



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA**

“Dificultades con el concepto de variable como incógnita. Un estudio comparativo con alumnos mexicanos e italianos de primero y tercero de secundaria”

Tesis que presenta

Jorge Gómez Méndez

Para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Matemática Educativa

Directores de la Tesis:

Dra. Sonia Ursini Legovich

Dr. Ulises Xolocotzin Eligio

México, Distrito Federal

Mayo 2015



Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Maestría en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN

Becario: 488310

Agradecimientos

A la Dra. Sonia Ursini Legovich por darme la oportunidad de estar aquí, por su apoyo y paciencia

Al Mtro. Alfonso Vera por sus sugerencias matemáticas pero sobre todo por las no matemáticas

A mis compañeros de Tesis, fueron muchas risas, pero no suficientes

Al Dr. Ulises Xolocotzin Eligio por compartir sus conocimientos, su apoyo y paciencia

A todos los Doctores de Matemática Educativa por compartir sus conocimientos y experiencias

A mis amigos que de una u otra forma me ayudaron a concluir este proyecto

Dedicado a quienes recientemente se fueron.

“Jorgito”, “Nicha”, “Lupita” y “Pepe”

Nos volveremos a ver

*A quienes siguen conmigo y siempre están
pendientes de mí.*

Papá, Mamá y Hermanos

“Gómez”, “Guti”, “Fany y Fer”

RESUMEN	4
INTRODUCCIÓN	6
CAPÍTULO I	7
1 ANTECEDENTES	7
1.1 PRIMERAS INVESTIGACIONES	7
1.1.1. Concepciones y dificultades de la variable.....	9
1.1.2. Algunas propuestas que ayudan a mejorar la comprensión del concepto de variable. 14	
1.2 LA VARIABLE COMO INCÓGNITA.....	14
1.2.1 Algunas propuestas que ayudan a mejorar el concepto de variable como incógnita 20	
CAPÍTULO II	23
2 MARCO TEÓRICO.....	23
2.1 VARIABLE COMO INCÓGNITA.....	24
2.2 VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.....	24
2.3 VARIABLE EN UNA RELACIÓN FUNCIONAL.....	25
CAPÍTULO III	27
3 METODOLOGÍA.....	27
3.1 TIPO DE ESTUDIO.....	27
3.2 ESCENARIOS	28
3.3 PARTICIPANTES	32
3.4 EL INSTRUMENTO.....	32
3.5 DATOS.....	38
CAPÍTULO IV	39
4 ANÁLISIS CUANTITATIVO.....	39
4.1. PRIMER GRADO DE SECUNDARIA, MÉXICO	39
4.1.1 Simbolización de la incógnita	39
4.1.2 Determinación de la incógnita	40
4.1.3 Interpretación de la incógnita	41
4.2 TERCER GRADO DE SECUNDARIA, MÉXICO	42
4.2.1 Simbolización de la incógnita	42
4.2.2 Determinación de la incógnita	43

4.2.3	Interpretación de la incógnita	45
4.3	COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS CORRECTAS POR ÍTEM EN PRIMER Y TERCER GRADO DE SECUNDARIA	46
4.4	COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS INCORRECTAS POR ÍTEM EN PRIMERO Y TERCERO DE SECUNDARIA	48
4.5	COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS NO DADAS EN PRIMERO Y TERCERO DE SECUNDARIA	49
4.6	PRIMER GRADO DE SECUNDARIA, ITALIA	50
4.6.1	Simbolización de la incógnita	50
4.6.2	Determinación de la incógnita	51
4.6.3	Interpretación de la incógnita	52
4.7	TERCER GRADO DE SECUNDARIA, ITALIA	52
4.7.1	Simbolización de la incógnita	53
4.7.2	Determinación de la incógnita	54
4.7.3	Interpretación de la incógnita	55
4.8	COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS CORRECTAS EN PRIMERO Y TERCERO 56	
4.9	COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS INCORRECTAS EN PRIMERO Y TERCERO DE SECUNDARIA	58
4.10	COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS NO DADAS	59
4.11	ANÁLISIS COMPARATIVO MÉXICO E ITALIA	60
4.11.1	La incógnita en primer grado de secundaria en México e Italia	60
4.11.2	La incógnita en tercer grado de secundaria en México e Italia.	62
4.12	Aprendizaje del concepto de variable como incógnita a lo largo de la escuela secundaria. 63	
CAPÍTULO V	67
5	ANÁLISIS CUALITATIVO	67
5.1	SIMBOLIZACIÓN	67
5.1.1	Ítem 1.a primero de secundaria México e Italia	67
5.1.2	Ítem 1.a tercero de secundaria México e Italia.....	69
5.1.3	Ítem 1.b primero de secundaria México e Italia	70
5.1.4	Ítem 1.b tercero de secundaria México e Italia	72
5.1.5	Ítem 15.b primero de secundaria México e Italia	76
5.1.6	Ítem 15.b tercero de secundaria México e Italia	78
5.2	DETERMINACIÓN DE LA INCÓGNITA	81

5.2.1	Ítem 3.a primero de secundaria México e Italia	81
5.2.2	Ítem 3.a tercero de secundaria México e Italia.....	83
5.2.3	Ítem 3.b primero de secundaria México e Italia	85
5.2.4	Ítem 3.b tercero de secundaria México e Italia	87
5.2.5	Ítem 3.c primero de secundaria México e Italia.....	89
5.2.6	Ítem 3.c tercero de secundaria México e Italia	91
5.3	INTERPRETACIÓN	94
5.3.1	Ítem 4.b primero de secundaria México e Italia	94
5.3.2	Ítem 4.b tercero de secundaria México e Italia	96
5.3.3	Ítem 4.h primero de secundaria México e Italia	97
5.3.4	Ítem 4.h tercero de secundaria México e Italia	99
CONCLUSIONES		101
Bibliografía		109
ANEXO I		111
Cuestionario Algebraico De Ursini Y Trigueros Para Alumnos De Secundaria		111

RESUMEN

En matemática educativa muchas investigaciones han indagado acerca del concepto de variable algebraica, algunas sugieren que la variable en el álgebra elemental tiene tres usos: incógnita, número general y variable en relación funcional; además que es un concepto polisémico, que el éxito en la comprensión de este concepto se logra cuando se es capaz de pasar de uno a otro uso de manera flexible y difícilmente un uso de la variable puede presentarse de manera aislada en una actividad algebraica. Esta investigación se propone analizar y comparar, cuantitativa y cualitativamente, las dificultades y logros que tienen alumnos de primero y tercero de secundaria de dos sectores socioculturales distintos para trabajar con el concepto de variable como incógnita. Además se discute si el currículo escolar influye en la manera en que los alumnos trabajan este concepto. Los resultados muestran que la mayoría de los alumnos de primero de secundaria tienen dificultades para simbolizar, determinar e interpretar la variable como incógnita. Mientras que las dificultades presentadas por la mayoría de alumnos de tercero de secundaria, se centran más en la manipulación de la variable y la interpretación de la incógnita. Así mismo, muchos alumnos de tercero demuestran ser capaces de simbolizar una ecuación sencilla y determinar la incógnita de ecuaciones de un paso.

Palabras clave: Incógnita, Modelo 3UV, simbolización, determinación, interpretación.

ABSTRACT

In mathematical educational many researches have investigated about the algebra variable concept, some suggest that the variable in the elementary algebra has three uses: unknown, general number and variable in functional relationship; Also it is a polysemic concept, that success in the understanding of an achieved concept being capable to be different as other flexible way and hardly the variable use can come forward in an isolated activity algebraic way. This research aims to analyze and compare, quantitatively and qualitatively, the difficulties and achievements that students of first and third grade of two different socio-cultural sectors have to work with an unknown variable concept. Although the scholar curriculum contrasts influence in the way which students work with this concept. The outcome shows that many students of first grade have trouble to symbolize, to determine

and perform the variable as unknown. While the third grade troubles and difficulties students are presented, they focus more on the manipulation of the variable unknown interpretation. Likewise, many third grade students prove to be capable to symbolize a simple equation and determine the one-step unknown equations.

Keywords: Unknown, 3UV Model, Symbolization, determination, interpretation.

INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo se plantea el problema de analizar y comparar la capacidad y dificultades que tienen alumnos de primero y tercero de secundaria de contextos socioculturales diferentes para trabajar con la variable como incógnita. En el estudio participaron 405 estudiantes de primero y tercero de secundaria, de los cuales 191 son mexicanos: 99 de primero y 92 de tercero; mientras que 214 son estudiantes italianos: 96 de primero y 118 de tercero. A los participantes de este estudio se les aplicó un cuestionario algebraico que consta de 47 ítems, de los cuales 8 miden la capacidad para trabajar con el concepto de variable como incógnita, 16 miden la capacidad para trabajar con la variable como número general y 23 miden la capacidad para trabajar con variables en relación funcional. Los 8 ítems de incógnita que se analizan en este estudio han sido organizados de acuerdo a la actividad a realizar: simbolizar (3 ítems), determinar (3 ítems) e interpretar (2 ítems) la incógnita.

El estudio sigue una metodología mixta, se analizan porcentajes de respuesta correcta, incorrecta y respuesta no dada. También se realizan test Chi-Cuadrada para identificar diferencias estadísticamente significativas entre los grados de cada población. Así mismo se analizan las producciones de los estudiantes y se comparan las respuestas entre grados y países. Además se discute si las capacidades y dificultades que tienen los alumnos que participaron en este estudio, están dadas por la enseñanza y/o el currículo escolar.

CAPÍTULO I

1 ANTECEDENTES

1.1 PRIMERAS INVESTIGACIONES

Revisar las múltiples investigaciones que se han realizado en torno al álgebra es una labor muy interesante, como lo es también puntualizar y detenernos en algunos conceptos claves que de esta disciplina surgen, uno de ellos es el del uso de la literal en el álgebra o como se le suele llamar en la actualidad, variable algebraica.

Dentro de la matemática educativa no han sido pocas las investigaciones enfocadas al álgebra, en particular, a las dificultades que surgen de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina. Muchas de estas investigaciones se han centrado en la interpretación que hacen los diferentes actores escolares del concepto de variable algebraica. A lo largo del tiempo los investigadores han identificado y categorizado errores con la interpretación, la manipulación, el uso, procedimientos y otros aspectos que surgen al observar y analizar el trabajo de estudiantes y profesores. Del mismo modo, han catalogado los usos que la variable puede tener según el contexto matemático en el que se encuentra.

Desde fines de los años 70's ha habido investigadores que evidencian las dificultades en la interpretación de la variable algebraica, en los errores que cometen los estudiantes de diversos niveles escolares y/o profesores que imparten cursos que involucren álgebra. Esto ha dado paso a otras investigaciones, que toman como referente principal, la multiplicidad de resultados que han dejado estas primeras investigaciones.

Uno de los trabajos básicos que refieren la gran mayoría de las investigaciones ha sido el de Küchemann (1978). Este investigador da cuenta de los errores que presentan los alumnos con la interpretación de las literales en álgebra. Identificó distintos significados que los estudiantes le daban a las letras y la pertinencia de ello. Clasificó seis usos de la variable:

- Letra evaluada: los alumnos asignan un valor específico a la letra.
- Letra no usada: los estudiantes ignoran la literal o la toman en cuenta sin darle algún significado.

- Letra como objeto: los estudiantes interpretan a letra como abreviaturas de una palabra o como un objeto en sí.
- Letra como incógnita específica: la letra es considerada como un número desconocido pero específico y pueden operar con ella.
- Letra como número general: se ve a la letra como la representación de distintos valores.
- Letra como variable: la letra representa un rango no especificado de valores y se percibe la existencia de una relación entre conjuntos de valores.

Con esto, Küchemann elabora uno de los primeros panoramas que permiten nombrar o clasificar los usos de las literales, según los resultados recabados en su investigación.

En los primeros años de la década siguiente, Wagner (1983) menciona dos características fundamentales de las letras.

- Los símbolos literales son como los números, sólo que éstos son diferentes.
- Los símbolos literales son como las palabras, sólo que éstas son diferentes.

Wagner señala las similitudes existentes entre literales y números, también, entre literales y palabras. Para el primer caso, hace notar que ambos aparecen en enunciados propios de la matemática, además que las literales son necesarias para simbolizar números que no tienen una representación numérica. Para el segundo caso, señala que su similitud principal es que pueden interpretarse como abreviaturas de objetos, tal y como lo identifica Kücheman en su clasificación.

Booth (1988) en su investigación identificó cuatro tendencias que los estudiantes manifiestan al resolver tareas algebraicas y las nombra de la siguiente manera:

- La orientación de la actividad algebraica y la naturaleza de las respuestas: los estudiantes no aceptan como respuesta una expresión general y procuran en todo momento obtener una respuesta meramente numérica.
- Uso de la notación y convenciones en álgebra: Las ideas aritméticas que tienen sentido para los estudiantes las trasladan al terreno algebraico.

- El significado de las letras y las variables: al igual que Kücheman, Booth, nota que muchos estudiantes se refieren a las letras como abreviaciones de palabras.
- Los métodos usados en aritmética: llevan al terreno algebraico los métodos aritméticos.

Dentro de sus resultados destaca la tendencia de los niños a interpretar las letras sólo como la representación de valores específicos, lo que considera una consecuencia de su preferencia aritmética y no algebraica para resolver problemas.

1.1.1. Concepciones y dificultades de la variable

Las investigaciones en torno a la variable algebraica no sólo giran alrededor de la complejidad en su interpretación o en la manera de usarlas para resolver una tarea algebraica. Algunos investigadores han dirigido sus esfuerzos en diferenciar y explicar los diferentes usos de la variable y las características propias de cada uso. Muchas de estas investigaciones, surgidas de analizar dificultades y errores, han concebido la variable como un concepto multifacético.

Quizás uno de los aspectos más importantes del álgebra es la idea misma de variable. Usiskin (1988) relaciona distintas concepciones del álgebra con distintos usos de la variable. Su idea principal se basa en que los propósitos que se tienen para la enseñanza del álgebra, las concepciones que se tienen de la disciplina y los usos de las variables están estrechamente relacionados. Distingue cuatro concepciones y usos respectivos de la variable.

CONCEPCIONES DEL ALGEBRA	USO DE LA VARIABLE
Aritmética Generalizada	Generalización de patrones (traducir y generalizar)
Medio para Resolver Ciertos Problemas	Incógnitas, Constantes (Resolver y simplificar)
Estudio de Relaciones	Argumentos, Parámetros (Relación, Gráfica)
Estudio de Estructuras	Marcas Arbitrarias en Papel (Manipula, Justifica)

Tabla 1 Concepciones del álgebra y sus respectivos usos de la variable. Usiskin (1988)

Usiskin deja ver de manera clara las diferentes interpretaciones de las literales, clasificándolas de tal manera, que para cada concepción del álgebra, existe un uso de la variable y características esenciales que distinguen entre un uso y otro. Después de esta

diferenciación Usiskin deja claro que todos estos usos pueden intervenir de acuerdo a la instrucción de un problema, de allí la necesidad de que los estudiantes puedan pasar con flexibilidad entre ellos.

Kieran (1991) dice que en las primeras enseñanzas del álgebra elemental, el uso de las letras para representar un rango de valores es un tanto dejado de lado, en comparación de cuando se representan incógnitas, pues afirma que los estudiantes cuentan con poca experiencia para producir expresiones algebraicas que representen relaciones generales.

Philipp (1992) menciona que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes con las variables, radican en la incapacidad de reconocerlas y diferenciarlas en la actividad a realizar. El investigador enlista siete diferentes usos de las letras dentro del álgebra escolar.

Algunos diferentes usos de los símbolos literales	
Etiquetas	f, y en $3f = 1y$ [3 pies (feet) en 1 yarda (yard)]
Constantes	π, e, c
Incógnitas	x en $5x - 9 = 91$
Número generalizado	a, b en $a + b = b + a$
Cantidades variables	x, y en $y = 9x - 2$
Parámetros	m, b en $y = mx + b$
Símbolos abstractos	e, x en $e * x = x$

Tabla 2 Algunos usos de la variable identificados por Philipp (1992)

Por su parte, Ursini, Trigueros, Reyes y Quintero (1996) diseñaron un cuestionario que ponía énfasis en tres usos de la variable que aparecen en la enseñanza del álgebra elemental:

- a) Incógnita.
- b) Número general.
- c) Relación funcional.

Para cada uno de estos usos incluyeron ítems que permitían observar si los estudiantes:

- Interpretaban correctamente la variable involucrada;
- Tenían la capacidad para simbolizar una situación en la que aparecía cierta caracterización de la variable;

- Eran capaces de manipular las variables que aparecían en una expresión.

Tanto Usiskin como Ursini et al, concluyen que la variable adopta distintos roles y que estos están estrechamente relacionados con la tarea a realizar. También dicen para cada uso de la variable se requiere de la capacidad de simbolizar, manipular y/o interpretarla.

En México ha habido investigaciones relacionadas con la comprensión de la variable algebraica, éstas, ponen en evidencia dificultades con la capacidad de simbolizar, manipular e interpretar las literales. (Ursini y Trigueros 1998, 2001, 2003, 2006; Ursini 1994, 1996, 2001).

Ursini y Trigueros (2001) en su estudio dan cuenta de lo siguiente:

- El concepto de variable aparece en cualquier rama de las matemáticas pero su versatilidad hace que este concepto sea muy difícil de ser dominado por los estudiantes.
- Los diferentes usos del concepto de variable son la base de las dificultades que los estudiantes enfrentan cuando tratan de aprender álgebra.
- La posibilidad de integrar una gama de ideas afines en un solo concepto, con un nombre específico, puede ayudar a los estudiantes a enfocar su atención en él, manipularlo y utilizarlo más fácilmente en diversas aplicaciones.

Ursini y Trigueros (2006) llevan a cabo un estudio comparativo entre alumnos de escuela secundaria y estudiantes universitarios, algunos de recién ingreso y otros cursando el 5° semestre de la licenciatura en las carreras de economía e ingeniería. Una de las conclusiones a las que llegan, es que si bien hay una mejor comprensión de la variable entre los universitarios, ésta no es satisfactoria. Señalan que cuando los problemas son sencillos, los estudiantes son capaces de trabajar con los distintos usos de la variable, especialmente con el número general y la incógnita. También, son capaces de pasar flexiblemente de uno a otro uso de la variable al resolver problemas. Sin embargo, cuando los problemas son algo más complejos y requieren de la simbolización, muchos estudiantes universitarios siguen prefiriendo procedimientos aritméticos en lugar de utilizar el álgebra.

Existen errores en la comprensión de la variable de diversa naturaleza, estos han sido identificados en la manipulación y en la interpretación de la variable algebraica.

Socas (2011) identifica dificultades relacionadas con los procedimientos orientados a la utilización de distintos lenguajes (aritmético y algebraico). Estas dificultades se resumen en:

- Interpretar y utilizar diferentes lenguajes: numérico, gráfico, algebraico.
- Simbolizar mediante letras, números conocidos, desconocidos, etc.
- Expresar algebraicamente enunciados de problemas.
- Simbolizar relaciones mediante ecuaciones y fórmulas.
- Desarrollar y sintetizar expresiones literales sencillas.
- Resolver por métodos numéricos y gráficos ecuaciones de primer y segundo grado, sistemas lineales con dos incógnitas e interpretar las posibles soluciones.
- Realizar operaciones sencillas con expresiones literales para el manejo de funciones, ecuaciones y fórmulas.
- Utilizar del razonamiento aritmético para, dada una operación u operaciones, establecer el enunciado de una situación problemática.

Por su parte, Castellanos y Obando (2009) dicen que cuando los alumnos interpretan letras representando números, existe una tendencia a considerar las letras como valores únicos y específicos más que como números generalizados o como variables (estos investigadores usan el término variable para la relación en correspondencia que existe entre magnitudes).

Los investigadores indican que muchos alumnos cometen errores en la solución de problemas algebraicos y destacan los siguientes:

- Errores del álgebra que tienen origen en la Aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.
- Errores de procedimiento. Los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento.

- Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo “=” en álgebra y la sustitución algebraica.

En la instrucción matemática se dedica mucho tiempo en solucionar tareas que implican el manejo de diversas situaciones algebraicas. Los cursos en educación básica por lo regular están cargados de contenido algebraico con tareas que requieren simbolizar, manipular, reconocer e interpretar la variable. Mientras en los cursos de educación media, el currículo exige el paso de los estudiantes por al menos un año de instrucción algebraica. Las carreras universitarias no escapan de cursos que requieren de un nivel más avanzado de educación matemática, tal es el caso de las ingenierías y algunas licenciaturas que demandan cursos propedéuticos de álgebra como requisito de ingreso. No obstante la carga de esta disciplina a lo largo de la educación, se manifiesta aún en todos los niveles educativos dificultades importantes al trabajar con la variable.

Hablar de la variable no es sencillo, pues este término se refiere a un concepto polisémico. Muchos investigadores atribuyen a la variable una diversidad de usos y aspectos. Ursini et al (2005) afirman que la variable se usa de tres maneras dentro del álgebra elemental: como número general, incógnita y en relación funcional. Destacan la complejidad de este concepto para estudiantes de diferentes niveles educativos. Subrayan la necesidad de prestar particular atención en la enseñanza a lo multifacético de este concepto, así como propiciar la distinción entre cada uno de sus usos y la flexibilidad para pasar de uno a otro.

En el álgebra, la variable también aparece como parámetro, un uso que resaltan autores como Furinghetti (1994) desligándolo del número general. Sin embargo, de acuerdo a Ursini (2004) y Ursini et al (2005) los parámetros que aparecen en ecuaciones por ejemplo $x^2 + 6ax - 2 = 0$ son finalmente números generales, de tal manera, son considerados y comprendidos por las investigadoras, dentro de los usos de variable del álgebra elemental como un número general, además, según el contexto, los parámetros pueden asumir el rol de incógnita o también como variable en relación funcional.

No todas las investigaciones giran en torno a la conceptualización o dificultades de la variable, algunas de ellas, también han sido dirigidas a proponer soluciones específicas para problemas específicos de este concepto multifacético. A continuación, se mencionan algunas.

1.1.2. Algunas propuestas que ayudan a mejorar la comprensión del concepto de variable.

Puig y Cerdán (1990) dicen que en el proceso de resolución de un problema verbal ya sea aritmético o algebraico, la fase más importante es la traducción del enunciado a la expresión analítica que proporcione la solución del problema. Para ello proponen la regla de análisis-síntesis, porque conduce a un proceso de simbolización de naturaleza aritmética, que puede acercarse al álgebra siempre que existan transformaciones de significado similares a las que se producen en el lenguaje algebraico, pues dicen, no puede pensarse en una separación clara entre lo aritmético y lo algebraico.

Por su parte, Ursini et al (2005) proponen una enseñanza del álgebra asociada al *Modelo 3UV* (Tres usos de la variable). Esta enseñanza debe ser en espiral, que involucre actividades diferenciadoras e integradoras continuamente con el propósito de acercarse gradualmente a los estudiantes a trabajar con los tres usos de la variable en situaciones que vayan tornándose cada vez más complejas.

Hasta ahora, se ha presentado un panorama general en torno a la variable y las dificultades asociadas a este concepto. Sin embargo, nos interesa profundizar sobre el uso de la variable como incógnita. Este uso ha sido parte y foco de muchas investigaciones que muestran dificultades al simbolizar, manipular, interpretar e identificar la incógnita (Trigueros y Ursini 1999, 2003; Ursini y Trigueros 2006). También se han propuesto modelos para su enseñanza (Puig y Cerdán 1990; Ursini, Trigueros, Escareño y Montes 2005; Ursini y Rojano 2005; Ursini 2006), como veremos con más detalle en el siguiente apartado.

1.2 LA VARIABLE COMO INCÓGNITA

Uno de los conceptos del álgebra que mayor peso ha tenido en el currículo es la idea de incógnita. A pesar de ello siguen existiendo dificultades en la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Kieran (1979) examina las formas en que los estudiantes piensan y entienden los conceptos involucrados en un esquema de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita. La investigadora concluye de manera general que en la construcción del concepto de ecuación influyen dos factores, el intuitivo y el operacional. En el factor intuitivo, muchos estudiantes manifiestan respuestas espontáneas como consecuencia de la percepción general que tienen del problema. En el factor operacional encontró, que los estudiantes estaban acostumbrados a expresar la operación del lado izquierdo y el resultado del lado derecho del signo igual. Por otra parte, menciona que en las construcciones explícitamente algebraicas de los estudiantes existen conocimientos aritméticos, pues para ellos, hay una relación entre aritmética y álgebra, de tal manera, los alumnos hacen que los conceptos algebraicos sean más concretos, dan significado a las ecuaciones y, por tanto, no manipulan símbolos carentes de sentido para ellos, pues los alumnos consideran las normas derivadas de operar en aritmética como válidas para las operaciones algebraicas.

Ursini (1990) analiza la interpretación y simbolización que estudiantes de primer grado de secundaria hacen de las letras, dice que a pesar de que ningún alumno contaba con instrucción algebraica previa, la mayoría de ellos contaba con nociones acerca de las letras en el álgebra y tendían a considerarlas como incógnitas. Algunos de los resultados de su investigación muestran que los estudiantes:

- No traducían al lenguaje algebraico los enunciados verbales y daban como respuesta un número.
- En el mejor de los casos daban como respuesta sólo una letra.
- Fueron capaces de simbolizar ecuaciones simples que implicaban la representación de una multiplicación o una suma de un número con la letra.
- Asignan diferentes valores a una misma letra cuando ésta aparece más de una vez en la ecuación.

Kieran (1991) explora con estudiantes iniciales en el estudio del álgebra, el significado que éstos le dan a las letras en las ecuaciones. Para ello, a los estudiantes se les enseñó a resolver ecuaciones mediante la realización de la misma operación en ambos miembros de la igualdad. Encontró que los alumnos que ya habían tenido acercamiento con otros métodos de resolución de ecuaciones, presentaron dificultades para darle sentido al

procedimiento de operar en ambos miembros de la ecuación. También encontró cuando se les pidió a los estudiantes que dijeran lo que significa la letra en ecuaciones como $5 + a = 12$ que la respuesta más común fue “*una respuesta*” (doce menos cinco es siete), menciona que los alumnos dieron esta respuesta porque no le dan significado a la letra y ven a la ecuación como la inversión de operaciones. Otros estudiantes dijeron que la letra debía de ser el número que se debe agregar al cinco para que el resultado sea doce, por tal motivo señala que estos estudiantes entienden una ecuación como la secuencia de operaciones que va de izquierda a derecha.

Philipp (1992) resalta que muchos alumnos al enfrentarse con expresiones algebraicas que requieren sólo de ser simplificadas, tienden a interpretar las letras como incógnitas y resolverlas como si fueran ecuaciones, por ejemplo, si a los estudiantes se les pide que simplifiquen la expresión $3x + 5x - 24$, ellos crean una ecuación que les permita encontrar el valor de la variable realizando lo siguiente: $3x + 5x - 24 = 0$ y por tanto dan como respuesta $x = 3$. El investigador dice que los estudiantes no son conscientes de que la expresión se trata de un número general y en todo momento tienen la certeza de que se trata de una ecuación a espera de ser resuelta.

Filloy, Rojano y Solares (2004) identifican algunas dificultades que los estudiantes al iniciar el aprendizaje del álgebra manifiestan frente a la igualdad entre “*cosas desconocidas*”.

Los investigadores dicen que cuando los estudiantes por primera vez tienen que lidiar con problemas y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, aún sus nociones más abstractas pueden implicar interpretaciones con un referente concreto.

En sus conclusiones sugieren que para superar dificultades en el tratamiento de problemas y ecuaciones que presentan incógnitas en ambos miembros de la igualdad, surge la necesidad de reelaboración de:

- La noción de incógnita matemática.
- La noción de igualdad algebraica y,
- La noción de la representación algebraica de la incógnita.

Por su parte, Ursini y Trigueros (2006) en un estudio con estudiantes de educación básica y universitarios, encontraron que poco más del 50% de los estudiantes son capaces de identificar la incógnita cuando aparece en problemas sencillos, mientras que muy pocos estudiantes universitarios la reconocían en problemas un poco más complejos cuando no se precisaba de manera explícita la existencia de la incógnita. Encontraron también que a pesar de que los estudiantes de los diferentes niveles educativos son capaces de identificar la incógnita, no todos son capaces de determinarla y los que lo hacen, por lo regular recurren a métodos aritméticos para encontrar su valor.

Estos resultados muestran que los problemas con este concepto algebraico no son exclusivos de un nivel educativo y que a pesar de la instrucción matemática, muchos estudiantes presentan dificultades similares en distintos niveles educativos.

