CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

La derivada: de lo conceptual a lo algorítmico. Un estudio de caso con profesores de bachillerato.

TESIS

Que presenta

VIRGINIA GARRIDO ADAME

Para obtener el grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de Tesis:
DR. ANTONIO RIVERA FIGUEROA

México D. F. febrero de 2014

Agradezco al CONACYT el apoyo económico otorgado para la realización de mis estudios de maestría.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Antonio Rivera Figueroa por el tiempo y esfuerzo dedicado a la realización de esta tesis. Muchas gracias por todas las reflexiones tan interesantes e importantes que me hizo hacer sobre los conocimientos matemáticos involucrados en este trabajo de investigación.

Agradezco al Dr. Hugo Mejía y al Dr. Gonzalo Zubieta por aceptar ser mis sinodales. Las observaciones hechas a esta tesis contribuyeron a su mejoramiento; de manera especial agradezco el apoyo brindado para la presentación del examen.

Resumen

Este trabajo de investigación reporta los resultados de una exploración que se llevó a cabo sobre la comprensión de once profesores de cálculo de nivel medio superior, acerca del concepto de la derivada de una función. En especial, se averiguó sobre la articulación entre la parte conceptual y algorítmica de la derivada por parte de los profesores en la resolución de problemas.

La recolección de datos se hizo mediante un cuestionario de doce problemas, de los cuales, uno era de carácter conceptual, dos de carácter operatorio y los nueve restantes para su solución requerían de una conexión entre los conceptos que involucra la derivada de una función y la destreza para calcular su derivada.

El análisis cualitativo de los datos obtenidos, muestra que el desempeño de los profesores para resolver problemas que requieren de la articulación entre el aspecto conceptual y el aspecto algorítmico del concepto de derivada de una función no es satisfactorio.

En particular, los profesores no articularon adecuadamente el carácter puntual de la derivada con su interpretación geométrica. Por otra parte, se concluye de los procedimientos que llevaron a cabo en la solución de algunos problemas, que ellos conciben el proceso de derivación como la obtención de una fórmula a partir de otra mediante la aplicación formal de las reglas de derivación y no como el proceso para obtener la función derivada apoyado en un análisis previo sobre la derivabilidad.

Abstract

The present paper reports the results of a reserch, which it is an exploration about undestanding of eleven teachers senior high school, about the derivate of function. Especially, we investiged about the articulation between the conceptual part and algorithmic of the derivative in problem solving.

The data collection was done through a questionnaire twelve issues, of which one was conceptual character, two operative character and the remaining nine for solution required a connection between the concepts involving the derivative of a function and the ability to calculate its derivative.

The qualitative analysis of the data shows that the performance of teachers to solve problems that require the joint between the conceptual aspect and appearance the algorithmic concept of derivative of a function is not satisfactory.

Particularly, the teachers did not properly articulate character punctual of the derivative with its interpretation geometric. On the other hand, it is concluded that the procedures performed in the solution of some problems, they conceived the derivation process as obtaining a formula from another through formal application of the rules of derivation and not as the process to obtain the derivate function leaning on a previous analysis on the derivability.

Índice general

Introducción

El cálculo diferencial e integral ha sido reconocido como el instrumento más efectivo para la investigación científica que jamás hayan producido las Matemáticas. Concebido para el estudio del cambio, el movimiento y la medición de áreas y volúmenes, el cálculo es la invención que caracteriza la revolución científica del siglo XVII.

El cálculo diferencial e integral es parte de todo currículum de enseñanza media superior y superior de las carreras de ciencias e ingeniería. También suele serlo del currículum de otras carreras como son ciencias biológicas y economía.

Uno de los conceptos centrales del cálculo es la derivada. La comprensión de este concepto y sus significados se requiere para la modelación de sistemas en diversos contextos o disciplinas. La derivada de una función en un punto dado brinda la oportunidad de mostrar al estudiante que la Matemática es aplicable, y comunicarle que este concepto entraña un gran potencial para el estudio de diversos problemas en varias áreas del conocimiento.

Numerosas investigaciones muestran que los estudiantes no alcanzan a comprender el concepto de derivada a un nivel que les permita aplicarlo, pareciera que los profesores sólo aspiran a que los estudiantes adquieran destreza para calcular derivadas, olvidando la importancia de comprender este concepto para su correcta aplicación en la solución de problemas.

En este trabajo se presentan los resultados sobre una investigación realizada con once profesores de educación media superior, sobre uno de los temas medulares del cálculo: la derivada. Este reporte contiene cinco capítulos, a continuación se menciona de qué trata cada uno de ellos.

En el capítulo 1 se da una breve descripción de las dificultades que tiene la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, se describen los motivos que llevaron a la realización de este trabajo, así como los objetivos del mismo; finalmente se plantean las preguntas de investigación.

En el capítulo 2 se exponen los temas de matemáticas que subyacen en nuestra investigación. En él se precisa a qué nos referimos por parte conceptual y parte algorítmica del tema de derivada, es importante aclarar que dichos conocimientos han sido expuestos con la finalidad de proporcionar al lector un amplio panorama de lo que involucra el concepto de derivada, más no para que dichos conocimientos sean abordados por un profesor de educación media superior con sus estudiantes. Al final de este capítulo se detalla la propuesta de Carpenter y Lehrer sobre lo que es "Aprendizaje con entendimiento"

En el capítulo 3 se expone la metodología seguida en esta investigación, se da a conocer el instrumento para la recolección de datos, éste es un cuestionario sobre el tema de "derivada de una función" que consta de 12 problemas, cada uno con un propósito específico. También se describe a los 11 participantes, así como la forma para recolectar los datos.

El capítulo 4 contiene el análisis de los datos obtenidos. Para cada pregunta del cuestionario, se concentraron las once respuestas dadas y se analizaron de acuerdo al propósito planteado en el capítulo anterior. Además se mencionan algunas formas de actividad mental que ayudarían a una mejor comprensión por parte del profesor.

En el capítulo de conclusiones, se dan a conocer las respuestas a las preguntas de investigación, así como otro tipo de reflexiones hechas a partir de las respuestas obtenidas.

En la parte final de este trabajo como apéndice se muestra el instrumento utilizado en la recolección de datos.

Capítulo 1

Planteamiento del problema y preguntas de investigación

1.1. Antecedentes y justificación

El cálculo desde su origen ha jugado un papel muy importante en la matemática y en la enseñanza de la matemática. Con el paso del tiempo y con la evolución de la matemática la problemática de la enseñanza del cálculo se ha hecho cada vez más compleja pero más compartida, desde hace tiempo se discute en ambientes más abiertos, más numerosos y especializados. El siguiente extracto del discurso que dirigió en 1910 W. B. Ford, al asumir la presidencia de la American Mathematical Society así lo muestra:

> *...De las diversas ramas de la matemática indudablemente ninguna ha recibido tanta atención sobre el lado pedagógico durante los años recientes como el cálculo...*

Y añade; dos elementos que requieren atención prioritaria son los libros de texto y las aproximaciones sucesivas al cálculo por los alumnos. Respecto a los libros de texto la recomendación apuntaba hacia los contenidos, que estuvieran ligados estrechamente con la física, en problemas cotidianos o de laboratorio; además de sustituir el uso de los infinitésimos por una definición precisa de los términos utilizados y sobre todo, que el primer curso ordinario de cálculo debiera ser más gráfico, no en el sentido de emplear frecuentemente figuras geométricas para ilustrar hechos analíticos, sino adoptar algunas de las ideas que posee propiamente el llamado *cálculo gráfico* (Ford, 1910).

El tema de los libros de texto de cálculo ha transitado de un mero comentario a un objeto de investigación. En 1961 en el Coloquio organizado por el I.C.M.I. en Lausana Suiza W.H. Cockcroft presentó un análisis de los libros de texto de cálculo usados en el periodo 1900 a 1960 en Inglaterra en la ponencia intitulada *Some Notes on British Calculus Text Books* . Este discurso se suma a una serie de reflexiones y actividades sistemáticas que colocan sobre la mesa de la comunidad científica el problema de la enseñanza del cálculo. La preocupación se ha incrementado por atenderlo. En las últimas décadas los eventos que congregan a las comunidades científicas y docentes para discutir el problema de la enseñanza del cálculo si no han crecido al menos si tienen mayor atención; en México por ejemplo, en 1987 dentro de las actividades del V Coloquio del Departamento de Matemáticas del

CINVESTAV, el curso dirigido a la enseñanza del cálculo: Acerca del Cálculo Diferencial e Integral, subraya en su presentación que la organización típica que conserva el curso de cálculo coincide con la organización y diseño de los libros de texto editados en el último siglo, los cuales dedican una gran parte del tiempo a la teoría de conjuntos, pasan por el producto cartesiano, la definición de función y las funciones continuas; después aparece la derivada enseguida la integral y las aplicaciones siempre están al final de los temas tratados o no se incluyen.

Regresando a los foros de discusión del problema de la enseñanza del cálculo, estos no sólo se abrieron en México sino también en otros países. En ese mismo año en los Estados Unidos de Norteamérica Robert White en el Coloquio Nacional Calculus for a New Century, realizado en 1987 señalaba:

> *Aproximadamente un millón de jóvenes estudian cálculo cada año en los Estados Unidos, poco menos del 25 % de ellos sobreviven para ingresar al ducto de las ciencias o de la ingeniería. El cálculo es el filtro crítico que bloquea el acceso a las carreras profesionales para la gran mayoría de los que se enrolan. La elite que sobrevive es pobremente motivada para llenar las escuelas de graduados, en muy pocos recaen las necesidades académicas, de la industria y de los negocios,...*

Este hecho llevó a Robert White, presidente de la National Academy of Engineering, a sugerir que el cálculo debe ser más que un filtro una bomba que impulse en el ducto científico de la nación. Hacer del cálculo una bomba es un reto para los educadores y científicos, traspasar la puerta que el cálculo abre es un reto para los estudiantes.

Una de las reuniones más recientes donde se ha discutido el problema de la enseñanza del cálculo fue el 9° Congreso Internacional de Educación Matemática, ICME-9 por sus siglas en inglés, realizado en Japón a mediados del año 2000, en este evento uno de los reportes dentro de los grupos de estudio de tópicos, TSG por sus siglas en inglés, llevó por título: The teaching and Learning of Calculus. Este grupo compuesto por 70 personas de distintos países discutió entre otros temas la enseñanza del cálculo en sus respectivos países, el uso de la tecnología en los cursos de cálculo y la reforma a los libros de texto.

Acciones como las anteriores han motivado la realización de investigaciones relacionadas principalmente con las dificultades que enfrentan los estudiantes en los cursos de cálculo (Tall, 2011; Hitt 2003; Artigue, 1993). Algunas de ellas han permitido comprender mejor algunos de los obstáculos que enfrentan los estudiantes en el campo conceptual, y eso ha motivado el surgimiento de cambios curriculares (Imaz, 1985; Artigue, 1996; Mochón, 1992) y el diseño de estrategias didácticas (DAmbrosio, 1979; Flores, 1991). La mayoría de estas investigaciones se han concentrado en la búsqueda de esos obstáculos considerando que una vez identificados se pueden diseñar propuestas didácticas que sean alternativas bondadosas para su aprendizaje.

En las instituciones de educación media superior, que pertenecen a la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI) según los planes y programas el tema de "derivada" se enseña en el cuarto semestre, iniciando con el subtema "razón de cambio promedio e interpretación geométrica", en ese mismo semestre previamente se abordan los temas: Pre-cálculo, Funciones y Límites. (Las intituciones en las que trabajan los profesores con los que se realizó la recolección de datos de esta investigación pertenecen a la DGETI.)

El propósito planteado para la asignatura de cálculo diferencial por la DGETI es:

> *Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas (sistemas y reglas o principios medulares) para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que den solución a problemas surgidos de la actividad humana, tales como: la distribución inequitativa de los recursos económicos y la propagación rápida de enfermedades, entre otros; así como de fenómenos naturales (cambio climático, contaminación por emisión de gases,etc.), aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.*

En otros programas de cálculo de bachillerato hay la tendencia a desarrollar en el alumno la habilidad, destreza y el uso mecanizado de las reglas y técnicas. Estos propósitos se observan no sólo en el curso de cálculo sino en todo el currículum de matemáticas en el nivel medio superior (De la Peña, 2002). El desarrollo de habilidades, destrezas y el uso mecanizado de reglas y técnicas en sí misma no es mala, el problema radica en que frecuentemente el estudio del cálculo no se acompaña de la comprensión de esas reglas y técnicas y entonces el resultado es un aprendizaje sin comprensión caracterizado por su fragilidad.

La memorización de hechos o procedimientos en general provoca inseguridad de cuándo y cómo usarlos, este aprendizaje trae como consecuencia que el estudiante tenga dificultades en la construcción y uso de los conceptos (Amit and Vinner, 1990). Algunas investigaciones señalan que el origen de las dificultades en el aprendizaje se encuentra en el aula misma, más específicamente, en la conducción de la clase por el profesor (Lloyd & Wilson, 1998). En años recientes, diversas investigaciones por ejemplo Ponce (2007), Santos-Trigo & Rivera-Figueroa (2010) y Rivera, Gracía y Díaz (2013) se han enfocado en estudiar las dificultades en el aprendizaje del cálculo, en los distintos niveles educativos. En estos trabajos, se hace mención a un problema presente en el aprendizaje del cálculo, en el cual los profesores poseen en gran medida la responsabilidad, debido a que no tienen el conocimiento matemático necesario que *equilibre* lo operativo y lo formal, ocasionando una limitada formación matemática en el alumno.

1.1.1. Aprendizaje de las matemáticas con comprensión

Hacia mediados del siglo pasado Prenowitz (1951) atribuía las dificultades en el aprendizaje del cálculo, en un primer curso, a los obstáculos propios e inherentes del cálculo mismo. Para Prenowitz, los conceptos del cálculo eran difíciles de comprender por estudiantes que se iniciaban en el tema y, por lo tanto, también difíciles de aplicar en la resolución de problemas.

El problema del aprendizaje del cálculo sin comprensión por parte de los alumnos prevalece en la actualidad; aún con los recursos tecnológicos y la riqueza bibliográfica sobre el tema, todavía existe esa problemática. En el mejor de los casos, los estudiantes adquieren cierta destreza en las técnicas pero no poseen una verdadera comprensión. Sin duda alguna, los estudiantes requieren del apoyo e instrucción de sus profesores ya sea que se formen en el aula, activa o pasivamente. En el aprendizaje de las matemáticas, en particular del cáclulo, el profesor es fundamental, ya que organiza el conocimiento y diseña estrategias de aprendizaje, plantea y resuelve problemas y debiera hacer discusiones y disertaciones con los alumnos sobre los temas y conceptos.

La extensión y calidad del aprendizaje de los estudiantes depende de los tipos de experiencias que el profesor les proporcione (NCTM, 2000). Es importante ayudar a los estudiantes a asimilar los conceptos de la disciplina, a involucrarlos en el proceso de su comprensión, para lo cual es fundamental la intervención en alto grado de sus profesores (Skemp, 1980). Freudenthal (1973) afirmaba al respecto:

> *La persona que enseña debe saber más que el que está aprendiendo y lo debe saber no en el momento en que está realizando la acción de enseñar, sino antes.*

En este modelo de enseñanza-aprendizaje la responsabilidad del profesor es comunicar de manera correcta al estudiante los conceptos de la disciplina, esto le demanda una comprensión clara de los mismos. Dewey (1916) ya alertaba sobre el impacto nocivo de una enseñanza sin comprensión; señalando que afecta la habilidad del estudiante para reflexionar en el sentido de lo que hace.

Parafraseando a Brophy (1991) podemos decir que la buena comprensión del profesor le permitirá entre otras cosas diseñar situaciones didácticas que promuevan el aprendizaje con comprensión. En caso contrario, únicamente repetirá lo memorizado, lo cual provocará en los alumnos frustración. En general los sentimientos negativos que la gente tiene respecto de las matemáticas se atribuyen, correcta o incorrectamente, a sus profesores (Boas, 1981).

Otras investigaciones, por ejemplo, Borbón (2003), Ponce (2007), Lima (2013) muestran que la enseñanza y aprendizaje de la derivada últimamente se ha basado en operaciones algebraicas, desprovistas de toda reflexión o análisis. Las circunstancias han conducido a priorizar la destreza, se puede afirmar, que al concluir un curso de cálculo diferencial, los estudiantes sólo aprenden a manipular funciones, teoremas, símbolos algebraicos y las reglas de derivación que les permiten obtener una función a partir de otra.

1.2. Planteamiento del problema y preguntas de investigación

Partiendo de la necesidad de un aprendizaje con comprensión, lo cual requiere de una enseñanza con profesores que cuenten con los conocimientos y por supuesto con la comprensión misma de lo que enseñan, hemos llevado a cabo una investigación que consiste en un estudio de caso, realizada con un grupo de once profesores del nivel bachiilerato, con la cual tratamos de averiguar sobre sus conocimientos y comprensión acerca del concepto de derivada así como la articulación entre lo conceptual y lo algorítmico.

La comprensión de la derivada y sus significados es fundamental en los futuros estudios universitarios y es causa de muchos fracasos de los estudiantes pero, como hemos mencionado, el profesor juega un papel muy importante en los éxitos y fracasos de sus alumnos.

Por lo anterior nos planteamos la siguiente pregunta general:

- ¿Cuál es el desempeño del profesor en la resolución de problemas, para los cuales se requiera articular lo conceptual con lo algorítmico?

Para responder esta pregunta general nos propusimos responder las siguientes preguntas específicas:

- ¿Concibe el profesor la derivada de una función como un límite?
- ¿Comprende el profesor el carácter puntual de la derivada?
- ¿Comprende el profesor la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto que le permita transitar de lo conceptual a lo geométrico?

- ¿Entiende el profesor que el proceso de derivación no se reduce a obtener la fórmula de la derivada mediante la aplicación formal de las reglas de derivación sino a la obtención de la función derivada apoyado en un análisis previo sobre la derivabilidad?

Con el propósito de responder las preguntas de investigación, nos planteamos los siguientes objetivos:

(a) Diseñar cuestionarios con preguntas cuyas respuestas requieran articular el aspecto conceptual y el algorítmico de la derivada.

(b) Averiguar sobre el conocimiento que tiene los profesores acerca de las propiedades básicas de la derivada y su interpretación geométrica.

(c) Diseñar situaciones problemáticas donde se ponga en juego el concepto de derivada y su interpretación geométrica de manera independiente e interconectada.

