Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

PANORAMA DE INVESTIGACIONES QUE USAN COMO MARCO TEÓRICO A LA TEORÍA APOE

Tesis que presenta

Yanet Karina González Arellano

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias en la

especialidad de Matemática Educativa

Directores de Tesis: Dra. Asuman Oktaç

Dr. Marco Antonio Rodríguez

México, Distrito Federal Octubre 2013

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme apoyado económicamente durante dos años, para realizar mis estudios de Maestría.

Yanet Karina González Arellano

Becario N° 268702

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, por la oportunidad de formar parte de esta gran Institución. En especial, agradezco al Departamento de Matemática Educativa por la formación y apoyo, durante el tiempo de realización de mi Maestría.

Agradecimientos

De manera muy especial a la Dra. Asuman Oktaç por su gran paciencia, apoyo y comprensión en todo el tiempo que estuve bajo su dirección. Por compartir su conocimiento para guiar nuestro trabajo, con sus aportaciones y correcciones.

Al Dr. Marco Antonio Rodríguez por su apoyo como codirector de este trabajo. Gracias también por su gran paciencia, consejos y aportaciones para lograr la realización de nuestra tesis. Pero sobre todo, gracias a ambos, por confiar en mí y en este trabajo.

A Samuel, mi bebé, por formar parte de este objetivo. Gracias por estar en mi vida y permitirme concluir con este sueño. Que ahora compartiré contigo.

También muy especialmente agradezco a mi abuelita Concepción Malerva Cobos, por sus consejos y apoyo incondicional para ayudarme a terminar este trabajo. Gracias a los miembros de mi familia que de una u otra forma me apoyaron con lo más valioso que tengo. Este logro es de tod@s.

A Maribel Ochoa por ser una gran amiga y un gran apoyo en todo el tiempo de la Maestría y hasta este momento. Gracias por todo.

Finalmente agradezco a los Doctores y Doctoras, que me formaron durante mis estudios de Maestría: Dr. Francisco Cordero, Dra. Asuman Oktaç, Dra. Claudia Acuña, Dra. María Trigueros, Dr. Jaime Mena y al Dr. Juan Antonio Alanís. Gracias a todos y a todas por compartir su conocimiento, pero sobre todo, por su tolerancia y paciencia.

Yanet Karina González Arellano

ÍNDICE

Resumen

La teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) desarrollada por Dubinsky y el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community – Comunidad para la Investigación en Matemática Educativa Universitaria) toma las ideas de la teoría de Piaget y las aplica a conceptos matemáticos a nivel universitario y preuniversitario, con el objetivo de observar y analizar las construcciones mentales que elaboran los estudiantes, mientras aprenden un concepto matemático.

De acuerdo a la metodología de investigación ligada a dicha teoría, se propone una descomposición genética de un concepto matemático. Ésta consiste en un conjunto estructurado de construcciones y mecanismos mentales con las cuales se puede describir la manera en que un concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo (Asiala et al., 1996). Por otra parte, la metodología de enseñanza relacionada con la teoría APOE se conoce como el ciclo ACE (Actividades de computadora, discusiones en el salón de Clase y Ejercicios).

Actualmente existe una variedad de investigaciones (artículos y tesis, entre otros) que usan la teoría APOE. Por una parte miembros de RUMEC desarrollan trabajos en temas matemáticos tales como cálculo, álgebra lineal, álgebra abstracta, ecuaciones diferenciales y el infinito donde se investiga la viabilidad de modelos cognitivos de aprendizaje a través de datos empíricos.

Por otra parte existen publicaciones que reportan resultados de tesis dirigidas por algún miembro de RUMEC y de aquellas tesis que usan la teoría APOE conjuntamente con algún otro marco teórico, como la Sociopistemología.

Asimismo podemos encontrar trabajos teóricos que hacen una reflexión sobre la teoría y la fortalecen así como artículos que la miran con ojos críticos. Otros estudios usan la triada

Piagetiana que consiste en describir los niveles de desarrollo del esquema Inter, Intra y Trans durante el proceso de aprendizaje de algún concepto matemático. Fuera de RUMEC también se han desarrollado investigaciones donde la teoría APOE se eligió como marco de referencia.

En nuestro trabajo hemos analizado a las bases de datos más importantes dentro de la Matemática Educativa e hicimos una lista (que creemos que es casi exhaustiva) de trabajos que se han realizado hasta la fecha bajo dicho marco teórico, mediante una clasificación de acuerdo al tipo de estudio desarrollado y sus autores.

Asímismo indagamos sobre la posible unión de APOE con algún otro marco teórico (APOE-Socioepistemología, APOE-Modelos y modelación, por mencionar algunos) para responder a ciertas preguntas de investigación relacionadas con la manera en la que estos se complementan entre sí.

Finalmente identificamos y analizamos algunas críticas que se han hecho a la teoría. Mediante los aspectos anteriores, presentamos una perspectiva generalizada de la teoría APOE y de los tipos de fenómenos didácticos que pueden explicarse a través de ella.

Yanet Karina González Arellano

Abstract

APOS (Action-Process-Object-Schema) theory was developed by Dubinsky and the Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC). This theory takes some of Piaget's ideas and applies them to mathematical concepts at the undergraduate and earlier school levels. The purpose of the theory is to observe and analyze mental constructions that students make while they learn a mathematical concept.

According to APOS theory a genetic decomposition of a mathematical concept is a description of how the concept can be constructed in the mind of an individual, in terms of mental constructions and mechanisms (Asiala et al., 1996). The related teaching methodology is known as the ACE teaching cycle (Activities, Class discussion and Exercises).

Currently in the literature numerous studies that use APOS theory exist. Members of RUMEC contribute with studies in areas such as Calculus, Linear Algebra, Abstract Algebra, Differential Equations and the Infinity. In such works, the viability of learning cognitive models is investigated through empirical data. Moreover, there are works in which results of doctoral theses directed by members of RUMEC are published as well as other theses that use APOS theory jointly with some other theoretical framework such as Socioepistemology. We can also find theoretical works that criticize the work of Dubinsky and arguments in pro.

Other studies use the Piagetian Triad that consists in describing the levels of development of a schema: Intra, Inter and Trans, during the learning of a mathematical concept. Outside of RUMEC we also can find studies that take APOS theory as the point of reference.

In this thesis we have analyzed the most important databases related to Mathematics Education and performed a review of the literature in the field (which we think is almost

exhaustive). We offer a characterization of the topics treated and the contributions these studies offer to the field. We also investigate about the possible union of APOS theory with other theoretical perspectives in order to answer some research questions (APOS-Socioepistemology, APOS-Models y modeling, to mention some). We also include criticisms directed towards APOS theory. Finally, we offer a general vision of the APOS theory and the kind of phenomena that can be explained with it.

Introducción

Dentro de las investigaciones en Matemática Educativa se han seguido varias perspectivas teóricas que se adecúan a las necesidades del investigador y que ayudan a responder a sus problemáticas. Por ejemplo, la Socioepistemología (Cantoral, et al., 1997), la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, inicios de los 70'), la Teoría Antropológia de lo Didáctico (Chevallard, 1985) y la teoría APOE (Dubinsky; 1991a, 1996) han sido algunos acercamientos teóricos por los cuales se optó en nuestra comunidad para atender diversas problemáticas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En este proyecto nos enfocamos en la teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto-Esquema), la cual ha sido usada como marco teórico por una amplia variedad de trabajos, entre ellos artículos y tesis.

La teoría APOE desarrollada por Dubinsky y RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) toma ideas de la teoría de Piaget y las aplica a conceptos matemáticos a nivel universitario y preuniversitario, con el objetivo de observar y analizar las construcciones mentales que elaboran los estudiantes al enfrentarse a un concepto matemático. La teoría APOE es una teoría constructivista y hace uso de métodos principalmente cualitativos para la investigación. En la parte pedagógica se apoya en el uso de lenguajes de programación y en el trabajo cooperativo.

Nuestra principal pregunta en este trabajo es ¿qué tipo de investigaciones se han estado realizando bajo el marco de esta teoría?

Este trabajo surge del interés de conocer la gama de trabajos que se han realizado y están haciendo aún, apoyados de esta perspectiva teórica, en esta época donde hay un giro hacia las investigaciones que se realizan en el marco de teorías socioculturales (Lerman, 2000).

En particular queremos hacer una categorización de estudios que se sustentan en la teoría APOE, así como identificar sus aportes a la disciplina.

Actualmente existe una variedad de investigaciones que usan la teoría APOE. Por una parte miembros de RUMEC desarrollan trabajos en temas matemáticos tales como cálculo, álgebra lineal, álgebra abstracta, ecuaciones diferenciales y el infinito (por ejemplo Asiala et al., 1997; Dubinsky et al., 2005) donde se investiga la viabilidad de modelos cognitivos de aprendizaje a través de datos empíricos. Por otra parte existen trabajos que reportan resultados de tesis dirigidas por algún miembro de RUMEC (por ejemplo Kú et al., 2008; Parraguez y Oktaç, 2010; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010) y aquellas tesis que usan la teoría APOE conjuntamente con algún marco teórico como la Socioepistemología (por ejemplo Domínguez, 2003; Rosado, 2004). Asimismo podemos encontrar trabajos teóricos que hacen una reflexión sobre la teoría y la fortalecen (Dubinsky, 1991a) y artículos que la miran con ojos críticos (Tall, 1999). Otros estudios usan la triada Piagetiana que consiste en describir los niveles de desarrollo del esquema Inter, Intra y Trans durante el proceso de aprendizaje de algún concepto matemático (por ejemplo Clark et al., 1997; Trigueros, 2005). Fuera de RUMEC también se han desarrollado investigaciones donde la teoría APOE se eligió como marco de referencia (por ejemplo Badillo, 2003).

En nuestro trabajo hemos consultado bases de datos y revistas de Matemática Educativa (entre ellas MathEduc Database, ISI Web of Knowledge, Google académico; RELIME, ALME, JRME) e hicimos una lista (que creemos es casi exhaustiva), desde el año 1986 hasta el año 2012 de trabajos que se han realizado bajo dicho marco teórico, ofreciendo una caracterización tanto desde el punto de vista de los temas matemáticos tratados, como las aportaciones que ofrecen a la disciplina. También indagamos sobre la cuestión de la unión de dos marcos teóricos para responder a ciertas preguntas de investigación, analizando cómo se complementan entre sí. Otra pregunta en que nos enfocamos es ¿qué críticas se están haciendo a la teoría? A través de estos puntos que guiaron nuestra investigación, pretendemos tener una mejor visión de la teoría APOE y los tipos de fenómenos didácticos que pueden explicarse mediante ella. También fue de nuestro interés identificar los puntos de crítica que ha generado, con el fin de reflexionar sobre la comprensión de dicha teoría por la comunidad y de sus posibles limitaciones.

Es así que para analizar toda esta información hemos dividido esta tesis en 4 capítulos.
El capítulo I consta de una síntesis de la teoría APOE. En ella se trata de dar una breve visión de la teoría. Considerando que nuestro trabajo trata de investigaciones alrededor de la perspectiva APOE, es fundamental el dar una introducción a la teoría.

En el capítulo II explicamos el método que se siguió en el proceso del desarrollo de la tesis, así como la forma en que se llevó a cabo la búsqueda de artículos y tesis.

En el capítulo III presentamos una lista de las investigaciones que consideramos en este trabajo, con su respectivo resumen y su traducción al español cuando sea el caso. En este capítulo hacemos una clasificación de investigaciones, de acuerdo a ciertas características, incluyendo tanto tesis como artículos. La intención de este capítulo es obtener información necesaria para tener un panorama de las investigaciones que usan como marco teórico la teoría APOE, para posteriormente responder nuestras preguntas de investigación. Este capítulo contiene una muestra de investigaciones obtenidas de las bases de datos de nuestra disciplina así como de revistas como RELIME y actas de congresos como ALME.

En el capítulo IV se hace una discusión y análisis sobre las investigaciones desarrolladas bajo la perspectiva APOE. Se da respuestas a las preguntas que dieron origen a esta investigación. Asimismo se mencionan algunas conclusiones y reflexiones.
Finalmente, se muestra una lista de referencias bibliográficas que se utilizaron para el desarrollo de esta investigación. En el capítulo III se puede encontrar las referencias bibliográficas de una muestra de 196 investigaciones relacionadas con la teoría APOE, incluyendo los respectivos resúmenes y/o anotaciones.

Capítulo 1

Acerca de la teoría APOE

Introducción

La teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) fue desarrollada por Dubinsky (1991, 1996) y el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community - Comunidad para la Investigación en Matemática Educativa Universitaria). Dubinsky toma las ideas de la teoría de Piaget y las aplica a conceptos matemáticos a nivel universitario y preuniversitario, con el objetivo de observar y analizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al enfrentarse a un concepto matemático. La perspectiva APOE proporciona una herramienta útil para modelar la manera como aprenden los estudiantes.

RUMEC ha desarrollado trabajos bajo el marco teórico APOE, en temas matemáticos tales como cálculo, álgebra lineal, álgebra abstracta, ecuaciones diferenciales, matemática discreta y el infinito (por ejemplo Asiala et al., 1997; Dubinsky et al., 2005). Otros investigadores, fuera de RUMEC, también han optado por utilizar este marco teórico para guiar sus investigaciones. Algunos otros lo han utilizado conjuntamente con otro marco teórico como la socioepistemología (por ejemplo Domínguez, 2003; Rosado, 2004).

Con el fin de conocer las hipótesis que maneja la teoría APOE sobre cómo un individuo construye un concepto matemático, a continuación presentamos a grandes rasgos la teoría, incluyendo las definiciones de los términos involucrados, tales como descomposición genética, ciclo ACE, Acción, Objeto, Proceso, Esquema, encapsulación, reversión, abstracción reflexiva, así como nivel Intra, Inter y Trans de la teoría de Piaget, entre otros.

Comenzaremos mencionando la hipótesis que plantea Dubinsky sobre el conocimiento matemático y cómo se puede desarrollar en el individuo:
"El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo

o reconstruyendo acciones, procesos, y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1998, p. 225).

De acuerdo a lo anterior, entendemos que para empezar a construir cierto conocimiento matemático, los estudiantes deben haber desarrollado ciertas estructuras mentales. Ellos reflexionan sobre los problemas matemáticos a los que se enfrenten y tratan de dar solución en un contexto social. Si un estudiante comprende un concepto matemático, es decir, si hizo construcciones mentales relacionadas a éste, entonces puede hacer reconstrucciones para construir nuevos conceptos así como dar respuesta a otros problemas.

Dubinsky (2000, citado en Vizcaíno, 2004, p. 24) menciona que "cuando el material es realmente comprendido, entre cada conjunto estático de símbolos escritos hay para el sujeto un movimiento dinámico de procesos, formación de objetos, empaques de procesos y enganchamientos con otros, transformando objetos, regresando y formando otros procesos, y mediante ese rico mundo interno en la mente del matemático, enriqueceremos a nuestros estudiantes si conseguimos que ellos lo conozcan".

Otra conjetura planteada por Dubinsky (1998, p. 227) es que "casi todos, si no es que todos, los conceptos matemáticos se pueden describir usando acciones, procesos, objetos y esquemas. Además, hay algunas evidencias de que existen acercamientos pedagógicos basados sobre estas descripciones que producen resultados positivos respecto al aprendizaje". De acuerdo a la teoría APOE un camino posible de aprendizaje a seguir en términos de construcciones mentales se relaciona con una descomposición genética del concepto a aprender. Como veremos más adelante algunas investigaciones muestran que las descomposiciones genéticas son efectivas en el diseño de materiales para dar mejores resultados en el aprendizaje de los estudiantes.

La teoría APOE se ha utilizado para describir, interpretar y analizar cómo es que se desarrolla un concepto matemático en la mente de los estudiantes, principalmente en el nivel universitario. La herramienta para lograr esto, como ya hemos comentado, es la descomposición genética, la cual después de un análisis de datos se puede refinar. Entonces podemos decir que el usar a la teoría APOE nos proporciona información en términos de un modelo cognitivo, de cómo es que aprenden los estudiantes.

En las siguientes secciones del capítulo explicaremos con más detalle los elementos de esta teoría.

1.1 Componentes del ciclo de investigación asociado a la teoría APOE

El ciclo de investigación de la teoría APOE está compuesto por los siguientes componentes:

- *Análisis teórico*
- *Métodos pedagógicos y*
- *Colección y análisis de los datos*

En el *análisis teórico* se proponen las construcciones mentales, que se considera que los estudiantes construyen, durante su aprendizaje de un concepto matemático. Estas propuestas se hacen con base en la experiencia y conocimiento en el tema, por parte de los investigadores, así como los resultados de las investigaciones anteriores. El análisis teórico a su vez ayuda a diseñar las actividades de enseñanza y a formular las preguntas para la fase de investigación empírica. Todo esto tiene el fin de verificar posteriormente si hay evidencia de las construcciones mentales previstas. Es en esta etapa teórica donde se diseña una descomposición genética del concepto en cuestión. Una descomposición genética de un concepto matemático consiste en un *conjunto estructurado de construcciones y mecanismos mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente del individuo* (Asiala et al., 1996). Las construcciones de las cuales se habla en la descomposición genética son las Acciones, los Objetos, los Procesos y los Esquemas. Los mecanismos son la Generalización, Interiorización, Encapsulación, Coordinación, Reversión y Tematización. Más adelante retomaremos estos términos para continuar con la explicación de las componentes de la teoría. Asiala et al. (1996) plantean algunas interrogantes que guían la primera fase de la investigación: *¿Qué significa comprender un concepto matemático? y ¿Cómo esa comprensión puede ser construida por un individuo?*

En la siguiente etapa se diseñan actividades de enseñanza y se implementa la instrucción, con base en la descomposición genética. El *método pedagógico* o acercamiento pedagógico a seguir con los estudiantes consiste en el ciclo ACE (Actividades en computadora, discusión en Clase y Ejercicios).
Durante esta implementación se van observando a los estudiantes en todas las actividades, en su trabajo en computadora, en su trabajo en equipos en el salón de clase y con los ejercicios de reforzamiento.

Por último se hace la colección *y el análisis de los datos* y se confronta con el *análisis teórico*. En esta etapa se corrobora si el *análisis teórico* se apega al desarrollo cognitivo de los estudiantes para ese concepto matemático en estudio. Con base en estos resultados se determina si hay que hacer una modificación en la descomposición genética. Este proceso se puede repetir varias veces aunque se espera que en cierto momento el ciclo se estabilice y ya no sea necesario hacerle cambios a la descomposición genética.

1.2 Descomposición genética

Como ya hemos comentado anteriormente una de las componentes de la teoría APOE es el análisis teórico donde se diseña una descomposición genética preliminar del concepto matemático en cuestión, que consiste en un conjunto estructurado de construcciones y mecanismos mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo (Asiala et al., 1996). La estructura de la descomposición genética se elabora con base en la experiencia y conocimiento de los investigadores, tomando en cuenta los resultados de las investigaciones previas. Posteriormente, basándose en los datos empíricos, se decide si dicha descomposición es o no adecuada para explicar el aprendizaje de los estudiantes.

Una descomposición genética no es única, en el sentido que puede haber varios caminos a seguir para construir un concepto matemático. Para saber cuándo una descomposición genética está lista, no existe un número fijo del ciclo de investigación que nos diga que ya se encuentra en su versión final, sin embargo, se espera que en algún momento la descomposición genética se estabilice y no sufra ya mayor cambio. Al respecto Trigueros (2005) comenta que hasta que se considera que la descomposición en cuestión permita tanto enseñar de manera efectiva el concepto como explicar lo que se consideran las construcciones mentales de los estudiantes cuando están aprendiendo un concepto, entonces la descomposición genética de un concepto matemático se puede usar para enseñar dicho concepto y nos podría ayudar en la elaboración de materiales. Es así que se espera que una buena descomposición genética ayude en la enseñanza de un concepto matemático de forma efectiva y que nos ayude a comprender y/o explicar las estructuras mentales que se forman los estudiantes en su mente, mientras aprenden el concepto.

1.3 Abstracción reflexiva

La abstracción reflexiva es un concepto también tomado de la teoría de Piaget. Piaget (Beth & Piaget, 1966; Piaget, 1980, 1985) en sus trabajos consideró tres tipos de abstracciones: empírica, pseudo-empírica y reflexiva. En la teoría APOE sólo se considera a la *abstracción reflexiva*.

La Abstracción Reflexiva es un mecanismo esencial en la construcción del conocimiento matemático. Trigueros (2005, p. 7), haciendo referencia a las ideas de Dubinsky (1991a, 1991b) explica lo que es la Abstracción Reflexiva "en el sentido de un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento, lo que implica, entre otras cosas, la organización o la toma de conciencia de dichas acciones y separar la forma de su contenido, e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior."

La abstracción reflexiva consiste en los mecanismos que logran el paso entre una y otra etapa o concepción (acción, proceso, objeto y esquema). En Dubinsky (1991a) podemos encontrar los cinco tipos de abstracción que se consideran dentro de la teoría APOE: Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Generalización y Reversión. La variante en la teoría APOE a la abstracción reflexiva de las ideas de Piaget es que se considera a la reversión como un tipo de abstracción reflexiva. Piaget trató con este concepto, aunque no lo consideró abstracción reflexiva. En el glosario RUMEC/APOS (2001) se presenta también a la Tematización de un esquema como un ejemplo de abstracción reflexiva.

En el glosario RUMEC/APOS (2001) se dice que la *Abstracción reflexiva es un concepto introducido por Piaget para describir la construcción de las estructuras lógico-matemáticas por un individuo durante el curso del desarrollo cognitivo. La abstracción reflexiva proviene de dos mecanismos que están necesariamente asociados. Son proyecciones hacia un nivel superior de lo que era derivado de un nivel inferior, y en segundo lugar reflexión que construye y reorganiza dentro de un sistema mayor que es transferido/trasladado por proyección (Piaget y García en Psicogénesis e Historia de la Ciencia*).

Entonces los tipos de abstracción reflexiva tratados en la teoría APOE serán fundamentales como mecanismos en la construcción de las acciones, los procesos, los objetos y los esquemas.

1.4 Construcciones y mecanismos mentales

La teoría APOE se llama así en español debido a sus siglas **A**cción- **P**roceso- **O**bjeto- **E**squema (APOS por sus siglas en inglés). En este apartado aclaramos qué son las acciones, los procesos, los objetos y los esquemas a los que se refiere la teoría. En Dubinsky (1998c, pp. 226-227) se dan las siguientes definiciones:

> **Acción:** Una transformación se considera una acción cuando es una reacción a estímulos que el sujeto percibe como externos. La acción tiende a controlar al individuo.
>
> **Proceso:** Por medio de la reflexión, un individuo puede transformar una acción en un proceso interno que ejecuta la misma función que la acción, pero se percibe como interno. El individuo puede establecer control sobre un proceso y considerarlo sin la necesidad de ejecutarlo explícitamente.
>
> **Objeto:** Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso específico, toma conciencia del proceso como una totalidad, se da cuenta de las transformaciones (ya sea de las acciones o de los procesos) que pueden operar sobre él, y cuando el individuo puede en efecto construir dichas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto.
>
> **Esquemas:** Es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que un individuo tiene para un concepto particular. Esta colección es coherente en el sentido que el individuo entiende, explícitamente o no, cuáles acciones, procesos, objetos y esquemas, pertenecen a dicho esquema actual o potencialmente.

En Trigueros (2005, p. 6) encontramos las siguientes versiones de las definiciones para las acciones, procesos, objetos y esquemas:

Acción: Es una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa. La transformación se lleva a cabo como una reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a seguir. Si una persona únicamente puede resolver problemas haciendo uso de este tipo de transformaciones, decimos que está a nivel acción.

Proceso: Es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos que el individuo percibe como externos. El individuo puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos, es decir, tiene más control sobre la transformación.

Objeto: Cuando el individuo es consciente del proceso como una totalidad, puede pensar en él como un todo y es capaz de actuar sobre él, se dice que el individuo tiene una concepción objeto del concepto.

Esquema: Colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas.

De forma análoga en el glosario RUMEC/APOS (2001) se citan las definiciones anteriores como se muestra a continuación:

Acción: Es una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa. La transformación es llevada a cabo por reacción a una indicación externa que da precisos detalles sobre los pasos a dar. Decimos que un individuo está a nivel de una concepción acción de una transformación dada, si su profundidad de comprensión está limitada a realizar acciones para llevar a cabo esa transformación. Debe indicarse que alguien con una profunda comprensión de una transformación puede realizar bien acciones cuando es apropiado pero no está limitado a realizar acciones.

Proceso: Cuando una acción es repetida, y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso. Esto es, una construcción interna se hace y realiza la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que ha construido un proceso puede describirlo, o igualmente invertir los pasos del proceso sin hacer los mismos. En contraste con una acción, un proceso es percibido por el individuo como interno, y bajo su control, más que algo que se hace en respuesta a indicaciones externas. Decimos que un individuo está al nivel de concepción proceso de una transformación dada, si la profundidad de su comprensión está limitada a pensar sobre la transformación como un proceso.

Objeto: Los individuos pueden construir objetos cognitivos de dos formas. Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, llega a ser consciente del proceso como una totalidad, se da

> cuenta que la transformación (que es acción o proceso) puede actuar sobre él, y es capaz realmente de construir tal transformación, entonces nosotros decimos que el individuo ha reconstruido este proceso como un objeto cognitivo. En este caso decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. Una segunda forma de construir un objeto cognitivo sucede cuando un individuo reflexiona sobre un esquema, llega a ser consciente del esquema como una totalidad, y es capaz de realizar acciones sobre él, entonces decimos que el individuo ha tematizado el esquema en un objeto. Decimos que un individuo tiene una comprensión al nivel de concepción objeto de un concepto matemático cuando la profundidad de comprensión del individuo de una idea o concepto incluye esa idea o concepto como un objeto. El individuo es capaz de realizar acciones sobre el objeto. Tal individuo es capaz también de desencapsular un objeto en el proceso del cual proviene cuando es necesario, o en el caso de un esquema tematizado deshacerlo en sus distintas componentes.

Entonces, de las definiciones anteriores entendemos que las acciones son transformaciones que una persona puede efectuar sobre un objeto siguiendo indicaciones precisas de los pasos que le van guiando a esa transformación. Es como la parte mecánica en la solución de un problema, cuando sólo se sigue un método pero que no necesariamente se ha reflexionado en lo que se está haciendo. Si el estudiante es capaz de seguir las indicaciones "externas" para resolver el problema sin necesariamente haber comprendido por qué funciona el método, entonces sólo tendrá una concepción acción. Al contrario de la concepción acción, en la concepción proceso la transformación que hace el estudiante tiene que ser percibida como algo interno. Aquí el estudiante ha reflexionado sobre las acciones y no sólo reacciona a las indicaciones que se le hacen para poder hacer la transformación. El estudiante es capaz de pensar en el proceso que debe hacer sin la necesidad de efectuarlo y también podría revertir el proceso que lo condujo al resultado pues tiene clara la forma en cómo logró la transformación. "Se dice que una acción ha sido interiorizada en un proceso, cuando los individuos reflexionan sobre la acción y construyen una operación interna que realiza la misma transformación" (Asiala et. al, 1997).

Según la teoría APOE cuando el estudiante reflexiona en las acciones puede construir un proceso. Si ahora hace esa reflexión más profunda, ve el proceso como un todo y es capaz de describir las acciones o procesos que realiza durante la transformación de un objeto en otro, entonces puede encapsular un proceso en un objeto y tener una concepción objeto del concepto en cuestión.

De acuerdo a este modelo que propone la teoría APOE para la comprensión de un concepto matemático, es necesario que los estudiantes alcancen cada una de estas etapas. Pero ¿cómo pasar de una etapa a otra, por ejemplo, cómo pasar de la Acción al Proceso y del Proceso al Objeto? ¿Se puede pasar de la Acción al Objeto? y ¿del Objeto regresar al Proceso o Acciones? Trigueros (2005) menciona al respecto lo siguiente: "El paso por estas etapas no es necesariamente secuencial… Lo que sí puede afirmarse es que el manejo que una persona hace de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde con un nivel caracterizado por proceso en la teoría que cuando lo hace a nivel acción, y cuando lo hace a nivel objeto que cuando lo hace a nivel proceso." (p. 7)

De las definiciones anteriores entendemos que para pasar de una acción a un proceso el estudiante debe reflexionar en las acciones que está efectuando. Otra manera de construir un proceso es coordinando dos procesos existentes. Para construir un objeto existen dos maneras. Una es encapsular un proceso y pensar en éste como un todo, lo que significa es que el estudiante será capaz de realizar acciones sobre él. La otra es través de la tematización de un esquema en un objeto y pensar en éste como un todo (Trigueros, 2005).

A continuación mostramos los ejemplos de Acciones, Objetos y Procesos presentados en el glosario RUMEC/APOS:

1. (Acción) Una acción es resolver una ecuación dada siguiendo los pasos de un ejemplo para una ecuación similar. Si uno sólo comprende la resolución de una ecuación siguiendo un ejemplo que puede ser imitado entonces está a nivel de concepción acción para la resolución de una ecuación. El ejemplo utilizado puede ser un ejemplo previamente memorizado.
2. (Acción) Dada la regla general para encontrar la derivada de una función polinómica, y dada una función polinómica concreta una acción podría ser encontrar la derivada por sustitución de los números en la formula (*sic.*) general. Uno está a nivel de concepción acción para la diferenciación si sólo es capaz de encontrar la derivada de una función cuando cada paso es externamente proporcionado (por la memoria, por ejemplo, o mirando en una lista de reglas) por una regla que es aplicada y sólo se tiene que introducir los números concretos.

3. (Acción) Una acción es calcular la desviación estándar de un conjunto concreto de datos dada la fórmula. Si la comprensión de uno de la desviación estándar está limitada a la habilidad de calcular la desviación estándar de un conjunto particular dada la fórmula entonces decimos que uno está limitado a una concepción acción de la desviación estándar.

4. (Proceso) Se realiza un proceso cuando se piensa de una función como que recibe entradas y devuelve salidas o imagina los cálculos de valores funcionales sin realmente hacer los cálculos. Un individuo está al nivel de concepción proceso de función si puede diferenciar funciones especificadas por una fórmula pero tiene dificultades con las funciones definidas a trozos por distintas fórmulas algebraica (*sic.*) en distintos intervalos del dominio con el objetivo de encontrar la derivada.

5. (Proceso) Un individuo realiza un proceso cuando resuelve una ecuación guiado por el formulario que puede dar la solución. En este caso, un individuo es capaz de describir los pasos necesarios para resolver una ecuación sin realmente hacerlos. Tal estudiante puede también ser capaz de invertir los pasos para mostrar que una posible solución es en realidad una solución. Uno está a nivel de concepción proceso de la resolución de una ecuación si tiene un proceso para encontrar la solución, pero no es capaz de realizar una acción sobre el conjunto solución sin realmente encontrar las soluciones.

6. (Proceso) Uno realiza un proceso cuando encuentra la función derivada de una función dada usando las reglas estándares. Se tiene al menos una concepción proceso de la diferenciación si puede encontrar la derivada de funciones estándares pero no puede utilizar la idea de la derivada segunda de una función a no ser que haya calculado la derivada primera para una función concreta.

7. (Objeto) Un individuo que es capaz de pensar en una función como suma de dos funciones sin referencia a ejemplos concretos está pensando en una función como un objeto. Uno tiene una concepción objeto de una función si uno es capaz de pensar en la descomposición de una función en la suma de dos funciones.

8. (Objeto) Una indicación de que el esquema de la regla de la cadena de un estudiante ha sido tematizado en un objeto es que el estudiante sea capaz de analizar una nueva situación y reconocer cómo y por qué la regla de la cadena está implicada. Tal individuo podría tener una concepción objeto de la regla de la cadena como resultado de tematizar su esquema de la regla de la cadena y podría actuar sobre él combinándola con otras reglas.

9. (Objeto) La geometría Euclídea es un ejemplo de esquema tematizado, que es un objeto para aquel que conoce varias geometrías, se traslada entre ellas, las compara y contrasta y selecciona la geometría apropiada para resolver un problema.

Para poder desarrollar una contrucción mental se requiere de mecanismos mentales considerados por Dubinsky (1991) como la generalización, interiorización, encapsulación, coordinación o reversión. Cabe mencionar que Piaget sólo consideraba 4 de éstas como tipos de abstracción reflexiva: la generalización, interiorización, encapsulación y coordinación. Dubinsky (1991) señala que con esto no se quiere decir que Piaget no trató con la reversión sino que no la consideró como un tipo de abstracción. Ésta sería una variante más en la teoría APOE. A continuación presentamos las definiciones de estos mecanismos, que a lo largo de las investigaciones en el marco de la teoría APOE se han utilizado para explicar la construcción del conocimiento matemático.

En el glosario RUMEC/APOS se dan las siguientes definiciones:

> 1.- **Interiorización de una acción:** La construcción mental de un proceso interno (una totalidad coherente) relativa a una serie de acciones sobre objetos cognitivos que pueden ser realizadas o imaginar que se realizan en la mente sin que sea necesario realizar todos los pasos concretos. En este caso decimos que la acción ha sido interiorizada en un proceso.
>
> 2.- **Encapsulación:** Encapsulación es la transformación mental de un proceso (que es la interiorización de alguna acción) en un objeto cognitivo. Este objeto puede ser visto como una entidad total (o totalidad coherente) y puede ser afectado/transformado (mentalmente) por acciones o procesos. En este caso decimos que un proceso ha sido encapsulado en un objeto. Desencapsulación es el proceso mental de volver atrás (retroceder) desde un objeto al proceso del cual el objeto fue encapsulado.

En la tesis de Roa (2008) podemos encontrar la descripción de los siguientes tipos de abstracción que considera Dubinsky:

> **Interiorización:** Piaget caracterizó este mecanismo como la traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizado. Dubinsky resume este mecanismo como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Así mediante este mecanismo es posible que una acción sea transformada en un proceso.

Coordinación: Este mecanismo fue descrito por Piaget como la coordinación general de acciones, refiriéndose a todas las maneras de usar una o más acciones para construir nuevos objetos o acciones. Mediante este mecanismo dos o más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos.

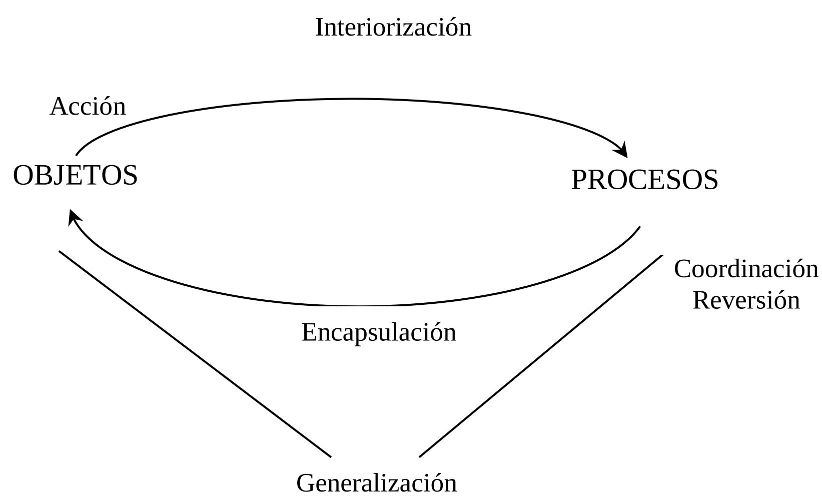
Encapsulación: Este mecanismo es considerado como el más importante para la construcción del conocimiento matemático y consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una construcción estática).

Generalización: Este mecanismo está relacionado con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, está determinado por su capacidad para determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos. (Dubinsky, 1991, citado en Roa, 2008, p.31)

Dubinsky (1991) define la reversión de la siguiente manera:

Reversión: Una vez que existe un proceso internamente es posible que el individuo piense en ello de manera inversa, no necesariamente en el sentido de deshacerlo sino como una manera de construir un nuevo proceso que consiste en invertir el proceso original (p. 107)

El modelo siguiente resume todo lo anterior definido.



1.1 Modelo de las construcciones mentales (Dubinsky, 1991a, p. 107)

En resumen, las acciones se interiorizan en procesos, los procesos se encapsulan en objetos. Los procesos se coordinan y pueden crear nuevos procesos. Los procesos pueden revertirse para construir otros procesos. Los objetos se pueden desencapsular en los procesos que les dieron origen.

Según esta teoría, la tarea pedagógica que tenemos como docentes es mediante el diseño de actividades conducir al estudiante a construir acciones, procesos, objetos y en algunos casos esquemas relacionados con un concepto, a través de los mecanismos interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión.

1.5 La Triada Piagetiana y los niveles Intra, Inter y Trans

Dentro de la teoría APOE se han estado ofreciendo varios aportes por miembros del grupo RUMEC. Algunos de ellos han surgido de la observación que considerar sólo las acciones, los procesos y los objetos, no era suficiente para entender cómo comprenden los estudiantes cierto concepto cuando éste se le trata como esquema. El aporte ha estado en incluir a la teoría, la triada de Piaget y García: Intra, Inter y Trans. El grupo RUMEC ha usado estos conceptos introducidos por Piaget para entender y explicar el desarrollo de un esquema. Así, los niveles intra, inter y trans se han empleado en algunas investigaciones que usan como marco teórico a la teoría APOE, como complemento para entender la forma en que un estudiante comprende un concepto matemático.

Como lo muestran los estudios publicados, la teoría APOE se ha encontrado en constante desarrollo. Se han estado introduciendo conceptos y perfeccionando los ya anteriores gracias al trabajo e investigaciones de los miembros del grupo RUMEC. Trigueros (2005) muestra que la teoría APOE es dinámica y que ha estado en construcción.

Para una parte específica de las matemáticas un esquema se define como una “colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas” (Trigueros, 2005, p. 11). Los esquemas se desarrollan a través de los niveles intra, inter y trans, siguiendo este orden.

Recordemos que se maneja en la teoría APOE que existen dos formas de construir un objeto cognitivo y que una de ellas se da cuando un individuo reflexiona sobre un esquema. Así, un estudiante tematiza un esquema en un objeto cuando logra ser consciente del esquema como un todo y es capaz de realizar acciones sobre el esquema. En el glosario RUMEC/APOS (2001) se describe a la tematización de un esquema como lo siguiente: “Cuando uno reflexiona sobre la comprensión misma de un esquema, viéndolo como ‘un todo’, y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces decimos que el esquema ha sido tematizado en un objeto. (Piaget y García dicen que un cambio de uso, o aplicación implícita a uso consecuente, y conceptualización constituye lo que ha llegado a ser conocido bajo el término “tematización” [página 105, en Piaget y García]”.

Ejemplos de Esquemas tomados del glosario RUMEC/APOS:

1. Un estudiante puede tener un esquema para resolver ecuaciones que incluya varios métodos a través de transformar las ecuaciones y una concepción de lo que significa resolver una ecuación.
2. Un esquema de un individuo para diferenciación puede incluir varias reglas para encontrar la derivada de una función.
3. Un esquema para grupos podría ser la coordinación de otros esquemas que puede incluir un esquema para conjuntos así como un esquema para operaciones binarias.
4. Un individuo puede tener un esquema para límites, que permita coordinar de alguna manera representaciones cognitivas de aproximación en el dominio, comprensión de aproximación en el rango, y una concepción de función.
5. Reglas matemáticas, tales como la regla de la cadena para la diferenciación, que requiera coordinar dos o más acciones, procesos, u objetos puede (*sic.*) también ser comprendida (*sic.*) a través de un esquema. La

cuestión de comprender tales reglas parece ser más compleja que la simple encapsulación de un proceso en un objeto.

Al respecto del esquema Roa (2008, p. 33) menciona que un esquema de un concepto “es una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas y las relaciones establecidas entre ellos, todos relacionados con el concepto. Los esquemas que forman la estructura matemática de un individuo no están acabados, son estructuras dinámicas que evolucionan constantemente cada vez que un nuevo objeto matemático es agregado a sus estructuras previas. Estos pueden ser más o menos coherentes y esta coherencia está relacionada con la capacidad del individuo para determinar si un esquema le permite solucionar un problema particular”.

Entonces un esquema es una colección de acciones, procesos, objetos e inclusive otros esquemas que un estudiante se forma mientras trabaja con un concepto matemático; es una estructura en la mente del estudiante. Los niveles de su desarrollo, Intra, Inter y Trans se presentan de forma lineal. El nivel Intra se caracteriza por centrarse en los aspectos individuales y aislados de otras acciones, procesos y objetos pero que son de la misma naturaleza y sin haber construido las relaciones entre estos. A diferencia, el nivel Inter se caracteriza por la existencia de relaciones entre acciones, procesos y objetos. Finalmente se entra al nivel Trans cuando estas relaciones no sólo se han construido sino que la estructura general se ha entendido. El esquema de un concepto matemático según la teoría APOE se encuentra en este nivel.

Algunos ejemplos donde se dice que se ha alcanzado el nivel Intra, Inter y Trans, expuestos en el glosario RUMEC/APOS (2001), son los siguientes:

1. **(Intra)** En el desarrollo de un esquema de la regla de la cadena, un estudiante puede usar distintas reglas tales como la regla general de las potencias y no reconocerlas como relacionadas de ninguna manera o como casos especiales de la regla de la cadena.

2. **(Intra)** Un estudiante está en el estado intra para una operación binaria cuando es capaz de encontrar los inversos en algunos grupos específicos pero no reconoce ninguna relación entre los procesos de encontrar inversos o verlos como caso especial de la idea general de encontrar inversos.
3. **(Inter)** Calculando la derivada de una función el estudiante ve la regla general de potencias y otras situaciones especiales tales como aquellas que involucran funciones trigonométricas para las cuales las reglas han sido aprendidas como casos especiales de la "regla de la cadena" y las vincula bajo esa descripción. El estudiante todavía no comprende por qué son casos especiales pero quizás piensa en términos de procedimientos similares implicando entradas y salidas de funciones. Tal estudiante podría estar en el estado inter del desarrollo del esquema de la regla de la cadena.
4. **(Inter)** En teoría de grupos uno comienza a ver la propiedad de inverso repetidamente en muchos ejemplos y comienza a recoger esos ejemplos Uno empieza a ver inversos en varias situaciones de forma relacionada, sin embargo todavía no comprende la definición general de inverso de tal manera que sea capaz de aplicarlo a una nueva situación. En este caso el esquema para operación binaria podría estar a nivel inter.
5. **(Trans)** Uno está en el estado trans de desarrollo del esquema de la regla de la cadena si comprende varios casos especiales como aplicación de la regla de la cadena identificando ciertas funciones que están compuestas. El estudiante es también capaz de aplicar la regla de la cadena a nuevas situaciones buscando una composición de funciones. En este caso decimos que el estudiante tiene un esquema para la regla de la cadena.
6. **(Trans)** En álgebra abstracta un estudiante tiene un nivel de desarrollo trans para un esquema de grupo cuando el estudiante está guiado por la definición o teoremas relevantes en la determinación de si un cierto subconjunto de un grupo abstracto es también un grupo bajo la misma operación binaria.

1.6 El ciclo de enseñanza ACE

El ciclo de enseñanza ACE, por sus siglas (Actividades en computadora, discusión en Clase y Ejercicios), se refiere a las actividades implementadas a los estudiantes. Aquí se aplica el diseño de la instrucción. Se aplican las preguntas diseñadas guiándose por el análisis teórico. En estas fases se hace énfasis en el trabajo cooperativo en los estudiantes. A continuación damos una descripción de las fases que componen el ciclo de enseñanza según la teoría APOE (Dubinsky, 1998):

Actividades en computadora: Esta fase consiste en poner a trabajar a los estudiantes en equipo, usando computadoras. Con esta actividad se espera que los estudiantes construyan algunas construcciones mentales (las propuestas en la descomposición genética), sobre cierto concepto matemático.

Discusión en Clase: Consiste en resolver algunas actividades en equipo mediante el trabajo cooperativo. Después de resolver en equipo las actividades se hace una discusión grupal. Finalmente se hace una reflexión del concepto matemático trabajado. El profesor puede concluir haciendo algunas aclaraciones y explicaciones, en caso necesario.

Ejercicios: Para esta fase se espera que el alumno haya comprendido el concepto matemático. Como complemento a ello se resuelven una serie de ejercicios de corte tradicional. Estos ejercicios pueden ser aplicados a una situación real.

Capítulo 2

Objetivos de la investigación y Método

Introducción

En la actualidad existen muchas investigaciones que usan como marco teórico a la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y el grupo RUMEC, varios de los cuales han estado haciendo aportaciones a la misma. Como bien plantea Trigueros (2005), la teoría APOE es dinámica y está en desarrollo.

Debemos tener claro que esta teoría es de corte cognitivo y modela el aprendizaje de los conceptos matemáticos en términos de construcciones mentales, en el nivel universitario o preuniversitario. Es por ello que no está dentro de sus objetivos responder a otras ciertas problemáticas como por ejemplo lo hacen las aproximaciones socio-culturales. Cabe mencionar que algunos investigadores han optado por utilizar APOE como el marco que guía su investigación. Mientras otros eligieron complementarla con otro marco teórico, para ampliar sus perspectivas.

Actualmente podemos encontrar en revistas, tesis, actas de congreso, entre otros tipos de publicaciones, investigaciones que usan la teoría APOE ya sea de forma exclusiva o complementada con otro marco teórico. Como veremos en el siguiente capítulo, existen numerosas investigaciones que se relacionan de alguna forma con este marco. Con este trabajo queremos tener una visión general del estado actual de las investigaciones que usan a la teoría APOE.