Filloy, Puig y Rojano (2008) en el estudio "*Operación de la Incógnita*" dicen que en los procedimientos personales de los alumnos para resolver ecuaciones está implícita la capacidad de manipular algebraicamente los elementos de una ecuación. Para identificar lo anterior, estos investigadores utilizaron dos modelos de enseñanza de ecuaciones, uno geométrico y otro de balanzas. Algunos de sus resultados mostraron que en ambos modelos, cuando los alumnos simplificaban las ecuaciones evitaban operar con la incógnita.

Castellanos y Obando (2009) dicen que muchos de los errores que presentan los alumnos al operar con la incógnita se hacen evidentes en la resolución de ecuaciones. Los errores se dan, por ejemplo, en efectuar operaciones en el primer miembro de la ecuación sin modificar el segundo. Consideran que este error es debido a que los estudiantes pierden el sentido de equilibrio entre ambos miembros de la ecuación. Los investigadores encontraron los siguientes errores:

- Datos mal utilizados.
- Interpretación incorrecta del lenguaje.
- Empleo incorrecto de propiedades y definiciones.
- Errores al operar algebraicamente.
- No verificación de resultados parciales o totales.
- Errores Lógicos.

- Errores técnicos.

Por su parte, García (2010) elaboró y aplicó un test enfocado al uso de la incógnita; en su test hace énfasis en los siguientes puntos.

- Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.
- Aplicación de reglas de operaciones algebraicas.
- Desarrollo de reglas de productos notables.
- Factorización de expresiones algebraicas.
- Resolución de inecuaciones lineales.

Algunos de los errores que encuentra después de la aplicación del test y el respectivo análisis de las producciones son:

- Eliminación incorrecta de denominadores.
- Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas.
- Procedimiento inconcluso.
- Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas.
- Aplicación parcial de reglas.
- Asociación incorrecta de productos notables.

Si bien el investigador hace énfasis en la variable como incógnita, al parecer considera que esta interpretación de la variable permanece aislada de los otros usos, lo cual podría ser una visión limitada de este uso de la variable, pues para operar la variable (factorización, reducción a términos semejantes, etc.) se requiere al menos de manipularla, por tanto, la variable tendría que ser vista de manera flexible también como número general, como lo sugiere Ursini et al (2005).

Las investigaciones en general, no sólo giran alrededor de los estudiantes de los diferentes niveles educativos, otro de los actores escolares principales de la enseñanza son los profesores, quienes no han dejado de ser sujetos de estudio. Se puede suponer que parte de las dificultades que tienen los estudiantes en sus clases de álgebra con el concepto de variable como incógnita puedan emerger de la idea misma que tiene el profesor sobre este concepto, pues las concepciones del profesor son transmitidas a sus alumnos y si el profesor

tiene una idea no muy clara sobre este concepto algebraico, los alumnos heredarán por consecuencia las dificultades.

Juárez (2011) aplicó un cuestionario de álgebra elemental a 74 profesores de matemáticas de escuela secundaria. La investigación da cuenta de las dificultades que presentan los profesores cuando se enfrentan a problemas que involucran a la variable en sus diferentes usos. En relación al uso de la variable como incógnita los resultados dicen que los profesores muestran:

- Dificultad para determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas.
- Dificultad para determinar los valores de la incógnita, pues sólo consideraron el valor positivo y descartan cualquier posibilidad de un valor negativo para el caso de una ecuación de segundo grado.
- Una tendencia a resolver el problema mediante procedimientos aritméticos y a evitar plantear la ecuación.
- Dificultad para plantear una ecuación que resuelve el problema.

Los resultados de esta investigación muestran que los profesores tienden a utilizar procedimientos aritméticos para resolver problemas algebraicos, presentan dificultades para interpretar a la incógnita y simbolizarla en una ecuación.

Juárez (2011) concluye respecto a la incógnita lo siguiente:

Cabe señalar, sin embargo, que a este uso de la variable se le da el mayor énfasis a lo largo de la enseñanza secundaria, pero por lo general se observan dificultades con este aspecto, debido quizá a que dicha manipulación se realiza sin sentido y significado para el que aprende. (p. 101)

Las dificultades en el estudio del concepto de variable y su uso como incógnita no son exclusivas de un contexto o población específica, pareciera ser un problema universal. En un estudio realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria, con el objetivo de conocer el concepto de raíz y de variables polinómicas de segundo grado. Ochoviet y Octac (2011) presentan los siguientes resultados:

- Pese a que los estudiantes conocen la propiedad del producto nulo, no reconocen en ecuaciones específicas su aplicabilidad.

- Error de los estudiantes cuando verifican las raíces de una ecuación que consiste en la sustitución simultánea de la incógnita por dos valores distintos.

Muchas de las investigaciones que reportan dificultades de estudiantes y profesores para trabajar con el concepto de variable como incógnita han servido de base para realizar propuestas que ayuden a los distintos actores escolares a superarlas. A continuación, se presentan algunas de estas investigaciones.

1.2.1 Algunas propuestas que ayudan a mejorar el concepto de variable como incógnita

Puig & Cerdán (1990) bajo un modelo para solucionar problemas verbales de varias operaciones combinadas (PAVOC) proponen la regla de “análisis-síntesis”. Los investigadores sugieren este modelo para resolver problemas verbales en los que habrá de determinar uno o más valores desconocidos que pueden calcularse mediante los datos explícitos o implícitos del problema.

La parte fundamental de la regla consiste en suponer como conocida la incógnita del problema. Es decir, si x es la incógnita del problema supóngase que se conoce. Averiguar dentro del problema, cuáles son los datos (no necesariamente numéricos) que originan la incógnita y que permiten que ésta pueda calcularse. Considerar cada uno de estos datos como incógnitas auxiliares. Repetir este proceso hasta que: todos los datos queden explícitos en el problema y posteriormente, trabajar en dirección contraria, es decir, desde los datos hasta la incógnita, de tal manera que ésta pueda determinarse. En caso de que alguna incógnita auxiliar entre en contradicción con los datos del problema, éste debe abandonarse pues no tiene solución mediante este procedimiento. El paso de la incógnita a través de la búsqueda de incógnitas auxiliares hasta reducirlas a datos del problema es el análisis. El camino inverso: volver sobre los pasos para determinar la incógnita, es la síntesis.

López y López P. (2011) aplican un test, una intervención didáctica y un post test para analizar cómo los niños (10 años de edad) manipulan, interpretan y simbolizan la variable como incógnita y como número generalizado. Para ello utilizaron un grupo control y un grupo experimental, en sus resultados muestran lo siguiente:

- Los porcentajes de acierto del pre test al pos test aumentaron en el grupo control, aunque siguen manteniéndose por debajo del 10%, este porcentaje sugiere claras dificultades para identificar, manipular y simbolizar la incógnita.
- Los porcentajes de acierto del grupo experimental aumentaron de un 8.7% en el pre test a un 91% en el post test, lo que significa que la mayoría de los estudiantes son capaces de identificar, manipular y simbolizar la incógnita.

Las investigadoras sugieren que someter a los alumnos a una instrucción con características específicas y enfocadas a la identificación, manipulación y simbolización de la incógnita es pertinente para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que tienen con este concepto algebraico.

Ursini y Landa (1999); Filloy, Rojano y Rubio (2002) coinciden que el uso de la hoja de cálculo puede ayudar a los alumnos entre otras cosas a:

- Simbolizar un problema y lidiar con cantidades desconocidas.
- Tomar conciencia de un proceso en la resolución de problemas algebraicos.
- Dar significado a la expresión analítica que se utilice para representar la tarea algebraica en cuestión.

Con base en esta breve revisión de literatura se puede concluir que:

- La variable como incógnita se presenta en todos los niveles educativos.
- Los estudiantes de distintos niveles educativos, así como muchos profesores de secundaria tienen dificultades en la interpretación, manipulación y simbolización de la variable como incógnita, así como en la resolución de problemas que la involucran.
- Es necesario ahondar más en el tipo de particularidades de la variable como incógnita y diferenciarla de los otros usos de la variable, si bien esto no significa que pueda ser aislada.

Estas reflexiones pueden llevarnos a distintas preguntas, sin embargo y teniendo presente que las dificultades con este uso de la variable se manifiestan en diversos niveles educativos y diferentes culturas, induce a preguntar qué pasa con los primeros años escolares, dado que a nivel superior se siguen presentando dificultades similares a las encontradas en

los niveles básicos de educación. Pareciera entonces que los primeros acercamientos a este uso de la variable, pudieran ser los responsables de que las dificultades se arrastren hasta niveles superiores de educación. Surge entonces la necesidad de ahondar en el nivel básico de enseñanza y cuestionarnos sobre qué pasa con el aprendizaje de la incógnita, sin olvidar por otro lado, que este uso de la variable aparece en la enseñanza relacionado con otros usos, pues como ya se mencionó, la incógnita difícilmente aparece aislada, lo que requiere que el estudiante desarrolle la capacidad de pasar flexiblemente entre los distintos usos de la variable. Por ejemplo, necesita de la idea de número general para manipular la variable en problemas del tipo $ax + bx + c = dx + ex + f$ y darse cuenta que la x representa una incógnita.

Como se ha visto en esta revisión de literatura, desde la década de los 70's del siglo pasado hasta tiempos actuales ha habido estudios realizados en México y otros países enfocados al concepto de variable y en particular al concepto de incógnita. Todos mencionan una diversidad de errores y dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con la incógnita, sin embargo, por lo general los instrumentos que utilizan para detectarlos son distintos, lo que puede dificultar la comparación de los errores y las dificultades que puedan deberse a situaciones particulares de ciertas comunidades.

Han sido muy escasos los estudios enfocados al concepto de variable y en particular al de incógnita que hayan aplicado el mismo instrumento para la recolección de datos en grupos pertenecientes a distintas culturas. Quizá uno de ellos pudiera ser PISA (por sus siglas en inglés: Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos), sin embargo éste está destinado a medir diferentes situaciones en el ramo de las matemáticas. Esta situación nos lleva a plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipo de dificultades y logros en relación a la capacidad de trabajar con la variable como incógnita presentan alumnos de dos sectores socioculturales distintos?

En particular *¿Cuáles son estas diferencias y similitudes si nos enfocamos a estudiantes de primer y tercer grado de secundaria?*

CAPÍTULO II

2 MARCO TEÓRICO

La intención de esta investigación es ahondar en el análisis de las dificultades de los estudiantes de primer y tercer grado de secundaria de culturas diferentes cuando trabajan con la variable como incógnita. Nuestro interés está en determinar cuáles son los aspectos que causan mayores dificultades al trabajar con este uso de la variable, por ello consideramos oportuno utilizar el *Modelo 3UV* de Ursini et al (2005) ya que se trata de un instrumento teórico-metodológico útil para identificar y analizar los errores y posibles dificultades al trabajar con la variable algebraica.

El Modelo 3UV ha servido de guía en la elaboración de instrumentos diagnósticos, actividades, modelos de enseñanza, a modo de herramienta de análisis de las producciones de profesores y estudiantes de diferentes niveles educativos, así como de libros de texto y ha sido utilizado también como modelo para la investigación.

En el *Modelo 3UV* se diferencian tres usos de la variable que aparecen en el álgebra elemental: variable como incógnita, variable como número general y variable en una relación funcional. Se considera que el éxito en la conceptualización de la variable en cada uno de sus usos depende de capacidades específicas básicas, de manera general para la incógnita se enfocan en reconocer, interpretar, simbolizar, sustituir y determinar su valor; para el número general en reconocer patrones, simbolizar, interpretar el símbolo como la representación de un valor general indeterminado y manipularlo; en el caso de las variables en relación funcional en reconocer la correspondencia, determinar valores y rangos para la variable dependiente e independiente, reconocer variaciones de intervalo y finalmente expresar la relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica.

La comprensión del concepto de variable requiere de entender y manejar correctamente estos tres usos, así como pasar de uno a otro de forma flexible y conjuntarlos al mismo tiempo bajo el nombre genérico de “variable”. Si bien, en este trabajo queremos enfocarnos sobre todo en las dificultades que los alumnos pueden tener con el uso de la variable como incógnita, debemos insistir que este uso no aparece por lo general desligado tajantemente de los otros dos usos sino más bien, de acuerdo a las consideraciones del problema, este uso

puede estar relacionado con la variable como número general o bien dentro de una relación funcional. Es por ello que a continuación se describen los tres usos de la variable como se presentan en el *Modelo 3UV*.

2.1 VARIABLE COMO INCÓGNITA

Comprender este uso implica reconocer en una situación problemática la existencia de un número cuyo valor se desconoce pero que puede encontrarse tomando en cuenta la información ofrecida en la problemática; en ocasiones será necesario simbolizar el número que se desconoce para plantear una ecuación que sea equivalente a la situación problemática; posteriormente y mediante el empleo de algoritmos aritméticos y/o algebraicos resolver la ecuación y encontrar así el valor o valores que satisfagan la ecuación. Habrá que considerar que una vez obtenido el valor o los valores, estos deben ser sustituidos en la ecuación original para comprobar que el valor desconocido sea el correcto.

Ursini et al (2005) enlistan los siguientes aspectos específicos que considera el *Modelo 3UV* para la variable como incógnita:

11.- Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

12.- Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores desconocidos.

13.- Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

14.- Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

15.- Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

2.2 VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL

Comprender este uso implica reconocer patrones, deducir reglas, métodos generales y describirlos utilizando símbolos para representar generalidades entre sí. Los símbolos utilizados constituyen cantidades indeterminadas que no es necesario determinar. Dichas

simbolizaciones, según el contexto, habrá que manipularlas para obtener un resultado que tendrá que ser aceptado como tal sin la necesidad de determinarlo.

Ursini et al (2005) enlistan los siguientes aspectos específicos que considera el *Modelo 3UV* para la variable como número general:

G1.- Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2.- Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3.- Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4.- Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5.- Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

2.3 VARIABLE EN UNA RELACIÓN FUNCIONAL

Comprender este uso implica reconocer que existen dos cantidades cuyos valores se encuentran relacionados por ciertas condiciones y distinguir que en esa situación la variación de una de las cantidades afecta a la variación de la otra cantidad. Habrá de identificar lo anterior en representaciones gráficas, tabulaciones analíticas, oraciones, etc., de la relación funcional será importante reconocer los intervalos de variación de las variables involucradas dada una de ellas, así como también determinar los valores de una de las variables en función de la otra variable.

Ursini et al (2005) enlistan los siguientes aspectos específicos que considera el *Modelo 3UV* para la variable en una relación funcional:

F1.- Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2.- Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3.- Determinar los valores de la variable independiente dados los valores de la variable dependiente.

F4.- Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5.- Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

Es muy importante decir que independientemente del uso de la variable, la presentación ordenada de sus aspectos en el *Modelo 3UV*, por ningún motivo es una representación jerárquica, de orden de ejecución, comprensión o abstracción. Aunque cada aspecto, sí significa un nivel de abstracción diferente del uso y concepto de variable. Cada aspecto puede aparecer o no en un mismo problema o en problemas con grados de dificultad distintos.

Los tres usos de la variable que describe el *Modelo 3UV* se encuentran relacionados entre sí, pues en las tareas algebraicas se encuentran incorporados varios de ellos. Considerar un buen manejo de este concepto implica reconocer las variables en su individualidad, manipularlas, interpretarlas y simbolizarlas yendo de uno a otro uso.

Por todo lo anterior es evidente que el concepto de variable no es sencillo, por el contrario, implica el manejo y conocimiento de muchas nociones algebraicas que deben ser bien identificadas y comprendidas por los estudiantes. Por ello, el *Modelo 3UV* es una herramienta teórico-metodológica útil para poder entender la manera en que los alumnos trabajan con la incógnita, siempre teniendo presente que este uso de la variable puede estar implícito o explícito en tareas en las que el foco de atención este orientado al número general y/o a la relación funcional.

CAPÍTULO III

3 METODOLOGÍA

3.1 TIPO DE ESTUDIO

La metodología que se sigue en este estudio es mixta pues cuenta con un análisis de tipo cuantitativo y una interpretación cualitativa de los datos estadísticos y de las producciones de los alumnos. De acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2003), los enfoques cualitativo y cuantitativo se pueden combinar durante todo el proceso de investigación o en la mayoría de sus etapas. El primer acercamiento en este estudio, refiere al cálculo de datos estadísticos que permite establecer si existen diferencias significativas entre las poblaciones, así como también establecer un parámetro comparativo. Para calcular si existen diferencias significativas se usará la prueba no paramétrica Chi Cuadrada, que de acuerdo a Revilla (2001) es útil porque:

- Es una prueba no paramétrica que favorece la escala nominal de los datos. (grado y región).
- Se usa para determinar si existen diferencias estadísticamente significativas entre porcentajes.
- Es útil cuando se desea estudiar si existen diferencias entre dos poblaciones respecto a la variable de estudio (capacidad para trabajar con la variable como incógnita).

Para la aplicación del test estadístico se seleccionó una submuestra del 30% de alumnos de cada grado y país. Se realizaron análisis para explorar diferencias entre grados en tres aspectos del uso de la variable como incógnita: Simbolización, determinación e interpretación. Se aplicaron análisis Chi cuadrada (X^2) para comparar los grupos de primero y tercero, y también en general, esto se realizó de manera separada para México e Italia. Se hizo una evaluación inter-jueces para determinar si un alumno tenía la capacidad de simbolizar, determinar, e interpretar la incógnita. Dos investigadores revisaron las respuestas de cada alumno de manera independiente y determinaron si un alumno era capaz de simbolizar, determinar e interpretar la incógnita de acuerdo a los siguientes lineamientos:

Simbolizar: se estipuló que un alumno es capaz de simbolizar la incógnita y usarla para plantear ecuaciones, si en su producción, hacía uso del lenguaje simbólico para

representar el valor desconocido y además era capaz de establecer con él las relaciones indicadas con los demás datos del enunciado y/o problema.

Determinar: se estipuló que un alumno es capaz de determinar el valor de la incógnita, si en su producción establece el valor específico de la incógnita, que puede ser calculado mediante algoritmos algebraicos y/o aritméticos o en su defecto, mentalmente.

Interpretación: se estipuló que un alumno es capaz de interpretar la variable simbólica como incógnita, si en su producción define el significado de la letra que aparece en cada ecuación.

Las evaluaciones de los dos investigadores fueron sometidas a un análisis de confiabilidad inter-jueces con el test Kappa de Cohen. Se encontró un valor $K > 0.80$ para los tres aspectos de la variable.

La interpretación cualitativa de los datos estadísticos pretende detectar y comparar a través de las respuestas producidas por los participantes de esta investigación, las dificultades en la interpretación, simbolización y manipulación del concepto de variable algebraica cuando aparece como incógnita.

Los datos utilizados para esta investigación provienen de dos diferentes grupos culturales por lo que su comparación resulta interesante para visualizar similitudes, diferencias y señalar posibles factores que pudieran estar influyendo en el uso del concepto de incógnita.

3.2 ESCENARIOS

Los datos fueron tomados al aplicar un cuestionario a estudiantes de primer y tercer grado de secundaria entre los meses de abril y junio del año 2011 en dos escuelas públicas del sur del Distrito Federal, México y cuatro escuelas públicas en la ciudad de Trieste, al norte de Italia.

En Italia la *scuola primaria* (su equivalente en México es la primaria) solo comprende 5 años de enseñanza, por lo que los estudiantes italianos entran por lo regular más jóvenes a la *scuola secondaria di I grado* (su equivalente en México es secundaria). A continuación se

muestra una tabla de correspondencia sobre la estructura del sistema educativo entre México e Italia.

México	Italia
Escuela Primaria	Scuola Primaria
1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5
Escuela Secundaria	Scuola Secondaria di I grado
1, 2, 3	1, 2, 3

Tabla 3 Años cursados durante la educación básica en México e Italia.

La diferencia entre los dos sistemas educativos en relación a los niveles básicos (primaria y secundaria) radica en que la escuela primaria en México consta de seis años de enseñanza, no así en Italia donde se cursan cinco años para concluir este nivel.

Los contenidos curriculares de matemáticas para escuela secundaria presentan algunas diferencias en estos dos países. En Italia, al igual que en México, el programa para secundaria de la asignatura de matemáticas ha evolucionado a un sistema integrado que desarrolla destrezas para la resolución de problemas empleando principios matemáticos. Asimismo, el currículo se centra más en los aspectos transversales y en la interacción de las matemáticas con el mundo científico y tecnológico. También se ha generalizado la idea de que los contenidos y destrezas del área de matemáticas constituyen la base para el aprendizaje de otras materias. Sin embargo, en Italia los contenidos algebraicos sólo se estudian en tercero de secundaria, mientras que en México, la enseñanza de este concepto se le dedica tiempo en los tres grados escolares. La *Tabla 4* y la *Tabla 5* muestran la carga curricular relacionada con el concepto de variable como incógnita de México e Italia respectivamente.

La *Tabla 4* muestra la carga curricular de educación básica relacionada con el concepto de variable como incógnita en México, en ella se puede ver el grado, bloque, tema, subtema y conocimientos y habilidades que se espera desarrolle el alumno al trabajar con estos contenidos, tal y como se puede ver en el programa de matemáticas SEP (2011). Como se puede observar, el currículo mexicano de educación secundaria es muy estructurado y específico en lo que el alumno debe ser capaz de realizar al terminar cada lección, además pareciera dotar al profesor de todas las herramientas necesarias para que el alumno no tenga dificultades con este concepto algebraico. Así mismo, dosifica la enseñanza del álgebra a lo largo de los tres años que dura la escuela secundaria.

País	Grado	Bloque	Eje	Tema	Conocimientos y habilidades
México SEP (2011)	1	3	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las literales. <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones 	Resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a , b y c números naturales y/o decimales.
		2	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las operaciones. <ul style="list-style-type: none"> Problemas multiplicativos 	Resolver problemas multiplicativos que impliquen el uso de expresiones algebraicas.
	2	3	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las literales. <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones 	Resolver problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma: $ax + bx + c = dx + ex + f$ y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros o fraccionarios, positivos o negativos.
		5	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las literales. <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones 	Representar con literales los valores desconocidos de un problema y usarlas para plantear y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.
		1	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las literales. <ul style="list-style-type: none"> Operaciones combinadas 	Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x + a)^2$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - b)$. Factorizar expresiones algebraicas como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 - a^2$.
	3	2	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las literales. <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones 	Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.
		3	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las literales. <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones 	Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la fórmula general.
		5	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las literales. <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones 	Dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver, y viceversa, proponer una situación que se modele con una de esas representaciones.
		5	Sentido Numérico y pensamiento algebraico.	Significado y uso de las literales. <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones 	

Tabla 4 Carga curricular relacionada con el concepto de variable como incógnita en México.

La Tabla 5, muestra la carga curricular de educación básica relacionada con el concepto de variable como incógnita, en ella se puede ver el núcleo, las competencias, los indicadores y la descripción de cada contenido tal y como lo muestra el *Istituto Comprensivo Divisione Julia Trieste* (una de las escuelas participantes en este estudio) en *Allegato al POF 2009-2012*. Si bien, no se muestra la carga curricular de las otras dos escuelas italianas participantes en este estudio, éstas muestran una estructura similar a la que se presenta. Como se puede observar, el contenido algebraico relacionado con el concepto de variable como incógnita está dirigido para trabajarse en el tercer año de secundaria.

ISTITUTO COMPENSIVO DIVISIONE JULIA TRIESTE (2009-2012) (Tercer grado de secundaria) Núcleo		Competencia que prevalece	Indicadores	Descripción
Número	Elementos del cálculo algebraico	Competencias de cálculo. Competencia lingüística y de comunicación. Representación. Modelación. Formulación y resolución de problemas.	Conocer el significado de las expresiones literales. Comprender el significado de monomio y polinomio. Saber operar con monomios y polinomios	Saber reconocer una expresión literal. Saber calcular el valor de una expresión literal. Saber reconocer un monomio. Saber cómo identificar las características y propiedades de monomios y polinomios. Saber realizar operaciones con monomios y polinomios. Saber traducir breves instrucciones para simbolizar secuencias.
	La ecuación		Comprender el concepto de identidad y de ecuación. Resolver ecuaciones de primer grado.	Saber reconocer la diferencia entre una identidad y una ecuación. Saber aplicar el primer y segundo principio de equivalencia para obtener una ecuación equivalente a los datos. Saber resolver una ecuación de primer

				grado con una incógnita. Saber reconocer una ecuación determinada, indeterminada e imposible. Saber resolver ecuaciones simples de segundo grado.
--	--	--	--	---

Tabla 5 Carga curricular relacionada con el concepto de variable como incógnita en Italia.

En conclusión, la diferencia más significativa entre el currículo mexicano e italiano de escuela secundaria, radica en la dosificación y lo específico que es el primero en cada uno de sus apartados a lo largo de cada año escolar, mientras que el segundo trata los apartados de manera general y los relega al tercer año de secundaria.

3.3 PARTICIPANTES

En este estudio participaron 405 estudiantes: 99 alumnos mexicanos originarios de la Ciudad de México (MX) y 96 alumnos italianos originarios de la ciudad de Trieste (TS) de primero de secundaria y, 92 mexicanos y 118 italianos de tercero de secundaria de las mismas escuelas. Los estudiantes mexicanos pertenecían a dos secundarias técnicas consideradas con un alto aprovechamiento escolar, con grupos de más de 40 alumnos cada uno. En Italia se trabajó con grupos de tres escuelas, debido a que en ese país los grupos no deben rebasar los 30 estudiantes.

3.4 EL INSTRUMENTO

El instrumento que se aplicó para la toma de datos fue una adaptación del cuestionario de 65 preguntas de Ursini y Trigueros (2003). La adaptación consistió en omitir algunas preguntas que se consideraron redundantes, si bien aportaban información interesante que permite triangular los datos, era necesario lograr que fuera posible para los alumnos contestarlo en horas normales de clase, en un lapso no mayor a dos horas. Una vez reducida la extensión del cuestionario se tradujo al italiano y se validó la traducción con expertos italianos (investigadores y profesores de matemáticas de nivel secundaria) para asegurar que fuera comprensible para la población italiana. Una vez hechas las adaptaciones necesarias se tradujo nuevamente al español, para verificar que se usara la misma terminología en las preguntas y que estuvieran escritas las mismas frases en ambos idiomas. El cuestionario que

se aplicó consta de 47 preguntas: 8 ítems involucran la variable como incógnita, 16 ítems la variable como número general y 23 ítems variables en relación funcional.

Cada uno de los ítems que conforman el cuestionario cuenta con características específicas que permiten identificar el foco de atención en términos del concepto de variable algebraica, como la *manipulación*, *interpretación* y *simbolización* en cada una de las representaciones de la variable: incógnita, número general y relación funcional. Cada uso de la variable cuenta con aspectos específicos que permiten identificar con mayor claridad las dificultades que presentan los estudiantes cuando dan solución a los ejercicios que incluye el cuestionario.

Para los fines que persigue esta investigación se ha decidido agrupar los 8 ítems que son sobre la conceptualización de la variable como incógnita, de tal manera que sea posible observar la tarea principal que el alumno realiza al resolver cada ejercicio. La organización ha quedado de la siguiente manera:

Actividad	Ítem
Simbolizar (3 ítems)	1. Reescribe en lenguaje matemático (no necesitas hacer los cálculos). <ul style="list-style-type: none"> • 1.a Un número desconocido multiplicado por 13 es igual a 127. • 1.b Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número más 12, es igual a 6. 15. En el siguiente problema escribe sólo la ecuación (no es necesario que lo resuelvas). <ul style="list-style-type: none"> • 15.b Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Qué edad tiene cada uno?
Determinar el valor (3 ítems)	3. Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que puede tomar la letra <ul style="list-style-type: none"> • 3.a $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$ • 3.b $(x + 3)^2 = 36$ • 3.c $4 + x = 2$
Interpretar	4. Para cada una de las siguientes expresiones ¿Cuántos valores puede tomar la letra?

(2 ítems)	<ul style="list-style-type: none"> • 4.b $3 + a + a = a + 10$ • 4.h $4 + x^2 = x(x + 1)$
-----------	--

Tabla 6 Organización de los ítems en función de la actividad a realizar por el alumno.

