, T. 2004 p.63), Hoyles y Sutherland (1996) encontraron que los estudiantes usando ejemplos numéricos verbales y programas particulares pueden llegar a construir un programa general en Logo.

En las sesiones cinco, seis y siete del taller con Logo, se animó a las alumnas a elaborar programas generales. Como se asienta en la descripción de esta categoría de respuestas, un programa general puede presentarse en combinación de la Categorías de Programación PD y PM, la única condición es que incluya una o más variables, cuya función en dicho programa sea como si fuera un número general (ver al inicio de este capítulo).

Los propósitos de la sesión cinco fueron que las alumnas aprendieran a representar una variable en un programa, que dedujeran un método matemático general y lo expresaran en Logo y que aprendieran a correr un programa en este lenguaje de programación. A continuación se presentan algunos ejemplos representativos de la Categoría Programa General:

Ursini y Rojano (2005) sostienen que cuando se escribe un programa general se parte de lo particular a lo general y cuando se corre dicho programa se realiza la operación inversa, i.e. se revierte el proceso y se va de lo general hacia lo particular; agregan que este proceso dialéctico sirve al alumno para ir adquiriendo de manera gradual la idea de método general.

En la sesión cinco Tanya, por ejemplo, construyó una tabla de multiplicar para cualquier número (más adelante se muestra el programa que elaboró). En su programa Tanya designó a los números consecutivos del uno al diez como el multiplicador, invariantes para todos los casos y como el elemento variable, el multiplicando, representado por la literal x . Las respuestas dadas por las alumnas en el ítem 5 sugieren que en ejercicios numéricos las alumnas experimentaron menos dificultades para operar una variable, que las que parecieron tener en el ámbito de lo geométrico, ya que con excepción de Ana la totalidad de ellas obtuvieron resultados exitosos en los ítems numéricos, los cuales coinciden con el obtenido por Tanya, como se muestra a continuación en el diagrama 5.10:

PARA TABLA :X	TABLA 4
ESCRIBE :X * 1	4
ESCRIBE :X * 2	8
ESCRIBE :X * 3	12
ESCRIBE :X * 4	16
ESCRIBE :X * 5	20
ESCRIBE :X * 6	24
ESCRIBE :X * 7	28
ESCRIBE :X * 8	32
ESCRIBE :X * 9	36
ESCRIBE :X * 10	40

Diagrama 5.10 Tabla de multiplica de Tanya e la sesión 5-4

Ursini (1993) investigó los diferentes usos de la variable en Logo con alumnos de primer grado de secundaria (11-13 años). Ella experimentó con estos alumnos con programas generales. Con base en los resultados obtenidos, esta investigadora sugiere que los estudiantes de los niveles escolares mencionados pueden trabajar directamente con números generales y llegar a la comprensión gradual de una variable usada como número general y que dicha comprensión paulatinamente les permite alejarse de los ejemplos numéricos (p.43).

Ursini (1993) señala la posibilidad de que el uso de una variable en ambientes de programación Logo, no es garantía de que los alumnos comprendan el significado real de la variable como número general, sino que podría ser visto como un sujetador de espacio al que posteriormente se le puede dar un valor concreto pero no como un elemento abstracto y general.

Las dos afirmaciones anteriores de Ursini—en apariencia opuestas— en realidad no lo son, ya que ella también afirma que cuando se crea un Programa General se está interpretando a la variable como número general, y al correrlo, la variable al tomar un valor específico, el alumno la percibe como una incógnita. Esto pasa para todos los casos en donde se utiliza una variable genérica y se corre el programa.

Este cambio del uso de la variable al de una incógnita se puede observar en el programa de Laura de un hexágono. Ella representó a la variable mediante la palabra LADO en el ítem 6.1 (Ver Diagrama 5.11). Al correr el programa cambió el uso de la variable al de incógnita (independientemente de que ella haya sido o no consciente de lo que estaba realizando).

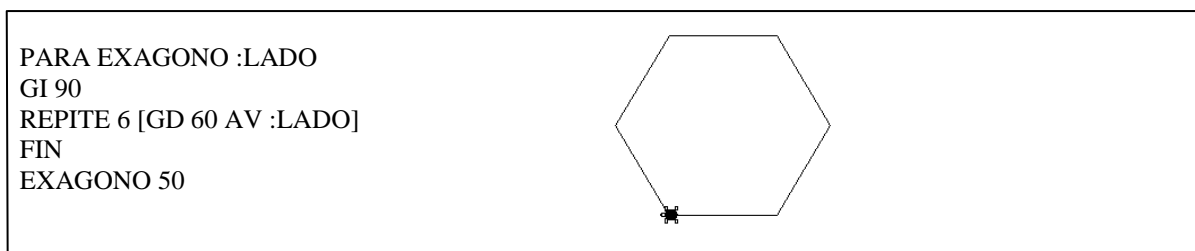


Diagrama 5.11 Producción de Laura en la Sesión 6.1

La condición indispensable para que un programa general en la categoría L4 sea considerado como tal, depende de la presencia de una variable que actúe dentro del programa como número general. Dicha variable se puede aplicar en un PD en la categoría L2, o bien en este mismo programa pero abreviado, también se puede utilizar en un PM (i.e. un programa dentro de otro programa en la categoría L3). Un ejemplo del primero se ilustra a continuación en la respuesta que dio Tanya al ítem 6.2 (TRIÁNGULO). Ver Diagrama 5.12

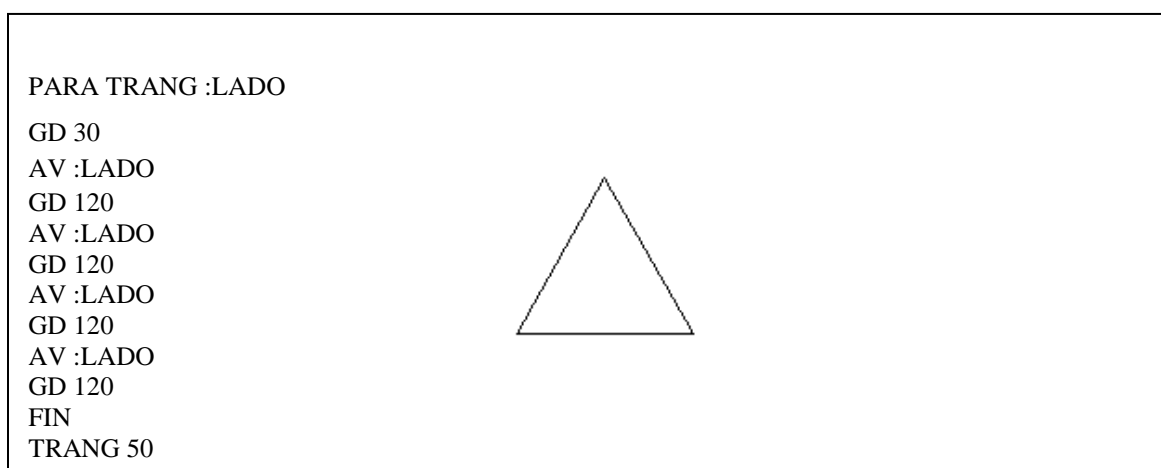


Diagrama 5.12 PG elaborado por Tanya de un triangulo

En el PG de Tanya se observa que ella designó la etiqueta LADO para representar la variable general, enseguida elaboró el programa con Instrucciones Directas de la figura

Triángulo, de esta manera obtuvo un PG asociado a un PD. El programa resultante cumple con las condiciones de ambos programas: con un PD porque se puede repetir en cualquier otro contexto y con un PG ya que tiene la capacidad de producir figuras semejantes en cualquier tamaño que se desee, manteniendo siempre las proporciones de la figura original. Este mismo PD puede ser abreviado con el comando REPITE en la forma como procedió Gema al crear el Programa Directo abreviado el cual se ubica en la categoría L4 ya que hace uso de una variable general para la misma figura del Ítem 6.2 como se aprecia enseguida: (ver Diagrama 5.13)

```

PARA TRIÁNGULO :LADO
GI 90 REPITE 3 [GD 120 AV :LADO]
FIN

```

Diagrama 5.13 Programa abreviado

Los problemas planteados en la sesión seis ofrecieron a las alumnas la oportunidad de poner en práctica la idea de variables contenidas en programas generales. En los ítems 6.1 y 6.2 se plantearon problemas de figuras regulares en los que es posible representar los lados de un polígono por medio de una misma variable; en 6.3 en cambio se solicitó un programa general de una figura irregular. Se trata de un rectángulo en el que la dimensión del lado mayor es múltiplo del lado más corto. La solución del problema requería que las alumnas advirtieran la relación entre los lados de la figura, y expresaran dicha relación mediante una sola variable. No obstante, en las instrucciones del problema únicamente se solicita a las alumnas generar un programa para dibujar cualquier tamaño de rectángulo cuyas dimensiones sean semejantes a las de la figura original. Las dimensiones originales de este rectángulo fueron como se observan a continuación en el diagrama 5.14:

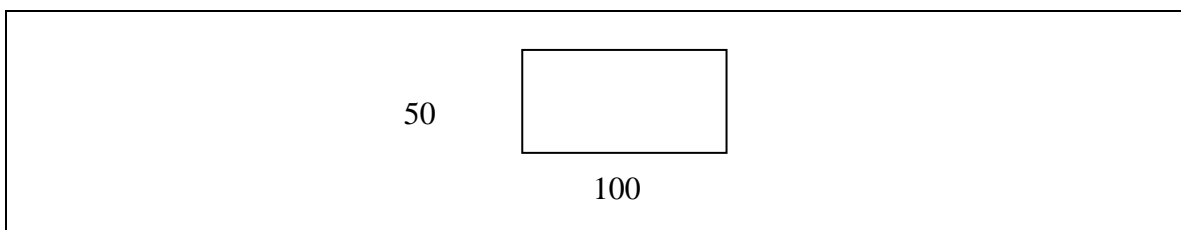


Ilustración 5.14 Dimensiones del rectángulo de la Sesión 6-4

Las alumnas parecieron entender desde el enunciado “realizar un programa para un rectángulo de cualquier tamaño” que se trataba de un Programa General, lo que se deduce del hecho de que todas emplearon variables en lugar de números concretos para establecer las dimensiones del rectángulo. A pesar de esto, ninguno de los programas elaborados por ellas logra conservar las proporciones originales del rectángulo, debido a que en ninguno de los programas se interrelacionaron las dimensiones de los lados del rectángulo mediante una sola variable. Los programas realizados por las alumnas para este ítem fueron de dos tipos. A continuación se describen:

El primer tipo de respuesta consistió en un Programa General inscrito en un Programa Directo. Tanya utilizó la palabra LADO para representar la variable general. Los lados del rectángulo los definió como LADO y LADO + 50. Nótese que las variables así dispuestas no conservarán las mismas proporciones para otra figura de diferente tamaño, debido a que una de las variables está sumada a una constante (50). En el diagrama 5.15 se presenta el programa elaborado por Tanya para el rectángulo del ítem 6.3

```

PARA RECTANG :LADO
AV :LADO
GD 90
AV :LADO + 50
GD 90
AV :LADO
GD 90
AV :LADO +50
FIN

```

Diagrama 5.15 Programa de Tanya de un rectángulo en el ítem 6.3

El otro tipo de respuesta observado para este mismo problema consistió en un Programa General asociado con un Programa Directo abreviado, el cual fue creado por Laura. En este caso ella hizo uso de dos variables para representar los lados del rectángulo, como se muestra en el diagrama 5.16:

```

PARA RECTÁNGULO :L :X
REPITE 2 [AV :L GD 90 AV :X GD 90]
FIN
RECTÁNGULO 60 90

```

Diagrama 5.16 Programa de un rectángulo elaborado por Laura en el ítem 6.3

Como se puede observar en el programa creado por Laura, que para construir un rectángulo semejante al original, ella debe asignar a dichas variables valores específicos y calculados fuera del programa de Logo. Pero en ese caso y con ese programa, se podría interpretar el uso de la variable más como una incógnita que como una variable general. De esto se concluye que el Programa de Laura no se puede catalogar como un Programa General.

La sesión siete contiene una serie de cuatro problemas similares al ítem 6.4 de la sesión anterior [rectángulo]. Estos problemas tienen la intención de que las alumnas afecten a una variable mediante factores o divisores para expresar todas las dimensiones de cada figura mediante una sola variable genérica.

Al igual que en el ítem 6.3 (rectángulo), las respuestas de las alumnas a los problemas del ítem 7 fueron presentadas en dos tipos de programas: Programas General en un PD y Programa General asociado a PM. Asimismo, para representar la variable las alumnas utilizaron una sola variable agregándole un coeficiente para ajustar las dimensiones de la figura, no obstante algunas alumnas como es el caso de Gema, Ana y NoryMar intentaron la figura mediante una variable sin utilizar coeficientes.

Como se puede ver en el diagrama 5.17 Tanya elaboró un Programa General en el que abrevia con el comando REPITE algunos grupos de instrucciones que ella percibió como patrones, es decir ella asoció un PG con un PID.

Un ejemplo de un Programa General en el que se afecta la variable mediante coeficientes, se encuentra en la respuesta de Tanya al ítem 7. 1. (Ver ejemplo en el diagrama 5.17).

PARA ASTRONAUTA :X

ASTRONAUTA 5

```

GI 90
AV :X *3
REPITE 2 [GI 90 AV :X * 2]
GD 90
AV :X * 6
GI 90
AV :X * 2
GI 90
AV :X * 4
SL RE :X * 4
GD 90
BL
AV :X * 2
GI 90
AV :X *6
GD 90
AV :X * 2
GI 90
AV :X * 2
GI 90
AV :X * 3
GD 110
REPITE 4 [AV :X * 2 GI 72]
FIN

```

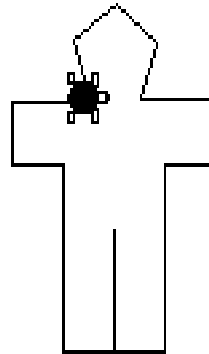


Diagrama 5.17 Programa de Tanya en el Ítem 7.1

A diferencia de ese programa, NoryMar intentó realizar la figura utilizando una variable sin que ésta fuera afectada por coeficientes. Un programa realizado bajo estas condiciones produce una figura con todos sus lados del mismo tamaño. Baja la perspectiva de este trabajo no puede considerarse como programa general, que aunque tiene la posibilidad de reproducirse en diferentes tamaños, no cumple con la condición matemática dada en el problema, i.e., considerar las relaciones existentes entre los lados de la figura inicial. A continuación en el Diagrama 4.18, se muestra el programa de NoryMar y de Ana para el ítem 7.1

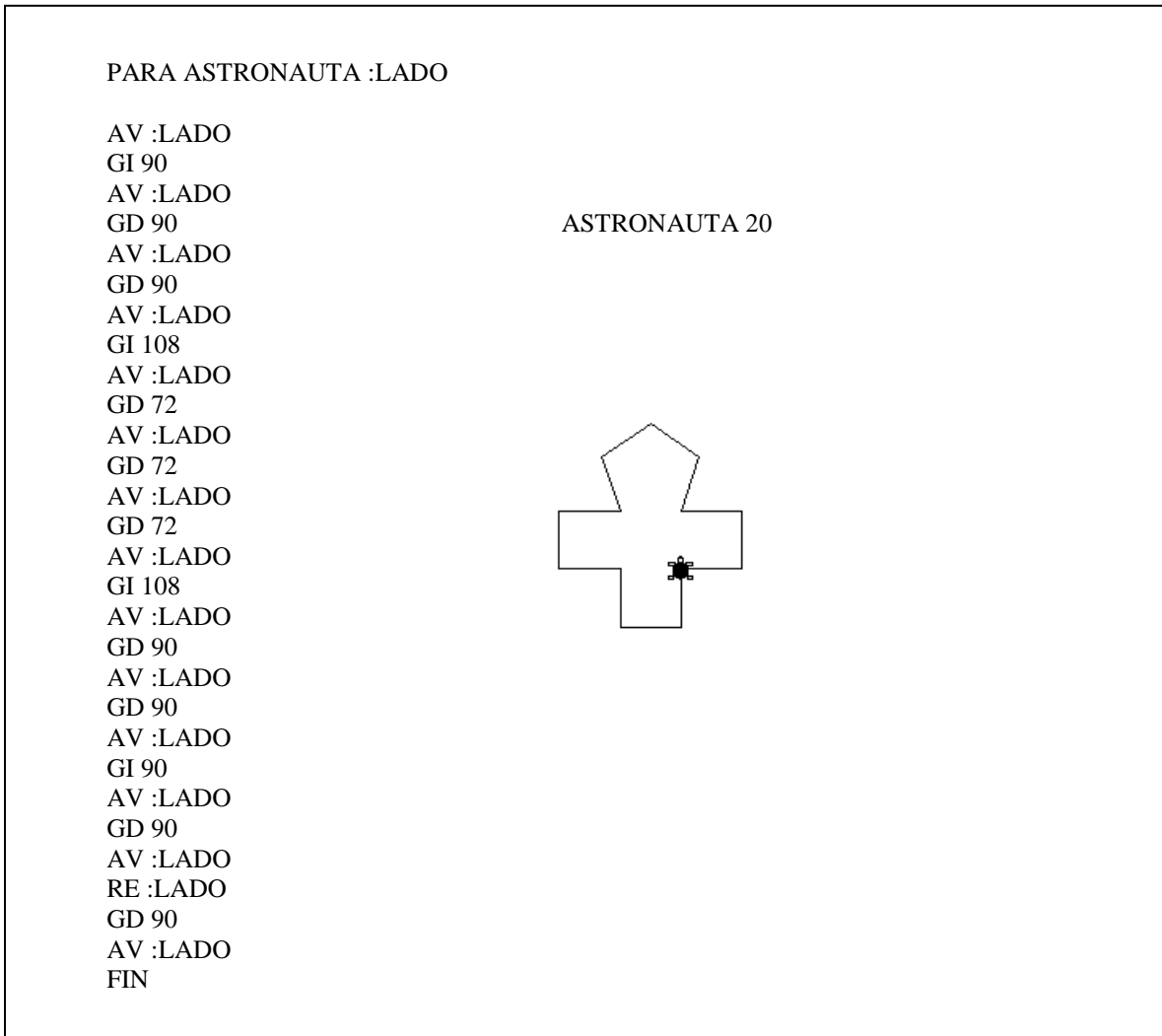


Diagrama 5.18 Programa de NoryMar y Ana en el Ítem 7.1

5.2 Análisis de resultados por sesión en el Taller Logo

En este apartado se hace un análisis de las respuestas dadas por las alumnas, en cada sesión del Taller en Logo. En la Tabla 5.2 se muestra una síntesis de este análisis. Para su construcción se consideraron las categorías de Programación (L0, L1, L2, L3 y L4) descritas anteriormente (ver pg. 78 de este documento)

