CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

El uso de tecnologías digitales en actividades que extienden y promueven la interacción y discusión matemática de los estudiantes

Tesis que presenta

Adrián Gómez Arciga

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la tesis: **Dr. Luz Manuel Santos Trigo**

México, Ciudad de México Noviembre, 2016

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Maestría en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN

Becario: 570629

Agradecimientos

Al Dr. Luz Manuel Santos Trigo por su orientación, dedicación, apoyo y paciencia durante el desarrollo de esta investigación.

A mis sinodales, Dr. François Pluvinage y Dr. Roberto Ávila Antuna por sus aportaciones para la mejora del trabajo.

A la Dra. Margarita Casas Valdez por la lectura y recomendaciones que contribuyeron para la mejora de este trabajo.

Al M. en C. Daniel Aurelio Aguilar Magallón por su constante apoyo, guía y retroalimentación en esta investigación.

A los doctores, que me impartieron cursos durante los estudios de maestría, por compartirme sus conocimientos y experiencias.

A mis compañeros de doctorado y maestría, por todos los momentos de diversión y ocio que tanta falta hacían.

A mis tios Silvia y Francisco por apoyarme para cumplir esta meta.

A mi madrina Laura por su cariño y apoyo incondicional en todas mis decisiones.

A mis amigos Sergio, Erik y Manuel por motivarme para seguir preparándome.

Dedico este trabajo a:

Mis padres, **hermanos y sobre todo a mi chiquitonga**,
por su amor incondicional.

Contenido

Contenido

Resumen

El propósito de este estudio fue analizar y documentar cómo el uso sistemático y coordinado de las tecnologías digitales (GeoGebra, YouTube y Padlet) permiten a los estudiantes representar y explorar los problemas matemáticos y, cómo pueden aprovecharse para extender las discusiones de sus ideas y acercamientos a los problemas más allá del salón de clases. Asimismo, caracterizar un ambiente de aprendizaje que incorpore este tipo de tecnologías.

El estudio se realizó con un grupo de 18 estudiantes de primer semestre de bachillerato, los cuales cursaban la materia de Matemáticas I. Los participantes estaban familiarizados con el uso del sistema de geometría dinámica (GeoGebra), utilizaban herramienta básicas como: punto, intersección, recta, segmento, recta perpendicular, recta paralela, rastro, lugar geométrico, polígono, polígono regular, circunferencia, distancia o longitud, área, y algunos comandos en la barra de entrada. Se llevaron acabo seis sesiones de trabajo con un total de 10 horas.

Los participantes utilizaron GeoGebra para construir modelos dinámicos de los problemas y obtener lugares geométricos relacionados con los atributos de dichas construcciones; YouTube para aprender y utilizar fórmulas, realizar cálculos o procedimientos algebraicos y Padlet para compartir y discutir información. Los resultados muestran que el uso sistemático de las tecnologías digitales promueve y amplía la discusión y búsqueda de sentido de las ideas matemáticas y la resolución de problemas.

Abstract

The purpose of this study was to analyze the extent to which the systematic and coordinated use of digital technologies (GeoGebra, YouTube and Padlet) allows the students to represent and explore mathematical problems and, wags in which they can engage in mathematical discussion beyond the classroom.

18 high school freshmen students participated in activities that involved the concept of quadratic equiation, who were studying the Mathematics I assignation. The participants were familiar with he use of dynamic geometry system (GeoGebra), the used basic tools as: point, intersection, line, segment, perpendicular line, parallel line, trace, locus, polygon, regular polygon, circumference, distance or lenght, area and some input bar commands.

The participants used GeoGebra to build dynamic models of the problems and to get loci related with such constructions attributes. They also relied on the use of YouTube to understand the use of formulas, and to carry out algebraic procedures. Similarly, they used Padlet to share and discuss information related to the topic in study. In general terms, there is evidence that the use of several digital technologies became important for students to understand and discuss mathematical ideas and to solve problems.

CAPÍTULO 1

Problema de investigación

Este capítulo describe la importancia de las actividades de resolución de problemas en los procesos de aprender matemáticas con el uso de las tecnologías digitales. Se mencionan algunas ventajas y dificultades que se presentan actualmente en el sistema educativo en la implementación de un enfoque basado en la resolución de problemas y se revisan algunas investigaciones relacionadas en esta área de estudio. Al final se presentan las preguntas que guían esta investigación.

1.1 Introducción

En los últimos años se ha identificado a la resolución de problemas como una actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas (Santos-Trigo, 2014). La resolución de problemas implica analizar un problema desde distintas perspectivas para identificar y explorar relaciones matemáticas que surjan durante el proceso de solución, esperando que el estudiante desarrolle una disposición inquisitiva y no persiga como único objetivo resolver el problema (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009). Comprender y analizar cómo aprenden y desarrollan conocimientos matemáticos los estudiantes cuando resuelven problemas es uno de los objetivos que tiene la Educación Matemática como un campo de investigación (Santos-Trigo, Moreno-Armella & Camacho-Machín, 2016). También, en estas últimas dos décadas, la tecnología ha ido evolucionado tanto en su desarrollo y disponibilidad, y como consecuencia ha ampliado la agenda en la disciplina (Hegedus & Moreno-Armella, 2010). La forma de comunicarse, obtener información, socializar, desarrollar y comprender el conocimiento disciplinar se han ido modificando constantemente gracias a las tecnologías digitales, es decir, debido a los desarrollos y la disponibilidad de las tecnologías digitales, se presenta una transformación continua en los diferentes medios y ámbitos en las que se utilizan (Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016).

> El software es cada vez más visual, interactivo y dinámico. El hardware ha evolucionado permitiendo que programas complejos puedan ser ejecutados en

trabajos realizados a distancia, esto es gracias a su portabilidad y a los avances de las redes (Hegedus & Moreno-Armella, 2009, p. 399).

Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2014) consideran que el uso coordinado de las tecnologías digitales puede ser un factor fundamental para alcanzar los objetivos deseados en la enseñanza matemática, pues abre diversas formas de identificar, formular, representar, explorar, y resolver problemas. Es decir, los estudiantes encuentran nuevas oportunidades para construir y comprender el conocimiento matemático[1]. Al respecto, Borba, Clarkson y Gadanidis (2013), coinciden en que el conocimiento matemático ya no se reduce al profesor y al libro de texto exclusivamente, pues con el uso de internet los estudiantes tienen acceso ilimitado a la información mediante diferentes sitios como wikis, redes sociales (facebook y twitter), blogs y videos (YouTube), en el cual algunos sitios se especializan en enseñar, compartir y/o debatir contenido matemático, como el caso particular de Khan Academy donde se puede acceder de forma gratuita a una plataforma diseñada para aprender desde matemáticas básicas hasta avanzadas. Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín (2016) argumentan que "la construcción y la comprensión del conocimiento matemático es un proceso continuo, donde los alumnos comparten ideas individuales y se involucran en las discusiones colectivas" y en ese sentido, es importante llevar las discusiones matemáticas más allá de las sesiones formales.

De acuerdo con Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón (2015), el uso coordinado de las tecnologías digitales permite que las tareas sean el medio adecuado para extender las discusiones matemáticas fuera del salón de clases, donde los estudiantes a través de sus propias acciones y las interacciones con sus pares logran desarrollar conceptos fundamentales, lo que les ayuda a comprender y desarrollar las competencias en la resolución de problemas.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés, 2011) resalta la importancia de elegir cuidadosamente las tareas, de tal forma que ayuden a desarrollar el conocimiento matemático y conectarlo con otras áreas de la misma; para lograr

[1] Para Schoenfeld (1992), el conocimiento matemático es tener la iniciativa de analizar las estructuras y sus relaciones estructurales para comprender cómo encajan las cosas, además de pertenecer a una comunidad matemática.

ese objetivo, las tareas deben tener sentido para los estudiantes, ofreciendo oportunidades para que demuestren sus procesos de razonamiento. En otras palabras, las tareas son un ingrediente esencial dentro de un espacio de trabajo en matemáticas, de hecho, "una tarea pedagógicamente matemática tiene como objetivo involucrar a los estudiantes en actividades que podrían transformar la forma en que ven y hacen las matemáticas" (Leung, 2011, p. 326).

Por otro lado, la NCTM (2011) también propone que se realicen cambios en la estructura del salón de clases, que genere un ambiente colaborativo donde se promueva la argumentación a las conjeturas realizadas por los estudiantes, facilitado la conexión del conocimiento anterior con el conocimiento recién adquirido. La colaboración y la discusión son aspectos también valorados por Santos-Trigo (2015) cuando se trata de resolver problemas; "el proceso de resolver problemas o comprender un concepto matemático involucra ciclos iterativos de discusión y colaboración en los que los estudiantes deben tener la oportunidad de expresar, revisar, contrastar, interpretar y refinar sus ideas y métodos de solución" (p. 141).

Es reconocido que el uso de la tecnología digital brinda a los profesores y estudiantes diferentes formas de representar y explorar problemas o conceptos matemáticos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013), por eso, es conveniente considerar su incorporación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, incorporarlas sistemáticamente en los sistemas escolares representa un reto, pues por un lado se tienen los contenidos, estrategias y habilidades que los estudiantes deben aprender (propuestas curriculares), mientras que por otro se tienen los tipos de escenarios de enseñanza que se deben considerar en el aprendizaje (entornos de aprendizaje) (Santos-Trigo, Reyes-Martínez & Aguilar-Magallón, 2015).

Hegedus y Moreno-Armella (2009) indicaron que la incorporación de las tecnologías digitales en las prácticas escolares requiere que los maestros desarrollen nuevos hábitos de la mente para transformar gradualmente enfoques de instrucción. De igual manera, reconocen que el uso de las tecnologías digitales en las aulas extiende las formas de razonar acerca de los problemas; así como también requieren una nueva organización curricular. Además, Santos-Trigo (2015) menciona la importancia de que "los estudiantes desarrollen una cultura digital[2] donde se valore el trabajo en equipo y la práctica de una reflexión matemática continua que los lleve a engancharse en procesos de resolución de problemas" (p. 133).

A pesar de las dificultades, el uso coordinado de las tecnologías digitales pueden ser pieza clave para alcanzar los objetivos deseados en la enseñanza matemática, pero, ¿cuáles son los objetivos de la enseñanza matemática? Según Schoenfeld (1992), el reto en la enseñanza matemática es crear las condiciones para generar un ambiente que refleje los valores propios de la práctica o actividad matemática, en ese sentido, considera los siguientes objetivos para la enseñanza de las matemáticas:

- Dar sentido a la disciplina. Que los estudiantes entiendan lo que son las matemáticas y cómo se hacen, deben aprender a valorarlas y sentir confianza en su capacidad para hacerlas.
- Comprender conceptos relevantes. La enseñanza debe orientarse a la comprensión conceptual con la finalidad de que los estudiantes sean capaces de usar su conocimiento con flexibilidad e ingenio.
- Explorar problemas y situaciones problemáticas. Los estudiantes deben contar con un ambiente propicio que les permita aprender enfoques y técnicas para hacer frente a problemas y situaciones problemáticas.
- Desarrollar un punto de vista matemático. Que los estudiantes aprendan a proponer estrategias para analizar y comprender, para percibir la estructura y las relaciones estructurales, para ver cómo encajan las cosas. Deben desarrollar sus habilidades analíticas y la capacidad de razonar cadenas de argumentos.
- Desarrollar un lenguaje formal. Los estudiantes deben aprender a comunicarse utilizando el lenguaje matemático para presentar sus análisis en pruebas claras y coherentes.
- Mejorar la autonomía. Los estudiantes deben desarrollar la capacidad de leer, interpretar y utilizar el texto y otros materiales matemáticos por sí solos.

[2] Liang & Wang (2015) definen la cultura digital como un conjunto emergente de valores, creencias, normas y prácticas que caracterizan a una unidad o cualquiera de sus partes constituyentes que se crearon, continuaron o transformaron a través de actos e interacciones de las personas dentro de la sociedad actual de la red (p. 201).

A lo anteriormente mencionado debe sumarse que los educadores tienen el compromiso de desarrollar en sus estudiantes la habilidad para resolver problemas (Tawfik, Sánchez & Sparova, 2014), en ese sentido, Santos-Trigo y Moreno-Armella (2016) concuerdan en que "el uso sistemático de las tecnologías digitales juegan un papel importante en los maestros y en los estudiantes para comprender las ideas matemáticas y para participar en actividades de resolución de problemas" (p. 190).

1.2 Planteamiento del problema

La resolución de problemas y el uso de las tecnologías digitales son temas de interés en la agenda de investigación en Educación Matemática. Alagic y Alagic (2013) señalan que los entornos de enseñanza que buscan mejorar el aprendizaje de los estudiantes en las matemáticas, deben tomar en cuenta incorporar el uso de diversas tecnologías digitales, pues gracias a las affordances[3] que ofrecen, profesores y alumnos pueden trabajar en un ambiente de aprendizaje que fomenta la colaboración y la interacción directa.

> Con el uso de las tecnologías los estudiantes reflexionan continuamente sobre qué formas de razonar acerca de los conceptos y los problemas son importantes para detectar la invariancia y apoyar las relaciones matemáticas. Se reconoce que las diferentes tecnologías digitales ofrecen distintas oportunidades para que los alumnos se involucren en el pensamiento matemático[4]. Por lo tanto, la existencia de varios tipos de tecnologías hace necesario identificar lo que es una tecnología en particular y lo que puede ofrecer a los estudiantes durante el proceso de comprensión de las ideas matemáticas y la resolución de problemas (Santos-Trigo, Reyes-Martinez & Aguilar-Magallón, 2015, pp. 299-300).

De acuerdo con lo anteriormente señalado, hablar de "tecnologías" bajo el contexto de la enseñanza de las matemáticas sigue causando confusión (NCTM, 2011), pues profesores y estudiantes las asocian con calculadoras, programas informáticos o proyectores, es decir,

[3] Affordances se refiere a el conjunto de estímulos mediante los que un objeto proporciona a un organismo (agente) la oportunidad de realizar una acción.

[4] De acuerdo con Schoenfeld (1985) pensar matemáticamente va más allá de conocer una gran cantidad de información, es decir, se requiere que dicha información se utilice como una estructura y de forma eficiente para resolver problemas.

tienden a pensar en el hardware o en el software que han utilizado comúnmente. Por tal motivo, la NCTM (2011) sugiere que se haga una cuidadosa distinción conforme las affordances que ofrecen las tecnologías digitales que se relacionan con la enseñanza matemática y su razonamiento.

Una clasificación de las tecnologías digitales, según las actividades que desarrollen, es la que ofrecen Hegedus y Moreno-Armella (2009). Las clasifican en dos tipos de infraestructura: a) la infraestructura de representación (IR), que ofrece a los estudiantes la capacidad de ver a través de constructos abstractos o figuras simbólicas, es decir, analizar distintos componentes de un problema mediante una representación obtenida por un software dinámico o interactivo; b) la infraestructura de comunicación (IC), que es la estructura organizativa de las diversas entradas y salidas disponibles de comunicación en la sociedad. Todo lo que sirva para enviar o recibir información.

A pesar de que la ejecutabilidad de las representaciones visuales mejora los entornos de aprendizaje, no debe desatenderse la comunicación de resultados a través de un espacio público donde el trabajo de cada estudiante pueda ser visto y analizado. Pues la capacidad metacognitiva de un estudiante es favorecida cuando desarrolla trabajo significativo de matemáticas fuera del aula de manera individual a través de las redes, y visualiza trabajos de sus compañeros que le permiten reflexionar sobre su propio trabajo en referencia a otros (Hegedus & Moreno-Armella, 2009).

Cuando los autores hacen mención de la infraestructura, se refieren a un conjunto de reglas invisibles que se redefinen a través del entorno y el usuario; por ejemplo, los puntos móviles en un sistema de geometría dinámica (SGD) son parte de la infraestructura que permiten observar realmente las propiedades de una construcción de alguna figura matemática.

Por su parte, la NCTM (2011) clasifica a las tecnologías digitales como tecnologías de transmisión y tecnologías para las actividades matemáticas. Por un lado, las tecnologías de transmisión se utilizan para enviar y/o recibir información, lo cual permite la comunicación y la colaboración entre profesores y estudiantes; se debe tomar en cuenta que éstas no presentan una relación intrínseca con las matemáticas, es decir, no son específicamente de uso matemático, pues es responsabilidad de los actores (profesores y estudiantes) utilizarlas con el objetivo de que ayuden al razonamiento y que dé sentido a las matemáticas. Por otro lado, se encuentran las tecnologías para las actividades matemáticas, que son con las que se pueden desarrollar tareas matemáticas o que responden a las acciones del usuario respetando las propiedades matemáticas; algunos ejemplos son: hojas de cálculo, sistemas algebraicos computacionales, sistemas de geometría dinámica, etc.

Hacer una clasificación pertinente de las tecnologías digitales permite un mejor entendimiento de su uso, y así, alcanzar uno de los objetivos principales en la Educación Matemática, que es

> el uso sistemático y coordinado de diferentes tecnologías debe ayudar a los estudiantes a desarrollar formas de pensar que resulten importantes en la formulación de preguntas y la resolución de problemas. La meta es que los estudiantes desarrollen competencias para resolver no sólo los problemas que se enfrentan en un ambiente escolar, sino aquellos que aparecen fuera de la escuela (Santos-Trigo, 2015, pp. 134-135).

Bajo este supuesto, Tzu-Bin, Chen y Chai (2015) enfatizan sobre los nuevos medios de comunicación los cuales han generado un cambio significativo en las formas de difundir la información entre las personas. Consideran que “la comunicación y la información son dos elementos clave que constituyen el aprendizaje, independientemente de si uno ve el aprendizaje como la adquisición de conocimiento, la participación significativa dentro de una comunidad, o la creación de conocimiento” (p. 1), es por ello, que muchos educadores ven a los nuevos medios de comunicación y a las tecnologías emergentes como elementos fundamentales para lograr cambios revolucionarios en la enseñanza y el aprendizaje. En otras palabras, las tecnologías actuales y emergentes están creando nuevos espacios de aprendizaje que desafían muchas suposiciones de las prácticas tradicionales en la educación.

De hecho, los nuevos medios de comunicación son una plataforma para el trabajo colaborativo en la resolución de problemas, creando así, entornos de aprendizaje en línea. Para que la colaboración sea eficaz en este formato, según Tawfik, Sánchez y Saparova (2014), se espera que los estudiantes exterioricen las posibles soluciones a los problemas que discuten con sus compañeros, hagan preguntas significativas que desafíen supuestos e integren la perspectiva de los demás en la resolución de problemas.

Sin embargo, debe considerarse el entorno escolar y la ecología del aula para introducir los nuevos medios de comunicación, en caso contrario puede que contribuyan en poco o nada en el aprendizaje para los estudiantes con conocimientos medios en las escuelas del siglo XXI (Buckingham, 2007). Es cierto que con el uso de las tecnologías los estudiantes pueden consultar recursos en línea como libros de texto, wikis, buscador de respuestas (WolframAlpha) y vídeos que les ayuden a complementar, ampliar o contrastar las actividades vistas en clase. No obstante, el acceso a diferentes recursos en línea no avala que los estudiantes puedan seleccionarlos y utilizarlos eficientemente para su aprendizaje (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2014).

Por ejemplo, Chernobilsky, Nagarajan y Hmelo-Silver (2005) encontraron que los alumnos en un ambiente en línea no pudieron hacer preguntas o desafiar a otros significativamente durante actividades de colaboración para resolver problemas. Del mismo modo, Noroozi, Weinberger, Biemans, Mulder y Chizari (2013) encontraron que los estudiantes sin andamios mostraron niveles más bajos en la contestación y la argumentación durante su discurso. Otros estudios realizados en la aplicación de aprendizaje basado en problemas dentro de un ambiente en línea demostraron que los estudiantes no pueden participar en el debate sostenido durante la colaboración para resolver problemas. En cambio, hay estudiantes que usan el proceso de resolución de problemas para exteriorizar sus pensamientos y perspectivas sin tener en cuenta a sus pares (Oh & Jonassen, 2007) y participan en la creación de consenso rápido (Gijlers, Saab, Van Joolingen, De Jong & Van Hout-Wolters, 2009).

Existen trabajos de investigación que se sustentan en las tecnologías de comunicación principalmente, algunos de ellos se basan en el modelo de *Aula Invertida*, que consiste en asignar a los estudiantes textos, videos de YouTube o contenidos adicionales para revisar fuera de clase, con el fin de desarrollar un ambiente interactivo donde el profesor guía a los estudiantes mientras aplican los conceptos y se involucran en su aprendizaje de manera activa dentro del salón de clases. La Escuela Clintondale high School en Michigan implementó el modelo en todos sus programas y con ello lograron disminuir el porcentaje de reprobados en sus clases, adicionalmente, el rendimiento de los alumnos en los exámenes estandarizados a nivel global incrementó (Green, 2012). También la Escuela Arab High School en Alabama vio como resultado que, al aplicar el modelo para los temas de magnetismo y electrostática de la clase de Física, los alumnos se mostraron más comprometidos y participativos en clase (Lawrence, 2014).

Otras investigaciones se centran en las tecnologías para la actividad matemática, por ejemplo, Santos-Trigo, Reyes-Rodríguez y Espinoza-Pérez (2007) se enfocaron en cómo los profesores usan el software dinámico (GeoGebra) con el propósito de evaluar sus procesos en la solución de un problema. Reportan que el software dinámico sirvió para argumentar, verificar y extender el problema. Otro caso es el que reportan Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez (2011), en donde usan un software dinámico (Cabri) y una calculadora simbólica (Derive) para observar el proceso de solución de profesores de bachillerato a un problema de modelación. Representar, identificar relaciones matemáticas, formar conjeturas, establecer conexiones entre distinto contenido matemático, favorecer la búsqueda de argumentos, son algunos de los beneficios que resaltan los autores.

A pesar de los resultados que se reportan al utilizar las tecnologías de comunicación o para la actividad matemática, se observan algunas limitaciones en dichos trabajos. Por ejemplo, las investigaciones que existen sobre Aula Invertida no se relacionan con el área de matemáticas específicamente, hay ambigüedad con respecto al rol del profesor dentro y fuera del aula, no se delimitan las propiedades que debe tener la información seleccionada en línea y tampoco hacen mención sobre el uso de las tecnologías para la actividad matemática. Una posible causa puede ser debido a la falta de estudios que aporten información acerca de ¿cómo debe implementarse el modelo cuando se trata de matemáticas? ¿Qué criterios se deben seguir con el fin de seleccionar y discriminar información en línea? ¿Cómo deben los estudiantes analizar la información disponible?¿Qué actividades matemáticas debe promover el profesor dentro del aula para que los estudiantes utilicen los recursos obtenidos fuera del horario de clases?. En el caso de investigaciones que reportan el uso de un software de geometría dinámica (GeoGebra o Cabri) o de tecnologías para la actividad matemática, normalmente usan de muestra a profesores o estudiantes de posgrado, es decir, hay pocos resultados con estudiantes de nivel bachillerato, lo que trae como consecuencia dificultades para implementar las tecnologías digitales en el aula.

Si bien, los diferentes usos y aportaciones que ofrecen las tecnologías para la actividad matemática son importantes, también es esencial comunicar los resultados obtenidos al utilizarlas, y en este aspecto Santos (2007) afirma que "el poder matemático consiste no solamente en detectar, construir, inventar, entender, o manipular patrones; sino también en ser capaz de comunicar esos patrones a otros" (p. 45), sin embargo no suele prestarse atención a dicho tema.

Por este motivo, el problema de investigación que se presenta se centra en analizar y documentar cómo el uso sistemático y coordinado de las tecnologías digitales permiten a los estudiantes representar y explorar los problemas matemáticos y, cómo pueden aprovecharse para extender las discusiones de sus ideas y acercamientos a los problemas más allá del salón de clases. Así, en un ambiente de aprendizaje dentro del aula, los estudiantes pueden utilizar las tecnologías para la actividad matemática (GeoGebra, WolframAlpha y calculadora) que ayuden a explorar y representar conceptos matemáticos. Además de las tecnologías de comunicación (Wikipedia, YouTube y Padlet) que les permitan argumentar, revisar, colaborar y extender la discusión de contenidos matemáticos fuera del aula. Según Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2014) el uso coordinado de estas tecnologías puede ofrecer distintas oportunidades a los estudiantes para desarrollar el pensamiento matemático.

Rivera-Dolores (2012) presenta una investigación con estudiantes de bachillerato sobre el uso de herramientas computacionales en el desarrollo de varias formas de razonar y resolver problemas matemáticos rutinarios, la cual gira en torno a la resolución de problemas rutinarios asociados con la función cuadrática. El objetivo principal del estudio fue promover la enseñanza-aprendizaje de este concepto a través del software de geometría dinámica. El autor observó que algunas de las dificultades que presentaron los estudiantes se relacionan con el domino de conceptos algebraicos y la comunicación de ideas o resultados. "También se observó que el desempeño de los estudiantes mejoró significativamente después de haber implementado una sesión de discusión y reflexión sobre las ideas matemáticas de los estudiantes" (p. 111).

La función cuadrática forma parte del curriculum en el nivel medio superior y se relaciona con conceptos fundamentales como es el caso de las cónicas, así que debido a su relevancia y dificultades presentadas, se convierte en el foco principal para la presente investigación.

Algunas preguntas que fueron usadas para enmarcar el estudio son: ¿cómo utilizar lo nuevos medios de comunicación para mejorar la transmisión de ideas y resultados de los estudiantes?, ¿de qué manera los estudiantes pueden apropiarse de los conceptos algebraicos si se usan las tecnologías digitales? y ¿cómo promover discusiones y reflexiones sobre ideas matemáticas con el uso de estas tecnologías?

1.3 Preguntas de investigación

1. ¿Qué caracteriza a un ambiente de aprendizaje que incorpora el uso coordinado de algunos medios de comunicación (YouTube y Padlet) y un Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra)?

2. ¿Qué acercamientos y formas de resolver los problemas muestran los estudiantes cuando usan sistemáticamente algunos medios de comunicación y un Sistema de Geometría Dinámica?

CAPÍTULO 2

Marco conceptual

En este capítulo se describe el marco conceptual que se utilizó para: diseñar e implementar las actividades que trabajaron los estudiantes en el salón y fuera del horario de clases, identificar los hábitos de razonamiento matemático, seleccionar las tecnologías digitales de manera adecuada, implementar estrategias que favorecen el desarrollo de los hábitos de razonamiento matemático cuando se emplean las tecnologías digitales, y analizar e interpretar los resultados que muestran los estudiantes en las diferentes actividades.

2.1 Resolución de problemas

La resolución de problemas matemáticos es un marco que se ajusta a las necesidades de este trabajo, debido a que permite caracterizar el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes por medio de analizar los recursos básicos con los que cuentan, las estrategias cognitivas o heurísticas, estrategias metacognitivas y por último las creencias y componentes afectivos (Santos-Trigo, 2014).

Polya (1962) considera que existe un problema cuando se sabe el resultado al que se desea llegar pero se desconoce el camino. Cuando los estudiantes se enfrentan a un problema, es importante que el profesor les permita asumir una parte razonable del trabajo, es decir, "el maestro debe ayudar al alumno discretamente, sin imponérsele" (Polya, 1965, p. 25). Para que la ayuda sea de forma natural el profesor debe comprender lo que pasa por la mente del estudiante, pues solo así podrá brindarle el apoyo necesario para que pueda conseguir autonomía y lograr sus objetivos. Algunas preguntas que el autor propone que se le planteen al estudiante para que se concentre en la incógnita de algún problema son: ¿Qué se requiere?; ¿qué quiere usted determinar?; ¿qué se le pide a usted que encuentre? El fin es esclarecer el problema a partir de preguntas sencillas, obvias y de sentido común.

Polya (1965) comenta que si un estudiante no se detiene a comprender lo que el problema le solicita, entonces, y lo más seguro, es que el estudiante no reflexione ni asimile lo que está haciendo. Así que Polya en su libro de *How to solve it* que publicó en 1945, identifica cuatro fases importantes en la resolución de problemas que son un puente hacia el aprendizaje del estudiante.

1. Comprensión del problema: En esta fase un componente fundamental es que el estudiante tenga el deseo de resolver el problema, no basta únicamente con comprenderlo. Una elección adecuada del problema puede permitir el interés y comprensión por parte del estudiante. También, otros aspectos a considerarse es que el estudiante identifique los componentes del problema, es decir, la incógnita, los datos y la condición, lo que implica introducir una notación adecuada para expresar esta información. Algunas preguntas que pueden ser de utilidad en esta fase son: ¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿es posible satisfacer la condición?
2. Concepción de un plan: Esta fase es esencial para la solución de un problema, porque aquí se construye la idea que dará sustento al cómo proceder, y para que esto suceda el estudiante debe basarse en sus experiencias y conocimientos adquiridos previamente. Algunas preguntas que guían esta fase son: ¿Conoce algún problema relacionado?; ¿puede enunciarse el problema en forma diferente?; ¿ha empleado todos los datos?; ¿ha hecho uso de toda la condición? Cuando estas preguntas se comprenden y se examinan, pueden inducir una conexión de las ideas, pues dichas preguntas buscan la generalización, particularización, el empleo de la analogía o el descartar una parte de la condición, que ayude a variar el problema para encontrar información auxiliar que sea apropiada para la solución.
3. Ejecución del plan: Ejecutar el plan, implica conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración y paciencia. En el transcurso es deseable que el estudiante verifique cada paso, sin perder de vista la diferencia que hay entre "ver" y "demostrar", es decir, que reconozca la exactitud de sus pasos mediante un razonamiento intuitivo o una demostración formal. Unas posibles preguntas para guiar esta fase son: ¿Pueden ustedes ver claramente que el paso es correcto?; ¿pueden también demostrar que es correcto?
4. Visión retrospectiva: Para que el estudiante consolide sus conocimientos y desarrolle sus aptitudes para resolver problemas es importante que examine nuevamente el resultado y el procedimiento que lo condujo a el. A pesar que el problema haya sido concluido, siempre se puede buscar mejorar la solución y la comprensión. Preguntas

relevantes son: ¿Puede verificar el resultado?; ¿puede verificar el razonamiento?; ¿puede obtener el resultado de un modo distinto?; ¿puede verlo de golpe?; ¿puede utilizar el resultado o le método para resolver algún otro problema?

Al respecto, Schoenfeld en su libro *Mathematical Problem Solving*, considera insuficientes las estrategias planteadas por Polya para la resolución de problemas, sostiene que este proceso es más complejo e involucra más elementos. En este sentido, Schoenfeld (1985) propone un marco conceptual basado en la resolución de problemas, que permita entender cómo intentan los estudiantes resolver problemas y a partir de ello, qué actividades se pueden formular para ayudarlos. El marco consta de cuatro dimensiones que analizan el proceso que sigue el individuo al resolver problemas:

- Dominio del conocimiento o recursos.
- Estrategias congnitivas o métodos heurísticos.
- Estrategias metacognitivas.
- Sistemas de creencias.