2.1 Objetivos del trabajo

Este trabajo surge del interés de tener una mayor visión de la teoría APOE y de los tipos de fenómenos didácticos que pueden explicarse mediante ella. Algunas cuestiones a observar con esta revisión son las siguientes:

- Dar una caracterización de las investigaciones que usan como marco teórico a la teoría APOE desde el punto de vista de los temas matemáticos tratados en ellas, así como de sus aportaciones.
- Indagar sobre la unión de APOE con algún otro marco teórico en estas investigaciones.
- Revisar las críticas que se le han hecho o están haciendo a la teoría APOE.

Con estos puntos queremos reflexionar en la comprensión y opinión que tiene la comunidad sobre esta teoría, así como mirar sus posibles limitaciones.

2.2 Límites de la investigación y fuentes utilizadas

Siendo esta investigación una revisión sobre el estado de arte relacionado con una teoría, teníamos que establecer ciertos límites en la búsqueda de las referencias. La muestra de investigaciones elegidas tenía que ofrecernos una visión general de lo que deseábamos observar. Para ello se hizo una revisión en fuentes importantes donde se tiende a publicar investigaciones con este enfoque. Consideramos que dicha lista es casi exhaustiva, presentando 201 trabajos. En algunos casos sólo encontramos resúmenes de investigaciones enviados a congresos sin extenso, los cuales también están incluidos dentro de la revisión.

La revisión se hizo tanto en algunas bases de datos, como en revistas electrónicas y la biblioteca de Físico-Matemáticas del Cinvestav-IPN. La revisión dentro de la biblioteca abarcó tesis, revistas y actas de congresos (como todos los PME en existencia en la biblioteca) debido a que no se tenía acceso electrónicamente a todas las fuentes o a todos los números publicados.

Las revistas consultadas, para los tomos disponibles en la biblioteca de Cinvestav fueron:

- Journal for Research in Mathematics Education
- The Journal of Mathematical Behavior
- Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching
- Actas de los congresos de PME (Psychology of Mathematics Education)
- Publicaciones del CBMS (Conference Board of the Mathematical Sciences)

Las bases de datos y revistas electrónicas consultadas son las siguientes:

- MathEduc Database (http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/)
- Google Académico (http://scholar.google.com.mx/)
- ISI Web of knowledge (http://apps.webofknowledge.com/WOS_GeneralSearch_input.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&SID=4F1g65Cm8LAgGLl7N4A&preferencesSaved=)
- RELIME (http://www.clame.org.mx/relime.htm)
- ALME (http://www.clame.org.mx/acta.htm)

En el caso de Google Académico, Relime y las actas de congresos RELME, su búsqueda es libre aunque para MathEduc Database e ISI Web of knowledge se requirió hacer la búsqueda desde el Cinvestav-IPN, ya que se cuenta con una suscripción institucional. Para el caso de tesis del Cinvestav-IPN se buscaron directamente en la biblioteca, mientras que las electrónicas en su mayoría fueron del CICATA-IPN (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada). Cabe mencionar que en la base de datos MathEduc está registrada la mayoría de las revistas de Educación Matemática, así como actas de algunos congresos.

Para la búsqueda en las bases de datos se utilizaron palabras claves como: APOE, APOS, Teoría APOE, APOS Theory, Dubinsky, RUMEC, descomposición genética y genetic decomposition. En el caso de las revistas, se fue revisando cada uno de los diferentes números publicados en línea. Con ello se obtuvo una muestra de 201 trabajos. En algunos casos sólo tuvimos acceso al resumen, ya que la fuente no estaba disponible en las bases consultadas.

Para cada uno de los trabajos que presentamos en nuestra lista incluimos su resumen, y en su caso el abstract junto con su traducción. En el caso de las tesis que no tenían resumen se incluyó una parte relevante de la introducción que podría dar esta información. Se hizo la revisión de los artículos y todos los resúmenes para tratar de dar respuestas a las interrogantes de nuestra investigación, así como para hacer una reflexión sobre el estado en que se encuentra la teoría.

Debido a la gran variedad de documentos encontrados bajo el marco teórico APOE, hicimos una clasificación para ordenar los mismos y conocer las tendencias de estas investigaciones. Si bien puede haber intersecciones en distintas categorías de dicha clasificación, sirve organizar la información según el enfoque principal de los trabajos encontrados. A continuación se presenta la clasificación incluida en el siguiente capítulo:

2.3 Clasificación de las distintas investigaciones que usan la teoría APOE

1. Investigaciones en Educación Matemática

- Artículos; Actas de congresos, Jornadas y Escuelas de Invierno
    - *Críticos*
    - Con participación de miembros de *RUMEC*
        - Teóricos
        - Que presentan la descomposición genética de un concepto matemático

- Que usan la Triada Piagetiana y/o la noción de esquema
- Que estudian la comprensión de un concepto matemático mediante la teoría APOE
  - ✓ En estudiantes
  - ✓ En profesores
  - ✓ En estudiantes y profesores
- Que presentan información de cursos basados en la teoría APOE o proponen diseños a implementar
- Que proponen reinterpretar algunas ideas de la teoría APOE
- Que usan APOE junto con algún otro marco teórico
  - ✓ Que usan APOE como marco teórico empleando ciertas características de otros marcos
  - ✓ Que unen APOE como teoría con fines de desarrollo curricular
  - ✓ Que estudian la comprensión de un concepto matemático desde la perspectiva de la unión de APOE con otro marco teórico
  - ✓ Que presentan un diálogo entre la teoría APOE y otro marco

➢ *Fuera de RUMEC*

a. Sobre los esquemas y su relación con la teoría APOE
b. Que hacen la revisión de algunas investigaciones en Matemática Educativa, que usan diferentes perspectivas teóricas, o analizan dificultades de los estudiantes desde diferentes perspectivas teóricas, incluyendo APOE
c. Que proponen reinterpretar algunas ideas de la teoría APOE

d. Que usan exclusivamente APOE
   - Que presentan una descomposición genética explícita de un concepto matemático
   - Que usan los niveles Intra, Inter y Trans
   - Que estudian la comprensión de un concepto matemático mediante la teoría APOE
     - ✓ En estudiantes
     - ✓ En estudiantes y profesores
   - Que presentan información de cursos basados en la teoría APOE o proponen diseños a implementar

e. Que complementan APOE con algún otro marco o viceversa
   - Que proponen diseños a implementar o dan las bases para futuros diseños
   - Que estudian la comprensión de un concepto matemático mediante la teoría APOE
     - ✓ En estudiantes
     - ✓ En profesores
   - Que comparan la teoría APOE o parte de su metodología con otros enfoques
   - Que usan los niveles Intra, Inter y Trans
   - Que presentan explícitamente una descomposición genética de un concepto matemático

- ❖ Tesis
  - ➢ *Dirigidas por un miembro del grupo RUMEC*

a. Que usan exclusivamente la teoría APOE
   - Realizadas en Cinvestav-IPN
   - Realizadas en CICATA-IPN
   - Realizadas en ITAM
   - Realizadas en otras instituciones

b. Que usan la teoría APOE conjuntamente con algún otro marco
- Realizadas en Cinvestav-IPN

➢ *Fuera de RUMEC*

a. Que usan exclusivamente la teoría APOE
- Realizadas en CICATA-IPN
- Realizadas en otras instituciones

b. Que usan la teoría APOE conjuntamente con algún otro marco

❖ Libros bajo la perspectiva APOE

➢ *Con participacipación de miembros de RUMEC*

2. Investigaciones en otros campos, que usan APOE

Capítulo 3

Investigaciones bajo la teoría APOE

Introducción

Existen varias investigaciones en el campo de la Matemática Educativa que han optado por usar como marco teórico, a la teoría APOE. Algunas de ellas lo usan como único marco y otras pocas han guiado su investigación con más de un enfoque, incluido APOE.

Encontramos trabajos bajo el marco teórico APOE en álgebra lineal, álgebra abstracta, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y otras ramas de las matemáticas. Algunos temas trabajados dentro de estos estudios son: la integral, la derivada, base, espacio vectorial, conjunto generador, el infinito, entre otros. Algunas de estas forman parte del desarrollo teórico de dicha teoría, otras proponen una descomposición genética para la comprensión de algún concepto matemático en particular. También hemos encontrado investigaciones que muestran los resultados de haber implementado la teoría APOE en un curso y otras que hacen propuestas para el tratamiento de un concepto de acuerdo a sus resultados. Actualmente encontramos libros desarrollados por miembros del grupo RUMEC, como propuestas para implementarse en un curso (álgebra lineal, álgebra abstracta, matemáticas discretas) bajo el enfoque de la teoría APOE. Por otro lado, existen investigaciones guiadas bajo el marco teórico APOE por investigadores ajenos al grupo RUMEC y algunas de éstas, desarrolladas por investigadores que fueron formados por algún miembro del grupo RUMEC.

La siguiente muestra considerada, consta de 201 investigaciones, entre ellas artículos publicados en revistas de Educación Matemática, resúmenes y artículos publicados en actas de congresos, jornadas, coloquios, escuelas de invierno o verano y libros. También hemos incorporado tesis de Maestría y Doctorado, así como libros de texto desarrollados para implementarse en el aula bajo la perspectiva APOE. En cada uno hemos incluido el resumen del (de los) autor(es), así como su traducción al español cuando sea el caso.

3.1 Artículos; Actas de Congresos, Jornadas y Escuelas de Invierno

3.1.1 **Críticos**

1. Burn, B. (1996). What are the fundamental concepts of group theory? *Educational Studies in Mathematics*, 31, 371-377.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This paper offers a critical analysis of Dubinsky et al. (1994) and proposes, as an alternative to the four axioms and the standard definitions, that permutation and symmetry may be regarded as the fundamental concepts of group theory.

Resumen (traducción)
Este documento ofrece un análisis crítico de Dubinsky et al. (1994) y propone, como alternativa a los cuatro axiomas y a las definiciones estándar, que la permutación y la simetría pueden ser consideradas como los conceptos fundamentales de la teoría de grupos.

2. Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1997). A reaction to Burn's "What are the fundamental concepts of group theory?" *Educational Studies in Mathematics*, 34, 249-253.

Resumen (nuestra descripción)
En este artículo los autores responden al trabajo publicado en esta misma revista por Burn (1996), el cual hace una crítica a Dubinsky, et al. (1994). En su respuesta los autores hacen aclaraciones sobre las interpretaciones de Burn.

3. Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. En O. Zaslavsky (Eds.), 23 *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.111-118), vol. I. Israel-Haifa.

Abstract (tomado del mismo artículo)

What are the processes by which we construct mathematical concepts? What is the nature of the cognitive entities constructed in this process? Based on the theories of cognitive construction developed by Piaget for younger children, Dubinsky proposed APOS theory to describe how actions become interiorized into processes and then encapsulated as mental objects, which take their place in more sophisticated cognitive schemas. He thus takes a method of construction hypothesized in (elementary) school mathematics and extends it to (advanced) college/university mathematics. In this paper I respond to Dubinsky's theory by noting the need for cognitive action to produce cognitive structure, yet questioning the primacy of action before object throughout the whole of mathematics. Biological underpinnings reveal cognitive structures for object recognition and analysis. I use this to suggest that APOS theory has already shown its strength in designing undergraduate mathematical curricula but question its universal applicability, in particular in geometry, and more interestingly, in the formal construction of knowledge from definitions to deductions in advanced mathematical thinking.

Resumen (traducción)
¿Cuáles son los procesos por los que construimos los conceptos matemáticos? ¿Cuál es la naturaleza de las entidades cognitivas construidas en este proceso? Basado en la teoría de construcción cognitiva desarrollada por Piaget para los niños más pequeños, Dubinsky propuso la teoría APOE para describir cómo las acciones se interiorizan en los procesos y luego encapsulados como objetos mentales, los cuales toman su lugar en los esquemas cognitivos más sofisticados. Se asume así un método de construcción hipotética en matemáticas escolares (de primaria) y extendidas a las matemáticas (avanzadas)

universitarias. En este trabajo respondo a la teoría de Dubinsky señalando la necesidad de la acción cognoscitiva para producir estructuras cognitivas, al mismo tiempo cuestionando la primacía de la acción antes del objeto a través de toda el área de las matemáticas. Fundamentos biológicos revelan las estructuras cognitivas de reconocimiento y análisis para objetos. Lo utilizo para sugerir que la teoría APOE ya ha demostrado su fuerza en el diseño de la currícula matemática de nivel licenciatura, pero cuestiono su aplicabilidad universal, en particular en la geometría, y más interesante, en la construcción formal del conocimiento de las definiciones de las deducciones en el pensamiento matemático avanzado.

3.1.2 **Con participación de miembros de RUMEC**[1]

3.1.2.1 **Teóricos**[2]

1. Dubinsky, E. & Lewin, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5 (1), 55-92.

Abstract (Adaptado de PsycINFO Database Record, APA)
Through an application of the model of equilibration to a series of interviews of 22 university mathematics students, it was possible to generate an account of the arrangements of component concepts and cognitive connections prerequisite to the acquisition of the concepts of induction and compactness. These arrangements, which are called "genetic decompositions," do not necessarily represent the way in which trained mathematicians understand these concepts; rather, they map the way in which students empirically

[1] Cabe aclarar que algunos de estos artículos fueron publicados antes de que se formara RUMEC.
[2] Varios de estos trabajos tienen componentes empíricos, sin embargo se clasificaron tomando en consideración el enfoque principal.

formulate their understandings for the first time. Implications of such decompositions for pedagogy are discussed.

Resumen (traducción)

A través de una aplicación del modelo de equilibrio a una serie de entrevistas, a 22 estudiantes universitarios de matemáticas, fue posible generar una descripción de los arreglos de conceptos componentes y conexiones cognitivas pre-requisitos para la adquisición de los conceptos de inducción y compacidad. Estos arreglos, los cuales son llamados "descomposiciones genéticas," no necesariamente representan la forma en que los matemáticos entrenados entienden estos conceptos, sino que trazan el camino en el que los estudiantes formulen sus entendimientos empíricamente por primera vez. Implicaciones de tal descomposición para la pedagogía, se discute.

2. Dubinsky, E. (1986). Teaching Mathematical Induction I. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 305-317.

Abstract (tomado del mismo artículo)

A prototype version of a novel approach to teaching mathematical induction was used in a small class of eight college students. The instructional treatment is based on a Piagetian theory of learning abstract mathematical concepts in which the learner uses reflective abstraction to construct new schemas out of old ones in a hierarchy that ultimately reaches the desired concept. The treatment uses certain computer experiences in an attempt to induce the student to make the appropriate reflective abstractions. The method is seen to be reasonably effective and several areas of possible improvement are indicated.

Resumen (traducción)

Se utilizó una versión prototipo de un nuevo enfoque para la enseñanza de la inducción matemática en un pequeño grupo de ocho estudiantes de la universidad. El tratamiento de instrucción se basa en la teoría de Piaget sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos en los que el alumno utiliza la abstracción reflexiva para la construcción de nuevos esquemas de los viejos en una jerarquía que finalmente llega a ser el concepto deseado. El tratamiento utiliza ciertas experiencias con computadoras en un intento de inducir al estudiante a realizar las abstracciones reflexivas apropiadas. El método se ve bastante eficaz y varias áreas de posible mejora se indican.

3. Dubinsky, E. (1988). On helping students construct the concept of quantification. 12 *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (pp. 255-262), vol.1. Hungary-Veszprem.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This paper describes a genetic decomposition of the mathematical concept of quantification; that is, it gives a description of what could be the nature of a subject's understanding of this concept in terms of schemas consisting of objects and processes, and also suggests what specific reflective abstractions could be used in constructing it. The genetic decomposition is based on a general theory of knowledge and its acquisition, the researcher's mathematical understanding of quantification, and an analysis of protocols and other observations of students in the process of learning this concept.

We also discuss an approach to helping students learn quantification based on our theory and making use of computer experiences with the programming language ISETL.
Finally, we indicate the type of problems that students were given and the success that they had in solving them.

Resumen (traducción)
Este artículo describe una descomposición genética del concepto matemático de cuantificación; es decir, se da una descripción de lo que podría ser la naturaleza de la

comprensión de un sujeto sobre este concepto en términos de los esquemas que consta de objetos y procesos, y también sugiere que abstracciones reflexivas específicas podrían ser utilizadas en la construcción de la misma. La descomposición genética se basa en una teoría general del conocimiento y su adquisición, la comprensión matemática de los investigadores de la cuantificación y el análisis de protocolos y otras observaciones de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de este concepto.

También se analiza un método para ayudar a los estudiantes a comprender la cuantificación basado en nuestra teoría y hacer uso de sus experiencias computacionales con el lenguaje de programación ISETL.

Por último, indicamos el tipo de problemas que se les dieron a los estudiantes y el éxito que tuvieron en su solución.

4. Dubinsky, E. (1991a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Abstract (tomado de la primera parte del capítulo)

Our purpose in this chapter is to propose that the concept of reflective abstraction can be a powerful tool in the study of advanced mathematical thinking, that it can provide a theoretical basis that supports and contributes to our understanding of what this thinking is and how we can help students develop the ability to engage in it. To make such a case completely, it would be necessary to do at least several things:

- explain exactly what we mean by reflective abstraction;
- show how it can be used to describe the epistemology of various mathematics concepts;
- indicate how it can suggest explanations of some of the difficulties that students have with many of these concepts;

and

- establish that it can influence the design of instruction in ways that result in a significant improvement in the extent to which students appear to acquire these concepts.

We are certainly not ready to do an exhaustive job on all four of these tasks. Indeed, our main concern here is to make some progress with the first two. There will be a few examples of the third, and we will make reference to other papers in which we have made a start on the fourth especially involving the use of computer activities to help students make mental constructions, with results that are encouraging.

Resumen (traducción)

Nuestro propósito en este capítulo es proponer que el concepto de abstracción reflexiva puede ser una poderosa herramienta en el estudio del pensamiento matemático avanzado, que puede proporcionar una base teórica que apoya y contribuye a nuestra comprensión de lo que este pensamiento es y cómo podemos ayudar a los estudiantes a desarrollar la capacidad de participar en él.

Para abordar tal caso completamente, sería necesario hacer varias cosas:

- explicar exactamente lo que entendemos por abstracción reflexiva;
- mostrar cómo se puede utilizar para describir la epistemología de varios conceptos matemáticos;
- indicar cómo se puede sugerir explicaciones de algunas de las dificultades que los estudiantes tienen con muchos de estos conceptos;

y

- establecer que puede influir en el diseño de instrucción en formas que resultan en una mejora significativa, en la medida en que los estudiantes parecen adquirir estos conceptos.

Ciertamente no estamos dispuestos a hacer un trabajo exhaustivo sobre las cuatro tareas. De hecho, nuestra principal preocupación es hacer algunos progresos en las dos primeras. Habrá unos pocos ejemplos de la tercera y haremos referencia a otros documentos en los que hemos dado un primer paso en el cuarto, especialmente los que hacen uso de actividades de computadora para ayudar a los estudiantes a hacer construcciones mentales, con resultados que son alentadores.

5. Dubinsky, E. (1991b). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (pp. 160-201), New York: Springer-Verlag.

Resumen (nuestra descripción)
En este capítulo el autor describe el concepto de abstracción reflexiva en el mismo sentido de la noción introducida por Piaget, aunque en una extensión a las matemáticas universitarias. También describe su desarrollo teórico, así como los métodos específicos de construcción que observó en algunos estudiantes y extractos de entrevistas aplicadas a estos. En particular analiza los conceptos de inducción matemática, cálculo de predicados y función desde el punto de vista de la teoría APOE y los cuales ya ha estudiado en trabajos previos. También se presenta las descomposiciones genéticas desarrolladas para la inducción matemática y el cálculo de predicados.

6. Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). Mathematical Association of America.

Resumen (nuestra descripción)

Los autores exponen su interpretación de lo que llaman prefunción. Describen lo que consideran que un estudiante tenga una concepción acción, una concepción proceso y una concepción objeto, del concepto de función, siendo la concepción proceso el centro de atención de esta investigación.

Para la realización de este trabajo se trabajó con estudiantes universitarios los cuales fueron guiados mediante el tratamiento instruccional de la teoría APOE.
La pregunta que guió la presente investigación fue ¿qué tan lejos se llegó de la concepción acción y cuántos alumnos mostraron una concepción proceso al final del tratamiento instruccional?

7. Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II*1-32 (pp. 1-32). CBMS Issues in Mathematics Education, 6.

Abstract (tomado del mismo artículo)
Over the past several years, a community of researchers has been using and refining a particular framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. The purpose of this paper is to share the results of this work with the mathematics education community at large by describing the current version of the framework and giving some examples of its application.

Our framework utilizes qualitative methods for research and is based on a very specific theoretical perspective that is being developed through attempts to understand the ideas of Piaget concerning reflective abstraction and reconstruct them in the context of college level mathematics. Our approach has three components. It begins with an initial theoretical analysis of what it means to understand a concept and how that understanding can be constructed by the learner. This leads to the design of an instructional treatment that focuses directly on trying to get students to make the constructions called for by the analysis. Implementation of instruction leads to the gathering of data, which is then analyzed in the context of the theoretical perspective. The researchers cycle through the three components and refine both the theory and the instructional treatments as needed.

In this report the authors present detailed descriptions of each of these components. In our discussion of theoretical analyses, we describe certain mental constructions for learning mathematics, including actions, processes, objects, and schemas, and the relationships among these constructions. Under instructional treatment, we describe the components of the ACE teaching cycle (activities, class discussion, and exercises), cooperative learning and the use of a mathematical programming language. Finally, we describe the methodology used in data collection and analysis. The paper concludes with a discussion of issues raised in the use of this framework, followed by an extensive bibliography.

Resumen (traducción)

En los últimos años, una comunidad de investigadores ha estado usando y refinando un marco teórico particular para la investigación y el desarrollo curricular en educación matemática universitaria. El propósito de este trabajo es compartir los resultados de este trabajo con la comunidad de educación matemática en general, mediante la descripción de la versión actual del marco y dar algunos ejemplos de su aplicación.

Nuestro marco teórico utiliza métodos cualitativos para la investigación y se basa en una perspectiva teórica muy específica que se está desarrollando a través de intentos de comprender las ideas de Piaget sobre la abstracción reflexiva y reconstruirlas en el contexto de las matemáticas a nivel universitario. Nuestro enfoque tiene tres componentes. Comienza con un análisis teórico inicial de lo que significa comprender un concepto y la forma en que dicha comprensión se puede construir por los estudiantes. Esto conduce al diseño de un tratamiento de enseñanza que se concentra directamente en tratar de lograr que los estudiantes hagan las construcciones solicitadas por el análisis. Una implementación de enseñanza conduce al acopio de datos, que luego se analizan en el contexto de la perspectiva teórica. Los investigadores alternan en un ciclo a través de las tres componentes y perfeccionan tanto la teoría como los tratamientos instruccionales cuando sea necesario.

En este reporte los autores presentan una descripción detallada de cada una de estas componentes. En nuestro tratamiento del análisis teórico, describimos ciertas construcciones mentales para el aprendizaje de las matemáticas, incluyendo acciones, procesos, objetos y esquemas, así como las relaciones entre estas construcciones. En la sección del tratamiento instruccional, describimos las componentes del ciclo de enseñanza ACE (actividades, discusión en clase, y ejercicios), el aprendizaje cooperativo y el uso de un lenguaje de programación matemática. Finalmente, describimos la metodología utilizada en la recopilación de datos y análisis. El artículo concluye con una discusión de las cuestiones planteadas en el uso de este marco teórico, seguido de una bibliografía extensa.

8. Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24-41.

Resumen (tomado del mismo artículo)

Este reporte es acerca de mi trabajo sobre el desarrollo curicular en el nivel universitario. En este trabajo me he basado en las ideas de Piaget acerca de la forma como la enseñanza le podría ayudar a un niño a aprender, ya que el trabajo de Piaget sobre educación no se conoce tan bien como el resto de su obra, comenzaré con una breve introducción a sus ideas en esta área y trataré de mostrar de qué manera forman el fundamento teórico de mis actividades sobre el desarrollo curricular. Entonces me concentraré en reformular las ideas de Piaget sobre la educación para aplicarlas en el nivel universitario. En lo que resta describiré de manera más detallada este método pedagógico y las investigaciones en las que está basado. Comenzaré con algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes a una pregunta en una entrevista sobre el orden de los elementos de un grupo. Trataré de mostrar cómo esto motiva el desarrollo de una perspectiva teórica que puede usarse con el fin de dar sentido a esas respuestas. Después de una discusión general de las características de una teoría del aprendizaje, explicaré la pespectiva teórica, basada en mi intrepretación de las ideas de Piaget, con la cual trabajo. Por último, daré algunos ejemplos de las tareas en computadora que pueden aparecer en estas actividades.

Abstract (adaptado del mismo artículo)

This report describes my work on the curricular development at college level. It is based upon Piaget's ideas about the way teaching can help a child to learn. As the Piaget's work concerning education is not as well known as the other areas of his work, I begin with a brief introduction to his ideas about that field, and I will show how they form the foundation of my activities in curricular development. Then I concentrate myself in the reformulation of Piaget's ideas on education for applying them in the college level. Next I will describe in detail this pedagogical method and the research upon which it is based. I begin with some examples of the students' answers to questions in an interview about the order of the elements in a group. I will demonstrate how that action motivates the development of a theoretical perspective usable to give sense to those answers. Following a general discussion of the characteristics of a learning theory, I explain the theoretical view based on my own interpretation of Piaget's ideas used in my work. Finally, I give some examples of computer tasks which appear in these activities.

9. Dubinsky, E. (1998). Una década de investigación en Educación Matemática sobre algunos temas de matemáticas avanzadas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa. *Serie: Antologías*, 3, 223-247.

Resumen (nuestra descripción)

Este trabajo es una breve explicación del curso impartido por Ed Dubinsky en el Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, en diciembre de 1998 sobre un conjunto de investigaciones a lo largo de una década. Aquí el autor resume avances en el desarrollo de su teoría APOE, así como resultados de la aplicación de dicha teoría en cursos en estudiantes universitarios. También presenta descomposiciones genéticas para el concepto de límite y el entendimiento de la gráfica de la derivada. Y para el caso del concepto regla de la cadena y sucesiones expone cómo se dio la necesidad de incluir la triada Piagetiana a la teoría.

10. Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. En O. Zaslavsky (Ed.), 23 *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 95-109), vol. I. Israel-Haifa.

Resumen (nuestra descripción)

En este trabajo los autores se basan en tres principios. 1° La Investigación en Matemática Educativa Universitaria (RUME) debe estar relacionada (integrada o aplicada) con el desarrollo curricular y la práctica docente. 2° Una perspectiva teórica debe proporcionar orientación en una investigación, así como en su análisis de los datos. 3° Una buena investigación sintetiza el análisis teórico, las aplicaciones pedagógicas y la recopilación y análisis de datos. De acuerdo a lo anterior, se ha desarrollado la teoría APOE. En este documento se explica la teoría APOE, hasta ese momento, así como ejemplos de proyectos de investigación que han usado la teoría.

11. Dubinsky, E. (2001). Una década de investigación en algunos temas de matemáticas avanzadas. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 127-131, vol. 1. Panamá, Panamá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Resumen (nuestra descripción)

Este trabajo es un resumen del curso presentado en RELME 14. Se trata de los resultados de una década (1987-1998) de investigación y recolección de datos de cursos llevados a cabo bajo la perspectiva teórica APOE, por el autor y el grupo RUMEC. Estas investigaciones están enfocadas mayormente en matemática discreta, cálculo y álgebra abstracta.

12. Dubinsky, E. & McDonald, M. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282). New ICMI Study Series, V7, Dordrecht: Kluwer.

Summary (tomado del mismo artículo)

In this paper, we have mentioned six ways in which a theory can contribute to research and we suggest that this list can be used as criteria for evaluating a theory. We have described how one such perspective, APOS Theory, is being used in an organized way by members of RUMEC and others to conduct research and develop curriculum. We have shown how observing students' success in making or not making mental constructions proposed by the theory and using such observations to analyze data can organize our thinking about learning mathematical concepts, provide explanations of student difficulties and predict success or failure in understanding a mathematical concept. There is a wide range of mathematical concepts to which APOS Theory can and has been applied and this theory is used as a language for communication of ideas about learning. We have also seen how the theory is grounded in data, and has been used as a vehicle for building a community of researchers. Yet its use is not restricted to members of that community. Finally, we point to an annotated bibliography (McDonald, 2000), which presents further details about this theory and its use in research in undergraduate mathematics education.

Resumen (traducción)

En este trabajo, hemos mencionado seis formas en que una teoría puede contribuir a la investigación y se sugiere que esta lista se puede utilizar como criterios para evaluar una teoría. Hemos descrito cómo una tal perspectiva, la teoría APOE, se está utilizando de una manera organizada por los miembros de RUMEC y otros, para llevar a cabo la investigación y el desarrollo de planes de estudio. Hemos mostrado cómo la observación de éxito de los estudiantes en hacer o no construcciones mentales propuestas por la teoría y el uso de tales observaciones para analizar los datos, pueden organizar nuestro pensamiento sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos, dar explicaciones de las dificultades de los estudiantes y predecir el éxito o el fracaso en la comprensión de un concepto matemático. Hay una amplia gama de conceptos matemáticos a los que puede y ha sido aplicada teoría APOE, y esta teoría se utiliza como lenguaje para la comunicación de ideas sobre el aprendizaje. También hemos visto cómo la teoría se basa en datos, y ha sido utilizado como un vehículo para la construcción de una comunidad de investigadores. Sin embargo, su uso no está restringido a los miembros de esa comunidad. Por último, apuntamos a una bibliografía anotada (McDonald, 2000), que presenta más detalles sobre esta teoría y su uso en la investigación en educación matemática universitaria.

13. Dubinsky, E. (2004). Towards A Theory of Learning Advanced Mathematical Concepts. En H. Fujita, et al. (Eds.). *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (pp. 121-123), kluwer academic publishers.

Abstract (tomado de MathEduc Database)

In this talk the author considers the role of theories in collegiate mathematics education research. He proposes characteristics that a theory might have, describes one particular example of a theory and considers the extent to which it possesses these characteristics. He also describes how this theory has been used by its developers and others throughout the world to increase understanding of the learning process and enhance student learning of

post-secondary level mathematical concepts in Calculus, Discrete Mathematics, and Abstract Algebra. Finally, he gives specific examples of the use of this theory in helping students learn certain concepts in abstract algebra. (orig.)

Resumen (traducción)

En esta plática el autor considera el papel de las teorías en investigación en Matemática Educativa Universitaria. Propone las características que una teoría podría tener, describe un ejemplo concreto de una teoría y considera la medida en la cual posee estas características. También describe cómo esta teoría ha sido utilizada por sus desarrolladores y otros en todo el mundo para aumentar nuestra comprensión del proceso de aprendizaje y mejorar el aprendizaje del estudiante de los conceptos a nivel post-secundario en Cálculo, Matemática Discreta y Algebra Abstracta. Por último, da ejemplos concretos del uso de esta teoría para ayudar a los estudiantes a aprender algunos conceptos de álgebra abstracta.

3.1.2.2 **Que presentan la descomposición genética de un concepto matemático**

1. Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingerdorf, K., Tomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.

Resumen (nuestra descripción)

En este trabajo los autores se centran en el concepto de límite, siendo este un tema de gran dificultad por los estudiantes. Se pretende indagar en cómo un alumno aprende este concepto para poder ofrecer algunas estrategias pedagógicas. La teoría APOE es el marco que guía esta investigación y que da las bases para el desarrollo de una descomposición genética del concepto límite. También ofrecen ejemplos de cómo utilizaron el análisis de las entrevistas a 25 estudiantes, de un curso de cálculo, para hacer las modificaciones pertinentes a la descomposición genética del límite.

2. Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This paper is part of a series of studies by the Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC), concerning the nature and development of college students' mathematical knowledge.

The present study explores calculus students' graphical understanding of a function and its derivative. An initial theoretical analysis of the cognitive constructions necessary for this understanding is given. An instructional treatment designed to help foster the formation of these mental constructions is described, and results of interviews, conducted after the implementation of the instructional treatment, are discussed. The understanding demonstrated by these students is analyzed according to the Action-Process-Object-Schema (APOS) theoretical framework. Based on the data collected as part of this study, a revised epistemological analysis for the graphical understanding of the derivative is proposed. Moreover, a comparative analysis is made of performance of students using the instructional treatment we designed with students taking a traditional calculus course. Although this analysis is flawed in many ways, it does suggest that the students whose course was based on the theoretical analysis of learning that we give here may have had more success in developing a graphical understanding of a function and its derivative, than students from traditional courses.

Resumen (traducción)

Este trabajo es parte de una serie de estudios realizados por la Comunidad para la Investigación en Matemática Educativa Universitaria (RUMEC), sobre la naturaleza y el desarrollo del conocimiento matemático de estudiantes universitarios.

El presente estudio explora la comprensión gráfica de estudiantes de cálculo, de una función y su derivada. Se da un análisis teórico inicial de las construcciones cognitivas necesarias para esta comprensión. Se describe un tratamiento de instrucción diseñado para ayudar a fomentar la formación de estas construcciones mentales y se discuten los resultados de las entrevistas, realizadas después de la aplicación del tratamiento de instrucción. La comprensión demostrada por estos estudiantes se analiza de acuerdo al marco teórico Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE). Basados en los datos recogidos como parte de este estudio se propone un análisis epistemológico modificado para la comprensión gráfica de la derivada. Por otra parte, se hace un análisis comparativo del desempeño entre los estudiantes que pasaron por el tratamiento de instrucción que hemos diseñado y los estudiantes que tomaron un curso de cálculo tradicional. Aunque este análisis tiene inperfecciones en muchos aspectos, sí sugiere que los alumnos cuyo curso se basó en el análisis teórico del aprendizaje que ofrecemos aquí pueden haber tenido más éxito en el desarrollo de una comprensión gráfica de una función y su derivada, que los estudiantes de los cursos tradicionales.

3. Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This paper is one in a series of studies by members of the “Research in Undergraduate Mathematics Education Community,” or RUMEC, concerning the nature and development of college students' mathematical knowledge. The present paper examines how abstract algebra students might come to understand binary operations, groups, and subgroups. We give preliminary theoretical analyses of what it could mean to understand these topics, expressed in terms of the Action-Process-Object-Schema epistemological framework. We describe an instructional treatment designed to help foster the formation of mental constructions postulated by the theoretical analysis, and discuss the results of interviews and performance on examinations. These results suggest that our pedagogical approach was reasonably effective in helping students to develop strong conceptions of binary operations, groups, and subgroups. Based on the data collected as part of this study, we proposed revised epistemological analyses of these topics, and give some pedagogical suggestions related to these topics.

Resumen (traducción)

Este artículo es uno de una serie de estudios realizados por miembros de la “Research in Undergraduate Mathematics Education Community", o grupo RUMEC, sobre la naturaleza y desarrollo de conocimientos matemáticos de estudiantes universitarios. El presente trabajo examina cómo los estudiantes de álgebra abstracta podrían llegar a entender las operaciones binarias, grupos y subgrupos. Damos un análisis teórico preliminar de lo que podría significar entender estos temas, expresado en términos de este marco epistemológico Acción-Proceso-Objeto-Esquema. Describimos un tratamiento de instrucción diseñado para ayudar a fomentar la formación de construcciones mentales postulado por el análisis teórico, y discutimos los resultados de las entrevistas y el desempeño en los exámenes. Estos resultados sugieren que nuestro enfoque pedagógico ha sido razonablemente eficaz para ayudar a los estudiantes a desarrollar concepciones fuertes de operaciones binarias, grupos y subgrupos. Basándonos en los datos recogidos como parte de este estudio, nos propusimos revisar los análisis epistemológicos de estos temas, y damos algunas sugerencias pedagógicas relacionadas con estos temas.

4. Baker, B., Trigueros, M. & Hemenway, C. (2001). On transformations of functions. En R. Speiser, C. Maher & C. Walter (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting, North*

American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 91-98), vol. 1. Snowbird-Utah.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study focuses on the analysis of student understanding of transformations. Using APOS theory as a theoretical framework, a genetic descomposition for the concept of transformation was developed. The descomposition was used to analyze class work and interviews from 24 college students who had taken a pre-calculus course based on transformations of functions that included writing as a process and the use of graphing calculators. This paper analyzes students' difficulties related to the concept of transformation and the efficacy of writing and calculators as teaching tools. Results show that students tend to develop a strong dependency on calculators to visualize functions but that when used together with writing assignments they seem to help in the development of the concept. Results also suggest that courses designed on the basis of the use of transformations should be designed with care because this concept proved to be a difficult one for students.

Resumen (traducción)

Este estudio se centra en el análisis de la comprensión de los estudiantes sobre las transformaciones. Usando la teoría APOE como marco teórico, se ha desarrollado una descomposición genética para el concepto de transformación. La descomposición se utilizó para analizar el trabajo de clase y las entrevistas de 24 estudiantes universitarios quienes habían tomado un curso de pre-cálculo basado en las transformaciones de funciones, que incluye la escritura como un proceso y el uso de calculadoras graficadoras. Este trabajo analiza las dificultades de los estudiantes en relación con el concepto de transformación y la eficacia de la escritura y calculadoras como herramientas de enseñanza. Los resultados muestran que los estudiantes tienden a desarrollar una fuerte dependencia de las calculadoras para visualizar las funciones, pero que cuando se utiliza junto con las tareas de escritura, parece ayudarles en el desarrollo del concepto. Los resultados también sugieren

que los cursos diseñados sobre la base de la utilización de las transformaciones deben ser diseñados con cuidado, porque este concepto demostró ser difícil para los estudiantes.

5. Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 157-176.

Abstract (tomado del mismo artículo)
In this article we present the APOS (Action - Process - Object - Schema) theoretical framework and we explain its use in the case of a research project involving mental constructions that linear algebra students make while learning this subject. To illustrate the use of the theory we have chosen the concept of vector spaces, as it is one of the fundamental concepts of linear algebra and since in the approach that we describe, it constitutes the beginning of an introductory course.
Keywords: APOS theory; linear algebra; vector spaces

Resumen (traducción)
En este artículo presentamos el marco teórico APOE (Acción - Proceso - Objeto - Esquema) y explicamos su uso en el caso de un proyecto de investigación que involucra las construcciones mentales en estudiantes de álgebra lineal mientras aprenden esta materia. Para ilustrar el uso de la teoría hemos elegido el concepto de espacios vectoriales, ya que es uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal y en el enfoque que se describe, constituye el comienzo de un curso introductorio.
Palabras clave: Teoría APOE, álgebra lineal, espacios vectoriales; construcciones mentales, aprendizaje.

6. Trigueros, M. & Lage, A. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds). *Proceedings of the*

28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (23-30). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study intends to contribute to better understand students' difficulties with transformations of functions. Students were interviewed while solving problems involving transformations of functions. Results were analyzed using APOS theory (Asiala, et al., 1996). They show that few students can work confidently with these problems because they do not seem to have interiorized the processes involved in transformations, or encapsulated those processes into objects.

Resumen (traducción)

Este estudio pretende contribuir a comprender mejor las dificultades de los estudiantes con las transformaciones de funciones. Los estudiantes fueron entrevistados, mientras resolvían problemas relacionados con las transformaciones de funciones. Los resultados se analizaron utilizando la teoría APOE (Asiala, et al., 1996) y muestran que pocos estudiantes pueden trabajar con confianza con estos problemas ya que no parecen haber interiorizado los procesos implicados en las transformaciones, o encapsular los procesos en objetos.

7. Parraguez, M. & Oktaç, A. (2008). Construction of a vector space schema [resumen]. *15th Conference of the International Linear Algebra Society*. Cancún, México, pp. 53.

Abstract (tomado del mismo libro de resúmenes)

From a cognitive point of view the vector space concept is one that causes many difficulties for students of Linear Algebra. Apart from being abstract in itself, it has to be connected with several other abstract concepts in the mind of a student in order to claim that understanding takes place. In this research project our aim is to explain the construction of

the vector space concept from the viewpoint of APOS (Action-Process-Object-Schema) theory. We are also interested in studying the formation and evolution of the vector space schema and how other concepts such as linear independence and basis are incorporated into the students' mathematical world in connection with this schema. The methodological framework of APOS theory requires that the concept in question be analyzed theoretically resulting in a viable map (called a genetic decomposition) of student learning in terms of mental constructions. In our talk we will present a possible genetic decomposition for the construction of the vector space concept and provide empirical evidence for specific mental constructions that students make when they are learning this concept. This evidence was gathered through questionnaires and interviews (designed in line with our genetic decomposition) applied to undergraduate students who were taking a Linear Algebra course. These instruments also help in identifying student difficulties with the vector space concept and some related concepts such as binary operations, axioms and fields.

Resumen (traducción)

Desde el punto de vista cognitivo, el concepto de espacio vectorial es uno que provoca muchas dificultades para los estudiantes de álgebra lineal. Aparte de ser abstracto en sí mismo, tiene que estar conectado con otros conceptos abstractos en la mente de un estudiante para afirmar que la comprensión se lleve a cabo. En este proyecto de investigación, nuestro objetivo es explicar la construcción del concepto de espacio vectorial desde la perspectiva de la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). También estamos interesados en estudiar la formación y evolución del esquema de espacio vectorial, y cómo otros conceptos como independencia lineal y base se incorporan en el mundo matemático de los estudiantes en relación con este esquema. El marco metodológico de la teoría APOE requiere que el concepto en cuestión se analice teóricamente, resultando en un mapa viable (llamada descomposición genética) de aprendizaje de los estudiantes en términos de construcciones mentales. En la charla se presentará una descomposición genética posible para la construcción del concepto de espacio vectorial y se proporcionará la evidencia empírica para determinadas construcciones mentales que los estudiantes hacen

cuando están aprendiendo este concepto. Esta evidencia fue obtenida a través de cuestionarios y entrevistas (diseñadas de acuerdo con nuestra descomposición genética) aplicadas a los estudiantes universitarios que estaban tomando un curso de álgebra lineal. Estos instrumentos también ayudan en la identificación de dificultades de los alumnos con el concepto de espacio vectorial y algunos conceptos relacionados, tales como operaciones binarias, axiomas y campos.

8. Trigueros G., M. y Escandón M., C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 13(36), 59-85.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Diversos estudios muestran que los estudiantes tienen dificultades para entender conceptos específicos del cálculo diferencial. Algunos señalan los obstáculos que les representa la integración de los diferentes conceptos en la solución de problemas específicos, incluidos los de graficación de funciones. En este estudio se analizan las respuestas de un grupo de estudiantes cuando resuelven estos problemas utilizando como herramienta de análisis la estadística implicativa y cohesitiva. Los resultados muestran la importancia de la comprensión de la segunda derivada y de los intervalos en los que el dominio se subdivide en virtud de las propiedades de la función para la solución exitosa de los problemas. Se hace evidente que el uso de esta herramienta en este tipo de estudios resulta no sólo pertinente sino de gran utilidad.

Abstract (tomado del mismo artículo)
Various studies show that students exerience difficulties in understanding specific concepts of differential calculus. Some studies point to the obstacles represented by having to integrate different concepts into solving specific problems, including the writing of functions. The current study analyzes the responses of a group of students as they solve

such problems by using implicative and cohesive statistics as an analytical tool. The results show the importance of understanding the second derivative and the intervals into which the domain is subdivided, due to the function's properties for successfully solving problems. It is evident that the use of this tool in such studies is not only pertinent but also highly useful.

9. Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E. &Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P(N). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 11(1), 93-125.

Resumen (tomado del mismo artículo)

En el presente estudio nos preguntamos si los individuos construyen estructuras mentales para el conjunto P(N) que da significado a la expresión "todos los subconjuntos de N". Los aportes de nuestra investigación en relación con esta pregunta tienen dos vertientes. Primeramente, identificamos las perspectivas constructivistas que han sido o podrían haber sido utilizadas para describir los mecanismos de pensamiento acerca de los conjuntos infinitos, en particular el conjunto de los números naturales. Segundo, para determinar si estos mecanismos de pensamiento de los individuos acerca del conjunto P(N) pueden ser interpretados en términos de una o más de las perspectivas consideradas, analizamos la forma de pensar de ocho matemáticos. Más allá de las concepciones negativas, o sea, de lo que P(N) no es, los resultados de nuestro análisis nos hicieron dudar sobre si la comprensión de los individuos del conjunto P(N) se extiende más allá de la definición formal. Hablamos de las posibles implicaciones de nuestros descubrimientos e indicamos futuros temas de investigación que podrían surgir de este estudio.

PALABRAS CLAVE: Conjuntos no numerables, APOE, metáfora, conjunto potencia, números naturales, imágenes mentales.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study considers the question of whether individuals built mental structures for the set P(N) that give meaning to the phrase, “all subsets of N.” The contributions of our research concerning this question are two-fold. First, we identified constructivist perspectives that have been, or could be used to describe thinking about infinite sets, specifically, the set of natural numbers N. Second, to determine whether individuals’ thinking about the set P(N) can be interpreted in terms of one or more of the perspectives we considered, we analyzed the thinking of eight mathematicians. Beyond negative conceptions, that is, what P(N) is not, the results of our analysis cast doubt on whether individual understanding of the set P(N) extends beyond the formal definition. We discuss the possible implications of our findings, and indicate further research arising from this study.
KEY WORDS: Uncountable sets, APOS, metaphor, power set, natural numbers, mental images.

10. Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112-2124.

Abstract (tomado del mismo artículo)
We apply APOS theory to propose a possible way that students might follow in order to construct the vector space concept. We describe the mental mechanisms and constructions that might take place when students are learning this concept. We then report on a study that we performed with 10 undergraduate mathematics students through the application of a questionnaire and an interview. In this paper we focus on the coordination between the two operations that form part of the vector space structure and the relation of the vector space schema to other concepts such as linear independence and binary operations.

