



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I. P. N.**

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

**“El papel del convencimiento y la interacción entre pares durante el intercambio de resoluciones de un problema de comparación de razones.”**

Tesis que presenta

**Heber David Gomez Lazaro**

para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias**

en la:

**Especialidad de Matemática Educativa**

Directora de la Tesis:

**Dra. Mirela Rigo Lemini**

Ciudad de México

Noviembre de 2017



## AGRADECIMIENTOS

Mis sinceros agradecimientos a la Dra. Mirela Rigo, quién me aceptó en el programa de posgrado y me acogió con entusiasmo, compromiso, confianza, energía, paciencia y trabajo, mucho trabajo. Sin duda es un gran ejemplo a seguir.

También agradezco mucho el apoyo, la comprensión y el amor de mi familia, especialmente a mi esposa Alicia Estrada.

Por supuesto que no debo olvidar agradecer a todos mis amigos, quienes me tendieron la mano, me alentaron y me distrajeron en los momentos necesarios.

Finalmente, agradezco al CONACYT por la beca y los apoyos que me permitieron proseguir con mi formación profesional; al CINVESTAV por permitirme ser parte de la gran institución que es; a los doctores y personal del Departamento de Matemática Educativa por la gran labor que desarrollan día con día y el ímpetu que nos contagian a los alumnos; a mis compañeros de estudio durante la maestría por su entusiasmo, su compromiso y su generosidad al compartir sus conocimientos y su trabajo y, por último, a la DGEST, particularmente al Lic. Manuel Salgado Cuevas, por facilitarme las vías para continuar mi camino.



## **DEDICATORIA**

A mis familiares omnipresentes, es decir, aquellos que se han adelantado en el camino, sobre todo a mi madre Hermelinda y a mi hermano Luis Eber.

A mis hijos Naolli Isai y Xentli Violeta, por ellos continuaré creciendo, en ellos se concentran mis esfuerzos.

A mi esposa Alicia, con mucho amor.



## ÍNDICE DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS.....	III
DEDICATORIA .....	V
ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS.....	XI
RESUMEN .....	XIII
ABSTRACT.....	XIII

### CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES DEL ESTUDIO, PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y DESGLOSE DEL CONTENIDO DE LOS CAPÍTULOS.....	1
Antecedentes del estudio.....	1
Preguntas de investigación .....	3
Desglose del contenido de los capítulos.....	4

### CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE BIBLIOGRAFÍA .....	6
Sobre la interacción entre pares.....	6
Sobre temas de convencimiento .....	8
Sobre proporcionalidad en la escuela y problemas de comparación de razones.....	9

### CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO .....	12
Sobre las interacciones .....	12
Algunas propiedades de los estados epistémicos.....	16
Distintos tipos de estados epistémicos de convencimiento .....	16
Sobre la noción de Account.....	19
Sobre la Teoría del Aprendizaje Significativo .....	19

## CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA .....	23
Métodos de recolección de datos .....	25
Herramientas de análisis .....	27
Triangulación .....	29
Comparaciones Constantes.....	29
Muestreo Teórico .....	30
Sobre el uso de bibliografía .....	30
Uso del modelo de Toulmin.....	30

## CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE RESULTADOS CON RELACIÓN A LA TAREA.....	32
Trabajo empírico con los profesores .....	33
El instrumento .....	33
Presentación de las categorías .....	34
Manipulación interna.....	35
Comparación entre ofertas.....	35
Referentes. Número de botellas en su conjunto.....	36
Referentes. Número ordinal de botella sobre el que recae el descuento	36
Referentes. Costo .....	36
Presentación de algunos casos ilustrativos.....	39
Resolución: Relativo multiplicativo decimal.....	40
Resolución: Relativo multiplicativo porcentaje .....	40
Resolución: Tránsito de Aditivo a Relativo por porcentaje.....	41
Resolución: Relativo Empírico por precio .....	42
Resolución: Absoluto por precio .....	43
Resolución: Absoluto porcentajes calculados mentalmente .....	44
Trabajo empírico con los estudiantes .....	46
El instrumento.....	46



Algunos resultados cuantitativos.....	49
---------------------------------------	----

## CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE RESULTADOS SOBRE LA INTERACCIÓN ENTRE PARES	50
Consideraciones generales sobre la investigación relativa a la interacción entre pares y la elección de los participantes .....	50
PRIMER TRABAJO ANALÍTICO .....	51
Precisiones sobre el marco teórico interpretativo y sobre la metodología.	51
ANÁLISIS EMPÍRICO DE LAS INTERACCIONES .....	53
Categorías para el análisis de las interacciones .....	53
Intercambio productivo .....	53
Intercambio de menor productividad .....	53
Intercambio neutral .....	53
Análisis interacción Raúl-José.....	54
Raúl, primera intervención .....	54
Raúl y el investigador .....	57
José y Raúl.....	57
Consideraciones sobre la interacción.....	60
SEGUNDO TRABAJO ANALÍTICO .....	62
Consideraciones metodológicas .....	62
Descripción de categorías identificadas relacionadas con las interlocuciones .....	63
Escucha atenta, interesada y reflexiva.....	63
Interlocución inductiva sustantiva.....	63
Interlocución inductiva no sustantiva.....	63
Interlocución no inductiva. ....	64
Análisis de procesos .....	64
Descripción de la interacción .....	74
Raúl.....	74
El investigador .....	74

José .....	75
Algunas consideraciones preliminares sobre la interacción Raúl - José ....	77
CAPÍTULO 7	
ALGUNAS EXPLICACIONES PRELIMINARES QUE PRETENDEN DAR RESPUESTA A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y ALGUNAS CONSIDERACIONES PARA LA DIDÁCTICA.....	79
Posibles razones de cambios en los estados epistémicos y en los niveles de comprensión: el caso de Raúl en su interacción con José y el investigador .....	79
Sobre algunas condiciones para las interacciones provechosas .....	87
Conclusiones.....	90
REFERENCIAS .....	93
ANEXOS .....	97

## ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

Tabla 1 - Tipos de convencimiento.....	17
Tabla 2 - Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda.....	18
Figura 1 - La tarea de los vinos.....	33
Figura 2 - Diagrama de árbol del memo de resoluciones.....	37
Tabla 3 - Memo de construcción de claves de resolución de los maestros ....	38
Tabla 4 - Información de los docentes participantes.....	39
Tabla 5 - Resolución Docente 2.....	40
Tabla 6 - Resolución docente 5.....	40
Tabla 7 - Resolución docente 3.....	41
Tabla 8 - Resolución docente 1.....	42
Tabla 9 - Resolución docente 6, parte 1.....	43
Tabla 10 - Resolución docente 6, parte 2.....	44
Tabla 11 - Resolución docente 4.....	44
Figura 3 - La tarea de comparación de razones aplicada a estudiantes.....	46
Tabla 12 - Memo de construcción de claves de resolución de los alumnos...	48
Tabla 13 - Análisis Funcional. Interacción Raúl-José. ....	56
Tabla 14 - Análisis de procesos. Interacción Raúl – José.....	64
Tabla 15. Tipo de interlocuciones identificadas en los procesos de interacción.....	78
Figura 4 – Diagrama de análisis del proceso de Raúl.....	80
Tabla 16 - Tipo de interlocuciones en las interacciones.....	90
Tabla AX1. Análisis funcional de los argumentos de la interacción Andrea – Alexa.....	134
Tabla MS1. Análisis funcional de los argumentos de la interacción Samantha – Montserrat.....	136
Tabla RA1. Análisis funcional de los argumentos de la interacción Rodrigo – Alejandro.....	139
Tabla CE1. Análisis funcional de los argumentos de la interacción Cassandra - Erasmo.....	142



## RESUMEN

El presente estudio es un trabajo de corte cualitativo con análisis interpretativo de los datos, el cual se llevó a cabo utilizando las herramientas analíticas propuestas en la metodología y está inspirado en los preceptos que rigen la Teoría Fundamentada.

El estudio se divide en dos partes, por un lado, los esfuerzos se centraron en desvelar las condiciones necesarias para que una interacción entre pares resulte provechosa para los participantes y, por otro, se intenta revelar las relaciones que se dan entre los estados epistémicos de convencimiento y la construcción del aprendizaje en el contexto de la interacción. Para tal efecto, se aplicó una tarea de comparación de razones a alumnos de tercer grado de secundaria y, de entre aquellos que ofrecen argumentos, se eligieron a 5 parejas para que intercambiaran sus resoluciones y conformaran la base empírica del estudio. Se presenta el análisis detallado de la interacción de una de las parejas, considerando que las categorías obtenidas surgen de las comparaciones constantes entre todos los datos obtenidos.

## ABSTRACT

The present study is a qualitative work with an interpretive analysis of the data, which was carried out using the analytical tools proposed in the methodology and is inspired by the precepts that govern the Grounded Theory.

The study is divided into two parts, on the one hand, the efforts were focused on revealing the conditions necessary for an interaction between peers to be beneficial to the participants and, on the other, an attempt is made to reveal the relationships that occur between the epistemic states of convincing and building learning in the context of interaction. For this purpose, a task of comparing reasons was applied to third grade students and, among those who offer arguments, 5 couples were chosen to exchange their resolutions and to form the empirical basis of the study. We present the detailed analysis of the interaction of one of the pairs, considering that the categories obtained arise from the constant comparisons between all the data obtained.



### ANTECEDENTES DEL ESTUDIO, PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y DESGLOSE DEL CONTENIDO DE LOS CAPÍTULOS

#### Antecedentes del estudio

El trabajo que aquí se expone versa en torno a fenómenos que se dan durante el intercambio de resoluciones de una tarea de comparación de razones que llevan a cabo parejas de estudiantes de 3er grado de secundaria. Se espera poder identificar el papel que juega el convencimiento en la interacción entre pares y la relación que guarda con la comprensión que durante estos intercambios consigue cada sujeto, así como poder distinguir y caracterizar algunas condiciones que hacen posible que la interacción resulte cognitivamente provechosa para los participantes.

Para conseguir lo anterior, la metodología utilizada en esta investigación se inspiró en las ideas y preceptos de la Teoría Fundamentada. El presente documento se ha construido con la intención de trascender la descripción y se enmarca en el camino de la ordenación conceptual (Corbin & Strauss, 2015, p. 61), ya que se llegan a formular y ordenar algunas categorías, con sus propiedades y dimensiones, a partir de las cuales **se arman algunas explicaciones sobre los procesos** identificados en los datos empíricos.

La idea surge a partir de la experiencia docente, guiada por los principios establecidos en el currículum oficial que se derivan de los Planes y Programas de Estudio para la Educación Básica, emitidos en el año 2011, que pretenden incluir, como parte de la organización del trabajo escolar, la colaboración entre los alumnos como un medio efectivo para la construcción del conocimiento.

Algunos autores (Goos, Galbraith & Renshaw, 2002; Smith, 2015; Stacey, 1992; Topping, 2005) han tratado de describir diversos factores que parecen incidir en la interacción entre pares. Sin embargo, aunque no son claras las posibles condiciones que pueden permitir eventualmente que los alumnos que participan en un intercambio entre pares consigan incrementar sus

aprendizajes, sus investigaciones muestran que la interacción entre alumnos no siempre resulta provechosa para los participantes. Dado lo anterior, la idea que promueve el currículo escolar acerca de la eficacia de la interacción entre pares para construir nuevos aprendizajes parece ser una idea muy optimista: en todo caso, parecería conveniente modularla.

La interacción entre pares se promueve como un método pedagógico para estimular el aprendizaje, aunque, por otro lado, las investigaciones dan cuenta de sus limitaciones y dificultades.

Es a partir de estas consideraciones, que el fenómeno de la interacción entre pares cobró gran interés en el autor de este trabajo como tema de investigación. Específicamente, interesa preguntarse, como ya se dijo, por algunas de las condiciones que pudieran impulsar eventualmente interacciones cognitivamente provechosas para los participantes.

Por otra parte, cuando las personas intercambian argumentos, ellas suelen intentar que la persona con la que interactúan comprenda lo que se les está explicando; pero, por otro lado, ellas también suelen buscar convencer al otro de sus argumentos. En ese sentido, el convencimiento es un fenómeno que se encuentra presente a lo largo de las interacciones y que puede afectar su desarrollo (Perelman, 1989).

Ya que buscar la comprensión y el convencimiento es un objetivo casi omnipresente en toda interacción, es plausible pensar que lo es también en las interacciones entre los alumnos que se dan en el marco de la enseñanza escolar.

Atendiendo a las anteriores consideraciones, en este trabajo también se pretenden investigar, en las interacciones entre pares, fenómenos relacionados con el papel que ahí juega el convencimiento y su relación con la comprensión.

De hecho, existen diversos estudios sobre las mutuas determinaciones que se dan entre la comprensión y el convencimiento en el marco del aprendizaje de las matemáticas (Rigo, 2009, 2010, 2014; Rigo y Martínez, 2013, 2015). Estas investigaciones representan un antecedente para el presente trabajo.



Para detonar las interacciones había que poner sobre la mesa de discusión un tema conceptualmente rico, con tareas asociadas que dieran pie a diferentes interpretaciones. En ese sentido, la razón y la proporción son un tema de las matemáticas que vertebra muchos otros temas y conceptos (Lamon, 1999), además de que ha sido ampliamente revisado y discutido en la literatura.

Por ejemplo, Freudenthal (1983) desarrolla una fenomenología didáctica alrededor del tema mientras que autores como Lamon (1999) y Hart (2004) han enfocado sus esfuerzos en identificar las principales dificultades que tienen los jóvenes para construir un pensamiento de tipo relativo, es decir, asociado a estructuras de tipo multiplicativo; Fernández (2010) y Gómez, Pérez-Tyteca, Monje y García (2013, 2014) han realizado trabajos empíricos sobre comparación de razones y han aportado ideas afines a los autores ya citados. Además, Block (2006) profundiza en el tema y pone de manifiesto la importancia que tiene la inclusión de los temas de proporcionalidad en el currículo nacional con un enfoque pertinente, por lo que ha desarrollado materiales para la formación docente en los que deja muy clara esa postura.

### **Preguntas de investigación**

A partir de lo anterior el camino de la investigación quedó definido y se tomó la decisión de enfocar los esfuerzos analíticos en torno a dos cuestionamientos principales.

Por un lado, en la investigación se trata de responder a la siguiente pregunta asociada a la interacción entre pares:

¿Qué condiciones se pueden identificar en las interacciones entre pares para que resulten cognitivamente provechosas?

Por otro lado, se busca responder a cuestionamientos relacionados con el convencimiento. En esta dirección se busca responder a las siguientes preguntas:

¿Qué papel juega el convencimiento en el marco de una interacción entre pares?

¿Cómo se da el proceso de modificación del convencimiento en una interacción entre pares y cómo incide en la construcción del aprendizaje?

En lo que resta del documento, cuyo desglose de contenidos se expone en lo que sigue, se intenta dar una respuesta, con fundamento empírico, a estas interrogantes.

### **Desglose del contenido de los capítulos**

En el segundo capítulo se encuentra una revisión bibliográfica sobre los temas principales que se abordan en el presente trabajo, es decir, sobre el convencimiento, sobre las interacciones entre pares y sobre proporcionalidad

En el capítulo 3 se encuentra el marco teórico, en el cual se sostienen algunas afirmaciones del presente estudio y en el que se basa una parte del análisis de los datos empíricos.

El cuarto capítulo está dedicado a la exposición de la metodología, basada en algunas pautas de la Teoría Fundamentada de Corbin & Strauss (2015), asimismo contiene los métodos de recolección de datos, los métodos de análisis, las consideraciones del estudio y algunas características claves del mismo.

En los capítulos 5 y 6 se ofrecen las explicaciones encontradas en dos momentos diferentes del trabajo. En el primero, se exponen las ideas que fueron plasmadas en un artículo de investigación que tuvo a bien ser arbitrado y aceptado para el XXI Simposio de la SEIEM (*ver anexo 6*). Sin embargo, dada la naturaleza de la metodología adoptada y a partir de algunas observaciones hechas por los árbitros, surgieron nuevas interrogantes, nuevas posturas y enfoques de análisis que derivaron en un segundo trabajo analítico en el que se ofrecen explicaciones todavía preliminares, pero con más profundidad que en el primer estudio. En ese sentido, esos dos capítulos son un ejemplo de cómo la metodología elegida

lleva naturalmente a profundizar en los datos para tratar de dar explicaciones cada vez más complejas, pero en las que no se pierda la voz de los participantes.

Las conclusiones preliminares que se alcanzaron gracias a los procesos analíticos anteriores se exponen en el capítulo 7; ahí también se intenta dar respuestas aceptables a las preguntas que orientaron la presente investigación.

Finalmente se presenta un apartado de Anexos en los que se encontrarán los materiales básicos del estudio, algunos de los memos y esquemas utilizados tanto para el análisis como en la búsqueda de inspiración para ese trabajo analítico.

Teniendo claridad de las vicisitudes que conlleva intentar dar explicaciones plausibles con fundamento se ofrece el presente trabajo de corte cualitativo con análisis interpretativo, orientado e inspirado en algunos preceptos de la Teoría Fundamentada.

### REVISIÓN DE BIBLIOGRAFÍA

En esta parte del documento se reúnen y presentan las síntesis de aquellos trabajos que formaron parte de la inspiración para desarrollar el presente estudio. Para mayor claridad se presentan en tres grandes bloques temáticos, a saber: en primer lugar, aparecen aquellos trabajos que abordan temas sobre interacción; en seguida se revisan los trabajos que versan sobre el convencimiento y su relación con el aprendizaje; finalmente, la revisión bibliográfica se enfoca en los trabajos que hay sobre proporcionalidad en la escuela y sobre resolución de problemas de comparación de razones.

#### **Sobre la interacción entre pares**

El aprendizaje colaborativo aparece de forma recurrente en la literatura especializada como un medio efectivo para potenciar el aprendizaje en el contexto escolar. Esta noción forma parte de la base del enfoque didáctico del programa de estudios de matemáticas publicado en México por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en el año 2011 en el que indica:

*“Lograr que los alumnos aprendan a trabajar de manera colaborativa. Es importante porque ofrece a los alumnos la posibilidad de expresar sus ideas y de enriquecerlas con las opiniones de los demás, ya que desarrollan la actitud de colaboración y la habilidad para argumentar; además, de esta manera se facilita la puesta en común de los procedimientos que encuentran.” (SEP, 2011a, p. 21)*

Desde ese punto de vista, el trabajo colaborativo es una herramienta de aprendizaje que ofrece beneficios importantes, al grado de que “trabajar en colaboración para construir el aprendizaje” es uno de los principios pedagógicos que rigen el Plan de estudios 2011 (SEP, 2011b, p. 28)

Esta idea cambia por completo la visión y el papel del docente de matemáticas en el aula, por lo que esa figura pasa de ser quien comparte o transmite su conocimiento de manera frontal a ser quien diseñe y ponga en práctica diversas estrategias didácticas con problemas articulados interesantes para que los alumnos los resuelvan con los medios a su alcance

(sus conocimientos previos), argumenten su resolución, la compartan en colectivo y lleguen a acuerdos sobre la mejor manera de resolver la situación planteada (SEP, 2001a, p. 22)

En lo anterior subyace la idea de la interacción entre pares como un medio efectivo para adquirir y fortalecer el conocimiento. En esta dirección, los trabajos de Topping (2005) y de Smith (2015) revisan las diferentes modalidades de interacción que existen. Ellos describen diferentes tipos de interacción entre pares como la tutoría, la asistencia, la instrucción, el agrupamiento, el monitoreo o la revisión; cada tipo de interacción tiene una forma particular de organización y se pone en práctica persiguiendo diferentes objetivos. Esos trabajos cierran con una serie de sugerencias didácticas dirigidas a docentes o tutores, a quienes, entre otras cosas, se les propone seguir reportando las dificultades encontradas, para que esto permita el rediseño de nuevos cursos a docentes o el diseño y aplicación de nuevas estrategias. En el presente trabajo se considera que la interacción entre pares es un proceso de argumentación entre personas de la misma edad con un nivel de conocimientos similar, las particularidades de la organización del trabajo entre pares que se pusieron en práctica durante el estudio se encuentran en el capítulo dedicado a la metodología (*ver capítulo 4*).

Goos, Galbraith & Renshaw (2002) también se centran en la investigación sobre la interacción entre pares, pero también hablan sobre la relación que guarda este tipo de interacción con la zona de desarrollo próximo descrita por Vigotsky, así como con la socialización del conocimiento. Ellos tratan de describir algunas de las razones por las que las interacciones entre alumnos no siempre son productivas, aduciendo que las interacciones llegan a producir conflictos y que sus alcances llegan a ser limitados. En su estudio también consideran las ideas de Stacey (1992) quién, con base en evidencias empíricas de casos de interacción entre pares, muestra que existen obstáculos para que las interacciones entre pares den como resultado un aprendizaje para los participantes, incluso llega a indicar de manera tajante que “dos cabezas no siempre son mejores que una”.

Por otra parte, Crook (1988) en su libro “Ordenadores y aprendizaje colaborativo” indica la importancia que tienen los conocimientos comunes a

la hora de interactuar. Aunque su estudio versa sobre el uso colaborativo de computadoras en la resolución de problemas utilizando diferentes tipos de organización y analizando desde diversas perspectivas, ahí se encuentran algunas ideas importantes para el presente trabajo, sobre todo cuando alude a la intersubjetividad que subyace a la interacción entre pares. Crook indica que adoptamos “actitudes intersubjetivas” en situaciones en las que la base del conocimiento común es sólida y esas actitudes aparecen en situaciones que solemos calificar como “colaborativas”; esto resulta ser un pilar fundamental de los logros en los diversos ambientes del aprendizaje organizado (p. 13). En el presente estudio se busca evidencia de lo anterior a partir de los análisis empíricos que se presentan en los capítulos 6 y 7.

### **Sobre temas de convencimiento**

Existen diversas investigaciones en psicología y en educación matemática en las que se examinan temas como el convencimiento, la seguridad o la duda que experimentan sujetos ante diferentes posturas o argumentaciones; las segundas se enfocan en el fenómeno ante resultados o hechos de las matemáticas que experimentan tanto matemáticos expertos como alumnos y docentes frente a grupo.

Como ejemplo de las primeras, Abelson (1987) posiciona al convencimiento como un tema relevante a estudiar desde la perspectiva psicológica ya que, a partir de datos empíricos concretos obtenidos de una serie de estudios de encuesta, es capaz de demostrar la presencia del convencimiento como fenómeno relevante, asociado directamente a la toma de decisiones y a las acciones de las personas.

En otra investigación presentada por Fischbein en 1980 se indica que el principal impulso y las sugerencias más importantes que conciernen a la necesidad de investigar las formas intuitivas de conocimiento (entre las que identifica tres tipos de convencimiento) tienen su origen en las ciencias y las matemáticas, más específicamente en la educación científica y en la matemática educativa. En otro orden de ideas, Hersh (1993) desarrolla un documento en el que se indica que, en matemática educativa, una prueba (o demostración) se desarrolla para convencer y explicar. Hersh revela que para el matemático experto una prueba puede ser sólo la permutación de

símbolos lógicos según ciertas reglas formales, sin embargo, en el aula se ofrecen demostraciones o pruebas que funcionan como argumentos convincentes, por lo que resulta importante indagar acerca de la relevancia del convencimiento en el desarrollo de conocimiento matemático (incluso un matemático experto expresa en una entrevista que una demostración formal es un argumento que convence a los expertos).

En ese sentido, en los trabajos que exponen Rigo, Rojano & Pluvinage (2011), Rigo (2013) y Rigo & Martínez (2016) se van desarrollando análisis con diversos enfoques y cada vez a mayor profundidad de ese fenómeno. Además, se construyen diferentes explicaciones y se propone establecer con claridad algunos conceptos para dejar de lado la polisemia “que puede dificultar o llegar a imposibilitar la concertación y los acuerdos entre los expertos y, en consecuencia, el avance colegiado en la línea de investigación.” (Rigo & Martínez, 2016, p. 1). Además, ofrecen una serie de herramientas que posibilitan la identificación de estados y esquemas epistémicos en diversos contextos. Encontraremos un desarrollo más amplio de lo anterior en el apartado correspondiente a los “estados epistémicos” en el siguiente capítulo.

### **Sobre proporcionalidad en la escuela y problemas de comparación de razones.**

En todo el mundo se desarrollan investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la razón y proporción. Es un tema rico en matices y que se ha investigado y discutido ampliamente, sin embargo, parece ser una fuente inagotable de inspiración para los investigadores y sin duda es un tema relevante para el desarrollo del pensamiento relativo y de las habilidades matemáticas. En particular, el dominio de los temas de proporcionalidad despierta un gran interés, como ejemplo se cuenta con el trabajo presentado por Block (2001) en el que el conocimiento sobre razones y proporciones es analizado histórica y empíricamente para “mostrar que este saber anacrónico, caído en desuso en la disciplina, puede presentar un interés actual desde el punto de vista didáctico” (Block, 2001, p. 7)

En concordancia, Block, Martínez, Mendoza y Ramírez (2013), a partir de una experiencia de formación en didáctica de las matemáticas dirigida a

maestros-formadores, estudian las condiciones en las que la observación y el análisis de prácticas de enseñanza pueden adquirir un valor formativo. Ahí, revisan algunos factores que pueden ayudar a superar algunas dificultades encontradas con respecto al conocimiento sobre razones y proporcionalidad.

De manera similar, Balderas (2010) explora y analiza la enseñanza de la noción de proporcionalidad, indicando la importancia que tienen los conocimientos de los maestros. En su trabajo aparecen problemas de comparación de razones muy sencillos que, indica, no implicaron mayores dificultades para los docentes, aunque deja ver que existen algunos errores conceptuales recurrentes en sus resoluciones. En contraste, la tarea que se plantea a los docentes en la fase de muestreo teórico de este trabajo de investigación resultó ser un reto para algunos de los docentes que lo resolvieron. Y fue de tal forma que se pudieron obtener datos empíricos con los que se hizo posible el desarrollo de categorías que evidencian tanto los errores recurrentes de los docentes como aquellas características de la tarea que resultan importantes. Esta línea de pensamiento nos llevó a replantear los resultados obtenidos en una situación similar en alumnos de tercer grado de secundaria, inspirando el proceso de muestreo teórico que será explicado en el apartado de metodología (*ver Capítulo 4*).

Una propuesta que aborda los temas de proporcionalidad para favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional es la que presenta Lamon (1999), quien considera que el razonamiento proporcional es fundamental para el análisis del cambio, sobre todo desde una perspectiva relativa en la que se incluyen relaciones multiplicativas, y no tanto en términos absolutos, en el que están involucradas solamente las estructuras aditivas. Con base en esta consideración, describe las estrategias que utilizan los niños a la hora de tratar de resolver tareas que involucran razones y proporciones, es capaz de explicar y diferenciar aquellas que son de tipo absoluto (o aditivas), las que se encuentran en tránsito de lo absoluto a lo relativo (que combinan estrategias aditivas y multiplicativas) y las que son de tipo relativo (o multiplicativas).

En otro documento, Hart (1984) presenta y describe algunas estrategias que producen los niños y errores que cometen a la hora de enfrentarse a tareas de proporcionalidad. Ella indica que la evidencia sugiere que los niños



encuentran que los temas de razón y proporcionalidad son muy difíciles (p. 7) y aparece recurrentemente que los estudiantes evitan la multiplicación, por lo que constantemente utilizan estrategias de adición erróneas, alejándose de métodos multiplicativos.

En la propuesta de Gómez y García (2014), se asume la precariedad de la enseñanza tradicional de la razón y resaltan la importancia de hablar sobre desigualdad de razones, dado que ese tipo de problemas involucra técnicas para homogeneizar normalizaciones, cuestión fundamental en el desarrollo del pensamiento de tipo relativo que permite comparar razones aun cuando tienen diferentes normalizaciones.

La lectura y el análisis de todo lo descrito en los párrafos anteriores fue inspirador para el autor del presente trabajo, surgieron infinidad de preguntas interesantes, pero, no sin dificultad, se consiguieron centrar los esfuerzos en aquellas que dirigen este estudio.

### MARCO TEÓRICO

#### **Sobre las interacciones**

Cómo se expuso en el primer apartado del capítulo anterior, distintos investigadores sobre el tema (Goos, Galbraith & Renshaw, 2002; Smith, 2015; Stacey, 1992; Topping, 2005) han descrito algunos factores que intervienen para intentar hacer que una interacción entre parejas de estudiantes resulte productiva y aceptan que no siempre se presentan casos de éxito. A partir de los trabajos anteriores, en éste se considera que los procesos de intercambio que se estudian empíricamente en este trabajo son lo que los autores llaman “interacciones entre pares”, es decir, el intercambio de resoluciones entre miembros de un grupo de trabajo que tienen la misma edad y similares niveles de competencia (Goos et al, 2002).

Si bien los ejemplos que exhiben los trabajos anteriores ya dan cuenta de algunas de las dificultades que implican los intercambios y la colaboración entre pares, en el presente trabajo se esbozan una serie de características que deben tenerse en cuenta a la hora de conformar las parejas que van a interactuar. Esta diferencia es un paso más dentro de la investigación que intenta profundizar sobre la interacción entre pares, además de seguir la recomendación que hacen los autores previamente revisados cuando sugieren que prosigan los estudios exploratorios y se expongan las explicaciones alcanzadas.

#### **Sobre razón y proporción**

La tarea de comparación de razones fue un medio muy importante para la obtención de los datos empíricos con los que se fundamenta la presente investigación. En primera instancia se dio importancia a los niveles de resolución de la tarea. Para tal efecto se debe tener en cuenta que la razón se ha definido de diferentes maneras a lo largo de la historia, algunas veces desde la perspectiva geométrica y otras desde perspectivas más apegadas al álgebra, sin embargo, hace falta entenderla desde la perspectiva de la razón en sí misma (desligándola de otros temas de las matemáticas), como lo hace

Freudenthal (1983) al desarrollar la fenomenología didáctica de las razones y proporciones. Él propone que “la razón es una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de números (o valores de magnitud), indicada formalmente por  $a:b = c:d$  si el par  $(a,b)$  es equivalente al par  $(c,d)$ ”. Asimismo, como parte del proceso que permite comparar razones, señala que normalizar es un complejo de técnicas, que permiten visualizar o percibir razones que, en principio, resultan difíciles de imaginar, por ende, son imprescindibles a la hora de efectuar comparación de razones (Freudenthal, 2001, p. 68). Precisando, se lleva a cabo un proceso de homogeneización de las normalizaciones para poder comparar razones cuando, considerando correctamente los datos y cuidando el factor de escala o la equivalencia, se cambia la forma en que originalmente se presentan las razones -sea en forma de razón en sí o manejada en forma de porcentaje, fracción, cociente o número decimal- para poder hacerlas comparables (Fernández, 2009, p. 52).

Tanto en el trabajo de Gómez y García (2014) como en el de Monje, Pérez-Tyteca y Gómez (2013) se expone un análisis detallado de diferentes resoluciones de algunas tareas de comparación de razones; de esto se desprende la existencia de algunas variables que determinan las decisiones de quienes se enfrentan a la resolución de ese tipo de tareas de comparación: unas son estructurales (tipo de razón) y otras de contexto (los referentes). Los autores insisten en que “las ideas sobre lo relativo [el razonamiento proporcional] son las que permiten la comparación de cantidades con referentes diferentes, transformando el referente [normalizando]” (2014, p. 376).

Para tener claridad en la interpretación de las resoluciones que proponen y defienden los alumnos en el presente estudio, se consideraron los procesos absolutos y relativos y las estrategias de resolución de problemas de comparación de razones que Lamon (1999) ha descrito en sus trabajos analíticos y de propuesta didáctica. Ella indica que la comparación de razones como tarea es fundamental en el desarrollo del pensamiento relativo (p. 12); adicionalmente sugiere que uno de los tipos de pensamiento que es esencial para desarrollar el razonamiento proporcional es la habilidad de analizar el cambio tanto en términos absolutos como en términos relativos, es decir, la capacidad de entender el cambio desde las dos perspectivas.

En otro documento, Hart (1984) presenta algunas estrategias que producen los niños a la hora de enfrentarse a tareas de proporcionalidad. Ella indica que la evidencia sugiere que los niños encuentran los temas de razón y proporcionalidad muy difíciles (p. 7). En sus datos aparece recurrentemente que los estudiantes evitan la multiplicación, más aún cuando se tiene que resolver una multiplicación entre fracciones. Constantemente utilizan estrategias de adición erróneas, alejándose de métodos multiplicativos. Una de las estrategias de los niños que expone en su investigación es la que denomina “Building up”, que es una estrategia que consiste en sumar y escalar, es decir, que involucra una estrategia multiplicativa y una aditiva. El uso de esta estrategia permite inferir que la persona que la utiliza está transitando entre el pensamiento absoluto y el relativo.

Estas consideraciones teóricas proporcionaron herramientas muy importantes para el análisis de las resoluciones de la tarea de comparación de razones que se aplica a los participantes del presente estudio. Sin embargo, cabe indicar que las categorías desarrolladas provienen de los datos empíricos, respetando las nociones que rigen la Teoría Fundamentada. Estas consideraciones particulares se abordan a profundidad en el apartado de Metodología (ver capítulo 4).

### **Sobre los estados epistémicos**

Cuando una persona manifiesta una creencia y la defiende es porque tiene razones que desde su perspectiva son suficientes para creer. Incluso si se le pide de manera adecuada que haga explícitas y explique esas ‘razones’ en las que fundamenta la verdad de su creencia (Krummheuer, 1995; Villoro, 2002), muy posiblemente sería capaz de hacerlo (Rigo & Martínez, 2016).

Cabe aclarar que en esta parte se retoman los trabajos de Rigo (2013) quien manifiesta que “en las clases de matemáticas, si bien los alumnos y sus maestros fundamentan su confianza en los enunciados matemáticos a través de mecanismos racionales para respaldar su seguridad o certeza, también recurren, en muchos casos de manera inconsciente, a mecanismos que responden a consideraciones extra-racionales.”

De esa manera, se entiende que en la clase de matemáticas se suelen dar argumentos suficientes y objetivos, desde una perspectiva externa. Es decir, los sustentos hacen referencia con consistencia y pertinencia a los contenidos de una creencia, por ejemplo, al utilizar justificaciones deductivas o argumentos experimentales o empíricos a la hora de razonar.

Sin embargo, puede ocurrir que los sustentos con los que una persona le da credibilidad a un argumento pueden ser juzgados como limitados, subjetivos, improcedentes o, incluso, como extra-rationales por algún interlocutor. En el aula suelen aparecer diferentes maneras de soportar lo creído que pueden ser de esa forma, por ejemplo, la repetición, los hábitos y la costumbre, la autoridad, los antecedentes biográficos de la persona (así es como me lo enseñaron y no me enseñarían algo falso), las razones prácticas (lo creo porque es más fácil), entre otras.

A partir de lo anterior, Rigo (2013) plantea que “a los mecanismos, tanto explícitos como implícitos, conscientes e inconscientes, deliberados o involuntarios, racionales o extra-rationales, a los que acuden habitualmente las personas para soportar sus creencias, se les denominan ‘esquemas epistémicos de sustentación’. Se trata de patrones de conductas que son invariantes bajo condiciones semejantes. Se utiliza la noción de esquema epistémico en lugar de los muy empleados términos de ‘justificación’, ‘argumento’, ‘razón’ o ‘razonamiento’, ya que estos últimos aluden a prácticas deliberadas, explícitas y sujetas a cierta lógica estricta, condiciones que no siempre cumplen los esquemas epistémicos”.

También se considera aceptable que, como se ha mostrado con anterioridad en diversos estudios, existen vivencias de convencimiento que se expresan en forma de convicción, certeza, necesidad, seguridad, confianza o duda; atadas a las creencias de contenido matemático, y concomitantemente, a los esquemas epistémicos en los que se respaldan y en los motivos que aduce la persona para creer. A esos estados internos que recaen sobre las creencias y/o sobre sus sustentos, Rigo les llama “estados epistémicos de convencimiento”.

Los estados epistémicos son estados potenciales o en latencia, y se actualizan y se expresan bajo condiciones propicias (personales, sociales, culturales),

acompañando a casi todo tipo de creencia, incluidas por supuesto, las de contenido matemático.

### **Algunas propiedades de los estados epistémicos**

#### *Distintos tipos de estados epistémicos de convencimiento*

Rigo & Martínez (2016) aseveran que “existen distintos tipos de estados epistémicos de convencimiento. Por una parte, están aquéllos en los que se experimenta un *convencimiento completo*; en este caso se identifican dos tipos de estados: los que se asocian a lo *evidente*, cuando se está frente a una proposición que no requiere de razón alguna para sustentar su verdad (como en las de tipo tautológico o las de corte perceptual), o los que se relacionan con la *certeza*, en cuyo caso la creencia requiere de razones para validarla.”

También existe un estado de convencimiento completo con relación a la *falsedad* de proposiciones absurdas cuya imposibilidad resulta evidente (como sucede e.g., con las proposiciones contradictorias).

Asimismo, existen los estados epistémicos de convencimiento parcial. Rigo & Martínez (2016) plantean que “en este caso se distinguen perceptiblemente los estados de *presunción*, en los que la persona cuenta con razones a favor de la verdad de la proposición creída, sin ser definitivas; el de *duda*, en los que las razones que se tienen apuntan, aunque no de manera contundente, hacia la falsedad de la proposición en ciernes, y el estado de ‘*duda radical*’ que se da ante la indeterminación que se genera cuando no se está en condiciones de decidir la verdad o la falsedad de una idea, es decir, ‘cuando no hay razón para asentir o disentir’ (Barcia, 1883).”

Para fines de claridad, en la Tabla 1, los autores indican las relaciones entre los diferentes tipos de convencimiento, los tipos de estados epistémicos y cómo se asocian al grado de convencimiento y a las razones involucradas.

Tabla 1 - Tipos de convencimiento

	<i>Tipos de estados epistémicos</i>	<i>Grados de convencimiento</i>	<i>Razones involucradas</i>
<i>Convencimiento completo</i>	<i>Evidencia</i>	Completamente convencido en la verdad	No se requieren de razones para validar la verdad.
	<i>Certeza</i>	Completamente convencido de la verdad	Sí se requieren de razones para validar la verdad
	<i>Evidencia de lo falso</i>	Completamente convencido de la falsedad	No se requieren de razones para validar la falsedad.
<i>Convencimiento parcial</i>	<i>Presunción</i>	Relativo convencimiento en la verdad	Se cuentan con razones sin ser definitivas
	<i>Duda</i>	Relativo convencimiento en la falsedad	Se cuentan con razones, sin ser definitivas
	<i>Duda radical</i>	Indeterminación de la verdad o falsedad	No se cuentan con razones para determinar la verdad o falsedad

Los estados epistémicos (como los incluidos en la Tabla 1) son estados de distintos grados de seguridad que además se distinguen entre ellos por las razones en las que se respaldan, es decir, pueden ser vistos como variaciones de la emoción secundaria de seguridad en las creencias o en las ideas.

Por ejemplo, la evidencia se puede pensar como un estado de seguridad total e incuestionable en torno a la veracidad de un enunciado que no requiere de razones que la justifiquen, mientras que la presunción es un estado de seguridad en la verdad de una afirmación, que puede ser baja, regular o alta y que requiere de razones que la justifiquen.

Como parte importante del análisis que se desarrolla en la presente investigación, se utiliza la propuesta de Martínez & Rigo (2014) para el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas. En concordancia con todo lo anterior, es plausible indicar que los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído) asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático.

Tabla 2 - Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

<i>Elementos del habla</i>	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo). Cuando recurre a mitigadores del lenguaje el grado de compromiso es menor (e.g., convendría)
<i>Acción</i>	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
<i>Determinación</i>	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
<i>Interés</i>	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico durante un proceso de argumentación son: -Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. -Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. -Claros y precisos.
<i>Consistencia</i>	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.



Rigo & Martínez proponen un instrumento (Tabla 2) para distinguir estados epistémicos en el que consideran que se vivencia un grado de certeza, de presunción o duda, cuando se dan muestras de cubrir, en algún grado, los criterios que describen: Mitigadores o Enfatizadores del Lenguaje, Acción, Determinación, Interés o Consistencia.

Esos criterios resultaron fundamentales en los análisis que se desarrollan en los capítulos 6 y 7. En el capítulo dedicado a la metodología (*ver capítulo 4*) se aclara su implementación.

### **Sobre la noción de Account**

La idea de *account* consiste en hacer algo comprensible a uno mismo al tiempo de hacérselo comprensible al otro, y de explicarle esa comprensión, de acuerdo con Krummheuer (1995) (quien en el tema retoma algunas ideas de Garfinkel y de Attewell). Mediante el *account* se hacen comprensibles las proposiciones mientras se hacen intersubjetivamente aceptables (Cf. Krummheuer, p. 238). Es decir, a través del *account* una persona hace comprender y convence a otra de alguna afirmación (o un hecho) y para ese proceso y en ese proceso, ella misma incrementa su comprensión y su convencimiento sobre lo dicho.

### **Sobre la Teoría del Aprendizaje Significativo**

La Teoría del Aprendizaje Significativo propuesta por Ausubel (1976) (como se muestra en el segundo esfuerzo analítico presentado en el capítulo 6 de este documento) permite ofrecer explicaciones plausibles sobre lo ocurrido durante el proceso de interacción entre pares. A pesar de que la Teoría del Aprendizaje Significativo tiene más de 50 años de haber sido divulgada, se siguen encontrando justificaciones de su fuerza explicativa. La teoría pone el énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación (Rodríguez, 2004)

Para Ausubel (1976) el aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura

cognitiva del que aprende, de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje (Ausubel, 1976). La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con él, pero no se trata de una simple unión, sino que en este proceso los nuevos contenidos adquieren significado para el sujeto produciéndose una transformación de los subsumidores de su estructura cognitiva, que resultan así progresivamente más diferenciados, elaborados y estables.

Cabe aclarar que el aprendizaje significativo no es sólo este proceso, sino que también es su producto. La atribución de significados que se hace con la nueva información es el resultado emergente de la interacción entre los subsumidores claros, estables y relevantes presentes en la estructura cognitiva y esa nueva información o contenido; como consecuencia, esos subsumidores se ven enriquecidos y modificados, dando lugar a nuevos subsumidores o ideas-ancla más potentes y explicativas que servirán de base para futuros aprendizajes (Rodríguez, 2004).

Ausubel sugiere que, para que se produzca aprendizaje significativo, es necesario que se den un par de condiciones fundamentales: en primer lugar, el alumno o aprendiz debe tener una actitud potencialmente significativa de aprendizaje, es decir, estar dispuesto a aprender de manera significativa; en segundo lugar, debe utilizarse un material que sea potencialmente significativo. Esto último implica, por un lado, que el material debe tener significado lógico, es decir, “que sea potencialmente relacionable con la estructura cognitiva del que aprende de manera no arbitraria y sustantiva” (Ausubel, 1976); y por otro lado, que existan ideas de anclaje o subsumidores adecuados en el aprendiz que permitan la interacción con el material nuevo que se presenta (sus aprendizajes previos). O, dicho de otra manera, Ausubel sugiere que para que ocurra realmente el aprendizaje significativo no basta con que el material nuevo sea intencionado y relacionable sustancialmente con las ideas correspondientes y pertinentes en el sentido abstracto, sino que también es necesario que tal contenido ideático pertinente exista en la estructura cognoscitiva del alumno en particular. En

ese sentido, los argumentos que surgen de las resoluciones de tareas matemáticas se pueden considerar materiales de aprendizaje con significado lógico que podrían ser relacionables no arbitrariamente con ideas que vengan al caso, sobre todo con aquellas ideas de anclaje o subsumidores ya presentes en los alumnos.

### **Sobre el análisis funcional de los argumentos propuesto por Toulmin**

Toulmin (2003), en su análisis funcional de los argumentos establece que se puede diferenciar la *afirmación* (C, por *claim*) cuyo valor se trata de establecer y los elementos justificatorios que se alegan como base de la afirmación, a los que denomina datos (D). Al presentar un conjunto determinado de datos como base para una afirmación estos pueden ser cuestionados, por lo que para sostener la postura aparecen proposiciones de diferente tipo: reglas, principios enunciados, etc., que permiten realizar inferencias en lugar de agregar información adicional; éstas son las *garantías* (W, por *warrant*). La garantía es incidental, explicativa y general; mientras que a los datos se apela explícitamente, a las garantías se apela implícitamente.

Detrás de las garantías puede haber otras certezas que las impregnan de autoridad y de vigencia: el *respaldo* de las garantías (B, por *backing*). El tipo de respaldo alegado por las garantías varía de un campo de argumentación a otro y se puede presentar más de un tipo de respaldo por garantía. Éstos pueden expresarse en forma de enunciados categóricos y no siempre son explícitos. Por otra parte, los *cualificadores modales* (Q por *qualifier*) son elementos del modelo de Toulmin que indican el grado de fuerza con el que se sostiene la garantía.