Indicadores		Sesiones del taller con Logo										TOTAL	
		S3		S4		S5		S6		S7		Nº	%
		Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
A.- Contestan	A/A+B	21	77	42	89	36	100	32	89	29	80	160	94
B.- No contestan	B/A+B	6	33	3	11	-	0	4	11	7	20	10	6
C.- Resp. sin error	C/A	21	100	34	81	29	81	21	66	12	41	117	73
D.- Resp. con error	D/A	-	0	8	19	4	11	11	34	17	59	40	25
E.- Resp. concreta	E/A	-	0	-	0	3	8	-	0	-	0	3	2
G.- L0	G/A	-	0	-	0	-	0	-	0	3	10	3	2
H.- L1	H/A	3	14	20	47	4	11	-	0	-	0	27	17
I.- L2	I/A	12	57	20	47	-	0	-	0	-	0	32	20
J.- L3	J/A	6	29	2	5	-	0	1	3	1	3	10	6
K.- L4	K/A	-	0	-	-	32	89	31	97	25	86	88	55
L.-Sin clasificar	L/A+B	-	0	-	0	-	0	-	0	7	19	10	6

Tabla T 5.2 Resultados obtenidos por las alumnas en el Taller de Logo

En la tabla T 5.2 se destaca el porcentaje logrado por las alumnas en el indicador Respuesta sin error, el cual fue únicamente de 73%, lo que significa que la cuarta parte del total de sus respuestas resultaron con diversos errores; entre éstos están: a) los que se generaron por dificultades en el manejo del software, por ejemplo, errores en el cálculo del ángulo de giro de la tortuga de Logo y b) los que se generaron como resultado de errores matemáticos. Entre estos últimos están, por ejemplo, los errores que cometieron las alumnas al no identificar relaciones aritméticas o geométricas que estaban implicadas en las figuras. Esta última fue una de las principales fuentes de error en las sesiones seis y siete, ya que fueron diseñadas con el grado de dificultad más alto entre los todos los problemas, justo en lo que se refiere a los contenidos matemáticos. De modo que en la sesiones 6 y 7, en las que se incluyeron figuras que implicaban retos matemáticos, por ejemplo, calcular el ángulo de giro en una figura irregular o determinar el avance de la tortuga con algún algoritmo matemático, en estos se aprecia el mayor número de los errores. Lo anterior es notorio en el inciso 4 de la sesión 6, en el que la totalidad de las alumnas fallaron.

Con relación a las Categorías de Programación, los resultados se concentran en la categoría L4 con 55% del total de respuestas en contraste con las categorías bajas L0 y L1 en las que se sumó únicamente 19% del mismo total. Los porcentajes anteriores revelan diferencias

significativas en comparación con los ambientes en LP y serán comentados más adelante en el capítulo 6.

5.2.1 Desempeño de las alumnas en el Taller con Logo.

Tanya

Resolvió todos de los problemas de Taller con Logo; de los problemas resueltos, en el 10% incurrió en algún error. La mayoría de los programas que ella realizó, es decir 80% se ubicaron en los niveles más altos L3 y L4. Desde la sesión 3, Tanya mostró habilidades para generalizar al operar con Logo aunque fuera en forma sencilla; junto con Gema, fueron las únicas alumnas que lograron un programa PM en la categoría L3. Como se

En la sesión tres Tanya percibió que el programa “CUADRO” podía ser repetido para formar nuevas figuras, lo que implica una generalización en el nivel L3. En el Diagrama 5.19 se muestra un segmento de la figura “Torre” creada por Tanya en la sesión 3. Como se observa en este diagrama Tanya exhibe la capacidad de percibir la sucesión de comandos del Programa Directo CUADRO como un proceso etiquetado y no sólo como una forma de guardar un grupo de instrucciones.

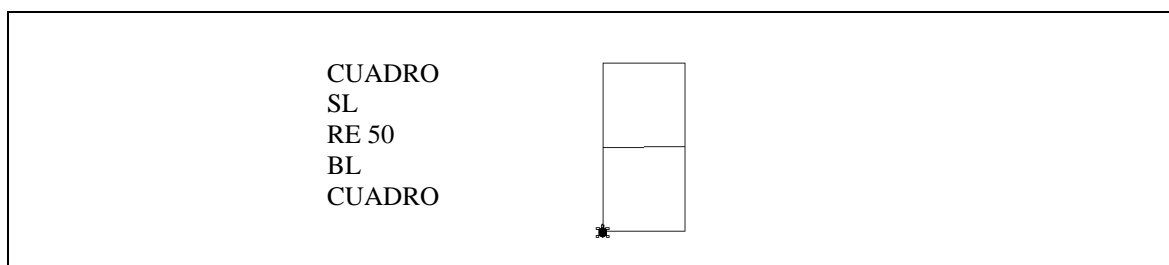


Diagrama 5.19 Producción de Tanya en 3.1

Otra forma utilizada por Tanya para generalizar fue mediante el comando ‘REPITE’. Este caso se presenta por ejemplo en la Sesión 4 para la figura regular “Hexágono”. Ahí ella registró un programa (en este caso con ID) pero al abreviar las instrucciones quedó de la siguiente manera: GD 90 REPITE 6 [AV 50 GI 72].

En la sesión siete Tanya nuevamente se vale de una pauta de Programación PM para completar dos de los cuatro programas propuestos lo que ubica a su respuesta en la categoría L3.

Una de las posibilidades y de las grandes ventajas de Logo para acercar a los alumnos al lenguaje algebraico, se aprecia en el caso de la representación de una variable en una expresión abierta. Tanya elaboró una expresión abierta para realizar un programa en problemas numéricos como el que se muestra en el ítem 5.2. Ahí se pide en el enunciado multiplicar un número cualquiera por su mitad. Tanya registró el programa como se indica enseguida:

```
PARA DOS :X
ESCRIBE (:X *:X/2)
FIN
```

Es evidente que Tanya en el problema recién ilustrado introduce una variable, la cual reconoce como número general en un Programa Directo. Para resolver este ítem ella ve con familiaridad una expresión abierta, además de operar con una sola variable en la expresión $:X * :X/2$. Su respuesta se clasificó en el nivel de generalización L4.

En el ítem 5.4, además de la tabla de multiplicar que se solicita, Tanya propone una regla general con la que las posibilidades de multiplicar se extienden a cualquier número mayor a diez, ver el Diagrama 5.20.

En su primer respuesta, (PARA CUADRO :X), Tanya utiliza como variable genérica :X y como multiplicadores constantes los números del uno al diez, de esta forma ella programa una tabla para un universo finito de diez números. En un segundo programa (PARA TABLA :X :Y) ella utilizó dos variables en un programa, en el que se puede multiplicar cualquier número por cualquier otro, lo que lo hace un procedimiento general. (Ver Diagrama 5.20)

```

    PARA CUATRO :X
    ESCRIBE :X *1
    ESCRIBE :X *2
    ESCRIBE :X *3
    ESCRIBE :X *4
    ESCRIBE :X *5
    ESCRIBE :X *6
    ESCRIBE :X *7
    ESCRIBE :X *8
    ESCRIBE :X *9
    ESCRIBE :X *10
    FIN

    PARA TABLA :X :Y
    ESCRIBE :X*:Y
    FIN
  
```

Diagrama 5.20 PG para una tabla de multiplicar para cualquier número creada por Tanya

Los programas que elaboró Tanya en la sesión seis aportan suficientes evidencias para afirmar que ella cubre completamente las diferentes etapas del circuito de generalización propuesto por Mason. Reconoce un proceso general de manera análoga a un patrón, lo registra en el lenguaje propio de Logo, incorpora una variable y la interpreta como número general. Por estas consideraciones se puede afirmar que ella generaliza en diferentes niveles de abstracción.


Ninguna de las nueve alumnas del estudio pudo resolver el ítem 6.4. Se trata de un rectángulo cuyos lados pueden ser representados por la misma variable, lo que equivale a operar con una variable general y distinguir las relaciones aritméticas que están implicadas en las dimensiones del rectángulo. Tanya no fue la excepción y efectuó el siguiente programa; el lado mayor lo representó con la expresión :LADO + 50. Al incluir una constante el procedimiento no es general (Ver el Diagrama 5.21). Por estas razones se le ubicó en el nivel L2.

```

    PARA RECTANG :LADO
    AV :LADO
    GD 90
    AV :LADO + 50
    GD 90
    AV :LADO
    GD 90
    AV :LADO + 50
    GD 90
    FIN
  
```

FIGURA ORIGINAL

100



50

Diagrama 5.21 Programa General de Tanya para un rectángulo en el ítem 6.4 (Rectángulo)

Un obstáculo que tuvieron de manera recurrente las alumnas para lograr los programas de las figuras geométricas propuestas, fueron, entre otros, los ángulos de giro de la tortuga. Este aspecto fue superado para las figuras regulares mediante una regla indicada en las hojas de trabajo.

Finalmente, en la sesión siete, Tanya percibió los patrones generados por la repetición de regularidades dentro de los programas directos, es decir en un primer momento ella eligió la variable x , la cual interpreta como un número general y luego la opera para diferentes dimensiones como múltiplos de $:x$. Lo anterior implica una interpretación de una variable como un número que puede tomar cualquier valor. Además ella ahí reconoció las propiedades matemáticas de las figuras en las dimensiones de los lados. En un segundo momento, a partir de las instrucciones directas ella fue la única en reconocer grupos de comandos que se repiten y los abrevia dentro del propio programa. (Ver diagrama 5.22)

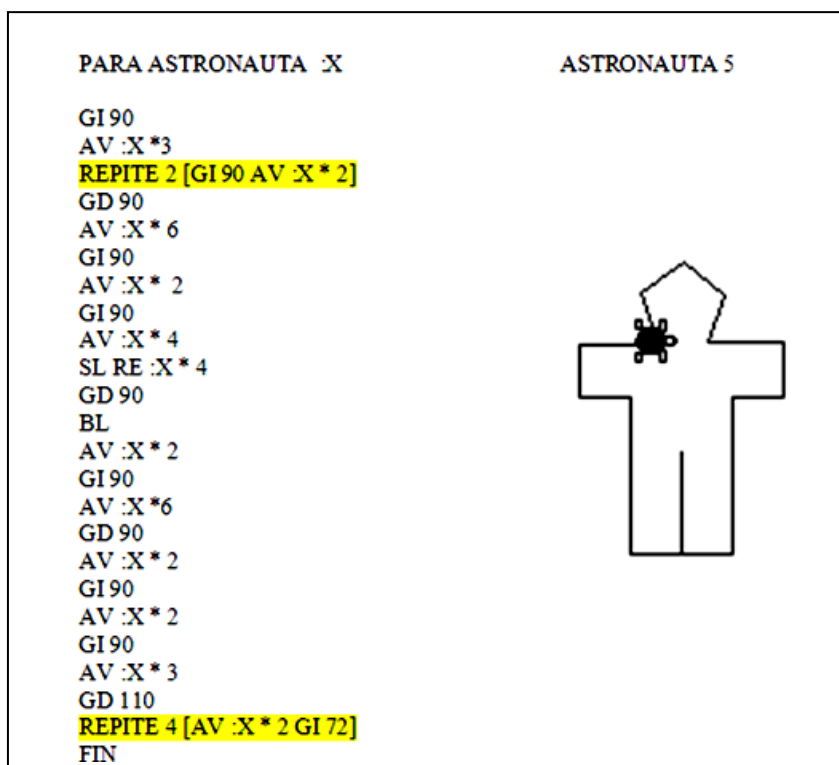


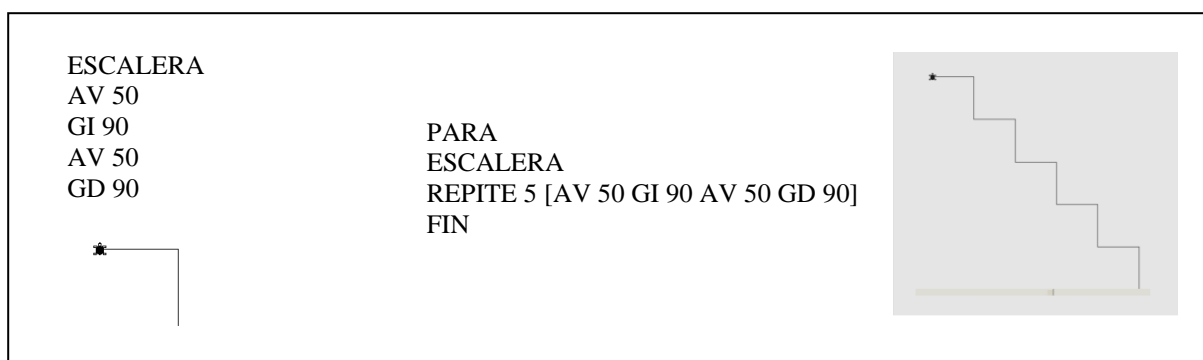
Diagrama 5.22 Programa de Tanya en la sesión 7 ítem 2:

Como conclusión se puede decir que en la mayoría de los programas elaborados por Tanya, ella procede conforme a procesos sucesivos de generalización. En un primer nivel, ella abrevia un grupo de comandos que se repiten en la sucesión de instrucciones de una figura (en los casos en los que fue posible), como por ejemplo cuando en el ejercicio que aparece en el Diagrama 58, ella define ‘Cuadro’. Pero ahí mismo se puede percibir cómo ella parte de ese nivel de generalización para tomar el programa ‘Cuadro’ como un patrón que aplica para generar otra figura, en ese caso, una torre.

Gema

La mayoría de las respuestas de Gema en el Taller con Logo se ubican dentro de las categorías bajas L1 y L2 ya que cerca de la mitad de estas fueron logradas mediante programas ID y PD que corresponde a dichas categorías respectivamente, sin embargo, también se observaron avances en el uso de una variable en un PG en la categoría L4; lo que sugiere una evolución favorable en procesos de generalización en este contexto virtual.

Ella resolvió la totalidad de los reactivos, 25 % de los cuales fueron con error. En el ítem 4.1 a pesar de que Gema logró crear un programa de una sección de la escalera, no advierte que con esta serie de comandos puede etiquetar un programa en un PD y con éste reproducirlo iterativamente hasta formar la figura solicitada. En el Diagrama 5.23 se presenta el programa que realizó Gema en el ítem 4.1 “Escalera”



Para realizar el programa de una escalera en una primera tentativa, Gema reproduce un escalón con instrucciones directas en la Pauta ID. Posteriormente, en lugar de etiquetar la serie de instrucciones que había registrado en un programa PD para utilizarlo en otro

programa, Gema realizó un programa abreviado, pero registró la totalidad de las instrucciones del escalón en una Pauta ID. Así en lugar de obtener un Programa Modular en la categoría L3, únicamente logra un programa PD en el nivel L2. La Categoría de programación PM aludida incluiría un programa como el que se sugiere enseguida:

```
PARA ESCALERA  
REPITE 5 [ESCALÓN]  
FIN
```

En la sesión cuatro Gema permaneció en el mismo nivel L2 de generalización mostrado en la sesión anterior. Como ya se sugirió el hecho de que una alumna domine determinada estrategia de Programación, no significa que en problemas similares aplique estas mismas estrategias para resolverlos, antes bien, la elección del tipo de programa parecen estar siendo inducida por el tipo problema y su planteamiento. Sin embargo, Gema durante el Taller con Logo, no logró construir un PM. Lo anterior hace evidente que Gema no percibe un grupo de comandos etiquetados con un nombre como un proceso que puede utilizarse para construir otros programas y por consiguiente no está percibiendo a un PD como un patrón y por tanto, ella no está generalizando este patrón para formar un PM.

En cambio en la sesión cinco Gema mostró mayor habilidad para elaborar programas en un ambiente numérico. En esta sesión resolvió todos los incisos mediante PD, en los que además incluyó una variable general, por lo que hizo que sus respuestas en este ítem fueran ubicadas en la categoría L4. Admitió expresiones abiertas del tipo $(:X - 10)/100$ como respuestas, lo que sugiere un desarrollo hacia el álgebra. En sus programas se aprecian símbolos propios del álgebra, como lo es el uso innecesario de paréntesis los cuales no corresponde precisamente al lenguaje de programación de Logo, más bien, son propios de un sistema algebraico. Esto parece sugerir que ella transfirió las reglas sintácticas de un lenguaje a otro.

En la sesión seis con ejercicios figurativos, se pueden apreciar progresos de Gema en la elaboración de Programas Generales. En un principio utilizó la palabra “lado” para representar la variable, al final de esta sesión lo hizo con la literal “:L” lo que parece

insinuar que pasa de un lenguaje natural a un lenguaje más abstracto, propio de la sintaxis del álgebra.

Gema en la sesión seis mostró tener la habilidad para generalizar con programas abreviados; sin embargo, no logró tener conciencia plena del significado de una variable genérica cuando la utiliza en un programa. Por ejemplo, en el problema del rectángulo en el ítem 6.4, Gema resolvió la diferencia en la magnitud de los lados agregando una constante a la variable (de la misma manera como lo hizo Tanya en el mismo problema, ver Diagrama 5.10).

Finalmente en la sesión siete, Gema exhibe nuevamente resultados mixtos. Si bien se observaron avances como el de incorporar una variable genérica a sus programas, dichos programas los realizó por medio de ID. Esta Pauta de Programación fue catalogada en el nivel L1 de generalización con Logo. En dichos programas Gema no pudo detectar algunas regularidades, mismas que implicaban patrones, por lo que se infiere que no generalizó.

Las dificultades para operar con una variable mostradas por Gema en la sesión 6 y en el primer reactivo de la sesión 7 ya no se observaron en los últimos tres problemas de esta sesión. En la sesión siete concretó tres de cuatro programas de manera exitosa utilizando una sola variable para representar todas las dimensiones en cada figura, lo que sugiere que Gema logró mejorar sus habilidades en procesos de generalización con Logo, en particular en lo que se refiere a operar de una variable genérica en un programa.