Resumen (traducción)
Aplicamos la teoría APOE para proponer un camino posible que los estudiantes pueden seguir para construir el concepto de espacio vectorial. Describimos los mecanismos y

construcciones mentales que pueden tener lugar cuando los estudiantes están aprendiendo este concepto. Reportamos un estudio que se realizó con 10 estudiantes de matemáticas de Licenciatura a través de la aplicación de un cuestionario y una entrevista. En este trabajo nos centramos en la coordinación entre las dos operaciones que forman parte de la estructura de espacio vectorial, así como la relación del esquema de espacio vectorial con otros conceptos como la independencia lineal y operaciones binarias.

11. Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 89-112.

Abstract (tomado del mismo artículo)

The aim of this paper is to present the process that we followed in order to prepare a genetic decomposition of the concept of linear transformation, showing the steps we took in its construction and the difficulties that we encountered. The design is based on a theoretical analysis determined by the research cycle related to APOS theory. We propose two genetic decompositions that describe two possible ways to construct this concept, one that uses the mechanism of interiorization and another that uses coordination.

KEY WORDS: Linear transformation, genetic decomposition, linear algebra, APOS theory.

Resumen (tomado del mismo artículo)

El objetivo de este trabajo es dar a conocer el procedimiento que seguimos para diseñar una descomposición genética sobre el concepto transformación lineal, mostrando los pasos seguidos en su construcción y las dificultades para realizarlo. El diseño se determina por la elaboración y desarrollo del análisis teórico que plantea el ciclo de investigación de la teoría APOE. Asimismo, proponemos dos descomposiciones genéticas que describen los posibles caminos para construir el concepto: uno determinado por el mecanismo de interiorización, y el otro por el de coordinación.

PALABRAS CLAVE: Transformación lineal, descomposición genética, álgebra lineal, teoría APOE.

12. Kú, D., Trigueros, M. & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This paper addresses the question of how students learn the concept of basis of a vector space. Based on APOS theory (Action-Process-Object-Schema) we present a genetic decomposition of this concept. In it, the set of mental constructions that students may make in order to give meaning to the concept of basis are (*sic.*) described. We center our attention on the concept of basis in Linear Algebra, since it is of fundamental importance in the study of vector spaces and their applications and at the same time students have many difficulties when trying to learn it. In order to test the viability of the proposed mental constructions we designed an interview which was helpful in analyzing students' responses in terms of the constructions they had made after taking a linear algebra course. Results of the analysis show the specific difficulties associated with the construction of this concept.
Keywords: linear algebra learning, base, APOS theory, mental constructions.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Apoyándonos en la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), presentamos una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial. En ella se presenta un conjunto de construcciones mentales que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión de este concepto. Nos enfocamos en el concepto de base en álgebra lineal, ya que consideramos que es una componente relevante en el estudio de los espacios vectoriales y en sus aplicaciones, y resulta difícil de aprender para los estudiantes. Para dar datos de las posibles construcciones mentales asociadas al aprendizaje del concepto, se

diseñó una entrevista que nos permitió analizar el proceso de construcción del concepto y determinar las dificultades que surgen a raíz de su aprendizaje.
Palabras clave: aprendizaje del álgebra lineal, base, teoría APOE, construcciones mentales.

13. Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construcción esquema del concepto espacio vectorial. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 45-53). Santo Domingo, República Dominicana: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Nuestra investigación se sitúa en el estudio del concepto de espacio vectorial, que concierne al álgebra lineal, bajo un enfoque cognitivo donde se utiliza la teoría APOE como marco teórico y metodológico. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación determinan la estructura general de nuestro estudio. En la parte empírica de esta investigación se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 10 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes.
Palabras clave: teoría APOE y espacio vectorial

14. Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232.

Resumen (tomado del mismo artículo)

Tomando el análisis teórico propuesto en Roa-Fuentes y Oktaç (2010), se presenta el desarrollo de la tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE: análisis y verificación de datos. Mediante el diseño y aplicación de una prueba diagnóstico y una entrevista, se plantea una descomposición genética refinada del concepto transformación lineal. Con base en el análisis de los datos se sugiere el desarrollo de modelos de clase que tomen ideas metodológicas sobre cómo construir este concepto.
Palabras clave: Teoría APOE, Ciclo de investigación, Transformación lineal, Análisis de datos.

Abstract (tomado del mismo artículo)
Based on the theoretical analysis in Roa-Fuentes and Oktaç (2010), we present the third component of the research cycle related to APOS theory: data analysis and verification. Using the design and application of a diagnostic test and an interview, we propose a refined genetic decomposition of the linear transformation concept. Based on the data analysis we suggest the development of lesson models that would take into account the research results, and some methodological ideas to build this concept.
Key words: APOS theory, research cycle, linear transformation, data analysis.

3.1.2.3 **Que usan la Triada Piagetiana y/o la noción de esquema**

1. Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule? *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This paper is part of a series of studies by the Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC) concerning the nature and development of college

students' mathematical knowledge. This project began as an attempt to explore calculus students' understanding of the chain rule and its applications. Based on the initial description of how the chain rule concept may be learned (genetic decomposition) an attempt to interpret the data using the Action-Process-Object theoretical framework is made. The insufficiency of this alone led to an extension of the Action-Process-Schema epistemological framework (APOS) which includes a theory of schema development based on ideas of Piaget and Garcia. The Piagetian Triad is suggested as a mechanism for describing schema development in general, and the chain rule is used as an example. The Triad of the Intra, Inter and Trans stages of schema development provides the structure for interpreting the students' understanding of the chain rule and classifying their responses to interview questions about the chain rule. The results of this data analysis allowed for a proposed revised epistemological analysis of the chain rule. Finally, several suggestions and questions for future study are presented.

Resumen (traducción)

Este trabajo es parte de una serie de estudios por la Comunidad para la Investigación en Matemática Educativa Universitaria (RUMEC) sobre la naturaleza y el desarrollo de conocimientos matemáticos de estudiantes universitarios. Este proyecto comenzó como un intento de explorar la comprensión de cálculo en los estudiantes, la regla de la cadena y sus aplicaciones. Basado en la descripción inicial de cómo el concepto de regla de la cadena puede ser aprendido (descomposición genética) se hace un intento por interpretar los datos utilizando el marco Acción-Proceso-Objeto-Esquema. La insuficiencia de este solo llevó a una ampliación del marco epistemológico Acción-Proceso- Objeto-Esquema (APOE) que incluye una teoría del desarrollo de esquemas basada en las ideas de Piaget y García. La tríada Piagetiana se propone como un mecanismo para describir el desarrollo de esquemas en general, y la regla de la cadena se usa como un ejemplo. La tríada Intra, Inter y Trans de las etapas del desarrollo del esquema provee la estructura para la interpretación de la comprensión de los estudiantes sobre la regla de la cadena y la clasificación de sus respuestas a las preguntas de la entrevista. Los resultados de este análisis de los datos permitieron proponer un análisis epistemológico revisado de la regla de la cadena. Por último, se presentan varias sugerencias y preguntas para futuros estudios.

2. Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.

Abstract (tomado del mismo artículo)
In this study, we analyzed students' understanding of a complex calculus graphing problem. Students were asked to sketch the graph of a function, given its analytic properties (1st and 2nd derivatives, limits, and continuity) on specific intervals of the domain. The triad of schema development in the context of APOS theory was utilized to study students' responses. Two dimensions of understanding emerged, 1 involving properties and the other involving intervals. A student's coordination of the 2 dimensions is referred to as that student's overall calculus graphing schema. Additionally, a number of conceptual problems were consistently demonstrated by students throughout the study, and these difficulties are discussed in some detail. (Authors' abstract)
Keywords: graph of a function; differential calculus; cognitive theory; college mathematics; conceptual knowledge; constructivism; epistemology; Piaget; qualitative methods.

Resumen (traducción)
En este estudio, analizamos la comprensión de los estudiantes de un problema complejo de representación gráfica de cálculo. Los estudiantes habían de trazar la gráfica de una función, dadas sus propiedades analíticas (1 ª y 2 ª derivadas, límites y continuidad) en intervalos específicos del dominio. Se utilizó la tríada del desarrollo del esquema en el contexto de la teoría APOE para estudiar las respuestas de los estudiantes. Dos dimensiones de entendimiento surgieron, 1 participación de las propiedades y la otra, participación de otros intervalos. La coordinación de un estudiante de las 2 dimensiones se refiere al esquema global de graficación en relación con el cálculo, de ese estudiante. Además, una

serie de problemas conceptuales fueron consistentemente demostrados por los estudiantes a través de todo el estudio, y estas dificultades son discutidas a detalle.

Palabras clave: gráfica de una función, cálculo diferencial, la teoría cognitiva, matemáticas universitarias, conocimiento conceptual, constructivismo, epistemología, Piaget, métodos cualitativos.

3. Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. En Heuvel-Panhuizen, Marja van den (Eds.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 297-304), vol. 2.

Abstract (tomado de MathEduc Database)

This is a report of a study examining students' understanding of the concept of definite integral. Using APOS, a specific framework for research and curriculum development in collegiate mathematics education, as a guide in investigation, we analyze and interpret students' responses to the interview questions. The analyses of the interviews and the results of other studies indicate that the coordination between the visual schema of the Riemann sum and the schema of the limit of the numerical sequence is necessary for developing a good understanding of the concept of definite integral. Consequently, we give suggestions for didactic and curricular changes when teaching the concept. (orig.)

Resumen (traducción)

Este es un reporte de un estudio acerca de la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de integral definida. Usamos APOE, un marco específico para la investigación y el desarrollo curricular en educación matemática, como una guía en la investigación, analizamos e interpretamos las respuestas de los estudiantes a las preguntas de la entrevista. Los análisis de las entrevistas y los resultados de otros estudios indican que la coordinación entre el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema de los límites de una secuencia numérica es necesaria para desarrollar una buena comprensión del concepto de integral definida. Por lo tanto, damos sugerencias para los cambios didácticos y curriculares en la enseñanza del concepto.

4. Trigueros, M. (2001). Analysis of students' strategies when solving systems of differential equations in a graphical context. *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 529-537), vol. 1.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This study addresses the analysis of the strategies that university students use when working with systems of differential equations. The framework used for the analysis of the data coming from semi-structured interviews is based on the notions of triad and double triad from APOS theory. We present the detailed analysis of students' strategies while solving problems where they have to transfer information between different contexts. The analysis focuses on students' strategies to interpret each of the given tasks, to solve the problems, and to interpret their solutions. Results show that students use a wide variety of strategies and that their understanding of parametric functions, variation, and solution are central aspects in their success. We suggest that student strategies can be taken into account to help them move towards a deeper understanding of these concepts.

Resumen (traducción)
Este estudio aborda el análisis de las estrategias que los estudiantes universitarios utilizan cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones diferenciales. El marco utilizado para el análisis de los datos procedentes de entrevistas semi-estructuradas se basa en las nociones de la tríada y doble tríada de la teoría APOE. Presentamos un análisis detallado de las estrategias de los estudiantes, mientras resuelven problemas donde se han de transferir

información entre los diferentes contextos. El análisis se centra en las estrategias de los estudiantes para interpretar cada una de las tareas encomendadas, para resolver los problemas e interpretar sus soluciones. Los resultados muestran que los estudiantes utilizan una amplia variedad de estrategias y que su comprensión de las funciones paramétricas, la variación y solución son los aspectos centrales de su éxito. Sugerimos que las estrategias de los estudiantes pueden ser tomadas en cuenta para ayudarlos a avanzar hacia una comprensión más profunda de estos conceptos.

5. Baker, B. & Trigueros, M. & Cooley, L. (2002). On the integration of knowledge: Geometrical interpretation of the properties of functions. Abstracts of the *2nd international conference on the teaching of mathematics* (at the undergraduate level), 27.

Abstract (tomado de MathEduc Database)

The effective use of mathematics requires the ability to discriminate how various concepts from a particular mathematics discipline are to be used and how to integrate them in the solution of a problem. A large body of research has been conducted on student understanding of specific calculus concepts, but little has been done on how students integrate and apply this knowledge when they face complex problems. The purpose of this research is to contribute to knowledge in this direction. We designed a study to examine research questions about the difficulties that students face, and the strategies they use, when integrating mathematical knowledge. Twenty-seven of the most successful university students from two different universities in two different countries participated in the study. They were interviewed while solving specific tasks related to the analysis and interpretation of information in the context of Calculus about the properties of functions and their graphs. The interview questions examined several calculus graphing concepts in more than one way, in order to determine if the students were consistent in both their answers and difficulties. The theoretical framework used in the design of the project and the analysis of the interviews is based on the notion of the Schema Triad from Action-Process-Object-

Schema (APOS) theory and the interaction of more than one schema (JRME 2000, Vol.31, No. 5, 557 - 578). Detailed analysis showed that these students, although very successful in terms of their class work, had difficulties in integrating particular properties of functions and derivatives and relating their application to sketch graphs of functions. In particular, students had difficulties coordinating information about different properties of a function across different intervals in the domain and determining the role of continuity in those situations. The results obtained highlight some cognitive and curricular issues to take into account when designing and teaching Calculus courses.

Resumen (traducción)

El uso efectivo de las matemáticas requiere de la habilidad para discriminar cómo varios conceptos para una disciplina matemática particular son usados y la habilidad de integrarlos en la solución de un problema. Un gran cuerpo de investigación se ha conducido en el entendimiento de los conceptos específicos de cálculo, pero poco se ha hecho sobre cómo los estudiantes integran y aplican este conocimiento cuando se enfrentan a problemas complejos. El propósito de esta investigación es contribuir al conocimiento en este sentido. Se diseñó un estudio para examinar las cuestiones de investigación sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes y las estrategias que utilizan, al integrar el conocimiento matemático. Veintisiete de los estudiantes universitarios de más éxito de dos universidades diferentes en dos países diferentes participaron en el estudio. Fueron entrevistados, mientras resolvían tareas específicas relacionadas con el análisis y la interpretación de la información en el contexto del Cálculo, de las propiedades de las funciones y sus gráficas. Las preguntas de la entrevista examinaron varios conceptos gráficos de Cálculo en más de una manera, a fin de determinar si los estudiantes son consistentes tanto en sus respuestas como sus dificultades. El marco teórico utilizado en el diseño del proyecto y el análisis de las entrevistas se basa en la noción de la tríada de la teoría Acción-Proceso-Objetos-Esquema (APOE) y la interacción de más de un esquema (JRME 2000, Vol. 31, N º 5, 557 - 578). Un análisis más detallado muestra que estos estudiantes, aunque muy exitosos en términos de su trabajo en clase, tuvieron dificultades en la integración de las propiedades particulares de las funciones y derivadas, y sobre su aplicación a las gráficas de funciones. En particular, los estudiantes tenían dificultades para coordinar la información sobre las diferentes propiedades de una función a través de diferentes intervalos en el dominio y para determinar el papel de la continuidad en esas situaciones. Los resultados obtenidos destacan algunas cuestiones cognitivas y curriculares a tener en cuenta al diseñar e impartir cursos de cálculo.

6. Trigueros, M. (2004). Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations. En D.E. McDougall y J.A. Ross (Eds.). *Proceedings of the Twenty-sixth Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 127-134), vol. 1. Toronto.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This study has as its main purpose the analysis of student responses to questions related to their understanding of the meaning and representation of straight-line solutions of systems of differential equations. The theoretical framework used in the design of instruments and for the analysis of students' responses is Action-Process-Object-Schema (APOS) theory, in particular, the notions of triad and double triad. We present the analysis of students' responses to questions involving the linearity theorem in the context of systems of linear differential equation (*sic.*) and the geometric representation of straight line solutions to these systems. Students (*sic.*) responses provide evidence of students (*sic.*) difficulties to relate concepts coming from different areas of mathematics even when they are able to apply solution methods without problem. Some instructional activities that seem to be successful are suggested.

Resumen (traducción)

Este estudio tiene como objetivo principal el análisis de las respuestas de los estudiantes a las preguntas relacionadas con su comprensión del significado y la representación de soluciones en forma línea recta de sistemas de ecuaciones diferenciales. El marco teórico utilizado en el diseño de instrumentos y para el análisis de las respuestas de los estudiantes es la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), en particular, las nociones de la tríada y doble tríada. Presentamos el análisis de las respuestas de los estudiantes a preguntas relacionadas con el teorema de linealidad en el contexto de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y la representación geométrica de las soluciones en forma línea recta a estos sistemas. Las respuestas de los estudiantes proporcionan evidencia de sus dificultades para relacionar conceptos provenientes de diversas áreas de las matemáticas, incluso cuando son capaces de aplicar métodos de solución sin ningún problema. Finalmente se sugieren algunas de las actividades de enseñanza que parecen tener éxito.

7. Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(001), 5-31.

Resumen (tomado del mismo artículo)

El trabajo de Piaget es la fuente epistemológica de algunas de las teorías que se utilizan en el campo de la investigación en matemática educativa. En este trabajo, se presentan las ideas fundamentales de una de estas teorías, la teoría APOE y se muestra cómo esta teoría se encuentra en desarrollo dinámico y continuo a través de la introducción de nuevos conceptos que permiten dar cuenta de la manera en la que los estudiantes universitarios entienden y son capaces de integrar los conceptos de las matemáticas en un nivel superior.
Palabras clave: matemática educativa, esquema, teoría APOE, Piaget, derivada, cálculo.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Piaget’s work is the epistemological source of some of the theories that are used in the field of mathematics education research. In this paper, the fundamental ideas of one of these

theories, APOS theory, are presented. It is shown how this theory is evolving dynamically and continuously through the development of new concepts that can be used to investigate university students' understanding of advanced mathematical concepts, and to analyse if students are able to integrate several concepts in the solution of specific problem situations.
Keywords: mathematics education, schema, APOS theory, Piaget, derivative, calculus.

8. Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 370-392.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This article examines a calculus graphing Schema and the triad stages of schema development from Action-Process-Object-Schema (APOS) theory. Previously, the authors studied the underlying structures necessary for students to process concepts and enrich their knowledge, thus demonstrating various levels of understanding via the calculus graphing schema. This investigation built on this previous work by focusing on the thematization of the schema with the intent to expose those possible structures acquired at the most sophisticated stages of schema development. Results of the analyses showed that these successful calculus students, who appeared to be operating at varying stages of development of their calculus graphing schemata, illustrated the complexity involved in achieving thematization of the schema, thus demonstrating that thematization was possible.
Keywords: advanced mathematical thinking; calculus; cognitive theory; college mathematics; clinical interviews; higher order thinking; learning theories; secondary mathematics; graph of a function.

Resumen (traducción)

Este artículo examina la representación gráfica del Cálculo como esquema y las etapas de la tríada del desarrollo de esquemas de la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE). Anteriormente, las autoras estudiaron las estructuras básicas necesarias para que los estudiantes procesen conceptos y enriquezcan sus conocimientos, demostrando los distintos niveles de comprensión a través del esquema de graficación del Cálculo. Esta investigación basada en ese trabajo previo, se centra en la tematización del esquema con la intención de exponer las posibles estructuras adquiridas en las etapas más complejas del desarrollo del esquema. Los resultados de los análisis mostraron que estos estudiantes exitosos de Cálculo, quienes parecían estar funcionando en distintas etapas de desarrollo de sus esquemas de graficación del Cálculo, ilustran la complejidad involucrada para lograr la tematización del esquema, lo que demuestra que la tematización era posible.

Palabras clave: el pensamiento matemático avanzado, cálculo, la teoría cognitiva, matemáticas universitarias; entrevistas clínicas; pensamiento de orden superior; las teorías de aprendizaje, matemáticas de secundaria; gráfica de una función.

9. Trigueros, M., Oktaç, A. & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. En D. Pitta – Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME* (pp. 2359-2368). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Abstract (adaptado del mismo artículo)

Linear Algebra makes use of the concepts involved in the solution of linear systems of equations; that is why this topic is important in such a course. In this study six students who were taking a course based on APOS theory were interviewed at the beginning of the course and at the end of the course to study the viability of a proposed genetic decomposition, students' difficulties, their reasoning pattern and the development of their schema (as defined in APOS theory). Results show that an important prerequisite for the students to profit from the opportunities the course offers to deepen their understanding of linear systems of equations depends strongly on the development of their schema for variable, and that a course based on APOS theory helps students in the evolution of their systems of equations schema.

Key words: linear algebra, equation, systems, APOS, schema.

Resumen (traducción)

El Álgebra Lineal hace uso de los conceptos involucrados en la solución de sistemas de ecuaciones lineales; por eso este tema juega un papel importante en tal curso. En este estudio seis estudiantes que estaban tomando un curso basado en la teoría APOE fueron entrevistados al inicio del curso y al final, para estudiar la viabilidad de una descomposición genética propuesta, dificultades de los estudiantes, su patrón de razonamiento y la evolución de sus esquemas (como se define en la teoría APOE). Los resultados muestran que un requisito previo importante para que los estudiantes se beneficien de las oportunidades que ofrece el curso para profundizar su comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales, depende en gran medida del desarrollo de su esquema de la variable, y que un curso basado en la teoría APOE ayuda a los estudiantes en la evolución de su esquema de los sistemas de ecuaciones.

Palabras clave: álgebra lineal, ecuación, sistemas, APOE, esquema.

3.1.2.4 **Que estudian la comprensión de un concepto matemático mediante la teoría APOE**

- *En estudiantes*

1. Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Entendimiento de los estudiantes de clases laterales, normalidad y grupos cocientes. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa,* ALME 11, 74-77.

Resumen (nuestra descripción)

En este trabajo los autores resumen los resultados de la investigación de Asiala et al. (1997) sobre los conceptos matemáticos: clases laterales, normalidad y grupos cocientes, la cual se llevó a cabo baja la perspectiva teórica APOE.

2. Asiala, M., Brown, A., Kleiman J. & Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 13-43.

(Descripción traducida de Arnon et al., 2014)

Los autores examinan cómo los estudiantes de álgebra abstracta pueden desarrollar su comprensión de permutaciones de un conjunto finito y simetrías de un polígono regular. Dan un análisis teórico inicial de estos temas, expresado en términos de la teoría APOE, describen un método de enseñanza diseñado para fomentar el desarrollo de las construcciones mentales postuladas por el análisis teórico, y discuten los resultados de las entrevistas individuales y el desempeño en los exámenes escritos. Los resultados indican que el enfoque pedagógico fue razonablemente eficaz para ayudar a los estudiantes a desarrollar concepciones fuertes de permutaciones y simetrías. Asimismo, los autores utilizaron los datos para proponer un análisis epistemológico revisado de las permutaciones y las simetrías así como para ofrecer sugerencias pedagógicas.

3. Trigueros, M. (2000). Students' conceptions of solution curves and equilibrium in systems of differential equations. *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. V1, 93-97.

Abstract (tomado del mismo artículo)

University courses on differential equations are being reconsidered and reformed, building on the previous reform efforts in calculus. In this paper we present a detailed analysis of semi-structured interviews where 18 students faced problems related to the solution of systems of ordinary differential equations, presented in different settings. We classify students' strategies and show many instances where students' understanding of parametric functions and variation conflict and become an obstacle to their understanding of the meaning of phase space representation and the notions of solution and equilibrium. We also highlight some cognitive and curricular issues that may be taken into account when dealing with these types of problems.

Resumen (traducción)
Se están reconsiderando y reformando cursos universitarios sobre ecuaciones diferenciales, sobre la base de la anterior reforma en cálculo. En este trabajo presentamos un análisis detallado de las entrevistas semi estructuradas donde 18 estudiantes se enfrentan a problemas relacionados con la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, presentados en diferentes escenarios. Hemos clasificado las estrategias de los estudiantes y mostramos muchos casos en que la comprensión de los estudiantes sobre funciones paramétricas y la variación entran en conflicto y se convierten en un obstáculo para su comprensión del significado de la representación del espacio fase y las nociones de solución y equilibrio. También destacamos algunos problemas cognitivos y curriculares que pueden ser tomados en cuenta cuando se trata de este tipo de problemas.

4. Rosado, M. & Cordero, F. (2002). La variación, la aproximación y la transformación, como un marco de reconstrucción de significados de la derivada. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 115-120), vol.1. Buenos Aires, Argentina: Grupo Editorial Iberoamérica.

Resumen (tomado del mismo artículo)

Se presenta un avance de un proyecto de investigación cuya finalidad es formular una reconstrucción del significado de la derivada, la cual, se basará en tres situaciones: la de aproximación, la de variación y la de transformación. Las situaciones reflejarán la posibilidad de reconstruir significados de la derivada y explicarán la relación de éstos con el concepto de derivada, a través de la actividad humana.

5. Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En I. Vakalis et al. (Eds.), *2nd international conference on the teaching of mathematics* (at the undergraduate level). Wiley, New York, NY.

Abstract (tomado del mismo artículo)
Exponential and logarithmic functions are pivotal mathematical concepts that play central roles in advanced mathematics. Unfortunately, these are also concepts that give students serious difficulty. In this report, we describe a theory of how students acquire an understanding of these functions by prescribing a set of mental constructions that a student can make to develop his or her understanding of these concepts.

We analyze students' understanding of these concepts within the context of our theory. Our main result is that while all of the students in our study could compute exponents in simple cases, few students could reason about the process of exponentiation. Thus, according to our theory, these students' knowledge of exponential and logarithmic functions will be limited.

We conclude by describing instructional activities based on our theoretical analysis designed to foster students' understanding of these concepts.

Resumen (traducción)

Las funciones exponenciales y logarítmicas son conceptos matemáticos fundamentales que desempeñan un papel central en las matemáticas avanzadas. Desafortunadamente, estos también son conceptos que dan a los estudiantes serias dificultades. En este reporte se describe una teoría de cómo los estudiantes adquieren una comprensión de estas funciones mediante un conjunto de construcciones mentales que un estudiante puede hacer para desarrollar su entendimiento de estos conceptos.

Analizamos la comprensión de los estudiantes de estos conceptos en el contexto de nuestra teoría. Nuestro principal resultado es que, mientras que todos los estudiantes de nuestro estudio podían calcular exponentes en casos sencillos, pocos estudiantes pudieron razonar sobre el proceso de potenciación. Así pues, de acuerdo a nuestra teoría, el conocimiento de estos estudiantes de las funciones exponenciales y logarítmicas será limitado.

Concluimos con la descripción de las actividades de instrucción basadas en nuestro análisis teórico diseñado para fomentar la comprensión de los estudiantes sobre estos conceptos.

6. DeVries, D. & Arnon, I. (2004). Solution - what does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. En Johnsen Høines, M. et al. (Eds.). *Proceedings of the 28th international conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (*55-62). Bergen, Norway. Bergen: Bergen University College.

Abstract (tomado de mismo artículo)

Twelve linear algebra students were interviewed about the concept of a solution of a system of equations. The interviews were analyzed using APOS tools, in particular the ideas of Action, Process, Object and Schema, and Genetic Decomposition. The analysis of the interviews revealed several misconceptions of solution. The analysis also revealed shortcomings of the questionnaire that was used in the interviews: It did not permit making a distinction between lack of knowledge and partial knowledge. Research tools were improved (questionnaire, GD, and suggestions for teaching materials) and prepared for the next cycle of research.

Resumen (traducción)

Doce estudiantes de álgebra lineal fueron entrevistados sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones. Las entrevistas fueron analizadas utilizando herramientas de APOE, en particular las ideas de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, y Descomposición Genética. El análisis de las entrevistas reveló varias concepciones erróneas de la solución. El análisis también reveló deficiencias del cuestionario que se utilizó en las entrevistas: que no permitía hacer una distinción entre la falta de conocimiento y un conocimiento parcial. Se mejoraron las herramientas de investigación (cuestionario, DG y sugerencias para los materiales de enseñanza) y se prepararon para el próximo ciclo de la investigación.

7. Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the American Mathematical Society*, 5(7), 741-750.

Resumen (nuestra descripción)

Este artículo usa la teoría APOE para proponer cómo los estudiantes principiantes y avanzados podrían comprender la noción de infinito. Asimismo se presentan algunas dificultades presentadas por expertos y estudiantes en su intento por comprender la noción de infinito. Para ello se proponen varias situaciones matemáticas conocidas y que han causado controversia como Aquiles y la tortuga, los infitesimales, las pelotas de Pin Pong, entre otras.

8. Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335-359.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This paper applies APOS Theory to suggest a new explanation of how people might think about the concept of infinity. We propose cognitive explanations, and in some cases resolutions, of various dichotomies, paradoxes, and mathematical problems involving the concept of infinity. These explanations are expressed in terms of the mental mechanisms of interiorization and encapsulation. Our purpose for providing a cognitive perspective is that issues involving the infinite have been and continue to be a source of interest, of controversy, and of student difficulty. We provide a cognitive analysis of these issues as a contribution to the discussion. In this paper, Part 1, we focus on dichotomies and paradoxes and, in Part 2, we will discuss the notion of an infinite process and certain mathematical issues related to the concept of infinity.
Keywords: actual and potential infinity, APOS Theory, classical paradoxes of the infinite, encapsulation, history of mathematics, human conceptions of the infinite, large finite sets.

Resumen (traducción)
Este artículo aplica la teoría APOE para sugerir una nueva explicación de cómo las personas pueden pensar acerca del concepto de infinito. Proponemos explicaciones cognitivas y en algunos casos resoluciones, de varias dicotomías, paradojas y problemas matemáticos que involucran el concepto de infinito. Estas explicaciones se expresan en términos de los mecanismos mentales de la interiorización y la encapsulación. Nuestro propósito de proporcionar una perspectiva cognitiva es que las cuestiones relacionadas con el infinito han sido y siguen siendo una fuente de interés, de controversia, y de dificultad en los estudiantes. Ofrecemos un análisis cognitivo de estas cuestiones como una contribución a la discusión. En este trabajo, parte 1, nos concentramos en las dicotomías y paradojas. En

la parte 2, vamos a discutir la noción de un proceso infinito y algunas cuestiones matemáticas relacionadas con el concepto de infinito.

Palabras clave: infinito real y potencial, teoría APOE, paradojas clásicas del infinito, encapsulación, historia de las matemáticas, concepciones humanas del infinito, grandes conjuntos finitos.

9. Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 253-266.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This is Part 2 of a two-part study of how APOS theory may be used to provide cognitive explanations of how students and mathematicians might think about the concept of infinity. We discuss infinite processes, describe how the mental mechanisms of interiorization and encapsulation can be used to conceive of an infinite process as a completed totality, explain the relationship between infinite processes and the objects that may result from them, and apply our analyses to certain mathematical issues related to infinity.

KEY WORDS: APOS theory, encapsulation, history of mathematics, human conceptions of the infinite, infinite processes, infinitesimals, limit, natural numbers.

Resumen (traducción)

Ésta es la segunda parte de un estudio de dos partes de cómo la teoría APOE podrá utilizarse para dar explicaciones cognitivas de cómo los estudiantes y los matemáticos podrían pensar en el concepto de infinito. Se discuten los procesos infinitos, se describe cómo los mecanismos mentales de interiorización y encapsulación se pueden utilizar para concebir un proceso infinito como una totalidad completa, se explica la relación entre los procesos infinitos y los objetos que pueden derivarse de ellos y se aplica nuestro análisis a ciertas cuestiones matemáticas relacionadas con el infinito.

PALABRAS CLAVE: Teoría APOE, encapsulación, historia de las matemáticas, concepciones humanas del infinito, procesos infinitos, infinitesimales, límite, números naturales.

10. Vargas, X., Oktaç, A. & Trigueros, M. (2006). Using Apos theory to analyze the learning of the concept of vector space. *3th Young European Society for Research in Mathematics Education* YERME 3. Jyväskyla, Finland.

Abstract (tomado del mismo artículo)

We report about a research study that aims at describing student understanding of vector spaces using APOS framework. In this paper we focus on three interview questions that were asked to undergraduate students with the purpose of identifying possible difficulties and errors in solving problems related to vector space structure and observing the adequacy of the relations that students might form between the vector space and the field.

Resumen (traducción)

Reportamos sobre un estudio de investigación que tiene como objetivo describir la comprensión del estudiante de los espacios vectoriales, usando el marco APOE. En este trabajo nos centramos en tres preguntas de la entrevista que se les hizo a estudiantes de Licenciatura, con el propósito de identificar las posibles dificultades y errores en la solución de problemas relacionados con la estructura de espacio vectorial y la observación de la adecuación de las relaciones que los estudiantes podrían formar entre el espacio vectorial y campo.

11. Arnon, I., Dubinsky, E., Morics, S., Moses, M., Oktac, A., Stenger, C. and Weller, K. (2008). Thinking processes of GCM: a cognitive inquiry. In R. Leikin (Ed.) *Proceedings of*

the 5th international conference on Creativity in Mathematics and Education of Gifted Student, (pp. 73-76), Haifa, Israel.

Abstract (adaptado del mismo artículo)

Research concerning the cognitive processes of human individuals identified as Gifted Children in Mathematics (GCM) is scant. This project proposes a research into such cognitive processes. The leading theoretical perspective is APOS, a theory that has already proven its effectiveness in identifying the mental structures individuals construct and use in learning mathematical concepts. This research dealt with ordinary students of different age levels, and a variety of mathematical concepts. We propose to investigate the question whether GCM develop similar mental structures when they learn mathematical concepts, only quicker and in more efficient ways, or if they use completely different ways. The mathematical concepts that we will investigate are infinity and function. Answers to our research question might on the one hand enhance better identification methods of GCM, especially in underrepresented populations, and on the other hand might improve our understanding of how ordinary learners learn mathematics. In addition, our investigations could point to pedagogical strategies for better helping GCM realize the promise of their special gifts.

Resumen (traducción)

Investigación concerniente a los procesos cognitivos de los individuos humanos, identificados como niños dotados en matemáticas (GCM) es escasa. Este proyecto propone una investigación de tales procesos cognitivos. La perspectiva teórica principal es APOE, una teoría que ya ha demostrado su eficacia en la identificación de las estructuras mentales que los individuos construyen y utilizan en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Esta investigación trata con estudiantes ordinarios de diferentes niveles de edad, y una variedad de conceptos matemáticos. Nos proponemos investigar la cuestión de si los GCM desarrollan estructuras mentales similares cuando aprenden conceptos matemáticos, sólo que más rápido y de manera más eficiente, o utilizan maneras completamente diferentes.

Los conceptos matemáticos que investigaremos son el infinito y función. Las respuestas a nuestra pregunta de investigación podrían por un lado potenciar mejores métodos de identificación de los GCM, especialmente en poblaciones subrepresentadas, y por otra parte, podría mejorar nuestra comprensión de cómo alumnos ordinarios aprenden matemáticas. Además, nuestras investigaciones podrían apuntar a estrategias pedagógicas para una mejor ayuda a los GCM y hacer realidad la promesa de sus dones especiales.

12. Dubinsky, E., Weller, K., Stinger, C. & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. European Journal of Pure And Applied Mathematics, 1(1), 99-121.

Abstract (tomado del mismo artículo)
Iterative processes are central to the undergraduate mathematics curriculum. In [4], Brown et al. used a problem situation calling for the coordination of two infinite processes to analyze student difficulties in understanding the difference between the union over k of sets P({1,2,…,k}) (P is the power set operator) and the set P(N) of all subsets of the set of natural numbers. In this paper we study students' thinking about the Tennis Ball Problem which involves movement of an infinite number of tennis balls among three bins. Here, there are three coordinations of infinite processes.

As in [4], our analysis uses APOS Theory to posit a description of mental constructions needed to solve this problem. We then interviewed 15 students working in groups on the problem and we detail the responses of five of them, which represent the full range of comments of all the students. We found that only one student was able to give a mathematically correct solution to the problem. The responses of the successful student indicated that he had made the mental constructions called for in our APOS analysis whereas the others had not.
The paper ends with pedagogical suggestions and avenues for future research.

Key words: Infinite iterative processes, APOS theory, countable sets, natural numbers, student learning and thinking.

Resumen (traducción)
Los procesos iterativos son fundamentales para el currículo de matemáticas universitarias. En [4], Brown et al. utilizan una situación problema llamada para la coordinación de dos procesos infinitos para analizar las dificultades de los estudiantes en la comprensión de la diferencia entre la unión sobre k de conjuntos P ({1,2, ..., k}) (P es la potencia del conjunto operador) y el conjunto P(N) de todos los subconjuntos del conjunto de números naturales. En este trabajo estudiamos el pensamiento de los estudiantes acerca del problema de la pelota de tenis el cual involucra el movimiento de un número infinito de pelotas de tenis en tres contenedores. Aquí, hay tres coordinaciones de procesos infinitos.

Al igual que en [4], nuestro análisis utiliza la teoría APOE para proponer una descripción de las construcciones mentales necesarias para resolver este problema. A continuación, entrevistamos a 15 estudiantes que trabajan en grupos en el problema y detallamos las respuestas de cinco de ellos, que representan una amplia gama de los comentarios de todos los estudiantes. Encontramos que sólo un estudiante fue capaz de dar una solución matemáticamente correcta al problema. Las respuestas del estudiante exitoso indican que había hecho las construcciones mentales pedidas en nuestro análisis APOE, mientras que los otros no.
El trabajo concluye con sugerencias pedagógicas y avenidas para una futura investigación.

Palabras clave: Infinito procesos iterativos, la teoría APOE, conjuntos numerables, números naturales, estudiante de aprender y pensar.

13. Trigueros, M., Ku, D. & Oktaç, A. (2008). Spanning sets and vector spaces they generate: an APOS analysis. Abstracts of the *15th Conference of the International Linear Algebra Society*, 71. Cancún, México.

Abstract (tomado del mismo libro de resúmenes)

This work forms part of a larger research project that aims to identify student difficulties with Linear Algebra concepts. The theoretical framework that we have chosen for this particular study is APOS (Action-Process-Object-Schema) theory, whose efficiency in identifying students' mental constructions is well documented in other areas of mathematics such as Calculus, Abstract Algebra and Discrete Mathematics. In our previous work (Kú et al., submitted) in looking into the mental constructions in relation with the concept of basis, we came across various difficulties that students experienced with spanning sets and the vector spaces they generate. Our results revealed that most of the interviewed students had an action or process conception of this concept. When comparing the empirical data with the genetic decomposition originally proposed for this concept, where the concepts of linear independence and generator set had been considered, it appeared that most of the obstacles had to do with what seemed to be necessary conditions to construct the notion of spanning set as a process. In this talk we present a study that intends to study the construction of the notion of spanning set and its relation with the vector space concept. A preliminary genetic decomposition for this concept was developed and instruments were designed according to this genetic theoretical analysis. We will present the analysis of the interviews that were conducted with students taking a Linear Algebra course. We will discuss and interpret results in terms of APOS theory.

Resumen (traducción)

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación extenso que tiene como objetivo identificar las dificultades del estudiante con los conceptos de Álgebra Lineal. El marco teórico que hemos elegido para este estudio en particular es la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), cuya eficacia en la identificación de las construcciones mentales

del estudiante está bien documentada en otras áreas de las matemáticas como cálculo, álgebra abstracta y matemática discreta. En nuestro trabajo anterior (Kú et al., enviado para su publicación), investigando las construcciones mentales en relación con los conceptos de base, nos encontramos con diversas dificultades que los estudiantes tienen en conjuntos generadores y los espacios vectoriales generados. Nuestros resultados revelaron que en la mayoría de los estudiantes entrevistados había una concepción acción o proceso de este concepto. Al comparar los datos empíricos con la descomposición genética propuesta inicialmente para este concepto, donde los conceptos de independencia lineal y conjunto generador había sido considerado, parece que la mayoría de los obstáculos tuvo que ver con lo que parecía ser condiciones necesarias para la construcción de la noción de conjunto generador como un proceso. En esta charla presentamos un estudio que propone estudiar la construcción de la noción de conjunto generador y su relación con el concepto de espacio vectorial. Una descomposición genética preliminar para este concepto fue desarrollada y los instrumentos fueron diseñados de acuerdo a este análisis teórico genético. Vamos a presentar el análisis de las entrevistas que se llevaron a cabo con estudiantes que tomaban un curso de álgebra lineal. Vamos a discutir e interpretar los resultados en términos de la teoría APOE.

14. Kú, D., Oktaç, A. & Trigueros, M. (2009). Conjunto generador y generado: Un análisis desde la teoría APOE. *XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Instituto Tecnológico de Ciudad de Madero. Avance de Investigación. 139-140.

Resumen (adaptado del mismo resumen presentado en XII EIME)

En la actualidad se puede encontrar en la literatura del álgebra lineal, diversos trabajos de investigación que abordan de manera implícita o explícita los conceptos de conjunto generador y conjunto generado (Nardi (1997); Ball et al. (1998); Dorier et al. (2000); Rogalski (2000) y Kú et al. (2008)). Estos trabajos se han centrado en diversos objetos de estudio como: las dificultades cognitivas que surgen en cuanto a su aprendizaje, en el análisis y desarrollo de tareas, y en sugerencias didácticas. Nuestro trabajo de investigación está relacionado con la construcción de estos conceptos desde el marco teórico que ofrece la teoría APOE (Dubinsky, 1991).

En esta primera etapa de la investigación hemos elaborado un posible camino que describe las construcciones (acciones, procesos, objetos, esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación y asimilación) mentales que un estudiante podría seguir para construir cognitivamente dichos conceptos, lo que implica que el estudiante pueda diferenciarlos entre sí. Dichas relaciones (construcciones y mecanismos) se organizan en un modelo cognitivo, llamado descomposición genética que surge de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por nuestro marco teórico (Asiala et al., 1996). Este ciclo plantea el desarrollo de tres componentes: Análisis teórico, diseño y aplicación de métodos pedagógicos, y análisis de datos. Como parte del análisis teórico diseñamos una descomposición genética preliminar de los conceptos conjunto generador y conjunto generado. Ésta orientó al diseño de una entrevista que constó de siete reactivos aplicados a tres estudiantes de un curso de álgebra lineal del Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). Con lo anterior se ha realizado un primer análisis donde se evidencia algunas de las construcciones mentales que tenían los estudiantes de los conceptos conjunto generador y generado, que se apegan a las descritas en la descomposición genética preliminar.

15. Brown, A., McDonald, M. & Weller, K. (2010). Step by Step: Infinite iterative process and actual infinity. En F. Hitt, D. Holton & P. Thompson (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education*, VII. CBMS Issues in Mathematics Education, 16, 115-142.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Students in two introduction to abstract mathematics courses were interviewed while trying to determine whether the set $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(\{1,2,\ldots,k\})$ equals the set P(**N**), where **N** denotes the set of natural numbers, and P denotes the power set operator. In their efforts to understand the infinite set represented by the union notation, the students constructed a variety of iterative processes. An APOS analysis of the data resulted in a description that identifies the role of the mechanisms of interiorization, coordination, and encapsulation in constructing infinite iterative processes and their states at infinity. This theoretical description is illustrated through a series of case studies and is compared to what is predicted by the Basic Metaphor of Infinity of Lakoff and Núñez (2000).

Resumen (traducción)

Los alumnos de dos cursos de introducción a las matemáticas abstractas fueron entrevistados mientras trataban de determinar si el conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(\{1,2,\ldots,\mathrm{k}\})$ es igual al conjunto P(**N**), donde **N** denota el conjunto de números naturales, y P denota el operador de conjunto de los elementos de un conjunto. En sus esfuerzos por comprender el conjunto infinito representado mediante una unión, los estudiantes construyen una variedad de procesos iterativos. Un análisis APOE de los datos dio lugar a una descripción que identifica el papel de los mecanismos de interiorización, coordinación, y encapsulación en la construcción de procesos iterativos infinitos y sus estados en el infinito. Esta descripción teórica se ilustra a través de una serie de estudios de caso y se compara con lo que predice la Metáfora Básica del Infinito de Lakoff y Núñez (2000).

16. Trigueros, M., Oktaç, A. & Kú, D. (2011). Spanning set: an analysis of mental constructions of undergraduate students. *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 210-212.

Abstract (tomado del mismo artículo)

In this study we use APOS theory to propose a genetic decomposition for the concept of spanning set in Linear Algebra. We give examples of interviews that were conducted with a group of university students who were taking an analytic geometry course and their

analysis in relation to our genetic decomposition. We also comment on the nature of difficulties that students experience in constructing this notion. One of the results that are obtained in this research that is in line with previous results reported in the literature is the difficulty in distinguishing a spanning set from a basis. Another aspect is that students have varying levels of difficulty when working with different types of vector spaces. As was expected, the concept of linear combination plays a very important role in the understanding of the notion of spanning.
Keywords: Spanning set, APOS Theory

Resumen (traducción)
En este estudio utilizamos la teoría APOE para proponer una descomposición genética del concepto de conjunto generador en Álgebra Lineal. Damos ejemplos de entrevistas que se llevaron a cabo con un grupo de estudiantes universitarios que estaban tomando un curso de geometría analítica y su análisis en relación a nuestra descomposición genética. También comentamos sobre la naturaleza de las dificultades que los estudiantes experimentan en la construcción de esta noción. Uno de los resultados que se obtienen en esta investigación que está en línea con los resultados anteriores en la literatura, es la dificultad de distinguir un conjunto generador de una base. Otro aspecto es que los estudiantes tienen diferentes niveles de dificultad al trabajar con diferentes tipos de espacios vectoriales. Como se esperaba, el concepto de combinación lineal juega un papel muy importante en la comprensión de la noción de generador.
Palabras clave: conjunto generador, Teoría APOE

17. Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2011). El infinito y niñ@s talento en matemáticas: una mirada desde APOE. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Recife Brasil.