En el ámbito de la investigación educativa que emplea el modelo de Toulmin se afirma que un argumento se refiere a los discursos que un estudiante produce cuando trata de justificar sus conclusiones o explicaciones (Pinochet, 2015).

Para desarrollar el análisis de datos utilizando el método propuesto por Toulmin, en el presente trabajo se consideraron como *afirmaciones* a las respuestas que defendían los estudiantes; como *datos* a todas aquellas ideas y argumentos con que los alumnos sostienen la respuesta que defienden;

como *garantías* a las claves que representan el tipo de resolución que se llevó a cabo (*Ver. capítulo 5, Trabajo empírico con los alumnos*); como *respaldos* a aquellas ideas o consideraciones matemáticas o extra-matemáticas sobre las que se construyó el tipo de resolución; y como *cualificadores modales* a los estados epistémicos que mostraban los estudiantes en torno a la conclusión o a los datos. Estos estados se identificaron con base en el instrumento que aparece en la Tabla 2.

### METODOLOGÍA

El documento que aquí se presenta da cuenta de un trabajo de corte cualitativo interpretativo en el que se llevó a cabo la búsqueda de datos empíricos que permitieran arribar a explicaciones plausibles sobre el papel que juega el convencimiento en la construcción del conocimiento, específicamente, en el contexto del intercambio entre pares de resoluciones de una tarea de comparación de razones. La elección del contexto de intercambio obedece a que, tradicionalmente, ese contexto suele asociarse a intenciones de convencimiento.

Una vez elegido el contexto, un objetivo adicional que se planteó en el trabajo fue el delimitar algunas características notables que permiten arribar a interacciones de tipo productivo.

Para conseguir esos propósitos se planteó una investigación inspirada en una metodología cualitativa, la Teoría Fundamentada (*Grounded Theory*, Corbin & Strauss, 2015), en la que el análisis se basa en conceptos y categorías que provienen fundamentalmente de los datos empíricos. Se trata de un estilo de investigación en la cual se intenta construir teoría a partir de los datos empíricos y los propios constructos de los investigadores y de la iteración sucesiva entre éstos (y eventualmente, triangulados con los que provienen de la literatura). Con esto se puede ir construyendo una teoría sólida que permita rebasar la explicación de los datos específicos en aras de concebir explicaciones de fenómenos semejantes que alcancen a otros datos.

Sin embargo, es importante explicar que hacer Teoría a partir de datos empíricos es una empresa a largo plazo que no se alcanza a cubrir en un programa de posgrado de maestría, pero los preceptos de la Teoría Fundamentada, sus ideas, las herramientas que proponen y los conceptos que utilizan son muy útiles y esclarecedores a la hora de realizar una investigación de corte cualitativo. Se trata de una metodología muy didáctica en su aplicación, rigurosa en su construcción y flexible en su desarrollo. Corbin indica que hacer una investigación de corte cualitativo no significa tener mucha estructura o hacer aproximaciones analíticas muy

rígidas; por su naturaleza interpretativa es muy dinámica, es un proceso fluido (Corbin & Strauss, 2015, p. 1).

En este enfoque, el análisis, y específicamente, la construcción y delimitación de los conceptos y categorías, se da simultáneamente en dos planos: por una parte, los conceptos de los investigadores se van re-construyendo paulatinamente en un proceso iterativo de triangulación entre los datos empíricos, los términos teóricos tomados de la bibliografía (aunque en menor medida) y los propios conceptos de los investigadores; por otro lado, esos conceptos también se reconstruyen como resultado de haberlos comparado con nuevos datos empíricos, cuya recopilación se planea y decide una vez que se tienen los primeros datos empíricos analizados a la luz de los primeros conceptos.

Lo anterior permite la identificación de conceptos generales y el desarrollo de explicaciones teóricas que tienen mayores alcances, además, ofrece nuevas intuiciones sobre las experiencias o los fenómenos que son analizados. Es importante comprender que la Teoría Fundamentada es una metodología en la que el análisis y la recolección de los datos se relacionan directamente, conforme se van analizando los datos surge la necesidad de tomar nuevas muestras y ese ciclo se repite mientras continúe la investigación en curso.

En el Anexo 5 aparecen algunos memos que dejan ver ese trabajo de triangulación sucesiva e iterativa; ahí se exponen algunas categorías de análisis preliminares que sirvieron como antecedente y como inspiración para las categorías definitivas que se incluyen en los trabajos analíticos que se presentan en el Capítulo 6 de este documento.

Si bien es cierto que con esta metodología se busca crear Teoría, también es cierto que se puede utilizar para llegar a descripciones del fenómeno analizado desde diferentes perspectivas. En ese sentido, Corbin & Strauss (2015) también aclaran que existen tres principales resultados posibles cuando se está haciendo investigación cualitativa: se puede llegar a hacer descripción, ordenación conceptual o teoría. Es importante identificar el tipo de resultado que se desea alcanzar y reconocer que ese resultado depende

del entrenamiento, las habilidades, el tiempo, el tipo de método cualitativo utilizado y el propósito de la investigación (p. 59).

Se puede decir que la descripción es el tipo de resultado de investigación cualitativa más básico, sin embargo, es la base para realizar interpretaciones más abstractas, e.g., no existe ordenación conceptual ni teoría sin una previa descripción rigurosa. La descripción ya permite delinear algunos conceptos, aunque sea de manera implícita.

La ordenación conceptual es la organización de los datos en categorías discretas de acuerdo con sus propiedades y dimensiones. Esas propiedades y dimensiones provienen de la descripción previa y permiten al investigador organizar los datos en esquemas de clasificación que dan orden a la información.

Para Corbin & Strauss, la teoría denota una serie de categorías que han sido sistemáticamente desarrolladas en términos de sus propiedades y dimensiones y que se interrelacionan a través de enunciados de relación para conformar un marco teórico que explique algo sobre algún fenómeno. La cohesión de la teoría ocurre cuando se designa un concepto todavía más abstracto que está por encima de los otros conceptos, el concepto nuclear. Se trata de un esfuerzo analítico y de abstracción muy relevante y profundo.

El presente documento pretende trascender la descripción y se enmarca en el camino de la ordenación conceptual, ya que se llegan a formular y ordenar algunas categorías, con sus propiedades y dimensiones, a partir de las cuales **se arman algunas explicaciones sobre los procesos** identificados en los datos empíricos.

### **Métodos de recolección de datos**

Para obtener los datos empíricos que fundamentan este trabajo de investigación originalmente se planificaron dos fases, en las que se consideraron alumnos de 3er grado de secundaria de entre 14 y 15 años quienes, según el currículum planteado en los planes y programas de estudio, ya cuentan con al menos 5 años de experiencia trabajando con temas de proporcionalidad.

En la primera fase se eligieron dos grupos de dos Escuelas Secundarias Técnicas, una de ellas está dentro del 10% de las mejores de la Ciudad de México y otra dentro del 25%, según las estadísticas arrojadas por la prueba ENLACE 2013. Se aplicó un cuestionario con una tarea de comparación de razones (cuya descripción detallada aparece en el capítulo 5) a 66 alumnos, fue una aplicación controlada por el autor y coordinada en dos momentos del mismo día (por la mañana una escuela y por la tarde la segunda). Esos datos obtenidos fueron desglosados, analizados y triangulados con la finalidad de intentar comprender las resoluciones presentadas por los participantes y con la intención de encontrar diferentes tipos de resolución, es decir, a los datos se les aplicó un proceso de comparaciones constantes entre los datos que permitieron ir delineando categorías de resolución, así como algunas de sus propiedades y dimensiones. Las sábanas de análisis que resultaron de esa primera fase se encuentran en el Anexo 1.

Es importante mencionar que la metodología elegida condujo naturalmente a implementar un proceso de muestreo teórico. De esa forma, surgió una segunda fase, en la que se implementó la aplicación de un problema similar al planteado a los alumnos, pero ahora a un conjunto de docentes que actualmente trabajan frente a grupo. La aplicación del cuestionario también fue controlada y aplicada por el investigador. Con el análisis y las comparaciones constantes entre los nuevos datos obtenidos y los que surgieron de la primera fase se saturaron las propiedades y dimensiones de las categorías de las resoluciones de la tarea utilizadas tanto por docentes como por alumnos. El análisis de las resoluciones de los docentes aparece en el capítulo 5.

Con los resultados anteriores se puso en marcha la tercera fase, que consistió en elegir a los alumnos que ofrecían las explicaciones de su resolución más elaboradas y sustentadas con la intención de que intercambiaran sus resoluciones. Las comparaciones constantes y la categorización de las resoluciones permitieron identificar el tipo de resolución que utilizó cada alumno y el nivel de razonamiento proporcional asociado al tipo de resolución. Se escogieron alumnos de la segunda escuela debido a que es el grupo de alumnos que ofrecieron resoluciones más diversas y a la factibilidad de aplicar el estudio debido a las facilidades otorgadas por las autoridades del plantel, pero, principalmente, esos alumnos fueron



escogidos por ofrecer explicaciones a sus resoluciones y plasmarlas en los cuestionarios iniciales.

Con ese conjunto de alumnos se organizaron 5 parejas para que intercambiaran sus resoluciones. Las parejas se conformaron cruzando las categorías de resolución con el tipo de argumento ofrecido de tal forma que en cada pareja se intercambiaran resoluciones de diferentes tipos y/o se ofrecieran argumentos de tipo matemático contra argumentos de tipo extra-matemático. La intención era desatar el intercambio de argumentos entre los participantes.

Una vez elegidos los participantes, se organizaron las sesiones de interacción en un aula despejada en la que sólo estuvieran la pareja de alumnos y el investigador. Las sesiones fueron grabadas en audio y video para su posterior análisis. El investigador diseñó una serie de preguntas dirigidas a cada participante de acuerdo con el tipo de resolución y los argumentos expuestos de tal forma que la interacción se orientara hacia la exposición adecuada de las resoluciones; se tuvo cuidado de que las intervenciones del investigador no influyeran en los argumentos de los participantes. Las transcripciones de las interacciones se encuentran en el Anexo 2.

### **Herramientas de análisis**

En el libro de Corbin & Strauss sobre la Teoría Fundamentada se describen una serie de herramientas analíticas que se utilizan en la presente investigación. Para esos autores, el análisis en la investigación cualitativa es muy importante, al grado de considerar que la interpretación es un proceso muy complejo que nunca debe ser tomado a la ligera y del que el investigador debe ser tan consciente como le sea posible. Además, consideran que el análisis es un proceso y que nunca se finaliza por completo, por tanto, el análisis interpretativo no es del todo exacto y es importante que sea validado. Ya sea que se hagan diferentes tipos de preguntas sobre los datos, se lleve a cabo un proceso de triangulación, de comparaciones constantes o de muestreo teórico, esas herramientas analíticas validan las interpretaciones y las dotan de rigor, al tiempo que permiten al investigador identificar propiedades y dimensiones de las categorías e incluso identificar conceptos.

El autor de este trabajo está consciente de que en la Teoría Fundamentada se exige del uso de Marco Teórico y que la revisión bibliográfica es prácticamente posterior a la toma de datos y a su análisis inicial. Sin embargo, Corbin y Strauss también defienden la flexibilidad de la metodología e indican que existe un proceso denominado comparaciones teóricas en el cual las categorías se comparan con categorías encontradas en la literatura con la finalidad de establecer relaciones y de describir sus propiedades y dimensiones.

Por otra parte, se sabe que la Teoría Fundamentada propone el desarrollo de teoría a partir de datos empíricos, y el muestreo teórico es una de las herramientas más importantes que utiliza. Con lo anterior se puede entender que, dado un trabajo descriptivo elaborado en el marco de esta metodología, sólo se puede avanzar hacia la ordenación conceptual si se retoman los conceptos de la descripción y se saturan sus propiedades y dimensiones por medio de procesos de muestreo teórico. Y a partir de esa ordenación conceptual se puede avanzar paulatinamente hacia la construcción de teoría sólo si se retoman los conceptos ordenados y se vuelve a llevar a cabo otro proceso de muestreo teórico, de comparaciones constantes y de comparaciones teóricas para tratar de relacionar los conceptos alrededor de un concepto central.

En ese sentido, cabe destacar que los conceptos que Rigo denomina “estados epistémicos” y “esquemas epistémicos” han surgido como parte de investigaciones inspiradas en la Teoría Fundamentada, por lo que el uso que se hace de esas categorías en el presente trabajo permite seguir identificando las categorías asociadas y saturando sus propiedades y dimensiones. Es por eso por lo que el Marco Teórico no puede descartarse del presente estudio, resultaría una tarea infructuosa comenzar desde cero, sin considerar que ya se han hecho descripciones relacionadas con el tema de investigación y que el trabajo se puede encaminar hacia ordenaciones conceptuales o apoyar a la elaboración de una teoría.

## **Triangulación**

La triangulación es un método de análisis que se utiliza de formas diversas en las investigaciones cualitativas, en particular las investigaciones en matemática educativa. Para Bertely (2013) la perspectiva etnográfica en educación es una orientación epistemológica que se mueve en distintos niveles de reconstrucción, incorpora distintos enfoques interpretativos y se inicia con la interpretación de subjetividades. La autora menciona que la relación debe darse entre las categorías sociales (que son los datos empíricos), las categorías teóricas (tomadas de la literatura especializada) y las categorías del interprete (que siempre debe estar consciente de su postura). Esa configuración es compatible con la metodología general propuesta en la Teoría Fundamentada, dada la flexibilidad que la caracteriza. Como se dijo, aunque la Teoría Fundamentada en rigor no requiere de un marco teórico, sí establece que se pueden realizar comparaciones teóricas con trabajos de otros autores o de medios diferentes si se buscan hacer comparaciones que permitan definir las propiedades y dimensiones de los conceptos sobre los que se está trabajando.

## **Comparaciones Constantes**

Uno de los principales recursos de la investigación de corte cualitativo es la capacidad de hacer comparaciones. En la Teoría Fundamentada se considera que hacer comparaciones es invaluable para el análisis. Hacer comparaciones constantes se refiere al acto de tomar una pieza de los datos y examinarla contra otra pieza de los datos de la misma fuente para determinar si las dos piezas de datos son conceptualmente similares o diferentes. Los datos que aparentan ser similares se agrupan bajo una misma etiqueta conceptual. Este tipo de análisis permite reducir los datos a conceptos y desarrollar esos conceptos en términos de sus propiedades y dimensiones, además de diferenciar un concepto de otro. Esta herramienta analítica fue utilizada de manera recurrente en cada una de las fases de la investigación, así fue como se pudieron definir las diferentes categorías que permitieron el análisis de los datos para intentar dar explicaciones del fenómeno analizado.

## **Muestreo Teórico**

El Muestreo Teórico es un método de recolección de datos en el que se pretende rectificar o ratificar los conceptos que se han derivado previamente de otros datos. El objetivo de desarrollar los conceptos o categorías encontrados en términos de sus propiedades y dimensiones lleva a buscar datos de diversas fuentes, pero teniendo en cuenta que se está trabajando para descubrir variaciones e identificar relaciones entre conceptos. Un ejemplo claro de muestreo teórico lo tenemos en el capítulo 5 en el que se describe la segunda fase de la investigación, en la que se muestrean las categorías de resolución de la tarea en un grupo diferente de personas, cuestión que permitió la consolidación de las categorías de resolución de la tarea y la saturación de sus propiedades y dimensiones.

## **Sobre el uso de bibliografía**

Es preciso hacer una aclaración en torno al último punto, relativo al uso de la bibliografía en un trabajo guiado mediante la Teoría Fundamentada. En ésta, lo que rige la investigación son los datos empíricos. Sin embargo, la misma Teoría Fundamentada acepta la posibilidad de recurrir a la bibliografía existente sobre el tema con la finalidad de ganar en intuición, inspiración y sensibilidad con respecto a los datos empíricos de la investigación por medio de las comparaciones teóricas. La metodología permite hacer comparaciones conceptuales entre lo que se propone en la investigación y en la literatura para profundizar y enriquecer en propiedades y dimensiones las categorías que se construyen a partir de los datos. Por ejemplo, en esta parte del trabajo en particular, el concepto de *account* tomado de la literatura, sirvió de inspiración para interpretar los resultados empíricos encontrados y desarrollar una serie de categorías propias que permitían dar explicaciones plausibles. Se tiene claridad de que “se debe usar la literatura, y no dejar que la literatura te use”, como dice Becker (citado por Corbin y Strauss, p. 49).

## **Uso del modelo de Toulmin**

Como parte del marco teórico-interpretativo se recurrió al modelo de Toulmin para el análisis de argumentos (*ver Capítulo 3*). Este modelo se

empleó tanto en el primer análisis de los argumentos que surgieron de las interacciones entre estudiantes y que se reporta en el primer trabajo analítico, como en el segundo análisis, en el que se utilizó el desglose de los argumentos para desarrollar comparaciones constantes que permitieron identificar las categorías, sus propiedades y dimensiones y que se reporta en el segundo trabajo analítico (*ver Capítulo 6*). En términos de la Teoría Fundamentada, este arreglo permite hacer comparaciones constantes con lo que se gana en intuiciones, se identifican propiedades, dimensiones y relaciones entre las categorías identificadas de tal forma que se puede hacer un análisis axial del proceso, que en este caso se realizó de manera incipiente y permitió arribar a explicaciones que, si bien son preliminares, resultan plausibles.

Las comparaciones constantes se realizaron entre las garantías, los respaldos y los cualificadores modales de cada segmento de las interacciones y entre las interacciones para especificar el tipo de resolución utilizado, el tipo de argumento y el estado epistémico asociado al segmento de la interacción; una vez que se establecieron con cierta claridad las categorías de cada tipo asociadas a cada segmento de cada interacción se presentó la oportunidad de realizar análisis de tipo axial que permiten desarrollar explicaciones acerca del proceso de interacción en el que se enfocan los análisis (*ver Capítulo 7*).

En el anexo 4 aparecen las tablas de análisis funcional de las cuatro interacciones que no se describen de manera desarrollada en el presente documento, pero que fueron analizadas y utilizadas, como ya se indicó, para realizar comparaciones constantes entre los datos y saturar las categorías que permitieron realizar el análisis axial del caso expuesto.

### ANÁLISIS DE RESULTADOS CON RELACIÓN A LA TAREA

Tal como se ha explicado en el Capítulo correspondiente a la metodología y los métodos, el desarrollo de la presente investigación ha requerido -en sintonía con la Teoría Fundamentada (Corbin & Strauss, 2015)-, que se transite por caminos de análisis a diferentes niveles de profundidad; esto tiene como finalidad la búsqueda de categorías o conceptos bien fundamentados en los datos que permitan interpretar con mayores niveles de objetividad las producciones de los estudiantes que participaron en el estudio y que le otorguen un alto grado de credibilidad. Uno de los primeros procesos que se desarrollaron en el marco de estas consideraciones, consistió en la identificación de categorías que reflejaran los niveles de comprensión que los estudiantes que intervinieron en el estudio pusieron en juego al resolver la tarea de comparación de razones.

En la construcción de las categorías de análisis, es cierto que en un principio la literatura asociada a los problemas de proporcionalidad y a la tarea en sí fueron una fuente importante de inspiración. No obstante, cabe mencionar que para incorporar los resultados que ahí se reportan se llevó a cabo un proceso complejo que se desdobló en varias etapas reiterativas en el que los datos empíricos jugaron el papel central; por un lado, se analizaron los datos y se contrastaron unos con otros de forma reiterativa (proceso denominado comparaciones constantes); por otro lado y paralelamente, se llevó a cabo un análisis de triangulación (Berteley, 2000) en el que esas categorías (derivadas de las comparaciones constantes entre los datos empíricos) se fueron modificando como resultado de su contraste y comparación con lo reportado en la literatura, todo lo cual se hizo a partir de la perspectiva de los investigadores. De este primer proceso se derivaron una serie de categorías iniciales con las que se podía cubrir el amplio espectro de resoluciones ofrecidas por los estudiantes que participaron en la aplicación inicial del cuestionario (primera fase). El memo que se derivó de este primer análisis se encuentra en el Anexo 3.

La misma dinámica de la metodología adoptada en este trabajo, de la Teoría Fundamentada, exigió una fase de Muestreo Teórico para poner a prueba la

validez de las categorías ya encontradas en la primera fase y para tratar de identificar si existían propiedades y dimensiones ausentes en esa categorización inicial. Así, se planificó realizar un estudio con docentes para cubrir esta necesidad (en una segunda fase). En lo que sigue aparece el estudio llevado a cabo con profesores, el cual se incluye como una primera parte del presente Capítulo.

Siguiendo de nuevo con los requerimientos de la Teoría Fundamentada, y con las categorías ya afinadas a partir del trabajo hecho con los profesores en la segunda fase, se retomaron los datos empíricos proporcionados por los estudiantes en la primera fase para hacer muestreo teórico, esto permitió refinar aún más las categorías previamente halladas. En la segunda parte de este capítulo se exponen los resultados de ese trabajo, que se basó en las resoluciones que inicialmente habían ofrecido los alumnos.

## Trabajo empírico con los profesores

### El instrumento

La información analizada en el estudio con los profesores se obtuvo por medio de la aplicación controlada de un cuestionario en el que aparece la “Tarea de los Vinos” (retomada de Gómez et al 2013), que es un problema de comparación de razones; los datos empíricos en los que se basa la investigación provienen justamente de los procedimientos que los docentes emplean para resolver el problema. En el cuestionario aplicado a los docentes se propone el siguiente problema:

Figura 1 - La tarea de los vinos

1.- Observe las siguientes ofertas e indique: ¿Qué descuento es mejor?



Como se puede apreciar, se trata de comparar tres ofertas para determinar cuál de ellas es la más conveniente. Cada oferta tiene una normalización diferente de las otras dos; la segunda de ellas tiene diferente el referente del número de botellas por oferta; en las primeras dos aparece el costo como distractor, aunque desglosado en forma diferente, en la primera se aclara el precio de la botella sobre la que recae el descuento mientras que en la segunda se aclara el costo unitario por botella. Para una resolución adecuada se requiere de un proceso de relativización que considere los componentes internos de las ofertas y que, para hacer la comparación, homogeneice las normalizaciones, de forma adecuada para comparar.

### **Presentación de las categorías**

Las resoluciones encontradas en los estudiantes, de tipo absoluto y relativo, nos llevó a preguntarnos si también se encuentran ese tipo de respuestas en las producciones que los profesores desarrollan al resolver una tarea semejante. Así, en el marco de la investigación se planteó específicamente si los procedimientos empleados por los docentes en activo para resolver un problema de comparación de razones son de tipo absoluto, o de tipo relativo. En esta parte del Capítulo se presenta la descripción de algunas de las categorías en las que se ubicaron las producciones de los profesores, quienes poseen muy distintos perfiles: docentes de física, matemáticas, electricidad y electrónica.

Como se dijo, las categorías de interpretación que se emplearon para las resoluciones de los profesores se desprendieron de un primer análisis de las producciones de los alumnos (realizado en la primera fase). Para ese análisis (de la 1ª fase), se tomó de inicio lo propuesto por Gómez et al. (2013) y Monje et al. (2013) lo que permitió identificar algunas posibles fuentes de dificultad en la resolución de la tarea. A partir de esos resultados, de lo reportado por Fernández (2009), Freudhental (2001), Lamon (1999) y Hart (1984), triangulado todo ello con las comparaciones constantes entre los datos empíricos provenientes de las producciones de los estudiantes, se desprendieron las primeras categorías asociadas a la resolución de la tarea dadas por los estudiantes. Lo encontrado en esta 1ª fase, que como ya se dijo aparece con detalle en el Anexo 1, es lo siguiente: existen respuestas con tendencia relativa y otras con tendencia absoluta, que en la Tabla 3 aparecen



jerarquizadas de A1 a A6 (para resoluciones de tipo absoluto) y de R1 a R6 (para resoluciones con tendencia relativa), adicionalmente se consideraron dos categorías: los referentes del ordinal sobre el que recae el descuento y el del número de elementos en conjunto. Estas categorías se explican detalladamente en lo que sigue (cabe aclarar que en la tarea aplicada a los estudiantes no aparecía el distractor de los costos desglosados).

De la investigación con los estudiantes surgió la necesidad de aplicar un proceso de muestreo teórico, como ya se explicó, con el fin de afinar las categorías primeramente definidas, entre otros objetivos. Las categorías identificadas en las resoluciones de los docentes son las siguientes: comparaciones internas; comparaciones entre ofertas; referente del ordinal sobre el que recae el descuento; referente del número de juegos en su conjunto y el referente del costo. A continuación, aparece la descripción de cada una de las categorías.

*Manipulación interna.* Se lleva a cabo la manipulación interna si los elementos que están presentes en las ofertas se manipulan de forma multiplicativa ( $R_c$ ; relativo al manipular elementos internos de las ofertas, por ejemplo, cuando se incrementa el número de juegos considerando adecuadamente su relación con los costos y los referentes), o a través de manipulaciones de forma aditiva ( $A_c$ ; absoluta al manipular elementos internos de las ofertas, es decir, cuando únicamente se incrementa el número de juegos que ofrece cada oferta de forma aditiva y sin considerar que hay relaciones proporcionales con los otros elementos). No se lleva a cabo una comparación interna si en la resolución sólo se pone atención a un elemento de la oferta (Hay casos en los que los argumentos se basan únicamente en que el tercer juego es gratis en la oferta 3x2, y no se hace referencia a ninguna relación proporcional).

*Comparación entre ofertas.* Se identificaron dos formas genéricas de comparar ofertas. La comparación entre ofertas de forma relativa ( $R_o$ ) (cuándo se comparan las ofertas considerando las relaciones entre el número de botellas y el costo), y la comparación entre ofertas de forma absoluta (cuándo se compara directamente algún elemento particular de las ofertas como el costo sin relacionar con los referentes) o la ausencia de comparación ( $A_o$ ); la ausencia de comparación tiene que ver con que se descarte alguna(s) de las

ofertas (en el caso de algunos docentes sucede que descartan alguna de las ofertas por ausencia del costo del producto).

*Referentes. Número de botellas en su conjunto.* En la tarea hay dos ofertas que se refieren a dos botellas y una que refiere a tres. Con esta categoría se pueden distinguir las resoluciones en las que se ‘desagregan’ las ofertas (en el sentido de que se considera posible la adquisición de las botellas en forma individual sin considerar el total de botellas que se ofrecen en cada oferta) (-Rfcj), de aquellas resoluciones en las que se valora la adquisición de las botellas tomando en cuenta el contexto de la oferta (es decir, el número de botellas que ofrecen en cada oferta) (Rfcj).

*Referentes. Número ordinal de botella sobre el que recae el descuento.* Existen dos ofertas en las que el descuento se aplica sobre la segunda botella y una en la que se aplica sobre la tercera botella; la segunda o tercera botella es el ordinal sobre el cual se aplica el descuento, según el caso. Con esta categoría se distinguen las resoluciones en las que se aplica correctamente el descuento en el ordinal señalado en la oferta (Rfor), de las resoluciones en las que esto no sucede.

*Referentes. Costo.* En el ejercicio propuesto a los profesores aparecen dos ofertas con el costo desglosado y una que no considera el costo como tal. Esta categoría resultó ser importante en las resoluciones de los docentes ya que un par de ellos descartaron la oferta en la que no aparecía el costo desglosado.

Las categorías antes descritas encabezan la Tabla 3. Se trata de un ‘memo’ en el que se presenta el despliegue completo de todas las resoluciones posibles que pudieran ser resultado de todas las combinaciones de las categorías antes descritas, aunque no todas las resoluciones resultantes de esa combinatoria aparecieron como parte de los datos empíricos. En la teoría fundamentada los memos se proponen como herramientas de análisis que sirven de guía orientativa para el estudio y para la definición y organización de las ideas y las categorías; ahí se aclara que no forman parte de los resultados empíricos (Corbin y Strauss, 2015). En el memo se hizo un trabajo teórico para completar los datos y sirvió como fuente de inspiración para sistematizar esos datos, teniendo siempre presente que se trataba de un

trabajo teórico que tenía el objetivo de organizar y dar forma a los datos empíricos. Y es que, ya que las categorías identificadas carecían de relaciones causales entre ellas, era de algún modo necesario hacer el despliegue completo de todas las resoluciones posibles. El memo que incluye todas las combinaciones posibles se expone en este apartado sólo para fines de claridad en las explicaciones. De ninguna manera se pretende que ese memo forme parte de los resultados empíricos de la investigación.

Del ejercicio anterior, emergieron las claves de resolución (que aparecen en la última columna de la Tabla 3) y se jerarquizaron las resoluciones considerando el nivel teórico de complejidad. Con estas claves se identifica a cada nivel de resolución y van de A1 a A6 las absolutas y de R1 a R7 las relativas incluyendo los referentes. En la penúltima columna aparecen algunas consideraciones extras, como el uso de la estrategia “Building Up” (Hart, 1984) o algún otro problema que no esté asociado al conocimiento sobre proporcionalidad. No sobra insistir al lector que no se encontraron ejemplos de todos los estilos de resolución definidos en la tabla, pero esa organización permitió diferenciar los niveles de resolución que sí fueron encontrados; fue una fuente de sistematización y jerarquización de las resoluciones que se identificaron empíricamente en el estudio.

De hecho, la información contenida en ese memo se puede plasmar en un diagrama de árbol con distintos ramales (*ver figura 2*).

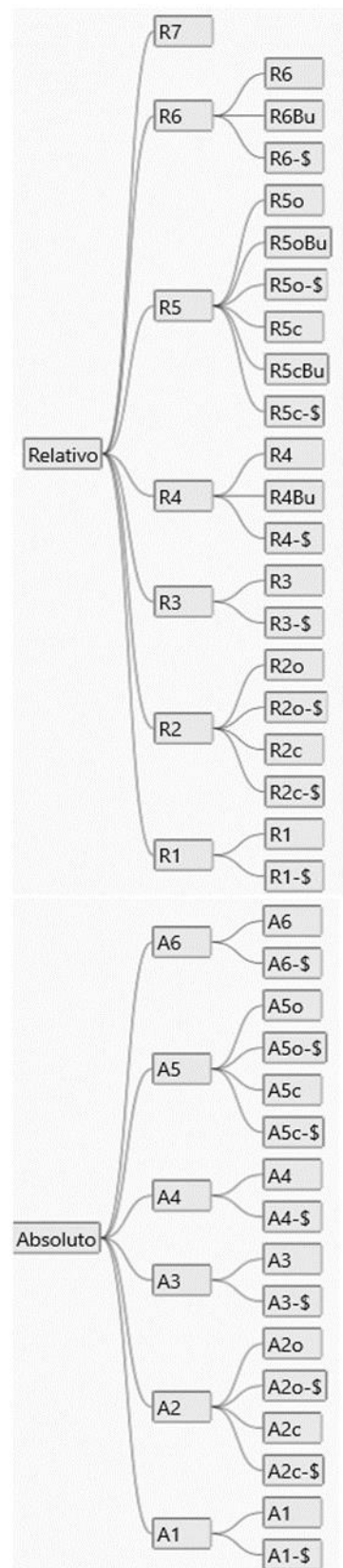


Figura 2 - Diagrama de árbol del memo de resoluciones

Tabla 3 - Memo de construcción de claves de resolución de los maestros

Manipulación de componentes internos	Comparación de ofertas	Referente botellas en conjunto	Referente ordinal al que se le aplica el descuento	Referente costo	Otras consideraciones	Clave
Rc	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>	Sin Problemas	R7
Rc	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>	Con algún problema	R6
Rc	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>	Utiliza "Building up"	R6 <sup>Bu</sup>
Rc	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		R6 <sup>-\$</sup>
Rc	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		R5 <sub>o</sub>
Rc	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>	Utiliza "Building up"	R5 <sub>o</sub> <sup>Bu</sup>
Rc	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		R5 <sub>o</sub> <sup>-\$</sup>
Rc	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		R5 <sub>c</sub>
Rc	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>	Utiliza "Building up"	R5 <sub>c</sub> <sup>Bu</sup>
Rc	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		R5 <sub>c</sub> <sup>-\$</sup>
Rc	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		R4
Rc	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>	Utiliza "Building up"	R4 <sup>Bu</sup>
Rc	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		R4 <sup>-\$</sup>
Rc	Ao	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		R3
Rc	Ao	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		R3 <sup>-\$</sup>
Rc	Ao	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		R2 <sub>o</sub>
Rc	Ao	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		R2 <sub>o</sub> <sup>-\$</sup>
Rc	Ao	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		R2 <sub>c</sub>
Rc	Ao	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		R2 <sub>c</sub> <sup>-\$</sup>
Rc	Ao	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		R1
Rc	Ao	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		R1 <sup>-\$</sup>
Ac	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		A6
Ac	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		A6 <sup>-\$</sup>
Ac	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		A5 <sub>o</sub>
Ac	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		A5 <sub>o</sub> <sup>-\$</sup>
Ac	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		A5 <sub>c</sub>
Ac	Ro	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		A5 <sub>c</sub> <sup>-\$</sup>
Ac	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		A4
Ac	Ro	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		A4 <sup>-\$</sup>
Ac	Ao	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		A3
Ac	Ao	Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		A3 <sup>-\$</sup>
Ac	Ao	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		A2 <sub>o</sub>
Ac	Ao	-Rf <sub>CJ</sub>	Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		A2 <sub>o</sub> <sup>-\$</sup>
Ac	Ao	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		A2 <sub>c</sub>
Ac	Ao	Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		A2 <sub>c</sub> <sup>-\$</sup>
Ac	Ao	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	Rf <sub>\$</sub>		A1
Ac	Ao	-Rf <sub>CJ</sub>	-Rf <sub>Or</sub>	-Rf <sub>\$</sub>		A1 <sup>-\$</sup>

De esta forma, las resoluciones de los profesores caen en alguna de estas claves de resolución, pero para ser más claros en la exposición de los resultados que se presentan a continuación, a estas claves se les ha puesto un

nombre que hace referencia al tipo de resolución (absoluta o relativa) y al tipo de normalización que llevan a cabo y, en su caso, si muestran dificultad asociada al precio mostrado en las ofertas.

### Presentación de algunos casos ilustrativos

Los participantes de este estudio son docentes frente a grupo en una secundaria técnica de la Ciudad de México. Se trabajó con un total de seis docentes, tres hombres y tres mujeres, con distintas formaciones: dos egresados de la Escuela Normal Superior de México, tres ingenieros y un licenciado en administración de empresas. Tres de ellos imparten la asignatura de matemáticas, uno de ellos, física, otro imparte electrónica y otro es coordinador de actividades tecnológicas (electricidad). Tienen ellos muy distintas edades (de 27 hasta 57 años) y cuentan con diferentes años de servicio (que va de los 5 a los 28). En la tabla A se sintetiza la información.

Tabla 4 - Información de los docentes participantes

Docente	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Sexo	M	F	F	M	M	F
Edad	57	34	30	57	46	27
Años de Servicio	18	5	5	28	5	6
Asignatura que imparte	Matemáticas	Matemáticas	Física	Coordinador Actividades Tecnológicas / Electricidad	Electrónica	Matemáticas
Formación	Lic. en administración de empresas	Normalista con Maestría en Educación Media Superior	Ingeniería Química Industrial.	Ingeniería en Electricidad	Ingeniería en Electrónica	Normalista con Maestría en Docencia y Gestión de Instituciones Educativas

En lo que sigue se describen las resoluciones que ofrecieron los maestros que participaron en el estudio. Los resultados se encuentran ordenados de lo relativo a lo absoluto. Como se verá, los profesores muestran una variedad de resoluciones, desde respuestas encuadradas en lo relativo (en un par de casos) hasta las meramente absolutas, destacando entre ellas, por un lado, la producción de un maestro que lleva a cabo un proceso adecuado de normalización con las primeras dos ofertas pero descarta la tercera y, por otro, la resolución proporcionada por la maestra de matemáticas que

presenta una resolución de tipo absoluto; coincidentemente, estas dos últimas producciones están determinadas por el referente del precio.

*Resolución: Relativo multiplicativo decimal*

Tabla 5 - Resolución Docente 2

Oferta	Pagas	Te llevas	Cociente
1 1/2	1.5	2	$1.5/2= 0.75$
3x2	2	3	$2/3= 0.66$
70% en 2 <sup>a</sup>	1.3	2	$1.3/2= 0.65$
Elige la oferta 70% de descuento en 2 <sup>a</sup>			

Una de las docentes de matemáticas (D2) resolvió la tarea de manera muy eficiente, se observa una clara comprensión de la comparación de razones al identificar los elementos y normalizar los datos a decimales. Esta normalización le permite establecer una comparación entre cocientes de manera directa y establecer la respuesta correcta (“la mejor oferta es 70% en la 2<sup>a</sup> botella”).

A este docente se le asigna la categoría de resolución más alta (R7), ya que demuestra que no tiene problemas con ninguno de los referentes ni con la normalización, elementos necesarios para comparar adecuadamente. El único comentario que hace al margen refuerza esta visión: “resolví por proporcionalidad, sin importar los precios”

*Resolución: Relativo multiplicativo porcentaje*

Tabla 6 - Resolución docente 5

Oferta	Suma	Cociente	Porcentaje
1 1/2	$100\%+50\%=$	$\frac{150\%}{2} =$	75% c/u
3x2	$100\%+100\%=$	$\frac{200\%}{3} =$	66% c/u
70% en 2 <sup>o</sup>	$100\%+30\%=$	$\frac{130\%}{2} =$	65% c/u
Elige la oferta 70% de descuento en 2 <sup>a</sup>			

Este docente es de Formación Tecnológica especialista en Electrónica (D5). Él presenta una resolución en la que denota comprensión de la comparación de razones, normaliza los datos a porcentajes y establece un cociente con lo que se posibilita una comparación adecuada entre los porcentajes, no da muestras de tener dificultades con ninguno de los referentes y llega a la respuesta correcta (70% en 2ª) al comparar los porcentajes finales. Sin embargo, dicho docente únicamente alcanzó la categoría R6 al emplear el signo igual en sentido unidireccional, uso al que subyace un significado meramente operacional de dicho signo igual (Ramírez, 2010). Aunque este problema no interfiere con la comprensión mostrada sobre proporcionalidad, es pertinente no dejar de señalarlo.

*Resolución: Tránsito de Aditivo a Relativo por porcentaje*

Tabla 7 - Resolución docente 3

1 ½			3x2			70% en 2a	
1°	9.74€	100%	1°	5.58€	100%	1°	100%
2°	4.87€	50%	2°	5.58€	100%	2°	30%
Suma	14.61€	150%	3°	0.00€		Suma	130%
Por 4°		300%	Suma	11.16€	200%	Por 4°	260%
Por 6°		450%	Por 6		400%	Por 6°	390%
Elige la oferta 70% de descuento en 2ª							

En este caso se trata de una docente de ciencias con énfasis en física (D3). En su resolución se observa cómo va analizando cada oferta por separado, normalizando a porcentajes. Una vez que interpreta la oferta, comienza a escalar el número de botellas y relaciona dicho incremento con el porcentaje correspondiente. Finalmente indica que “el MCD de las botellas que se compran es 6, por lo que el porcentaje menor es para la mejor oferta (70% en 2ª botella)”. De esta forma se observa una resolución que se encuentra en tránsito de lo absoluto a lo relativo (Lamon, 1999), ya que el proceso de ir escalando las ofertas es aditivo, aunque da muestras de pensamiento relativo al comparar multiplicativamente las ofertas. Además, no muestra problemas con ninguno de los referentes, por lo que alcanza la categoría R6<sup>Bu</sup>.

*Resolución: Relativo Empírico por precio*

Tabla 8 - Resolución docente 1

1 1/2			3x2			70% en 2a
1a Botella	9.74	100%	1a Botella	5.58	100%	"Descartada por no tener más información (el precio)"
2a Botella	4.87	50%	2a Botella	5.58	100%	
Suma	14.61	150%	3a Botella	0	0%	
Divide ÷2	7.30 c/u	75%	Suma	11.16	200%	
			Divide ÷3	3.72 c/u	66.66%	
Concluye	25% de descuento por unidad		Concluye	33.34% de descuento por unidad *Esta es la mejor opción.		
Elige la oferta 3x2						

El docente que presenta esta resolución (D1) es un Licenciado en Administración de Empresas que utiliza procedimientos de tipo relativo de forma parcial, pero que denota dificultades con el referente del costo de las botellas, al grado de señalar que la oferta 70% en 2ª queda "descartada por no tener más información (el precio)". Es importante observar cómo en las dos primeras ofertas relaciona el costo con el porcentaje e incluso establece un cociente para determinar el descuento por botella y comparar adecuadamente esas ofertas; no obstante, y a pesar de todo lo bien que procedió en los dos primeros casos, no alcanzó a tomar conciencia de la irrelevancia de los costos para el cálculo de los porcentajes. Este docente alcanzó la categoría R3-<sup>s</sup> al denotar tal arraigo al precio de cada botella e indicar que la mejor oferta es la que ofrece 3x2.



Resolución: Absoluto por precio

Tabla 9 - Resolución docente 6, parte 1

1 1/2		3x2		70% en 2°
1)	9.74	1)	3.72	No hay precio y depende de él para saber si es o no conveniente
2)	4.87	2)	3.72	
1)	9.74	3)	3.72	
2)	4.87	1)	3.72	
1)	9.74	2)	3.72	
2)	<u>4.87</u>	3)	<u>3.72</u>	
	43.83		22.32	
	9.74		3.72	
2	<u>4.87</u>	2	<u>3.72</u>	
	14.61		7.44	

Elige la oferta 3x2

Este caso es de una docente de matemáticas (D6) que muestra una resolución de tipo absoluto basada en considerar los costos, al grado de que descarta la oferta 70% en 2ª por no indicar el precio e indica que la mejor oferta es la que ofrece 3x2 (por resultar un costo más bajo a la hora de realizar las adiciones). Muestra confusión con los referentes al interpretar el costo por botella de diferentes maneras; primero, en la oferta 1 1/2 considera el costo completo de la primera botella, luego la mitad del costo para la segunda y así sucesivamente hasta llegar a seis para determinar la suma de los costos; posteriormente, en la oferta 3x2 considera el costo unitario por botella y suma el costo de seis botellas. Finalmente, la confusión con el referente del número de botellas en conjunto se muestra al intentar comparar las ofertas utilizando el costo de sólo dos botellas (que no es un referente adecuado para comparar, sobre todo después de lo anterior). Considerar el precio por botella como base para llevar a cabo la comparación indica problemas con el proceso de relativización entre los elementos internos de las ofertas y con el de normalización al intentar comparar el costo desglosado por botella de la oferta 1 1/2 con el costo unitario por botella de la oferta 3x2. En una segunda oportunidad, ella parece intentar confirmar su respuesta considerando los porcentajes.

Tabla 10 - Resolución docente 6, parte 2

Oferta	Suma	Comentario
1 1/2	$100\%+50\%=150\%$	
3x2	$66\%+66\%=132\%$	
70% en 2°	$100\%+30\%=130\%$	Depende el precio tendría que ser menor a 5.58 p/pieza
Elige la oferta 3x2		

Sin embargo, con esa nueva resolución sólo reafirma las dificultades presentadas en la anterior; en las ofertas 1 1/2 y 70% en 2ª suma los porcentajes desglosados del costo por botella mientras que en la oferta 3x2 aplica, una vez más, valor unitario, obteniendo el porcentaje del costo que corresponde a cada botella, sin embargo, denota problemas con el referente del ordinal sobre el que recae el descuento porque no considera las tres botellas en esa oferta y refuerza su resultado: la mejor oferta es la que ofrece 3x2. Finalmente, aunque establece la comparación entre los porcentajes, insiste en la dependencia del precio para considerar la comparación con la oferta 70% en 2ª.

*Resolución: Absoluto porcentajes calculados mentalmente*

Tabla 11 - Resolución docente 4

Oferta	1 1/2	3x2	70% en 2a
Comentario	Esta oferta ofrece un 50%	Esta oferta ofrece aproximadamente el 40%	Esta ofrece el 70%
Elige la oferta 70% de descuento en 2ª			

En este caso, el docente es de Formación Tecnológica especialista en Electricidad (D4) quién desde hace unos años funge como Coordinador de Actividades Tecnológicas en una escuela secundaria técnica. En su cuestionario indica haber hecho el cálculo de los porcentajes mentalmente y su proceso es arraigadamente absoluto cuando, en la deducción de los porcentajes, no relativiza adecuadamente, no es preciso con sus operaciones

y le basta con hacer cálculos mentales redondeados sin analizar de manera más precisa. No considera los referentes ni da muestras de avanzar hacia procesos de tipo relativo. Este docente obtuvo la categoría A1 en su resolución.