Lina

No asistió a la sesión tres, por lo que el análisis de trabajo de Lina parte de la sesión cuatro. Las respuestas de Lina en la sesión cuatro se ubican en la Pauta PD en la categoría L2, generalizó y abrevió las instrucciones en cuatro de cinco programas. En sus respuestas Lina manifiesta un potencial para percibir regularidades en las instrucciones para formar un PD abreviando las instrucciones que se repiten i.e. reconoce patrones y los registra de manera formal en Logo. Desde las primeras figuras ella generalizó con programas etiquetados. En el primer ítem de la sesión cuatro el cual trata sobre un triángulo equilátero, Lina realizó la figura con instrucciones directas (ID en la categoría L1) de manera exitosa como se muestra en el Diagrama 5.24.

<i>PROGRAMA DIRECTO</i>	<i>PROGRAMA ABREVIADO</i>
TRIANGULO	PARA TRIANGULO
Gd 30	REPITE 3[GD 30 AV 60 REPITE 2[GD 120
Av 60	AV 60] GD 90]
Gd 120	FIN
Av 60	
Gd 120	
Av 60	

Diagrama 5.24 Producción de Lina en la sesión 4.1

Enseguida creó un PD abreviado (i.e. un programa al que le es asignado un nombre con el que puede ser reproducido de manera directa en cualquier otro contexto sin registrar todas las instrucciones) con el que Lina produjo la figura solicitada, por lo que se podría pensar que ella llevó a cabo procedimientos de generalización. No obstante, su programa repite tres triángulos superpuestos de manera innecesaria, lo cual es sin duda un error. Es difícil asegurar que dichos errores se deban a su desconocimiento en el manejo del software; el resultado sugiere que la causa de tales errores pudo más bien deberse a que Lina se enfocó en el resultado y no reflexionó en los procesos ni procedimientos geométricos y aritméticos que estaba aplicando. Por tanto, se puede afirmar que no es propiamente una generalización. Por otra parte, Lina no logró resolver el problema de la figura 4.5 el cual dejó sin contestar.

Durante el taller Lina mostró avances significativos al registrar una regularidad en un programa con el comando REPITE en lenguaje Logo.

Se puede asegurar que reconoce como algo familiar las expresiones abiertas en un ambiente numérico de tipo $:X * :X/2$ así como la inclusión de una variable en un procedimiento general. Por sus respuestas se infiere que ella reconoce la función de esta variable como un número general.

Lina generaliza y reconoce procesos en los programas PD. En la sesión siete utilizó una literal para representar a la variable, opera con esta variable las distintas magnitudes en el programa, lo que muestra que puede operar con dicha variable. Aun requiere desarrollar sensibilidad para percibir las regularidades en los programas directos, así como focalizarse

en la estructura de los programas para distinguirlas. No obstante, reconoce un grupo de comandos como un proceso que la variable hace que sea general. Lo anterior se puede verificar en el siguiente problema de la sesión siete, que aparece en el Diagrama 5.25

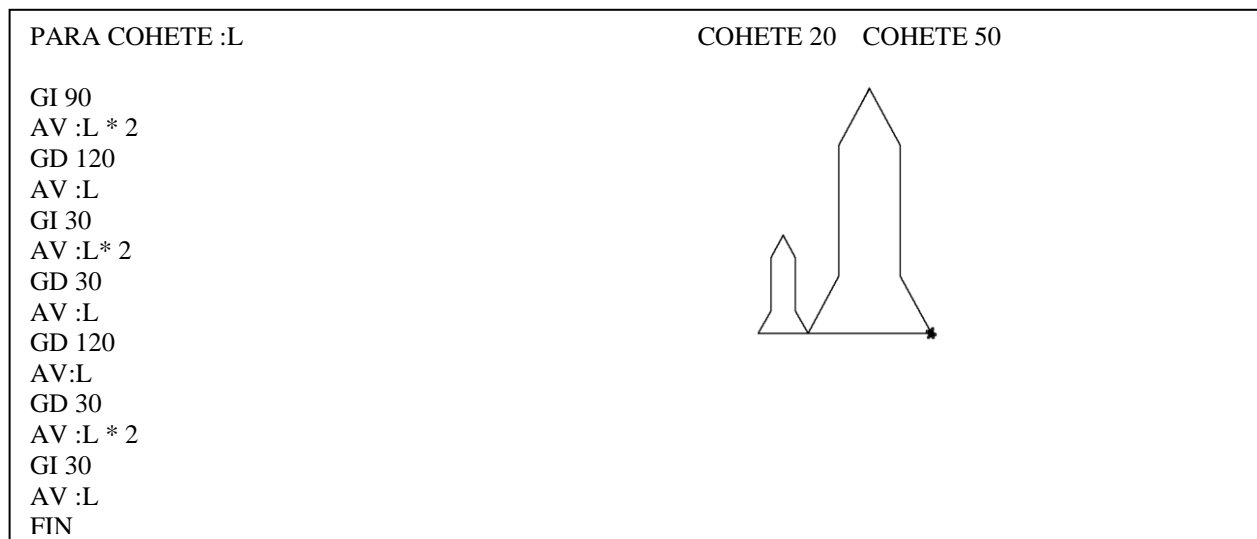


Diagrama 5.25 Producción de Lina en el Ítem 1 de la sesión 7

La comprobación que realiza Lina en dos dimensiones de la figura Cohete, sugiere que Lina está reconociendo al programa etiquetado COHETE como un proceso general que puede crear la misma figura en cualquier tamaño. Las dificultades que surgen en la creación de programas generales con polígonos irregulares parecen ser responsables de que Lina solo contestara tres de cuatro figuras y dos de las tres que contestó, lo hiciera con error en el diseño del programa.

Si bien Lina mejoró sus expresiones de la generalidad en Logo, en esta última etapa del Taller con Logo aún comete algunos errores en la elaboración de las figuras. Sin embargo estos errores se deben a la falta de otras habilidades, específicamente, de habilidades y conocimientos matemáticos como el cálculo de los ángulos de giro de la tortuga, o de las proporciones en las dimensiones, cuando ella opera una sola variable. En la siguiente figura creada por Lina en la sesión siete problema 3, se muestran los errores cometidos por Lina en el diseño de la figura “Nave”, misma que no pudo terminar por la desproporción en las dimensiones que ella utilizó (Ver diagrama 5.26)

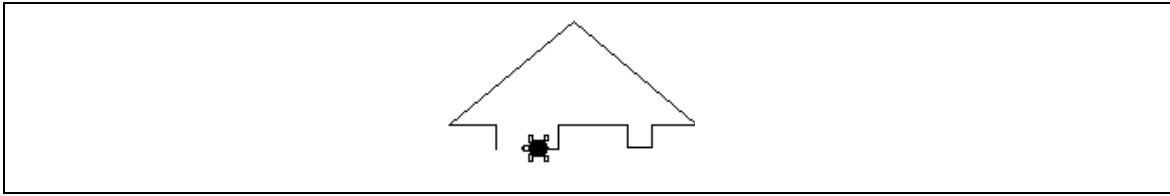


Diagrama 5.26 Producción de Lina en sesión 7-3

Ana

En las respuestas de Ana en la sesión tres se observa que aun no ha logrado el conocimiento suficiente del significado de las primitivas para producir las figuras propuestas. De cuatro problemas planteados en esta sesión, resolvió únicamente 2; sin embargo, en los programas que formuló se observa que reconoce un PD como un proceso, que en sí mismo simboliza un patrón que bajo determinadas condiciones de un problema puede inducir una generalización. Un ejemplo de lo anterior se observa en el programa de una escalera en que a partir una serie de comandos registrados de manera directa forma una figura pero abreviada con el comando REPITE, lo que contiene implica programas directos PD en la Categoría L2 (ver diagrama 5.27).

```

    PARA ESCALERA
    REPITE 4[AV 50 GD 90 AV 50 GI 90]
    FIN
  
```

Diagrama 5.27 Programa de Ana de una escalera del ítem 4.1

Ana resolvió los primeros tres problemas de la sesión cuatro en la Pauta ID. A pesar de que las figuras eran regulares y de alguna manera inducían hacia programas abreviados, Ana parece enfocar su atención en el resultado perdiendo de vista la estructura del programa, no percibe la repetición de grupos de instrucciones, no hizo caso a la forma regular del polígono y se concretó a obtener un resultado aproximado (ver Diagrama 5.28)

Programa de un triángulo equilátero

```

      GD 90
      AV 100
      GI 135
      AV 70
      GI 90
      AV 70
    
```

Diagrama 5.28 Programa de un triángulo equilátero producido por Ana en la sesión 6

En la sesión 4 Ana presenta resultados mixtos. En primer lugar, emplea la categoría ID en problemas diseñados para el siguiente nivel PD; en contraste, sus respuestas sugieren que posee la habilidad necesaria para escribir programas en la categoría PM i.e. percibir un proceso general y utilizarlo dentro de otro programa para formar una nueva figura, como se aprecia en el siguiente programa:

```

PARA BANDERA
REPITE 4 [AV 100 GD 90 AV 50 GD 90 AV 30 GD 90 AV 50 GD 90 RE 70 GD 45]
FIN
  
```

Otro resultado que muestra el proceso seguido por Ana en la sesión tres reactivo 3, muestra otro nivel diferente de programación, a través del cual ella no llega a la figura propuesta sino que acepta como producto final una figura diferente que no obedecía a las condiciones del problema. Por esto su resolución se ha ubicado en la categoría L0 (ver Diagrama 5.29)

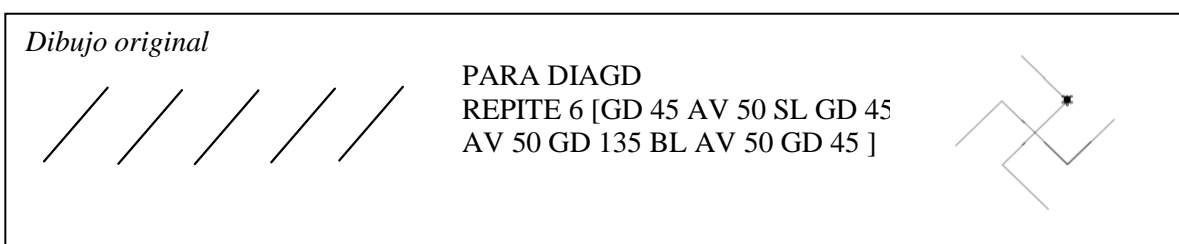


Diagrama 5.29 Programa de Ana de Líneas Paralelas Diagonales

En un ambiente numérico, Ana hace evidente su tendencia a lo aritmético, no muestra comprensión de una variable ni de signos algebraicos. Resolvió con números concretos los problemas planteados en la sesión 5, utilizando el software como una calculadora. En el Diagrama 5.30 se ilustra la forma en que resolvió el problema 1.

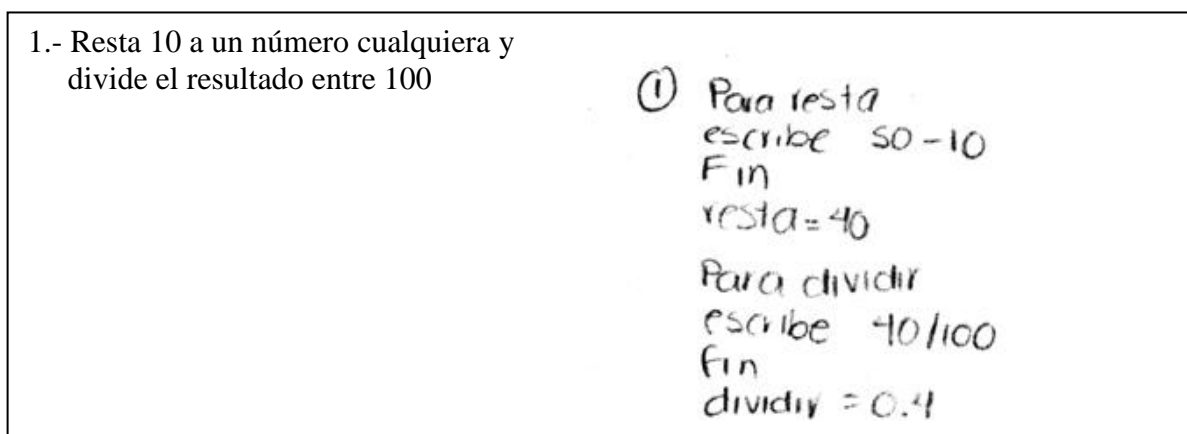


Diagrama 5.30 Ana en la sesión 5.1 Secuencias numéricas

La respuesta de Ana en este caso actúa como un algoritmo para realizar una resta de dos números concretos. De esta manera, las posibilidades de Logo se ven limitadas a las de una calculadora en un problema aritmético, aun y cuando la alumna intentó un PD.

En la sesión seis, Ana no abrevió más que en uno de los cuatro programas a pesar de que resolvió los ejercicios mediante un programa PD; esto sugiere que ella aun no ha desarrollado su sensibilidad para percibir los patrones en las instrucciones que componen una figura. No obstante, al igual que en la sesión 4, los programas de Ana implican ideas algebraicas como por ejemplo, reconocer un proceso general o interpretar una variable como número general. Sin embargo, ella no logró operar con una sola variable diferentes dimensiones de una figura. Por lo tanto, se puede decir que en la sesión 6 su desempeño fue heterogéneo, la habilidad mostrada en un ejercicio no se repite en el siguiente, aun tratándose de problemas similares. En la figura Hexágono por ejemplo abrevió las instrucciones y en las demás figuras lo hizo con instrucciones directas. Al igual que todas sus compañeras Ana no se percató de que los lados del rectángulo se podía representar con la misma variable, operándola con un coeficiente i.e. Ana representó el lado mayor del rectángulo con la expresión :Lado +50 en lugar de :LADO * 2.

En la sesión siete no se observaron progresos, Ana manifestó las mismas carencias que había mostrado en sesiones anteriores. Resolvió de manera inconsistente tres de los cuatro problemas solicitados, con errores que no le permitieron concretar ninguna de las figuras solicitadas. No elaboró ningún programa abreviado y las figuras logradas fueron irregulares. De lo anterior se concluye que Ana fue de las alumnas de más bajo rendimiento en el Taller con Logo.

Aída

En la sesión tres, Aída parece comprender un programa en la categoría PD como un proceso del que puede hacer uso para generar nuevos programas. Sin embargo, no fue así, en una primera aproximación Aída creó un programa PD en la categoría L2, denominado 'GRECA' del este programa tomó las instrucciones directas para formar un programa abreviado pero con ID en la categoría L1 (Diagrama 5.31)

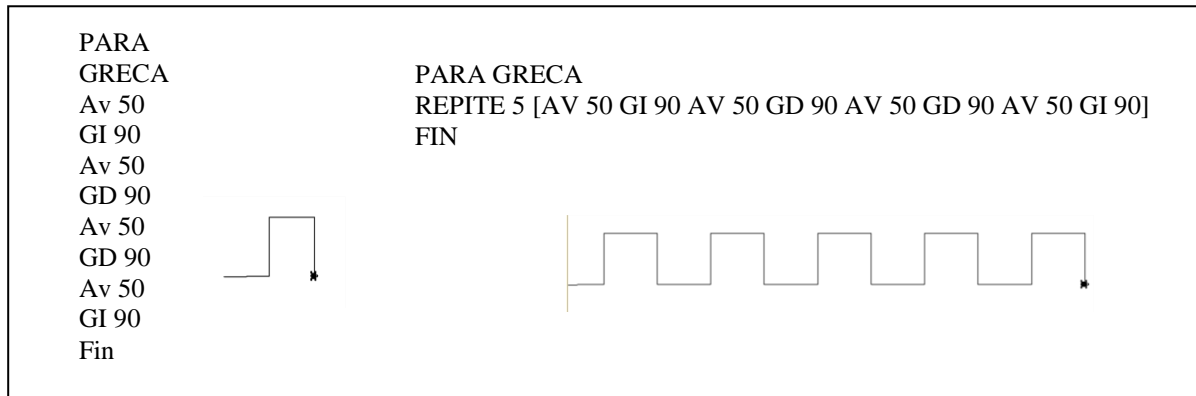


Diagrama 5.31 PD y ID abreviado de la figura GRECA realizada por Aida en la Sesión 3

En la sesión cuatro Aída resolvió exitosamente todos los ítems. No obstante y a pesar de haber producido las figuras esperadas, se puede observar que en esta sesión ella experimentó un retroceso en el nivel de Programación ya que en la sesión tres sus respuestas corresponden a la categoría L2 y en esta sesión cuatro, sus programas se ubicaron en la categoría L1. Únicamente en el último reactivo de la sesión cuatro Aida elaboró un programa PD correspondiente a la categoría L2.

En la sesión cinco Aida superó las dificultades y resolvió correctamente los cuatro reactivos. Aceptó como familiares las expresiones abiertas, incorporó una variable genérica y operó con la misma variable para diferentes valores.

Al igual que el resto de sus compañeras, Aída en la sesión seis resolvió el problema del rectángulo sin resolver las proporciones; lo anterior se entiende como una carencia en los procedimientos matemáticos para manipular una variable. Los resultados en el resto de los ítems fueron correctos, lo que significa que ha desarrollado sus habilidades para generalizar desde la interpretación de patrones hasta la operación de lo general (en este caso operar la variable). Interpreta una variable como número general y lo representa; primero con la palabra “LADO” y finalmente con una “L” lo que denota un avance en la forma de simbolizar la variable en los programas. (Ver Gema en el mismo problema).

En lenguaje de programación Logo, se puede representar una variable por medio de alguna palabra que tenga un significado próximo al objeto que trata de simbolizar e.g. :Lado. En

la sesión siete Aída manifiesta cierto avance en su capacidad de expresión al designar una literal “M” para elaborar los programas generales como se observa en el siguiente ejemplo:

```

PARA COHETE :M
GI 90
AV :M
REPITE 1 [ GD 120(AV :M / 2) GI 30 AV :M GD 30 (AV :M / 2) GD 120 (AV :M / 2) GD 30
AV :M GI 30 (AV :M / 2) ]
FIN

```

En la forma en la que está escrito, el programa anterior no produce ninguna figura en Logo; sin embargo, estas mismas instrucciones directas son correctas (como se puede apreciar en la Diagrama 5.32). Lo anterior sugiere que no verificó su programa (i.e. no lo corrió).