Resumen (tomado del mismo artículo, XIII CIAEM)

Tomando la teoría APOE presentamos cómo “niñ@s talento en matemáticas” comprenden el infinito al abordar la paradoja de las pelotas de tenis. Con base en una descomposición genética de dicha paradoja, hemos realizado entrevistas didácticas a niñ@s colombianos y mexicanos que son considerados dentro de sus comunidades como talentosos en matemáticas. En este trabajo discutiremos algunos aspectos teóricos relacionados con las construcciones y mecanismos mentales relacionados con el infinito; así como la manera como dicho concepto puede ser construido por esta población. Este análisis nos muestra en general, que los niñ@s participantes cuentan con herramientas matemáticas para abordar el problema, pero sólo como un algoritmo ya que no logran relacionar estas ideas con el contexto del problema, por presentarse “contradictorio” con la realidad.

Palabras Clave: Teoría APOE, talento matemático, infinito, paradojas, proceso, objeto.

- *En profesores*

1. Zazkis, R. (1993). What is the meaning of 12.34five? Preservice teachers’ Interpretations. *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1. Pacific Grove, California, 275-281.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study investigates preservice teachers’ concepts of place value, multidigit number structures and decimal fractions using representation of numbers in other-than-ten bases. Based on the analysis of twenty clinical interviews, we describe students’ construction of non-decimal number and speculate on their understanding of the decimal number system.

Resumen (traducción)

Este estudio investiga los conceptos de estudiantes para profesor sobre el valor de posición, las estructuras de números de varios dígitos y fracciones decimales mediante la representación de números en una base que no sea diez. Con base en el análisis de las veinte entrevistas clínicas, describimos la construcción de los estudiantes de los números no decimales y especulamos sobre su comprensión del sistema numérico decimal.

2. Zazkis, R. & Campbell, S. (1994). Divisibility and division: Procedural attachments and conceptual understanding. En J. Pedro da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 423-430), vol 3. Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study contributes to a growing body of research on teacher's content knowledge in elementary mathematics. The general subject matter under investigation is elementary number theory. Specifically, we focus upon preservice teachers' understanding of concepts related to the multiplicative structure of whole numbers: divisibility, factorization and prime decomposition. Twenty clinical interviews were conducted with volunteers from a class of students enrolled in a professional development course, 'Foundations of mathematics for teachers'. We have adapted a constructivist-oriented theoretical framework for methodological guidance in data acquisition analysis and interpretation. Results from this study reveal in detail the participants' strong dependency upon procedures. Such procedural attachments appear to compromise and inhibit development of more refined and meaningful structures of conceptual understanding.

Resumen (traducción)

Este estudio contribuye a un creciente cuerpo de investigación sobre el conocimiento del contenido del profesor acerca de matemáticas elementales. El tema general, objeto de investigación, es la teoría elemental de números. Específicamente, nos centramos en la comprensión de futuros docentes de los conceptos relacionados con la estructura multiplicativa de los números enteros: divisibilidad, factorización y descomposición en factores primos. Veinte entrevistas clínicas se llevaron a cabo con voluntarios de una clase de estudiantes matriculados en un curso de desarrollo profesional, "Fundamentos de matemáticas para maestros". Hemos adaptado un marco teórico constructivista orientado por una guía metodológica para el análisis de adquisición de datos y la interpretación. Los resultados de este estudio revelan en detalle la dependencia fuerte de los participantes en los procedimientos. Tales apegos a procedimientos parecen comprometer e inhibir el desarrollo de las estructuras más refinadas y significativas de la comprensión conceptual.

3. Zazkis, R. & Khoury, H. (1994). To the Right of the "Decimal" Point: Preservice Teachers' Concepts of Place Value and Multidigit Structures. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education, I*. CBMS Issues in Mathematics Education, 4, 195-224.

Resumen (nuestra descripción)

En este trabajo se enfoca en cómo entienden algunos estudiantes para profesor de primaria, los conceptos relacionados con los sistemas de numeración posicional más allá de la manipulación algorítmica, poniendo mayor énfasis en el valor posicional en una parte fraccionaria de un número racional. El concepto general de este estudio es investigar el concepto del valor posicional. Y la teoría APOE es el marco utilizado en esta investigación.

4. Zazkis, R. & Campbell, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 540-563.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study contributes to a growing body of research on teachers' content knowledge in mathematics. The domain under investigation was elementary number theory. Our main focus concerned the concept of divisibility and its relation to division, multiplication, prime and composite numbers, factorization, divisibility rules, and prime descomposition. We used a constructivist-oriented theoretical framework for analyzing and interpreting data acquired in clinical interviews with preservice teachers. Participants' responses to questions and tasks indicated pervasive dispositions toward procedural attachments, even when some degree of conceptual understanding was evident. The results of this study provide a preliminary overview of cognitive structures in elementary number theory.

Resumen (traducción)

Este estudio contribuye a un creciente cuerpo de investigación sobre el conocimiento del contenido en matemáticas de los profesores. El dominio bajo la investigación fue la teoría elemental de números. Nuestro enfoque principal concernió al concepto de divisibilidad y su relación con la división, multiplicación, números primos y compuestos, factorización, reglas de divisibilidad y descomposición en factores primos. Utilizamos un marco teórico constructivista orientado para analizar e interpretar datos obtenidos por entrevistas clínicas a estudiantes para profesor. Las respuestas de los participantes a las preguntas y tareas indicaron disposiciones generalizadas hacia un apego a procedimientos, aun cuando un cierto grado de comprensión conceptual fue evidente. Los resultados de este estudio proporcionan una visión preliminar de las estructuras cognitivas de la teoría elemental de números.

5. Weller, K., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology education*, 9(1), 5-28.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Many studies establish that students at all levels, including preservice elementary and middle school teachers, have considerable difficulty understanding the relationship between a rational number (fraction or integer) and its decimal expansion(s), including the idea that $0.\overline{9} = 1$. This article reports on the mathematical performance of preservice elementary and middle school teachers who completed a specially designed unit on repeating decimals that was based on APOS theory and implemented using the ACE teaching cycle. Students enrolled in a content course on number and operation at a large southern university participated in the study. Two sections received the experimental treatment, and three sections followed a traditional approach. The quantitative results suggest that the students who received the experimental instruction made considerable progress in their development of an understanding of the specific equality between $0.\overline{9}$ and 1 and the more general relation between a rational number and its decimal expansion(s). The students in the control group made substantially less progress.

Resumen (traducción)

Muchos estudios establecen que los estudiantes en todos los niveles, incluidos los futuros docentes de primaria y secundaria, tienen dificultad para entender la relación entre un número racional (fracción o entero) y su(s) expansión(es) decimal(es), incluyendo la idea de que el $0.\overline{9} = 1$. Este artículo informa sobre el rendimiento matemático de futuros docentes de primaria y secundaria que completaron una unidad especialmente diseñada sobre los decimales periódicos, que estuvo basada en la teoría APOE e implementada con el ciclo de la enseñanza ACE. En el estudio participaron estudiantes inscritos en un curso de contenido matemático sobre el número y operaciones, en una universidad grande del sur de Estados Unidos. Dos secciones recibieron el tratamiento experimental, y tres secciones siguieron un enfoque tradicional. Los resultados cuantitativos indican que los estudiantes que recibieron la instrucción experimental realizaron considerables progresos en su desarrollo de una comprensión de la igualdad específica entre $0.\overline{9}$ y 1, y la relación más general entre un número racional y su expansión decimal. Los estudiantes del grupo de control mostraron sustancialmente un menor progreso.

6. Weller, K., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2011). Preservice Teachers' Understandings of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: Strength and Stability of Belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 11(2), 129-159.

Abstract (tomado del mismo artículo)

In an earlier study of preservice elementary and middle school teachers' beliefs about repeating decimals, Weller, Arnon, and Dubinsky (2009) reported on a comparison of the mathematical performance of 77 preservice teachers who completed an APOS-based instructional unit with 127 preservice teachers who completed traditional instruction. The purpose of the current study, based on 47 interviews conducted 4 months after the instruction, during which time there was no further instruction on this topic, is to determine the strength and stability (over time) of the students' beliefs, to uncover thinking that did not arise in the earlier study, and to see whether the interviews yield similar comparative results. The interview did uncover changes in student thinking. The students who received the APOS-based instruction developed stronger and more stable (over time) beliefs that a repeating decimal is a number; a repeating decimal has a fraction or integer to which it corresponds; a repeating decimal in general equals its corresponding fraction or integer; and, in particular, $0.\overline{9} = 1$. In addition, a number of indices and categories were developed that may prove useful in other studies consisting of the comparison of interview and questionnaire data involving a large number of interview subjects.

Resumen (traducción)

En un estudio anterior de estudiantes para profesor de primaria y secundaria sobre los decimales periódicos, Weller, Arnon y Dubinsky (2009) informaron de una comparación del rendimiento matemático de 77 estudiantes para profesor que completaron una unidad instruccional basada en APOE con 127 estudiantes para profesor que completaron la enseñanza tradicional. El propósito del presente estudio, basado en 47 entrevistas presentadas 4 meses después de la instrucción, tiempo durante el cual no hubo más

instrucciones sobre este tema, es determinar la fuerza y la estabilidad (en el tiempo) de las creencias de los estudiantes, para descubrir el pensamiento, que no surgió en el estudio anterior, y para ver si las entrevistas arrojan resultados comparativos similares. La entrevista hizo descubrir cambios en el pensamiento de los estudiantes. Los estudiantes que recibieron la instrucción basada en APOE desarrollaron creencias más fuertes y más estables (en el tiempo) que un decimal periódico es un número; un decimal periódico tiene una fracción o un número entero al que corresponde; un decimal periódico en general, es igual a su correspondiente fracción o número entero, y, en particular, $0.\overline{9} = 1$. Además, se han desarrollado una serie de índices y categorías que pueden ser útiles en otros estudios consistentes en la comparación de entrevistas y cuestionarios que implican un gran número de temas de la entrevista.

7. Dubinsky, E., Arnon, I. & Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of $0.\overline{9}$ and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(3), 232-258.

Abstract (tomado del mismo artículo)

In this article, we obtain a genetic decomposition of students' progress in developing an understanding of the decimal $0.\overline{9}$ and its relation to 1. The genetic decomposition appears to be valid for a high percentage of the study participants and suggests the possibility of a new stage in APOS Theory that would be the first substantial change in the theory since its inception (Dubinsky & Lewin, 1986). Our analysis includes a relatively objetive and highly efficient methodology that might be useful in other research and in assessment of student learning.

Resumen (traducción)

En este artículo, obtuvimos una descomposición genética del progreso de los estudiantes en el desarrollo de una comprensión del decimal $0.\overline{9}$ y su relación con 1. La descomposición genética parece ser válida para un alto porcentaje de los participantes en el estudio y sugiere la posibilidad de una nueva etapa en la Teoría APOE que sería el primer cambio importante en la teoría desde sus inicios (Dubinsky y Lewin, 1986). Nuestro análisis incluye una metodología relativamente objetiva y altamente eficiente que puede ser útil en otros centros de investigación y en la evaluación del aprendizaje de los estudiantes.

- *En estudiantes y profesores*

1. Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (2000). On Student Understanding of AE and EA Quantification. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV*. CBMS Issues in Mathematics Education, 8, 239-289.

Abstract (tomado del mismo artículo)
We discuss college students' understanding of AE ("For all… there exists…") and EA statements ("There exists… for all…") in natural language and in mathematics. College students were given a questionnaire with eleven declarative statements and asked to decide whether the statements were true or false and explain their answers. We discuss conclusions based on their written responses and on subsequent interviews with some of the students. We found that students are not inclined to use the syntax of a statement in order to interpret it, particularly if they do not understand it very well; rather, they use the context of a statement to discuss their own opinions about the topic in general, not the actual statement. We also found that students are more inclined to interpret English statements as AE rather than EA. Most students in this study could not distinguish between AE and EA statements in mathematics and did not seem to be aware of the standard mathematical conventions for parsing statements. Finally, we discuss the use of quantifier games as a pedagogical tool to help students understand statements with multiple quantifiers.

Resumen (traducción)

Discutimos la comprensión de los estudiantes universitarios acerca de declaraciones de AE ("Para todos... existe...") y las declaraciones de EA ("No existe... para todos...") en el lenguaje natural y en las matemáticas. A los estudiantes universitarios se les dio un cuestionario con once enunciados declarativos y se les pidió que decidieran si las declaraciones eran verdaderas o falsas y explicaran sus respuestas. Discutimos las conclusiones basadas en sus respuestas por escrito y en entrevistas posteriores con algunos de los estudiantes. Se encontró que los estudiantes no están dispuestos a utilizar la sintaxis de una declaración con el fin de interpretarla, sobre todo si no la entienden muy bien, sino que utilizan el contexto de una declaración para hablar de sus propias opiniones sobre el tema en general, no la declaración real. También se encontró que los estudiantes están más inclinados a interpretar las declaraciones de inglés como AE en lugar de EA. La mayoría de los estudiantes en este estudio no podían distinguir entre las declaraciones de AE y EA en las matemáticas y no parecen ser conscientes de las convenciones estándar de matemáticas para el análisis de las declaraciones. Finalmente, se discute el uso de juegos de cuantificadores como una herramienta pedagógica para ayudar a los estudiantes a entender las declaraciones que contienen varios cuantificadores.

3.1.2.5 **Que presentan información de cursos basados en la teoría APOE o proponen diseños a implementar**

1. Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. & Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 246-259.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Computer instantiations of abstract concepts could assist mathematics education by providing concrete experiences and by inducing the mental process of construction that

Piaget called reflective abstraction. Two classes of college students (n=13) given 6 weeks of computer experiences to help induce reflective abstraction scored higher on a test of their understanding of functions and compositions than one class of students (n=17) who were taught according to traditional methods. The comparison was based on questions intended to indicate whether reflective abstraction had taken place.

Resumen (traducción)

Ejemplificaciones computacionales de conceptos abstractos podrían ayudar a la educación matemática proporcionando experiencias concretas, y al inducir el proceso mental de la construcción que Piaget llama abstracción reflexiva. Dos clases de estudiantes universitarios (n = 13) que tuvieron 6 semanas de experiencias computacionales para ayudar a inducir la abstracción reflexiva obtuvieron puntuaciones más altas en una prueba, de su comprensión de las funciones y la composición, que una clase de estudiantes (n = 17) que se les enseñaba de acuerdo con los métodos tradicionales. La comparación se basa en preguntas destinadas a indicar si la abstracción reflexiva hubiera tenido lugar.

2. Dubinsky, E. (1989). On Teaching Mathematical Induction II. *Journal of Mathematical Behavior*, 8(3), 285-304.

Resumen (nuestra descripción)

En este trabajo se aplican las ideas de la teoría APOE para la enseñanza del concepto "Inducción matemática". Se incluye el tratamiento completo de este concepto con las experiencias en el uso del software SETL y su versión interactiva ISETL. El tratamiento se aplicó a dos clases: Clase I y Clase II, de 24 y 16 estudiantes, respectivamente.

3. Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1991). Constructing Calculus Concepts: Cooperation in a Computer Laboratory. En C. Leibach (Ed.), *The Laboratory Approach to*

Teaching Calculus (pp. 47-70), Mathematical Association of America, Washington, DC, 20, 47-70.

Resumen (nuestra descripción)

En este documento los autores pretenden mostrar cómo un laboratorio de cómputo puede ser un buen entorno de enseñanza donde los estudiantes construyan ideas matemáticas, haciendo uso también del trabajo cooperativo. Siendo esta investigación una de las primeras bajo el desarrollo de la teoría APOE, se incluye una breve descripción de la misma. También se hace una descripción del software ISETL (particularmente usado en la metodología de APOE) y de MAPLE, así como se proporcionan ejemplos de cómo pueden ayudar a los estudiantes a hacer construcciones mentales adecuadas para el aprendizaje de las matemáticas. En particular se considera el Teorema Fundamental del Cálculo, ofreciendo una explicación completa del tratamiento con APOE.

4. Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Our goal in this paper is to make two points. First, college students, even those who have taken a fair number of mathematics courses, do not have much of an understanding of the function concept; and second, an epistemological theory we have been developing points to an instructional treatment, using computers, that results in substantial improvements for many students. They seem to develop a process conception of function and are able to use it to do mathematics. After an introductory section we outline, in Section 2, our theoretical epistemology in general and indicate how it applies to the function concept in particular. In Section 3, 4, and 5 we provide specific details on this study and describe the development of the function concept that appeared to take place in the students that we are considering. In Section 6 we interpret the results and draw some conclusions.

Resumen (traducción)

Nuestro objetivo en este trabajo es hacer dos observaciones. En primer lugar, los estudiantes universitarios, incluso aquellos que han tenido un buen número de cursos de matemáticas, no tienen mucha comprensión del concepto de función; y segundo, una teoría epistemológica que hemos estado desarrollando apunta hacia ideas para un tratamiento instruccional, usando computadoras, que resulta en mejoras sustanciales para muchos estudiantes. Ellos parecen desarrollar una concepción proceso de la función y son capaces de usarlo para hacer matemáticas. Después de una sección introductoria planteamos, en la Sección 2, nuestra epistemología teórica en general e indicamos cómo se aplica al concepto de función en particular. En la Sección 3, 4 y 5 proporcionamos detalles específicos de este estudio y describimos el desarrollo del concepto de función que parecía tener lugar en los estudiantes que estamos considerando. En la Sección 6 interpretamos los resultados y sacamos algunas conclusiones.

5. Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 267-305.

Abstract (tomado del mismo artículo)

The research reported in this paper explores the nature of student knowledge about group theory, and how an individual may develop an understanding of certain topics in this domain. As part of a long-term research and development project in learning and teaching undergraduate mathematics, this report is one of a series of papers on the abstract algebra component of that project.

The observations discussed here were collected during a six-week summer workshop where 24 high school teachers took a course in Abstract Algebra as part of their work. By comparing written samples, and student interviews with our own theoretical analysis, we attempt to describe ways in which these individuals seemed to be approaching the concepts

of group, subgroup, coset, normality, and quotient group. The general pattern of learning that we infer here illustrates an action-process-objects-schema framework for addressing these specific group theory issues. We make here only some quite general observations about learning these specific topics, the complex nature of “understanding”, and the role of errors and misconceptions in light of an action-process-schema framework. Seen as research questions for further exploration, we expect these observations to inform our continuing investigations and those of other researches.

We end the paper with a brief discussion of some pedagogical suggestions arising out of our considerations. We defer, however, a full consideration of instructional strategies and their effects on learning these topics to some future time when more extensive research can provide a more solid foundation for the design of specific pedagogies.

Resumen (traducción)

La investigación presentada en este trabajo explora la naturaleza del conocimiento del estudiante sobre teoría de grupos, y cómo un individuo puede desarrollar una comprensión de ciertos temas en este ámbito. Como parte de una investigación a largo plazo y un proyecto desarrollado en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas de licenciatura, este reporte es parte de una serie de artículos sobre el componente de álgebra abstracta de ese proyecto.

Las observaciones discutidas aquí fueron recogidas durante un taller de verano de seis semanas, donde 24 maestros de escuelas secundarias tomaron un curso de álgebra abstracta, como parte de su trabajo. Al comparar las muestras escritas y las entrevistas con los estudiantes con nuestro análisis teórico, tratamos de describir las formas en que estas personas parecían estar acercándose a los conceptos de grupo, subgrupo, clase lateral, normalidad y el grupo cociente. El patrón general de aprendizaje que inferimos para abordar estos temas específicos de la teoría de grupos es el marco teórico Acción-Proceso-Objeto-Esquema. Hacemos aquí sólo algunas observaciones muy generales sobre el aprendizaje de estos temas específicos, la naturaleza compleja de la "comprensión" y el papel de los errores y concepciones erróneas a la luz del marco acción-proceso-esquema. Vistos como temas de investigación para una mayor exploración, esperamos que estas observaciones informen nuestras investigaciones en curso y las de otros investigadores.

Terminamos el artículo con una breve discusión de algunas propuestas pedagógicas que surjan de nuestras consideraciones. Postergamos, sin embargo, una consideración completa de las estrategias de enseñanza y sus efectos en el aprendizaje de estos temas para un tiempo futuro en que la investigación más extensa puede proporcionar una base más sólida para el diseño de métodos pedagógicos específicos.

6. Vidakovic, D. (1996). Learning the Concept of Inverse Function. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 15(3), 295-318.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This report is a part of a study that was conducted with five individual students and five groups of students who were assigned to work together in the first course of the experimental Calculus classes at Purdue University during the fall of 1992. The goal of the study was to “discover” how the concept of inverse function can be learned, and hence taught, as well as to investigate the differences between group and individual mental constructions of that particular concept. In this paper we concentrate on the “discovery” of how the concept of inverse function can be learned.

Resumen (traducción)
Este informe es parte de un estudio que se llevó a cabo con cinco estudiantes y cinco grupos de estudiantes que fueron asignados a trabajar juntos en el primer curso de las clases experimentales de Cálculo, en la Universidad de Purdue, durante el otoño de 1992. El objetivo del estudio fue el de "descubrir" cómo el concepto de función inversa se puede aprender y, por tanto enseñar, así como el de investigar las diferencias entre construcciones

mentales individual y grupal de un concepto particular. En este artículo nos centramos en el "descubrimiento" de cómo el concepto de función inversa puede ser aprendido.

7. Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 241-309.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This paper reports on a continuing development of an abstract algebra course that was first implemented in the summer of 1990. This course was designed to address discrepancies between how students learn and how they were traditionally being taught. Based on results from the first implementation, pedagogical changes were made, including increased computer programming activities and other exercises which were designed to give the students the opportunity to build experience to draw on in order to construct understanding of the topics in class. A second experimental course was run. To assess the impact of these methods, and to continue to better understand how students go about learning, test results from the latter class and interviews with students from both experimental courses and a lecture-based class were analyzed. The students in the second experimental course demostrated a deep understanding of the title concepts, especially cosets and normality. We discuss the details of the revised experimental course; the epistemological theory behind its design; and the framework used to analyze the results. We demostrate through examples from interviews and test results the applicability of this analysis to the data, and the strides made by the students in comparison with the students from the lecture-based course, and with the students from the first experimental course. We hope to illustrate difficulties students face in learning abstract algebra, and to discuss instructional strategies to help students overcome these difficulties.

Resumen (traducción)

Este documento informa sobre un continuo desarrollo de un curso de álgebra abstracta que se implementó por primera vez en el verano de 1990. Este curso fue diseñado para hacer frente a las discrepancias entre cómo los estudiantes aprenden y cómo se enseña tradicionalmente. Con base en los resultados de la primera aplicación, se implementaron cambios pedagógicos, incluyendo el aumento de actividades de programación en computadoras y otros ejercicios que fueron diseñados para dar a los estudiantes la oportunidad de adquirir experiencia para su aprovechamiento, con el fin de construir la comprensión de los temas en clase. Se realizó un segundo curso experimental. Para evaluar el impacto de estos métodos, y para continuar a comprender mejor cómo los estudiantes van sobre el aprendizaje, se analizaron los resultados de pruebas de la última clase y entrevistas con estudiantes de ambos cursos experimentales, y una clase basada en la explicación. Los estudiantes del segundo curso experimental demostraron un profundo conocimiento de los conceptos del título, sobre todo clases de equivalencia y normalidad. Discutimos los detalles del curso experimental revisado, la teoría epistemológica detrás de su diseño y el marco para analizar los resultados. Demostramos a través de ejemplos de las entrevistas y resultados de la prueba, la aplicabilidad de este análisis de los datos, y los avances obtenidos por los estudiantes en comparación con los estudiantes del curso basado en explicaciones, y con los estudiantes del primer curso experimental. Esperamos ilustrar las dificultades que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de álgebra abstracta y discutir las estrategias de enseñanza para ayudar a superar estas dificultades.

8. Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, A. Duane Porter, A. Watkins and W. Watkins (eds.). *Resources for Teaching Linear Algebra*, Mathematical Association of America, MAA Notes Vol 42, 85-105.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This paper has two purposes: to react to the recommendations of the Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG) and of David Carlson (one of the organizers of the LACSG), and to begin consideration of an alternative approach to helping students learn linear algebra.

The LACSG efforts to bring linear algebra into the overall undergraduate curriculum reform movement are laudable. There are some concerns with their approach, however, and this paper attempts to raise some questions concerning the lack of a body of research establishing a need for curriculum reform in linear algebra, the apparent identification, in the LACSG recommendations, of abstract with useless (and hence, by negation, the equating of concrete with useful) and the assumption that performing calculations with matrices (even intriguing operations) is the same as applying mathematical ideas so as to meet the needs of client departments.

The alternative proposed here not in the spirit of replacement but in the sense of letting one more flower bloom as an extension to linear algebra of an overall curriculum reform project. This Project involves learning mathematics by programming language, extensive use of cooperative learning, and the development of alternatives to the lecture method.
The discussion of the alternative in this paper is far from complete. It is, rather, an attempt to make a beginning of mapping out a project that will apply to linear algebra an approach that is having some success in precalculus, calculus, discrete mathematics and abstract algebra.

Resumen (traducción)
Este artículo tiene dos propósitos: reaccionar a las recomendaciones del Grupo de Estudio del Curriculum de Álgebra Lineal (LACSG) y de David Carlson (uno de los organizadores de la LACSG), e iniciar la consideración de un enfoque alternativo a ayudar a los estudiantes a aprender álgebra lineal.

Los esfuerzos de LACSG por incluir el álgebra lineal en el movimiento global de la reforma curricular de licenciatura, son laudables. Hay algunas preocupaciones con su enfoque sin embargo, y este documento trata de plantear algunas cuestiones relativas a la falta de un cuerpo de investigación que establezca la necesidad de una reforma curricular en el álgebra lineal, a la aparente identificación, en las recomendaciones de LACSG, de lo abstracto con lo inútil (y, por tanto, por la negación, la equiparación de lo específico con lo útil) y a la suposición de que realizar cálculos con matrices (incluso las operaciones interesantes) es equivalente a la aplicación de ideas matemáticas con el fin de satisfacer las necesidades de los departamentos clientes.

La alternativa propuesta aquí no es en el sentido de remplazo, sino en el sentido de dejar que una flor florezca como una extensión al álgebra lineal de un proyecto de reforma del currículo general. Este proyecto consiste en aprender las matemáticas mediante un lenguaje de programación, el uso extensivo del aprendizaje cooperativo y el desarrollo de alternativas a los métodos basados en conferencias.

La discusión de la alternativa en este artículo está lejos de ser completa. Es, más bien, un intento de hacer un inicio de planificación de un proyecto que se aplicará al álgebra lineal, de un enfoque que está teniendo cierto éxito en precálculo, cálculo, matemática discreta y álgebra abstracta.

9. Dubinsky, E. (1997). On Learning Quantification. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(2/3), 335-362.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This paper reports on a study of students learning the concept of universal and existential quantification in undergraduate mathematics courses in which the instruction was based on previous research into what it means to understand this concept. Following a theoretical

analysis of the epistemology of quantification obtained in previous work, instruction is designed in which students construct mathematical concepts on a computer, using the mathematical programming language ISETL. The intention is that, as a result of making the computer constructions, students will tend to make effective mathematical constructions in their minds.

Resumen (traducción)

Este documento reporta sobre un estudio de los estudiantes que aprenden el concepto de la cuantificación universal y existencial en los cursos de matemáticas de Licenciatura, en los cuales la instrucción estuvo basada en investigaciones previas de lo que significa entender este concepto. Después de un análisis teórico de la epistemología de la cuantificación, obtenido en trabajos previos, la instrucción se diseña para que los alumnos construyan conceptos matemáticos en una computadora, utilizando el lenguaje de programación matemática ISETL. La intención es que, como resultado de hacer las construcciones en la computadora, los estudiantes tiendan a hacer efectivas las construcciones matemáticas en sus mentes.

10. Zazkis, R. & Gunn, C. (1997). Sets, Subsets, and the Empty Set: Students' Constructions and Mathematical Conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(1), 133-169.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study investigates students' understanding of the basic concepts of introductory set theory: set, set element, cardinality, subset, and the empty set. The data was collected from a group of preservice elementary school teachers by means of written assessment, clinical interviews, and students' participation in a computer-based project. The project included experimentation with basic set concepts in an open computer based environment with mathematical computer language ISETL. A constructivist-oriented framework was used in analyzing the data. The results reveal complexities in students' understanding, especially when set elements involved are sets themselves. Special attention is given to the description of students' difficulties with the concept of the empty set.

Resumen (traducción)

Este estudio investiga la comprensión de los estudiantes de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos introductoria: conjunto, elemento de un conjunto, cardinalidad, subconjunto y el conjunto vacío. Los datos fueron recolectados de un grupo de maestros en formación de educación básica a través de evaluación escrita, entrevistas clínicas, y la participación de los estudiantes en un proyecto basado en computadora. El proyecto incluye la experimentación con los conceptos básicos establecidos en un entorno informático de código abierto basado en lenguaje de programación matemática, ISETL. Un marco con orientación constructivista se utilizó en el análisis de los datos. Los resultados revelan una complejidad en la comprensión de los estudiantes, sobre todo cuando los elementos de los conjuntos son ellos mismos conjuntos. Se presta especial atención a la descripción de las dificultades de los alumnos con el concepto de conjunto vacío.

11. McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV*. CBMS Issues in Mathematics Education, 8, 77-100.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This paper is part of a continuing series of research studies by members of a collaborative group of mathematics education researchers (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Data for this study consisted of extensive interviews with students who had completed two semesters of calculus in either a traditional lecture/recitation calculus course or the learning theory based Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning reform program. The Action-Process-Object-Schema theory was

used to examine students' cognitive construction of the concept of sequence. We show that students tend to construct two distinct cognitive objects both of which they refer to as a sequence. One construction, SEQLIST, is what we might see as a functional (expression with domain N) representation of a sequence. As the connections between these two entities become stronger, and the students reflect on these connections, they begin to view sequence as a single cognitive entity and SEQLIST and SEQFUNC as merely mathematical representations of this entity. In this paper we detail the construction of SEQLIST and SEQFUNC by the students, and characterize the connections between them through a model of schema development.

Resumen (traducción)

Este trabajo es parte de una serie de estudios de investigación en curso por miembros de un grupo colaborativo de investigadores en educación matemática (Comunidad para la Investigación en Educación Matemática Universitaria). Los datos para este estudio consistieron en extensas entrevistas con estudiantes que habían completado dos semestres de cálculo en cualquiera de los dos cursos de cálculo tradicional conferencia/recitación o la teoría del aprendizaje basado en el programa de reforma del Cálculo, Conceptos, Computadoras y Aprendizaje Cooperativo. La teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema se utilizó para examinar la construcción cognitiva de los estudiantes sobre el concepto de sucesión. Mostramos que los estudiantes tienden a construir dos distintos objetos cognitivos, a los cuales se refieren como una sucesión. Una construcción, SEQLIST, es lo que podríamos ver como una representación funcional (expresión con dominio N) de una sucesión. Mientras las conexiones entre estas dos entidades se hacen más fuertes y los estudiantes reflexionan sobre estas conexiones, ellos comienzan a ver la sucesión como una entidad única y cognitiva, y a SEQLIST y SEQFUNC como representaciones meramente matemáticas de esta entidad. En este documento se detalla la construcción del SEQLIST y el SEQFUNC por los estudiantes y se caracteriza las relaciones entre ellos a través de un modelo de desarrollo del esquema.

12. Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(2), 167-214.

Abstract (tomado del mismo artículo)

The concept of equivalence class plays a significant role in the structure of Rational Numbers. Piaget taught that in order to help elementary school children develop mathematical concepts, concrete objects and concrete reflection-enhancing-activities are needed. The "Shemesh" software was specially designed for learning equivalence-classes of fractions. The software offers concrete representations of such classes, as well as activities which cannot be constructed without a computer. In a discrete Cartesian system students construct points on the grid and learn to identify each such point as a fraction numeral (a denominator-numerator pair). The children then learn to construct sets of such points, all of which are located on a line through the origin point. They learn to identify the line with the set of its constituent equivalent fractions. Subsequently, they investigate other phenomena and constructions in such systems, developing these constructions into additional fraction concepts. These concrete constructions can be used in solving traditional fraction problems as well as in broadening the scope of fraction meaning. Fifth-graders who used "Shemesh" in their learning activities were clinically interviewed several months after the learning sessions ended. These interviews revealed evidence indicating initial actual development of the desired mathematical concepts.

KEY WORDS: APOS, learning systems, rational numbers, software in elementary school mathematics.

Resumen (traducción)

El concepto de clase de equivalencia juega un papel significativo en la estructura de los Números Racionales. Piaget enseñó que a fin de ayudar a los niños de escuelas primarias a desarrollar conceptos matemáticos, objetos concretos y actividades concretas que mejoran la reflexión, eran necesarios. El software "Shemesh" ha sido diseñado especialmente para el

aprendizaje de las clases de equivalencia de fracciones. El software ofrece representaciones concretas de tales clases, así como actividades que no pueden construirse sin una computadora. En un sistema cartesiano discreto los estudiantes construyen puntos de la red y aprenden a identificar cada punto como una fracción numeral (un par denominador-numerador). Los niños entonces aprenden a construir conjuntos de dichos puntos, todos los cuales están situados en una línea que pasa por el punto de origen. Aprenden a identificar la línea con el conjunto de sus fracciones equivalentes constituyentes. Posteriormente, investigan otros fenómenos y construcciones en tales sistemas, desarrollando estas construcciones en conceptos de fracciones adicionales. Estas construcciones concretas pueden ser utilizadas en la solución de los problemas tradicionales de fracción, así como en la ampliación del alcance de significado de fracción. Estudiantes de quinto grado quienes usaron "Shemesh" en sus actividades de aprendizaje fueron entrevistados clínicamente varios meses después de que las sesiones de aprendizaje habían terminado. Estas entrevistas revelaron evidencia indicando el desarrollo inicial real de los conceptos matemáticos deseados.

PALABRAS CLAVE: APOE, sistemas de aprendizaje, números racionales, software de matemáticas en la escuela primaria.

13. Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. & Merkovsky, R. (2003). Student Performance and Attitudes in Courses Based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. En A. Selden, G. Harel & F. Hitt (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education* V. CBMS Issues in Mathematics Education, 12, 97-131.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Over the last several years a number of mathematics education researchers have applied a particular research framework to study student learning of various topics in the undergraduate mathematics curriculum. Included in this research framework is the development and implementation of instructional treatments based upon APOS Theory, an

extension of Piaget´s theory of reflective abstraction to the undergraduate mathematics curriculum, and the ACE Teaching Cycle, a pedagogical approach that encourages active student learning. Previous works by these researchers have focused on the nature of students' understandings using data that measured students' performances on various mathematical tasks. For the most part, such data were generated by small samples of students whose selection was not based upon the use of rigorous sampling techniques. The purpose of this paper is to examine such data collectively as a means of gauging the overall effectiveness of instruction based upon APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. This report, based upon the data gathered in fourteen previous studies in the areas of calculus, abstract algebra, concept of function, quantification, induction, and the affective domain, paints a picture that suggests that instruction based upon APOS Theory may be an effective tool in helping students to learn mathematical concepts.

Resumen (traducción)

En los últimos años varios investigadores en educación matemática han aplicado un marco de investigación particular para el estudio del aprendizaje de diversos temas en el currículo de matemáticas universitarias. Incluido en este marco de investigación es el desarrollo y aplicación de tratamientos de enseñanza basados en la Teoría APOE, una extensión de la teoría de Piaget de la abstracción reflexiva en el currículo de matemáticas universitarias, y el ciclo de enseñanza ACE, un enfoque pedagógico que fomenta el aprendizaje activo del estudiante. Trabajos previos de estos investigadores se han centrado en la naturaleza de la comprensión de los estudiantes utilizando datos que midieron el desempeño de los estudiantes en diversas tareas de matemáticas. En su mayor parte, estos datos fueron generados por pequeñas muestras de estudiantes cuya selección no se basó en el uso de rigurosas técnicas de muestreo. El propósito de este trabajo es examinar estos datos en conjunto como una forma de medir la eficacia global de la instrucción basada en la Teoría APOE y el ciclo de enseñanza ACE. Este informe, basado en los datos recogidos en catorce estudios previos en las áreas de cálculo, álgebra abstracta, el concepto de la función, la cuantificación, la inducción y el dominio afectivo, pinta un cuadro que sugiere que la

instrucción basada en la teoría APOE puede ser una herramienta eficaz en ayudar a los estudiantes a aprender los conceptos matemáticos.

14. Baker, B. & Montgomery, A. (2006). A unified representation of function in college algebra: Graphs. En S. Alatorre, J. L.Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Abstract (tomado del mismo artículo)

The graphing component of the unified representation of function will be presented which utilizes a computational arrow in all three representations of function to emphasize the transformational nature of functions. Examined through the lens of APOS theory, results suggest this approach helps students develop a more accurate action conception which should ease the transition to a process conception of function.

Resumen (traducción)

Se presentará la componente gráfica de la representación unificada de función la cual utiliza un arreglo computacional en cada una de las tres representaciones de la función para enfatizar la transformación natural de funciones. Examinado a través del lente de la Teoría APOE, los resultados sugieren que este enfoque ayuda a los estudiantes a desarrollar una concepción acción más precisa en la cual la transición a una concepción proceso de la función debería facilitarse.

15. Cooley, L., Vidakovic, D., Loch, S., Meagher, M. & Martin, B. (2006). The learning of linear algebra from an APOS perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of*

the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 84-85). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Resumen (nuestra descripción)
Los autores exponen el desarrollo y la implementación de dos cursos de álgebra lineal. Los cursos se diseñaron para complementarse entre sí, uno sobre el contenido matemático y otro con un enfoque en las teorías de aprendizaje. Estos cursos estuvieron dirigidos a estudiantes universitarios que se preparaban para ser porfesores de matemáticas en secundaria y fueron dirigidos bajo el marco teórico APOE.

16. Martin, W., Loch, S., Cooley, L., Dexter, S. & Vidakovic, D. (2008). Integrating learning theories and application-based modules in teaching linear algebra. Abstracts of the 15th *Conference of the International Linear Algebra Society*. Cancún, México, 48-49.

Abstract (tomado del mismo libro de resúmenes)
The research team of The Linear Algebra Project developed and implemented a curriculum and a pedagogy for parallel courses in (a) linear algebra and (b) learning theory as applied to the study of mathematics with an emphasis on linear algebra. The purpose of the ongoing research, partially funded by the National Science Foundation, is to investigate how the parallel study of learning theories and advanced mathematics influences the development of thinking of individuals in both domains. The researchers found that the particular synergy afforded by the parallel study of math and learning theory promoted, in some students, a rich understanding of both domains and that had a mutually reinforcing effect.

Furthermore, there is evidence that the deeper insights will contribute to more effective instruction by those who become high school math teachers and, consequently, better learning by their students. The courses developed were appropriate for mathematics majors, pre-service secondary mathematics teachers, and practicing mathematics teachers. The learning seminar focused most heavily on constructivist theories, although it also examined socio-cultural and historical perspectives (von Glaserfeld, 1989; Vygotsky, 1978, 1986). A particular theory, Action-Process-Object-Schema (APOS) (Asiala et al., 1996), was emphasized and examined through the lens of studying linear algebra. APOS has been used in a variety of studies focusing on student understanding of undergraduate mathematics. The linear algebra courses include the standard set of undergraduate topics. This paper reports the results of the learning theory seminar and its effects on students who were simultaneously enrolled in linear algebra and students who had previously completed linear algebra and outlines how prior research has influenced the future direction of the project.

Resumen (traducción)

El equipo de investigación del Proyecto Álgebra Lineal, desarrolla e implementa un plan de estudios y pedagogía para cursos paralelos en (a) el álgebra lineal y (b) la teoría del aprendizaje aplicada al estudio de las matemáticas, con énfasis en álgebra lineal. El propósito de la investigación en curso, financiado en parte por la Fundación Nacional de Ciencia, es investigar cómo el estudio paralelo de las teorías de aprendizaje y matemática avanzada influye en el desarrollo del pensamiento de los individuos en ambos dominios. Los investigadores encontraron que la sinergía particular ofrecida por el estudio paralelo de la teoría de las matemáticas y el aprendizaje, promueve en algunos alumnos, una rica comprensión de ambos dominios; y que tuvo un efecto que se refuerzan mutuamente.

Además, existe evidencia de que las ideas más profundas contribuirán a una enseñanza más efectiva por los que se forman como profesores de matemáticas de la preparatoria y, en consecuencia, a un mejor aprendizaje de sus alumnos. Los cursos desarrollados fueron adecuados para estudiantes de matemáticas, los futuros profesores de matemáticas de secundaria y preparatoria, y los profesores practicantes de matemáticas. El seminario de aprendizaje se centró en gran medida en las teorías constructivistas, aunque también se examinaron las perspectivas socio-culturales e históricas (von Glaserfeld, 1989; Vygotsky, 1978, 1986). Una teoría en particular, Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE) (Asiala et al., 1996), se destacó y se examinó a través de la lupa del estudio de álgebra lineal. APOE se ha utilizado en una variedad de estudios centrados en la comprensión de los estudiantes de Licenciatura. Los cursos de álgebra lineal incluyen el conjunto estándar de temas universitarios. Este artículo reporta los resultados del seminario de teoría del aprendizaje y sus efectos sobre los estudiantes que se inscribieron al mismo tiempo en el álgebra lineal y los estudiantes que habían completado previamente el álgebra lineal y explica cómo la investigación anterior ha influido en la orientación futura del proyecto.

17. Martin, W., Loch, S., Cooley, S., Dexter, S. & Vidakovic, D. (2010). Integrating learning theories and application-based modules in teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2089-2099.

Abstract (tomado del mismo artículo)

The research team of The Linear Algebra Project developed and implemented a curriculum and a pedagogy for parallel courses in (a) linear algebra and (b) learning theory as applied to the study of mathematics with an emphasis on linear algebra. The purpose of the ongoing research, partially funded by the National Science Foundation, is to investigate how the parallel study of learning theories and advanced mathematics influences the development of thinking of individuals in both domains. The researchers found that the particular synergy afforded by the parallel study of math and learning theory promoted, in some students, a rich understanding of both domains and that had a mutually reinforcing effect. Furthermore, there is evidence that the deeper insights will contribute to more effective instruction by those who become high school math teachers and, consequently, better learning by their students. The courses developed were appropriate for mathematics majors, pre-service secondary mathematics teachers, and practicing mathematics teachers. The learning seminar focused most heavily on constructivist theories, although it also examined socio-cultural and historical perspectives. A particular theory, Action–Process–Object–Schema (APOS) [10], was emphasized and examined through the lens of studying linear algebra. APOS has been used in a variety of studies focusing on student understanding of undergraduate mathematics. The linear algebra courses include the standard set of undergraduate topics. This paper reports the results of the learning theory seminar and its effects on students who were simultaneously enrolled in linear algebra and students who had previously completed linear algebra and outlines how prior research has influenced the future direction of the project.

Resumen (traducción)

El equipo de investigación del Proyecto Álgebra Lineal desarrolló e implementó un plan de estudios y una pedagogía para cursos paralelos en (a) álgebra lineal y (b) la teoría del aprendizaje aplicada al estudio de las matemáticas, con énfasis en álgebra lineal. El propósito de la investigación en curso, financiada en parte por la Fundación Nacional de Ciencia, es investigar cómo el estudio paralelo de las teorías de aprendizaje y matemática avanzada influye en el desarrollo del pensamiento de los individuos en ambos dominios. Los investigadores encontraron que la sinergía que ofrece el estudio paralelo de la teoría de las matemáticas y el aprendizaje, promueve en algunos alumnos una rica comprensión de ambos dominios y que tuvo un efecto que se refuerza mutuamente. Además, hay evidencia de que las ideas más profundas contribuirán a una enseñanza más efectiva por aquellos que se conviertan en profesores de matemáticas y, en consecuencia, un mejor aprendizaje de sus alumnos. Los cursos desarrollados fueron apropiados para estudiantes de matemáticas, futuros profesores de matemáticas de secundaria, y profesores de matemáticas en servicio. El seminario de aprendizaje se enfocó en gran medida en la mayoría de las teorías constructivistas, aunque también se examinaron las perspectivas socioculturales e históricas. Una teoría en particular, Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE) [10], se enfatizó y examinó a través la lupa de estudio de álgebra lineal. APOE se ha utilizado en una variedad de estudios centrados en la comprensión del estudiante de las matemáticas de Licenciatura. Los cursos de álgebra lineal incluyen el conjunto de temas estándares de Licenciatura. Este artículo reporta los resultados del seminario de teoría del aprendizaje y sus efectos sobre los estudiantes que se inscribieron al mismo tiempo en álgebra lineal y los

estudiantes que habían completado previamente el álgebra lineal y explica cómo la investigación anterior ha influido en la orientación futura del proyecto.

18. Campero, J. & Trigueos, M. (2009). Una propuesta didáctica para optimización dinámica: El caso del cálculo de variaciones y la teoría de control. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 951-960). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)

El presente artículo presenta las características de un proyecto de evaluación de una propuesta didáctica. Posteriormente se concentra en una parte del mismo correspondiente a la evaluación a través de un cuestionario. Se diseñaron instrumentos didácticos para apoyar la construcción de los estudiantes de los conceptos de funcional y variación, además de las técnicas de solución de problema de Optimización Dinámica, usando la Teoría APOE como marco teórico. Después de la instrucción se usó un cuestionario para analizar las construcciones de los alumnos al final del curso. Los alumnos avanzaron en la construcción de estos conceptos en relación con las observaciones en otros cursos, aunque los resultados relacionados con el concepto de funcional y la relación entre conceptos son menos satisfactorios.