Este trabajo ha permitido desarrollar una serie de categorías con las que parece cubrirse un rango muy amplio de resoluciones posibles sobre problemas de comparación de razones. Esto se confirma con el abanico tan grande de resoluciones encontradas a pesar de que la muestra es tan pequeña.

Es importante no dejar de señalar que, aunque se trata de docentes con experiencia académica y con amplia trayectoria escolar, siguen apareciendo estrategias de tipo absoluto, muy relacionadas con procesos aditivos. Esas respuestas absolutas indican –de acuerdo con Lamon (1999)-, una pobre comprensión y confusión sobre los temas de proporcionalidad.

En particular, llaman poderosamente la atención los últimos tres casos aquí expuestos. Particularmente la maestra de matemáticas y su resolución de tipo absoluto completamente enlazada con el costo confirma lo que otros autores ya han reportado, en relación con la dificultad de los maestros para manejar y conceptualizar adecuadamente temas relacionados con la razón y la proporción.

## Trabajo empírico con los estudiantes

### El instrumento

Se aplicó a cada estudiante un cuestionario inicial que incluye una tarea de comparación de razones (con reajustes de uno propuesto por Gómez et al, 2013) (*ver figura 3*) y preguntas sobre el convencimiento del alumno (con relación a su procedimiento, a si éste convencería a un compañero o a un maestro). En la tarea se pregunta ¿Cuál de las ofertas es la que más conviene?



Figura 3 - La tarea de comparación de razones aplicada a estudiantes

Como se puede observar, cada oferta se presenta con una normalización diferente, además de que la primera se diferencia de las otras dos por el referente del número de videojuegos que se ofertan en conjunto y por el referente del ordinal del videojuego sobre el que recae la oferta. Una resolución correcta conlleva un proceso de relativización para homogeneizar normalizaciones y referentes. Este instrumento se aplicó a 66 estudiantes de dos grupos de tercero de secundaria (de edades entre 14 y 15 años) de dos escuelas secundarias técnicas, una que está dentro del 10% de las mejores de la Ciudad de México (en la cual participaron 39 alumnos) y otra dentro del 25% (en la que se aplicó el cuestionario a 27 alumnos), como ya se ha explicado; el tercero de secundaria se eligió porque, de acuerdo con el currículum, los alumnos ya cuentan con al menos 5 años de experiencia trabajando con temas de proporcionalidad.

La tarea puede resolverse considerando dos interpretaciones de 'cuál es la oferta que más conviene':

1<sup>a</sup>. Interpretación. La que más conviene se interpreta como la oferta con la que ahorras más. Para responder es necesario hacer comparaciones relativas (que implica el uso de razones) entre las ofertas que incluyen 2 juegos y la que incluye tres. En este caso, la respuesta es la del 70%.

2<sup>a</sup>. Interpretación. La oferta que más conviene depende del número de juegos que se pretenden adquirir. Para responder es suficiente hacer comparaciones aditivas entre las ofertas (comparaciones absolutas), una vez que se ha fijado un precio común. La respuesta es que 3x2 conviene para número de juegos múltiplos de tres que no sean pares y la de 70% para los casos restantes (para todos los casos pares pero también para los casos que no son pares y que no son múltiplos de tres).

Para el análisis se emplearon las categorías que se utilizaron en el estudio con los profesores, con la excepción de la categoría sobre el referente del costo, ya que en esta tarea que se le presentó a los estudiantes no se desglosan los costos de las mercancías incluidas en las ofertas. Además, se cambió la notación en la clave del referente de juegos en su conjunto para evitar confusiones durante el análisis.

En la Tabla 2 se incluyen todas las resoluciones de las combinaciones posibles de las categorías involucradas. Muchas de esas resoluciones NO aparecen en los datos empíricos. Pero, como en el caso anterior, se trata de un memo en el que se hace un ejercicio teórico, con la finalidad de organizar y jerarquizar las resoluciones que sí se identificaron en las producciones de los estudiantes. En la última columna aparece el número de alumnos cuya resolución corresponde a la clave de resolución; en algunos aparecen cero casos, ya que no se identificaron resoluciones en ese nivel (por tratarse de un memo teórico).

Tabla 12 - Memo de construcción de claves de resolución de los alumnos

Manipula componentes	Compara ofertas	Referente juegos en conjunto	Referente ordinal al que se le aplica el descuento	Otras consideraciones	Clave	No. de alumnos
Rc	Ro	Rfj	Rfo	Sin problemas	R7	1
Rc	Ro	Rfj	Rfo	Utiliza valor	R6 <sup>VU</sup>	0
Rc	Ro	Rfj	Rfo	Con algún problema	R6	0
Rc	Ro	Rfj	Rfo	Utiliza Building up	R6 <sup>Bu</sup>	2
Rc	Ro	-Rfj	Rfo		R5 <sub>o</sub>	3
Rc	Ro	-Rfj	Rfo	Utiliza Building up	R5 <sub>o</sub> <sup>Bu</sup>	0
Rc	Ro	Rfj	-Rfo		R5 <sub>j</sub>	0
Rc	Ro	Rfj	-Rfo	Utiliza Building up	R5 <sub>j</sub> <sup>Bu</sup>	0
Rc	Ro	-Rfj	-Rfo		R4	2
Rc	Ro	-Rfj	-Rfo	Utiliza Building up	R4 <sup>Bu</sup>	4
Rc	Ao	Rfj	Rfo		R3	1
Rc	Ao	-Rfj	Rfo		R2 <sub>o</sub>	0
Rc	Ao	Rfj	-Rfo		R2 <sub>j</sub>	0
Rc	Ao	-Rfj	-Rfo		R1	0
Ac	Ro	Rfj	Rfo		A6	17
Ac	Ro	-Rfj	Rfo		A5 <sub>o</sub>	8
Ac	Ro	Rfj	-Rfo		A5 <sub>j</sub>	1
Ac	Ro	-Rfj	-Rfo		A4	5
Ac	Ao	Rfj	Rfo		A3	6
Ac	Ao	-Rfj	Rfo		A2 <sub>o</sub>	5
Ac	Ao	Rfj	-Rfo		A2 <sub>j</sub>	1
Ac	Ao	-Rfj	-Rfo		A1	11

Las categorías que aparecen encabezando el memo son exactamente las mismas que aparecen en el caso de los profesores. Por esta razón, no las repetiremos, ni repetiremos su descripción.

Le recordamos al lector que la columna encabezada por la palabra ‘Clave’ resume las categorías involucradas; R indica que la resolución del problema es de tendencia relativa; A dice que la misma tiene tendencia absoluta; la cifra indica la posición en que se encuentra en una escala ascendente con límite 7 para las resoluciones con tendencia relativa y con límite 6 para las de tendencia absoluta; el subíndice muestra el referente con el que no se tiene dificultad (aplica sólo a las posiciones 2 y 5, en cada caso); se indica el uso de la estrategia de resolución denominada “Building Up” colocando ‘Bu’ como superíndice en los casos que correspondiera.

La subcategoría denominada 'Clave' resulta fundamental en el presente trabajo porque ésta se utiliza como criterio para evaluar la comprensión que sobre el tema de comparación de razones los estudiantes mostraron en cada una de las fases de la investigación.

### **Algunos resultados cuantitativos**

El análisis de los resultados de la tercera fase muestra que más del 80% de los estudiantes que resolvieron la tarea utilizaron procedimientos de resolución asociados al pensamiento absoluto, aunque casi el 50% del total de alumnos que participaron en el estudio mostraron encontrarse en una etapa de tránsito al pensamiento relativo al comparar las ofertas, pero no manipular los componentes internos de las mismas, es decir, se encuentran entre las claves A4 y A6. Menos del 20% de los jóvenes muestran resoluciones de tipo relativo y evidencia del uso de la estrategia Building Up para resolver la tarea. Algunos de ellos mostraron dificultades asociadas tanto al referente del número de juegos en conjunto como al referente del ordinal al que se le aplica el descuento y sólo uno de ellos alcanzó la categoría R7, la más alta.

### ANÁLISIS DE RESULTADOS SOBRE LA INTERACCIÓN ENTRE PARES

Como se dijo, el objetivo del trabajo se divide en dos partes. En la primera se exponen los resultados encontrados en un primer análisis de los datos surgidos en las interacciones entre pares, de las cuales ya se ha comentado la recurrencia en la literatura de que su implementación parece tener cierta eficacia en la construcción del conocimiento; y en la segunda, se revisitan los datos siguiendo la metodología del muestreo teórico, incorporando ahí un análisis del proceso, con la finalidad de dar explicaciones, aunque sean iniciales, de fenómenos que se dan en la interacción entre pares y que están relacionados con las preguntas de investigación. Estas dos partes tienen una justificación. Después de una relectura del primer análisis y de los comentarios de los árbitros a los que se sometió esa investigación (en la forma de una comunicación dirigida y aceptada en la SEIEM), el investigador y su tutora nos percatamos de que en el primer análisis se introdujeron categorías que no estaban suficientemente fundamentadas en los datos empíricos, y por esto se tuvo la necesidad de continuar con las comparaciones constantes, identificar nuevas categorías y realizar un muestreo teórico, todo lo anterior en consonancia y respetando el espíritu de la metodología propuesta por Corbin & Strauss (2015) en la Teoría Fundamentada.

En el presente capítulo es posible observar los cambios entre el primer estudio y el segundo y la profundidad que en este segundo se alcanzó, al introducir particularmente el análisis de procesos, siguiendo la guía de la metodología ya mencionada.

#### **Consideraciones generales sobre la investigación relativa a la interacción entre pares y la elección de los participantes**

La investigación sobre las interacciones tiene como punto de partida el cuestionario aplicado a los alumnos sobre la tarea de comparación de ofertas de videojuegos. En el Capítulo 5 se exponen los resultados obtenidos de la aplicación de ese cuestionario.



En la investigación sobre la interacción se tomaron como base los resultados de ese cuestionario inicial. La clave de resolución se utilizó como criterio para evaluar la comprensión que los estudiantes mostraron en las resoluciones que ofrecieron en ese cuestionario.

En esta parte de la investigación en la que se implementó la interacción entre pares, se determinó trabajar con la segunda escuela (*véase el Capítulo sobre Metodología*), ya que ahí se presentaron procesos de resolución más variados que en la otra.

Con base en las categorías que surgieron del primer cuestionario, se eligieron de entre los alumnos a cinco parejas con la característica de que mantuvieran posturas encontradas con relación a la resolución o solución de la tarea y que en su cuestionario inicial hayan ofrecido explicaciones amplias de lo que ahí habían hecho, con la intención de detonar durante la interacción el intercambio de ideas y procedimientos. En la interacción se solicitó que cada uno de los participantes tratara de convencer a su compañero de que el procedimiento realizado por ellos en el cuestionario inicial era el más adecuado. El autor de este documento actuó como mediador de las intervenciones.

Una vez concluida la interacción entre cada pareja, se les propuso a los estudiantes que resolvieran de manera individual y por escrito una tarea semejante a la planteada en el cuestionario inicial, con la finalidad de verificar la influencia que tuvieron tanto la interacción como el intercambio de resoluciones en la resolución de la tarea.

## **PRIMER TRABAJO ANALÍTICO**

### **Precisiones sobre el marco teórico interpretativo y sobre la metodología**

Como ya se ha dicho, la investigación general está inspirada en los principios de la Teoría Fundamentada (*Grounded Theory*) (Corbin & Strauss, 2015). Fieles a esos principios, la elaboración y el desarrollo de conceptos se ha hecho con base en los datos empíricos recabados en la investigación; específicamente, en el primer trabajo analítico sobre las interacciones entre

pares se acudió a una herramienta propuesta y descrita en esa metodología, las comparaciones constantes. Así, el análisis y la construcción de las categorías fue resultado de esas comparaciones y de identificar semejanzas y diferencias entre las distintas interacciones, lo que dio lugar fundamentalmente al surgimiento de las categorías; el análisis también fue resultado de la aplicación continua de un proceso iterativo de triangulación entre las categorías que paulatinamente iban construyendo los investigadores, las comparaciones entre los datos empíricos y los términos teóricos tomados de la bibliografía. Se puede decir entonces que la definición y el desarrollo de las categorías se dio en dos planos, uno que tiene que ver directamente con el trabajo analítico realizado con los datos empíricos y otro, con un proceso de triangulación entre estos datos, las concepciones y perspectivas de los investigadores, y las categorías, conceptos e ideas provenientes de la bibliografía.

Para la interpretación de los datos empíricos de las interacciones, en el primer análisis se acudió al modelo de Toulmin. Siguiendo ese modelo, aquí se consideraron como afirmaciones a las respuestas que defendieron los estudiantes; como datos, los procedimientos o sustentos con los que los alumnos respaldaron la respuesta que defendieron; como garantías a las claves que representan el tipo de resolución que se llevó a cabo; como respaldos a aquellas ideas o consideraciones matemáticas o extra-matemáticas sobre las que se construyó el tipo de resolución; y como cualificadores modales a los estados internos de convencimiento, que en esta investigación se denominan 'estados epistémicos de convencimiento' (*ver Capítulo 4*). Para el análisis de los estados epistémicos que experimentaron los participantes de las interacciones se recurrió a los criterios que aparecen en el Marco Teórico de este documento (*ver capítulo 5*). La noción de *account* en la que se respaldan los resultados encontrados en este primer análisis se expone también en el Marco Teórico.

## ANÁLISIS EMPÍRICO DE LAS INTERACCIONES

### Categorías para el análisis de las interacciones

Las categorías con las que se interpretan las interacciones fueron resultado de un proceso de triangulación, como ya se explicó. No obstante, para fines de claridad se exponen previo al análisis.

Con base en una re-definición de la idea de *account* (recogida de Krummheuer, 1995, quien la toma de Garfinkel) y en los datos empíricos recabados en la investigación, en este documento se define la noción de '*account completo*' (a diferencia del '*account parcial*'<sup>1</sup>) que se da cuando a partir de un intercambio comunicativo el incremento de la comprensión y el convencimiento del que habla se presenta, de manera sincrónica, con el incremento de la comprensión y la modificación del convencimiento del que escucha. En este escrito se dice que cuando se da un proceso de *account completo* se ha generado una actitud de 'empatía matemática'. Con base en los grados de *accountability*, en la investigación se distinguen tres tipos de intercambio (productivo, de menor productividad y neutrales), que a continuación se describen:

*Intercambio productivo (IP)*. Se presenta cuando (al menos) uno de los participantes pone en juego un *account completo* y por tanto una actitud de empatía matemática.

*Intercambio de menor productividad*. Se da cuando uno de los participantes consigue *account parcial*.

*Intercambio neutral (IN)*. Se da cuando ninguno de los participantes consigue *account completo*. Esto implica que la interacción no fue provechosa para ninguno de los estudiantes involucrados.

---

<sup>1</sup> El *account parcial* se da cuando a partir de un intercambio comunicativo se presenta un incremento de la comprensión y el convencimiento del que habla pero éste no se acompaña del incremento de la comprensión y la modificación del convencimiento del que escucha.

Tomando como base las categorías precedentes, en lo que sigue se presenta el análisis de la interacción de una pareja, la formada por Raúl y por José. En el Anexo 4 aparecen las Tablas correspondientes al análisis funcional de las interacciones de las cuatro parejas restantes.

### **Análisis interacción Raúl-José**

Con base en los conceptos antes expuestos (intercambios productivos y no productivos, y *account*) se presenta en lo que sigue un análisis de la interacción de una pareja de alumnos, análisis del cual se desprenden algunas 'características notables' que pueden eventualmente promover el éxito en las interacciones entre pares (ver *Consideraciones sobre la interacción*).

En la Tabla 13 aparece el análisis funcional de los argumentos desarrollados durante la interacción que se dio entre José y Raúl. Se respeta el espíritu analítico propuesto por Toulmin; sin embargo, aparece en forma tabular para dar cuenta de las relaciones que guardan las garantías y los respaldos en los que Raúl apoya sus afirmaciones, con respecto a las garantías y respaldos en los que José sustenta sus contra-argumentos, y con respecto a aquellos en los que se apoya el investigador.

*Raúl, primera intervención.* Los procedimientos de Raúl se encuentran muy apegados a perspectivas de tipo absoluto y aditivo (las garantías, tanto de su cuestionario inicial como las de sus intervenciones subsecuentes, corresponden a la categoría A5o); pareciera que el principal problema de este alumno consiste en que no considera el referente del número de juegos en su conjunto (-Rf); esto lo llevó a segmentar las ofertas y a pensar que tiene sentido, en el contexto de la tarea, el comprar juegos sueltos, posicionándose así en una postura absoluta a partir de la cual pierden significado las comparaciones multiplicativas y, por supuesto, la proporcionalidad. En su primera intervención Raúl preservó las garantías y los respaldos que ya estaban presentes en el argumento de su cuestionario; ahí se observa lo dicho: él ignoró las ventajas que le ofrece cada oferta, considerando que es indistinto comprar cualquier número de juegos.

A pesar de que en esa intervención intentó mostrar un alto grado de presunción, al usar un lenguaje corporal muy expresivo, una postura

erguida y abierta, alto volumen de voz, cubriendo criterios de *acción* y *determinación*, es posible que en el fondo no haya estado tan convencido de su argumento matemático, ya que su estrategia, no sólo en esta intervención sino a lo largo de toda su participación, consistió en ofrecer argumentos matemáticos (los ya comentados, que por cierto no son los más correctos y eficientes) complementados con razones extra-matemáticas (e.g, 'en la oferta 3x2 te regalan uno') como 'para reforzar', contraponiéndose así al criterio de *consistencia*.

Tabla 13 - Análisis Funcional. Interacción Raúl-José.

S.	Datos	Cualificadores Modales	Gar.	Respaldo	Afirmación
Rin	RD1: \$1000 por juego. Oferta Costo de dos juegos Costo de tres juegos 1 1/2 1500 2500 70% en 2º 1300 2300 3x2 2000		RW1: A5o	RBm1: Estrategia de tipo absoluto. Ignora relaciones de proporcionalidad. RBe1: Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.	RC1: 3x2 es la mejor oferta porque te regalan uno.
Ri1	RD2: Oferta J1 J2 J3 Total Icono 3x2 1000 1000 ¿Gratis! 2000 ☹ 1 1/2 1000 500 1000 2500 ☹ 70% en 2º 1000 300 1000 2300 ☹ "sería mejor completar los 2000 para conseguir otro juego, porque el tercero te saldría a su precio original" "por pagar 700 o 500 (más) te llevarías un juego más gratis y eso es más diversión por un poquito menos de precio de que si lo compraras con otros métodos."	RQ2: Alta presunción: Utiliza un lenguaje corporal muy expresivo, señala, golpea el pizarrón, mantiene postura erguida y abierta, volumen de voz alto. Utiliza iconos que reflejan su pensar sobre las ofertas. Acción; Determinación; Consistencia.	RW2: A5o	RBm2: Estrategia absoluta, ignora relaciones de proporcionalidad. RBe2: Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.	RC2: En la oferta 3x2 el tercero te sale gratis, está mejor éste, porque pagas menos por tres juegos.
Ii1	Y ¿qué pasa si en lugar de tres juegos, nos quisiéramos llevar cuatro? ¿Cómo quedarían ahora los costos? ¿Sigue conviniendo la primera oferta?	IQ1: Consolida el argumento de R y no cuestiona RW1 ni RW2.	IW1: A5o	IBe1: Incita a completar estrategia Building Up por adiciones sucesivas.	
Ri2	RD3: Ok... si queremos cuatro... otros 1000, entonces serían supuestamente 3000... Oferta J1 J2 J3 J4 Total 3x2 1000 1000 Gratis 1000 3000 1 1/2 1000 500 1000 500 3000 70% en 2º 1000 300 1000 300 2600	RQ3: Presunción; Acción; Consistencia; Determinación. "Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está" No cuestiona su procedimiento. Lenguaje corporal abierto y muy expresivo. Mitigadores del lenguaje: "En este caso te convendría..."	RW3: A5o	RBm3: Estrategia de adiciones sucesivas, no relativiza. RBe3: No acepta resultados alternos aun cuando se le han demostrado matemáticamente.	RC3: En este caso te convendría mejor la número tres. Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está (golpea el pizarrón donde está marcada la oferta 3x2).
Ii2	¿Qué pasa si quiero seis juegos por ejemplo?		IW2: A5o	IBm2: Incita a completar estrategia tipo Building Up por adiciones sucesivas. RBm4: Completa análisis por adiciones sucesivas.	
Ri3	RD4: Entonces en la primera por seis serían 4000 morlacos... Seis, aquí son cuatro (analiza la segunda oferta)... entonces son 4500... ¡sí! mmm... (analiza la tercer oferta) son 2600 por cuatro... ya, 3900...	RQ4: Alta presunción; Acción. Determinación. No muestra cambios de perspectiva sobre el referente del número de juegos en conjunto.	RW4: A5o	RBe4: Se infiere que acepta el resultado por ser un caso particular, no cuestiona el procedimiento.	RC4: Si quiero llevarme seis juegos conviene más la tercera oferta.
Jr	JD1: (Raúl) no sabía explicarlo y al final terminó resultando que la oferta que él decía no era la buena.				JC1: No me convence el procedimiento de Raúl.
Jin	JD2: Descarta la 2a por la 3a; propone precio: \$1000 Oferta Costo x2 Costo x3 Costo x4 3x2 \$2000 \$4000 70% en 2º \$1300 \$2600		JW2: R5y <sup>th</sup>	JBm2: Estrategia Building up incorrecta, normaliza e identifica la diferencia entre porcentajes.	JC2: Es mejor la oferta 70% en 2º porque pagas menos por 4 juegos.
Ji1	JD3a: Supongamos que cada videojuego sale en 1000 pesos, entonces tenemos 3x2, entonces sólo pagaría 2, o sea 2000. Pero, si los divides entre tres, que es el número de juegos que te llevas, o sea, no te van a dar nada gratis, hay un presupuesto para cada videojuego. Entonces serían 666 por cada uno de los tres videojuegos. Y pues ya sacamos el 70% de 1000, da 700, entonces el segundo videojuego estaría saliendo en 300 pesos, y ya de dos videojuegos serían los 1300, por lo que de cuatro videojuegos serían 2600 y 2600 entre los cuatro videojuegos da 650 que es una menor cantidad que los 666 de los tres. JD3b: La segunda oferta la descartamos porque el 70% es mejor que el 50%.	JQ3: Certeza; Acción; Determinación; Consistencia; Interés. Cambia la perspectiva de resolución.	JW3: R6 <sup>va</sup>	JBm3a: Estrategia que considera el valor unitario como medio efectivo para comparar. JBm3b: Descarta una oferta por comparación de porcentajes. JBe3: Indica "no te van a dar nada gratis" y "hay un presupuesto para cada videojuego"	JC3: 650 por juego en la tercera oferta es una menor cantidad que 666 por juego en la primera.
Rr	RD5: Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso...	RQ5: Visos de duda; Mitigadores de lenguaje: "te convendría"	RW5: A5o	RBe5: RC1, RC2, RC3.	RC5: te convendría ese (señala la oferta 3x2)
Rf	RD6: Se infiere propuesta de precio: \$1000 Oferta No. de juegos Costo Costo por juego 4x3 4 3000 750 1 1/4 4 2500 625 70% en 2º 4 2600 650 Por obvias razones es mejor un %75 que un 70% solamente.	RQ6: Casi certeza con enfatizadores de lenguaje "por obvias razones"	RW6: R6 <sup>th</sup> , R6 <sup>va</sup>	RBm6: Estrategia Building up con uso de valor unitario y comparación de porcentajes.	RC6: Conviene más la de 1 ¼, por obvias razones es mejor un 75% que un 70% solamente

Participantes: R: Raúl; J: José. Segmentos: in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada. Análisis funcional: C: afirmación; D: dato; Q: cualificador; W: garantía; B: respaldo

*Raúl y el investigador.* El investigador contra-argumentó a Raúl con la intención de hacerle ver que podía escalar el número de juegos hasta conseguir un número adecuado para comparar todas las ofertas. Sin embargo, los planteamientos del investigador no apuntaron ni a las garantías ni a los respaldos de tipo matemático empleados por el alumno, es decir, no pusieron en entredicho que en el marco de la tarea carece de sentido el concebir los juegos aisladamente, dejando de considerar las relaciones que éstos guardan con el resto de juegos incluidos en cada oferta; el investigador, por otra parte, tampoco cuestionó las garantías y los respaldos de tipo extra-matemático argüidos por Raúl.

Por lo antes dicho, se puede entender perfectamente que, como respuesta a las intervenciones del investigador, Raúl en su segunda participación (Ri2) no sólo no cuestionó su estrategia de adiciones sucesivas, sino que la fortaleció. Esto se observa en la afirmación RC3, en la que tiene frente a él dos soluciones a la tarea que resultan contradictorias entre sí. Raúl acepta sin conceder el argumento matemático propuesto por el investigador, pero apoya decididamente el suyo apelando a recursos extra-matemáticos (“nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger ésta”), siendo consistente con su anterior respuesta y complementando y reforzando esa postura. En su siguiente intervención afirma “Si quiero llevarme seis juegos entonces conviene más la tercer oferta” (RC4); no obstante, no parece tomar conciencia de la contradicción entre esa postura y la asumida por él, porque da la impresión de que no comprende lo que está en el fondo de la resolución que le propone el investigador, la que acepta por concesión y por tratarse de “un caso particular y específico” distinto al que él plantea. Hasta este momento la postura de Raúl parece inamovible; en él no hay incremento en el conocimiento ni generación de duda.

*José y Raúl.* A diferencia de la intervención del investigador, José puso el acento justo en la garantía inconveniente (RW2: A5O) que implícitamente asume Raúl, conforme a la cual él considera que puede comprar cualquier número de juegos; se enfoca también en los respaldos de Raúl (RBm3 y RBm4) que refuerzan su estrategia de adiciones sucesivas. José muestra que es capaz de cuestionar el procedimiento y los argumentos de Raúl, y muestra también que ha escuchado atentamente a su compañero y que tiene la sensibilidad para entender sus argumentos: con su propuesta de utilizar el

valor unitario como estrategia que respeta las relaciones de proporcionalidad (JW3, JBm3a) apunta hacia la garantía con la que Raúl sustenta su estrategia de resolución de tipo aditivo y cuando indica, entre otras cosas, que “no te van a dar nada gratis” (JBe3) apunta directamente hacia el respaldo extra-matemático de Raúl (RBe2).

A pesar de lo anterior, Raúl sigue empeñado en defender su postura y se niega a aceptar frente a su compañero que fue convencido; sin embargo, se infiere que en Raúl existen indicios de duda debido al contraste entre la manera en la que él sostiene la afirmación RC3 “yo sé que van a escoger ésta” (con cierta firmeza) y la forma de sustentar el argumento extra-matemático RC5, en el que utiliza “te convendría”, que es un mitigador del lenguaje que denota duda (Martínez y Rigo, 2014).

Aunque Raúl entiende la parte matemática, está muy apegado a su respuesta y hace lo necesario, como pasar por encima de argumentos matemáticos y argüir razones extra-matemáticas, para soportar su respuesta. Sin embargo, este asomo de duda se convierte en conocimiento y seguramente en alta presunción cuando muestra, en su cuestionario final, una respuesta contundente en la que utiliza las estrategias que le explicó José: utiliza el valor unitario (retomando la garantía de José JW3a: R6VU) y compara porcentajes como lo hace su compañero en su intervención (JBm3b).

Abandona además todas sus posturas retóricas y sus argumentos extra-matemáticos, centrándose sólo en los argumentos matemáticos. Lo anterior permite sugerir un posible cambio de estado epistémico a raíz del cambio de estrategia con la que se le cuestionan sus afirmaciones, garantías y respaldos.

*José.* En José también se observa una evolución. Él pasa de una resolución basada en Building up (con error) y descarte de ofertas por comparación de porcentajes, a una del tipo de valor unitario que utiliza al tomar la decisión de afrontar el reto que Raúl le plantea. En ese sentido, se considera que la explicación de Raúl es un detonador importante en este proceso de trabajo matemático. Aunque en su cuestionario final José regresa a la estrategia Building Up, su comprensión de las posibles resoluciones de este tipo de



tarea de comparación de razones queda al descubierto cuando opta por una estrategia que no deja lugar a dudas para tratar de convencer a su compañero.

## Consideraciones sobre la interacción.

Lo antes dicho deja ver que la interacción de José (en relación con Raúl) es de tipo productivo, que la de Raúl (en relación con José) resultó un detonador y que la del investigador es neutral. Como se puede colegir de los datos empíricos antes expuestos, en la interacción de tipo productivo se presentan las siguientes condiciones: Raúl incluyó en su planteamiento algo que para José representó un reto; Raúl puso en duda su planteamiento en algún momento; José se interesó por asumir el reto de convencer a Raúl; y de manera muy relevante y significativa, José puede identificar las garantías y los respaldos en los que Raúl soporta su argumento, y contra-argumentar en consecuencia; finalmente, Raúl utiliza los procedimientos explicados por su compañero para resolver una tarea similar.

En relación con el *account* que vivencia José se puede decir que es de tipo completo, ya que él se convence a sí mismo y convence a su compañero de que su procedimiento de resolución es el más adecuado para resolver este tipo de tareas, al tiempo que incrementa su comprensión y la de su compañero, ya que Raúl, como se vio, utiliza los procedimientos de José en el cuestionario final. Con todo ello, José no sólo muestra que es capaz de utilizar el lenguaje matemático de su compañero y también el coloquial. Revela que, en el fondo, José es sensible a las dificultades que en el ámbito matemático exhibe su compañero, relacionadas con el tema de la comparación de razones que se pone en juego al resolver la tarea, y que es sensible también a ciertas necesidades afectivas de Raúl. A esa sensibilidad que un alumno muestra hacia el otro, en la que se complementa lo disciplinar con lo afectivo, en este documento se denomina 'empatía matemática'.

Con base en este análisis de la interacción entre Raúl y José y haciendo comparaciones constantes con los análisis funcionales de la interacción entre las otras parejas, se arribó a las siguientes consideraciones sobre las características notables que debe presentar una interacción para que se le pueda considerar como productiva.

Se sugiere que una interacción entre dos estudiantes A y B es productiva si se presentan las 'características notables' que a continuación se describen:

- Que B exponga argumentos que representen un reto para A.
- Que A escuche, entienda y se ponga en el lugar de B, comprometiéndose a superar el reto que le presenta su compañero.
- Que, a partir de lo anterior, A sea capaz de identificar las garantías y los respaldos sobre los cuales B sostiene sus argumentos y los refute sin dejar lugar a dudas.
- Que B escuche y entienda a su compañero y, en ese proceso, incremente su comprensión y cambie su convencimiento y que dé muestras de ello, utilizando alguno(s) argumentos que le ha explicado A.
- Que, a partir de una actitud de empatía matemática, uno de los participantes (A) obtenga *account* completo, es decir, que en el proceso de tratar de convencer y de incrementar la comprensión del otro (B) se incremente su propia comprensión y su convencimiento.

## SEGUNDO TRABAJO ANALÍTICO

### Consideraciones metodológicas

En el segundo acercamiento a los datos empíricos obtenidos de la interacción entre José y Raúl se siguieron procedimientos metodológicos que no se habían introducido en el primer trabajo analítico. Mientras en el primer trabajo se consideraron estados epistémicos que correspondían a cada intervención, en el segundo hay un interés por explicar la generación, construcción y transformación de esos estados epistémicos en el contexto de la interacción, para lo cual se recurrió a un análisis de procesos basado en la codificación axial (Corbin & Strauss, 2015).

Para desarrollar los conceptos que surgen de este trabajo analítico se volvió a utilizar una variante del modelo de Toulmin que nos permitió analizar los argumentos presentados por los participantes. En este caso se vuelve a utilizar el modelo adaptado de forma tabular con la finalidad de dar cuenta de las relaciones horizontales ya marcadas en el trabajo analítico anterior, pero también de las verticales, ya que es ahí donde se puede visualizar cómo se desenvuelve el proceso y las relaciones que guardan los argumentos de un sujeto con las acciones que decide emprender el otro. En la Tabla 14, la columna denominada *acciones* incluye los datos y las afirmaciones de cada argumento; la columna de *comprensión* incluye las garantías (que son las claves de resolución obtenidas en el análisis de los cuestionarios) y los respaldos de cada argumento; mientras que la columna *convencimiento* incluye los Cualificadores modales representados por los estados epistémicos identificados en cada participación, indica sobre qué recaen esos estados epistémicos (sobre contenidos específicos, sobre la respuesta, sobre la estrategia o sobre contenidos de las matemáticas) y muestra algunos indicadores o parámetros que hacen referencia al estado epistémico experimentado. La columna denominada *consecuencia* es la que permite ligar el argumento expuesto por el participante con las siguientes acciones de otro participante de la interacción.

## Descripción de categorías identificadas relacionadas con las interlocuciones

En el trabajo se han identificado categorías que hacen referencia a varios tipos de interlocuciones. En lo que sigue se hace una descripción detallada de esas categorías, esta descripción se coloca antes del análisis para que el lector tenga presente a que se refieren los conceptos utilizados. Su identificación fue resultado, como ya se explicó, de la iteración de trabajos de análisis de las interacciones y de trabajos de triangulación con la literatura, en los que se realizaron una serie de comparaciones constantes entre todas las interacciones estudiadas.

*Escucha atenta, interesada y reflexiva.* Se da cuando el interlocutor da muestras de haber escuchado atentamente y con interés al otro y que esa escucha lo llevó reflexionar en el argumento del otro.

*Interlocución inductiva sustantiva.* En la interlocución inductiva sustantiva se da la escucha atenta, interesada y reflexiva; pero las acciones no quedan ahí; en ese tipo de interlocución inductiva, adicionalmente, se centra la atención en dos aspectos: en primera instancia, el que habla se centra en los elementos sustantivos del argumento del otro (puede ser su conclusión o bien, sus respaldos o sus warrants), con el fin de contra-argumentarle matemáticamente, dirigiendo la atención justo hacia esos elementos sustantivos que probablemente se busca que él modifique; en segunda instancia, el que habla formula una propuesta alternativa de resolución que al otro le resulta atractiva y que le es lógicamente significativa. Se puede decir (sólo como dato adicional sugerente pero no definitorio), que en este tipo de interlocución el que habla tiene varios propósitos: interés porque el otro abandone una postura (y disminuya de manera importante su seguridad en ella); interés porque el otro adopte una nueva posición (la del que habla) e interés de que se convenza de ella. Es una actitud activa de empuje, de embate, incluso un poco de acometida.

*Interlocución inductiva no sustantiva.* En este tipo de interlocución se da la escucha atenta interesada y reflexiva y se trata de contra-argumentar al otro, cuestionando alguno de sus backings. Sin embargo, no se dirige la atención hacia los elementos sustantivos del argumento del otro ni se formula una

propuesta alternativa de resolución que al otro le resulte atractiva y que le sea lógicamente significativa.

*Interlocución no inductiva.* En ésta el que habla tiene un objetivo: interés por defender su postura, por responderle al otro, es una postura de auto-defensa; el centro del debate está en el argumento del que habla, de modo que se puede decir que en este caso el que habla no tiene la intención de contra-argumentar a la postura del otro. El que habla tiene una actitud (activa) pero a la defensiva de su argumento. Se da una interlocución no inductiva, en el sentido de que puede haber algún grado de escucha atenta, interesada y reflexiva por parte del que habla y se está respondiendo a la intervención del otro, pero al que habla no parece interesarle inducir algún cambio en el que escucha.

*Interlocución pasiva.* A diferencia de las anteriores no se identifica que se persigan objetivos específicos. Se acepta lo que dice el otro, sin tratar de que modifique su postura ni de que acepte la propia.

## Análisis de procesos

Tabla 14 - Análisis de procesos. Interacción Raúl – José

Segmento	Acciones (D y C)	Comprensión (W y B)	Convencimiento (Q)	Consecuencia												
	Datos y afirmaciones del estudio	Garantías y respaldos de los argumentos		Acto que realiza el participante ante las condiciones precedentes.												
<i>Rin</i>	Resuelve su cuestionario inicial <b>RD1:</b> \$1000 por juego. <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo de dos juegos</th> <th>Costo de tres juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1 ½</td> <td>1500</td> <td>2500</td> </tr> <tr> <td>70% en 2º</td> <td>1300</td> <td>2300</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td></td> <td>2000</td> </tr> </tbody> </table> <b>RC1:</b> “3x2 es la mejor oferta porque te regalan uno”	Oferta	Costo de dos juegos	Costo de tres juegos	1 ½	1500	2500	70% en 2º	1300	2300	3x2		2000	<b>RW1:</b> A5o  <b>RBm1:</b> Estructuras de tipo aditivo; ignora relaciones de proporcionalidad  <b>RBe1:</b> Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.		
Oferta	Costo de dos juegos	Costo de tres juegos														
1 ½	1500	2500														
70% en 2º	1300	2300														
3x2		2000														

Ri2

Raúl es el alumno que inicia la interacción entre pares. Retoma el procedimiento de resolución y la respuesta que presentó en el cuestionario inicial.

**RD2:**

Oferta	J1	J2	J3	Total	Ícono
3x2	1000	1000	¡Gratis!	2000	😊
1 1/2	1000	500	1000	2500	😞
70% en 2°	1000	300	1000	2300	😞

“sería mejor completar los 2000 para conseguir otro juego, porque el tercero te saldría a su precio original” “por pagar 700 o 500 (más) te llevarías un juego más gratis y eso es más diversión por un poquito menos de precio de que si lo compraras con otros métodos.” (a)

**RC2:**

En la oferta 3x2 el tercero te sale gratis, está mejor éste, porque pagas menos por tres juegos.

**RW2:**

A5o

**RBm2:**

Estructuras de tipo aditivo; ignora relaciones de proporcionalidad

**RBe2:**

a) Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.  
b) Utiliza un lenguaje corporal muy expresivo, señala, golpea el pizarrón, mantiene postura erguida y abierta, volumen de voz alto y usa íconos y dibujos como soporte.

**RQ2:**

Respuesta: parece tener un alto nivel de presunción de que su respuesta es la correcta ya que la defiende con determinación e interés (y así lo hará, como se verá, en las siguientes intervenciones).

Estrategia: Por otro lado, denota seguridad acompañada de una cierta duda (encubierta de supuesta ‘seguridad’) en torno a su estrategia de resolución al acudir a mitigadores de lenguaje; al mostrar una seguridad exagerada que se deja ver con lenguaje corporal alterado; al usar íconos y dibujos como elemento de soporte extra para defender esa estrategia (nuevo parámetro de convencimiento).

Se establecen las condiciones para la siguiente intervención teniendo como punto de partida un nivel de comprensión A5o con esquemas matemáticos erróneos, esquemas extra-matemáticos y diferencias entre el convencimiento sobre su respuesta y su estrategia.

<p><i>ii1</i></p>	<p>El investigador insta a Raúl a escalar las ofertas a 4, reforzando el procedimiento utilizado.</p>	<p>Con su indicación el Investigador le cuestiona a Raúl su respuesta, algunos de sus B extra-matemáticos (su lenguaje corporal exagerado) y el que no relativice la tarea. Por otra parte, el Investigador no le cuestiona su estrategia ni el otro B extra-matemático (lo de la gratuidad). Además, a lo que quizás tendría que haber apuntado el Investigador es a señalar que Raúl desarma las ofertas, con lo que éstas pierden el sentido proporcional.</p>	<p>El investigador tiene escucha atenta e interesada, pero él hace sólo una interlocución sustantiva parcial, ya que, aunque cuestiona algunos B (pero no todos los B que desde su punto de vista son incorrectos), no cuestiona la garantía en la que Raúl sustenta su argumento.</p>
-------------------	---	---	--



Ri3

Raúl escala las ofertas a 4 juegos, con lo que obtiene que 70% en 2° es la mejor oferta, aunque sigue defendiendo su respuesta.

**RD3:**

Oferta	J1	J2	J3	J4	Total
3x2	1000	1000	Gratis	1000	3000
1 1/2	1000	500	1000	500	3000
70% en 2°	1000	300	1000	300	2600

**RC3:** "En este caso te convendría mejor la (oferta) número tres. Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger ésta (golpea el pizarrón donde está marcada la oferta 3x2)"

**RW3:**  
A5o

**RBm3:**  
Estructuras de tipo aditivo; ignora relaciones de proporcionalidad

**RBe3:**  
a) No acepta del todo resultados alternos aun cuando se le han demostrado matemáticamente.  
b) Recurre a consideraciones extra-matemáticas: "Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está"

**RQ3:**  
Respuesta: da indicios de aceptar muy incipientemente otra posible respuesta (que encuentra, acepta y explicita), pero con menor nivel de presunción que en la primera, ya que en esta segunda incluye mitigadores en el lenguaje y la condiciona al caso particular tratado (de cuatro juegos). A pesar de que acepta –aunque sólo sea parcialmente- la segunda respuesta, Raúl en esta participación sigue aferrado a la primera, y una muestra de ello es que no parece importarle la contradicción que esto supone. Esta actitud denota un convencimiento ambivalente en Raúl, o de tipo contradictorio, ya que ‘acepta’ las dos respuestas.

Estrategia: La sabe hacer, se ve que la domina, no tiene problemas con matemáticas básicas, se puede decir que en este caso Raúl comienza a ganar seguridad en ella. Esa seguridad se deja ver porque tiene

Parece considerar lo que dice el I, acata lo que él se sugiere, Hay una interlocución no inductiva por parte de Raúl, al no desarrollar argumentos matemáticos en consecuencia con lo que dice el I, aunque desarrolla contra-argumentos, pero estos son de tipo extra-matemáticos. Raúl ignora la contradicción en la que incurre, con tal de mantener su respuesta, en la que parece que sigue teniendo seguridad.