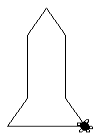
<pre> PARA COHETE :X GI 90 AV :X GD 120 AV :X / 2 GI 30 AV :X GD 30 AV :X / 2 GD 120 AV :X / 2 GD 30 AV :X GI 30 AV :X / 2 FIN </pre>	
---	---

Diagrama 5.32 Programa de un cohete realizado por Aída en 7.1

Si bien Aida ha integrado una variable genérica a un programa PD al registrarlo en lenguaje Logo en el primer ejemplo ella ha tratado de construir un programa como si fuera una ecuación algebraica, Logo no reconoció este lenguaje. De lo anterior se deduce que primero formuló un programa con instrucciones directas y al intentar un programa abreviado con la primitiva “REPITE”, sustituyó la sintaxis del lenguaje de programación de Logo por la del Algebra. A pesar de que Aida equivocó el programa PD abreviado, el programa con instrucciones directas es correcto, además, reconoció una variable genérica como un elemento que puede asumir cualquier valor en un Programa General y operó con la variable al modificar su magnitud mediante coeficientes lo que la ubica en la categoría L4.

Laura

Laura al igual que Lina no asistieron a la sesión tres por lo que el análisis del taller Logo se inicia en la sesión cuatro.

En la sesión cuatro, Laura elaboró programas directos (PD abreviados) a partir de las instrucciones directas con la aplicación del comando “REPITE”. Estos programas

conlleven implícitamente una generalización. Ella interpretó un programa directo como patrón; la generalización en este caso es realizada de manera simbólica, a pesar de que el ejercicio es gráfico. Incluso en esta Sesión cuatro Laura logró un PDI en la categoría L3 para el programa BANDERA como se ilustra a continuación:

En un primer programa define la figura BANDERA con el siguiente PD ver Diagrama 5.33

```
PARA BANDERA
REPITE 1 [AV 80 REPITE 3[GD 90 AV 40] GD 90 RE 40]
FIN
```

Diagrama 5.33 Programa de Laura de la figura bandera en la Sesión cuatro

Enseguida utiliza el programa BANDERA para construir un nuevo programa en la categoría PM (un programa modular el cual crea la figura a partir de la iteración de un PD) pero en un programa abreviado:

```
REPITE 3[GD 45 BANDERA]
```

Laura al igual que las demás alumnas con excepción de Ana, alcanzaron durante el taller la Categoría de Programación L4 (PG). Laura no muestra dificultad en resolver los reactivos de la sesión cinco en un ambiente numérico, reconoce expresiones abiertas como respuesta, incluye una variable genérica en un programa PD y opera con una sola variable para diferentes valores.

En la sesión seis Laura muestra con sus respuestas que ha logrado un programa general. En el ejercicio de un rectángulo utilizó dos variables independientes sin tomar en consideración que el lado mayor del rectángulo guardaba una relación en proporción una a dos con el lado menor, y que por lo tanto, podía usar una sola variable y que al operarla guardaría dicha relación. Se puede afirmar que no percibió esta relación y por lo tanto utilizó dos variables generales para resolver el problema.

Al final del Taller, en la sesión siete se advierten progresos importantes en la simbolización de lo general en un programa de Logo en ejercicios figurativos aunque sólo resolvió dos de los cuatro problemas propuestos. En ellos Laura operó la variable, la representó con la literal “L” y para otra magnitud utilizó “L/2”. En el diagrama 5.34 se muestra un ejemplo de lo producido por Laura en la sesión siete del Taller con Logo:

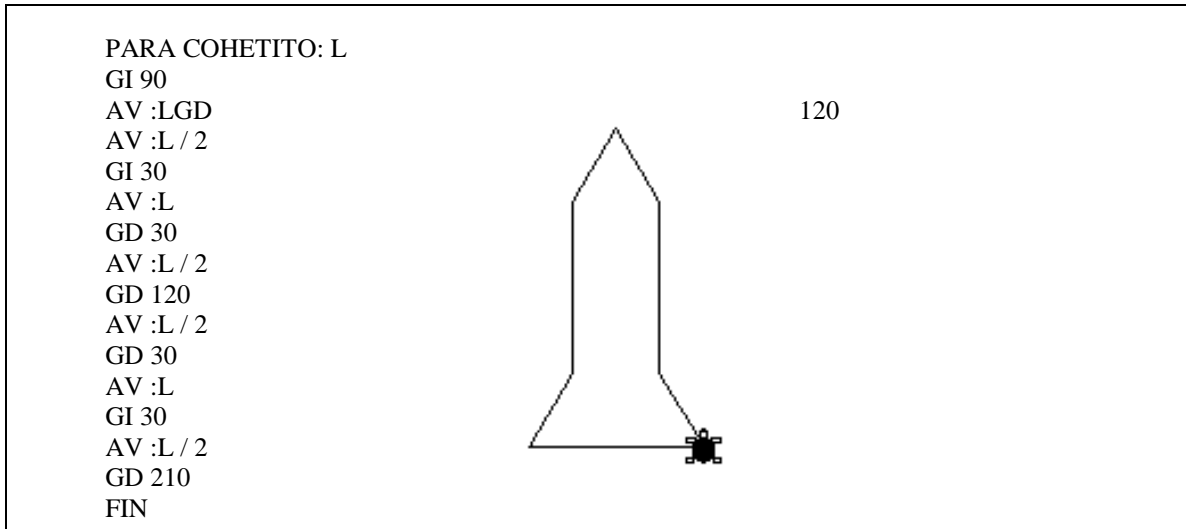


Diagrama 5.34 Producción de Laura en 7.1

Yola

En las respuestas de la sesión tres se puede observar el proceso mediante el cual Yola realiza una generalización con instrucciones directas, el cual se cataloga en la categoría L1. En el primer ítem fue necesario para ella elaborar primero el programa con ID de la figura en cuestión, enseguida identificó de manera visual los patrones sobre las instrucciones en el programa, y los abrevió en el mismo pero con el comando REPITE. En el siguiente ejemplo de la sesión 4 se aprecia la manera en que Yola elabora un programa y cómo logra percibir en las instrucciones una patrón; así, ella produce un programa mediante el comando “REPITE”. Un programa realizado de esta manera implica una generalización. En el Diagrama 5.35 se puede distinguir el proceso anterior efectuado por Yola:

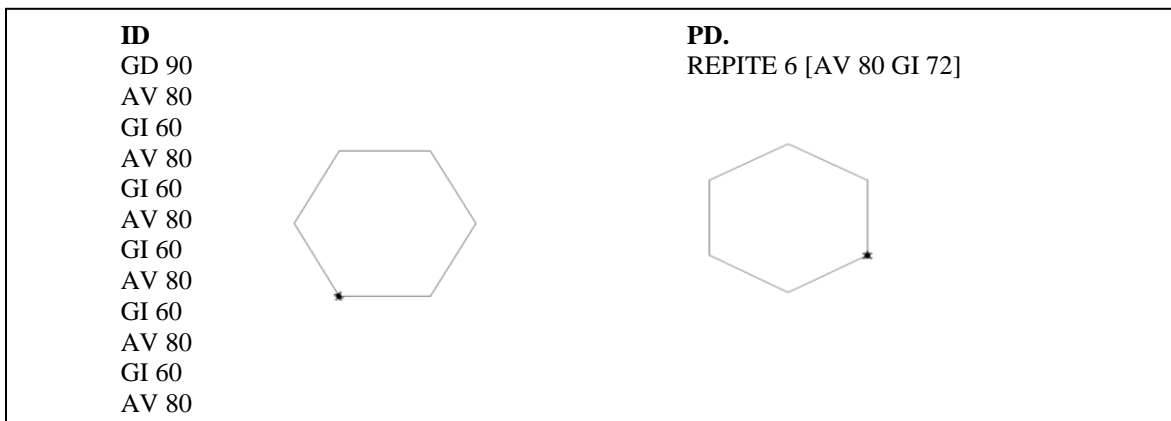


Diagrama 5.35 Programa de Yola con ID abreviado de un HEXÁGONO en la sesión 4

En los ejercicios numéricos de la sesión, Yola no parece tener ninguna dificultad para resolver con éxito los problemas planteados, esta afirmación es válida para todas las implicaciones que esta sesión conlleva; número general, expresiones abiertas y operación de la variable.

Los resultados de Yola en la sesión seis fueron heterogéneos. En el primer problema definió la figura con un PD abreviado, que se ubica en la categoría L2; para los problemas restantes, ella se valió de PD sin abreviar, i.e. mediante programas etiquetados pero con la totalidad de las instrucciones necesarias para conformar cada figura. Si bien Yola, por una parte, resolvió los ejercicios correctamente, ella interpretó una variable como número general lo que implica percibir un programa general; por otra parte, no percibió las regularidades en los programas directos y quizás por esta razón no elaboró programas abreviados, ni operó con una sola variable las diferentes dimensiones. Lo anterior se puede observar en el problema del rectángulo en el que ella utilizó una constante para uno de los lados de la figura y por consiguiente, no es un programa general.

En la sesión siete, Yola trabajó en pareja con Ana, por lo que para conocer los resultados debe remitirse al análisis de esta última alumna.

NoryMar

NoryMar exhiben el rendimiento más bajo con relación al resto de las alumnas observadas. 65% del total de los programas que ellas crearon en el taller con Logo contienen errores de diferente índole. Estos errores se observan a partir de la sesión tres y pueden ser atribuidos por una parte al manejo del software, sin embargo, éstos parecen estar relacionadas en mayor medida con carencias en los conocimientos en geometría de NoryMar. No obstante lo anterior, es importante señalar que a pesar de esta limitación ellas contestaron la totalidad de los reactivos planteados en el Taller.

Las carencias de NoryMar, antes mencionadas, no se subsanaron con la aplicación del Taller con Logo, lo que sugiere que los ejercicios que ellas realizaron con este software no les aportaron los conocimientos necesarios para resolver los reactivos propuestos, en especial si dichos ejercicios los realizaron de manera autónoma sin la intervención de algún maestro o investigador.

En sus respuestas de la sesión tres se observa que NoryMar percibieron patrones en las instrucciones de los programas directos, y los abreviaron sin llegar a concretar un PD, sin embargo, en esta sesión generalizaron en la forma más sencilla y registraron un patrón en el lenguaje formal de Logo.

En los programas en la sesión cuatro NoryMar muestran que aplicaron una estrategia de cálculo por aproximación para determinar las magnitudes de los ángulos de giro de la Tortuga, este cálculo evidentemente se derivó de un proceso de ensayo y error, lo que origino resultados incorrectos. En el diagrama 5.36 se presenta el programa de un pentágono realizado por NoryMar en esta sesión:

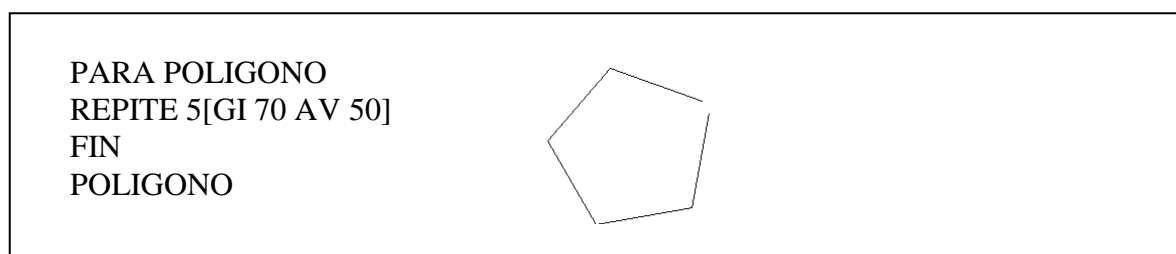


Diagrama 5.36 Programa Pentágono por NoryMar

El error de NoryMar, como se observa en la figura, surge del cálculo en el ángulo de giro, el cual ellas determinaron en 70° cuando debería ser de 72° lo que sugiere que ellas determinaron el ángulo haciendo aproximaciones.

En el problema 4 de una Bandera o Aspa en la sesión cuatro, NoryMar junto con Lina lograron hacer un programa PD abreviado en la categoría L2.

NoryMar en la sesión cinco aceptan como respuestas expresiones abiertas además de incluir en sus programas una variable general, sin embargo ellas no lograron elaborar un programa de una tabla de multiplicar, la cual únicamente registraron como un programa general para multiplicar cualquier número por dos, como se ilustra en el diagrama 5.37.

```
Para tabla :n
Escribe :n x 2
fin
```

Diagrama 5.37 PG para multiplicar cualquier número por dos

Las respuestas de NoryMar en la sesión seis, en programas con polígonos regulares, sugieren un retroceso, ya que con excepción del primer ítem de la sesión, los otros tres ítems los resolvieron con instrucciones directas ID, desde luego que al incluir una variable genérica en su programa el ítem fue calificado la categoría L4. Lo anterior puede significar que no han desarrollado la suficiente sensibilidad para percibir los patrones en los grupos de instrucciones que se repiten en un programa. Como la mayoría de sus compañeras, su respuesta para el problema del rectángulo, ellas definieron la variable agregando a ésta una constante para representar uno de los lados, lo que las llevó a un programa de un rectángulo pero que no fue general.

Finalmente, en la sesión siete, a pesar de que desde la sesión cuatro ya habían producido PD, en esta sesión no lograron más que uno de cuatro posibles. Los resultados no muestran cambios significativos con relación a su dominio de la geometría, ya que la totalidad de las figuras conseguidas fueron incompletas y con errores además de que los programas los realizaron con ID. Si bien, reconocen un programa general, lo que implica habilidades para generalizar, no perciben las regularidades en las instrucciones del programa, lo que podría dar lugar otro tipo de generalizaciones. Como ya se dijo, ellas exhiben algunas limitaciones para operar con las variables lo que les impidió que completaran las figuras propuestas. Un ejemplo que muestra sus dificultades para trabajar con una sola variable y posiblemente con el dominio del software se ilustra en el Diagrama 5.38 correspondiente a la sesión siete :

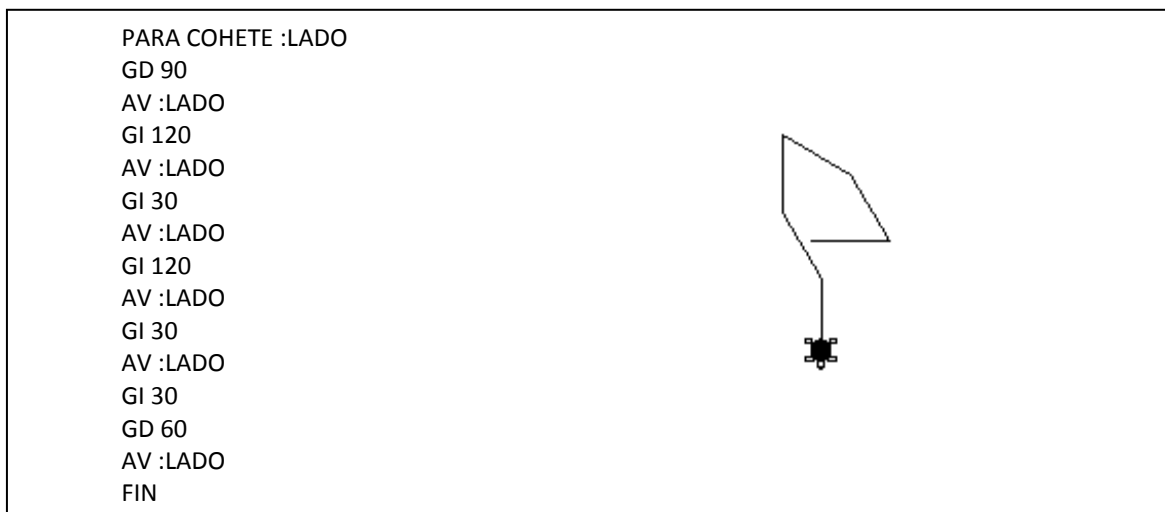


Diagrama 5.38 NoryMar en el reactivo 2 de la sesión 7

Coni

Su desempeño en el estudio ha mostrado mayor dominio en lo figurativo. En la sesión tres, percibe un programa PD como patrón para producir diferentes figuras mediante su repetición, lo que implica una generalización y en consecuencia, el registro de lo general en lenguaje de Logo en la categoría L2. Al igual que Tanya, Coni resolvió los problemas desde la sesión 3 mediante PM en la categoría L3. En contraste, en la sesión 4 regresa a los programas con ID (en tres de los cinco problemas planteados en esta sesión). En la sesión tres Coni no tuvo dificultades para resolver la totalidad de los ítems.

Las respuestas en la sesión seis muestran que Coni puede resolver programas PD abreviados; ella no muestra ninguna dificultad al incluir variables, además de interpretar la variable como número general: percibe las regularidades en un programa con ID y generaliza para hacer un PD abreviado. En el problema del rectángulo, utilizó dos variables, lo que impidió que su programa llegara a ser general, lo que implica que no alcanzó la categoría L4.

La limitación observada en la sesión seis permanece en los programas realizados por Coni hasta el final del Taller. En la sesión siete Coni resolvió tres de los cuatro programas propuestos, sin embargo continúa sin operar con una sola variable, lo que impide a sus programas alcanzar la categoría L4. En el Diagrama 5.39 se observa el programa realizado

por Coni en la sesión siete, en el que maneja tres literales X, Y y Z, sin percatarse que las dimensiones de la figura dada son múltiplos. Dichas magnitudes se puede operar con una sola variable e. g. x , $2x$ y $7x$. En el diagrama 5.39 se muestra la respuesta de Coni:

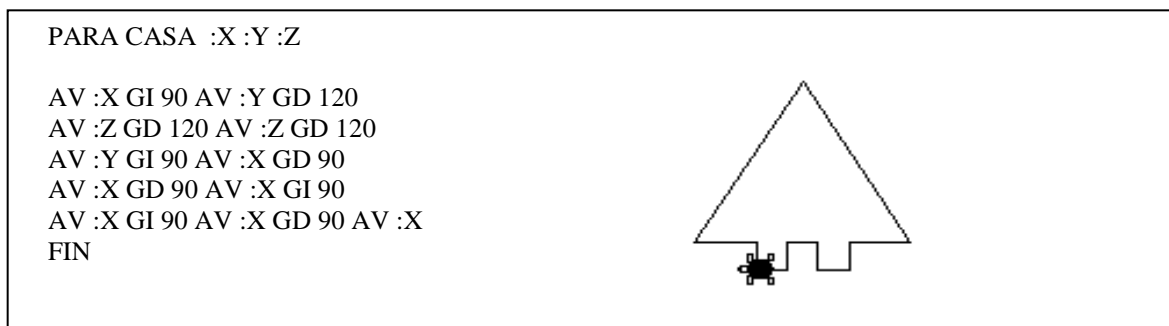


Diagrama 5.39 Programa de un COHETE realizado por Coni en la sesión 7

La transición de la etapa que consiste en la identificación de una regularidad o un patrón a la etapa de registrar lo percibido, suele ser para muchos alumnos muy difícil, para otros es imposible. Como apuntan Noss y Hoyles (1997) cuando está desconectada la actividad de la que se desprende la formulación de expresiones, no se mira al álgebra como una herramienta para resolver problemas sino como el final de un problema (Noss & Hoyles, 1997).