Palabras clave: optimización, variaciones, control, funcional, abstracción reflexiva.

19. Trigueros, M. & Campero, J. (2010). Propuesta didáctica en optimización dinámica. Investigación en el aula. *Educación Matemática*, 22(3), 87-117.

Resumen (tomado del mismo artículo)

Este artículo tiene como objetivo informar los resultados de la puesta a prueba de una propuesta didáctica para la enseñanza de la optimización dinámica, en particular del cálculo

de variaciones. El diseño de la propuesta se hizo con base en la teoría APOE y se puso a prueba en una institución de enseñanza superior. Los resultados obtenidos del análisis de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario y una entrevista ponen de manifiesto que los estudiantes muestran concepciones proceso y, en ocasiones, objeto de los conceptos abstractos de esta disciplina como resultado de su aplicación, aunque se detectaron algunas dificultades que resultaron difíciles de superar para dichos alumnos.
Palabras clave: optimización dinámica, teoría APOE, propuesta didáctica, concepciones, aprendizaje.

Abstract (tomado del mismo artículo)
The purpose of this paper is to present the results of a research study on a didactical proposal to teach Dynamical Optimization, in particular, Calculus of Variations. The proposal design was based on APOS theory and was tested at a Mexican private university. Results obtained from the analysis of students' responses to a questionnaire and an interview show that students construct process conceptions, and in some cases, object conceptions of this discipline's abstract concepts. Some problems were however difficult to overcome for these students.
Keywords: dynamical optimization, APOS theory, didactical proposal, conceptions, learning.

20. Dubinsky, E. & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83-101.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This paper is a study of part of the Algebra Project's program for underrepresented high school students from the lowest quartile of academic achievement, social and economic status. The study focuses on students' learning the concept of function. The curriculum and pedagogy are part of an innovative, experimental approach designed and implemented

by the Algebra Project. The instructional treatment took place over 7 weeks during the Junior Year of 15 students from our target population. Immediately after instruction, a written instrument was administered followed, several weeks later, by in-depth interviews. The results are that many of our participants achieved a level of knowledge and understanding of functions on a par with beginning college students, including preservice teachers, as reported in the literature. Many conceptual difficulties that have been reported in the research literature were not as prevalent for our participants and some of them were capable of solving difficult problems involving composition of functions. We conclude that, with appropriate pedagogy, it is possible for students in the Algebra Project's target population to learn substantial and non-trivial mathematics at the high school level, and that the Algebra Project approach is one example of such a pedagogy.

Keywords: Functions, Underrepresented high school students, Improving academic performance, Research-based curriculum and pedagogy

Resumen (traducción)

Este trabajo es un estudio de parte del programa del Proyecto Algebra para estudiantes de bachillerato subrepresentados del cuartil más bajo de rendimiento académico, nivel social y económico. El estudio se enfoca en el aprendizaje de los estudiantes sobre el concepto de función. El currículo y la pedagogía son parte de un enfoque innovador, experimental diseñado e implementado por el Proyecto Algebra. El tratamiento instruccional se llevó a cabo a través de 7 semanas durante el penúltimo año de 15 estudiantes de nuestra población objetivo. Inmediatamente después de la instrucción, un instrumento escrito se administró varias semanas más tarde, a través de entrevistas a fondo. Los resultados son que muchos de nuestros participantes lograron un nivel de conocimiento y comprensión de las funciones a la par con los estudiantes universitarios que comienzan, como estudiantes para profesor, como se informa en la literatura. Muchas de las dificultades conceptuales que se han reportado en la literatura investigada no eran tan frecuentes para nuestros participantes y algunos de ellos fueron capaces de resolver problemas difíciles relacionados con la composición de funciones. Llegamos a la conclusión de que, con una pedagogía adecuada, es posible que los estudiantes de la población objetivo del Proyecto Algebra aprendan matemáticas substanciales y no triviales en el nivel de bachillerato, y que el enfoque del Proyecto Algebra es un ejemplo de este tipo de pedagogía.

Palabras clave: Funciones, estudiantes de secundaria subrepresentadas, mejorar el rendimiento académico, investigación basada en el currículo y la pedagogía.

3.1.2.6 **Que proponen reinterpretar algunas ideas de la teoría APOE**

1. Cordero, F. & Miranda, E. (2002). El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(2), 133-168.

Resumen (tomado del mismo artículo)

En este trabajo se consideran dos aspectos: la problemática del discurso de la matemática escolar de la transformada de Laplace y un cuestionamiento teórico del concepto de descomposición genética, que posiblemente pudiera ser reformulado con una base epistemológica. La investigación indicó, ante tal problemática, la ausencia de un marco de referencia de significados y el origen de las condiciones que permitieron la construcción de la transformada de Laplace. Este hecho cuestionó cualquier formulación de la descomposición genética de la transformada de Laplace, debido a que la descomposición significaría un modelo de aprendizaje para estudiantes, e implicaría, en el a priori del marco de referencia de la transformada, una descomposición formulada por las coordinaciones de las construcciones mentales necesarias del estudiante para dar cuenta únicamente de la definición de la transformada de Laplace. Es, entonces, como se formula una epistemología de la transformada de Laplace y se discute su papel como base para una descomposición genética con la intención de ampliar su marco conceptual.

2. Cordero, F. & Reyes, A. (2003). Reconstrucción de significados de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. En J. R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 105-111), vol. 1. La Habana, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)

En este trabajo presentamos un proyecto de investigación cuyo propósito fundamental es establecer una reconstrucción de significados de la ecuación diferencial y’’+by+cy=f a través de una situación de transformación. Ésta consiste en identificar patrones de comportamiento de la solución y(x) en reacción con la función f, al variar los coeficientes b y c de la ecuación diferencial e interactuar en los contextos algebraico y gráfico.

Nuestra hipótesis de investigación consiste en que el comportamiento tendencial de las funciones es el argumento que tendrá que construir el estudiante en la situación de transformación, el cual posibilitará la reconstrucción de significados de la ecuación y’’+by’+cy=f y de la propiedad de estabilidad al interactuar en los contextos algebraico y geométrico.

Nos proponemos diseñar situaciones con la intención de generar los argumentos en el estudiante. Nuestro análisis se fundamentará sobre discusiones en grupo y sobre actividades de trabajos escritos.

3.1.2.7 **Que usan APOE junto con algún otro marco teórico**

3.1.2.7.1 **Que usan APOE como marco teórico empleando ciertas características de otros marcos**

1. Cordero, F. & Martínez, E. (2002). El comportamiento periódico de una función como un argumento contextual. La manifestación del movimiento fuera del instante. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.55-60). Buenos Aires, Argentina: Grupo Editorial Iberoamérica.

Resumen (tomado del mismo artículo)
En el campo de la matemática educativa, el concepto de periodicidad es un tema muy poco explorado, a pesar de encontrarse inmerso prácticamente en la curricula escolar de la matemática. Este concepto es ampliamente utilizado en diversos tópicos de matemáticas, sin embargo, solo existe poco trabajo de corte epistemológico al respecto, donde se encuentra el trabajo de Shama (1998), este estudio cognitivo nos plantea una problemática sobre la comprensión del estudiante, cuando éste concibe la periodicidad como un proceso y no puede transformarla en objeto. Esto conduce al estudiante a relacionar fenómenos no periódicos como periódicos y a tener preferencia por identificar un periodo de un fenómeno periódico que no es necesariamente en forma correcta. La problemática es retomada para la investigación, considerando los contextos discreto y continuo del concepto. El objetivo es diseñar una situación de tal forma que el estudiante de (*sic.*) una nueva explicación sobre la concepción de proceso y pueda alcanzar su transformación al objeto del concepto de periodicidad. Para tal propósito se ha formulado una epistemología de la periodicidad, donde se han hallados ciertos elementos (repetición regular, desplazamiento lineal como el argumento de los fenómenos periódicos, y el comportamiento periódico de una función como un argumento contextual, la manifestación del movimiento en un todo y no en un momento, que permitan la construcción de la periodicidad. El concepto de periodicidad generalmente es tratado en la currícula como una propiedad de cierta clase de funciones

llamadas periódicas. Sin embargo es factible pensar la orientación del concepto de periodicidad a través de la noción de comportamiento tendencial de las funciones, donde la epistemología del concepto esté basada en situaciones de tendencia de un comportamiento periódico. De (*sic.*) la epistemología de la periodicidad tiene como propósito ser la base de una descomposición genética que incluya los elementos y su relación. Nuestro marco teórico en la investigación es el de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y el diseño de actividades, su implementación y la recolección de datos con estudiantes de precálculo y cálculo, a través de la metodología que señala la propia teoría, el ciclo ACE. Los resultados se presentan en la presentación de la investigación.

3.1.2.7.2 **Que unen APOE con otra teoría con fines de desarrollo curricular**

1. Arnon, I., Dubinsky, E. & Nesher, P. (1994). Actions which can be performed in the learner's imagination: the case of multiplication of a fraction by an integer. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 283-290). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Abstract (tomado del mismo artículo)
Two learning theories, both based on the work of Piaget, are brought together to contribute to curriculum development, research, and teaching mathematics to children of 7-12 years of age. The theory of Learning Systems (Nesher, 1989) provides the curriculum developer with a structure of learning units, using physical objects to teach mathematics. The question "How does the learner become independent of the physical objects?" remains without an explicit answer in this theory. We suggest that the schema of learning: Action-Process-Concept (Dubinsky, 1991) provides an answer to this question. The analysis is presented via an example: fractions in grade-four.

Resumen (traducción)
Dos teorías de aprendizaje, ambas basadas en la obra de Piaget, se unen para contribuir al desarrollo de planes de estudio, a la investigación y a la enseñanza de las matemáticas a los niños de 7-12 años de edad. La teoría de los Sistemas de Aprendizaje (Nesher, 1989) ofrece desarrollar el currículo con una estructura de unidades de aprendizaje, utilizando los objetos físicos para enseñar matemáticas. La pregunta "¿Cómo es que el alumno se independiza de los objetos físicos?" se queda sin una respuesta explícita en esta teoría. Sugerimos que el esquema de aprendizaje: Acción-Proceso-Concepto (Dubinsky, 1991) ofrece una respuesta a esta pregunta. El análisis se presenta a través de un ejemplo: fracciones en el cuarto grado.

3.1.2.7.3 **Que estudian la comprensión de un concepto matemático desde la perspectiva de la unión de APOE con otro marco teórico**

Los siguientes trabajos (1-2) utilizan la teoría APOE con el acercamiento de 'reducción de niveles de abstracción' de Hazzan (1999).

1. Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradox as a lens for exploring notions of infinity. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, 3, 353-360.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This study examines university students' approaches to infinity, before and after instruction, via their engagement with a well-known paradox: the Ping-Pong Ball Conundrum. Students' work revealed they perceive infinity as an ongoing process, rather than a completed one, and fail to notice conflicting ideas. We describe specific challenging

features of this paradox, as well as the persuasive factors in students' reasoning that might influence an understanding of infinity.

Resumen (traducción)
Este estudio examina los acercamientos de los estudiantes universitarios sobre el infinito, antes y después de la instrucción, a través de su trabajo sobre una conocida paradoja: el dilema de la pelota de ping pong. El trabajo de los estudiantes reveló que perciben el infinito como un proceso continuo, en lugar de una completa, y no se dan cuenta de las ideas en conflicto. Se describen las características específicas desafiantes de esta paradoja, así como los factores persuasivos de razonamiento de los alumnos que podrían influir en la comprensión del infinito.

2. Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 167-182.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This study examines approaches to infinity of two groups of university students with different mathematical background: undergraduate students in Liberal Arts Programmes and graduate students in a Mathematics Education Master's Programme. Our data are drawn from students' engagement with two well-known paradoxes - Hilbert's Grand Hotel and the Ping-Pong Ball Conundrum - before, during, and after instruction. While graduate students found the resolution of Hilbert's Grand Hotel paradox unproblematic, responses of students in both groups to the Ping-Pong Ball Conundrum were surprisingly similar. Consistent with prior research, the work of participants in our study revealed that they perceive infinity as an ongoing process, rather than a completed one, and fail to notice conflicting ideas. Our contribution is in describing specific challenging features of these paradoxes that might influence students' understanding of infinity, as well as the persuasive factors in students' reasoning, that have not been unveiled by other means.

Keywords: infinity; paradoxes; cognitive conflict

Resumen (traducción)
Este estudio examina los acercamientos respecto al infinito de dos grupos de estudiantes universitarios con diferentes antecedentes matemáticos: estudiantes universitarios en programas de Artes Liberales y estudiantes de posgrado en el Programa de Maestría en Educación Matemática. Los datos se han extraído del compromiso de los estudiantes con dos conocidos paradojas - el Gran Hotel de Hilbert y la pelota de ping-pong - antes, durante y después de la instrucción. Mientras que los estudiantes de posgrado no encontraron problemática la resolución de la paradoja Grand Hotel de Hilbert, las respuestas de los estudiantes de ambos grupos al enigma pelota de ping-pong fueron sorprendentemente similares. De acuerdo con la investigación previa, el trabajo de los participantes en nuestro estudio reveló que perciben el infinito como un proceso continuo, en lugar de uno completo y no se dan cuenta de las ideas en conflicto. Nuestra contribución es la descripción de las características específicas de estas paradojas difíciles que pueden influir en la comprensión del estudiante de lo infinito, así como los factores persuasivos en el razonamiento de los estudiantes, que no se han dado a conocer por otros medios.
Palabras clave: infinity, paradojas, conflictos cognitivos.

Los siguientes artículos (3-5) usan la *teoría APOE con Registros de Representación Semiótica*.

3. Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2009). Students' ideas on functions of two variables: domain, range, and representations. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-80). Atlanta, GA: Georgia State University.

Abstract (tomado del mismo artículo)

The study of student understanding of multivariable functions is of fundamental importance given their role in mathematics and its applications. The present study analyses students' understanding of these functions, focusing on recognition of domain and range of functions given in different representational registers, as well as on uniqueness of function value. APOS and semiotic representation theory are used as theoretical framework. The present study includes results of the analysis of interviews to 13 students. The analysis focuses on student' (*sic.*) constructions after a multivariate calculus course, and on the difficulties they face when addressing tasks related with this concept.

Resumen (traducción)

El estudio de la comprensión de los estudiantes de funciones de varias variables es de fundamental importancia dado su papel en las matemáticas y sus aplicaciones. El presente estudio analiza la comprensión de los estudiantes de estas funciones, enfocándose en el reconocimiento de dominio y rango de funciones dadas en los diferentes registros de representación, así como en la unicidad del valor de la función. APOE y la teoría de representaciones semióticas se utilizan como marco teórico. El presente estudio incluye los resultados del análisis de entrevistas a 13 estudiantes. El análisis se centra en las construcciones de los estudiantes después de un curso de cálculo de varias variables, y sobre las dificultades que se enfrentan a la hora de abordar las tareas relacionadas con este concepto.

4. Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study is part of a project concerned with the analysis of how students work with two-variable functions. This is of fundamental importance given the role of multivariable

functions in mathematics and its applications. The portion of the project we report here concentrates on investigating the relationship between students' notion of subsets of Cartesian three-dimensional space and the understanding of graphs of two-variable functions. APOS theory and Duval's theory of semiotic representations are used as theoretical framework. Nine students, who had taken a multivariable calculus course, were interviewed. Results show that students' understanding can be related to the structure of their schema for R^3 and to their flexibility in the use of different representations.
Palabras clave: APOE, Graphic representation, Schema, Two-variable functions, Representations.

Resumen (traducción)
Este estudio es parte de un proyecto relacionado con el análisis de cómo los estudiantes trabajan con las funciones de dos variables. Esto es de fundamental importancia dado el papel de funciones de varias variables en las matemáticas y sus aplicaciones. La parte del proyecto que aquí reportamos se centra en investigar la relación entre la noción que tienen los estudiantes de subgrupos del espacio tridimensional cartesiano y la comprensión de las gráficas de funciones de dos variables. La teoría APOE y la teoría de Duval de las representaciones semióticas son utilizadas como marco teórico. Nueve estudiantes, que habían tomado un curso de cálculo multivariable, fueron entrevistados. Los resultados muestran que la comprensión de los estudiantes puede estar relacionada con la estructura de su esquema para R^3 y su flexibilidad en el uso de diferentes representaciones.
Palabras clave: APOE, Representación gráfica, Esquema, Funciones de dos variables, Representaciones.

5. Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 365-384.

Abstract (tomado del mismo artículo)

In this study we analyze students' understanding of two-variable function; in particular we consider their understanding of domain, possible arbitrary nature of function assignment, uniqueness of function image, and range. We use APOS theory and semiotic representation theory as a theoretical framework to analyze data obtained from interviews with thirteen students who had taken a multivariable calculus course. Results show that few students were able to construct an object conception of function of two variables. Most students showed difficulties finding domains of functions, in particular, when they were restricted to a specific region in the xy plane. They also showed that they had not fully coordinated their R^3, set, and function of one variable schemata. We conclude from the analysis that many of the interviewed students' notion of function can be considered as pre-Bourbaki.

Keywords APOS · Schema · Two-variable function · Representations · Semiotic representation theory

Resumen (traducción)

En este estudio analizamos la comprensión de estudiantes sobre la función de dos variables; en particular, consideramos su entendimiento del dominio, la posible naturaleza arbitraria de la asignación de funciones, la unicidad de la imagen de la función y el rango. Utilizamos la teoría APOE y la teoría de representación semiótica como marco teórico para analizar los datos obtenidos de las entrevistas con trece estudiantes que habían tomado un curso de cálculo multivariable. Los resultados muestran que pocos estudiantes fueron capaces de construir una concepción objeto de la función de dos variables. La mayoría de los estudiantes mostraron dificultades para encontrar dominios de funciones, en particular, cuando se restringen a una región específica en el plano *xy*. También demostraron que no habían coordinado plenamente sus esquemas de R^3, conjunto y función de una variable. Concluimos del análisis que la noción de función de muchos de los estudiantes entrevistados puede ser considerada como pre-Bourbaki.

Palabras clave APOE · Esquema · Función de dos variables · Representaciones · Teoría de Representación Semiótica

Los siguientes artículos (6-7) usan la teoría APOE con la perspectiva de Modelos y Modelación.

6. Trigueros, M. (2008). Modeling in a dynamical system course. *Proceedings for the Eleventh Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education. Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. San Diego - Mission Valley, California.

Abstract (tomado del sitio web del SIGMAA on RUME)
This report is concerned with the development of a research project which integrates APOS and Models and Modeling perspective into the teaching of first order differential equations. A modeling situation was developed and a genetic decomposition for the topic of first order differential equation was developed to guide teacher intervention in the context of an undergraduate course on dynamical systems. Results show that the use of models complemented with a suitable theoretical framework that models students' construction of knowledge can inform the design of activities to help students reflect on what they know about functions and derivative and to construct a differential equation schema where these concepts are meaningfully related.

Resumen (traducción)
El presente informe se refiere al desarrollo de un proyecto de investigación que integra APOE y la perspectiva Modelos y Modelación en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Una situación de modelación fue desarrollada, así como una descomposición genética para el tema de ecuaciones diferenciales de primer orden, para guiar la intervención docente en el contexto de un curso de licenciatura en sistemas dinámicos. Los resultados muestran que el uso de modelos complementado con un marco teórico adecuado que modela la construcción de conocimiento de los estudiantes, puede informar el diseño de actividades para ayudar a los alumnos a reflexionar sobre lo que

saben acerca de las funciones y derivadas, y construir un esquema de ecuación diferencial donde estos conceptos están significativamente relacionados.

7. Salgado, H. y Trigueros, M. (2012). Teaching eigenvalues and eigenvectors with a modeling approach. *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 148-154.

Abstract (tomado del mismo artículo).
This investigation reports a classroom experience in which eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces were taught using Models and Modeling and APOS Theory. Models and Modeling was used to design a problem in a realistic context and, with the genetic decomposition of APOS Theory, activities were designed to help students make the mental constructions needed to have a better understanding.
The research question is: Is it possible for students to construct an object conception of eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces when they are taught using a didactical design based on Models and Modeling and APOS Theory? Using one team as a case study, team A, we describe work done by students and show that two students were able to construct an object conception of these concepts. We also show that both theoretical frameworks can be used in an integrated way and students learned the mathematical concepts in a more meaningful way.
Keywords: eigenvalues, eigenvectors, case study, APOS Theory, Models

Resumen (traducción)
Esta investigación reporta una experiencia de aula en la que los valores propios, vectores propios y espacios propios se imparten utilizando Modelos y Modelación y la Teoría APOE. Modelos y Modelación se utilizó para diseñar un problema en un contexto realista y, con la descomposición genética de la teoría APOE, las actividades fueron diseñadas para

ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones mentales necesarias para tener una mejor comprensión.

La pregunta de investigación es: ¿Es posible que los alumnos construyan una concepción objeto de valores y vectores propios, y espacios propios cuando se les enseña con un diseño didáctico basado sobre Modelos y Modelación y la Teoría APOE? Con un equipo como estudio de caso, el equipo A, describimos el trabajo realizado por los estudiantes y demostramos que dos estudiantes fueron capaces de construir una concepción objeto de estos conceptos. También mostramos que ambos marcos teóricos se pueden utilizar en una manera integrada y los estudiantes aprendieron los conceptos matemáticos de una manera más significativa.
Palabras clave: valores y vectores propios, estudio de caso, teoría APOE, Modelos

3.1.2.7.4 **Que presentan un diálogo entre la teoría APOE y otro marco**

El siguiente trabajo presenta un diálogo entre la teoría APOE y la TAD

1. Trigueros, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. M. Bosch et al. (Eds.). *III Congreso Internacional sobre la TAD* (pp. 77-116), Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Presentamos tres modalidades de diálogo entre teorías o enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas a partir de la conceptualización de las teorías científicas en términos de praxeologías de investigación. Cada modalidad de diálogo se caracteriza por los elementos praxeológicos que se toman como punto de partida: los tipos de problemas que se abordan; el componente teórico; y el componente «metodológico» que incluye las

técnicas y tecnologías de investigación. Se ilustran las dos últimas modalidades de diálogo entre la teoría APOS y la TAD poniendo el énfasis en los aspectos de cada teoría que el diálogo permitiría desarrollar.

Abstract (tomado del mismo artículo)
We present three dialogue modes among research theories or approaches in mathematics education, starting from a new conceptualization of scientific theories in terms of research praxeologies. Each dialogue mode is characterized by the praxeological elements that are taken as starting points: the kind of scientific problems dealt with; the theoretical component and the "methodological" component, which includes research techniques and technologies. The last two dialogue modes between APOS theory and ATD are illustrated, stressing those aspects of each theory that can be promoted and developed.

3.1.3 **Fuera de RUMEC**

3.1.3.1 **Sobre los esquemas y su relación con la teoría APOE**

1. Davis, G. & Tall, D. (2002). What is a scheme? En D. Tall & M. Thomas (eds.) *Intelligence, learning and understanding in mathematics: A tribute to Robert Skemp* (pp. 141-160). Post Pressed, Flaxton, Qld.

Abstract (tomado de la base de datos MathEduc Database)
This chapter is dedicated to, and fundamentally influenced by, Richard Skemp's pioneering work on schemes. The authors discuss examples of scheme formation; schemes and symbols; schemes as mental objects; perceptual, social and conceptual categorization; and the connection to APOS theory.

Keywords: thinking, schemas, cognitive psychology.

Resumen (traducción)
Este capítulo está dedicado a, y fundamentalmente influenciado por el trabajo pionero de Richard Skemp sobre los esquemas. Los autores discuten ejemplos de formación de esquemas; esquemas y símbolos; esquemas como objetos mentales; categorización perceptual, social y conceptual, y la conexión con la teoría APOE.
Palabras clave: Pensamiento, esquema, psicología cognitiva.

3.1.3.2 **Que hacen la revisión de algunas investigaciones en Matemática Educativa, que usan diferentes perspectivas teóricas, o analizan las dificultades de los estudiantes desde diferentes perspectivas teóricas, incluyendo APOE**

1. Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40-55.

(Descripción traducida de Arnon et al., 2014)
En la primera parte de este artículo, la autora analiza una serie de dificultades de los estudiantes mediante diversas teorías del aprendizaje, incluyendo la teoría APOE. Ella explica que los estudiantes son generalmente reacios a aceptar la igualdad entre 0.999... = 1 porque ven al primero como un proceso y al segundo como un objeto. Para aceptar la igualdad, tanto 0.999... y 1 deben ser concebidos como objetos. Sin embargo, como señala Artigue, es muy difícil para los estudiantes hacer la encapsulación necesaria. En la segunda parte del artículo, la autora analiza las medidas que tuvieron lugar en Francia durante el siglo 20 para ayudar a los estudiantes a superar estas dificultades.

2. Codes, M. & Sierra, M. (2005). Entorno computacional y educación matemática: Una revisión del estado actual. *IX Simposio SEIEM*.

Resumen (nuestra descripción)

Este trabajo da una visión general del estado actual de las investigaciones, en torno al trabajo con tecnología. Expone que los principales marcos que guían este tipo de investigaciones, son el constructivismo y el instrumental; asimismo da una breve explicación sobre cada uno de estos marcos.

En el caso del constructivismo, da su visión del uso de la computadora dentro de la teoría APOE y de la corriente de Tall y Gray.

Finalmente los autores presentan algunas referencias relacionadas al uso de computadoras desde la posición de los alumnos, el papel del profesor, la enseñanza tradicional versus nuevas tecnologías, propuestas curriculares y obstáculos debidos a las TICS.

3. Gaita, C. (2008). Marcos de referencia para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las matemáticas*. Curso. Pontificia Universidad Católica del Perú, 127-140.

Resumen (tomado del mismo artículo)

A través del curso, los participantes reflexionaron sobre el objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática y sobre los principios en los que se basan algunas de las aproximaciones teóricas actuales de esta disciplina. Esto, con la finalidad, de ofrecer un panorama para el desarrollo de futuras investigaciones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas. Se trataron específicamente los siguientes marcos de referencia: Registros de Representación Semiótica, la teoría APOE, la teoría de Situaciones Didácticas, la teoría Socioepistemológica y se comentó sobre el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Para ello se revisaron investigaciones que fueron realizadas teniendo, como soporte teórico, algunos de los enfoques señalados.

Palabras clave: Marcos de referencia, Didáctica de la matemática.

3.1.3.3 Que proponen reinterpretar algunas ideas de la teoría APOE

1. Kú, D. y Roa-Fuentes, S. (2010). La asimilación del conocimiento matemático como una actividad del sujeto. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 767-773). Santo Domingo, República Dominicana: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)
En este documento intentamos hacer una reinterpretación a la teoría APOE tomando en cuenta el papel que juega el sujeto como constructor de su aprendizaje.

Consideramos que es necesario hacer adecuaciones que se adapten al nuevo entorno en el que nos encontramos. Kuhn (1970) menciona que un paradigma (marco teórico) cambia o se modifica, porque satisface las necesidades de los tiempos más que el paradigma existente.

Aclaramos que no pretendemos forzar ningún paradigma para dar explicaciones de los fenómenos inexplicados. Simplemente intentamos hacer una reinterpretación de las ideas hechas por Dubinsky acerca del papel que juega el sujeto en la construcción de su conocimiento, considerando que es necesario para el desarrollo de nuevas investigaciones que se desarrollen bajo esta perspectiva.
Palabras clave: Teoría APOE, asimilación, conocimiento matemático.

3.1.3.4 Que usan exclusivamente APOE

3.1.3.4.1 Que presentan una descomposición genética explícita de un concepto matemático

1. Alvarenga, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6(3), 199-219.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Basándome en la teoría APOE, expongo un conjunto de construcciones mentales, al cual denomino esquema, que pueden desarrollar los universitarios a fin de que entiendan el concepto de inecuaciones. Aunque dicha noción está presente en muchas áreas de las ciencias exactas (matemáticas, ingeniería y economía), su comprensión por parte de muchos estudiantes y algunos profesores ha sido muy limitada; por ello, puede decirse que su tratamiento parece no haber surtido efecto alguno en su aprendizaje. El estudio de las inecuaciones implica varias nociones que deben concatenarse de forma coherente, tales como estructura de orden de los números reales, funciones, correspondencia 1-1 de los números reales con la recta numérica, gráficos y análisis gráfico de funciones, relaciones de implicación, equivalencia y otros. Ahora bien, con sustento en el esquema que desgloso en este artículo, se puede elaborar una metodología que avale la mejoría de su enseñanza-aprendizaje.
Palabras clave: teoría APOE, construcciones mentales, inecuaciones.

2. Ramírez, J., Azcárate, J. & Manya, F. (2004). La teoría APOE y su aplicación en la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la lógica de primer orden. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 313-318). Santiago, Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Este trabajo es de carácter empírico-teórico y en él se describirán algunas de las dificultades observadas en estudiantes de Informática y Sistemas Computacionales, cuando intentan usar el lenguaje de la Lógica de primer orden (LPO) para representar enunciados del lenguaje natural (común), en un primer curso de Lógica. Las dificultades que se observaron, en la población de estudiantes a los que se les aplicó un cuestionario piloto, se relacionan con: enunciados cuantificados, sobre todo aquellos que contienen doble cuantificador ($\forall\exists$ y $\exists\forall$); enunciados cuantificados con una implicación material y enunciados donde hay alguna negación. Se utiliza la teoría APOE para explicar el proceso de traducción indicado. Se proponen tres etapas para la traducción de enunciados del lenguaje natural de la LPO y se describen las estructuras mentales que se deberían desarrollar para tener un mayor éxito en dicha traducción (o formalización). En este trabajo se describe una descomposición genética para una de las etapas propuestas.

3. Hamdan, M. (2006). Equivalent structures on sets: equivalence classes, partitions and fiber structures of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 127-147.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This study reports on how students can be led to make meaningful connections between such structures on a set as a partition, the set of equivalence classes determined by an equivalence relation and the fiber structure of a function on that set (i.e., the set of preimages of all sets {b} for b in the range of the function). In this paper, I first present an initial genetic decomposition, in the sense of APOS theory, for the concepts of equivalence relation and function in the context of the structures that they determine on a set. This genetic decomposition is primarily based on my own mathematical knowledge as well as on my observations of students’ learning processes. Based on this analysis, I then suggest instructional procedures that motivate the mental activities described in the genetic decomposition. I finally present empirical data from informal interviews with students at

different stages of learning. My goal was to guide students to become aware of the close conceptual correspondence and connections among the aforementioned structures. One theorem that captures such connections is the following: a relation R on a set A is an equivalence relation if and only if there exists a function f defined on A such that elements related via R (and only those) have the same image under f.
Keywords: APOS theory, equivalence classes, equivalence relations, functions, genetic decomposition, partitions, set structures.

Resumen (traducción)

Este estudio informa sobre cómo los estudiantes pueden ser llevados a hacer conexiones significativas entre estructuras en un conjunto tales como una partición, el conjunto de clases de equivalencia determinado por una relación de equivalencia y el carácter de la estructura de una función en ese conjunto (es decir, el conjunto de pre imágenes de todos los conjuntos {b} para b en la imagen de la función). En este documento, en primer lugar presento una descomposición genética inicial, en el sentido de la teoría de APOE, para el concepto de relación de equivalencia y función en el contexto de las estructuras que determinan en un conjunto. Esta descomposición genética se basa principalmente en mi propio conocimiento matemático, así como en mis observaciones de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Basándome en este análisis, sugiero procedimientos instruccionales que motiven las actividades mentales descritas en la descomposición genética.

Finalmente presento datos empíricos de entrevistas informales con los estudiantes en las diferentes etapas de aprendizaje. Mi objetivo fue guiar a los estudiantes a tomar conciencia de la correspondencia conceptual estrecha y conexiones entre las estructuras antes mencionadas. Un teorema que capta este tipo de conexiones es el siguiente: una relación R sobre un conjunto A es una relación de equivalencia si y sólo si existe una función f definida en A tal que los elementos relacionados a través de R (y sólo aquellos) tienen la misma imagen bajo f.

Palabras clave: Teoría APOE, clases de equivalencia, relaciones de equivalencia, funciones, descomposición genética, particiones, conjunto de estructuras.

4. Boigues, F. (2010). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. D. Contreras & R. Ordoñez (Eds.), *Jornadas de Investigación en Didáctica del análisis matemático de la SEIEM*, 42-61. Baeza.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Mostramos una propuesta de comprensión de la noción integral definida en el contexto específico de estudiantes de ingenierías relacionadas con Ciencias de la naturaleza. Siguiendo la teoría APOS, presentamos una descomposición genética de la integral que concibe la integral como el límite de una sucesión de sumas de Riemann. Los resultados destacan la necesidad de intensificar las construcciones que favorezcan las relaciones entre Sucesión, Límite y Suma de Riemann, así como fomentar las relaciones que comportan un registro analítico. Finalizamos con la propuesta de otra descomposición genética que pensamos que puede ayudar a mejorar el diseño de la instrucción para este tipo de estudiantes.
Palabras clave: APOS, descomposición genética, comprensión e integral.

5. Kú, D. (2010). Construcción del concepto de conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal desde el punto de vista de la teoría APOE. *XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa.* Instituto tecnológico de la Ciudad de Madero.

Resumen (tomado del mismo artículo)
El estudio acerca de la comprensión de los estudiantes acerca de las nociones conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal ha recibido poca atención desde el punto de vista de la construcción de estas nociones. En este documento se presenta un estudio

preliminar que es parte de un proyecto doctoral destinado a estudiar cómo aprenden estas nociones los estudiantes. En este estudio se utiliza la teoría APOE (Acción-proceso-Objeto-Esquema) para proponer una descomposición genética de cómo estos conceptos pueden ser construidos. Se diseña una entrevista basada en la descomposición genética, que se aplica a tres estudiantes que cursaban álgebra lineal. Los resultados de la entrevista muestran que los estudiantes necesitan un proceso de construcción del espacio vectorial y una concepción objeto de la noción variable para poder construir la concepción proceso de las nociones conjunto generador y espacio generado.

6. Llinares, S., Boigues, F. & Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(3), 255-282.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Esta investigación tiene como objetivo caracterizar el desarrollo del esquema de la integral definida en estudiantes de ingeniería de ciencias de la Tierra usando una métrica fuzzy para determinar el grado de desarrollo en los niveles *intra*, *inter* y *trans* (Piaget y García, 1984). Los resultados muestran la dificultad de los estudiantes para relacionar la sucesión de sumas de Riemann con su dependencia del valor *n* de la partición, como una manifestación de la relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el paso al límite que figura el significado de la integral definida.
Palabras clave: Comprensión, esquema, integral definida, APOS, fuzzy

7. Berman, C., Narvaez, A. y Rodríguez, M. (2011). ¿Problemas con el límite o el límite de los problemas enseñados? En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.585-594). Cd. de Guatemala, Guatemala: Comité Latinoamericano de

Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)

La enseñanza universitaria de la Matemática tiene como eje central el tema Límite Funcional. Es bien conocido el hecho de la dificultad de comprensión de este concepto. El objetivo del presente trabajo es entender la problemática que presentan los estudiantes de la Facultad Regional Mendoza en este tema, para diseñar un material didáctico que les permita superar obstáculos cognitivos. Para validar las hipótesis de partida, se realizó una evaluación cuanti-cualitativa que nos hace reflexionar sobre el material de la cátedra.

La presente investigación se enmarca en la Teoría APOS, desarrollada inicialmente por Dubinsky (1996). Las principales conclusiones en esta etapa del proyecto son: la ausencia de concepciones cognitivas en los estudiantes para comprender el Límite al nivel de esquema; la necesidad de interiorización de los conceptos previos al Límite y el replanteo del tratamiento didáctico del mismo.

Palabras clave: límite funcional finito, teoría APOE

8. Parraguez, M. (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 263-271). Cd. de Guatemala, Guatemala. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)

La investigación se sitúa en el estudio del concepto combinación lineal de vectores, que concierne al álgebra lineal, bajo un enfoque cognitivo donde se utiliza la teoría APOE como marco teórico y metodológico. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación determinan la estructura general del estudio.

En la parte empírica de esta investigación se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 8 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes. Esta investigación ha sido financiada parcialmente por el proyecto DM 03/10/I.IMA
Palabras clave: teoría APOE, combinación lineal

Abstract (tomado del mismo artículo)
The investigation presented below focuses on the study of the concept of linear combination of vectors, a central topic of linear algebra, under a mental approach where APOS theory is used as theoretical and methodological frame. The three proposed components by this cycle of investigation determine the general structure of the study. In the empirical part of this investigation a questionnaire was designed and applied to interview 8 students of the undergraduate program of Mathematics at the Pontifical Catholic University of Valparaiso (Chile) which provided information about the constructions students accomplished. This investigation has been partially financed by project DM 03/10/I.IMA
Key words: APOS theory, linear combination

9. Vargas, J., González, Ma. & Llinares, S. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, CIAEM. 1-12, Recife, Brasil.

Resumen (tomado del mismo artículo)
La elaboración de una descomposición genética del concepto de función exponencial surge en el entorno de una investigación más amplia que pretende describir la práctica del docente. Se ha construido partiendo de los presupuestos del marco teórico APOE, de un

estudio histórico del concepto de función exponencial, así como en los informes de investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática.

La descripción de la descomposición genética del objeto función exponencial se realiza a través de los mecanismos de construcción: interiorización, coordinación, encapsulación y generalización. Se reflexiona para ello sobre los vínculos con otras nociones matemáticas como: función, razón de cambio, proporcionalidad y potenciación generalizada.
Palabras clave: función, exponencial, descomposición genética, mecanismos de construcción.

10. Hamdan, M. (2012). Genetic Decomposition of integration. *Proceedings of the 15th annual conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 444-450.

Abstract (tomado del mismo artículo)
In this paper I present a theoretical analysis (genetic decomposition) in the sense of APOS theory, of the cognitive constructions for the concept of infinite Riemann sums and the Fundamental Theorems of Calculus as a linking tool between the derivative and the integral, following Piaget's model of epistemology. This genetic decomposition is primarily based on my own mathematical knowledge as well as on my personal continual observations of students in the process of studying integration. I also present empirical data in the form of informal interviews with students at different stages of learning. The analysis of those interviews will later suggest a review of the initial genetic decomposition. Based on this analysis I also suggest instructional procedures that motivate the mental activities described in the proposed genetic decomposition. This study will shed new lights on the concept and make the connections more obvious between two key concepts in calculus.
Keywords: genetic decomposition, APOS theory, Calculus, integration, interviews, observations, Piaget.

Resumen (traducción)

En este trabajo presento un análisis teórico (descomposición genética) en el sentido de la teoría APOE, de las construcciones cognitivas para el concepto de sumas infinitas de Riemann y el Teorema Fundamental del Cálculo como herramienta de vinculación entre la derivada y la integral, siguiendo el modelo de Piaget de la epistemología. Esta descomposición genética se basa principalmente en mi propio conocimiento matemático, así como en mis observaciones personales continuas de los estudiantes, en el proceso de estudio de la integración. También presento datos empíricos, en forma de entrevistas informales con estudiantes en diferentes etapas de aprendizaje. El análisis de las entrevistas más tarde sugerirá una revisión de la descomposición genética inicial. Con base en este análisis también sugiero procedimientos de instrucción que motiven las actividades mentales descritas en la descomposición genética propuesta. Este estudio arrojará nuevas luces sobre el concepto y hará las conexiones más evidentes entre dos conceptos clave en el Cálculo.

Palabras clave: descomposición genética, la teoría APOE, Cálculo, integración, entrevistas, observaciones, Piaget.

3.1.3.4.2 **Que usan los niveles Intra, Inter y Trans**

1. Aldana, E. & González, M. (2009). Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación*. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

Resumen (tomado del mismo artículo)

En esta comunicación se presenta un estudio sobre la comprensión del concepto de Integral Definida en el marco teórico APOE de un alumno de tercer curso de Licenciatura de

Matemáticas de una universidad colombiana que estudia por primera vez este concepto. Para realizar este estudio, inicialmente se estableció una descomposición genética del concepto de Integral Definida lo que permitió identificar los elementos matemáticos que configuran el concepto. Posteriormente, se recogió información utilizando tres instrumentos distintos: un cuestionario, una entrevista y un mapa conceptual. El análisis de los datos se llevó a cabo identificando los elementos matemáticos que utiliza el alumno para resolver las diferentes tareas propuestas, las relaciones lógicas que establece entre ellos y el uso que hace de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Esto nos ha permitido caracterizar el esquema conceptual relativo al concepto de Integral Definida de este alumno.
Palabras clave: Integral Definida, marco teórico APOE, abstracción reflexiva, desarrollo del esquema, descomposición genética.

3.1.3.4.3 **Que estudian la comprensión de un concepto matemático mediante la teoría APOE**

- *En estudiantes*

1. De la Roque, G. (2002). Analysis of students' mental constructions when producing and interpreting graphs of functions. (Uma análise construções mentais subjacentes à produção e interpretação de gráficos de funções.) L. M. Carvalho, et al. (Eds.) 1. *Colóquio de história e tecnologia no ensino de matemática* (IHTEM) (pp. 251-260). Editora IME-UERJ: Rio de Janeiro.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This research, based on the Apos Theory (Action-Process-Object-Schema) theoretical perspective, addresses the following questions: How can we describe the mental

constructions that a student might make in order to develop his understanding of: 1. the concept of a Cartesian graph of a real function of one variable, given by an algebraic rule. 2. the concept of a real function defined by a vertical line test satisfying curve drawn in the Cartesian plane. During the presentation of this work we shall describe our theoretical analysis of the learning of the first of these concepts articulating it with empirical data we have collected. (Author's abstract)
Keywords: mental constructions

Resumen (traducción)
Esta investigación, basada en la perspectiva teórica de la Teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), aborda las siguientes preguntas: ¿Cómo podemos describir las construcciones mentales que un estudiante podría hacer a fin de desarrollar su comprensión de: 1. el concepto de un gráfico cartesiano de una función real de una variable, dada por una regla algebraica, 2. el concepto de una función real definida como una curva dibujada en el plano cartesiano que satisface la prueba de línea vertical. Durante la presentación de este trabajo vamos a describir nuestro análisis teórico del aprendizaje del primero de estos conceptos, articulándolo con los datos empíricos que hemos recogido. (Resumen del autor)

2. Hähkiöniemi, M. (2005). Is there a limit in the derivative?-Exploring students' understanding of the limit of the difference quotient. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 4 (pp. 1758-1767), Sant Feliu de Guixols, Spain: FUNDEMI IQS - UniversitatRamonLlull.

Abstract (tomado del mismo artículo)
Task-based interviews to five postsecondary students were arranged to investigate the students' understanding of the limit of the difference quotient. The students' procedural knowledge was analyzed using the APOS theory and conceptual knowledge by examining the kind of representations they had of the limiting process and how these were connected

to limit of the difference quotient. It was found that students had two kinds of connections: they could change from one representation to other or they could explain one representation with other. Among the students, all combinations of good or poor procedural and conceptual knowledge of limit of the difference quotient were found.

Resumen (traducción)

Tareas basadas en entrevistas a cinco estudiantes de educación superior se organizaron para investigar la comprensión de los estudiantes sobre el límite del cociente de diferencias. El conocimiento procedimental de los estudiantes fue analizado utilizando la teoría APOE y el conocimiento conceptual fue analizado mediante examinación del tipo de representaciones que tenían del proceso límites y cómo se conectaron al límite del cociente de diferencias. Se encontró que los estudiantes tenían dos tipos de conexiones: podían cambiar de una representación a otra o podían explicar una representación con otra. Entre los estudiantes, todas las combinaciones del conocimiento procedimental y conceptual, buena o mala, de límite del cociente de diferencias fueron encontradas.

3. Chen, Xue-mei. (2007). On the learning of the concept of linear dependence of vectors. *Journal of Mathematical Education*, 16(2), 64-67.

Abstract (adaptado del mismo artículo)

The literature available and class observation indicate that the concepts of linear dependence and independence are difficult for most students at university level. Based on Dubinsky's APOS theory, this paper investigates and analyzes how the freshmen at a university in China understand the concept of linear independence as well as their typical misconceptions. We show that: (1) the students often focus on the algebraic coordinate representation of vectors rather than the properties of linear operations; (2) it is difficult for them to deal with transitions between the geometrical and algebraic representations of

vectors; (3) most of students cannot construct rich equivalent meanings of the concept of linear independence.
Keywords: linear combination; linear algebra; concept formation; student errors

Resumen (traducción)
La literatura disponible y la observación de clases indican que los conceptos de dependencia e independencia lineal son difíciles para la mayoría de los estudiantes de nivel universitario. Basado en la teoría APOE de Dubinsky, este trabajo investiga y analiza cómo los estudiantes universitarios de primer año en China entienden el concepto de independencia lineal así como sus concepciones erróneas típicas. Se demuestra que: (1) los estudiantes a menudo se centran en la representación algebraica de coordenadas de los vectores más que de las propiedades de operaciones lineales; (2) se les dificulta tratar con el tránsito entre las representaciones geométrica y algebraica de los vectores; (3) la mayoría de los estudiantes no pueden construir significados ricos equivalentes del concepto de independencia lineal.
Palabras clave: combinación lineal, álgebra lineal, formación de conceptos, errores de los estudiantes.

4. Lu Yu-Wen. (2007). Understanding Mathematical Representations and transformation of functions and their graphs with the use of ICT. J. H. Woo et al. (Eds.). *Proceedings of the 31 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (p. 262). Seoul, Korea: PME.

Abstract (adaptado del libro de resúmenes)
This paper aimed to inquire how a teacher used Information and Communication Technology (ICT) to teach transformations of functions and their graphs in a secondary school in the UK. The impact of using ICT in learning was examined in the framework of APOS theory.