Dominio del conocimiento o recursos

Los recursos son los conocimientos y las herramientas que el individuo tienen a su disposición o las formas en que se apropia de estos. Schoenfeld identifica cinco tipos de conocimientos que influyen en el uso de los recursos:

1. Conocimiento informal e intuitivo. A partir de las experiencias que tienen los estudiantes acerca de los conceptos utilizados en sus rutinas diarias, desarrollan intuiciones acerca de las matemáticas y sobre las formas de aprenderla. “A las matemáticas se les identifica como un cuerpo de conocimientos donde existe un lenguaje codificado y un conjunto de significados que el estudiante debe aprender” (Santos, 2014); sin embargo, algunas dificultades que presentan al intentar entender los conceptos matemáticos, es debido al conocimiento informal.
2. Hechos y definiciones. Los hechos y definiciones validan los procesos para resolver problemas, además de ser necesarios para plantear o seleccionar algunas rutas de solución. Contar con los recursos va más allá de incluir los hechos y definiciones

básicas, significa que el estudiante puede acceder a este conocimiento y utilizarlo para resolver el problema.

3. Procedimientos rutinarios. Estos procedimientos son considerados técnicas, es decir, especifican el como debe resolverse un problema, pero no especifican los algoritmos a utilizar. Por esa razón, Schoenfeld (1985) los considera de nivel táctico y no estratégico.
4. Conocimiento acerca del discurso del dominio. Este conocimiento se relaciona en la manera que el estudiante percibe conceptos o reglas para resolver un problema. Si un estudiante entiende un aspecto particular de alguna regla, probablemente no pueda trasladarla a otro contexto.
5. Errores consistentes o recursos débiles. Según Matz (1980) los errores sistemáticos en lo que incurren los alumnos en la resolución de problemas son el resultado de un fracasado intento por adaptar conocimientos, adquiridos previamente, a una nueva situación. En otras palabras, los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza.

Estrategias cognitivas o métodos heurísticos

Las heurísticas son reglas generales que pueden ser útiles para resolver problemas eficazmente. Algunas estrategias relevantes para entender o avanzar hacia la solución son: explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema, dibujar figuras, trabajar casos particulares, etc. Aunque se acepte la importancia y el potencial de las heurísticas en la resolución de problemas, Santos-Trigo (2014) menciona que una preocupación tanto de los educadores de matemáticas como los maestros es saber ¿cómo deben ser enseñadas éstas a los estudiantes?

Según Schoenfeld (1985): "Heurísticas son las reglas de oro para resolver problemas efectivamente. Son estrategias bastante amplias para lograr progresos en problemas no familiares o difíciles" (p.44). Con esta definición surge la siguiente pregunta: ¿los procedimientos algorítmicos o rutinarios (definidos en la sección de recursos) se pueden considerar como heurísticas? Surge la sospecha de que un procedimiento algorítmico no puede considerarse como heurística, pues dicho procedimiento se utiliza comúnmente para resolver ejercicios (los cuales se consideran familiares y sencillos) y según la definición las heurísticas son propias de los problemas. Schoenfeld (1985) aclara este punto: "Muchos educadores matemáticos en los Estados Unidos confieren un invariante nivel de heurística a la aplicación de ciertos tipos de técnicas en la resolución de problemas" (p. 60). Entonces, según el autor, las heurísticas son estrategias generales usadas para resolver problemas en los cuales el individuo tiene dificultades. El carácter general de las heurísticas es un aspecto importante para entender su definición, por lo tanto, los procedimientos algorítmicos y de rutina al tener un carácter específico (utilizados en problemas particulares) no pueden considerarse heurísticas. "Cuando una técnica es asociada cercanamente con una disciplina en particular, y es utilizada como un procedimiento estándar, la implementación de dicha técnica se considera una cuestión de recursos" (Schoenfeld, 1985, p. 60).

Una conclusión importante es que el conocer las heurísticas no significa que el individuo pueda utilizarlas, es decir, el uso de heurísticas va acompañado con una habilidad para tomar decisiones, fruto de su experiencia en la resolución de problemas. Además, aunque las heurísticas son de carácter general (pueden usarse para resolver problemas en cualquier disciplina) el éxito en su implementación depende de los recursos con los que cuenta el individuo en la disciplina concreta (Schoenfeld, 1985, p. 92).

Schoenfeld (1985), a partir de los planteamientos de Polya, se ha dedicado a proponer actividades de resolución de problemas que se pueden llevar a cabo en el aula, con el fin de propiciar situaciones semejantes a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de resolución de problemas.

Estrategias metacognitivas

Las estrategias metacognitivas se refieren al monitoreo o autoevaluación del estudiante cuando resuelve problemas, además de estar consciente de las propias capacidades o limitaciones. Para Santos-Trigo (2014) la metacognición se refiera al "conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema" (p. 69). Es decir, si un estudiante se enfrenta a un problema que cuenta con diferentes caminos para llegar a la solución entonces debe tener la capacidad de evaluar si el procedimiento seleccionado lo ayudará a resolver el problema, en caso contrario, no debe engancharse en la primer idea, si el desarrollo no lo lleva a ningún lado debe retroceder e intentar de nuevo con otra opción.

Schoenfeld (1985) afirma que el control trata sobre las decisiones importantes que se toman acerca de qué hacer en un problema. En esta parte se toman decisiones para formar un plan con sus respectivas metas y monitorear las soluciones. Las acciones que involucran un control son:

- Tener claridad acerca de lo que trata el problema antes de iniciar el proceso de resolución.
- Considerar varias formas de resolver el problema y seleccionar un método particular a partir de una evaluación en relación con su utilidad.
- Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no esté produciendo resultados.
- Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida.

Sistemas de creencias

Las creencias sobre la matemática inciden notablemente en la forma en que los estudiantes, e incluso los profesores, abordan la resolución de algún problema. Es decir la concepción que tenga el individuo acerca de las matemáticas determina la forma de cómo selecciona uno cierto método para resolver un problema. En la caracterización de las matemáticas, relacionada con la resolución de problemas, se puede inferir que pensar matemáticamente incluye ciertas predilecciones. Por ejemplo, la intención de percibir una estructura, de buscar y analizar conexiones, de abstraer y percibir propiedades uniformes en objetos y sistemas que puedan aparentar ser diferentes, de usar abstracción y otros métodos como medios para investigar relaciones y estructuras, son actividades que se vinculan directamente con el que hacer matemático. Es decir, el trabajo de un matemático, al resolver un problema, muestra gran parte de estas actividades. En este sentido, existe una relación entre la forma de cómo se perciben las matemáticas y la forma de trabajar con problemas matemáticos.

De acuerdo con lo anterior mencionado, Santos-Trigo (2008) considera como elemento importante en la resolución de problemas el empleo de herramientas computacionales (tecnologías digitales en la actualidad), pues no solo facilita aspectos como buscar, representar, y describir cambios (variantes o invariantes) entre los objetos asociados con un problema, que es esencial para que los estudiantes identifiquen patrones, conjeturas o relaciones, sino también facilita la implementación de estrategias y ayuda a extender el repertorio de las heurísticas. En este contexto, el uso de la tecnología influye en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas, es decir, el uso de las herramientas digitales ha permitido la introducción y consideración de nuevos aspectos cognitivos matemáticos en el desarrollo de las competencias de los estudiantes y, como consecuencia, ofrecen un potencial para repensar y estructurar nuevas agendas de investigación.

> La presencia de las tecnologías digitales transforma y mejora el espacio de trabajo matemático donde los estudiantes desarrollan su práctica matemática. De hecho, esa presencia invita a los estudiantes a tomar provecho de las herramientas matemáticas que vienen incorporadas con el nuevo medio (Santos-Trigo, Moreno-Armella, & Camacho-Machín, 2016, p. 2).

La cognición es influenciada por el uso de herramientas tecnológicas según Leung y Bolite-Frant (2015), pero además señalan que existe una estrecha relación entre el desarrollo de las ideas y conceptos matemáticos con respecto al desarrollo de la tecnología. Así que, las formas de resolver un problema dependen, en gran medida, de los recursos con los que se disponga. En este sentido, no es suficiente con que los profesores conozcan y dominen los contenidos de la materia que imparten, sino deben buscar de qué manera se puede incorporar la tecnología en su practica y mejorar la enseñanza-aprendizaje para los estudiantes (Mishra y Koehler, 2006).

Santos-Trigo y Ortega-Moreno (2013) afirman que el uso sistemático y coordinado de las tecnologías digitales ayuda a conectar ideas fundamentales a través de los conceptos claves. Por ejemplo, la mediatriz es un concepto fundamental en la construcción dinámica de las cónicas, en las cuales se utilizan figuras como triángulos y rectángulos (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016).

Sin embargo, incorporar las tecnologías digitales a los sistemas de educación no es tarea fácil, pues implica ajustes o cambios en los contenidos que deben aprender los estudiantes, y buscar de qué manera se pueden organizar y estructurar los ambientes de aprendizaje (Santos-Trigo, 2015). En otras palabras, se busca que los estudiantes formulen e identifiquen problemas y busquen diferentes formas para resolverlos, como consecuencia de construir y desarrollar conocimiento, estrategias y habilidades apoyados por el uso coordinado de las tecnologías digitales. En esta perspectiva, el autor resalta los puntos que demanda el uso coordinado de diversas tecnologías cuando se resuelven problemas:

1. Busquen información relacionada con los temas de estudio en diferentes medios, lo cual incluye libros digitales y sitios en línea. En esta búsqueda los estudiantes deben utilizar métodos y estrategias que les permitan sintetizar, analizar y contrastar diferentes tipos de información.
2. Aprendan a trabajar en grupo o equipo, para aprender a escuchar otros puntos de vista, discutir y compartir ideas y soluciones.
3. Desarrollen constantemente nuevas herramientas que les permitan representar y explorar diversos problemas, incluyendo las representaciones dinámicas.
4. Desarrollen y practiquen diferentes maneras de planificar, monitorear y evaluar los procesos de resolución de problemas.
5. Representen y discutan resultados intermedios y finales que puedan ser accesibles a colegas y público en general.
6. Generen resultados que sean compartidos y utilizados por una comunidad amplia.
7. Se involucren en actividades que fomenten la creatividad en la resolución de problemas. Un aspecto fundamental en el desarrollo de las ciencia es buscar diferentes maneras de resolver un problema. La creatividad se desarrolla a partir de analizarlo desde caminos no convencionales, y los estudiantes deben siempre buscar métodos originales o formas novedosas de abordarlo.
8. Construyan y expresen valores y principios éticos. El conocimiento disciplinar se desarrolla dentro de una comunidad donde sus integrantes constantemente dialogan, escuchan y manifiestan respeto por las contribuciones e ideas de los demás. Así, el respeto a las diferencias y el desarrollo de responsabilidades civiles debe ser parte de la formación de todos. (pp. 136-137)

En relación a las tareas matemáticas, Santos-Trigo (2015) señala que son el medio por el cual los estudiantes más que seguir y aplicar un conjunto de procedimientos, tienen la oportunidad de involucrarse en un proceso de cuestionamiento, de búsqueda de relaciones y de reflexión conceptual. Para lograr este objetivo, los estudiantes deben utilizar el conocimiento y las habilidades adquiridas con anterioridad que les permitan discutir los problemas, representarlos de diferentes formas para que puedan explorarlos, formular relaciones y conjeturas, engancharse en la búsqueda de diversos argumentos para sustentarlas y comunicar los resultados.

En la misma dirección, las tecnologías digitales sirven para ampliar la búsqueda de información relacionada con los temas en estudio, es decir, los estudiantes, además de tener acceso a una gran cantidad de páginas con información escrita, tienen acceso a vídeos en línea que les permite contrastar o extender las explicaciones de conceptos expuestos por el profesor. Pero esto significa que los estudiantes deben desarrollar habilidades para seleccionar, discriminar, sintetizar e incorporar esta información en sus experiencias de aprendizaje.

2.2 Hábitos de razonamiento matemático

El NCTM (2009) define como hábito de razonamiento a una forma productiva de pensamiento adquirida por repetición de actos iguales o semejantes, que comúnmente se presenta en los procesos de investigación matemática. En la siguiente lista se enuncian los hábitos de razonamiento e ilustran los tipos de pensamiento que deben convertirse en rutina.

Análisis de un problema:

- Identificar conceptos matemáticos pertinentes, procedimientos o representaciones que revelen información importante sobre el problema y contribuir a su solución.
- Definir variables y condiciones pertinentes cuidadosamente.
- Buscar patrones y relaciones.
- Buscar trazos auxiliares o expresiones equivalentes que revelen diferentes aspectos del problema.
- Tomar en cuenta los casos especiales o análogos más simples.
- Aplicar conceptos previamente aprendidos a nuevas situaciones de problemas, adaptar y extender según sea necesario.
- Hacer deducciones y conjeturas preliminares.
- Decidir si un enfoque estadístico es apropiado.

Implementación de una estrategia:

- Usar con propósito los procedimientos.
- Organizar la solución (cálculos, manipulaciones algebraicas y muestra datos)
- Hacer deducciones lógicas basadas en el progreso actual, verificar conjeturas, y extender hallazgos iniciales.
- Seguimiento de los avances hacia una solución, revisar la estrategia escogida.

La búsqueda y el uso de conexiones a través de diferentes dominios matemáticos, diferentes contextos y diferentes representaciones.

Al reflexionar sobre una solución a un problema:

- Interpretar una solución y la forma en que responde al problema.
- Tener en cuenta el carácter razonable de una solución.
- Revisar las hipótesis iniciales acerca de la naturaleza de la solución, incluyendo el ser consciente de casos especiales y soluciones extrañas.
- Justificar o validar una solución.
- Reconocer el alcance de la inferencia de una solución estadística.
- La conciliación de diferentes enfoques para resolver el problema.
- Argumentar y refinar la solución para que pueda comunicarse con eficacia.
- Generalizar la solución a una clase más amplia de problemas y buscar conexiones con otros problemas.

Desarrollar los hábitos de razonamiento matemático en los estudiantes debe ser una prioridad en el sistema educativo y en particular en el nivel medio superior. En este camino, los profesores pueden ayudar a que los estudiantes mejoren y alcancen niveles más altos de razonamiento a través de tareas y preguntas. La siguiente lista son consejos que los profesores pueden utilizar para desarrollar estos hábitos en sus estudiantes.

- Proporcionar tareas que los estudiantes puedan resolver por sí mismos.
- Solicitar a los alumnos repetir el problema en sus propias palabras.

- Dar a los estudiantes tiempo para analizar un problema de forma intuitiva, explorar aún más el problema mediante el uso de modelos, y luego proceder a un enfoque más formal.
- Resistir la tentación de decir a los estudiantes cómo resolver un problema cuando se frustran.
- Proporcionar tiempo de espera adecuado después de una pregunta para que los estudiantes formulan su propio razonamiento.
- Animar a los estudiantes a hacer preguntas de sondeo de sí mismos y entre sí.
- Esperar a que los estudiantes comuniquen su razonamiento a sus compañeros y al profesor, oralmente y por escrito, mediante el uso de vocabulario matemático adecuado.
- Dar explicaciones a modo de ejemplo, y que los estudiantes reflexionen sobre lo que las hace efectivas.
- Establecer un clima en el aula en el que se sientan cómodos compartiendo sus argumentos matemáticos y criticando los argumentos de los demás de una manera productiva.

Más adelante se menciona cómo usar las tecnologías para favorecer el desarrollo de estos hábitos.

2.3 Tecnologías digitales

Las tecnologías digitales juegan un papel importante en el desarrollo de las habilidades cognitivas, GeoGebra por ejemplo, puede mejorar y transformar las capacidades cognitivas de los estudiantes así como ayudarlos a desarrollar otras nuevas cuando representan y exploran tareas. "Una tecnología cognitiva deja rastros en nuestra mente a través de trabajo constante y después de un tiempo se convierte en parte de nuestros recursos cognitivos" (Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016, p. 189). Hay ventajas y limitaciones que son inherentes al diseño de la tecnología, sin embargo, Santos-Trigo y Moreno-Armella (2016) han encontrado que los usuarios descubren otras durante su implementación, debido al uso innovador de la tecnología que les permite eliminar esas limitaciones.

Con el uso de las tecnologías digitales es posible transformar los problemas de rutina en un conjunto de actividades no rutinarias, es decir, la tecnología ayuda a encontrar nuevas maneras de resolver los mismos problemas y extenderlos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009). En este sentido, los modelos dinámicos se vuelven importantes para explorar comportamientos matemáticos de una familia de objetos a través del arrastre, la búsqueda del lugar geométrico, y la cuantificación de atributos o affordances gráficos. Esta exploración de los objetos no sólo proporciona información sobre invariantes o patrones que participan, sino también formas de justificar las relaciones emergentes o conjeturas.

2.3.1 Clasificación de las tecnologías

"La educación matemática de la más alta calidad debe apoyar a los estudiantes en la confianza y en el uso de la tecnología eficaz" (NCTM, 2011, p. vii). Usar la tecnología eficazmente en matemáticas implica saber cómo seleccionarla según sus affordances para que ayude a resolver las actividades o problemas con los que se enfrentan los estudiantes. Así que, con la intención de cubrir este requisito, a continuación se muestran diferentes propuestas de cómo clasificar la tecnología según sus affordances.

Tecnologías con infraestructuras de representación

Los elementos con los que deben contar las tecnologías con infraestructuras de representación, según Hegedus y Moreno-Armella (2010), son:

- Navegación. Capacidad de moverse alrededor de la pantalla, mover figuras matemáticas, desplazarse y hacer zoom en un sistema de coordenadas.
- Interacción. Mantener, arrastrar o manipular objetos.
- Anotación. Añadir marcas, literales o números a figuras o diagramas.
- Construcción. Figuras matemáticas o diagramas pueden ser construidos en partes a través de herramientas especificas.
- Simulación. Permitir que los objetos que forman parte de, o asociados a, las figuras o diagramas, sean animados, u observar la simulación de un conjunto de datos cuando se cuenta con el modelo.
- Manipulación. Figuras o diagramas pueden ser modificados al interactuar con características particulares de la construcción, preservando las reglas matemáticas dentro de la construcción. (p. 26)

Estas características son inherentes a un SGD, como en el caso de GeoGebra, donde pueden construirse representaciones matemáticas.

Nuevos medios de comunicación

¿Por qué "nuevos medios de comunicación" y no solamente medios de comunicación?, es decir, ¿cuáles son las affordances únicas de los nuevos medios de comunicación?. Tzu-Bin, Chen y Chai (2015), mencionan que definir o delimitar el significado de este término es difícil por los constantes cambios y transformaciones de la tecnología. No obstante, argumentan que existe una tendencia hacia donde convergen los nuevos medios de comunicación, y por lo tanto, hay características que permiten establecer la distinción entre estos y los medios de comunicación convencionales. Los nuevos medios de comunicación se definen por las siguientes características:

- Digital: los nuevos medios de comunicación se crean normalmente en forma digital.
- Virtualidad: Se propagan a través de internet.
- Hipertextualidad: la información está fragmentada en pequeños segmentos y se vincula con hipervínculos.
- Interactividad: permiten la fácil creación de mensaje multimodal que promueve las interacciones y comunicación entre los participantes.

En este sentido, los autores consideran a los nuevos medios de comunicación como medios de comunicación social. Esto es, el término ya no se asocia con su tecnología o hardware sino más bien con la facilidad de interactuar y crear mensajes por medio de internet.

Tecnologías de transmisión

Las tecnologías de transmisión permiten a los profesores y estudiantes presentar, comunicar y colaborar entre sí (NCTM, 2011). Se caracterizan de la siguiente manera:

- Tecnología de presentación: pizarrones interactivos, software de presentación de diapositivas (por ejemplo, PowerPoint), dispositivos de proyección o monitores de acompañamiento (que permiten a un grupo de personas ver una presentación común).

- Tecnología de la comunicación: tanto de Intranet (red de comunicaciones dentro de la clase o la escuela) como Internet (interacción entre los estudiantes y profesores a grandes distancias).
- Tecnología de intercambio (colaboración): la que permite una visión compartida de trabajo de uno o más individuos o un acceso compartido a un área de trabajo común o a un documento.
- Tecnología de evaluación / monitoreo / distribución: incluye sistemas de mandos de respuesta para plantear preguntas, herramientas de recolección y análisis y software para el control de muchas pantallas de dispositivos individuales (permitiendo la evaluación formativa y la retroalimentación, así como la supervisión y la gestión de los dispositivos de los estudiantes).

Las tecnologías de transmisión son más eficaces cuando los actores no tienen que prestar atención a éstas específicamente, es decir, solo se centran en las ideas matemáticas o tareas transmitidas. Por ejemplo, si se recibe una llamada telefónica con información urgente, es el contenido de la llamada lo importante, no el teléfono que se utilizó en particular.

Tecnologías para la actividad matemática

Según el NCTM (2011), las tecnologías para las actividades matemáticas son aquellas que están diseñadas para responder a las acciones matemáticas del usuario. A continuación se presentan categorías que abarcan este tipo de tecnologías y ejemplifican cómo pueden ser utilizadas.

- Kits de herramientas computacionales/representacionales (calculadoras gráficas, sistemas algebraicos computacionales [CAS], hojas de cálculo): Estos paquetes proporcionan un conjunto de herramientas para la aritmética y cálculos algebraicos con números y símbolos, así como herramientas para la representación o visualización de funciones y datos en forma de tablas y formas gráficas.
- Ambientes de geometría dinámica (Geometer's sketchpad, Cabri, GeoGebra): En un ambiente de geometría dinámica (AGD), las herramientas clásicas de construcción como compás y regla, y las herramientas de medición como regla y transportador se expanden y se hacen dinámicas. Objetos geométricos virtuales pueden ser creados y manipulados a

nivel de la pantalla. Cualquier construcción o medición basadas en estos objetos se actualizan automáticamente cada vez que se manipulan.

- Micromundos (entornos limitados por reglas definidas matemáticamente): Un micromundo matemático tiene alguna estructura matemática subyacente codificada dentro de él y se crea para ilustrar o promulgar determinados conceptos o procedimientos matemáticos. Por ejemplo, un programa donde se manipulen virtualmente baldosas, el álgebra podría limitar el movimiento de éstas a las formas que se pueden interpretar con sensatez en términos de un modelo de área, mientras que las baldosas reales se pueden apilar, superponer, o desalinear.
- Las simulaciones por ordenador (parámetro impulsado por representaciones virtuales de los fenómenos físicos). Por ejemplo, el usuario podría ser capaz de establecer el ángulo de elevación y la velocidad inicial de un proyectil y después observar la trayectoria simulada resultante del objeto lanzado usando esos parámetros. (pp. xii-xiii)

El software o hardware de una tecnología para la actividad matemática puede estar constituida por la combinación de estas categorías, no necesariamente de una.

Para la presente investigación se seleccionaron las tecnologías con base en las características que mencionan Hegedus y Moreno-Armella en el 2010 (tecnologías con infraestructura de representación). En particular las que interesan son:

- Wolfram: servicio en línea que responde a las preguntas directamente, mediante el procesamiento de la respuesta extraída de una base de datos estructurados, en lugar de proporcionar una lista de los documentos o páginas web que podrían contener la respuesta, tal y como lo hace Google.
- GeoGebra: es considerado un sistema de geometría dinámica debido a los diferentes tipos de herramientas con los que cuenta. Es decir, además de contar con mandos explícitos de geometría, también tiene a su disposición una hoja de cálculo, un software de geometría dinámica y de geometría en 3D.

y complementarlas con las tecnologías que se adaptan a los nuevos medios de comunicación que proponen Tzu-Bin, Chen y Chai en el 2015. Las que se consideraron son:

- Wikipedia: enciclopedia libre que puede ser editada por sus usuarios.
- Google Docs: procesador de texto online que permite crear y dar formato a documentos de texto, además de colaborar con otras personas en tiempo real.
- YouTube: sitio web en el cual los usuarios pueden subir y compartir vídeos. En la actualidad existen varias instituciones que lo utilizan con fines educativos.
- Classroom: sistema de gestión de aprendizaje que Google pone a disposición de todos los usuarios de Google Apps para educación.
- Padlet: muro digital que permite guardar y compartir diferentes contenidos multimedia sin necesidad de estar registrado. También puede utilizarse como un archivo personal o como una pizarra colaborativa.
- Khan Academy: plataforma que cuenta con ejercicios de práctica, videos instructivos y un panel de aprendizaje personalizado que permite a los alumnos aprender a su propio ritmo dentro y fuera del salón de clases.

2.3.2 Uso de la tecnología digital en la resolución de problemas

Las tecnologías digitales son un elemento clave en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, ofrecen la oportunidad de mejorar las habilidades y las estrategias con las que se cuentan. Pero no es suficiente con tener acceso a las tecnologías para obtener los resultados esperados, se necesita, además de saber sus características según sus affordaces, emplear hábitos de razonamiento que faciliten su gestión. En respuesta, el NCTM (2011) propone cómo deberían profesores y estudiantes utilizar las tecnologías para que propicien el uso de estos hábitos cuando se trabaja bajo un ambiente de resolución de problemas.

A continuación se muestra cómo deben los estudiantes emplear la tecnología para propiciar cada hábito de razonamiento:

- Analizar el problema: identificar que instrumentos de las tecnologías son apropiados para usarlos y cuándo usarlos.
- La implementación de una estrategia: buscar de qué forma se puede incluir la tecnología y monitorear el proceso de solución.
- La búsqueda y el uso de conexiones: realizar diferentes representaciones del problema con las tecnologías.

- Al reflexionar sobre una solución a un problema: reconocer las oportunidades y limitaciones que ofrece la tecnología en los resultados obtenidos, revisar diferencias entre enfoques con y sin tecnología e interpretar los resultados en el contexto del problema.

Por lo tanto, el trabajo del profesor consiste en centrarse en las preguntas que pueden plantearse con el uso de las tecnologías, no tanto en las respuestas que proporciona. Un escenario adecuado de acción-consecuencia permite plantear preguntas que den sentido a la actividad:

- Predecir consecuencias de la acción (¿qué pasaría si…?).
- Considerar la posibilidad de la acción para producir una consecuencia determinada (¿qué debería hacer…para que suceda?).
- Conjetura/prueba/generalización (¿cuándo…?).
- Justificación (¿por qué…?). (p. xvi)

Los profesores deben aprender a plantear preguntas significativas, pues incluso el entorno o escenario más convincente puede quedar sin efecto, pero ¿cómo puede el profesor planear un escenarios de acción-consecuencia adecuadamente que implemente las tecnologías digitales? Una guía que ofrece el NCTM (2011) son los siguientes diez puntos que deben considerar los profesores cuando planean escenarios de acción-consecuencia que emplean tecnología:

1. ¿Es la acción intencionada, reflexiva y deliberada? (Ejemplos: cambiar el valor de un parámetro numérico, el cambio de ubicación o la forma de un objeto geométrico; casos de contra ejemplo) ¿Hay señales adecuadas de qué acción o acciones deberían tomarse?
2. ¿Sé algún conocimiento técnico especializado que se necesita para tomar acción (habilidades relacionadas con la tecnología)? El tiempo dedicado a la enseñanza y el aprendizaje de la sintaxis no matemática, la configuración y las convenciones propias de la plataforma debe ser mínima: en general, cuanto menor y más simple, mejor.
3. ¿Es la acción matemáticamente significativa? Mientras que la acción de la pantalla en sí físicamente que podría describirse como "clic" o "arrastre", el usuario podría describir la acción en términos matemáticos: “he cambiado un valor para investigar la pendiente ….” “moví el vértice de ….” “estiré el gráfico verticalmente con respecto al eje x ….”

4. ¿Las consecuencias son inmediatas, visuales, y matemáticamente significativas? Que las consecuencias aparezcan en la misma pantalla en la que se realiza la acción es el ideal.
5. ¿La conexión entre la acción y la consecuencia es evidente? ¿Hay otras consecuencias visuales (pero menos matemáticamente significativas) que sirven como distractores o compiten por la atención? ¿Hay desorden que hace menos evidente la conexión entre acción-consecuencia? ¿Es claro para el usuario que la acción está impulsando la consecuencia?
6. ¿El uso de la tecnología proporcionan mejoras que van claramente por encima de lo que podría lograrse con papel y lápiz?
7. ¿Son las representaciones matemáticamente fieles (fiel a las matemáticas) y cognitivamente fieles (no perceptualmente engañosa)? Relacionado, pero más difícil de detectar: ¿Hay sutilezas matemáticas que se pase por alto? ¿Es la gama de ejemplos innecesariamente restringido de manera que puedan dar lugar a falsas generalizaciones?
8. ¿El escenario de acción-consecuencia proporciona oportunidades para la reflexión? ¿Qué preguntas pueden hacerse para que tenga sentido el uso del escenario e incentive el razonamiento?
9. ¿Qué conocimiento previo de matemáticas y entendimientos necesitan los estudiantes para utilizar el escenario interactivo y poder responder preguntas?
10. ¿Qué nuevos conocimientos y entendimientos podrían los estudiantes construir a partir de responder a estas preguntas? Más importante, ¿el uso de este escenario tecnológico proporciona nuevas oportunidades atractivas para los estudiantes para construir la comprensión de las ideas matemáticas importantes? (pp. xvi-xvii)

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009) argumentan que el uso de las herramientas computaciones les da a los estudiantes la oportunidad de construir representaciones visuales del problema, formular conjeturas que puedan ser validadas empíricamente y mediante enfoques más formales generalizar y probar esas conjeturas. En consecuencia, los profesores pueden utilizar problemas rutinarios que se encuentran en los libros de texto para que los estudiantes busquen diferentes formas de representarlos, extenderlos y explorarlos. Por ejemplo, es posible representar y examinar las propiedades matemáticas de forma visual, numérica, algebraica y gráfica de un problema con el uso de un SGD.

Los autores proponen cinco fases en la resolución de problemas para convertir los problemas de rutina que aparecen en los libros de texto en un vehículo que involucre a los estudiantes en la practica matemática, es decir, para que los profesores puedan planear sus lecciones y organizar actividades de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes. Estas fases son: 1) comprensión del problema a resolver; 2) implementación de un plan de solución; 3) búsqueda de patrones y una solución general; 4) conexiones y extensiones; 5) visión retrospectiva y reflexiones. Es fundamental el uso de diversas herramientas computacionales durante cada fase en la resolución de problemas, por ejemplo:

> el uso de software dinámico se vuelve importante para representar inicialmente el problema en términos de sus propiedades principales y más tarde para visualizar el problema de forma dinámica. Además, esta herramienta puede ser utilizada para cuantificar los atributos matemáticos como áreas, perímetros, ángulos, segmentos de longitudes, pendientes, etc., y observar cómo cambian cuando se mueven algunos objetos (puntos o líneas) dentro de la representación del problema (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009, p. 275).

Por lo tanto, los estudiantes deben tener claro que llegar a una solución del problema dado no es suficiente, sino que tienen que aprovechar las herramientas computacionales para plantear y explorar otras preguntas o problemas.

> El objetivo en el uso de la tecnología digital es capacitar a los alumnos con affordances que amplifiquen y mejoren sus formas de construir conocimiento. Los maestros juegan un papel importante en la provisión de condiciones para que los estudiantes utilicen la tecnología en los enfoques de la solución del problema (Santos-Trigo & Reyes-Martinez, 2014, p. 63).