<p><i>Ii2</i></p>	<p>El investigador insta a Raúl a escalar las ofertas ahora a 6</p>	<p>Con esta intervención, el Investigador vuelve a cuestionar la respuesta inicial de Raúl, aunque sigue sin cuestionar la descomposición de las ofertas con la que Raúl sostiene sus afirmaciones reforzando la estrategia de adiciones de Raúl. Tampoco le hace ver a Raúl la contradicción en la que incurre al aceptar simultáneamente la primera y la segunda respuesta por él halladas.</p>	<p>El investigador cuestiona sin considerar garantías del argumento de Raúl, así como algunos respaldos que parecen fundamentales; hay una interlocución inductiva parcial.</p>
-------------------	---	---	---

<p><i>Ri4</i></p>	<p>Raúl resuelve, sin hacer operaciones escritas, escalando las ofertas a 6 juegos, encuentra que la mejor oferta es 70% en 2°. Pero parece que acepta esta opción 'sin conceder'"</p> <p><b>RD4:</b> Entonces en la primera por seis serían 4000 morlacos... Seis, aquí son cuatro (analiza la segunda oferta) ... entonces son 4500... ¡sí! mmm... (analiza la tercera oferta) son 2600 por cuatro... ya, 3900...</p> <p><b>RC4:</b> "Sí quiero llevarme seis juegos [y sólo en este caso] conviene más la tercera oferta."</p>	<p><b>RW4:</b> A5o</p> <p><b>RBm4:</b> Estructuras de tipo aditivo; completa el análisis por adiciones sucesivas.</p> <p><b>RBe4:</b> Se infiere que acepta el resultado por ser un caso particular, no cuestiona el procedimiento y no se percata de que la información que obtiene al evaluar las ofertas en seis le puede llevar a comprender mejor los casos de dos y tres juegos.</p>	<p><b>RQ4:</b> Estrategia: Raúl tiene un estado epistémico de casi certeza, dado que expone la estrategia con seguridad, de manera rápida y eficiente, y en su desarrollo utiliza pocos mitigadores de lenguaje. Es posible que Raúl haya ganado seguridad en su estrategia ya que el Investigador le ha pedido en dos ocasiones que la siga utilizando, con lo que parece 'darle su aval'.</p> <p>Respuesta: Raúl muestra que tiene cierta seguridad en la respuesta que ofrece en esta intervención, pero sigue condicionándola a casos particulares, lo que denota que sigue manteniendo su confianza en su respuesta inicial, ya que no quiere conceder que esa era errónea; (pareciera estar pensando: mi respuesta inicial es correcta, ya que está basada en una estrategia de resolución que ha probado ser exitosa para otros casos).</p>	<p>Raúl parece convencerse de que su estrategia es adecuada para resolver la tarea; aunque sigue encontrando una respuesta diferente a la que defendió originalmente, no parece cambiar su convencimiento respecto a la primera. Sigue habiendo <b>una interlocución no inductiva por parte de Raúl</b>. Hay una actitud defensiva, le interesa convencer al otro de su respuesta, aunque ahora lo haga de manera menos enfática que en sus intervenciones anteriores.</p>
-------------------	---	--	--	--

<p><i>Jr1</i></p>	<p><b>JD1:</b> No me convence lo que hace mi compañero, ya que no sabía explicarlo bien y al final resultó que no era la [oferta] que él decía...</p> <p><b>JC1:</b> Es mejor 70% en 2°</p>	<p><b>JBe1:</b> todas las intervenciones de Raúl</p>	<p><b>JQ1:</b> José interviene por primera vez en la interacción y deja ver un estado epistémico de certeza en relación con la respuesta de la tarea. Esto lo deja ver al usar un lenguaje asertivo y hacer señalamientos directos y con determinación ante las intervenciones de Raúl. Estrategia: todavía no hay nada.</p>	<p>Rechaza de forma perspicaz los argumentos desarrollados por Raúl. Se nota que ha escuchado atentamente a su compañero, comienza a desarrollar de manera incipiente una interlocución inductiva sustantiva.</p>
-------------------	---	--	--	---

<p><i>Ji2</i></p>	<p>José comienza con su participación. Defiende su respuesta (es mejor 70% en 2°) por medio de una estrategia diferente a la de su cuestionario inicial.</p> <p><b>JD2a:</b> Supongamos que cada videojuego sale en 1000 pesos, entonces tenemos 3x2, entonces sólo se pagan 2, o sea 2000. Pero, si los divides entre tres, que es el número de juegos que te llevas, o sea, no te van a dar nada gratis, hay un presupuesto para cada videojuego. Entonces serían 666 por cada uno de los tres videojuegos. Y pues ya sacamos el 70% de 1000, da 700, entonces el segundo videojuego estaría saliendo en 300 pesos, y ya de dos videojuegos serían los 1300, por lo que de cuatro videojuegos serían 2600 y 2600 entre los cuatro videojuegos da 650 que es una menor cantidad que los 666 de los tres.</p> <p><b>JD2b:</b> La segunda oferta la descartamos porque el 70% es mejor que el 50%.</p> <p><b>JC2:</b> 650 por juego en la tercera oferta es una menor cantidad que 666 por juego en la primera.</p>	<p><b>JW2:</b> R6<sup>VU</sup></p> <p><b>JBm2</b> a) Estructuras de tipo multiplicativo; estrategia que considera el valor unitario como medio efectivo para comparar.</p> <p>b) Descarta una oferta por comparación de porcentajes.</p> <p><b>JBe2:</b> a) Indica “no te van a dar nada gratis” y “hay un presupuesto para cada videojuego”</p>	<p><b>JQ2:</b> En su intervención José muestra confianza en las matemáticas y, específicamente, muestra confianza en la resolución novedosa de la tarea que le plantea en esta intervención a Raúl, la cual expone con determinación, asertividad, y siendo consecuente con las acciones matemáticas que él enuncia.</p>	<p>Estrategia: José ofrece una estrategia novedosa en la que pone en entredicho, aunque sólo sea de manera implícita, la estrategia de Raúl, específicamente las garantías, ya que le da elementos matemáticos para que su compañero comprenda por qué no se pueden desmembrar las ofertas. También contra-argumenta los respaldos extra-matemáticos de Raúl, con respecto a la gratuidad de los juegos.</p> <p>José lleva a cabo, así, una interlocución inductiva sustantiva.</p>
-------------------	--	--	--	---

<p><i>Rr5</i></p>	<p>Raúl no acepta explícitamente la respuesta de José, se infiere que intenta defender el hecho de que la respuesta correcta depende de casos particulares.</p> <p><b>RD5:</b> Sí, pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso...</p> <p><b>RC5:</b> Te convendría ese (señala la oferta 3x2).</p>	<p><b>RW5:</b> A5o</p> <p><b>RBe5:</b> RC1, RC2, RC3. Abandona toda postura matemática, en el afán de convencer de su seguridad solo utiliza argumentos extra-matemáticos.</p>	<p>Estrategia: Raúl revela cambios drásticos en su convencimiento en relación con su estrategia, ya que da cuenta de que su procedimiento ya no le brinda la seguridad que mostró con anterioridad, al recurrir a un esquema extra-matemático (arguyendo ideas de la economía). Respuesta: regresa a defender enfáticamente su respuesta original (¡pareciera que las actividades anteriores no dejaron huella!), y como se dijo, lo hace recurriendo un esquema extra-matemático (sin soporte matemático)</p>	<p>Rechaza la respuesta de José, pero trata de convencerlo con argumentos extra-matemáticos; pero además no le responde a José (parece que no le puede rebatir), pero entonces busca contra-argumentarle al investigador, al cuestionar la garantía y con ello, la respuesta. Trata de convencer a los dos, pero a través de contra-argumentar al investigador con una interlocución inductiva parcial (con argumentos extra-matemáticos).</p>
-------------------	--	--	--	--

<p>Rf6</p>	<p>En la resolución de su cuestionario final, Raúl utiliza los métodos de resolución que le explicó su compañero.</p> <p><b>RD6</b> Se infiere propuesta de precio: \$1000</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>No. de juegos</th> <th>Costo</th> <th>Costo por juego</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4x3</td> <td>4</td> <td>3000</td> <td>750</td> </tr> <tr> <td>1 1/4</td> <td>4</td> <td>2500</td> <td>625</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>4</td> <td>2600</td> <td>650</td> </tr> </tbody> </table> <p>“Conviene más la de 1 ¼, por obvias razones es mejor un 75% que un 70% solamente.”</p> <p><b>RC6:</b> Conviene más la de 1 ¼, por obvias razones es mejor un 75% que un 70% solamente.</p>	Oferta	No. de juegos	Costo	Costo por juego	4x3	4	3000	750	1 1/4	4	2500	625	70% en 2°	4	2600	650	<p><b>RW6:</b> R6<sup>Bu</sup>, R6<sup>Vu</sup></p> <p><b>RBm6:</b> Estructuras de tipo multiplicativo; estrategia Building up con uso de valor unitario y comparación de porcentajes.</p> <p><b>RBe6:</b> Uso de enfatizadores de lenguaje: “por obvias razones”</p>	<p>En su cuestionario final, Raúl al abandonar su estrategia de adiciones sucesivas y utilizar de manera directa la estrategia building up, la comparación de porcentajes y el uso del valor unitario para responder con certeza y de manera correcta, con lo que revela los cambios que sufrió en su convencimiento. Muestra cambios en la seguridad que mostraba con respecto a su respuesta inicial ya que acepta una respuesta diferente, además de que parece que su argumento se soporta en la confianza que tiene sobre los procedimientos matemáticos que le mostró su compañero.</p>	<p>En la ausencia de un ‘enfrentamiento’ con sus pares, Raúl se adhiere a la estrategia y respuesta que le propone su compañero</p>
Oferta	No. de juegos	Costo	Costo por juego																	
4x3	4	3000	750																	
1 1/4	4	2500	625																	
70% en 2°	4	2600	650																	

Participantes: R: Raúl; J: José. Segmentos: in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada f: cuestionario final. Análisis funcional: D: dato; C: afirmación; W: garantía; B: respaldo; Q: calificador o nivel de convencimiento.

## **Descripción de la interacción**

### **Raúl**

Sobre el proceso de los cambios en la comprensión y los estados epistémicos de Raúl se regresa en el Capítulo siguiente. En éste sólo importa resaltar que su interlocución es de tipo no inductiva, ya que él sólo responde a los cuestionamientos del investigador y a José ni siquiera le responde. Él no trata de convencerlos ni de hacer que cambien su comprensión, todo el tiempo permanece a la defensiva.

### **El investigador**

El investigador no logra convencer a Raúl porque, aunque éste último hace mecánicamente los ejercicios que el investigador le pide y puede que comience a aceptar y a confiar en una respuesta distinta a la que Raúl defiende, hay dos aspectos que impiden que él cambie su respuesta y modifique su convencimiento en una nueva:

El primer aspecto tiene que ver con la calidad de interlocución que logra el investigador. Y es que el investigador no socava una de las garantías que Raúl incluye en su argumento, es decir, no cuestiona los problemas y 'errores' matemáticos (como desagregar las ofertas y comprar juegos por separado sin considerar la proporcionalidad asociada a la oferta) que supone mantener la posición A5o (que sostiene Raúl) y no cuestiona tampoco sus respaldos (extra-matemáticos como aferrarse a la gratuidad). Al contrario, da la impresión de que con la propuesta de que escale a 4 juegos que le plantea el investigador, Raúl refuerza la garantía y uno de los respaldos de su argumento y con ello, impide que él logre comprender las dificultades conceptuales que supone el 'desarmar' las ofertas. Esto es, pareciera que justo la estrategia que propone el investigador refuerza la de Raúl y por tanto refuerza su seguridad en su respuesta inicial, ya que se puede desprender de la misma estrategia que el investigador 'avala'. En este sentido se dice que la interlocución del investigador es de tipo inductivo, pero no es sustantivo.



Un segundo aspecto está relacionado con la seguridad (aferramiento) que tiene Raúl en su respuesta, seguridad que se manifiesta cuando Raúl, aunque aparentemente llega a aceptar otras respuestas, lo hace sin convicción y siempre condicionándolas de manera extra-matemática. Responde a partir de una seguridad no regulada, no se orienta y considera que los resultados que encuentra son casos particulares y no tienen relación con el caso expuesto en el problema original.

La aplicación (mecánica, absoluta) de la estrategia lleva a Raúl a comenzar (aunque sea de manera muy incipiente) a convencerse de esa segunda respuesta, pero el aferramiento que tiene en torno a la primera actúa como un obstáculo que le impide profundizar y aprovechar el ejercicio que se le propone para identificar los elementos matemáticos que ahí están involucrados, como la proporcionalidad, identificar la contradicción que supone aceptar las dos respuestas y tomar conciencia de la baja calidad de sus contra-argumentos.

En síntesis, la calidad de la interlocución del investigador y el convencimiento que Raúl tiene sobre su respuesta, pareciera que juegan el papel de un ancla que no le permite moverse de su postura para incrementar su comprensión en temas matemáticos de proporcionalidad y trasladar su confianza hacia una forma matemática de sustentar las afirmaciones.

El investigador intenta tener una interlocución sustantiva, pero no lo consigue por las razones antes dadas. Quién sí consigue este tipo de interlocución sustantiva, como lo veremos en lo que sigue, es José, quien cuestiona directamente los Respaldos, la Garantía y, consecuentemente, la respuesta que Raúl sostiene en su argumento.

## **José**

Todo lo que ocurre al inicio de la interacción, tanto las participaciones de Raúl como las del investigador, son elementos sustanciales de los que José parece no dejar de tomar nota. La postura que Raúl sostiene desde el principio le plantea un reto interesante a José, esto permite que él dirija su atención a Raúl y que construya alguna propuesta con la intención de modificar su postura. Hubo algo en Raúl que logra captar la atención de José

y que le permite escuchar de forma atenta, interesada y reflexiva. Sólo así se entiende que José llegue a comprender con tanta profundidad la estrategia de su compañero. Que pueda distinguir ahí, por ejemplo, sus respaldos matemáticos y extra-matemáticos, de igual manera que los investigadores lo pudieron hacer en el análisis recurriendo a la herramienta de Toulmin; la diferencia es que José lo hace al calor de la interacción y de 'botepronto'.

Cuando le toca el turno de tomar la palabra, José hace gala de la certeza que tiene sobre los hechos de las matemáticas asociadas a la tarea de comparación de razones. Todo parece indicar que su seguridad va más allá de su respuesta o su procedimiento. José desarrolla una exposición en la que utiliza un lenguaje asertivo y muestra serenidad en sus actos, dejando ver tanto seguridad en su respuesta como en su estrategia, es decir, en su intervención muestra determinación, hay acciones matemáticas y hay interés por convencer. José parte de una confianza en las matemáticas, de una confianza en su capacidad para argumentar y pone en juego todas sus intuiciones para contraargumentar, tanto los argumentos matemáticos de Raúl como los extra-matemáticos. José no sólo parece defender una respuesta sino un modo matemático de actuar, que consiste en ser flexible ante la resolución de tareas matemáticas y no recurrir a consideraciones extra-matemáticas para soportar los argumentos y la seguridad.

A lo largo de esta interacción se hace evidente que José logra desmenuzar muy bien el argumento de Raúl e identifica muy bien garantías y respaldos en los que sostiene sus argumentos y logra así, refutarlos con una guía sólida, construyendo el nuevo argumento con dos propósitos: para refutar el argumento del otro y como una nueva propuesta matemática. Todo esto deja ver que José tiene la sensibilidad y los conocimientos matemáticos para implementar una escucha atenta, interesada y reflexiva, principio obligado – aunque no suficiente- para la construcción de argumentos que apunten hacia las Garantías y los Respaldos del otro, lo que representa la esencia de la interlocución inductiva sustantiva.

En este contexto surge una nueva pregunta ¿José hubiera llegado a la propuesta de resolución que le hizo a Raúl, en otras condiciones? Posiblemente hubiera llegado, pero lo que es claro, es que fue en el acto de hablar y de interpelar a Raúl y de responder al reto que le planteó su

compañero que construyó una propuesta mucho más avanzada que la que él mismo elaboró en su cuestionario inicial. Fue en las condiciones del intercambio, que él consiguió construir esa propuesta. En el afán de explicar al otro, hubo una ganancia, un cambio, un avance. José avanzó en la medida en que permitió que Raúl avanzara. Se presentó, en este caso, el fenómeno de *account*, que se describe en el trabajo analítico previo (*Ver Primer trabajo analítico*).

### **Algunas consideraciones preliminares sobre la interacción Raúl - José**

Con el caso del investigador, en el trabajo se ilustra de forma empírica cómo hay interlocuciones inductivas no sustantivas que parecen influir en menor medida en la comprensión y convencimiento del otro, y con la de José se deja ver empíricamente que existen interlocuciones, las inductivas sustantivas, que parecen influir de manera más contundente en la comprensión y convencimiento del otro.

Por otro lado, también hay intervenciones en las que el que habla parece que únicamente trata de defenderse, sin incidir de forma enfática ni en la comprensión ni en el convencimiento del otro (como las de Raúl). Se trata, en estos casos, de *interlocuciones no inductivas*.

Es preciso aclarar que en el marco de la presente investigación también se analizaron las otras cuatro interacciones observadas (aunque aquí no se muestre un análisis detallado como en el caso de José y Raúl). Ahí se ha identificado que en la interacción entre pares también puede haber intervenciones que parecen no aportar nada a los participantes de dicho proceso. Se trata de *interlocuciones pasivas* en las que ni el que habla ni el interlocutor muestran cambios en su comprensión ni en su convencimiento, ni intenciones de cambiar al otro. Es claro que cuando los dos alumnos que participan en una interacción sólo lo hacen de forma pasiva, no se consigue una interacción provechosa.

En la Tabla 15 aparece el tipo de interlocución que se dio en cada una de las interacciones observadas.

Tabla 15. Tipo de interlocuciones identificadas en los procesos de interacción.

Interacción	Tipo de interlocuciones que se presentan
Raúl - José	Interlocuciones no inductivas; Interlocuciones inductivas no sustantivas e interlocuciones inductivas sustantivas
Andrea - Alexa	Interlocuciones no inductivas; interlocuciones inductivas no sustantivas e interlocuciones inductivas sustantivas
Samantha - Montserrat	- Interlocuciones no inductivas; interlocuciones pasivas e interlocuciones inductivas sustantivas
Rodrigo - Alejandro	- Interlocuciones no inductivas e interlocuciones pasivas
Cassandra - Erasmo	- Interlocuciones pasivas

Aunque en el estudio sólo participaron cinco parejas, la metodología seguida en la elección de las parejas dio sus frutos, ya que las interacciones fueron lo suficientemente variadas para encontrar muy distintos tipos de interlocuciones en cada pareja y esencialmente ricas para poder hacer una caracterización pormenorizada, como la que se presenta en este capítulo.

### **ALGUNAS EXPLICACIONES PRELIMINARES QUE PRETENDEN DAR RESPUESTA A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y ALGUNAS CONSIDERACIONES PARA LA DIDÁCTICA**

En el trabajo de investigación es posible pasar de la descripción a algunas explicaciones iniciales; esto obedece a que la metodología empleada -basada en el análisis de procesos-, y el marco teórico adoptado en el trabajo (Modelo de Toulmin, aprendizaje significativo, estados epistémicos) permiten dar cuenta de algunos fenómenos observados durante la interacción. Hacemos referencia específicamente a dos de ellos (cabe aclarar que se recurre al caso de Raúl en su interacción con José y el investigador porque proporciona información significativa, ilustrativa y pertinente). Por una parte, es posible ofrecer algunas explicaciones de los cambios en los estados epistémicos de Raúl que concomitantemente se dieron a su evolución en la comprensión, que corresponde a la primera pregunta de investigación. Por otra parte, es posible también ofrecer algunas ideas iniciales acerca de las condiciones necesarias para que se dé una interacción cognitivamente provechosa, que se corresponde a la segunda pregunta que orientó el estudio. En lo que sigue se ofrecen dichas explicaciones.

#### **Posibles razones de cambios en los estados epistémicos y en los niveles de comprensión: el caso de Raúl en su interacción con José y el investigador**

Durante el proceso de interacción que se dio entre Raúl, José y el investigador se pueden apreciar cambios en los estados epistémicos de Raúl y en sus niveles de comprensión. Como se dijo, interesa en esta parte dar cuenta de algunas posibles razones, aunque sean incipientes, que subyacen a la transformación de Raúl.

Para la explicación preliminar nos apoyaremos en la figura 4. En ella se retoman los mismos componentes que aparecen en el modelo de Toulmin, pero en el diagrama se reorganizan en torno a tres ejes: la transformación de los estados epistémicos asociados a cada respuesta y el de la comprensión, porque justo interesa conocer cómo se despliegan y transforman los estados epistémicos concomitantemente a la comprensión, y desvelar algunas

posibles razones que subyacen a esos cambios. Al centro aparece la categoría asociada al tipo de resolución empleada y con una línea negra gruesa debajo de la categoría se indica que el investigador intervino para cuestionar a Raúl (como ya se ha comentado anteriormente). En los extremos se hace referencia a la manera en que la seguridad sobre la respuesta disminuye o se incrementa. La intención es dejar ver cómo es que distintos estados epistémicos se van construyendo concomitantemente y en acompañamiento a los cambios en la comprensión.

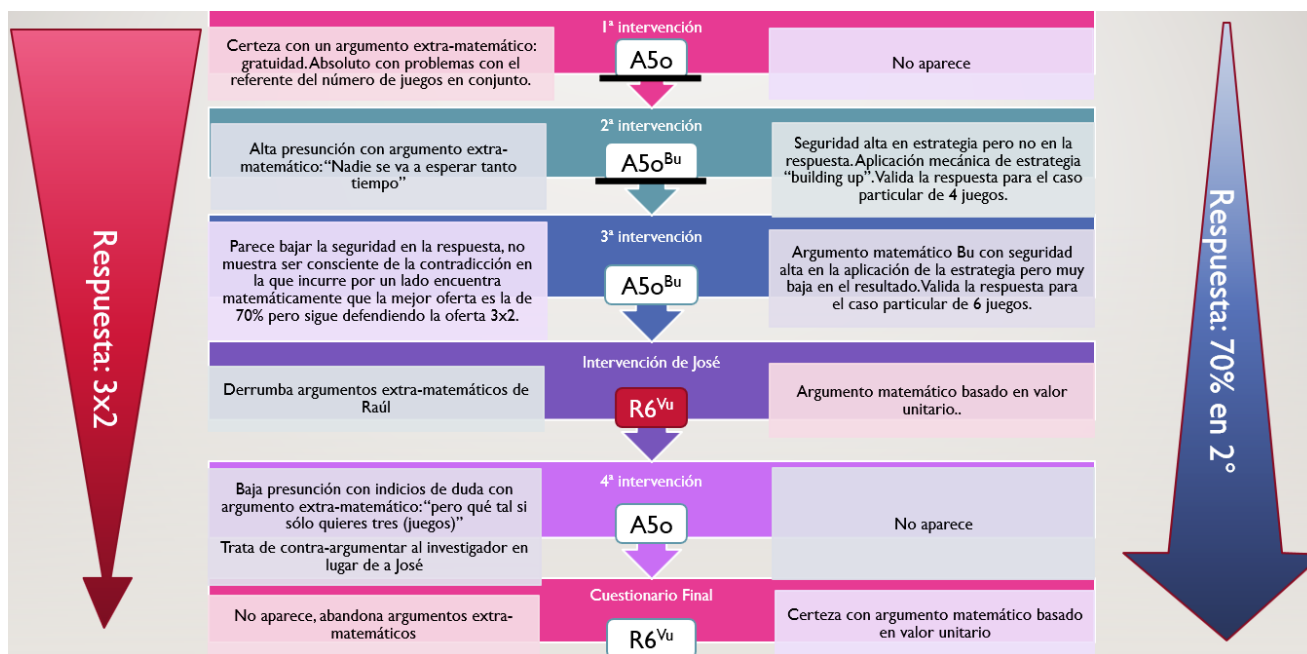


Figura 4 – Diagrama de análisis del proceso de Raúl

Previo al análisis, vale la pena hacer una acotación metodológica. Y está basada en los principios de la interacción simbólica, de acuerdo con los cuales, analizar la interacción entre pares como proceso se apoya en la idea de que las acciones de los actores involucrados en la interacción son consecuencia de cómo ellos interpretan las acciones de los otros (Corbin & Strauss, 2015).

En su primera intervención, el nivel de comprensión de Raúl es muy elemental, caracterizado como A5<sub>o</sub>, en donde se presentan comparaciones aditivas, no hay noción de proporcionalidad ni de razones, y hay un 'desagregado' de las ofertas, conforme a lo cual se ignora el número de juegos por oferta. Pareciera que en su primera intervención son tres las

fuentes, que más resaltan, sobre las que Raúl soportó su resolución y solución, y su certeza en ellas. En primera instancia, Raúl se apoyó en un respaldo que, como se verá, tenía mucha fuerza en él, el cual consiste en considerar la gratuidad del tercer juego en la oferta 3x2; a esta consideración subyace la idea de que tiene sentido desagregar las ofertas, pero desde la cual, además, carece de sentido cualquier referencia a la proporcionalidad. Raúl también parece haber soportado su certeza en la solución y resolución de la tarea en la estrategia *building up*.

Lo que sugirió el investigador a Raúl en sus dos intervenciones consistió en que el estudiante retomara el proceso *building up*, para el caso de cuatro y seis juegos, esperando que esto le condujera, por su propia cuenta, a la consideración de la proporcionalidad. De esta actividad el estudiante desprendió una respuesta distinta a la que él había dado inicialmente (para el caso de tres juegos) sin que esto, aparentemente, lo haya perturbado. Aquí, surge una pregunta natural: ¿Por qué a Raúl no le representó un obstáculo, o no pareció incomodarle la contradicción entre su resolución inicial y la de cuatro y seis juegos, y por qué siguió insistiendo en su respuesta inicial (3x2)?

Una posible explicación puede estar relacionada con la certeza que durante estas intervenciones Raúl siguió experimentando en su solución -que no se vio (significativamente) alterada ya que encontró el estudiante una coartada para evadir la contradicción, aludiendo a los casos-; pero sobre todo por la certeza en su resolución, la cual parece que incluso se vio reforzada por dos circunstancias: porque el investigador promovió el uso y avaló, aunque sea implícitamente, la estrategia en la que Raúl apoyaba su resolución inicial (la de Building up) y porque él nunca le cuestionó a Raúl el backing de la gratuidad, ni el del desglose de las ofertas. Y es que esa certeza casi inamovible quizás obstaculizó el interés del alumno por activar conceptos clave, como el de la proporcionalidad, que pudiera actuar como idea inclusora que le hubiera permitido significar la solución que arrojaba el caso de cuatro y seis juegos y resignificar, ya desde una perspectiva proporcional, el caso de tres juegos, considerados en su resolución y su resultado inicial. En este caso, el firme estado epistémico de certeza parece haber actuado como un obstáculo para la resignificación de nuevos resultados y para el

proceso de un aprendizaje significativo, al inhibir el interés o la disposición para que se diera ese proceso.

José, en su intervención, cuestionó directamente y de manera explícita las fuentes (es decir, los respaldos y las garantías) en las que Raúl sustentaba la certeza en sus producciones: la consideración de la gratuidad del tercer juego en la oferta 3x2, el desglose de las ofertas y las comparaciones aditivas. Adicionalmente, introdujo una resolución, eficiente, clara, económica, a la que subyace la proporcionalidad, que para Raúl resultó, como se verá en su resolución del segundo cuestionario, un contenido atractivo y novedoso.

Claramente, esta intervención de José hizo mella en los estados epistémicos de Raúl. En su cuarta intervención Raúl ya muestra dudas de su solución original, ya que en esta participación él ya recurre a mitigadores para enunciarla, y exhibe también dudas de la resolución, ya que introduce esquemas extra-matemáticos para justificar la conclusión. Pero es posible que, concomitantemente, Raúl haya experimentado un estado de presunción en torno a la propuesta de su compañero, muy poco después de escucharla; este estado de presunción parece evidente ante la incapacidad de Raúl de refutarle a José, práctica que sí hace sistemáticamente ante las intervenciones del investigador y que de nueva cuenta repite en la cuarta intervención, al dirigirle un contra-argumento en el cual insiste en la defensa de su primera solución y que, por cierto, ya en ese momento de la interlocución estaba fuera de lugar.

Pero José también dejó huella en los niveles de comprensión de Raúl. Es probable que, entre otras cosas, la resolución de José le haya permitido a Raúl, de entrada y entre otras cosas, cobrar conciencia de las limitaciones de su resolución y que, en este proceso, haya comenzado a asimilar la resolución de su compañero.

Cabe decir, sin embargo y a pesar de lo antes dicho y de que Raúl no dio muestras explícitas, que la participación del investigador posiblemente alcanzó a hacer alguna mella en el convencimiento de Raúl (a diferencia de lo que se consideraba en el primer trabajo analítico), por la contradicción en las respuestas que induce el investigador. Dado lo anterior es plausible aseverar que en el proceso de cambio de comprensión y de convencimiento



de Raúl no sólo intervino José, sino que fue un proceso que se fue gestando paulatinamente, aunque el investigador haya influido en mucho menor medida.

Por otra parte, no se puede dejar de hacer la observación de que lo que pasó entre el investigador y Raúl muy probablemente también impactó en la intervención en José. Dado que se analiza a la interacción como un proceso, se puede observar que el investigador trata de incidir sólo sobre algunas de las garantías y algunos de los respaldos en lo que Raúl sostiene sus afirmaciones, pero José tiene la sensibilidad para identificar cuáles son aquellas garantías y aquellos respaldos que no fueron tocados por el investigador y que seguramente sostenían firmemente la postura de Raúl. José es capaz de utilizar esa información en favor de una intervención más incisiva sobre el convencimiento y la comprensión de Raúl. En ese sentido, la construcción de José de una explicación diferente a la que trabajaron Raúl y el investigador puede ser consecuencia de haber escuchado y visualizado la interacción entre los dos últimos.

En esta intervención surgen las siguientes preguntas: ¿A qué pudo haber obedecido la duda de Raúl? ¿Por qué pudo transformar esas dudas en un estado de presunción?

El estado de duda en torno a la resolución basada en el valor unitario y a la solución -es mejor la oferta 70% en el 2º juego- que se puede apreciar en Raúl durante la cuarta intervención puede tentativamente explicarse en razón de dos circunstancias: por un lado, porque José además de que abiertamente se pronunció en contra del resultado propuesto por Raúl, trastocó las garantías y los respaldos en los que este alumno había fincado su producción inicial, y con esto, impugnó los contenidos de esa producción. José apuntó directamente a las fuentes profundas en las que Raúl había depositado su confianza. Pero, por otro lado, porque la estrategia unitaria que propuso José fue, como se verá en la respuesta que Raúl dio en el cuestionario, potencialmente significativa para Raúl, lo que quizás hizo que él profundizara aún más en las dudas en torno a su resolución y que, concomitantemente, comenzara a experimentar un estado de presunción en torno a esa propuesta de José, que para entonces parece que Raúl comenzaba a comprender.

Después de la cuarta intervención siguió la aplicación del cuestionario final. En la producción que ahí plasma Raúl es posible apreciar un estado epistémico de certeza tanto en su resolución como en su respuesta y es posible también distinguir un crecimiento en su nivel de comprensión, al ofrecer una resolución basada en ideas de proporcionalidad, de razón y de comparaciones multiplicativas y ajenas a las razones extra-matemáticas.

¿Qué puede explicar la transformación del estado de duda y luego de presunción presentes en la cuarta intervención de Raúl, al estado de certeza y alta comprensión que Raúl expresa en el cuestionario final?

Con relación al incremento a la comprensión se pueden dar las siguientes explicaciones iniciales. Es posible que el estado de duda que vivenció Raúl durante la cuarta intervención, en torno a la solución y resolución de la tarea (y el trabajo meta-cognitivo de toma de conciencia que quizás ahí él realizó), movió su disposición para descartar su resolución. Pero es posible también que la propuesta novedosa de José, que a Raúl le resultó potencialmente significativa, y que le generó un estado de presunción en la cuarta intervención, le hayan despertado la curiosidad y le hayan estimulado positivamente su disposición e interés para activar sus estructuras cognitivas -especialmente para poner en movimiento sus nociones de proporcionalidad, razón, y otros conceptos relacionados con las estructuras multiplicativas-, y para concebir desde ahí una nueva resolución (para él) que siguió las mismas líneas generales, aunque no de manera literal, que las que subyacen a la que articuló José.

Este incremento en la comprensión fue posible, siguiendo a Ausubel, gracias a que Raúl poseía (como lo mostró en sus intervenciones) ciertos conocimientos previos, como los relativos a la proporcionalidad, que sirvieron de ancla a partir de los cuales él pudo decodificar, significar y aplicar en una nueva tarea, la resolución de José. Fue también posible gracias a que la propuesta de José fue, como ya se dijo, potencialmente significativa para Raúl. Pero también el incremento en la comprensión obedece a la actitud positiva y de apertura que Raúl mostró en el cuestionario, la que muy posiblemente fue cultivando desde su cuarta intervención y en la que jugó un papel principal el estado de duda que él

experimentó en torno a su resolución y el estado de presunción que quizás muy poco después de haberlo escuchado, asoció a la propuesta de José.

Por otra parte, el incremento en la comprensión que se observa en la respuesta que Raúl ofrece en el cuestionario se acompaña clara y manifiestamente de un estado de certeza. No es posible saber (no se cuentan con evidencias empíricas) cómo y en qué momento Raúl pasó de un posible estado de presunción en torno a la propuesta de José (que se observa en la cuarta intervención), al estado epistémico de certeza en torno a la nueva resolución que es posible observar en el segundo cuestionario. Pero es posible suponer -siguiendo el modelo de Damasio- que la apertura que mostró Raúl en la cuarta intervención fue el inicio de un proceso de asimilación de la resolución de José del que se desprendió un incremento en la seguridad en esa resolución, lo que promovió mayor movilización cognitiva, que incrementó la comprensión y consecuentemente, la seguridad. Es posible entonces que estemos en este caso ante un proceso en el que se dio una retroalimentación entre la comprensión y la seguridad. Y es muy probable que, en este caso, Raúl haya incrementado su comprensión en torno a la proporcionalidad y otros conceptos relacionados con las estructuras multiplicativas (sus conceptos inclusores) y que haya asimilado, a su propia manera y ritmo, una nueva estrategia que muy probablemente pondrá en juego, de manera significativa y personal, en futuros contextos de resolución de problemas.

En la exposición de razones precedentes se ha intentado responder a los siguientes cuestionamientos parciales, relacionados con la primera pregunta de investigación:

¿Por qué a pesar de las contradicciones, Raúl permanece en la certeza durante la segunda y la tercera intervención? ¿Cómo es que Raúl se desprende del estado de certeza y emigra a uno de duda, en la cuarta intervención? ¿Y cómo ahí pasa a un estado de presunción?

¿Ya en el cuestionario, cómo se puede explicar el paso de la presunción a un nuevo estado de certeza, pero acompañado esta vez con un mayor nivel de comprensión? O ¿qué condiciones hacen posible que Raúl vuelva a un

estado de certeza, pero ahora en torno a un conocimiento con mayor nivel de complejidad que el anterior?

Adicionalmente a las respuestas a esas interrogantes, la interacción analizada ilustra y permite desprender otros resultados parciales, relacionados también con la primera pregunta de investigación.

Deja ver cómo es posible tener certeza con baja comprensión y vivenciar también un estado de certeza, pero con mayor nivel de comprensión. De modo que la certeza no es condición suficiente para la comprensión.

Por otro lado, deja ver el papel que los estados epistémicos pueden jugar en la construcción de nuevos conocimientos. Muestra específicamente, que la certeza en ciertas proposiciones disciplinares puede actuar como un obstáculo para la comprensión de nuevos contenidos, al inhibir la disposición a activar los conocimientos previos o inclusores, para conectarlos con esos nuevos contenidos. Y muestra, por otra parte, un fenómeno contrario: deja ver cómo estados epistémicos como la duda y la presunción pueden generar una actitud de apertura que impulsa la movilización de ciertas estructuras cognitivas, la activación de ciertas nociones inclusoras y el encuentro entre estas nociones y otras nuevas, las que muy probablemente se modificarán, de manera idiosincrásica, en ese proceso individual de asimilación.

Asimismo, en el trabajo se encontró que las condiciones que pueden coadyuvar a generar los estados internos que vivencian las personas pueden ser internas y/o externas. Por ejemplo, en el caso de Raúl, la certeza inicial parece haber provenido de condiciones internas. En cambio, la presunción que experimentó después de la intervención de José parece provenir de sus propias condiciones internas, pero aunadas a condiciones externas (las generadas por la participación de José).

Cabe aclarar que esas condiciones externas no siempre modifican la comprensión y el convencimiento del que escucha; esas condiciones le pueden resultar neutrales al que escucha, pueden serle incluso negativas, pero también pueden actuar positivamente, en el sentido de que representan

una ayuda en el avance en la comprensión del que escucha y en la seguridad asociada a esa comprensión.

En este trabajo se encontró que una de las formas que se requieren para que las condiciones externas modifiquen en forma positiva la comprensión y el convencimiento del que escucha, se da a través de las 'interacciones provechosas', las que se definen en lo que sigue.

### **Sobre algunas condiciones para las interacciones provechosas**

Los resultados del estudio permiten responder, aunque sea de manera muy preliminar, a la segunda pregunta de investigación, relativa a la determinación de algunas condiciones para que una interacción sea 'provechosa'.

En el primer trabajo analítico presentado en el Capítulo anterior se ofrece una propuesta para identificar, definir y sistematizar características notables que hacen que un proceso de interacción, en el que dos alumnos intercambian resoluciones de alguna tarea matemática, resulte productivo, neutral o no productivo, así como identificar, redefinir y caracterizar los procesos denominados *account* y *empatía matemática*. Como se ha visto a lo largo de este escrito, estas categorías teóricas permiten avanzar algunas explicaciones posibles sobre un fenómeno interesante en la didáctica de las matemáticas, pero poco aclarado en la literatura, relacionado con el éxito (o fracaso) de las interacciones entre pares. Sin duda, los procesos socioeducativos aquí estudiados resultan opciones muy ricas y propicias para el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, es importante considerar los diversos pormenores que se pueden presentar, ya que no son una alternativa que garantiza el éxito.

En el segundo trabajo analítico se abandona el término de empatía matemática, porque se consideró que en el trabajo no se le pudo 'hacer justicia' a su significado original. Como se puede apreciar, se cambió el enfoque del análisis, al introducir el concepto de escucha atenta, interesada y reflexiva y al introducir también la teoría del aprendizaje significativo; con base en ello y en las comparaciones constantes de los datos, se identificaron las categorías relativas a las interlocuciones.

Una de las preguntas de investigación que planteamos en este trabajo era identificar algunas de las condiciones que hacían que una interlocución entre pares fuera cognitivamente provechosa. Estamos ahora en condiciones de responder, aunque sea de manera muy preliminar, a esta pregunta.

El trabajo realizado deja ver que no todas las interacciones entre pares van a contener interlocuciones inductivas sustantivas (como se puede observar en la Tabla 16). Hay otro tipo de interlocuciones, las no sustantivas y las pasivas.

Deben concurrir una gran cantidad de condiciones para que se den ese tipo de interlocuciones y para que las interacciones sean productivas, es decir, que se dé el binomio de ganar-ganar para todas las partes, esto es, que gane el que habla y que gane el que escucha. Que gane en comprensión y convencimiento el que habla mientras le habla al otro, y que el otro gane en comprensión y convencimiento. Las condiciones que en este trabajo se identificaron para que se generen ese tipo de interacciones en las que todos sacan provecho se describen en lo que sigue.

Se puede decir que una interacción provechosa, o 'productiva' como se le denominó en el primer trabajo analítico, consiste en aquella en la que se da la presencia de al menos una interlocución inductiva sustantiva. Parafraseando la definición con base en conceptos ya introducidos y en el marco de la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, eso quiere decir que el que habla lleva a cabo una escucha atenta, interesada y reflexiva; apunta hacia las garantías y los respaldos del que escucha, desactivando su seguridad en la propuesta que defiende inicialmente y que sostiene esas garantías y respaldos; y desarrolla en este proceso una propuesta novedosa que es lógicamente significativa para el que escucha. Todo esto representa un 'caldo de cultivo' que permite modificar la actitud del que escucha y da lugar a una apertura de tipo cognitivo y anímico a esa propuesta novedosa, en el sentido de que el que escucha ahora está dispuesto a movilizar sus nociones y conceptos previos (que actúan como inclusores) con el fin de interpretar los conocimientos contenidos en la nueva propuesta; cuando lleva a cabo estas actividades de tipo cognitivo y afectivo, el que escucha

crece en comprensión y cambia su seguridad de acuerdo a los nuevos conocimientos. Esto supone también que el que escucha posee ya previamente esos conceptos inclusores con base en los cuales puede asimilar los contenidos que escucha.

Estas consideraciones se desprendieron del análisis de todos los casos observados. Aunque no se detalla la descripción de todos esos casos, en la Tabla 16 aparece una síntesis de los resultados del análisis de todos los casos que participaron en el estudio.

Tabla 16 - Tipo de interlocuciones en las interacciones

Interacción	Tipo de interlocuciones que se presentan	Tipo de Interacción
Raúl - José	Interlocuciones no inductivas Interlocuciones inductivas no sustantivas e interlocuciones inductivas sustantivas	Provechosa
Andrea - Alexa	Interlocuciones no inductivas; Interlocuciones inductivas no sustantivas; interlocuciones inductivas sustantivas	Provechosa
Samantha - Montserrat	Interlocuciones no inductivas; interlocuciones pasivas e interlocuciones inductivas sustantivas	Provechosa
Rodrigo - Alejandro	Interlocuciones no inductivas e interlocuciones pasivas	Parcialmente provechosa
Cassandra - Erasmus	Interlocuciones pasivas	No provechosa

Es importante recordar que la categoría de interlocución se refiere a segmentos específicos o particulares de intercambio, mientras que la interacción hace referencia a todo el proceso completo experimentado por la pareja. En la tabla es posible observar la relación que guardan los tipos de interlocuciones con los resultados de la interacción.

## Conclusiones

El presente estudio es un trabajo de corte cualitativo con análisis interpretativo de los datos. Dicho análisis se llevó a cabo utilizando las herramientas analíticas propuestas en la metodología y está inspirado en los preceptos que rigen la Teoría Fundamentada.

Como resultado, se cuenta con las bases empíricas y analíticas suficientes para exponer los siguientes razonamientos a manera de conclusiones; estas ideas, surgidas de los análisis y las comparaciones constantes entre los datos, pueden ser la base de nuevos muestreos teóricos que permitan saturar las categorías encontradas e incluso proponer otras. Además, cabe reconocer que el estudio y las ideas que a continuación se presentan son perfectibles y



que es posible que otras perspectivas e interpretaciones sobre los datos puedan ser el punto de partida para posteriores trabajos. Las conclusiones se ofrecen en los siguientes párrafos.

Por un lado, como ya se ha comentado, la interacción entre pares es un método de trabajo en el aula que se privilegia en los programas de estudio de la educación básica (bajo el nombre de trabajo colaborativo), sin embargo, el presente estudio revela que no basta con poner a trabajar a los jóvenes en colaboración para obtener resultados de aprendizaje. Algunas consideraciones a tener en cuenta ya se han mencionado, pero vale la pena recalcarlas. En primer lugar, uno de los participantes de la interacción debe tener bases sólidas de conocimiento matemático y estar convencido de que las herramientas matemáticas a su alcance son necesarias para convencer a los otros. Además, ese participante debe tener la sensibilidad para identificar las garantías y los respaldos en los que se fundamentan los argumentos del otro. Con respecto al segundo participante, se espera que tenga al menos la sensibilidad de escuchar al primero y que tenga las bases matemáticas suficientes para entender las explicaciones que se le ofrecen. En ese sentido, la intención es que se detone el intercambio de argumentos y los procesos de convencimiento entre pares.

Sería deseable que los docentes tuvieran las habilidades para promover entre ellos y los alumnos las interacciones provechosas, y que los alumnos sean entrenados en las habilidades necesarias para que sean capaces de tener entre ellos también interacciones provechosas. Lo anterior podría incidir, de fondo y de manera auténtica, en una cultura de racionalidad de tipo matemático, congruente con lo que se espera de la práctica matemática del aula.

Por otro lado, el trabajo que aquí se expone es significativo con respecto a la identificación de las determinaciones mutuas que existen entre los estados epistémicos y la comprensión. Se trata de un proceso complejo en el que se establecen lazos y entramados tan densos que dificultan el análisis. Sin embargo, con el uso de las herramientas analíticas se alcanza a observar cómo de repente los estados epistémicos impiden la comprensión (e.g., la seguridad de Raúl en su respuesta inicial) y luego hay ciertos *insights* de comprensión (la propuesta de José y la conciencia de las limitaciones de la

resolución de Raúl) que movilizan los estados epistémicos (presunción asociada a la resolución y duda sobre la respuesta) y otras emociones (curiosidad quizás) que trastocan las estructuras cognitivas (e.g., proporcionalidad y razones) e impulsan la comprensión.

## REFERENCIAS

- Abelson, R. (1988). Conviction. *American Psychologist*, 43 (4), 267-275.
- Ausubel, D. P. (1976). Significado y aprendizaje significativo en: *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas. México.
- Balderas, R. (2010). La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros. Tesis de maestría, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN. México.
- Block, D. (2001), La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico. Tesis de doctorado. Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN. México.
- Block, D.; Martínez, P.; Mendoza, T., Ramírez, M. (2013). La observación y el análisis de las prácticas de enseñar matemáticas como recursos para la formación continua de maestros de primaria. Reflexiones sobre una experiencia. México. *Educ. Mat.* 25, No. 2, 31-59.
- Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research. Techniques and procedures for development Grounded Theory. 4e*. Los Angeles: Sage.
- De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. Niels, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 205-221). New York: Springer.
- Fernández Lajusticia A. (2009) *Razón y Proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*, Valencia, España: Universitat de Valencia, Departament de Didàctica de la Matemàtica.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-24.
- Freudenthal, H (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en

Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Gómez, B.; García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González; M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Gómez, B.; Monje, J.; Pérez-Tyteca, P. y Rigo, M. (2013). Performance on ratio in realistic discount task. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 293-302).

Goos M., Galbraith P. & Renshaw P. (2002) Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics* 49, 193-223.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte: National Council of Teachers of Mathematics.

Hart, K. M. (1984). Ratio: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. NFER-NELSON, London.

Krummheuer G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. NJ: Lawrence Erlbaum.

Martínez, B., Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca: SEIEM

- Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 393-401). Bilbao: SEIEM.
- Pinochet, J. (2015). El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada. *Ciência & Educação, Bauru*, 21(2), 307-327.
- Perelman, Ch., & Olbrechts-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la argumentación. La nueva retórica. [The new rhetoric: Treatise on argumentation]*. Madrid: Editorial Gredos.
- Ramírez, M. (2010). Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. Universidad Complutense de Madrid. Madrid, España.
- Rigo, M. (2011). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (Pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.
- Rigo, M., Rojano, T. y Pluvinage, F. (2011). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. *PNA*, 5(3), 93-103.
- Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 71-91.
- Rodriguez, M. (2004). La Teoría del Aprendizaje Significativo. En *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology: Proc. of the First Int. Conference on Concept Mapping*. Pamplona, España.
- Smith, T. (2015). Peer Interaction. *Research Starters: Education (Online Edition)*. Recuperado de:  
<<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=ers&AN=89164361&lang=es&site=edslive>>.