(d) Diseñar cuestionarios donde se planteen preguntas o problemas para cuya respuesta se requiera una comprensión del concepto de derivada.

Capítulo 2

Marco conceptual

2.1. Introducción

En este capítulo exponemos lo que significa la derivada. Este concepto nace a la par con sus mismos significados, físico y geométrico. Actualmente hay varios acercamientos al concepto de derivada que conllevan cierto tipo de formalidad que tienen como propósito precisar su naturaleza como ente matemático. En ocasiones los autores, con sus acercamientos, tienen la intención de ubicarlo en un contexto tendiente a su generalización futura en la construcción del conocimiento matemático, por ejemplo su generalización al concepto de derivada para funciones de varias variables. En este sentido hay diversos niveles de precisión, pero en la mayoría de los casos los acercamientos a la derivada se sustentan en el concepto de límite, ya sea para presentarla como razón de cambio o como la mejor aproximación polinomial de primer grado a la función alrededor de un punto.

En esta diversidad de acercamientos o concepciones de la derivada hemos de distinguir lo adecuado o pertinente para el bachillerato. Su pertinencia está determinada, por una parte, por los objetivos de la enseñanza del cálculo en ese nivel y, por otra parte, por la formación matemática del estudiante, previa a su estudio del cálculo, esto incluye su madurez matemática para comprender diversos conceptos matemáticos.

En este capítulo explicaremos lo que vamos a entender por la parte conceptual de la derivada, pues si bien como concepto podemos decir que la derivada de una función en un punto es un límite, de hecho es el límite de un cociente de diferencias, este concepto va acompañado de otros conceptos como son rectas tangentes a curvas en el terreno geométrico y velocidades instantáneas o en general razones de cambio instantáneas en el terreno de la física. Estos conceptos se sustentan en el de derivada, pero a su vez justifican su existencia, por lo que podemos considerar que el concepto de derivada consiste no sólo del límite de un cociente de diferencias sino de los mismos significados de estos cocientes y de su límite.

Por la parte algorítmica de la derivada nos referimos a las técnicas para obtener la derivada de una función en un punto y así obtener la función derivada de una función.

Las técnicas son, por ejemplo, las reglas de derivación, icluyendo la regla de la cadena que es la que nos permite obtener la derivada de una composición de funciones.

2.2. Parte conceptual de la derivada

A continuación se presentan algunas definiciones de derivada que aparecen en la literatura matemática, con el propósito de ilustrar la variedad de definiciones que a lo largo de cierto tiempo han aparecido. Como se dijo al inicio de este capítulo, éstas han sido escritas de acuerdo al objetivo que su autor persigue, ya sea la generalización, la compatibilidad con otras materias o el nivel educativo en el que se pretende trabajar.

2.2.1. Acerca de la definición de derivada

Actualmente el cálculo ha tenido grandes avances, de tal forma que conceptos como límite, función, continuidad, entre otros, han sido detallados con mayor precisión que en siglos anteriores. Esto se puede apreciar en algunas definiciones, que al usar frases como "cuando h se hace indefinidamente pequeño", "Δx se acerca o tiende a 0" y "así como x se aproxima a x_1", recuerdan el uso del lenguaje intuitivo y no del formal que en nuestra época se utiliza. Observemos que en algunas definiciones se utiliza el término *coeficiente diferencial* en lugar de derivada.

Definición 1 (Todhunter, 1852)

Sean $\phi(x)$ una función cualesquiera de x y $\phi(x+h)$ la misma función pero ahora de $x+h$. Entonces el valor del límite

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h},$$

cuando h se hace indefinidamente pequeño, se llama ***coeficiente diferencial*** de $\phi(x)$ con respecto a x.

Observemos que en esta definición el autor se refiere a $\phi(x)$ como función de x y a $\phi(x+h)$ como función de $x+h$. Actualmente $\phi(x)$ es el valor de la función en x que en breve decimos la función en x, del mismo modo $\phi(x+h)$ es la función en $x+h$. En esta definición el autor utiliza el término coeficiente diferencial en lugar de derivada.

Definición 2 (Townsend and Goodenough, 1910)

Sean $f(x) = y$ una función y x_1 un punto donde la función se encuentre definida. Considérese la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

en donde $\Delta x = x - x_1$. Para $\Delta x = 0$, esta razón toma la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ y debe ser evaluada calculando su límite cuando Δx se acerca o tiende a 0. Este límite recibe el nombre de **derivada** de $f(x)$ con respecto a x para el punto $x = x_1$ y se denota por $D_x f(x_1)$. Es decir,

$$D_x f(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

En esta definición, el autor utiliza la variable y para denotar el valor de $f(x)$, también utiliza la notación Δ para los incrementos. Resulta interesante que el autor se refiera a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ como un objeto matemático a calcular mediante un límite. Por otro lado, a diferencia de otras definiciones, en la definición dada por Towsend y Goodenough no se hace referencia sobre la existencia del límite del cociente de diferencias para afirmar la existencia de la derivada.

En las siguientes definiciones debidas a Lima, Kosmala y Pierpont notemos que definen la derivada de una función para puntos de acumulación del dominio de la función que se va a derivar. Esto recobra sentido cuando consideramos funciones definidas en conjuntos que nos son intervalos, se trata de una generalización del concepto de derivada que va más allá del cálculo para el bachillerato e ingeniería, incluso para el cálculo de los primeros años de una carrera de matemáticas. Con estas definiciones estamos en posibilidad de hablar de la derivada, por ejemplo, de una función definida en el conjunto $\{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$.

Definición 3 (E. Lages Lima, 1970)

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ y $a \in X \cap X'$.[1] Se dice que f es ***derivable*** en el punto a, si el límite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

existe. Si este es el caso, se dice que $f'(a)$ es la ***derivada*** de f en el punto a.

Definición 4 (Kosmala, 1999)

Sean f : D $\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación de D con $a \in$ D. La **derivada** de f en a se define por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

siempre y cuando este límite sea finito. Si tal es el caso se dice que f es **diferenciable** en $x = a$.

Definición 5 (Pierpont, 1905)

Sea $y = f(x)$ una función definida en el dominio D para el cual a es un punto límite propio.[2] El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad x \in D, \tag{2.1}$$

recibe el nombre de ***cociente de diferencias*** en a. Si ponemos $x = a + h$, entonces tenemos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \tag{2.2}$$

Si $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existe, finito o infinito, entonces

$$\eta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{2.3}$$

recibe el nombre de ***coeficiente diferencial*** de $f(x)$ en a y se denota por $f'(a)$.

[1] X' denota al conjunto de puntos de acumulación de X.

[2] p es punto límite propio de D, si $p \in D$ y toda vecindad de p contiene una infinidad de puntos de D.

La siguiente definición debida a Veblen considera $+\infty$ y $-\infty$ como posibles valores de la derivada. También incluye estos valores Pierpont en la definición antes expuesta.

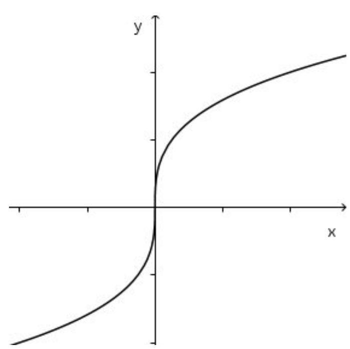
Definición 6 (Veblen, 1907)

Si la razón $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ se aproxima a un límite definido, finito o infinito, así como x se aproxima a x_1, la ***derivada*** de f en el punto x_1 es el límite

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

La razón que tienen estos autores para incluir $+\infty$ y $-\infty$ es incorporar la rectas tangentes verticales en la interpretación geométrica de la derivada. Obsérvese el siguiente ejemplo:

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $\psi(x) = \sqrt[3]{x}$. Enseguida se muestra su gráfica.

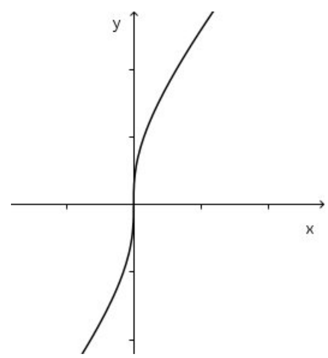


La figura sugiere que la recta $x = 0$, es decir, el eje y es la recta tangente a la gráfica de la función ψ en el punto $x = 0$, esto se debe a que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = +\infty \tag{2.4}$$

La inclusión de $+\infty$ y $-\infty$ en la definición tiene el inconveniente de que hay que excluir estos casos en la mayoría de los teoremas sobre derivada, en particular en las reglas de derivación. La aplicación formal de la regla de derivación para la suma de dos funciones $f(x)+g(x)$ no aplica por ejemplo cuando $f'(0)=+\infty$ y $g'(0)=-\infty$.

Consideremos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}+x$. Su gráfica se presenta a continuación.



La derivada de la función $f(x)$ en $x=0$ es infinito, en efecto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+1\to+\infty$$

Si $f(x)=-\sqrt[3]{x}+x$ y $g(x)=-\sqrt[3]{x}$ y construimos la función $h(x)=f(x)+g(x)$, es decir, $h(x)=\sqrt[3]{x}+x-\sqrt[3]{x}=x$, tendríamos que $h'(0)=1$. Así que $+\infty-\infty=1$.

Por otro lado, si $f_1(x)=-\sqrt[3]{x}+2x$ y $g_1(x)=-\sqrt[3]{x}$ y construimos la función $h_1(x)=f_1(x)+g_1(x)$, es decir, $h_1(x)=\sqrt[3]{x}+2x-\sqrt[3]{x}=2x$, tendríamos que $h_1'(0)=2$. Así que $+\infty-\infty=2$.

De lo anterior, concluimos que operar con los valores $+\infty$ y $-\infty$ carece de sentido, por lo que resulta más conveniente excluir estos valores en la definición de derivada.

La siguiente definición dada por Thurston difiere de las demás, en que los otros autores definen la derivada en un punto y él hace referencia a una nueva función, con ello pareciera que el autor concibe el proceso de la derivación como la obtención de la función derivada, es decir, la derivación como un proceso que consiste en obtener una función a partir de otra mediante las reglas de derivación. En esta definición no se destaca el carácter puntual de la derivada.

Definición 7 (Thurston, 1961)

Sean $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$ un punto en donde ϕ este definida. Se define la expresión

$$\phi'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h}.$$

Puesto que esta expresión depende únicamente de a, se define una nueva función ϕ' definida para cada a en donde este límite exista. Esta nueva función ϕ' recibe el nombre de ***derivada*** de ϕ y su dominio es un subconjunto del dominio de ϕ.

Rivera y Ponce (2012) aclaran que el proceso de derivación no es obtener una fórmula a partir de otra, ellos mencionan que "La derivación es un proceso que consiste en obtener la derivada de una función en cada punto", concebirla de otra forma obstaculiza la comprensión de este concepto, e incluso conduce a resultados erróneos. Uno de ellos es el creer que el dominio de la función derivada está determinado después de aplicar formalmente las reglas de derivación. El dominio de la función derivada está dado por los puntos donde la función inicial es derivable, es decir, donde el límite existe y no donde la fórmula obtenida está definida.

Por ejemplo, sea $f(x) = \log(x^2 - 1)$, f es una función definida para todos los números reales $|x| > 1$ y no está definida para los puntos del intervalo cerrado $[-1, 1]$. Si aplicamos formalmente las reglas de derivación obtenemos $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$. La expresión $\dfrac{2x}{x^2 - 1}$ está definida para todos los reales excepto para los valores -1 y 1, sin embargo, el dominio de la función derivada es el conjunto dado por todos los valores de x tales que $|x| > 1$.

Hablar de la derivada de una función f en aquellos puntos donde no está definida no tiene sentido. Por lo tanto el dominio de la función derivada, sin importar su expresión algebraica, está dado por los puntos donde f es derivable y desde luego estos deben pertenecer al dominio de f.

En la actualidad las definiciones que se adoptan en la enseñanza del cálculo de bachillerato son las que aparecen, por ejemplo, en los textos de Smith, Longley y Wilson, Spivak, y Granville, las cuales presentamos a continuación. En estas definiciones ya aparecen los términos derivable, diferenciable y derivación.

Definición 8 (Smith, Longley, Wilson 1952)

Sea $y = f(x)$ una función univaluada de la variable x. Sea x_1 un valor fijo de x. Considérese la fracción

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Esta cantidad es en sí misma una función de x y es llamada el ***cociente de diferencias.*** Este cociente está definido para todos los valores de x para los cuales $f(x)$ este definida, excepto para x_1. Cuando $x \to x_1$, este cociente bien puede no tener un límite, pero si existe, este es llamado la ***derivada*** de f con respecto a x en el punto $x = x_1$ y se denota por $f'(x_1)$. Utilizando la notación de incrementos, $\Delta x = x - x_1$ y $\Delta y = f(x) - f(x_1)$ se obtiene que

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Definición 9 (Granville, 1952)

La **derivada** de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este tiende a cero. Es decir, si $y = f(x)$ es una función de la variable independiente x, entonces la **derivada** de $f(x)$ con respecto x es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La operación de hallar la derivada de una función se llama **derivación**.

Definición 10 (Spivak, 1980)

La función f es ***derivable*** en a si

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existe. En este caso, el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de ***derivada*** de f en a. (Decimos también, que f es ***derivable*** si es derivable en a para todo a en el dominio de f).

En este trabajo de investigación adoptaremos como definición de derivada la propuesta en Rivera (2012).

Definición 2.2.1 *Sea $y = f(x)$ una función y x_0 un punto de su dominio. Si existe el límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

diremos que f es ***derivable*** *en el punto x_0 y que tal límite se llama la* ***derivada*** *de f en x_0, la cual se denota por cualquiera de los símbolos*

$$f'(x_0), \frac{df}{dx}(x_0) \quad o \quad Df(x_0)$$

La derivada de una función f en un punto a es por definición el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando se habla de la derivada $f'(a)$ de una función f en un punto, se supone implícitamente que f está definida en una vecindad abierta de a, es decir, está definida en un intervalo de la forma $(a - r, a + r)$. Supóngase ahora que la función está definida en un intervalo de la forma $[a, a + r)$. En este caso, podemos hablar del límite lateral derecho

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando este límite existe, le llamamos la ***derivada lateral derecha*** de f en el punto a y le denotamos por $f'(a^+)$. Similarmente, se define la ***derivada lateral izquierda*** como el límite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y la denotamos por $f'(a^-)$.

De las propiedades de límite se concluye el siguiente teorema:

Teorema 2.2.2 *Una función f es derivable en un punto a si y solo si existen las derivadas laterales $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$ y son iguales, en cuyo caso $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$.*

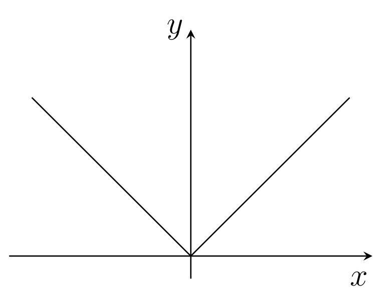
Este resultado es precisamente el que justifica que la función valor absoluto no sea derivable en $x = 0$, pues aunque las derivadas laterales existen, son diferentes por lo tanto la derivada en $x = 0$ no existe. Sin embargo, nos atrevemos a decir que la no derivabilidad de la función valor absoluto en el punto antes mencionado generalmente sólo es justificada por la presencia de un pico en su gráfica, razón por la cual resulta oportuno mencionar este teorema en la parte conceptual de derivada, ya que existen muchas funciones en las que podríamos preguntarnos si son o no derivables en un punto de su dominio.

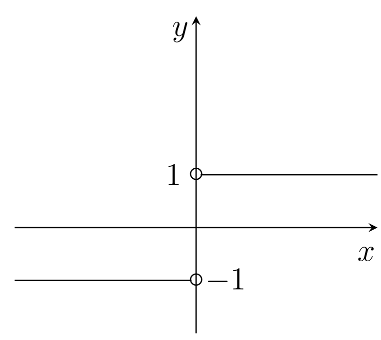
Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por $h(x) = |x|$. Para saber si $h(x)$ es derivable en $x = 0$, se deben calcular las derivadas laterales.

$$h'\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = -1;$$

$$h'\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 1.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, $h'(0)$ no existe, es decir, h no es derivable en 0. Las gráficas de la función valor absoluto y su función derivada se observan a continuación.





Definición 2.2.3 *Si una función f es derivable en cada punto de un conjunto A, subconjunto de su dominio, diremos que f es **derivable en** A. Si una función f está definida en un intervalo cerrado de la forma $[a, b]$, diremos que f **es derivable en** $[a, b]$ si es derivable en cada punto del intervalo abierto (a, b) y existen las derivadas laterales $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.*

La derivada de una función f en un punto x_0 es, por definición, una razón de cambio instantánea y no una razón de cambio promedio en un intervalo. La razón de cambio instantánea se refiere a un punto, por esta razón diremos que la derivada es un concepto puntual y la derivabilidad una propiedad puntual, pues se refiere a una propiedad de la función f en un punto x_0.

2.2.2. La regla de los cuatro pasos

En textos como Granville, Phillips y Townsend, sugieren al estudiante la famosa regla de los cuatro pasos como un procedimiento para obtener la derivada de una función en un punto, acontinuación se enuncia dicha regla.

> El proceso para *diferenciar* una función $y = f(x)$, consiste de los siguientes pasos:
>
> 1. Se sustituye en la función x por $x + \Delta x$, y se calcula el nuevo valor de la función $y + \Delta y$.
> 2. Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (incremento de la función).
> 3. Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente).
> 4. Se calcula el límite de este cociente cuando Δx tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada.

Los autores ilustran la regla con ejemplos como el siguiente:

Ejemplo 2.2.4 *Hallar la derivada de la función* $3x^2 + 5$. *Hagamos* $y = 3x^2 + 5$

1. $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$

2. $(y + \Delta y) - y = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$

4. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \to 0$*. Resulta* $\dfrac{dy}{dx} = 6x.$

Finalmente establecen la igualdad $y' = \dfrac{d}{dx}(3x^2 + 5) = 6x$

Los autores que la mencionan en sus libros, pretenden *"facilitar"* el cálculo de derivadas a sus lectores, sin embargo, la regla de los cuatro pasos es una especie de receta que difícilmente favorece la comprensión del concepto de derivada, pues aún cuando es un procedimiento para aplicar la definición hay una ausencia de reflexión sobre la misma.