CAPÍTULO 3

Metodología de la investigación

En este capítulo se detalla la metodología en la que se sustentó la investigación, es decir, se describen las características de una investigación cualitativa, se enmarca el contexto de los participantes en la investigación, se detallan las sesiones de trabajo junto con las actividades de clase y extra clase (tareas), se especifican los instrumentos utilizados para la recolección de datos al igual que sus características, y se resaltan elementos importante del análisis de los datos.

3.1 Características de una investigación cualitativa

Una investigación cualitativa según Hernández, Fernández y Baptista (2014) se encamina por temas significativos de investigación. Los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección de datos y el análisis de datos. En la mayoría de los casos estas actividades ayudan a descubrir cuáles son las preguntas de investigación más importantes, además de perfeccionarlas y responderlas; a diferencia de la mayoría de los estudios cuantitativos, donde la claridad sobre las preguntas de investigación e hipótesis precede a la recolección y el análisis de los datos.

3.2 Participantes en la investigación

El estudio se realizó con un grupo de estudiantes de primer semestre de bachillerato, los cuales cursaban la materia de Matemáticas I. El grupo estuvo conformado por 18 estudiantes con edades entre 15 y 17 años. Es importante mencionar que todo el grupo estaba familiarizado con el uso del software de geometría dinámica (GeoGebra), la mayoría utilizaba las herramientas básicas como punto, intersección, recta, segmento, recta perpendicular, recta paralela, rastro, lugar geométrico, polígono, polígono regular, circunferencia (centro, punto), distancia o longitud, área y algunos comandos en la barra de entrada, sin dificultad.

3.3 Sesiones de trabajo y tareas

3.3.1 Sesiones de trabajo

Se llevaron a cabo seis sesiones, tres sesiones por semana: dos de 2 horas y una de 1 hora, haciendo un total de 10 horas de trabajo presencial bajo un ambiente de resolución de problemas. En cada sesión los estudiantes resolvían problemas geométricos mediante el uso de ecuaciones cuadráticas apoyados por el SGD. Las sesiones se llevaron a cabo en un aula de cómputo, donde cada estudiante disponía de una computadora con acceso a internet y con GeoGebra (SGD) para desarrollar las actividades propuestas. Excepto en una sesión que fue desarrolladas en un salón de clases debido a que no hubo acceso al aula equipada, esto no fue un impedimento o limitante para la investigación. El profesor contaba con una computadora, cañón y pintarrón.

Con el fin de que los estudiantes discutieran sus ideas y analizaran configuraciones dinámicas desde diferentes perspectivas, se les propuso formar binas. También, se les solicitó que expusieran los acercamientos o avances de las construcciones dinámicas con el uso del SGD y el cañón para contrastar sus resultados con el resto del grupo, y al termino de cada sesión, el profesor les pidió a los estudiantes enviar por correo electrónico un archivo de GeoGebra que describiera lo que habían realizado hasta el momento y agregaran con el comando texto, comentarios y reflexiones con respecto al trabajo presentado por sus compañeros.

En un ejercicio grupal se solicitó a los estudiantes la solución del siguiente problema:

El perímetro de una sala rectangular es de 56 m. Si el largo se diminuye en 2 metros y el ancho aumenta en 2 metros, la sala se torna cuadrada. a) Construir en GeoGebra la familia de rectángulos que cumplan con la condición inicial. b) ¿Cuáles son las dimensiones de la sala?

Este problema originalmente solo pide las dimensiones de la sala (inciso b), pero gracias al uso del SGD se pudo modificar el problema agregando el inciso (a) que ayudó a centrar la atención de los estudiantes en las propiedades geométricas de la figura y en sus relaciones. Es decir, se busca que los estudiantes no se detengan únicamente en el álgebra, sino que a partir de una construcción visual puedan analizar y comprender diferentes elementos de la figura.

El problema planteado se obtuvo del libro *la función cuadrática: enfoque de resolución de problemas* (Santos-Trigo, 2010). Es un problema rutinario al que se le agregaron preguntas para que los estudiantes tuvieran la oportunidad de extenderlo y conectarlo con una serie de problemas similares que permitieran la reflexión, análisis y comprensión de conceptos matemáticos.

3.3.2 Tareas

Es sabido que “las tareas son elementos clave para que los profesores puedan orientar, fomentar y analizar los procesos de los estudiantes que participan en la comprensión y construcción del conocimiento matemático” (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2014, p. 63), es decir, las tareas son un ingrediente esencial del espacio de trabajo de matemáticas. En ese sentido, se emplearon tres tareas a lo largo de las sesiones donde cada una tenía distintos objetivos.

Para complementar la solución de dichas tareas, se implementaron las tecnologías digitales de comunicación YouTube y Padlet para que los estudiantes tuvieran la oportunidad de extender las discusiones matemáticas más allá del salón de clases. Se les indicó que en el muro digital (Padlet) debían exteriorizar las posibles soluciones a los problemas de las tareas, hacer preguntas significativas, compartir videos (de YouTube) o enlaces de páginas que fueran de utilidad e integrar la perspectiva de los demás a sus trabajos, con el objetivo de lograr un ambiente colaborativo en su resolución.

Las instrucciones proporcionadas a los estudiantes para resolver las tareas fueron las siguientes:

- Todas las respuestas deben de contar con la fuente de donde se obtuvo la información (incluir enlaces).
- Responder de forma clara y detallada; explicar con tus propias palabras independientemente de haber obtenido la información en páginas de internet o videos.
- Revisar videos de YouTube que te ayuden a resolver los ejercicios que se plantean. Los enlaces de los videos revisados deberán estar al final de la hoja con un comentario breve que indique por qué te pareció adecuado el video.
- Si se te complica escribir notación matemática en el documento que vas a entregar, puedes hacerlo en tu cuaderno, tomarle una foto al ejercicio y colocar la imagen en el inciso correspondiente (la imagen debe ser clara).

Las tareas solicitadas se muestran a continuación:

Tarea 1

Objetivo: Que el estudiante identifique las condiciones necesarias para que una ecuación sea cuadrática, sus coeficientes y pueda resolverlos con algún método seleccionado.

1. ¿Cómo puede resolverse una ecuación cuadrática?
2. ¿Cuántas raíces reales puede tener una ecuación de segundo grado?
3. ¿Qué relación existe entre el discriminante de una ecuación cuadrática y el número de raíces?
4. ¿Qué se obtiene si se suman o se multiplican las raíces de una ecuación cuadrática?
5. ¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática por factorización?
6. ¿Cómo se identifican las raíces de una ecuación cuadrática en la gráfica correspondiente?
7. ¿Cómo puede resolverse una ecuación cuadrática, si b=0 o c=0?
8. Identifica aquellas expresiones que correspondan a una ecuación de segundo grado. Explique su respuesta en cada caso.
   a) $a^2 - 5a + 7 = 0$
   b) $x^2 + 5x + 3 > 0$
   c) $(x^2 + 5)^2 = 0$
   d) $0 = (3 - x)(2 + x)$
   e) $4x^2 + x^2 = 5$
   f) $0 = 2k + 8k^2$
   g) $rx^2 + cx + g = k$
   h) $x(x + 1) = x$
   i) $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$
   j) $\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{2}{3}\right)y = 3$
   k) $(x - 1)^2 = 0$
   l) $0x^2 + 5x + 3 = 0$
   m) $x^2 + y^2 = 0$
   n) $(x + 3)(x + 5)$
   o) $x^3 + x^2 = 5$
   p) $7x + 2x + 3 = 0$
   q) $3m + 7x + 2 = -1$
   r) $g^2 = 9$
   s) $8 = 7n - 9n^2$
   t) $x^2 + 16x - 8000 = 0$
   u) $\left(\frac{2}{7}\right)x^2 + \left(\frac{1}{5}\right)x = 3$
   v) $x^2 - 3x + \sqrt{5} = 0$

9. Cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas es un caso especial de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$. Identifique en cada una de ellas los valores *a*, *b* y *c*. Por ejemplo, para la ecuación $3x - x^2 = 0$: $a = -1$, $b = 3$ y $c = 0$.
   a) $x^2 = 0$
   b) $0 = 5 - 3x^2$
   c) $-7x^2 + 8x = 0$
   d) $x^2 = 3$
   e) $6 - x^2 = 0$
   f) $4x - 9x^2 = 0$
   g) $3 = 2x^2 - 5x$
10. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.
   a) $8 = 7a - 9a^2$
   b) $0 = 3x^2 + 7x + 2$
   c) $(x - 3)(x + 5) = 0$
   d) $3 = m^2 - 2m + 3$
   e) $15x^2 - 7x = 4$
   f) $x^2 - 6x + 9 = 0$
   g) $s^2 = 9$
   h) $x^2 + 4 = 0$
   i) $-x^2 - x - 1 = 0$
   j) $x^2 + 8x = -16$
   k) $25c^2 + 5c - 12 = 0$
   l) $4n(n - 3) = -9$

Tarea 2

Objetivos:

a) Que el estudiante sea capaz de identificar una ecuación cuadrática a partir de su definición.
b) Que el estudiante mediante la revisión de un video tutorial (YouTube) identifique y utilice el concepto de discriminante en problemas no rutinarios.
c) Que utilizando videos de YouTube el estudiante sea capaz de resolver ecuaciones cuadráticas mediante el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

1. ¿Cuáles son las condiciones necesarias que deben existir para que una ecuación sea cuadrática?

2. La ecuación $x^2 + x^{\frac{1}{2}} + 3 = 0$ ¿es cuadrática?. Justifica tu respuesta.
3. Revisa el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=cz2Z48HJM08 y contesta.
   a) ¿Para qué valor de k la ecuación $3x^2 + 8x + k = 0$ tiene una raíz real?
   b) ¿Para qué valores de k la ecuación $kx^2 - 6x + 5 = 0$ tiene raíces reales?
   c) ¿Para qué valores de k la ecuación $4x^2 + x + k = 0$ no tiene raíces reales?
4. Revisa los siguientes videos y resuelve lo que se te pide:

https://www.youtube.com/watch?v=Ly-jE7Asxg0

https://www.youtube.com/watch?v=F51pLctp69c

resuelve los siguientes ejercicios completando el trinomio cuadrado perfecto.

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$
b) $4x^2 - 4x - 8 = 0$
c) $-4x^2 + 12x - 8 = 0$

Tarea 3

Objetivo: Que el estudiante utilice los recursos obtenidos de las tareas y sesiones anteriores, además de explorar y resolver nuevos cuestionamientos como el vértice de la parábola.

- Construye el modelo dinámico que represente la familia de rectángulos cuya altura sea el triple de su base disminuida en dos unidades.
- Encuentra la gráfica que representa al perímetro de la construcción dinámica.
- Encuentra la gráfica que representa al área de la construcción dinámica.
- ¿En qué puntos del eje *x* corta la gráfica del área y dónde está su vértice?.
- Indica para cuáles valores de la base del rectángulo el perímetro y área son iguales.
- Agrega todas las relaciones que consideres interesantes.

Quien desarrolla esta investigación participó en los muros digitales planteando preguntas y compartiendo videos con la meta de mejorar los acercamientos y la participación de los estudiantes al resolver sus tareas.

3.4 Instrumentos de recolección de datos

A continuación se mencionan y describen los instrumentos que se utilizaron para recolectar los datos en esta investigación.

Archivos de GeoGebra: estos archivos fueron entregados por los estudiantes al final de cada sesión por vía correo electrónico. Fueron de gran utilidad para observar y analizar los primeros acercamientos que tuvo cada estudiante con respecto a la construcción de cada problema solicitado. El análisis fue posible gracias a la opción *protocolo de construcción* que incluye el SGD, el cual permite generar cada construcción paso a paso, sin embargo, esta opción presenta una limitante al no guardar los objetos eliminados de cada construcción. De cualquier modo, este aspecto fue cubierto con las notas de campo y con las videograbaciones que se hicieron a los diferentes equipos y a cada estudiante que exponía sus acercamientos en el cañón.

Videograbaciones: el objetivo de grabar las sesiones de clases fue contar con los acercamientos iniciales de cada construcción, con las discusiones y participaciones de los estudiantes en torno a los conceptos matemáticos, con los procedimientos algebraicos realizados en papel y lápiz, y las reflexiones sobre los distintos resultados obtenidos. Las grabaciones se centraron en los monitores cuando cada equipo describía su trabajo y en el pintarrón cuando pasaba algún estudiante a explicar sus avances o cuando se generaba una discusión grupal. Como se contó únicamente con una cámara, no fue posible grabar el desarrollo de las actividades de todos los estudiantes.

Muro digital Padlet: se utilizó como un medio de comunicación (foro) que sirviera de apoyo en las tareas, es decir, que los estudiantes expresaran sus dudas, compartieran información de páginas o videos relacionados con los temas, mostraran acercamientos de las posibles soluciones y que intercambiaran opiniones sobre estos acercamientos. El objetivo de usar este muro digital es contar con la evidencia de las discusiones e interacciones que muestran los alumnos en torno a los problemas y conceptos matemáticos planteados en las tareas.

Archivos en Word: las tareas fueron entregadas en estos archivos con el propósito de tener todos los procedimientos de los problemas discutidos en Padlet de manera clara y organizada, además de analizar las soluciones del resto de los problemas que no se presentaron en el muro.

Notas de campo: son las evidencias escritas de las observaciones del investigador, donde se distinguen situaciones fuera de lo común en relación a las actividades de los estudiantes cuando resuelven problemas con el uso del SGD. Las notas de campo sirvieron para complementar la información y el análisis de los datos.

3.5 Análisis de Datos

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014), analizar los datos es proporcionar una estructura que permita reducir los datos, organizarlos y verificar los resultados. Es decir, los datos que se obtienen en una investigación cualitativa son muy diversos, por ejemplo, visuales, auditivos, textos escritos, expresiones verbales y no verbales, además de las narraciones del investigador, por eso los objetivos principales del análisis cualitativo son explorar los datos, organizarlos en unidades y categorías, describir las experiencias de los participantes, descubrir los conceptos y patrones presentes en los datos para interpretarlos y explicarlos en función del planteamiento del problema, comprender el contexto y asociar los resultados con el conocimiento disponible.

Por lo tanto, se puede dividir en tres fases el análisis de datos. La primer fase implicó seleccionar, simplificar y transformar los datos por medio de identificar patrones, hacer transcripciones o resumir la información. En el caso de las actividades que se realizaron dentro del aula, se utilizaron los archivos de GeoGebra y las grabaciones para identificar en las diferentes construcciones elaboradas por los estudiantes, los conceptos matemáticos aplicados y los posibles acercamientos a la solución. El muro digital Padlet fue un instrumento necesario en el estudio para evidenciar las discusiones e interacciones que tuvieron los estudiantes cuando se enfrentaron a los problemas planteados en las tareas, pero se complementó con los archivos de Word que sirvieron para contar con los procedimientos completos de los problemas de manera clara y organizada.

La segunda fase consistió en organizar los datos con el objetivo de observar regularidades o invariantes que faciliten la interpretación de estos y ayuden a entender los intereses del estudio. Los procedimientos, las participaciones y las interacciones entre estudiantes y profesor que se desarrollaron al resolver problemas tanto en el salón de clases como en las actividades extra clase, se caracterizaron bajo el marco propuesto por Schoenfeld (1985), además se buscó identificar los hábitos de razonamiento matemático que establece la NCTM (2009) cuando los estudiantes utilizan sistemáticamente las tecnologías digitales.

La tercer fase tiene que ver con la formulación y verificación de conclusiones. Al organizar los datos, se detectaron aspectos importantes que ayudaron a darle sentido a los resultados y poder exhibir una serie de conclusiones relacionadas con el desarrollo del estudio. Al final, se presenta una sección sobre las conclusiones después de haber analizado los datos.

CAPÍTULO 4

Análisis y discusión de datos

Este capítulo se divide en tres secciones: 1) Sesiones de trabajo.- donde se analizan y resaltan los resultados más importantes obtenidos en el salón; 2) Tareas.- muestra el análisis de las participaciones en Padlet (muro digital), de los videos de YouTube revisados por los estudiantes y de las respuestas a los problemas o ejercicios de las tareas; 3) Discusiones de las sesiones y tareas con el uso de las tecnologías digitales.- en esta sección se analiza cómo usaron las tecnologías digitales los estudiantes, en las sesiones de trabajo y las tareas y se discuten las ventajas y dificultades que se presentaron al implementarlas.

4.1 Sesiones de trabajo

En cada una de las sesiones de trabajo, que se muestran a continuación, se inicia describiendo el problema o actividad que se llevó a cabo en clase. Enseguida se muestran los acercamientos más relevantes, donde se analizan las estrategias, exploraciones, dificultades y soluciones del problema planteado. Cabe mencionar que en la cuarta y quinta sesión, los estudiantes utilizaron procedimientos algebraicos que fueron revisados a través de algunos videos de YouTube que se compartieron en los muros digitales (Padlet), estos se analizan en la sección 4.2.

4.1.1 Primera sesión

En la primera sesión se buscó resolver el siguiente problema: *El perímetro de una sala rectangular es de 56 m. Si el largo se diminuye en 2 m y el ancho se aumenta en 2 m, la sala se torna cuadrada. a) Construir en GeoGebra la familia de rectángulos que cumplan con la condición inicial y b) determinar cuáles son las dimensiones de la sala.*

Se esperaba que con la experiencia que tenían los estudiantes en el uso del SGD, lograran construir una representación o modelo del enunciado del problema (inciso *a*), sin embargo, mostraron dificultades para completar esta tarea. Por ejemplo, Ricardo construyó un rectángulo con las dimensiones que se buscan determinar en el inciso *b* (12 de ancho y 16 de largo), pero no cumple con lo solicitado en el inciso *a*, debido a que los vértices son puntos libres en el plano como se observa en la figura 1. Es decir, como la construcción no es robusta entonces se limita a la representación de un rectángulo, imposibilitando el análisis, la búsqueda de patrones, la formulación de conjeturas, etc.

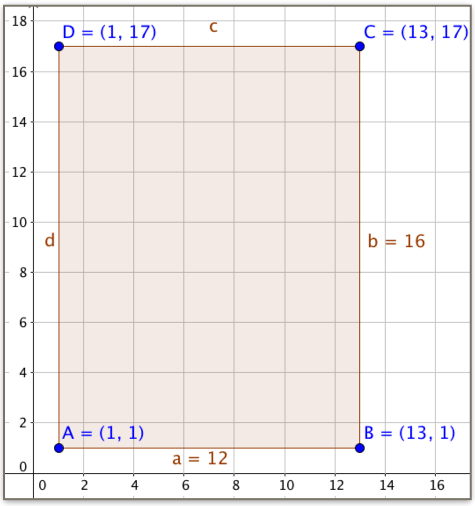


Figura 1. Rectángulo construido a partir de 4 puntos libres en el plano.

Otro caso fue el de doce estudiantes que mostraron el mismo resultado, esto es, construyeron un rectángulo a partir de dos vértices con movimiento controlado (es decir que los puntos B y C se encuentran sobre los ejes como se muestra en la figura 2).

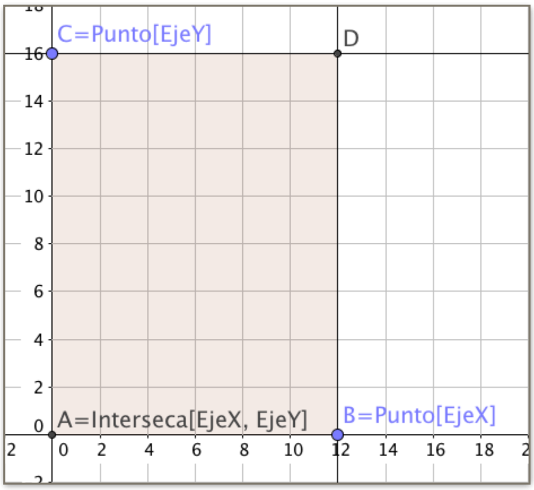


Figura 2. Rectángulo construido a partir de 2 vértices con movimiento controlado (B y C).

Esta construcción dinámica ayudó a que los estudiantes fueran ajustando los valores de los puntos B y C hasta encontrar el rectángulo con las dimensiones de la sala. Aun así, cuatro estudiantes tuvieron dificultades con situar los puntos B y C de tal manera que el rectángulo tuviera 56 unidades de perímetro. En la figura 3 se observa cómo, Tania y Antonio, asociaron el perímetro con la longitud de la base del rectángulo que, como consecuencia, provocó un obstáculo para ubicar el punto C, ocasionando que no pudieran continuar con la actividad. Mientras que Kevin y Janette, se enfocaron en encontrar las medidas de un rectángulo cuya área fuera de 56 unidades cuadradas (Fig. 4). Esto último se generó porque los estudiantes se centraron en obtener el valor de 56 en *polígono1*, que es el nombre predeterminado del área de una figura cuando se usa el comando polígono en GeoGebra.

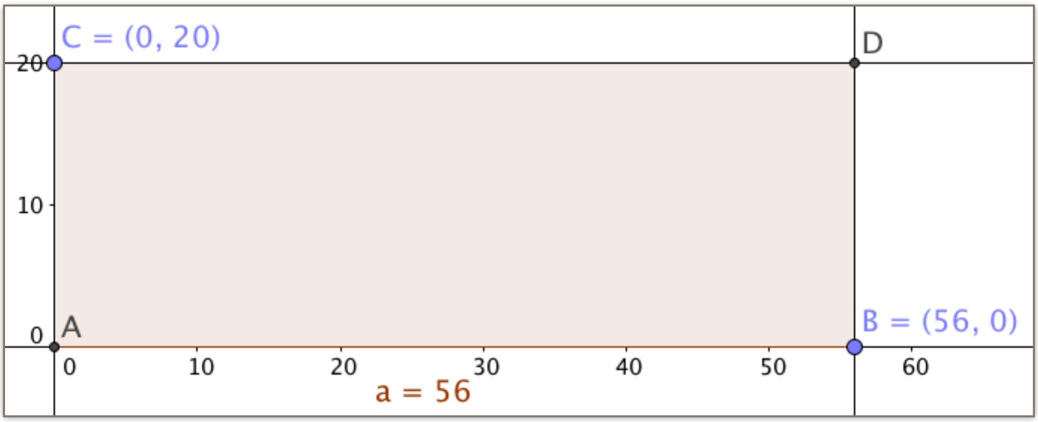


Figura 3. Rectángulo cuya base mide 56 unidades.

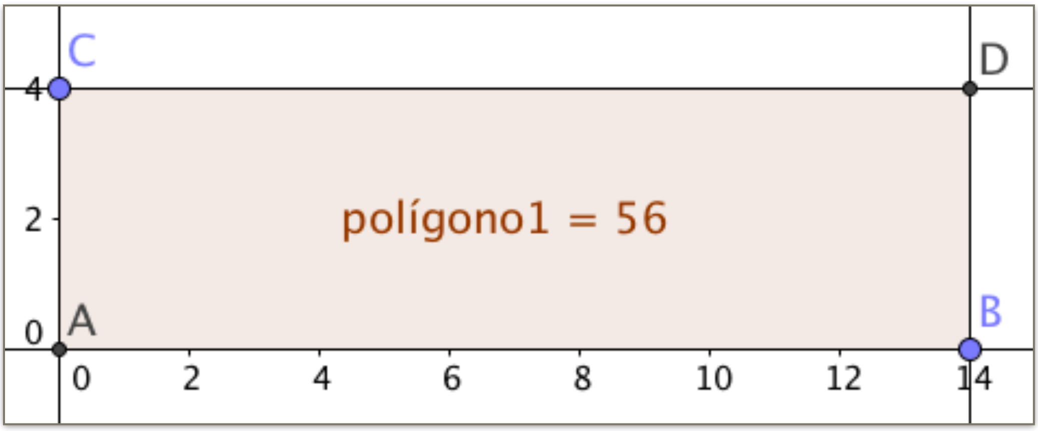
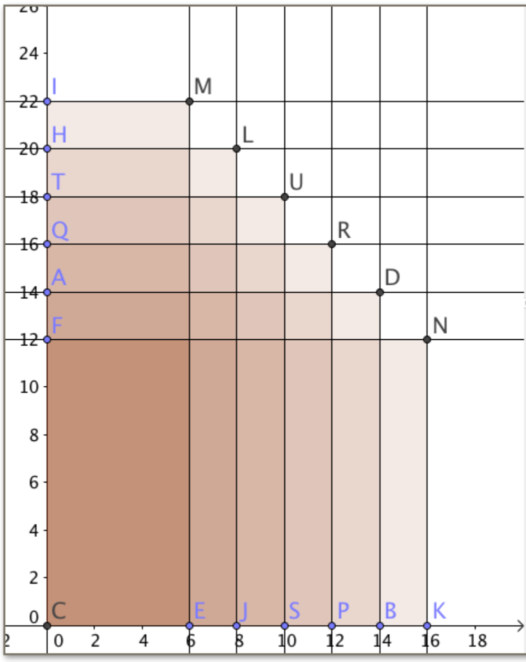


Figura 4. Rectángulo con área (polígono1) igual a 56 unidades cuadradas.

En la figura 5 se pueden observar seis rectángulos diferentes pero con igual perímetro (de 56 unidades) que construyó Ángel, acompañados de una tabla con valores enteros, que representan las bases y alturas de los rectángulos, propuesta por Karen a partir del resultado de Ángel. Este acercamiento contribuyó a que los estudiantes visualizaran el comportamiento de la familia de rectángulos que solicitaba en el inciso *a* del problema, apreciaran que la suma de la base y la altura de cada rectángulo era un valor constante, observaran el momento en que la sala se tornaba cuadrada y determinaran sus dimensiones.



	A	B	C
1	base	altura	
2	1	27	28
3	2	26	28
4	3	25	28
5	4	24	28
6	5	23	28
7	6	22	28
8	7	21	28
9	8	20	28
10	9	19	28
11	10	18	28
12	11	17	28
13	12	16	28
14	13	15	28
15	14	14	28
16	15	13	28
17	16	12	28

Figura 5. Rectángulos construidos por Ángel y tabla propuesta por Karen.

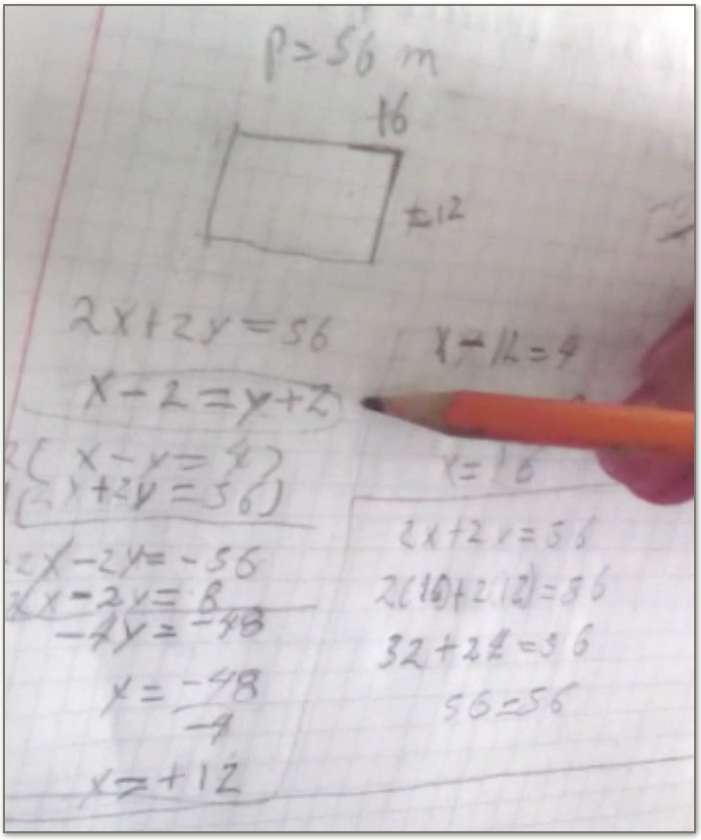


Figura 6. Sistema de ecuaciones lineales planteado por Emiliano para responder el inciso *b*.

El profesor aprovechó este resultado para plantear el siguiente cuestionamiento: ¿cuántos rectángulos se pueden construir con perímetro igual a 56 unidades? Las respuestas se basaron en la tabla que propuso Karen, es decir, el grupo contestó que pueden construirse 27 rectángulos, a excepción de Karen, quien argumentó que pueden construirse infinitos rectángulos debido a que no se consideraron valores con decimales en la tabla. Un estudiante (Emiliano), propuso un sistema de ecuaciones lineales para encontrar las medidas de la sala (Fig. 6). Después de resolver y comprobar el sistema, se contrastó y verificó que sus resultados coincidían con los valores de la tabla propuesta por Karen.

Al cierre de la sesión, el profesor reflexionó con los estudiantes sobre la importancia de crear un modelo o representación del problema para explorar otras propiedades implícitas y extenderlo. Para esto, el profesor mostró una construcción dinámica (Fig. 7) que modelaba lo enunciado en el problema, la cual sirvió para ejemplificar el tipo de construcción que se esperaba por parte de los estudiantes y exhibir las ventajas de ésta, como identificar, formular, representar y explorar otros conceptos matemáticos relacionados con el problema, cuando se plantean preguntas, como por ejemplo: ¿cómo es el lugar geométrico que describe el punto B? (el profesor activa la opción de pintar el rastro del punto B (Fig. 7) para contestar esta pregunta y plantear una nueva pregunta) ¿Cuál es la ecuación que representa al lugar geométrico? ¿En qué intervalo debe estar el punto A para que tenga sentido el problema? ¿Cómo es la gráfica que representa al área de la construcción dinámica? ¿En qué momento el modelo alcanza su área máxima? Estas preguntas no fueron contestadas, solamente expuestas a los estudiantes con el objetivo de que las consideraran en las actividades posteriores.

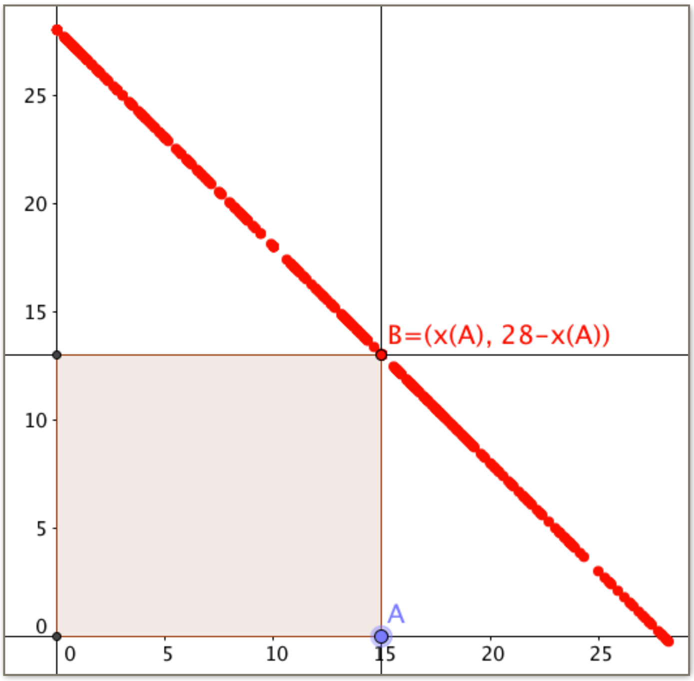


Figura 7. Modelo del problema presentado por el profesor.