Para propósitos de esta investigación no se analizan las respuestas dadas al cuestionario en su totalidad, sólo se analizan las 8 preguntas correspondientes al uso de la variable como incógnita. A continuación se enlistan los 8 ítems junto con un breve análisis que identifica las habilidades con las que el estudiante debe contar para resolver correctamente el ejercicio. Las preguntas son las siguientes:

ÍTEM	ANÁLISIS
1.a Un número desconocido multiplicado por 13 es igual a 127.	Este ítem permite ver la capacidad de los alumnos para simbolizar la incógnita (I5) y usarla para traducir al lenguaje algebraico una ecuación dada en forma verbal (I5). En este caso, para producir la ecuación es necesario simbolizar una sola operación (multiplicar la variable algebraica por un número dado) e igualar la expresión así obtenida a otro número dado.
1.b Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número más 12, es igual a 6.	Este ítem, también permite ver la capacidad de los alumnos para simbolizar la incógnita (I5) y usarla para traducir a lenguaje algebraico una ecuación dada en forma verbal (I5). Sin embargo, a diferencia del ítem anterior, para producir la ecuación es necesario realizar una operación de dos pasos. Se trata por lo tanto, de un proceso más complejo. En primer lugar, hay que simbolizar la incógnita (I5), después considerando los datos del problema, hay que producir una expresión abierta que involucra una suma $(x + 12)$ (G4). Enseguida, hay que considerar tanto a la variable simbólica aislada como a la expresión abierta, como dos números generales (G2) y usarlos para producir una nueva expresión abierta $x(x + 12)$ (G4), finalmente hay que igualar esta nueva expresión a 6 para simbolizar así la ecuación (I5) dada verbalmente.
15.b Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Qué edad tiene cada uno?	Este ítem, al igual que los dos anteriores, permite ver la capacidad de los alumnos para simbolizar la incógnita (I5) y usarla para plantear una ecuación. Sin embargo, a diferencia de los dos casos anteriores, la ecuación no está dada verbalmente, sino hay que plantearla a partir del análisis de los datos del problema, por lo que hace que este ítem sea más complejo que los dos anteriores. En primer

	<p>lugar, es necesario identificar la incógnita del problema (I1) y simbolizarla (I5). Después, considerando los datos del problema, es necesario producir una expresión abierta (G4) que involucra una suma ($x + 15$). Posteriormente hay que considerar la variable simbólica y la expresión generada como números generales (G2) que se pueden operar para producir otra expresión $x + (x + 15)$ (G4). Por último, igualar la expresión generada con el número dado, $x + (x + 15) = 41$ para plantear así, la ecuación que resuelve el problema.</p> <p>Otra estrategia de resolución del ítem, consiste en plantear un sistema de ecuaciones (I5) que resuelva el problema $x + 15 = y$; $x + y = 41$. Hay que analizar los datos de la primera parte del problema para plantear una ecuación lineal (I1, G4, I5) y hacer lo mismo con el resto de los datos de la segunda parte del problema (I1, G2, G4, G5).</p> <p>En el caso de que el estudiante decidiera resolver el problema (no se requiere), estaría trabajando también aspectos relacionados con variables en relación funcional (F6, F1, F2, F3).</p>
<p>Para la siguiente expresión escribe los valores que puede tomar la letra.</p> <p>3.a $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$</p>	<p>Este ítem permite ver la capacidad de los alumnos para calcular el valor de la incógnita de una ecuación lineal (I4). En primer lugar, hay que interpretar cada término algebraico como números generales (G2) que hay que agrupar y operar en cada miembro de la ecuación (lo mismo se hace con los términos aritméticos) y así producir (G4) una expresión equivalente a la original, de la forma $ax = b$. Una vez simplificada la expresión, hay que entender a la variable simbólica como incógnita (I2) y resolver las operaciones indicadas para calcular su valor (I4). Por último, hay que sustituir el valor calculado, por cada una de las literales que aparecen en la ecuación original, resolver las operaciones indicadas y comprobar que la igualdad se cumpla (I3).</p>
<p>Para la siguiente expresión escribe los valores que puede tomar la letra.</p> <p>3.b $(x + 3)^2 = 36$</p>	<p>Este ítem, permite ver la capacidad de los alumnos para calcular el valor de la incógnita de una ecuación cuadrática. Sin embargo, este ítem es más complejo que el anterior, por tratarse del cálculo de las raíces de una ecuación de segundo grado (I4).</p>

	<p>Para solucionar este ítem existen varias estrategias, una de ellas y posiblemente la más sencilla, es por inspección directa. En este caso hay que identificar a la variable simbólica como un número desconocido que debe calcularse (I1), posteriormente, hay que asignar los valores a la variable simbólica (G4) y realizar las operaciones aritméticas indicadas para comprobar que los valores encontrados satisfagan la ecuación (I3). Sin embargo, los alumnos que recurren a esta estrategia, es probable que incurran en el error de sólo encontrar una de las dos raíces que satisfacen la ecuación.</p> <p>Otra estrategia de resolución del ítem consiste en aplicar las reglas del despeje algebraico para calcular el valor de la incógnita (I4). En primer lugar, hay que interpretar la expresión algebraica como una ecuación cuadrática y la variable simbólica como la representación de dos valores específicos (I2), posteriormente, despejar la incógnita y resolver las operaciones indicadas para calcular los valores de la incógnita (I4). Por último, hay que sustituir cada una de las raíces en la ecuación original, realizar las operaciones indicadas y comprobar que la igualdad se cumpla (I3).</p> <p>Otra estrategia que permite calcular los valores de la incógnita, consiste en desarrollar el binomio cuadrado y aplicar la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado (I4). En primer lugar, hay que desarrollar el binomio cuadrado (G4) agrupar los términos para obtener una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (I2). Enseguida, aplicar el algoritmo de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado y calcular las raíces de la ecuación (I4). Por último, sustituir cada raíz en la ecuación original y comprobar que los valores satisfagan la ecuación (I3).</p>
<p>Para la siguiente expresión escribe los valores que puede tomar la letra. 3.c $4 + x = 2$</p>	<p>Este ítem al igual que los dos anteriores, permite ver la capacidad de los alumnos para determinar la incógnita (I4). Si bien es más sencillo que los dos anteriores, su dificultad radica en el valor negativo de su solución.</p>

	<p>Para resolver el ítem, existen varias estrategias. Una es por inspección directa (I1, G2, I3).</p> <p>Otra estrategia, consiste en determinar el valor de la incógnita (I4) por medio del despeje algebraico, para ello hay que interpretar la variable simbólica como incógnita (I2), despejarla, resolver las operaciones aritméticas indicadas y determinar su valor (I4). Por último, sustituir el valor calculado y comprobar que la igualdad se cumpla (I3).</p>
<p>Para la siguiente expresión ¿Cuántos valores puede tomar la letra?</p> <p>4.b $3 + a + a = a + 10$</p>	<p>Este ítem, como también el 4.h, mide la capacidad de los alumnos para interpretar la variable simbólica como incógnita (I2), dicho de otra manera, al alumno se le pide que reflexione sobre cuántos valores representa la variable simbólica y no qué valores puede tener.</p> <p>Una estrategia de resolución del ítem, es manipular la expresión de hecho o mentalmente y reconocerla como una ecuación lineal, en la que la incógnita representa un único valor (I2).</p> <p>Otra estrategia, consiste en resolver la ecuación (G2, G4, I4, I3), de tal manera que al comprobar el resultado, el alumno descubra que la variable representa un único valor (I2).</p>
<p>Para la siguiente expresión ¿Cuántos valores puede tomar la letra?</p> <p>4.h $4 + x^2 = x(x + 1)$</p>	<p>Este ítem, al igual que el anterior, también mide la capacidad de los alumnos para interpretar la variable simbólica como incógnita (I2). Sin embargo, este resulta más complejo debido al tipo de manipulación que hay que hacer, de hecho o mentalmente, de sus términos, pues de no manipular correctamente, se podría incurrir en el error de interpretarla como ecuación cuadrática debido al exponente de uno de sus términos.</p> <p>Una estrategia de resolución del ítem, consiste en resolver las operaciones algebraicas indicadas para producir una expresión algebraica más sencilla (G2, G4). Posteriormente, hay que reconocer esa expresión algebraica como una ecuación lineal para la cual la incógnita representa un único valor (I2).</p> <p>Otra estrategia de resolución, es resolver la ecuación (G2, G4, I4, I3) de tal manera, que al</p>

	comprobar el resultado, el alumno descubra que la variable representa un único valor (I2).
--	--

Tabla 7 Ítems de incógnita y su análisis mediante el Modelo 3UV.

3.5 DATOS

Los datos con los cuales contamos para esta investigación son las respuestas que los participantes en este estudio dan a las 8 preguntas correspondientes a la incógnita. Las respuestas de los estudiantes han sido clasificadas en respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND).

Se calculan y grafican porcentajes en cada una de las categorías de respuesta y los porcentajes obtenidos se comparan para determinar si existen diferencias estadísticamente significativas entre las muestras. Para ello se utilizan los datos que arrojan las respuestas correctas, pues éstas aportan información valiosa respecto a la dificultad o facilidad del ítem, además de ofrecer un parámetro comparativo que permite analizar las respuestas de los estudiantes que puntúan más alto en este test. Posteriormente se hace una interpretación cualitativa de los datos. Para profundizar en el análisis, encontramos en las producciones erróneas de los estudiantes, la materia prima necesaria para determinar las dificultades que presentan los alumnos al resolver problemas donde se involucra la incógnita y con los datos obtenidos, una interpretación y clasificación de las dificultades, todo con el propósito de tener un panorama más amplio y profundo sobre la conceptualización de la variable como incógnita por parte de los estudiantes. Por otra parte, las preguntas no contestadas, son objeto de un análisis aparte, debido a que no hay en las producciones, datos que nos permitan hacer afirmaciones sobre el porqué los alumnos no responden algún ítem, pero este dato, nos permite plantear algunas hipótesis que puedan ayudar a explicar este fenómeno.

CAPÍTULO IV

4 ANÁLISIS CUANTITATIVO

A continuación, se presenta el análisis estadístico correspondiente a las categorías de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) establecidas para este cuestionario. El análisis se presenta en el siguiente orden: para México, se analizan primero y tercero de secundaria por separado; para Italia, se analizan primero y tercero de secundaria por separado. Por último, se hace un comparativo entre las muestras de primer y tercer grado de secundaria de cada país.

4.1. PRIMER GRADO DE SECUNDARIA, MÉXICO

La *Tabla 8* muestra los porcentajes de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) por ítem, de los alumnos mexicanos de primer grado de secundaria.

	Simbolización			Determinación			Interpretación	
	1.a	1.b	15.b	3.a	3.b	3.c	4.b	4.h
% RC	44	5	6	1	0	9	3	3
% RI	41	51	66	34	48	20	43	34
% ND	15	44	28	65	52	71	54	63

Tabla 8 Porcentaje de alumnos de primero de secundaria con respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND).

De manera general podemos decir que los estudiantes mexicanos de primer grado de secundaria tienen dificultades para contestar estos ítems. No hubo un sólo ítem que fuera resuelto correctamente por 50% o más de la población. Sin embargo destaca el ítem 1.a, que obtuvo el porcentaje más alto de respuesta correcta (44%), mientras que los 7 ítems restantes, obtuvieron menos del 10% de respuesta correcta. Se observa también que 5 de los 8 ítems (3.a, 3.b, 3.c, 4.b y 4.h) obtuvieron más del 50% de respuesta no dada. El análisis que a continuación se presenta, es por separado y corresponde a los ítems que requieren de la simbolización, determinación e interpretación de la variable como incógnita.

4.1.1 Simbolización de la incógnita

Los ítems que indagan la capacidad de los estudiantes para simbolizar la incógnita y utilizarla para plantear una ecuación son el ítem 1.a, 1.b y 15.b. El ítem 1.a es el que más

alumnos contestaron correctamente (44%). Muchos alumnos dieron una respuesta incorrecta (41%) y el 15% no respondió el ítem. Esto indica que la mayoría de los alumnos no fue capaz de simbolizar la ecuación dada de forma verbal, ya sea por dar una respuesta equivocada o por no dar respuesta al ítem. Lo anterior es un indicio de que la mayoría de los alumnos de primero de secundaria tienen dificultad para simbolizar la incógnita y utilizarla para plantear una ecuación muy sencilla que requiere simbolizar una multiplicación. El ítem 1.b confirma el fenómeno descrito anteriormente. Si bien es similar al anterior, dadas sus características (ver *Tabla 7*) es un ítem un poco más difícil. La mayoría de alumnos no fueron capaces de traducir al lenguaje algebraico la ecuación descrita en el ítem (51% respondió incorrectamente y 44% no dio respuesta al ítem) y sólo muy pocos alumnos (5%) lo pudieron resolver. El ítem 15.b es todavía más complicado (ver *Tabla 7*). Son mayoría los alumnos que no son capaces de simbolizar la incógnita y usarla para plantear una ecuación tomando en cuenta los datos del problema (66% dio respuesta incorrecta y 28% no respondió el ítem). Sólo 6% de alumnos logró simbolizar la ecuación de manera correcta. Respecto a los porcentajes de respuesta incorrecta, podemos decir que los alumnos recurren a diversas y diferentes estrategias tratando de responder los ítems, muchas de ellas aritméticas, debido a que en primero de secundaria, los alumnos están todavía más familiarizados con la aritmética que con el álgebra.

4.1.2 Determinación de la incógnita

Los ítems que indagan la capacidad de resolver ecuaciones para determinar el valor de la incógnita son: 3.a, 3.b y 3.c. El ítem 3.c es el más sencillo, pues si bien implica un número negativo, no requiere de la manipulación algebraica (ver *Tabla 7*). También fue el ítem que más alumnos logró responder correctamente, si bien sólo 9% de los alumnos lo respondieron correctamente calculando la incógnita de la ecuación, la gran mayoría no fueron capaces de determinar su valor, 71% de los alumnos no sabe cómo enfrentar una ecuación pues no dan respuesta y 20% tiene dificultades para calcular el valor de la incógnita aunque se trata de una ecuación muy sencilla. Este panorama se aprecia para el ítem 3.a, pues sólo 1% del alumnado logró calcular el valor de la incógnita y de los demás, 34% respondió incorrectamente y 65% no dio respuesta alguna. Por último, el ítem más complicado de este bloque (ver *Tabla 7*) es el ítem 3.b. Se trata de una ecuación de segundo grado, tema que es trabajado hasta tercero de secundaria. Por ello, no es de sorprender que ningún alumno haya

logrado responder correctamente el ítem y que la mayoría no hay dado una respuesta (52%). Sin embargo, llama la atención que hay 48% de alumnos que sí respondieron el ítem aunque de manera incorrecta. Esto sugiere que los alumnos reconocieron que se trata de una ecuación y reconocieron en ella la presencia de una incógnita (I1), también interpretaron la variable simbólica como tal (I2), además, los alumnos cuentan con fuertes estrategias de resolución que les permiten enfrentarse a conceptos nuevos para ellos, poniendo en juego posiblemente, todos sus conocimientos matemáticos adquiridos en la primaria y a lo largo del primer año de escuela secundaria.

4.1.3 Interpretación de la incógnita

Los ítems que indagan la capacidad de interpretar la variable simbólica que aparece en una expresión algebraica como incógnita son: el ítem 4.b y 4.h. Interpretar la variable simbólica como incógnita es una actividad compleja pues requiere por parte del alumno de un proceso de reflexión sobre sus conocimientos. El ítem 4.b es por sus características (ver *Tabla 7*) el más sencillo de estos dos ítems, sólo 3% de alumnos fueron capaces de interpretar la variable simbólica como incógnita específica, mientras que 97% no logró hacerlo (43% respondió incorrectamente y 54% no respondió el ítem). Por su parte, el ítem 4.h es más complejo y presenta un escenario similar. Al igual que el ítem anterior, sólo 3% de los alumnos tuvo la capacidad de interpretar la variable simbólica como incógnita específica, mientras 97% de ellos no lo hizo (34% respondió incorrectamente y 63% no dio respuesta al ítem). En ambos ítems, no deben causar sorpresa los pobres resultados, aunque no dejan de ser preocupantes y un foco de atención pues como ya se dijo, interpretar la variable simbólica como incógnita es una tarea de alto grado de complejidad que pone en juego diversos conceptos algebraicos como por ejemplo, el de ecuación lineal, concepto con el que alumnos de primero de secundaria apenas comienzan a familiarizarse. Sin embargo, hay que subrayar que son muchos los estudiantes que responden el ítem, si bien la respuesta que dan es incorrecta, esto puede sugerir que los alumnos cuentan con algunas nociones que les permiten enfrentar el reto de tratar de interpretar la variable como una incógnita.

En el siguiente apartado se analizan los resultados correspondientes a los alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

4.2 TERCER GRADO DE SECUNDARIA, MÉXICO

La *Tabla 9* muestra los porcentajes de alumnos de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) por ítem de los alumnos mexicanos de tercer grado.

	Simbolización			Determinación			Interpretación	
	1.a	1.b	15.b	3.a	3.b	3.c	4.b	4.h
% RC	91	45	26	14	2	67	24	14
% RI	8	54	70	51	79	20	50	53
% ND	1	1	4	35	19	13	26	33

Tabla 9 Porcentaje de alumnos de tercero de secundaria con respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND)

Respecto a la *Tabla 9*, se puede decir de manera general que más del 60% de los alumnos son capaces de simbolizar y determinar la incógnita de ecuaciones sencillas (ítem 1.a, 3.c) y más del 25%, simboliza ecuaciones en las que hay que manipular la variable (ítems 1.b y 15.b). Por otro lado, menos del 15% de los alumnos determina el valor de la incógnita en ecuaciones donde se requiere de la manipulación algebraica (ítems 3.a y 3.b). También, menos del 25% de alumnos interpreta la variable simbólica de una expresión algebraica como un valor específico (ítems (4.b y 4.h).

4.2.1 Simbolización de la incógnita

El ítem 1.a fue contestado correctamente por 91% de alumnos de tercero de secundaria. Esto indica que son capaces de simbolizar la incógnita y plantear una ecuación sencilla dada verbalmente. Este porcentaje de respuesta correcta representa un incremento de 47% en relación a los alumnos de primero de secundaria. Sin embargo, en tercero de secundaria aún hay alumnos que tienen dificultades con la simbolización algebraica (8% dan respuesta incorrecta y 1% no da respuesta al ítem). Si bien, son minoría los alumnos de tercero que aún tienen dificultades, dada la instrucción que reciben a lo largo de la secundaria, se esperaría que para este grado escolar no tuvieran problemas para traducir al lenguaje algebraico ecuaciones dadas verbalmente que implican escribir de manera general $ax = b$.

El ítem 1.b fue resuelto correctamente por sólo 45% de los alumnos. Si bien, la mayoría de alumnos no fue capaz de simbolizar la ecuación descrita en el ítem (54% dan respuesta incorrecta y 1% no responde el ítem) si es un avance considerable de primero a tercero de secundaria (40% más alumnos que en primero de secundaria). Sin embargo, se

esperaría que al finalizar el tercer año de secundaria ningún alumno tuviera dificultades en simbolizar una ecuación del tipo $x(x + a) = b$.

Por último está el ítem 15.b, el de mayor grado de dificultad (ver *Tabla 7*). De este bloque de actividades es el ítem que menos alumnos lograron responder acertadamente (70% da respuesta incorrecta y 4% no da respuesta al ítem). Sólo el 26% de alumnos fueron capaces de simbolizar la incógnita y usarla para plantear la ecuación que resuelve el problema (20% más alumnos que en primero de secundaria). Sin embargo, la mayoría de alumnos de tercero de secundaria tienen dificultades para utilizar los datos de un problema y con ellos plantear una ecuación del tipo $x + (x + a) = b$ que lo resuelva.

Con base en los resultados estadísticos obtenidos, tanto de primero como de tercero de secundaria, correspondientes a los ítems de simbolización de la incógnita, se puede suponer que la enseñanza logra que sólo algunos alumnos en su paso por la escuela secundaria desarrollen la capacidad de simbolizar la incógnita para plantear ecuaciones. En los tres ítems el porcentaje de respuesta correcta aumenta considerablemente de primero a tercero de secundaria, sin embargo, aún son muchos los alumnos que no han desarrollado esta habilidad. Por tal motivo la enseñanza tendría que hacer énfasis en actividades que lleven al alumno a simbolizar ecuaciones, sean dadas de forma verbal que a partir de problemas.

Por otro lado, al aplicarse el análisis Chi Cuadrada, se encontró que el porcentaje de alumnos de tercero (40%) que demostró tener la capacidad de simbolizar la incógnita y usarla para plantear ecuaciones, fue mayor que el porcentaje de alumnos de primero (14%), $X^2(1, n = 57) = 19.6, p < 0.001$, es decir, se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre ellos. Esto indica que la simbolización, es un aspecto de la incógnita que hace diferencia entre los alumnos mexicanos de primero y tercero, probablemente, consecuencia de un mayor énfasis curricular en este aspecto a lo largo de la escuela secundaria.

4.2.2 Determinación de la incógnita

El ítem más sencillo de este grupo de actividades resultó el 3.c (ver *Tabla 7*) y fue resuelto correctamente por 67% de alumnos (58% más alumnos que en primero de secundaria). Si bien la mayoría fueron capaces de determinar el valor de la incógnita de una

ecuación sencilla, aún son muchos los alumnos que no logran hacerlo (20% da una respuesta incorrecta y 13% no responde el ítem). Esto es preocupante y debería ser un foco de atención para la enseñanza, pues que los alumnos que cursan tercer año de secundaria no sean capaces de resolver una ecuación del tipo $a + x = b$, puede ser señal de una muy pobre instrucción.

El ítem 3.a es un poco más complejo que el anterior y para resolverlo se requiere manipular la variable simbólica (ver *Tabla 7*). Quizá por eso sólo 14% de los estudiantes fueron capaces de calcular el valor de la incógnita (13% más alumnos que en primero de secundaria) mientras que la mayoría de alumnos no fueron capaces de determinar su valor (51% dio una respuesta incorrecta y 35% no dio respuesta al ítem). Estos resultados son reflejo del pobre conocimiento algebraico que tienen los alumnos cuando están por concluir su educación básica, pues la mayoría de ellos no son capaces de calcular el valor de la incógnita dada una ecuación del tipo $ax + b - cx = d + ex$.

El ítem 3.b, como ya se ha dicho, es el más complejo de este grupo de actividades, por tratarse de la resolución de una ecuación de segundo grado. Este ítem fue resuelto correctamente por sólo 2% de los alumnos (en primero de secundaria nadie logró resolverlo correctamente), mientras que la mayoría de alumnos no fueron capaces de calcular el valor de la incógnita (79% dan una respuesta incorrecta y 19% no responde). El porcentaje de respuesta correcta no sorprende, pues se ha mantenido la tendencia de que a mayor grado de dificultad del ítem, éste es resuelto correctamente por menor cantidad de alumnos. Con todo lo anterior, la situación debe preocupar dado que resolver ecuaciones de segundo grado es un tema de tercer año de secundaria.

Por otro lado, al aplicarse el análisis Chi Cuadrada, se encontró que el porcentaje de alumnos de tercero (17.5%) que demostró tener la capacidad para determinar el valor de la incógnita en diversas ecuaciones, fue mayor que el porcentaje de alumnos de primero (3.5%), $X^2(1, n = 57) = 7.79, p < 0.01$, es decir, se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre los grupos de primero y tercero. Si bien, existen estas diferencias estadísticamente significativas, puede suponerse que el currículo promueve el aprendizaje en este aspecto de la incógnita, sin embargo aún son muchos los alumnos que tienen dificultades para determinar la incógnita de ecuaciones de uno y dos pasos.

4.2.3 Interpretación de la incógnita

El ítem 4.b fue resuelto correctamente por 24% de los alumnos (21% más alumnos que en primero de secundaria). Si bien son mayoría los alumnos que no son capaces de interpretar como incógnita la variable simbólica (50% responde incorrectamente y 26% no da respuesta al ítem), los alumnos que si son capaces, parecen haber afianzado a lo largo de la escuela secundaria, el concepto de ecuación lineal.

El ítem 4.h, al ser más complejo (ver *Tabla 9*), tuvo en comparación con el ítem anterior una disminución en el porcentaje de respuesta correcta, pues sólo 14% de los alumnos fue capaz de interpretar la variable simbólica de la expresión (11% más alumnos que en primero) como incógnita específica. Esto lleva a suponer que estos alumnos han logrado una conceptualización bastante sólida de la ecuación lineal y de la manipulación de la variable, además, son capaces de reflexionar sobre ello y por lo tanto de interpretar la variable como incógnita. Sin embargo, son mayoría los alumnos que no han logrado desarrollar esta habilidad (53% responde incorrectamente el ítem y 33% no lo responde).

Por otro lado, al aplicarse el análisis Chi Cuadrada, se encontró que el porcentaje de alumnos de tercero (21%) que demostró tener la capacidad para interpretar la variable simbólica como incógnita en diversas expresiones algebraicas, fue mayor que el porcentaje de alumnos de primero. (3.5%), $X^2(1, n = 57) = 10.86, p < 0.001$, es decir, existen diferencias estadísticamente significativas entre los grupos de estudiantes de primero y tercero. Esto indica que existe un progreso en el aprendizaje de este aspecto de la incógnita y que el currículo probablemente, promueve este tipo de aprendizajes en el alumno, sin embargo, la mayoría de alumnos aún presenta dificultades para interpretar la variable simbólica como incógnita.

4.3 COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS CORRECTAS POR ÍTEM EN PRIMER Y TERCER GRADO DE SECUNDARIA

La *Figura 1*, muestra los porcentajes de respuesta correcta por ítem de alumnos de primero y tercero de secundaria.

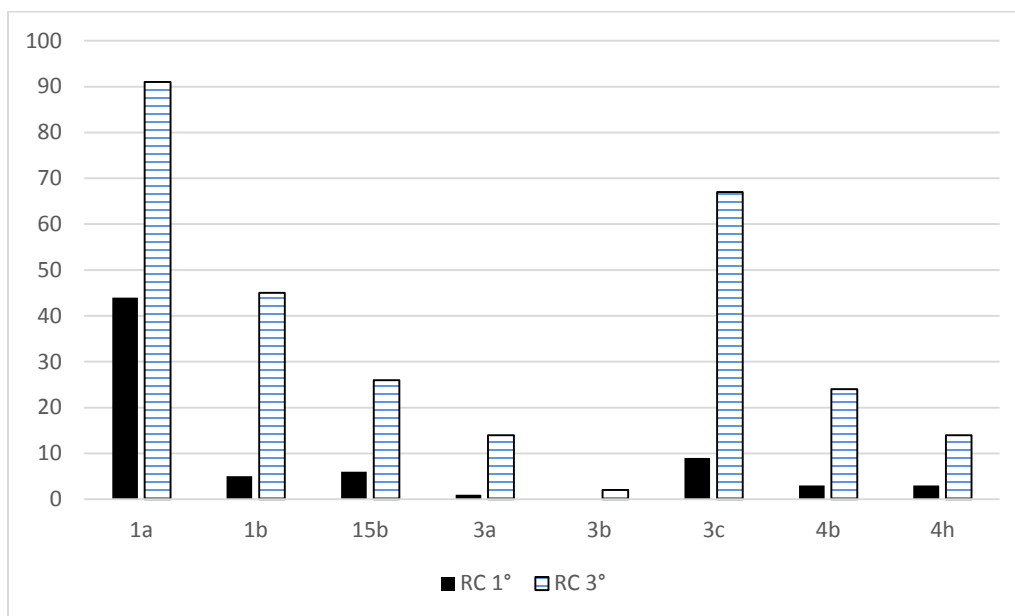


Figura 1 Porcentaje de respuesta correcta por ítem de alumnos de primero y tercero de secundaria.

En la *Figura 1*, se puede observar el incremento en el porcentaje de respuesta correcta de primero a tercero de secundaria en todos los ítems. Sin embargo se observa también que sólo dos ítems alcanzan más del 50% de respuesta correcta en tercer grado (ítems 1.a y 3.c). Esto nos permite afirmar que los alumnos han desarrollado en su educación básica la capacidad de traducir al lenguaje algebraico ecuaciones de un paso y calcular el valor de la variable cuando aparece en una ecuación muy sencilla que no requiere manipular la variable. Lamentablemente, cuando se requiere manipular la variable, ya sea para simbolizar una ecuación de dos pasos o para calcular su valor, la mayoría de los alumnos no son capaces de hacerlo (ítems 1.b, 15.b, 3.a, 3.b). En cuanto a la interpretación de la variable simbólica como incógnita (ítems 4.b, 4.h), el panorama no es más alentador que el anterior, ya que la gran mayoría de los alumnos no son capaces de hacerlo. Si bien, los porcentajes muestran un crecimiento para tercer año de secundaria, son muy pocos los alumnos que a lo largo de la secundaria, han logrado consolidar sus conocimientos respecto a la incógnita.

La Figura 2, muestra la cantidad de veces que aumenta el porcentaje de respuestas correctas en cada ítem.