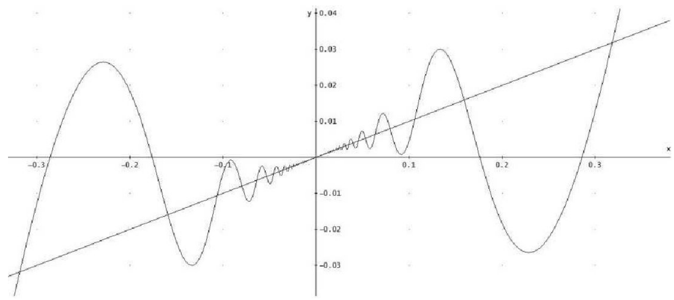
2.2.3. Interpretación geométrica

Por definición, la derivada es un límite y puede interpretarse como la pendiente de una recta tangente a una curva. Más precisamente, la derivada de una función f en un punto x_0 podemos interpretarla como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$. De lo anterior se concluye que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ tiene por ecuación

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{2.5}$$

Si bien en la enseñanza de la derivada, el acercamiento mediante las rectas secantes a la recta tangente de la gráfica de una función en un punto es un buen recurso didáctico, es importante que el profesor se percate de que el concepto de derivada va más allá de permitirnos determinar las ecuaciones de rectas tangentes en casos simples, de hecho es el medio para definir la recta tangente en casos complejos, por ejemplo es mediante la derivada que definimos la tangente en el punto $(0, 0)$ a la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) + x & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$



Es en funciones como la anterior, que la ecuación 2.5 toma sentido, pues en ejemplos cotidianos, es fácil imaginar cuál sería la recta tangente en un punto de la gráfica de la función, de hecho hasta nos permitimos trazarla. Sin embargo, funciones que rompen con el esquema de recta tangente adquirido desde la primaria permiten reflexionar sobre la verdadera identidad de esta recta, pues comprender que la recta tangente está definida a partir de la derivada y que si ésta no existe, la recta tangente tampoco, permiten comprender porque rectas como la mostrada en la imagen anterior, pueden ser una recta tangente aún cuando toque en varios puntos a la gráfica de la función o incluso la corten.

Una vez establecida la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto, resulta interesante comentar una definición alternativa propuesta por Rivera (2012).

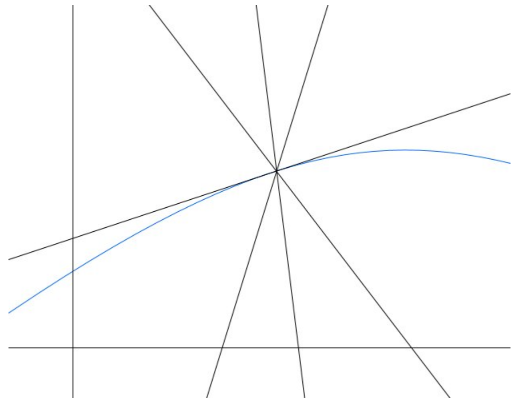
Definición 2.2.5 *Sea f una función definida en un conjunto D y $x_0 \in D$ tal que existe una vecindad abierta de x_0 contenida en D . Si existe una recta con ecuación de la forma $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0$$

*diremos que f es **derivable** en x_0 y a la pendiente m se le llama la **derivada** de f en el punto x_0.*

La definición anterior dice en qué se distingue la recta tangente del resto de las rectas que pasan por el punto $(x_0, f(x_0))$, en otras palabras, nos dice cuál es la propiedad que hace que la recta sea tangente a la curva. Consideremos todas las rectas que pasan por el punto $(x_0, f(x_0))$. Es una familia de rectas que se describe con la familia de ecuaciones

$$y = m(x - x_0) + f(x_0), \qquad m \in \mathbb{R}$$



Es claro que para cualquier ecuación $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, se tiene

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - (m(x - x_0) + f(x_0))] = 0$$

pues $f(x) - (m(x - x_0) + f(x_0)) = (f(x) - f(x_0)) - m(x - x_0)$ y

$$f(x) - f(x_0) \to 0 \quad \text{al igual que} \quad x - x_0 \to 0$$

Sin embargo, la tangente se caracteriza porque su ecuación no solamente cumple esta propiedad sino que cumple una propiedad más fuerte. No solo debe tender a cero la diferencia $f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]$, sino que también debe tender a cero esta diferencia aun dividida entre $x - x_0$.

$$\frac{f(x) - [m(x - x0) + f(x_0)]}{x - x_0} \to 0$$

Entonces, la definición 2.2.5 nos dice que para que f sea derivable en x_0, debe existir una recta con esa propiedad. En ese sentido, la ecuación de la recta tangente en un punto, sería el *polinimio de primer grado que mejor se aproxima* a la gráfica de la función en el punto x_0.

2.2.4. Razón de cambio

Otra de las interpretaciones que tiene la derivada es la de velocidad instantánea. Esto, por supuesto, se aplica al caso en el que la función a derivar es la ecuación de movimiento de un objeto. Aun cuando se trata de una situación particular, la velocidad es uno de los significados importantes de la derivada, además el problema de la descripcin de un movimiento forma parte de los problemas físicos que están en la historia de la derivada.

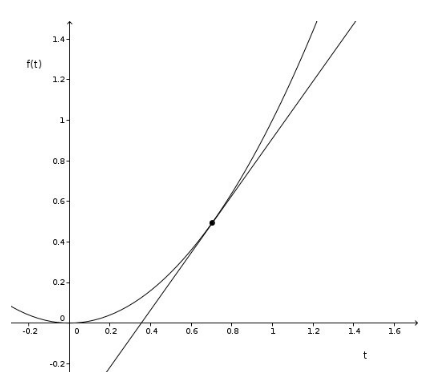
Si una función $f(t)$ representa la posición en un sistema de coordenadas en la recta, respecto a la variable tiempo t, de un objeto en movimiento rectilíneo, como puede ser el de un objeto que se mueve debido a la gravedad de la Tierra, entonces la derivada

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

en t_0, significa la velocidad del objeto en el instante t_0.

La idea común de velocidad es la de velocidad media. La velocidad media de un objeto en movimiento es el cociente que resulta de dividir la distancia recorrida por el objeto entre el tiempo que emplea en recorrer esa distancia. Entender la derivada como velocidad instantánea requiere de una reflexión sobre lo que es el límite de velocidades medias cuando se toman intervalos de tiempo pequeños o más precisamente, cuando se toman intervalos de tiempo que tienden a cero.

La velocidad instantánea y la pendiente de una recta tangente no son significados de la derivada que se excluyan, de hecho conviene mirarlos simultáneamente. Si consideramos la gráfica de la función $f(t)$ en un sistema de ejes cartesianos, en donde el eje de las abscisas es el eje del tiempo y el eje de las ordenadas es el de la posición. Entonces la velocidad instantánea del objeto en el instante t , que denotamos por $f(t)$ es igual a la pendiente de la recta tangente en el punto $(t, f(t))$. Obsérvese la siguiente figura.



En general, una razón de cambio se refiere a como una variable cambia con respecto a otra, entonces una función de la forma $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ puede modelar diferentes fenómenos de la naturaleza, por ejemplo: la disipación del alcanfor blanco, la desintegración radiactiva del uranio 238, entre otros.

El alcanfor blanco, también llamado neftalina, es un sólido blanco que se sublima con facilidad. Para su uso comercial, se produce en forma de pequeñas esferas. Mientras el alcanfor se sublima o se disipa, el volumen de las esferas disminuye, así que el volumen cambia conforme el tiempo cambia, es decir, el volumen es una función del tiempo. Podemos medir la disipación por la cantidad de volumen que se pierde por unidad de tiempo. Si $V(t_0)$ representa el volumen de la esfera en un instante t_0, y $V(t)$ representa el volumen en un instante posterior t, entonces el volumen disipado es $V(t)-V(t_0)$. La pérdida promedio de volumen por unidad de tiempo en el intervalo de tiempo $[t_0,t]$ es entonces

$$\frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0}$$

El cociente anterior es una razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, en el instante t_0 es el límite

$$\lim_{t\to t_0}\frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0}$$

.

Que es similar a la definición de derivada en un punto, entonces en este caso, la derivada nos dice la rapidez con que la esfera pierde volumen en el instante t_0. Es así como la derivada también posee interpretaciones físicas, razón de cambio instantánea.

Se incluye la interpretación de la derivada como razón de cambio en la parte conceptual dada la importancia de ésta, sin embargo nuestro interés se centró en la interpretación geométrica ya que es un recurso muy común para establecer la definición de la derivada.

2.3. Parte algorítmica de la derivada

Al inicio de este capítulo, se mencionó que por la parte algorítmica de la derivada nos referíamos a las técnicas para obtener la derivada de una función en un punto. Similarmente, llamaremos *derivación* al proceso de obtención de la derivada de una función en un punto, entonces la parte algorítmica se refiere a este procedimiento, que involucra la adecuada aplicación de las reglas de derivación, la regla de la cadena y otros conocimientos previos al tema de derivada, por ejemplo, el dominio de una función, pues es importante saber para qué puntos tiene sentido preguntarse por la derivada.

2.3.1. Reglas de derivación

Las reglas generales de derivación facilitan el cálculo de la derivada de una función en todos los puntos donde la función es derivable y forman parte de las herramientas que tanto estudiantes como profesores utilizan en el cálculo de derivadas y en la resolución de problemas.

A continuación se enuncian las reglas de derivación, su desarrollo y justificación puede consultarse en Rivera (2007).

- Derivada del producto de una constante por una función:
  Sean $f(x)$ una función derivable en un punto x_0 y α una constante. Entonces, la función $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ es derivable en x_0 y la derivada está dada por

  $$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

- Derivada de la suma de dos funciones:
  Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un mismo punto x_0. Entonces, la función suma $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es derivable en x_0 y además

  $$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- Derivada del producto de dos funciones:

  Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un mismo punto x_0. Entonces, la función producto $(fg)(x) = f(x)g(x)$ es derivable en x_0 y además

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

- Derivada del cociente de dos funciones:

  Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un punto x_0 y también $g(x_0) \neq 0$. Entonces, la función cociente $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es derivable en x_0 y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)\,f'(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

2.3.2. Regla de la cadena

De acuerdo con Rivera (2007), la fórmula para derivar funciones valuadas en funciones (funciones compuestas), es una de las herramientas más poderosas del cálculo diferencial, razón por la cual, los profesores que enseñan esta materia, deben comprenderla y manipularla adecuadamente. Además de brindar a sus estudiantes los ejemplos y contraejemplos que los sumerja en una reflexión profunda, para posteriormente apropiarse de este conocimiento tan valioso.

Regla de la cadena: Sean f y g dos funciones tales que los valores $g(x)$ de g pertenecen al dominio de f. Esto nos permite construir la composición $(f \circ g) = f(g(x))$. Supongamos que g es derivable en un punto x_0 y que f es derivable en $g(x_0)$. Entonces, la composición $(f \circ g) = f(g(x))$ es derivable es x_0 y su derivada está dada por

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x_0))\,g'(x_0)$$

La forma en como se deduce esta fórmula puede consultarse en Rivera (2007).

2.3.3. Las derivadas de algunas funciones elementales

En principio para calcular la derivada de una función en un punto hemos de recurrir a la definición, sin embargo cuando se pasa al terreno práctico, una manera más eficiente para calcular derivadas es mediante las reglas de derivación esto incluye la regla de la cadena.

Es recomendable tener presentes las reglas de derivación en el cálculo de la derivada y adquirir cierta destreza en su utilización. La aplicación de estas reglas resulta especialmente importante cuando se conocen derivadas de algunas funciones y con ellas se contruyen otras nuevas funciones quizá más complejas.

A continuación se presentan las derivadas de algunas funciones que consideramos deben formar parte de los conocimientos básicos del profesor.

- $f(x) = c, \qquad f'(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x, \quad f'(x) = 1 \qquad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^r$ donde r es racional, $\quad f'(x) = rx^{r-1} \qquad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad f'(x) = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x \qquad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \log x, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad x > 0$

2.4. Enseñanza y aprendizaje con entendimiento

En esta sección se mencionarán algunos aspectos importantes sobre la comprensión, y la propuesta de Carpenter y Lehrer (1999), la cual ha sido considerada la más apropiada para analizar los datos obtenidos, ya que las cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión nos permitirán concluir qué posibles actividades podría desarrollar el profesor que contesta el cuestionario para lograr una mejor comprensión del concepto de derivada, y así lograr la articulación necesaria entre lo conceptual y lo algorítmico.

Se considera que la ***comprensión*** es un proceso, una sucesión de actos o actividades mentales, las cuales constituyen el proceso. La comprensión está en permanente desarrollo, crece o se transforma con el tiempo, conforme se realizan diferentes actividades matemáticas; resolución de problemas, disertación, discusiones, ejercicios, demostraciones y otras actividades.

Se debe pensar en la comprensión como emergiendo y desarrollándose, y no considerar que uno ha comprendido o no un tema, idea o proceso, es decir, la comprensión no es un atributo estático del conocimiento de un individuo (Carpenter y Lehrer, 1999). Se puede decir que uno está permanentemente comprendiendo una idea, un tema o un concepto (Rivera, García y Díaz, 2013).

Hiebert y Carpenter (1992) consideran que una idea matemática, concepto o proceso se comprende cuando su representación mental forma parte de una red interna de representaciones, y el nivel de comprensión queda determinado por el número y la fuerza de las conexiones realizadas, si sólo algunas de las ideas potencialmente relacionadas están conectadas o si las conexiones son débiles la comprensión puede ser bastante limitada.

La comprensión ocurre cuando las representaciones son conectadas en redes cada vez más estructuradas y cohesivas. Las redes de representaciones mentales se construyen gradualmente conforme nueva información se conecta a las redes existentes, cuando esto ocurre se forman nuevas conexiones entre información previamente desconectada, y las redes anteriores son modificadas o abandonadas.

En toda actividad matemática se involucra el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, se reconoce (ahora) que ambos son importantes para la habilidad matemática. Para este trabajo se tomaron las definiciones consideradas en Hiebert y

Carpenter (1992); se identifica al conocimiento conceptual con conocimiento que se comprende, es decir, es conocimiento conceptual sólo si forma parte de una red, mientras que el conocimiento procedimental se considera como una secuencia de acciones, por ejemplo, los algoritmos aritméticos.

Reconociendo la importancia de la comprensión en matemáticas, es importante diseñar un ambiente en el salón de clase que la promueva, es decir, acciones que promuevan la creación de conexiones entre los diferentes conceptos y procedimientos.

Carpenter y Lehrer (1999), proponen cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión:

- Construcción de relaciones
- Extensión y aplicación de conocimiento matemático
- Reflexión sobre las experiencias
- Articulación de lo que el individuo conoce
- Apropiación del conocimiento matemático

Es importante aclarar que no tienen un orden específico, algunas se presentan durante todo el proceso de comprensión, mientras que otras se van adquiriendo y mejorando conforme la comprensión aumenta.

La construcción de relaciones es relevante, ya que los objetos matemáticos recobran significado según la forma en que están relacionados con otros. Las personas construyen significados para una nueva idea o proceso enlazándolos a los ya conocidos. El desarrollo del entendimiento no sólo es agregar nuevos conceptos y procesos a lo que ya se sabe; si no también la creación de estructuras que integren el conocimiento. El conocimiento estructurado es menos susceptible a olvidarse.

Pérez Rosal (2011) enfatiza que una de las características del aprendizaje con entendimiento es el tener cierta claridad de cómo puede ser aplicado lo aprendido. También asegura que existe una gran distancia entre saber definiciones, teoremas, lemas ... y poder aplicarlos, utilizar un conocimiento en la resolución de problemas requiere de ideas ingeniosas. La aplicación de un concepto a diferentes situaciones ayuda a comprender sus significados y por lo tanto a la comprensión del concepto mismo.

La reflexión está presente en todo el proceso de comprensión, mientras que una comunicación adecuada se presenta en las etapas finales; para comunicar las ideas se requiere un alto nivel de reflexión y se requiere tener el recurso del lenguaje (matemático), una comunicación clara con un lenguaje adecuado refleja un nivel alto de comprensión.

Lo anterior es importante sobre todo para el profesor, que requiere tener la habilidad y las herramientas para poder explicar la misma idea de diferentes formas, de manera que la mayoría de los estudiantes la entiendan, es decir, es importante que su comprensión este en los niveles más altos.

En resumen, para desarrollar este trabajo de investigación se ha considerado que el objetivo principal de la enseñanza matemática es desarrollar la comprensión, una implicación obvia, de acuerdo con la definición utilizada, es que la enseñanza debe ser diseñada de forma que los estudiantes construyan conexiones. El profesor debe crear un ambiente en el que las actividades, problemas y comunicación de las ideas estén enfocadas a la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos. En otras palabras, todo profesor debe experimentar, reconocer y valorar las cinco formas de actividad mental propuestas por Carpenter y Lehrer; para así involucrar a sus estudiantes en éstas.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Introducción

Este trabajo de investigación de tipo cualitativo, fue desarrollado en tres etapas: la primera consistió en diseñar un conjunto de problemas sobre el tema de derivada; la segunda fue aplicar el cuestionario a profesores de Educación Media Superior que estén o hayan impartido Cálculo, y en la tercer etapa se hizo el análisis de las respuestas obtenidas.

El cuestionario diseñado está formado por doce problemas. Estos problemas fueron planteados con la intención de averiguar los conocimientos del profesor tanto en el aspecto conceptual de derivada como en el cálculo práctico de ésta. Algunos de ellos, fueron pensados de tal forma que para su solución se requiriera de ambos aspectos, en otras palabras, en el cuestionario fueron incluidos problemas que requieren una adecuada articulación entre el concepto de derivada y sus significados, así como la aplicación de las reglas de derivación.

3.2. Diseño del instrumento

A continuación se describen los problemas que constituyeron el cuestionario:

La derivada de una función en un punto posee una interpretación geométrica: es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado. Sin embargo, es común que en un curso de cálculo diferencial, no se reflexione lo suficiente y sólo se fije una algoritmia. Es decir, derivar una función se llega a concebir sólo como el proceso de obtener una fórmula a partir de otra, sin reflexionar sobre el carácter puntual de la derivada o la información que proporciona esa fórmula obtenida.

Con el propósito de averiguar la comprensión de los participantes sobre el carácter puntual de la derivada y su interpretación geométrica, se diseñaron los problemas 1 y 2.

Problema 1. *Si* $f(x) = x^2 + x + \frac{5}{4}$, *¿es cierto que su derivada* $f'(x) = 2x + 1$ *corresponde a una recta tangente a la gráfica de* f*? Argumente su respuesta.*

Problema 2. *Indique en que punto la recta* $y = 3x + 1$ *es tangente a la gráfica de la función* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}$.