Stacey, (1992) Mathematical Problem Solving in Groups: Are Two Heads Better Than One?, *The Journal of Mathematical Behavior* 11(3)

Topping, K (2005) Trends in Peer Learning, *Educational Psychology*.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Valverde, G., & Castro, E. (2012). Prospective elementary school teachers' proportional reasoning. *PNA*, 7(1), 1-19

## ANEXOS

### Anexo 1 – Análisis de cuestionarios iniciales, 66 alumnos.

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones			
1	3x2	Propone precio: \$100;	Building up incompleto	R <sub>BUI</sub> , R <sub>%</sub>	problemas con 1, intenta 2 sin éxito	3, propone precio	Ítem 3. "dándole datos y opciones de que mi respuesta es mas concreta o correcta en todo sentido."	Confunde la oferta 1 1/2, duplica \$150 de la oferta inicial e indica "por dos" con lo que consigue 3 juegos por \$300 No interpreta adecuadamente la oferta "70% en 2º" y afirma "serian de a 70..." Intento fallido de unificar no. de juegos.			
		oferta							costo	no. de juegos	
		3x2							\$200	3	
		1 1/2							\$300	3	
		70% en 2º							\$210	3	
2	70% de descuento en 2º	Descarta la 2a por la 3a; propone precio: \$1000;	Building up incompleto	R <sub>BUI</sub> , R <sub>%</sub>	Comete error en 1 al final, error en 2 ya que 4 no es adecuado para interpretar	3, propone precio	Ítem 3. "Explicandole como es que yo obtuve la manera en que yo resolví el conflicto y ver quien tiene la razón."	Inicialmente interpreta bien las ofertas. Trata de unificar el número de videojuegos, pero comete un error: en 3x2, \$4000 por cuatro videojuegos (obtendría 6)			
		oferta							Costo x 2	Costo x 3	Costo x 4
		3x2								\$2000	\$4000
		70% en 2º							1300		\$2600
3	70% de descuento en 2º	Propone precio: \$200.	Estrategia absoluta basada en considerar diferencias en el costo sin relacionar con el número de videojuegos que se obtienen	Ac	problema con 2, compara lo que no se puede comparar	1, interpreta las ofertas; 3, propone precio;	La resolución aparece en ítem 2; ítem 3: "No porque yo pienso que mi razonamiento es demasiado bueno para convencer a cualquiera poniendo el precio que sea, sí la persona quiere ahorrar dinero."	Interpreta bien las ofertas: en 70%, \$260 por 2 videojuegos; en 1 1/2, \$300 por 2 videojuegos y en 3x2 \$400, pero considera que lo más barato es la primera oferta			
		oferta							costo	No. de juegos	
		70% en 2º							\$260	2	
		1 1/2							\$300	2	
		3x2							\$400		
4	70% de descuento en 2º	Interpreta las ofertas, en 3x2 pagas doble, aunque te regalen uno ya pagaste dos al mismo precio; en 1 1/2 pagas uno y el otro te sale a la mitad; en 70% te llevas uno y te llevas otro por menos de la mitad.	estrategia absoluta basada en considerar diferencias en el costo sin relacionar con el número de videojuegos que se obtienen	Ac	problema con 2, compara lo que no se puede comparar; 3, no asigna precio	1, interpreta las ofertas;	Ítem 4. descarta la 2a por la 3a, "...la oferta de en medio es de 50% y es menos que 70% y la última te hace pagar el doble sólo para que te regalen 1".	Interpreta las ofertas, en 3x2 pagas doble, aunque te regalen uno ya pagaste dos al mismo precio; en 1 1/2 pagas uno y el otro te sale a la mitad; en 70% te llevas uno y te llevas otro por menos de la mitad.			

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones	
5	3x2	Se infiere una propuesta de precio \$200, aparece una tabla (incompleta) que parece relacionar el costo y el descuento	Estrategia absoluta basada en considerar diferencias en los descuentos, con error en la interpretación de la 3a oferta y sin considerar unificar número de videojuegos.	Ad, EM <sub>P</sub> , EM <sub>R</sub> , EM <sub>A</sub>	Comete error en 1 al no interpretar correctamente la oferta de porcentaje, problemas con 2 compara lo que no se puede comparar.	Intenta 3, propone precio	Ítem 2. (EMA), "a mis primos les gustan los videojuegos y el profesor Rigoberto me dijo que antes de pensar en las matemáticas pensará en la vida cotidiana"	Se infiere una propuesta de precio \$200, aparece una tabla (incompleta) que parece relacionar el costo con el descuento por oferta: en 3x2, 400-200; en 1 1/2, 300-100; en 70%, 200-75.	
		oferta					costo		descuento
		3x2					\$400		\$200
		1 1/2					\$300		\$100
		70% en 2°					\$200		\$75
6	3x2	Propone precio: \$1000, interpreta las ofertas de la siguiente forma:	Estrategia Building up incompleta con tendencia relativa, trata de unificar número de videojuegos, pero no considera el número más adecuado	R <sub>BUI</sub> , R <sub>J3</sub>	1 incompleto, 2 utilizar tres juegos no es apropiado para comparar.	3, propone precio	Ítem 3. Si quieres el tercero, te va a salir a su precio original y no a mitad de precio.	Interpreta las ofertas iniciales, pero al tratar de unificar el número de juegos no escoge un número adecuado.	
		oferta					Costo de dos juegos		Costo de tres juegos
		1 1/2					1500		2500
		70% en 2°					1300		2300
		3x2							2000
7	70% en 2°	Porque en la oferta 3x2 regalan un juego, mientras que en las otras tienes que pagar tu juego y aparte otro tanto para llevarte el otro juego y sólo te dan 2 y la del 3x2 te da 3	Estrategia en la que se infiere un pensamiento encaminado a estrategia relativa pero con fuertes dificultades para representar	R <sub>%</sub>	Intenta 1, no considera 2	3 no representa un obstáculo	Ítem 3. Poniéndole un ejemplo con un precio imaginario y haciendo las cuentas diciéndole que le combiene más la primer oferta porque se lleva 3 juegos y no dos y pagar por el otro.	Se infiere una comparación a partir de los porcentajes de descuento y también parece considerar el primer número de juegos	
		oferta					costo		Descuento
		3x2					200		100
		1 1/2					150		50
		70% en 2°					130		70
		La del 70% te 'combiené' si deseas economizar	Estrategia absoluta que considera las diferencias en el costo	Ac	Deja de lado 2	Intenta 1 y 3 propone precio	Ítem 4. Haciéndole ver que en la primer oferta te llevas tres y uno de ellos es gratis y que en los otros pagas por el segundo y solo llevas 2 juegos.	La respuesta de 70% parece haber sido incluida después y los números en la tabla aparecen sobre las imágenes del cuestionario.	



Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones														
8	1 1/2	Sí compras 1 te llevas el otro a mitad de precio y si compras 2 tengo otros 2 juegos para comprar a mitad de precio	No aparecen estrategias de comparación	Ao, EM <sub>p</sub>	Intenta 1 sólo en la oferta 1 1/2, 2 y 3 sin intento		Plantea visitar las 2 tiendas y ver quién compró más videojuegos pero que gastó menos que el otro.	Refleja un muy bajo grado de análisis de las ofertas.														
9	70% de descuento en 2°	Propone precio: \$10 y analiza: <table border="1" data-bbox="272 436 602 541"> <tr> <td>oferta</td> <td>Costo</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td>\$20</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$15</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$13</td> </tr> </table> Propone una cantidad para juegos: \$40 Con eso en todos los casos puedes comprar 6 juegos, menos en 1 1/2 donde te faltaría dinero. En 70% te sobra un peso, <table border="1" data-bbox="272 699 602 804"> <tr> <td>Oferta</td> <td>Costo por 6 juegos</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td>\$40</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$45</td> </tr> </table> 70% en 2° \$39	oferta	Costo	3x2	\$20	1 1/2	\$15	70% en 2°	\$13	Oferta	Costo por 6 juegos	3x2	\$40	1 1/2	\$45	Muestra un avance desde una estrategia absoluta en la que sólo hace observaciones con respecto al costo y llega a una estrategia relativa, ya que unifica el número de videojuegos en seis, con lo que puede comparar las ofertas de manera más eficaz.	R <sub>tj</sub>	No incorpora 2 en primer propuesta	Muy bien 1 y 3, resuelve 2 en segunda propuesta	Ítem 3. Aparece la segunda propuesta, "pero en el tercer anuncio te sobra un peso, en mayor cantidad te puedes beneficiar" Ítem 4. Menciona que pueden incrementarse la cantidad de juegos con lo que aumenta el dinero y sobra cualquier caso, en el tercer anuncio te sobra dinero.	Es interesante observar que aparece el razonamiento relativo a la hora de suponer que sólo se cuenta con 40 pesos con lo que se consiguen 6 juegos en todos los casos menos en 1 1/2 y encuentra que en 70% en 2° te sobra dinero, además lo refuerza en comentarios de ítem 3 e ítem 4.
oferta	Costo																					
3x2	\$20																					
1 1/2	\$15																					
70% en 2°	\$13																					
Oferta	Costo por 6 juegos																					
3x2	\$40																					
1 1/2	\$45																					
10	70% de descuento en 2°	Solo aparece: "porque pienso que si te llevas 5 o 6 juegos vas a pagar menos que las otras porque va a ser mayor rebaja"	No aparecen estrategias de comparación	I	No se infieren intenciones en 1, 2 y 3		Ítem 4 "pone un precio imaginario, ases cuentas y bes en que pagas menos"	Aunque en el ítem 4 aparece un razonamiento orientado a resolver, no lo lleva a cabo.														
11	70% de descuento en 2°	"Porque en la 2 tan solo te regalarían uno en la primera y si en la segunda fueran 3 sería 2x1 y tan solo esa sería de uno y en la tercera si llevas el segundo en 70%- menos y si compraríamos 3 sería 2 x 2/3 y combendrian ,mejor la tercera"	Intenta comparar utilizando algo parecido a building up sin éxito, trata de unificar en 3 el número de juegos y se infiere razonamiento relativo con dificultades para interpretar los porcentajes.	R <sup>-</sup> <sub>BUI</sub> , R <sup>-</sup> <sub>%</sub>	Dificultades con 1 al intentar 2	Intenta 2 pero 3 no es un número adecuado para comparar, 3 no es un obstáculo para hacer comparaciones	Ítem 3. "Si nosotros sacamos la relación proporcional al mayor de la oferta con los demás obtendríamos el resultado" Ítem 4. "Hay que sacar cantidades relativamente al mayor número de ellos y compararlos proporcionalmente"	Los ítems 3 y 4 reflejan que identifica la proporcionalidad como parte fundamental para resolver, pero no sabe hacerlo correctamente, confunde la oferta 1 1/2 y la convierte en 2x1, al igual que 70% en 2° la convierte en 2x2/3.														
12	3x2	"Porque si compras dos te regalan uno, si compras 4 te van a regalar 2 para que sean 6 videojuegos."	Interpreta bien la oferta 3x2 pero no aparece análisis de las otras.	Ao	No considera 2 ni 3	1 incompleto		No lleva a cabo un análisis comparativo de las ofertas, defiende su idea diciendo que conviene más que te regalen uno														
13	70% de descuento	oferta comentario	Comparación absoluta basada	A%	No considera 2	1 interpreta bien las ofertas		Sólo compara los porcentajes														

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones						
	en 2°	<table border="1"> <tr> <td>3x2</td> <td>Tienes que comprar dos para que te regalen el tercero</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>Segundo a mitad de precio</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>Te dan el 70% de descuento</td> </tr> </table>	3x2	Tienes que comprar dos para que te regalen el tercero	1 1/2	Segundo a mitad de precio	70% en 2°	Te dan el 70% de descuento	en el porcentaje de descuento (70% es mejor que la mitad) y deja fuera el número de videojuegos			iniciales, 3 no parece ser un problema		iniciales de descuento.
3x2	Tienes que comprar dos para que te regalen el tercero													
1 1/2	Segundo a mitad de precio													
70% en 2°	Te dan el 70% de descuento													
14	70% de descuento en 2°	"En 70% en 2° es como si te estuvieran regalando el 2° porque pagas menos de la mitad que el precio real"	Descarta las primeras dos ofertas por la tercera considerando el costo, pero sin hacerlo específico.	A <sub>0</sub>	No considera 2	1 interpreta las ofertas iniciales y 3, propone precio pero solo aplica en la oferta que eligió.	<p>Ítem 3. "en las primeras gastaría más porque en el primero es obligatorio comprar 2, en el segundo compras unos y el segundo a mitad de precio y en la opción 3 compras uno y solo pagas el 30% del precio real"</p> <p>Ítem 4. "...como ejemplo que el precio del videojuego es de \$300 aproximadamente, pagarías \$90 por el 2° videojuego"</p>	<p>Aparecen indicios de que interpreta bien las ofertas, sin embargo no considera el número de videojuegos y propone precio hasta el ítem 4, para justificar su elección pero sin establecer comparaciones.</p>						
15	3x2	"Es más conveniente comprar 2 juegos y me regalan el 3ro" "todo es lo mismo"	No aparece estrategia de comparación	A <sub>0</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		<p>Ítem 4. Te llevas uno y te regalamos otro o dos x uno que sería lo mismo</p>	<p>No interpreta adecuadamente las ofertas y no puede establecer una estrategia de resolución. Parece confundir la pregunta del ítem 4 y propone una mejor oferta.</p>						
16	3x2	"porque si es más conveniente y puedo elegir los juegos que quiera"	No aparece estrategia de comparación	A <sub>0</sub> , EM <sub>p</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		<p>Ítem 3. "pues diciéndole que es menos costoso porque en los demás son más caros"</p>	<p>No interpreta las ofertas y no puede establecer una estrategia de resolución.</p>						
17	70% de descuento en 2°	"Si compras 4 videojuegos vas a pagar menos que las otras ofertas porque si compras 3x2 solo uno te sale gratis y con esta prácticamente te salen gratis 2 juegos si es que compras cuatro..."	Buiding up incompleto, trata de unificar número de juegos pero 4 no es adecuado para hacerlo. Se infiere un pensamiento relativo muy cualitativo.	R <sup>-</sup> <sub>BUI</sub> , R <sup>-</sup> <sub>J4</sub> , R <sup>-</sup> <sub>C</sub>	2, el número 4 no es adecuado para comparar	1 parece interpretar bien las ofertas iniciales, y 3 el precio no parece representar un obstáculo		<p>Aunque parece interpretar bien las ofertas su estrategia se queda corta al tratar de unificar el número de videojuegos.</p>						

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones												
18	3x2	“porque si compras dos te dan uno gratis y las otras ofertas son de descuentos al comprar el segundo”	Basa su argumento en que es mejor que te ‘regalen uno’	A <sub>i</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3			No aparecen estrategias de comparación.												
19	70% de descuento en 2°	<p>Propone precio: \$100 por juego</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo</th> <th>No. de juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$200</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$150</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$130</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Costo	No. de juegos	3x2	\$200	3	1 1/2	\$150	2	70% en 2°	\$130	2	Estrategia absoluta basada en el costo que deja fuera el número de videojuegos	Ac	2, compara lo que no se puede comparar	1 interpreta bien ofertas iniciales y 3 propone precio	<p>Ítem 3. Aparece la tabla pero deja fuera de la comparación el número de videojuegos, no hay un intento por unificar. Reconoce las razones de porcentaje y las fracciones como medio para convencer, pero no ejecuta.</p> <p>Ítem 1. Aparece el análisis de la tercer oferta: “si el videojuego cuesta \$100 al comprar el otro sólo pagarás \$30 puesto que el 70% de \$100 es 70-70=\$30</p> <p>Ítem 4. “Las razones de porcentaje y las fracciones. La lógica”</p>	Interpreta muy bien las ofertas, pero no unifica.
Oferta	Costo	No. de juegos																		
3x2	\$200	3																		
1 1/2	\$150	2																		
70% en 2°	\$130	2																		
20	70% de descuento en 2°	Descarta la oferta 3x2 porque “te regala un juego pero ya compraste 2”; Descarta la oferta 1 ½ porque “te deja el segundo juego a mitad de precio y la tercera te descuenta el 70%, lo que es más de la mitad”	Estrategia absoluta que considera el número de juegos que se pagan	A <sub>i</sub>	No considera 2 ni 3	1, interpreta bien las ofertas iniciales	<p>Ítem 3. “En la tercer oferta te descuentan mas de la mitad y en la primera segunda es solo la mitad, y en la primera oferta ya compraste los 2 juegos”</p> <p>Ítem 4: “pondría cualquier precio a los juegos, yo realizaría cualquier precio, pero todas las ofertas</p>	Interpreta bien las ofertas en la instancia, pero no compara adecuadamente porque no unifica número de videojuegos. En el ítem 4 afirma que puede poner cualquier precio, pero no ejecuta.												
21	70% de descuento en 2°	“conviene más la del 70% de descuento porque en las otras te dan a que compres más productos en cambio en la 3ra con que compres uno tienes un descuento del 70% de descuento, y por lógica conviene más la tercera”	Estrategia absoluta que compara el número de juegos que se compran	A <sub>i</sub> , EM <sub>b</sub> , EM <sub>r</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		<p>Ítem 3. Mira, te conviene más esta opción porque solo compras uno y te dan un gran descuento de 70% no tienes que comprar 2 para que te regalen el otro solo compras uno, no mas, es la mejor opción te lo recomiendo.</p> <p>Ítem 4. Si, mire maestro este producto tiene una gran pero gran promoción con solo comprar uno solo producto el segundo se lo revajan a mas de la mitad, le dan el 70% de descuento y solo tiene que comprar uno.</p>	No aparecen indicios de comparación adecuados, basa su argumento en razones prácticas erróneas y lo defiende con retórica.												

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones
22	3x2	"Las otras dos ofertas no tiene mucho de ganancia al comprarla ya que uno esta en si te llevas el primero solo pagas el segundo a la mitad y el otro es casi lo mismo solo que con el 70% de descuento en el videojuego por eso es que te conviene más el de comprar dos videojuegos y que te regalen el primero"	Absoluta que compara el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		Ítem 4. "Enseñándole por razón matemática que es más barato el que yo escogí..."	Basa su argumento en que te 'regalan' el videojuego mientras que en las otras ofertas tienes que pagar. Aparece un indicio de que identifica el problema como de "razón matemáticas" pero no ejecuta.
23	3x2	"...porque te llevas el tercero gratis"	Absoluta que considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3			Su argumento es que salen más baratos porque te regalan uno.
24	3x2	"por el motivo de que si compras 2 videojuegos te regalan otro y en los temas sólo compras uno y al segundo solo le hacen un descuento"	Absoluta que considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		Ítem 3. "...Porque hasi tienes tres videojuegos y no solo dos como en las otras ofertas"	Basa su argumento en que te regalan un videojuego y argumenta que es mejor tener 3 que 2.
25	3x2	"que si al elegir esa podemos obtener 3 videojuegos en compra de 2 y lograríamos obtener mas videojuegos por comprar 2 podriamos obtener mas"	Absoluta que sólo considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub> , EM <sub>p</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		Ítem 3. "mostrándoles los tipos de videojuegos"	Sus argumentos no están conectados, no existe análisis.
26	3x2	"porque comprando 2 videojuegos te llevas el tercero gratis, a diferencia de el de el medio que al segundo videojuego solo le baja la mitad y pues el tercero por el segundo videojuego te bajan el 70%	Absoluta que sólo considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub> , EM <sub>R</sub>	No considera 2 ni 3	1 incompleto	Ítem 3. "Que mire los hechos que obviamente le conviene la oferta de la izquierda y le explicaría lo mucho que le conviene esa valiosa oferta porque el tercer juego te lo regalan"	Basa su argumento en que el tercer juego es gratis mientras que en las otras ofertas solo aparecen descuentos.
27	3x2	"Si te llevas 2 videojuegos solo vas a pagar el 70% o 1 ½, conviene el de 3x2, compras 2 el tercero es gratis y asi podras escoger el juego que quieras"	Absoluta que sólo considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub> , EM <sub>p</sub> , EM <sub>R</sub>	No considera 2 ni 3	1 incompleto	Ítem 3. "pero si te llevas 2 acabas de abarcarlos, los terminas te vas a aburrir, si tu eliges 3x2 otro y es gratis podras jugarlo cuando quieras" Ítem 4. Usted va a comprar videojuegos no sabe cual escoger, escoja la de 3x2, tiene escogida de 3 ademas uno es gratis anímese, escoja ese	Basa su argumento en que el tercer juego es gratis y argumenta de forma retórica.

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones																			
28	3x2	Porque compras 2 y te regalán 1 gratis	Absoluta que sólo considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		Ítem 3. "debe de comprar 2 y te dan el tercero completamente gratis los demás son por descuento nada más"	Sólo compara el número de juegos a obtener, denota dificultades con la interpretación de los porcentajes																			
29	70% de descuento en 2°	"Yo creo que me conviene más porque me están haciendo un gran descuento porque por ejemplo si costara 150 y te aplican el 70% y sería 95 a que pagues 300 pesos"	Absoluta que sólo considera una oferta y se equivoca al analizar el porcentaje	A%, A <sub>o</sub> , EM <sub>p</sub>	No considera 2	1 incompleto, 3 propone precio	Ítem 3. "guiándome por el precio y marca porque tal si es el mismo juego pero en diferente tienda lo dan más caro y es la misma calidad y la oferta si es mas conveniente y depende de cuanto cueste el juego" Ítem 4. "Si tendría que analizar más a fondo para matemáticamente por así decirlo resolverlos con argumentos (operaciones, formulas estadísticas etc.)"	No utiliza estrategias de comparación, basa su argumento en que 70% de descuento es un gran descuento. Menciona que puede aproximarse a argumentos matemáticos por no ejecuta.																			
30	3x2	<table border="1"> <tr> <td colspan="3">"solo llevas 2 juegos pagados y el tercero es gratis"</td> </tr> <tr> <td>oferta</td> <td>costo</td> <td>ahorro</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td>\$200</td> <td>\$100</td> </tr> <tr> <td colspan="3">"en el segundo vas a pagar esos \$100 en vez de ahorrarlo"</td> </tr> <tr> <td>Oferta</td> <td colspan="2">Observaciones</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">1 1/2</td> <td>Por uno \$100</td> <td>El segundo \$50</td> </tr> <tr> <td>Por dos \$200</td> <td>El tercero \$100</td> </tr> </table>	"solo llevas 2 juegos pagados y el tercero es gratis"			oferta	costo	ahorro	3x2	\$200	\$100	"en el segundo vas a pagar esos \$100 en vez de ahorrarlo"			Oferta	Observaciones		1 1/2	Por uno \$100	El segundo \$50	Por dos \$200	El tercero \$100	Se infiere Building up muy incompleto, solo compara las primeras dos ofertas entre si y comete error al interpretar la oferta 1 1/2	R <sub>BUI</sub> , A <sub>D</sub>	1 con error en la oferta 1 1/2 y sin entrar en 70% en 2°	3 propone precios, 2 trata de unificar en 3 juegos	No interpreta la oferta de 70% en el 2°, no interpreta correctamente la oferta de 1 1/2, no aparecen intentos de unificar, aunque propone precio para los videojuegos.
"solo llevas 2 juegos pagados y el tercero es gratis"																											
oferta	costo	ahorro																									
3x2	\$200	\$100																									
"en el segundo vas a pagar esos \$100 en vez de ahorrarlo"																											
Oferta	Observaciones																										
1 1/2	Por uno \$100	El segundo \$50																									
	Por dos \$200	El tercero \$100																									
31	70% en 2°	"Porque es una ganga porque te hacen un gran descuento y creo que sería mas barato porque si tomamos en cuenta que todos los juegos cuestan quinientos y quiero comprar tres, en ninguno se puede porque solo llevo mil, pero en la tercer oferta compro dos y me sobra dinero y en las demas me gastaría todo"	Estrategia absoluta que considera el costo	A <sub>c</sub> , EM <sub>p</sub>	1 no interpreta adecuadamente la oferta 3x2; 2, se infiere intento de unificar pero no lo hace adecuadamente	3 propone precio y presupuesto.	Ítem 3. Con el ejemplo que puse en la pregunta anterior por que aparte de que compro, me sobra algo de dinero	Propone precio por videojuego y una propuesta con lo que llega a la conclusión de que le conviene la tercer oferta porque si compra dos le sobra.																			
32	70% de descuento en 2°	<table border="1"> <tr> <td colspan="3">"es mejor la oferta de 70% en 2° porque esta pagando solo un juego y 30% de lo que cuesta otro y en la de 1 1/2 vas a pagar por un juego y la mitad de otro, en 3x2 vas a pagar 2 y te regalán uno y te va a salir mas caro"</td> </tr> <tr> <td>oferta</td> <td>costo</td> <td>No. de juegos</td> </tr> </table>	"es mejor la oferta de 70% en 2° porque esta pagando solo un juego y 30% de lo que cuesta otro y en la de 1 1/2 vas a pagar por un juego y la mitad de otro, en 3x2 vas a pagar 2 y te regalán uno y te va a salir mas caro"			oferta	costo	No. de juegos	Buiding up incompleto, descarta la oferta de 1 1/2	R <sub>BUI</sub>	Intenta 2	Denota 1 y 3 propone precio	Ítem 3. Aparece el desarrollo de la tabla y la propuesta del precio.	Aunque parece interpretar bien las ofertas y descartar la 2ª por la 3a no ofrece un argumento sólido para													
"es mejor la oferta de 70% en 2° porque esta pagando solo un juego y 30% de lo que cuesta otro y en la de 1 1/2 vas a pagar por un juego y la mitad de otro, en 3x2 vas a pagar 2 y te regalán uno y te va a salir mas caro"																											
oferta	costo	No. de juegos																									

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones									
		<table border="1"> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$1300</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td>\$2000</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$2600</td> <td>4</td> </tr> </table> <p>Propone precio \$1000 por juego</p>	70% en 2°	\$1300	2	3x2	\$2000	3	70% en 2°	\$2600	4						justificar, el desarrollo de los precios aumentando el número de juegos queda incompleto.
70% en 2°	\$1300	2															
3x2	\$2000	3															
70% en 2°	\$2600	4															
33	3x2	"en los demás te hacen el descuento y en 3x2 te lo regalan y no te lo venden y de ley tendrías que comprar dos"	Absoluta que sólo considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub> , EM <sub>p</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		Ítem 4. "Le explicaría en que tienda están más baratos los juegos y visitar esos lugares y sacar los precios más baratos"	Basada su argumento en que 'regalan' el juego, en las otras ofertas hacen descuento pero no te regalan nada.									
34	70% de descuento en 2°	"3x2 es más caro porque tienes que comprar 2 para que te regalen 1 en el de 1 ½ pagas la mitad del segundo y en 70% en 2° pagas 1 pero el segundo es más barato porque pagaras el 30%"	Comparación absoluta que considera los porcentajes de descuento iniciales y el número de juegos que tienes que comprar	A <sub>i</sub> , A <sub>%</sub> , EM <sub>p</sub>	1, no interpreta adecuadamente, 2 compara lo que no se puede comparar, 3 no propone precio		Ítem 3. "Pues con el precio del videojuego ya que el escogió un local mas caro seria con el precio y con el videojuego" Ítem 4. "Diciendole el precio, algunas operaciones también comparando con otros comercios el costo."	Compara los porcentajes iniciales de las ofertas sin analizar adecuadamente, además de considerar que en 3x2 pagas por 2 juegos mientras que en las otras pagas 1 y un porcentaje del otro. Denota dificultades por no aparecer el precio.									
35	3x2	"para mi sería más conveniente tener 3 videojuegos por el precio de 2"	Absoluta que sólo considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub> , EM <sub>A</sub>	No aparece 1, no considera 2 ni 3		Ítem 3 "Convendría porque regalan 1 videojuego y en los otros te lo cobran a mitad de precio" Ítem 4. "Puede que mi maestra me corrija y me diga que otro conviene mas por el precio de los videojuegos"	Sólo indica que es más conveniente tener 3 juegos en lugar de 2									
36	70% de descuento en 2°	"conviene más la oferta 70% en 2° porque el segundo videojuego le bajan más de la mitad de su precio normal, y en los demás sólo te quitan la mitad del precio"	Comparación absoluta que solo considera los porcentajes de descuento	A <sub>%</sub>	1 no interpreta adecuadamente, no intenta 2, se infieren problemas con 3 en ítem 3.		Ítem 3. "Convenciendolo de que si ve las ofertas por la parte del "ahorro", le conviene mas la oferta #3. Pero también depende del precio del videojuego"	No interpreta adecuadamente las ofertas al grado de indicar que 3x2 y 1 1/2 "solo te quitan la mitad del precio". También indica que depende del precio del videojuego.									
37	70% de descuento en 2°	"porque me dan 70% con más de 1200 juegos y la verdad se me hace una muy buena oferta porque haci tengo más videojuegos en un precio razonable"	Estrategia absoluta que considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>i</sub> , EM <sub>p</sub>	No interpreta 1, ni intenta 2 o 3		Ítem 3. "...esta más barato y mejornada bien las ofertas, indica que tendrá 1200 juegos en un cd"	No interpreta bien las ofertas, indica que tendrá 1200 juegos en un cd									
38	3x2	Propone precio: \$100	Comparación	A <sub>i</sub>	1 sobre todo la	3, propone	Ítem 3. "Lo único	Muy bien al									

Niño	Oferta	Síntesis de resolución			Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones
		oferta	costo	No. de juegos	absoluta que considera el número de juegos, aunque se infiere una relación entre costo y número de juegos y la intención de unificar, finalmente se centra sólo en el número de juegos. Presenta problemas para interpretar 70%.		oferta 70% en 2°; 2 quiere unificar en 3 juegos pero no aplica.	precio	que se podría hacer sería hacer una regla de tres usando el una literal que representa un cierto valor y así con la restando. Pero cualquier operación se tendría que tener en cuenta los videojuegos que ofrecen"	proponer el precio e interpretar las primeras dos ofertas, pero no así con la tercera. Reconoce la importancia de unificar el número de juegos para poder comparar, pero sólo indica sin ejecutar. En el ítem 3 aparece un razonamiento que intenta explicar un proceso, pero no lo lleva a cabo.
	3x2	\$200	3							
	1 1/2	\$150	2							
	70% en 2°	\$193	2							
		"entonces, el que te da mas juegos y por lo tanto es mas barato (si compraras 3 en las 3 promociones) sería el 3x2"								
39	3x2	"Porque al comprar dos videojuegos te llevas uno gratis, en total te llevarías 3 juegos, siendo que en las demás ofertas solo te llevarías 2 y los tendrías que pagar"			Comparación absoluta basada en el número de videojuegos	A <sub>i</sub>	Intenta 1, no así 2 ni 3			Solo analiza el número de videojuegos que se ofrecen sin considerar manipular las cantidades y establecer métodos de análisis matemáticos
40	70% de descuento en 2°	"Porque si compras los dos primeros es lo mismo y pagarías igual porque en el 2° si compras dos el tercer sería gratis al igual que el 1° y en el tercero pagarías menos en el segundo videojuego"			Absoluta que sólo considera el costo, trata de unificar en 3, pero no lo aplica en la oferta 70% en 2°.	A <sub>c</sub>	1 Malinterpreta las ofertas 3x2 y 1 1/2; 2 intenta unificar en 3 pero no es adecuado ni el número ni su proceder, además de no hacerlo con 70% en 2°	No parece tener problemas con 3	Ítem 3. "Pues si comprara en la tercer oferta le saldría el segundo mucho más barato"	Malinterpreta las ofertas
41	70% de descuento en 2°	"...es la que más conviene porque el 70% es casi el 100% y es un buen descuento"			Comparación absoluta que solo considera los porcentajes iniciales	A%, EM <sub>p</sub> , EM <sub>R</sub>	No intenta 2	Se infiere que no hay problemas con 3 ni con 1	Ítem 3. "Les diría que ningún otro lugar les van a dar el 70% de descuento y que es una buena opción para cuidar su economía y que además tienen buen precio y 1200 títulos para elegir"	Sólo compara los porcentajes de descuento sin enlazar con el número de juegos

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones
42	3x2	“Porque compras 2 juegos al precio de lo que cuesta y te regalan el 3ero, porque en la otras ofertas no te regalan nada y te bajan nada más el 70% y la ½”	Comparación absoluta que considera el número de juegos que se obtienen	A, EM <sub>P</sub>	Problemas con 1, no intenta 2	No parece tener problemas con 3	Ítem 3. “Lo convencería de manera que lo haga entender que a lo mejor no tiene el dinero necesario para comprar 2 juegos así que le convendría más de las otras ofertas, pero lo convencería diciéndole que le regalan un juego gratis” Ítem 4. “Le diría que le convendría porque compra 2 y en vez de traerse 2 juegos se trae 3 y así tendría más variedad para jugar en su consola”	Basa su razonamiento en que es mejor que te ‘regalen’ un juego y no desarrolla un análisis de las ofertas.
43	3x2	“Dependería del precio de cada producto, por que hay artículos que les ponen descuentos pero al que tendría que comprar le suben el precio. Yo escogi 3x2 porque como tienes que comprar 2 productos no sería mucho lo que se haría de pago.”	No aparecen estrategias de comparación	I, EM <sub>P</sub>	Problemas con 1, no intenta 2 y grandes problemas con 3		Ítem 3. “Solo podría ser un cartel que intenta llamar la atención al cliente colocándole un precio mas alto al producto” Ítem 4. “Yo siento esquemas extra que como maestro matemáticos por sabe que no ser razones puede sacar la prácticas y tiene rebaja sin el precio un gran del producto, y así no se podría saber cuál valdría menos.”	No interpreta las ofertas, ofrece muchos argumentos basados en matemáticas por razones prácticas y tiene un gran problema con 3.
44	70% de descuento en 2°	“Poque es mas varato el descuento que las demás ofertas en la de 3x2 gastas comprando un juego mas; el de 1 ½ es comprar uno y el otro a mitad de precio y el de 70% te están descontando más dinero que en los demás”	Comparación absoluta del número de juegos que se pagan	A, EM <sub>P</sub>	Intenta 1, no considera 2 y denota problemas con 3 en ítem 4		Ítem 3. “Que le saldría más varato comprar el de 70% de descuento por que en los de mas gastarías mas dinero que podría ocupar en otras cosas” Ítem 4. “Depende mucho de cuanto cuesten los videojuegos en cada tienda para que pueda ver cuál saldría más varato o guiándose por los porcentajes”	Aparecen respuestas asociadas a situaciones que no tienen que ver con el problema. Se infiere la comparación absoluta de porcentajes.
45	70% de descuento en 2°	La 3ª oferta pues si compras 1 el otro te sale en 30%, puse como ejemplo que los juegos valen 1000 Si compras uno el otro saldría en \$300 y si compras otro el otro te saldría en 30% es por eso que pienso que es esta.	Building up incompleto, análisis de 1 ½ y de 70% en 2°, comparación absoluta del costo obtenido al final sin reparar	R <sub>14</sub> , A <sub>C</sub>	Intenta 2 solo en 1 1/2, compara lo que no se puede comparar	3, Propone precio; interpreta bien 1 pero no desarrolla	Tabla aparece en ítem 2	En su tabla de análisis aparece building up en el análisis de la oferta 1 ½, las otras ofertas no las analiza ni construye, sólo



Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones																								
		<table border="1"> <tr> <td>No. de juegos</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1000</td> <td>1000</td> <td>1000</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1000</td> <td>500</td> <td>300</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0</td> <td>1000</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> <td>500</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Final</td> <td>1, 2 y 3=2000</td> <td>1, 2 ,3 y 4=3000</td> <td>1 y 2=1300</td> </tr> </table>	No. de juegos				1	1000	1000	1000	2	1000	500	300	3	0	1000		4		500		Final	1, 2 y 3=2000	1, 2 ,3 y 4=3000	1 y 2=1300	en el número de juegos					las coloca. Compara lo que no se puede comparar.
No. de juegos																																
1	1000	1000	1000																													
2	1000	500	300																													
3	0	1000																														
4		500																														
Final	1, 2 y 3=2000	1, 2 ,3 y 4=3000	1 y 2=1300																													
46	70% de descuento en 2°	“El tercero es el mejor porque es un 20% más barato que el segundo y no tienes que gastar en 2”	Comparación absoluta del número de videojuegos que se pagan	A <sub>1</sub>	No considera 2	1 Interpreta bien las ofertas iniciales y 3 no es un problema	Ítem 2. “Pero si lo que uno quiere es tener muchos videojuegos sale mejor el 1”	Aparece una comparación absoluta del descuento, aunque se denota que el concepto del 70% de descuento se entiende correctamente así como su comparación con el 50%.																								
47	3x2	“Tomando en cuenta el valor total de las 3 ofertas y comparándolas unas con otras claro que para esto se debe tomar en cuenta lo siguiente el valor total en si ninguno es seguro ya que ambas te impulsan a gastar mas de una ves.”	No aparecen estrategias de comparación	I	No considera 1, no intenta 2 y no se acerca de ninguna manera a 3		Ítem 3. Mencionandole mi punto de vista y mostrando mi procedimiento y pidiéndole que me muestre su procedimiento para analizarlo y encontrar alguna falla en cualquiera de ambos puntos.	No es clara la justificación dada, se infiere un procedimiento pero no lo lleva a cabo.																								
48	3x2	“En las demás ofertas no te regalan el segundo juego”	Absoluta que considera el número de juegos	A <sub>1</sub>	Problemas con 1, no intenta 2 y no se acerca de ninguna manera a 3		Ítem 3. “Pues haciéndolo razonar que un videojuego te lo están regalando en la compra de 2.”	No aparece resolución, basa su argumento en el hecho de que ‘regalan’ el juego																								
49	3x2	<p>Propone precio: \$100, compara descuentos</p> <table border="1"> <tr> <td>oferta</td> <td>Número de juegos</td> <td>descuento</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>2</td> <td>\$70</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>2</td> <td>\$50</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td>3</td> <td>\$100</td> </tr> </table> <p>“en los demás el tercero te lo cobran por individual ya no hay ningún descuento”</p>	oferta	Número de juegos	descuento	70% en 2°	2	\$70	1 1/2	2	\$50	3x2	3	\$100	Estrategia absoluta basada en el descuento, aunque se infiere pensamiento relativo en desarrollo al intentar unificar en 3 juegos	A <sub>0</sub> y R <sub>13</sub>	Intenta 2, pero el número 3 no es adecuado para comparar	1 interpreta las ofertas iniciales, 3 propone precio	Lleva a cabo un análisis absoluto que solo considera el descuento, y luego considera unificar el número de juegos pero tres no es adecuado para comparar y no representa lo que obtiene con su razonamiento.													
oferta	Número de juegos	descuento																														
70% en 2°	2	\$70																														
1 1/2	2	\$50																														
3x2	3	\$100																														

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones												
50	70% de descuento en 2°	<p>"Depende del número de videojuegos"</p> <table border="1"> <tr> <td>oferta</td> <td colspan="2">Descuento por pieza</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td colspan="2">25%</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td colspan="2">35%</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td colspan="2">33.33%</td> </tr> </table>	oferta	Descuento por pieza		1 1/2	25%		70% en 2°	35%		3x2	33.33%		Estrategia relativa que determina el descuento por pieza	R <sup>+</sup>		Muy bien 1, 2 y 3	<p>Ítem 3. "Explicándole cada oferta con porcentajes, pero además agregando las distintas formas de ver las ofertas porque la 1era. No tienen un punto de comparación exacto con las otras 2 y menos aún porque no se habla de videojuegos específicos y mucho menos de precios."</p> <p>Ítem 4. "...lo acortaría a modo de solo convencerla con los porcentajes y en dado caso con el número de videojuegos."</p>	Desarrolla un análisis adecuado del problema, parece no tener dificultades con la interpretación de las ofertas. Por otro lado hace notar que identifica las dificultades de la tarea.
oferta	Descuento por pieza																			
1 1/2	25%																			
70% en 2°	35%																			
3x2	33.33%																			
51	3x2	" es el que más conviene porque en las demás solo son rebajas de muy poco porciento"	Estrategia absoluta basada en el porcentaje de descuento	A <sub>%</sub>	Problemas con 1, no considera 2	No refleja problemas con 3		No considera el número de videojuegos ni los relaciona con un precio. Se infiere que centra su atención en los porcentajes de descuento al decir " son rebajas de muy poco porciento"												
52	3x2	<p>"porque te están regalando uno, sin embargo en los otros 2 solo te hacen una oferta al comprar el segundo"</p> <table border="1"> <tr> <td>1000</td> <td>1000</td> <td>1000</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td>1+30%</td> <td>1 + .5</td> </tr> <tr> <td>2000</td> <td>1300</td> <td>1500</td> </tr> <tr> <td>3 juegos</td> <td>2 juegos</td> <td>2 juegos</td> </tr> </table>	1000	1000	1000	3x2	1+30%	1 + .5	2000	1300	1500	3 juegos	2 juegos	2 juegos	Estrategia absoluta basada en el número de juegos y posteriormente en el monto de descuento	A <sub>i</sub> , A <sub>0</sub>	No considera 2	1 interpreta adecuadamente, 3 propone precio.	<p>Ítem 3. Pues le explicaría que hay una cierta ganancia tuya al comprar al 3x2 porque sale mas barato y te regalan el 3er juego en compra de 2, que por 500 pesos mas a diferencia del que te dan a mitad de precio y de 700 en el de 70% de descuento seguiría saliendo mas barato el de 3x2.</p> <p>La tabla aparece en ítem 4 con "3 juegos" encerrado en un óvalo.</p>	Elabora una tabla pero no la desarrolla, basa su argumento en el número de juegos y posteriormente en el monto de descuento
1000	1000	1000																		
3x2	1+30%	1 + .5																		
2000	1300	1500																		
3 juegos	2 juegos	2 juegos																		
53	70% de descuento	"Tomo como base 3 juegos." Propone precio \$1000,	Estrategia building up	R <sup>BUI</sup> , R <sup>J3</sup>	1 no interpreta adecuadamente	1, interpreta bien las ofertas	Ítem 4. "Trataría de hacer múltiples	Aplica el mismo descuento al												

Niño	Oferta	Síntesis de resolución				Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones
	en 2°	Oferta	3x2	1 1/2	70% en 2°	incompleta e incorrecta que trata de unificar el número de juegos para comparar los costos		el costo del tercer juego en 1 1/2 ni en 70% en 2°	iniciales, intenta 2 pero el número 3 no es adecuado para comparar y 3 propone precio	muestras con dif. Num. videojuegos y así ver cual es el resultado mas conveniente (el mio)"	tercer juego sin cambiar las condiciones. Propone precio y unifica el número de juegos, pero no interpreta correctamente.
		Cálculos	1000+1000	1000+500+500	1000+300+300						
		Costo x 3 juegos	\$2000	\$2000	\$1600						
54	3x2	"Yo creo que la oferta de 3x2 implica pagar 2 juegos a su precio comercial pero la ventaja es que el 3er juego que escojas puede ser del precio que quiera por eso lo escojo"				No aparecen estrategias de comparación	I, EM <sub>P</sub>	Problemas con 1, no intenta 2 y problemas con 3			Basa su argumento en el hecho de que 'regalan' el tercer juego
55	70% de descuento en 2°	Propone precio \$150				Estrategia absoluta que compara los costos	Ac	Errores en 1 sobre todo en 70% en 2°, no intenta 2	3 Bien al proponer precio	Ítem 3. "enseñándole cuanto ahorra"	3. aparece en su análisis, compara lo que no se puede comparar y comete un error en la interpretación de la oferta 70% en 2°
		Oferta	3x2	1 1/2	70% en 2°						
		Costo	\$300	\$225	\$180						
		No. de juegos	3	2	2						
56	70% de descuento en 2°	"porque el primero te venden dos y te regalan el 3° pero gastarías más de lo que te regalan, el 2° te dan dos videojuegos pagando uno, y el otro con la mitad y en el tercer cartel te dan uno y solo pagas el 70% de el segundo videojuego."				Estrategia absoluta que considera el número de juegos que se pagan	A <sub>i</sub>	No considera 2	1 Interpreta bien las ofertas iniciales aunque no desarrolla, 3 no presenta problemas asociados	Ítem 3. "Diciéndole que le conviene más el tercer cartel, ya que solamente pagará uno y el 30% de el otro videojuego"	Basa su argumento en comparar el número de juegos que se pagan y los porcentajes de descuento iniciales sin considerar el número de videojuegos. Denota comprensión de los porcentajes.
57	3x2 y 70% de descuento en 2°	"...pero aquí no dice los precios, depende de eso" Descarta 1 1/2 por 70% en 2° "...depende de la cantidad de videojuegos que quiero comprar"				Estrategia absoluta que sólo descarta 1 1/2 por 70% en 2°	A%, A <sub>i</sub> , EM <sub>P</sub>	No intenta 2 y tiene problemas con 3	1 incompleto	Ítem 4. "que todo depende de el dinero que tengas y de los precios"	Descarta la oferta 1 1/2 con lo que se infiere una interpretación correcta pero incompleta, reconoce las dificultades 2 y 3 pero no ofrece alternativas para superarlas.