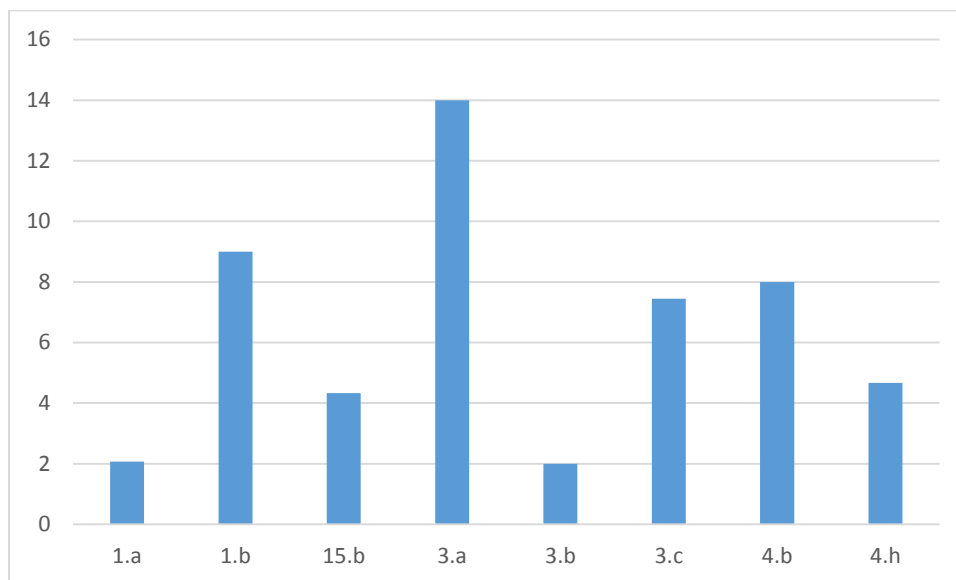


Figura 2 Cantidad de veces que aumenta el porcentaje de respuesta correcta por ítem.

Podemos observar que cuatro de los ocho ítems (1.b, 3.a, 3.c y 4.b) aumentan más de 5 veces el porcentaje de respuesta correcta en tercero de secundaria. Esto sugiere que aspectos de la incógnita como calcular el valor de la variable de ecuaciones de uno y dos pasos (ítems 3.c y 3.a respectivamente), simbolizar una ecuación de dos pasos (ítem 1.b) e interpretar una ecuación lineal (ítem 4h), son dificultades que los alumnos están logrando superar a largo de la escuela secundaria. Sin embargo, estas dificultades permanecen en la mayoría de los estudiantes.

4.4 COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS INCORRECTAS POR ÍTEM EN PRIMERO Y TERCERO DE SECUNDARIA

La *Figura 3*, muestra los porcentajes de respuestas incorrectas de alumnos mexicanos de primero y tercero de secundaria.

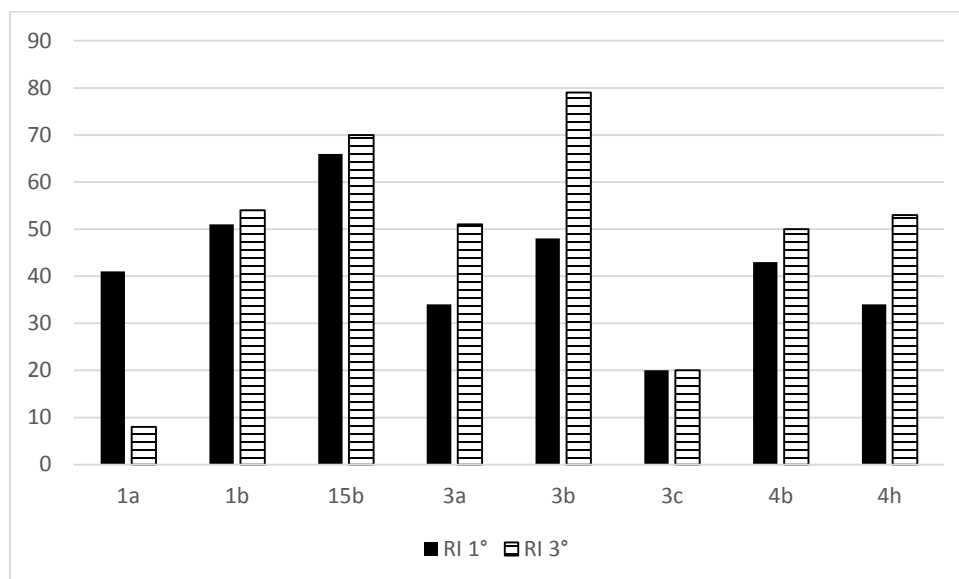


Figura 3 Porcentaje de respuesta incorrecta por ítem de alumnos mexicanos de primero y tercero de secundaria.

En la *Figura 3* se puede observar que el ítem 1.a y 3.c destacan de los demás, pues son los únicos ítems en donde el porcentaje de respuesta incorrecta no aumenta de primero a tercero, por el contrario, el ítem 1.a disminuye, esto indica que simbolizar la incógnita y utilizarla para escribir una ecuación de un paso es una habilidad que los alumnos consolidan más en su paso por la escuela secundaria. Mientras que el porcentaje de respuesta incorrecta del ítem 3.c se mantiene igual, probablemente por una dificultad que no es algebraica, pues para resolver la ecuación $4 + x = 2$, no se requiere de la manipulación algebraica pero sí de operar con un número negativo. Los ítems restantes indican que los alumnos de tercero de secundaria se equivocan más que los de primero, dato al parecer alarmante, pero también engañoso si no se analiza con cuidado. Los ítems 1.b, 15b, 3.a, 3.b, 4.b y 4.h, además de aumentar su porcentaje de respuesta incorrecta en tercero de secundaria, tienen algo en común, para resolverlos correctamente, es necesario de hecho o mentalmente, manipular la variable, por lo que pareciera ser este aspecto, el que resulta difícil de trabajar para la mayoría de los alumnos.

No es extraño que el porcentaje de respuesta incorrecta aumente en tercero de secundaria, pues los alumnos cuentan debido a la instrucción que han recibido a lo largo de la escuela secundaria, con un mayor número de nociones algebraicas que les lleven a tratar de resolver estos ítems, lamentablemente estas nociones, al parecer aún carecen de sentido para ellos y las actividades que la enseñanza provee, probablemente no han sido suficientes para propiciar que el alumno consolidé sus conocimientos al respecto. Por lo anterior se puede afirmar que la falta de capacidades manipulativas, sin duda influye en su capacidad de simbolizar, determinar e interpretar correctamente la incógnita.

4.5 COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS NO DADAS EN PRIMERO Y TERCERO DE SECUNDARIA

La *Figura 4*, muestra los porcentajes de respuestas no dada de alumnos mexicanos de primero y tercero de secundaria.

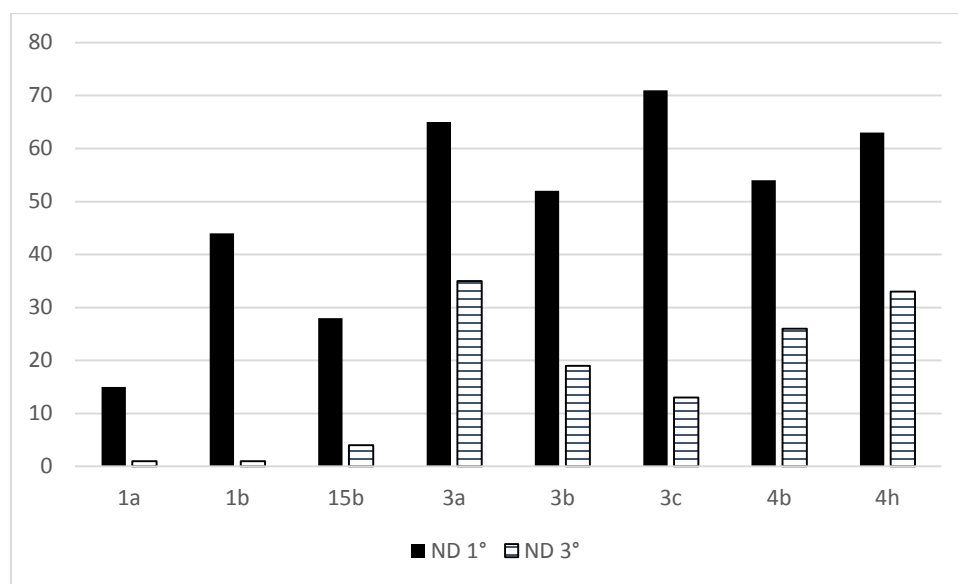


Figura 4 Porcentaje de respuesta no dada de alumnos de primero y tercero de secundaria.

En la *Figura 4* se observa, como en todos los ítems el porcentaje de respuesta no dada disminuye de manera importante. Esto corrobora lo dicho en el apartado anterior, donde se menciona que los alumnos de tercero de secundaria cuentan con muchas más nociones que probablemente los motivan a dar una respuesta y por tanto, son menos los alumnos que dejan algunos ítems sin resolver. En general, no es posible determinar con certeza las causas de por

qué hay alumnos que no dan respuesta a un ítem y para saberlo con certeza o plantear hipótesis, hubiera sido necesario realizar entrevista a algunos alumnos.

A continuación se presenta por separado, el análisis correspondiente a los resultados obtenidos por los estudiantes italianos de primero y tercero de secundaria al responder las 8 preguntas de incógnita del cuestionario.

4.6 PRIMER GRADO DE SECUNDARIA, ITALIA

La *tabla 10* muestra los porcentajes de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) por ítem de los alumnos italianos de primer grado de secundaria.

	Simbolización			Determinación			Interpretación	
	1.a	1.b	15.b	3.a	3.b	3.c	4.b	4.h
% RC	74	19	5	0	0	23	9	1
% RI	16	62	59	23	55	17	49	35
% ND	10	19	36	77	45	60	42	64

Tabla 10 Porcentaje de alumnos con respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND).

De manera general se puede decir, que la mayoría de los estudiantes italianos de primero de secundaria tienen dificultades para contestar estos ítems, excepto el ítem 1.a que fue resuelto correctamente por 74% de los alumnos. Esto indica que la mayoría de los estudiantes son capaces de simbolizar la incógnita y utilizarla para plantear una ecuación del tipo $ax = b$. En contraste, los ítems 1.b y 3.c, fueron resueltos correctamente por menos del 25% de los alumnos, mientras que los ítems 15.b, 4.b y 4.h, obtuvieron menos del 10% de respuesta correcta y no hubo ningún alumno que resolviera correctamente los ítems 3.a y 3.b. Se observa también, que los ítems 3.a, 3.c y 4.h, obtuvieron más del 50% de respuesta no dada. El siguiente análisis se presenta por separado y corresponde a los ítems que requieren de simbolizar, determinar e interpretar la variable como incógnita.

4.6.1 Simbolización de la incógnita

Los ítems 1.a, 1.b y 15.b indagan la capacidad de los estudiantes para simbolizar la incógnita y utilizarla para plantear una ecuación. El ítem 1.a fue resuelto correctamente por 74% de los alumnos, 16% dio una respuesta incorrecta y sólo 10% no respondió el ítem. Esto quiere decir que la mayoría de los alumnos son capaces de simbolizar una ecuación

sencilla dada verbalmente. El ítem 1.b es más complicado que el anterior (ver *Tabla 7*) y por esa razón no obtuvo resultados favorables, pues sólo 19% de los alumnos fueron capaces de simbolizar la incógnita y usarla para plantear una ecuación del tipo $x(x + a) = b$, mientras que la mayoría de ellos no ha desarrollado esa habilidad (62% responde incorrectamente y 19% no respondió el ítem). El ítem 15.b como ya se ha dicho, es aún más complicado y sólo 5% de los alumnos fueron capaces de plantear la ecuación que resuelve el problema. La gran mayoría de estudiantes no fueron capaces de simbolizar la ecuación del ítem (59% responde incorrectamente y 36% no respondió el ítem). Esto quiere decir que la mayoría de alumnos no son capaces de tomar en cuenta los datos de un problema para plantear una ecuación que lo resuelva.

4.6.2 Determinación de la incógnita

Los ítems 3.a, 3.b y 3.c indagan la capacidad de resolver ecuaciones para determinar el valor de la incógnita. De estos ítems, el ítem 3.c es el más sencillo pues como se ha venido diciendo, para determinar el valor de la incógnita de la ecuación $4 + x = 2$, no se requiere de la manipulación algebraica (ver *Tabla 7*). Si bien este es el ítem más sencillo, fueron pocos los alumnos (23%) capaces de resolver la ecuación correctamente. La mayoría de alumnos no fueron capaces de hacerlo (17% responde incorrectamente y 60% no responde el ítem). El ítem 3.a es más complejo porque se requiere manipular la variable para determinar la incógnita de la ecuación (ver *Tabla 7*), quizá por eso ningún alumno lo respondió correctamente, esto quiere decir que los alumnos italianos de primer grado no fueron capaces de manipular la variable para determinar el valor de la incógnita de una ecuación de dos pasos pues 23% responde incorrectamente y 77% no respondió el ítem. El ítem 3.b es aún más complejo de resolver, ya que se trata de una ecuación de segundo grado (tema que no se trabaja en primero de secundaria) del tipo $(a + b)^2 = c$. Al igual que el ítem anterior, ningún alumno lo respondió correctamente (55% dio una respuesta incorrecta y 45% no lo respondió). No es preocupante en este grado que los alumnos de primero obtuvieran estos resultados en este ítem, pues como se ha dicho en apartados anteriores, el cálculo de la incógnita en ecuaciones lineales y de segundo grado es un contenido reservado para enseñarse en tercer año de secundaria en Italia. Destaca entonces, el 55% de respuesta

incorrecta del ítem 3.b, probablemente, algunos alumnos lo intentaron resolver debido a la familiarización que tienen con problemas de valor faltante.

4.6.3 Interpretación de la incógnita

Los ítems 4.b y 4.h indagan la capacidad de interpretar la variable simbólica que aparece en una expresión algebraica como incógnita. El ítem 4.b lo resolvieron correctamente 9% de los alumnos, 49% dio una respuesta incorrecta y 42% no respondió el ítem. Panorama similar tiene el ítem 4.h, misma instrucción pero más complejo (Ver *Tabla 7*). Sólo 1% del alumnado dio respuesta correcta, 35% respondió incorrectamente y 64% de los alumnos no respondió el ítem. Si bien los resultados reflejan una pobre conceptualización de la variable como incógnita, no debe sorprender que así sea, pues que los alumnos no sean capaces de simbolizar, determinar e interpretar la incógnita en primero de secundaria, puede ser en buena medida responsabilidad de su sistema de enseñanza, pues como ya se mencionó, en Italia, se trabaja el álgebra esencialmente en el último año de enseñanza básica.

4.7 TERCER GRADO DE SECUNDARIA, ITALIA

La *Tabla 11*, muestra el porcentaje de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) por ítem de los alumnos italianos de tercero de secundaria.

	Simbolizar			Determinar			Interpretar	
	1.a	1.b	15.b	3.a	3.b	3.c	4.b	4.h
% RC	82	39	20	52	0	60	36	20
% RI	15	52	63	38	79	26	31	42
% ND	3	9	17	10	21	14	33	38

Tabla 11 Porcentaje de alumnos con respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND).

En la *Tabla 11*, se puede observar que más del 80% de los alumnos fueron capaces de simbolizar la incógnita y usarla para escribir una ecuación de un paso (ítem 1.a), pero menos del 40% simbolizan ecuaciones en las que hay que manipular la variable. También se puede ver que más del 50% fueron capaces de determinar el valor de la incógnita de ecuaciones lineales de un paso y dos pasos como las de los ítems 3.c y 3.a respectivamente. Sin embargo, ningún alumno determina los valores de una ecuación de segundo grado expresada como binomio al cuadrado (ítem 3.b). También se observa que menos del 40% de los alumnos fueron capaces de interpretar la variable simbólica como incógnita (ítems 4.b y 4.h).

4.7.1 Simbolización de la incógnita

El ítem 1.a fue resuelto correctamente por 82% de los alumnos italianos de tercero de secundaria (11% más que en primero de secundaria). Esto indica que los alumnos son capaces de traducir al lenguaje algebraico una ecuación sencilla dada verbalmente. Si bien, son pocos los alumnos de tercero que no logran desarrollar esta habilidad (15% respondió incorrectamente y 3% no respondió) los resultados no deben ser tomados a la ligera, pues son contenidos que deben estar muy presentes en los alumnos, ya que es en este grado cuando los trabajan. Que haya alumnos con dificultades para resolver este ítem puede ser señal de que existan lagunas en la enseñanza o el aprendizaje.

El ítem 1.b lo respondió correctamente 39% de estudiantes de tercero (21% más que en primero de secundaria). Si bien este porcentaje de respuesta correcta representa un avance considerable de primero a tercero, la mayoría de alumnos (52% respondió incorrectamente y 9% no respondió) tuvo dificultades para traducir al lenguaje algebraico una ecuación dada verbalmente del tipo $x(x + a) = b$. Sin embargo, se esperarían mejores resultados debido a que este tipo de contenidos se trabajan únicamente en tercero de secundaria, en este país y por lo tanto debería ser un conocimiento que esté más presente en los alumnos.

El tercer ítem que conforma este bloque es el 15.b. Sólo 20% de los alumnos de tercero fueron capaces de plantear la ecuación que resuelve un problema (15% más alumnos que en primero), mientras 63% de los alumnos respondió incorrectamente y 17% no respondió. Si bien, existe un avance en el porcentaje de respuesta correcta de primero a tercero, aún son la gran mayoría de alumnos los que tienen dificultades para analizar los datos de un problema y plantear una ecuación del tipo $x + (x + a) = b$. Estos resultados deben preocupar a la enseñanza y ser un punto de reflexión acerca de postergar hasta este grado de educación secundaria, la enseñanza del álgebra, pues hasta ahora, los resultados obtenidos en los ítems que miden la capacidad de simbolizar la incógnita y usarla para plantear una ecuación no han sido favorables, ya que han evidenciado que la mayoría de los alumnos tienen dificultades para plantear una ecuación cuando se requiere manipular la variable.

Por otro lado, al aplicarse el análisis Chi Cuadrada, se encontró que el porcentaje de alumnos de tercero (31%) que demostró tener la capacidad de simbolizar la incógnita y usarla para plantear ecuaciones, fue mayor que el porcentaje de alumnos de primero (15%). Esta

diferencia sin embargo, no fue estadísticamente significativa, $X^2(1, n = 64) = 3.26, p > 0.05$, lo que indica que en Italia, este aspecto de la incógnita no hace diferencia entre grados. Probablemente el currículo italiano, esté obviando este aspecto fundamental del álgebra escolar, ya que parte importante de la resolución de problemas en el álgebra, es el uso y empleo del lenguaje algebraico ya sea para plantear ecuaciones o bien, para comunicar respuestas.

4.7.2 Determinación de la incógnita

El ítem 3.c, resultó ser el más sencillo de este grupo de actividades, 60% de los alumnos (38% más alumnos que en primero) fueron capaces de calcular el valor de la incógnita de la ecuación $4 + x = 2$. Sin embargo, todavía son muchos los alumnos de tercero que aún tienen dificultades para lograrlo (26% de los alumnos respondió incorrectamente y 14% no respondió). Si bien, son mayoría los alumnos capaces de calcular la incógnita de la ecuación, los que no lo logran deben ser un foco de atención, pues la enseñanza no está logrando que todos los alumnos asimilen el trabajo algebraico de la misma manera.

El ítem 3.a resultó más complejo que el anterior, pues para determinar el valor de la incógnita de la ecuación hay que manipular la variable (ver *Tabla 7*). El 52% de los alumnos logran calcular la incógnita de la ecuación (en primero de secundaria nadie fue capaz de hacerlo). Sin embargo, aún son muchos los alumnos que no son capaces de hacerlo (38% respondió incorrectamente y 10% no respondió). Si bien, el avance logrado de primero a tercero de secundaria es más que notable, todavía cerca del 50% de alumnos no logra determinar el valor de la incógnita en una ecuación del tipo $ax + b - cx = d + ex$.

Actividades como las del ítem 3.b, que implica resolver una ecuación de segundo grado del tipo $(a + x)^2 = b$, es tarea pendiente de la enseñanza italiana, pues al igual que en primero de secundaria ningún alumno de tercero respondió correctamente el ítem. Sin embargo, 79% de los alumnos de tercero respondió incorrectamente y 21% no respondió. La resolución de ecuaciones de segundo grado en Italia se trabaja parcialmente en tercer año de secundaria, quizá ese sea el motivo por el cual los alumnos no son capaces de resolver este ítem.

Por otro lado, al aplicarse el análisis Chi cuadrada, se encontró que el porcentaje de alumnos de tercero (21.8%) que demostró tener la capacidad de determinar el valor de la incógnita en diversas ecuaciones, fue mayor que el porcentaje de alumnos de primero, (3.1%). $\chi^2(1, n = 64) = 9.26, p < 0.005$, es decir, existen diferencias estadísticamente significativas entre los grados escolares. Esto indica que, probablemente, el currículo italiano este haciendo un mayor énfasis en la determinación y quizá está dejando de lado la simbolización.

4.7.3 Interpretación de la incógnita

El ítem 4.b fue resuelto correctamente por 36% de los alumnos (27% más que en primero de secundaria). Si bien, el avance mostrado en tercero es importante, aún son mayoría los alumnos que no son capaces de interpretar la variable simbólica como una incógnita (31% respondió incorrectamente y 33% no respondió), habrá que subrayar, que en poco tiempo (recordar que álgebra se enseña sólo en este año de educación secundaria), una buena parte de los estudiantes logra conceptualizar la ecuación lineal.

El ítem 4.h es un poco más complejo que el anterior (ver *Tabla 7*). En este ítem es necesario manipular de hecho o mentalmente la variable antes de interpretarla como incógnita. Si bien, la mayoría del alumnado italiano no tiene dificultades con la manipulación (ver ítem 3.a), pedirles que respondan cuántos son los valores que puede tomar la letra de una expresión algebraica en lugar de cuáles son esos valores, parece inhibir su capacidad manipulativa, pues su práctica escolar, parece estar encaminada a la manipulación y cálculo de valores y muy poco a utilizar esa información para reflexionar sobre ella. Sólo 20% de los alumnos (19% más alumnos que en primero) lograron interpretar la variable simbólica de la expresión algebraica como una incógnita. Es probable que estos alumnos, además de tener una concepción sólida de la ecuación lineal, se dan cuenta que tienen que manipular la variable simbólica para poderla interpretar. Sin embargo, la mayoría de alumnos de tercero no fueron capaces de interpretar correctamente la variable como incógnita (42% de los alumnos respondió incorrectamente y 38% no respondió), señal de que la enseñanza tiene aún mucho por hacer con actividades de este tipo.

Por otro lado, al aplicarse el análisis Chi Cuadrada, se encontró que el porcentaje de alumnos de tercero (25%) que demostró tener la capacidad de interpretar la variable

simbólica como incógnita en diversas expresiones algebraicas, fue mayor que el porcentaje de alumnos de primero, (6.2%). $X^2(1, n = 64) = 7.51, p < 0.005$, es decir, existen diferencias estadísticamente significativas entre grados, probablemente el currículo italiano esté promoviendo actitudes reflexivas en el alumno, sin embargo, la mayoría de alumnos tienen dificultades para interpretar la variable simbólica como incógnita.

4.8 COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS CORRECTAS EN PRIMERO Y TERCERO

La *Figura 5*, muestra los porcentajes de respuesta correcta por ítem de alumnos italianos de primero y tercero de secundaria.

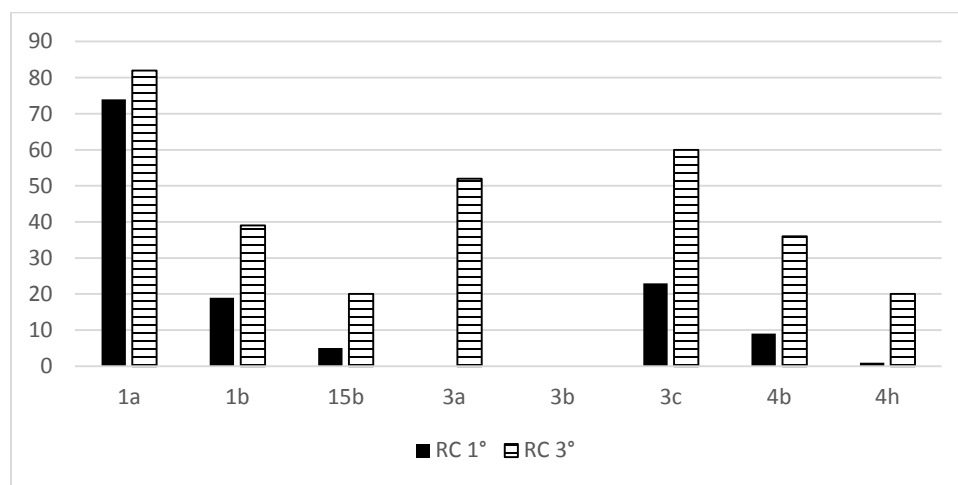


Figura 5 Porcentaje de respuesta correcta por ítem de alumnos de tercero de secundaria.

En la *Figura 5* se puede observar el incremento en el porcentaje de respuesta correcta de primero a tercero de secundaria en siete de los ocho ítems, fenómeno que se esperaba fuera en todos los ítems debido a la fuerte y única carga de instrucción algebraica que reciben los alumnos en su tercer año en la escuela secundaria. Sin embargo, también se observa que sólo tres ítems (1.a, 3.a y 3.c) en tercero de secundaria alcanzan el 50% de respuesta correcta. Esto nos permite afirmar que la mayoría de los alumnos a lo largo de su educación básica, han desarrollado la habilidad para traducir al lenguaje algebraico ecuaciones de un paso, dadas verbalmente (ítem 1.a). También, han desarrollado la habilidad para calcular el valor de la incógnita de ecuaciones de uno y dos pasos, ítems 3.c y 3.a respectivamente. Sin embargo, cuando se debe manipular la variable para simbolizar ecuaciones de dos pasos (ítems 1.b y 15.b), la mayoría de los alumnos en tercer año de secundaria, todavía tienen dificultades para

hacerlo. Respecto a la interpretación de la incógnita (ítems 4.b y 4.h), la gran mayoría de los alumnos no fueron capaces de hacerlo, si bien, existe un crecimiento importante en el porcentaje de respuesta correcta de primero a tercero de secundaria, son muy pocos alumnos los que han logrado consolidar sus conocimientos respecto a la incógnita. Por otro lado, el ítem 3.b, es el único ítem que no obtuvo crecimiento en el porcentaje de respuesta correcta, tanto en primero como en tercero de secundaria, no hubo alumnos que resolvieran correctamente este ítem, probablemente por el poco tiempo que la enseñanza dedica a la resolución de ecuaciones cuadráticas.

La Figura 6, muestra la cantidad de veces que aumenta el porcentaje de respuestas correctas en cada ítem.

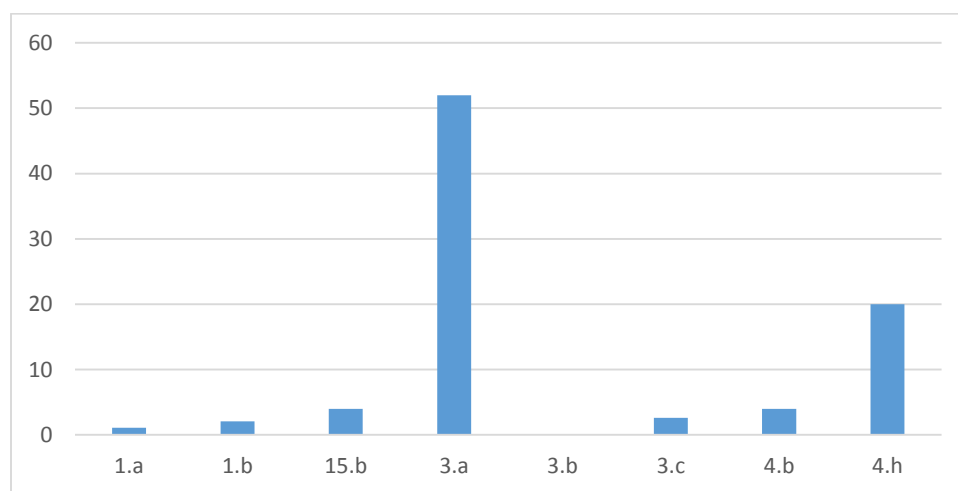


Figura 6 Cantidad de veces que aumenta el porcentaje de respuesta correcta por ítem.

Podemos observar que sólo tres ítems de ocho (15.b, 4.b y 4.h) aumentan 4 veces o más el porcentaje de respuesta correcta en tercero de secundaria. Esto sugiere que aspectos de la incógnita como calcular el valor de la variable de ecuaciones de un paso (ítems 3.c), simbolizar la ecuación de un problema (ítem 15.b) e interpretar una ecuación lineal (ítem 4h y 4h), son dificultades que los algunos alumnos logran superar a largo de la escuela secundaria. Sin embargo, estas dificultades permanecen en la mayoría de los estudiantes. Caso particular es el ítem 3.a, que si bien aparece en el gráfico con 52 veces más, hay que recordar que en primero de secundaria, el porcentaje de respuesta correcta de este ítem es de 0% por lo que no es posible establecer la razón que permite precisar este dato.