El primero, se refiere a la interpretación geométrica de la derivada en un punto como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en el punto correspondiente. En este problema se presenta una función polinomial de grado 2 cuya función derivada coincide con la ecuación de la recta tangente en un punto. Se desea averiguar si el profesor está consciente de que es una mera coincidencia el hecho de que $f'(x)$ tenga la misma expresión algebraica que la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica. Es decir, se pretende averiguar si el profesor cree que la expresión que se tiene al derivar una función (en especial cuadrática) es "la ecuación de la recta tangente".

En el problema 2, se presenta una función y la ecuación de la recta tangente a su gráfica y se pide que el profesor encuentre el punto de tangencia. Con él se pretende averiguar si los participantes comprenden que la interpretación geométrica de la derivada permite la existencia de dos puntos de la gráfica de la función cuya recta tangente tenga la misma pendiente, es decir, la derivada evaluada en cada uno de esos puntos tiene el mismo valor pero las ecuaciones de las rectas tangentes son diferentes.

La definición de derivada en un punto por medio de las derivadas laterales, es una definición que toma gran importancia cuando se desea conocer la derivabilidad de una función en un punto que sospechamos no es derivable. Sin embargo, cuando se pasa de la parte conceptual al cálculo práctico de la derivada mediante la aplicación de las reglas de derivación, ni siquiera se cuestiona en qué puntos la función está definida, si es continua o dónde es derivable.

En este sentido, algunas de las funciones que requieren una mayor reflexión sobre el proceso de derivación son las funciones definidas por piezas o por pedazos. Los puntos donde se hace el cambio de la regla de definición son tratados sin cautela. En ocasiones simplemente se derivan las expresiones correspondientes a cada uno de los intervalos a uno y otro lado del punto, sin reparar las consideraciones que deben hacerse para estos puntos.

Para averiguar cuál es el trato que dan los profesores a las funciones definidas por piezas, se diseñaron los problemas 3 y 4.

Problema 3. *Halle la derivada de* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & 1 < x \leq 2 \\ x^4 - 5x - 3 & 2 < x < +\infty \end{cases}$

Problema 4. *Encuentre la segunda derivada de* $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si & x \geq 0 \\ x^2 & si & x \leq 0 \end{cases}$

La función planteada en el problema 3 es derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en el punto $x = 2$. Esta función es muestra de que, aún cuando la regla de definición para cada intervalo sea simple, como lo es el caso de las funciones polinomiales, el punto donde cambia dicha regla necesita un trato especial.

En el problema 4, se plantea una situación similar. La función dada en este problema es derivable en todo $\mathbb{R}$, sin embargo, la segunda derivada en $x = 0$ no existe, es decir, f en $x = 0$ no es dos veces derivable. Nótese que $f'(x)$ también es una función definida por piezas y que el punto donde cambia la regla de definición es $x = 0$, por lo tanto al igual que con $f(x)$, este punto merece un trato especial para calcular $f''(x)$.

En el siguiente problema 5 tratamos de averiguar si el profesor comprende la definición de derivada a un nivel que le permite deducir una regla de derivación, pues con el resto de los problemas averiguaremos si es capaz de articular esta defínción con algunas aplicaciones.

Problema 5. *Deduzca la fórmula de la derivada de una suma de dos funciones:*

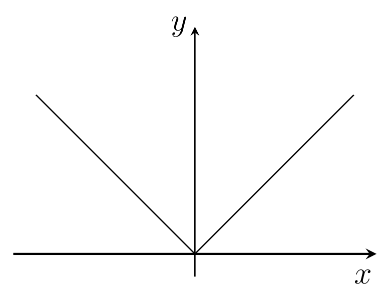
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

En el capítulo 2 de esta tesis, se aclaró que preguntarse por la derivada de una función sólo tiene sentido para los puntos que pertencen a su dominio. Es decir, si se desea indicar dónde una función es derivable, lo primero es conocer su dominio y extraer de este conjunto los puntos donde el $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. En ese sentido se planteó el problema 6.

Problema 6. *Sea $f(x) = \log(x^2 - 1)$, al aplicar las reglas formales de derivación se obtiene $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$. Indique dónde f es derivable.*

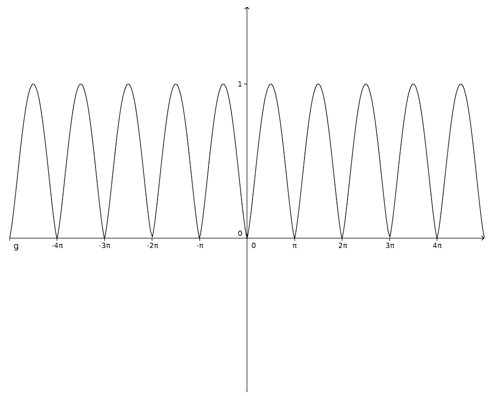
En este problema se presenta una función y la que se obtiene al aplicar formalmente las reglas de derivación. Deseamos averiguar si para determinar los puntos donde la función es derivable el profesor acude a la fórmula que se obtiene mediante la aplicación formal de las reglas de derivación o analiza previamente dónde la función es derivable de acuerdo a su dominio.

Usualmente la no derivabilidad de una función se ilustra con la función valor absoluto $f(x) = |x|$. Esta función es no derivable en $x = 0$ y esta no derivabilidad se interpreta geométricamente por la existencia de un pico en su gráfica. La identificación de la no derivabilidad con la existencia de picos es tan común que es la manera de explicar la inexistencia de la derivada. Recordemos la gráfica de esta función.



En el siguiente problema se presenta una función así como su función derivada. También se presenta la gráfica de la función. La escala utilizada en los ejes de coordenadas es tal que da la impresión de que hay picos en los puntos del forma $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. La función es derivable en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ y su derivada está dada por
$g'(x) = \frac{4}{3}(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}} \cos x$. Deseamos averiguar si el profesor se apoya sin reflexionar en la figura para determinar dónde la función es derivable o bien si analiza el problema analíticamente. Si se apoya en la figura es probable que afirme que la función no es derivable en los puntos donde aparentemente hay un pico.

Problema 7. *Sea $g(x) = (\operatorname{sen} x)^{\frac{4}{3}}$, en la siguiente figura se muestra su gráfica. Al utilizar las reglas formales de derivación se obtiene $g'(x) = \frac{4}{3}(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}} \cos x$. Diga si g es derivable en $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.*



En el siguiente problema se pide que el profesor halle la derivada en todos los puntos donde las funciones son derivables, pero se trata de averiguar si en efecto el profesor sabe que la función valor absoluto es no derivable en $x = 0$. También se trata de averiguar si por el hecho de que el valor absoluto $|x|$ aparece en la expresión de otra función consideran que la función es no derivable en $x = 0$. La función que se le presenta en el inciso (b), aun cuando está construida con el valor absoluto, es derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular en $x = 0$.

Problema 8. *¿En qué puntos las siguientes funciones son derivables? Halle la derivada en esos puntos.*

(a) $f(x) = \big|x\big|$

(b) $h(x) = x\big|x\big| + 2x^2$

Con el problema 9 tratamos de averiguar acerca de la destreza de los profesores en la aplicación de las reglas de derivación (incluyendo la regla de cadena) en casos de funciones simples pero con cierto grado de complejidad. Esto nos servirá de referencia cuando analicemos sus respuestas a los problemas de corte más conceptual.

Problema 9. *Derive las siguientes funciones.*

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen}^2 x + x^2 + 1}$

(b) $g(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

En el inciso (a) de este problema se pide que deriven una función cociente, cuyos numerador y denominador contienen funciones que deberían ser del dominio de los profesores. En el inciso (b) se pide calcular la derivada de una función compuesta, para averiguar la destreza de los profesores al aplicar la regla de la cadena.

Las derivadas de las funciones $\operatorname{arc\,sen}(x)$, $\arccos(x)$ y $\arctan(x)$ son de las funciones elementales que deberían ser conocidas por los profesores. Con el problema 10 pretendemos averiguar si la derivada de la función arco seno forma parte de los conocimientos del profesor. Es importante observar que este cuestionario fue aplicado sin advertirle al profesor sobre los temas que se le iban a preguntar, de modo que el profesor respondiese de acuerdo a los conocimientos de los que se ha apropiado.

Problema 10. *Si* $f(x) = x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)$, *halle* $f'(x)$.

Con el siguiente problema 11 tratamos de averiguar si el profesor se percata de la necesidad de analizar la función, de la cual se pide obtenga la derivada, antes de proceder a aplicar las reglas de derivación. Es un problema en el que su solución requiere articular la parte conceptual de la derivada con la parte algorítmica. Esta vinculación también se pone de manifiesto en los problemas 3, 4, 6, 8 y 12.

Problema 11. *Encuentre la derivada de las siguientes funciones.*

(a) $f(x) = \log\left(\log\left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)\right)$

(b) $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x^3 - 2)^{\frac{3}{2}}$

En este problema se presentan dos funciones cuyo dominio es vacío. El inciso (a) es una función compuesta donde interviene repetidas veces la función logarítmo. Dado que $\log\left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)$ toma valores menores o iguales a cero, $\log\left(\log\left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)\right)$ no está definida para real alguno. Esto significa que la expresión no define ninguna función o dicho de otra manera, "define una función con dominio vacío". Por lo tanto no tiene sentido averiguar sobre su derivabilidad, ni mucho menos hallar su derivada.

Del mismo modo, la expresión con la que se pretende definir una función g consiste de una raíz cuadrada, el exponente $\frac{3}{2}$ así lo indica, por lo que sólo está definida cuando el radicando es mayor o igual a cero, sin embargo $\operatorname{sen}^2 x^3 < 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto $g(x)$ está definida en ningún punto.

Para resolver el problema 12 se requiere vincular la parte conceptual de la derivada con las fórmulas de derivación que le dan sustento a la parte algorítmica, en este caso preguntamos sobre la correcta escritura de la regla de la cadena.

Problema 12. *Indique cuál o cuáles de las siguientes fórmulas están escritas correctamente.*

(a) $f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$

(b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

(c) $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$

(d) $(f \circ g)'(x) = ((f' \circ g)(g'))(x)$

En él se presentan cuatro formas diferentes de escribir la regla de la cadena. Las variaciones que presentan sólo son de escritura; sin embargo, el inciso (a) da la idea de que al aplicarla se obtendrá una fórmula, pues en la expresión $f(g(x))'$ el punto donde se calculará la derivada queda oculto. Este problema ha sido diseñado para averiguar si los profesores han reflexionado sobre la regla de la cadena y si el carácter puntual de la derivada ayuda en su decisión.

3.3. Participantes

El cuestionario descrito en la sección anterior fue diseñado para profesores de educación media superior, que estén impartiendo clases de Cálculo, ya sea Diferencial o Integral; o que en algún momento hayan dado la materia.

Cumpliendo con el perfil antes mencionado, los participantes fueron once profesores: tres de un Colegio de Bachilleres del Estado de México (COBAEM), tres de un Centro de Bachillerato Tecnológico ubicado de la misma entidad (CBT), tres de un Centro de Estudios Tecnológicos y Científicos del Estado de México (CECYTEM) y dos de una Escuela Preparatoria Particular ubicada en el mismo estado.

Cabe mencionar, que nueve de los docentes actualmente son titulares de un curso de Cálculo y dos de ellos han impartido la materia en semestres anteriores. Enseguida se menciona su formación académica y el tiempo que han enseñado Cálculo.

COBAEM

- Profesor A. Ingeniero en Matemáticas, IPN, 4 semestres.
- Profesor B. Ingeniero Civil, IPN, 2 semestres.
- Profesor C. Ingeniero en Alimentos, UNAM, 2 semestres.

CBT

- Profesor D. Arquitecto, UNAM, 3 semestres.
- Profesor E. Ingeniero Químico, UNAM, 4 semestres.
- Profesor F. Ingeniero Mecánico, UNAM, 8 semestres.

CECYTEM

- Profesor G. Ingeniero Industrial, TESJI[1], 4 semestres.
- Profesor H. Ingeniero Electrónico, UAEM, 1 semestre.
- Profesor I. Ingeniero Agrónomo, ITSC[2], 4 semestres.

Escuela Preparatoria Particular

- Profesor J. Ingeniero Industrial, UASD[3], 12 semestres.
- Profesor K. Lic. en Física y Matemáticas, IPN, 1 semestre.

[1] Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec, Edo. de México.
[2] Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco, Tabasco.
[3] Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana.

3.4. Recolección de datos

La recolección de datos fue mediante la aplicación del cuestionario, ya que los participantes no aceptaron una entrevista videograbada o la grabación de audio. En el caso del COBAEM y CBT, fue posible reunir a los docentes en un aula dentro de las instalaciones de cada institución, dándoles un tiempo de 90 minutos para contestar el intrumento, sin embargo la mayoría entregaron el material a los 60 minutos aproximandamente. Bajo estas circunstancias se puede asegurar el no uso de tablas o libros.

La situación con los profesores del CECYTEM y la Escuela Preparatoria fue diferente, por cuestiones de tiempo aceptaron contestar el cuestionario sólo si se les permitía llevárselo y posteriormente entregarlo. Por lo que se desconoce el tiempo empleado y el uso de tablas o libros, aunque el profesor I y el profesor J, al momento de entregar el material aceptaron haber consultado tablas.

Capítulo 4

Análisis de datos

4.1. Introducción

El análisis de datos fue hecho por problema, es decir, las once preguntas obtenidas para cada problema fueron analizadas de acuerdo al propósito planteado.

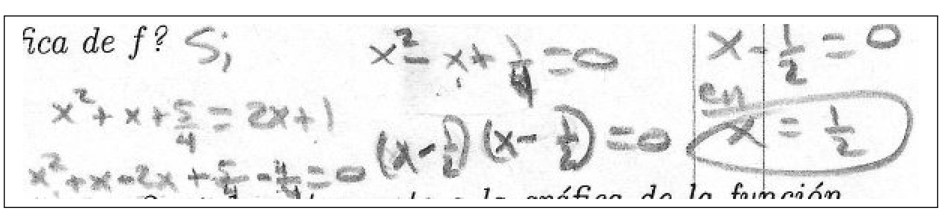
El cuestionario contiene un problema de carácter conceptual (problema 5), dos de carácter operatorio (problema 9 y 10) y los nueve restantes involucran los dos aspectos, esto es, requieren de la adecuada articulación entre la parte conceptual de derivada y la parte algorítmica.

4.2. Análisis del problema 1

El problema 1, involucra la parte conceptual de la derivada de una función con la parte algorítmica, con él se determinaría si los profesores comprenden la interpretación geométrica de la derivada.

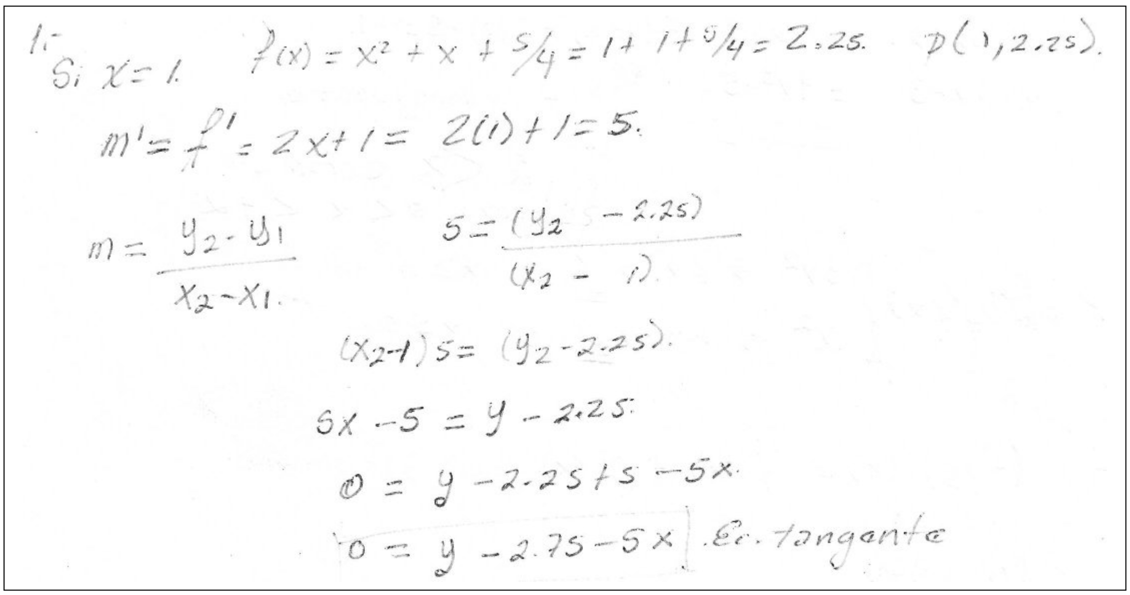
Problema 1. *Si $f(x) = x^2 + x + \frac{5}{4}$, ¿es cierto que su derivada $f'(x) = 2x + 1$ corresponde a una recta tangente a la gráfica de f? Argumente su respuesta.*

Sólo dos participantes, el profesor A y E, se preguntaron por el punto de tangencia, sin embargo sus procedimientos no son claros, revelan falta de claridad sobre la interpretación geométrica de la derivada, de hecho al no haber explicaciones se puede asegurar la falta de articulación del lenguaje necesario para describir lo que ocurre en su solución.



Respuesta del Profesor A

El profesor E pareciera que trata de encontrar el punto de tangencia proponiendolo, al escribir “si $x = 1$” y encontrar la ecuación de la recta tangente en ese punto muestra que comprende la interpretación geométrica de la derivada, sin embargo no al grado que le permita generalizar su procedimiento.