En los procesos de generalización los errores pueden ser vistos como parte integral del mismo proceso para desarrollar esta habilidad. En este orden de ideas, los procedimientos en los que las alumnas obtuvieron resultados o registros erróneos, pueden al mismo tiempo estar revelando progresos valiosos en el desarrollo de este aprendizaje, que pueden ser interesantes para su analizar y reportar.

Como ya se mencionó, en el taller con Logo, el origen de los errores al generalizar pueden ser de diversa índole; por un lado, las carencias en el dominio de conceptos y habilidades matemáticas y de estrategias para la resolución de problemas, y por otro, la falta de conocimiento y dominio sobre el software. En el estudio se reportan únicamente dos tipos de error:

a) Cuando es percibido un patrón con éxito pero no se logra una expresión, lo que sugiere que aunque se perciben regularidades y se generaliza, aun no es posible elaborar registros formales.

b) Cuando el resultado corresponde al registro de la regla, pero la regla arroja resultados aproximados a la secuencia o al problema planteado.

En ambos casos hay generalización aunque sea en su forma más sencilla. En cuanto al análisis de los resultados del estudio, estas generalizaciones con error fueron tomadas en consideración y reportadas por separado, ya que visto desde la habilidad de las alumnas para generalizar, se ha dado mayor atención a los procesos y las estrategias debido a que el estudio está centrado en estos aspectos más que a la precisión y veracidad de las respuestas.

5.2.2 Conclusiones de la experiencia en el Taller Logo

En una secuencia de comandos de un programa elaborado con Logo se pueden percibir patrones y se puede generalizar, de modo que se podría pensar que los procesos de generalización planteados en este medio son similares a los realizados en Lápiz y Papel. Sin embargo, no es así debido a que ambos contextos comprenden procesos cognitivos diferentes. No obstante, visto desde los procesos de generalización se pueden reconocer semejanzas en ambos escenarios, como pueden ser el hecho de que las generalizaciones efectuadas en ambas experiencias se ajustan a una secuencia como la que describe Mason, percibir y decir un patrón, registrar lo general y justificar los resultados, así como algunos procesos de inducción. De lo anterior se podría pensar que dichos aspectos comunes en los dos entornos permitirían algunas analogías comparables. Una de estas analogías que resultan interesantes para los propósitos de la presente investigación, se refiere a la posibilidad de acercar a las alumnas a la idea de variable general involucrada en procesos generales. Lo anterior se hace evidente específicamente para la Pauta Estrategia General en el ambiente de LP, en dicha pauta se hace uso de una variable genérica. En el ambiente Logo, la Pauta Estrategia General tiene su equivalente en un Programa General, en el que también se manejan variables que pueden ser interpretadas como número general en el programa.

En resumen

Los resultados obtenidos en la experiencia con Logo en el sentido de que 55% de las respuestas obtenidas de las alumnas se ubicaron en la categoría L4, sugieren que trabajar con programas en dicho lenguaje de programación, favorece en las alumnas el acceso a los procesos de generalización. Lo anterior se es congruente con la idea de Ursini y Rojano (2005) en el sentido de que el uso de Logo permite al usuario percibir la idea de variable genérica como algo familiar. En un principio se vio a las alumnas utilizar a la variable general, sin que tuvieran plena conciencia de su significado, más adelante alcanzaron a percibirla como una primitiva más del sistema, es decir, como una herramienta para poder realizar sus programas, por consiguiente, cuando *corrieron* sus programas se movieron de interpretar la variable como número genérico a interpretar la literal como incógnita (ver Ursini 1993). Al probar un programa general con distintos valores para la variable, entendieron que pueden representar cualquier magnitud de una figura en un programa sin depender de números concretos sino expresándolos por medio de variables genéricas.

El escaso dominio exhibido por las alumnas en el ámbito del álgebra, no fue obstáculo para que la mayoría de ellas lograra completar exitosamente los problemas planteados en el Taller de Logo. A partir de estos resultados parece posible que en un ambiente con lenguaje de programación Logo las alumnas puedan acceder a procesos de generalización con mayor facilidad que en los medios tradicionales, por lo que se puede pensar que estos ambientes virtuales resultan más amables para que las alumnas puedan experimentar con procesos generales.

Es pertinente señalar que a partir de la sesión tres, las alumnas contaban con los conocimientos sobre la operación del software de Logo suficientes para poder elaborar todas las Pautas de Programación definidas en el Taller, con excepción de los Programas Generales. Fue hasta la sesión cinco cuando las alumnas fueron inducidas al uso de una variable como número general, y puestas en práctica durante las sesiones seis y siete, razón por la cual a partir de la sesión cinco en Logo se observan Programas Generales. Lo anterior obedece a que la secuencia didáctica de las actividades del Taller fue diseñada

pensado en acercar a las alumnas de manera gradual a niveles de abstracción cada vez más elevados al ir avanzando de una sesión a la siguiente.

Los resultados de las alumnas sugieren la posibilidad de una evolución progresiva a través de las experiencias en Logo, que van desde los programas que se ajustan a lo concreto hacia los programas más abstractos, sin embargo, se observó en muchas de ellas la tendencia a permanecer en los números concretos en el ámbito de LP y en la sucesión de comandos completa para trazar una figura con Logo. Lo anterior se aprecia en el hecho de que en la última sesión del Taller con Logo, aún se observa la preferencia de algunas alumnas hacia los programas con instrucciones directas en los casos en que podían ser abreviados. Con excepción de Tanya y Coni el resto de las alumnas permanece en las Instrucciones Directas en Programas Generales, lo que sugiere aunque la mayoría de las alumnas se han familiarizado con la variable, lo que hace que sus programas sean generales; al diseñar un programa no optan de manera espontánea por los programas abreviados a menos que se les induzca a ello con la consigna del problema. En este tipo de problemas se dan generalizaciones cuando identifican patrones en la misma sucesión de instrucciones y aplican en el programa abreviado.

CAPÍTULO VI Categorías de Generalización y niveles de Programación en Logo

6.1 Comparativo de los resultados de las dos experiencias Lápiz y Papel y Logo.

En este capítulo se hace una comparación de los resultados obtenidos de la experiencia en LP con los que se obtuvieron con Logo. Como se explico al principio del estudio las generalizaciones hechas en LP son diferentes a las de Logo en cuanto a sus contenidos matemáticos implicados, por esta razón lo que aquí se presentan son los resultados de contrastar los dos ambientes mediante algunos parámetros de los aspectos análogos encontrados en un análisis en ambos contextos.

Otro aspecto comparado fueron los resultados de las alumnas en el taller de Logo en función de las categorías de análisis en especial G0 vs L0 (Adivinación) y de las categorías en las que se emplea una variable genérica G4 vs L4.

Para finalizar esta apartado se analiza la evolución de las alumnas en el estudio, las que mejoraron en sus habilidades de generalizar, las que retrocedieron y las que permanecieron sin cambio entre LP y Logo.

En una secuencia de comandos de un programa elaborado con Logo se pueden seguir procesos en los que se identifican patrones y se generaliza, de modo que podría pensarse que los procesos de generalización efectuados en este ámbito podrían ser equivalentes a los que se llevan a cabo en los contextos tradicionales como son los de LP. Sin embargo los procesos cognitivos en cada caso son diferentes, en especial las heurísticas para resolver los problemas son distintas.

A pesar de estas diferencias, pueden ser reconocidos algunos parámetros para hacer posible algunas comparaciones en las que se pueda destacar las posibles ventajas de cada escenario. De este modo fue posible reconocer algunos indicadores análogos en ambos ambientes, por ejemplo los reactivos contestados, las generalizaciones logradas, las generalizaciones con error, las respuestas incorrectas en las que además no se generalizó, las respuestas en las que se utilizó una variable genérica y finalmente las respuestas en las que se operó la variable.

6.1.1 Comparativo de indicadores generales de rendimiento

En el cuadro 6.01 se muestran los parámetros comparativos entre Logo y LP.

En el rubro de problemas ‘contestados’ por las alumnas se observa una diferencia a favor de Logo (94% contra 79% en LP). Este resultado, sugiere que Logo es un ambiente más amable para realizar generalizaciones, no obstante, puede también estar mostrando los diferentes niveles de dificultad en los problemas de cada ámbito (en el caso de LP los problemas planteados en el estudio implicaron procesos de abstracción más complejos).

No todas las respuestas de los problemas implicaron generalizaciones, por lo que se distinguieron aquellas en las que hay una generalización. En este indicador se observa que Logo fue de 98% en oposición a 93% en LP la diferencia no se consideró significativa por las mismas razones expuestas en el parámetro anterior. Debido a las facilidades que ofrece Logo a las alumnas en la solución de los problemas planteados en el taller, se podría pensar que el número de errores debería ser menor, no obstante, los resultados muestran lo contrario, ya que en este rubro los errores en Logo fueron de 25 % y en LP apenas fue del 19%.

Los errores producidos en Logo se relacionan con diferentes causas; en primer lugar con las habilidades de las alumnas en geometría, en segundo lugar con los problemas derivados del manejo del software, finalmente y en menor medida los errores se relacionan con las habilidades de las alumnas en los procesos de generalización.

Parámetro	Lápiz y Papel		Ambiente Logo	
	#	%	#	%
Reactivos contestados	64	79	160	94
Generalizó en total	59	93	157	98
Generalizó sin error	48	81	117	75
Generalizó con error	11	19	40	25
Respuestas incorrectas	4	6	3	2
Utiliza la variable	18/45	40%	92/104	88%

CUADRO 6.01 Indicadores Globales del Taller Logo vs LP.

En el marco interpretativo del presente estudio se presentaron las categorías Recursivo Aritmético (RA) y Estrategia General (EG) en el contexto de Lápiz y Papel; y Programa General (PG) en Logo, como las categorías más elevadas en cuanto a su nivel de abstracción. Estas categorías tienen en común el hecho de hacer uso de la variable, por lo que para indagar la posibilidad de acercar a las alumnas a la idea de variable involucrada en los procesos generales' en estos dos contextos se consideró para el análisis el parámetro. 'Utiliza una variable'. Mediante este indicador se llevó a cabo la comparación de los dos contextos. En este indicador se observó una diferencia notable de 40% en LP a 88% en Logo. Los resultados sugieren que Logo acerca a los alumnos a la idea de variable de manera más eficaz. Sin embargo, con la información disponible no fue posible constatar en este estudio el grado de conciencia que lograron las alumnas en relación al significado de la variable genérica.

6.1.2 Comparativo sobre las categorías de generalización

Como ya se explicó en este mismo capítulo, las generalizaciones que se realizaron en el taller con Logo resultaron más sencillas que las que se efectuaron en los problemas en LP. Es posible que la dificultad esté en función de las ecuaciones que representan estas relaciones de las secuencias en LP las cuales no son lineales, lo que hace más difícil percibir y explicar la estructura de la secuencia. Sin embargo, al comparar las categorías más altas G3 y G4 y L3 y L4 no obstante que tienen el uso de una variable genérica en común, en Logo las alumnas alcanzaron 88% de los reactivos en estas categorías, en comparación con 40% en LP.

En las categorías bajas se observó que disminuyó el porcentaje del contexto de LP al de Logo. Lo anterior es congruente con los resultados observados en las categorías altas i.e, Mientras G0 y G1 disminuyeron de 36% a 18% en Logo, G3 y G4 aumentaron de 37% en LP a 61% en Logo.

6.1.3 Evolución de las alumnas en el estudio

El desempeño de las alumnas fue muy diverso; algunas de ellas mostraron habilidades con tecnologías, otras parecen sentirse más seguras en los ambientes clásicos como es Lápiz y

Papel, estas últimas permanecieron sin cambio de un contexto a otro. Finalmente se observó en otras alumnas algún retroceso al cambiar de LP a Logo.

En la Tabla 6.02 se muestran algunos ejemplos de los diferentes casos observados.

CONCEPTO	% G3 + G4	%L3 +L4	DIFERENCIA	
TANYA	75	80	5	PERMANECE
GEMA	33	60	27	MEJORÓ
LINA	80	60	-20	RETROCEDE
ANA	33	33	0	PERMANECE
AIDA	33	58	25	MEJORÓ
LAURA	33	73	40	MEJORÓ
YOLA	25	53	28	MEJORÓ
NORYMAR	25	60	35	MEJORÓ
CONI	0	74	74	MEJORÓ
PROMEDIO	37	61	24	

Tabla 6.02 Evolución de las alumnas

En la Tabla 6.02 se observa que los procesos generales en las categorías donde se hace uso de una variable (G3 y G4 en Lápiz y Papel, y L4 en Logo) los casos ilustrados exhiben logros favorables a Logo. Mientras que Ana permanece con resultados similares en los dos contextos (33%), el resto de las alumnas muestran avances en estas categorías. Únicamente Lina bajó su porcentaje de respuestas en este nivel de 80% en un ambiente tradicional con lápiz y papel a 60% uno virtual con Logo. Finalmente se destaca el caso de Laura quien en medios tradicionales únicamente logró expresiones generales en un reactivo, en Logo parece que ella se puede acercar a la idea de variable con más eficiencia. Este último ejemplo muestra como Logo puede estar favoreciendo en las alumnas el uso de variables de una manera accesible.

Conclusiones del Capítulo VI

Como resultado de la comparación de los dos contextos en los que se realizó este estudio, se puede concluir que Logo sugiere ser un medio más amable para los alumnos cuando realizan generalizaciones y que puede ser útil para acercarlas a la idea de variable.

En un ambiente de Logo las alumnas resolvieron la mayoría de los reactivos (94 %), sin embargo, cometieron más errores en sus respuestas que en el contexto de LP. Los errores

detectados se explican en su mayoría por la operación del software, y a la falta de dominio por parte de las alumnas en aspectos de geometría.

En cuanto al uso de una variable genérica, la diferencia fue favorable a Logo, en este ambiente las alumnas utilizaron una variable en más del doble de los reactivos que los logrados en LP. Estos resultados sugieren que el uso de la variable surge de manera natural en los alumnos cuando crean un programa en este lenguaje de programación.

Con excepción de Lina, la mayoría de las alumnas lograron mejores resultados en Logo que en LP. Así mismo, es importante destacar, como se indicó en los capítulos IV y V, que los problemas en LP tenían un nivel más elevado en sus representaciones algebraicas, no obstante no se debe desestimar los resultados mostrados por las alumnas en un contexto tecnológico, en especial aquellas en desventaja, que en la experiencia en LP mostraron niveles bajos de dominio algebraico y que en el ambiente Logo lograron resultados similares a los del resto de sus compañeras.

CONCLUSIONES

Con la creación de categorías de análisis, las cuales distinguen a las generalizaciones recursivas de las generales, se hicieron necesarias ecuaciones del tipo $2^n - 1$ para algunas secuencias numéricas, las cuales constituyen una regla general que está fuera del alcance de los conocimientos de las alumnas. En el momento en que se diseñaron los instrumentos del estudio para el contexto de Lápiz y Papel i.e. sobre las etapas de Mason (1985) se había considerado que las alumnas habrían de acceder a ecuaciones algebraicas lineales del tipo $2(N-1)+1$ para representar la regla de una secuencia. Estas ecuaciones surgen de una estrategia recursiva y son por consiguiente algunas alumnas pudieron acceder a ellas.

Lo anterior a su vez implicó diferencias importantes en los contenidos matemáticos requeridos para realizar generalizaciones en cada uno de los ambientes del estudio, y por consiguiente hicieron difícil hacer alguna comparación entre ellos.

Por otra parte, en el capítulo cuatro se ha demostrado que las alumnas si no son inducidas por el investigador o si no se les dan instrucciones específicas, no ofrecen alguna justificación de sus respuestas de manera espontánea, lo anterior se observó en el problema III-3 en LP en el que las alumnas no hicieron ninguna representación de la regla de la secuencia. En el ambiente de Logo por su parte, la representación de la estructura del problema está contenida en el mismo programa en el lenguaje propio del software. En este caso no se hace necesaria la verificación de la respuesta, ya que ésta puede ser cotejada visualmente en la pantalla al correr el programa. De ahí que aun y cuando el uso de una variable en ambos contextos supone niveles análogos de generalización, en realidad se trata de procesos cognitivos diferentes.

Si bien se puede pensar que Logo promueve que las alumnas recurran a los conocimientos previos que tiene con relación a la aritmética, la geometría y la misma álgebra, sin embargo, Logo no genera dichos conocimientos. Con Logo, para que el alumno pueda resolver problemas de generalización en los que es necesario aplicar conocimientos de aritmética, geometría o de álgebra, las alumnas deben dominar previamente esos contenidos. Lo anterior no contradice lo asentado en el capítulo 5 sobre el hecho de que

Logo favorece que los alumnos se aproximen a la idea de variable genérica y consecuentemente al álgebra de manera más fácil. En este estudio se presentaron evidencias de que si por ejemplo una alumna desconoce los ángulos externos de un polígono regular, con Logo puede recurrir a una estrategia de ensayo y error, para mediante aproximación encontrar el ángulo de giro de la tortuga; sin embargo, de esta manera, ella no necesariamente se hizo consiente de la relación existente entre los ángulos del polígono y su número de lados i.e, no necesariamente Logo la llevó a generar nuevos conocimientos de propiedades matemáticas.