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones																
58	3x2	<p>"la que más conviene es la de 3x2 ya que gastas solo en 2 productos y te llevas 3"</p> <p>Propone precio \$50</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Pagas</th> <th>Ahorras</th> <th>No. de juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$100</td> <td>\$50</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$75</td> <td>\$25</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$65</td> <td>\$35</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Pagas	Ahorras	No. de juegos	3x2	\$100	\$50	3	1 1/2	\$75	\$25	2	70% en 2°	\$65	\$35	2	<p>Estrategia absoluta que considera el número de juegos, aunque incluye el análisis de los costos y los descuentos, no lo utiliza en sus argumentaciones</p>	A <sub>i</sub>	No considera 2	Bien la interpretación 1 y la propuesta de precio 3		Aunque se presenta un interesante análisis de los ahorros no se utiliza en la argumentación, sólo indica que es mejor 3x2 porque gastas lo de dos productos y te llevas 3
Oferta	Pagas	Ahorras	No. de juegos																					
3x2	\$100	\$50	3																					
1 1/2	\$75	\$25	2																					
70% en 2°	\$65	\$35	2																					
59	3x2 y 70% de descuento en 2°	<p>"...pero también depende del costo de el tercer juego porque si es muy caro te lo cobran y pues creo que no cobrarían el de menor costo..."</p> <p>"también con el de 70% cobrarían el más caro y el de menor costo solo pagaría el 30%"</p>	No aparecen estrategias de comparación	I, EM <sub>p</sub>	No intenta 1, no considera 2 y tiene problemas con 3		<p>Ítem 3. "...depende de como o de que juegos apliquen esa promoción, porque algunos juegos no los incluyen en la promoción. No incluirían los títulos nuevos por lo que son nuevos y tienen que ganarle algo solo aplicarían los títulos viejos"</p>	No utiliza estrategias matemáticas para comparar, sus argumentos se salen de lo establecido en el problema.																
60	70% de descuento en 2°	<p>Suponemos que en todos cuesta \$100</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo</th> <th>No. de juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$200</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$150</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$130</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Costo	No. de juegos	3x2	\$200	3	1 1/2	\$150	2	70% en 2°	\$130	2	Estrategia absoluta que sólo considera el costo inicial sin relacionar con el número de juegos	A <sub>c</sub>	2, compara lo que no se puede comparar	1, interpreta adecuadamente y 3, propone precio	<p>Ítem 3. ..." que en mi caso la mas barata y conveniente es el de 70% de descuento"</p>	Su argumento se queda corto al no relacionar con el número de juegos.				
Oferta	Costo	No. de juegos																						
3x2	\$200	3																						
1 1/2	\$150	2																						
70% en 2°	\$130	2																						
61	3x2	<p>Propone precio: \$100</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo</th> <th>No. de juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$200</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$250</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$230</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Costo	No. de juegos	3x2	\$200	3	1 1/2	\$250	3	70% en 2°	\$230	3	Estrategia building up incompleta con tendencia relativa que trata de unificar el número de juegos para comparar costos	R <sub>BUi</sub> , R <sub>13</sub>	2, el número 3 no es adecuado para comparar	1 Interpreta bien y 3 propone precio	<p>Ítem 3. "pues que haga cálculos de precios por cada oferta y así se daría cuenta cual es el correcto"</p> <p>Ítem 4."Usaría el mismo ya que según mis cálculos"</p>	Interpreta las ofertas en primera instancia, pero al tratar de unificar el número de videojuegos, vuelve a considerar el costo completo en 1 1/2 y 70% en 2°. El número tres no es adecuado para llevar a cabo la comparación.				
Oferta	Costo	No. de juegos																						
3x2	\$200	3																						
1 1/2	\$250	3																						
70% en 2°	\$230	3																						
62	70% de descuento en 2°	<p>"...ya que del segundo solo vas a pagar el 30% en los demás no ahorras demasiado como en el tercero"</p>	Estrategia absoluta que sólo considera el porcentaje de ahorro inicial.	A <sub>%</sub>	No considera 2	1 parece interpretar bien pero no lo explicita, no parece tener problemas con 3	<p>Ítem 3. "Haciéndole ver el ahorro que se da al comprar en la tercera opción."</p> <p>Ítem 4."Con un maestro utilizaría los porcentajes de cada opción"</p>	Su argumento se basa en los porcentajes iniciales, sin considerar el número de juegos, indica un procedimiento en ítem 4, pero no ejecuta.																

Niño	Oferta	Síntesis de resolución	Tipo de estrategia	Categorización	Dificultades de la tarea	Logros de la tarea	Ítems 3 y 4	Observaciones		
63	3x2	"porque estas pagando 2 y el tercero te lo regalan, no es a mitad de precio ni nada de eso"	Estrategia absoluta que solo considera el número de juegos que se obtienen	A <sub>1</sub> , EM <sub>1P</sub>	No considera 2	1 parece interpretar bien las ofertas iniciales y no denota problemas con 3	Ítem 3. "...si ocupamos el de 3x2, tenemos más juegos y uno es gratis, es el que mas nos ofrece y tenemos más para jugar." Ítem 4. "porque a los que compran videojuegos obviamente prefieren mas y pagar menos y en esa oferta te llevas 2 y te regalan el tercero"	Su argumento se basa en el número de juegos que se obtienen.		
64	3x2	"...porque pago 2 videojuegos y me regalan uno más las otras 2 no me convendrían porque nada más compro 2 y pago los 2..."	Estrategia absoluta basada en el número de videojuegos que se obtienen	A <sub>1</sub>	1 no interpreta completamente, no considera 2	No denota problemas con 3	Ítem 3."que estoy bien en el problema y si no le pediría ayuda a la maestra"	Su argumento se basa en el número de juegos que se obtienen		
65	3x2	"...la primera, al comprar un videojuego te regala el tercero, lo cual en ninguna de las otras opciones no lo hace en el 2 nadamas te da a mitad de precio el 2 videojuego y el 3 te hace un descuento de 70% sobre el segundo videojuego entonces la mejor opción es la no. 1"	Estrategia absoluta que considera el número de juegos	A <sub>1</sub>	No considera 2	Aparece un análisis somero de 1 y no presenta problemas con 3	Ítem 3. "... y los convencería pero si no ya recurriríamos a cálculos matemáticos"	Basa su argumento en el hecho de que te 'regalan' el tercer juego, menciona cálculos matemáticos para argumentar pero no especifica ni ejecuta.		
66	3x2	Supone precio \$500	Estrategia building up incompleta al tratar de unificar el número de juegos para comparar los costos	R <sup>BUI</sup> , R <sup>J3</sup>	2, el número 3 no es adecuado para comparar las ofertas	1 Interpreta bien aunque no desarrolla, 3 propone precio.	Ítem 3. "pues haciendo las operaciones junto con él y ver cuál es la que es más barata y le conviene más" Ítem 4. "Utilizaría el mismo pues el procedimiento es exacto"	Interpreta las ofertas en primera instancia, pero al tratar de unificar el número de videojuegos, vuelve a considerar el costo completo en 1 1/2 y 70% en 2°.El número para llevar a cabo la comparación correcta.		
		Oferta							Costo	No. de juegos
		3x2							\$1000	3
		1 1/2							\$1250	3
		70% en 2°							\$1150	3

## Anexo 2 – Transcripción de las interacciones

01.- Andrea - Alexa

I: Entonces ¿Por qué eliges la oferta de 3x2?

Andrea: Pensando en la vida cotidiana, es porque la gente al ver la palabra gratis se va más directo a esas cuestiones sin hacer cálculos, eso es lo que la mayoría de la gente hace, por eso me voy a la 3(x2). Porque si yo pongo una tienda y pongo 3x1 y pongo las 3 ofertas y una mamá llega y ve esas ofertas, pues lo primero que va a pensar ella es pues uno gratis ¿no? voy a comprar ése, por eso yo elegí la primera...

I: Me llama la atención el diálogo que pones ahí para convencer a la mamá...

Andrea: ¡Ah, si! (ríe)

I: ¿Crees que lo puedas usar para convencer a tu compañera?

Andrea: (lee su respuesta) emm... Bueno, yo le diría: mire señora, usted tendría tres juegos y sólo pagaría lo de dos; y la mamá me respondería: pero saldría muy caro y no quiero que mi hijo se la pase jugando; yo sólo le diría: sólo piense cuánto lo haría feliz a su hijo y si no quiere pues no, je, ¡y ya! Porque la mayoría de los comerciantes, los que venden, se van más al "piense en su hijo", al "imagine que tan feliz sería su hijo", "imagine cuánto la querría"; si fuera un niño: "imagina cuánto vas a jugar". Se van más hacia esas cosas porque saben que es la manera más fácil de llegar a una persona, prácticamente como si fuera una lástima ¿no?

I: Alexa, ¿te convence el procedimiento de tu compañera?

Alexa: ¡No! (apenada pero riéndose)

I: Alexa, trata ahora de convencer a tu compañera, explica lo que hiciste y trata de convencerla de porque es mejor el procedimiento que ocupaste.

Alexa: Yo no pensé en un niño hijo mío, yo pensé en mí y lógicamente quiero más videojuegos. Ahí, cómo dijiste una persona se basa en si está

gratis o no está gratis, pero aquí de hecho no resalta mucho el “gratis”, así como una persona normalmente vería como un anuncio de la calle “gratis” acá con sus letras mega enormes, no lo ves aquí en estos anuncios, sin embargo el 70% de descuento si está muy visible y además es la oferta más... eh... buena porque, decíamos, queremos varios videojuegos y en la primera oferta, suponiendo que cuesten 10 pesos los videojuegos, tienes 6 videojuegos pero es el dinero exacto, entonces, si es lo mismo que la oferta tres, pero sería más eficiente que te sobrara dinero y en la oferta uno no te sobra nada. En la oferta dos obviamente no tienes gran cosa porque tienes cuatro videojuegos y aparte si quieres tener un quinto pues te falta dinero, si dispones de 40 pesos.

I: ¿Por qué entonces conviene más la tercera?

Alexa: Porque se supone que tú quieres obtener más videojuegos, y así, aparte de que te sobra dinero en la tercera oferta obtienes más videojuegos que en la segunda, dónde te falta dinero para el quinto. Para comprar 6 videojuegos en la segunda oferta te gastarías 45 pesos, te faltarían 5 pesos.

I: Andrea ¿te convence lo que hace tu compañera? ¿Tú crees que si es mejor la tercer oferta o te sigues quedando con la primera?

Andrea: No, me sigo quedando con la primera.

I: Ok! Entonces tenemos dos métodos de resolución, cada quién tiene sus razones para pensar en el procedimiento, entonces quiero que me digan ¿cuál es el procedimiento que van a utilizar para resolver un problema de este tipo? ¿Se quedan con el suyo o lo cambian?

Andrea: me quedo con el mío...

Alexa: Si, me quedo con el mío

José - Raúl

(Antes de comenzar con la interacción, Raúl denota mucha confianza e insiste en que “vencerá” a su compañero)

I: Explícale a tu compañero lo que hiciste, porque crees que es la mejor oferta la del 3x2, convéncelo de que tu procedimiento es más adecuado. (Mientras se le hacen las indicaciones Raúl se muestra muy confiado, incluso señala a su compañero en actitud retadora)

Raúl: Mira... mi procedimiento es mejor... porque... por ejemplo... tienes este... es difícil de explicar... porque te saldría mejor a largo plazo porque por pagar 700 o 500 (refiriendo a la diferencia de costo entre las ofertas, \$1500 o \$1300 vs \$2000) te llevarías un juego más gratis y eso es más diversión por un poquito menos de precio de que si lo compraras con otros métodos, o sea que a la larga te sale mejor. Por eso mi oferta es la que está mejor.

I: Explícanos lo de los costos, por favor

Raúl: Los costos... la oferta 3x2, ejemplo, que un videojuego más o menos te cuesta como 1000 pesos, entonces si compras dos 1000 y 1000 son 2000 y el tercero te sale gratis, (golpea con el plumón en la zona del pizarrón donde dibujó los tres juegos y señalo al tercero con “GRATIS”) ¡gratis! Ahora, con la oferta número dos (golpea el pizarrón) este... compras un juego, el siguiente te sale a la mitad de precio, pero si quieres comprar un tercero te sale otra vez a 1000 pesos, entonces serían 2500 (golpea señalando una carita triste que dibujó delante de la oferta).

En la tercera oferta es casi lo mismo, sólo que en vez de un 50% es un 70%, entonces serían 1000 (golpea el pizarrón) más 300 y 1000, son 2300, te sale un poquito mejor, pero (golpea con firmeza el pizarrón en la zona dónde está señalado el juego “GRATIS”) está mejor éste, porque pagas menos por tres juegos.

I: Y ¿qué pasa si en lugar de tres juegos, nos quisiéramos llevar cuatro? ¿Cómo quedarían ahora los costos? ¿Sigue conviniendo la primera oferta?



Raúl: mmm... (tarda un momento, comienza a explicar mientras continúa resolviendo) mmm... son 3000... (palmea las manos mientras hace operaciones mentales)

José: ¡Ya te gané!

Raúl: ok... si queremos cuatro... otros 1000, entonces serían supuestamente 3000 (refiriéndose a la primer oferta)...

De la segunda oferta (golpea el pizarrón con firmeza), este... (el cuarto juego) te saldría ya a mitad de precio otra vez, entonces serían 500 y para cuatro sería igual a 3000, pero para la que sigue, pues ya no, mmm... ya te saldría otra vez en 300 y serían... (murmura operaciones) 2600... en este caso te convendría mejor la número tres.

José: jajaja...

Raúl: Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está (golpea el pizarrón dónde está marcada la oferta 3x2)

I: ¡Ah, Ok! Bueno, tú dices que van a escoger la primera, pero tú entonces ¿cuál vas a escoger? Tú ya lo hiciste matemáticamente ¿no? ¿Cuál te conviene más?

Raúl: La mia, la primera...

I: ¿Qué pasa si quiero seis juegos por ejemplo?

Raúl: (murmura cálculos) mmm... entonces en la primera por seis serían 4000 morlacos... Seis, aquí son cuatro (analiza la segunda oferta)... entonces son 4500... ¡si! mmm... (analiza la tercer oferta) son 2600 por cuatro... ya, 3900...

I: ¡Ok! entonces si quiero llevarme seis juegos ¿cuál oferta conviene más?

Raúl: la tercera... (se dirige a su compañero en tono de juego mientras regresa a sentarse) ¡tú cállate!

I: (Dirigiéndose a José) ¿Te convence el procedimiento de tú compañero?

José: No

I: ¿Por qué?

José: Porque no sabía explicarlo (Raúl se ríe) y al final terminó resultando que la oferta que él decía no era la buena.

I: Por favor José, explícale ahora a tu compañero lo que hiciste, ¿crees que lo puedas convencer de que tu procedimiento es el más adecuado?

José: Pues... supongamos que cada videojuego sale en 1000 pesos, entonces tenemos  $3 \times 2 = 6$ , entonces sólo pagaría 2, o sea 2000. Pero, si los divides entre tres, que es el número de juegos que te llevas, o sea, nada... no te van a dar nada gratis o sea que hay un presupuesto para cada videojuego. Entonces serían 666 por cada uno de los tres videojuegos.

Bueno, la segunda oferta del llévate uno y el 50% de descuento la descartamos porque el 70% es mejor que el 50%. Y pues ya sacamos el 70% de 1000, da 700, entonces el segundo videojuego estaría saliendo en 300 pesos, y ya de dos videojuegos serían los 1300, por lo que de cuatro videojuegos serían 2600 y 2600 entre los cuatro videojuegos da 650 que es una menor cantidad que los 666 de los tres (comparando la tercer oferta con la primera).

I: Entonces me dices que la segunda oferta la descartas por la tercera, porque es mejor 70% que la mitad. Y estás haciendo algo que no me presentaste antes, lo del precio por cada juego, eso no venía en tu respuesta, verdad (refiriéndose a la prueba escrita) ¿Lo pensaste...?

José: Ahorita que lo volví a revisar

I: Raúl, ¿te convence lo que hace tu compañero?

Raúl: Nnn..

I: ¿No? ¿Por qué?

Raúl: ¡No!, no dije que no,

I: Ah, perdóname, pensé que habías dicho que no...

Raúl: Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso...

I: O sea ¿si nada más quisieras tres juegos?

Raúl: te convendría ese (señala la oferta 3x2)

I: ¿Te sigue conviniendo la de 3x2?

Raúl: ¡mmm hmm!!

I: ¡Ok! es un argumento, claro. (Preguntando a José) ¿Te convence su argumento? ¿Si quieres tres juegos te sigue conviniendo la de 3x2?

José: No, porque pues si no estás bien de economía para qué vas a comprar videojuegos

Raúl: jajaja... o sea, si, si tienes la posibilidad, pero no así tan... fluido...

José: jajaja...

Raúl: Entonces así, dejamos en empates... (Ambos ríen)

I: No, ¡no es competencia! Les agradezco mucho su colaboración

Cassandra - Erasmo

I: Por favor Cassandra, pasa. Explícanos tu procedimiento y trata de convencer a Erasmo de que lo que hiciste es lo más adecuado.

Cassandra: Porque no todas las... promociones son... te van a dar tanto beneficio como la de 3x2, porque siempre que vas a comprar algo, videojuegos o así, debes de comprar de dos en adelante, aquí te está diciendo que si tu compras dos videojuegos ellos te regalan uno por eso su promoción es de 3x2. Es como si tu compraras, por decir... compras cuatro videojuegos te van a regalar seis, es lo que a ti te conviene, porque si compras tu nada más dos, te van a regalar uno, que van a ser tres, si compras tu cuatro te van a regalar otro que van a... haz de cuenta que... como si estuvieras comprando... o una persona compró dos y le regalaron uno y otra persona compra otros dos y le regalan otro, y es lo que más te conviene porque tú estás pagando dos y te estás llevando tres...

I: Entonces... el argumento es que te regalan un juego cada una de las veces que compras con esa oferta. ¿no podríamos comprar tres juegos con las otras ofertas?

Cassandra: Si pero no sería lo mismo que aquí porque, por decir, aquí te están descontando el 70% del otro juego si compras uno...

I: ¿y para comprar tres?

Cassandra: No te saldría porque es como si estuvieras pagando casi la mitad de un juego y aquí (señala la oferta 3x2) no estás pagando nada por el juego que te regalan

I: ¿por qué descartaste la oferta de en medio?

Cassandra: Porque no era... bueno yo no me... a mi no me... como que no me convenía mucho esa oferta, la que me con...vinó más es la de 3x2

I: Entonces tú dices que es mejor comprar cuatro y que te den seis juegos... ¿cuánto gastaríamos en esa segunda oferta (señala la de 70% en 2°) si

quisiéramos seis juegos? ¿Cómo le haríamos para tener seis juegos y cuánto nos gastaríamos?

Cassandra: Pues el primero te lo darían al precio que es y el segundo nada más pagarías... se podría decir que... ¿la mitad del otro juego?

I: ¿La mitad? ¿70% es como la mitad?

Cassandra: Bueno... un poquito menos de la mitad

I: Imagínate que cuesten algo... pon un precio... (Cassandra titubea) el que quieras, ¿cuánto costaría un juego? no importa que no sea verdad

Cassandra: ¿100 pesos?

I: Entonces si un juego cuesta 100 pesos, el primero lo pagas en 100 pesos

Cassandra: Ajá

I: Y el segundo ¿en cuánto lo pagarías?

Cassandra: ya lo pagarías tu en... 30

I: En 30 pesos... ok, pero eso es de dos juegos...

Cassandra: Ajá

I: ¿Qué pasaría si yo quisiera comprar seis juegos utilizando esa oferta?

Cassandra: comprarías tres al precio normal, con eso ya te van a regala... bueno, te van a dar uno que es el 70% de descuento

I: Y comprando tres te van a dar seis juegos...

Cassandra: Ajá

I: ¿Cuánto vas a pagar?

Cassandra: de tres serían 300 pesos y... cómo 390 o 400 pesos, por ahí

I: Entonces, ¿te sigue conviniendo el 3x2?

Cassandra: Sí

I: Ok, Erasmo, ¿te convence el procedimiento de tu compañera?

Erasmo: No...

I: Ok!, siéntate Cassandra, vamos a ver que nos explica Erasmo, por favor Erasmo

Erasmo: Gracias

I: ¿Por qué escoges la tercera oferta?

Erasmo: Escogí la tercera oferta porque, al igual que estas, yo saqué la equivalencia. Por ejemplo aquí, si me lleva... aquí está muy fácil (señala  $1\frac{1}{2}$ ), la segunda a mitad de precio, o sea un medio, y aquí (señala 70% en 2°) la oferta es del 70% o sea voy a llevar un juego más el 30% del costo... y aquí también, en la oferta uno (señala  $3 \times 2$ ), es igual que a la oferta dos, pero ésta (señala  $3 \times 2$ ) está al doble. A lo que me refiero es que yo lo tuve que sacar el valor de uno (señala la expresión que escribió en el pizarrón  $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ ), tuve un medio al igual que en la oferta dos, y lo multipliqué otra vez para regresar a esta cantidad (señala  $\frac{3}{2}$ ), pero a lo que yo me refiero es de que... si llevo uno, uno y medio (escribe arriba de la oferta  $3 \times 2$   $1 \mid 1\frac{1}{2}$ , ver imagen), y ese va a ser mi parte gratis (señala  $\frac{1}{2}$ ), esta va a ser mi parte que va a cobrar (señala 1), sumo otra (escribe otro uno arriba del anterior) y esta es la que me van a contar haciendo esto (señala  $1\frac{1}{2}$ ), pero yo tengo medio más medio (los encierra en con una línea curva cerrada), así que me va a... me voy a llevar tres pero, contando los dos medios que me van a descontar, me van a cobrar por dos... Así que estos dos (señala las ofertas  $3 \times 2$  y  $1\frac{1}{2}$ ) me van a dar un resultado de un medio y un medio, y este (señala 70% en 2°) me va a dar uno más el 30%, o sea 1.5 el valor éste de estos dos (señala las ofertas  $3 \times 2$  y  $1\frac{1}{2}$ ) y 1.3 de este valor (señala 70% en 2°). Me convendría más

el descuento del 70%, no sólo porque es la mayor cantidad... bueno si, por la mayor cantidad de descuento

I: Una pregunta ¿Cuántos juegos te vas a llevar en cada oferta?

Erasmus: ¿Cuántos juegos?... ¿Cómo maestro?

I: Si, ¿cuántos juegos? yo llego y voy a hacer uso de esa oferta, ¿Cuántos juegos me van a dar? Tú me estás poniendo ahí cuánto me van a cobrar, pero ¿cuántos juegos me van a dar?

Erasmus: Ok... bueno... Aquí me van a dar dos, aquí me van a dar dos y aquí me van a dar tres pero... sin contar éste...

I: Ok... imagina un precio... ¿cuánto cuesta un juego?

Erasmus: ¿200?

I: Entonces si yo compro mis juegos en la primera oferta, ¿cuánto me voy a gastar?

Erasmus: me voy a gastar... ¿400?

I: 400 y ¿cuántos juegos me voy a llevar?

Erasmus: tres...

I: Tres juegos, ok, en la segunda oferta, ¿cuánto me voy a gastar?

Erasmus: (murmura) son 200... ¡300 pesos!

I: 300 y ¿me voy a llevar?

Erasmus: un... uno y med... no... un juego más la mitad del precio

I: ¿me van a dar nada más la mitad de un juego?

Erasmus: No

I: ¿No? No me pueden dar la mitad de un juego, me lo van a cobrar a la mitad, ¿cuántos juegos me voy a llevar?

Cassandra: ¡dos!

Erasmus: dos

I: dos, ok, ¿y en la tercera oferta?

Erasmus: En la tercera oferta... si me costó 200...(murmura) entre tres... como 218... 212... am no... como 260 pesos

I: Ok, ahora, acá me dan tres juegos, aca me dan dos y aca me dan dos... ¿estás de acuerdo con eso?

Erasmus: ¡Si!

I: Ok, quiero que me digas entonces cuánto me gastaría si quisiéramos 3 juegos con todas... aquí (señala 3x2) ya me van a dar tres juegos, ésta ya quedó clara, pero ¿qué pasa aquí? (señala 1 1/2), cuando me llevo tres juegos ¿qué pasa?

Erasmus: Bueno, en este (señala 1 1/2) sería igual que este (señala 3x2), pero en este (señala 70% en 2°) serían dos juegos y ya aumentaría más el descuento. Sería dos juegos al 140% de descuento...

I: y ¿sumarías otro 70% de descuento al tercer juego?

Erasmus: mmm... si, puede ser también...

I: Tu hiciste algo en el examen, aquí, esta parte de aquí (señala la respuesta), ¿te acuerdas por qué hiciste esto?

Erasmus: Sí, si me acuerdo... pero aquí estuve mal... ah ya, bueno ya, ya me acuerdo...



I: ¿Si?

Cassandra: En la segunda y en la primera oferta te daría lo mismo, serían 400...

Erasmus: Entonces tenemos  $\frac{3}{4}$  y me daría 2 y  $\frac{1}{4}$ ...

I: Eso ¿era para? ¿para cuántos juegos?

Erasmus: para sacar los dos juegos

Cassandra: ¡No!

Erasmus: Llévate todos los juegos al 1  $\frac{1}{2}$  y llévate el segundo a mitad de precio... entonces, si saco la mitad de mi uno y medio es  $\frac{3}{4}$  le sumo 1  $\frac{1}{2}$ , y la oferta de dos ya son 2  $\frac{1}{4}$ ...

I: Ah entonces 2  $\frac{1}{4}$  era por dos juegos... ¿y por eso en la tercera oferta ya no avanzas?

Erasmus: Entonces aquí fue mi error porque, esto era igual que el mismo, que lo que decía en palabras, aquí que yo lo interprete de otra manera y usé el 1  $\frac{1}{2}$  para hacer esta división... para dividirlo a la mitad. Sin embargo no lo capté y era 1  $\frac{1}{2}$  igual que este, que lo que decía en palabras, ahí no lo capté...

I: Bueno, entonces ¿qué haríamos para resolver el problema? ¿Cuál es la mejor oferta? ¿Sigues pensando que es la tercera?

Erasmus: Si

I: ¿Si? pero entonces, ¿cómo lo justificamos? Queremos convencer a Cassandra de que la mejor oferta es la tercera, ¿cómo le hacemos?

Cassandra: Me está haciendo bolas

I: Ahorita me cambiaste la perspectiva y me dices que la segunda oferta es igual que la primera, pero eso no me habías dicho antes...

Erasmus: Si... si tuve errores en el desarrollo del examen, le puse el  $1 \frac{1}{2}$  y lo dividi a la mitad, aquí pagaría 2 por tres juegos, aquí pagaría  $2 \frac{1}{4}$  por dos juegos y aquí pagaría 1.3 por dos juegos, por eso conviene la de 70%...

I: Ok, ¿estás convencido de que tu respuesta es correcta?

Erasmus: si, la mejor oferta es la tercera

I: ¿y de tu procedimiento?

Erasmus: mi respuesta es la correcta pero dudo de mi procedimiento...

I: Tu Cassandra ¿Estás convencida de que tu respuesta es la correcta?

Cassandra: Si

I: ¿Cambiarían sus procedimientos de acuerdo con lo que acabamos de revisar?

Cassandra: No

Erasmus: Yo todavía estoy un poco confundido...

Montserrat - Samantha

I: Por favor, Samantha, convence a tu compañera de que tu procedimiento es el más adecuado, ¿Por qué escogiste la oferta del 3x2?

Samantha: Aaahh.. ¿3x2? y la del 70% de descuento...

I: ¿Escogiste la del 70%? ¿Tienes dos resultados?

Samantha: Ajá

I: Entonces, explícanos lo que hiciste

Samantha: Ahh, yo al principio supuse que cada videojuego costaría 100 pesos, entonces la oferta te dice que en el segundo te hace el 70% de descuento, si sacamos el 70% de 100 son 70 y la restas quedarían 130 por oferta y te llevarías dos. Si lo multiplicamos por tres para ver bien lo que te estás llevando y eso, serían 390 por tres ofertas, te llevarías seis videojuegos y cada videojuego te costaría 65 pesos. Y, también observé en la oferta de 3x2, igual si lo multiplicamos por tres serían 600 y cada videojuego saldría en 66.6 y te llevarías nueve videojuegos entonces... si no tien...bueno, te saldría mejor la del 70% de descuento pero conviene la del 3x2 pero... no saldría muy conveniente por el peso punto seis (se refiere a la diferencia entre 66.6 y 65) que te están aumentando por cada videojuego ¡y ya!

I: Ok, dices que te llevarías 9 videojuegos por 600 pesos y en la otra nada más estas gastando 390 y también te llevas seis, sin embargo en lo que te fijas es en el costo por videojuego... (Dirigiéndose a Montserrat) ¿Te convence lo que hizo tu compañera?

Montserrat: mmm... Algo

I: ¿Algo? ok, entonces trata de convencerla tú, a ver qué hiciste...

Montserrat: Pues yo dije que la tercera del 70% de descuento porque, por ejemplo, en la primera oferta que es la del 3x2 para que te apliquen la oferta tienes que a fuerzas comprar tres juegos, entonces, sólo te regalan uno y en

el dos... bueno, en la segunda oferta es prácticamente lo mismo que en el primero y yo digo que la... bueno... por ejemplo si yo fuera a comprar videojuegos yo me iría más por la tercera del 70% de descuento porque si... digamos, si compras 4 videojuegos, prácticamente dos te salen gratis, entonces a eso vienen siendo 70 pesos... digo 30 pesos por juego... entonces... y en los otros dos, con las otras dos ofertas sólo uno te saldría, si compras cuatro sólo uno te saldría gratis

I: ¿por qué descartas la segunda oferta?

Montserrat: Bueno, prácticamente por lo mismo que la primera...

I: ¿Son iguales para ti, la primera y la segunda oferta?

Montserrat: No, no así como en... como así, pero, más o menos iguales, no totalmente, pero son muy parecidas, bueno a mi parecer...

I: Ok, entonces ¿cuánto pagaríamos por cuatro juegos en cada oferta?

Montserrat: Por ejemplo... bueno si tomo de 100 pesos por juego, por cuatro juegos por ejemplo, en la primera oferta sería... ah permítame... (busca una hoja y trata de hacer operaciones)

I: ¿lo puedes hacer en el pizarrón por favor?

Montserrat: ¡Sí! (se queda pensando, no escribe nada en el pizarrón) jaja ¡ya me hice bolas!... aamm... según yo serían 200 en la primera oferta...

I: 200 pesos en la primera oferta, pero te darían tres juegos nada más ¿no? si son a 100 pesos cada juego...

Montserrat: ¡Ah sí! ¡ya me hice bolas!... (pasa más de 10 minutos sin escribir ni decir nada, observando el pizarrón)

I: (Se dirige a Samantha) Puedes poner aquí cuánto pagarías por llevarte seis juegos en la segunda oferta y en la tercera también, nada más está ahí la

primera y la segunda, pero en la segunda lo multiplicaste por tres, aquí en lugar de comprar nueve ¿cuánto me voy a gastar si quiero sólo seis juegos?

I: También en la segunda oferta, la de 1 1/2

Samantha: ¿La de 1 1/2?

I: Si porque me la descartaste, pero no me dijiste por qué

Montserrat:...

I: (a Samantha) coloca ¿cuánto te costaría cada juego en la oferta 1 1/2?

I: (a Montserrat) ¿Te quedaste atorada?

Montserrat: ¡Sí!

I: Vamos a irlo viendo paso por paso

Montserrat: ¡Sí!

I: Primero, ¿cuál es el costo de un juego?

Montserrat: 100 pesos

I: Si tomamos la primera oferta, ¿cuánto me cuesta?

Montserrat: Serían 200...

I: ¿Y cuántos juegos me dan?

Montserrat: Tres

I: En la segunda oferta ¿cuánto me voy a gastar?

Montserrat: ...

I: si quieres ve poniéndolo en el pizarrón para que lo podamos revisar  
¿cuánto te gastarías?

Montserrat: 150

I: y cuántos juegos te llevas

Montserrat: Dos y en la tercera son 130 y también dos juegos...

I: ok, hasta ahí es lo primero, ahora tú dices que si te quieres comprar 4  
juegos la tercera oferta es la mejor, ¿por qué?

Montserrat: porque si llevas cuatro ya sólo serían 260 pesos...

I: y en la otra (refiriéndose a 1 1/2)

Montserrat: serían 300 pesos

I: ¿y en la primer oferta?

Montserrat: en esta serían...

I: ¿me puedo llevar cuatro juegos con la primera oferta?

Montserrat: No, porque nada más te ofrecen tres...

I: si yo quisiera cuatro a lo mejor el cuarto me lo cobran completo...

Montserrat: Ajá

I: ¿Si quisiéramos tres juegos con las otras ofertas?

Montserrat: con la segunda si se puede... ah no... no si... ah no, no no,  
porque... ah ¡ya me hice bolas!... porque... solamente me puedo llevar de  
dos en dos...

I: Ok! (dirigiéndose a Samantha) ¿Te convence lo que hizo ella? ¿Crees que pueda usarse lo que nos explicó para resolver problemas de este tipo?

Samantha: Este...

I: No, sinceramente, no es competencia ni nada que vaya a afectarles...

Samantha: No, bueno, está bien... el problema está bien planteado... sólo que si te hace bolas o tienes problemas podrías buscar un múltiplo de tres y de dos para resolver el problema

I: ¡Claro! Y tu (se dirige a Montserrat) ¿te convence lo que hizo ella? Fijate en lo que tiene ahora en el pizarrón. Samantha, ¿puedes explicarle lo que hiciste ahora, por favor?

Samantha: Pues... planteé las respuestas de modo que cada oferta se llevara seis juegos, entonces vi cuanto costaba cada oferta y si hacemos el 3x2 cada videojuego cuesta 100, pagas dos, son 200 y te llevas tres juegos en cada oferta y lo multiplicas por dos para que sean seis juegos y serían 400 pesos; y en la de 1 1/2 igual, pero te costaría 450 por seis juegos, entonces si así comparamos bien la de 70% de descuento si te conviene porque por cada seis juegos cuesta 390; en la de 3x2, 400 y en la de 1 1/2, 450. Ya si quieres, bueno si tenemos que comprobar más, yo la dividí entre seis juegos cada costo y el de 70% de descuento te saldría cada juego a 65; en el de 3x2, 66.6 y en el de 1 1/2, 75 pesos, entonces tengo bien que la mejor es la del 70%

I: (dirigiéndose a Montserrat) ¿Te convence lo que hace tu compañera?

Montserrat: Si

I: ¿Si? ¿Crees que es un procedimiento adecuado para resolver?

Montserrat: Si

I: Ok...

Rodrigo - Alejandro

I: Rodrigo, pasa por favor, explica a tu compañero lo que hiciste y trata de convencerlo de que tu respuesta es más adecuada, primero ¿cuál es la respuesta que vas a defender?

Rodrigo: Yo digo que es mejor la oferta número 3, la del 70% en 2°.

I: ¿Si estás convencido?

R: ¡Si!

I: Ok, explica por qué

R: Si, en la oferta uno (3x2), nos dicen que compremos dos juegos y te regalan el tercero. Suponemos que cada juego cuesta 100 pesos, 100 pesos por dos, doscientos; doscientos por los tres juegos. En la segunda oferta (1 1/2) es el juego y el segundo con el costo a la mitad, 100 más 50 son 150 por los dos. La tercera es 70% de descuento en el segundo juego, son 130 por los dos, porque el 70% de 100 es 70 y 100 menos 70 da 30, 100 del primer juego más 30 del segundo son 130. Por ejemplo si eliges la primer oferta y quieres comprar cuatro juegos, ya no te valdría la oferta, sólo te quedarían los doscientos pesos y ya te cobrarían el cuarto al precio normal, o sea, 200 más 100 serían cuatro juegos. En cambio, si escoges la oferta 3, serían 130 más otros 130 con lo que te van a dar cuatro juegos son 260, son 40 pesos menos que con la primer oferta.

I: ¿qué pasaría si quisiéramos tener 6 juegos? ¿cuánto pagaríamos en cada oferta?

R: mmm... (Efectúa cálculos, primero mentales y luego en el pizarrón) sigue siendo la de acá, la de 70% de descuento. Este es el precio de dos (señala \$260) más otro (coloca \$130) te da \$390 por seis juegos. En cambio con el otro multiplicas este por dos (señala \$200) porque son 6 juegos te da 400 pesos, y aquí (señala \$390) te queda con 10 pesos menos.



I: (a Alejandro) ¿Cómo ves el procedimiento de tu compañero? ¿Te convence lo que hace tu compañero?

Alejandro: Si

I: ¿Sí?

A: Porque en mi caso yo escogí el de 3x2, y el muestra cómo es que se lleva más con la otra.

I: Pásale al pizarrón y explícanos tu procedimiento.

A: Bueno, es que yo en mi procedimiento yo me límite nada más a los tres juegos, no pasé de los tres juegos, seguí el procedimiento de las ofertas y hasta ahí, pero es interesante como es que en esta (señala 70% en 2°) pagas menos que en la que yo escogí (3x2)

I: Tú ahí dices que la oferta del 3x2 es mejor porque...

A: Porque si los juegos son a 100 pesos, en la primera oferta (3x2) pagas 200 pesos por tres juegos, lo cual es barato y es muy buen trato. En la de 1 1/2 es como si pagaras 150 pesos por dos juegos y no es muy buena oferta, aunque es más barato es menos mercancía, la de 3x2 sería más razonable. 70% es muy buena oferta, pero sería de a 70 pesos cada juego, pero si quieres llevarte 3 serían 210 pesos, y sigue siendo la mejor la oferta de 3x2, porque son el mismo número de juegos pero más barato.

I: A ver, ahí en la tercer oferta, dice que el 2° juego con el 70 % de descuento (enfatisa) ... eso significa...

A: (Se queda pensando)

I: Mira bien, la tercera oferta se parece más bien a esta (señala 1 1/2) ¿no?, aquí el segundo juego te sale a mitad de precio y en la otra el 70% es de descuento en el segundo juego...

A: (Asiente con la cabeza)... mmm... entonces los 70 pesos son de descuento, no el costo...

I: Así es, es cómo te lo explicaba tu compañero

A: si, ahí el suma 100 y 30 por dos juegos...

I: Entonces, ¿cambiarías tu procedimiento para resolver?

A: Si, es mejor lo que hace mi compañero

I: Y tú (se dirige a Rodrigo), ¿Estás convencido de que lo que hiciste es lo correcto?

R: Sí

I: bien, ahora les voy a entregar un nuevo ejercicio, me hacen favor de resolverlo, se pueden recargar en el cuaderno pero si necesitan hacer operaciones lo hacen atrás de la hoja, por favor, necesito llevarme todo lo que hagan.

I: gracias por su participación.

**Anexo 3 – Memo de componentes para la categorización de acuerdo con la comparación, relativización y los referentes en el caso del problema de los videojuegos, aplicado a alumnos.**

$R_c$  - Compara o manipula componentes internos de las ofertas.

$A_c$  - No compara o manipula componentes internos de las ofertas.

$R_o$  - Compara ofertas.

$A_o$  - No compara ofertas.

$R_{fcj}$  - No denota problemas con el referente del número de juegos en conjunto por oferta.

$-R_{fcj}$  - Denota problemas con el referente del número de juegos en conjunto por oferta.

$R_{for}$  - No denota problemas con el referente del número ordinal de juego sobre el que se aplica el descuento.

$-R_{for}$  - Denota problemas con el referente del número ordinal de juego sobre el que se aplica el descuento.

<i>Ofertas</i>	<i>Componentes</i>	<i>Referentes juegos en conjunto</i>	<i>Referentes ordinal al que se le aplica el descuento</i>	<i>Otras consideraciones</i>	<i>Clave</i>
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$	<i>Sin problemas</i>	$R7$
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$	<i>Con problema</i>	$R6$
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$	<i>Utiliza Building up</i>	$R6^{Bu}$
$R_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$		$R5_o$
$R_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$	<i>Utiliza Building up</i>	$R5_o^{Bu}$
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$		$R5_j$
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$	<i>Utiliza Building up</i>	$R5_j^{Bu}$
$R_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$		$R4$
$R_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$	<i>Utiliza Building up</i>	$R4^{Bu}$
$A_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$		$R3$
$A_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$		$R2_o$
$A_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$		$R2_j$
$A_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$		$R1$
$R_o$	$A_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$		$A6$
$R_o$	$A_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$		$A5_o$
$R_o$	$A_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$		$A5_j$
$R_o$	$A_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$		$A4$
$A_o$	$A_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$		$A3$
$A_o$	$A_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$		$A2_o$
$A_o$	$A_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$		$A2_j$
$A_o$	$A_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$		$A1$

## Anexo 4 – Tablas de análisis funcional

Tabla AX1. Análisis funcional de los argumentos de la interacción Andrea – Alexa.