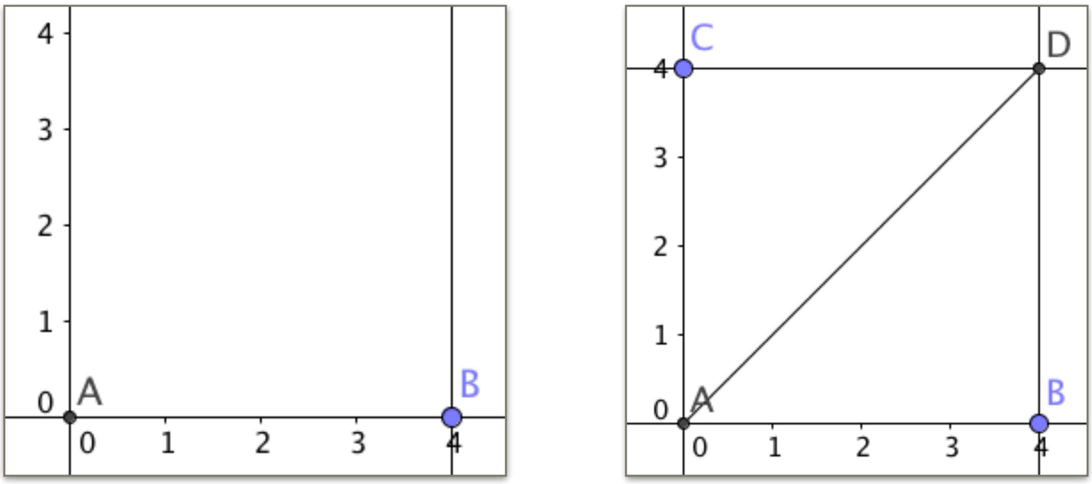
En esta sesión, se evidenció que los estudiantes usaron GeoGebra únicamente para representar la solución del problema. Es decir, las construcciones fueron representaciones gráficas de las dimensiones de la sala (donde se observaron dificultades al asociar el perímetro con las construcciones), desatendiendo lo solicitado en el primer inciso, a excepción de Karen y Ángel que, trabajando en colaboración, lograron observar patrones implícitos en el problema.

Por otra parte, el profesor buscó desarrollar los hábitos de razonamiento matemático en los estudiantes. Esto es, consideró un problema donde podía llegar a la solución, no solo con las construcciones sino también algebraicamente como lo mostró Emiliano, dio tiempo para analizar el problema y explorarlo mediante el uso de modelos para luego proceder a un enfoque más formal, se abstuvo de resolver el problema (aunque hubiera frustración en los estudiantes), motivó a plantear preguntas y fomentó la comunicación de resultados.

4.1.2 Segunda sesión

En esta sesión se replanteó el problema inicial, con la finalidad de que los estudiantes tuvieran la oportunidad de construir un modelo dinámico en el que su movimiento dependiera de un solo punto. Para alcanzar este objetivo, se propuso el siguiente enfoque: *Construir un modelo dinámico, en GeoGebra, que represente a la familia de cuadrados con un vértice en el origen y otro sobre el eje x*. Los diferentes acercamientos y las formas de resolver el problema que mostraron los estudiantes, exhibieron ciertas dificultades y se identificaron los recursos, estrategias o heurísticas y conceptos utilizados en la construcción.

Las dificultades que experimentaron los estudiantes, se relacionaron con la falta de conocimiento sobre cómo utilizar las herramientas que ofrece GeoGebra. Esto se observó con Cesar y Alan, que solo lograron trazar una perpendicular al eje x que pasa por el punto B (Fig. 8a), y con Valeria, que utilizó la construcción de la primera sesión (Fig. 2) y solo trazó la diagonal (segmento AD, ver figura 8b). En el caso de Janette y Kevin, a pesar de que se basaron en la misma construcción que Valeria, definieron el punto D en función del punto B correctamente (Fig. 9), sin embargo, utilizaron al punto C como vértice de la figura mostrando dificultades para concluir la construcción.



a b

Figura 8. Dificultades en la construcción de un cuadrado.

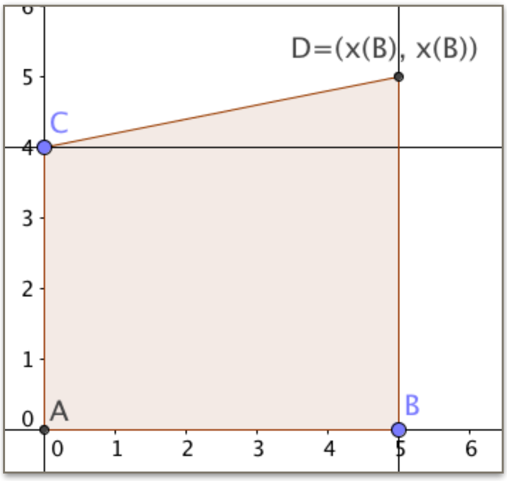


Figura 9. Construcción de Janette y Kevin.

Para atender las dificultades que mostraron los estudiantes, el profesor hizo algunas sugerencias de cómo seleccionar las herramientas apropiadas de GeoGebra para utilizarlas en la construcción del cuadrado. Se les recomendó que revisaran las herramientas del SGD e identificaran aquellas para construir ángulos rectos y segmentos de la misma longitud, y que tomaran en cuenta la barra de entrada y el sistema de coordenadas en el que se encontraban trabajando.

Después de la intervención del profesor, los estudiantes lograron resolver el problema utilizando diferentes herramientas, recursos y estrategias. Por ejemplo, en la figura 10 se observa que Israel resolvió el problema con la herramienta *polígono regular* (herramienta que sirve para construir un polígono regular dados dos vértices consecutivos y el número de lados de la figura), sin embargo, utilizó este resultado para buscar una forma diferente de construir el modelo dinámico. La estrategia de Israel se basó en observar el comportamiento del punto C a través de la opción *rastro*, esto le permitió descubrir que la recta que pasaba por los puntos A y C eran donde se ubicaban los vértices opuestos al vértice que se encontraba en el origen, entonces, a partir del punto móvil E y la recta encontrada, consiguió concluir el modelo dinámico.

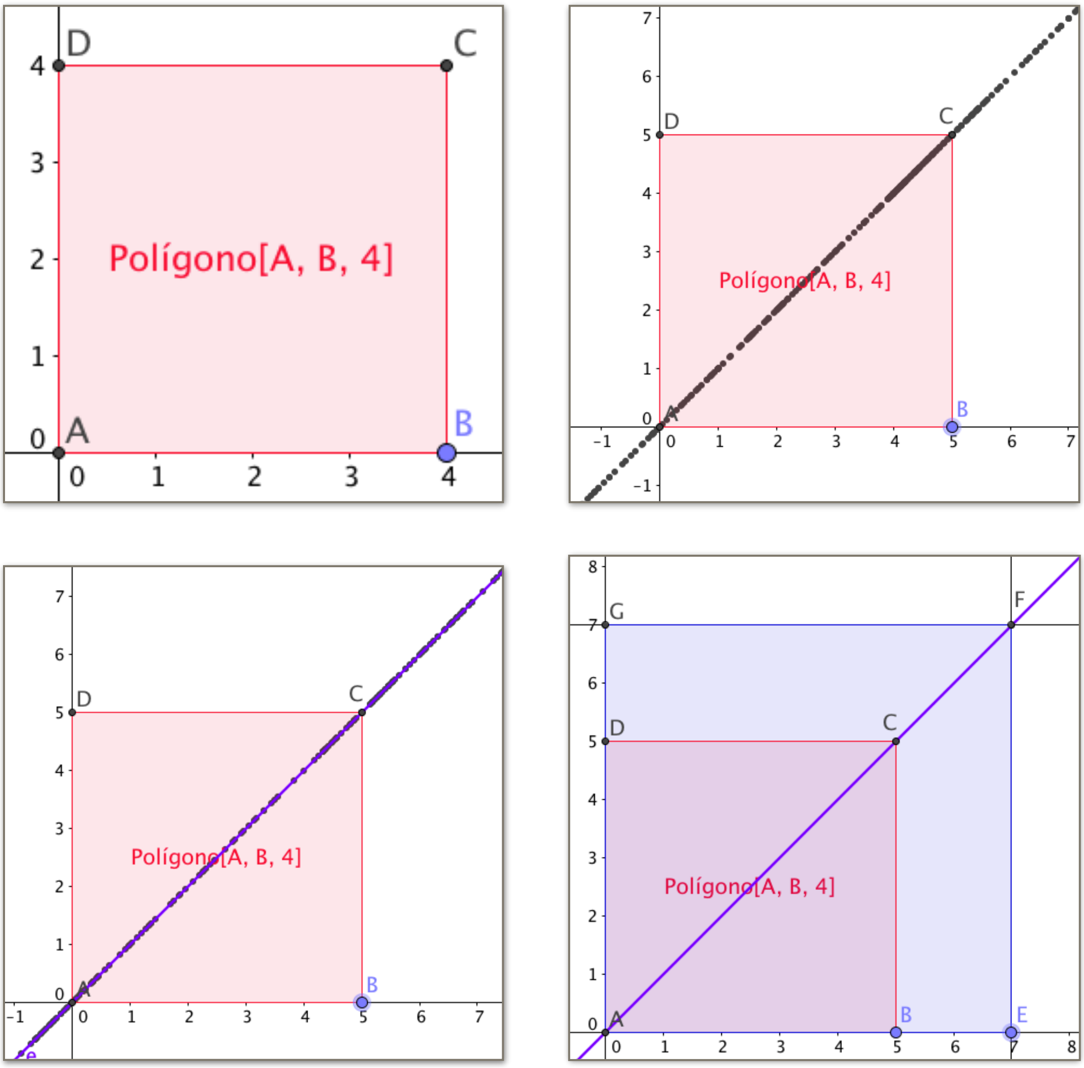


Figura 10. Construcción de Israel a partir del uso de la herramienta polígono regular.

Cabe mencionar que Israel identificó que la recta encontrada se podía representar como $y = x$, por lo tanto, construyó nuevamente el modelo que respondía al problema sin usar la herramienta polígono regular (Fig. 11).

Miguel, para construir el cuadrado, utilizó la herramienta *circunferencia (centro, punto)* que le ayudó a trasladar la medida del segmento AB al eje de las ordenadas (Fig. 12), obteniendo así, un modelo dinámico solicitado en el problema. Mientras que Monserrat y Ángel definieron al vértice C en función del punto B (Fig. 13).

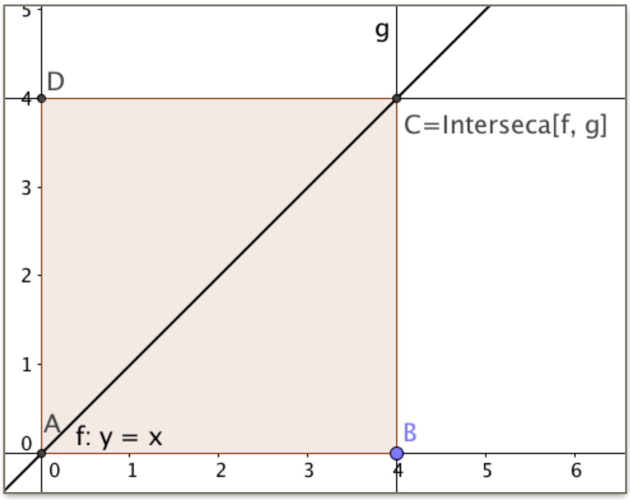


Figura 11. Construcción de Israel a partir de la recta $y = x$.

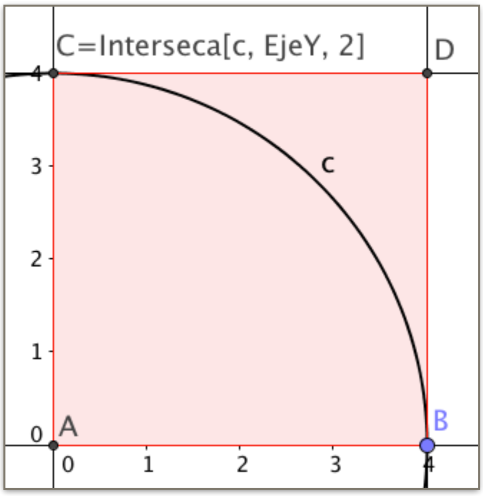


Figura 12. Construcción de Miguel a partir de la herramienta circunferencia (centro, punto).

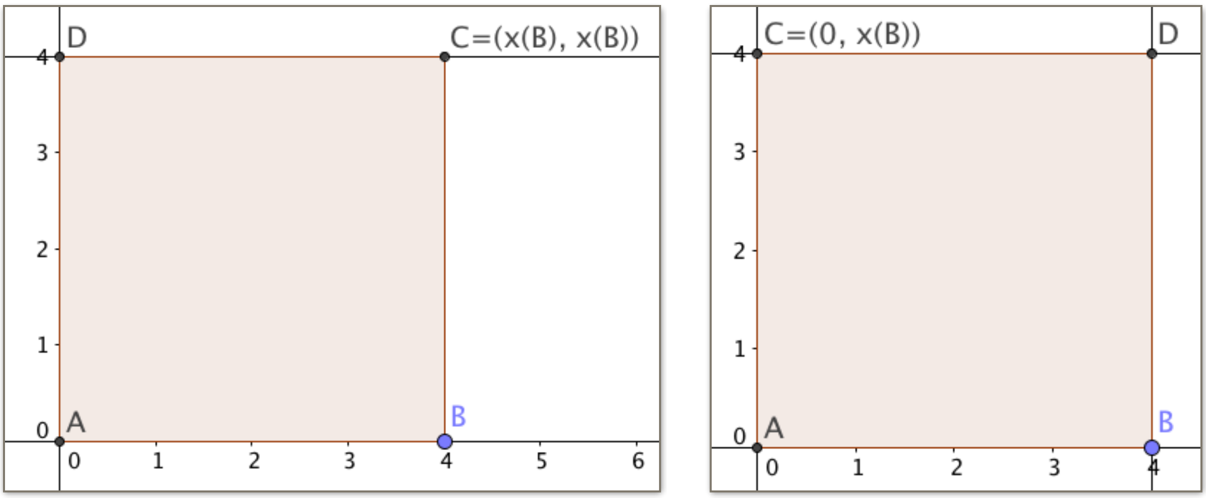


Figura 13. Construcción del cuadrado a partir de definir al vértice C en función del punto B.

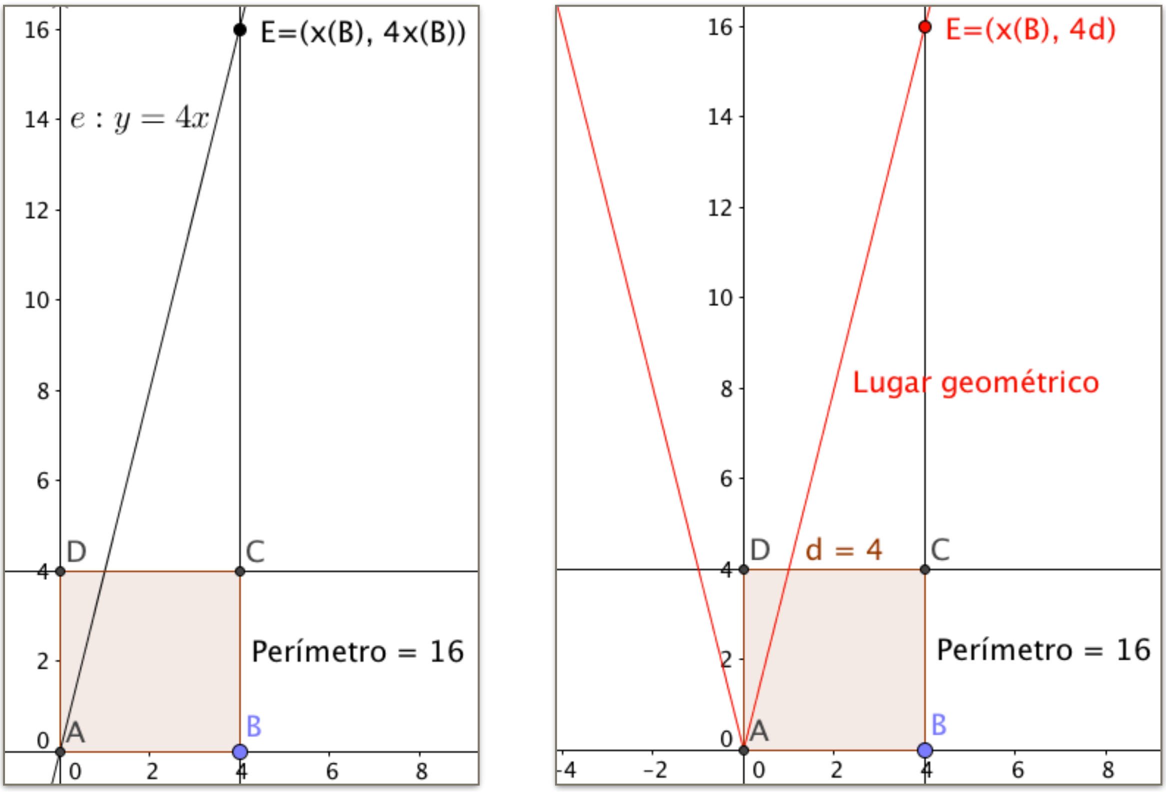
En esta sesión, se observó como la construcción del modelo dinámico del problema permitió que los estudiantes construyeran significados de objetos matemáticos. Es decir, representar el cuadrado en GeoGebra, implicó analizar las propiedades geométricas para seleccionar adecuadamente los objetos geométricos necesarios para su construcción y, a pesar de modificar las dimensiones de sus lados, mantener dichas propiedades. Las diferentes estrategias que usaron los estudiantes, en la construcción del modelo dinámico, evidenciaron cómo emplearon los comandos de GeoGebra o las propiedades de los objetos matemáticos que éste ofrece. Por ejemplo: usar circunferencia para trasladar la medida de un segmento, trazar perpendiculares para construir ángulos rectos y activar rastro para identificar el lugar geométrico. Este último es considerado una heurística, porque puede usarse de forma general para encontrar nuevos elementos que ayuden a resolver un problema con el uso del SGD.

La participación del profesor fue importante para que los estudiantes alcanzaran la solución del problema. Ayudó a que identificaran objetos matemáticos pertinentes, que fueron necesarios para implementar una estrategia, y tuvieran la oportunidad de compartir diferentes enfoques en la resolución del problema.

4.1.3 Tercera sesión

El objetivo de esta sesión fue que los estudiantes exploraran y analizaran atributos matemáticos derivados del modelo dinámico construido en la sesión anterior. En este sentido, se les solicitó lo siguiente: *Representar gráficamente el comportamiento del perímetro y del área cuando la longitud de la base del cuadrado (segmento AB) cambia*. Los primeros acercamientos mostrados fueron relacionados con graficar el perímetro.

Los resultados que se muestran en la figura 14, exhiben cómo los estudiantes de manera implícita definieron una relación o función que depende del punto B que, según como se haya definido, sirvió para encontrar la gráfica correspondiente al perímetro del cuadrado. Además, también se observa que las gráficas son distintas, lo que permitió generar una discusión alrededor de las siguientes preguntas: ¿por qué se obtuvieron resultados diferentes? y ¿cuál de estas gráficas tiene sentido según el contexto del problema?.



a

b

Figura 14. Gráficas del perímetro.

Ángel, para graficar el perímetro asociado al modelo dinámico, definió un punto como E = (x(B), 4x(B)) (Fig. 14a) y trazó la recta *e* que pasa por los puntos A y E, pero no argumentó por qué esta recta representa a la gráfica, lo que provocó un obstáculo al momento de graficar el área. Con respecto a la recta *e*, Israel argumentó que se trata de la recta $y = 4x$ (Fig. 14a) debido a que así se definió la coordenada de las ordenadas. Karen y Monserrat, en su construcción (Fig. 14b), definieron el punto E como E = (x(B), 4d) y encontraron el lugar geométrico que describe dicho punto (d es la longitud de un lado, por lo tanto depende del punto B). En la discusión grupal, los estudiantes concluyeron que la diferencia en las gráficas fue por cómo se definió la ordenada en cada punto E y, que en ambos casos, solo era necesario analizar el primer cuadrante.

Una vez que los estudiantes habían graficado el perímetro asociado al modelo dinámico, obtuvieron la gráfica del área siguiendo las mismas estrategias, sin embargo, mostraron dificultades al momento de graficarla. Por ejemplo, en la figura 15 se puede observar como los estudiantes para poder graficar el área asociada a la construcción dinámica, definen la coordenada de las ordenadas, del punto F, en función del punto B como x(B)*x(B) o c*x(B) y, de la misma manera que Ángel trazó una recta para graficar el perímetro, trazaron una recta (que pasaba por los puntos A y F) para graficar el área, a pesar de no tener sentido. Según Matz (1980) estas dificultades pueden presentarse cuando el estudiante busca adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación. Este es un obstáculo cognitivo que se generó por no cuestionar la acción de Ángel cuando graficó el perímetro, ya que un obstáculo cognitivo no es por falta de conocimiento más bien es conocimiento adquirido que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos, por esta razón, cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas (Socas, 1997).

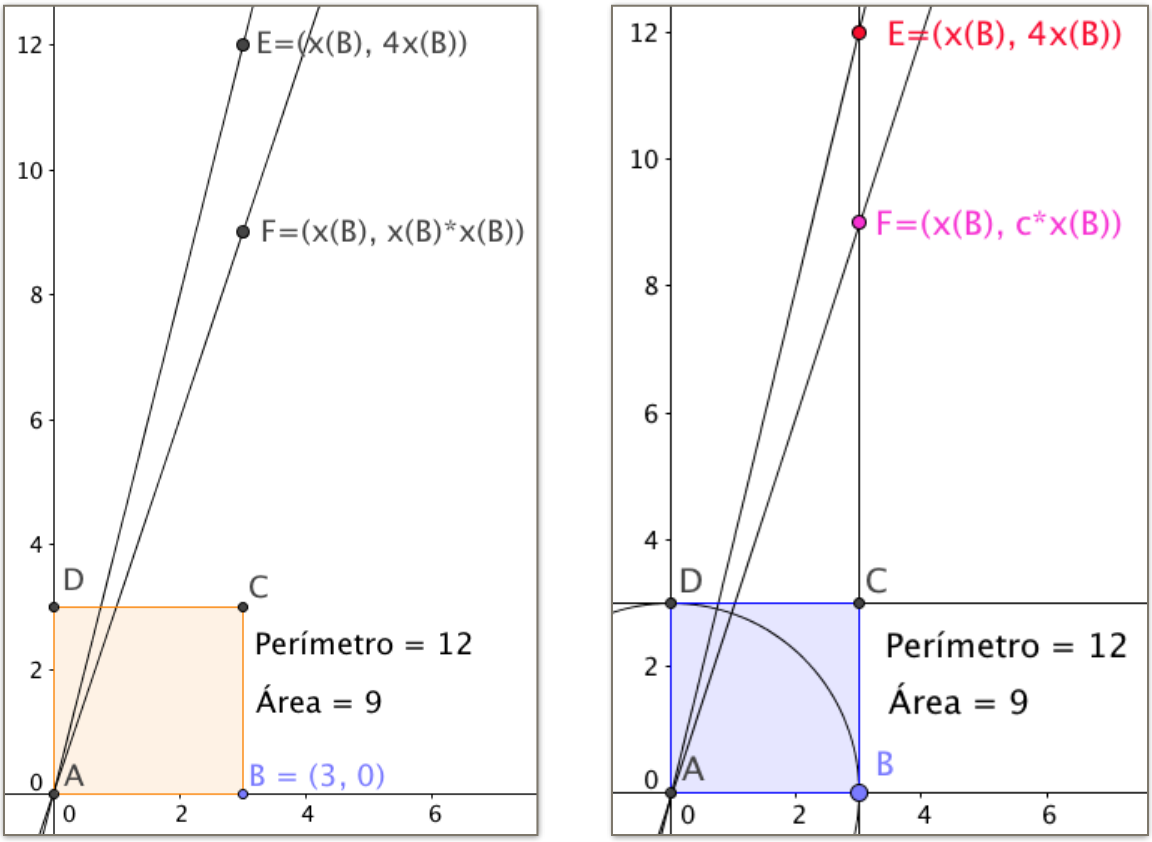
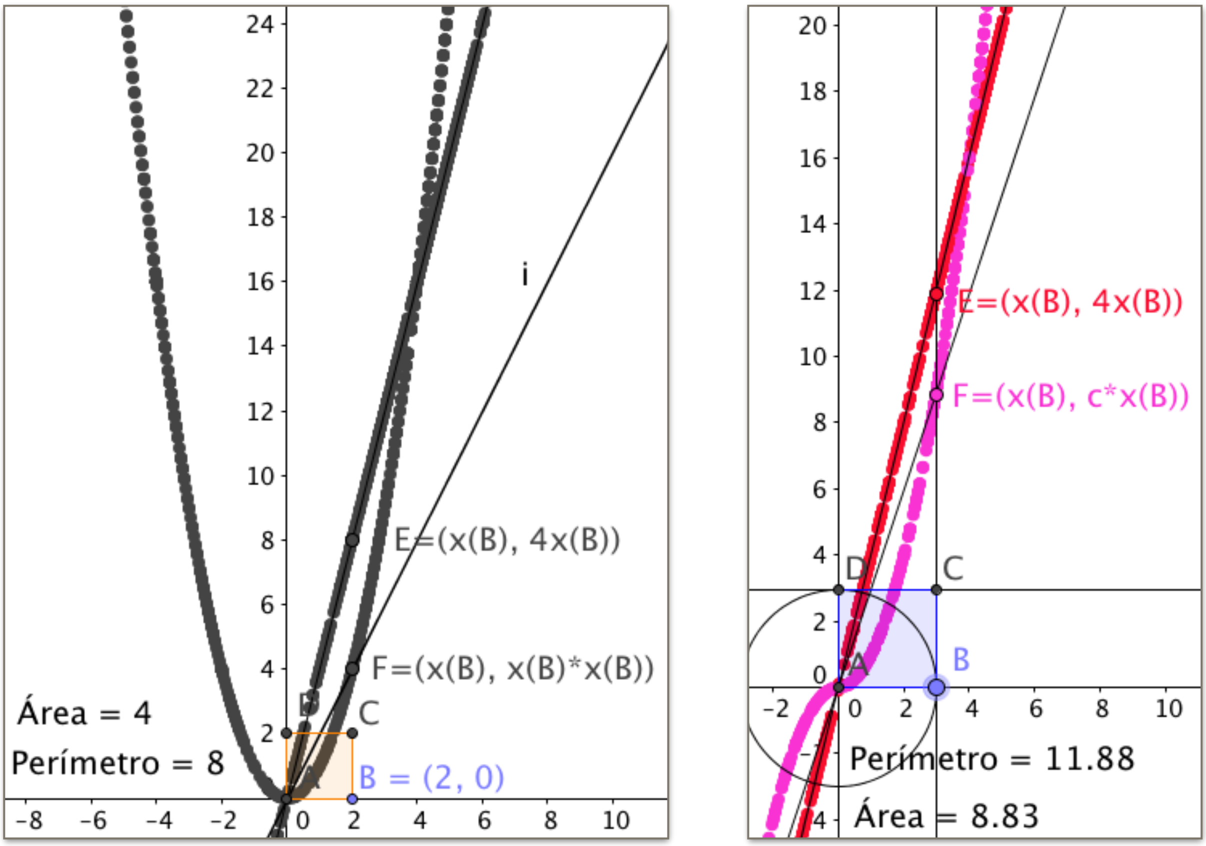


Figura 15. Gráficas del área.

No obstante, el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje y en este aspecto, Socas (2011) recomienda presentarles a los estudiantes situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas. De acuerdo a esto, GeoGebra permitió que los estudiantes contrastaran la recta obtenida con el lugar geométrico que describía el punto F (como se observa en la figura 16), el cual revelaba la gráfica correspondiente al área asociada a la construcción. Es decir, con ayuda de la herramienta "lugar geométrico", los estudiantes compararon su resultado y detectaron el error. Además, ayudó a plantear nuevas interrogantes como ¿por qué las gráficas que representan el área del modelo dinámico son distintas?, ¿cuál tiene sentido según el contexto del problema?, ¿cómo se grafica? y ¿qué significa la intersección entre ambas gráficas (la del perímetro y la del área)?, consiguiendo que los estudiantes se involucraran en una actividad de exploración, análisis y discusión.



a b

Figura 16. Rastro del perímetro y del área.

Después del tiempo asignado por el profesor para que los estudiantes exploraran y analizarán los lugares geométricos encontrados, se comenzó una discusión en torno a qué conceptos matemáticos y variables son pertinentes para justificar o validar la solución del problema. El grupo consideró que sólo era necesario analizar el primer cuadrante, pues era donde coincidían ambas gráficas (Fig. 16), pero Israel comentó que para obtener la gráfica del área debía considerarse el lugar geométrico descrito por el punto F = (x(B), x(B)*x(B)) (Fig. 16a), ya que la coordenada de las ordenadas estaba en función del punto B y definía una parábola, mientras que el lugar geométrico descrito por F = (x(B), c*x(B)) (Fig. 16b) no podía graficarse porque dependía de dos variables. Ángel mostró las gráficas de la recta y la parábola (Fig. 17) y argumentó que visualmente se podía observar que la intersección entre las gráficas determinaba el momento en que los valores asignados para el área y el perímetro del modelo dinámico eran iguales.

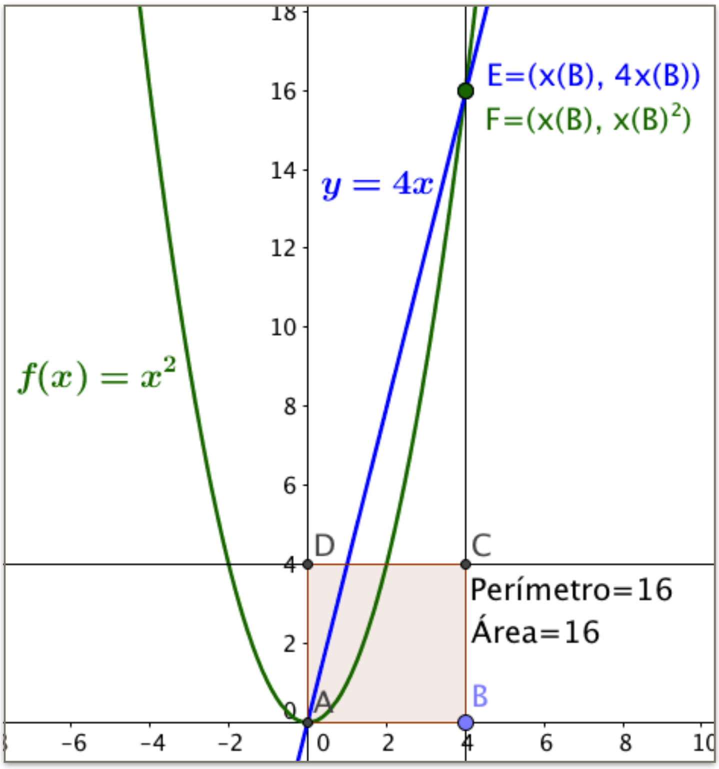


Figura 17. Gráficas del perímetro y del área mostradas por Ángel.