4.9 COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS INCORRECTAS EN PRIMERO Y TERCERO DE SECUNDARIA

La *Figura 7*, muestra el porcentaje de respuesta incorrecta por ítem de alumnos italianos de primero y tercero de secundaria.

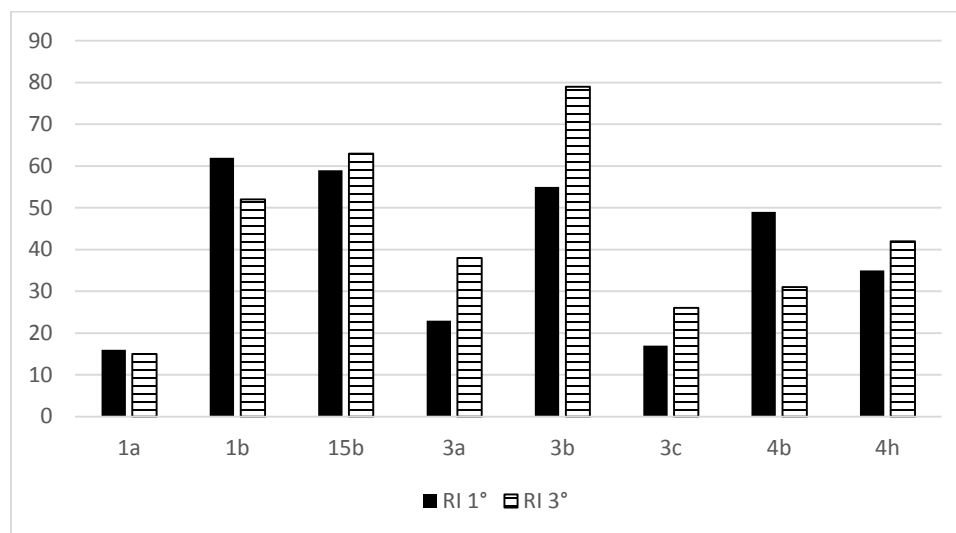


Figura 7 Porcentaje de respuesta incorrecta de alumnos de primero y tercero de secundaria.

En la *Figura 7*, se puede observar que los ítems 1.a, 1.b y 4.b disminuyen su porcentaje de respuesta incorrecta de primero a tercero de secundaria, posiblemente porque las actividades ligadas a traducir al lenguaje algebraico, ecuaciones dadas verbalmente (ítems 1.a, 1.b) son más frecuentes en el aprendizaje de estos alumnos, probablemente, esto influye para que el alumno interprete la incógnita de una ecuación del tipo $a + x + x = x + b$. Cuatro de los cinco ítems restantes (15.b, 3.a, 3.b, 4.h y 3.c), aumentan su porcentaje de respuesta incorrecta en tercero de secundaria, los primeros cuatro ítems, tienen la particularidad de que para resolverlos correctamente, es necesario manipular de hecho o mentalmente la variable, por lo que pudiera ser este aspecto el que propicie que algunos alumnos aún tengan dificultades para simbolizar, determinar e interpretar la variable como incógnita en ecuaciones de dos pasos. Por otro lado, el ítem 3.c, que como ya se dijo, aumenta su porcentaje de respuesta incorrecta en tercero, corresponde al cálculo de la incógnita de la ecuación $4 + x = 2$, por lo que pudiera suponerse que las dificultades de los alumnos para resolver esta ecuación, no son del tipo algebraico, pues se trata de una ecuación muy sencilla que no requiere de la manipulación algebraica, pero sí de operar con un número negativo.

El hecho de que los porcentajes de respuesta incorrecta aumenten de primero a tercero de secundaria, debe ser señal de alarma para la enseñanza italiana, pues el tiempo destinado a la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria italiana, se da sólo en tercero y tal vez, los alumnos no son capaces de consolidar sus conocimientos algebraicos en tan poco tiempo.

4.10 COMPARACIÓN DE PORCENTAJES DE RESPUESTAS NO DADAS

La *Figura 8*, muestra el porcentaje de respuestas no dadas de alumnos italianos de primero y tercero de secundaria.

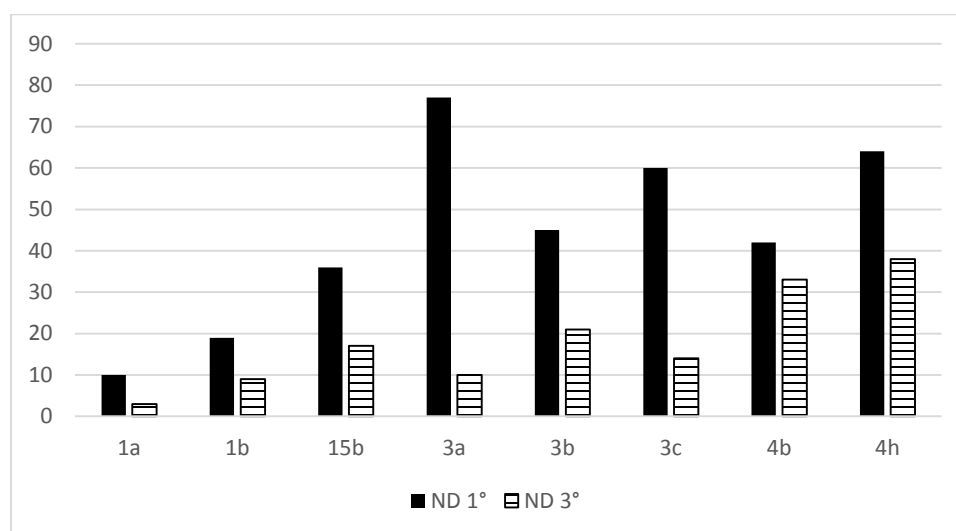


Figura 8 Porcentaje de respuesta no dada de alumnos de primero y tercero de secundaria.

En la *Figura 8* se observa, como en todos los ítems el porcentaje de respuesta no dada disminuye. Este comportamiento significa que son más los alumnos que en tercero de secundaria, bien o mal, responden los ítems. Esto permite corroborar que debido a la instrucción reciente de estos alumnos, cuentan con muchas más nociones que los motivan a dar una respuesta y por tanto, son menos los alumnos que dejan algunos ítems sin resolver. Sin embargo, se hubiera esperado en tercero de secundaria, todavía un menor porcentaje de respuestas no dadas en todos los ítems, pues ya se ha dicho que la única instrucción algebraica recibida por los alumnos es en tercero de secundaria. En general, no es posible determinar con certeza las causas de por qué hay alumnos que no dan respuesta a un ítem y al igual que con los alumnos mexicanos, la entrevista, hubiera sido una herramienta de gran utilidad para establecer algunas hipótesis y afirmaciones.

4.11 ANÁLISIS COMPARATIVO MÉXICO E ITALIA

En apartados anteriores, con base a los datos estadísticos, se identificaron algunas dificultades que los estudiantes de primero y tercero de secundaria de ambos países, tienen al trabajar con el concepto de variable como incógnita, también se mostró, si las dificultades presentadas por los alumnos que cursan primero de secundaria se mantienen en tercero y cuáles de ellas van siendo superadas en el paso de los estudiantes por la escuela secundaria. El siguiente apartado pretende mostrar, cuál grupo de estudiantes tiene más desarrollada la habilidad para trabajar con el concepto de variable como incógnita.

4.11.1 La incógnita en primer grado de secundaria en México e Italia

En la *Figura 9* se muestra un comparativo entre los porcentajes de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) de alumnos mexicanos e italianos de primer grado de secundaria. Esta representación permite ver de manera gráfica el desempeño de los alumnos cuando trabajan con el concepto de variable como incógnita.

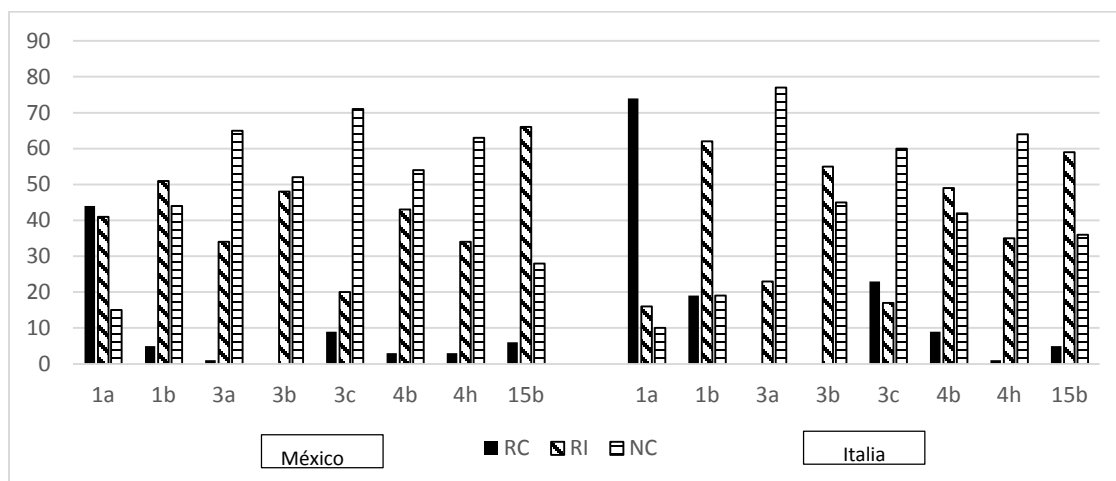


Figura 9 Comparativo entre los porcentajes de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

De acuerdo a los datos de la *Figura 9* y de manera general, los alumnos italianos tienen más desarrollada la capacidad para traducir al lenguaje algebraico una ecuación dada verbalmente (RC ítems 1.a y 1.b), este fenómeno no corresponde a la enseñanza del álgebra en cada país, ya que ni en México, ni en Italia, hay contenido explícito relacionado con este tema en este grado (ver *Tabla 4* y *Tabla 5*). En cuanto al ítem 15.b, los dos grupos de estudiantes presentan un panorama similar con bajos porcentajes de respuesta correcta. Estos tres ítems presentan un patrón en las tres categorías de respuesta, en el ítem 1.a, el porcentaje

de respuesta correcta es mayor al de respuesta incorrecta y al de respuesta no dada, por tal motivo podemos decir que en los dos grupos de estudiantes, muchos alumnos plantean una ecuación dada verbalmente. En los ítems 1.b y 15.b, los porcentajes de respuesta incorrecta son mayores, seguidos de los porcentajes de respuesta no dada, siendo los más bajos los porcentajes de respuesta correcta, por lo que los dos grupos de estudiantes tienen fuertes dificultades para plantear una ecuación dado un problema.

Se hubieran esperado mejores resultados por parte de los alumnos mexicanos en determinar de la incógnita de la ecuación del ítem 3.c, debido a que ellos sí reciben instrucción que les permiten resolver ecuaciones del tipo $x + a = b$. Sin embargo, son los alumnos italianos los que obtienen mejores resultados, probablemente su familiaridad con problemas de valor faltante les ayudó para obtener mejores resultados. Por otro lado, no deben sorprender los bajos porcentajes de respuesta correcta que obtuvo el ítem 3.a, pues ecuaciones del tipo $ax + bx + c = dx + e$ no se trabajan en primero de secundaria en ninguno de los dos países, sin embargo, 1% del alumnado mexicano respondió correctamente el ítem. En cuanto al ítem 3.b, no debe ser alarmante que ningún alumno mexicano o italiano resolviera correctamente el ítem, pues no es hasta tercero de secundaria que se les enseña a los alumnos de ambos países a resolver ecuaciones de segundo grado (ver *Tabla 4* y *Tabla 5*), por lo que los alumnos que responde este ítem, probablemente den respuestas intuitivas o basadas en sus experiencias previas con problemas de valor faltante.

En cuanto a interpretar la variable simbólica como incógnita, los dos grupos de estudiantes tienen una pobre conceptualización de ella, sin embargo, se hubieran esperado mejores resultados por parte de los alumnos mexicanos, pues ellos, a diferencia de los alumnos italianos, sí trabajan con el concepto de variable como incógnita en primero de secundaria. Si bien, esta instrucción está relacionada específicamente con el cálculo de la incógnita de ecuaciones de un paso, se hubiera esperado que algunos alumnos reflexionaran sobre ellos para responder los ítems 4.b y 4.h. Sin embargo, con todo y que los alumnos italianos no reciben instrucción sobre este tema, obtienen mejores resultados que los alumnos mexicanos.

4.11.2 La incógnita en tercer grado de secundaria en México e Italia.

La *Figura 10* muestra un comparativo de los porcentajes de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) por ítem de los alumnos mexicanos e italianos de tercer grado de secundaria.

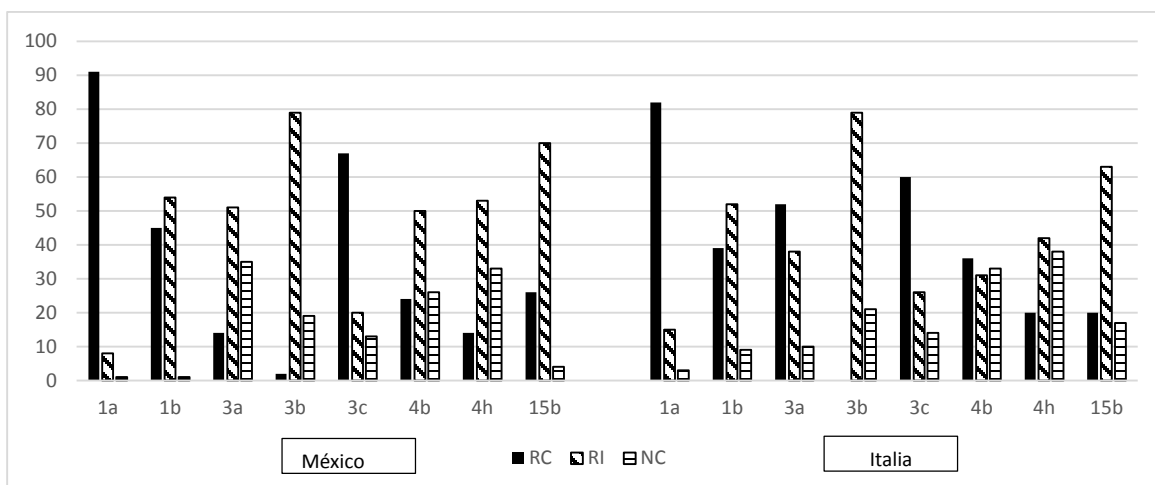


Figura 10 Comparativo de los porcentajes de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND) de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

En la *Figura 10* se puede observar, en relación a simbolizar de la incógnita y utilizarla para escribir una ecuación (ítems 1.a, 1.b, 15.b) que los alumnos mexicanos obtienen mejores resultados en cada ítem, el porcentaje de respuesta correcta de estos alumnos es mayor al porcentaje de respuesta correcta de los alumnos italianos. Lo anterior sugiere, que la enseñanza en México ha sido más eficaz en este tipo de actividades.

En cuanto a determinar la incógnita de una ecuación de un paso como la del ítem 3.c, son los alumnos mexicanos los que obtienen mejores resultados. Si bien, este porcentaje es alto en los dos grupos de estudiantes, el porcentaje de respuestas correctas en México está por encima del 65%, mientras que por Italia, este porcentaje apenas alcanza 60%. El ítem 3.a, es resuelto correctamente por un mayor porcentaje de alumnos italianos, lo que sugiere que en Italia, la manipulación de la variable es un aspecto que se trabaja más que en México. Por otra parte, el ítem 3.b es resuelto correctamente por muy pocos alumnos, todos ellos mexicanos. Si bien, los alumnos mexicanos obtienen mejores resultados que los alumnos italianos, los resultados son muy alarmantes, quizá más en México que en Italia, pues como se ve en la *Tabla 4* y la *Tabla 5*, calcular la incógnita de una ecuación de segundo grado, se

trabaja mucho más en México que en Italia, por lo que el 2% de respuesta correcta obtenido en México en este ítem, no corresponde a las intenciones del currículo mexicano.

Interpretar la variable simbólica de una expresión algebraica, como incógnita (ítems 4.b, 4.h), es una habilidad que desarrollan muy pocos alumnos en ambos países, sin embargo, se esperarían mejores resultados de los alumnos italianos, pues parte de su enseñanza está enfocada en la conceptualización de la ecuación (ver *Tabla 5*), mientras que en México, las actividades se enfocan poco en ese tema (ver *Tabla 4*). Quizá por ello, los alumnos italianos obtienen mejores resultados en ambos ítems y tiene más desarrollada esta habilidad.

Hasta ahora se han presentado en diferentes apartados, análisis que hablan de las dificultades de los alumnos en un grado y región específica, también, de si éstas dificultades se mantienen o no a lo largo de la escuela secundaria y además, cuál es el grupo de estudiantes que obtienen mejores resultados al trabajar con el concepto de variable como incógnita. A continuación, se presenta cuál es el grupo de estudiantes que aprende más a lo largo de la escuela secundaria y en qué actividades.

4.12 Aprendizaje del concepto de variable como incógnita a lo largo de la escuela secundaria.

La *Figura 11* muestra la diferencia porcentual, obtenida de los porcentajes de respuesta correcta de cada ítem de primero y tercero de secundaria de alumnos mexicanos e italianos. En ella podemos observar, porcentualmente, el aumento de respuestas correctas que se da de primero a tercero de secundaria.

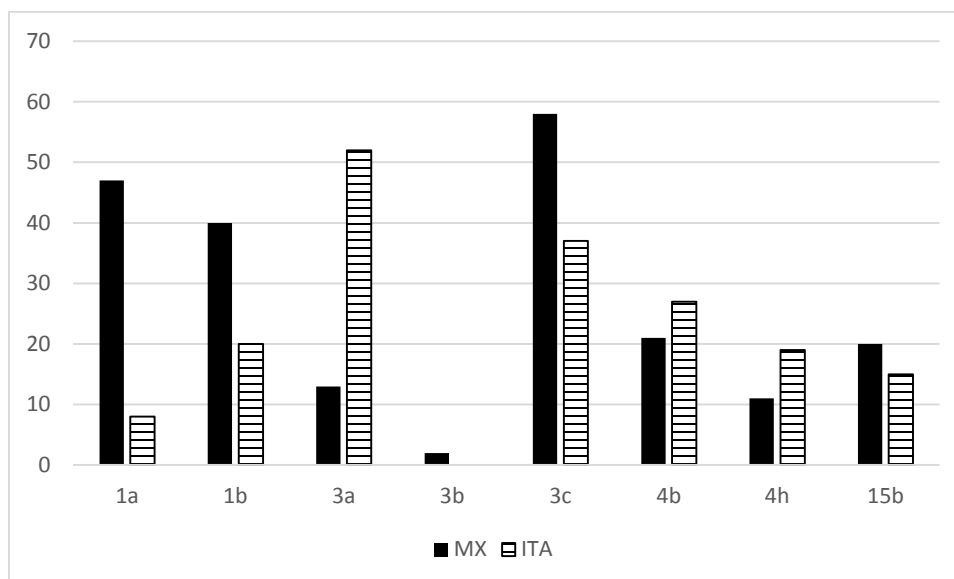


Figura 11 Comparativo de la diferencia porcentual obtenida de primero a tercero de secundaria de alumnos mexicanos e italianos.

Los datos que muestra la *Figura 11*, nos permiten decir que un porcentaje más alto de alumnos mexicanos que italianos aprenden a simbolizar la incógnita y la utilizan para plantear ecuaciones, sea dadas verbalmente (ítems 1.a y 1.b) que a partir de un problema (ítem 15.b). Por otro lado, en México se consolida la capacidad de calcular la incógnita de una ecuación de un paso (ítem 3.c). En Italia, realizar esta actividad no representa muchas dificultades, por lo que es natural que sea un mayor porcentaje de alumnos mexicanos los que desarrollan esta capacidad a lo largo de la escuela secundaria. Sin embargo, es mayor el porcentaje de alumnos italianos que aprenden a calcular la incógnita en ecuaciones de dos pasos (ítem 3.a). En México a pesar de que hay avances, sigue siendo tarea pendiente para la enseñanza desarrollar en los alumnos la capacidad de manipular la variable. Así mismo, las ecuaciones de segundo grado son tarea pendiente de los sistemas de enseñanza de ambos países. Si bien, en México el currículo trabaja ampliamente este concepto algebraico (ver *Tabla 4*), es posible que los métodos de enseñanza no sean los más apropiados dada la complejidad de este tema. Mientras que en Italia, cabe la posibilidad de cuestionar la conveniencia de trabajar de manera más amplia este concepto (ver *Tabla 5*) y esperar a que los resultados mejoren.

Interpretar la incógnita (ítem 4.b, 4.h) es una capacidad que desarrollan más los alumnos italianos, probablemente como ya se dijo, producto de las actividades específicas que hay en el currículo italiano para que el alumno entienda el concepto de ecuación (ver

Tabla 5). Sin embargo, hay que subrayar que con todo y las actividades destinadas en el currículo de ambos países, interpretar la incógnita, es el aspecto en donde la enseñanza queda a deber más, pues es aquí donde los estudiantes presentan mayores dificultades y cómo esperar que conceptualicen la incógnita, si la mayoría de los estudiantes no es capaz de simbolizarla y determinarla en distintas situaciones.

La *Figura 12*, muestra comparaciones relativas del porcentaje de respuestas incorrectas entre el porcentaje de respuestas correctas de las distintas muestras.

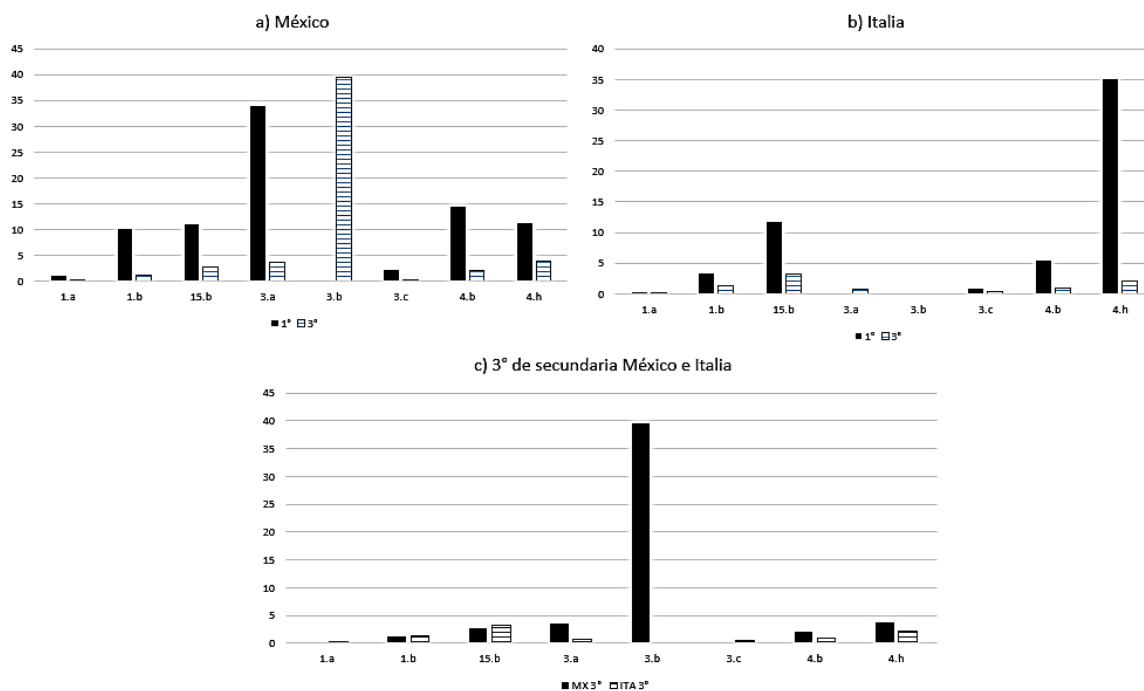


Figura 12 Comparativo de respuestas incorrectas (RI) entre respuestas correctas (RC) por ítem. a) México primero y tercero de secundaria; b) Italia primero y tercero de secundaria; c) México tercero de secundaria e Italia tercero de secundaria.

La *Figura 12* está compuesta por tres gráficos. El primero de ellos es el inciso a), que compara por ítem, las razones existentes entre los porcentajes de respuestas incorrectas y correctas de primero y tercero de secundaria en México. Se puede observar en siete de los ocho ítems (1.a, 1.b, 15.b, 3.a, 3.c, 4.b y 4.h) que la razón en cada uno es menor en tercero de secundaria que en primero, lo que sugiere que algunos alumnos de tercero si logran superar las dificultades para trabajar con el concepto de variable como incógnita en este grado escolar. El ítem 3.b no muestra este comportamiento, dado que no es posible determinar la

razón entre el porcentaje de respuesta incorrecta y el porcentaje de respuesta correcta en primero, pues en este último grado, no hubo alumnos con respuesta correcta.

El segundo gráfico que muestra la *Figura 12*, es el inciso b), este gráfico también compara por ítem, las razones existentes entre los porcentajes de respuestas incorrectas y correctas de los alumnos de primero y tercero pero de los alumnos italianos. Se puede observar en seis de los ocho ítems (1.a, 1.b, 15.b, 3.c, 4.b y 4.h) que la razón en cada uno es menor en tercero de secundaria que en primero, lo que sugiere que algunos alumnos si logran superar las dificultades para trabajar con el concepto de variable como incógnita en este grado escolar. Por otro lado, el ítem 3.b y 3.a no muestran este comportamiento debido a que en primero de secundaria no hubo alumnos que resolvieran correctamente este ítem y por tanto, no es posible establecer las razones correspondientes.

El último gráfico que compone la *Figura 12* es el inciso c), en él se compara por ítem las razones existentes entre los porcentajes de respuestas incorrectas y correctas de alumnos de tercero de secundaria de cada país. En cuanto a simbolizar la incógnita (ítems 1.a, 1.b y 15.b), se confirma lo dicho en apartados anteriores: simbolizar la incógnita y utilizarla para plantear ecuaciones sea dadas verbalmente o a partir de un problema, es un aspecto de la variable que al parecer se trabaja más en México que en Italia. Respecto a determinar el valor de la incógnita se ha dicho también que calcular la incógnita de ecuaciones de un paso (ítem 3.c) no representa mayores dificultades para la mayoría de alumnos de tercero de secundaria en ambos países y este gráfico lo confirma. Así como también se confirma que calcular el valor de la incógnita de ecuaciones de dos pasos (ítem 3.a), es un aspecto de la variable en el que los alumnos italianos obtienen mejores resultados. Análisis aparte (en apartados anteriores se discutió) es la resolución de ecuaciones cuadráticas (ítem 3.b), ya que en este sentido, no es posible comparar las muestras, pues en Italia, ningún alumno respondió correctamente el ítem.

CAPÍTULO V

5 ANÁLISIS CUALITATIVO

El apartado que a continuación se presenta corresponde al análisis cualitativo de las producciones erróneas de los estudiantes de ambos países. Con ello se pretende mostrar si existen diferencias en los errores que cometen los alumnos y las dificultades que tienen. Cuando los alumnos trabajan con el concepto de variable como incógnita no sólo simbolizan, interpretan y determinan el valor de la incógnita. Estas actividades traen consigo, de acuerdo a las características del problema, otros aspectos como la manipulación y la sustitución algebraica. El análisis de los ítems se analiza de acuerdo a la organización de la *Tabla 7*.

5.1 SIMBOLIZACIÓN

Este bloque de actividades lo conforman tres ítems (1.a, 1.b, 15.b) en los cuales hay que simbolizar la incógnita y usarla para escribir una ecuación. Como ya se analizó en la *Tabla 7*, cada ítem cuenta con características específicas que hacen que la simbolización de la incógnita se torne más compleja en un ítem que en otro.

5.1.1 Ítem 1.a primero de secundaria México e Italia

El ítem *1.a*, como ya se dijo, requiere de escribir en lenguaje algebraico la ecuación dada verbalmente (*ver tabla 7*) sin que sea necesario resolver la ecuación. La *Tabla 12* muestra las dos respuestas incorrectas más comunes de estudiantes mexicanos e italianos de primero de secundaria. En México, 44% responde correctamente, 41% responde incorrectamente y 15% no da respuesta. En Italia, 74% responde correctamente, 16% responde incorrectamente y 10% no da respuesta.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 1° de secundaria	Alumnos italianos de 1° de secundaria
Primera	Resuelven la ecuación (25%)	Falso (7%)
Segunda	Ningún número (1%)	Resuelven la ecuación (4%)

Tabla 12 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

Como se observa en la *Tabla 12*, tanto alumnos mexicanos como alumnos italianos se equivocan de la misma manera, aunque en diferentes proporciones. Si bien, las respuestas

incorrectas más comunes de los alumnos son las mismas en ambos países, las realidades son diferentes, pues no es lo mismo, dar en mayor medida, un número como respuesta que negar el enunciado del ítem. A continuación se analiza lo que involucra responder de una u otra manera.