S.	Datos	Nivel de convencimiento	Interés por convencer	Garantía	Respaldo	Afirmación																
Ain	<p>AD1:</p> <p>Se infiere una propuesta de precio \$200, aparece una tabla (incompleta) que parece relacionar el costo y el descuento.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo</th> <th>Descuento</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$400</td> <td>\$200</td> </tr> <tr> <td>1 ½</td> <td>\$300</td> <td>\$100</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$200</td> <td>\$75</td> </tr> </tbody> </table> <p>A mis primos les gustan los videojuegos y el maestro me dijo que antes de pensar en las matemáticas piense en la vida cotidiana.</p>	Oferta	Costo	Descuento	3x2	\$400	\$200	1 ½	\$300	\$100	70% en 2°	\$200	\$75			AW1: A3	<p>ABm1: Comparación absoluta de los descuentos con error.</p> <p>ABe1: Retórica. Autoridad.</p>	<p>AC1: Es mejor la oferta 3x2.</p>				
Oferta	Costo	Descuento																				
3x2	\$400	\$200																				
1 ½	\$300	\$100																				
70% en 2°	\$200	\$75																				
AiI	<p>AD2a:</p> <p>Pensando en la vida cotidiana, es porque la gente al ver la palabra gratis se va más directo a esas cuestiones sin hacer cálculos, eso es lo que la mayoría de la gente hace, por eso me voy a la 3(x2). Porque si yo pongo una tienda y pongo 3x1 y pongo las 3 ofertas y una mamá llega y ve esas ofertas, pues lo primero que va a pensar ella es pues uno gratis ¿no? voy a comprar ése, por eso yo elegí la primera...</p> <p>AD2b:</p> <p>... yo le diría: mire señora, usted tendría tres juegos y sólo pagaría lo de dos; y la mamá me respondería: pero saldría muy caro y no quiero que mi hijo se la pase jugando; yo sólo le diría: sólo piense cuánto lo haría feliz a su hijo y si no quiere pues no, je, ¡y ya!</p> <p>AD2c:</p> <p>Porque la mayoría de los comerciantes, los que venden, se van más al “piense en su hijo”, al “imagine que tan feliz sería su hijo”, “imagine cuánto la querría”; si fuera un niño: “imagina cuánto vas a jugar”. Se van más hacia esas cosas porque saben que es la manera más fácil de llegar a una persona, ¿no?</p>	<p>AQ2: Baja presunción mostrada en lenguaje verbal y lenguaje corporal Presunción en determinación. No hay acción.</p>	<p>AI2: Interés no disciplinar: Trata de convencer de su respuesta utilizando retórica. Se le dificulta la explicación. Nula elaboración matemática</p>	AW2: A1	<p>ABm2: No aparece</p> <p>ABe2: Retórica.</p>	<p>AC2: Es mejor la oferta 3x2.</p>																
Xin	<p>XD1a:</p> <p>Propone precio: \$10 y analiza:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$20</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$15</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$13</td> </tr> </tbody> </table> <p>XD1b:</p> <p>Propone una cantidad para comprar juegos: \$40</p> <p>Con eso, en todos los casos puedes comprar 6 juegos, menos en 1 ½ donde te faltaría dinero. En 70% te sobra un peso.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo por 6 juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$40</td> </tr> <tr> <td>1 ½</td> <td>\$45</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$39</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Costo	3x2	\$20	1 1/2	\$15	70% en 2°	\$13	Oferta	Costo por 6 juegos	3x2	\$40	1 ½	\$45	70% en 2°	\$39			<p>XW1a: A6</p> <p>XW1b: R6<sup>Bu</sup></p>	<p>XBm1: Transita de una estrategia inicial de tipo absoluto a una estrategia Building Up.</p>	<p>XC1: Es mejor 70% en 2°.</p>
Oferta	Costo																					
3x2	\$20																					
1 1/2	\$15																					
70% en 2°	\$13																					
Oferta	Costo por 6 juegos																					
3x2	\$40																					
1 ½	\$45																					
70% en 2°	\$39																					

<p><b>Xil</b></p>	<p><b>XD2a:</b> Yo no pensé en un niño hijo mío, yo pensé en mí y lógicamente quiero más videojuegos. <b>XD2b:</b> Ahí, cómo dijiste una persona se basa en si está gratis o no está gratis, pero aquí de hecho no resalta mucho el "gratis", así como una persona normalmente vería como un anuncio de la calle "gratis" acá con sus letras mega enormes, no lo ves aquí en estos anuncios, sin embargo, el 70% de descuento si está muy visible y además es la oferta más... eh... buena. <b>XD2c:</b> Porque, decíamos, queremos varios videojuegos y... suponiendo que cuesten 10 pesos los videojuegos.</p> <table border="1" data-bbox="269 632 670 932"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Por 6 juegos</th> <th>Si tenemos \$40</th> <th>Comentario</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$ 40</td> <td>Es el dinero exacto</td> <td>Casi igual que la tercera</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$45</td> <td>Te faltan \$5</td> <td>No conviene</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$39</td> <td>Te sobra dinero</td> <td>Es mejor que te sobre</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Por 6 juegos	Si tenemos \$40	Comentario	3x2	\$ 40	Es el dinero exacto	Casi igual que la tercera	1 1/2	\$45	Te faltan \$5	No conviene	70% en 2°	\$39	Te sobra dinero	Es mejor que te sobre	<p><b>XQ2:</b> Certeza que muestra en determinación, acción, lenguaje verbal y lenguaje corporal.</p>	<p><b>XI2:</b> Interés disciplinar: trata de convencer de su estrategia, muestra elaboración matemática, flexibilidad, escucha empática, da explicaciones sistemáticas, claras y precisas.</p>	<p><b>XW2:</b> R6<sup>Bu</sup></p>	<p><b>XBe2a y XBe2b:</b> Retoma los elementos retóricos de su compañera, confrontando ABe2.  <b>XBm2c:</b> Estrategia Building up completa.</p>	<p><b>XC2:</b> Es mejor 70% en 2°.</p>								
Oferta	Por 6 juegos	Si tenemos \$40	Comentario																											
3x2	\$ 40	Es el dinero exacto	Casi igual que la tercera																											
1 1/2	\$45	Te faltan \$5	No conviene																											
70% en 2°	\$39	Te sobra dinero	Es mejor que te sobre																											
<p><b>Ar</b></p>	<p><b>AD3:</b> I: Andrea ¿te convence lo que hace tu compañera? ¿Tú crees que si es mejor la tercera oferta o te sigues quedando con la primera? Andrea: No, me sigo quedando con la primera.</p>	<p><b>AQ3:</b> Presunción en Determinación.</p>	<p><b>AI3:</b> Inflexibilidad.</p>	<p><b>AW3:</b> A3.</p>	<p><b>ABe3:</b> ABm1, ABe1, AQ2, ABe2</p>																									
<p><b>Af</b></p>	<p><b>AD4</b> Se infiere propuesta de precio: \$400 por juego. Interpreta las ofertas y posteriormente duplica para comparar.</p> <table border="1" data-bbox="280 1255 651 1478"> <thead> <tr> <th>4x3</th> <th>1 1/4</th> <th>70% en 2°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>400</td> <td>400</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td>400</td> <td>+ 100</td> <td>+120</td> </tr> <tr> <td>+ 400</td> <td>500</td> <td>520</td> </tr> <tr> <td>1200</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4 juegos</td> <td>2 juegos</td> <td>2 juegos</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1000</td> <td>1400</td> </tr> <tr> <td></td> <td>4 juegos</td> <td>4 juegos</td> </tr> </tbody> </table>	4x3	1 1/4	70% en 2°	400	400	400	400	+ 100	+120	+ 400	500	520	1200			4 juegos	2 juegos	2 juegos		1000	1400		4 juegos	4 juegos			<p><b>AW4:</b> R6<sup>Bu</sup></p>	<p><b>ABm4:</b> Retoma Estrategia Building up.  <b>ABe4:</b> No aparece retórica.</p>	<p><b>AC4:</b> Es mejor 1 1/4.</p>
4x3	1 1/4	70% en 2°																												
400	400	400																												
400	+ 100	+120																												
+ 400	500	520																												
1200																														
4 juegos	2 juegos	2 juegos																												
	1000	1400																												
	4 juegos	4 juegos																												

Participantes: A: Andrea, X: Alexa. Segmentos: in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada. Análisis funcional: D: dato; Q: cualificador o nivel de convencimiento; I: tipo de interés por convencer; W: garantía; B: respaldo; C: afirmación.

Tabla MS1. Análisis funcional de los argumentos de la interacción Samantha – Montserrat.

S.	Datos	Nivel de convencimiento	Interés por convencer	Garantía	Respaldo	Afirmación																						
<b>Sin</b>	<p>SD1: Se infiere propuesta de precio: \$100.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo</th> <th>Descuento</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>200</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>150</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>130</td> <td>70</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Costo	Descuento	3x2	200	100	1 1/2	150	50	70% en 2°	130	70			SW1: A6	SBm1: Comparación absoluta de los descuentos.	SC1: Conviene 70% y 3x2 tiene mejor descuento.										
Oferta	Costo	Descuento																										
3x2	200	100																										
1 1/2	150	50																										
70% en 2°	130	70																										
<b>SiI</b>	<p>SD2: Supuse que cada videojuego costaría 100 pesos</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Oferta</th> <th colspan="2">1 oferta</th> <th colspan="2">3 ofertas</th> <th rowspan="2">Costo unitario</th> </tr> <tr> <th>Costo</th> <th>Juegos</th> <th>Costo</th> <th>Juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>130</td> <td>2</td> <td>390</td> <td>6</td> <td>65</td> </tr> <tr> <td>3x2</td> <td>200</td> <td>3</td> <td>600</td> <td>9</td> <td>66.6</td> </tr> </tbody> </table> <p>Te saldría mejor la del 70% de descuento, pero conviene la del 3x2, pero... no saldría muy conveniente por el peso punto seis que te están aumentando por cada videojuego.</p>	Oferta	1 oferta		3 ofertas		Costo unitario	Costo	Juegos	Costo	Juegos	70% en 2°	130	2	390	6	65	3x2	200	3	600	9	66.6	SQ2: Baja presunción expresada en su lenguaje verbal y lenguaje corporal. Alta presunción mostrada por acción.	SI2: Bajo interés disciplinar por convencer expresado por una explicación poco clara e imprecisa, aunque utiliza esquemas matemáticos y da muestra de flexibilidad y de elaboración matemática.	SW2: R5 <sup>Bu</sup> R0 <sup>VU</sup>	SBm2: Trata de escalar las ofertas para volverlas comparables, pero no elige un número adecuado para hacerlo. Opta por obtener el valor unitario.	SC2: Es mejor la oferta del 70% de descuento.
Oferta	1 oferta		3 ofertas		Costo unitario																							
	Costo	Juegos	Costo	Juegos																								
70% en 2°	130	2	390	6	65																							
3x2	200	3	600	9	66.6																							
<b>Mr</b>	<p>MD1: I: ¿Te convence lo que hizo tu compañera? Montserrat: mmm... Algo.</p>	MQ1: Baja presunción.				MC1: (Me convence) algo																						
<b>Min</b>	<p>MD2: "Si compras 4 videojuegos vas a pagar menos que las otras ofertas porque si compras 3x2 solo uno te sale gratis y con esta prácticamente te salen gratis 2 juegos si es que compras cuatro..."</p>			MW2: A4	MBm2: Comparación absoluta de las ofertas por número de juegos gratis. Denota problemas con ambos referentes al equiparar, erróneamente, las ofertas 3x2 y 1 1/2	MC2: La mejor oferta es la 70% de descuento.																						
<b>Mil</b>	<p>MD3: M: en 3x2 para que te apliquen la oferta tienes que a fuerzas comprar tres juegos, entonces, sólo te regalan uno y en la segunda oferta es prácticamente lo mismo que en el primero y yo digo que si yo fuera a comprar videojuegos yo me iría más por la tercera del 70% de descuento porque, si compras 4 videojuegos, prácticamente dos te salen gratis, entonces a eso vienen siendo 30 pesos por juego... entonces... y en los otros dos, con las otras dos ofertas sólo uno te saldría, si compras cuatro sólo uno te saldría gratis.</p>	MQ3: Baja presunción expresada por lenguaje corporal y lenguaje verbal.	MI3: Bajo interés por convencer expresado en explicaciones poco claras e imprecisas, trata de convencer de su respuesta con estrategias matemáticas erróneas y no muestra escucha empática ni elaboración matemática.	MW3: A5 <sub>o</sub>	MBm3: Denota problemas con ambos referentes al equiparar, erróneamente, las ofertas 3x2 y 1 1/2. Comparación absoluta de las ofertas por número de juegos gratis.	MC3: Es mejor la oferta de 70% de descuento.																						

<b>Ii1</b>	<i>I: Ok, entonces ¿cuánto pagaríamos por cuatro juegos en cada oferta?</i>			<b>IW1:</b> A5 <sub>1</sub>	<i>IBm1: Intenta hacer que la alumna analice su procedimiento para cambiar su estrategia.</i>																	
<b>Mi2</b>	<p>MD4: M: Por ejemplo... bueno si tomo de 100 pesos por juego, por cuatro juegos por ejemplo, en la primera oferta sería... ah permítame... (busca una hoja y trata de hacer operaciones)</p> <p>I: ¿lo puedes hacer en el pizarrón por favor? M: ¡Sí! (se queda pensando, no escribe nada en el pizarrón) ¡já! ¡ya me hice bolas!... aamm... según yo serían 200 en la primera oferta...</p> <p>I: 200 pesos en la primera oferta, pero te darían tres juegos nada más ¿no? si son a 100 pesos cada juego... M: ¡Ah sí!... ¡Ya me hice bolas!... (pasa más de 10 minutos sin escribir ni decir nada, observando el pizarrón)</p>	<i>MQ4: Muy baja presunción expresada en lenguaje corporal, lenguaje verbal, falta de acción y de determinación.</i>	<i>MI4: Falta de interés por convencer expresada por explicaciones desordenadas, poco claras e imprecisas, postura inflexible, falta de elaboración matemática y postura no empática.</i>	<b>MW4:</b> A4	<p>MBm4: Propone un costo por juego, pero no es capaz de utilizarlo como herramienta para avanzar en la resolución.</p> <p>MBem4: Parece sentirse presionada al pedirle que trabaje en el pizarrón frente a su compañera y el investigador.</p>	<i>MC4: ¡ya me hice bolas!</i>																
<b>Sr</b>	<p>SD3: I: ¡Ok! (dirigiéndose a Samantha) ¿Te convence lo que hizo ella? ¿Crees que pueda usarse lo que nos explicó para resolver problemas de este tipo? S: No, bueno, está bien... el problema está bien planteado... sólo que si te hace bolas o tienes problemas podrías buscar un múltiplo de tres y de dos para resolver el problema</p>	<i>SQ3: Alta presunción expresada en lenguaje corporal, lenguaje verbal, y acción.</i>	<i>SI3: Interés disciplinar por convencer expresado en escucha empática, flexibilidad y elaboración matemática.</i>		<i>SBm3: Uso de múltiplos para encontrar un número adecuado para comparar</i>	<i>SC3: Busca múltiplos para resolver el problema</i>																
<b>Si2</b>	<p>SD4: Planteé de modo que cada oferta se llevara seis juegos</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo por 6 juegos</th> <th>Valor unitario</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>400</td> <td>66.6</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>450</td> <td>75</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>390</td> <td>65</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Costo por 6 juegos	Valor unitario	3x2	400	66.6	1 1/2	450	75	70% en 2°	390	65	<i>SQ4: Certeza expresada en lenguaje verbal, lenguaje corporal, acción y determinación</i>	<i>SI4: Interés disciplinar por convencer expresado en explicaciones ordenadas, claras y precisas, en elaboración matemática, en flexibilidad y en escucha empática.</i>	<b>SW4:</b> R6 <sup>VU</sup>	<i>SBm4: Estrategia relativa con apoyo de valor unitario para confirmar.</i>	<i>SC4: Tenía bien que la mejor oferta es 70% en 2°.</i>				
Oferta	Costo por 6 juegos	Valor unitario																				
3x2	400	66.6																				
1 1/2	450	75																				
70% en 2°	390	65																				
<b>Mr2</b>	<i>MD5: Si me convence, es un procedimiento adecuado para resolver</i>	<i>MQ5: Presunción expresada en lenguaje verbal y corporal.</i>		<b>MW5:</b> SW4, R6 <sup>VU</sup>	<p>MBm5:</p> <p>MBe5:</p>	<i>MC5: Si me convence.</i>																
<b>Mf</b>	<p>MD6: Propuesta de precio \$100 por juego</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>No. de juegos</th> <th>Costo</th> <th>Costo unitario</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4x3</td> <td>4</td> <td>\$ 300</td> <td>\$ 75</td> </tr> <tr> <td>1 1/4</td> <td>4</td> <td>\$ 250</td> <td>\$ 62.5</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>4</td> <td>\$ 260</td> <td>\$ 65</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	No. de juegos	Costo	Costo unitario	4x3	4	\$ 300	\$ 75	1 1/4	4	\$ 250	\$ 62.5	70% en 2°	4	\$ 260	\$ 65	<i>MQ6: Alta presunción expresada en acción.</i>		<b>MW6:</b> R6 <sup>VU</sup>	<p>MBm6: Estrategia relativa con apoyo de valor unitario para asegurar</p> <p>MBem6: Retoma completamente la estrategia que le explicó su compañera</p>	<i>MC6: Es mejor 1/4.</i>
Oferta	No. de juegos	Costo	Costo unitario																			
4x3	4	\$ 300	\$ 75																			
1 1/4	4	\$ 250	\$ 62.5																			
70% en 2°	4	\$ 260	\$ 65																			

<i>Sf</i>	<i>SD5</i>				<i>SQ5: Certeza</i>	<i>SW5: R6<sup>VU</sup></i>	<i>SBm5: Estrategia relativa con apoyo de valor unitario para asegurar</i>	<i>SC5: Es mejor 1 1/4</i>
	<i>Propuesta de precio \$100 por juego</i>							
	<u>Oferta</u>	<u>No. de juegos</u>	<u>Costo</u>	<u>Costo unitario</u>				
	4x3	4	\$ 300	\$ 75				
	1 1/4	4	\$ 250	\$ 62.5				
70% en 2 <sup>o</sup>	4	\$ 260	\$ 65					

*Participantes:* S: Samantha, M: Montserrat. *Segmentos:* in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada. *Análisis funcional:* D: dato; Q: cualificador o nivel de convencimiento; I: tipo de interés por convencer; W: garantía; B: respaldo; C: afirmación.



Tabla RA1. Análisis funcional de los argumentos de la interacción Rodrigo – Alejandro.

S.	Datos	Nivel de convencimiento	Tipo de interés	Garantía	Respaldo	Afirmación																
Rin	<p><b>RD1:</b></p> <p>Propone precio: \$100 por juego</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Oferta</th> <th>Costo</th> <th>No. de juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$200</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$150</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$130</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	Oferta	Costo	No. de juegos	3x2	\$200	3	1 1/2	\$150	2	70% en 2°	\$130	2			RW1: A6	RBm1: Comparación absoluta de los costos sin considerar número de juegos.	RC1: Es mejor 70% en segundo				
Oferta	Costo	No. de juegos																				
3x2	\$200	3																				
1 1/2	\$150	2																				
70% en 2°	\$130	2																				
RiI	<p><b>RD2:</b></p> <p>Propone costo, \$100 por juego</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>oferta</th> <th>x 2 juegos</th> <th>x 3 juegos</th> <th>x 4 juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$200</td> <td>\$300</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 1/2</td> <td>\$150</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$130</td> <td></td> <td>\$260</td> </tr> </tbody> </table> <p>Si eliges la primer oferta y quieres comprar cuatro juegos, ya no te valdría la oferta, sólo te quedarían los doscientos pesos y ya te cobrarían el cuarto al precio normal, o sea, 200 más 100 serían cuatro juegos. En cambio, si escoges la oferta 3, serían 130 más otros 130 con lo que te van a dar cuatro juegos son 260, son 40 pesos menos que con la primer oferta.</p>	oferta	x 2 juegos	x 3 juegos	x 4 juegos	3x2	\$200	\$300		1 1/2	\$150			70% en 2°	\$130		\$260	RQ2: Alta presunción expresada en lenguaje corporal, acción y determinación. Presunción mostrada por lenguaje verbal.	RI2: Interés disciplinar por convencer expresado en intentar convencer de su respuesta con esquemas matemáticos, aunque con un procedimiento erróneo. Muestra elaboración matemática al cambiar su explicación, pero en este momento no es posible desarrollar escucha empática	RW2: R5 <sup>Bu</sup>	RBm2: Procedimiento que muestra transición de procesos de tipo absoluto a procesos de tipo relativo, uso incipiente de estrategia building up con problemas con el referente del número de juegos en su conjunto.	RC2: Es mejor 70% en segundo
oferta	x 2 juegos	x 3 juegos	x 4 juegos																			
3x2	\$200	\$300																				
1 1/2	\$150																					
70% en 2°	\$130		\$260																			
IiI	¿Qué pasaría si quisiéramos tener 6 juegos? ¿Cuánto pagaríamos en cada oferta?			IWI: R6 <sup>Bu</sup>	IBm1: Incita a completar estrategia building up																	
Ri2	<p><b>RD3:</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>oferta</th> <th>x 6 juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3x2</td> <td>\$400</td> </tr> <tr> <td>70% en 2°</td> <td>\$390</td> </tr> </tbody> </table>	oferta	x 6 juegos	3x2	\$400	70% en 2°	\$390	RQ3: Alta presunción expresada en acción y lenguaje corporal.	RI4: Interés disciplinar por convencer con elementos matemáticos obtenidos por elaboración matemática con flexibilidad.	RW3: R6 <sup>Bu</sup>	RBm3: Completa estrategia building up	RC3: Es mejor 70% en 2°										
oferta	x 6 juegos																					
3x2	\$400																					
70% en 2°	\$390																					
Ar	<p><b>AD1:</b></p> <p>I: ¿Te convence lo que hace tu compañero?</p> <p>A: Si, porque en mi caso yo escogí el de 3x2, y él muestra cómo es que se lleva más con la otra.</p>	AQ1: Muy baja presunción, no muestra determinación en defender su respuesta ni acción.	AI1: Falta de interés por convencer.	AW1: RW3	ABm1: RBm2 y RBm3	AC1: Me convence lo que hizo mi compañero																

<i>Ain</i>	<p style="text-align: center;"><b>AD2:</b></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="3" style="text-align: center;">Propone precio: \$100;</th> </tr> <tr> <th style="text-align: center;">Oferta</th> <th style="text-align: center;">Costo</th> <th style="text-align: center;">No. de juegos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">3x2</td> <td style="text-align: center;">\$200</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1 1/2</td> <td style="text-align: center;">\$300</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">70% en 2°</td> <td style="text-align: center;">\$210</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> </tbody> </table>	Propone precio: \$100;			Oferta	Costo	No. de juegos	3x2	\$200	3	1 1/2	\$300	3	70% en 2°	\$210	3			<i>AW2:</i> <i>R4<sup>Bu</sup></i>	<i>ABm2:</i> <i>Uso incipiente de estrategia building up, comparación absoluta de los costos, malinterpreta la segunda y tercera oferta mostrando problemas con los referentes.</i>	<i>AC2:</i> <i>Es mejor 3x2</i>
Propone precio: \$100;																					
Oferta	Costo	No. de juegos																			
3x2	\$200	3																			
1 1/2	\$300	3																			
70% en 2°	\$210	3																			
<i>Ai1</i>	<p style="text-align: center;"><b>AD3:</b></p> <p><i>A: Porque si los juegos son a 100 pesos, en la primera oferta (3x2) pagas 200 pesos por tres juegos, lo cual es barato y es muy buen trato. En la de 1 1/2 es como si pagaras 150 pesos por dos juegos y no es muy buena oferta, aunque es más barato es menos mercancía, la de 3x2 sería más razonable. 70% es muy buena oferta, pero sería de a 70 pesos cada juego, pero si quieres llevarte 3 serían 210 pesos, y sigue siendo la mejor la oferta de 3x2, porque son el mismo número de juegos pero más barato.</i></p>	<i>AQ3:</i> <i>Baja presunción expresada en lenguaje verbal y lenguaje corporal, falta de determinación.</i>	<i>AI3:</i> <i>Bajo interés por convencer, trata de convencer de su respuesta con esquemas matemáticos erróneos, no muestra elaboración matemática, flexibilidad o escucha empática. Su explicación es imprecisa.</i>	<i>AW3:</i> <i>A6</i>	<i>ABm3:</i> <i>Error en la interpretación de la oferta 70% en 2°. Comparación absoluta de los costos. No retoma la estrategia más elaborada que mostró en Ain.</i>	<i>AC3:</i> <i>Es mejor 3x2</i>															
<i>Ii2</i>	<p><i>I: A ver, ahí en la tercer oferta, dice que el 2° juego con el 70 % de descuento (enfatisa)... eso significa...</i></p> <p><i>A: (Se queda pensando)</i></p> <p><i>I: Mira bien, la tercera oferta se parece más bien a esta (señala 1 1/2) ¿no?, aquí el segundo juego te sale a mitad de precio y en la otra el 70% es de descuento en el segundo juego...</i></p>			<i>IW2:</i> <i>R6</i>	<i>IBm2:</i> <i>Intenta que el alumno caiga en cuenta que malinterpreta las ofertas</i>																
<i>Ai2</i>	<p style="text-align: center;"><b>AD4:</b></p> <p><i>A: en mi procedimiento yo me límite nada más a los tres juegos, no pasé de los tres juegos, seguí el procedimiento de las ofertas y hasta ahí, pero es interesante como es que en esta (señala 70% en 2°) pagas menos que en la que yo escogí (3x2)</i></p>	<i>AQ4:</i> <i>Baja presunción en su procedimiento, no aparece acción ni determinación. Parece haber sido convencido por su compañero.</i>	<i>AI4:</i> <i>Bajo interés por convencer de su respuesta, no muestra elaboración matemática, aunque denota cierta flexibilidad, su explicación está basada en argumentos extra-matemáticos</i>	<i>AW4:</i> <i>A6</i>	<i>ABm4:</i> <i>Comparación absoluta de los costos con error en la interpretación de la tercera oferta.</i>	<i>AC4:</i> <i>En 70% en 2° pagas menos que en 3x2</i>															
<i>Ii3</i>	<i>I: Entonces, ¿cambiarías tu procedimiento para resolver?</i>																				
<i>Ai3</i>	<p style="text-align: center;"><b>AD5:</b></p> <p><i>A: Sí, es mejor lo que hace mi compañero</i></p>	<i>AQ5:</i> <i>Presunción</i>		<i>AW5:</i> <i>R6 (!)</i>	<i>ABm4:</i> <i>RB3 y RW3</i>	<i>AC5:</i> <i>Es mejor lo que hace mi compañero</i>															
<i>Ii4</i>	<i>I: Y tú (se dirige a Rodrigo), ¿Estás convencido de que lo que hiciste es lo correcto?</i>																				
<i>Rr</i>	<p style="text-align: center;"><b>RD4:</b></p> <p><i>Sí, estoy convencido</i></p>	<i>RQ4:</i> <i>Certeza</i>		<i>RW4:</i> <i>R6<sup>Bu</sup></i>	<i>RBm4:</i> <i>RBm3</i>	<i>RC4:</i> <i>Estoy convencido</i>															

<i>Rf</i>	<u>RD5:</u>			<i>RQ5:</i> <i>Certeza</i>	<i>RW5:</i> <i>R6<sup>Bu</sup></i>	<i>RBm5:</i> <i>RW3 y RBm3</i>	<i>RC5:</i> <i>Es mejor 1</i> <i>1/4</i>	
	<u>Oferta</u>	<u>Precio</u>	<u>No de juegos</u>					
	4x3	300	4					
	1 1/4	125	2					
<i>Af</i>	<u>AD6:</u>			<i>AQ6: Muy baja presunción expresada en mitigadores de lenguaje. No aparece acción matemática ni determinación.</i>	<i>AI6: Nulo interés por convencer al ofrecer una explicación desordenada e imprecisa al grado de resultar ininteligible. No muestra elaboración matemática, flexibilidad ni escucha empática.</i>	<i>AW6:</i> <i>A6</i>	<i>ABm6:</i> <i>Confusión en la interpretación de las ofertas.</i> <i>Abe6:</i> <i>Respuesta ininteligible.</i>	<i>AC6: Es mejor 70%</i>
	<i>En el de 4x3 es buena pero esa oferta solo funciona en 4 juegos ...</i>							
	<i>En la de 1 1/4 podías comprar solo 4 juegos y te llevarías una y si acumulas lo que pagarías 1/4 te llevarías otro, aunque se podría decir que el de 1 1/4 es también una buena respuesta porque parara solo una 1/4 de un juego que sería 25 pesos después del segundo y también es muy buena por esta mayor oferta.</i>							
	<i>70% es mejor por el primero si costara 100 pesos En el segundo se podría desir que si evaluas cada un peso a uno por ciento por el segundo solo pagas 30 pesos y si exedes los 5 juegos pagaría el primero de a 100 pesos el 2° de a 30 a el tercero le sumas el 70% restante del segundo y le sumas el otro 30% te llevas otro y en total si traes 500 pesos pagarías, pagarías mas o menos 350 por 5 juegos</i>							

*Participantes:* R: Rodrigo, A: Alejandro. *Segmentos:* in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada. *Análisis funcional:* D: dato; Q: cualificador o nivel de convencimiento; I: tipo de interés por convencer; W: garantía; B: respaldo; C: afirmación.

Tabla CE1. Análisis funcional de los argumentos de la interacción Cassandra - Erasmo

	Datos	Cualificadores modales	Gar.	Respaldo	Afirmación
Cin	CD1: "Porque si compras dos te regalan uno, si compras 4 te van a regalar 2 para que sean 6 videojuegos."		CW1: A3	CBm1: No lleva a cabo un análisis comparativo de las ofertas	CC1: Es mejor 3x2
Ci1	CD2: Porque no todas las... promociones son... te van a dar tanto beneficio como la de 3x2, porque siempre que vas a comprar algo, videojuegos o así, debes de comprar de dos en adelante, aquí te está diciendo que si tú compras dos videojuegos ellos te regalan uno por eso su promoción es de 3x2. Es como si tu compraras, por decir... compras cuatro videojuegos te van a regalar seis, es lo que a ti te conviene, porque si compras tu nada más dos, te van a regalar uno, que van a ser tres, si compras tu cuatro te van a regalar otro que van a... haz de cuenta que... como si estuvieras comprando... o una persona compró dos y le regalaron uno y otra persona compra otros dos y le regalan otro, y es l	CQ2: Alta presunción	CW2: A3	CBm2: No compara las ofertas, sólo desarrolla ejemplos con la oferta 3x2  CBe2: Basa su argumento en que "regalan" un videojuego	CC2: Es mejor 3x2
Ii1	¿Qué pasaría si yo quisiera comprar seis juegos utilizando esa oferta (70% en 2°)?		IW1: R6	IBm1: Intenta que la alumna evalúe las otras ofertas en seis juegos.	
Ci2	CD3: "comprarías tres al precio normal, con eso ya te van a regala... bueno, te van a dar uno que es el 70% de descuento"	CQ3: Presunción	CW3: A3	CBm3: Evalúa la oferta 70%  CBe3: Se apoya sólidamente en que regalen juegos	CC3: Es mejor 3x2
Ii2	¿Cuánto vas a pagar?, ¿te sigue conviniendo el 3x2?		IW2: R6	IBm2: Intenta que compare lo obtenido con la opción que defiende	
Ci3	CD4: "De tres serían 300 pesos y... cómo 390 o 400 pesos, por ahí. Sí, me sigue conviniendo el de 3x2"	CQ4: Presunción. Consistencia.	CW4: A3	CBm4: No evalúa con exactitud la oferta 70% en 2° y no compara con la oferta que defiende	CC4: Es mejor 3x2
Er	ED1: No me convence	EQ1: Presunción.			EC1: Es mejor 70% en 2°
Ein	ED2: Porque en la 2 tan solo te regalarían uno en la primera y si en la segunda fueran 3 sería 2x1 y tan solo esa sería de uno y en la tercera si llevas el segundo en 70%- menos y si compráramos 3 sería 2 x 2/3 y convendría mejor la tercera". En 3x2 pagas 2, en 1 1/2 cada juego cuesta 3/4, por lo que por 3 pagas 2 1/4 o 2.25 y en 70% en 2° indica que por el 2° pagara 1/3, que es 0.33 por lo que por 2 pagaría 1.33...		EW2: A4	EBm2: Equipara las primeras dos ofertas, trata de escalar a tres juegos. Muestra problemas con ambos referentes además de desarrollar comparaciones de tipo absoluto.	EC2: Es mejor 70% en 2°

	<p><b>ED3:</b> Escogí la tercera oferta porque, al igual que estas, yo saqué la equivalencia. Por ejemplo, aquí, si me lleva... aquí está muy fácil (señala <math>1 \frac{1}{2}</math>), la segunda a mitad de precio, o sea un medio, y aquí (señala 70% en 2°) la oferta es del 70% o sea voy a llevar un juego más el 30% del costo... y aquí también, en la oferta uno (señala <math>3 \times 2</math>), es igual que a la oferta dos, pero ésta (señala <math>3 \times 2</math>) está al doble.</p>	<p><b>EQ3:</b> Presunción</p>	<p><b>EW3:</b> A4</p>	<p><b>EBm3:</b> Obtiene equivalencias entre las ofertas y los porcentajes de pago comparándolos en forma absoluta.</p>	
	<p><b>ED4:</b> A lo que me refiero es que yo lo tuve que sacar el valor de uno (señala la expresión que escribió en el pizarrón <math>3/2 = 1 \frac{1}{2}</math>), tuve un medio al igual que en la oferta dos, y lo multipliqué otra vez para regresar a esta cantidad (señala <math>3/2</math>)</p>	<p><b>EQ4:</b> Presunción</p>	<p><b>EW4:</b> A4</p>	<p><b>EBm4:</b> Relaciona la oferta <math>3 \times 2</math> con una razón <math>3/2</math> que interpreta como fracción para obtener <math>1 \frac{1}{2}</math></p>	
Ei1	<p><b>ED5:</b> pero a lo que yo me refiero es de que... si llevo uno, uno y medio (escribe arriba de la oferta <math>3 \times 2 \ 1 \ 1 \ 1/2</math>, ver imagen), y ese va a ser mi parte gratis (señala <math>1/2</math>), esta va a ser mi parte que va a cobrar (señala 1), sumo otra (escribe otro uno arriba del anterior) y esta es la que me van a contar haciendo esto (señala <math>1 \frac{1}{2}</math>), pero yo tengo medio más medio (los encierra en con una línea curva cerrada), así que me va a... me voy a llevar tres pero, contando los dos medios que me van a descontar, me van a cobrar por dos... Así que estos dos (señala las ofertas <math>3 \times 2</math> y <math>1 \frac{1}{2}</math>) me van a dar un resultado de un medio y un medio, y este (señala 70% en 2°) me va a dar uno más el 30%, o sea 1.5 el valor éste de estos dos (señala las ofertas <math>3 \times 2</math> y <math>1 \frac{1}{2}</math>) y 1.3 de este valor (señala 70% en 2°). Me convendría más el descuento del 70%, no sólo porque es la mayor cantidad... bueno sí, por la mayor cantidad de descuento</p>	<p><b>EQ5:</b> Presunción</p>	<p><b>EW5:</b> A4</p>	<p><b>EBm4:</b> Muestra problemas con el referente del ordinal sobre el que recae el descuento por lo que considera que la oferta <math>3 \times 2</math> y la oferta <math>1 \frac{1}{2}</math> son iguales,</p>	<p><b>EC3:</b> Es mejor 70% en 2°</p>
Ii3	<p>I: Una pregunta ¿Cuántos juegos te vas a llevar en cada oferta? E: ¿Cuántos juegos?... ¿Cómo maestro?... Ok... bueno... Aquí me van a dar dos, aquí me van a dar dos y aquí me van a dar tres, pero... sin contar éste</p>		<p><b>IW3:</b> R6</p>	<p><b>IBm3:</b> Intenta que el participante comience a interpretar adecuadamente las ofertas.</p>	

<p>Ei2 Ii4</p>	<p>I: Ok... imagina un precio... ¿cuánto cuesta un juego? E: ¿200? I: Entonces si yo compro mis juegos en la primera oferta, ¿cuánto me voy a gastar? E: me voy a gastar... ¿400? I: 400 y ¿cuántos juegos me voy a llevar? E: tres... I: Tres juegos, ok, en la segunda oferta, ¿cuánto me voy a gastar? E: (murmura) son 200... ¿300 pesos! I: 300 y ¿me voy a llevar? E: un... uno y med... no... un juego más la mitad del precio I: ¿me van a dar nada más la mitad de un juego? E: No I: ¿No? No me pueden dar la mitad de un juego, me lo van a cobrar a la mitad, ¿cuántos juegos me voy a llevar? C: ¡dos! E: dos I: dos, ok, ¿y en la tercera oferta? E: En la tercera oferta... si me costó 200...(murmura) entre tres... como 218... 212... am no... como 260 pesos</p>	<p>EQ6: Duda</p>	<p>EW6: A4  Ii4: R6</p>	<p>EBm6: Desarrolla las interpretaciones de las ofertas con apoyo el investigador. Muestra dificultades en las interpretaciones.  IBm4: Intenta aclarar el funcionamiento de las ofertas</p>	
<p>Ei3</p>	<p>I: Ok, ahora, acá (3x2) me dan tres juegos, acá (1 1/2) me dan dos y acá (70% en 2º) me dan dos... ¿estás de acuerdo con eso? E: ¡Sí! I: Ok, quiero que me digas entonces cuánto me gastaría si quisiéramos 3 juegos con todas... aquí (señala 3x2) ya me van a dar tres juegos, ésta ya quedó clara, pero ¿qué pasa aquí? (señala 1 1/2), cuando me llevo tres juegos ¿qué pasa? E: Bueno, en este (señala 1 1/2) sería igual que este (señala 3x2), pero en este (señala 70% en 2º) serían dos juegos y ya aumentaría más el descuento. Sería dos juegos al 140% de descuento... I: y ¿sumarías otro 70% de descuento al tercer juego? E: mmm... sí, puede ser también...</p>	<p>EQ7: Duda</p>	<p>EW7: A4</p>	<p>EBm7: Intenta escalar las ofertas a 3 juegos, pero parece que no lo comprende</p>	

<p>Ei4</p>	<p>I: Tu hiciste algo en el examen, aquí, esta parte de aquí (señala la respuesta), ¿te acuerdas por qué hiciste esto?  E: Sí, si me acuerdo... pero aquí estuve mal... ah ya, bueno ya, ya me acuerdo...  I: ¿Si?  E: Entonces tenemos <math>3/4</math> y me daría <math>2</math> y <math>1/4</math>...  I: Eso ¿era para cuántos juegos?  E: para sacar los dos juegos  C: ¡No!  E: Llévate todos los juegos al <math>1\ 1/2</math> y llévate el segundo a mitad de precio... entonces, si saco la mitad de mi uno y medio es <math>3/4</math> le sumo <math>1\ 1/2</math>, y la oferta de dos ya son <math>2\ 1/4</math>...  I: Ah entonces <math>2\ 1/4</math> era por dos juegos... ¿y por eso en la tercera oferta ya no avanzas?  E: Entonces aquí fue mi error porque, esto era igual que el mismo, que lo que decía en palabras, aquí que yo lo interprete de otra manera y usé el <math>1\ 1/2</math> para hacer esta división... para dividirlo a la mitad. Sin embargo, no lo capté y era <math>1\ 1/2</math> igual que este, que lo que decía en palabras, ahí no lo capté...  I: Ahorita me cambiaste la perspectiva y me dices que la segunda oferta es igual que la primera, pero eso no me habías dicho antes...  E: Si... si tuve errores en el desarrollo del examen, le puse el <math>1\ 1/2</math> y lo dividí a la mitad, aquí pagaría <math>2</math> por tres juegos, aquí pagaría <math>2\ 1/4</math> por dos juegos y aquí pagaría <math>1.3</math> por dos juegos, por eso conviene la de <math>70\%</math>...</p>	<p>EQ8: Duda</p>	<p>EW8: A4</p>	<p>EBm8: Error en la interpretación de la oferta <math>1\ 1/2</math></p>	<p>EC8: Es mejor <math>70\%</math> en <math>2^\circ</math></p>
<p>Er</p>	<p>I: Ok, ¿estás convencido de que tu respuesta es correcta?  E: si, la mejor oferta es la tercera  I: ¿y de tu procedimiento?  ¿Cambiarían sus procedimientos de acuerdo con lo que acabamos de revisar?  E: mi respuesta es la correcta, pero dudo de mi procedimiento... todavía estoy un poco confundido</p>	<p>EQ9: Duda</p>	<p>EW9: A4</p>	<p>EBm9: EW2, EW4, EBm2, EBm4</p>	<p>EC9: La mejor oferta es <math>70\%</math> en <math>2^\circ</math></p>
<p>Cr</p>	<p>I: Tu Cassandra ¿Estás convencida de que tu respuesta es la correcta?  ¿Cambiarían sus procedimientos de acuerdo con lo que acabamos de revisar?  C: Si estoy convencida, no cambiaría mi procedimiento</p>	<p>CQ5: Presunción</p>	<p>CW5:A3</p>	<p>CBm5: CW2, CBe2</p>	<p>CC5: Es mejor <math>3x2</math></p>

**Tabla HA1. Categorías de resolución de la tarea. Criterios para identificar el nivel de comprensión que se tiene sobre la tarea.**

<i>Categoría</i>	<i>Compara ofertas</i>	<i>Manipula componentes internos</i>	<i>Referente de juegos en su conjunto</i>	<i>Referente de ordinal sobre el que recae el descuento</i>	<i>Estrategias especiales</i>
<b>R6</b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	
<b>R6<sup>Vu</sup></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	<i>Utiliza valor unitario</i>
<b>R6<sup>Bu</sup></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	<i>Utiliza Building up</i>
<b>R5<sub>O</sub></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	
<b>R5<sub>O</sub><sup>Bu</sup></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	<i>Utiliza Building up</i>
<b>R5<sub>J</sub></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	
<b>R5<sub>J</sub><sup>Bu</sup></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	<i>Utiliza Building up</i>
<b>R4</b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	
<b>R4<sup>Bu</sup></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	<i>Utiliza Building up</i>
<b>R3</b>	<i>A<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	
<b>R2<sub>O</sub></b>	<i>A<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	
<b>R2<sub>J</sub></b>	<i>A<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	
<b>R1</b>	<i>A<sub>O</sub></i>	<i>R<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	
<b>A6</b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>A<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	
<b>A5<sub>O</sub></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>A<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	
<b>A5<sub>J</sub></b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>A<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	
<b>A4</b>	<i>R<sub>O</sub></i>	<i>A<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	
<b>A3</b>	<i>A<sub>O</sub></i>	<i>A<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	
<b>A2<sub>O</sub></b>	<i>A<sub>O</sub></i>	<i>A<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>R<sub>fO</sub></i>	
<b>A2<sub>J</sub></b>	<i>A<sub>O</sub></i>	<i>A<sub>C</sub></i>	<i>R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	
<b>A1</b>	<i>A<sub>O</sub></i>	<i>A<sub>C</sub></i>	<i>-R<sub>fJ</sub></i>	<i>-R<sub>fO</sub></i>	

Du  
ran  
te  
el  
est  
udi  
o,  
lue  
go  
de  
un  
pro  
ces  
o  
reit  
era  
tiv  
o  
de

comparaciones constantes entre las diferentes resoluciones presentadas por los alumnos en la primera fase de la investigación (aquella en la que los alumnos de dos grupos de tercer grado de diferentes escuelas secundarias técnicas resolvieron la tarea de forma individual por escrito) y de triangulación con investigaciones sobre resoluciones de alumnos ante problemas de razones y proporciones, se consigue identificar propiedades que definen las categorías de comprensión así como sus dimensiones, es decir, aquellas componentes de las resoluciones de la tarea que hacen referencia tanto a las dificultades en las que con más frecuencia incurren los alumnos como a las estrategias al resolver la tarea. Dichas componentes de las resoluciones de la tarea como propiedades de la comprensión, así como sus dimensiones, se explican a continuación.



*Compara ofertas:* implica identificar si en la resolución se lleva a cabo una comparación relativa entre las ofertas (dimensiones: Ro si se lleva a cabo; Ao si no se realiza).

*Manipula componentes:* implica verificar que se lleve a cabo una manipulación de tipo multiplicativo de los componentes internos de la tarea (e.g., que proponga costo por juego y luego trate de escalar el número de juegos para comparar) (dimensiones: Rc si manipula; Ac cuando no lo hace).

*Referente juegos en conjunto:* Hace referencia al número de juegos en conjunto por oferta (dimensiones:  $-Rfj$  significa que el participante muestra dificultades ya que descompone el número de juegos que se ofertan y utiliza un referente inadecuado para comparar, e.g., escala a 3 o 4 juegos;  $Rfj$  indica que no se dejan ver dificultades).

*Referente del ordinal al que se le aplica el descuento:* Hace referencia al número ordinal del juego sobre el que recae la oferta (dimensiones:  $-Rfo$  aparece cuando la resolución denota dificultades con la posición numérica del objeto sobre el que recae la oferta, e.g. indica que un juego extra a los ofertados conservaría el descuento;  $Rfo$  indica que no se revelan dificultades).

*Estrategias especiales:* Se identificaron algunas estrategias especiales que ya han sido reportadas en otras investigaciones. En el presente estudio los alumnos llegan a utilizar la estrategia building up (descrita tanto por Kieren como por Lamon) encadenada a las dificultades con los componentes, por lo que aparece en distintos niveles. También aparece una estrategia basada en el valor unitario para comparar las razones, pero únicamente durante las interacciones y siempre como expresión de una comprensión que no denota dificultades con los componentes de la tarea. Dimensiones: Bu, aplica estrategia tipo building up; VU, aplica estrategia basada en el valor unitario.

Las subcategorías con todas sus propiedades y dimensiones antes introducidas se utilizan como criterio para evaluar la comprensión que los estudiantes mostraron sobre el tema de comparación de razones en cada una de las fases de la investigación para establecer la categoría que corresponde

a su estrategia de resolución y que da cuenta, en cierto grado, de la comprensión que se tiene sobre la tarea.

Particularmente, en el análisis funcional, la categoría aparece asociada como garantía de los argumentos que cada participante expuso durante el proceso de interacción con su compañero(a). En la tabla HA1 se muestra el esquema con el que se obtienen las claves de categorización de las resoluciones de la tarea realizando la combinación de todos los casos posibles. Es importante mencionar que este instrumento es parte de un memo esquemático con el que se organizaron las propiedades y sus dimensiones para dar orden a las claves de categorización, pero esto no implica que los datos empíricos del presente estudio hayan cubierto en su totalidad las categorías que ahí aparecen. En cada caso se hará mención de las categorías con las que se evalúa la comprensión de cada participante y se explicarán para mayor claridad.