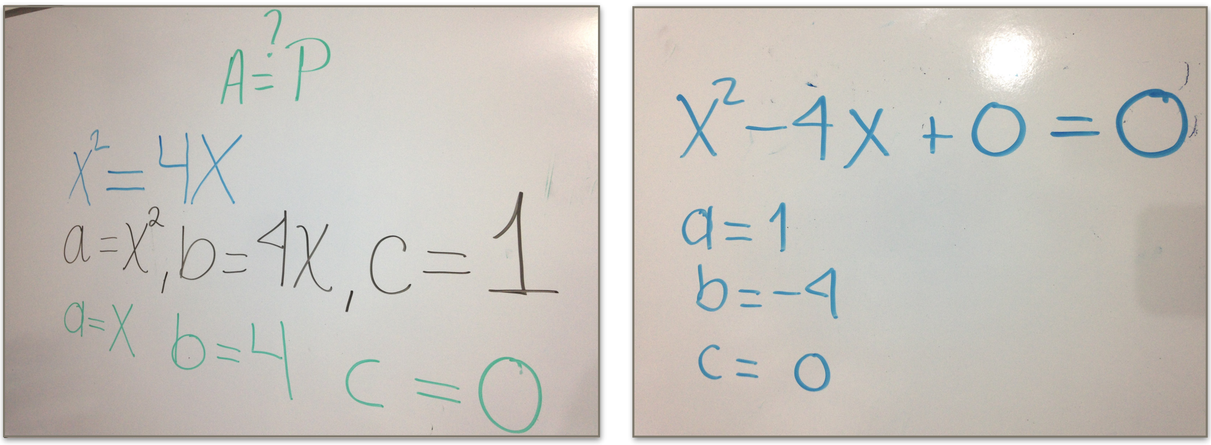
En resumen, se observó que el uso de GeoGebra fue fundamental para explorar y analizar atributos matemáticos, como el área y el perímetro en este caso, mediante la manipulación de un punto móvil (punto B) dentro la representación del problema. También se mostró como el SGD ayudó a superar las dificultades o recursos débiles (según Schoenfeld) al utilizar heurísticas como: rastro (lugar geométrico) y definición de un punto con movimiento controlado.

4.1.4 Cuarta sesión

La finalidad de la cuarta sesión fue que los estudiantes exhibieran los recursos obtenidos en las tareas que realizaron fuera de clases. Para cumplir este objetivo se aprovechó el resultado de la sesión anterior (Fig. 17) y se les solicitó lo siguiente: *Demostrar algebraicamente que* *los valores asignados al área y el perímetro del cuadrado coinciden cuando la longitud de uno de sus lados mide 4 unidades*.

Resolver este problema llevó a que los estudiantes desarrollaran una serie de actividades matemáticas relacionadas con la ecuación cuadrática como, por ejemplo: a) plantear una ecuación que involucrara igualar las expresiones del área y del perímetro, b) reconocer la ecuación como cuadrática, c) escribir la ecuación en su forma general, d) identificar los coeficientes, e) utilizar algún método para su resolución y f) verificar la solución obtenida. Además, permitió que se observaran los conceptos matemáticos involucrados y cómo fueron utilizados, así como constatar si el uso coordinado de YouTube y Padlet ayudó a los estudiantes a aprender recursos o estrategias útiles para resolver el problema.

Por ejemplo, en la figura 18 se muestran los resultados de las participaciones de Miguel, Yenyfer, Karen y Ángel, quienes se centraron en plantear la ecuación cuadrática que involucra igualar las expresiones del área y del perímetro e identificar los coeficientes. A pesar de que Miguel planteó la ecuación cuadrática adecuadamente, Yenyfer y Karen mostraron dificultades para identificar los coeficientes (Fig. 18a). En cambio, Ángel logró identificarlos escribiendo la ecuación en su forma general (Fig. 18b).



a b

Figura 18. Participación de Miguel, Yenyfer, Karen y Ángel.

Una vez que se tuvieron los coeficientes, Ricardo aplicó la fórmula general y encontró las posibles soluciones o los valores de x (Fig. 19). Sin embargo, Michel comparó las soluciones con la gráfica que mostró Ángel en la sesión anterior (Fig. 17) y observó que la solución x_2 =

-4 no coincidía. En consecuencia, Ángel verificó las soluciones sustituyéndolas en la ecuación cuadrática planteada por Miguel y encontró que x_2 no era solución (Fig. 20), es decir, dio un argumento formal de lo que observó Michel y suficiente para comprobar si el resultado encontrado por Ricardo era correcto. Ricardo corrigió el desarrollo y llegó a la solución del problema (Fig. 21).

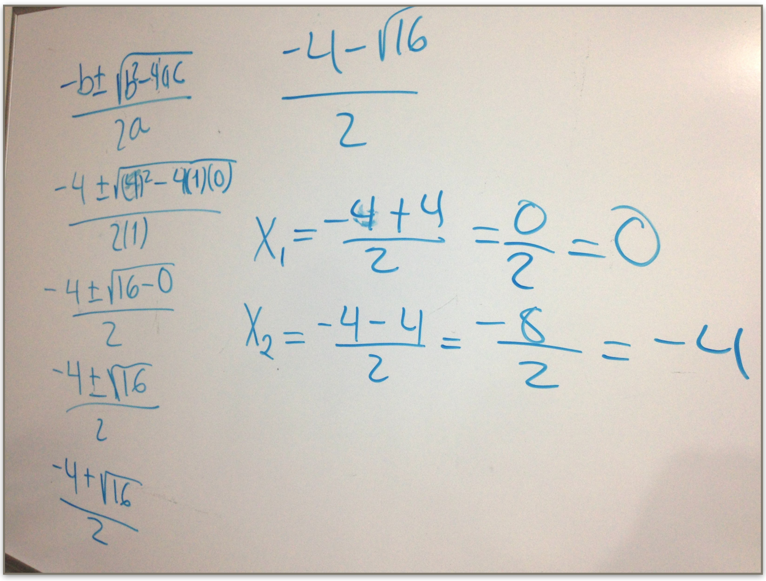
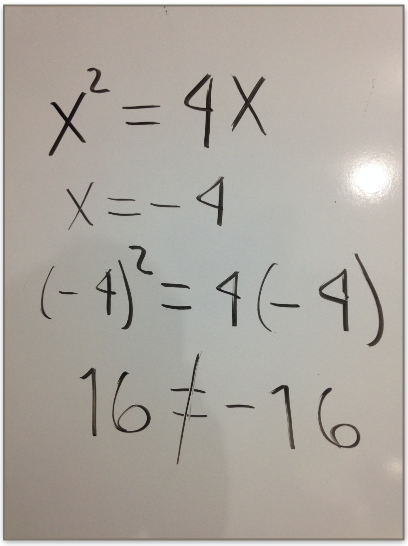


Figura 19. Fórmula general aplicada por Ricardo.



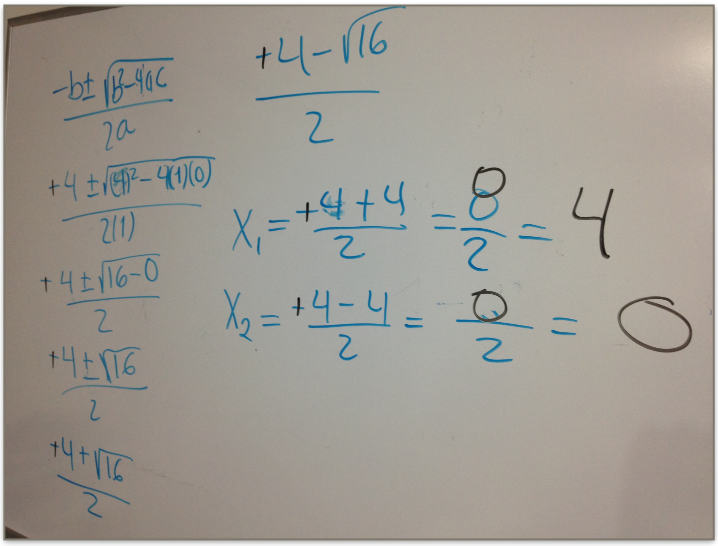


Figura 20. Verificación de Ángel.

Figura 21. Corrección del procedimiento de Ricardo.

También, Ángel presentó otro procedimiento para resolver la ecuación (Fig. 22) y validar una vez más las soluciones. Aplicó el método de factorización, en particular el factor común, mostrando un camino más corto para llegar a la solución sin necesidad de hacer operaciones aritméticas. Además, escribió la ecuación de la forma *(x-a)(x-b)* = *0* para argumentar el por qué *x* = *0* se ponía de manera directa.

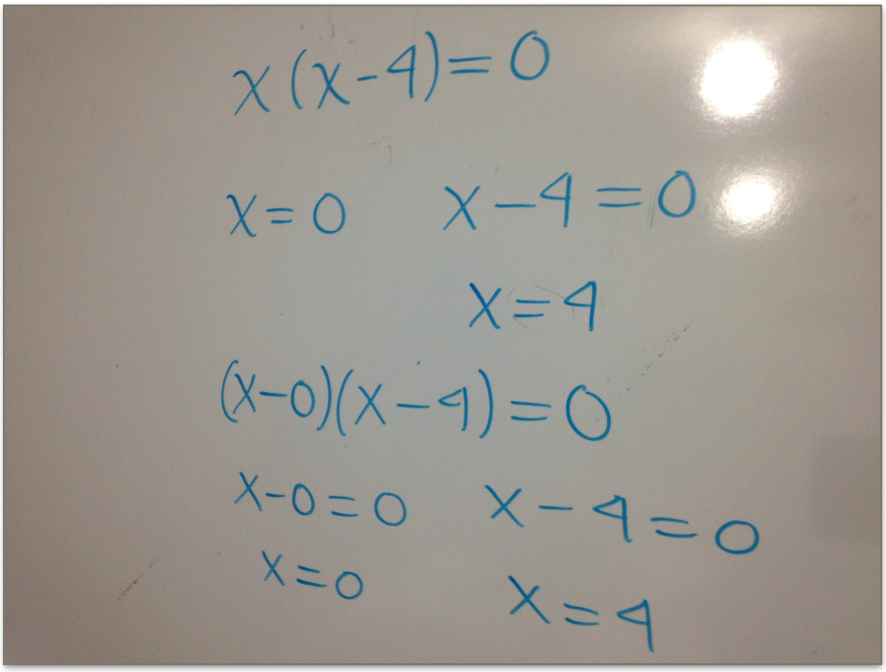


Figura 22. Factorización de la ecuación cuadrática desarrollada por Ángel.

En relación a YouTube y Padlet, se observó que los procedimientos algebraicos utilizados por Ricardo y Ángel, eran los mismos que se desarrollaban en los contenidos de los videos de YouTube compartidos en el Padlet (muro digital) asociado a la Tarea 1[1] (Fig. 23). Estos videos que fueron seleccionados por los estudiantes, implicó una actividad de búsqueda y discriminación de material audiovisual de contenido educativo que explicara de manera clara, concisa y concreta, procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones cuadráticas, que fueron recursos necesarios para resolver la Tarea 1.

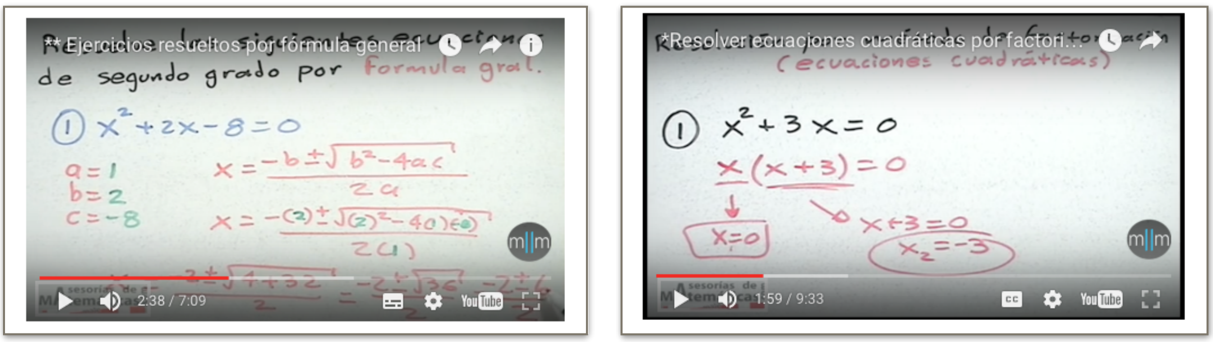


Figura 23. Videos compartidos en Padlet que muestran como resolver una ecuación cuadrática por fórmula general y factorización.

[1] La Tarea 1 se describe y analiza en la sección 4.2.

A lo largo de la sesión los estudiantes exhibieron recursos matemáticos obtenidos mediante el uso de YouTube y Padlet. Por ejemplo, YouTube permitió que replicaran procedimientos rutinarios, como el uso de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas y el método de factorización. Asimismo, accedieron a conceptos matemáticos como: forma general, coeficientes, raíces y comprobación de una ecuación cuadrática. Por otro lado, la plataforma Padlet fue la que sirvió para que los estudiantes compartieran y accedieran a información y videos recopilados por ellos mismos.

4.1.5 Quinta sesión

El objetivo de la quinta sesión fue verificar si los estudiantes se habían apropiado de los conceptos matemáticos y estrategias utilizadas hasta el momento. Para esto, el profesor propuso la siguiente actividad: *a) construir un modelo dinámico de un rectángulo tal que la altura mida el doble de la base; b) graficar la relación entre el perímetro y la base; c) graficar la relación entre el área y la base; d) observar y analizar las gráficas; e) sustentar el análisis con argumentos algebraicos*. A continuación se presenta la evidencia de como los estudiantes lograron apropiarse de los conceptos y estrategias aplicadas en las sesiones anteriores.

Para construir el modelo dinámico, los estudiantes utilizaron las estrategias exhibidas en la construcción del cuadrado. Comenzaron situando el punto A en el origen y el punto B sobre el eje x (punto con movimiento controlado), a partir de esto se presentaron tres resultados diferentes: a) graficaron la ecuación $y = 2x$ obteniendo la recta que contiene a la diagonal del rectángulo, concluyendo la construcción con el trazo de perpendiculares (Fig. 24a). Esta construcción se basó en el resultado que presentó Israel cuando construyó el cuadrado (Fig. 11); b) trazaron circunferencias para trasladar dos veces la medida del segmento AB al eje y (Fig. 24b), asegurando que la condición del primer inciso de la actividad se cumpla. En este resultado utilizaron las mismas estrategias que Miguel utilizó para construir el cuadrado (Fig. 12), es decir, las circunferencias sirvieron para trasladar la medida de la base (segmento AB); c) definieron el vértice C como (x(B), 2*x(B)) donde B es el punto móvil sobre el eje x y trazaron las respectivas perpendiculares para construir el rectángulo ABCD (Fig. 24c). Definir un vértice a partir del punto móvil fue la estrategia utilizada por Monserrat y Ángel cuando construyeron el cuadrado (Fig. 13).

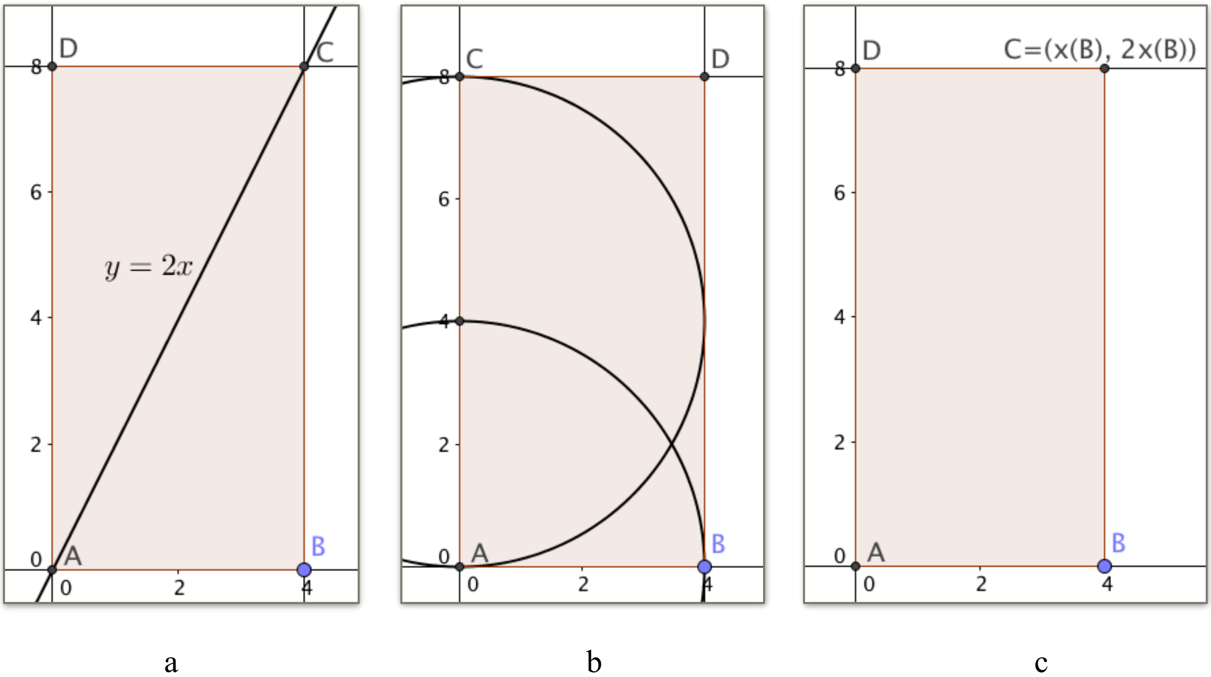


Figura 24. Construcciones dinámicas de los rectángulos con altura igual al doble de su base.

Con respecto al inciso *b* de la actividad, los estudiantes obtuvieron la gráfica a partir de definir un punto E cuya ordenada era el valor del perímetro en función de la abscisa del punto B, observaron el lugar geométrico que describía dicho punto y finalmente identificaron la ecuación de la gráfica (Fig. 25). Este procedimiento mostrado por los estudiantes para alcanzar un fin determinado (la gráfica), implicó ordenar los resultados a los que habían llegado Ángel e Israel cuando graficaron el perímetro de la construcción dinámica del cuadrado (Fig. 17).

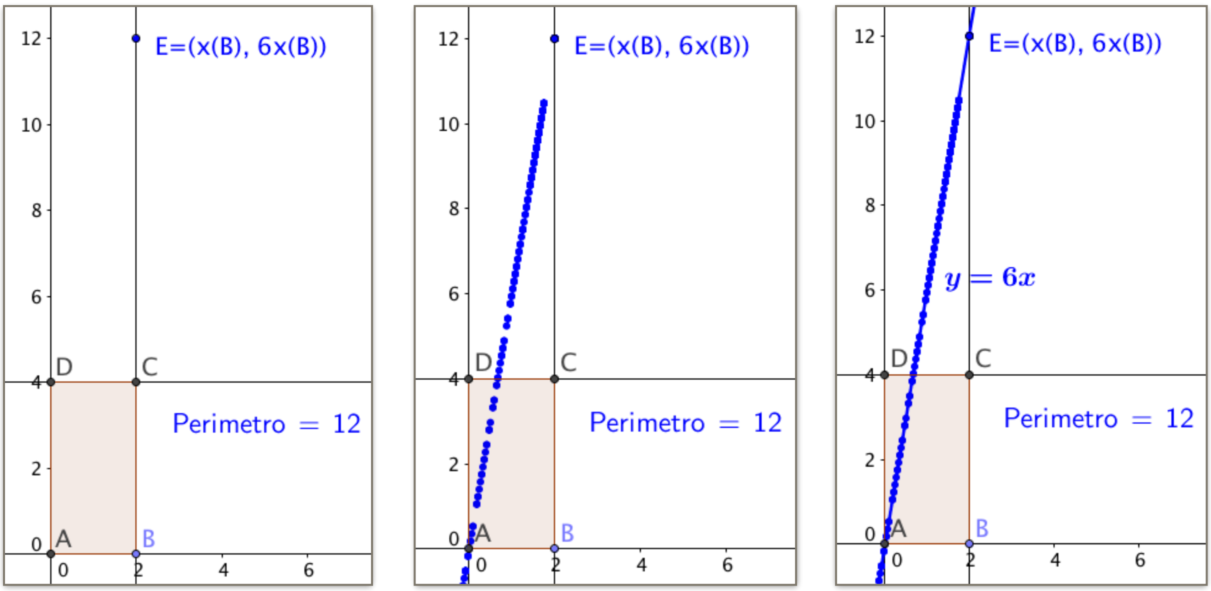


Figura 25. Procedimiento para obtener la gráfica del perímetro asociado al modelo dinámico.

En el inciso *c* los estudiantes siguieron la misma estrategia que en el inciso anterior. Al igual que en el inciso *b*, definieron un punto F cuya ordenada era el valor del área del modelo dinámico que dependía de la abscisa del punto B, observaron el lugar geométrico que describía dicho punto e identificaron la ecuación de la gráfica (Fig. 26).

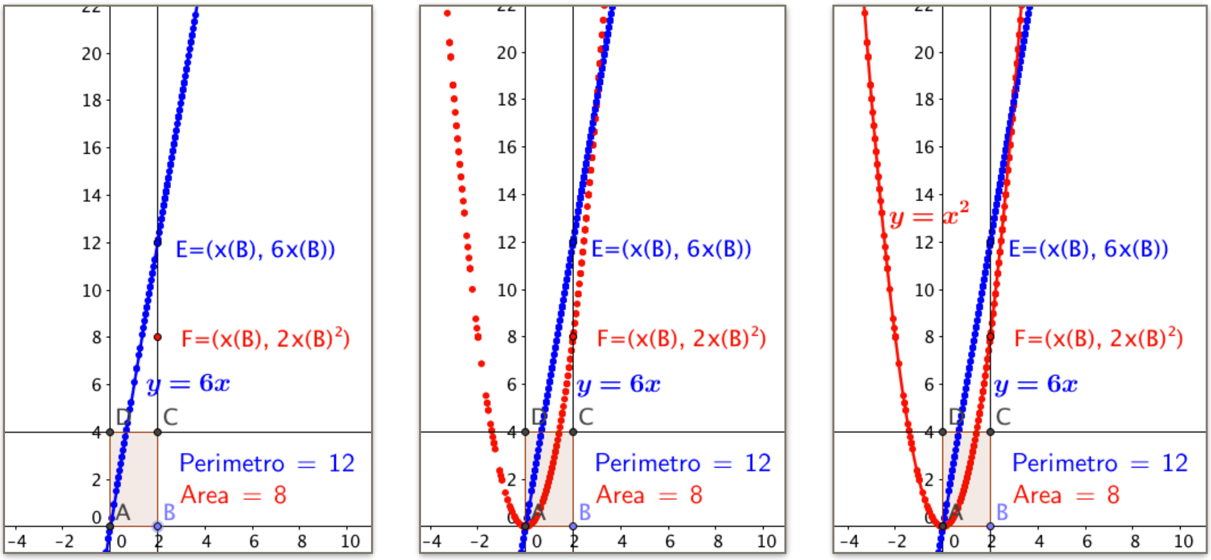


Figura 26. Procedimiento para obtener la gráfica del área asociada al modelo dinámico.

Los estudiantes analizaron las gráficas, como se solicitaba el inciso *d*, de la misma manera que se hizo para el modelo dinámico del cuadrado (Fig. 17). Esto es, localizaron la intersección entre ambas gráficas y le asignaron el punto G (Fig. 27) que corresponde al punto con coordenadas donde el valor del área y el perímetro de la construcción coincidieron.

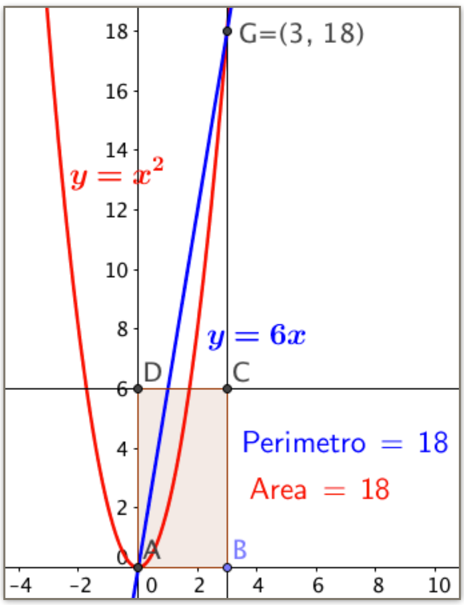
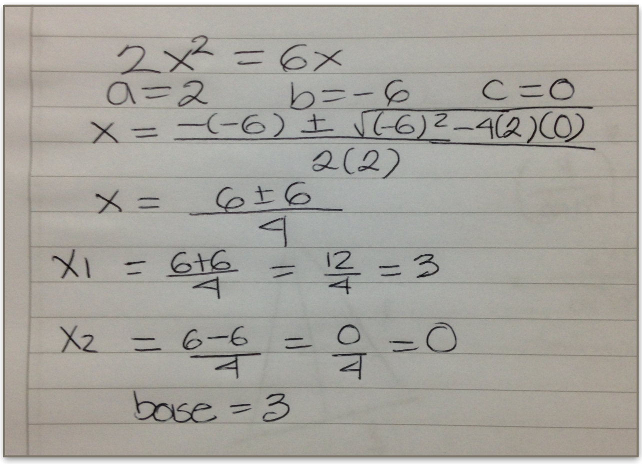


Figura 27. Visualización de la intersección de ambas gráficas.

De acuerdo con los datos visualizados en la gráfica, los estudiantes plantearon una ecuación cuadrática (Fig. 28) con la finalidad de comprobar y sustentar los resultados obtenidos en el SGD. Los procedimientos algebraicos utilizados para resolver dicha ecuación fueron: aplicación de la fórmula general y factorización, que son los mismos que se utilizaron en la cuarta sesión (Figs. 21 y 22). En ambos casos se llegó a la solución esperada, es decir, se obtuvo que la medida de la base del rectángulo tenía que ser 3 unidades y por lo tanto la altura 6 unidades. De esta manera se le dio respuesta al inciso *e* de la actividad.



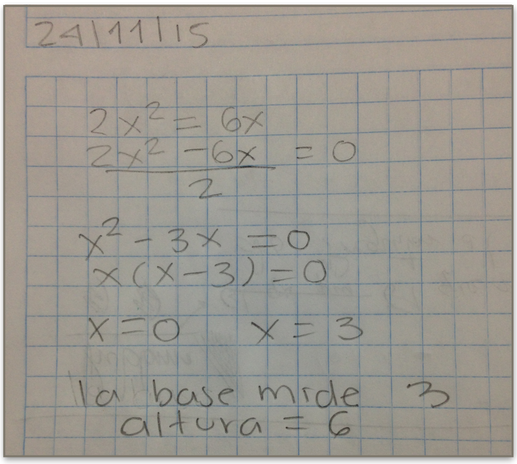


Figura 28. Soluciones de la ecuación cuadrática $2x^2 = 6x$ por medio de fórmula general y factorización.

En esta sesión los estudiantes integraron en forma sistemática conceptos y estrategias que utilizaron a lo largo de las sesiones anteriores, apoyados por GeoGebra. Por ejemplo, se observa en la figura 24 el manejo del movimiento controlado para construir el rectángulo, es decir, mostraron una heurística particular del SGD. Relacionaron las propiedades del rectángulo para construirlo ya sea por medio de rectas, circunferencias o coordenadas, mostrando dominio en recursos de geometría euclidiana y geometría analítica. La herramienta de lugar geométrico demostró su efectividad al permitir que los estudiantes visualizaran el comportamiento de los puntos definidos para representar el perímetro y el área, y llegar así, a las gráficas solicitadas. Por último, argumentaron algebraicamente los resultados obtenidos en el SGD que, de manera implícita, fueron recursos obtenidos en los videos de YouTube compartidos en el Padlet asociado a la Tarea 1, es decir, aprovecharon nuevamente un recurso que seleccionaron y compartieron fuera de clase.

4.2 Tareas

Las tareas contenían problemas y ejercicios que los estudiantes tenían que resolver con la ayuda del internet, es decir, tenían que buscar conceptos, fórmulas, procedimientos algebraicos e información en general en diferentes sitios, como en wikis o en videos educativos de YouTube, que brinda el internet, con la finalidad de hallar la solución a los distintos cuestionamientos de las tareas. El objetivo de las actividades extraescolares fue observar si los estudiantes pueden resolver problemas rutinarios y no rutinarios únicamente con el material revisado y analizar cómo influyen en el desarrollo de las sesiones presenciales. En cada tarea tenían acceso a un Padlet (muro digital) para compartir información e integrar la de sus compañeros a sus trabajos. A continuación se muestran las participaciones en Padlet, los resultados de las tareas y sus análisis.

4.2.1 Tarea 1

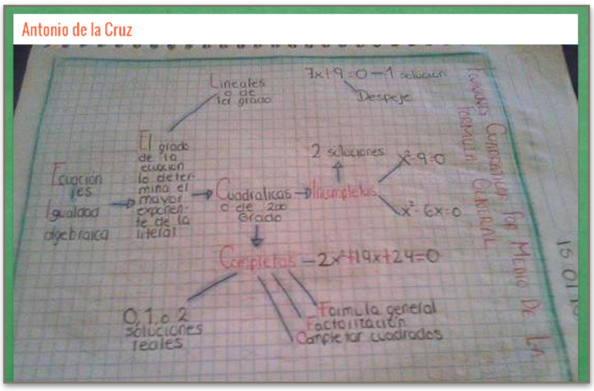
Para completar la Tarea 1, los estudiantes tuvieron que investigar características y conceptos relacionados con la ecuación cuadrática que les ayudaran a identificar la ecuación y sus coeficientes, y posteriormente utilizar algún método o procedimiento matemático, encontrado en internet, que les permitiera obtener las soluciones.

4.2.1.1 Participaciones utilizando el Padlet en la Tarea 1

En el muro se mostraron participaciones sobre cómo clasificar las ecuaciones cuadráticas, la relación entre su discriminante y número de soluciones, y se compartieron videos que enseñan métodos o procedimientos algorítmicos para resolver una ecuación cuadrática. En la figura 29 se muestran las participaciones más relevantes acompañadas de una descripción.