The teaching and learning of the concept of function can be problematic due to its multiple representations. Hennessy et al. (2001) assert that ICT speeds up the graphing process, freeing students to analyse and reflect on the relationships between data. It has been argued that the usage of ICT is highly beneficial in the classroom.
This paper investigated the impact of the use of ICT on students' learning of functions. A sequence of five lessons was observed and videotaped in a Year 11 class whilst the teacher was teaching transformations of functions and their graphs using both ICT and paper-and-pencil calculation and drawing. Afterwards, interviews with the teacher and six students were carried out and a task was set for the students. Two groups, computer and paper-and-pencil, were asked to create a quadratic function, produce the graphs and transformations and describe how these were achieved. The computer group used Autograph while the paper-and-pencil group worked on duplicated sheets. APOS (Action-Process-Object-Schema) theory (Asiala et al. 1996) was used for data analysis. In general it was observed that with ICT, students were able to perform the task more flexibly and faster.

Resumen (traducción)
Este trabajo tuvo como objetivo investigar cómo un profesor utiliza las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) para enseñar transformaciones de funciones y sus gráficas en una escuela secundaria en el Reino Unido. El impacto del uso de las TIC en el aprendizaje fue examinado en el marco de la teoría APOE.

La enseñanza-aprendizaje del concepto de función puede ser problemática, debido a sus múltiples representaciones. Hennessy et al. (2001) afirman que las TIC aceleran el proceso de representación gráfica, liberando a los estudiantes para analizar y reflexionar sobre las relaciones entre los datos. Se ha argumentado que el uso de las TIC es altamente beneficioso en el aula.

Este trabajo se centró en investigar el impacto del uso de las TIC en el aprendizaje de los estudiantes acerca de las funciones. Se observó y grabó una secuencia de cinco lecciones en una clase de 11º año, mientras que el profesor estuvo enseñando las transformaciones de funciones y sus gráficas utilizando tanto las TIC como el papel y lápiz para calcular y hacer gráficas. Posteriormente, entrevistas con el profesor y seis estudiantes se llevaron a cabo y se preparó una tarea para los estudiantes. Se les pidió a dos grupos, uno de computadora y otro de pápel y lápiz, crear una función cuadrática, producir los gráficos y las transformaciones, y describir de qué manera lo han logrado. El grupo informático utilizó Autograph, mientras que el grupo de papel y lápiz trabajó en hojas duplicadas. La teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) (Asiala et al. 1996) se utilizó para el análisis de datos. En general se observó que con las TIC, los estudiantes fueron capaces de realizar la tarea de manera más flexible y rápida.

5. Pu, An-shan; Shi, Ning-zhong. (2007). On senior middle school students' understanding of the function concept from APOS theory. *Journal of Mathematical Education*, 16(2), 48-50.

Abstract (tomado de la base de datos MathEduc Database)

The APOS theory emphasizes that the construction of mathematical concepts must experience an action stage, process stage, object stage, scheme (*sic.*) stage. By investigation, we have analyzed the construction process of senior middle school students. According to the APOS theory, the majority of the students attain the action stage and the process stage, fewer students are in the object stage, a part of students are in the scheme (*sic.*) stage. In every stage of construction of the function concept, the degree of understanding by the key senior middle school students was better than by students in ordinary senior middle school.

Keywords: concept formation; functions; concept development; cognitive ability; mathematical ability; educational diagnosis; analysis of learning outcomes.

Resumen (traducción)

La teoría APOE hace hincapié en que la construcción de conceptos matemáticos debe experimentar una etapa de acción, una etapa proceso, una etapa objeto y una etapa esquema. Para la investigación, hemos analizado el proceso de construcción de los estudiantes de la escuela secundaria. Según la teoría APOE, la mayoría de los estudiantes alcanzan la etapa de acción y la etapa del proceso. Menos estudiantes están en la etapa objeto y solo una parte de los estudiantes están en la etapa esquema. En cada etapa de construcción del concepto de función, el grado de comprensión por parte del mayor número de estudiantes de la escuela secundaria clave fue mejor que el de los estudiantes de la escuela secundaria ordinaria.

Palabras clave: formación de conceptos, funciones, desarrollo de concepto, capacidad cognitiva, habilidad matemática, diagnóstico educacional, análisis de los resultados de aprendizaje.

6. Cruz, K. (2008). Análisis del concepto de inecuación en libros de texto de enseñanza media desde la teoría APOE. Reporte de Investigación, Educación media. *XIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Universidad de Concepción.

Resumen (tomado del mismo libro de resúmenes)

Este trabajo usa como marco la teoría cognitiva APOE de Ed Dubinsky (Asiala et al., 1996) y el grupo RUMEC, que explica cómo se construyen los conceptos en la mente del aprendiz de matemáticas, en términos de una descomposición genética (Dubinsky 1991) (DG: acciones, procesos, objetos y esquemas necesarios para la construcción). RUMEC usa una metodología que procura articular debidamente la investigación y las propuestas pedagógicas.

El propósito principal de esta investigación es reportar las construcciones mentales presentes y/o ausentes que muestran los libros de textos de enseñanza media en la construcción del concepto de inecuaciones (Alvarenga 2006). Paralelamente se reporta si esos libros de texto de enseñanza media son un aporte a estas construcciones.

7. Quintanilla, C. (2008). Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOE. *Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las* Matemáticas (pp. 311-319), Pontificia Universidad Católica del Perú: Editores Gaita.

Resumen (tomado del mismo artículo)

En la década de los 90, se inicia en los Estados Unidos un fenómeno ligado a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, ampliamente investigado y reportado por investigadores como: Dubinsky, Harel (1992); Yerushalmy y Schwars (1993); David Tall, Mercedes McGowen y Phil DeMarois (1996); Daniel Breidenbach, et al., (1992) quienes ilustraron en el campo matemático para llevar adelante investigaciones en el proceso educativo desde la óptica epistemológica de una función. Al respecto, Daniel Breidenbach, et al (1992, 247) manifiesta, pese a que los estudiantes universitarios llevan varios cursos de matemáticas, aun no tienen una comprensión adecuada del concepto de función. El trabajo de investigación consiste en el estudio de la concepción de las funciones en los estudiantes del nivel universitario de la especialidad de Matemática y Física bajo la perspectiva de la Teoría APOE. Los estudiantes que participan en el trabajo de investigación cursan el VIII y X ciclo, equivalente al 4to y 5to año de Facultad, en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Huancavelica. La principal problemática que atiende este proyecto consiste en la ausencia de significados del concepto de función, en las clases de matemática básica y análisis matemático. En la actualidad, la enseñanza y el aprendizaje de concepto de función se centra en los aspectos formales y algebraicos, dejando de lado aspectos epistemológicos desde una visión más amplia.

Consideramos relevante el tema de funciones porque es el eje central en los procesos de aprendizaje de las matemáticas (análisis matemático o cálculo), por lo que se requiere crear situaciones que equilibren los diferentes acercamientos teóricos y metodológicos.

8. Rojas, C. (2008). Construcción esquema del concepto de inecuación de primer grado con coeficientes en los números reales. Reporte de Investigación, educación media. *XIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Universidad de Concepción.

Resumen (tomado del mismo libro de resúmenes)
Este trabajo usa como marco la teoría cognitiva APOE de Ed Dubinsky (Asiala et al., 1996) y el grupo RUMEC, que explica cómo se construyen los conceptos en la mente del aprendiz de matemáticas, en términos de una descomposición genética (Dubinsky 1991) (acciones, procesos, objetos y esquemas necesarios para la construcción). RUMEC usa una metodología que procura articular debidamente la investigación y las propuestas pedagógicas.

En esta investigación se contrastaron datos obtenidos en la tesis de Alvarenga (Alvarenga 2006) con los obtenidos al presentar la réplica a alumnos de 4° medio, en el colegio donde realizo mi docencia diaria; concluyendo que el esquema de Alvarenga no se adecua a la enseñanza de dichas inecuaciones en nuestro medio escolar.

9. Vargas, X. (2008). Students (*sic.*) difficulties with concept of vector space from point (*sic.*) of view of Apos theory. Abstracts of the *15th Conference of the International Linear Algebra Society*. Cancún, México, 75.

Abstract (tomado del mismo libro de resúmenes)

Vector space theory, being abstract in nature and having an epistemological status different from most mathematical topics taught at the undergraduate level, is a major source of difficulty for beginning linear algebra students (Dorier, 1995a; Dorier, 1995b). The identification of the nature of these difficulties and their association with the way in which students construct the concept of vector spaces is (*sic.*) of great importance on the way to the development and implementation of good instructional strategies. APOS (Action-Process-Object-Schema) Theory provides a research tool that has been successfully used in other areas of mathematics such as abstract algebra and calculus, for similar purposes. In a previous paper (Trigueros and Oktac, 2005) a possible genetic decomposition for the concept of vector spaces was reported, and activities that were designed in such a way that students can make the necessary mental constructions required by the genetic decomposition of the concept were analyzed. Taking into account this paper, an instrument to conduct a semi-structured interview was designed using our theoretical framework, to be applied to a selected group of students. The data from the interviews will be analyzed using the same framework. The interview consisted of 17 questions about the concepts of vector space and subspace. Here we present two of these questions (numbered 1 and 2 in the instrument), together with our a priori analysis of them and related student performance.

Resumen (traducción)

La teoría de espacios vectoriales, siendo abstracta por naturaleza y teniendo un estatuto epistemológico diferente de la mayoría de los temas de matemáticas que se enseñan a nivel de Licenciatura, es la principal fuente de dificultad para los estudiantes principiantes de álgebra lineal (Dorier, 1995a; Dorier, 1995b). La identificación de la naturaleza de estas dificultades y su asociación con la forma en que los alumnos construyen el concepto de espacio vectorial son de gran importancia en el camino hacia el desarrollo y aplicación de buenas estrategias de enseñanza. La teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) proporciona una herramienta de investigación que ha sido utilizada con éxito en otras áreas de las matemáticas como álgebra abstracta y el cálculo, para propósitos similares. En un artículo anterior (Trigueros y Oktaç, 2005) se informó de una posible descomposición genética del concepto de espacio vectorial; y actividades diseñadas de tal manera que los estudiantes puedan realizar las construcciones mentales necesarias, requeridas por la descomposición genética del concepto, fueron analizadas. Tomando en cuenta este documento, se diseñó un instrumento con el fin de llevar a cabo una entrevista semi-estructurada utilizando nuestro marco teórico, para su aplicación a un grupo selecto de estudiantes. Los datos de las entrevistas se analizaron utilizando el mismo marco. La entrevista constaba de 17 preguntas sobre los conceptos de espacio vectorial y subespacio. Aquí se presentan dos de estas preguntas (numeradas 1 y 2 en el instrumento), junto con nuestro análisis a priori de ellos y el correspondiente desempeño de los estudiantes.

10. Mamolo, A. (2009). How to Act? A Question about Encapsulating Infinity. *Proceedings for the Twelfth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Marriott Raleigh City Center - Raleigh, North Carolina.

Abstract (tomado del sitio web del SIGMAA on RUME)
The focus of this paper is to outline briefly the key ideas of my presentation at the 12th SIGMAA on RUME conference. This paper addresses aspects of an on-going study of mine which attends to learners' conceptions of infinity as manifested in their engagement with variations of a well-known paradox: The Ping-Pong Ball Conundrum. The APOS Theory (Dubinsky & McDonald, 2001) postulates a framework for interpreting learners' understanding of two distinct ideas of mathematical infinity: potential and actual infinity. According to Fischbein (2001), *potential infinity* can be thought of as a process which at every moment in time is finite, but which goes on forever. *Actual infinity* is described as a completed entity that envelops what was previously potential. Through the mechanisms of internalisation and encapsulation, Dubinsky et al. (2005a,b) propose that learners construct meaning for the concept of infinity as a *process* (potential infinity) and infinity as an object

(actual infinity). This paper takes a closer look at the specific features connected to infinity the *object*.

Resumen (traducción)

El objetivo de este trabajo es describir brevemente las ideas clave de mi presentación en la 12ª conferencia SIGMAA RUME. Este documento aborda los aspectos de un estudio en curso el cual atiende las concepciones de los estudiantes sobre el infinito, como se manifiestan en su trabajo con variaciones de una conocida paradoja: El enigma de la pelota de ping-pong. La teoría APOE (Dubinsky y McDonald, 2001) postula un marco para la interpretación de la comprensión de los alumnos de dos ideas distintas del infinito matemático: el infinito potencial y actual. Según Fischbein (2001), el *infinito potencial* puede ser pensado como un proceso que en cada momento en el tiempo es finito, pero que sigue por siempre. El *infinito actual* se describe como una entidad completa que envuelve lo que antes era potencial. A través de los mecanismos de internalización y encapsulación, Dubinsky et al. (2005a, b) proponen que los alumnos construyen el significado del concepto de infinito como un *proceso* (infinito potencial) y el infinito como un objeto (infinito actual). Este artículo da un vistazo más de cerca a las características específicas relacionadas al *objeto* infinito.

11. Almendra, F. & Sotres, D. (2010). Some activities designed for teaching the type I error concept in a constructivist environment using simulation. *Far East Journal of Mathematical Education*, 5(1), 1-15.

Summary (adaptado de la base de datos MathEduc Database)

We describe a series of activities designed to help students construct the Type I error probability α concept of a statistical hypothesis test in introductory statistics courses. The activities are carried out in the context of testing hypothesis for one proportion. The resulting interpretation of this activity, on the part of the student, is “the proportion of experiments that randomly reject the null hypothesis in favor of the alternative hypothesis when in fact the null hypothesis is true". The activities, we present, are based, from a theoretical perspective, on the APOS theory framework.

Keywords: APOS theory; concept formation; type I error; hypotheses test; simulation; teaching activities.

Resumen (traducción)

Describimos una serie de actividades diseñadas para ayudar a los estudiantes a construir el concepto de probabilidad α de error tipo I de una prueba estadística de hipótesis en los cursos de introducción a la estadística. Las actividades se llevaron a cabo en el contexto de probar la hipótesis para una proporción. La interpretación de resultados de esta actividad, por parte del estudiante, es "la proporción de experimentos al azar que rechazan la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa, cuando en realidad la hipótesis nula es verdadera". Las actividades que se presentan se basan, desde una perspectiva teórica, en el marco de la teoría APOE.

Palabras clave: Teoría APOE, formación de conceptos, error tipo I, pruebas de hipótesis, simulación, actividades de enseñanza.

12. Maharaj, A. (2010). An APOS analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras*, 71, 41-52.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This article reports on a study which used the APOS (Action-Process-Object-Schema) theory framework to investigate university students' understanding of limits of functions. The relevant limit concepts were taught to undergraduate science students at a university in Kwazulu-Natal in South Africa. This paper reports on the analysis of students' responses to four types of questions on limits of functions. The findings of this study confirmed that the limit concept is one that students find difficult to understand, and suggests that this is possibly the result of many students not having appropriate mental structures at the process, object and schema levels.

Resumen (traducción)

Este artículo informa sobre un estudio que utilizó como marco teórico a la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) para investigar la comprensión de los estudiantes universitarios sobre los límites de funciones. Los conceptos relevantes de límites se les enseñaron a estudiantes de ciencias de Licenciatura en una Universidad en KwaZulu-Natal en Sudáfrica. Este documento informa sobre el análisis de las respuestas de los estudiantes a cuatro tipos de preguntas sobre los límites de las funciones. Los resultados de este estudio confirman que el concepto de límite es uno que los estudiantes encuentran difícil de entender, y sugiere que esto es posiblemente el resultado de que muchos estudiantes no tienen las estructuras mentales adecuadas en los niveles proceso, objeto y esquema.

13. Murphy, C. (2010). Analysing children's calculations: the role of process and object. En M. Joubert & P. Andrews (Eds.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education* (pp. 145-150), vol. 30, Mánchester, Inglaterra: BSRLM.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This paper reviews the role of process and object in young children's calculation strategies. By drawing on the Action, Process, Object, Schema (APOS) framework (Dubinsky and McDonald, 2001) children's calculation strategies are analysed. It is suggested that the opportunity for children to reflect on the actions they perform and also to reason about them is important in developing a coherent framework and hence a deep understanding of the calculation strategies they are using.

Resumen (traducción)

Este artículo revisa el papel del proceso y objeto en las estrategias de cálculo en niños pequeños. Recurriendo al marco teórico (Dubinsky y McDonald, 2001) de Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE) se analizan las estrategias de cálculo de los niños. Se plantea que la oportunidad para los niños de reflexionar sobre las acciones que realizan y también razonar sobre ellas es importante en el desarrollo de un marco coherente y por lo tanto, una comprensión profunda de las estrategias de cálculo que utilizan.

- *En estudiantes y profesores*

1. Bayazit, I. & Gray, E. (2004). Understanding inverse functions: The relationship between teaching practice and student learning. En M. J. Høines & A. B. Fuglestad, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 103-110), vol. 2. Bergen- Norway.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This study is a part of an ongoing research that attempts to explain the relationship between the teachers' instructional practices and students' learning in the context of functions. In this paper we report a case that shows significant differences between the achievements of two classes irrespective of the students' background training, the curricula taught, and the geographic or socioeconomic variables. Cross examination of the data suggest that these differences are attributable to the teachers' instructional practices.

Resumen (traducción)
Este estudio es parte de una investigación en curso que intenta explicar la relación entre las prácticas de enseñanza de los profesores y el aprendizaje de los alumnos en el contexto de las funciones. En este trabajo se presenta un caso que muestra diferencias significativas entre los logros de dos clases, independientemente de su formación, los antecedentes previos del estudiante, el programa de estudio impartido y las variables geográficas o

socioeconómicas. Una examinación de los datos sugiere que estas diferencias son atribuibles a las prácticas de enseñanza de los profesores.

2. Bayazit, I. & Gray, E. (2008). Qualitative differences in the teaching and learning of the constant function. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 7(2), 147-163.

Abstract (tomado de la base MathEduc Database)
This paper examines two experienced Turkish teachers' teaching of the constant function and their students' resulting understanding of the notion. Using a theoretical standpoint that emerges from an analysis of APOS theory, the paper illustrates that the teachers differ remarkably in their approaches to the essence of the concept. Though their personal subject knowledge and understanding of the potential difficulties and misconceptions associated with acquisition of aspects of the function concept is (*sic.*) similar, and although they use epistemologically the same tasks, their classroom presentation focuses upon qualitatively different aspects of the concept. This in turn has a considerable influence on their students' knowledge construction.
Keywords: action-oriented teaching; process oriented teaching; algebraic representation, graphical representation; misconceptions; student errors; research; teaching learning processes; approach; knowledge construction; function concept.

Resumen (traducción)
Este artículo examina la enseñanza de dos profesores turcos con experiencia, de la noción de función constante y los resultados de entendimiento de los estudiantes sobre esta noción. Usando un punto de vista teórico que surge de un análisis de la teoría APOE, el documento pone de manifiesto que los profesores difieren notablemente en sus planteamientos a la esencia del concepto. Aunque su conocimiento personal de la materia, la comprensión de las dificultades potenciales y conceptos erróneos relacionados con la adquisición de los

aspectos del concepto de función son similares, y a pesar de que usan epistemológicamente las mismas tareas, su presentación en el aula se centra en aspectos cualitativamente diferentes del concepto. Esto a su vez tiene una influencia considerable en la construcción del conocimiento de sus alumnos.

Palabras clave: acción orientada a la enseñanza, proceso orientado a la enseñanza, representación algebraica, representación gráfica, conceptos erróneos, errores de los alumnos, la investigación, los procesos de enseñanza aprendizaje, el enfoque, la construcción del conocimiento, concepto de función.

3. Brijlall, D. & Maharaj, A. (2008). Applying APOS theory as a theoretical framework for collaborative learning in teacher education. *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, México.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This article reports on the use of APOS theory as a theoretical framework in a study which investigated fourth-year students' understanding of the two fundamental concepts monotonicity and boundedness of sequences. Research was done at the Edgewood Campus of the University of KwaZulu-Natal in South Africa. These concepts were taught to undergraduate teacher trainees wishing to specialise in the teaching of mathematics in the FET school curriculum. Worksheets based on an examples and non-examples approach were designed to foster collaborative learning. A group of twenty three students participated in the project. This paper, specifically, reports on the investigation of students' responses based on a learning theory within the context of advanced mathematical thinking and makes a contribution to an understanding of how these students constructed the two concepts in a collaborative way.

Resumen (traducción)

Este artículo informa sobre el uso de la teoría APOE como un marco teórico en un estudio que investigó la comprensión de los estudiantes de cuarto año, de dos conceptos fundamentales, monotonía y acotación de las sucesiones. La investigación se llevó a cabo en el Campus de Edgewood de la Universidad de KwaZulu-Natal, en Sudáfrica. Estos conceptos se les enseñaron a los estudiantes para profesor que deseen especializarse en la enseñanza de las matemáticas en el currículo escolar FET. Hojas de cálculo basadas en un enfoque de ejemplos y no ejemplos fueron diseñadas para fomentar el aprendizaje colaborativo. Un grupo de veintitrés estudiantes participaron en el proyecto. Este documento específicamente reporta sobre la investigación de las respuestas de los estudiantes, basándose en una teoría del aprendizaje en el contexto del pensamiento matemático avanzado y hace una contribución a la comprensión de cómo estos estudiantes construyeron los dos conceptos de forma colaborativa.

4. Bayazit, I. (2010). The influence of teaching on student learning: The notion of piecewise function. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(3), 146-164.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This paper examines the influence of classroom teaching on student understanding of the piecewise function. The participants were two experienced mathematics teachers and their 9th grade students. Using a theoretical standpoint that emerged from an analysis of APOS theory, the paper illustrates that the teachers differ remarkably in their approaches to the essence of the piecewise function and this, in turn, affects greatly their students' understanding of this notion. Action-oriented teaching, which is distinguished by the communication of rules, procedures and factual knowledge, confines students' understanding to an action conception of piecewise function. Process-oriented teaching, which priorities the concept and illustrates it across the representations, promotes students' understanding towards a process conception of function.

Keywords: action-oriented teaching, process-oriented teaching, student learning, piecewise function, action conception of piecewise function, process conception of piecewise function.

Resumen (traducción)
Este artículo examina la influencia de la enseñanza en el aula en la comprensión de los estudiantes de la función a trozos. Los participantes fueron dos profesores de matemáticas con experiencia y sus estudiantes de noveno grado. Usando un punto de vista teórico que emergió de un análisis de la teoría APOE, el documento pone de manifiesto que los profesores difieren notablemente en sus planteamientos a la esencia de la función a trozos, y esto, a su vez afecta en gran medida la comprensión de sus estudiantes sobre esta noción. La enseñanza orientada a acciones, la cual se distingue por la comunicación de reglas, procedimientos y conocimiento de los hechos, limita el entendimiento de los estudiantes a una concepción acción, de la función a trozos. La enseñanza orientada a procesos, la cual prioriza el concepto y lo ilustra a través de las representaciones, promueve el entendimiento de los estudiantes hacia una concepción proceso de la función.

Palabras clave: enseñanza orientada a acciones, enseñanza orientada a procesos, el aprendizaje del estudiante, función a trozos, concepción acción de la función a trozos, concepción proceso de la función a trozos.

3.1.3.4.4 **Que presentan información de cursos basados en la teoría APOE o proponen diseños a implementar**

1. Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 55-72.

Abstract (adaptado del mismo artículo)

This study investigated the nature of students' understandings of geometric transformations, which included translations, reflections, rotations, and dilations, in the context of the technological tool, The Geometer's Sketchpad. The researcher implemented a seven-week instructional unit on geometric transformations within an Honors Geometry class. Students' conceptions of transformations as functions were analyzed using the APOS theory; this analysis was informed by students' interpretations and uses of representations of geometrical objects using the constructs of drawing and figure. The analysis suggests students' understandings of key concepts including domain, variables and parameters, and relationships and properties of transformations were critical for supporting the development of deeper understandings of transformations as functions.

Resumen (traducción)

Este estudio investigó la naturaleza de la comprensión de los estudiantes sobre las transformaciones geométricas que incluyen a translaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones, en el contexto de la herramienta tecnológica El Geometer's Sketchpad. El investigador implementó una semana de siete unidades de enseñanza en transformaciones geométricas dentro de una clase de Honors Geometry. Las concepciones de los estudiantes de las transformaciones como funciones se analizaron utilizando la teoría APOE; este análisis tomó en cuenta las interpretaciones y los usos de las representaciones de los estudiantes, de objetos geométricos utilizando las estructuras del dibujo y la figura. El análisis sugiere la comprensión de los estudiantes de conceptos clave como de dominio, variables y parámetros. Las relaciones y propiedades de las transformaciones fueron fundamentales para apoyar el desarrollo de un entendimiento más profundo de las transformaciones como funciones.

2. Moreira, R. & Wodewotzki, M. (2004). A perspective on the conceptions of college freshmen regarding absolute value of real numbers. *Boletim de Educação Matemática*, 17(22), 63-81.

Abstract (tomado de la base MathEduc Database)
In this paper we begin with a somewhat pedagogical statement about what we think is the role of the absolute value concept in the mathematical context and we try to understand how a student learns this concept. The theoretical perspective of cognitive development is an extension of Piaget's ideas about reflective abstraction and it allows one's (*sic.*) to describe the mental constructions present in a learning process of advanced mathematical concepts. Based on a (*sic.*) initial cognitive model of how the absolute value may be learned an attempt to interpret the interviewee's data using the Action-Process-Object-Schema (APOS) theoretical framework is made. There is evidence showing that the level of abstraction of these starting college students enable them to have an adequate understanding of the absolute value. The results of the data analysis also made us consider the graphic representations and the cooperative learning as relevant factors of a pedagogical approach because they seem to lead (*sic.*) a more efficient and meaningful knowledge.
Keywords: learning theory; cognitive constructions; undergraduate mathematical knowledge; absolute value; real numbers

Resumen (traducción)
En este artículo iniciamos con una declaración pedagógica sobre lo que pensamos es el papel del concepto de valor absoluto en el contexto matemático y tratamos de entender cómo el alumno aprende este concepto. La perspectiva teórica del desarrollo cognitivo es una extensión de las ideas de Piaget acerca de la abstracción reflexiva y le permite a uno describir las construcciones mentales presentes en los procesos de aprendizaje de conceptos avanzados de matemáticas. Basado en un modelo cognitivo inicial de cómo el valor absoluto puede ser aprendido se hace un intento de interpretar los datos del entrevistado con el marco teórico Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE). Hay evidencia que demuestra

que el nivel de abstracción de partida de estos estudiantes universitarios les permite tener una adecuada comprensión del valor absoluto. Los resultados de los análisis de los datos también nos hicieron considerar las representaciones gráficas y el aprendizaje cooperativo como factores relevantes de un enfoque pedagógico, ya que parecen llevar a un conocimiento más eficaz y significativo.
Palabras clave: teoría del aprendizaje; construcciones cognitivas, el conocimiento matemático de pregrado; valor absoluto, números reales.

3. Vízcaino, O. (2004). Evaluación de un curso de cálculo desde una perspectiva constructivista. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.467-472). Santiago, Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)
La evaluación es una actividad compleja que involucra una gran cantidad de aspectos a ser tomados en cuentatales como metodología de enseñanza, concepciones del profesor y de los estudiantes acerca de cómo se debe enseñar para aprender, actividades planteadas al interior del aula, currículo, objetivos institucionales, etc. Qué tan efectivas fueron éstos en conjunto es el objetivo de la evaluación. La evaluación debe convertirse en un proceso enriquecedor que permita replantear cada uno de los aspectos anteriores. Por otro lado debe permitir a los profesores describir la situación académica de los estudiantes de la manera más fidedigna posible, otorgando tanto a estudiantes como a profesores e institución la oportunidad de reconocer las fortalezas y debilidades con el único fin de mejorar la parte que a cada uno le corresponde. Es importante mencionar que existe poca investigación alrededor de este importante aspecto del proceso de enseñanza y aprendizaje. En la posición de un grupo de investigadores RUMEC se plantea: ¿Qué podemos hacer para mejorar el aprendizaje de los estudiantes? Éste sugiere estrategias para conseguir la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje, las cuales involucran varias innovaciones entre las cuales se incluyen: el ciclo de enseñanza ACE (actividades en la computadora, discusiones

en el salón de clase y ejercicios), el aprendizaje colaborativo, discusiones diseñadas para estimular la construcción de conceptos matemáticos. Todas éstas fundamentadas en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Pero surgen las interrogantes: ¿cómo evaluar el conocimiento de un estudiante si su trabajo siempre ha sido colaborativo? ¿qué significado puede tener la respuesta a una pregunta específica en un examen cronometrado? ¿cuál debe ser el mejor criterio para decidir su calificación final? Implementan una metodología de evaluación que combina datos cuantitativos y cualitativos para determinar la construcción de estructuras mentales. El acercamiento anterior nos presenta una perspectiva interesante pero aún inconclusa acerca de la evaluación del proceso enseñanza y aprendizaje; sería nuestro deseo una mayor investigación alrededor de ella. La evaluación de los aprendizajes de cualquier clase de contenidos debe poner al descubierto lo más posible todo lo que los alumnos dicen y hacen al construir significados valiosos a partir de los contenidos curriculares. De ahí la importancia de recurrir a la experiencia y habilidad del docente para plantear tareas e instrumentos de evaluación sustantivas que sean sensibles e informativas. Si los profesores no contaran con las presiones administrativas conocidas, seguramente la metodología de evaluación elegida no serían los exámenes.

Este proyecto plantea la hipótesis: ¿La evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ACE genera las mismas notas de evaluación a través de entrevistas personalizadas? Nadie puede negar que la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje es una actividad compleja para los profesores, sin embargo los métodos simplistas para mejorar ésta pueden generar resultados muy pobres y tal vez contraproducentes, pero al mismo tiempo ese análisis constituye una tarea necesaria y fundamental en la mejora de dicho proceso. Es compleja porque dentro del proceso educativo puede analizarse prácticamente todo, lo cual implica aprendizajes, enseñanzas, acción docente, contexto educativo, programas, currículos y aspectos institucionales. La evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje dentro de una metodología tradicional asigna a cada alumno un valor numérico que parece ser de su exclusiva responsabilidad; así la calificación del alumno para los padres, profesores y los mismos alumnos es el resultado de su capacidad y su falta o derroche de esfuerzos. En el caso de fracasar será él quién deberá pagar las consecuencias. Sólo él deberá cambiar. Lo demás, podrá seguir como estaba. Nadie cuestiona a los profesores acerca de los aspectos que se tomaron en cuenta para generar la evaluación de los estudiantes. La evaluación se convierte en proceso conservador. Sin la información que nos proporciona la evaluación no tendríamos argumentos suficientes para proponer correcciones y mejoras al proceso de enseñanza y aprendizaje. Al desempeñar su función en alguna institución educativa, cualquier docente tiene una cierta concepción implícita del modo en que se aprende y se enseña, así como una cierta concepción coherente con ésta, sobre cómo, cuándo, por qué, y para qué evaluar, con el fin de poder asegurarse que las experiencias educativas que proponga en el acto de enseñanza produzcan datos positivos. El conseguir que los estudiantes se apropien de los conceptos específicos del curso es el único fin de los profesores, pero esto no ocurre por el simple deseo de que así sea, ahí entran en juego varios aspectos: el contenido, las creencias del profesor, la metodología usada para la enseñanza, la teoría cognitiva elegida, las actividades planteadas a los estudiantes, los objetivos institucionales, etc., qué tan efectivos han resultado en conjunto éstos es el objetivo de la evaluación. Aportar a la reflexión en este ámbito es el propósito de este artículo.

4. Bodí, S., Valls, J., Llinares, S. (2005). Analysis of the developmental schema for divisibility in N. Constructing a tool. (El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento). *Números*, 60, 3-24.

Abstract (adaptado del mismo artículo)

The aim of this study is to validate an instrument built to evaluate the development of the comprehension of the divisibility in N from the APOS theory perspective. An analysis of the activities and the problems that different text books present has been made and also a revision of the previous research on the comprehension of the divisibility in order to

prepare a questionnaire which includes the mathematical content of the secondary school curriculum. A subsequent psychometric analysis about the index of difficulty of the questionnaire was made and it has been validated by clinical interviews based on tasks. This analysis has allowed us to determine the item validity to discriminate the different ways students of secondary school understand the notions of divisibility. (orig.)
Keywords: divisibility; APOS theory; index of difficulty; interviews

Resumen (tomado del mismo artículo)
Este estudio tiene como objetivo validar un instrumento construido para evaluar el desarrollo de la comprensión de la divisibilidad en N desde la perspectiva de la teoría APOS. Se ha realizado un análisis de las actividades y problemas que presentan los diversos libros de texto y una revisón de las investigaciones previas sobre la comprensión de la divisibilidad con el objetivo de elaborar un cuestionario que recoge el desarrollo curricular que se realiza en la enseñanza media. Posteriormente, se ha efectuado un análisis psicométrico del índice de dificultad del cuestionario y se ha validado a través de la realización de entrevistas clínicas basadas en tareas. Este análisis ha permitido determinar la validez de los ítems para discriminar las diferentes formas de comprender las nociones de divisibilidad de los estudiantes de enseñanza media.
Palabras clave: Divisibilidad, Teoría APOS, Indice de dificultad, Entrevistas.

5. Santiago, D. & Quezada, L. (2005). El uso de nuevas tecnologías de la información en la enseñanza de las matemáticas. En J. Lezama, M. Sánchez & J. Gabriel (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 693-699). Tuxtla Gutiérrez, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Los cursos de matemáticas para estudiantes de ingeniería, del Campus Estado de México del Tecnológico de Monterrey, fueron diseñados considerando el uso de ciclos de

aprendizaje, técnicas didácticas, herramientas de apoyo tecnológico y nuevas tecnologías de información. Cada curso se organizó en pequeñas unidades de aprendizaje basadas en la teoría APOE y los ciclos ACE incorporando al final del ciclo actividades complejas de resolución de problemas o de aprendizaje basado en problemas. Los cursos son apoyados por las plataformas Blackboard y WebTec donde se organizan los materiales, se programan actividades e interactúan de forma remota profesores y alumnos. El objetivo de este trabajo es presentar las ideas que sustentan el diseño de cada curso, las tecnologías de información utilizadas y algunas de las conclusiones obtenidas en el proceso de implantación.

6. Arnawa, I M., Sumarno, U., Kartasasmita, B., & Baskoro, E. T. (2007). Applying the APOS theory to improve students (*sic*.) ability to prove in elementary abstract algebra. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 13(1), 133-148.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study is a quasi-experimental nonrandomized pretest-posttest control group design. The experiment group is treated by APOS theory instruction (APOS), that implements four characteristics of APOS theory, (1) mathematical knowledge was constructed through mental construction: actions, processes, objects, and organizing these in schemas, (2) using computer, (3) using cooperative learning groups, and (4) using ACE teaching cycle (activities, class discussion, and exercise). The control group is treated by conventional/traditional mathematics instruction (TRAD). The main purpose of this study is to analyze about achievement in proof. 180 students from two different universities (two classes at the Department of Mathematics UNAND and two classes at the Department of Mathematics Education UNP PADANG) were engaged as the research subjects. Based on the result of data analysis, the main result of this study is that the proof ability of students' (*sic*.) in the APOS group is significantly better than student (*sic*.) in TRAD group, so it is strongly suggested to apply APOS theory in Abstract Algebra course.

Resumen (traducción)

Este estudio es un quasi-experimental no aleatorio y pretest-posttest diseño basado en un grupo de control. El grupo de experimento es tratado por una instrucción basada en la teoría APOE (APOE), que implementa cuatro características de la teoría APOE, (1) el conocimiento matemático se construye a través de construcciones mentales: acciones, procesos, objetos y la organización de estos en esquemas, (2) usando la computadora, (3) con grupos de aprendizaje cooperativo y (4) utilizando el ciclo de aprendizaje de ACE (actividades, la discusión en clase y ejercicios). El grupo control es tratado por instrucciones matemáticas convencional/tradicional (TRAD). El principal objetivo de este estudio es analizar el rendimiento en relación con la prueba. 180 estudiantes de dos universidades diferentes (dos clases en el Departamento de Matemáticas UNAND y dos clases en el Departamento de Matemática Educativa PADANG UNP) participaron como los sujetos de investigación. Basándose en el resultado del análisis de datos, el principal resultado de este estudio es que la capacidad de prueba en los estudiantes en el grupo de APOE es significativamente mejor que la de los estudiantes en el grupo TRAD, por lo que se sugiere fuertemente aplicar la teoría APOE en cursos de Álgebra Abstracta.

7. Code, W., Kohler, D., Piccolo, C. & MacLean, M. (2012). Teaching methods comparison in a large introductory calculus class. En S. Brown et al. (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics* Education (pp. 123-133), vol. 1. Portland, Oregon.

Abstract (tomado del mismo artículo)

We have implemented a classroom experiment similar to a recent study in Physics (Deslauriers, Schelew, & Wieman, 2011): each of two sections of the same Calculus 1 course at a research-focused university were subject to an “intervention” week where a less experienced instructor encouraged a much higher level of student engagement by design; we employed a modified quasi-experiment structure for our methods comparison with a

Calculus 1 student population and with further steps to improve validity. Our instructional choices encouraged active learning (answering “clicker” questions, small-group discussions, worksheets) during a significant amount of class time, building on assigned pre-class tasks. The lesson content and analysis of the assessments were informed by existing research on student learning of mathematics, in particular the APOS framework. We report improved student performance, on conceptual items in particular, in the higher engagement section in both cases.
Key words: Calculus, design experiment, classroom experiment

Resumen (traducción)

Hemos puesto en marcha una clase experimental similar a un estudio reciente en Física (Deslauriers, Schelew y Wieman, 2011): cada una de las dos secciones del mismo curso de Cálculo 1 en una universidad centrada en la investigación fueron sujetos a una "intervención" en una semana, donde un instructor con menos experiencia motivó un mayor nivel de participación de los estudiantes como parte del diseño; nosotros empleamos una estructura cuasi-experimental modificada para nuestra comparación de métodos con una población de estudiantes de Cálculo 1 y con nuevas medidas para mejorar la validez. Nuestras elecciones didácticas motivaron el aprendizaje activo (responder preguntas "clicker", discusiones en grupos pequeños, hojas de trabajo) durante una cantidad significativa de tiempo de clase, que fueron desarrolladas a partir de las pre-asignadas tareas de clase. El contenido de la lección y el análisis de las evaluaciones se basaron en investigaciones existentes sobre aprendizaje de los estudiantes de matemáticas, en particular el marco APOE. Presentamos mejorado rendimiento de los estudiantes, sobre los temas conceptuales en particular, en la sección que contiene más retos en ambos casos.
Palabras clave: Cálculo, diseño experimental, experimento en el aula.

3.1.3.5 **Que complementan APOE con algún otro marco o viceversa**

3.1.3.5.1 **Que proponen diseños a implementar o dan las bases para futuros diseños**

El siguiente artículo utiliza la teoría APOE y Etnomatemáticas

1. Cuevas, J. (2010). Recuperación de conocimiento sociocultural a partir de las etnomatemáticas y elementos Piagetianos. Una propuesta metodológica para el aprendizaje conceptual. *Revista de Derechos Humanos y Estudios Sociales*, 2(3), 49-67.

Resumen (tomado del mismo artículo)

El presente artículo refleja la construcción y evolución de una propuesta metodológica para abordar conceptos, en este caso matemáticos, a partir de procesos de enculturación y categorías piagetianas. La construcción ha surgido a partir de tratar de conciliar diversas líneas de investigación como la Educación Intercultural, la Enculturación Matemática, las Etnomatemáticas y la construcción conceptual desde el punto de vista del Constructivismo social. Se describen los elementos teóricos y metodológicos integrados en una perspectiva que pretende ir más allá de los estudios etnográficos y descriptivos en cuanto a rescate de conocimiento social-cultural y a la vez, contar con categorías de análisis sólidos y sensibles al contexto basándose principalmente en las actividades universales matemáticas propuestas por Alan Bishop (1999) y el marco APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) de corte Piagetano. También se incluyen los resultados parciales y las perspectivas que la aplicación de esta propuesta ha generado, particularmente a partir de una investigación realizada con estudiantes indígenas y no indígenas de la Universidad Autónoma de Chiapas.

Palabras clave: Enculturación, conceptos matemáticos, contexto de diversidad, Etnomatemáticas, Constructivismo.

El siguiente artículo usa como marco teórico APOE y la metodología de Ingeniería Didáctica. Para el diseño del material didáctico considera APOE, Registros de Representación Semiótica y el estudio histórico-epistemológico del concepto.

2. Narvaez, A., Berman, C. y Rodríguez, M. (2011). Una descomposición genética del límite. En Z. Cataldi & F. Lage (compiladores) *Actas de la I Jornada de enseñanza de la* Ingeniería (pp.19-25). Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.

Resumen (tomado del mismo artículo)
La enseñanza universitaria de la Matemática tiene como eje central el tema Límite Funcional. Es bien conocido el hecho de la dificultad de comprensión de este concepto. El objetivo del presente trabajo es entender la problemática que presentan los estudiantes de la Facultad Regional Mendoza en este tema, para diseñar un material didáctico que les permita superar obstáculos cognitivos. Para validar las hipótesis de partida, se realizó una evaluación cuanti-cualitativa que nos hace reflexionar sobre el material de la cátedra. La presente investigación se enmarca en la Teoría APOS, desarrollada inicialmente por Dubinsky en1996. Las principales conclusiones en esta etapa del proyecto son: la ausencia de concepciones cognitivas en los estudiantes para comprender el Límite al nivel de esquema; la necesidad de interiorización de los conceptos previos al Límite y el replanteo del tratamiento didáctico del mismo.
Palabras Clave: Límite funcional finito. Teoría APOE

3.1.3.5.2 **Que estudian la comprensión de un concepto matemático**

- *En alumnos*

La siguiente investigación utiliza la teoría de Piaget, teoría APOE y Socioepistemología.

1. Aguilar, M. (2002). Relaciones entre F y F' el papel del registro gráfico… En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1004-1009), vol. 1. Buenos Aires, Argentina: Grupo Editorial Iberoamérica.

Resumen (tomado del mismo artículo)
A lo largo de nuestra práctica docente nos hemos percatado que los estudiantes de nivel superior no conceptualizan los teoremas, leyes, axiomas o principios de los conocimientos matemáticos, particularmente en situaciones de cálculo, ellos toman una actitud radicalmente pragmática, es decir, aprenden los procedimientos del cálculo en un nivel puramente algorítmico, que es construido sobre imágenes y gráficas escasos (*sic*.) (Dreyfus, 1990). Esto les impide realizar abstracciones que posteriormente les permitan resolver problemas cuando se enfrentan a nuevas situaciones. Para tener un acercamiento en la solución a esta problemática, en este trabajo, pretendemos que los estudiantes nos proporcionen información acerca de cómo ellos establecen conexiones entre F y F´, F´ y F, el tipo de construcciones que realizan cuando interactúan en un ambiente gráfico en relación a F´ y F, las nociones que implícita o explícitamente establecen cuando se les coloca ante una situación específica. Las interpretaciones de las respuestas dadas estarán basadas en el marco de las construcciones mentales y en el desarrollo de estas ante las situaciones correspondientes.

En el siguiente artículo se utiliza la teoría APOE, así como varias otras perspectivas teóricas, incluyendo el modelo SOLO para analizar el desarrollo de conceptos matemáticos.

2. Pegg, J. & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education* (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) (pp.468-475), 37 (6).

Abstract (tomado del mismo artículo)

In this paper, the development of mathematical concepts over time is considered. Particular reference is given to the shifting of attention from step-by-step procedures that are performed in time, to symbolism that can be manipulated as mental entities on paper and in the mind. The development is analysed using different theoretical perspectives, including the SOLO model and various theories of concept construction to reveal a fundamental cycle underlying the building of concepts that features widely in different ways of thinking that occurs throughout mathematical learning.

Resumen (traducción)

En este trabajo, se considera el desarrollo de los conceptos matemáticos a través del tiempo. Se hace especial énfasis en el cambio de atención de los procedimientos que se realizan paso a paso en el tiempo, al simbolismo que puede ser manipulado como entidades mentales en papel y en la mente. El desarrollo se analiza usando diferentes perspectivas teóricas, incluyendo el modelo SOLO y diversas teorías de la construcción de conceptos para revelar un ciclo fundamental que subyace la construcción de conceptos que figura ampliamente en diferentes maneras de pensar que ocurre a lo largo del aprendizaje matemático.

Los siguientes trabajos (3 y 4) utilizan la teoría APOE, Hazzan (1999) y el acercamiento de Tall (1980)

3. Mamolo, A. (2007). Infinite magnitudes vs infinite representation: The story of π. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (pp. 233-240),vol. 3, Seoul: PME.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This report explores students' naïve conceptions of infinity as they compared the number of points on line segments of different lengths. Their innovative (albeit incorrect) resolutions to tensions that arose between intuitions and properties of infinity are addressed. Attempting to make sense of such properties, students reduced the level of abstraction of tasks by analysing a single number rather than infinitely many. In particular, confusion between the infinite magnitude of points and the infinite amount of digits in the decimal representation of numbers was observed. Furthermore, misconceptions in students' understanding of real numbers and their representation on a number line were exposed.

Resumen (traducción)

Este informe explora las concepciones ingenuas de los alumnos de lo infinito, cuando compararon el número de puntos en los segmentos de línea de diferentes longitudes. Sus resoluciones innovadoras (aunque incorrectas) ante las tensiones que surgieron entre las intuiciones y las propiedades del infinito, se abordan. En el intento de dar sentido a tales propiedades, los estudiantes redujeron el nivel de abstracción de las tareas mediante el análisis de un solo número en lugar de un número infinito. En particular, la confusión entre la magnitud infinita de puntos y la cantidad infinita de dígitos en la representación decimal de los números fue observada. Por otra parte, las concepciones erróneas en la comprensión de los estudiantes de los números reales y su representación en una recta numérica fueron expuestas.