**Tabla HA2. Criterios para identificar el tipo de interés por convencer.**

		<i>Interés disciplinar o empatía matemática</i>	<i>Interés no disciplinar</i>	<i>Falta de interés</i>
	<i>Procesos intra-personales</i>			
<b>Ic1</b>	<i>¿De qué quiere convencer al otro?</i>	<i>De su respuesta y estrategia.</i>	<i>De su propio convencimiento o seguridad.</i>	<i>De nada.</i>
<b>Ic2</b>	<i>¿Cómo lo quiere convencer?</i>	<i>Con esquemas matemáticos o parte de esquemas extra-matemáticos para refutarlos con esquemas matemáticos.</i>	<i>Con esquemas extra-matemáticos o con esquemas matemáticos erróneos.</i>	<i>Usa esquemas extra-matemáticos o explicaciones ininteligibles.</i>
<b>Ic3</b>	<i>Explicación</i>	<i>Clara, precisa y sistemática</i>	<i>Desordenada, poco clara e imprecisa.</i>	<i>Sin orden, muy imprecisa.</i>
<b>Ic4</b>	<i>Elaboración matemática</i>	<i>Es capaz de construir nuevas resoluciones y de considerar nuevas estrategias con el fin de convencer al otro.</i>	<i>No construye nuevas propuestas.</i>	<i>No muestra comprensión matemática.</i>
<b>Ic5</b>	<i>Postura ante hechos de las matemáticas</i>	<i>Es flexible.</i>	<i>Es inflexible en su postura.</i>	<i>No tiene una postura.</i>
	<i>Procesos inter-personales</i>			
<b>Ic6</b>		<i>Escucha Empática. Es capaz de identificar garantías y respaldos del argumento del otro para construir nuevas resoluciones o estrategias.</i>	<i>Escucha no empática. Escucha, pero no considera la postura del otro.</i>	<i>No escucha ni considera al otro.</i>
<b>Ic7</b>	<i>Postura ante el otro</i>	<i>Habla Empática. Identifica garantías y respaldos del argumento del otro y las rebate con nuevas resoluciones o estrategias que apunten directamente hacia esas garantías y respaldos.</i>	<i>Habla no empática. No considera la postura del otro en su explicación.</i>	<i>No trata de explicar al otro.</i>

Se identifica el interés disciplinar por convencer o la empatía matemática cuando se es capaz de escuchar matemáticamente al otro, entender sus razones, sus respaldos y ponerse en su lugar para, desde ahí, poder responder eficiente y eficazmente. Si sucede lo contrario de lo anterior se dice que puede llegar a tener interés por convencer al otro, pero no un interés disciplinar o, incluso, que simplemente no hay interés por convencer al otro.

Dado lo anterior, se identifica el interés desde dos perspectivas que se complementan, la primera tiene que ver con *procesos intra-personales*, es decir, al interior de cada sujeto. Desde esa perspectiva se identifican los criterios relacionados con la postura personal de cada individuo con la finalidad de determinar de qué quiere convencer al otro, cómo lo quiere convencer, que tipo de explicación ofrece, si lleva a cabo un proceso de elaboración matemática y cuál es su postura respecto a hechos de las matemáticas.

La segunda perspectiva tiene que ver con *procesos inter-personales*, es decir, aquellos procesos internos que ocurren en el individuo y que tocan o hacen referencia al otro. Desde esta perspectiva se identifica, por un lado, si se lleva a cabo una “escucha empática”, lo cual incluye hechos tales como que si en su intervención da muestras de haber identificado las garantías o los respaldos del otro y que utilice lo escuchado para construir nuevas estrategias de resolución. Esto último puede ocurrir después de la intervención del otro e incluso posteriormente.

Por otra parte, se identifica el “habla empática” cuando, justo después de haber escuchado al otro, el participante da una explicación en la que muestra que identificó las garantías y/o respaldos de los argumentos del otro, ya que los retoma o los refuta, y los utiliza como punto de partida para desarrollar explicaciones o resoluciones de la tarea basados en esquemas matemáticos adecuados.

**Tabla HA3. Criterios para identificar el nivel de convencimiento personal (en hechos de las matemáticas, en particular, en la resolución o estrategias de la tarea, y/o en la solución final).**

		<i>Certeza, seguridad</i>	<i>Duda, presunción, inseguridad</i>
<i>Lv</i>	<i>Lenguaje verbal</i>	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g. tengo) o hace uso de un lenguaje asertivo.	La persona recurre a mitigadores del lenguaje que pueden revelar un menor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa condicionales simples (e.g. sería).
<i>Lc</i>	<i>Lenguaje corporal</i>	Expresiones de serenidad y de estados apacibles	Expresiones de estados alterados (nerviosismo o expresiones ‘exageradas’ de seguridad)
<i>A</i>	<i>Acción</i>	El sujeto realiza acciones congruentes con su discurso.	El sujeto no realiza acciones consecuentes con su discurso.
<i>D</i>	<i>Determinación</i>	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener a su compañero en su contra.	La persona manifiesta adhesión a la veracidad de un enunciado matemático con menor determinación.

Con la finalidad de identificar el nivel de convencimiento con el que argumentan los participantes se hace necesario analizar sus intervenciones a detalle. Con los criterios de la tabla HA3 se puede identificar su grado de

convencimiento, es decir, de seguridad o certeza en su resolución o en su resultado, o bien, de presunción, inseguridad o duda que experimenta sobre su respuesta o explicación. En algunos casos también se llega a dar algún convencimiento ambivalente en el que algunos de los criterios muestren cierto grado de seguridad mientras que otros muestren cierto grado de presunción o duda. Los elementos considerados para determinar el estado de convencimiento de los participantes se desarrollan a continuación.

*Lenguaje verbal.* Se reconoce que los participantes que utilizan un lenguaje verbal asertivo o con enfatizadores del lenguaje como el modo indicativo de los verbos están reflejando una mayor seguridad en su convencimiento que aquellos que utilizan mitigadores del lenguaje en forma de condicionales simples.

*Lenguaje corporal.* Se identifica un estado de convencimiento con mayor seguridad cuando el lenguaje corporal del participante es sereno y apacible, y que expresa apertura. Por otra parte, el estado de convencimiento de menor seguridad se refleja en estados alterados del comportamiento como nerviosismo o como expresiones exageradas de seguridad.

*Acción.* Aquellos participantes que actúan en congruencia con lo que dicen matemáticamente son los que muestran un mayor nivel de seguridad que aquellos que no lo hacen.

*Determinación.* Otro vestigio importante sobre la seguridad que poseen los participantes es la determinación. Ésta surge cuando el sujeto muestra adherencia a su verdad y la defiende incluso cuando es cuestionado por su compañero. Es importante diferenciar la determinación de la inflexibilidad, ya que el participante puede tener determinación en hechos de las matemáticas más que en su respuesta, lo que posibilita que dicho sujeto también sea flexible en su pensamiento y sea capaz de construir nuevas resoluciones que respalden su respuesta.

**Tabla HA4. Caracterización del Account.**

		<i>Account Completo</i>	<i>Account Parcial</i>	<i>No hay Account</i>
<i>At1</i>	<i>¿En qué sustenta su convencimiento?</i>	<i>En razones matemáticas.</i>	<i>En razones matemáticas.</i>	<i>En razones extra-matemáticas.</i>
<i>At2</i>	<i>¿Qué tipo de interés muestra?</i>	<i>Interés disciplinar por convencer al otro.</i>	<i>Interés disciplinar por convencer al otro.</i>	<i>Interés no disciplinar o falta de interés.</i>
<i>At3</i>	<i>¿Identifica los sustentos del convencimiento del otro?</i>	<i>Identifica los sustentos extra-matemáticos del convencimiento del otro y los emplea en su argumento para desde ahí rebatirlos con base en explicaciones matemáticas</i>	<i>No identifica los sustentos extra-matemáticos del convencimiento del otro y no los puede rebatir</i>	<i>No identifica los sustentos extra-matemáticos del convencimiento del otro y no los puede rebatir</i>
<i>At4</i>	<i>¿Qué ocurre en el proceso de interacción con respecto al convencimiento?</i>	<i>En el proceso de interacción incrementa su nivel de convencimiento al tiempo que cambia el nivel de convencimiento del otro.</i>	<i>En el proceso de interacción incrementa su nivel de convencimiento, pero no consigue convencer al otro.</i>	<i>En el proceso de interacción no muestra convencimiento ni consigue convencer al otro.</i>
<i>At5</i>	<i>¿Qué ocurre en el proceso de interacción con respecto a la comprensión?</i>	<i>En el proceso de interacción incrementa su nivel de comprensión al tiempo que incrementa el nivel de comprensión del otro.</i>	<i>En el proceso de interacción incrementa su nivel de comprensión, pero no consigue incrementar el nivel de comprensión del otro.</i>	<i>En el proceso de interacción no incrementa su propia comprensión ni consigue incrementar la comprensión del otro.</i>

El 'account' es un proceso que ocurre en una interacción en el que un sujeto incrementa su comprensión y refuerza o conserva su convencimiento en el afán de convencer y de incrementar la comprensión que tiene el otro por medio de argumentos.

Para caracterizarlo se identifican los siguientes criterios, asociados al nivel de comprensión dado por el tipo de resolución que defienden los participantes; y asociados también al tipo de interés por convencer que expresan y a los niveles de convencimiento reconocidos.

*¿En qué sustenta su convencimiento?* Es importante identificar si el convencimiento que experimentan los participantes se sustenta en razones matemáticas o extra-matemáticas, ya que esto es un reflejo del nivel de comprensión que expresan sobre la resolución o respuesta que exponen además de ser una manifestación de su estado intra-personal de convencimiento.

*¿Qué tipo de interés muestra?* El tipo de interés por convencer que expresa el participante revela estados tanto de los procesos intra-personales de convencimiento como de los inter-personales, además de una comprensión adecuada del tema sobre el que está intentando convencer. Para que ocurra un proceso de 'account' es fundamental que el interés por convencer sea de tipo disciplinar.

*¿Identifica los sustentos del convencimiento del otro?* Si el participante revela en algún momento de su intervención que escucha a su compañero y que esa escucha le es útil para identificar las garantías y los respaldos en lo que el otro sustenta su convencimiento, muy seguramente su intervención estará encaminada a completar un proceso de 'account', siempre que trate de refutar esos sustentos que identificó en el argumento del otro.

*¿Qué ocurre en el proceso de interacción con respecto al convencimiento?* Para hablar de 'account' es necesario comenzar a identificar elementos presentes durante el proceso de interacción. Como se han identificado elementos asociados al convencimiento, se puede indicar si en el proceso han ocurrido cambios sobre el convencimiento tanto del que expone como del que escucha. Si el que expone refuerza su convencimiento y el que escucha es convencido por su interlocutor se dice que el participante que expone está encaminado a obtener un proceso de 'account completo'.

*¿Qué ocurre en el proceso de interacción con respecto a la comprensión?* En el mismo tenor que el caso anterior, ya que se tienen identificadas una serie de



características que dan claridad sobre el nivel de comprensión de la tarea en diferentes momentos de la interacción se puede identificar si hay cambios en la comprensión en el proceso de intercambio de resoluciones. Si el participante que explica muestra un nivel de comprensión que se incrementa como parte del proceso de tratar de explicar al otro, y el otro da vestigios de haber incrementado su comprensión gracias a la explicación de su compañero entonces se puede indicar que el que explica está consiguiendo un 'account completo' si es que los demás criterios también se cumplen.

Anexo 6 – Artículo aceptado para el XXI Simposio de SEIEM

## INTERACCIÓN ENTRE PARES: TERRENO DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DE ‘EMPATÍA MATEMÁTICA’

### Peer Interaction: Arena of Mathematical Learning and ‘Mathematical Empathy’

Gómez-Lázaro, H. D., Rigo-Lemini M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, I. P. N., México.

#### Resumen

*El trabajo versa sobre el intercambio de resoluciones a una tarea de comparación de razones que llevan a cabo parejas de estudiantes de tercer grado de secundaria. Siguiendo los principios de la teoría fundamentada y del análisis de los argumentos de Toulmin, en el documento se argumenta que para que una interacción sea provechosa son necesarios los conocimientos matemáticos así como una actitud de ‘empatía matemática’. Se sugieren también algunas ‘características notables’ para que una interacción sea cognitivamente útil y enriquecedora para la pareja, características que pueden ser interesantes referencias para futuras investigaciones y de utilidad para los docentes.*

**Palabras clave:** *interacción entre pares, convencimiento, comparación de razones, empatía matemática.*

#### Abstract

*The paper reports on exchanges amongst peers in 3rd year of secondary school, concerning their resolutions of a task on ratio comparison. Following the principles of Grounded Theory and Toulmin’s argument analysis, the paper argues that the mathematical knowledge and an attitude of ‘mathematical empathy’ are necessary if an interaction is to be fruitful. The paper moreover suggests some of the notable characteristics needed for an interaction to be cognitively useful and fruitful, characteristic that may be interesting references for future research and useful to teachers.*

**Keywords:** *peer interactions, convincement, ratio comparison, mathematical empathy.*

#### ANTECEDENTES, PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS DEL TRABAJO

El trabajo que aquí se expone versa sobre el intercambio de resoluciones de una tarea de comparación de razones, que llevan a cabo parejas de estudiantes de 3er grado de secundaria, y se basa en el supuesto de que la interacción entre pares es propiciatoria de ciertos aprendizajes pero sólo bajo ciertas condiciones. Distintos investigadores sobre el tema (Goos, Galbraith & Renshaw, 2002; Smith, 2015; Stacey, 1992; Topping, 2005) han descrito los diversos factores que intervienen para que una interacción entre parejas de estudiantes resulte provechosa, aceptando que no siempre se presentan casos de éxito.

Sobre el aprendizaje que se da en el marco de la interacción entre pares, Smith (2015) revisa las diferentes modalidades que existen, complementando el trabajo desarrollado por Topping (2005). Ambos autores manejan diferentes tipos de interacción entre pares tales como la tutoría, asistencia, instrucción, agrupamiento, monitoreo o revisión. Estos trabajos cierran con una serie de sugerencias didácticas dirigidas a docentes o tutores, a quienes se les propone seguir reportando las dificultades encontradas, para que esto permita el rediseño de nuevos cursos a docentes o el diseño y aplicación de nuevas estrategias. Goos, Galbraith & Renshaw (2002) también se centran en la investigación sobre la interacción entre pares y sobre la relación que guarda ésta con la zona de desarrollo próximo descrita por Vigotsky. Ellos puntualizan cómo es que las interacciones entre alumnos no siempre son productivas, aduciendo que las interacciones llegan a producir conflictos y que sus alcances llegan a ser limitados. Con base en evidencias empíricas de casos de interacción entre pares que resultan ser obstáculos para sus aprendizajes, y en el mismo tenor que los anteriores autores, Stacey (1992) asevera que “dos cabezas no siempre son mejores que una”.

Con el objetivo de profundizar en el tema se busca responder a la pregunta sobre ¿Cuáles son las características notables de las interacciones entre pares, que las hacen cognitivamente provechosas?; en el trabajo se argumenta que para que una interacción sea provechosa no sólo se necesita poner en la mesa de discusión conceptos y elementos de la matemática, sino también y de manera muy importante, lo que en este documento se denomina ‘empatía matemática’, la cual está relacionada, entre otras cosas, con la posibilidad que tienen los participantes de apuntar hacia los sustentos (garantías y respaldos) de los argumentos a rebatir para conseguir el convencimiento del interlocutor. En la comunicación también se argumenta que una interacción puede promover el aprendizaje de conocimientos matemáticos y de actitudes de ‘empatía matemática’ sólo bajo la guía de tutores sensibilizados al respecto y cuando la interacción entre pares cumple con lo que aquí se llaman ‘características notables’. Para sustentar de manera rigurosa lo que aquí se arguye, se introduce un análisis de caso realizado con las herramientas propuestas por Toulmin, a partir de las cuales se definen conceptos teóricos siguiendo los principios de la teoría fundamentada.

## **MARCO TEÓRICO**

*Sobre comparación de razones.* En el trabajo de Gómez y García (2014) y en el de Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo (2013) se sugieren variables que determinan las estrategias de resolución de tareas de comparación de razones, entre ellas están las de contexto, que los autores le llaman variable de los referentes. Por otra parte, se lleva a cabo un proceso de homogeneización de las normalizaciones cuando, considerando los datos y cuidando el factor de escala o la equivalencia, se cambia la forma en que originalmente se presentan las razones –e.g., en forma de porcentaje, fracción o número decimal- para poder hacerlas comparables (Cf. Fernández Lajusticia, 2009). Lamon (1999) por su parte, considera que para el razonamiento proporcional es fundamental una perspectiva relativa, en la que se incluyen relaciones multiplicativas, a diferencia de las perspectivas absolutas, en la que están involucradas solamente las estructuras aditivas.

*Análisis funcional de los argumentos propuestos por Toulmin.* En el ámbito de la investigación educativa que emplea el modelo de Toulmin (Pinochet, 2015), se afirma que un argumento se refiere a los discursos que un estudiante produce cuando trata de justificar

sus conclusiones o explicaciones. Toulmin (2003) establece que se puede diferenciar la *afirmación* (C, por *claim*) cuyo valor se trata de establecer y los elementos justificatorios que se alegan como base de la afirmación, a los que denomina *datos* (D). Al presentar un conjunto determinado de datos como base para una afirmación estos pueden ser cuestionados. Para sostener la postura, aparecen proposiciones de diferente tipo: reglas, principios enunciados, etc., que permiten realizar inferencias en lugar de agregar información adicional; éstas son las *garantías* (W, por *warrant*). La garantía es incidental, explicativa y general; mientras que a los datos se apela explícitamente, a las garantías se apela implícitamente. Detrás de las garantías puede haber otras certezas que las impregnan de autoridad y de vigencia: el *respaldo* de las garantías (B, por *backing*). El tipo de respaldo alegado por las garantías varía de un campo de argumentación a otro y se puede presentar más de un tipo de respaldo por garantía. Éstos pueden expresarse en forma de enunciados categóricos y no siempre son explícitos. Por otra parte, los cualificadores modales (Q por *qualifier*) son elementos del modelo de Toulmin que indican el grado de fuerza con el que se sostiene la garantía. Para desarrollar el análisis de datos utilizando este método propuesto por Toulmin, en el presente trabajo se consideraron como afirmaciones a las respuestas que defendieron los estudiantes; como datos, los procedimientos o sustentos con los que los alumnos respaldaron la respuesta que defendieron; como garantías a las claves que representan el tipo de resolución que se llevó a cabo (Ver: *Sub-categorías asociadas a la resolución de la tarea*); como respaldos a aquellas ideas o consideraciones matemáticas o extra-matemáticas sobre las que se construyó el tipo de resolución; y como cualificadores modales a los estados internos de convencimiento (que en lo que sigue se definen como ‘estados epistémicos de convencimiento’), los que se identifican con base en los criterios que aparecen en la Tabla 1.

*Sobre los estados epistémicos.* Como parte importante del análisis que se desarrolla aquí, se utiliza la propuesta de Martínez y Rigo (2014) para el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas. A esos estados internos les denominan ‘estados epistémicos’, e indican que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). En suma, proponen un instrumento para distinguir estados epistémicos en que consideran que se vivencia un grado de certeza, de presunción o duda, cuando se dan muestras de cubrir, en algún grado, los criterios que describen: Mitigadores o Enfatizadores del Lenguaje, Acción, Determinación, Interés o Consistencia. En la tabla 1 aparece el instrumento completamente desglosado.

Tabla 2. Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

<i>Elementos del habla</i>	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo). Cuando recurre a mitigadores del lenguaje el grado de compromiso es menor (e.g., convendría)
<i>Acción</i>	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
<i>Determinación</i>	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de

	determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
<i>Interés</i>	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico durante un proceso de argumentación son: -Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. -Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. -Claros y precisos.
<i>Consistencia</i>	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

### **INSTRUMENTOS Y MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN EMPÍRICA**

La investigación está inspirada en los principios de la teoría fundamentada (*Grounded Theory*) (Corbin & Strauss, 2015). Fieles a esos principios, la elaboración y el desarrollo de conceptos se ha hecho con base en los datos empíricos recabados en la investigación, mediante comparaciones constantes entre dichos datos, y aplicando continuamente un proceso iterativo de triangulación entre los conceptos de los investigadores, los datos empíricos y los términos teóricos tomados de la bibliografía.

La investigación consta de tres fases. En la primera se aplicó un cuestionario; del análisis de resultados se desprendió un conjunto de categorías de resolución. En la segunda fase se llevaron a cabo interacciones en las que parejas de estudiantes intercambiaron las resoluciones de la tarea que individualmente expusieron en el primer cuestionario. En la tercera fase los alumnos resolvieron de manera personal un cuestionario semejante al inicial.

## Primera Fase: Cuestionario y Sujetos

Se aplicó a cada estudiante un cuestionario inicial que incluye una tarea de comparación de razones (con reajustes de la propuesta en Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo 2013) (ver figura 1). Se pregunta ¿Cuál de las ofertas es la que más conviene? Como se puede observar, cada oferta se presenta con una normalización diferente, además de que la primera se diferencia de las otras dos por el referente del número de videojuegos que se ofertan en conjunto y por el referente del ordinal del videojuego sobre el que recae la oferta. Una resolución correcta conlleva un proceso de relativización para homogeneizar normalizaciones y referentes. Este instrumento se aplicó a los estudiantes de dos grupos de tercero de secundaria (de edades entre 14 y 15 años) de dos escuelas técnicas con un buen nivel de desempeño general (una que está dentro del 10% de las mejores de la Ciudad de México y otra dentro del 25%), con el objeto de que se tuvieran respuestas correctas y alumnos con capacidad de argumentar y contra-argumentar; el tercero de secundaria se eligió porque de acuerdo con el currículum, los alumnos ya cuentan con al menos 5 años de experiencia trabajando en temas de proporcionalidad.



Figura 1. La tarea de comparación de razones

### Sub-categorías asociadas a la

#### resolución de la tarea

En la primera fase del estudio se identificaron sub-categorías que hacen referencia a las estrategias más frecuentemente empleadas por los alumnos al resolver la tarea. Las sub-categorías identificadas son: *Compara ofertas* (CO): implica que en la resolución se lleva a cabo una comparación relativa entre las ofertas ( $R_o$  si se lleva a cabo;  $A_o$  si no se realiza). *Manipula componentes* (MC): implica la manipulación multiplicativa de los componentes internos de la tarea (e.g., que proponga costo por juego y luego trate de escalar el número de juegos para comparar) ( $R_c$  si manipula;  $A_c$  no lo hace). *Referente juegos en conjunto* (RJC): Hace referencia al número de juegos en conjunto por oferta ( $-R_{fj}$  significa que muestra dificultades al descomponer el número de juegos que se ofertan y utiliza un referente inadecuado para comparar, e.g., escala a 3 o 4 juegos;  $R_{fj}$  indica que no se dejan ver dificultades). *Referente del ordinal al que*

Tabla 2. Claves de categorización de las resoluciones de la tarea

CO	MC	RJC	ROD	OC	Clave
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$	S/Problemas	R7
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$	Valor unitario	$R6^{VU}$
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$	Building up	$R6^{Bu}$
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$	C/Problemas	R6
$R_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$		$R5_o$
$R_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$	Building up	$R5_o^{Bu}$
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$		$R5_j$
$R_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$	Building up	$R5_j^{Bu}$
$R_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$		R4
$R_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$	Building up	$R4^{Bu}$
$A_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$		R3
$A_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$		$R2_o$
$A_o$	$R_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$		$R2_j$
$A_o$	$R_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$		R1
$R_o$	$A_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$		A6
$R_o$	$A_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$		$A5_o$
$R_o$	$A_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$		$A5_j$
$R_o$	$A_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$		A4
$A_o$	$A_c$	$R_{fj}$	$R_{fo}$		A3
$A_o$	$A_c$	$-R_{fj}$	$R_{fo}$		$A2_o$
$A_o$	$A_c$	$R_{fj}$	$-R_{fo}$		$A2_j$
$A_o$	$A_c$	$-R_{fj}$	$-R_{fo}$		A1

*se le aplica el descuento* (ROD): Hace referencia al número ordinal del juego sobre el que recae la oferta ( $-Rf_0$  aparece cuando la resolución denota dificultades con la posición numérica del objeto sobre el que recae la oferta, e.g. indica que un juego extra a los ofertados conservaría el descuento;  $Rf_0$  indica que no se revelan dificultades). OC alude a *otras consideraciones*, ya sea que se haya utilizado la estrategia building up, que se hayan identificado algunos problemas ajenos a la razón y proporción o que no se hayan identificado dificultades de ningún tipo.

El tipo de resolución como categoría se utilizó como criterio para evaluar la comprensión que los estudiantes mostraron en cada una de las fases de la investigación sobre el tema de comparación de razones, asociado como garantía del argumento que se expuso. En la tabla 2 se muestra como se obtienen las claves de categorización de las resoluciones de la tarea con la combinación de todos los casos posibles y aparecen sombreadas las caracterizaciones de los tipos de resolución a las que recurrieron los alumnos cuyas interacciones aquí se analizan.

### **Segunda Fase: Interacciones, método y sujetos**

En esta fase se determinó trabajar con la segunda escuela antes mencionada, ya que ahí se presentaron procesos de resolución más variados que en la otra. Con base en las categorías definidas en la fase anterior, se eligieron de entre los alumnos a cinco parejas con la característica de que mantuvieran posturas encontradas en relación a la resolución o solución de la tarea y que en su cuestionario inicial hayan ofrecido explicaciones amplias de lo que ahí habían hecho, con la intención de detonar durante la interacción el intercambio de ideas y procedimientos. En la interacción se solicitó que cada quien tratara de convencer a su compañero de que el procedimiento realizado por ellos en el cuestionario inicial era el más adecuado. El autor 1 actuó como mediador de las intervenciones.

### **Tercera Fase: Cuestionario final individual**

Se propuso a los estudiantes que resolvieran de manera individual y por escrito una tarea semejante a la planteada en el cuestionario inicial, con la finalidad de detectar las posibles modificaciones en sus procedimientos de resolución y en sus cualificadores modales después de la interacción.

## **ANÁLISIS EMPÍRICO DE LAS INTERACCIONES**

### **Categorías para el análisis de las interacciones**

Las categorías con las que se interpretan las interacciones fueron resultado de un proceso de triangulación, como ya se explicó. No obstante, para fines de claridad se exponen antes del análisis.

Con base en una re-definición de la idea de *account* (recogida de Krummheuer, 1995, quien la toma de Garfinkel) y en los datos empíricos recabados en la investigación, en este documento se define la noción de '*account completo*' (a diferencia del '*account parcial*' caracterizado en otro escrito de los autores) que se da cuando a partir de un intercambio comunicativo el incremento de la comprensión y el convencimiento del que habla se presenta, de manera sincrónica, con el incremento de la comprensión y la modificación del convencimiento del que escucha. En este escrito se dice que cuando se da un proceso de *account completo* se ha generado una actitud de '*empatía matemática*'. Con base en los

grados de *accountability*, en la investigación se distinguen tres tipos de intercambio (productivo, de menor productividad y neutrales), de los cuales aquí sólo se describe uno:

*Intercambio productivo (IP)*. Se presenta cuando (al menos) uno de los participantes pone en juego un *account* completo y por tanto una actitud de empatía matemática.

### **Análisis empírico de las interacciones. Interacción Raúl-José**

Con base en los conceptos antes expuestos (intercambios productivos y no productivos, y *account*) se presenta en lo que sigue un análisis de la interacción de una pareja de alumnos, análisis del cual se desprenden algunas ‘características notables’ que pueden eventualmente promover el éxito en las interacciones entre pares (ver *Resultados de la investigación*).

En la tabla 3 aparece el análisis funcional de los argumentos desarrollados durante la interacción que se dio entre José y Raúl. Se respeta el espíritu analítico propuesto por Toulmin; sin embargo, aparece en forma tabular para dar cuenta de las relaciones que guardan las garantías y los respaldos en los que Raúl apoya sus afirmaciones, en relación con las garantías y respaldos en los que José sustenta sus contra-argumentos, y en los que se apoya el investigador.



Tabla 3. Análisis Funcional. Interacción Raúl-José.

S.	Datos	Cualificadores Modales	Gar.	Respaldo	Afirmación
Rin	RD1: \$1000 por juego. Oferta Costo de dos juegos Costo de tres juegos 1 1/2 1500 2500 70% en 2° 1300 2300 3x2 2000		RW1: A5o	RBm1: Estrategia de tipo absoluto. Ignora relaciones de proporcionalidad. RBe1: Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.	RC1: 3x2 es la mejor oferta porque te regalan uno.
Ri1	RD2: Oferta J1 J2 J3 Total Icono 3x2 1000 1000 ¡Gratis! 2000 ☺ 1 1/2 1000 500 1000 2500 ☺ 70% en 2° 1000 300 1000 2300 ☺ "sería mejor completar los 2000 para conseguir otro juego, porque el tercero te saldría a su precio original" "por pagar 700 o 500 (más) te llevarías un juego más gratis y eso es más diversión por un poquito menos de precio de que si lo compraras con otros métodos."	RQ2: Alta presunción: Utiliza un lenguaje corporal muy expresivo, señala, golpea el pizarrón, mantiene postura erguida y abierta, volumen de voz alto. Utiliza iconos que reflejan su pensar sobre las ofertas. Acción; Determinación; Consistencia.	RW2: A5o	RBm2: Estrategia absoluta, ignora relaciones de proporcionalidad. RBe2: Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.	RC2: En la oferta 3x2 el tercero te sale gratis, está mejor éste, porque pagas menos por tres juegos.
Ii1	Y ¿qué pasa si en lugar de tres juegos, nos quisiéramos llevar cuatro? ¿Cómo quedarían ahora los costos? ¿Sigue conviniendo la primera oferta?	IQ1: Consolida el argumento de R y no cuestiona RW1 ni RW2.	IW1: A5o	IBe1: Incita a completar estrategia Building Up por adiciones sucesivas.	
Ri2	RD3: Ok... si queremos cuatro... otros 1000, entonces serían supuestamente 3000... Oferta J1 J2 J3 J4 Total 3x2 1000 1000 Gratis 1000 3000 1 1/2 1000 500 1000 500 3000 70% en 2° 1000 300 1000 300 2600	RQ3: Presunción: Acción; Consistencia; Determinación. "Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está" No cuestiona su procedimiento. Lenguaje corporal abierto y muy expresivo. Mitigadores del lenguaje: "En este caso te convendría..."	RW3: A5o	RBm3: Estrategia de adiciones sucesivas, no relativiza. RBe3: No acepta resultados alternos aun cuando se le han demostrado matemáticamente.	RC3: En este caso te convendría mejor la número tres. Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está (golpea el pizarrón dónde está marcada la oferta 3x2).
Ii2	¿Qué pasa si quiero seis juegos por ejemplo?		IW2: A5o	IBm2: Incita a completar estrategia tipo Building Up por adiciones sucesivas.	
Ri3	RD4: Entonces en la primera por seis serían 4000 morlacos... Seis, aquí son cuatro (analiza la segunda oferta)... entonces son 4500... ¡si! mmm... (analiza la tercer oferta) son 2600 por cuatro... ya, 3900...	RQ4: Alta presunción: Acción. Determinación. No muestra cambios de perspectiva sobre el referente del número de juegos en conjunto.	RW4: A5o	RBm4: Completa análisis por adiciones sucesivas. RBe4: Se infiere que acepta el resultado por ser un caso particular, no cuestiona el procedimiento.	RC4: Si quiero llevarme seis juegos conviene más la tercera oferta.
Jr	JD1: (Raúl) no sabía explicarlo y al final terminó resultando que la oferta que él decía no era la buena.				JC1: No me convence el procedimiento de Raúl.
Jin	JD2: Descarta la 2a por la 3a; propone precio: \$1000 Oferta Costo x2 Costo x3 Costo x4 3x2 \$2000 \$4000 70% en 2° \$1300 \$2600		JW2: R5 <sup>Bu</sup>	JBm2: Estrategia Building up incorrecta, normaliza e identifica la diferencia entre porcentajes.	JC2: Es mejor la oferta 70% en 2° porque pagas menos por 4 juegos.
Ji1	JD3a: Supongamos que cada videojuego sale en 1000 pesos, entonces tenemos 3x2, entonces sólo pagaría 2, o sea 2000. Pero, si los divides entre tres, que es el número de juegos que te llevas, o sea, no te van a dar nada gratis, hay un presupuesto para cada videojuego. Entonces serían 666 por cada uno de los tres videojuegos. Y pues ya sacamos el 70% de 1000, da 700, entonces el segundo videojuego estaría saliendo en 300 pesos, y ya de dos videojuegos serían los 1300, por lo que de cuatro videojuegos serían 2600 y 2600 entre los cuatro videojuegos da 650 que es una menor cantidad que los 666 de los tres. JD3b: La segunda oferta la descartamos porque el 70% es mejor que el 50%.	JQ3: Certeza: Acción; Determinación; Consistencia; Interés. Cambia la perspectiva de resolución.	JW3: R6 <sup>VU</sup>	JBm3a: Estrategia que considera el valor unitario como medio efectivo para comparar. JBm3b: Descarta una oferta por comparación de porcentajes. JBe3: Indica "no te van a dar nada gratis" y "hay un presupuesto para cada videojuego"	JC3: 650 por juego en la tercera oferta es una menor cantidad que 666 por juego en la primera.
Rr	RD5: Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso...	RQ5: Visos de duda: Mitigadores de lenguaje: "te convendría"	RW5: A5o	RBe5: RC1, RC2, RC3.	RC5: te convendría ese (señala la oferta 3x2)
Rr	RD5: Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso...	RQ5: Visos de duda: Mitigadores de lenguaje: "te convendría"	RW5: A5o	RBe5: RC1, RC2, RC3.	RC5: te convendría ese (señala la oferta 3x2)
Rf	RD6: Se infiere propuesta de precio: \$1000 Oferta No. de juegos Costo Costo por juego 4x3 4 3000 750 1 1/4 4 2500 625 70% en 2° 4 2600 650 Por obvias razones es mejor un %75 que un 70% solamente.	RQ6: Casi certeza con enfatizadores de lenguaje "por obvias razones"	RW6: R6 <sup>Bu</sup> R6 <sup>Vu</sup>	RBm6: Estrategia Building up con uso de valor unitario y comparación de porcentajes.	RC6: Conviene más la de 1 1/4, por obvias razones es mejor un 75% que un 70% solamente

Participantes: R: Raúl; J: José. Segmentos: in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada. Análisis funcional: C: afirmación; D: dato; Q: cualificador; W: garantía; B: respaldo

*Raúl, primera intervención.* Los procedimientos de Raúl se encuentran muy apegados a perspectivas de tipo absoluto y aditivo (las garantías, tanto de su cuestionario inicial como las de sus intervenciones subsecuentes, corresponden a la categoría A5o); pareciera que el principal problema de este alumno consiste en que no considera el referente del número de juegos en su conjunto (-Rfj); esto lo llevó a segmentar las ofertas y a pensar que tiene sentido, en el contexto de la tarea, el comprar juegos sueltos, posicionándose así en una postura absoluta a partir de la cual pierden significado las comparaciones multiplicativas y, por supuesto, la proporcionalidad. En su primera intervención Raúl preservó las garantías y los respaldos que ya estaban presentes en el argumento de su cuestionario; ahí se observa lo dicho: él ignoró las ventajas que le ofrece cada oferta, considerando que es indistinto comprar cualquier número de juegos. A pesar de que en esa intervención intentó mostrar un alto grado de presunción, al usar un lenguaje corporal muy expresivo, una postura erguida y abierta, alto volumen de voz, cubriendo criterios de *acción y determinación*, es posible que en el fondo no haya estado tan convencido de su argumento matemático, ya que su estrategia, no sólo en esta intervención sino a lo largo de toda su participación, consistió en ofrecer argumentos matemáticos (los ya comentados, que por cierto no son los más correctos y eficientes) complementados con razones extra-matemáticas (e.g, ‘en la oferta 3x2 te regalan uno’) como ‘para reforzar’, contraponiéndose así al criterio de *consistencia*.

*Raúl y el investigador.* El investigador contra-argumentó a Raúl con la intención de hacerle ver que podía escalar el número de juegos hasta conseguir un número adecuado para comparar todas las ofertas. Sin embargo, los planteamientos del investigador no apuntaron ni a las garantías ni a los respaldos de tipo matemático empleados por el alumno, es decir, no pusieron en entredicho que en el marco de la tarea, carece de sentido el concebir los juegos aisladamente, dejando de considerar las relaciones que éstos guardan con el resto de juegos incluidos en cada oferta; el investigador, por otra parte, tampoco cuestionó las garantías y los respaldos de tipo extra-matemático argüidos por Raúl.

Por lo antes dicho, se puede entender perfectamente que, como respuesta a las intervenciones del investigador, Raúl en su segunda participación (Ri2) no sólo no cuestionó su estrategia de adiciones sucesivas, sino que la fortaleció. Esto se observa en la afirmación RC3, en la que tiene frente a él dos soluciones a la tarea que resultan contradictorias entre sí. Raúl acepta sin conceder el argumento matemático propuesto por el investigador, pero apoya decididamente el suyo apelando a recursos extra-matemáticos (“nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger ésta”), siendo consistente con su anterior respuesta y complementando y reforzando esa postura. En su siguiente intervención afirma “Si quiero llevarme seis juegos entonces conviene más la tercer oferta” (RC4); no obstante, no parece tomar conciencia de la contradicción entre esa postura y la asumida por él, porque da la impresión de que no comprende lo que está en el fondo de la resolución que le propone el investigador, la que acepta por concesión y por tratarse de “un caso particular y específico” distinto al que él plantea. Hasta este momento la postura de Raúl parece inamovible; en él no hay incremento en el conocimiento ni generación de duda.

*José y Raúl.* A diferencia de la intervención del investigador, José puso el acento justo en la garantía inconveniente (RW2: A5O) que implícitamente asume Raúl, conforme a la cual él considera que puede comprar cualquier número de juegos; se enfoca también en los respaldos de Raúl (RBm3 y RBm4) que refuerzan su estrategia de adiciones sucesivas. José muestra que es capaz de cuestionar el procedimiento y los argumentos de Raúl, y muestra

también que ha escuchado atentamente a su compañero y que tiene la sensibilidad para entender sus argumentos: con su propuesta de utilizar el valor unitario como estrategia que respeta las relaciones de proporcionalidad (JW3, JBm3a) apunta hacia la garantía con la que Raúl sustenta su estrategia de resolución de tipo aditivo y cuando indica, entre otras cosas, que “no te van a dar nada gratis” (JBe3) apunta directamente hacia el respaldo extra-matemático de Raúl (RBe2).

A pesar de lo anterior, Raúl sigue empeñado en defender su postura y se niega a aceptar frente a su compañero que fue convencido; sin embargo, se infiere que en Raúl existen indicios de duda debido al contraste entre la manera en la que él sostiene la afirmación RC3 “yo sé que van a escoger ésta” (con cierta firmeza) y la forma de sustentar el argumento extra-matemático RC5, en el que utiliza “te convendría”, que es un mitigador del lenguaje que denota duda (Martínez y Rigo, 2014). Aunque Raúl entiende la parte matemática, está muy apegado a su respuesta y hace lo necesario, como pasar por encima de argumentos matemáticos y argüir razones extra-matemáticas, para soportar su respuesta. Sin embargo, este asomo de duda se convierte en conocimiento y seguramente en alta presunción cuando muestra, en su cuestionario final, una respuesta contundente en la que utiliza las estrategias que le explicó José: utiliza el valor unitario (retomando la garantía de José JW3a: R6VU) y compara porcentajes como lo hace su compañero en su intervención (JBm3b). Abandona además todas sus posturas retóricas y sus argumentos extra-matemáticos, centrándose sólo en los argumentos matemáticos. Lo anterior permite sugerir un posible cambio de estado epistémico a raíz del cambio de estrategia con la que se le cuestionan sus afirmaciones, garantías y respaldos.

*José.* En José también se observa una evolución. Él pasa de una resolución basada en Building up (con error) y descarte de ofertas por comparación de porcentajes, a una del tipo de valor unitario que utiliza al tomar la decisión de afrontar el reto que Raúl le plantea. En ese sentido, se considera que la explicación de Raúl es un detonador importante en este proceso de trabajo matemático. Aunque en su cuestionario final José regresa a la estrategia Building Up, su comprensión de las posibles resoluciones de este tipo de tarea de comparación de razones queda al descubierto cuando opta por una estrategia que no deja lugar a dudas para tratar de convencer a su compañero.

*Consideraciones sobre la interacción.* Lo antes dicho deja ver que la interacción de José (en relación a Raúl) es de tipo productivo, que la de Raúl (en relación a José) resultó un detonador y que la del investigador es neutral. Como se puede colegir de los datos empíricos antes expuestos, en la interacción de tipo productivo se presentan las siguientes condiciones: Raúl (R) incluyó en su planteamiento algo que para José (J) representó un reto; R puso en duda su planteamiento en algún momento; J se interesó por asumir el reto de convencer a R; y de manera muy relevante y significativa, J puede identificar las garantías y los respaldos en los que el R soporta su argumento, y contra-argumentar en consecuencia; finalmente, R utiliza los procedimientos explicados por su compañero para resolver una tarea similar.

En relación al *account* que vivencia José se puede decir que es de tipo completo, ya que él se convence a sí mismo y convence a su compañero de que su procedimiento de resolución es el más adecuado para resolver este tipo de tareas, al tiempo que incrementa su comprensión y la de su compañero, ya que Raúl, como se vio, utiliza los procedimientos de José en el cuestionario final. Con todo ello, José no sólo muestra que es capaz de utilizar el

lenguaje matemático de su compañero y también el coloquial. Revela que en el fondo, José es sensible a las dificultades que en el ámbito matemático exhibe su compañero, relacionadas con el tema de la comparación de razones que se pone en juego al resolver la tarea, y que es sensible también a ciertas necesidades afectivas de Raúl. A esa sensibilidad que un alumno muestra hacia el otro, en la que se complementa lo disciplinar con lo afectivo, en este documento se denomina ‘empatía matemática’.

### **RESULTADOS: CARACTERÍSTICAS NOTABLES PARA UNA INTERACCIÓN PRODUCTIVA**

A partir de los datos empíricos recabados y del análisis del caso aquí expuesto, se sugiere que una interacción entre dos estudiantes A y B es productiva si se presentan las ‘características notables’ que a continuación se describen:

- Que B exponga argumentos que representen un reto para A.
- Que A escuche, entienda y se ponga en el lugar de B, comprometiéndose a superar el reto que le presenta su compañero.
- Que a partir de lo anterior, A sea capaz de identificarlas garantías y los respaldos sobre los cuales B sostiene sus argumentos y los refute sin dejar lugar a dudas.
- Que B escuche y entienda a su compañero y, en ese proceso, incremente su comprensión y cambie su convencimiento y que dé muestras de ello, utilizando alguno(s) argumentos que le ha explicado A.
- Que a partir de una actitud de empatía matemática, uno de los participantes (A) obtenga *account* completo, es decir, que en el proceso de tratar de convencer y de incrementar la comprensión del otro (B) se incremente su propia comprensión y su convencimiento.

### **CONSIDERACIONES FINALES**

Sobre los resultados de un trabajo previo, en el que se desvelan las características de las resoluciones de alumnos de 14 y 15 años de edad sobre una tarea de comparación de razones, y siguiendo los principios de la teoría fundamentada, la presente investigación hace una propuesta para identificar, definir y sistematizar características notables que hacen que un proceso de interacción, en el que dos alumnos intercambian resoluciones de dicha tarea, resulte productivo, neutral o no productivo, así como identificar, re-definir y caracterizar los procesos denominados *account* y *empatía matemática*. Como se ha visto a lo largo de este escrito, estas categorías teóricas permiten avanzar algunas explicaciones posibles sobre un fenómeno interesante en la didáctica de las matemáticas, pero poco aclarado en la literatura, relacionado con el éxito (o fracaso) de las interacciones entre pares; estas categorías permiten también sugerir una serie de estrategias, dirigidas al profesor, para promover interacciones provechosas entre sus alumnos. Sin duda, los procesos socio-educativos aquí estudiados resultan opciones muy ricas y propicias para el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, es importante considerar los diversos pormenores que se pueden presentar, ya que no son una alternativa que garantiza el éxito. Entre otras cosas, los docentes deben de tener ‘sensibilidad matemática’ para identificar los componentes de los argumentos de los alumnos, pero también una ‘sensibilidad emocional’ para identificar y promover actitudes de empatía matemática entre ellos.

## REFERENCIAS

- Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research. Techniques and procedures for development Grounded Theory. 4e*. Los Angeles: Sage.
- Fernández Lajusticia, A. (2009). *Razón y Proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*, Valencia, España: Universitat de Valencia, Departament de Didàctica de la Matemàtica.
- Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González; M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.
- Gómez, B., Monje, J., Pérez-Tyteca, P y Rigo, M. (2013). Performance on ratio in realistic discount task. In B. Ubuz, Ç. Haser& M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 293-302).
- Goos, M., Galbraith, P. & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics* 49, (pp. 193-223).
- Krummheuer G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. NJ: Lawrence Erlbaum.
- Martínez, B., Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca: SEIEM
- Pinochet, J. (2015). El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada. *Ciência & Educação, Bauru*, 21(2), 307-327.
- Smith, T. (2015). Peer Interaction. *Research Starters: Education (Online Edition)*. Recuperado de: <<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=ers&AN=89164361&lang=es&site=eds-live>>.
- Stacey, K. (1992) Mathematical Problem Solving in Groups: Are Two Heads Better Than One? *The Journal of Mathematical Behavior*, 11(3) 261-275
- Topping, K. (2005). Trends in Peer Learning. *Educational Psychology*, 25(6). 631-645
- Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.