La *Figura 13* y La *Figura 14* son ejemplos de cómo responden incorrectamente muchos alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

1.a Un número desconocido multiplicado por 13 es igual a 127.

$R = 9.77$ El número desconocido es 9.77 que multiplicado por 13 da 127

$$\begin{array}{r} 09.77 \\ 13 \overline{) 127.00} \\ \underline{109} \\ 180 \\ \underline{169} \\ 110 \\ \underline{91} \\ 190 \\ \underline{156} \\ 340 \\ \underline{271} \\ 690 \\ \underline{651} \\ 390 \\ \underline{390} \\ 0 \end{array}$$

Figura 13 Ejemplo de la respuesta incorrecta más común que dan alumnos mexicanos de primero de secundaria.

1.a Un número sconosciuto moltiplicato per 13 è uguale a 127.

$127 : 13 = 9 \quad 13 \cdot 9 = 127$

Figura 14 Ejemplo de la segunda respuesta más común que dan alumnos italianos de primero de secundaria.

En los ejemplos se pueden observar las similitudes en la manera de resolver el ítem por los estudiantes. En ambos casos, plantean con los datos del problema una operación aritmética que les permite calcular el número desconocido que cita el enunciado. Lo que nos indica que si son capaces de reconocer en el enunciado la incógnita (I1). Posteriormente, resuelven la división (en la *Figura 10* ha y un error operacional en la división) para determinar así el valor de la incógnita (I4) y todavía van más allá, comprueban su resultado realizando una multiplicación (I3). En resumen, los alumnos que responden de esta manera, son capaces de reconocer la incógnita, determinar su valor y comprobar que ese valor satisface la ecuación (I1, I4, I3). Los alumnos entienden correctamente la ecuación del problema, es probable que cuenten con una imagen mental de la ecuación, sin embargo, sus conocimientos algebraicos no son aún suficientes para traducir al lenguaje algebraico (I5) la ecuación dada verbalmente.

La *Figura 15* y la *Figura 16*, son ejemplos de respuestas incorrectas, que dieron a este ítem, algunos alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria. Si bien, no son respuestas idénticas, lo que subyace en ellas, podrían ser las mismas capacidades y dificultades.

1.a Un numero sconosciuto moltiplicato per 13 è uguale a 127.

FALSO

Figura 15 Ejemplo de la respuesta incorrecta más común que dan alumnos italianos de primero de secundaria.

1.a Un numero desconocido multiplicado por 13 es igual a 127.

No hay ningun numero

Figura 16 Ejemplo de la segunda respuesta incorrecta más común que dan alumnos mexicanos de primero de secundaria.

De acuerdo al *Modelo 3UV*, es probable que en los dos casos anteriores, los alumnos interpreten el *número desconocido* como la representación de cualquier valor (G2) (aunque puede estar relacionado con la familiaridad que tienen los alumnos con los problemas de valor faltante) e intenten resolver la operación indicada en el ítem con distintos valores, con tal de comprobar que la igualdad se cumpla, al no tener éxito, dicen que el enunciado es falso o bien, que no existe número que satisfaga la igualdad. En ambos casos los alumnos tienen una pobre noción del concepto de incógnita y tienen dificultades para reconocerla en un enunciado verbal (I1), no son capaces de calcular su valor (I4) (como al parecer lo intentan pero sin hacer operación alguna) y mucho menos de simbolizar la ecuación (I5) dada en el ítem.

5.1.2 Ítem 1.a tercero de secundaria México e Italia

A continuación se presenta el análisis del ítem 1.a, correspondiente a los alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria. La *Tabla 13*, muestra la respuesta incorrecta más común de los dos grupos de estudiantes.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 3° de secundaria	Alumnos italianos de 3° de secundaria
1	Resuelven la ecuación (5%)	Resuelven la ecuación (6%)

Tabla 13 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Como se observa en la *Tabla 13*, es ya un porcentaje muy bajo de alumnos que da una respuesta incorrecta a este ítem. Encontramos que entre los alumnos, sea mexicanos que italianos de tercer año de secundaria, cometen el mismo error. En primero, los alumnos mexicanos cometieron este error en mayor proporción que sus compañeros de tercero, pero no así en Italia. El hecho de que alumnos de tercero todavía den la misma respuesta incorrecta que los alumnos de primero, nos dice que tienen las mismas dificultades para entender lo que pide el ítem que para simbolizar. Sin embargo, la situación es más preocupante para los

alumnos de tercero de secundaria, debido a que ellos ya han recibido a lo largo de su enseñanza la instrucción necesaria como para poder simbolizar la incógnita y operar con ella. Esto sugiere que en tercero de secundaria, los estudiantes no han sido capaces de superar las dificultades que se presentan en primero de secundaria y probablemente, la instrucción no ha hecho el suficiente énfasis en actividades que lleven al alumno a traducir al lenguaje algebraico una ecuación sencilla, dada verbalmente.

5.1.3 Ítem 1.b primero de secundaria México e Italia

Este ítem, en México lo resolvieron correctamente 5% de los alumnos, 51% lo respondió incorrectamente y 44% no dio respuesta. En Italia, 19% de los alumnos de primero respondió correctamente, 62% respondió incorrectamente y 19% no dio respuesta. Este ítem pese a que comparte la instrucción con el ítem anterior, resulta más complejo de resolver (ver *Tabla 7*).

La *Tabla 14*, muestra las dos respuestas incorrectas más comunes de los alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 1° de secundaria	Alumnos italianos de 1° de secundaria
Primera	$x(x) + 12 = 6$ (17%)	$n(n + n) + 12 = 6$ (24 %)
Segunda	Resuelven la ecuación (15%)	$x(x) + 12 = 6$ (16 %)

Tabla 14 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

En la *Tabla 14* se observan las dos respuestas incorrectas más comunes por cada grupo de estudiantes, también, las diferencias y similitudes en cuanto a los tipos de respuestas incorrectas que dan. Para este ítem se aprecian los intentos de los estudiantes (un porcentaje mayor de alumnos italianos) para simbolizar la ecuación dada verbalmente. Vemos dos intentos distintos de simbolizar la ecuación para los alumnos italianos, uno de ellos lo encontramos también para los estudiantes mexicanos. En cuanto a las diferencias, 15% de los alumnos mexicanos tratan de resolver la ecuación (segunda respuesta incorrecta más común), mientras que resolver la ecuación, no está dentro de las respuestas más comunes de los alumnos italianos. A continuación, se presenta el análisis correspondiente a lo anteriormente descrito.

La *Figura 17* y la *Figura 18*, son ejemplos de las similitudes que existen entre alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria al responder incorrectamente el ítem 1.b.

1.b Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número más 12, es igual a 6.

$$x(x) + 12 = 6$$

Figura 17 Ejemplo de respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

1.b Un numero sconosciuto, multiplicato per la somma dello stesso numero più 12, è uguale a 6.

$$2 \times 2 + 12 = 6$$

Figura 18 Ejemplo de segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

Si bien las respuestas no son idénticas, subyace en ellas la misma idea matemática. En ambos casos, los estudiantes son capaces de simbolizar la incógnita (I5) pero no logran producir con ella una expresión abierta (G4) con la cual deben operar después (ver *Tabla 7*). Tienen dificultades para simbolizar la ecuación que dicta el ítem (G2, G4, I5) y en consecuencia, escriben una ecuación que no traduce la dada verbalmente. Por el contrario, plantean una ecuación que representa una traducción literal (palabra por palabra) del enunciado al lenguaje algebraico. Si bien, los alumnos escriben la misma ecuación, los símbolos que utilizan para producirla son distintos. El hecho de que los alumnos mexicanos utilizan paréntesis en la producción de su ecuación, sugiere que ya no necesitan usar el signo operatorio como los italianos, además, demuestra que son capaces de representar la multiplicación sin indicarla. Por su parte, los alumnos italianos recurren al símbolo aritmético de la multiplicación para representar operaciones, por lo que su producción no deja ver a simple vista si el error es propio de la manipulación o en su defecto, consecuencia de un pobre conocimiento de símbolos algebraicos para representar operaciones y agrupar términos, o bien, de la tendencia aritmética para resolver problemas.

La *Figura 19*, es un ejemplo del segundo tipo de respuesta más común de los alumnos mexicanos de primero de secundaria.

1.b Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número más 12, es igual a 6.

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \times 2 \\ \hline 0 \\ 12 \\ \hline 24 \end{array}$$

Figura 19 Ejemplo de respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

Ellos son capaces de reconocer la incógnita del enunciado (I1), con los datos del problema plantean y resuelven una división, que según su razonamiento, proporciona el valor que corresponde a la incógnita (I4). Sin embargo no tienen la capacidad de simbolizar la ecuación dada verbalmente (I5), no sólo eso, tampoco simbolizan la incógnita y ninguna de las expresiones abiertas, parciales y necesarias para simbolizar la ecuación (G2, G4, I5). Es probable que los alumnos desconozcan el lenguaje algebraico, (clave para simbolizar cualquier expresión algebraica) y por eso todas sus simbolizaciones son del tipo aritmético.

La Figura 20, representa la respuesta incorrecta más común de los alumnos italianos de primero de secundaria.

× 1.b Un numero sconosciuto, moltiplicato per la somma dello stesso numero più 12, è uguale a 6.

$$n \cdot (n+1) + 12 = 6$$

Figura 20 Ejemplo de respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

Como se observa, estos alumnos son capaces de simbolizar la incógnita (I5), sin embargo, hacen una mala lectura de los datos del problema y como consecuencia no producen la ecuación esperada (I5), probablemente por una mala interpretación de una parte del enunciado (“un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número...”), que los lleva a representar tres veces la incógnita en la ecuación, como lo muestra la Figura 20. Es probable que estos alumnos no estén familiarizados con actividades de este tipo.

5.1.4 Ítem 1.b tercero de secundaria México e Italia

En México este ítem fue resuelto correctamente por 45% de los alumnos, 54% dio una respuesta incorrecta y 1% del alumnado no lo respondió. Mientras que en Italia, 39% de los alumnos respondió el ítem correctamente, 52% dio una respuesta incorrecta y 9% no dio respuesta al ítem. Si bien, el porcentaje de respuesta correcta aumenta de primero a tercero, aún son muchos los estudiantes de tercero que siguen teniendo dificultades para traducir al lenguaje algebraico una ecuación que amerita dos pasos: producir la expresión $x + 12$ y

usarla como objeto matemático que se puede operar para producir $x(x + 12)$ y llegar a la ecuación requerida. A continuación, se presenta el análisis de las respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 3° de secundaria	Alumnos italianos de 3° de secundaria
Primera	$x(x + x) + 12 = 6$ (20 %)	$x \cdot x + 12 = 6$ (17 %)
Segunda	$(x)(x^2) + 12 = 6$ (11%) $x \cdot 2x + 12 = 6$	$x(x^2 + 12) = 6$ (16%) $x \times 2x + 12 = 6$
Tercera	$x(x) + 12 = 6$ (10%)	$x \cdot (x + x) + 12 = 6$ (7 %)

Tabla 15 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

En la *Tabla 15* se observan las tres respuestas incorrectas más comunes que los alumnos dan al ítem 1.b, también se observa que alumnos mexicanos e italianos cometen errores muy similares aunque en distintas proporciones. Es interesante notar que a diferencia de los alumnos de primero de secundaria, ya no hay alumnos que intenten resolver la ecuación y todos tratan de simbolizar la ecuación dada verbalmente. En Italia, los alumnos de tercero de secundaria coinciden en dos tipos de respuesta con sus compañeros de primero (ver *Tabla 14*), fenómeno que se vuelve preocupante ya que puede indicar un estancamiento en sus conocimientos. Por otro lado, en México, los alumnos de tercero ya abandonaron la idea de resolver la ecuación que describe el ítem, muchos producen todavía el error más común de sus compañeros de primero (ver *Tabla 13*), otros, en su intento por simbolizar la ecuación, reproducen el que fue el error más común de los alumnos italianos de primero y que siguen cometiendo los alumnos italianos de tercero.

La *Figura 21* y la *Figura 22*, representan respectivamente, la primera y tercera respuesta incorrecta de algunos alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

1.b Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número más 12, es igual a 6.

$$(x)(x + x) + 12 = 6$$

Figura 21 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

1.b Un numero sconosciuto, moltiplicato per la somma dello stesso numero più 12, è uguale a 6.

$$x \cdot (x + x) + 12 = 6$$

Figura 22 Tercera respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

empleo del lenguaje algebraico para traducir la frase: “*multiplicado por la suma del mismo número...*”, la cual requiere simbolizar la suma de un número dado con la incógnita y utilizar esa expresión abierta para multiplicarla por la misma incógnita (G2). Los alumnos no son capaces de manipular la variable simbólica (G4) como lo pide el ítem y en su lugar, producen con la incógnita expresiones algebraicas, que a su entender significan “*multiplicar por sí mismo*” ($x^2, 2x$). Estas producciones refieren cierta confusión en el uso de exponentes y coeficientes. Lo anterior, refleja en los alumnos un pobre dominio del uso lenguaje algebraico para traducir enunciados verbales y de su capacidad para manipular la variable simbólica, probablemente a consecuencia de las pocas actividades practicadas en la escuela.

La diferencia entre las producciones de los alumnos mexicanos e italianos, radica en el empleo de símbolos para agrupar términos, así como del uso y empleo de signos operatorios para representar la multiplicación. Mientras que algunos alumnos mexicanos ya utilizan el paréntesis para agrupar términos y representar un producto, la mayoría de alumnos italianos utilizan otros símbolos, como el punto medio para indicar una multiplicación.

La *Figura 25* y la *Figura 26* representan respectivamente, la primera y tercera respuesta más común de alumnos italianos y mexicanos de tercero de secundaria.

1.b Un numero sconosciuto, moltiplicato per la somma dello stesso numero più 12, è uguale a 6.

$$x \cdot x + 12 = 6$$

Figura 25 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

1.b Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número más 12, es igual a 6.

$$x \cdot (x) + 12 = 6$$

Figura 26 Tercera respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

Estos alumnos responden igual que sus compañeros de primero, lo que sugiere que tienen las mismas dificultades y capacidades para resolver este ítem. La situación es preocupante en ambos grupos de estudiantes, ya que lejos de superar las dificultades que se manifiestan en primero de secundaria, éstas parecen mantenerse. Si bien, en México esta respuesta disminuye 7% de primero a tercero, en Italia pasa de 16% en primero a 17% en tercero de secundaria. Aunque sólo aumenta en 1%, es un reflejo de que las dificultades para simbolizar la incógnita y operar con ella, no disminuyen en tercero de secundaria, por el

contrario, se mantienen. La segunda situación y quizá más alarmante, está dada porque esta respuesta, pasa de ser la segunda respuesta incorrecta más común en primero de secundaria a ser la respuesta incorrecta más común en tercero de secundaria. Lo anterior puede hacernos suponer que la enseñanza no está siendo factor para que los alumnos superen las dificultades que se presentan en primero. Dado que se trata de un estudio transversal, no podemos saber si los alumnos que cometen este error en primero lo siguen cometiendo en tercero, o si se trate de un intento infructuoso de los alumnos que en primero no daban respuesta alguna.

Por otro lado, en estas respuestas también se puede notar, el uso de distintos símbolos matemáticos que emplean los alumnos para representar la multiplicación, los alumnos mexicanos utilizan el paréntesis, mientras que los alumnos italianos utilizan el punto medio para este fin.

5.1.5 Ítem 15.b primero de secundaria México e Italia

El ítem 15.b, en México, fue resuelto correctamente por 6% de los alumnos, 66% dio respuesta incorrecta y 28% no respondió el ítem. En Italia, 5% de los alumnos resolvió correctamente el ítem, 59% dio respuesta incorrecta y 36% no dio respuesta al ítem. Este ítem a diferencia de los dos anteriores, pide que los alumnos simbolicen la ecuación que resuelve el problema y no que resuelvan el problema. No se trata sólo de una traducción de los datos del enunciado al lenguaje algebraico, sino de interpretar el enunciado, considerar los datos del problema y escribir la ecuación que lo resuelve (ver *Tabla 7*).

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 1° de secundaria	Alumnos italianos de 1° de secundaria
Primera	Resuelven el problema (29%)	Resuelven el problema (46%)
Segunda	Simbolización incompleta de la ecuación (22%)	Simbolización incompleta de la ecuación (3%)

Tabla 16 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

La *Tabla 16* muestra las respuestas incorrectas más comunes de los alumnos de primero de secundaria. En ella se observa como ambos grupos de estudiantes responden de similar manera al ítem, siendo muchos más los alumnos italianos que resuelven el problema y muchos más los alumnos mexicanos que tratan de simbolizar la ecuación. A continuación se analizan los dos tipos de respuesta incorrecta.

La *Figura 27* y la *Figura 28*, muestran la manera en que la mayoría de los alumnos responden incorrectamente el ítem.

15.b Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Qué edad tiene cada uno?

$$\begin{array}{r} 41 \\ -15 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 2 \overline{)26} \\ \underline{06} \\ 0 \end{array}$$

Santiago 13 años
Juan $13 + 15 = 28$ años

Figura 27 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

15.b Giovanni è 15 anni più vecchio di Santiago. La somma delle loro età è 41. Quali sono le loro età?

$$\begin{array}{r} 41 \\ -15 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 41 - 15 = 26 \\ 26 : 2 = 13 \text{ Santiago} \\ 13 + 15 = 28 \text{ Giovanni} \end{array}$$

Figura 28 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

En ambos casos, se observa que los alumnos se dan a la tarea de calcular las edades de los personajes del problema, pasando por alto la instrucción de sólo simbolizar la ecuación sin tener que resolverla. Es evidente que los alumnos no están acostumbrados a simbolizar la ecuación que resuelve un problema (I5), pero si son capaces de reconocer la incógnita (I1) y calcular su valor por medio de operaciones aritméticas (I4). Esto sugiere, sobre todo en el caso de los alumnos italianos, que en la enseñanza se hace mucho énfasis en la resolución de problemas y no se le da mucho peso a desarrollar la capacidad de simbolizar una ecuación. Con base en el análisis presentado en apartados anteriores, podemos decir que estos alumnos no están acostumbrados a analizar los datos de un problema, simbolizar la incógnita, producir expresiones abiertas y operarlas, sino más bien, están acostumbrados, sólo a dar respuestas numéricas.

En la *Figura 29* y la *Figura 30*, se observa la similitud en las respuestas de alumnos mexicanos e italianos cuando tratan de escribir una ecuación que resuelve un problema.

15.b Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Qué edad tiene cada uno?

$$15 + x = 41$$

Figura 29 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

15.b Giovanni è 15 anni più vecchio di Santiago. La somma delle loro età è 41. Quali sono le loro età?

$$15 + m = 41$$

Figura 30 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

Ambos grupos de estudiantes son capaces de simbolizar la mitad de la ecuación, o en su defecto, una de las ecuaciones que conformaría el sistema de ecuaciones que resuelve el problema (I5). Sin detenernos en la estrategia que los alumnos hayan seguido (ver *Tabla 7*), en ambos casos observamos las mismas capacidades y dificultades. En las respuestas de los alumnos podemos ver que son capaces de identificar la incógnita del problema (I1) y simbolizarla (I5). También manipulan la variable sumándola a un número dado ($15 + x$) (G4) igualan esta expresión con 41 y concluyen su procedimiento dando por hecho que esa ecuación resuelve el problema. Sin embargo, no son capaces de relacionar la incógnita con la segunda parte del problema (I1), por lo que no la simbolizan la relación existente, lo que los lleva a producir una ecuación que no corresponde al problema dado. Queda para la enseñanza en los dos países, trabajar más en actividades que lleven al alumno a analizar los datos explícitos e implícitos de un enunciado y/o de un problema, para relacionarlos y plantear las operaciones que se puedan indicar en un determinado problema utilizando el lenguaje algebraico.

5.1.6 Ítem 15.b tercero de secundaria México e Italia

Este ítem, en México fue resuelto correctamente por 26% de los alumnos, 70% respondió incorrectamente y 4% no dio respuesta. En Italia, 20% de los alumnos de tercero respondió correctamente el ítem, 63% respondió incorrectamente y 17% no lo respondió. La *Tabla 17* muestra las dos respuestas incorrectas más comunes de los alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 3° de secundaria	Alumnos italianos de 3° de secundaria
Primera	Simbolización incompleta de la ecuación (32%)	Resuelven el problema (27%)
Segunda	Ecuación incompleta con variables diferentes (20%)	Simbolización incompleta de la ecuación (22%)

Tabla 17 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

De manera general se puede decir que los alumnos mexicanos abandonan la idea de resolver el problema, mientras que los alumnos italianos parecieran estar estancados en sus conocimientos, ya que repiten las mismas respuestas que sus compañeros de primero (ver *Tabla 16*). A continuación, se ilustran y analizan estos tipos de respuesta.

La *Figura 31* es un ejemplo de la respuesta incorrecta que dan algunos alumnos mexicanos de tercero de secundaria, mientras que la *Figura 32* es el ejemplo de la segunda respuesta más común que dan algunos alumnos italianos de tercero de secundaria.

Este tipo de respuesta pasa de ser la segunda más común en primero a ser la más común en tercero de secundaria, lo que significa que muchos alumnos tienen las mismas dificultades que sus compañeros de primero (10% más alumnos de tercero que de primero de secundaria responden de esta manera), Este porcentaje, incrementa probablemente, porque los alumnos abandonan la idea de resolver el problema (lo cual significa un avance en sus conocimientos). Parece así, que los alumnos a lo largo de la escuela secundaria, no logran superar ideas que no son del todo correctas, pues siguen teniendo dificultades para analizar los datos del problema y ahí, en reconocer la incógnita, simbolizarla y manipularla (I1, I5, G4).

15.b Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Qué edad tiene cada uno?

$$15 + x = 41$$

Figura 31 Respuesta incorrecta más común que de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

Estos alumnos responden de la misma manera que sus compañeros de primero y mantienen este tipo de respuesta como la segunda respuesta más común. Lo preocupante con estos alumnos, es que el porcentaje de alumnos que responde de esta manera aumenta dramáticamente (del 3% en primero de secundaria pasa al 22% en tercero). Esto puede indicar que las actividades realizadas en el salón de clases no están encaminadas a lograr que los alumnos planteen ecuaciones analizando los datos de un problema. De ahí que la enseñanza, deba considerar si es necesario hacer más énfasis en actividades como la que se realiza en este ítem.

15.b Giovanni è 15 anni più vecchio di Santiago. La somma delle loro età è 41. Quali sono le loro età?

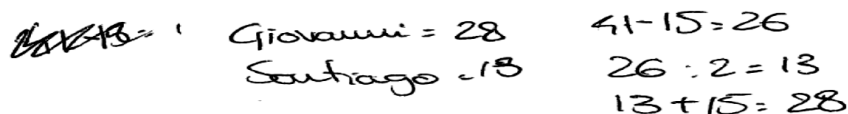
$$x + 15 = 41$$

Figura 32 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

La *Figura 33*, es ejemplo de la respuesta incorrecta más común que dan los alumnos italianos de tercer grado de secundaria.

15. Nel seguente problema scrivi solo l'equazione (non è necessario risolverla).

15.b Giovanni è 15 anni più vecchio di Santiago. La somma delle loro età è 41. Quali sono le loro età?



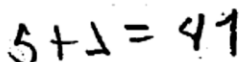
The image shows a handwritten student solution. On the left, the names 'Giovanni' and 'Santiago' are written with their respective ages, 28 and 13. On the right, a series of calculations are shown: $41 - 15 = 26$, $26 : 2 = 13$, and $13 + 15 = 28$.

Figura 33 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

Estos alumnos responden de la misma manera que sus compañeros de primero y mantienen esta respuesta como la más común, por lo que se puede decir que tienen las mismas dificultades que sus compañeros de primero de secundaria. Si bien el porcentaje de alumnos que da este tipo de respuesta disminuye (pasa del 46% en primero al 27% en tercero de secundaria), todavía muchos alumnos deciden resolver aritméticamente el problema (a pesar de que no se requiere). Probablemente estos alumnos no han logrado encontrar en el lenguaje algebraico una herramienta o medio para resolver problemas con instrucciones y características específicas.

La *Figura 34*, representa la segunda respuesta incorrecta más común que dan alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

15.b Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Qué edad tiene cada uno?



The image shows a handwritten student solution consisting of the equation $5 + 1 = 41$.

Figura 34 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

Estos alumnos utilizan las iniciales de los nombres de los personajes que aparecen en el problema para producir la ecuación que consideran, lo resuelve. Son capaces de identificar que la suma de las edades es 41, pero no son capaces de reconocer la incógnita (I1) y las relaciones en las que ésta se involucra con los demás datos del problema, para producir la ecuación correspondiente (G2, G4, I5). También es probable, que los alumnos interpreten la variable del problema como una abreviatura, tal y como lo menciona Küchemann (1978) y Booth (1988).

5.2 DETERMINACIÓN DE LA INCÓGNITA

Este bloque de actividades lo conforman tres ítems (3.a, 3.b, 3.c), en los tres casos se debe calcular el valor de la incógnita. Como ya se analizó en la *Tabla 7*, cada ítem cuenta con características específicas, por lo que calcular el valor de la incógnita es más complejo en un ítem que en otro.

5.2.1 Ítem 3.a primero de secundaria México e Italia

En primero de secundaria este ítem fue resuelto correctamente por 1% del alumnado mexicano, 34% respondió incorrectamente y 65% no dio respuesta al ítem. Por otra parte, en Italia, no hubo alumnos que lograrán resolver correctamente este ítem, 23% dio respuesta incorrecta y 77% de los alumnos no dio respuesta.

La *Tabla 18*, muestra las dos respuestas incorrectas más comunes que dan alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 1° de secundaria	Alumnos italianos de 1° de secundaria
Primera	Respuesta incorrecta sin procedimiento (17%)	Respuesta incorrecta sin procedimiento (11%)
Segunda	Error en la manipulación de términos (11%)	Letra evaluada (5%)

Tabla 18 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

En la tabla se observa que dar una respuesta al ítem sin hacer explícito un procedimiento es la respuesta incorrecta más común en ambos grupos de estudiantes. Lo que a continuación se presenta, es el análisis correspondiente a cada tipo de respuesta presentado en la tabla anterior.

La *Figura 35* y la *Figura 36*, son ejemplos de la respuesta incorrecta más común que dan alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

3. **Calcula los valores que puede tener la letra en las siguientes ecuaciones:**

3.a $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$

$x = 2$

Figura 35 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

3. Calcola i valori che può avere la lettera nelle seguenti equazioni:

3.a $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$
 $x = 2$

Figura 36 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

En las figuras anteriores se observa que los alumnos dan un valor a x , lo que significa que si entienden a la variable simbólica como la representación de un valor específico (I2), sin embargo, no existe en la respuesta de los estudiantes elementos suficientes que permitan profundizar en el análisis y con ello argumentar las posibles causas de su error.

La Figura 37, es un ejemplo de la segunda respuesta incorrecta más común que dan alumnos mexicanos de primero de secundaria.

3. Calcuła los valores que puede tener la letra en las siguientes ecuaciones:

3.a $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$

$13x + 2x + 5x = 30 + 27 = 57$

$3x = 57$
 $x = \frac{57}{3}$

Figura 37 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

En ella se detectan errores en la manipulación de los términos algebraicos y aritméticos. Los alumnos agrupan términos semejantes, del lado izquierdo del signo igual colocan los términos algebraicos y del lado derecho los aritméticos, sin embargo, cuando pasan un término algebraico o aritmético de un lado a otro del signo igual no cambian el signo, lo que los conduce a resultados incorrectos en sus operaciones. Los alumnos que responden de esta manera, son capaces de reconocer la variable simbólica como la representación de un valor específico (I2) pues calculan para ésta un único valor, en este caso incorrecto, pero no son capaces aún de manipular (G4) correctamente los términos de la ecuación, por lo que aplican incorrectamente el algoritmo del despeje algebraico.

La Figura 38, es el ejemplo de la segunda respuesta incorrecta más común que dan algunos alumnos italianos de este grado de educación secundaria.