4. Mamolo, A. (2009). Intuitions of "infinite numbers": Infinite magnitude vs. infinite representation. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 305-330.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This study examines undergraduate students' emerging conceptions of infinity as manifested in their engagement with geometric tasks. Students' attempts to reduce the level of abstraction of infinity and properties of infinite quantities are described. Their arguments

revealed they perceive infinity as an ongoing process, rather than a completed one, and fail to notice conflicting ideas. In particular, confusion between the infinite magnitude of points on a line segment and the infinite representation of real numbers was observed. Furthermore, students struggled to draw a connection between real numbers and their representation on a number line.
Keywords: Infinity; Infinite numbers; Intuition; Magnitudes; Real numbers; Representations

Resumen (traducción)
Este estudio examina las concepciones emergentes de estudiantes universitarios sobre el infinito como se manifiestan cuando trabajan sobre tareas geométricas. Se describen los intentos de los estudiantes para reducir el nivel de abstracción del infinito y las propiedades de las magnitudes infinitas. Sus argumentos revelaron que perciben el infinito como un proceso continuo en lugar de uno completo, y no se dan cuenta de las ideas en conflicto. En particular se observó la confusión entre la magnitud infinita de puntos en un segmento de línea y la representación infinita de números reales. Además, los estudiantes luchaban por establecer una conexión entre los números reales y su representación en una recta numérica.
Palabras clave: Infinito; números infinitos; Intuición; Magnitudes, Números reales; Representaciones

El siguiente trabajo utiliza la teoría APOE y "la reducción de abstracción" de Hazzan (1999).

5. Mamolo, A. (2009). Accommodating infinity: a leap of imagination. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (pp.65-72), vol.5. Atlanta, GA: Georgia State University.

Abstract (tomado del mismo artículo)

This paper is the first installment of a study which seeks to identify the necessary and sufficient features of accommodating the idea of actual infinity. University mathematics majors' and graduates' engagement with the Ping-Pong Ball Conundrum is used as a means to this end. This paper focuses on one of the necessary features: the leap of imagination required to conceive of actual infinity, as well as its associated challenges.

Resumen (traducción)

Este trabajo es la primera parte de un estudio que busca identificar las características necesarias y suficientes para acomodar la idea del infinito actual. El trabajo de estudiantes universitarios de matemáticas y de posgrado, la paradoja de la pelota de ping-pong se utiliza como un medio para este fin. Este documento se centra en una de las características necesaria: el salto de la imaginación requerida para concebir el infinito actual, así como sus retos asociados.

El siguiente trabajo utiliza la teoría APOE y el enfoque Ontosemiótico (EOS).

6. Font, V., Malaspina, U., Giménez, J. & Wilhelmi, M. R. (2011). Mathematical objects through the lens of three different theoretical perspectives. En M. Pytlak*, T.* Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 7 (pp. 2411-2420). Rzeszow, Poland: University of Rzeszów.

Abstract (tomado del mismo artículo)

In this paper we establish a link between the onto-semiotic approach (OSA) to mathematics cognition and instruction, APOS theory and the cognitive science of mathematics (CSM) as regards their use of the concept 'mathematical object'. It is argued that the notion of object used in the OSA does not contradict that employed by APOS theory or the CSM, since

what the latter two theories do is highlight partial aspects of the complex process through which, according to the OSA, mathematical objects emerge out of mathematical practices.
Key words: mathematical object, onto-semiotic approach, APOS theory, cognitive science of mathematics.

Resumen (traducción)
En este trabajo establecemos un vínculo entre el enfoque ontosemiótico (OSA) a la cognición matemática e instrucción, la teoría APOE y la ciencia cognitiva de las matemáticas (CSM) en cuanto a su uso del concepto "objeto matemático". Se argumenta que la noción de objeto utilizado en la OSA no está en contradicción con la empleada por la teoría APOE o la CSM, ya que lo que estas dos últimas teorías hacen, es poner de relieve los aspectos parciales del complejo proceso a través del cual, de acuerdo con la OSA, los objetos matemáticos emergen de las prácticas matemáticas.
Palabras clave: objeto matemático, enfoque ontosemiótico, teoría APOE, ciencia cognitiva de las matemáticas.

Las siguientes investigaciones (7-13) utilizan la teoría APOE y los tres mundos de matemáticas de Tall (Formal, Simbólico y Encarnado).

7. Stewart, S. & Thomas, M. (2006). Student Thinking about Eigenvalues and Eigenvectors: Formal, Symbolic and Embodied Notions. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces (Proceedings of the 29th annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 487-495), vol. 2. Canberra: MERGA.

Abstract (adaptado del mismo artículo)
Entering university students often find there is a shift in presentation of mathematical ideas, from a primarily procedural or algorithmic school approach to a presentation of concepts

through definitions and deductive derivation of other results. For many a course in linear algebra is the first occasion that this shift is encountered, since calculus may approximate to what they have seen at school. This research uses the theory of processes and objects, along with the ideas of embodied or visual, symbolic and formal approaches to mathematics learning to investigate some first year students' understanding of eigenvalues and eigenvectors. We identify some fundamental problems with student understanding of, and hence working with, the definition of eigenvector, as well as with some of the concepts underlying it.

Resumen (traducción)

Los estudiantes que ingresan a la Universidad a menudo encuentran que hay un cambio en la presentación de las ideas matemáticas, de un enfoque escolar principalmente de procedimientos o algoritmos, a la presentación de conceptos a través de las definiciones y la derivación deductiva de otros resultados. Para muchos un curso de álgebra lineal es la primera ocasión en que este cambio se encuentra, ya que el Cálculo puede aproximarse a lo que han visto en la escuela. Esta investigación utiliza la teoría de los procesos y los objetos, junto con las ideas de los enfoques encarnado o visual, simbólico y formal del aprendizaje de las matemáticas para investigar la comprensión de algunos estudiantes de primer año de los valores y vectores propios. Identificamos algunos problemas fundamentales con la comprensión, y por lo tanto, con el trabajo del estudiante con la definición del vector propio, así como con algunos de los conceptos subyacentes.

8. Stewart, S. & Thomas, M. (2007). Embodied, symbolic and formal aspects of basic linear algebra concepts. En J. H. Woo et al. (Eds.), *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (pp. 201-208), vol. 4. Seoul, Korea: PME.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Many students find their first experience with linear algebra at university very challenging. They may cope with the procedural aspects of the subject, solving linear systems and manipulating matrices, but struggle to understand the crucial conceptual ideas underpinning them. This makes it very difficult to make progress in more advanced courses. In this research we have sought to apply APOS theory, in the context of Tall's three worlds of mathematics, to the learning of the linear algebra concepts of linear combination, span, and subspace by a group of second year university students. The results suggest that the students struggled to understand the concepts through mainly process conceptions, but embodied, visual ideas proved valuable for them.

Resumen (traducción)

Muchos estudiantes encuentran su primera experiencia con el álgebra lineal en la universidad retadora. Ellos pueden hacer frente a los aspectos procedimentales de la materia, resolviendo sistemas lineales y manipulando matrices, pero se esfuerzan por comprender las ideas conceptuales fundamentales que los sustentan. Esto hace muy difícil avanzar en cursos más avanzados. En esta investigación hemos tratado de aplicar la teoría APOE, en el contexto de los tres mundos de Tall de las matemáticas, al aprendizaje de los conceptos de álgebra lineal, combinación lineal, espacio y subespacio, de un grupo de estudiantes universitarios de segundo año. Los resultados sugieren que los estudiantes lucharon por entender los conceptos a través de concepciones principalmente proceso, pero ideas visuales encarnadas resultaron ser valiosas para ellos.

9. Stewart, S. & Thomas, M. (2007). Eigenvalues and Eigenvectors: Formal, Symbolic and Embodied Thinking, *Proceedings for the Tenth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education.* Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. San Diego, California.

Abstract (tomado del sitio web del SIGMAA on RUME)

Many beginning university students struggle with the new approaches to mathematics that they find in their courses due to a shift in presentation of mathematical ideas, from a procedural approach to concept definitions and deductive derivations, with ideas building upon each other in quick succession. This paper highlights this situation by considering some conceptual processes and difficulties students find in learning about eigenvalues and eigenvectors. We use the theoretical framework of Tall's three worlds of mathematics, along with perspectives from process-object and representational theory. The results of the study describe the thinking about these concepts of groups by first and second year university students, and in particular the obstacles they faced, and the emerging links some were constructing between parts of their concept images formed from the embodied, symbolic and formal worlds. We also identify some fundamental problems with student understanding of the definition of eigenvectors that lead to problems using it, and some of the concepts underlying the difficulties.

Resumen (traducción)

Muchos estudiantes universitarios principiantes luchan con los nuevos enfoques de la matemática que se encuentran en sus cursos debido a un cambio en la presentación de las ideas matemáticas, de un enfoque de procedimientos a las definiciones conceptuales y derivaciones deductivas, con ideas que se construyen el uno del otro en rápida sucesión. Este documento pone de relieve esta situación, teniendo en cuenta algunos procesos conceptuales y dificultades que encuentran los estudiantes en el aprendizaje de valores y vectores propios. Usamos el marco teórico de tres mundos de las matemáticas de Tall, junto con las perspectivas de proceso-objeto y la teoría representacional. Los resultados del estudio describen el pensamiento acerca de estos conceptos de grupos por estudiantes universitarios de primer y segundo año, y en particular los obstáculos con que se enfrentan, y los vínculos emergentes que algunos fueron construyendo entre partes de las imágenes entre sus conceptos formados a partir de los mundos encarnado, simbólico y formal. También identificamos algunos problemas fundamentales con la comprensión del

estudiante de la definición de los vectores propios que llevan a problemas para utilizarla, y algunos de los conceptos que subyacen a las dificultades.

10. Stewart, S. & Thomas, M. (2008). Embodied, symbolic and formal thinking for linear combination and independence in linear algebra. *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, México.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Linear algebra is often one of the first advanced mathematics courses that students encounter at university level. The transition from a primarily procedural or algorithmic school approach to an abstract and formal presentation of concepts through definitions appears to create difficulties for many students, who are just coping with procedural aspects of the subject. Students have little or no intuition for linear algebra terms such as linear independence, which often involve use of definitions. They may cope with procedural aspects of a course, such as solving linear systems and manipulating matrices but don't understand the key conceptual ideas underpinning them. In this research we have applied APOS theory, in conjunction with Tall's three worlds of embodied, symbolic and formal mathematical thinking, to create a framework to examine the learning of some basic linear algebra concepts, including linear combination and independence, by two groups of second year university students. The results suggest that students with more representational diversity had a better overall understanding of the concepts. In particular the embodied introduction of the concepts may have proved a valuable adjunct to their thinking.

Resumen (traducción)

El álgebra lineal es a menudo uno de los primeros cursos avanzados de matemáticas, que los alumnos encuentran en el nivel universitario. La transición de un enfoque escolar principalmente de procedimientos o algoritmos, a una presentación abstracta y formal de los conceptos a través de definiciones, parece crear dificultades para muchos estudiantes

que están haciendo frente a los aspectos procedimentales de la materia. Los estudiantes tienen poco o nada de intuición de los términos de álgebra lineal, como la independencia lineal, que a menudo incluyen el uso de las definiciones. Ellos pueden hacer frente a aspectos procedimentales de un curso, tales como la resolución de sistemas lineales y la manipulación de matrices, pero no entienden las ideas clave conceptuales en que se basan. En esta investigación se ha aplicado la teoría APOE, conjuntamente con los tres mundos de Tall del pensamiento matemático encarnado, simbólico y formal, para crear un marco para examinar el aprendizaje de algunos conceptos de álgebra lineal básica, incluida la combinación lineal y la independencia, por dos grupos de los estudiantes universitarios de segundo año. Los resultados sugieren que los estudiantes con más diversidad de representación tuvieron una mejor comprensión general de los conceptos. En particular, la introducción encarnada de los conceptos ha demostrado ser un valioso complemento a su pensamiento.

11. Stewart, S. & Thomas, M. (2008). Linear Algebra Snapshots through APOS and Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking. En R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2). Palmerston North, NZ: MERGA.

Abstract (tomado del mismo artículo)

Linear algebra is one of the unavoidable advanced courses that many mathematics students encounter at university level. The research reported here is as part of the first named author's recent PhD thesis where she created and applied a theoretical framework combining the strengths of two major mathematics education theories in order to investigate the learning and teaching of some linear algebra concepts. This paper highlights some of the overall findings of this research and suggests applications for learning and teaching in undergraduate mathematics classrooms.

Resumen (traducción)
El Álgebra lineal es uno de los cursos avanzados inevitables, que muchos estudiantes de matemáticas encuentran a nivel universitario. La investigación presentada aquí es parte de la reciente tesis doctoral de la primera autora, donde creó y aplicó un marco teórico que combina las fortalezas de dos de las teorías más importantes de educación matemática con el fin de investigar la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos de álgebra lineal. Este documento pone de relieve algunas de las conclusiones generales de esta investigación y sugiere aplicaciones para el aprendizaje y la enseñanza en las clases de matemáticas de Licenciatura.

12. Stewart, S. (2009). Understanding linear algebra concepts through APOS and the three worlds of mathematical thinking theories. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 169-176), vol. 5. Thessaloniki, Greece.

Abstract (tomado del mismo artículo)
Every year around the world a vast number of undergraduate students study linear algebra at university. Despite their lack of full understanding and experiencing difficulties with the basic concepts the traditional ways of teaching is (*sic.*) still been (*sic.*) carried out. Furthermore majority of students successfully pass the final examination.

In her PhD thesis (Stewart, 2008) the author created and applied a theoretical framework combining the strengths of two major mathematics education theories in order to investigate the learning and teaching of linear algebra at the university level. She produced and analysed a large data set concerning students' embodied and symbolic ways of thinking about elementary linear algebra concepts. It was anticipated that this study may provide suggestions with the potential for widespread positive consequences for learning

mathematics. This paper highlights some of her findings and in particular discusses the effectiveness of the framework.

Resumen (traducción)
Cada año en todo el mundo un gran número de estudiantes de Licenciatura estudian álgebra lineal universitaria. A pesar de su falta de comprensión completa y las dificultades que experimentan con los conceptos básicos, se están llevando a cabo aún formas tradicionales de enseñanza. Por otra parte la mayoría de los estudiantes aprueban con éxito el examen final.

En su tesis doctoral (Stewart, 2008), la autora creó y aplicó un marco teórico que combina las fortalezas de dos grandes teorías de educación matemática con el fin de investigar el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal en el nivel universitario. Ella produjo y analizó una gran cantidad de datos de las formas simbólicas y encarnadas de pensar de los estudiantes, sobre conceptos elementales de álgebra lineal. Se preveía que este estudio podría proporcionar sugerencias con una posibilidad de amplias consecuencias positivas para el aprendizaje de las matemáticas. Este documento pone de relieve algunas de sus conclusiones y, en particular, se analiza la eficacia del marco.

13. Stewart, S. & Thomas, M. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 173-188.

Abstract (tomado del mismo artículo)
One of the earlier, more challenging concepts in linear algebra at university is that of basis. Students are often taught procedurally how to find a basis for a subspace using matrix manipulation, but may struggle with understanding the construct of basis, making further progress harder. We believe one reason for this is because students have major difficulties

with concepts of span and linear independence which form the requirements for a set of vectors to form a basis. In this research we applied a theoretical framework based on Tall's three worlds of mathematics learning and action-process-object-schema (APOS) theory to the learning of the concept of basis by a group of second year university students. The results suggest that an emphasis on matrix processes may not help students understand the concept, and embodied, visual ideas that could be valuable were usually lacking.

Keywords: Linear algebra, representation, embodied, process, object, university, mathematics education, three worlds, APOS.

Resumen (traducción)
Uno de los primeros conceptos más difíciles de álgebra lineal en la universidad, es el de base. A los estudiantes se les enseña a menudo de manera procedimental de cómo encontrar una base para un subespacio mediante la manipulación matricial, pero pueden tener dificultades con la comprensión del constructo de la base, lo que hace más difícil seguir avanzando. Creemos que una de las razones de esto es porque los estudiantes tienen grandes dificultades con los conceptos de espacio generado e independencia lineal que forman los requisitos para que un conjunto de vectores formen una base. En esta investigación aplicamos un marco teórico basado en los tres mundos de aprendizaje de las matemáticas de Tall y la teoría acción-proceso-objeto-esquema (APOE) al aprendizaje del concepto de base por un grupo de estudiantes de segundo año universitario. Los resultados sugieren que un énfasis en los procesos de la matriz puede no ayudar a los estudiantes a entender el concepto, e ideas visuales, encarnadas que podrían ser útiles, por lo general estaban ausentes.
Palabras clave: Álgebra lineal, representación, incorporar, proceso, objeto, universidad, educación matemática, tres mundos, APOE.

La siguiente investigación utiliza la teoría APOE y el enfoque de Modelos y Modelación.

14. Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. & Lozano, P. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432 (8), 2125–2140.

Abstract (tomado del mismo artículo)
We report results on an approach to teaching linear algebra using models. In particular we are interested in analyzing the use of two theories of mathematics education, namely, Models and Modeling and APOS in the design of a teaching sequence that starts with the proposal of a "real life" decision making problem to the students. We briefly illustrate the possibilities of this methodology through the analysis and description of our classroom experience on a problem related to traffic flow that elicits the use of a system of linear equations and different parameterizations of this system to answer questions on traffic control. We describe cycles of students' work on the problem and discuss the advantages of this approach in terms of students' learning and the possibilities of extending it to other problems and linear algebra concepts.
Keywords:
Modeling, linear equations, education, adjacency matrix, parameterization, traffic flow.

Resumen (traducción)
Informamos de los resultados de un enfoque a la enseñanza de álgebra lineal utilizando modelos. En particular estamos interesados en analizar el uso de dos teorías de la educación matemática, es decir, Modelos y Modelación y APOE, en el diseño de una secuencia de enseñanza que se inicia con la propuesta de un problema de "vida real" que involucra toma de decisiones a los estudiantes. Ilustramos brevemente las posibilidades de esta metodología a través del análisis y descripción de nuestra experiencia en el aula sobre un problema relacionado con el flujo de tráfico que provoca el uso de un sistema de ecuaciones lineales y diferentes parametrizaciones de este sistema para responder a las preguntas sobre el control de tráfico. Se describen los ciclos de trabajo de los estudiantes

sobre el problema y se discuten las ventajas de este enfoque en términos del aprendizaje de los estudiantes y las posibilidades de ampliarlo a otros problemas y conceptos de álgebra lineal.
Palabras clave: Modelación, ecuaciones lineales, educación, matriz adjunta, parametrización, flujo de tráfico.

La siguiente investigación utiliza la teoría APOE, la noción de reificación de Sfard (1991, 2008) y la distinción percepto-procepto (Tall et al., 2000)

15. Tabaghi, S. G., Mamolo, A. & Sinclair, N. (2009). The effect of DGS on students' conception of slope. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 226-234), vol. 5. Atlanta, GA: Georgia State University.

Abstract (adaptado del mismo artículo)
This report is the first instalment of a broader study which investigates university students' conceptualisations of static and dynamic geometric entities. In this part we offer a refined look at the conceptualisations of two groups of students – one group which was taught using Dynamic Geometric Software and the other in a 'traditional' fashion. We use both APOS Theory (Dubinsky & McDonald, 2001) and Sfard (2008) to interpret learners' understanding of the slope of lines. Our data reveal that students using DGS developed a strong proceptual understanding of slope, which enabled them to solve problems in which slope could be seen as a conceptual object. This report sets the stage for a look forward to how DGS may influence learners' process-object conceptualisation of other geometric representations of algebraic equations.

Resumen (traducción)

Este informe es la primera parte de un estudio más amplio que investiga las conceptualizaciones de los estudiantes universitarios de entidades geométricas estáticas y dinámicas. En esta parte ofrecemos una mirada refinada a las conceptualizaciones de dos grupos de estudiantes - un grupo el cual fue enseñado utilizando un software de geometría dinámica y el otro de manera "tradicional". Utilizamos tanto la teoría APOE (Dubinsky y McDonald, 2001) como Sfard (2008) para interpretar la comprensión de los alumnos de la pendiente de rectas. Nuestros datos revelan que los estudiantes que usan DGS desarrollaron una sólida comprensión proceptual de la pendiente, lo que les permitió resolver problemas en los que la pendiente se podía ver como un objeto conceptual. Este informe sienta las bases para una mirada hacia el futuro sobre cómo los DGS pueden influir en los educandos en las conceptualizaciones proceso-objeto de otras representaciones geométricas de las ecuaciones algebraicas.

La siguiente investigación utiliza la teoría APOE y la Teoria de Carga Cognitiva.

16. Tossavainen, T. (2009). Who can solve 2x=1? – An analysis of cognitive load related to learning linear equation solving. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 435-448.

Abstract (adaptado del mismo artículo)
Using 2x=1 as an example, we discuss the cognitive load related to learning linear equation solving. In the framework of the Cognitive Load Theory we consider especially the intrinsic cognitive load needed in arithmetical, geometrical and real analytical approach to linear equation solving. This will be done e.g. from the point of view of the conceptual and procedural knowledge of mathematics and the APOS Theory. Based on our observations, in the end of the paper we design a setting for teaching linear equation solving.
Keywords: conceptual knowledge; cognitive load theory; linear equations; procedural knowledge.

Resumen (traducción)

Utilizando 2x = 1 como un ejemplo, discutimos la carga cognitiva relacionada con el aprendizaje de la solución de ecuaciones lineales. En el marco de la Teoría de la Carga Cognitiva se considera especialmente la intrínseca carga cognitiva necesaria en el enfoque aritmético, geométrico y analítico real para la solución de ecuaciones lineales. Esto se hará por ejemplo, desde el punto de vista del conocimiento conceptual y procedimental de las matemáticas y la teoría APOE. Con base en nuestras observaciones, al final del trabajo diseñamos un entorno para la enseñanza de resolución de ecuaciones lineales.

Palabras clave: conocimiento conceptual, teoría de la carga cognitiva, ecuaciones lineales, conocimiento procedimental.

La siguiente investigación utiliza la teoría APOE y la teoría de Registros de Representación semiótica.

17. Van Lamoen, S. & Parraguez, M. (2011). Construcción del concepto función cuadrática en estudiantes sordos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 331-339). Cd. de Guatemala, Guatemala: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Resumen (tomado del mismo artículo)

El estudio de los fenómenos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje, suele ser realizado en contextos donde, las discapacidades sensoriales no son un factor influyente. Muy por el contrario, en la presente investigación, se considera esta premisa, frente a la tarea, por parte de los estudiantes sordos, de construir el concepto de función cuadrática. Para ello, desde el paradigma cognitivo, hemos decidido considerar la teoría APOE y la teoría de Registros de Representación Semiótica, planteando una descomposición genética hipotética del concepto, basados en las premisas contextuales de los estudiantes, el análisis teórico y en las herramientas teóricas de ambas teorías.

Palabras clave: APOE, registros de representación semiótica, sordera

El siguiente trabajo utiliza la teoría APOE e ideas de la teoría de Balacheff.

18. Martínez-Planell, R., González, A., DiCristrina, G. y Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 235-249.

Abstract (tomado del mismo artículo)
This is a report of a study of students' understanding of infinite series. It has a threefold purpose: to show that students may construct two essentially different notions of infinite series, to show that one of the constructions is particularly difficult for students, and to examine the way in which these two different constructions may be built so that we may uncover ways to help students improve their understanding. The theoretical framework consists of action– process–object–schema theory and the specific model of conceptions in Balacheff's theory of conception, knowing, and concept. Approaching the problem from these two different theoretical perspectives allows us to provide different and at the same time complementary explanations of observed phenomena. The two different infinite series constructions are, briefly stated, series as an infinite unending process of addition and series as a sequence of partial sums. Students are found to have difficulty building an understanding of series as a sequence of partial sums and thus tend to have difficulty in problem situations that require this interpretation. The study uses semi-structured interviews with 10 graduate students. The interviews explore situations that might give insight into students' notion of the sequence of partial sums.
Keywords APOS theory . Conceptions . Infinite sequence . Infinite series . Limits

Resumen (traducción)
Este es un informe de un estudio de la comprensión de los estudiantes sobre series infinitas. Cuenta con un triple propósito: demostrar que los estudiantes puedan construir dos

conceptos esencialmente diferentes de series infinitas, demostrar que una de las construcciones es particularmente difícil para los estudiantes, y examinar la forma en que estas dos construcciones diferentes pueden ser construidas de modo que podamos descubrir maneras de ayudar a los estudiantes a mejorar su comprensión. El marco teórico consta de la teoría acción-proceso-objeto-esquema y el modelo específico de las concepciones de la teoría de Balacheff de la concepción, el conocimiento y el concepto. El acercarse al problema desde estas dos diferentes perspectivas teóricas nos permite ofrecer diferentes y al mismo tiempo complementarias, explicaciones de los fenómenos observados. Las dos construcciones diferentes de series infinitas son, dicho brevemente, la serie como un proceso infinito interminable de la suma y la serie como una sucesión de sumas parciales. Se encuentra que los estudiantes tienen dificultades para construir una comprensión de la serie como una sucesión de sumas parciales y por lo tanto tienden a tener dificultad en situaciones problemáticas que requieren esta interpretación. El estudio se basa en entrevistas semi-estructuradas con 10 estudiantes de postgrado. Las entrevistas exploran situaciones que podrían dar una idea de la noción de los estudiantes de sucesión de sumas parciales.

Palabras clave Teoría APOE. Concepciones. Secuencia infinita. Series infinitas. Límites.

- *En profesores*

El siguiente trabajo utiliza la teoría APOE y Socioepistemología.

1. Barrera, J. (2001). Un acercamiento al entendimiento de la regla de la cadena. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 548-553). Panamá, Panamá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Resumen (tomado del mismo artículo)

Esta investigación tiene como objetivo principal mostrar los resultados obtenidos acerca de un estudio sobre el “Entendimiento de la Regla de la Cadena” en estudiantes de nivel Superior. Se parte de la Hipótesis de que no es necesario que los estudiantes entiendan el concepto de función compuesta para que puedan entender el concepto de “Regla de la Cadena”. Esta hipótesis está fuertemente apoyada en los antecedentes históricos del origen del cálculo (por ejemplo el cálculo de fluxiones de Newton) desde la misma época de Newton y Leibniz. Se trazan dos rutas que muestran como (*sic*.) se puede mostrar al estudiante el concepto de “Regla de la Cadena”: La primera marca la forma usual en que actualmente es enseñado este concepto en las escuelas y la segunda muestra que el cambio de variable puede conducir al mismo objetivo. Sin embargo, esto da motivo a la siguiente pregunta ¿qué apareció primero, la regla de la cadena o la función compuesta? Por último muestra las evidencias halladas en los estudiantes sobre la génesis del concepto de Regla de la Cadena.

El siguiente trabajo utiliza la teoría APOE y la noción de práctica que proporciona el enfoque sociocultural (Llinares, 2000).

2. Gavilán, J. M., García, M. & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), 157-170.

Abstract (tomado del mismo artículo)

To analyse the mathematics teacher’s practice involves making explicit a model of the student’s learning (construction of mathematical knowledge) and generating analytic tools that allow explaining the teacher’s practice in a way coherent with the chosen learning model. In this article we introduce the analytic tool «modelling of mechanisms for the construction of knowledge» to carry out this analysis and the «vignette» notion as the way to make it explicit in the analysis of the teacher’s practice.

Keywords. Teacher's practice, construction of knowledge, modelling of mechanism of construction, derivative

Resumen (tomado del mismo artículo)
Analizar la práctica del profesor de matemáticas conlleva explicitar un modelo de aprendizaje del estudiante (construcción de conocimiento matemático) y generar herramientas analíticas que permitan explicarla de manera coherente con el modelo de aprendizaje asumido.
En este artículo introducimos la herramienta analítica «modelación de mecanismos de construcción de conocimiento» para realizar dicho análisis e incorporamos la noción de «viñeta» como una manera de hacer explícito este proceso de análisis.
Palabras clave. Práctica del profesor, construcción de conocimiento, modelación de mecanismo de construcción, derivada.

3.1.3.5.3 **Que comparan la teoría APOE o parte de su metodología con otros enfoques**

1. Rogers, E. C., Reynolds, B. E., Davidson, N. A. & Thomas, A. D. (eds.) (2001). *Cooperative learning in undergraduate mathematics. Issues that matter and strategies that work*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Abstract (tomado del mismo libro)
This volume offers practical suggestions and strategies both for instructors who are already using cooperative learning in their classes, and for those who are thinking about implementing it. The authors are widely experienced with bringing cooperative learning into the undergraduate mathematics classroom. In addition they draw on the experiences of colleagues who responded to a survey about cooperative learning which was conducted in

1996-97 for Project CLUME (Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics Education).

The volume discusses many of the practical implementation issues involved in creating a cooperative learning environment: - How does the instructor develop a positive social climate, form groups and prevent or resolve difficulties within and among the groups, - what are some of the cooperative strategies (with specific examples for a variety of courses) that can be used in courses ranging from lower-division to calculus to upper division mathematics courses, - what are some of the critical and sensitive issues of assessing individual learning in the context of a cooperative learning environment, and, - how do theories about the nature of mathematics content relate to the views of the instructor in helping students learn that content. The authors present powerful applications of learning theory that illustrate how readers might construct cooperative learning activities to harmonize with their own beliefs about the nature of mathematics and how mathematics is learned. In writing this volume the authors analyzed and compared the distinctive approaches they were using at their various institutions. Fundamental diferences in their approaches to cooperative learning emerged. For example, choosing Davidson’s guided-discovery model over a constructivist model based on Dubinsky’s action-process-object-schema (APOS) theory afects one’s choice of activities. These and related distinctions are explored. A selected bibliography provides a number of the major references available in the field of cooperative learning in mathematics education. To make this bibliography easier to use, it has been arranged in two sections. The first section includes references cited in the text and some sources for further reading. The second section lists a selection of textbooks and course materials that work well in a cooperative classroom for undergraduate mathematics students. (book cover)

Resumen (traducción)

Este volumen contiene sugerencias prácticas y estrategias, tanto para los instructores que ya están utilizando el aprendizaje cooperativo en sus clases como para aquellos que están pensando en su aplicación. Los autores cuentan con experiencia amplia en acercar el aprendizaje cooperativo al aula de matemáticas universitarias. Asimismo se basan en las experiencias de los colegas que respondieron a una encuesta sobre el aprendizaje cooperativo que se llevó a cabo en 1996-1997 para el proyecto de CLUME (Aprendizaje Cooperativo en Educación Matemática Universitaria).

El volumen aborda muchos de los problemas de aplicación práctica en cuestiones relacionadas en la creación de un entorno de aprendizaje cooperativo: - ¿Cómo promueve el instructor el desarrollo de un clima social positivo, formar grupos y prevenir o resolver dificultades dentro y entre los grupos?, ¿cuáles son algunas de las estrategias cooperativas (con ejemplos concretos para una variedad de cursos) que se pueden utilizar en los cursos que van desde la división inferior al Cálculo y a la división superior de cursos de matemáticas?, ¿cuáles son algunos de los temas críticos y sensibles del aprendizaje de la evaluación individual en el contexto de un ambiente de aprendizaje cooperativo? y ¿cómo las teorías sobre la naturaleza de los contenidos matemáticos se relacionan con las opiniones del profesor para ayudar a los estudiantes a aprender ese contenido? Los autores presentan potentes aplicaciones de la teoría del aprendizaje que ilustran cómo los lectores pueden construir el aprendizaje cooperativo, actividades en armonía con sus propias creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y cómo las matemáticas son aprendidas. Al escribir este libro los autores analizan y comparan los distintos enfoques que fueron utilizados en sus diversas instituciones. Diferencias fundamentales surgieron en sus métodos de aprendizaje cooperativo. Por ejemplo, la elección del modelo del descubrimiento guiado de Davidson sobre un modelo constructivista basado en la teoría acción-proceso-objeto-schema (APOE) de Dubinsky afecta a la propia elección de actividades. Estas y otras distinciones se exploran. Se ofrece una bibliografía seleccionada con una serie de las principales referencias disponibles en el ámbito del aprendizaje cooperativo en la educación matemática. Para hacer esta bibliografía más fácil de usar, se ha organizado en dos secciones. La primera sección incluye referencias citadas en el texto y algunas fuentes para leer más. La segunda sección muestra una selección de libros de texto y materiales de los cursos que funcionan bien en una clase cooperativa para estudiantes universitarios de matemáticas.

2. Harding, A. & Engelbrecht, J. (2002). Using Japanese industry principles to model the learning of undergraduate mathematics. *Abstracts of the 2nd International conference on the teaching of mathematics* (at the undergraduate level), p. 162.

Abstract (tomado del mismo libro de resúmenes)
The ILUO-principle has its origin in Japanese industry where acquiring basic skills for performing operations are paramount. The concept is that the mastering of any basic skill follows a so-called ILUO pattern. The four letters indicate four different ratings, depending on the level to which a certain skill has been mastered.
The lowest rating is an I-rating, followed by an L-rating and then by a U-rating and finally by an O-rating, the highest of the ratings. The reason for the choice of letters is clear from the progression of the four shapes. The APOS model is a constructivistic theory of how learning mathematics might take place and was developed by Dubinsky and others as an attempt to explain Piaget's concept of reflective abstraction.
In this talk we compare the two models in the context of learning mathematics at university level.

Resumen (traducción)
El principio-ILUO tiene su origen en la industria japonesa en la adquisición de habilidades básicas para realizar operaciones de suma importancia. El concepto es que el dominio de cualquier habilidad básica sigue el llamado patrón ILUO. Las cuatro letras indican cuatro clasificaciones diferentes, en función del nivel el que una determinada competencia ha dominado.
La calificación más baja es un I-grado, seguido de un L-grado y luego por un U-grado y, finalmente, por una O-grado, la más alta de las calificaciones. La razón de la elección de las

letras se desprende de la progresión de las cuatro formas. El modelo APOE es una teoría constructivista de cómo el aprendizaje de las matemáticas toma lugar y fue desarrollada por Dubinsky y otros, como un intento de explicar el concepto de abstracción reflexiva de Piaget. En esta plática se comparan los dos modelos en el contexto del aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario.

3. Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), 221-278.

Resumen (tomado del mismo artículo)

La búsqueda de una descripción significativa de la comprensión ha durado ya medio siglo. Durante las últimas tres décadas, se han desarrollado nuevas e integradoras perspectivas alejadas de la distinción de Richard Skemp entre la comprensión instrumental y la relacional. Hasta 1987, Tom Schroeder documentó el crecimiento de estas perspectivas en su síntesis PME del trabajo sobre la comprensión a partir de los contrastes relacionales e instrumentales de Richard Skemp. Desde 1987, el trabajo sobre la comprensión ha progresado, y el presente documento examina los recientes marcos teóricos de la comprensión que han surgido a partir de estas raíces. Este documento se enfoca en dos marcos teóricos: el modelo de Pirie y Kieran sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE de Dubinsky, haciendo referencia a otro marco teórico contemporáneo como es el trabajo de Cornu y Sierpinska sobre los obstáculos cognitivos y epistemológicos; las investigaciones sobre la definición del concepto y la imagen del concepto de Vinner y Tall; las exploraciones de Kaput sobre las representaciones múltiples y las distinciones de Stard entre las concepciones operacionales y estructurales. Además se explican las definiciones de la comprensión propuestas por estos dos marcos, el análisis se dirige a sus elementos y construcciones, así como a sus vínculos con las caracterizaciones históricas y recientes de la comprensión. Este documento analiza porqué (*sic.*) los modelos de Pirie y Kieran y la teoría APOE satisfacen el criterio de Schoenfeld (2000) sobre la clasificación como una teoría y, por último, concluye con el análisis de diversas interconexiones entre estas dos teorías, así como los elementos que las distinguen de otras según sus orígenes, organizaciones, relaciones con otros marcos e implicaciones de las dos teorías tanto para evaluaciones como para prácticas pedagógicas.

4. Boester, T. (2010). Testing Conceptual Frameworks of Limit: A Classroom-Based Case Study. *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Abstract (tomado del sitio web del SIGMAA on RUME)

The purpose of this study is to test three proposed conceptual frameworks of how students come to understand informal (dynamic) and formal (static) definitions of limit: one based on embodied cognition (Lakoff & Núñez, 2001), one based on APOS theory (Cottrill et al., 1996), and one created by the researcher. Predictions are made of how students would respond, based on each conceptual framework, to instructional tasks posed in a first-semester college calculus discussion section. These predictions are then compared to the responses of eight students during a sequence of interviews spanning the course of the semester. The results support the conceptual framework proposed by the researcher, with specific responses suggesting a further refinement, explaining how students come to bridge dynamic and static conceptions of limit.

Resumen (traducción)

El propósito de este estudio es poner a prueba tres propuestas de marcos conceptuales de cómo los estudiantes llegan a entender definiciones de límite informales (dinámicas) y formales (estáticas): una basada en la cognición encarnada (Lakoff y Núñez, 2001), una en la teoría APOE (Cottrill et al., 1996), y una creada por el investigador. Las predicciones se hacen de cómo los estudiantes responderían, basadas en cada marco conceptual, a tareas

instruccionales que se plantean en una sección de discusión del primer semestre de cálculo en la universidad. Estas predicciones se comparan con las respuestas de ocho estudiantes durante una secuencia de entrevistas que abarcan el curso del semestre. Los resultados apoyan el marco conceptual propuesto por el investigador, con respuestas específicas que sugieren un mayor refinamiento, explicando cómo los estudiantes llegan a asociar concepciones dinámicas y estáticas del límite.

3.1.3.5.4 **Que usan los niveles Intra, Inter y Trans**

Las siguientes investigaciones (1 y 2) utlizan la teoría APOE y el Enfoque Ontosemiótico (EOS).

1. Badillo, E., Azcárate, C. & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-201.

Resumen (tomado del mismo artículo)

En este artículo describimos los niveles de comprensión de la relación entre f'(a) y f'(x) de cinco profesores de matemáticas que desarrollaban la asignatura de Matemáticas con alumnos de 16-18 años en diferentes centros educativos de Colombia. La teoría APOE, ampliada con aportaciones semióticas, se utiliza como marco teórico fundamental. Los cinco profesores contestaron a un cuestionario indirecto sobre la comprensión de f'(a) y f'(x) y, posteriormente, fueron entrevistados con viñetas. Los resultados muestran que la comprensión de estos dos macroobjetos, f'(a) y f'(x) puede estar relacionada con la estructura de los esquemas gráfico y algebraico de los mismos, y con los conflictos semióticos asociados.

Palabras clave. Conocimiento del profesor, derivadas, teoría APOE, representaciones semióticas.

Summary (tomado del mismo artículo)
This paper describes the level of understanding of the relation between f'(a) and f'(x) among five Mathematics teachers who were teaching classes to 16-18 year olds in different schools in Colombia. The analysis is based on the APOS framework, in this case with the addition of certain semiotic aspects. The five teachers responded to an indirect questionnaire about their understanding of f'(a) and f'(x), and were subsequently interviewed in relation to a series of vignettes. Results illustrate how the comprehension of these two macro-objects, f'(a) and f'(x), can be related to the structure of both graphic and algebraic schemes and the associated semiotic conflicts.
Keywords. Teacher's knowledge, Derivates, APOS Framework, Semiotic Representations.

2. Badillo, E. & Azcárate, C. (2011). Líneas de coherencia y redes sistémicas: Una aproximación metodológica para el análisis de la comprensión de profesores de los macro objetos f'(a) y f'(x). En M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 137-155). Lleida.

Resumen (tomado del mismo artículo)
Este trabajo se centra en la discusión de dos de las herramientas metodológicas que usamos para el análisis de la comprensión de los macro objetos f'(a) y f'(x) por parte de profesores de matemáticas en ejercicio, en el marco de la teoría APOE. Las redes sistémicas como instrumento de estructuración y organización de la información que nos proporcionaron los cuestionarios y la entrevista con viñetas, nos permitió organizar y mostrar las categorías que emergieron en las respuestas de los profesores. Por su parte, las líneas de coherencia, las consideramos un instrumento potente para visualizar elementos de los esquemas de los

profesores en relación a los niveles de comprensión que exhiben del esquema de la derivada, si tenemos en cuenta que el esquema del concepto de derivada está conformado por la coordinación de varios objetos matemáticos.

3.1.3.5.5 **Que presentan explícitamente una descomposición genética de un concepto matemático**

El siguiente trabajo utiliza la teoría APOE con una perspectica sociocultural de la práctica.

1. Gavilán, J., García, M. y Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática*, 19(2), 5-39.

Resumen (tomado del mismo artículo)
En este trabajo introducimos la idea "modelación de la descomposición genética de una noción" para explicar la práctica del profesor de matemáticas desde el punto de vista de la construcción del conocimiento matemático (aprendizaje) que parece potenciar en los estudiantes. Esta idea se usa para analizar la práctica de los profesores de matemáticas de bachillerato (16-18 años) cuando introducen el concepto de derivada. El análisis permite identificar los principios que fundamentan la práctica del profesor. Finalmente se reflexiona sobre la complementariedad de la idea de "modelación de la descomposición genética de una noción" en relación con diferentes aproximaciones generadas en educación matemática dirigidas a explicar la práctica del profesor.
Palabras clave: práctica del profesor, mecanismo de construcción, aprendizaje, modelación de la descomposición genética, derivada.

El siguiente trabajo utiliza la teoría APOE y el conocimiento del cotidiano.

2. Mora, G. y Parraguez, M. (2012). Estudio de la función lineal en estudiantes con déficit auditivo: ¿Un problema de tiempo o ritmo de aprendizaje? *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 31, 85-106.

Resumen (adaptado del mismo artículo)

Esta investigación indaga en cómo estudiantes con déficit auditivo construyen el concepto función lineal, considerando como marco teórico y metodológico la teoría APOE, con una leve variación, al tomar el conocimiento del cotidiano en una nueva construcción mental que hemos definido como de las preacciones. Para lograr tal objetivo, se propone una descomposición genética hipotética, considerando en esta no solo conceptos sino también prácticas pedagógicas cotidianas, que ayudan a construir las primeras nociones de los conceptos, que llamamos preacciones. Uno de los resultados de la investigación consiste en la documentación de la descomposición genética a través de la aplicación de instrumentos a 4 alumnos de enseñanza media con déficit auditivo.

3.2 TESIS

3.2.1 **Dirigida por un miembro del grupo RUMEC**

3.2.1.1 **Que usan exclusivamente la teoría APOE**

- **Realizadas en Cinvestav-IPN**

Las siguientes tesis son parte de la colección de tesis realizadas en Cinvestav-IPN. Todas ellas utilizan únicamente como marco teórico, la teoría APOE dentro de su investigación. En cada una se ha incluido su respectivo resumen e introducción en caso de no traer resumen. En el momento de la escritura de este trabajo su consulta se requiere hacer desde la biblioteca de Matemática Educativa pues no se encuentran en línea.

1. Aguilar, P. (1999). Entendimiento de las operaciones binarias: ¿Qué puede suceder en un cambio de contexto? Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Introducción (tomado de la misma tesis)
Es indudable que los estudiantes del nivel superior tienen dificultades para entender los conceptos abstractos del álgebra (Brown et al, 1997; Asiala et al, 1998). Una razón que contribuye a este hecho puede ser las dificultades que tienen los maestros con estos mismos temas.

Por consiguiente, nuestro motivo de este trabajo es investigar la naturaleza del entendimiento de los maestros en un concepto de álgebra abstracta: operaciones binarias y específicamente, aritmética modular. Para ello, nuestro objetivo es examinar el entendimiento y el comportamiento que muestran los maestros cuando entran en conflicto cognitivo trabajando con operaciones binarias en un contexto de aprendizaje cooperativo así como las dificultades que se pueden presentar en dicho contexto.

El trabajo se desglosa en cuatro capítulos. En el Capítulo 1, que se refiere a Antecedentes y Objetivo, primero presentaremos la problemática. En esta sección, después de describir la parte matemática que será el sostén para analizar el desempeño matemático de los maestros a los ejercicios de los instrumentos, haremos una revisión de literatura de investigación sobre entendimiento de operaciones binarias y aprendizaje cooperativo. También, damos una descripción del objetivo del trabajo presente.

En el Capítulo 2, que corresponde al Marco Teórico, explicamos la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), los obstáculos epistemológicos, el desequilibrio y el conflicto cognitivo, ya que a estos nos referimos para analizar los resultados que obtenemos.

En el Capítulo 3, el cual trata con la Aplicación de los Instrumentos y las Actividades de Criptografía, presentamos los instrumentos que se aplican a los maestros además de las actividades de criptografía. Describimos los objetivos fundamentales de los mismos.

En el Capítulo 4, que consiste en el Análisis de Datos, describiremos la manera en cómo los maestros enfrentan el conflicto cognitivo y las estrategias que usan para salir del mismo; explicaremos algunos aspectos con respecto a la dinámica de trabajo en grupos de aprendizaje cooperativo. Analizaremos además el desempeño matemático por parte de los maestros, así como las construcciones mentales que parecieron hacer en los instrumentos de ejercicios. Finalmente, en las conclusiones incluiremos una sección de sugerencias pedagógicas y preguntas para futuras investigaciones.