El uso de una variable en el contexto de Lápiz y Papel implica que esta sea interpretada como un número general. En el contexto de Logo no se logró clarificar si las alumnas fueron consientes del significado de la variable, ya que en un primer momento se apreció que algunas de ellas la utilizaban como una primitiva más del software, para después encontrar un significado distinto al correr el programa (véase capítulo 5).

Rigo (2009) propone la justificación por habituación en las clases de aritmética en la que señala la influencia social y psicológicos del sujeto quien justifica sus respuestas en el contexto en que accedió a él arguyendo, ‘así se lo enseñaron’. En el presente estudio se observó que las alumnas siguen patrones de estrategias aprendidos en su entorno y aplican de manera mecánica por ejemplo una regla de tres o alguna proporcionalidad escalar cuando se enfrentan con problemas de secuencias matemáticas. Dichas estrategias condujeron a la creación de categorías para el análisis como Aplicación Rutinaria. Con las categorías G0 y G1 se puede dar cuenta de los niveles de las respuestas en los procesos de generalización previos a la recursividad o la regla general. (Contrastar con ‘inducciones ingenuas’ y generalizaciones aritméticas de Radford).

En el capítulo 6 se ofrecieron evidencias de que una alumna al generalizar con Logo, aun con un nivel incipiente de dominio del álgebra puede avanzar hacia la idea de variable con familiaridad en comparación con otros medios tradicionales. En este capítulo se presentaron los resultados de alumnas como Laura quien en ambientes tradicionales mostró un bajo

perfil con relación a la variable, y en Logo aumentó hasta 73% de reactivos contestados en esta categoría.

Con relación a las Categorías de Programación no se puede asegurar que la elección un tipo de programa específico por parte de las alumnas para resolver un problema dependa exclusivamente de su nivel de habilidades y conocimientos matemáticos, sino que además, su elección puede también estar influida por el tipo de problema de que se trate y de su planteamiento. Además, también esta elección está relacionada con el conocimiento que las alumnas tengan del manejo del software. Por ejemplo, el hecho de que un alumno muestre haber alcanzado el dominio para elaborar programas directos, no garantiza que optará por esta Pauta de Programación en todos los casos en los que se enfrenta a algún problema; en algunos casos puede optar por un programa con Instrucciones Directas.

Pareciera que las alumnas al lograr la categoría L4 en Logo han alcanzado la comprensión del uso de una variable en un programa general (PG); sin embargo en este trabajo se observó en algunos casos que las alumnas aun no tiene una idea clara del uso de la variable genérica y combinan en una expresión una constante con la variable por ejemplo; en el programa de un rectángulo en el que representaron uno de sus lados como : $L + 50$ en lugar de $2L$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* 7 (1976). Reidel Publishing Company; Dordrecht-Holland.
- Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en alumnos de matemáticas. Universidad de los Andes, Bogotá Colombia.
- Bardini y Sabena, 2005 Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (SSHRC/CRSH) CERME 4. Working Group 6;
- Bednarz, N; Kieran, C & Lee, L. (1996) (ed). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. Kluwer Academic Publishers
- Bertely, M. (2000). Conociendo nuestras escuelas: Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar. PAIDOS, México.
- Butto, C. & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en geometría. *Revista Educación Matemática México*. Vol. 16. Num.1. abril de 2004.
- Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias Inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.
- Douglas, H. & Meredith, J. S. (1992). Research on Logo: Effects and efficacy. *State University of New York At Buffalo*
- Filloy, E.; Rojano, M.T. & Rubio, G. Perspectives in school algebra, p.p. 115-15 Sutherland et al. (eds.) 2001. Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands .
- Ginsburg, H. & Baron, J (1993). Cognition: Young children's construction of Mathematics. En Jensen R. (ed) *Research ideas for the classroom: Early Childhood*
- Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's Strategies with Linear and Quadratic Sequences. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, 67-83. Wellington House, London: Cassell. *Childhood Mathematics* (pp 3-9) Broadway New York NY: Mc Millan National Council of Teachers of Mathematics.

- Hoyles y Sutherland (1996). *Mathematics in the classroom*. First pub. (1989) by Routledge (eds) New York
- Noss, R. & Hoyles, C. (1988). The computer as a mediating influence in the development of pupils' understanding of variable Influence médiatrice de l'ordinateur dans le développement de la notion de variable chez l'enfant. *EUROPEAN JOURNAL OF PSYCHOLOGY OF EDUCATION* Volume 3, Number 3 (1988), 271-286, DOI: 10.1007/BF03172734
- Hanna, G (1996). *The Ongoing Value of Proof* Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, Spain, Vol I.
- Hoffer, A. (1983). Van Hiele-Based Research. En R. Lesh & M. Landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227). Evanston Illinois: School of Education, Northwestern University.
- INEE (2006). *El aprendizaje del español, las matemáticas y la expresión escrita en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México.
- Kieran, C. (1997) 'Research on the Learning and Teaching of Algebra' in A. Gutiérrez, and P. Boero (eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Sense Publishers, Rotterdam/ Taipei.
- Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. En Bednarz, N; Kieran, C & Lee, L. (ed). *Approaches to algebra*: Kluwer academic Publishers.
- Mason, J.; Graham, A & Johnson-Wilder, S. (2005) *Developing Thinking in Algebra*. The Open University in association with Chapman Publishing London
- Mason, J. Drury, H & Bills, E (2007). Explorations I the Zone of Proximal Awareness. In J. Watson & K. Beswich (Eds.) *Mathematics: Essential Research, Essential Practice: Proceeding of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*. Adelaide: MERGA Vol 1 p42-58
- McFarlane, A (ed) (1997): *Information technology and authentic learning. Realizing the potential of computers in the primary classroom*, Londres Nueva York: Routledge
- Mc Farlane, A (2003) *El aprendizaje de las nuevas tecnologías de la información: Experiencias, promesas, posibilidades*. Aula XXI Santillana, México. Mor, Y.,

- Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K. & Simpson, G. (2006). Diseñar, ver y compartir estructuras en secuencias numéricas. Knowledge Lab, Institute of Education, University of London, UK.
- Noss, R. & Hoyles, C. (1996). Windows on mathematical meaning; Learning cultures and computers. *Mathematics Education Library*. University of London, U.K.
- Yishay, M., Noss, R. Hoyles, C. Kahn K & Simpson, G (2006). Diseñar, ver y compartir estructuras en secuencias numéricas. London Knowledge Lab, Institute of Education, University of London, UK.
- Noss, R. & Hoyles, C. & Mavrikis, M. & Geraniou, E. & Gutiérrez-Santos, S. & Pearce, D. (2009) Broadening the sense of ‘dynamic’: a microworld to support students’ mathematical generalisation *ZDM Mathematics Education* (2009) 41:493–503 DOI 10.1007/s11858-009-0182-8.
- Olson, A.; Kieren, T. and Ludwig, S. (1987). Linking Logo, levels and language in mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 18 (1987) 359-370. © 1987 by D. Reidel Publishing Company.
- Papert, S. (1980). Desafío de la mente: Computadoras y educación. Fernández Long y Reggini S.A. Buenos Aires.
- PISA 2000 Programme for international student assessment http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en_32252351_32235731_1_1_1_1,00.html
- Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (J. Zugazagoitia Trad.) México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945)
- Radford, L (1999). The rhetoric of generalization. A cultural, semiotic approach to students’ processes of symbolizing. Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Technion-Israel Institute of Technology, Vol.4, 89-96.
- Radford, L. (2001). Signs and meanings in students’ emergent algebraic thinking: A semiotic analysis *Educational Studies in Mathematics* **42**: 237–268, 2000.© 2001 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- Radford L. 2003. Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students’ Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70, Lawrence Erlbaum Associates.

- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic Perspective. Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Psychology Mathematic Education. Mérida, México; Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2006) Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. Abstract. *Educational Studies in Mathematics* 237–268, 2000. © 2001 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*
- Rigo, M. (2009). La cultura de la racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria. Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, Cinvestav, México.
- SEP (1999). Planes y Programas de Estudio para la Formación Inicial de la Licenciatura en Educación Preescolar. Editorial SEP, México (1999).
- SEP (2008). Guía articuladora de materiales educativos de apoyo a la docencia SEP D.R. © Secretaría de Educación Pública, Argentina 28, Centro, 06020, México, D.F.
- SEP (2009) Universidad de Sonora y la Sociedad Matemática Mexicana. Curso de actualización la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria II, Secretaría de Educación Pública, México 2009
- Sacristán, I. & Esparza, E. (2003). Programación computacional para matemáticas de nivel secundaria. *Enseñanza de las matemáticas con tecnología (EMAT)* SEP/Cinvestav
- Sutherland, R; Stacey, K.; Chick, H.; & Kendal, M. (2004). A Toolkit for Analyzing Approaches to Algebra .The Future of the Teaching and Learning of Algebra *The 12 th ICMI Study* Chapter 5. The APPA Group, led by *University of Bristol, Bristol, UK*
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics* 20, 147-164, Kluwer Academic Publishers Netherlands
- Taylor, S:J: y Bogdan, R. (1992). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona, Buenos Aires y México: Paidós.

- Ursini, S. (1993). Acercamiento de los alumnos a diferentes caracterizaciones de la variable en Logo. Tesis para obtener el grado de Ph D. Degree of the University of London
- Ursini, S y Rojano; M.T. (2005). Enseñar álgebra con Logo: Conceptos básicos un enfoque didáctico Mc Graw Hill/Interamericana Editores, M
- Ursini, S.; Escareño, F.; Montes, D y Trigueros, M. (2005). Enseñar álgebra elemental: Una propuesta alternativa. Editorial Trillas, México

ANEXOS

- ANEXO 1** Tabla A001-ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA EN LÁPIZ Y PAPEL.
- ANEXO 2** Tabla A002- RESUMEN DEL ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA EN LÁPIZ Y PAPEL.
- ANEXO 3** Tabla a003- ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA EN LOGO
- ANEXO 4** Tabla A004- RESUMEN DEL ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA CON EL TALLER LOGO
- ANEXO 5** Tabla A005 RESUMEN DE CATEGORÍAS Y PAUTAS DE RESPUESTA Y CATEGORÍAS DE GENERALIZACIÓN EN LA EXPERIENCIA DE LÁPIZ Y PAPEL
- ANEXO 6** INDICADORES GLOBALES DE LP Y LOGO
CUADRO A 1 INDICADORES GLOBALES EXPERIENCIA EN LP
CUADRO A 2 INDICADORES GLOBALES DEL TALLER LOGO
- ANEXO 7** CUADRO A3 COMPARATIVO DE LOS INDICADORES GLOBALES DE LÁPIZ Y PAPEL VS TALLER LOGO
- ANEXO 8** EVOLUCION DE LAS ALUMNAS CONTEXTOS DE LP VS LOGO
TABLA A006 CATEAGORÍAS BAJAS
TABLA A007 COATEGORÍAS ALTAS
- ANEXO 9** PARAMETROS COMPARTIVOS ENTRE LP Y EL TALLER LOGO
Tabla A008 PORCENTAJE CONTESTADO
Tabla A009 PORCENTAJE DE ERRLORES
Tabla A010 PORCENTAJE DE CATEGORÍAS BAJAS
Tabla A011 PORCENTAJE DE CATEGORÍAS ALTAS
- ANEXO 10** Tabla A012 PAUTAS DE PROGRAMACIÓN LOGRADAS POR LAS ALUMNAS ENEL TALLER DE LOGO
- ANEXO 11** Tabla A013 CATAEGORIAS DE GENERALIZACIÓN PARA EL ESTUDIO
- ANEXO 12** Tabla A014 RESUMEN CATEGORÍAS DE PRUEBA, JUSTIFICACIÓN, ARGUMENTACIÓNDE DIVERSOS INVESTIGADORES

ANEXO 13 Tabla A015 RESUMEN DEL ANÁLISIS DE GENERALIZACIÓN DE ACUERDO CON LAS ETAPAS DEL CIRCUITO DE GENERALIZACIÓN DE MASON

ANEXO 14 Tabla A016 MUESTRA DE RESUMEN DEL ANÁLISIS DEL DIAGNOSTICO DE GENERALIZACIÓN POR ALUMNA

ANEXO 1 TABLA A001 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA EN LÁPIZ Y PAPEL

INSTRUMENTO EN LÁPIZ Y PAPEL																											
ÍTEM	TANIA			GEMA			LINA			ANA			AIDA			LAURA			YOLA			NORYMAR			CONI		
	Ver	Est	Cat	Ver	Est	Cat	Ver	Est	Cat	Ver	Est	Cat	Ver	Est	Cat	Ver	Est	Cat	Ver	Est	Cat	Ver	Est	Cat	Ver	Est	Cat
III-3-1	C	SR	SR	C	AE	G2	C	SR	SR	C	AE	G2	C	AE	G2	C	SR	SR	C	SR	SR	C	AE	G2	C	AE	G2
III-3-2	C	SR	SR	C	AE	G2	C	SR	SR	IN	AE	G2	C	AE	G2	C	SR	SR	C	SR	SR	IN	AE	G2	C	AE	G2
III-3-3	C	SR	SR	C	AE	G2	C	SR	SR	IN	A	G0	IN	AR	G1	C	SR	SR	NC	NC	NC	IN	AE	G2	NC	NC	NC
III-4-a	C	RG	G4	IN	AE	G2	C	RA	G4	C	AR	G1	C	RA	G3	C	RA	G1	C	SR	SR	C	AR	G1	C	AR	G4
III-4-b	C	RG	G4	IN	AE	G2	C	RA	G4	C	AR	G1	C	RA	G3	C	RA	G1	NC	NC	NC	C	AR	G1	C	AR	G4
III-4-d	C	RG	G4	IN	AR	G1	NC	NC	NC	IN	A	G0	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
IV-3	C	NC	NC	C	RA	G3	C	RA	G3	C	RA	G3	C	RA	G3	C	RA	G3	C	RA	G3	C	RA	G3	NC	NC	NC
IV-4	C	NC	NC	C	RA	G3	C	A	G0	C	RA	G3	C	RA	G3	NC	NC	NC	C	A	G0	NC	NC	NC	NC	NC	NC
IV-5	IN	A	G0	IN	RA	G3	IN	A	G3	C	RA	G3	C	RA	G3	NC	NC	NC	C	A	G0	NC	NC	NC	NC	NC	NC
	#	%		#	%		#	%		#	%		#	%		#	%		#	%		#	%		#	%	
G4-G3	3	75		3	33		4	80		3	33		5	63		1	33		1	33		1	17		2	50	
G2	-	0		5	56		-	0		2	22		2	25		-	0		-	-		3	50		2	50	
G0+G1	1	25		1	11		1	20		4	44		1	12		2	66		2	66		2	33		-	0	
G4	3	75		-	0		-	0		-	0		-	0		-	0		-	0		-	0		2	50	
G3	0	0		3	33		3	60		3	33		5	63		1	33		1	33		1	17		-	0	
G2	-	0		5	56		1	20		2	22		2	25		-	0		-	0		3	50		2	50	
G1	-	0		1	11		-	0		2	22		1	12		2	66		-	0		2	33		-	0	
GO	1	25		-	0		1	20		2	22		-	0		-	0		2	67		-	0		-	0	

Ver = Veracidad de la respuesta (C= Correcta IN. Incorrecta); **Est**= Pauta de Estrategias (A= adivinanza AR= Aplicación rutinaria ID= Inducciones falsas AE= Análisis exhaustivo RA= Recursivo aritmético RG= Regla general) **Cat**= Categoría de Análisis (G0, G1, G2, G3 y G4)

ANEXO 2 Tabla A002- RESUMEN DEL ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA EN LÁPIZ Y PAPEL

EXPERIENCIA EN LAPIZ Y PAPEL (# DE REACTIVOS)											
PROBLEMAS	CON-TESTO	NO CONTESTO NC	GENERALIZÓ (TOTAL 65)			CATEGORÍAS (TOTAL 51)					Sin clasificar
			SI	SIE	NO	G0	G1	G2	G3	G4	
III-3-1	9	-	9	-	-	-	-	5	-	-	4
III-3-2	9	-	7	2	-	-	-	5	-	-	4
III-3-3	7	2	4	3	-	1	1	2	-	-	3
S TOTAL	25	2	20	5	-	1	1	12	-	-	11
III-4-a	8	1	7	1	-	-	4	1	2	1	-
III-4-b	8	1	7	1	-	-	3	1	3	1	-
III-4-d	3	6	1	1	1	1	1	-	-	1	-
S TOTAL	19	8	15	3	1	1	8	2	6	2	-
IV-3	8	1	8	-	-	-	-	-	7	-	1
IV-4	6	3	5	-	-	2	-	-	3	-	1
IV-5	6	3	2	2	2	3	-	-	3	-	-
S TOTAL	20	7	15	3	2	5	-	-	12	1	2
TOTAL	64/81	17/81	50/64	10/64	3/64	7/51	9/51	14/51	18/51	3/51	13/64
%	79	21	78	16	4	14	18	27	35	6	20