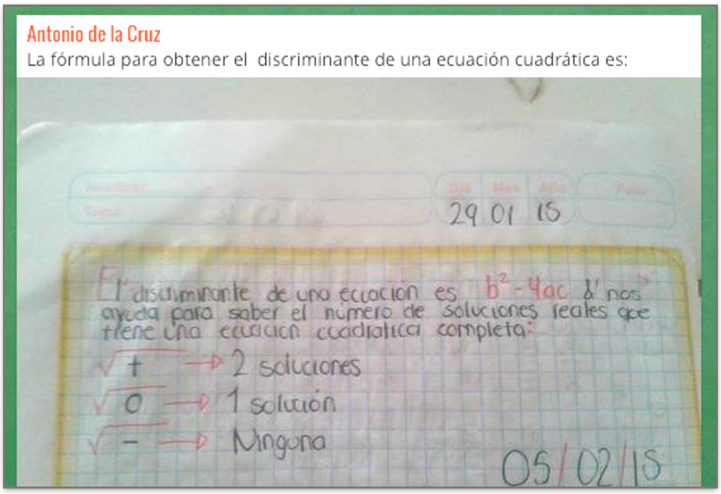
Participación 1

Antonio, comparte una foto de un cuaderno donde muestra la clasificación de las ecuaciones cuadráticas, número de soluciones y métodos para resolverlas.



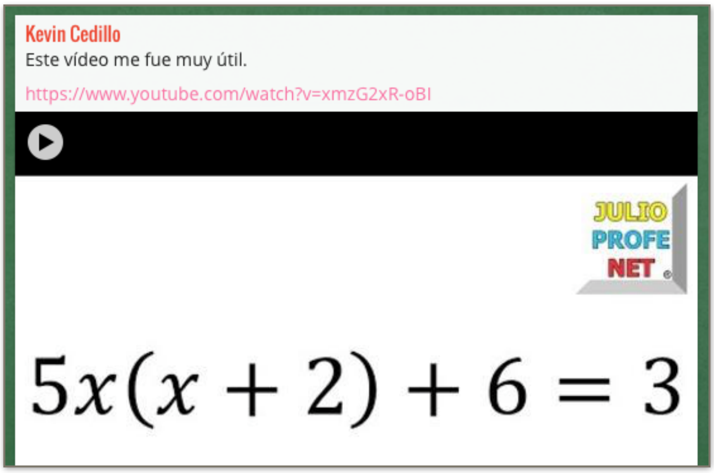
Participación 2

Antonio, comparte una foto de un cuaderno donde muestra la relación que existe entre el signo del discriminante y el número de soluciones de una ecuación cuadrática.



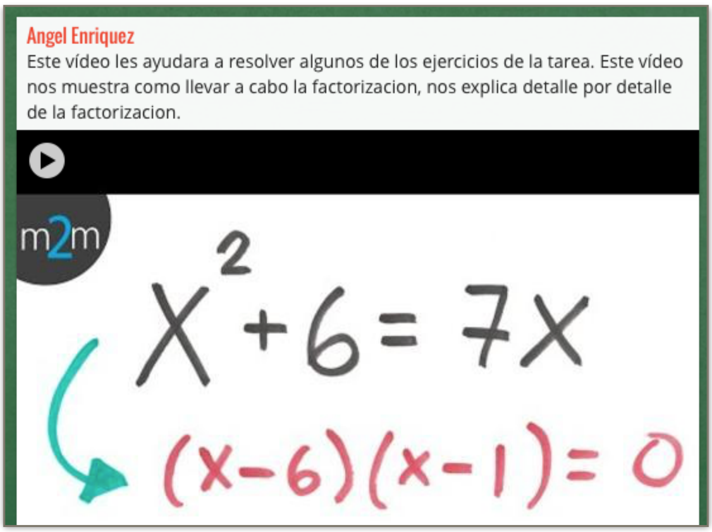
Participación 3

Kevin, comparte un video sobre cómo resolver una ecuación cuadrática aplicando la fórmula general.



Participación 4

Ángel, comparte un video sobre cómo resolver una ecuación cuadrática por medio de factorización.



Participación 5

Ángel, comparte un video que ayuda a identificar los coeficientes de una ecuación cuadrática y aplica la fórmula general para llegar a la solución.

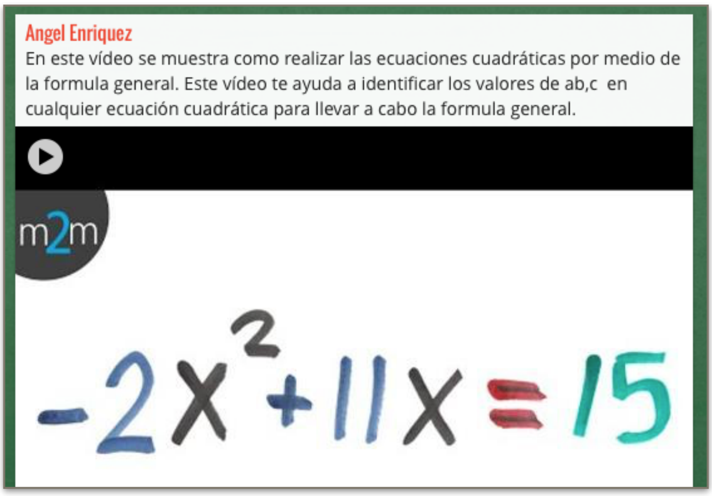


Figura 29. Participaciones en el Padlet (muro digital) de la Tarea 1.

4.2.1.2 Resultados de la Tarea 1

En los ejercicios donde los estudiantes tenían que identificar las expresiones algebraicas que correspondían a una ecuación de segundo grado, se evidenciaron cuatro tipos de dificultades: a) omiten la condición de igualdad, b) no identifican expresiones o ecuaciones equivalentes, c) suponen que una variable, incógnita o coeficiente son lo mismo y d) omiten la condición de $a \neq 0$. A manera de resumen, en la Tabla 1 se muestra el número de estudiantes que presentan dificultades y los reactivos que exhiben dichas dificultades.

Tabla 1. Dificultades que presentaron los estudiantes para identificar ecuaciones cuadráticas.

Número de estudiantes	Dificultad	Evidencia
10	Omiten la condición de igualdad, es decir, identifican a la expresión ax^2+bx+c como la forma general de la ecuación cuadrática.	b) $x^2 + 5x + 3 > 0$ Antonio: si ya que tiene un término elevado a la potencia 2, un término elevado a la potencia 1 y un término sin potencia alguna. n) $(x + 3)(x + 5)$ Valeria: $x = -2$ ó $x = -6$

Tabla 1. Dificultades que presentaron los estudiantes para identificar ecuaciones cuadráticas.

Número de estudiantes	**Dificultad**	**Evidencia**
8	No identifican expresiones equivalentes.	d) $0 = (3 - x)(2 + x)$ Miguel: no por que los 2 términos están elevados a la primera potencia y esa es una ecuación de primer grado. e) $4x^2 + x^2 = 5$ Emiliano: No, porque tiene dos términos elevados al cuadrado. h) $x(x + 1) = x$ Antonio: no porque no hay ningún termino elevado a la segunda potencia y tampoco ningún termino cuya potencia es 0. Karen: no es de Segundo grado porque $a = 0$ y está constituye a una de primer grado. i) $(x/8)^2 + 12 = x$ Kevin: No. k) $(x - 1)^2 = 0$ Cesar: no porque al poner un paréntesis con exponente 2 automáticamente los 2 términos tienen ese exponente y no cumplen las reglas para ser una ecuación cuadrática o de segundo grado. r) $g^2 = 9$ Emiliano: No, porque no tiene término lineal ni término independiente sólo el cuadrado
6	Consideran que una variable, incógnita o coeficiente son lo mismo.	g) $rx^2 + cx + g = k$ Karen: no es de segundo grado porque solo debe de contar con una variable y aquí cuenta con mas y no esta igualada a cero. m) $x^2 + y^2 = 0$ Ángel: No, por que tiene 2 variables diferentes.
8	Omiten la condición de $a \neq 0$.	l) $0x^2 + 5x + 3 = 0$ Emiliano: Sí, porque tiene un término cuadrático, un término lineal y un término independiente igualado a cero.

Con respecto a los ejercicios donde tenían que identificar los coeficientes de cada ecuación cuadrática, los estudiantes exhiben tres tipos de dificultades (Tabla 2): consideran solo los términos que están en el mismo miembro que el término cuadrático, seleccionan a, b y c, de forma consecutiva e identifican únicamente el coeficiente del término cuadrático. Estos resultados pueden ser consecuencia de prescindir de la representación de la ecuación en su forma general. Ángel, quién compartió el video donde se explica cómo identificar los coeficientes, fue la excepción.

Tabla 2. Dificultades que presentaron los estudiantes para identificar los coeficientes.

Número de estudiantes	Dificultad	Evidencia	
8	Consideran solo los términos que están en el mismo miembro que el término cuadrático.	d) $x^2 = 3$ $a = 1 ; b = 0 ; c = 0$	g) $3 = 2x^2 - 5x$ $a = 2 ; b = -5 ; c = 0$
3	Seleccionan a, b y c, de forma consecutiva.	b) $0 = 5 - 3x^2$ $a = 0 ; b = 5 ; c = -3$ c) $-7x^2 + 8x = 0$ $a = -7 ; b = 8 ; c = 0$	e) $6 - x^2 = 0$ $a = 6 ; b = -1 ; c = 0$ f) $4x - 9x^2 = 0$ $a = 4 ; b = -9 ; c = 0$
6	Identifican únicamente el coeficiente del término cuadrático y asignan como b al segundo término consecutivo.	a) $x^2 = 0$ $a = 1 ; b = 0 ; c = 0$ b) $0 = 5 - 3x^2$ $a = -3 ; b = 5 ; c = 0$ c) $-7x^2 + 8x = 0$ $a = -7 ; b = 8 ; c = 0$ d) $x^2 = 3$ $a = 1 ; b = 3 ; c = 0$	e) $6 - x^2 = 0$ $a = -1 ; b = 6 ; c = 0$ f) $4x - 9x^2 = 0$ $a = -9 ; b = 4 ; c = 0$ g) $3 = 2x^2 - 5x$ $a = 2 ; b = -5 ; c = 3$

Los últimos ejercicios de la Tarea 1 eran resolver, mediante el método que desearan, ecuaciones de segundo grado. Los procedimientos mostrados por los estudiantes reflejaron el uso excesivo de la fórmula general para hallar las soluciones, es decir, optaron por usar la fórmula general hasta en ecuaciones que podían solucionarse con un despeje directo (Fig. 30). En la figura 31 se observan dificultades que se asociaron con la aritmética y con la selección adecuada de los coeficientes (como se mostró en la tabla 2). Ángel es el único estudiante que utilizó despeje, factorización y fórmula general adecuadamente para resolver las ecuaciones cuadráticas (Fig. 32).

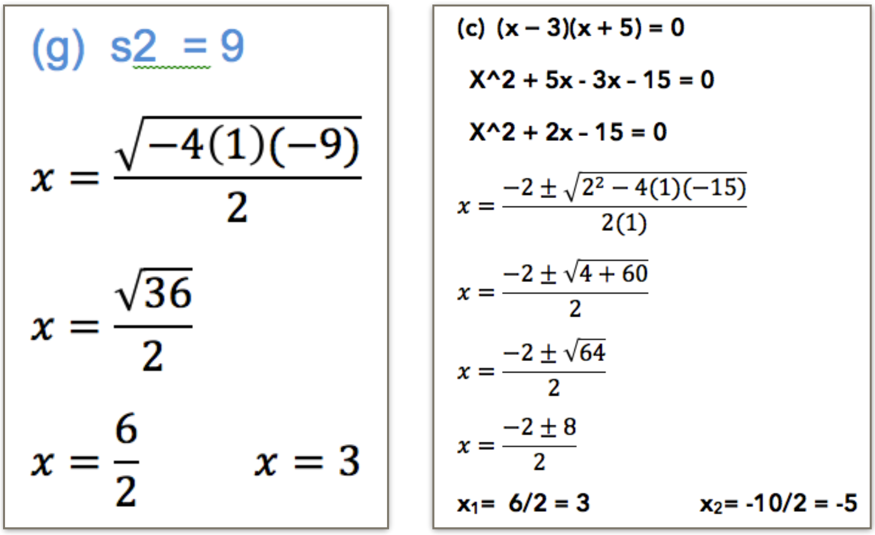


Figura 30. Resultados de estudiantes que solo aplican la fórmula general.

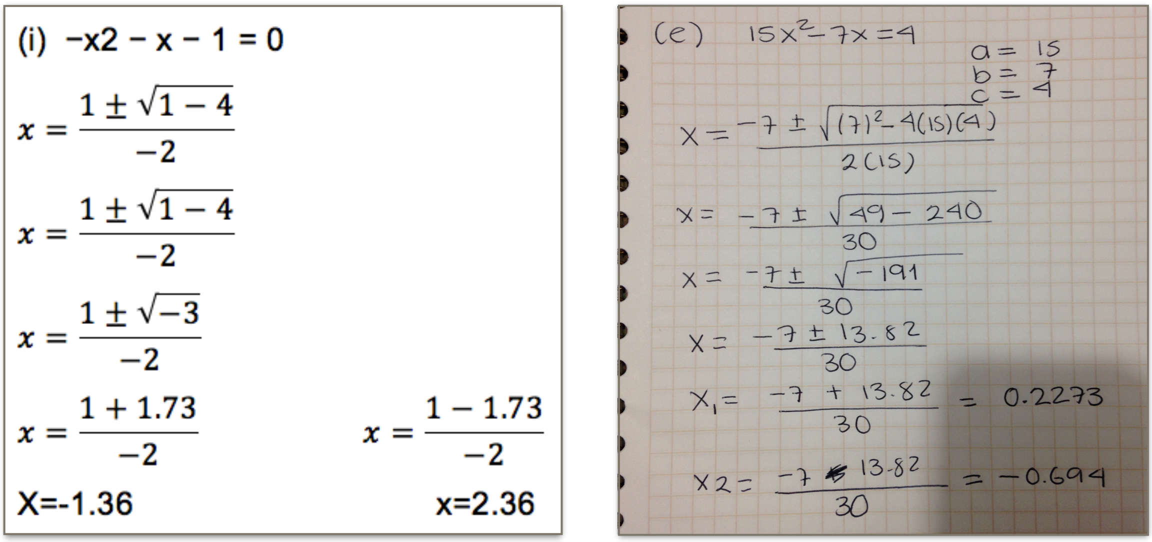


Figura 31. Operan con raíces negativas y seleccionan incorrectamente los coeficientes.

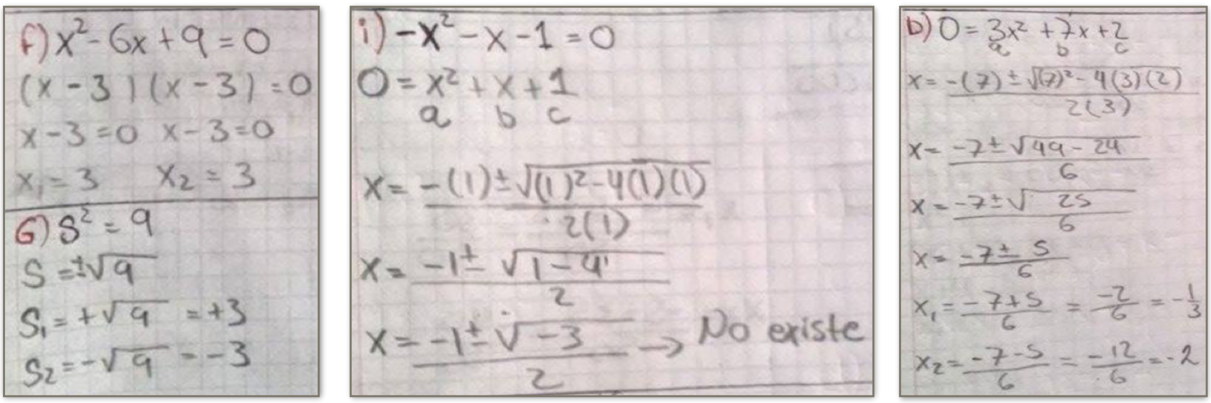


Figura 32. Soluciones mostradas por Ángel.

4.2.1.3 Discusión de la Tarea 1 en el aula

Se utilizó una sesión para discutir los resultados de la Tarea 1 con el objetivo de determinar el por qué los estudiantes presentaron dificultades en identificar tanto las ecuaciones cuadráticas como sus coeficientes. Al inicio de la sesión se les preguntó a los estudiantes cuáles eran las características o elementos que debía tener una ecuación para que fuera cuadrática, a lo que respondieron: 1) el mayor exponente debe ser dos; 2) $a \neq 0$; 3) tener una igualdad; 4) debe tener la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (Fig. 33).

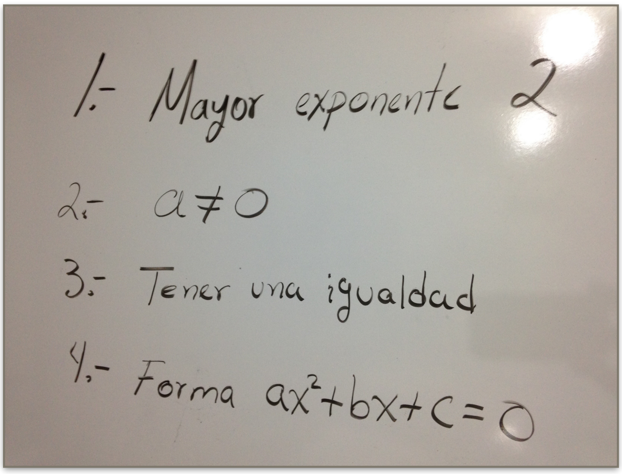


Figura 33. Características que debe cumplir una ecuación cuadrática según los estudiantes.

Se retomaron ejercicios de la Tarea 1 para verificar sí, con las características que proporcionaron los estudiantes, identificaban tanto las ecuaciones cuadráticas como sus coeficientes. Por ejemplo, en la figura 34 se observa que los estudiantes afirmaron que la ecuación $rx^2 + cx + g = k$ es cuadrática si $k = 0$, sin embargo, en una discusión grupal Israel comentó que antes de elegir a los coeficientes la ecuación debía estar igualada a cero (como marca el punto 4 de la figura 33), por lo tanto, el coeficiente C tenía que ser igual a $g - k$.

Otro caso fue el de la ecuación $x(x + 1) = x$ (Fig. 35), en donde los estudiantes desarrollaron el producto y seleccionaron los coeficientes sin igualar a cero (como había comentado Israel), es decir, obtuvieron la ecuación $x^2 + x = x$ con coeficientes $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Este resultado generó una discusión en el grupo; Ángel, argumentó que la ecuación era $x^2 = 0$, por la misma razón que dio su compañero Israel, con coeficientes $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$, pero Antonio consideró que no era posible dicho resultado puesto que no se iba a poder aplicar la fórmula general debido a que “no había” b y c. Por lo tanto, se sustituyeron los coeficientes propuestos por Ángel en la fórmula y se obtuvo la solución, sustentando el argumento de Ángel (Fig. 36).

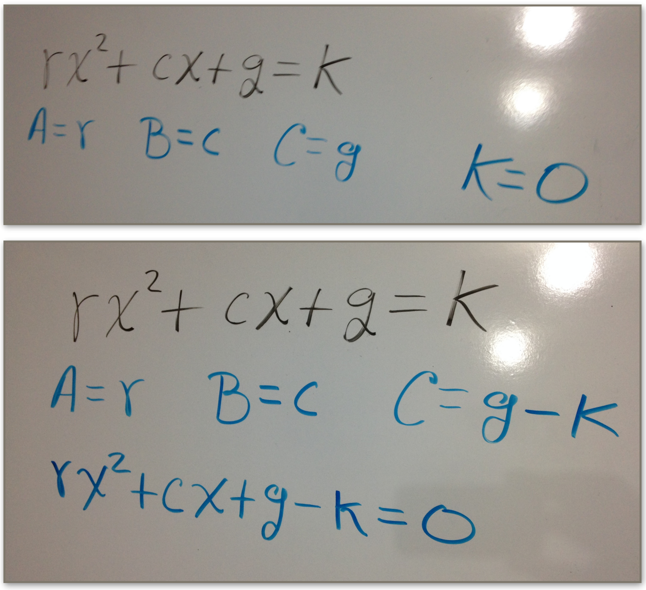


Figura 34. Respuestas de los estudiantes con respecto a los coeficientes de la ecuación cuadrática.

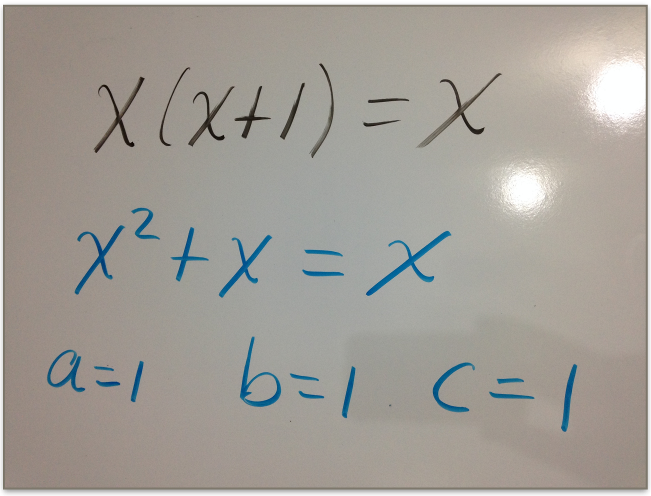


Figura 35. Desarrollo del producto y selección de coeficientes sin igualar a cero.

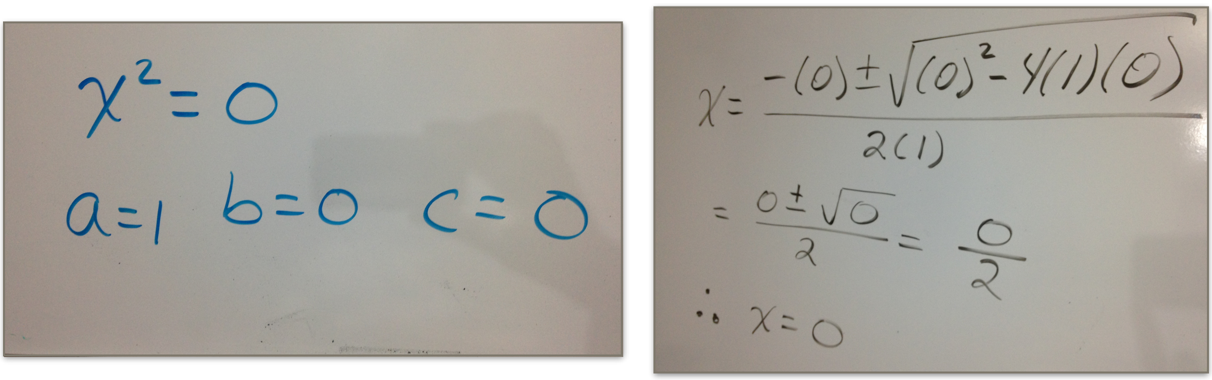


Figura 36. Ecuación y coeficientes propuestos por Ángel y aplicación de la fórmula general.

Antes de finalizar la sesión, el profesor planteó la ecuación $x^2 + x^{1/2} + 3 = 0$ y preguntó si era una ecuación cuadrática, el grupo estuvo de acuerdo en que sí era porque según ellos cumplía con todas las características.

En esta sesión, se observó que los estudiantes tienden a prestar atención al término cuadrático y al número de términos de la ecuación para identificarla. Es decir, si la ecuación contiene tres términos y uno de ellos es cuadrático entonces es considerada como ecuación cuadrática, independientemente de que tengan dificultades en identificar a los términos lineal e independiente, como se observa en las figuras 34 y 35. Esta circunstancia puede estar relacionada con la fórmula general, ya que los estudiantes fuerzan las condiciones de las ecuaciones para contar con los tres términos de donde obtendrán los coeficientes (a, b y c distintos de cero) y poder llegar a la solución. En resumen, los estudiantes desarrollan adecuadamente el algoritmo para resolver las ecuaciones cuadráticas (fórmula general), sin embargo, tienen dificultades en identificarlas y en seleccionar correctamente sus coeficientes, dando como resultado una serie de errores al momento de aplicar el algoritmo.

4.2.2 Tarea 2

En esta tarea se recuperaron preguntas de la sesión asociada a la Tarea 1, para analizar si los estudiantes con acceso a internet, podían después de una discusión en el aula, identificar y justificar por qué una ecuación es cuadrática. También, se buscó analizar si mediante la revisión de videos educativos de YouTube podían resolver problemas rutinarios y no rutinarios.

4.2.2.1 Participaciones utilizando el Padlet en la Tarea 2

Fueron colocados dos muros digitales con una pregunta en cada uno (Figs. 37 y 38), las cuales se tomaron de la Tarea 2, con el propósito de que sirvieran para iniciar una discusión donde los estudiantes tuvieran que comunicar sus resultados y justificarlos. A continuación, en las figuras 37 y 38, se muestran las participaciones más significativas en los muros acompañadas de una breve descripción.

Muro 1.

Participación 1

Pregunta planteada por el profesor.

Pregunta:

La ecuación

$$x^2 + x^{1/2} + 3 = 0$$

¿Es cuadrática?. Justifiquen su respuesta.

Participación 2

Karen en su participación argumenta que $x = x^{1/2}$.

karen Gonzalez

En efecto, esta es una ecuación cuadrática, porque cumple con la forma

ax2 + bx + c = 0 ya que al resolver la ecuación, x 1/2 se convierte en raíz cuadrada

√x entonces aquí ya obtendremos un número, pues "x" es igual a 1 y la raíz cuadrada de 1 es 1. Quedaría:

x2 + x + 3 = 0

Participación 3

Ángel reafirma el argumento de Karen.

Angel Enriquez

Si es una ecuación cuadrática, por que como dice Karen, al elevar "x" a la 1/2 lo podemos representar como la raíz cuadrada de "x" y como x no tiene coeficiente ya sabemos que es 1 y la raíz cuadrada de 1 es 1 entonces quedaría "x".

x^2 + x +3= 0

Participación 4

Israel argumenta que el exponente del término lineal puede ser cualquier número menor a dos.

Angel Ortega

Creó que si es una ecuación cuadrática ya que el profesional dijo que en una ecuación cuadrática el mayor exponente de la ecuación es 2 y como la X esta elevada a 1/2 no supera al dos por lo tanto yo digo que si es una ecuación cuadrática

Participación 5

Miguel argumenta que es una ecuación cuadrática porque cumple con la fórmula general.

Miguel Salazar

claro que si es una ecuacion cuadratica puesto que cumple con la formula general y ademas de eso al elevar la variable "x" a 1/2 terminara siendo uno entonces nunca excede el maximo exponente establecido para las ecuaciones de segundo grado que es 2

Participación 6

El profesor hace una intervención solicitando una justificación más rigurosa de las afirmaciones planteadas por los estudiantes y aprovecha la participación de Miguel para plantear un nuevo problema.

Profe Adrián
Dudas:

1.- Los comentarios hasta ahorita hacen la afirmación de que:

$$x = x^{1/2}$$

¿cómo aseguran que esa igualdad es cierta?.

2.- Si la ecuación propuesta en la pregunta cumple con ser una ecuación cuadrática entonces:

$$x^2 - 5x^{1/2} + 6 = 0$$

también lo es.

¿Cuáles son sus posibles soluciones?

Participación 7

Monserrat también argumenta que $x = x^{1/2}$. Al final responde a la segunda pregunta del profesor

Montserrat Ramírez
Yo al igual que mis otros compañeros digo que si se puede utilizar al exponente lineal con exponente en fracción siempre y cuando sea 1/2, porque yo recuerdo que el profesor nos dijo en clases pasadas que "elevar al exponente 1/2 viene siendo lo mismo que elevarlo al exponente 1"

Y la solución sería: solución 1: 3 y solución 2: 2 y discriminante 1.

Participación 8

El profesor aprovecha la participación de Monserrat cuestionando a los participantes si es correcta la solución propuesta por ella.

Profe Adrián
Montserrat comenta que una de las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 5x^{1/2} + 6 = 0$$

es 3, eso significa que

$$(3)^2 - 5(3)^{1/2} + 6 = 0$$

¿eso es cierto?. Como el termino elevado a la 1/2 causa ruido, alguien puede decir que se obtiene si hacemos la operación:

$$5(3)^{1/2}$$

recuerden que pueden utilizar calculadora para revisar sus resultados, es valido.

Figura 37. Participaciones en el primer Padlet (muro digital) de la Tarea 2.

En estas participaciones se observa que los estudiantes no debaten ni cuestionan las participaciones de sus compañeros, provocando comentarios repetitivos. Otro aspecto que debe resaltarse, es que no hay seguimiento de las participaciones, es decir, una vez que los estudiantes comentan en el muro ya no vuelven a participar. Por ejemplo, cuando el profesor intentó generar una discusión dando seguimiento a los comentarios previos, solo Monserrat atendió una vez. Las participaciones restantes fueron repetitivas. Además, ningún estudiante compartió algún enlace o video que complementara o contrastara las respuestas de sus compañeros.

Muro 2.

Participación 1

El profesor plantea un problema no rutinario y comparte un video de Khan Academy que explica la relación entre el discriminante de una ecuación cuadrática y el número de soluciones.

Profe Adrián

Revisen el siguiente video y contesten:

¿Para qué valores de k son reales las raíces de la siguiente ecuación?

$$kx^2 - 6x + 5 = 0$$

Participación 2

Ángel menciona que k puede tomar valores negativos o uno.

Ángel Enriquez

Los valores que necesita "k" en la ecuación presentada para poder tener raíces reales son valores distintos de 0, que "k" no valga 0 y que los valores de k sean valores con el signo negativo. Y solamente cuando "k" vale 1, este puede tener cualquier signo.

Participación 3

Karen menciona que k debe tomar valores negativos.

Karen Gonzalez

Necesita tener valores negativos, para que el discriminante "b2 - 4ac" obtenga un resultado positivo, quiere decir mayor que cero y así tendremos dos raíces reales.

Si b2 – 4ac > 0 (positivo) tendremos dos raíces reales diferentes.

Participación 4

Miguel reafirma el comentario de Ángel.

Miguel Salazar

Pues aparte del video es como el maestro nos enseño que una de las condiciones es que "a" no puede valer 0 en este caso tomaremos como "a" a la letra "k" asi que no puede valer 0, ademas si su valor no es 1 el signo tiene que ser negativo por que si es uno puede tener cualquier signo

Participación 5

Raymundo reafirma el comentario de Karen.

Ray Palacios

Los valores necesarios para "K" en la expresión Kx^2-6x+5=0 y obtener sus raíces reales deben ser diferentes a cero y que este cuente con el signo negativo, así lograremos obtener 2 soluciones reales y con signo positivo.

Participación 6

El profesor interviene con el objetivo de que sean más precisos en sus participaciones.

Profe Adrián

Jóvenes sus respuestas son generales, lean bien la pregunta: **¿Para qué valores de k...?.**

Es decir, cuando k=1 ¿tiene soluciones reales la ecuación? ¿y si k=2? ¿k=0? ¿k=-10?.