1.-

Si $x = 1.$ $f(x) = x^2 + x + 5/4 = 1 + 1 + 5/4 = 2.25.$ $P(1, 2.25).$

$m' = f' = 2x + 1 = 2(1) + 1 = 5.$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$ $5 = \dfrac{(y_2 - 2.25)}{(x_2 - 1)}$

$(x_2 - 1)5 = (y_2 - 2.25).$

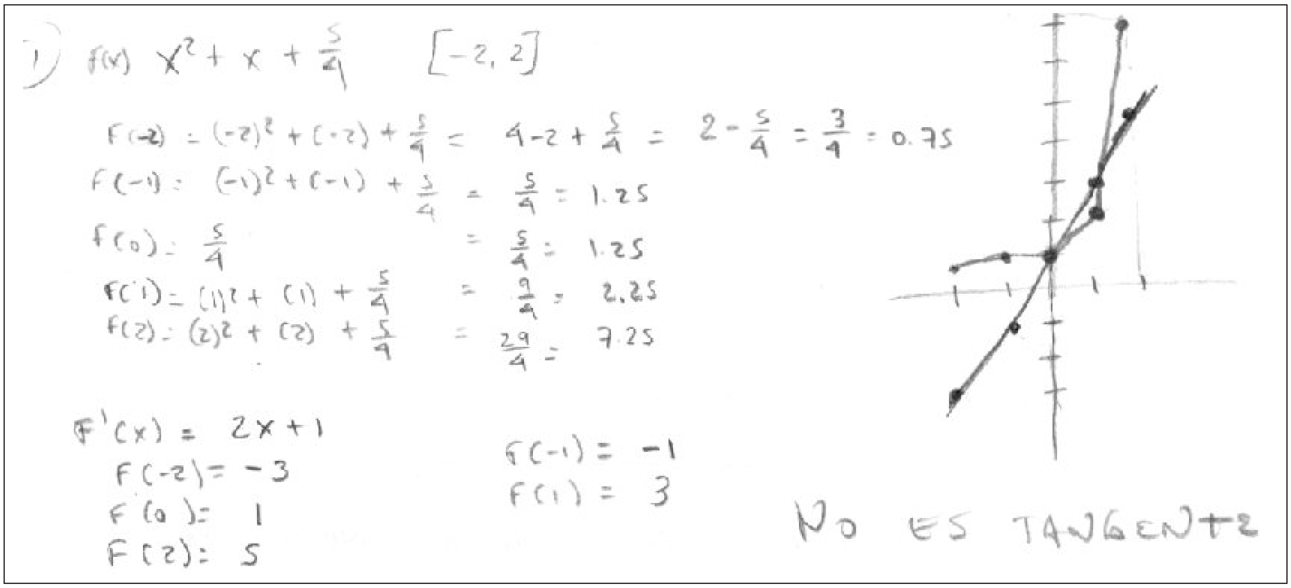
$5x - 5 = y - 2.25$

$0 = y - 2.25 + 5 - 5x.$

$0 = y - 2.75 - 5x$ | Ec. tangente

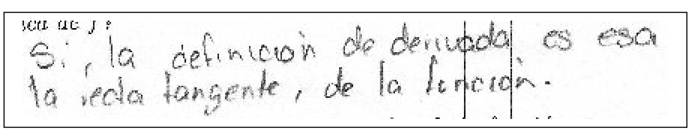
Respuesta del Profesor E

La respuesta del profesor H, se apoya de las gráficas de las funciones. Confiando en la idea intuitiva de recta tangente asegura que la recta dada no es tangente, pues su figura muestra que toca dos puntos de la gráfica de f, este error se debe a lo inexacto de la graficación de $f(x)$.



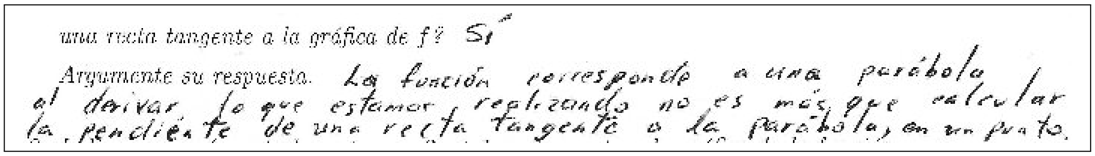
Respuesta del Profesor H

Por otro lado, cinco profesores aseguraron la tangencia sin siquiera preguntarse en qué punto, de hecho el profesor C asegura que esa es la definición de derivada, que en el capítulo 2 se aclaró es la interpretación geométrica. En esta respuesta se puede observar el error común de creer que la derivada de una función cuadrática es la ecuación de la recta tangente y no la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica.



Respuesta del Profesor C

La solución dada por el profesor F, muestra como se puede mencionar o escribir la interpretación geométrica de la derivada de una función sin comprenderla. Ya que es capaz de escribir “bien” la interpretación geométrica de la derivada de una función cuadrática pero no de utilizarla en la resolución del problema.

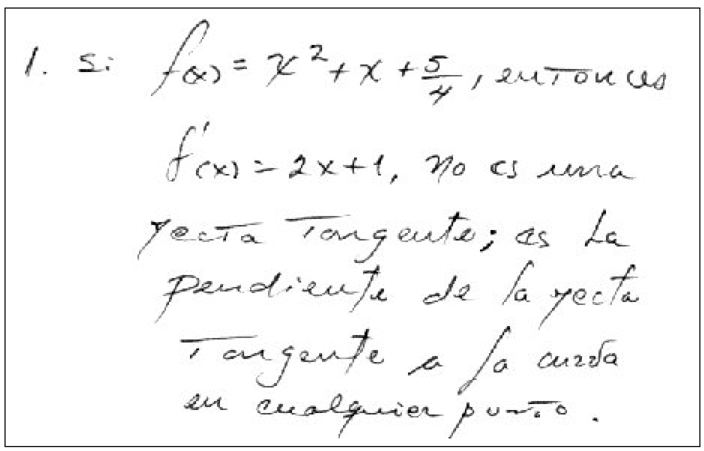


una recta tangente a la gráfica de f? Si

Argumente su respuesta. La función corresponde a una parábola / al derivar lo que estamos realizando no es más que calcular la pendiente de una recta tangente a la parábola, en un punto.

Respuesta del Profesor F

El profesor I en su respuesta, hace notar que la derivada de una función nos permite conocer la pendiente de la recta tangente, sin embargo no destaca el carácter puntual de la derivada.



1. Si $f(x) = x^2 + x + \frac{5}{4}$, entonces $f'(x) = 2x+1$, no es una recta tangente; es la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto.

Respuesta del Profesor I

La siguiente tabla sintetiza los resultados obtenidos en el problema 1.

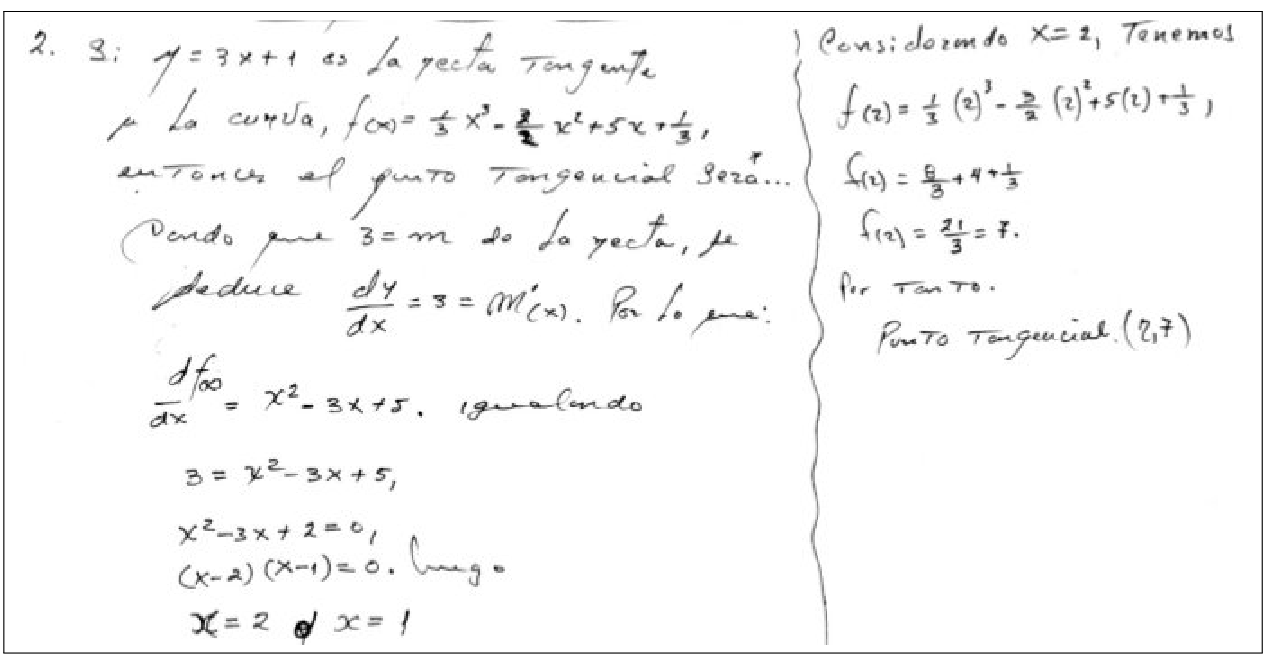
	No contesta	Asegura que no es la recta tangente	Asegura que es la recta tangente	Busca el punto de tangencia
Profesor	K	D, H, I	B, C, F, G, J	A, E
Total	1	3	5	2

4.3. Análisis del problema 2

El problema 2, también requiere de la articulación entre la parte conceptual y la parte algorítmica de la derivada, con él también se averiguaría sobre la comprensión de los profesores sobre la interpretación geométrica de la derivada.

Problema 2. *Indique en que punto la recta* $y = 3x + 1$ *es tangente a la gráfica de la función* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}$.

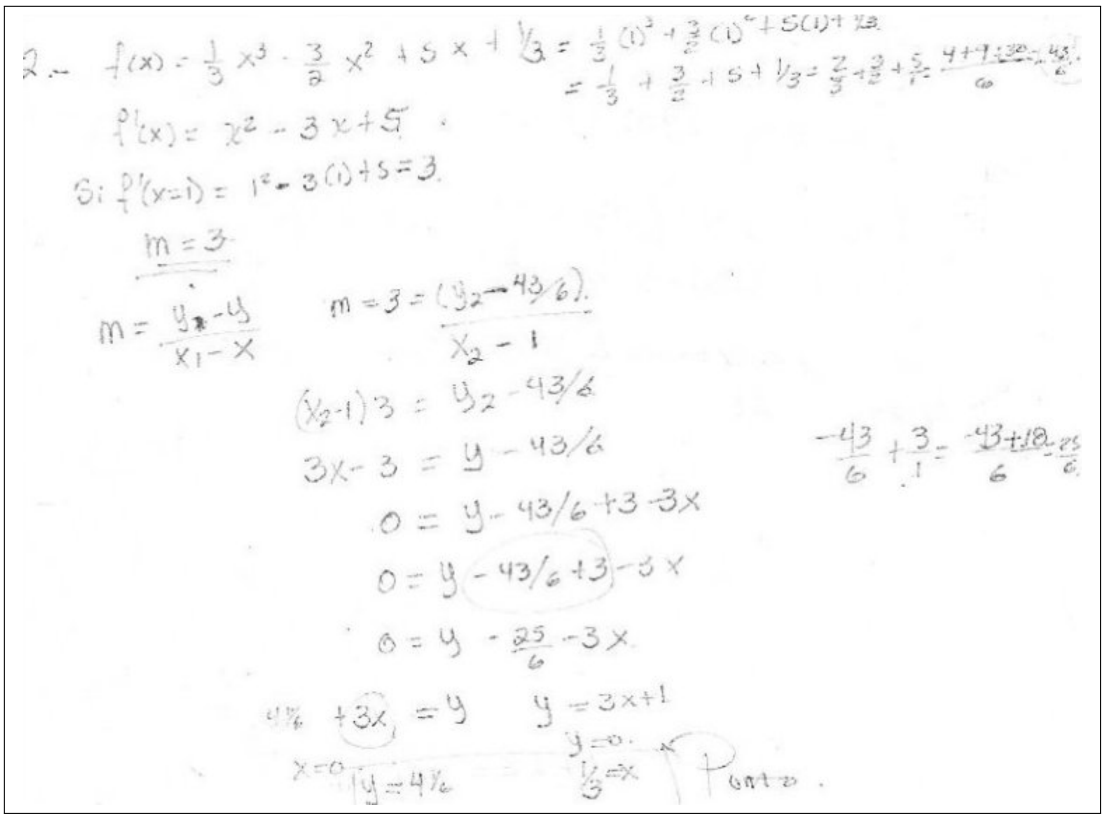
La siguiente respuesta muestra que el profesor I tiene claro que la derivada de una función en el punto x es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto, por lo que calcula la derivada y la iguala a 3. En general, en este problema su procedimiento muestra una buena comprensión de la interpretación geométrica de la derivada, comparándola con la respuesta dada en el problema 1 podemos asegurar que la comprensión es generativa, puesto que en la primera no resalta el carácter puntual de la derivada y en la segunda si lo hace.


2. Si: $y = 3x+1$ es la recta Tangente a la curva, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}$, entonces el punto Tangencial será...
Dado que $3 = m$ de la recta, se deduce $\frac{dy}{dx} = 3 = m'(x)$. Por lo que:
$\frac{df(x)}{dx} = x^2 - 3x + 5$. igualando
$3 = x^2 - 3x + 5$,
$x^2 - 3x + 2 = 0$,
$(x-2)(x-1) = 0$. luego
$x = 2$ ó $x = 1$

Considerando $x = 2$, Tenemos
$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{3}{2}(2)^2 + 5(2) + \frac{1}{3}$,
$f(2) = \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3}$
$f(2) = \frac{21}{3} = 7$.
Por Tanto.
Punto Tangencial $(2,7)$

Respuesta del Profesor I

El profesor E, al encontrar un punto donde la derivada de la función sea igual a 3 muestra que tiene clara la interpretación geométrica de la derivada, sin embargo, no considera el caso de que existan dos o más puntos cuya pendiente de la recta tangente coincida, pero la ecuación de la recta sea diferente en cada punto.



$$2.- \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + 1/3 = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2 + 5(1) + 1/3$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 5 + 1/3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{5}{1} = \frac{4+9+30}{6} = \frac{43}{6}$$
$$f'(x) = x^2 - 3x + 5$$
$$\text{Si } f'(x=1) = 1^2 - 3(1) + 5 = 3$$
$$m = 3$$
$$m = \frac{y_2 - y}{x_1 - x} \qquad m = 3 = \frac{(y_2 - 43/6)}{x_2 - 1}$$
$$(x_2 - 1)3 = y_2 - 43/6$$
$$3x - 3 = y - 43/6 \qquad \frac{-43}{6} + \frac{3}{1} = \frac{-43+18}{6} = \frac{25}{6}$$
$$0 = y - 43/6 + 3 - 3x$$
$$0 = y - 43/6 + 3 - 3x$$
$$0 = y - \frac{25}{6} - 3x$$
$$4\% + 3x = y \qquad y = 3x + 1$$
$$x = 0 \quad y = 4\% \qquad y = 0 \quad 1/3 = x \quad \text{Punto.}$$

Respuesta del Profesor E

La respuesta del profesor A sugiere que comprende la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto, pero tiene obstáculos algebraicos para encontrar el punto donde la recta dada es tangente.

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3} = 3x+1$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 3x + \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{1}{81} - \frac{3}{6} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Respuesta del Profesor A

En la siguiente respuesta dada por el profesor F, compara la derivada de la función f con la ecuación de la recta dada. Si fuera así, el profesor caería en el error de creer que la derivada de una función es la ecuación de la recta tangente.

2.- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}$

Como $f'(x) = x^2 - 3x + 5$

la recta $y = 3x+1$ no es tangente en ningun punto de la funcion $f(x)$.

Respuesta del Profesor F

La siguiente tabla sintetiza los resultados del problema 2.

	No contesta	No tiene clara la interpretación geométrica	Busca gráficamente el punto	Busca analíticamente el punto
Profesor	C, D, G, K, J	F	B, H	A, E, I
Total	5	1	2	3

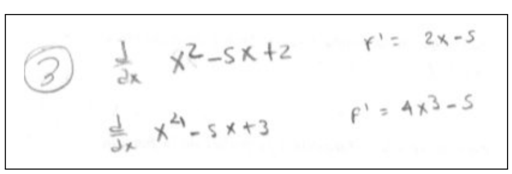
4.4. Análisis del problema 3

Con el problema 3, se averiguaría si el profesor sabe que para las funciones definidas por piezas, los puntos donde la regla de definición cambia merecen un trato especial.

Problema 3. *Halle la derivada de* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & 1 < x \leq 2 \\ x^4 - 5x - 3 & 2 < x < +\infty \end{cases}$

De los once participantes sólo un profesor se cuestionó por lo que sucedía en ese punto. La mayoría sólo aplica las reglas de derivación, de los profesores que lo hacen, se distinguen dos casos, aquellos que escriben los intervalos correspondientes a la expresión algebraica que encuentran y los que solamente escriben el resultado que obtienen al aplicar las reglas de derivación.

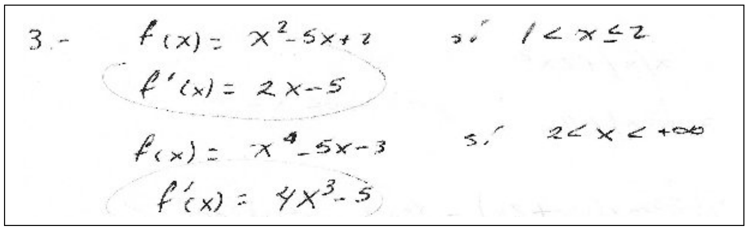
En la respuesta del profesor H, se puede observar como aplica adecuadamente las reglas de derivación a las expresiones algebraicas dadas, incluso las reescribe y obtiene su derivada sin cuestionarse sobre lo que ocurre con esta función en el punto $x = 2$. Él utiliza dos notaciones en su respuesta, $\frac{df}{dx}$, y f', con la segunda el profesor sugiere que entiende la derivación como el proceso de obtener una fórmula a partir de otra, puesto que no escribe $f'(x)$, es decir, no escribe que la derivada debe ser valuada en un punto. El no tener claro el carácter puntual de la derivada también se refleja en el hecho de sólo escribir las expresiones algebraicas sin escribir el intervalo.


3 $\frac{d}{dx}\, x^2 - 5x + 2$ $f' = 2x - 5$
$\frac{d}{dx}\, x^4 - 5x + 3$ $f' = 4x^3 - 5$

Respuesta del Profesor H

La respuesta anterior sugiere la necesidad de construir relaciones entre la no derivabilidad y las funciones definidas por piezas, además de requerir una reflexión profunda sobre el carácter puntual de la derivada.