Ítem	TANIA		GEMA		LINA		ANA		AIDA		LAURA		YOLA		NOR-MAR		CONI	
	PRG	CAT	PRG	CAT	PRG	CAT	PRG	CAT	PRG	CAT	PRG	CAT	PRG	CAT	PRG	CAT	PRG	CAT
S 3.1	PM	L3	PD	L2			PD	L2	PD	L2			PD	L2	ID	L1	PM	L3
S 3.2	PM	L3	PD	L2			PD	L2	PD	L2			PD	L2	ID	L1	PM	L3
S 3.3	PM	L3	PD	L2			PA	L0	PD	L2			PD	L2	ID	L1	PM	L3
S 4.1	ID	L1	PD	L2	PD	L2	PD	L1	ID	L1	PD	L2	ID	L1	ID	L1	PD	L2
S 4.2	ID	L1	PD	L2	PD	L2	PD	L1	ID	L1	PD	L2	PD	L2	PD	L2	ID	L1
S 4.3	ID	L1	PD	L2	PD	L2	PD	L1	ID	L1	NC	NC	ID	L1	PD	L2	ID	L1
S 4.4	PD	L2	ID	L1	PD	L2	NC	NC	ID	L1	ID	L1	ID	L1	PD	L2	PD	L2
S 4.5	PM	L3	PD	L2	NC	NC	PD	L2	PD	L2	PM	L3	PD	L2	PA	L0	ID	L1
S 5.1	PG	L4	PG	L2	PG	L4	ID	L1	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PG	L4
S 5.2	PG	L4	PG	L4	PG	L4	ID	L1	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PD	L2	PG	L4
S 5.3	PG	L4	PG	L4	PG	L4	ID	L1	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PD	L2	PG	L4
S 5.4	PG	L4	PG	L4	PG	L4	ID	L1	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PD	L2	PG	L4
S 6.1	PG	L4	PG	L4			PG	L4	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PG	L4
S 6.2	PG	L4	PG	L4			PG	L4	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PG	L4
S 6.3	PD	L2	PD	L2			PD	L2	PD	L2	PD	L2	PD	L2	PD	L2	PD	L2
S 6.4	PD	L2	PD	L2			PD	L2	PD	L2	PD	L2	PD	L2	PD	L2	PD	L2
S 7.1	PD	L4	PD	L2	NC	NC	PD	L2	PG	L4	PA	L0	PD	L2	PD	L2	NC	NC
S 7.2	PG	L4	PG	L4	PG	L4	PD	L2	PG	L4	PG	L4	PD	L2	PD	L2	PD	L2
S 7.3	PG	L4	PG	L4	PD	L2	PA	L0	PD	L2	PD	L2	PA	L0	PD	L2	PD	L2
S 7.4	PG	L4	PG	L4	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	PD	L2	PD	L2
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
L4-L3	14	80	8	60	5	60	2	29	8	58	8	73	6	53	3	60	9	74
L2	3	5	11	35	5	40	7	24	7	21	5	13	9	26	12	15	7	10
L0+L1	3	15	1	5	0	0	9	47	4	21	2	14	4	21	5	25	3	16
L4	10	60	8	60	5	50	2	29	8	58	7	66	6	53	3	60	6	53
L3	4	20	0	0	-	10	0	0	0	0	1	7	0	0	0	0	3	21
L2	3	5	11	35	5	40	7	24	7	21	5	13	9	26	12	15	7	10
L1	3	15	1	5	0	0	7	41	4	21	1	7	3	16	4	25	3	16
L0	0	0	0	0	0	0	2	6	0	0	1	7	1	5	1	0	0	0

ANEXO 3 TABLA A003 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA EN LOGO
ANEXO 4 TABLA A004- RESUMEN DEL ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA CON EL TALLER LOGO

TALLER LOGO (# DE REACTIVOS)											
PROBLEMA	CONTESTÓ		GENERALIZÓ			G0	G1	G2	G3	G4	Sin Clasificar
	SI	NO	SI	C/ERROR	NO						
SESION 3.1	7	-	7	-	-	-	1	4	2	-	-
SESIÓN 3.2	7	-	7	-	-	-	1	4	2	-	-
SESIÓN 3.3	7	-	7	-	-	-	1	4	2	-	-
S TOTAL	21	-	21	-	-	0	3	12	6	0	-
SESIÓN 4.1	9	-	6	3	-	-	5	4	-	-	-
SESIÓN 4.2	9	-	7	2	-	-	4	5	-	-	-
SESIÓN 4.3	8	1	7	1	-	-	5	3	-	-	1
SESIÓN 4.4	8	1	7	1	-	-	4	4	-	-	1
SESIÓN 4.5	8	1	7	1	-	-	2	4	2	-	1
S TOTAL	42	3	34	8	-	0	20	20	2	0	3
SESIÓN 5.1	9	-	8	1	-	-	1	-	-	8	-
SESIÓN 5.2	9	-	7	1	1	-	1	-	-	8	-
SESIÓN 5.3	9	-	7	1	1	-	1	-	-	8	-
SESIÓN 5.4	9	-	7	1	1	-	1	-	-	8	-
S TOTAL	36	-	29	4	3	0	4	0	0	32	-
SESIÓN 6.1	8	-	8	-	-	-	-	-	-	8	-
SESIÓN 6.2	8	-	8	-	-	-	-	-	1	7	-
SESIÓN 6.3	8	-	5	3	-	-	-	-	-	8	-
SESIÓN 6.4	8	-	-	8	-	-	-	-	-	8	-
S TOTAL	32	-	21	11	-	0	-	-	1	31	-
SESIÓN 7.1	7	2	2	5	-	1	-	-	-	6	-
SESIÓN 7,2	9	-	6	3	-	-	-	-	1	8	-
SESIÓN 7.3	9	-	2	7	-	2	-	-	-	7	-
SESIÓN 7.4	4	5	2	2	-	-	-	-	-	4	-
S TOTAL	29	7	12	17	-	3	-	-	1	25	7
TOTAL	160	10	117	40	3	3	27	32	10	88	10
%	94	6	73	25	2	2	17	20	6	55	6

PRG= Pauta de programación (A= Adivinanza ID= Instrucciones directas PD= Programa directo PM= Programa modular PG= Programa general),
CAT = Categorías de Análisis (L0,L1,L2,L3 y L4)

ANEXO 5 TABLA A005 RESUMEN DE CATEGORÍAS Y PAUTAS DE RESPUESTA Y CATEGORÍAS DE GENERALIZACIÓN EN LA EXPERIENCIA DE LÁPIZ Y PAPEL

PAUTA DE ESTRATEGIA PROBLEMA	A	AR	AE	RA	EG	TOTAL
III-3-1	-	-	5	-	-	5
III-3-2	-	-	5	-	-	5
III-3-3	1	2	1	-	1	5
ST	1	2	11	-	1	15
III-4-a	-	3	2	-	3	8
III-4-b	-	3	2	-	3	8
III-4-c	-	3	2	-	3	8
III-4-d	1	-	-	-	1	2
III-4-e	1	-	-	-	1	2
ST	2	9	6	-	11	28
IV-3	-	-	-	7	-	7
IV-4	2	-	-	3	-	5
IV-5	2	-	-	4	-	6
ST	4	-	-	14	-	18
TOTAL	7	11	17	14	12	61
CATEGORÍA DE GENERALIZACIÓN	G0	G1	G2	G3	G4	

ANEXO 6 INDICADORES GLOBALES DE LP Y LOGO

CUADRO A 1 INDICADORES GLOBALES DE LA EXPERIENCIA EN LP

CONCEPTO	PRE- CUESTIONARO	%
REACTIVOS CONTESTADOS	64/81	79
NO CONTESTADOS	17/81	21
GENERALIZADOS	59/64	93
GENERALIZÓ SIN ERROR	48/59	81
GENREALIZÓ CON ERROR	11/59	19
RESPUESTAS INCORRECTAS*	4/64	6

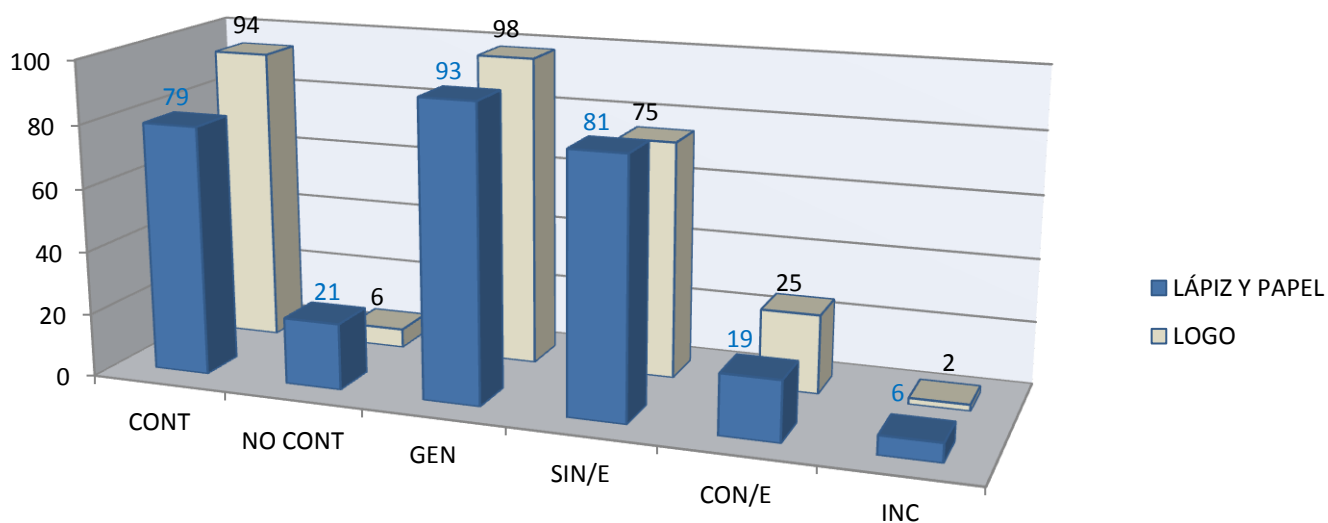
*Las RESPUESTAS INCORRECTAS indican los ítems en los que el resultado es incorrecto y además no se logro generalizar ni en la forma más sencilla

CUADRO A 2 INDICADORES GLOBALES DEL TALLER LOGO.

CONCEPTO	TALLER CON LOGO	%
REACTIVOS CONTESTADOS	160/170	94
NO CONTESTADOS	10/170	6
GENERALIZADOS	157/160	98
GENERALIZÓ SIN ERROR	117/157	75
GENREALIZÓ CON ERROR	40/157	25
RESPUESTAS INCORRECTAS*	3/160	2

ANEXO 7 CUADRO A3 COMPARATIVO DE LOS INDICADORES GLOBALES LÁPIZ Y PAPEL VS TALLER LOGO

CONCEPTO		LP %	LOGO%
CONTESTARON	CONT	79	94
NO CONTESTARON	NO CONT	21	6
GENERALIZARON	GEN	93	98
GENERALIZÓ SIN ERROR	SIN/E	81	75
GENREALIZÓ CON ERROR	CON/E	19	25
RESPUESTAS INCORRECTAS	INC	6	2



ANEXO 8 EVOLUCION DE LAS ALUMNAS CONTEXTOS DE LP VS LOGO

TABLAS A006 CATEGORÍAS BAJAS

CONCEPTO	LP	LOGO	DIFERENCIA	
	G0-G1	L0-L1		
TANYA	25	15	-10	
GEMA	11	5	-6	
LINA	20	0	-20	
ANA	44	44	0	PERMANECE
AIDA	33	21	-12	
LAURA	66	14	-52	MEJORÓ
YOLA	25	21	-4	PERMANECE
NORYMAR	50	25	-25	
CONI	50	16	-34	MEJORÓ
PROMEDIO	36	18	-18	

TABLA A007 COATEGORÍAS ALTAS

CONCEPTO	G3 + G4	L3 +L4		
TANYA	75	80	5	PERMANECE
GEMA	33	60	27	MEJORÓ
LINA	80	60	-20	RETROCEDIÓ
ANA	33	33	0	PERMANECE
AIDA	33	58	25	
LAURA	33	73	40	MEJORÓ
YOLA	25	53	28	
NORYMAR	25	60	35	MEJORÓ
CONI	0	74	74	MEJORÓ
PROMEDIO	37	61	24	

ANEXO 9 PARAMETROS COMPARTIVOS ENTRE EL CONTEXTO LP Y EL TALLER LOGO TABLA A008 PORCENTAJE CONTESTADO

TABLA A005 % CONTESTADO												
LAPIZ Y PAPEL					LOGO							
ÍTEM	III-3	III-4	IV	PROM		S3	S4	S5	S6	S7	PROM	
TANYA	100	100	33	77		100	100	100	100	100	100	
GEMA	100	100	100	100		100	100	100	100	100	100	
LINA	100	66	100	88		-	80	100	-	50	76	
ANA	100	100	100	100		100	80	100	100	75	91	
AIDA	100	66	100	88		100	80	100	100	75	91	
LAURA	100	66	33	66		-	80	100	100	75	89	
YOLA	66	0	100	55		100	100	100	100	75	95	
NORYMAR	100	66	33	77		100	100	100	100	100	100	
CONI	66	66	0	44		NC	75	100	100	100	92	
PROMEDIOS	92	62	66	77		85	88	100	100	83	91	

ANEXO 9 PARAMETROS COMPARTIVOS ENTRE EL CONTEXTO LP Y EL TALLER LOGO TABLA A009 PORCENTAJE DE ERRORES

TABLA A006 % ERRORES												
LAPIZ Y PAPEL					LOGO							
ÍTEM	III-3	III-4	IV	TOTAL		S3	S4	S5	S6	S7	Total	
TANYA	-	-	-	-		-	-	-	50	-	10	
GEMA	-	66	33	33		-	-	-	50	75	25	
LINA	-	-	-	-			-	-		25	8	
ANA	33	-	-	11		33	60	-	25	75	40	
AIDA	33	-	-	11		-	-	-	25	33	11	
LAURA	-	-	-	-			-	25	25	66	26	
YOLA	-	-	66	50		-	20	-	50	100	32	
NORYMAR	66	-	-	50		-	80	75	25	100	60	
CONI	-	-	-	-		-	-	-	25	-	5	
PROMEDIOS	15	7	11	17		19	18	11	34	52	24	

ANEXO 9 PARAMETROS COMPARTIVOS ENTRE EL CONTEXTO LP Y EL TALLER LOGO TABLA A010 PORCENTAJE DE CATEGORÍAS BAJAS

TABLA A007 EVOLUCION CATEGORÍAS BAJAS												
ÍTEM	G0-G1					L0-L1						
	III-3	III-4	IV	TOTAL	%	S3	S4	S5	S6	S7	Total	%
TANYA	SR	-	1	1	25	3	-	-	-	-	3	15
GEMA	-	1	-	1	11	-	1	-	-	-	1	5
LINA	SR	-	1	1	20	-	-	-	--	-	-	0
ANA	1	3	-	4	44	-	3	4	-	1	8	44
AIDA	1	2	-	3	33	-	4	-	-	-	4	21
LAURA	SR	2	-	2	66	-	1	-	-	1	2	14
YOLA	SR	1	-	1	25	-	3	-	-	1	4	21
NORYMAR	SR	2	-	2	50	3	2	-	-	-	5	25
CONI	-	2	-	2	50	-	3	-	-	-	3	16

ANEXO 9 PARAMETROS COMPARTIVOS ENTRE EL CONTEXTO LP Y EL TALLER LOGO TABLA A011 PORCENTAJE DE CATEGORÍAS ALTAS

TABLA A008 EVOLUCIÓN CATEGORÍAS ALTAS												
ÍTEM	G3 + G4					L3 +L4						
	III-3	III-4	IV	TOTAL	%	S3	S4	S5	S6	S7	Total	%
TANYA	SR	3	SR	3	75	3	1	4	4	4	16	80
GEMA	-	-	3	3	33	-	-	4	4	4	12	60
LINA	-	2	2	4	80	-	-	4	-	2	6	60
ANA	-	-	3	3	33	-	-	-	4	2	6	33
AIDA	-	-	3	3	33	-	-	4	4	3	11	58
LAURA	-	-	1	1	33	-	1	4	4	2	11	73
YOLA	-	-	1	1	25	-	-	4	4	2	10	53
NORYMAR	-	-	1	1	25	-	-	4	4	4	12	60
CONI	-	-	-	-	0	3	-	4	4	3	14	74

ANEXO 10 TABLA A012 PAUTAS DE PROGRAMACIÓN LOGRADAS POR LAS ALUMNAS EN EL TALLER DE LOGO

SESIÓN	TANIA	GEMA	LINA	ANA	AIDA	LAURA	YOLA	NOR/MAR	CONI	PG
3-1	PM	PD		PD	PD		PD	ID	PM	
3-2	PM	PD		PD	PD		PD	ID	PM	
3-3	PM	PD		PD	PD		PD	ID	PM	
4.1	ID	PD	PD	ID	ID	PD	ID	ID	PD	
4.2	ID	PD	PD	ID	ID	PD	PD	PD	ID	
4.3	ID	PD	PD	ID	ID	NC	ID	PD	ID	
4.4	PD	ID	PD	NC	ID	ID	ID	PD	PD	
4.5	PM	PD	NC	PD	PD	PM	PD	ID	ID	
5.1	PG	PG	PG	PD	PG	PG	PG	PG	PG	8
5.2	PG	PG	PG	PD	PG	PG	PG	PG	PG	8
5.3	PG	PG	PG	PD	PG	PG	PG	PG	PG	8
5.4	PG	PG	PG	PD	PG	PG	PG	PG	PG	8
6.1	PG-A	PG-A	PG-A		PG-A	PG-A	PG-A	PG-A	PG-PD	8
6.2	PG-D	PG-A	PG-A		PG-A	PG-A	PG-D	PG-D	PG-A	8
6.3	PG-D	PG-A	PG-A		PG-D	PG-A	PG-D	PG-D	PG-A	8
6.4	PG-D	PG-D	PG-D		PG-D	PG-D	PG-D	PG-D	PG-A	8
7.1	PG-PID	PG-PD	NC	PG-PD	PG-PD	NC	PG-PD	PG-PD	NC	6
7,2	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	9
7.3	PG-PID	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	PG-PD	9
7.4	PG-PD	PG-PD	NC	NC	NC	NC	NC	PG-PD	PGPID	4
A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ID	3-15%	1-5%	-	3-21%	4-21%	1-7%	3-16%	5-25%	3-16%	23- 14%
PD	1-5%	7-35%	4-29%	8-57%	4-21%	2-14%	5-26%	3-15%	2-11%	36- 23%
PM	4-20%	0	0	-	- 0	1-7%	-	-	3-16%	8- 5%
PG	12-60%	12-60%	10- 71%	3-21%	11-58%	10-72%	11-58%	12-60%	11-58%	92- 58%
Reactivos	20	20	14	14	19	14	19	20	19	159-100%