3. Calcola i valori che può avere la lettera nelle seguenti equazioni:

3.a $13x^{\circ} + 27 - 2x = 30 + 5x^{\circ}$

Figura 38 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

Los alumnos que responden de esta manera, al parecer atribuyen a la letra un valor aleatorio. (Küchemann 1978 ya daba cuenta de este tipo de errores). De acuerdo al Modelo

3uv, es probable que este grupo de alumnos hayan considerado a la variable simbólica como una incógnita (I2), más que como un número general (G2), ya que a dos de las tres literales que aparecen en la ecuación le asignan mismo valor numérico arbitrario, pero dejan la otra libre de algún valor asignado, probablemente listo para calcularse. Sin embargo, no hay elementos suficientes en las producciones de los alumnos que ayuden a profundizar en las posibles causas de este proceder.

5.2.2 Ítem 3.a tercero de secundaria México e Italia

En México este ítem fue resuelto correctamente por 14% de los alumnos, 51% dio respuesta incorrecta y 35% no dio respuesta al ítem. En Italia 52% de alumnos de tercero de secundaria resolvieron el ítem correctamente, 38% lo respondió incorrectamente y 10% no lo respondió.

En la *Tabla 19*, se observan las dos respuestas incorrectas más comunes de estos dos grupos de alumnos.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 3° de secundaria	Alumnos italianos de 3° de secundaria
Primera	Respuesta incorrecta sin procedimiento (24%)	Respuesta incorrecta sin procedimiento (17%)
Segunda	Error en la manipulación de términos (18%)	Error en la conceptualización de la división (14%)

Tabla 19 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Se observa que las respuestas coinciden con las encontradas en primero de secundaria, se puede ver la similitud en la respuesta incorrecta más común, no sólo entre estos alumnos, sino también con sus compañeros de primero de secundaria (ver *Tabla 18*). Los porcentajes que se muestran en estos resultados, lejos de representar una mejora en tercer año de secundaria, parecen representar un estancamiento, probablemente producto de una instrucción insuficiente a lo largo de la escuela secundaria.

A continuación se analiza es la segunda respuesta incorrecta más común que dieron al ítem los alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

La *Figura 39*, es un ejemplo de la segunda respuesta incorrecta más común que dan algunos alumnos mexicanos de tercero de secundaria a este ítem.

3. Calcúla los valores que puede tener la letra en las siguientes ecuaciones:

3.a $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$

Handwritten work for 3.a: $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$
 $11x + 27 = 30 + 5x$
 $11x - 5x + 27 = 30$
 $6x + 27 = 30$
 $6x = 30 - 27$
 $6x = 3$
 $x = \frac{3}{6} = 0.73$

3.b $(x + 3)^2 = 36$

Figura 39 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

En el ejemplo se observa la manera en que son planteadas y resueltas algunas operaciones con los términos de la ecuación, por ejemplo, $13x - 2x$ es resuelta mentalmente por este alumno. Con lo anterior, el alumno demuestra ser capaz de operar monomios (G4), sin embargo, no es capaz manipular la variable simbólica para agrupar términos semejantes y posteriormente operarlos (G4), también tiene dificultades para operar la variable de los dos lados del signo igual, ignora la variable y suma su coeficiente 5, con la constante 30, lo que lo lleva a un resultado incorrecto.

La *Figura 40* representa la segunda respuesta incorrecta más común que dan los alumnos italianos de tercero de secundaria.

3. Calcola i valori che può avere la lettera nelle seguenti equazioni:

3.a $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$

Handwritten work for 3.a: $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$
 $13x - 2x - 5x = -27 + 30$
 $6x = 3$
 $x = \frac{6}{3} = 2$

3.b $(x + 3)^2 = 36$

Figura 40 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

Los alumnos que responden de esta manera son capaces de interpretar a la variable simbólica como incógnita (I2), pues calculan un único valor para ella, también son capaces de manipular la variable, agrupan correctamente términos semejantes y operan con ellos (G4), hasta obtener una ecuación sencilla ($6x = 3$), sin embargo al despejar a x , cometen el error de escribir el coeficiente como numerador (dividendo) en vez de como denominador (divisor). Es probable que este error este dado por la costumbre de expresar un cociente con el dividendo mayor que el divisor, o bien, por la necesidad de expresar un resultado con un número entero. Es en errores como estos donde la comprobación del resultado toma mayor importancia (I3), pues permitiría al alumno tomar conciencia de su error y corregir su

procedimiento. Quizá la enseñanza este obviando este paso importante de la resolución de ecuaciones, pues ningún estudiantes lo llevó a la práctica.

5.2.3 Ítem 3.b primero de secundaria México e Italia

En México no hubo alumnos de primer grado que resolvieran correctamente este ítem, 48% respondió incorrectamente y 52% no respondió el ítem. En Italia tampoco hubo alumnos de primero de secundaria que resolvieran correctamente el ítem, 55% respondió incorrectamente y 45% no respondió el ítem. El siguiente análisis corresponde a las dos respuestas incorrectas más comunes de este grupo de alumnos.

La *Tabla 20*, muestra las respuestas incorrectas de los alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 1° de secundaria	Alumnos italianos de 1° de secundaria
Primera	Conceptualización incorrecta de la potencia (19%)	Sólo una solución (34%)
Segunda	Sólo una solución (7%)	Conceptualización incorrecta de la potencia (10%)

Tabla 20 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

Observamos que ambos grupos de estudiantes dan las mismas respuestas pero en proporciones diferentes. Mientras que para los alumnos mexicanos, confundir la potencia 2 con duplicar un número representa la respuesta incorrecta más común, este mismo tipo de respuesta es la segunda más común para los italianos. Por otro lado, la respuesta incorrecta más común que dan los alumnos italianos es calcular una de las dos raíces de la ecuación, mientras que este tipo de respuesta es la segunda respuesta incorrecta más común de los alumnos mexicanos. De manera general, es posible decir que a pesar de ser un tema desconocido para los alumnos, cuentan con nociones algebraicas que les permiten dar una respuesta a este ítem. A continuación se presenta el análisis correspondiente a las producciones de los alumnos.

La *Figura 41* y *Figura 42*, son un ejemplo de las respuestas incorrectas más común que dan alumnos mexicanos e italianos respectivamente.

$$3.b \quad (x + 3)^2 = 36 \\ x = 15$$

Figura 41 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

$$3.b \quad (x + 3)^2 = 36 \\ x = 15$$

Figura 42 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

Se observan la similitud en las respuestas que dan los alumnos. Los estudiantes que responden de esta manera probablemente evalúan la letra (Kücheman, 1978), eligen el número 15 como el valor de la incógnita, que sumado a 3 da un total de 18, por último multiplican 18×2 y logran obtener 36, satisfaciendo así la igualdad. Una vez más se observa la confusión entre exponente y coeficiente. Pues en este caso operan la potencia 2, como el doble de lo que se encuentra dentro del paréntesis. Al parecer estos alumnos no consideran necesario manipular la variable (G4) para calcular las raíces de la ecuación (I4). También es probable que al tratarse de una ecuación de segundo grado, tema que no han trabajado en clase, ignoren se trate de una ecuación de segundo con dos raíces y quizá por eso, los alumnos tiendan a resolver el ejercicio mediante el cálculo mental y/o aritmético, o en su defecto, por ensayo y error. Es evidente que los alumnos tienen dificultades para resolver una ecuación de segundo grado y hasta cierta medida era de esperar que ningún alumno resolviera este ítem, sin embargo, resultan interesantes los diferentes acercamientos que tienen para enfrentarse a temas desconocidos para ellos.

La *Figura 43* y *Figura 44*, son un ejemplo de la primera y segunda respuesta incorrecta más común que dan alumnos italianos y mexicanos de primero de secundaria respectivamente.

$$3.b \quad \overset{3}{(x + 3)^2 = 36} \text{ valor de } x = 3$$

Figura 43 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

$$3.b \quad (x + 3)^2 = 36$$

$$(3 + 3)^2 = 6^2 = 36$$

Figura 44 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

La diferencia entre este tipo de respuesta y la anterior, es que en esta los alumnos logran obtener una de las dos raíces de la ecuación (I4), interpretan bien la función del exponente, parecieran tener bien afianzado el concepto de potenciación, además de operar como lo establece la jerarquía de operaciones. Sin embargo, al parecer desconocen que este tipo de ecuaciones tiene dos raíces. Es probable que el acercamiento de los alumnos para llegar al resultado sea similar al anterior, es decir, asignan un valor numérico a la letra y realizan las operaciones aritméticas indicadas.

5.2.4 Ítem 3.b tercero de secundaria México e Italia

En México este ítem fue resuelto correctamente por 2% del alumnado de tercero de secundaria, 79% respondió incorrectamente y 19% no respondió el ítem. En Italia no hubo alumnos de tercero de secundaria que resolvieran correctamente este ítem, 79% respondió incorrectamente y 21% no respondió el ítem. Enseguida se muestran las respuestas incorrectas más comunes que dieron los alumnos.

La *Tabla 21*, muestra las dos respuestas incorrectas más comunes que dan estos grupos de alumnos.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 3° de secundaria	Alumnos italianos de 3° de secundaria
Primera	Sólo una solución (37%)	Error en la manipulación (25%)
Segunda	Error en la manipulación (20%)	Sólo una solución (13%)

Tabla 21 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Una vez más observamos que tanto alumnos mexicanos como italianos dan las mismas respuestas pero en distintas proporciones. Los estudiantes italianos llevan a la práctica procesos más elaborados para resolver ecuaciones como las de este ítem, si bien varios de esos estudiantes tienen errores en la manipulación de términos. Los alumnos mexicanos se quedan esencialmente con procedimientos aritméticos, cálculo mental o ensayo y error para resolver este ítem, pues obtener una sola de las dos soluciones de la

ecuación, se manifiesta en tercero como la respuesta incorrecta más común de estos estudiantes y sólo unos cuantos, recurren a la manipulación algebraica en la resolución del ejercicio. A continuación se presenta el análisis correspondiente a los errores antes mencionados.

La *Figura 45* y *Figura 46* son un ejemplo de la manera en la que responden los alumnos mexicanos e italianos. Además representan la primera y segunda respuesta incorrecta más común respectivamente.

3.b $(x+3)^2 = 36$
 $(3+3)^2 = 36$

3.c $4+x=2$

$\frac{+3}{6} \times 6 \rightarrow 36$

Figura 45 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

3.b $(x+3)^2 = 36$ $(3+3)^2 = 36$ $x=3$

Figura 46 Segunda respuesta incorrecta de alumnos italianos de tercero de secundaria.

Se puede observar como ambos grupos de estudiantes son capaces, mediante una suma aritmética, de comprobar que el valor que han asignado a x satisface la ecuación (I3). Sin embargo, los alumnos no son capaces de obtener, sin importar el procedimiento, la otra raíz de la ecuación. Es probable que estos alumnos tengan dificultad para despejar la variable simbólica o en su defecto dificultad con la manipulación algebraica (G4) y por tal motivo, prefieran recurrir a métodos aritméticos para dar respuesta a este tipo de ejercicios.

La *Figura 47* y la *Figura 48* son ejemplos de la primera y segunda respuesta incorrecta más común que dan alumnos italianos y mexicanos respectivamente.

3.b $(x+3)^2 = 36$

$x^2 + 9 + 6x^2 = 36$
 $x^2 + 6x^2 = -9 + 36 \rightarrow 7x^2 = 27 \quad x = \frac{27}{7}$

3.c $4+x=2$

Figura 47 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

3.b $(x+3)^2 = 36$

$(x^2 + 9) = 36$
 $x^2 = 36 - 9$
 $x^2 = 27$
 $x = \sqrt{27} = 5.2$

Figura 48 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

Se pueden observar los distintos procedimientos que emplean los alumnos para dar respuesta al ítem. Por un lado, los alumnos italianos manipulan los términos de la ecuación tratando de desarrollar el binomio cuadrado que aparece en el primer miembro de la ecuación (G4). Sin embargo, la manipulación no es correcta, pues al operar la variable simbólica, este alumno escribe $6x^2$ como producto de la operación $2[3(x)]$, en lugar de $6x$. El alumno confunde parte de la regla que permite desarrollar un binomio cuadrado (“...el doble del producto, del primer término por el segundo término”) y opera la variable con el exponente. Posteriormente, agrupa y opera correctamente términos semejantes (G2, G4), despeja correctamente el coeficiente de la variable simbólica, pero ignora el exponente, una vez más se corroboran las dificultades que tienen con el exponente y el coeficiente. Por otro lado, los alumnos mexicanos, parecieran no conocer el algoritmo para desarrollar un binomio cuadrado o tienen muchas dificultades para aplicarlo. Presentan lo que para ellos es el resultado de desarrollar un binomio al cuadrado escribiendo $(x^2 + 9) = 36$ y a partir de ahí, despejan la variable simbólica correctamente. Al parecer, los alumnos que responden de esta manera no son capaces de manipular la variable simbólica (G4) ya sea por un débil dominio de los algoritmos o por dificultades con la manipulación. Los alumnos italianos y mexicanos son capaces de ver la variable simbólica como una incógnita (I2) y tratan de determinar su valor (I4), pero como ya se explicó, tienen dificultades en manipular la variable. Hay que señalar también, que las dificultades con la manipulación algebraica parecen ser más pronunciadas para los estudiantes mexicanos, ya que muchos menos estudiantes mexicanos que italianos recurren a ella.

5.2.5 Ítem 3.c primero de secundaria México e Italia

En México este ítem fue resuelto correctamente por 9% de alumnos mexicanos de primero de secundaria, 20% respondió incorrectamente y 71% no respondió el ítem. En Italia 23% de alumnos de primero de secundaria respondió correctamente el ítem, 17% respondió incorrectamente y 60% no respondió el ítem.

La *Tabla 22*, muestra las dos respuestas incorrectas más comunes que dan al ítem estos estudiantes.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 1° de secundaria	Alumnos italianos de 1° de secundaria
Primera	Letra evaluada (8%)	Letra evaluada (7%)
Segunda	Error en la manipulación (5%)	Error en la manipulación (3%)

Tabla 22 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

También se observa que existen similitudes en las respuestas y proporciones de alumnos que responden de una u otra forma, por lo que se puede suponer que alumnos mexicanos e italianos tienen las mismas dificultades y capacidades. Enseguida se analizan estos dos tipos de respuesta.

La *Figura 49* y *Figura 50* son ejemplos en la manera de responder de los alumnos mexicanos e italianos respectivamente.

Handwritten student work for a Mexican student. It shows the equation $3.c \quad 4+x=2$ and a crossed-out solution $x=2$.

Figura 49 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

Handwritten student work for an Italian student. It shows the equation $3.c \quad 4+x=2$ and the number 2 written to the right.

Figura 50 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

En ambos casos los alumnos eligen el número 2 como respuesta, no hay señales de manipulación explícita de alguno de los términos, por lo que es probable que ésta se haya dado de manera mental, o en su defecto, evaluaron la letra (Kuchemann 1978). En cualquiera de los casos, los alumnos no son capaces de calcular el valor de la incógnita (I4), pues el valor que le asignan a la variable simbólica es incorrecto. Si bien, se trata de una ecuación sencilla, el resultado que satisface la ecuación es un número entero negativo, de ahí la dificultad de este ítem (ver *Tabla 7*) y la importancia que tiene la sustitución para verificar el resultado (I3). Ningún alumno verificó el resultado al resolver esta ecuación, pues de llevarlo a la práctica, les ayudaría a tomar conciencia de su error y estarían en posibilidad de corregirlo. Queda entonces para la enseñanza, hacer énfasis en la importancia de la comprobación del resultado de una ecuación y poner en práctica actividades que generen la necesidad de este procedimiento algebraico.

La *Figura 51* y *Figura 52* representan la segunda respuesta incorrecta más común que dan al ítem alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria respectivamente.

3.c $4 + x = 2$
 $4 + x =$
 $4 + x - x = 2 - x$

Figura 51 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

3.c $4 + x = 2$ ~~4 + x = 2~~ $4 + -2 + 2 = 2$

Figura 52 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

En ambos casos los errores se sitúan en la manipulación de términos. Los alumnos mexicanos (*Figura 51*), intentan despejar la variable simbólica restándola en ambos miembros de la ecuación (pasos que en este caso, sólo sirve para cambiar de un miembro a otro la variable), dejan su procedimiento hasta ahí, sin ser capaces de resolver la ecuación (I2, I4). Es evidente que los alumnos que responden de esta manera tienen dificultades con el despeje algebraico, si bien, tienen una idea del modelo de la balanza para resolver ecuaciones, no han comprendido que en ecuaciones de este tipo, es preferible no manipular la variable, pues basta con la manipulación de los términos aritméticos para determinar el valor de la incógnita. Por su parte, los alumnos italianos (*Figura 52*), también parecen tener idea del modelo de la balanza para resolver ecuaciones, pero a diferencia de sus compañeros mexicanos, todas sus manipulaciones son aritméticas. También es probable que mediante una manipulación mental hayan calculado el valor de la incógnita, en este caso -2 y que su planteamiento sea para comprobar que ese valor satisface la ecuación. De cualquier manera, el planteamiento que hacen es incorrecto, no son capaces de determinar el valor de la incógnita (I4) y tienen dificultades con el despeje algebraico.

5.2.6 Ítem 3.c tercero de secundaria México e Italia

En México este ítem fue resuelto correctamente por 67% de alumnos de tercero de secundaria, 20% respondió incorrectamente y 13% no respondió el ítem. En Italia 60% de alumnos de tercero de secundaria respondió correctamente el ítem, 26% respondió incorrectamente y 14% no respondió el ítem. Si bien, la mayoría de los alumnos son capaces

de determinar el valor de la incógnita de este ítem, aún son muchos los alumnos que no logran hacerlo. A continuación se muestran las respuestas incorrectas más comunes de estos dos grupos de alumnos.

La *Tabla 23* muestra las dos respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria, se observa también, el mismo tipo de error en las respuestas, aunque en distintas proporciones y en distinto orden.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 3° de secundaria	Alumnos italianos de 3° de secundaria
Primera	Letra evaluada (8%)	Error en la manipulación (14%)
Segunda	Error en la manipulación (4%)	Letra evaluada (5%)

Tabla 23 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

El caso de los alumnos mexicanos es de llamar la atención, pues parece no haber avance alguno en su aprendizaje, ya que no sólo dan las mismas respuestas que sus compañeros de primero, sino que además las proporciones son casi idénticas (ver *Tabla 22*). Lo anterior hace suponer que la enseñanza a lo largo de la secundaria, no ha sido capaz de enfrentar las dificultades que estos alumnos presentan en sus primeros acercamientos con la resolución de ecuaciones simples y además, pareciera darse por hecho, que estas dificultades no afectarán el desempeño de los alumnos en temas más complejos, pues estos resultados así lo reflejan. Por ello, no es de sorprender que en ítems más complejos, como fueron los ítems 3.a y 3.b ya analizados, los alumnos tengan todavía muchas más dificultades para determinar el valor de la incógnita. Por otro lado, los alumnos italianos de tercero también presentan el mismo tipo de error que sus compañeros de primero, pero en proporciones y orden diferentes, lo cual puede ser una señal de que los alumnos algo están aprendiendo en su paso por la escuela secundaria y lo aplican para tratar de resolver ecuaciones de este tipo. A continuación se presenta el análisis correspondiente a las producciones de los alumnos.

La *Figura 53* y *Figura 54* representan la respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria y la segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos del mismo grado escolar.

$$\begin{array}{l} \downarrow \text{ 3.c} \quad 4 + x = 2 \\ x = 2 \end{array}$$

Figura 53 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

$$\begin{array}{l} \uparrow \text{ 3.c} \quad 4 + x = 2 \\ x = 2 \end{array}$$

Figura 54 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

Al igual que los alumnos de primero de secundaria, ambos grupos de estudiantes asumen que el valor de la variable es 2, probablemente producto de una manipulación mental de la ecuación. Estos alumnos presentan las mismas dificultades que sus compañeros de primero, pero al parecer más arraigadas, pues ya deberían haber recibido instrucción suficiente como para lograr resolver correctamente este tipo de ecuaciones.

La Figura 55 y Figura 56 representan la respuesta incorrecta más común de los alumnos italianos de tercero de secundaria y la segunda respuesta correcta más común de los alumnos mexicanos del mismo grado.

$$\begin{array}{l} \times \text{ 3.c} \quad 4 + x = 2 \\ x = 4 + 2 \\ x = 6 \end{array}$$

Figura 55 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

$$\begin{array}{l} \uparrow \text{ 3.c} \quad 4 + x = 2 = 2 \\ x = 2 - 4 \\ x = 2 \end{array}$$

Figura 56 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

En ambos casos los alumnos reconocen la variable simbólica como una incógnita (I2) y por medio del despeje algebraico calculan su valor (I4), en ambos casos de manera incorrecta. Si bien, los dos errores son en la manipulación de términos, son distintos entre sí. El error de los alumnos italianos (Figura 55) se centra directamente en pasar de un miembro a otro un término de la ecuación, en particular, en pasar al segundo miembro el 4 que está sumando a x en el primer miembro de la ecuación. Al ejecutar esa acción, lo hacen respetando su signo y como consecuencia obtienen un resultado incorrecto. Por otro lado, los alumnos mexicanos despejan correctamente la incógnita, sin embargo, presentan un error operacional relacionado con el número negativo y por consecuencia, calculan un valor equivocado para

la incógnita. Otra vez es necesario hacer énfasis en la comprobación de la ecuación (I3), pues como se ha venido diciendo, los alumnos no la practican y por ende no son conscientes de su error.

5.3 INTERPRETACIÓN

Este bloque de actividades lo conforman dos ítems (4.b y 4.h). En ambos casos se pide reflexionar sobre el rol de la variable simbólica e interpretarla como incógnita específica. Como ya se analizó en la *Tabla 7*, cada ítem cuenta con características específicas, por lo que interpretar la variable simbólica como incógnita es más complejo en un ítem que en otro.

5.3.1 Ítem 4.b primero de secundaria México e Italia

En México este ítem fue resuelto correctamente por 3% de alumnos de primero de secundaria, 43% respondió incorrectamente y 54% no respondió el ítem. En Italia, 9% de alumnos de primer grado respondió correctamente el ítem, 49% respondió incorrectamente y 42% no respondió el ítem.

La *Tabla 24*, muestra las dos respuestas incorrectas más comunes que dan los alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 1° de secundaria	Alumnos italianos de 1° de secundaria
Primera	Uno o más valores (10%)	Uno o más valores (22%)
Segunda	Conteo de letras (9%)	n , infinito (8%)

Tabla 24 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

Se observa también, que los dos grupos de estudiantes coinciden en la respuesta incorrecta más común, no así en las proporciones. A continuación, se analizan los diferentes tipos de respuesta incorrecta que dan los alumnos.

La *Figura 57* y *Figura 58* representan la respuesta incorrecta más común de cada grupo de estudiantes.

4.b $3 + a + a = a + 10$
 $3 + 7 + 5 = 5 + 10$

Figura 57 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

$$4.b \quad 3 + \overset{5}{a} + \overset{5}{a} = \overset{3}{a} + 10$$

Figura 58 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

En ambos casos los alumnos asignan diferentes valores a la variable con el propósito de satisfacer la igualdad, sin embargo, ni es el procedimiento adecuado, ni la instrucción del ítem. Los alumnos que responden de esta manera, si bien consideran que la variable representa un valor, asumen que ese valor puede ser cualquiera y no tienen claro que en una expresión algebraica, la misma letra, representa siempre el mismo valor. Lo anterior apunta a que los alumnos que responden de esta manera, tratan de resolver la ecuación en lugar de analizarla, reflexionar sobre que representa la letra y expresar su respuesta en términos verbales diciendo cuántos valores representa la letra y no cuáles. Esta tendencia a tratar de satisfacer la ecuación, es una señal de que las actividades en el salón de clases, en su mayoría son dirigidas a la resolución de ecuaciones y la reflexión se probablemente se esté dejando de lado, situación riesgosa, pues no permite al alumno desarrollar el concepto y establecer relaciones entre la práctica y la teoría.

La *Figura 59*, representa la segunda respuesta incorrecta más común de los alumnos mexicanos de primero de secundaria.

$$4.b \quad 3 + a + a = a + 10$$

3 valores

Figura 59 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

Ellos escriben que la letra en la ecuación tiene “3 valores”, no porque interpreten la expresión algebraica como una ecuación de grado tres, sino porque la variable simbólica aparece 3 veces en la ecuación. Los alumnos que responden de esta manera, al igual que los del ejemplo analizado arriba, no tienen claro que en una expresión algebraica, la misma letra, representa siempre el mismo valor, sin embargo, tratan de reflexionar acerca de cuántos valores representa la letra y no de calcularlos, pero al parecer su procedimiento se reduce a contar las veces que aparece la letra en la ecuación, lo que refleja una pobre conceptualización de la incógnita y de la ecuación lineal.

La *Figura 60* representa la segunda respuesta incorrecta más común que dan alumnos italianos de primero de secundaria.

$$4.b \quad 3 + a + a = a + 10 \infty \text{ VALORI}$$

Figura 60 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

Para estos estudiantes, la variable simbólica de la ecuación puede representar un número infinito de valores, por lo que ellos interpretan la expresión algebraica como una entidad general capaz de tomar cualquier valor (G2), en lugar de reconocer una ecuación lineal y darse cuenta que la variable representa una única incógnita con valor específico. Sin embargo, también esta representación refleja un intento de reflexionar y no sólo de actuar para calcular valores. Por tanto, las dificultades de los estudiantes, están en diferenciar una expresión general de una ecuación, quizá haga falta a la enseñanza trabajar en actividades que propicien la distinción entre estos conceptos algebraicos.

5.3.2 Ítem 4.b tercero de secundaria México e Italia

En México este ítem fue resuelto correctamente por 24% de alumnos de tercero de secundaria, 50% respondió incorrectamente y 26% no respondió el ítem. En Italia 36% de alumnos de tercer grado respondieron correctamente el ítem, 31% respondió incorrectamente y 33% no respondió el ítem.

La *Tabla 25*, muestra las dos respuestas incorrectas más comunes que dan alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 3° de secundaria	Alumnos italianos de 3° de secundaria
Primera	Conteo de letras (13%)	n , infinito (8%)
Segunda	n , infinito (6%)	Conteo de letras (4%)

Tabla 25 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Los errores que cometen los alumnos son los mismos, aunque en diferente orden y proporción, mientras que los alumnos mexicanos abandonan la idea de satisfacer la ecuación, contar las letras aparece como la respuesta incorrecta más común y surge la confusión conceptual entre número general e incógnita. Por otro lado, los alumnos italianos, también abandonan la idea de satisfacer la ecuación, mientras que confundir una ecuación con un número general aparece como la respuesta incorrecta más común (en primero fue la segunda

respuesta incorrecta más común) y contar las letras aparece como segunda respuesta incorrecta más común. En ambas poblaciones parece haber un avance en la conceptualización de la variable como incógnita, pues ya se dijo que se abandona la idea de satisfacer la ecuación, probablemente porque los alumnos cuentan con más conocimientos (la mayoría de ellos aún difusos) que les permitan explorar otros procedimientos de resolución del ítem, sin embargo, no han logrado todavía la capacidad de reflexionar sobre el rol de la variable en una expresión, combinándolo con la capacidad de manipular, para eventualmente, calcular su valor y así decidir cuántos valores representa.

5.3.3 Ítem 4.h primero de secundaria México e Italia

En México este ítem fue resuelto correctamente por 3% de alumnos de primero de secundaria, 43% respondió incorrectamente y 54% no respondió el ítem. En Italia 1% del alumnado de primer grado respondió correctamente el ítem, 35% respondió incorrectamente y 64% no respondió el ítem.

La *Tabla 26*, muestra las dos respuestas incorrectas más comunes de los alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 1° de secundaria	Alumnos italianos de 1° de secundaria
Primera	Asignan uno o más valores (7%)	Asignan uno o más valores (10%)
Segunda	Conteo de letras (4%)	n , infinito (7%)

Tabla 26 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria.

Los alumnos coinciden en la respuesta incorrecta más común y la proporción de alumnos es muy próxima una de la otra. En cuanto a la segunda respuesta incorrecta más común, los estudiantes mexicanos se limitan a contar las letras de la expresión algebraica para dar una respuesta, mientras los alumnos italianos parecen tener dificultades para distinguir una ecuación de una expresión general. A continuación se presenta el análisis de las producciones de los alumnos que responden de la manera antes mencionada.

La *Figura 61* y *Figura 62* representan la respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos e italianos respectivamente

4.h $4 + x^2 = x(x + 1)$
 $4 + 3^2 = 12(4 + 1)$

Figura 61 Respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

4.h $4 + x^2 = x(x + 1)$
 $4 + 2^2 = 8(2 + 1)$

Figura 62 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

Se puede observar como asignan valores cualesquiera a cada variable simbólica que aparece en la ecuación con el propósito de satisfacerla. Claramente, estos alumnos tienen una tendencia a resolver la ecuación en lugar de analizarla e interpretar la variable simbólica. Este procedimiento es muy similar al mostrado en el ítem 4.b con alumnos del mismo grado, por lo que era de suponer que ante un ítem más complicado (ver *Tabla 7*) utilizarán las mismas estrategias de resolución.