El profesor F, reescribe $f(x)$ como dos funciones diferentes y para cada una calcula su derivada, escribiendo el intervalo donde está definida cada regla de definición. Escribirlas así, oculta la necesidad de verificar la derivabilidad de $f(x)$ en el punto $x = 2$


3.- $f(x) = x^2 - 5x + 2$ si $1 < x \leq 2$

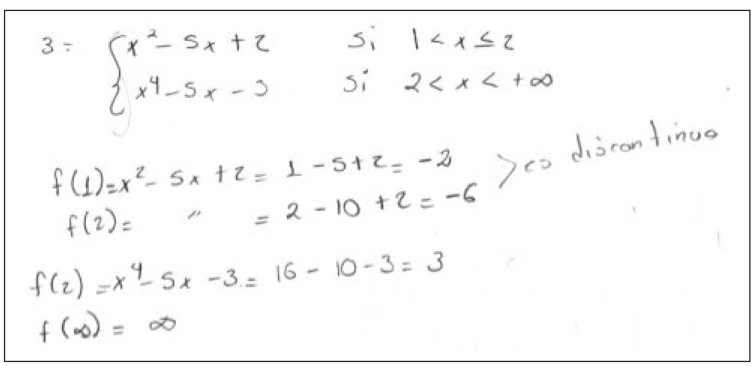
$f'(x) = 2x - 5$

$f(x) = x^4 - 5x - 3$ si $2 < x < +\infty$

$f'(x) = 4x^3 - 5$

Respuesta del Profesor F

El profesor G se da cuenta de que la función en el punto $x = 2$ es discontinua, esto sugiere que sospecha del trato especial que debe darse al punto $x = 2$, sin embargo no menciona nada al respecto, de hecho ni siquiera deriva las reglas de definición.


3: $\begin{cases} x^2 - 5x + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^4 - 5x - 3 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$

$f(1) = x^2 - 5x + 2 = 1 - 5 + 2 = -2$ es discontinuo

$f(2) =$ " $= 2 - 10 + 2 = -6$

$f(2) = x^4 - 5x - 3 = 16 - 10 - 3 = 3$

$f(\infty) = \infty$

Respuesta del Profesor G

A continuación se presenta una tabla con la información del problema 3.

	No contesta	Deriva	Deriva y escribe intervalos	Cuestiona qué sucede en el punto $x = 2$
Profesor	K,J	B, D, H	F, E, A, C	G
Total	2	3	4	1

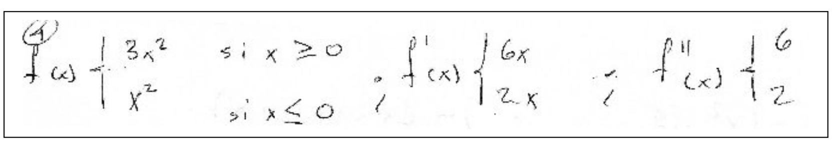
4.5. Análisis del problema 4

El problema 4 también fue propuesto para averiguar si los profesores en las funciones definidas por piezas recordaban el trato especial que merece el punto donde cambia la regla de definición.

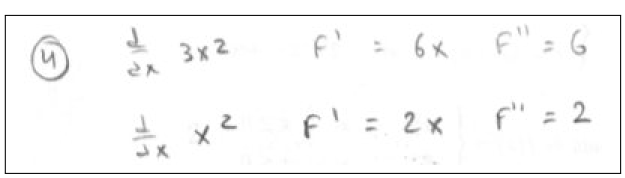
Problema 4. *Encuentre la segunda derivada de* $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si \quad x \geq 0 \\ x^2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

La función $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ pero su derivada no es derivable en el punto $x = 0$, es decir, $f(x)$ no es dos veces derivable en $x = 0$. Ningún profesor se percató de esta situación, al igual que en el problema 3 sólo derivaron las reglas de definición y en el mejor de los casos escribieron los intervalos donde eran válidas. Mostrando así que lo conceptual con lo algorítmico no están relacionados, porque en ningún momento se preguntan si la función es derivable en el punto $x = 0$.

En las siguientes imágenes se pueden apreciar algunas de las respuestas dadas por los profesores.



Respuesta del Profesor B



Respuesta del Profesor H

4) $f(x) = 3x^2 \quad f'(x) = 6x \quad f''(x) = 6 \quad \text{si } x \geq 0 \quad f'' = 6$

$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2 \quad \text{si } x \leq 0 \quad f'' = -2$

Respuesta del Profesor D

El profesor G parece recordar que el punto $x = 0$ merece un trato especial, porque calcula $f(0)$ y afirma su continuidad, sin embargo no da una respuesta. Esto sugiere la necesidad de establecer relaciones entre los conocimientos adquiridos para evitar el olvido de ellos. Probablemente este profesor en algún momento trabajó con las funciones definidas por piezas pero no puede recuperar ese conocimiento porque fue presentado de forma aislada.

$$4 = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$f(0) = 0$ es continua

$f(0) = 0.$

Respuesta del Profesor G

Los resultados del problema 4 se concentran en la siguiente tabla.

	No contesta	Deriva las funciones sin escribir intervalo	Deriva las funciones y escribe el intervalo	Se cuestiona sobre el punto $x = 0$
Profesor	H, I, J, K	A, C, B	D, E, F	G
Total	4	3	3	1

4.6. Análisis del problema 5

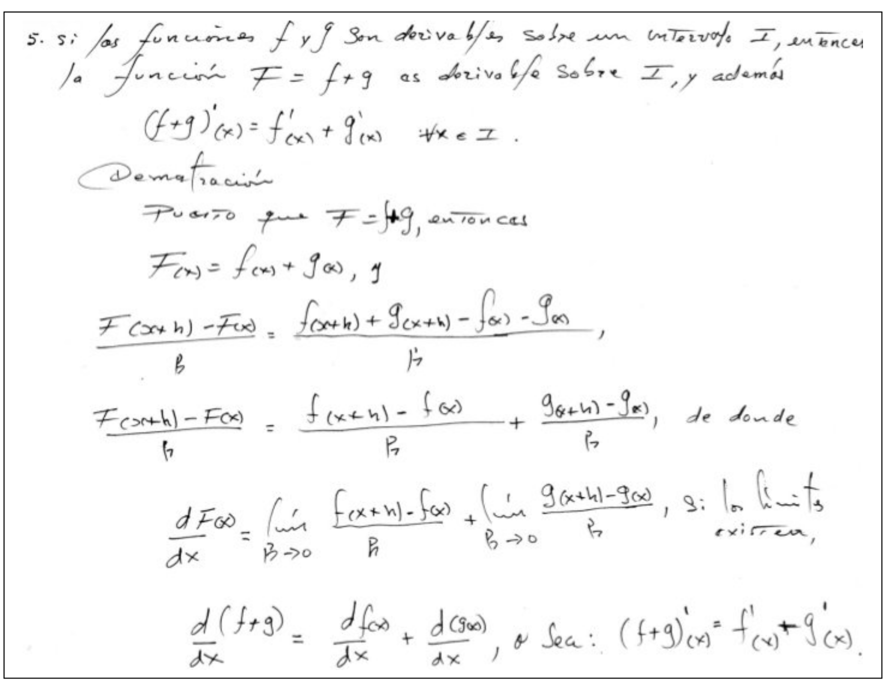
Este problema es de corte conceptual, con él se averiguaría sobre la comprensión de los profesores sobre la definición de derivada.

Problema 5. *Deduzca la fórmula de la derivada de una suma de dos funciones:*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

En el capítulo 2, se mencionan diferentes definiciones de derivada. En las respuestas de los profesores sólo se observó la dada por incrementos, ya sea utilizando la notación Δx o h. De los once profesores cuatro intentan deducir la fórmula de la derivada de una suma, y solamente dos hacen un buen procedimiento.

En la siguiente respuesta se puede apreciar como el profesor I, se sabe la definición de derivada dada por medio de incrementos, utiliza h y deduce la regla para derivar una suma de funciones. Lo cual parece indicar una buena comprensión sobre la definición de derivada.



5. si las funciones f y g son derivables sobre un intervalo I, entonces la función $F = f+g$ es derivable sobre I, y además

$$(f+g)'_{(x)} = f'_{(x)} + g'_{(x)} \quad \forall x \in I.$$

Demostración

Puesto que $F = f+g$, entonces

$F_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$, y

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h},$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}, \text{ de donde}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}, \text{ si los límites existen,}$$

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{d(g(x))}{dx}, \text{ o sea: } (f+g)'_{(x)} = f'_{(x)} + g'_{(x)}.$$

Respuesta del Profesor I

La respuesta dada por el profesor J, muestra que sabe la definición de derivada por medio de incrementos. Este profesor utiliza la regla de los cuatro pasos para deducir la regla de la suma de dos funciones, esto pone en duda su comprensión de la definición de derivada, pues aunque deduce la fórmula parece que sólo está siguiendo una receta.

5 Sean las funciones u y v, que expresaré como $y = u+v$, al aplicar la regla general se tiene:

$y+\Delta y = u+\Delta u+v+\Delta v$; restando la función original;

$\Delta y = \Delta u + \Delta v$ → Dividiendo entre Δx, se tiene

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$ → aplicando límites al segundo miembro.

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$, de aquí

Puedo deducir que $\left(\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \right)$

Respuesta del Profesor J

El profesor G pretende utilizar la definición de derivada dada por medio de incrementos, utilizando h sin embargo menciona que calculará el límite cuando $h \geq 0$, con esto, podemos afirmar que la definición de derivada no es un conocimiento consolidado dentro de los conocimientos adquiridos por el profesor.

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ $\quad h = dx$

$(f+g)(x-h) = f((x+h)) + g(x+h)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f+g)(x+h) - (f+g)(x) = f(x+h) + g(x+h) - [(f(x) + g(x)] = [f(x+h) - f(x)] + [g(x-h) - g(x)]$

$\frac{[(f+g)(x+h) - (f+g)(x)]}{h} = [(f(x+h) - f(x))/h + [g(x+h) - g(x)/h.$

Teniendo el limite cundo $h \geq 0$ obtenemos

$(f+g)'x = f'(x) + g'(x)$

Respuesta del Profesor G

En la siguiente respuesta, parece que el profesor E conoce la definición de derivada dada por medio de incrementos, sin embargo no logra utilizarla en la deducción de la regla de derivación.

5.- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$

1.- $f(x) + g(x)$

2.- $f(x) + g(x) + \Delta x.$

$f_2(x) - f_1(x) = \Delta f(x) + \Delta x$

$g_2(x) - g_1(x) = \Delta g(x) + \Delta x$

$f(x) + (f_2(x) - f_1(x)) + \Delta x.$

$g(x) + (g_2(x) - g_1(x)) + \Delta x.$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x) + \Delta x + \lim \Delta g(x) + \Delta x}{\Delta x}$$

Respuesta del Profesor E

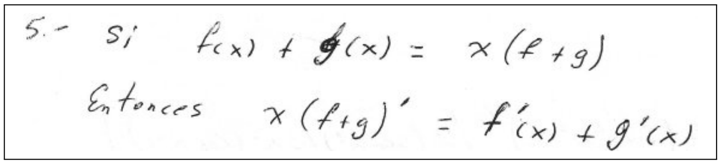
Los otros dos profesores que dan una respuesta a este problema no mencionan la definición de derivada. Uno de ellos sólo la verifica proponiendo funciones f y g, el otro parece interpretar $(f+g)(x)$ como un producto.

5 si $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2$ $\quad \therefore f'(x) + g'(x) = 2 + 3x^2$.

$g(x) = x^3 \qquad g'(x) = 3x^2$ $\quad$?

$(f+g)(x) = x^2 + x^3 \Rightarrow (f+g)'(x) = 2x + 3x^2$

Respuesta del Profesor B


5.- Si $f(x) + g(x) = x(f+g)$

Entonces $x(f+g)' = f'(x) + g'(x)$

Respuesta del Profesor F

En general, este problema muestra que el concepto de derivada como un límite no es un conocimiento del que se hayan apropiado los profesores, dado que la mayoría de ellos no da una respuesta adecuada a esta pregunta.

En la siguiente tabla se resumen los resultados del problema 5.

	No contesta	No sabe la definición	Conoce la definición pero no deduce la regla	Sabe la definición y deduce la regla
Profesor	A, C, F, H, K	B, D	E, G	I, J
Total	5	2	2	2

4.7. Análisis del problema 6

Para averiguar cómo los profesores determinan los puntos donde una función es derivable, se diseñó el problema 6.

Problema 6. *Sea* $f(x) = \log(x^2 - 1)$*, al aplicar las reglas formales de derivación se obtiene* $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$*. Indique dónde* f *es derivable.*

Como se sospechaba, de los seis profesores que contestan el problema los seis determinan los puntos donde $f(x)$ es derivable, a partir de la función encontrada al aplicar las reglas de derivación. Es decir, determinan los puntos donde $f'(x)$ está definida para indicar en qué puntos $f(x)$ es derivable, en lugar de analizar para qué puntos del dominio de $f(x)$ el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

Las siguientes figuras muestran algunas respuestas de los profesores.

6.- f es derivable ~~en el~~ para todos los números $\mathbb{R}$, con $x \neq \pm 1$

Respuesta del Profesor F

6.- $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$

Respuesta del Profesor E

6. Si $f'_{(x)} = \frac{2x}{x^2-1}$ es la derivada de $f(x) = \log(x^2-1)$, no es derivable en $x = \pm 1$.

Respuesta del Profesor I

Las últimas dos respuestas muestran claramente como los profesores miran $f'(x)$ y a partir de esto, determinan los puntos donde $f(x)$ es derivable.

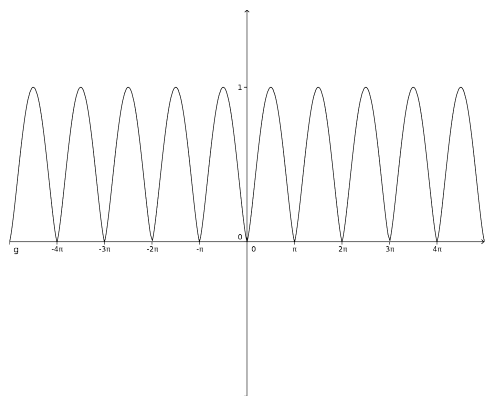
En la siguiente tabla se informa sobre los profesores que no contestaron la pregunta 6.

	No contesta	Revisa la función encontrada con las reglas de derivación	Analiza para que puntos de $f(x)$ existe $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Profesor	B, D, G, J, K	A, C, E, F, H, I	
Total	5	6	0

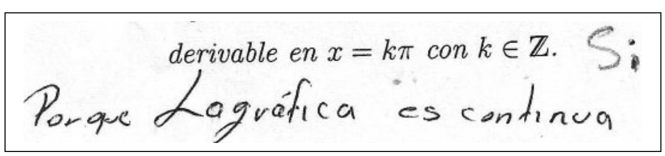
4.8. Análisis del problema 7

Con el problema 7 deseabamos averiguar si los profesores se apoyaban de la figura dada para determinar si la función es o no derivable en los puntos de la forma $x = k\pi$ o si recurrían a la definición de derivada.

> ***Problema 7.*** *Sea $g(x) = (\operatorname{sen} x)^{\frac{4}{3}}$, en la siguiente figura se muestra su gráfica. Al utilizar las reglas formales de derivación se obtiene $g'(x) = \frac{4}{3}(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}} \cos x$. Diga si g es derivable en $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.*



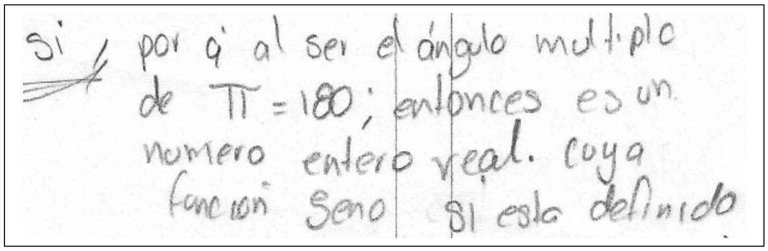
Dos profesores aseguraron la derivabilidad de la función en los puntos de la forma $x = k\pi$, uno de ellos se apoyó de la figura asegurando que como la función era continua entonces era derivable, es el caso del profesor A.


derivable en $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si

Porque La gráfica es continua

Respuesta del Profesor A

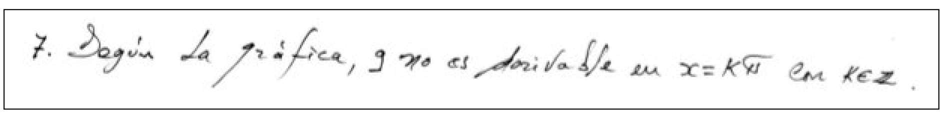
Por el contrario el profesor C justifica analíticamente la derivabilidad de $g(x)$ en los puntos de la forma $x = k\pi$ *"probando"* que la función está definida en esos puntos. Lo cual no es un argumento válido para asegurar la derivabilidad.



si / por q' al ser el ángulo multiplo de $\pi = 180$; entonces es un numero entero real. cuya funcion seno si esta definido

Respuesta del Profesor C

Otro profesor asegura la no derivabilidad de la función en los puntos de la forma $x = k\pi$ apoyándose en la gráfica, desafortunadamente no se sabe si precisamente se refiere a los *"falsos picos"* que observa en la figura.



7. Según la gráfica, g no es derivable en $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Respuesta del Profesor I

En las tres respuestas anteriores se puede observar como dentro de los conocimientos del profesor lo conceptual está en un lugar y lo algorítmico en otro, ninguno de los tres profesores logró una articulación entre estos dos terrenos para dar un argumento válido de la derivabilidad de la función en los puntos de la forma $x = k\pi$.

La siguiente tabla resume los resultados del problema 7.

	No contesta	Asegura la no derivabilidad	Asegura la derivabilidad
Profesor	B, D, E, F, G, H, J, K	I	A, C
Total	8	1	2

4.9. Análisis del problema 8

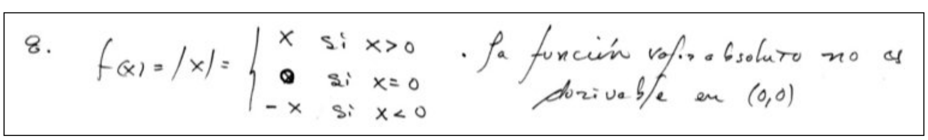
Con el inciso (a) del problema 8, se averiguaría si los profesores saben que la función valor absoluto no es derivable en el punto $x = 0$ y con el inciso (b) si los docentes asegurán la no derivabilidad de otra función por el hecho se tener $|x|$ en su regla de definición.