ANEXO 11 TABLA A013 CATAEGORIAS DE GENERALIZACIÓN PARA EL ESTUDIO

CATEGORIAS DE GENERALIZACION PARA EL ANÁLISIS PARA EL ESTUDIO					
CUSTIONARIO DIAGNÓSTICO (LAPIZ Y PAPEL)			TALLER CON LOGO		
ADIVINANZA (A)	G0	Comprende los casos en los que no se identificó un patrón. Según Mason no es una generalización si no se percibe, expresa y registra un patrón. Para Radford cuando procede de aproximación o tanteo no es una generalización, es inducción ingenua.	ADIVINANZA (A)	L0	Las instrucciones no producen la figura deseada, pareciera ser resultado de la aplicación de las instrucciones sin tener conciencia clara de los comandos
APLICACIÓN RUTINARIA (AR)	G1	Se trata de calcular un término de una secuencia dado mediante la aplicación mecánica de reglas aprendidas sin que muestre comprensión de la regla.	ID.- INSTRUCCIONES DIRECTAS	L1	La figura es el resultado de seguir cada uno de los trazos mediante el registro de la totalidad de las instrucciones monitoreado visualmente
INDUCCIONES FALSAS (ID)	G2	Posiblemente han reconocido una regularidad pero es independiente de las reglas que rigen la relación de los elementos. Sugiere procesos inductivos de manera incipiente, en su mayoría sus respuestas son erróneas	PD.- PROGRAMA DIRECTO	L2	A un programa directo se le denomina con un nombre y se utiliza el comando REPITE para abreviar la serie de instrucciones. Implica generalizaciones en su forma más sencilla
ANALISIS EXHAUSTIVO (AE)	G2	El alumno logra identificar un "Patrón de comportamiento aritmético" entre los términos concretos de la secuencia, pero no genera o registra una regla algebraica.			
RECURSIVO ARITMÉTICO (RA)	G3	De manera iterativa determina el término solicitado, por lo que ha generalizado de la manera más sencilla. Mason no establece categorías que discriminen esta forma de generalizar de una fórmula general. Y en este caso se ha alcanzado una expresión algebraica pero no general sino recursiva.	P M-PROGRAMAS MODULARES	L3	Un programa Directo hace las veces de un patrón que se repite para formar nuevas figuras.
GENERAL (EG)	G4	Se determina la regla general mediante la cual se puede determinar cualquier término de la secuencia de manera independiente. En esta expresión la variable hace las veces de un número general	PG.- PROGRAMA GENERAL	L4	Introduce una variable general, la cual permite utilizar el factor escalar que se desee, para realizar figuras de cualquier tamaño con el mismo programa

ANEXO 12 Tabla A014 RESUMEN CATEGORÍAS DE PRUEBA, JUSTIFICACIÓN, ARGUMENTACIÓN DE DIVERSOS INVESTIGADORES

Sémadéni	HAREL Y SOWDER (1998)	MARTÍNEZ RECIO (2001)	BALACHEFF	Krummheuer	Simón y Blume (1996)
PROCESOS DE DEMOSTRACIÓN		ESQUEMAS PERSONALES DE PRUEBA DE TIPO ARGUMENTACIÓN	TIPOS DE PRUEBA	ARGUMENTACIÓN	Niveles de justificación
<p>PRUEBAS PRAGMÁTICAS</p> <ul style="list-style-type: none"> • EMPIRISMO INGENUO • PRUEBA CRÍTICA • EJEMPLO GENERICO <p>PRUEBAS INTELLECTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> • EXPERIENCIA MENTAL • CALCULO SOBRE ENUNCIADOS 	<p>1. CONVICCIÓN EXTERNA</p> <ul style="list-style-type: none"> • RITUALES • AUTORITARIOS • SIMBÓLICOS <p>2. EMPÍRICOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • INDUCTIVOS • PERCEPTUALES <p>3. ANALÍTICOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • TRANSFORMACIONALES • AXIOMÁTICOS (deductivo) 	<p>1. Explicativa (no hay intención validativa)</p> <p>2. Empírico-inductiva (hay intención de generalizar)</p> <p>3. Prueba deductivo-informal.</p> <p>4. Prueba deductivo-formal (validación de los teoremas matemáticos)</p>	<p>1. El empirismo ingenuo</p> <p>2. La experiencia crucial</p> <p>3. El ejemplo genérico</p> <p>4. La experiencia mental</p>	<p>Argumentación analítica. Tautológica Da sentido a los significados mediante deducción de significados.</p> <p>Argumentación substancial.- Son informativas en el sentido que el significado de las premisas incrementa o cambia mediante su aplicación a un nuevo caso.</p>	<p>-Basadas en la autoridad -Demostraciones empíricas (inducciones a partir de casos particulares)</p> <p>- Justificación deductiva (a partir de un caso particular que se toma como genérico)</p> <p>- Argumento general posee una estructura deductiva, aunque sólo sea implícita.</p>
Reid 2002 p.107-110	Blum&Kirsch 1991,p.184	Hanna Gila	Mirela Rigo (2009)	Moreno & Godino, (2001)	
Razonamiento deductivo	Niveles de Prueba		Justificaciones*	Esquema personales de demostración matemática	
<p>-Instanciación o especialización (aplicando una regla general)</p> <p>- Hipotético deductivo (si fuera el caso para un número pudiera ser para el siguiente.</p> <p>Instanciaciones Argumentos hipotético-deductivos</p>	<p>-Experimentales</p> <p>- Pruebas intuicionales (pre-formales)</p> <p>-Pruebas formales puramente lógicas.</p>		<p>Conclusiones Plausibles o probables (Argumentaciones)</p> <p>Enunciados de carácter Necesario (demostración matemática)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Argumentación explicativa ❖ Prueba empírico-inductiva ❖ Demostración deductivo-informal ❖ Demostración deductiva-formal 	

* Justificaciones comprenden; pruebas, razonamientos, argumentos, argumentaciones, analogías, explicaciones de fórmulas, algoritmos, análisis de casos particulares

ANEXO 13 TABLA A015 RESUMEN DEL ANÁLISIS DE GENERALIZACIÓN DE ACUERDO CON LAS ETAPAS DEL CIRCUITO DE GENERALIZACIÓN DE MASON

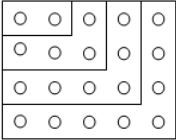
ALUMNA	DIAGNÓSTICO LAPIZ Y PAPEL	SESION 3 LOGO	SESION 3 / 4 LOGO	SESION 4 LOGO	SESION 5 LOGO	SESION 6 LOGO	SESION 7 LOGO
CONI	a).- Reconoce el patrón figurativo pero no el numérico y únicamente Generaliza el patrón numérico c).- Describe únicamente el patrón figurativo d).- No registra la regla en lenguaje algebraico	a).- Reconoce el patrón gráfico		a).- Reconoce el patrón en los problemas figurativos. Generaliza la secuencia de instrucciones con la palabra REPITE	a) Reconoce el patrón numérico b) Deduce la regla general c) Designa una literal para representar la variable como número general y lo manipula d) Registra un programa en Logo	a) Reconoce el patrón figurativo b) Deduce la regla general c) Designa un nombre para representar la variable como número general d) Registra un programa en Logo	a) No percibe el patrón en las instrucciones del programa de Logo c) Designa un a literal para representar la variable d).- Escribe un programa Logo pero no modifica el valor de la variable
NORA	a) No reconoce patrones b) No generaliza c) No describe d) No registra la regla en lenguaje algebraico		a).- Reconoce un patrón figurativo, (muestra tener problemas en el manejo del software para formar las figuras) .b).- Generaliza un patrón en las secuencias de instrucciones con la palabra REPITE	a).- Reconocen el patrón gráfico b).- Generalizan el patrón con la palabra REPITE	a) Reconoce un patrón en la estructura de un programa c) Designan una literal para representar la variable como número general d) Crea una expresión en lenguaje Logo e)-Manipulan el valor de la variable mediante coeficientes	a) Reconocen el patrón gráfico b) Identifican patrones en la secuencia y los abrevia con la palabra REPITE c) Designan un literal para representar la variable como número general. d) Registran un programa en Logo	Logran crear un programa general sin poder resolver las figuras no perciben el patrón en las instrucciones del programa Registran un programa Logo Utilizan una variable pero no manipula su valor la variable lo general
MARI	a) No reconoce patrones b) No generaliza c) No describe d) No registra la regla en lenguaje algebraico						
TANYA	a) Reconoce patrones gráficos y numéricos b) Generaliza el patrón gráfico, mas no el numérico c) No describe el patrón d) No registra la regla en lenguaje algebraico	a).- Reconoce el patrón gráfico		a).- Reconoce patrones gráficos b).- Generaliza un patrón en los comandos con la palabra REPITE c) Describe un patrón empleando una variable genérica	a) Reconoce patrones numéricos b) Deduce la regla general c) Designa una literal para representar la variable como número general y modifica su valor d) Registra un programa en Logo	a) Reconoce un patrón gráfico b) Deduce la regla general c) Designa un nombre para representar la variable como número general. d) registra un programa en Logo	a) Reconoce patrones gráficos b) Deduce la regla general c) Designa un literal para representar la variable como número general y lo modifica su valor d) Registra un programa en Logo

ALUMNA	DIAGNÓSTICO	SESION 3	SESION 3/4	SESION 4	SESION 5	SESION 6	SESION 7
LAURA	<p>a) Reconoce patrones figurativos y numéricos</p> <p>b) No generaliza</p> <p>c) No describe</p> <p>d) No registra la regla en lenguaje algebraico</p>			<p>a).- Reconoce el patrón figurativo</p> <p>b).- Generaliza el patrón con la palabra REPITE</p> <p>c)- Registra el patrón en lenguaje formal de Logo</p>	<p>a) Reconoce el patrón en las instrucciones</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa una literal para representar la variable como número general y modifica su valor con coeficientes.</p> <p>d) Escribe un programa en Logo</p>	<p>a) Reconoce el patrón gráfico</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa un nombre para representar la variable como número general.</p> <p>d) Escribe un programa en lenguaje formal de Logo</p>	<p>a)- No percibe los patrones dentro de las instrucciones del programa</p> <p>c) Designa una literal para representar un número general. Aun que no logra los programas que resuelven todas las figuras..</p>
LINA	<p>a).- Reconoce el patrón figurativo pero no el numérico</p> <p>b).- Generaliza el patrón numérico pero no el figurativo</p> <p>c).- Describe únicamente el patrón figurativo</p> <p>d).- No registra la regla en lenguaje algebraico.</p>			<p>a).- Reconoce un patrón en las instrucciones de un programa</p> <p>b).- Generaliza con la palabra REPITE</p> <p>c) Describe el patrón</p> <p>d) Registra un programa en Logo</p>	<p>a) Reconoce el patrón en las instrucciones</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa una literal para representar la variable como número general y modifica su valor con coeficientes.</p> <p>d) Escribe un programa en Logo</p>	<p>a) Reconoce el patrón gráfico</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa un nombre para representar la variable como número general.</p> <p>d) Registra un programa en lenguaje formal de Logo</p>	<p>a) No percibe los patrones dentro de las mismas instrucciones del programa b) Designa un a literal para c) Representa una variable como un número general Registra un programa en lenguaje formal de Logo pero presenta dificultades para resolver cada una de las figuras.</p>
YOLA	<p>a) No reconoce patrones</p> <p>b) No generaliza</p> <p>c) No describe los general</p> <p>d) No registra lo general en lenguaje algebraico</p>		<p>a).- Reconoce un patrón figurativo, (muestra dificultades con la dirección de la tortuga)</p> <p>b).- Generaliza el patrón con la palabra REPITE</p> <p>c) Registra un patrón en lenguaje de Logo</p>	<p>a).- Reconoce el patrón gráfico</p> <p>b).- Generaliza el patrón con la palabra REPITE</p> <p>d)-Registra un programa en Logo</p>	<p>a) Reconoce el patrón numérico</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa una literal para representar la variable como número general y lo manipula.</p> <p>d) Registra un programa general en Logo</p>	<p>a) Reconoce un patrón figurativo</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa un nombre para representar la variable como número general.</p> <p>d) Registra un programa general en Logo</p>	<p>a) Reconoce un patrón figurativo</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa un nombre para representar la variable como número general.</p> <p>d) Registra un programa general en Logo</p>
AÍDA	<p>a).- Reconoce el patrón figurativo pero no el numérico</p> <p>b).- Generaliza con el patrón numérico pero no el figurativo</p> <p>c).- Describe únicamente el patrón numérico.</p> <p>d).- No registra ninguno de los dos ámbitos en lenguaje algebraico.</p>		<p>a).- Reconoce el patrón figurativo, (muestra problemas para controlar la dirección de la tortuga)</p> <p>b).- Generaliza el patrón con la palabra REPITE</p>	<p>a) Reconoce el patrón numérico</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>d) Registra un programa general en Logo</p>	<p>a) Reconoce el patrón numérico</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa una literal para representar la variable como número general y lo manipula.</p> <p>d) Registra un programa general en Logo</p>	<p>a) Reconoce el patrón numérico</p> <p>b) Deduce la regla general</p> <p>c) Designa una literal para representar la variable como número general y lo manipula.</p> <p>d) Registra un programa general en Logo</p>	<p>a) No percibe los patrones dentro de las instrucciones del programa</p> <p>c)- Designa un a literal para representar a la variable como un número general y d)-Logra programas generales pero presenta dificultades para resolver cada una de las figuras.</p>

GEMA	a).- Reconoce el patrón figurativo pero no en un contexto numérico .b).- Generaliza el patrón numérico pero no el figurativo c).- Describe únicamente el patrón numérico d).- No registra ninguno de los dos en lenguaje algebraico		a) Reconoce el patrón figurativo b) Generaliza el patrón con la palabra REPITE	ALUMNA	DIAGNÓSTICO	SESION 3	SESION 3/4
ANA	a).- Reconoce el patrón grafico pero no el numérico b) Generaliza el patrón gráfico, mas no el numérico c) No describe d) No escribe en lenguaje algebraico		a) En 2 de 5 ejercicios reconoce el patrón b) En 2 de 5 ejercicios Generaliza con REPITE	a).- Reconoce el patrón grafico b).- Generaliza el patrón con la palabra REPITE d) Registra un programa general en Logo	a) No reconoce patrones en las instrucciones b) No generaliza d) No registra un programa en lenguaje Logo		a) No percibe los patrones dentro de las instrucciones del programa c) Designa un a literal para Representar a la variable como un número general y logra programas generales pero presenta dificultades para resolver todas las figuras.
T O S D U O J S E T L O S S	50% del total de las alumnas reconoce un patrón, y más de 70 % cuando es figurativo Menos de la mitad pudo generalizar, y tan solo una minoría (20%) logró describirlo. Ninguna alumna pudo expresar la generalidad en lenguaje algebraico	Las dos alumnas observadas reconocen un patrón gráfico.	En su mayoría las alumnas reconocen un patrón figurativo y generalizan. La problemática más frecuente al principio fue la confusión de izquierda con derecha en los giros de la tortuga, lo que impidió concretar las figuras correctamente.	Cerca de la totalidad de los sujetos excepto uno logra: Identificar patrones, Deducir la regla general Designa un nombre o una literal para representar el número general y logra crear un programa general que resuelva el problema.	Siete de nueve alumnas logra: lidentificar patrones, deducir la regla general designar un nombre o una literal para representar el número general modificar su valor mediante coeficientes y crear un programa general que resuelva el problema	La totalidad de los sujetos logro: Identificar patrones, Deduce la regla general Designa un nombre o una literal para representar la variable como número general y Crear un programa general que resuelva el problema	La totalidad de las alumnas percibe como número general a la variable a la que le designa una literal para representarla. No percibieron patrones dentro de las instrucciones Algunas alumnas solo lograron algunas figuras pero crearon programas generales en los que integraron una variable.

CATEGORIAS DE ANÁLISIS; a)- Reconoce un patrón, distinguiendo lo que varía de lo que no varía; b)- Deducir la regla general que rige la relación entre los elementos del problema; c)- Utiliza una letra o el nombre para designar una variable, Interpreta la variable como un número general; d).- Crea una expresión algebraica en el contexto de Lápiz y Papel, o un programa general para el de Logo; e)- Utiliza una sola variable para representar diferentes magnitudes de la variable modificándola por medio de coeficientes.

ANEXO 14 TABLA A016 MUESTRA DE RESUMEN DEL ANÁLISIS DEL DIAGNOSTICO DE GENERALIZACIÓN. Las abreviaturas utilizadas son: RP = Reconoce el patrón, NR = No lo reconoce, G = Generaliza, NG = no generaliza D = Describe la generalidad, ND= No la describe E= Expresa en Lenguaje algebraico. NE= No lo expresa (Las actividades fueron realizadas con lápiz y papel).

PROBLEMAS		Alumnas		Propósito (RP, G, D, E)			
<p>¿Puedes dibujar la figura que sigue?</p> <p>1. $\triangle \circ \square \triangle \circ \square$ _____</p> <p>2. $\triangle \square \square \circ \square \square$ _____</p>		<p>Figura 1: $\begin{matrix} \circ \circ \\ \circ \circ \end{matrix}$</p> <p>Figura 2: $\begin{matrix} \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \end{matrix}$</p> <p>Figura 3: $\begin{matrix} \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \end{matrix}$</p> <p>Fig. 10 _____ Fig. 25 _____ Fig. 100 _____</p>		 <p>Ítem 3 Propósito (RP, G, D, E) Expresión de un número general</p>		<p>Ítem 3</p> <p>¿Cuántos círculos hay en el rectángulo “n”? _____</p> <p>¿Cómo lo sabes? _____</p> <p>Propósito (RP, G, D, E)</p>	
ÍTEM 1		ÍTEM 2		ÍTEM 3			
Lizbeth	RP	Reconoce el patrón gráfico en las dos series	RP G	Las repuestas fueron correctas en los 3 casos. Generaliza, lo que se observa cuando acierta a extender la serie hasta el 100.	RP G D	Las respuestas son correctas en las dos preguntas para n=5 y n=100 Describe lo general de la siguiente manera: “Multiplicando el número del rectángulo por 2”	No resolvió el ítem
Gloria	RP	Reconoce el patrón gráfico en las dos series	RP G	Resuelve dos de tres problemas, La forma en que deduce el número siguiente, fue mediante la reconstrucción de las series formando una tabla. Eg. 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 ... 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41...	RP G D	Resuelve correctamente las dos preguntas. Describe el patrón: “Se multiplica el n x 2 pues dos son los círculos que hay en un rectángulo y se van aumentando 2”	No resolvió el ítem.
Guadalupe	RP	Reconoce el patrón gráfico en las dos series.	RP G	Resuelve correctamente los tres problemas. La solución la obtiene de manera recursiva mediante tabulación. 1=5 2=7 3=9 4=11	NR NG ND	No reconoce el patrón Gráfico, ni generaliza, consecuentemente no describe.	No resolvió el ítem