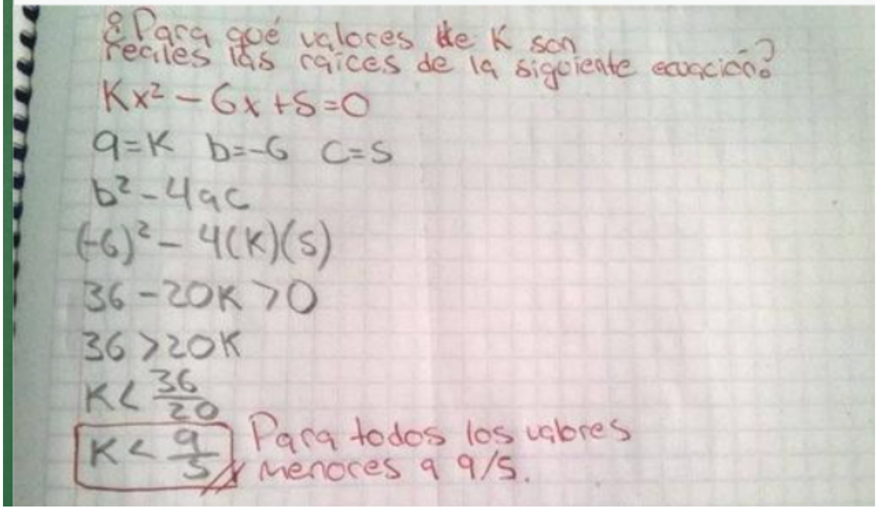
Tienen que decir cuales valores de k satisfacen la condición de que las soluciones de la ecuación sean reales.

Participación 7

Ángel revisa el video compartido por el profesor y muestra el desarrollo algebraico que le permite encontrar, con un argumento formal, todos los posibles valores de *k*.

Angel Enriquez

Con la ayuda del vídeo que nos puso en profe en la tarea, pude saber como sacar los valores de k.



Participación 7

Janette reafirma el comentario de Karen.

abi rodriguez

se necesitan valores negativos

para que los valores de k sean positivos para que sea mayor que cero y

obtener 2 soluciones

Figura 38. Participaciones utilizado el segundo Padlet (muro digital) de la Tarea 2.

Las participaciones del segundo muro evidencian, una vez más, que los estudiantes no discuten sus resultados y participan con los mismos comentarios que fueron compartidos al principio. Un resultado importante de este muro fue el de Ángel, quién mostró un desarrollo algebraico estructurado a partir de revisar un video de YouTube, que explica la relación del discriminante con respecto al número de soluciones de la ecuación cuadrática pero no muestra ningún ejemplo o problema como el que se les planteó, permitiéndole llegar a la solución.

4.2.2.2 Resultados de la Tarea 2

En el ejercicio que se asocia con identificar la ecuación $x^2 + x^{1/2} + 3 = 0$, los estudiantes muestran las mismas respuestas que se dieron en el primer muro (Fig. 37). La consecuencia de este resultado puede deberse a la falta de evaluación, es decir, en ningún momento se les indicó si la respuesta que mostraron en Padlet era correcta o incorrecta. Por otro lado, en los problemas no rutinarios se exhibieron tres tipos de dificultades en los resultados: a) encuentran únicamente casos particulares, b) analizan solo el signo de la variable que están buscando y c) usan incorrectamente la propiedad del discriminante en relación al número de soluciones. Cabe señalar que para resolver estos problemas los estudiantes tuvieron acceso al video que el profesor compartió en el segundo muro (Participación 1 de la figura 38). A continuación se muestran los problemas no rutinarios y ejemplos de las dificultades que tuvieron los estudiantes.

Los problemas no rutinarios que tenían que resolver fueron los siguientes:

a) ¿Para qué valor de k la ecuación $3x^2 + 8x + k = 0$ tiene una raíz real?

b) ¿Para qué valores de k la ecuación $kx^2 - 6x +5 = 0$ tiene raíces reales?

c) ¿Para qué valores de k la ecuación $4x^2 + x + k = 0$ no tiene raíces reales?

Una de las dificultades que tuvieron los estudiantes al momento de resolver este tipo de problemas, fue que al responder de forma empírica obtuvieron soluciones de casos particulares. En la figura 39 se observa que las respuestas de los estudiantes son el resultado de examinar cuáles valores enteros positivos que se le asignan a k, cumplen con la condición del discriminante según el inciso que se esté respondiendo. Por ejemplo, en el inciso b debe cumplirse que el discriminante de la ecuación sea mayor que cero para obtener raíces reales, es decir, que $(-6)^2 - 4(k)(5) > 0$ ó $36 - 20k > 0$ y esto sucede cuando $k < 9/5$ y $k \neq 0$. Sin embargo, los estudiantes examinan solo los casos para $k = 1, 2, 3, \ldots$, dando la respuesta para este inciso de $k = 1$.

(a) ¿Para que valor de k la ecuación $3x^2 + 8x + k = 0$ tiene una raíz real?

R= Para tener 2 soluciones reales tiene que ser 0, 1, 2, 3, 4, 5.

(b) ¿Para qué valores de k la ecuación $kx^2 - 6x + 5 = 0$ tiene raíces reales?

Tiene que valer únicamente 1

c) $4x^2+x+k=0$

$A=4$
$B=1$
$C=60$

$4x^2+x+60=0$

$(1)^2-4(4)(60)= -960$

$1-960<0$

-4
$\times 4$
-16

*No hay solucion

(c)¿Para qué valores de k la ecuación $4x^2 + x + k = 0$ no tiene una raíces reales?

Puede tener cualquier valor positivo.

Figura 39. Los estudiantes responden con casos particulares a los problemas no rutinarios.

Otra dificultad, se relacionó con analizar únicamente los signos de la variable k suponiendo que ésta solo toma valores enteros (Fig. 40). Por ejemplo Karen, en el inciso *b* responde cuando k es menor a cero, es decir, si $k < 0$ entonces el discriminante $36 - 20k$ es positivo, por lo tanto, se obtienen raíces reales. Pero deja a un lado los casos cuando k puede tomar valores positivos.

(b) ¿Para qué valores de k la ecuación kx2 – 6x + 5 = 0 tiene raíces reales? R: Cuando es menor a 0.

(b) ¿Para qué valores de k la ecuación kx2 – 6x + 5 = 0 tiene raíces reales?

Necesita tener valores negativos, para que el discriminante "b2 - 4ac" obtenga un resultado positivo, quiere decir mayor que cero y así tendremos dos raíces reales.
Si b2 – 4ac > 0 (positivo) tendremos dos raíces reales diferentes.

(c) ¿Para qué valores de k la ecuación 4x2 + x + k = 0 no tiene una raíces reales?

Necesita tener valor positivo para que el discriminante sea negativo, menor que cero y entonces no se tendrá un solución real, ya que los números negativos no tienen raíces cuadradas.
Si b2 – 4ac < 0 (negativo) No soluciones reales.

Figura 40. Los estudiantes analizan el signo de *k*.

Un estudiante mostró un procedimiento algebraico como el que utilizó Ángel en Padlet (ver Participación 7 de la figura 38), evidenciando dificultades para seleccionar adecuadamente la ecuación o inecuación que relaciona al discriminante con el número de soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente a cada inciso, como se observa en la figura 41. En el inciso *c* tiene dificultades con el despeje.

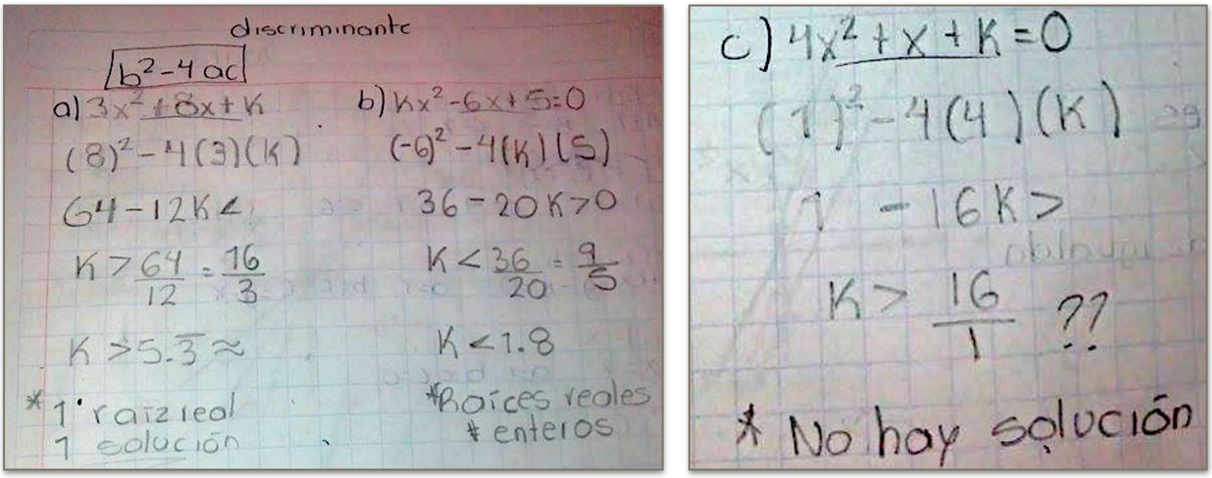


Figura 41. Procedimiento algebraico mostrado por un estudiante.

Los últimos ejercicios de la tarea eran ecuaciones cuadráticas que se tenían que resolver completando el trinomio cuadrado perfecto. Para que los estudiantes utilizaran este método tuvieron que revisar dos videos educativos de YouTube (de julioprofe, Fig. 42) donde se les explicaba cómo hacerlo. En general, los estudiantes no mostraron dificultades en solucionar este tipo de ejercicios. Algunos ejemplos se muestran en la figura 43.

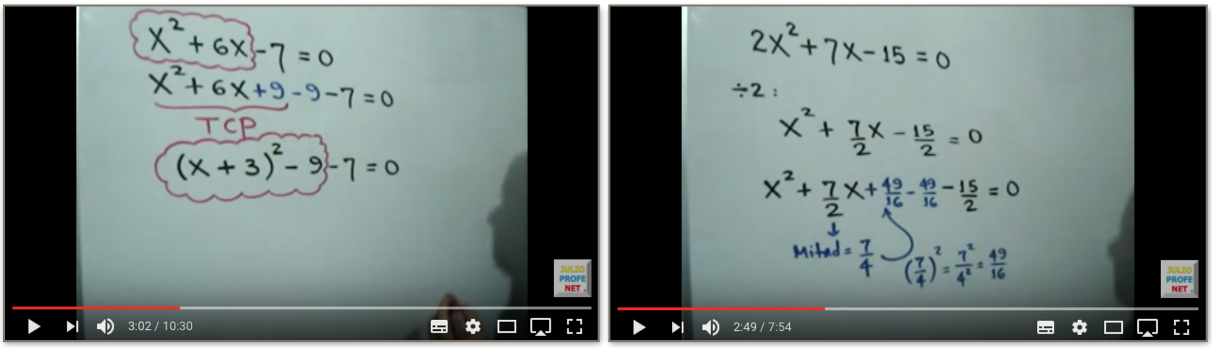


Figura 42. Videos de julioprofe en YouTube que explican la completación de cuadrados para resolver ecuaciones cuadráticas.

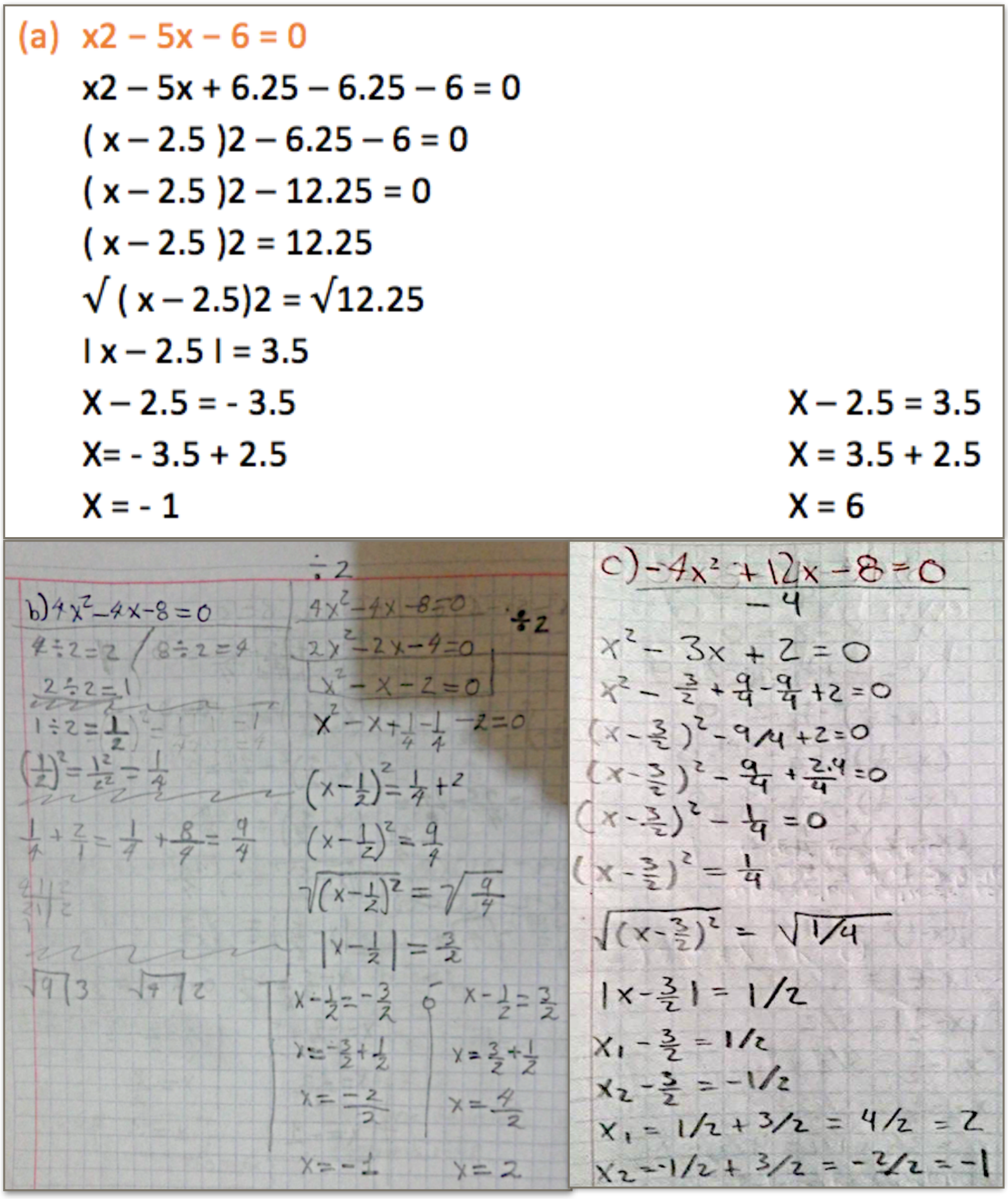


Figura 43. Ejercicios y soluciones de los estudiantes.

En esta tarea se observa que los estudiantes no recuperan información de las participaciones que se llevaron a cabo utilizando el Padlet. A pesar del procedimiento algebraico que mostró Ángel en el muro digital (Fig. 38) para dar respuesta al problema, solamente un estudiante intentó replicarlo en su tarea (Fig. 41). Los videos fueron de ayuda para analizar y resolver los problemas, en el caso de los ejercicios o problemas rutinarios mostrados en la figura 43, los estudiantes desarrollan el álgebra y llegaron a la solución sin mostrar dificultades, en cambio, en los problemas no rutinarios, los resultados evidencian que el material audiovisual revisado por los estudiantes fue insuficiente para llegar a la solución correcta.

4.2.3 Tarea 3

La última tarea se conformó de actividades y preguntas que demandaron en los estudiantes, el uso de los recursos obtenidos en las tareas y sesiones anteriores. La finalidad de esta tarea fue analizar si los estudiantes pueden resolver problemas de ecuaciones cuadráticas, construir un modelo dinámico, determinar las gráficas asociadas a los atributos del modelo, asociar elementos de la gráfica con las ecuaciones correspondientes y argumentar algebraicamente, es decir, si se apropiaron de los recursos y estrategias utilizados hasta el momento.

4.2.3.1 Participaciones utilizando el Padlet en la Tarea 3

En el muro Padlet se colocaron dos problemas en los que se solicitó encontrar la ecuación cuadrática a partir de tener una raíz o conocer el producto y la suma de las raíces. Con esto, se buscó analizar si los estudiantes exploraban nuevas propiedades, conceptos o procedimientos, a través de investigar y compartir nueva información para resolver los problemas. En la figura 44 se muestran las participaciones más relevantes del muro acompañadas de una descripción.

Participación 1

Problemas compartidos por el profesor.

Profe Adrián

Ejercicios:

a) Una raíz de la ecuación

$$3x^2 - 10x + k = 0$$

es 3. Determine el valor de la constante k y halle la otra raíz de la ecuación.

b) Halle la ecuación cuadrática si se sabe que:

$$x_1 + x_2 = 6$$

y

$$x_1 \cdot x_2 = -7$$

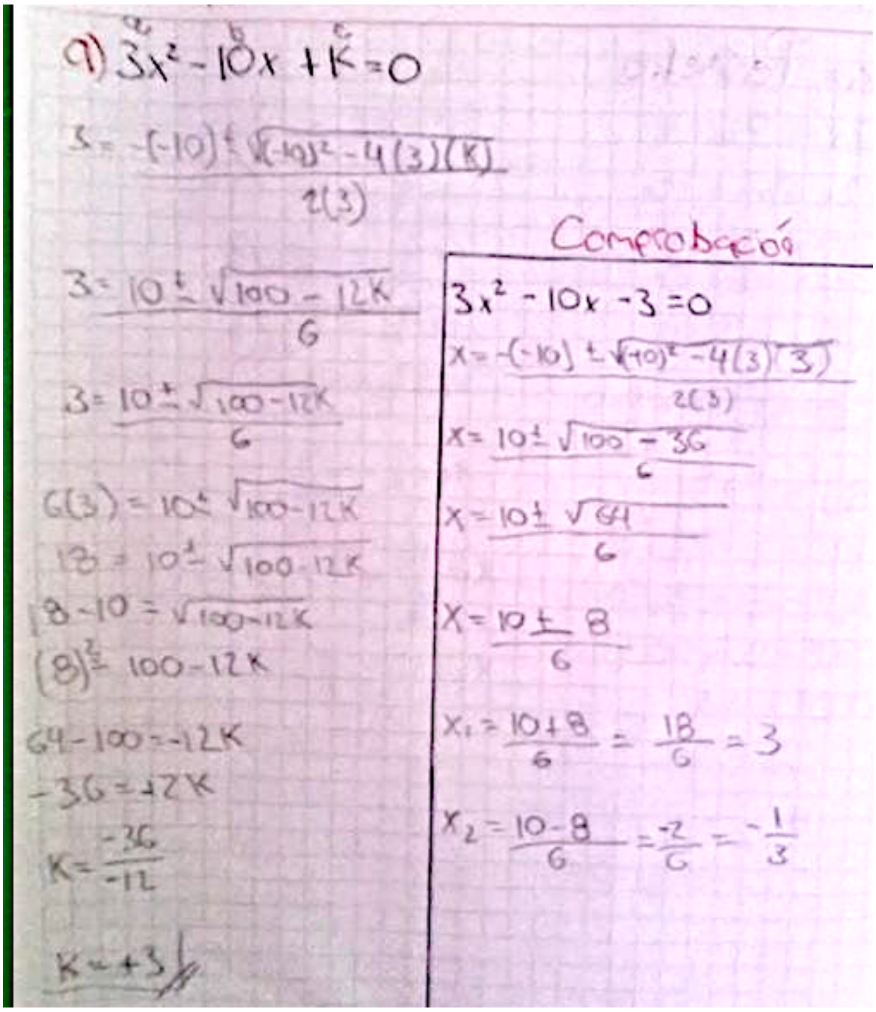
donde

$$x_1,\ x_2$$

son las raíces de la ecuación.

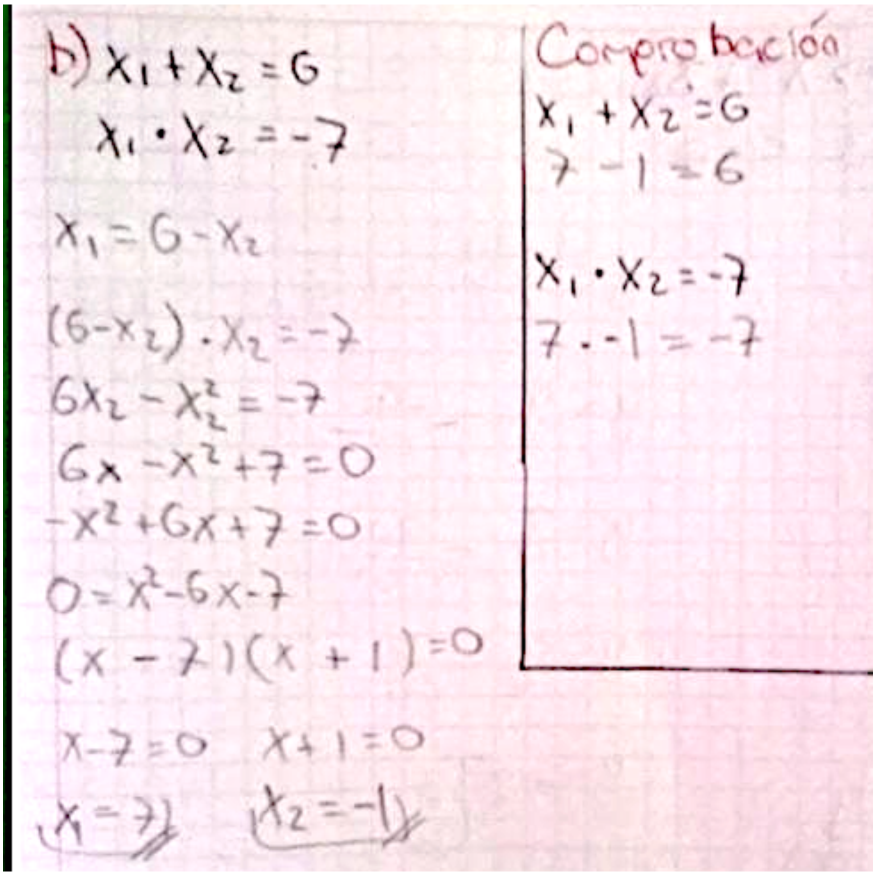
Participación 2

Ángel usa la fórmula general para encontrar tanto el valor de *k* como el de la raíz del ejercicio a).



Participación 3

Ángel, para resolver el sistema de ecuaciones del inicio b), usa sustitución y genera una ecuación cuadrática, de la cual, encuentra sus raíces por medio de factorización. No responde explícitamente lo que se le solicita.



Participación 4

Karen, para resolver el sistema de ecuaciones del inicio b), usa sustitución y genera una ecuación cuadrática, de la cual, encuentra sus raíces por medio de la fórmula general. Identifica la ecuación cuadrática que se pide.

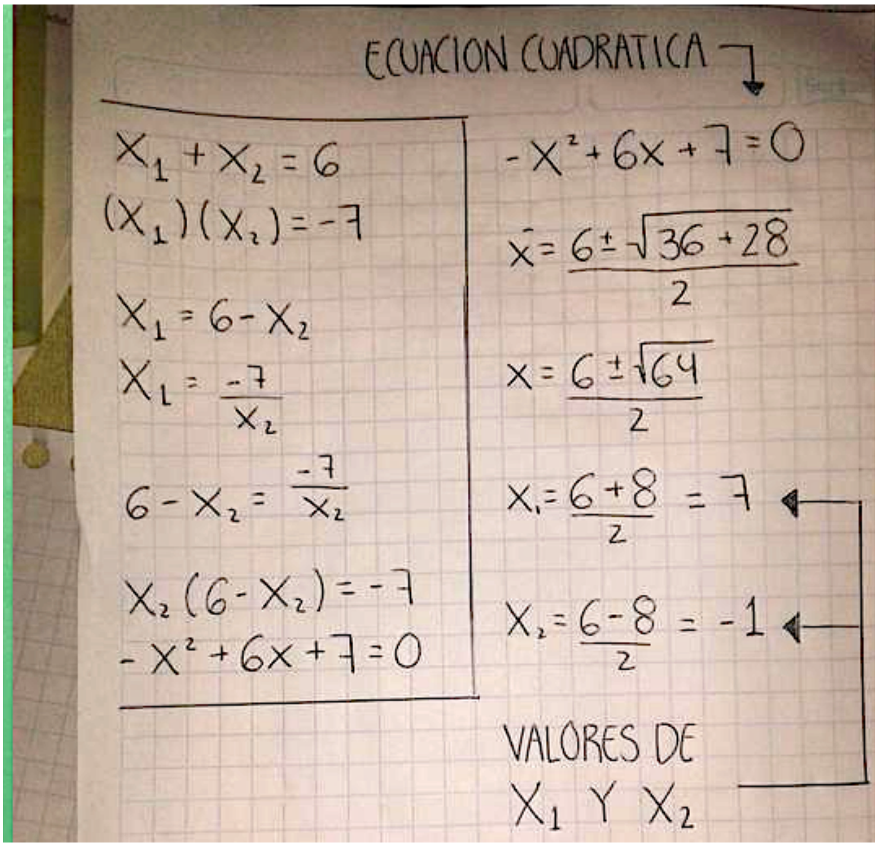


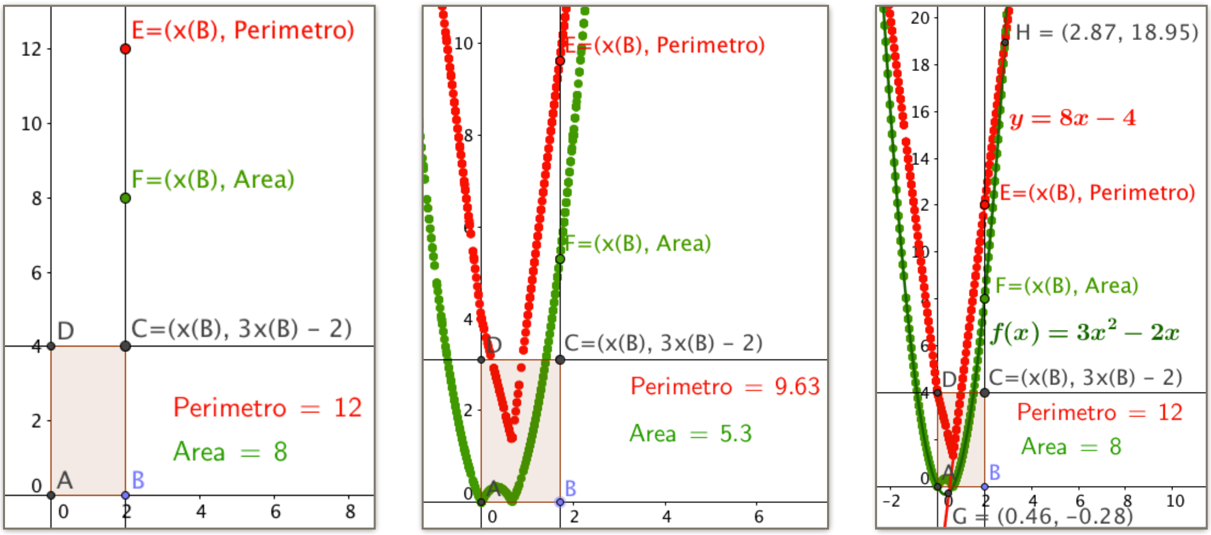
Figura 44. Participaciones en el Padlet (muro digital) de la Tarea 3.

En la figura 44 se observa que los estudiantes no tuvieron necesidad de buscar nueva información para resolver el problema, pues fue suficiente con los procedimientos que ya habían revisado y utilizado en otros problemas. No obstante, solo cinco estudiantes participaron mostrando sus soluciones.

4.2.3.2 Resultados de la Tarea 3

Los resultados de esta tarea se analizan en dos partes; la primera parte muestra la construcción del modelo dinámico y las representaciones gráficas del perímetro y del área asociadas a dicha construcción; la segunda parte se enfoca en los procedimientos algebraicos que utilizan los estudiantes para darle sustento a la parte visual. Se presentarán los resultados más significativos para el análisis.

La construcción de Ángel (Fig. 45) se puede dividir en tres fases: 1) definición de puntos, es decir, en esta fase define los puntos necesarios para construir el modelo dinámico y los puntos que se relacionan con el área y perímetro de éste; 2) análisis del lugar geométrico, en otras palabras, activación de la opción rastro para observar el comportamiento de los puntos relacionados con el área y perímetro del modelo cuando éste tiene movimiento; 3) asociación de gráficas con respecto al lugar geométrico, esto es, identificar las gráficas correspondientes a los lugares geométricos trazados por los puntos dinámicos para definirlas y, localizar o analizar diferentes elementos de éstas.



1 2 3

Figura 45. Fases de la construcción del modelo y sus gráficas elaborado por Ángel.

Ángel, analizó los lugares geométricos cuando el punto B se acercaba al origen y observó que el camino que describían se debía a la forma en como estaban definidos los puntos E y F, es decir, el área y el perímetro no dependían de la coordenada x del punto B, por lo tanto, siempre se mantenían positivos. Por lo que no tuvo dificultades en asociar las gráficas correspondientes a los lugares geométricos y encontrar las intersecciones (puntos G y H), donde según el área y el perímetro de la construcción son iguales (fase 3 de la figura 45).

En cambio Antonio, construyó el modelo dinámico a partir de la recta $y = 3x - 2$ que determina la altura del rectángulo en función de la coordenada x del punto A (Fig. 46), enseguida trazó las gráficas asociadas al perímetro y área de la construcción y finalizó utilizando la opción rastro para verificar que los lugares geométricos coincidan con éstas.