Problema 8. *¿En qué puntos las siguientes funciones son derivables? Halle la derivada en esos puntos.*

(a) $f(x) = |x|$

(b) $h(x) = x|x| + 2x^2$

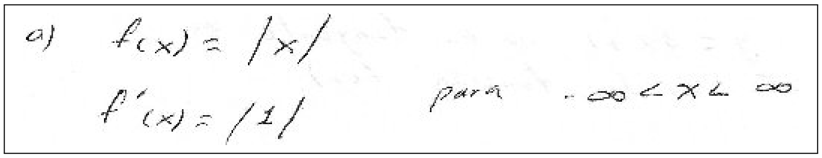
La no derivabilidad de la función valor absoluto en el punto $x = 0$ al parecer no es tan conocida entre los profesores de educación media superior, pues de los once participantes sólo dos conocen esta información. Sin embargo no justifican la no derivabilidad de esta función en el punto $x = 0$, ni siquiera mencionan la presencia de picos en la gráfica de la función. Enseguida se muestra la respuesta dada por el profesor I.



8. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. La función valor absoluto no es derivable en (0,0)

Respuesta del Profesor I

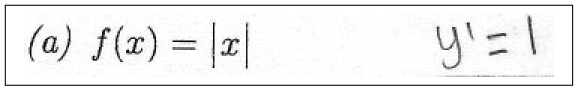
Este problema lo contestaron cinco profesores, de los cuales tres desconocen la no derivabilidad de la función valor absoluto en el punto $x = 0$, incluso pareciera que no conocen la función valor absoluto porque calculan la derivada de $f(x)$ como si el símbolo del valor absoluto no estuviera. A continuación se muestran dos respuestas donde se puede apreciar esta situación.



a) $f(x) = |x|$

$f'(x) = |1|$ para $-\infty < x < \infty$

Respuesta del Profesor F



(a) $f(x) = |x|$ $y' = 1$

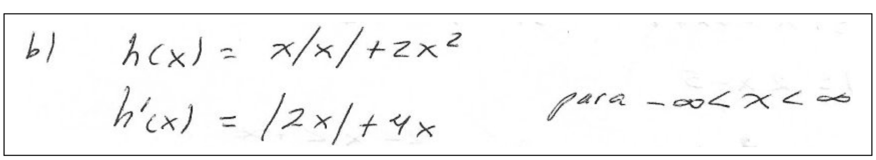
Respuesta del Profesor C

En la siguiente tabla se puede observar cuántos profesores no contestaron el inciso (a) de este problema.

	No contesta	Desconoce que $f(x) = \lvert x \rvert$ no es derivable en $x = 0$	Sabe que $f(x) = \lvert x \rvert$ no es derivable en $x = 0$
Profesor	B, D, E, H, J, K	C, F, G	A, I
Total	6	3	2

En el inciso (b) del problema 8, hubo menos respuestas pues sólo tres de los once profesores abordó el problema, de los tres ninguno lo hizo de la forma correcta. Como desde el inciso (a) mostraron no saber sobre la no derivabilidad de la función valor absoluto en el punto $x = 0$, a la función $g(x)$ del inciso (b) sólo le aplicaron las reglas de derivación sin más preámbulo.

En las siguientes imágenes aparecen dos de las respuestas dadas.

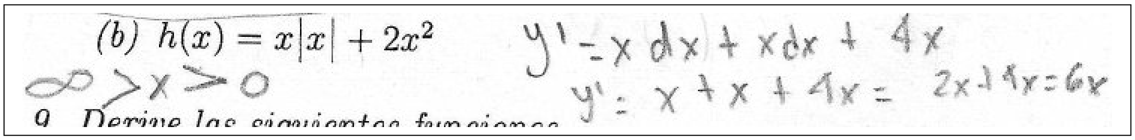


b) $h(x) = x|x| + 2x^2$

$h'(x) = |2x| + 4x$ para $-\infty < x < \infty$

Respuesta del Profesor F

El profesor C, al aclarar que trabajaría con el intervalo $(0, +\infty)$ justifica el no escribir el valor absoluto, sin embargo la presencia de y' muestra la concepción de la derivada como una fórmula, además de las deficiencias en el uso de un lenguaje matemático apropiado.


(b) $h(x) = x|x| + 2x^2$ $y' = x\,dx + x\,dx + 4x$

$\infty > x > 0$ $y' = x + x + 4x = 2x + 4x = 6x$

9 Derive las siguientes funciones

Respuesta del Profesor C

La siguiente tabla resume los resultados obtenidos en el inciso (b) del problema 8.

	No contesta	Desconoce que $f(x) = \|x\|$ no es derivable en $x = 0$	Asegura la no derivabilidad de $g(x)$ en $x = 0$ por la presencia de $\|x\|$
Profesor	A, B, D, E, H, I, J, K	C, F, G	
Total	8	3	0

4.10. Análisis del problema 9

El problema 9 como ya se había mencionado es de carácter operatorio, con él se averiguaría sobre la destreza de los profesores para aplicar las reglas de derivación y la regla de la cadena.

Problema 9. *Derive las siguientes funciones.*

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen}^2 x + x^2 + 1}$

(b) $g(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

Los resultados obtenidos no fueron los esperados, las respuestas de los profesores muestran que en la parte algorítmica de la derivada, también tienen deficiencias. Esto lo demuestra la mala lectura del lenguaje matemático, los errores cometidos durante el cálculo de las derivadas y el no contestar la pregunta.

En el inciso (a) sólo el profesor F y el profesor E aplican correctamente las reglas de derivación obteniendo adecuadamente $f'(x)$, la siguiente figura muestra el procedimiento de uno de ellos. En esta respuesta se puede observar como además de calcular la derivada, también se simplifica demostrando que el profesor tiene una buena formación en el terreno operatorio.

9.-

a) $$f'(x) = \frac{(e^x)(2\,\mathrm{sen}\,x \cos x + 2x) - (\mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1)(e^x)}{(\mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(2\,\mathrm{sen}\,x \cos x + 2x - \mathrm{sen}^2 x - x^2 - 1)}{(\mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1)^2}$$

Respuesta del Profesor F

Por otro lado, la respuesta del profesor J no es la adecuada, aunque aplica correctamente la regla para dividir un cociente, se equivoca al calcular la derivada de $\mathrm{sen}^2\, x + x^2 + 1$ dejando ver su falta de destreza en el cálculo de derivadas.

a) $$f(x) = \frac{e^x}{\mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1)\cdot e^x - e^x(2x \cos x^2 + 2x)}{(\mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1)^2}$$

$u = e^x$

$u' = e^x(1) = e^x$

$v = \mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1$

$v' = 2x \cos x^2 + 2x$

$$f'(x) = \frac{e^x[(\mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1) - (2x \cos x^2 + 2x)]}{(\mathrm{sen}^2 x + x^2 + 1)^2}$$

Respuesta del Profesor J

Algunos profesores tuvieron problemas con el lenguaje matemático y calcularon la derivada de otra función, dejando ver que aun cuando el uso de un lenguaje apropiado es indispensable para el desarrollo de la comprensión, no es un recurso que los profesores tengan. La siguiente figura muestra un ejemplo de estas respuestas.

9. a) $f(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{Sen}^2(x^2+x+1)}$.

$$f'(x) = \frac{\operatorname{Sen}^2(x^2+x+1)\cdot e^x - e^x\left(2\operatorname{Sen}(x^2+x+1)\cdot\cos(x^2+x+1)\cdot(2x+1)\right)}{\operatorname{Sen}^4(x^2+x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x\left(\operatorname{Sen}^2(x^2+x+1) - (2x+1)\cdot 2\operatorname{Sen}(x^2+x+1)\cos(x^2+x+1)\right)}{\operatorname{Sen}^4(x^2+x+1)}$$

$\dfrac{d(\operatorname{Sen} v)^2}{dx} = 2\operatorname{Sen} v\cdot\dfrac{d(\operatorname{Sen} v)}{dx}$. luego $\dfrac{d(\operatorname{Sen} v)}{dx} = \cos v\cdot\dfrac{dv}{dx}$,

entonces $\dfrac{d(\operatorname{Sen} v)^2}{dx} = 2\operatorname{Sen} v\cdot\cos v\,\dfrac{dv}{dx}$

Respuesta del Profesor I

La siguiente tabla concentra los resultados del problema 9 inciso (a).

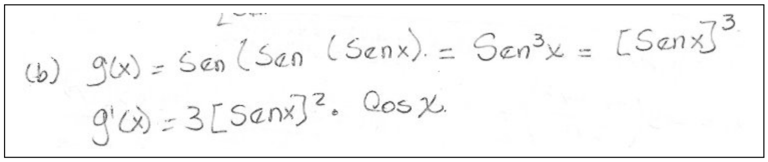
	No contesta	Calcula la derivada de otra función	Aplica incorrectamente las reglas de derivación	Aplica correctamente las reglas de derivación
Profesor	A, B, D, G, H, K	C, I	J	E, F
Total	6	2	1	2

En el inciso (b), dos de las respuestas dadas fueron inesperadas, los profesores J y E confunden la composición de la función con una multiplicación, esto es, calculan la derivada de la función $\operatorname{sen}^3(x)$. Estas respuestas reflejan una falta de apropiación del lenguaje matemático, por lo que la lectura y escritura de funciones más complejas a las que usualmente trabajan sería recomendable.

(b) $g(x) = \operatorname{Sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) = \operatorname{Sen}^3 x = \operatorname{sen} x^3$

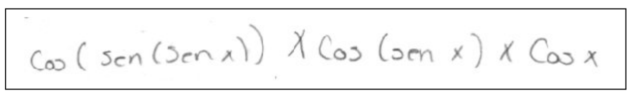
$g'(x) = 3x^2\cos x^3$

Respuesta del Profesor J



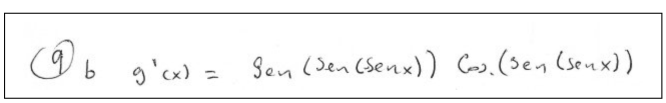
Respuesta del Profesor E

Otra respuesta que muestra la falta de articulación del lenguaje matemático es la dada por el profesor G, parece que el profesor utiliza x como símbolo de multiplicación en medio de funciones de variable x. Si no fuera así, su respuesta mostraría que no sabe aplicar la regla de la cadena. La falta de interés por una buena escritura también se puede apreciar al escribir una expresión algebraica sin igualarla a $g'(x)$.



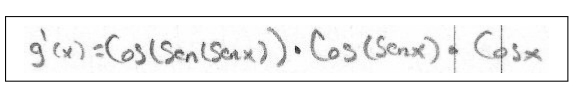
Respuesta del Profesor G

El profesor B, proporciona una respuesta equivocada, lo que refleja la deficiente construcción de relaciones entre la regla de la cadena y la aplicación de esta. Desde luego, la única forma para lograr aplicar adecuadamente la regla de la cadena a cualquier función es el hacer ejercicios constantemente, para que las relaciones contruídas alrededor de esta sean más fuertes.



Respuesta del Profesor B

De los once profesores sólo cuatro contestaron correctamente, sus respuestas eran similares a la dada por el profesor A.



Respuesta del Profesor A

En la siguiente tabla se resumen los resultados del problema 9 inciso (b)

	No contesta	Calcula la derivada de la función $\mathrm{sen}^3(x)$	Aplica incorrectamente la regla de la cadena	Aplica correctamente la regla de la cadena
Profesor	D, H, K	E, J	B, G	A, C, I, F
Total	3	2	2	4

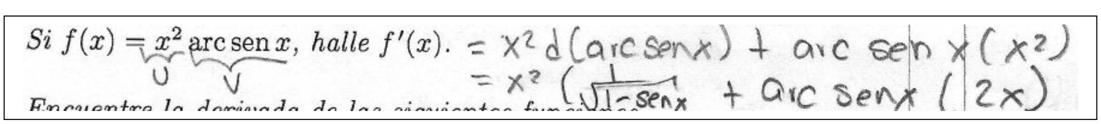
4.11. Análisis del problema 10

El propósito del problema 10 era averiguar si la derivada de la función $\operatorname{arc\,sen}(x)$ formaba parte de los conocimientos que el profesor ha adquirido.

Problema 10. *Si* $f(x) = x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)$, *halle* $f'(x)$.

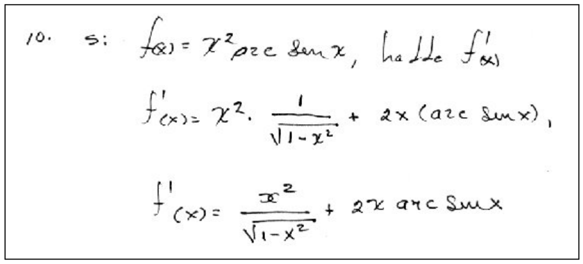
Como se sospechaba, la mayoría de los profesores no recuerda la derivada de la función $\operatorname{arc\,sen}(x)$, sólo uno pudo calcularla sin ayuda de tablas, pues aunque otros dos profesores contestan correctamente este problema, al entregar el cuestionario admiten haber consultado tablas de derivadas.

La siguiente imagen muestra la única respuesta dada sin ayuda de tablas. Sin embargo también muestra la deficiencia en el uso de un lenguaje matemático apropiado, ya que la expresión algebraica dada no es igualada a $f'(x)$, además al hacer uso de la regla para derivar un producto de funciones escribe $x^2 d \operatorname{arc\,sen}(x)$, con lo cual parece hacer referencia a la notación $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.


Si $f(x) = \underbrace{x^2}_{U} \underbrace{\operatorname{arc\,sen} x}_{V}$, *halle* $f'(x)$. $= x^2\, d(\operatorname{arc\,sen} x) + \operatorname{arc\,sen} x\,(x^2)$
$= x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}} + \operatorname{arc\,sen} x\,(2x)\right)$

Respuesta del Profesor C

En la siguiente imagen se muestra una de las respuestas obtenidas empleando tablas de derivación.

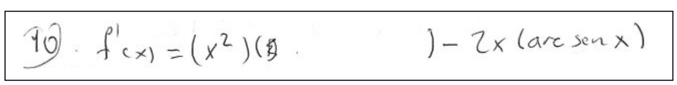

10. si: $f(x) = x^2 \operatorname{arc\,sen} x$, halle $f'(x)$

$f'(x) = x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2x(\operatorname{arc\,sen} x)$,

$f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2x \operatorname{arc\,sen} x$

Respuesta del Profesor I

Un ejemplo claro de que la dificultad para resolver este problema era no saber la derivada de la función *arco seno* es la respuesta dada por el profesor B. Él no tiene dificultad para identificar que la función $f(x)$ es un producto y por lo tanto requiere la regla para derivar el producto de dos funciones, sin embargo no puede concluir su procedimiento porque desconoce la derivada de la función arco seno.


10. $f'(x) = (x^2)(\quad) - 2x(\operatorname{arc\,sen} x)$

Respuesta del Profesor B

La tabla siguiente informa sobre cuántos profesores no contestan el problema 10, se intuye que no lo hacen porque tampoco recuerdan la derivada de la función $\operatorname{arc\,sen}(x)$.

	No contesta	No recuerda la derivada de la función $\operatorname{arc\,sen}(x)$	Utiliza tabla de derivadas	Conoce la derivada de la función $\operatorname{arc\,sen}(x)$
Profesor	A, D, E, F, G, H, K	B	I, J	C
Total	7	1	2	1

4.12. Análisis del problema 11

Con el problema 11 se averiguaría si los profesores antes de aplicar las reglas de derivación hacen un análisis de la función a derivar. Con esto, mostrarían que comprenden el carácter puntual de la derivada y además, que saben que aunque el problema parezca meramente operatorio siempre es recomendable preguntarse por los puntos donde la función es derivable.

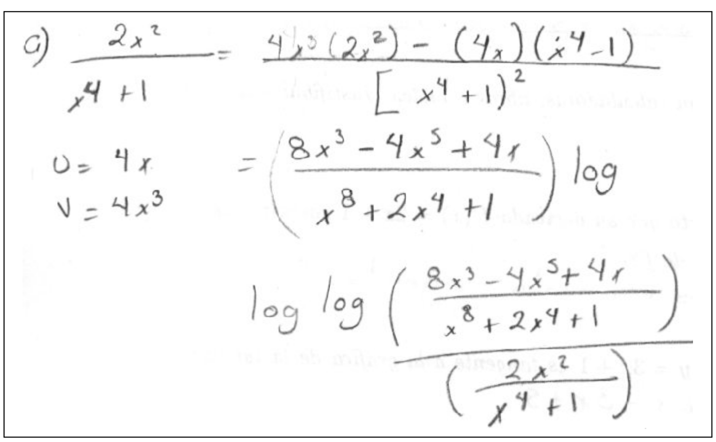
Problema 11. *Encuentre la derivada de las siguientes funciones.*

(a) $f(x) = \log\left(\log\left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)\right)$

(b) $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x^3 - 2)^{\frac{3}{2}}$

Desafortunadamente el inciso (a) no fue contestado por la mayoría de los profesores. De los cuatro que contestan el problema, los cuatro dan una respuesta equivocada, dejando ver sus dificultades para calcular la derivada de la función *logarítmo* .

A continuación se presenta una de las respuestas dadas.



a) $\dfrac{2x^2}{x^4+1} = \dfrac{4x^3(2x^2) - (4x)(x^4-1)}{[x^4+1)^2}$

$u = 4x$

$v = 4x^3$

$= \left(\dfrac{8x^3 - 4x^5 + 4x}{x^8+2x^4+1}\right) \log$

$\dfrac{\log \log \left(\dfrac{8x^3 - 4x^5 + 4x}{x^8+2x^4+1}\right)}{\left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)}$

Respuesta del Profesor G

La siguiente tabla contiene la información sobre el inciso (a) del problema 11.

	No contesta	Aplica mal las reglas de derivación	Calcula correctamente la derivada	Analiza previamente la función
Profesor	A, B, D, F, H, J, K	C, E, G, I		
Total	7	4	0	0

En el inciso (b) del problema 11, hubo más profesores que contestaron. Aunque muchas de estas respuestas fueron equivocadas, pues de los nueve profesores que dieron una respuesta sólo dos aplicaron correctamente las reglas de derivación.

La siguiente imagen muestra la respuesta dada por el profesor F, él calcula la derivada de la función $g(x)$ sin percatarse de que esta función tiene dominio vacío. La respuesta dada es un ejemplo de como la parte conceptual y la parte algorítmica de la derivada se conciben de forma aislada, pues aunque el cálculo de $g'(x)$ esté bien hecho, de nada sirve porque no existen puntos donde $g(x)$ sea derivable.