La *Figura 63*, representa la segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

4.h $4 + x^2 = x(x + 1)$
 3 valores

Figura 63 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de primero de secundaria.

Al igual que en el ítem anterior (4.b), los alumnos recurren a la misma estrategia de resolución del ítem, cuentan las letras y para ellos el total de letras es la cantidad de valores que puede tomar la variable en la ecuación.

La *Figura 64*, representa la segunda respuesta incorrecta más común de los alumnos italianos de primero de secundaria.

4.h $4 + x^2 = x(x + 1)$
 INFINITI VALORI

Figura 64 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de primero de secundaria.

Al igual que los alumnos mexicanos, los estudiantes italianos también recurren a las mismas estrategias de resolución del ítem, en este caso, tienen dificultades para diferenciar una ecuación de una expresión general, pues responden escribiendo que son infinitos los valores que puede tomar la letra que aparece en la ecuación.

5.3.4 Ítem 4.h tercero de secundaria México e Italia

En México, este ítem fue resuelto correctamente por 14% de alumnos de tercero de secundaria, 34% respondió incorrectamente y 63% no respondió el ítem. En Italia, 20% de alumnos de tercer grado respondió correctamente el ítem, 42% respondió incorrectamente y 38% no respondió el ítem.

La *Tabla 27*, muestra las tres respuestas incorrectas más comunes de los alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Respuestas incorrectas más comunes	Alumnos mexicanos de 3° de secundaria	Alumnos italianos de 3° de secundaria
Primera	Conteo de letras (11%)	Resuelven la ecuación (11%)
Segunda	Resuelven la ecuación (7%)	Conteo de letras (5%)
Tercera	Infinito (5%)	Infinito (5%)

Tabla 27 Respuestas incorrectas más comunes de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria.

Ambos grupos de estudiantes dan los mismos tipos de respuestas incorrectas, sólo que a diferencia del ítem 4.b y de sus compañeros de primero, en este ítem surge en los alumnos la idea de resolver la ecuación, probablemente por el exponente que aparece en una de las letras. En cuanto a los otros tipos de respuesta (conteo de letras e infinito), los alumnos recurren a las mismas estrategias que en el ítem anterior. A continuación se analiza la primera y segunda respuesta incorrecta más común que dan alumnos italianos y mexicanos de tercero de secundaria, respectivamente.

La *Figura 65* y *Figura 66* representan la primera y segunda respuesta incorrecta más común de alumnos italianos y mexicanos de tercero de secundaria respectivamente.

$$4.h \quad 4+x^2=x(x+1) \quad 4x^2=x^2+x \quad 3x^2=-4$$

Figura 65 Respuesta incorrecta más común de alumnos italianos de tercero de secundaria.

1 4.h $4 + x^2 = x(x+1)$

$$4 + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} \quad 2x + 1 + 1$$

$$2x + 3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Figura 66 Segunda respuesta incorrecta más común de alumnos mexicanos de tercero de secundaria.

En ambos casos los alumnos manipulan incorrectamente la variable simbólica (G4), intentan despejar la incógnita y determinar así el valor de x (I4). Los alumnos que responden de esta manera son capaces de ver la variable simbólica como una incógnita específica, pues bien o mal determinan su valor, pero no son capaces de interpretarla como tal, es decir, saben que el ítem involucra una ecuación y que la variable que aparece en ella es una incógnita, de la cual, hay que calcular su valor, sin embargo, no son capaces utilizar este conocimiento, reflexionar acerca de cuántos valores representa la literal ni logran desprenderse de la acción y, una vez encontrado el valor que representa la variable, decir explícitamente, que la letra representa un único valor. Para ello se necesita entrar en un proceso de abstracción al que al parecer no están muy acostumbrados.

CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las conclusiones de esta investigación, también se retoman algunos puntos importantes que se discuten a lo largo de este trabajo. En un principio hablaremos de las preguntas que guían esta investigación, posteriormente enfocaremos nuestra atención al análisis estadístico que nos permite comparar numéricamente los distintos grupos que participaron en este estudio y finalmente, nos dirigiremos al análisis de las producciones de los estudiantes y la perspectiva que éste nos da.

La revisión de la literatura permitió mostrar un panorama en torno a la conceptualización de la variable y cómo ésta ha sido comprendida por diferentes actores escolares. También puso en evidencia las dificultades que tienen estudiantes y profesores de educación básica para trabajar con este concepto y que éstas no son exclusivas de alguna población específica. Vimos además que en ocasiones la incógnita es considerada como el uso de la variable algebraica más sencillo de comprender, dado que desde la escuela primaria se empieza a trabajar con este concepto. Un ejemplo de ello son las actividades con problemas de valor faltante, escribir en el espacio en blanco (cuadrado, círculo, etc.) el número que falta para que el resultado de la operación sea correcto, etc. Por tal motivo, podría suponerse que la incógnita es un concepto fácil de adquirir y que los estudiantes trabajarán con él con cierta facilidad, sobre todo porque la incógnita es el uso de la variable al que más tiempo se dedica en la enseñanza. Sin embargo, de estos trabajos revisados, se desprende que todavía hay dificultades con en el aprendizaje de este concepto. Por lo anterior, resultó interesante indagar acerca de logros y dificultades que tienen alumnos de sectores socioculturales distintos, en relación a la capacidad de trabajar con la variable como incógnita.

Identificar las diferencias y similitudes en la resolución de actividades específicas relacionadas con este concepto y determinar, en la medida de lo posible, el progreso que los estudiantes pueden llegar a tener con la capacidad de trabajar con la variable como incógnita a lo largo de la escuela secundaria, fue uno de los propósitos de esta investigación.

Otro propósito fue comparar la comprensión que logran de este concepto, a lo largo de la escuela secundaria, alumnos del mismo entorno sociocultural y de entornos

socioculturales diferentes (alumnos mexicanos e italianos). Los alumnos de ambos países comparten un currículo similar en contenido algebraico, no así la estructura y dosificación. Así mismo las condiciones de trabajo son muy diferentes, por ejemplo, sea el número de alumnos por grupo que la preparación del profesorado.

El *Modelo 3UV* fue la herramienta teórico metodológica que brindó un panorama más amplio para el análisis realizado, dado que no aísla tajantemente un uso de la variable en particular, por el contrario, sugiere que para comprender el concepto de variable, se requiere de entender y manejar al mismo tiempo estos tres usos: incógnita, número general y variable en relación funcional, así como pasar de uno a otro de forma flexible. Por lo tanto, la capacidad para trabajar con la variable como incógnita, requiere también, la capacidad para trabajar con los otros usos de la variable, dado que muy a menudo están relacionados en los problemas y actividades en las que aparece la incógnita.

El análisis estadístico permitió comparar las distintas muestras (alumnos mexicanos e italianos de primero y tercero de secundaria) en función de los porcentajes obtenidos de respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI) y respuesta no dada (ND), producto de las respuestas que dieron los estudiantes a 8 ítems de incógnita que constituyen el cuestionario aplicado a la muestra participante en el estudio. Con el propósito de ver la capacidad del estudiante para simbolizar, determinar el valor e interpretar la variable como incógnita, los ítems se agruparon y analizaron de tal forma que nos brindaran información al respecto.

En relación a la simbolización, los resultados muestran que en México, menos del 50% de alumnos de primer grado de secundaria son capaces de simbolizar la incógnita y usarla para plantear una ecuación dada verbalmente, de la forma $ax = b$ (ítem 1.a). En contraste, más del 70% de alumnos italianos de primero de secundaria, son capaces de simbolizar la incógnita y usarla para plantear la ecuación del mismo ítem.

De manera general, el rendimiento de los alumnos mexicanos e italianos mejora considerablemente en tercero de secundaria y 91% de alumnos mexicanos ya simboliza la ecuación presentada en el ítem 1.a. Mientras que en Italia, el porcentaje de alumnos que simboliza la ecuación de este ítem solo alcanza 82%.

Por otro lado, cuando hay que manipular la incógnita para traducir una ecuación dada verbalmente (ítem 1.b), 5% de alumnos mexicanos de primero, tiene desarrollada esta capacidad, mientras que más alumnos italianos del mismo grado (19%) mostraron haber desarrollado esta capacidad. Si bien, en tercero de secundaria mejora el rendimiento de los alumnos, los porcentajes de respuesta correcta aún están por debajo del 50% en ambos países. Sólo 45% de los alumnos mexicanos de tercero demostraron ser capaces de simbolizar la ecuación de este ítem, mientras que 39% de los alumnos italianos de tercero presentaron esta capacidad.

En cuanto a la capacidad para plantear una ecuación a partir de un problema dado (ítem 15.b), 6% de los alumnos mexicanos de primero de secundaria demostraron tener la capacidad para simbolizar la incógnita, operarla y plantear la ecuación del problema. Esta misma capacidad la tienen 5% de los alumnos italianos de primero de secundaria. En tercero de secundaria, el porcentaje de respuesta correcta crece considerablemente en ambos países, aunque al igual que el ítem anterior, está por debajo del 50%. Sólo 26% de los alumnos mexicanos de tercero fueron capaces de simbolizar la ecuación del problema, mientras que 20% de alumnos italianos del mismo grado mostró haber desarrollado esta capacidad.

Finalmente, en este rubro, se encontraron en México diferencias estadísticamente significativas entre grados, no así en Italia.

En relación a la capacidad de determinar el valor de la incógnita, 9% de los alumnos mexicanos de primer grado determina el valor de la incógnita de una ecuación de la forma $a + x = 2$ (ítem 3.c). En contraste, 23% de alumnos italianos del mismo grado son capaces de determinar el valor de la incógnita de la misma ecuación. De manera general, el rendimiento de alumnos mexicanos e italianos mejora en tercero de secundaria y 67% de alumnos mexicanos de tercero de secundaria ya son capaces de determinar el valor de la incógnita de ecuaciones de un paso, mientras que en Italia, los alumnos que resuelven ecuaciones de un paso son el 60%.

Por otro lado, sólo 1% del alumnado mexicano de primero de secundaria fue capaz de determinar el valor de la incógnita cuando hay que manipular la variable en una expresión del tipo $ax + b + cx = d + ex$ (ítem 3.a), pero ningún alumno es capaz de hacerlo cuando se trata de una ecuación que implica un binomio al cuadrado (ítem 3.b). En cambio, ningún

alumno italiano de primero de secundaria, fue capaz de determinar el valor de la incógnita de los ítems 3.a y 3.b. En tercero de secundaria, el porcentaje de alumnos que determina la incógnita del ítem 3.a también aumenta, mucho más en Italia que en México. Mientras que en México 14% de los alumnos de tercero determina la incógnita de la ecuación, en Italia 52% de los alumnos mostró tener desarrollada esta capacidad.

Finalmente, en este rubro, se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre grados, en ambos países. Esto es una buena señal, de que el currículo de ambos países, está enfocado en lograr que el alumno sea capaz de resolver ecuaciones, sin embargo, el énfasis en actividades de este tipo, parece no ser suficiente, pues aún hay muchos alumnos que presentan dificultades para resolver ecuaciones de dos pasos.

En relación a la capacidad para interpretar la variable simbólica como incógnita, sólo 3% de los alumnos mexicanos, ha desarrollado esta capacidad en primer grado de secundaria (ítems 4.b, 4.h). Mientras que en Italia 9% de los alumnos de primero, tiene la capacidad de interpretar la variable simbólica como incógnita en el ítem 4.b, pero sólo 1% del alumnado demostró tener esa capacidad en el ítem 4.h. En tercero de secundaria, los alumnos, sean mexicanos o italianos, obtienen mejores resultados, aunque todavía están por debajo del 50%. En México, los alumnos de tercero capaces de interpretar la variable simbólica como incógnita, en el ítem 4.b, son apenas el 24%, mientras que en Italia, 36% de los alumnos de tercero tienen esta capacidad. Por otro lado, los alumnos mexicanos de tercero de secundaria que demostraron ser capaces de interpretar la variable simbólica en el ítem 4.h, son apenas el 14%, mientras que en Italia, 20% de los alumnos demostró tener esta capacidad.

Finalmente, en este rubro, se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre grados, en ambos países, otra buena señal de que el currículo de ambos países comienza a favorecer actitudes reflexivas en los alumnos, sin embargo, la enseñanza de ambos países debe hacer más énfasis en actividades de este tipo, sin dejar de lado las dos anteriores.

Si bien, la capacidad para trabajar con la variable como incógnita, mejora de primero a tercero de secundaria en ambos países, en 5 de los 8 ítems, el porcentaje de respuesta correcta de los alumnos mexicanos es mayor que el de los alumnos italianos (1.a, 1.b, 15.b, 3.c y 3.b). Esto sugiere que los alumnos mexicanos aprenden más que los alumnos italianos, en su paso por la escuela secundaria. Sin embargo, tanto alumnos mexicanos como alumnos

italianos siguen teniendo dificultades para trabajar con el concepto de variable como incógnita. Por otro lado, los resultados del test estadístico Chi Cuadrada, señalan que en relación a la capacidad de simbolizar, existen diferencias estadísticamente significativas entre los alumnos mexicanos, pero no es así con los alumnos italianos, lo sugiere que los alumnos mexicanos tienen más desarrollada la capacidad de simbolizar la incógnita de una ecuación y usarla para plantear ecuaciones. En cuanto a la determinación de la incógnita, existen diferencias estadísticamente significativas entre los diferentes grupos de alumnos de cada país, sin embargo, es mayor el porcentaje de alumnos italianos que determina la incógnita de una ecuación, lo sugiere que los alumnos italianos tienen más desarrollada esta capacidad. Lo mismo pasa con la capacidad de interpretar la variable simbólica como incógnita, pues también existen diferencias estadísticamente significativas entre los diferentes grupos de alumnos de cada país, pero con un mayor porcentaje de alumnos italianos capaces de interpretar la variable simbólica como incógnita.

Hasta este punto se habló de manera general, que los alumnos italianos de primero tienen menos dificultades para trabajar con el concepto de variable como incógnita que los alumnos mexicanos del mismo grado. También se dijo, que los alumnos mexicanos de tercero, obtienen mejores resultados que los alumnos italianos del mismo grado, sin que esto represente una diferencia significativa, pues éstas están ligadas a cada actividad.

Respecto a la simbolización, en cuanto a las producciones de los estudiantes, en México como en Italia, sea en primero de secundaria o en tercero, los alumnos que responden incorrectamente el ítem 1.a, tienden a resolver la ecuación dada verbalmente en lugar de simbolizarla.

Para el ítem 1.b, los estudiantes italianos de primero ya abandonan la idea de resolver la ecuación, no así del todo los alumnos mexicanos, pues aún hay algunos que siguen resolviendo la ecuación que se les da verbalmente. En tercero de secundaria, los alumnos de ambos países abandonan por completo la idea de resolver la ecuación pero presentan confusión entre el exponente y el coeficiente cuando tratan de simbolizar la ecuación.

Por otro lado, para el ítem 15.b, regresa en los alumnos italianos de primero y tercero, la idea de resolver la ecuación del problema y muy pocos alumnos de tercero realizan simbolizaciones incompletas de la ecuación del problema. En contraste, los alumnos

mexicanos, hacen simbolizaciones incompletas del problema dado, y desechan por completo la idea de resolver la ecuación.

Respecto a determinar la incógnita de la ecuación, en el ítem 3.a, la mayoría de los alumnos sean mexicanos que italianos, de primero o tercero, determinan incorrectamente el valor de la incógnita, sin realizar un procedimiento que permita explicar las causas de su error. Mientras que los alumnos que realizan un procedimiento, presentan errores en la manipulación algebraica, esto en el caso de los alumnos mexicanos de tercero. Por otro lado, los alumnos italianos de tercero, manipulan correctamente la variable, pero un error conceptual de la división los lleva a determinar un valor incorrecto de la incógnita.

Para el ítem 3.b, los alumnos de primero de secundaria de México e Italia, tienden a asignarle un valor numérico a la letra, al parecer aleatorio, o en su defecto a expresar sólo una de las dos raíces de la ecuación, siendo esta respuesta, la que más dan los alumnos italianos. En tercero de secundaria, también hay alumnos de ambos países que sólo determinan una de las dos raíces de la ecuación, además, se observan procedimientos más elaborados en las respuestas de los estudiantes mexicanos e italianos, como por ejemplo, tratan de desarrollar el binomio cuadrado que presenta la ecuación, aquí también surge la confusión entre exponente y coeficiente.

Respecto al ítem 3.c, las respuestas de los estudiantes, de ambos países, tanto de primero como de tercero de secundaria, tienden a asignarle a la letra un valor numérico al parecer aleatorio.

Respecto a interpretar la variable simbólica como incógnita, en el ítem 4.b, la mayoría de alumnos mexicanos e italianos de primero de secundaria, tienden a asignarle, al parecer arbitrariamente, uno o más valores a cada letra que aparece en la expresión, y muy pocos tratan de reflexionar sobre qué significa la letra en la ecuación. En tercero de secundaria, la mayoría de alumnos trata de reflexionar sobre el significado de la letra en la ecuación, sin embargo, al parecer, sus conocimientos que son limitados y las pocas actividades que realizan de este tipo, son el obstáculo principal para que no logren interpretar la letra como incógnita.

En cuanto al ítem 4.h, los alumnos de primero de secundaria, tanto mexicanos como italianos, ejecutan las mismas estrategias que en el ítem 4.b. Lo mismo pasa con la mayoría

de alumnos mexicanos e italianos de tercero de secundaria, sin embargo, hay alumnos de ambos países (más italianos que mexicanos) que tienden a resolver la ecuación, dejando de lado la reflexión y priorizando la resolución.

En el análisis hecho ítem por ítem, se dijo que los alumnos mexicanos, a lo largo de la escuela secundaria, desarrollan más la capacidad para simbolizar la incógnita y utilizarla para plantear ecuaciones, lo que sugiere que en México, la enseñanza dedica más tiempo a trabajar actividades que promueven el uso y empleo del lenguaje algebraico para expresar una respuesta. Sin embargo, el tiempo destinado a actividades en las que es necesario manipular la variable para resolver ecuaciones, no ha sido suficiente, o quizá, el enfoque no es el más propicio para lograr este objetivo.

En este mismo análisis, de ítem por ítem, también se dijo que los alumnos italianos, a lo largo de la escuela secundaria, desarrollan más la capacidad de determinar el valor de la incógnita. Esto sugiere que la enseñanza en Italia, enfoca sus actividades en propiciar que el alumno desarrolle su capacidad para manipular la variable. Sin embargo, parece insuficiente el tiempo que la enseñanza dedica a actividades relacionadas con el empleo y uso del lenguaje algebraico, como lo es, simbolizar la incógnita y usarla para plantear ecuaciones.

Por otro lado, tanto en México como en Italia, pareciera ser insuficiente el tiempo que la enseñanza reserva a propiciar en el alumno una actitud reflexiva que le permita, al mismo tiempo, hacer uso de su conocimiento teórico y práctico en actividades que requieren un conocimiento abstracto, como lo es, interpretar la variable simbólica como incógnita.

De acuerdo al *Modelo 3UV*, se logra la comprensión del concepto de variable como incógnita, cuando se tiene la capacidad de simbolizarla, determinarla, e interpretarla. Sería conveniente entonces, que el currículo de enseñanza secundaria en México e Italia, buscara un equilibrio en estos tres aspectos, en lugar de enfocarse en mayor medida a un aspecto en específico (Simbolizar en México y Determinar en Italia). Lo ideal, sería mantener aquellos enfoques que están dando resultados positivos, y reforzar o en su defecto reorientar, aquellos enfoques en los que existen dificultades, sin perder de vista, los propósitos que cada país pretende lograr con sus estudiantes.

Este estudio comparativo, no sólo muestra los logros y las deficiencias que estudiantes de sectores socioculturales distintos tienen en su enseñanza secundaria, respecto a la conceptualización de la variable como incógnita, sino que independientemente de esto, muestra que es posible lograr el éxito en cada aspecto (simbolizar, determinar e interpretar) y por ende en conceptualizar la incógnita, siempre y cuando, se profundice en la enseñanza de cada aspecto y en actividades que los involucren al mismo tiempo, pues las dificultades que tienen alumnos mexicanos e italianos para trabajar con el concepto de variable como incógnita, son un problema más ligado al currículo de enseñanza secundaria, que al contexto o, a la propia capacidad de los alumnos para comprender el álgebra.

Bibliografía

- Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. *The ideas of algebra*, 20-32.
- Castellanos, M., & Obando, J. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación. *10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Pasto, Colombia: ASOCOLME.
- Corder, G., & Foreman, D. (2009). *Nonparametric statistics for non-statisticians: a step-by-step approach*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las ciencias*, 327-342.
- Filloy, E., Rojano, T., & Rubio, G. (2002). Propositions Concerning the Resolution of Arithmetical-Algebraic Problems. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (pp. 155-176). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Springer Kluwer Academic Publisher.
- Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities. *The 28th International Conference Of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 391-398). Bergen, Norway.
- Furinghetthi, F. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? *18° Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 368-375). Lisboa, Portugal.
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en el nivel licenciatura*. Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de La Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática. España.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- Istituto Comprensivo Divisione Julia Trieste. (2009). Allegato al POF 2009-2012. *Curricolo scuola secondaria di primo grado*. Trieste, Italia.
- Kieran, C. (1979). *Constructing meaning for the concept of equation (Doctoral dissertation)*. Concordia, University.
- Kieran, C., Batista, M., & Douglas, C. (1991). Helping to Make the Transition to Algebra. *The Arithmetic Teacher*, 49-51.
- Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, 23-26.

- López, D. N., & López, A. (2011). Empleo del Modelo 3UV en álgebra temprana. *XIII CIAEM-IACME*. Recife, Brasil .
- López, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el Modelo 3uv. *Números*, 83-103.
- Ochoviet, C., & Oktac, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. *Educación Matemática*, 91-121.
- Philipp, R. (1992). The Many Uses of Algebraic Variables. *The Mathematics Teacher*, 557-561.
- Puig, L., & Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. *Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática*, (pp. 12-14). Cuernavaca, Morelos, México.
- Revilla, F. (2001). *Aprendiendo estadística volumen II*. Lima, Perú: Universidad Ricardo Palma.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programa de estudio 2011. Guía para el maestro*. México: SEP.
- Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., & Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, 351-363.
- Ursini, S., & Landa, J. (1999). Spreadsheet and composition of functions. *Psychology of Mathematics Education PME-NA XXI*, (p. 401). Cuernavaca, Morelos México.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 327-334). Utrecht, Netherland.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemáticas*, 5-38.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. *Algebraic Thinking*, 7-13.
- Wagner, S. (1983). What are these things called variables. *The Mathematics Teacher* , 474-479.

ANEXO I

Cuestionario Algebraico De Ursini Y Trigueros Para Alumnos De Secundaria

1. Reescribe el lenguaje matemático:

1a. Un número desconocido multiplicado por 13 es igual a 127

1b. Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número más 12, es igual a 6

1c (Un número desconocido es igual a 6 más otro número desconocido

1d. Un número desconocido dividido entre 5 y el resultado sumado a 7

2. Reduce la expresión a una equivalente:

2a. $a + 5a - 3a =$

3. Calcula los valores que puede tener la letra en las siguientes ecuaciones:

3.a $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$

3.b $(x + 3)^2 = 36$

3.c $4 + x = 2$

4. Escribe cuantos valores puede tomar la letra en las siguientes expresiones

4. a $x + 2 = 2 + x$

4. b $3 + a + a = a + 10$

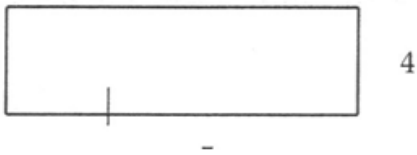
4. c $x = x$

4. d $4 + s$

4. e $3 + a + a + a + 10$

4. h $4 + x^2 = x(x + 1)$

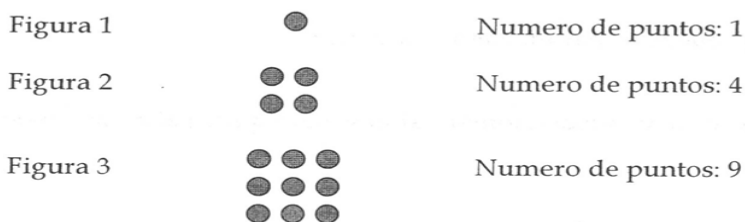
5. Escribe una expresión para representar el perímetro del rectángulo (recuerda que para calcular el perímetro de un rectángulo se suman las longitudes de todos los lados):



6. En la siguiente figura, el polígono no es completamente visible. No sabemos cuántos lados tiene, por lo que diremos que tiene N lados. Cada lado mide 2 centímetros. Escribe una fórmula que represente el perímetro de este polígono.



7. Observa lo que sigue:



7.a Continuando con la sucesión de estas figuras ¿cuántos puntos tendrá la figura 4?

7.a.1 Dibuja la figura 5 y escribe el número de puntos

7.a.2 Dibuja la figura 6 y escribe el número de puntos

7.b Si seguimos dibujando ¿cuántos puntos tendrá la figura m?

7.c ¿Cuántos puntos añadiste para pasar de la figura 1 a la figura 2?

7.d ¿Cuántos puntos añadiste para pasar de la figura 2 a la figura 3?

8. Observa las primeras dos igualdades y completa la última igualdad.

$$1 + 2 + 3 = \frac{(3 * 4)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{(4 * 5)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n =$$

9. Considera: $x+3=y$

9.a ¿La x puede tomar un valor cualquiera?

9.b ¿La y puede tomar un valor cualquiera?

9.c ¿La x y la y pueden tomar valores cualquiera al mismo tiempo?

10. Considera: $y=7+x$

¿Qué pasa al valor de y cuando x aumenta?)

11. Para facilitar su trabajo, un empleado ha empezado a escribir la tabla siguiente:

Número de fotocopias	Precio en \$
5	6.25
10	12.50
15	18.75
18	22.50
	27.50
23	

11.a Completa la tabla

11.b Considere los datos de la tabla y escribe una regla general que permita calcular el precio de las fotocopias.

12. Considera: $y=3+x$.

12.a Si queremos que el valor de y sea mayor que 3 pero menor que 10 ¿qué valores puede tomar x?

12.b Si x toma valores entre 8 y 15 ¿qué valores tendrá y?

13. Observa estas dos expresiones: $n + 2$ $2 * n$

¿Cuál de las dos representa un valor más grande? Justifica tu respuesta.

14. En una bascula, para cada kilogramo la charola se desliza 4 centímetros

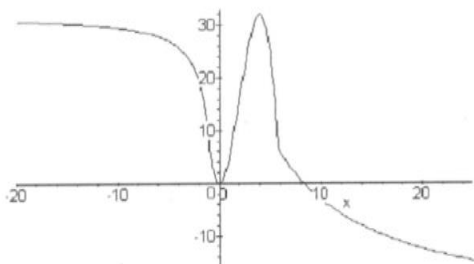
14.a Escribe una fórmula que relacione el peso de la mercancía y el desplazamiento de la charola.

- 14.b Si la charola se desplaza 10 centímetros ¿Cuánto pesa la mercancía?
15. En el siguiente problema escribe sólo la ecuación (no es necesario que la resuelvas).
- 15.b Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Qué edad tiene cada uno?
16. Observa la siguiente tabla y contesta las preguntas.

- 16.a ¿Qué pasa con el valor de y cuando el valor de x aumenta?
- 16.b ¿Para qué valor de x , alcanza y su valor máximo?
- 16.c ¿Para qué valor de x , alcanza y su valor mínimo?
- 16.d Escribe una regla general que relacione la variable x con la variable y .

x	y
0	0
10	100
-15	225
25	625
20	400
-10	100
15	225
-20	400

17. Considera la expresión $40 - 15x - 3y = 17y - 5x$
- 17.a ¿Cuál es el valor de y que corresponde a $x = 16$?
- 17.b Para que el valor de y esté entre 1 y 5 ¿entre cuáles valores debe estar el valor de x ?
- 17.c Si x varía entre -5 y 5 ¿para qué valores de x alcanzará y su valor máximo?
18. Si en un polígono de m lados cada lado mide 3 cm ¿Cuánto mide el perímetro del polígono?
19. Observa en la gráfica siguiente como cambian los valores de y cuando van aumentando los valores de x . Para contestar las preguntas puedes usar valores aproximados.



- 19.a ¿Entre cuáles valores de x , los valores de y aumentan?
- 19.b ¿Entre cuáles valores de x , los valores de y disminuyen?
- 19.c Para qué valor de x , se obtiene un valor máximo para y ?
- 19.d ¿Para qué valor de x se obtiene un valor mínimo para y ?