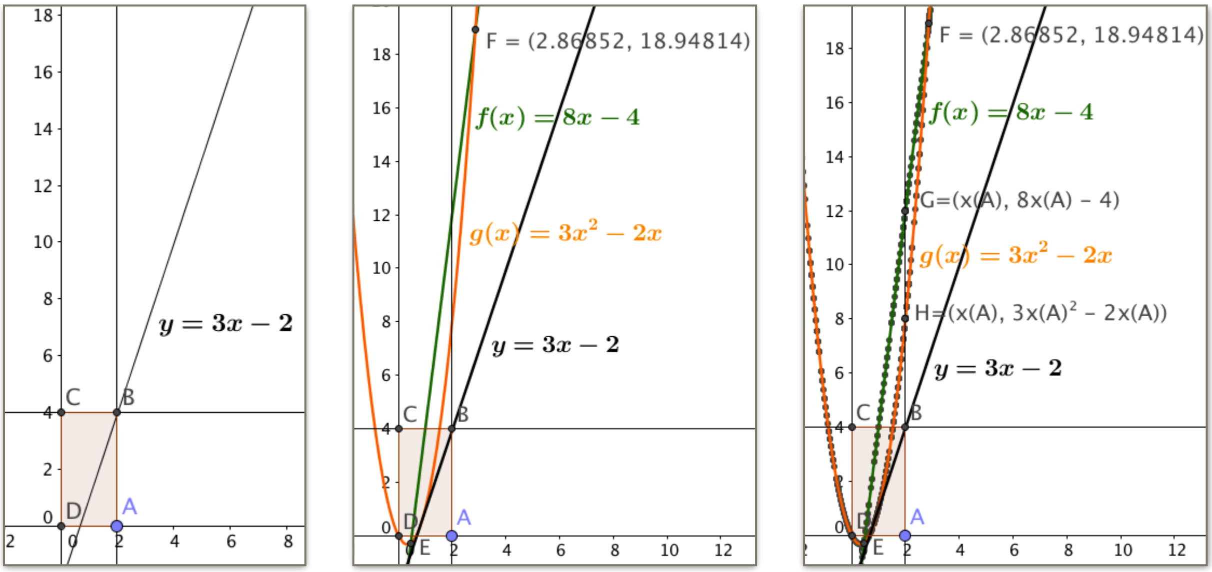


Figura 46. Construcción del modelo y gratificación por Antonio.

Después de estas construcciones, los estudiantes determinaron en dónde corta la parábola al eje *x* y qué coordenadas tiene su respectivo vértice. Para éste último, utilizaron una fórmula que les permitió obtener la coordenada de las abscisas y así, evaluar la función para encontrar la ordenada, involucrándose en temas de evaluación de funciones y conceptos de geometría analítica. Los resultados se muestran en la figura 47.

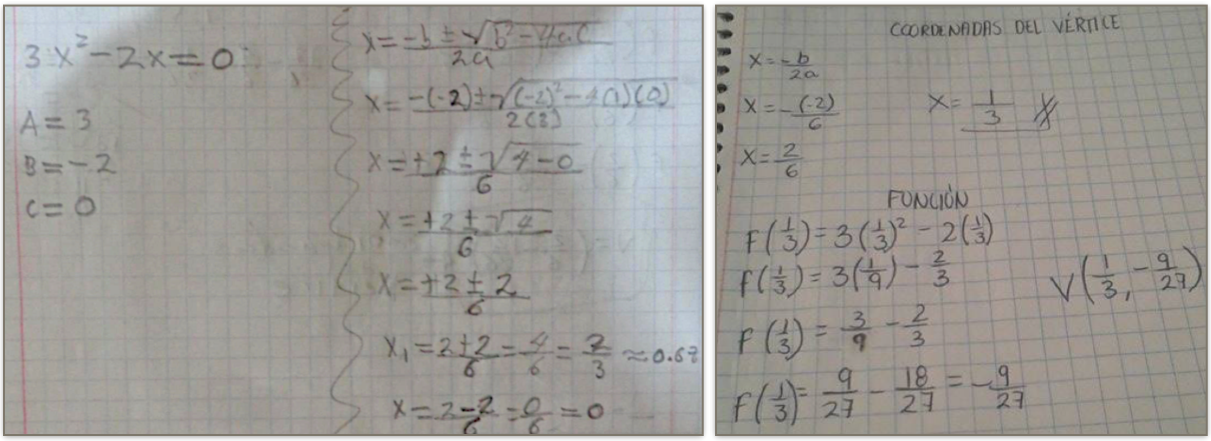


Figura 47. Puntos de intersección de la parábola y el eje *x*, y coordenadas del vértice.

Por último, obtuvieron las posibles soluciones donde el área y el perímetro coinciden. Los procedimientos que se observan en la figura 48 corresponden al método de completación del trinomio cuadrado perfecto y a la fórmula general.

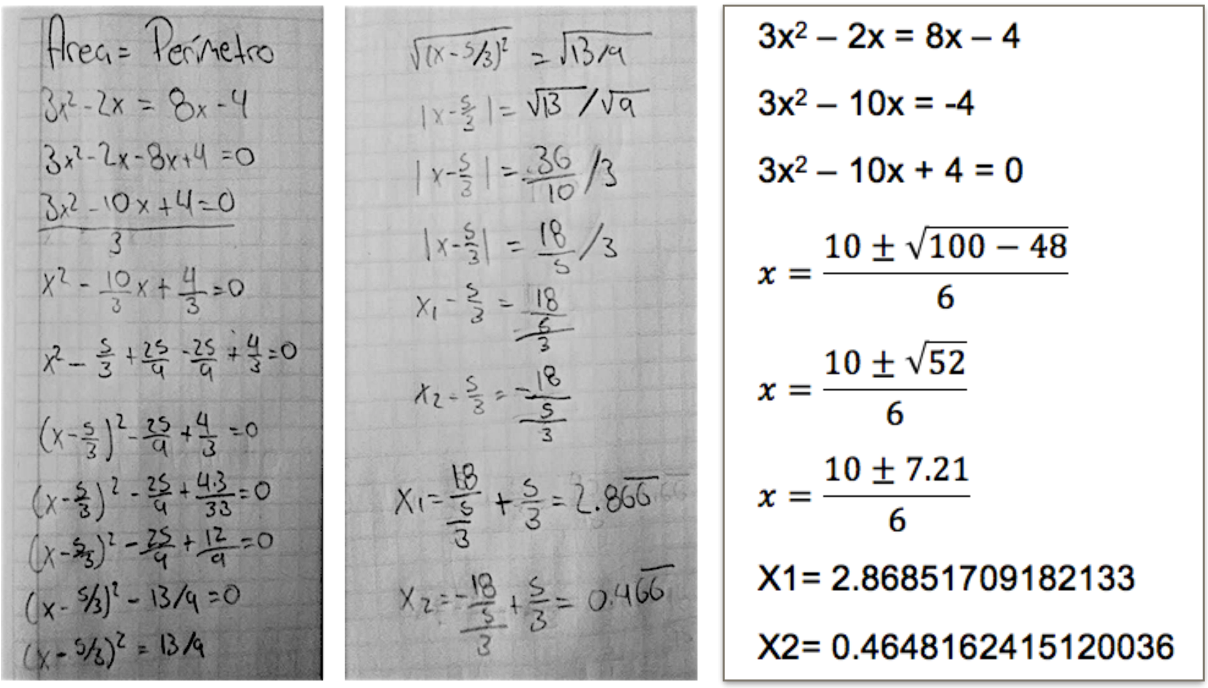


Figura 48. Posibles soluciones donde el área y el perímetro coinciden.

4.3 Discusión de las sesiones y las tareas con el uso de las tecnologías digitales

El uso de GeoGebra en las sesiones permitió extender un problema rutinario, de tal manera que los estudiantes ya no se tuvieron que enfocar únicamente en el manejo de reglas algebraicas, sino también en cómo representar el problema de una forma distinta, es decir, en construir un modelo dinámico. Las diferentes construcciones dinámicas que se solicitaron a lo largo de las sesiones posibilitó que los estudiantes construyeran significados de objetos matemáticos. Por ejemplo, trazar el cuadrado en GeoGebra, requirió que se analizaran sus propiedades geométricas para seleccionar los objetos geométricos adecuados para construirlo y, sin importar que las longitudes de sus lados fueran modificadas, mantener dichas propiedades. Las estrategias que utilizaron los estudiantes en la construcción del modelo dinámico mostró cómo razonaron las propiedades de los objetos matemáticos en función de los comandos de GeoGebra. Por ejemplo, trazar rectas perpendiculares para construir el ángulo recto que se forma entre los lados y usar una circunferencia para trasladar la medida de su lado.

Obtener una representación distinta del problema permitió plantear nuevas preguntas que se relacionaron con los atributos del modelo dinámico, tales como: ¿cuál es la gráfica del perímetro que se asocia al modelo?, ¿cuál es la gráfica del área que se asocia al modelo?, ¿qué interpretación se le puede dar a la intersección de ambas gráficas? y ¿qué otros elementos pueden identificase? Responder estas preguntas implicó que los estudiantes desarrollaran conceptos y fórmulas vinculados con geometría analítica. Por ejemplo, definir un punto en función de una de las coordenadas de otro punto fue el resultado de construir una regla de correspondencia que se utilizó para analizar el lugar geométrico del área o del perímetro, identificar características importantes del lugar geométrico que traza dicho punto para asignarle la función o gráfica correspondiente y encontrar elementos básicos de las gráficas como sus vértices o intersecciones. Es importante destacar que el uso del lugar geométrico con el SGD fue una heurística esencial para obtener los acercamientos o resultados mencionados.

Las tecnologías de comunicación (Padlet y YouTube) proporcionaron espacios de discusión en línea y material audiovisual enfocados en brindar información que ayudara a resolver problemas y ejercicios de corte algebraico, dando la oportunidad de trabajar en un ambiente colaborativo. Los videos educativos de YouTube fueron de gran utilidad para que los estudiantes se apropiaran de fórmulas, algoritmos y procedimientos algebraicos, que servirían para resolver los ejercicios o problemas no rutinarios. Por ejemplo, la fórmula general, el método de factorización, completación del trinomio cuadrado perfecto y uso del discriminante. Sin embargo, solo un estudiante pudo resolver un problema no rutinario con el apoyo de los videos, mientras que el resto del grupo obtuvo resultados incompletos, es decir, los contenidos de los videos parecen no aportar ideas más allá del contenido tradicional.

Con respecto al muro Padlet, el objetivo era que los estudiantes generaran una discusión en torno a los resultados e información compartida por sus compañeros, es decir, que cuestionaran ideas, plantearan nuevas preguntas, argumentaran sus respuestas, exploraran nuevos métodos, etc. Pero más bien, sirvió como un espacio de almacenamiento de respuestas o información, pues los estudiantes solo se preocuparon por obtener su participación. Por ejemplo, en la figura 37 el profesor intentó generar una discusión, pero los estudiantes que ya habían participado no volvieron a comentar. En la figura 38, Ángel, mostró un resultado con su respectivo desarrollo y las participaciones posteriores de los estudiantes siguieron dando contestaciones generales. A pesar de que no se logró el objetivo que se esperaba obtener con el muro Padlet, se aprovechó para dar seguimiento a las diferentes soluciones mostradas por los estudiantes después de que revisaran los videos.

El uso coordinado de los nuevos medios de comunicación y de las tecnologías de representación (YouTube, Padlet y GeoGebra), permitió transformar un problema de rutina en un conjunto de actividades no rutinarias sin desatender la parte algebraica. Por medio de Padlet y las tareas se compartieron enlaces de videos educativos de YouTube que permitieron que los estudiantes aprendieran y/o reforzaran sus recursos algebraicos, mientras que en las sesiones se trabajó en construir un modelo dinámico que permitiera analizar diferentes propiedades, atributos y gráficas implícitas del problema, donde los procedimientos algebraicos ayudaron a la argumentación de estos resultados visuales. Sin embargo, las definiciones y los conceptos relacionados con el problema se mantienen como conocimiento informal. Por ejemplo, en las tablas 1 y 2 se observa que los estudiantes presentan dificultades tanto para identificar una ecuación cuadrática como sus coeficientes, teniendo como consecuencia respuestas incorrectas aunque aplicaran la fórmula general.

CAPÍTULO 5

Conclusiones y reflexiones finales

En este capítulo se presentan las conclusiones generadas con base en las preguntas de investigación que se plantearon, las cuales tuvieron como objetivo analizar y documentar las características de un ambiente de aprendizaje que incorpora el uso coordinado de los nuevos medios de comunicación y de las tecnologías para la actividad matemática, así como los acercamientos y formas de resolver los problemas que exhibe un grupo de estudiantes de bachillerato cuando trabajan bajo este ambiente. Para finalizar el trabajo, se presentan reflexiones referente a los alcances y limitaciones de esta investigación, así como posibles áreas de oportunidad que se desprenden de los resultados y que pueden reanudarse en nuevos estudios.

5.1 Conclusiones

Primera pregunta de investigación. ¿Qué caracteriza a un ambiente de aprendizaje que incorpora el uso coordinado de algunos medios de comunicación (YouTube y Padlet) y un Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra)?

Existen trabajos de investigación centrados en analizar y documentar el impacto de usar distintas tecnologías digitales en ambientes de resolución de problemas (Aguilar, 2014; Ortega, 2014 y Olvera, 2014). Todas estas investigaciones se centran en el uso de un SGD (GeoGebra). En este estudio, el trabajo y discusión matemática entre los participantes estuvo limitada a las interacciones presenciales que se dieron durante la clase. En este estudio, la discusión de las ideas matemáticas se extendió más allá del salón de clase y se describen cómo las tecnologías incidieron en los comportamientos del profesor y los estudiantes.

El papel de las herramientas

Se puede describir el uso de herramientas digitales en dos momentos: dentro y fuera del salón de clases. Para la actividad matemática dentro del salón de clases el uso de GeoGebra fue determinante. La actividad matemática fuera del salón de clases se promovió a través del uso del Padlet y YouTube. En cuanto al uso de GeoGebra, los resultados muestran que esta herramienta permitió a los estudiantes representar y explorar los problemas. Es importante mencionar que las representaciones y exploraciones iniciales de los estudiantes estuvieron basadas en enfoques estáticos. En este contexto la herramienta facilitó la implementación de heurísticas de resolución de problemas como el análisis de casos particulares por medio del uso de tablas y construcciones dinámicas no robustas, es decir, construcciones en las cuales no se mantienen las propiedades estructurales de las figuras al arrastrar sus elementos. En este camino, la actividad matemática se centró en obtener construcciones robustas. Un resultado importante de esta etapa fue el uso, por parte del estudiante, de comandos como "recta perpendicular" y "compás" para la representación de propiedades estructurales de cuadrados y rectángulos. Una vez obtenidas configuraciones dinámicas robustas los estudiantes exploraron los problemas a partir de la variación (movimiento controlado). En este camino la visulizacion del rastro y lugares geométricos fueron estrategias determinantes para que el estudiante analizara el comportamiento de puntos móviles que representaban la covariacion de atributos (área y perímetro) de las figuras (cuadrados y rectángulos). Estas exploraciones condujeron a estudiantes hacia una caracterización de los lugares geométricos en término de sus ecuaciones. En resumen, el uso de GeoGebra fue importante no solo para representar y explorar los problemas, sino también para generalizarlos y extenderlos; por ejemplo la extensión al problema inicial que se trabajó en la sesiones dos y cinco. Una idea central que permea esta fase es que el uso de GeoGebra permitió transformar un problema rutinario en una oportunidad para que el estudiante se involucrara en actividades de exploración, identificación, formulación, representación, experimentación, análisis de conjeturas y la resolución del problema.

Como producto de las exploraciones hechas por los participantes en el salón de clases se obtuvieron ecuaciones cuadráticas que fueron discutidas y analizadas fuera del salón del clases con ayuda de Padlet y YouTube. Estas herramientas de comunicación permitieron que los estudiantes se apropiaran de fórmulas y procedimientos algebraicos que sirvieron para resolver las ecuaciones planteadas en los problemas. Los videos que seleccionaron los estudiantes fueron los que contaban con mayor cantidad de "me gusta" por parte de los usuarios y el criterio que utilizaron para compartirlo era si ellos podían replicarlo, es decir, si les quedaba claro cómo emplear los procedimientos algebraicos y aritméticos para resolver el problema. Debe resaltarse que los videos ayudaron a que reforzaran o aprendieran los métodos y recursos relacionados con resolver ecuaciones cuadráticas, sin embargo, no mejoraron el dominio conceptual de dichas ecuaciones. Por ejemplo, Ángel compartió videos que le ayudaron a resolver correctamente una serie de ejercicios y problemas considerados como rutinarios pero mostró dificultades en identificar una ecuación cuadrática. Con respecto a Padlet fue un medio donde los estudiantes compartían soluciones y enlaces de los cuales obtenían información, sin embargo, no se generaron discusiones como se esperaba. Esto implicó que el profesor iniciara discusiones en las sesiones de trabajo dentro del salón de clases para evidenciar el manejo de recursos y conceptos trabajados con el apoyo de las herramientas de comunicación. Gracias al uso coordinado de estas tecnologías los estudiantes reforzaron notablemente sus habilidades y dominio sobre desarrollos algebraicos y operacionales. Sin embargo, también es necesario considerar otro tipo de materiales que mejore la interacción y discusión de los estudiantes fuera del salón de clases así como modificar las estrategias de su implementación.

El papel del estudiante

Las actividades que desarrollaron los estudiantes se analizaron en dos sentidos: actividades dentro y fuera de las sesiones de trabajo. En las sesiones de trabajo discutieron e interactuaron en torno a las propiedades, uso de herramientas y representación del problema. Fuera de clases buscaron información sobre métodos o procedimientos que les ayudara a resolver el problema. Las discusiones e interacciones generadas por los estudiantes ayudaron a plantear distintas estrategias para construir un modelo dinámico. Esto llevó a que visualizaran aspectos como la variación y lugares geométricos que implicó la búsqueda de argumentos o justificaciones para dicho sistema de representación. En este sentido, la información que analizaron fuera de clases ayudó a mejorar sus recursos algebraicos e implementarlos para argumentar y comunicar sus resultados mediante otro sistema de representación. Sin embargo, esta forma de trabajo es poco común para los estudiantes. No cuentan con métodos para discriminar información y falta compromiso en la revisión de materiales audiovisuales (videos de YouTube).

El papel del profesor

Para describir el papel del profesor se resaltan dos momentos: dentro de las sesiones de clases y participaciones fuera del salón mediante el uso de las herramientas de comunicación. El profesor guió con preguntas y actividades las sesiones de trabajo que fueron determinantes para que los estudiantes pudieran explorar, identificar y representar el problema mediante el uso de un SGD. Mientras que con las herramientas de comunicación le dio seguimiento a los resultados y videos compartidos por los estudiantes. Las preguntas y actividades que formuló el profesor en las sesiones se centraron en que los estudiantes analizaran y buscaran diferentes caminos para representar el problema. Sin embargo, los estudiantes mostraron algunas dificultades que el profesor no detectó inmediatamente durante la discusión con los estudiantes, al momento de graficar el área asociada a la construcción dinámica del cuadrado. Esto demuestra que el profesor debe tener un amplio dominio o ser experto en el uso de las herramientas digitales, para que pueda extender y conectar los diferentes acercamientos y resultados mostrados por los estudiantes. Con respecto a las herramientas de comunicación el profesor utilizó YouTube y Padlet para trabajar problemas y ejercicios fuera de las sesiones de clases con la intención de generar una discusión alrededor de las soluciones y conceptos asociados a los problemas. Los resultados observados es que los estudiantes solo exponen sus soluciones y revisan el mínimo de información para completar sus actividades. En este sentido, es importante proponer distintos caminos que ayuden a mejorar el compromiso e interacción por parte de los estudiantes cuando usan las herramientas de comunicación.

Segunda pregunta de investigación. ¿Qué acercamientos y formas de resolver los problemas muestran los estudiantes cuando usan sistemáticamente algunos medios de comunicación y un Sistema de Geometría Dinámica?

En este sentido, se puede decir que el uso sistemático de los nuevos medios de comunicación y de las tecnologías para la actividad matemática favorecieron los hábitos de razonamiento matemático. La construcción de modelos dinámicos permitió que los estudiantes construyeran e identificaran objetos matemáticos y conceptos, definieran variables, buscaran relaciones, analizaran casos más simples, hicieran deducciones e interpretaran las soluciones. El acceso a los videos educativos de YouTube ayudó a que los estudiantes aprendieran a organizar las soluciones mediante cálculos y manipulaciones algebraicas, así como a verificar y argumentar dichas soluciones. Las participaciones en Padlet promovieron la comunicación de resultados, lo que implicó el refinamiento de las soluciones. En otras palabras, estas tecnologías en conjunto favorecen el análisis de un problema, la implementación de una estrategia, el uso de conexiones y la reflexión de la solución.

En las sesiones de trabajo, el uso de GeoGebra permitió que los estudiantes examinaran y analizaran el tipo de herramientas con las que contaban y las propiedades geométricas de la figura a construir, con la finalidad de representar el problema como un modelo dinámico que, como consecuencia, podían explorar comportamientos matemáticos de una familia de objetos a través del arrastre, buscar el lugar geométrico, y expresar numéricamente los atributos o gráficas del modelo. Por ejemplo, en la construcción del cuadrado se observó que Israel utilizó la herramienta (comando) polígono regular, que construye el cuadrado de manera automática, esto le permitió analizar el lugar geométrico de uno de sus vértices y graficarlo, para posteriormente trazar el cuadrado sin ayuda del comando. Es decir, gracias al SGD el estudiante descubre una propiedad del cuadrado y genera un plan para trazarlo. Otro caso fue el de Miguel, quién utilizó el comando circunferencia para trasladar la medida del segmento dado a uno de los ejes y completar la construcción del cuadrado. Ambos resultados exhiben una forma distinta de pensar el problema en términos de los comandos.

Trazar las gráficas relacionadas con el perímetro y el área de los modelos dinámicos, fue una actividad que evidenció el uso del SGD como un instrumento de verificación. Por ejemplo, en la figura 15 se observa que los estudiantes definen los puntos (E y F) que describen el comportamiento del perímetro y área cuando se mueve el punto B, sin embargo, trazan dos rectas que pasan por cada punto respectivamente y el origen, asignándolas como las gráficas correspondientes al modelo. Enseguida activan el rastro de los puntos E y F (Fig. 16), permitiéndoles observar que la recta AF no representaba a la gráfica del área, además se generó una discusión en torno a los lugares geométricos. En la Tarea 3 (Fig. 46) Antonio también usa la opción rastro para verificar si sus gráficas eran correctas.

La revisión de los videos educativos de YouTube aportó el sustento algebraico al análisis y soluciones visuales encontradas con GeoGebra. Es decir, los estudiantes aprendieron o reforzaron fórmulas, cálculos y procedimientos algebraicos que les permitieron expresar los resultados visuales en términos algebraicos, consiguiendo una representación distinta para la solución que sirve como sustento o argumentación. Por ejemplo, en la cuarta sesión se observa que los estudiantes plantean una ecuación cuadrática a partir de las gráficas mostradas por Ángel (Fig. 17), de la cual, identifican sus coeficientes, aplican la fórmula general y factorización y verifican resultados (figuras 19, 20, 21, 22). Estos procedimientos son los mismos que se muestran en los videos de YouTube que compartieron en Padlet (Fig. 29).

Padlet se pensó como un medio para que los estudiantes discutieran sus acercamientos y refinaran sus resultados finales, sin embargo, solo participaban compartiendo una solución o información, sin atender o revisar las participaciones de sus compañeros. Por lo tanto, sirvió como un espacio donde el profesor podía dar seguimiento a los resultados mostrados por los estudiantes. Por ejemplo, con el uso de los muros digitales se observó que un video de YouTube compartido para resolver un problema no rutinario fue insuficiente, pues los estudiantes muestran respuestas generales o de casos particulares sin justificar matemáticamente. Es decir, Padlet permitió observar esa limitante del video.

5.2 Reflexiones finales

Las interacciones entre estudiantes y profesor, así como las formas de resolver el problema y actividades relacionadas, fueron resultado del uso coordinado de las tecnologías digitales en esta investigación. Por un lado, el SGD ayudó a que un problema rutinario se convirtiera en una actividad productiva donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de identificar y explorar relaciones matemáticas, representar, analizar, argumentar y conectar diferentes conceptos y contenidos matemáticos a partir de la extensión del problema. Por otro lado, los nuevos medios de comunicación ayudaron a que los estudiantes se involucraran en procesos de búsqueda de información, revisión de material audiovisual, discriminación y comunicación de resultados.

Los resultados de esta investigación pueden servir como guía para implementar el uso coordinado de los nuevos medios de comunicación, como YouTube y Padlet, y las tecnologías de representación, como GeoGebra, en actividades de enseñanza aprendizaje que desarrollen en el estudiante una forma de pensar y disposición hacia el estudio de las matemáticas, donde exhiban distintas formas de representar fenómenos, identifiquen relaciones y patrones, formulen conjeturas, justifiquen y comuniquen resultados.

Como el uso coordinado y sistemático de este tipo de tecnologías permite que los estudiantes puedan reforzar o aprender fórmulas, cálculos o procedimientos algebraicos por su cuenta, entonces es posible que los profesores dispongan de tiempo para plantear problemas no rutinarios sin desatender el curriculum. Así, los estudiantes comienzan a desarrollar distintos hábitos de razonamiento matemático, extender o buscar conexiones y eventualmente formular sus propios problemas o preguntas. También, puede promover que los estudiantes sean parte de una comunidad que, como cualquier otra, les permite aprender de las ideas expuestas por los integrantes así como compartir las suyas. En este sentido, el entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas pueden ser más accesible al resolver cuestionamientos y problemas tanto en aula como fuera del horario de clases.

Una de las limitaciones de esta investigación fue el no encontrar videos educativos de YouTube que promuevan la discusión o formulación de preguntas matemáticas. Otra limitación fue el uso que tuvieron los estudiantes del Padlet ya que, aunque hubo participaciones, no se logró el objetivo de generar una discusión grupal. Por lo que, una posible ruta de investigación puede ser en la búsqueda de ¿cómo utilizar Padlet, YouTube u otro medio de comunicación para que incentive la discusión de resultados por parte de los estudiantes? Y ¿cómo profesores y estudiantes pueden diseñar materiales audiovisuales que se centren en promover ambientes de resolución de problemas?

Referencias

Aguilar, D. (2014). *La resolución de problemas y representación de conceptos de Geometría Analítica en un ambiente dinámico* (Tesis de maestría). Cinvestav, México.

Alagic, G., & Alagic, M. (2013). Collaborative mathematics learning in online environments. En D. Martinovic, V. Freiman & Z. Karadag (Eds.), *Visual Mathematics and Cyberlearning* (pp. 23-48). Netherlands: Springer.

Borba, M. C., Clarkson, P., & Gadanidis, G. (2013). Learning with the use of the internet. En M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 691-720). New York: Springer.

Buckingham, D. (2007). Beyond technology: Children's learning in the age of digital culture. *The Information Society, 25*(4), 281-283.

Chernobilsky, E., Nagarajan, A., & Hmelo-Silver, C. E. (2005). Problem-based learning online: multiple perspectives on collaborative knowledge construction. En *Proceedings of the 2005 conference on computer support for collaborative learning: Learning 2005: The Next 10 Years!* (pp. 53–62). Taipei: International Society of the Learning Sciences.

Gijlers, H., Saab, N., Van Joolingen, W. R., De Jong, T., & Van Hout-Wolters, B. (2009). Interaction between tool and talk: how instruction and tools support consensus building in collaborative inquiry-learning environments. *Journal of Computer Assisted Learning, 25*(3), 252–267.

Green, G. (18 de enero de 2012). My View: Flipped classrooms give every student a chance to succeed. *CNN*. Recuperado de http://schoolsohought.blogs.cnn.com/2012/01/18/my-view-flipped-classrooms-give-every-student-a-chance-to-succeed/

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *41*(4), 399-412.

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics, 30*(1), 26-31.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw W-Hill.

Huffaker, D. A., & Calvert, S. L. (2003). The new sciences of learning: Active learning, metacognition, and transfer of knowledge in e-Learning applications. *Journal of Educational Computing Research, 29*(3), 325-334.

Lawrence, W. (21 de mayo de 2014). From the Diary of a Flipped Classroom Newbie. *EdSurge*. Recuperado de: https://www.edsurge.com/news/2014-05-21-from-the-diary-of-a-flipped-classroom-newbie

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 43*(3), 325-336.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). New York: Springer.

Liang, R. Y. H., & Wang, L-Y. (2015). Singapore Youth´s digital culture of informal learning. En T-B. Lin, V. Chen & C. S. Chai (Eds.), *New Media and Learning in the 21st Century: A Socio-Cultural Perspective* (pp. 199-211). Singapore: Springer.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(1), 93-166.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teacher College Record, 108*(6), 1017–1024.

National Council of Teacher of Mathematics (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making.* VA, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teacher of Mathematics (2011). *Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making.* VA, Reston: National Council of Teacher of Mathematics.

Noroozi, O., Weinberger, A., Biemans, H. J. A., Mulder, M., & Chizari, M. (2013). Facilitating argumentative knowledge construction through a transactive discussion script in CSCL. *Computers & Education, 61*, 59–76.

Oh, S., & Jonassen, D. H. (2007). Scaffolding online argumentation during problem solving. *Journal of Computer Assisted learning, 23*(2), 95–110.

Olvera, M. (2014). *El uso de herramientas digitales en el estudio de funciones y el desarrollo de competencia matemática para la enseñanza* (Tesis doctoral). Cinvestav, México.

Ortega, F. (2014). *La resolución de problemas y el uso de un sistema de geometría dinámica en el estudio de las secciones canicas* (Tesis doctoral). Cinvestav, México.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (Combined ed.). New York: Wiley.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rivera-Dolores, J. (2012). *El uso de las hermanitas computacionales en el desarrollo de varias formas de razonar y resolver problemas matemáticos rutinarios* (Tesis doctoral). Cinvestav, México.

Santos-Trigo, M. (2007). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática, 8 (6), pp. 35-54.

Santos-Trigo, M. (2008). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technology. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 4*(4), 347-357.

Santos-Trigo, M. (2010). *La función cuadrática: enfoque de resolución de problemas*. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2014). *La Resolución De Problemas Matemáticos: Fundamentos Cognitivos*. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2015). Uso coordinado de tecnología digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI. En X. Martínez-Ruiz & P. Camarena-Gallardo (Coords.), *La educación matemática en el siglo XXI*. ISBN: 978-607-414-495-6, pp. 133-153.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal whit routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS*, ISSN:1051-1970, *19*(3): 260- 279.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 279-302.

Santos-Trigo, M., & Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technology to frame and foster learners' problem-solving experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 189-207). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. Publicación anticipada en línea. doi: 10.1007/s11858-016-0757-0

Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinate use of digital technologies in learning enviroments. En L. Uden, J. Sinclair, Y. Tao & D. Liberona (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 61-71). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem solving reasoning. En L. Uden, D. Liberona & T. Welzer (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 298-309). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Reyes-Rodríguez, A., & Espinosa-Pérez, H. (2007). Musing on the use of dynamic software and mathematics epistemology. *Teaching Mathematics and Its Applications, 26*(4), 167-178.

Santos-Trigo, M., & Reyes-Rodríguez, A. (2011): Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(3), pp. 313-336.

Santos-Trigo, M., & Reyes-Rodríguez, A. (2016). The use of digital technology in finding multiple paths to solve and extend an equilateral triangle task. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(1), 58-81.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Ed. Horsori.

Socas, M. M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista Números.* Vol. 77, pp. 5-34.

Tawfik, A., Sánchez, L., & Saparova, D. (2014). The effects of case libraries in supporting collaborative problem-solving an online learning environment. *Technology, Knowledge and Learning, 19*(3), 332-358.

Tzu-Bin, L., Chen, V., & Chai, C. (Eds.) (2015). Emerging practices and issues of new media and learning. *New Media and Learning in the 21st Century: A Socio-Cultural Perspective* (pp. 1-8). Singapore: Springer.