11.- b) $g'(x) = \frac{3}{2}\left(Sen^2 x^3 - 2\right)^{1/2}\left[2\left(Sen\, x^3\right)\left(3x^2\left(Cos\, x^3\right)\right)\right]$

$g'(x) = 9x^2\left(Sen^2 x^3 - 2\right)^{1/2}\left(Sen\, x^3\left(Cos\, x^3\right)\right)$

Respuesta del Profesor F

Otra de las respuestas que muestran la falta de articulación entre lo conceptual y lo algorítmico es la dada por el profesor A, él también calcula la derivada de $g(x)$ sin analizar previamente la función. Sin embargo, en problemas como el 1, 2, 6 y 8 había dado pruebas de comprender el carácter puntual de la derivada, que en la resolución de este problema no utilizó.

$u = Sen^2 x^3 - 2 \rightarrow$

$du = 2Sen x^3 \cdot Cos x^3 \cdot 3x^2$

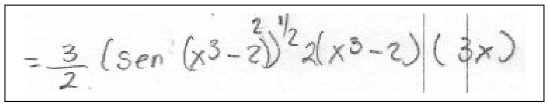
$g'(x) = \frac{3}{2}\left(Sen^2 x^3 - 2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2Sen x^3 \cdot Cos x^3 \cdot 3x^2$

$g'(x) = 9x^2\left(Sen^2 x^3 - 2\right)^{\frac{1}{2}} Sen x^3\, Cos x^3$

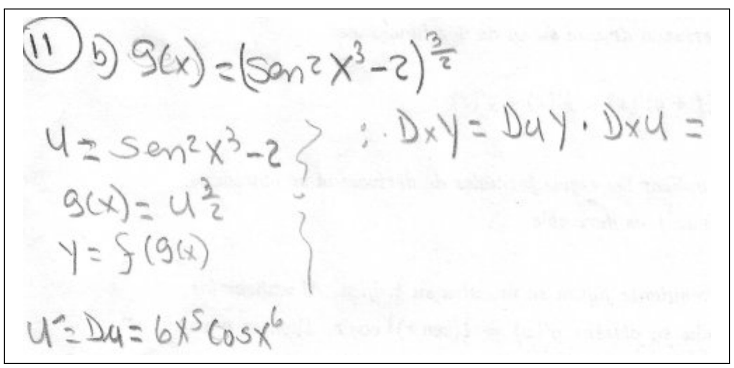
siguientes fórmulas están escritas correctamente

Respuesta del Profesor A

Las respuesta dadas por el profesor C y J son muestra de la falta de destreza en el cálculo de la derivada de una función. Sin embargo, consideramos que esta deficiencia no era obstáculo para que antes de iniciar el proceso de derivación se analizara la función $g(x)$.



Respuesta del Profesor C



Respuesta del Profesor J

En la siguiente tabla se concentran los resultados del problema 11 inciso (b)

	No contesta	Aplica mal las reglas de derivación	Calcula correctamente la derivada	Analiza previamente la función
Profesor	H, K	B, C, D, E, G, I, J	A, F	
Total	2	7	2	0

4.13. Análisis del problema 12

El problema 12, permitiría averiguar si los profesores han reflexionado sobre la regla de la cadena, pues aunque los docentes la utilicen constantemente y al parecer lo hagan bien con funciones sencillas, la comprensión de esta importante herramienta en el cálculo de derivadas va más allá de poder aplicarla.

Problema 12. *Indique cuál o cuáles de las siguientes fórmulas están escritas correctamente.*

(a) $f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$

(b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

(c) $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$

(d) $(f \circ g)'(x) = ((f' \circ g)(g'))(x)$

En este problema los docentes podrían haber leído cuidadosamente la igualdad dada en cada inciso, y compararla con el procedimiento que siguen al utilizar la regla de la cadena. Quizás, aplicar cada expresión a dos funciones específicas ayudaría a percatarse que todas establecen la regla de la cadena pero con una escritura diferente. Además si el profesor comprendiera el carácter puntual de la derivada se daría cuenta de que el inciso (a) lo oculta, por lo que esta forma de escribir la regla de la cadena no es conveniente.

Desafortunadamente aunque se insisitió a los profesores que argumentaran su respuesta, la mayoría sólo hace marcas en los incisos del problema 12.

El profesor A es el único que trata de justificar su decisión, sin embargo su argumento es corto y no permite saber algo sobre el procedimiento que siguió para elegir el inciso (b). Enseguida se muestran algunas de las respuestas dadas.

(a) $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$

(b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$ $\rightarrow$ Por que es una función compuesta.

(c) $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$

(d) $(f \circ g)'(x) = ((f' \circ g)(g'))(x)$

Respuesta del Profesor A

(a) $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$ — sí

(b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$ — NO.

(c) $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$ — NO

(d) $(f \circ g)'(x) = ((f' \circ g)(g'))(x)$ — NO.

Respuesta del Profesor B

• (a) $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$

• (b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

(c) $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$

(d) $(f \circ g)'(x) = ((f' \circ g)(g'))(x)$

Respuesta del Profesor I

La falta de justificación en las respuestas y el no contestar este problema, muestra como se puede aplicar una regla de derivación sin reflexionar sobre ella. Pues aunque se apliquen adecuadamente sólo se está siguiendo una receta donde las relaciones son tan débiles que un pequenõ cambio basta para confundir al profesor.

En la siguiente tabla se muestra qué inciso eligió cada profesor.

	Sin respuesta	inciso (a)	inciso (b)	inciso (c)	inciso (d)
Profesores	J, C, F, K	H, I, B	D, G, A, I	D, E	
Total	4	3	4	2	0

En la tabla se puede observar como sólo los profesores (D e I) eligieron dos incisos y de los siete que contestaron el problema, tres eligen el inciso (a) que oculta el carácter puntual de la derivada.

A continuación se presenta una tabla que concentra la información sobre los problemas que cada profesor no contestó.

Profesor	Problemas que no contestó	Total
A	5, 8b, 9a, 10, 11a	5
B	6, 7, 8a, 8b, 9a, 11a	6
C	2, 5, 12	3
D	2, 6, 7, 8a, 8b, 9a, 9b, 10, 11a	9
E	7, 8a, 8b, 10	4
F	5, 7, 10, 11a, 12	5
G	2, 6, 7, 9a, 10	5
H	4, 5, 7, 8a, 8b, 9a, 9b, 10, 11a, 11b	10
I	4, 8b	2
J	2, 3, 4, 6, 7, 8a, 8b, 11a, 12	9
K	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8a, 8b, 9a, 9b, 10, 11a, 11b, 12	15

Conclusiones

Los resultados obtenidos de las respuestas de los once profesores nos permiten establecer algunas conclusiones o respuestas para cada una de las preguntas de investigación planteadas al inicio.

Tratando de responder la pregunta general que planteamos al inicio

¿Cuál es el desempeño del profesor en la resolución de problemas, para los cuales se requiera articular lo conceptual con lo algorítmico?

responderemos cada una de las preguntas específicas.

¿Concibe el profesor la derivada de una función como un límite?

Las respuestas de los profesores nos revelan que la definición de derivada como un límite no es un concepto del que se hayan apropiado, de manera que puedan evocarla y aplicarla cuando se requiere. En el problema 5 la mayoría de los profesores no contestó y de los que contestaron, sólo dos pudieron deducir una regla de derivación mediante la definición.

El que los profesores no recuerden el concepto de derivada de una función como un límite, se puede concluir de sus respuestas dadas a los problemas 3 y 4, pues en las funciones definidas por piezas, no recordaron que para el punto donde la regla de definición cambia lo más conveniente es calcular la derivada por medio de la definición. Una situación similar se presenta con los problemas que involucraban la función valor absoluto, ya que el punto $x = 0$ requeriere de verificar el límite del cociente de diferencias.

¿Comprende el profesor el carácter puntual de la derivada?

Las respuestas a las preguntas 3, 4, 6 y 11 revelan que los profesores no tienen claridad suficiente sobre el carácter puntual de la derivada. Por ejemplo, en la funciones definidas por piezas, proceden a derivar cada una de las fórmulas utilizadas en los diversos intervalos que componen el dominio, sin darle el tratamiento adecuado a los puntos extremos de estos intervalos. Otra situación donde se observa una desarticulación entre lo conceptual y lo algorítmico es el caso del cálculo de la derivada mediante la aplicación formal de las reglas de derivación, con lo cual la función obtenida no corresponde a la función derivada.

Una situación más sutil es el caso de las derivadas de funciones definidas por fórmulas que aplican a ningún punto, vale decir, funciones con dominio vacío.

¿Comprende el profesor la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto que le permita transitar de lo conceptual a lo geométrico?

Los resultados de los problemas 1 y 2, nos revelan que algunos profesores pueden evocar correctamente la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de una recta tangente, pero son incapaces de aplicarla adecuadamente en la resolución de estos problemas donde se requería la interpretación geométrica. Además las respuestas de algunos profesores muestran que confunden la derivada de una función de segundo grado, con la ecuación de la recta tangente.

¿Entiende el profesor que el proceso de derivación no se reduce a obtener la fórmula de la derivada mediante la aplicación formal de las reglas de derivación sino a la obtención de la función derivada apoyado en un análisis previo sobre la derivabilidad?

Las respuestas dadas a los problemas 7, 8, 9, 10 y 12 indican que los profesores conciben el proceso de derivación como la obtención de una fórmula a partir de otra por medio de la aplicación de las reglas de derivación y no como la obtención de la función derivada apoyado en un análisis previo sobre la derivabilidad. Además, muestran que el proceso de derivación no es realizado con suficiente cautela, la deficiente escritura de los procedimientos y la falta de destreza en el cálculo de derivadas mostrada en las respuestas de los profesores son prueba de ello.

Para finalizar podemos decir que el desempeño de los profesores en la resolución de problemas, para los cuales se requiera articular lo conceptual con lo algorítmico no es satisfactorio. Las respuestas a las preguntas revelan que no son capaces de articular el aspecto conceptual de la derivada con el cálculo de la derivada apoyado en los algoritmos.

Las preguntas del cuestionario permitieron a los profesores reflexionar sobre su comprensión acerca de la derivada de una función. Así mismo, despertó en ellos la necesidad de resaltar el carácter puntual de la derivada y la interpretación geométrica de ésta en sus próximos cursos de cálculo diferencial.

Los métodos tradicionales de enseñanza son insuficientes en la formación de los estudiantes de nivel medio superior. En especial, los profesores de matemáticas deben plantear situaciones que involucren a sus estudiantes en la reflexión de conceptos tan importantes como el de la derivada de una función. Desde luego, el profesor puede lograrlo si tiene conocimientos matemáticos principalmente en cálculo diferencial e integral, lo cual quizá podría lograrse si hubiese instituciones dedicadas a la formación de profesores del nivel bachillerato.

Referencias

[1] Artigue, M. (1993). *Enseignement de l analyse et founctions de reference*. Reperes. IREM. vol.11, pp. 115-139.

[2] Boas, R.P. (1981). *Can We Make Mathematics Intelligible?* The American Mathematical Monthly. 88(10), 727-731.

[3] Borbón, A. (2003). *Concepciones de profesores sobre varios conceptos del cálculo diferencial* . Tesis de maestría. Cinvestav, México.

[4] Brophy, J.E. (Ed.) (1991). *Advances in Research on Teaching: Teachers Subject-matter Knowledge and Classroom Instruction* V.2. Grenwich CT. JAI Press.

[5] Carpenter, T. y Lehrer, R. (1999). *Teaching and Learning Mathematics with Understanding* . In Fennema, E. y Romberg (eds.), Mathematics Classrooms that Promote Under- standing, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, N. J., pp. 19-32.

[6] D'Ambrosio, U. (1979). *Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo* . Revista Matemáticas y Enseñanza. No. 11. Revista de divulgación de la Sociedad Matemática Mexicana. México.

[7] De la Peña, J. A. Compilador. (2002). *Algunos problemas de la Educación en Matemáticas en México* . Siglo XXI editores. México.

[8] Dewey, J. (1910). *How we think.* Lexington, Mass., D.C. Heath & Company.

[9] Flores, P. A. (1991). *Las calculadoras en el cálculo: El límite* . Educación Matemática. No. 1. Vol.3. México.

[10] Ford, W. B. (1910). *The teaching of the calculus* . The American Mathematical Monthly. No. 4. Vol. XVII, p. 77.

[11] Granville, W. A. (1982). *Cálculo diferencial e integral* . México: Editorial Limusa.

[12] Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. En Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. Morevallado Editores. México, pp. 88-107.

[13] Imaz, C. (1985). *Una propuesta didáctica para la integral definida* . En Cuadernos de Investigacin. NO. 3. PNFAPM. México.

[14] Kosmala, W. A. (1999). *Advanced Calculus A Friendly Approach* , New Jersey, Prentice Hall, Inc.

[15] Lages Lima, E. (1970). *Elementos de topología general,* Sao Paulo, Universidad de Sao Paulo.

[16] Lloyd, M. G. & Melvin, W. (1998). *Supporting innovation; The impact of a teacher‘s conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum* . Journal for Research in Mathematics Education. 29(3), 248-274

[17] Longley W., Smith P., Wilson W. (1960). *Analitic Geometry and Calculus,* Massachusettss, Ginn and Company.

[18] Mochón, S.. (1994). *Quiero entender el cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

[19] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principales of Standares for School Mathematics* . Reston, Virginia, USA:NCTM.

[20] Pérez Rosal, L. (2011). *Un estudio sobre el aprendizaje del concepto de función con estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades*. Tesis de maestría. CINVESTAV, México.

[21] Pierpont, J. (1905). *Lectures on the Theory of Functions of Real Variables,* volume one, New York, Ginn and Company.

[22] Ponce, J.C. (2007). *Un estudio de caso con profesores de bachillerato sobre el papel que juega el teorema fundamental del cálculo.* Tesis de maestra. CINVESTAV, México.

[23] Prenowitz, W. (1951). *Insight an understanding in the calculus*. En Apostol T, M. Et.al. (Eds.) A Century of Calculus (pp 32-37). The Mathematical Association of America.

[24] Rivera, F. A., García, M. R., & Díaz, C. M. (2013). *Comprensión de los significados de la derivada: un estudio con profesores de bachillerato y una propuesta didctica en ambientes virtuales*. En T. Rojano (Ed), Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas. México: Trillas.

[25] Rivera, A. (2012). *Cálculo Diferencial. Fundamentos, aplicaciones y notas históricas,* Grupo Editorial Patria, México.

[26] Rivera-Figueroa A. y Ponce-Campuzano J.C. (2012). *Derivative, maxima and minima in a graphical context* . International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.

[27] Rivera, A. (2007). *Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias,* Grupo Editorial Patria, México.

[28] Santos-Trigo, M & Rivera Figueroa, A. (2010). *Prospective mathematics education student's answer to basic mathematical questions: characterizing their mathematical profiles* . Far East Journal of Mathematics Education (FJME), 4(2), 117-140.

[29] Sierpinska, A. (1992). *Understanding in mathematics* . London. Falmer Press.

[30] Tall, D. (2011). *A sensible aproach to the Calculus*. Revista: El Cálculo y su enseñanza. vol. III. pp.43-69.

[31] Todhunter, I. (1907). *A Treatise on the Differential Calculus.* New York, The Macmillan & Company Limited.

[32] Townsend, E. J. and G. A. Goodenough (1910). *Essential of Calculus.* New York, Henry Holt and Company.

[33] Veblen, O. and Lennes, N. J. (1907). *Introduction to infinitesimal analysis: functions of one real variable,* New York, John Wiley & Sons.

[34] White R. (1987). *A pump not a filter* . Coloquio Nacional Calculus for a New Century. 1987.

Apéndices

Apéndice A

Cuestionario

Fecha: _______________

Nombre: ______________________________

Formación académica: ____

Semestres que ha enseñado Cálculo: _______________

Conteste el siguiente cuestionario, sin calculadora, libros o tablas. Justifique sus respuestas.

P. 1 Si $f(x) = x^2 + x + \frac{5}{4}$, ¿es cierto que su derivada $f'(x) = 2x + 1$ corresponde a una recta tangente a la gráfica de f? Argumente su respuesta.

P. 2 Indique en qué punto la recta $y = 3x + 1$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}$.

P. 3 Halle la derivada de $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ x^4 - 5x - 3 & si \quad 2 < x < +\infty \end{cases}$

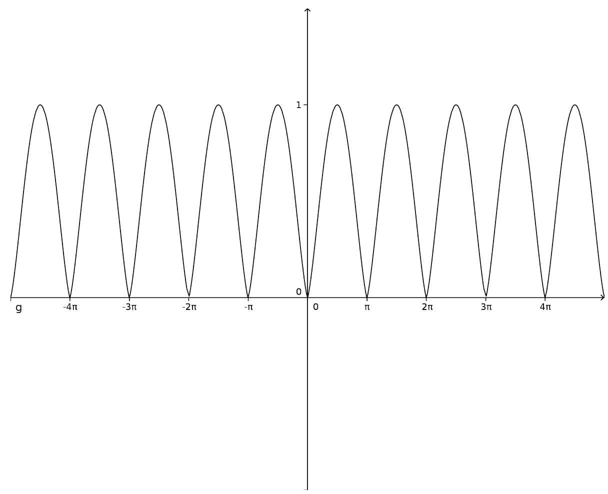
P. 4 Encuentre la segunda derivada de $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si \quad x \geq 0 \\ x^2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

P. 5 Deduzca la fórmula de la derivada de una suma de dos funciones:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

P. 6 Sea $f(x) = \log(x^2 - 1)$. Al aplicar las reglas formales de derivación se obtiene $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$. Indique dónde f es derivable.

P. 7 Sea $g(x) = (\operatorname{sen} x)^{\frac{4}{3}}$, en la siguiente figura se muestra su gráfica. Al utilizar las reglas formales de derivación se obtiene $g'(x) = \frac{4}{3}(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}} \cos x$. Diga si g es derivable en $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



P. 8 ¿En qué puntos las siguientes funciones son derivables? Halle la derivada en esos puntos.

(a) $f(x) = |x|$

(b) $h(x) = x|x| + 2x^2$

P. 9 Derive las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen}^2 x + x^2 + 1}$

(b) $g(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

P. 10 Si $f(x) = x^2 \operatorname{arc\,sen} x$, halle $f'(x)$.

P. 11 Encuentre la derivada de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \log\left(\log\left(\dfrac{2x^2}{x^4 + 1}\right)\right)$

(b) $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x^3 - 2)^{\frac{3}{2}}$

P. 12 Indique cuál o cuáles de las siguientes fórmulas están escritas correctamente.

(a) $f(g(x))' = f'\,(g(x))\,g'(x)$

(b) $(f \circ g)'(x) = f'\,(g(x))\,g'(x)$

(c) $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)\,(x)g'(x)$

(d) $(f \circ g)'(x) = ((f' \circ g)\,(g'))\,(x)$