2. Vargas, X. (2007). El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)

En este trabajo se presentan las observaciones obtenidas de los alumnos del curso de Álgebra para ingeniería III de un Instituto Tecnológico de México D.F., en cuanto a su nivel de construcción del concepto de espacio vectorial de acuerdo a la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Esta teoría (Asiala, et al., 1996) tiene una componente pedagógica que está basada en el ciclo de enseñanza ACE (Actividades en la computadora, Discusiones en clase, Ejercicios) que se utilizó en este curso.

Tomando en cuenta una descomposición genética reportada en Trigueros y Oktaç (2005), se ha diseñado y aplicado una entrevista basada en la teoría APOE a 6 alumnos elegidos como casos representativos de la muestra. Con esta entrevista se pretende obtener información acerca de las construcciones mentales que hacen respecto al concepto de espacio vectorial después de haber estudiado este tema. Los datos obtenidos de las entrevistas son analizados utilizando el mismo marco teórico.

El concepto de espacio vectorial representa una dificultad en los alumnos; por un lado tienen que encontrarle un significado en los problemas que se les plantea, es decir, demanda en ellos una necesidad intelectual, por otro lado se enfrentan a los distintos lenguajes, modos de representación y registros semióticos usados. En esta parte el alumno se enfrenta a la necesidad de transitar de un lenguaje o forma de representación a otro.

Investigaciones anteriores (Dorier y Sierpinska, 2001; Maracci, 2005; Fisher 2005) dan cuenta de que la construcción del esquema del concepto de espacio vectorial presenta dificultades para los alumnos puesto que representa el comienzo de la formalización de los conceptos que han visto anteriormente. Con este trabajo se pretende explicar las concepciones e identificar las dificultades de los alumnos en relación al concepto de espacio vectorial.

Palabras clave: Espacio vectorial, teoría APOE, ciclo ACE.

3. Kú, D. (2007). Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde un punto de vista de la teoría APOE. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)

El aprendizaje de los conceptos en álgebra lineal en ocasiones suele ser confuso para los estudiantes debido a su carácter complejo. Los estudiantes no se apropian de los conceptos de una manera adecuada y muestran varias dificultades.

Para dar cuenta del aprendizaje en álgebra lineal, escogimos el tema de Base de un espacio vectorial, por ser una componente relevante en el estudio de los espacios vectoriales y en sus aplicaciones. Tomando a la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) (Asiala et al., 1996) como sustento teórico para la investigación, se realizó una descomposición genética en donde se presentan un conjunto de construcciones mentales que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión de este concepto.

Para dar evidencia de las construcciones mentales asociadas al concepto de Base se diseñó una entrevista que estaba basada en dicha descomposición genética.

La entrevista se llevó a cabo con 6 estudiantes de Nivel Superior, esto nos permitió observar las estructuras cognitivas que habían construido y las dificultades que surgen a raíz de su aprendizaje.

Los resultados obtenidos nos permitieron comparar las estructuras mentales que se habían desarrollado con las que se había previsto en la descomposición genética propuesta inicialmente. De acuerdo a ello se proporcionan elementos para una nueva versión de la descomposición genética la cual se apega a la forma en la que los estudiantes aprenden el concepto. Asimismo se presentan las conclusiones teóricas, las dificultades cognitivas, las conclusiones didácticas y por último las reflexiones y sugerencias pedagógicas para el aprendizaje del concepto de base de un espacio vectorial.

4. Manzanero, L. (2007). Sistemas de ecuaciones lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)
El Álgebra Lineal es un dominio matemático cuyo estudio requiere enfrentarse a conceptos tanto abstractos como concretos. Muchos investigadores se han dado a la tarea de identificar las dificultades que surgen durante su enseñanza-aprendizaje, y las razones que pueden explicar el bajo rendimiento que muestran los estudiantes.

En este trabajo de investigación nos enfocamos al concepto de conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales, para el cual pretendemos identificar las dificultades que presentan los estudiantes al estudiarlo, así como las construcciones mentales que pueden presentar, de acuerdo a la predicción que hacemos mediante una descomposición genética, sustentada por la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) (Asiala et al., 1996)

Para observar dichas construcciones mentales realizamos una entrevista con 6 estudiantes de nivel superior, donde a la luz de nuestros resultados pudimos observar ciertas dificultades para el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones, por ejemplo dificultades con la parametrización. Asimismo observamos que ningún estudiante mostró tener una concepción objeto para el concepto de conjunto solución y que pocos de ellos mostraron haber construido un proceso de solución, en particular en el caso de los sistemas con tres variables.

De acuerdo con nuestros resultados sugerimos hacer una modificación en la descomposición genética para explicar mejor cómo los estudiantes pueden construir el concepto de estudio.

También nos permitimos hacer algunas sugerencias para la enseñanza-aprendizaje del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales, así como algunas sugerencias para futuras investigaciones en la misma dirección.

5. Roa-Fuentes, S. (2008). Mecanismos y construcciones mentales asociados al concepto transformación lineal. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)
En este trabajo de investigación presentamos un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir el concepto transformación lineal. Este modelo llamado descomposición genética es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE (Dubinsky, 1991). En él describimos las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación y asimilación) mentales que determinan un camino mediante el cual un estudiante puede construir de manera adecuada dicho concepto.

Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación: análisis teórico, Diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos; determinan la estructura general de nuestro trabajo. Con base en la descomposición genética preliminar resultado de nuestro análisis teórico diseñamos y aplicamos un diagnóstico a 17 estudiantes de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). Estos estudiantes se encontraban inscritos en los programas de Licenciatura en Matemáticas y Estadística y cursaban las materias álgebra lineal II y álgebra lineal respectivamente ofrecidas por el Instituto de Matemáticas (IMA) de dicha universidad. Como resultado del análisis del diagnóstico decidimos diseñar y aplicar una entrevista a 6 de estos estudiantes con el objetivo de evidenciar de manera más concreta sus construcciones sobre el concepto. Con base en los resultados obtenidos en el desarrollo de esta componente presentamos una descomposición

genética modificada, acompañada de un análisis sobre las evidencias de las construcciones que los estudiantes mostraron haber realizado sobre el concepto transformación lineal.
Finalmente presentamos algunas sugerencias de tipo didáctico relacionadas con el tipo de problemas que pueden generar en los estudiantes un pensamiento más profundo sobre este concepto. Aunque en el planteamiento de nuestro problema consideramos no abordar la representación matricial de la transformación lineal ni su representación en el plano o en el espacio, presentamos una descripción de las construcciones que los estudiantes entrevistados relacionan con este tipo de representaciones, consideramos que esto puede ofrecer luces sobre la manera como estos pueden ser considerados en la construcción del esquema de transformación lineal. Con base en la información general que obtuvimos en este trabajo presentamos una primera versión del esquema de transformación lineal mediante una descripción de los niveles inter e intra que pudimos detectar en nuestros resultados.

6. Kú, D. (2012). Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)
En este documento se presenta un estudio acerca de la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado. Para la investigación empleamos la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) (Asiala et al., 1996).
Presentamos un modelo cognitivo (descomposición genética) que muestra un conjunto de construcciones mentales que un estudiante podría desarrollar, con el fin de comprender los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Para dar evidencia de las construcciones y mecanismos mentales que pueden estar relacionados a la comprensión de los conceptos en estudio, diseñamos un par de entrevistas basadas en la descomposición genética propuesta. Las entrevistas se realizaron con estudiantes universitarios que habían cursado álgebra lineal o geometría analítica con introducción al álgebra lineal; posteriormente se realizó un análisis de las respuestas que dieron los estudiantes.

Los resultados obtenidos nos permitieron comparar las estructuras mentales que desarrollaron los estudiantes con las que se habían previsto en la descomposición genética preliminar. De acuerdo a ello se proporcionan elementos para una nueva versión de la descomposición genética que refleja algunas estructuras mentales que se apegan a la forma en la que los estudiantes aprenden el concepto. Asimismo se presentan conclusiones teóricas, conclusiones didácticas y por último reflexiones para futuras investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de los conceptos conjunto generador y espacio generado.

7. Roa-Fuentes, S. (2012). El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en Matemáticas. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (adaptado de la misma tesis)

En esta investigación se aborda la problemática de la atención al talento matemático desde una perspectiva cognitiva, por lo que se toman tres ejes como antecedentes: la teoría APOE, la construcción del infinito como un proceso iterativo infinito y los programas que, en Colombia y México, buscan potenciar el talento matemático. Los principales resultados de esta investigación se agrupan en dos rubros: el primero relacionado con nuevos aportes a la teoría APOE y el segundo con aspectos particulares de la problemática de atención y seguimiento al talento matemático.

Respecto a los aportes teóricos, se expone una *descomposición genética genérica* del infinito: un análisis cognitivo que describe las estructuras y mecanismos mentales que un individuo debe desarrollar para construir el infinito matemático en diferentes contextos. Este análisis genérico considera las *concepciones primarias* que en contextos no escolares los individuos construyen sobre el infinito. A partir de estas concepciones se propone la necesidad de un *tratamiento instruccional*. Esto es el diseño y aplicación de un modelo de enseñanza para la construcción de procesos iterativos infinitos, a partir de la construcción del conjunto de los números naturales como un objeto. Se postula, que esto ofrecerá a los estudiantes herramientas matemáticas que les permitan abordar situaciones relacionadas con el infinito; más allá de sus concepciones primarias. Esta descomposición genérica también considera un nuevo mecanismo dentro de la teoría APOE, que se ha llamado *Completez*. Este mecanismo permite ver las características del objeto que trasciende de un proceso iterativo infinito y requiere de la construcción consciente por parte del estudiante de los elementos relacionados con la teoría de conjuntos: la relación entre un conjunto infinito y sus subconjuntos propios, los conceptos de cardinal y ordinal y, la construcción de conjuntos infinitos con diferentes cardinalidades. Se postula que este mecanismo puede permitirle a un estudiante considerar la construcción de un objeto que no se parece a los estados del proceso iterativo asociado. Con base en este análisis genérico, se proponen análisis particulares para la paradoja de las pelotas de tenis, el hotel de Hilbert y para la construcción de la curva de Koch. En estos contextos, se analiza la especificidad de los procesos iterativos inmersos y el rol de los contextos reales en la construcción de la noción de infinito. En general, el análisis teórico propuesto muestra la dificultad que representa para los individuos construir el infinito matemático, la importancia de un modelo de instrucción, el papel del contexto y la fuerte influencia de las concepciones primarias sobre el infinito.

Por otra parte, se señala la complejidad de la detección y el seguimiento al talento matemático, así como la necesidad de generar programas extracurriculares que se fundamenten en investigaciones sobre la manera como esta población construye su conocimiento matemático. Como parte del método desarrollado para trabajar con niños y jóvenes talento en matemáticas, esta investigación se ubicó en tres programas llamados de *enriquecimiento* que desde diferentes perspectivas buscan desarrollar el interés de los estudiantes por la matemática; y en una escuela regular, que se interesa en desarrollar el talento de sus estudiantes. Se plantea un contexto social de selección, que toma en cuenta la familia, la escuela y la participación de los estudiantes en programas de enriquecimiento; todo esto dentro de una sociedad que debe responder a las necesidades educativas especiales que presenta esta población. Los resultados encontrados muestran la necesidad de proponer y refinar modelos de detección del talento matemático, así como la importancia de estudiar cómo atender a esta población, que según los resultados presentados, requiere de métodos no tradicionales que le permita desarrollar su potencial. Igualmente se propone que los resultados académicos en la escuela regular, no necesariamente se asocian con el talento matemático, sino más bien, con características relacionadas con una manera divergente de pensar y razonar sobre situaciones matemáticas no convencionales.

Finalmente, en este trabajo se propone la necesidad de plantear proyectos que coordinen los rubros propuestos. Es decir, proyectos que contemplen resultados de investigación sobre cómo los individuos talentosos en matemáticas pueden construir su conocimiento matemático y de qué manera estos resultados pueden materializarse en propuestas concretas y ejecutarse mediante programas de enriquecimiento en un contexto latinoamericano.

- **Realizadas en CICATA-IPN**

La siguiente lista muestra las tesis disponibles en línea y publicadas por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA-IPN. Cada una de estas tesis fue dirigida por algún miembro de RUMEC y todas ellas usan como marco teórico a la teoría APOE. En cada una presentamos su resumen así como la liga electrónica de su ubicación.

La siguiente tesis fue recuperada desde la dirección electrónica
http://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/11672/vizcaino_2004.pdf?sequence=1

1. Vizcaíno, O. (2004). Evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN, Unidad Legaria, D.F. México.

Resumen (tomado de la misma tesis)
El aprendizaje escolar en general, y el aprendizaje de las matemáticas en particular, son desde hace varias décadas un problema bajo el estudio de investigadores. Alrededor del aprendizaje de las matemáticas han surgido varios paradigmas, los cuales, desde sus correspondientes perspectivas trabajan en la búsqueda de elementos que permitan abordar dicho problema.

Uno de estos paradigmas acerca de la ocurrencia del aprendizaje de las matemáticas es el propuesto por el grupo de investigadores RUMEC, al interior del grupo se genera una teoría acerca del aprendizaje (Teoría APOE) de las matemáticas, la cual se fundamenta en la teoría cognitiva de Jean Piaget. Así, se define el conocimiento matemático de un individuo como su tendencia a responder a los problemas matemáticos percibidos reflexionando acerca de ellos y de sus soluciones dentro de un contexto social y por medio de la construcción o reconstrucción mental de las acciones, procesos y objetos matemáticos, los cuales se organizan en esquemas para ser utilizados en la solución de problemas.
Es decir, el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder de acuerdo a las estructuras cognitivas que ha elaborado en torno a un concepto particular.
El deseo de poner en práctica dicha teoría genera un intenso trabajo para crear el diseño instruccional ACE. En la elaboración de dicho diseño instruccional la descomposición genética juega un rol fundamental permitiendo a los investigadores describir una posible ruta de acceso a la comprensión de dichos conceptos matemáticos.

Medir la eficacia del diseño instruccional para conseguir que los estudiantes se apropien de los conceptos matemáticos es uno de sus objetivos, para lo cual diseñan una metodología de evaluación que se espera describa de manera fiel la situación cognitiva de los estudiantes. Dicha evaluación difiere sustancialmente de la metodología de evaluación tradicional debido a las innovaciones propuestas. Así, la importancia de la propuesta radica en la aplicación al salón de clase de dicha propuesta educativa y por otro lado en la medición de su efectividad.

Pero al interior del grupo surge la inquietud, ¿la metodología de evaluación planteada describe realmente la situación cognitiva de los estudiantes? La pregunta anterior genera el diseño de una investigación que busca verificar la eficacia de la metodología de evaluación planteada.

Por otro lado existe la "entrevista clínica" o entrevista profunda usada para indagar con la precisión deseada los conocimientos de un individuo referentes a un tópico, de manera que el adecuado diseño, aplicación y análisis de las preguntas y respuestas permitirán hacer inferencias acerca de dicha situación cognitiva.

Sin embargo, este método no es el ideal para evaluar la situación cognitiva de los estudiantes debido a que no es un método práctico, es decir, requiere demasiado tiempo para decidir el estado de la situación cognitiva de los estudiantes.

Así la pregunta de la presente investigación es: ¿La evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ACE genera la misma evaluación que la generada a través de entrevistas personalizadas? Porque de ser así, podemos usar una metodología de evaluación práctica con la confianza de que describirá la situación cognitiva de los estudiantes.
El presente documento reporta los resultados encontrados durante tal investigación.

La siguiente tesis fue recuperada desde la dirección electrónica
http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/barbosa_2006.pdf

2. Alvarenga, K. (2006). Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN, Unidad Legaria, D.F. México.

Resumen (tomado de la misma tesis)

El propósito principal de este trabajo es presentar un conjunto de construcciones mentales o esquemas, que el estudiante puede desarrollar con el fin de comprender el concepto de inecuación. Con base en tal conjunto de construcciones mentales presento una propuesta metodológica de enseñanza para mejorar la enseñanza-aprendizaje de este concepto. Utilizo el paradigma de investigación y desarrollo pedagógico creado por el grupo RUMEC, compuesto por un ciclo con tres etapas para investigación en educación matemática. Una de las etapas de este ciclo se reduce a un análisis teórico del concepto de inecuación según el marco teórico APOE. Éste se basa en las ideas de Piaget adaptadas por Ed Dubinsky para su uso en la enseñanza universitaria. En esta etapa propongo un esquema mental inicial que servirá de referencia para la elaboración y la instrumentación de una primera metodología de enseñanza en un grupo de Cálculo. Colecto y analizo datos obtenidos de esta primera instrumentación y, con base en ello, rehago el esquema mental inicial, elaboro e instrumento una segunda metodología de enseñanza. Los resultados del análisis de los nuevos datos colectados dan origen a un esquema mental final para el concepto de inecuación. Hago también un análisis cuantitativo del aprovechamiento del estudio de inecuaciones entre un grupo de estudiantes que aprendió el contenido según la metodología presentada en este trabajo y un grupo de control, que no tuvo esta enseñanza-aprendizaje.

La siguiente tesis fue recuperada desde la dirección electrónica
http://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/11457/PROME_M_20070000_001.PDF?sequence=1

3. Salgado, H. (2007). Conteo: Una propuesta didáctica y su análisis. Tesis de Maestría. CICATA-IPN, Unidad Legaria, D.F. México.

Resumen (tomado de la misma tesis)
En el aprendizaje de las matemáticas se suelen observar problemas debido a la complejidad de los conceptos involucrados por su alto nivel de abstracción. Se han detectado problemas en el aprendizaje de los conceptos asociados al tema de conteo y en la adquisición de las técnicas de conteo. Dos conceptos básicos de conteo son el de la ordenación y el de combinación. Estos conceptos sirven para contar secuencias que cumplen ciertas características como orden y repetición. Dichas características representan una gran dificultad para los estudiantes en el proceso de adquisición de estos conceptos.
Esta tesis hace una propuesta didáctica para el aprendizaje de las ordenaciones y combinaciones apoyada en una teoría que centra su atención en las construcciones mentales necesarias para la adquisición del saber matemático. Dicha teoría se denomina APOE. En esta tesis se hace un análisis de la puesta en práctica de la propuesta didáctica con estudiantes de nivel universitario y en correspondencia con el marco teórico escogido. Se presenta dicho análisis y los resultados obtenidos, a partir del trabajo de los estudiantes con la propuesta realizada.

Se hizo una descomposición genética de los conceptos de ordenación y combinación con las construcciones mentales que los alumnos pueden desarrollar para su aprendizaje. Basados en esta descomposición se diseñaron unas secuencias con las cuales se pretende inducir a los alumnos a hacer dichas construcciones. Se hizo el análisis de los resultados obtenidos lo que permitió refinar la descomposición y diseñar nuevas secuencias. Las secuencias utilizadas ayudaron a los alumnos a efectuar las construcciones mentales que se

propusieron y llevaron a un mejor aprendizaje. Esta descomposición resuelve parte del tema de conteo (ordenación y combinación) por lo que queda otra parte del tema para una futura investigación.

La siguiente tesis fue recuperada desde la dirección electrónica
http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/parraguez_2009.pdf

4. Parraguez, M. (2009). Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial. Tesis de Doctorado, CICATA-IPN, Unidad Legaria, D.F. México.

Resumen (tomado de la misma tesis)
En esta tesis doctoral se pretende estudiar la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial en los estudiantes de álgebra lineal, cuando van integrándose al conocimiento de los estudiantes nociones tales como independencia-dependencia lineal y base. Se toma como marco teórico de la investigación a la teoría APOE (Acción – Proceso – Objeto – Esquema), porque ella brinda los elementos teóricos y analíticos, útiles y rigurosos, que permiten describir e interpretar razonamientos exhibidos por los estudiantes con relación a la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial y la introducción de conceptos fundamentales del álgebra lineal, que permiten dar cuenta de la manera en que los estudiantes universitarios entienden y son capaces de hacer evolucionar un concepto de las matemáticas en un nivel superior.

La siguiente tesis fue recuperda desde la dirección electrónica
http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/Mena_2011.pdf

5. Mena, A. (2011). Estudio epistemológico del Teorema del Isomorfismo de grupos. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN, Unidad Legaria, D.F. México.

Proemio (tomado de la misma tesis)

En el currículo universitario habitual de matemáticas hay materias que, según el parecer de alumnos, enseñantes e investigadores, presentan dificultades acusadas para el estudio. El caso del concepto de límite y variados aspectos del álgebra lineal son ejemplos que se dan con frecuencia.

Según examinaremos más adelante, hay evidencias que muestran que, por su parte, el estudio de las estructuras algebraicas representa un nivel de complejidad por encima de las restantes materias: la abstracción de los tópicos, la frecuencia mayor de las demostraciones, la propia dirección del estudio –que se propone desde un comienzo investigar propiedades comunes a objetos matemáticos variados– son argumentos que se podrían exhibir para explicar la cuestión.

Al interior del álgebra abstracta y por razones que detallaremos, los conceptos de subgrupo normal y grupo cociente representan, un obstáculo –sensu lato– de mayor relevancia. Por su parte, el concepto de isomorfismo resulta engañoso, por cuanto contigua a la cercanía de la noción ingenua de la idea de isomorfismo que se suele observar en los alumnos está el escaso buen éxito que se percibe en su desarrollo de casos específicos.

Nosotros nos proponemos estudiar el teorema del isomorfismo de grupos, que requiere de esas tres últimas nociones:

Sean G, G' grupos, $f : G \to G'$ un (homo)morfismo de grupos de núcleo $\mathcal{N}(f)$ e imagen Im(f), entonces el grupo cociente $G/\mathcal{N}(f)$ es isomorfo a Im(f):

$$G/\mathcal{N}(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$$

Nuestro estudio propondrá una descomposición genética del teorema.

Ahora bien y según explicitaremos más adelante, el teorema tiene una versión análoga en ausencia de estructura algebraica alguna, y comenzaremos por descomponer el de grupos en dos fases sucesivas –i. e., sin y con estructura–, de modo de clarificar el análisis de los aspectos cognitivos implícitos y el estudio del propio teorema por parte de los alumnos.

Dadas estas y otras características de nuestro objeto de estudio, la exposición deberá con frecuencia mantener simultáneamente presentes los aspectos tanto cognitivos como propiamente matemáticos, lo cual, a su vez, demandará de la presencia de simbología y fraseología matemática en medio de las explicaciones de carácter cognitivo.

En este capítulo damos una visión panorámica de nuestro trabajo, agregamos algunos criterios que le han orientado y hacemos, además, algunas indicaciones de carácter general.
Por razones que se indicarán más adelante, salvo en las referencias históricas, usaremos la expresión morfismo en lugar de homomorfismo. Además y como este es el teorema central de nuestro estudio, si no hay peligro de confusión, nos referiremos a él simplemente como el teorema, y ocasionalmente, también con la abreviatura TIG.
Dado que este capítulo es puramente introductorio y descriptivo, relegamos la mayoría de las citas bibliográficas pertinentes a las secciones en los cuales tratamos cada tema.

- **Realizadas en ITAM**

Las siguientes tesis de Licenciatura están dirigidas por un miembro de RUMEC. Todas ellas fueron realizadas en el Instituto Tecnológico Autónomo de México. Inlcuimos la Introducción tomada de la misma tesis.

1. Álvarez, M. (1995). Tangente y derivada: un estudio longitudinal. Tesis de Licenciatura, ITAM, México, D.F., México.

Introducción (tomada de la misma tesis)

Tradicionalmente la enseñanza de la matemática enfatiza el paso de la definición, al teorema, a la demostración, al corolario y a la aplicación, intentando hacer plausibles todos estos pasos, pero en general tomando a la matemática como producto del pensamiento y no como un proceso, una forma de pensar o una actividad humana. La manera en que se presenta esta materia es consistente lógicamente, sin embargo difícilmente permite el desarrollo del pensamiento matemático propio del estudiante.

El énfasis fundamental en los conceptos es el resultado de una enseñanza centrada en los productos y no en los procesos mediante los cuales éstos se obtvieron, es decir, se enseñan primero los conceptos y después los problemas que éstos pueden resolver. Los conocimientos y los métodos quedan así descontextualizados perdiéndose parte de su valor formativo.

La búsqueda de nuevas formas de enseñar las matemáticas, en las que se rescaten los procesos y se de nueva vida a los métodos y a los problemas, ha sido motivo de investigación y de experimentación en los últimos diez años. La pregunta: ¿Cuál es la mejor manera de enseñar la matemática? Requiere en su respuesta de recurrir al campo de investigación sobre la enseñanza de la matemática o matemática educativa que es un área del conocimiento relativamente nueva. Esta disciplina conjuga la Matemática, la Pedagogía y la Psicología. Es una ciencia joven y por ello hay muchas formas de abordar la investigación, sin embargo, las metodologías que en ella se utilizan son rigurosas y sujetas a los controles implicados en cualquier investigación seria.

Uno de los principales problemas de la investigación cognitiva, es decir, acerca de la adquisición de conocimiento, consiste en que los fenómenos mentales no son susceptibles de observación. Es posible observar únicamente las consecuencias externizables de estos fenómenos y de ellas se pretenden derivar las representaciones y los procesos mediante los cuales éstos ocurren.

A través de los años se ha demostrado que el alumno, al prender un nuevo concepto muchas veces presenta dificultades similares a las que se enfrentaron cuando éste fue originalmente desarrollado. Es por eso que en la investigación cognitiva se recurre también al estudio del desarrollo histórico de la matemática analizando la genésis (*sic.*) y la evolución del conocimiento a lo largo de la historia como una herramienta de apoyo.

El conocimiento matemático es muy basto. Las distintas ramas o disciplinas que lo componen se han ido diversificando a medida que la investigación avanza. Si bien todas estas áreas comparten la metodología propia del quehacer matemático, su enseñanza requiere de habilidades y formas de abordar los problemas diferentes.

Una de las ramas del conocimiento matemático en la que los estudiantes encuentran muchas dificultades es el Cálculo Diferencial e Integral. Su aprendizaje está basado en el dominio de conceptos muy abstractos y de difícil definición. Por ello, la investigación acerca de la enseñanza del cálculo ha cobrado mucha importancia en los últimos años.

En este trabajo pretendemos acercarnos a las dificultades de los estudiantes con un concepto fundamental: el de la tangente a una curva y su relación con la derivada.

Las ideas de tangente y derivada son centrales en la formación matemática de muchos profesionistas, como por ejemplo: ingenieros, matemáticos y economistas. Además, las aplicaciones de la derivada surgen frecuentemente en problemas de áreas muy diversas.

Los matemáticos griegos ya utilizaban la idea de tangente a una curva; la pensaban como la recta que “toca” a la curva en un solo punto. Esta definición, que es válida para cónicas (excepto, por supuesto, para la recta) no se puede generalizar a otras curvas. Pasaron varios siglos antes de que el concepto de tangente a una curva se definiera formalmente por Newton y Leibnitz en la forma en que hoy la conocemos y se ha encontrado actualmente, que, a pesar de que en la enseñanza se introduce esta nueva manera de definir el concepto, muchos estudiantes definen la tangente del modo en que lo hacían los griegos, enfrentándose a lo que fuera una dificultad histórica en el desarrollo de este concepto.

Además de esta dificultad se han encontrado muchas otras relativas a los conceptos de tangente y derivada. Su detección es importante si se desea diseñar formas más adecuadas de enseñar estos conceptos.

Para poder mejorar la enseñanza de cualquier concepto matemático es necesario, en primer lugar, diagnosticar las dificultades de los alumnos para a partir de ellas diseñar métodos adecuados de instrucción. Por esta razón, el diagnóstico del conocimiento de los estudiantes en un momento determinado permite colocarse en un punto de partida adecuado.

El objetivo de esta tesis consiste en investigar la forma en que el conocimiento de los estudiantes acerca de los conceptos de tangente y derivada evoluciona a través de las distintas etapas de la instrucción. Para ello se decidió hacer un estudio longitudinal y comparativo utilizando un cuestionario dirigido a estudiantes de diferentes carreras del ITAM. Las carreras en las que se centrará el estudio son: Actuaría, Administración, Contaduría Pública, Economía, Ingeniería en Computación y Matemáticas Aplicadas.

El cuestionario utilizado se diseñó con base a lo que los pofesores (*sic.*) que enseñan esta materia consideran lo mínimo que los estudiantes deberían saber al finalizar su formación profesional y se aplicó a alumnos de las carreras antes mencionadas que cursan diversos semestres.

En el Capítulo 1 del trabajo se presenta el marco teórico que sirve de marco a desarrollo de todo el trabajo. El segundo Capítulo presenta detalladamente la metodología utilizada. En este capítulo se justifican además, tanto el uso del cuestionario como el diseño de éste. En el Capítulo 3 se realiza el análisis de las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios. Finalmente el último capítulo muestra las conclusiones resultantes del análisis.

2. Carmona, G. (1996). El concepto de tangente y su relación con derivada. Tesis de Licenciatura, ITAM, México, D.F., México.

Introducción (tomada de la misma tesis)

Pese a la infinita riqueza que guarda la palabra Matemáticas, al ser mencionada ante la mayoría de los estudiantes provoca rechazo y hasta disgusto. Esta negativa no se debe precisamente a la palabra, sino a la asociación que se hace con su enseñanza. Las Matemáticas, a nivel escolar, son rechazadas por muchos alumnos principalmente porque se consideran una materia difícil de comprender. La comprensión de un contenido nace de la enseñanza y del aprendizaje. Estos procesos se funden en el proceso de la comunicación de las ideas y de la investigación.

Es un interrogante que a pesar del empeño y dedicación de tantos profesores a la enseñanza, los alumnos sigan cometiendo los mismos errores, y que esto suceda a nivel mundial. ¿No estará la solución en los métodos de enseñanza?

Para responder esta pregunta, ha sido necesaria una fuerte investigación y análisis acerca de la enseñanza y el aprendizaje, que ha involucrado no sólo a la Pedagogía y a la Psicología, sino también a la Matemática misma. A la disciplina que conjuga estas situaciones se le ha denominado Matemática Educativa.

La Matemática Educativa, o bien, Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática, es una ciencia joven en la que se conjuntan la forma en que los estudiantes aprenden, así como su estructura, la evolución histórica de los conceptos y de las teorías matemáticas para ubicarlas en un contexto adecuado. En la investigación se conjuntan estos elementos utilizando el método científico para poder obtener conclusiones realistas y aplicables.

La Matemática Educativa abarca toda la gama de etapas cronológicas referidas al aprendizaje de los conceptos matemáticos, desde que un niño inicia con la idea de número en preescolar, hasta las etapas de aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados a nivel de posgrado. Para fines de esta tesis, nos referiremos a las dificultades generadas en el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral, más específicamente, sobre el concepto de tangente y su relación con el concepto de derivada.

El objetivo de este trabajo consiste en averiguar cuáles son las concepciones que estudiantes que han terminado de cursar las materias básicas de cálculo Diferencial e Integral dentro de las acrreras de Matemáticas Alicadas y Actuaría, qué tan claro tienen el concepto de tangente, y cómo relacionan este concepto con el de derivada.

Para ello, diseñamos nuestra investigación sustentada en un marco teórico constructivista elaborado específicamente para la investigación sobre la Enseñanza de las matemáticas. Este marco se describe en el Capítulo Uno. También incluimos en éste algunos antecedentes de investigaciones que se han realizado acerca de los conceptos de tangente y de derivada, que se utilizaron para determinar los lineamientos de esta investigación.

En el Capítulo Dos, describimos la metodología seguida. En ella revisamos un cuestionario que ya había sido aplicado anteriormente en uno de los estudios referidos en el Capítulo uno, y se hace un Análisis en Componentes Principales del mismo, integrando los resultados obtenidos en una aplicación anterior. El resultado del análisis muestra mucha consistencia entre las preguntas; razón por la cual decidimos seguir utilizándolo para los propósitos de esta nueva investigación. Se aplicó a un nuevo grupo con el fin de seleccionar a algunos estudiantes, y realizarles unas entrevistas clínicas. Finalmente, explicamos el diseño de las entrevistas y el proceso de selección de los alumnos.

El Capítulo Tres presenta un análisis teórico basado en el marco teórico constructivista para investigación matemática, descrito en el Capítulo Uno. Posteriormente, hacemos un análisis de las respuestas a aquellas reguntas del cuestionario relacionadas con el concepto de tangente, para dos grupos de estudiantes. Uno de los grupos de la investigación realizada anteriormente, y el nuevo grupo que elegimos para este trabajo. Mencionamos además cuáles fueron los alumnos que seleccionamos para realizar las entrevistas.

En el Capítulo Cuatro, realizamo un análisis sobre las respuestas que dieron los alumnos en las entrevistas en cuanto al concepto de tangente.

Finalmente, en el Capítulo Cinco, hacemos un análisis de las preguntas del cuestionario que relacionan explícitamente los concetos de tangente y derivada para los mismos dos grupos, y de las respuestas que los alumnos entrevistados dieron en cuanto a la relación entre estos conceptos.

En la parte de las conclusiones hacemos un breve resumen de los resultados interesantes obtenidos, planteamos algunas nuevas preguntas de investigación y señalamos la importancia de estos resultados en el diseño de la instrucción de este concepto.

3. Brust, M. (1997). Solución de Ecuaciones de segundo Grado: Un análisis comparativo. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, D.F., México.

Introducción (tomada de la misma tesis)

“Enseñamos la resolución de ecuaciones todo el tiempo, pero ¿qué están aprendiendo los estudiantes?” (Herscovics y Kieran, 1980).

El estudio del manejo de ecuaciones en alumnos de secundaria y preparatoria es de importancia, ya que se ha visto que muchos pueden resolverlas, pero no saben qué están haciendo. Los estudiantes se aprenden un método de resolución de memoria como si fuera una receta y no diferencían entre las diferentes formas en las que la variable suele aparecer. El utilizar la memoria es aún más fercuente cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de ecuaciones de segundo grado. Cuando el maestro introduce la fórmula general para la resolución de dichas ecuaciones, el alumno simplemente las aplica, aunque no sin dificultades.

Se han hecho numerosos estudios sobre la comprensión de ecuaciones de primer grado en estudiantes de 12 a 15 años, pero poco se ha estudiado la forma en la que manejan ecuaciones de segundo grado y en la que entienden los conceptos matemáticos involucrados en ellas. Al no encontrar literatura sobre estudios del nivel de comprensión de ecuaciones de segundo grado en alumnos de secundaria y preparatoria y encontrar frecuentemente alumnos que tienen problemas al resolverlas se decidió hacer este estudio. El entender y resaltar las dificultades de los alumnos al resolver las ecuaciones de segundo grado permitirá a los profesores dar el enfoque necesario a la enseñanza de dichas ecuaciones para hacerlas más comprensibles para los alumnos.

Es en este contexto en el que se sitúa el presente trabajo. El objetivo de esta investigación es indagar el nivel de comprensión de ecuaciones de segundo grado en alumnos de secundaria y preparatoria, comparar el desempeño de los estudiantes por escuela y género y sobre todo identificar los problemas más importantes que los estudiantes enfrentan al resolver problemas de ecuaciones de segundo grado.
Tomando como punto de partida los trabajos realizados en cuanto al manejo de las ecuaciones de primer grado, este trabajo se extenderá al análisis de la forma en que los estudiantes trabajan con ecuaciones de segundo grado. Estos antecedentes se presentan en el capítulo uno.

Con el fin de llevar a buen término este análisis se hizo un estudio riguroso de las teorías existentes acerca de la didáctica del álgebra y de la matemática necesarias para la mejor comprensión del problema. Este estudio se presenta en el segundo capítulo, explicando con detalle la teoría matemática de ecuaciones de segundo grado y los antecedentes de la entrevista y el cuestionario como instrumentos de medición. Así como los niveles de desarrollo del concepto de ecuación de acuerdo al marco teórico propuesto.

En el capítulo tres se presentan los instrumentos que se usaron para explorar la concepción del concepto de variable en el manejo de ecuaciones, sus características y su diseño, así como los objetivos de medición, una tabla de especificaciones y los cuestionarios finales aplicados.

Una vez diseñado el instrumento se aplicó y se analizó en forma cuantitativa mediante la Teoría Clásica de los Tests; además se corrió una regresión logística con los datos para analizar los resultados. Por otra parte se analizaron las respuestas de los alumnos en forma cuantitativa por ítem y por alumno; este análisis se presenta en el capítulo cuatro.
En el capítulo cinco se presentan las conclusiones del análisis de resultados y algunas sugerencias surgidas de esta investigación en cuanto a nuevos problemas de investigación y en cuanto a la práctica docente.

4. Cortés, M. (2004). Integración de conceptos en la solución de problemas de cálculo diferencial. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, D.F., México.

Introducción
En todo el mundo existe actualmente un rechazo de parte de los estudiantes hacia las matemáticas. Se ha comprobado una y otra vez, en distintos lugares y momentos, que a pesar de la riqueza de las matemáticas, la gran mayoría de los estudiantes tienen una actitud negativa hacia ellas. En parte esto se debe a que no comprenden los conceptos enseñados y no saben utilizarlos en situaciones que difieren de las trabajadas en clase, esto hace que cada vez que se les presente un problema matemático de cierta dificultad se sientan en un callejón sin salida. El logro de mejores resultados en la enseñanza de las matemáticas depende, en gran medida, de la posibilidad de comprender mejor la forma en que las matemáticas se aprenden y se enseñan. Esta problemática ha sido objeto de gran interés y preocupación y ha generado una enorme cantidad de estudios e investigaciones. De este

modo surge la matemática educativa, ciencia que investiga la enseñanza de las matemáticas conjuntando aspectos psicológicos, pedagógicos, filosóficos y evidentemente matemáticos.

Los diversos estudios llevados a cabo dentro de esta disciplina consideran el aprendizaje matemático como un proceso y no como un objeto del pensamiento. Al ser una rama de investigación relativamente nueva quedan aún muchos campos por estudiar, y muchos problemas por solucionar.

Uno de los campos de estudio donde se presentan mayores problemas de comprensión por parte de los estudiantes es el cálculo diferencial. La experiencia muestra que en muchas ocasiones, los estudiantes no comprenden las propiedades de una función dada, no saben manejarlas a lo largo de los distintos intervalos de su dominio, o tienen dificultades para reconocerlas gráficamente. Esta tesis se ocupa de los problemas que presentan los estudiantes para integrar la información al encontrarse ante un problema de cálculo.
En el capítulo 1 se plantea el objetivo del trabajo de una manera más detallada, además de contextualizar el problema mencionando algunos antecedentes de estudios similares. Se encuadra la investigación en un marco teórico descrito en el capítulo 2, este marco se considera una herramienta muy útil como sustento en el análisis de la información proporcionada por los estudiantes para llegar de la manera más eficiente a conclusiones enriquecedoras.

En el capítulo 3, se detalla la metodología utilizada en este estudio. Se describe el instrumento de análisis diseñado para este trabajo y su aplicación. Más adelante se describen los tipos de análisis utilizados para estudiar no sólo a los estudiantes, sino al mismo instrumento de análisis para confirmar su validez.

En el capítulo 4 se presentan con todo detalle los resultados de los cuatro análisis realizados a lo largo de la tesis.

En las conclusiones se tratan tres aspectos principalmente, primero se habla de la eficiencia de los instrumentos utilizados como herramienta de análisis, en segundo lugar se concluye sobre la situación de los estudiantes determinada con base en el marco teórico y el análisis de resultados y, por último, se hacen propuestas sobre algunos conceptos que se deben enfatizar en la enseñanza del cálculo y se proponen también nuevos objetos de estudio que éste deja abiertos.

5. Lage, A. (2004). Análisis del aprendizaje sobre transformaciones de funciones. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, D.F., México.

Introducción

El mundo de las Matemáticas resalta un mundo fascinante, de grandes posibilidades tanto para su estudio como para su aplicación a problemas de la vida cotidiana. Sin embargo, su comprensión no resulta sencilla. Es por esto que los alumnos, en general, se muestran renuentes a su estudio. A partir de esta problemática, surge la necesidad de entender cómo es que se construye el conocimiento matemático, para buscar alternativas en la enseñanza que faciliten al alumno la comprensión y, a partir de ésta, logre profundizar y aplicar lo aprendido en la solución de problemas cada vez más complejos. A grandes rasgos, es el fin de la investigación en la enseñanza de las Matemáticas o Matemática Educativa.

Este objetivo resulta muy interesante, pero a la vez complejo, ya que por un lado nos enfrentamos a lo vastos que son los conceptos en Matemáticas, y por el otro, con lo difícil que puede resultar el aprendizaje de los mismos. De aquí que el campo de estudio resulte tan extenso, ya que en éste se conjunta la forma en que los estudiantes aprenden, la estructura de los diferentes conceptos que se involucran en dicho aprendizaje, la evolución histórica de los mismos y las teorías matemáticas involucradas; así como las distintas etapas del aprendizaje, ya que el alumno se enfrenta a las Matemáticas desde edades muy tempranas hasta los niveles académicos más avanzados. Debido a lo extenso y a la complejidad de este universo de estudio, es que se tienen tantas y tan diversas corrientes de investigación.

Para la presente investigación nos situaremos en uno de los temas de mayor importancia en los cursos introductorios de matemáticas a nivel universitario. Este tema se refiere al concepto de transformaciones de funciones. Cuando un alumno llega a la universidad, en principioya ha aprendido conceptos como el de variable, función y gráfica de funión y en algunos casos, el de transformaciones de funciones. Sin embargo, en caso de que no fuera así, los cursos de introducción está orientados a reforzar el conocimiento de los alumnos en estos temas, pero ¿por qué son tan importantes estos conceptos?, ¿realmente logran estos cursos ese objetivo?

Para responder a la primera pregunta podemos decir que las transformaciones de funciones son las operaciones que se realizan sobre una función "original" o "básica", tales como desplazamientos verticales, horizontales, ampliaciones y contracciones, tanto verticales como horizontales y reflexiones con respecto a los ejes. Éstas resultan herramientas básicas en la comprensión de conceptos más avanzados a los que se enfrentan los alumnos en cursos posteriores. Ejemplos de estos nuevos conceptos, van desde límites de funciones y continuidad, hasta derivadas, integrales, funciones de probabilidad, entre otros.

En cuanto a la segunda pregunta, sobre si los cursos de introducción cumplen con este objetivo, los maestros esperan que sea así, sin embargo existe un alto porcentaje de alumnos que reprueban no sólo los cursos de introducción, sino los cursos posteriores. Además los maestros de estos cursos se quejan a menudo de la falta de comprensión de los alumnos. Es por esto que nos interesa averiguar si los alumnos entienden estos conceptos y cuáles son los principales problemas que enfrentan en el aprendizaje de los mismos.

El objetivo de este estudio es, entonces, el de investigar cuáles son los problemas que enfrentan los alumnos para entender el concepto de transformaciones de funciones y, a partir de la identificación de los mismos, elaborar sugerencias para la enseñanza de este concepto.

Para cumplir con el objetivo planteado, este trabajo se distribuye de la siguiente forma:

- CAPÍTULO I ANTECEDENTES TEÓRICOS.- En esta sección se expondrá la teoría en Matemática Educativa que se utilizará para el análisis del concepto de transformaciones de funciones.
- CAPÍTULO II METODOLOGÍA.- En este capítulo se explicarán los pasos a seguir en la investigación, así como la descripción de los instrumentos de análisis.
- CAPÍTULO III ANÁLISIS DE RESULTADOS.-Este capítulo se divide en tres secciones: en la primera sección, se llevará a cabo un análisis exploratorio de los resultados obtenidos a partir de la aplicación de un cuestionario escrito. La segunda sección es un complemento de la sección anterior, en la que se busca caracterizar niveles de aprendizaje mediante el contraste entre el marco teórico y el desarrollo de las explicaciones que proporcionaron los alumnos en las entrevistas. Por último, en la tercera sección, se utilizará una técnica estadística denominada Análisis de Discriminante para evaluar la calidad de clasificación del cuestionario escrito.
- CAPÍTULO IV CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES A LA INSTRUCCIÓN.- En esta última sección, se presentarán las conclusiones del estudio realizado, así como las sugerencias para la enseñanza del concepto.

- **Realizadas en otras instituciones**

1. Cottrill, J. (1999). Students’ understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions. Tesis de Doctorado, Purdue University.

Abstract (tomado de la misma tesis)

The present study is a follow-up to a study conducted by this author with seven others. That study (Clark et al., 1997) proposed the use of Piaget and Garcia's triad mechanism to describe the development of a schema, specifically with respect to students' understanding of the chain rule. This study was designed to collect data to test this theory. Both quantitative and qualitative methods were employed. Data were collected via a questionnaire on a group of calculus students' (n = 34) knowledge of and skill with function, composition of functions, differentiation and chain rule. The data were analyzed to investigate how their performance on the composition of functions items related to that of the chain rule. No strong correlation is reported. Some of the subjects had experienced a reform calculus course which used computer experiences and cooperative learning. A comparison was made between the two groups, although no overall differences are reported. Follow-up interviews based on the questionnaire responses were conducted with six subjects. These results are positive in the sense that the triad description fits with the data. We present detailed descriptions of the Intra-, Inter-, and Trans- levels of the development of the chain rule schema. Some evidence is presented to support the notion that understanding of composition of functions is key to understanding the chain rule. The type of instruction was a factor in how a student performed on these tasks. The differences between the types seem to be related to the difference between using the chain rule and understanding the chain rule, and an explanation of these differences is offered. The need for collecting differing types of data is established. Two students scored high quantitatively but did not perform well in the interview, while another student failed the quantitative work but demonstrated a high level in the interview. Finally, the use of writing as a pedagogical tool is recommended based on the results.

Resumen (traducción)

El presente estudio es un seguimiento de un estudio realizado por este autor con otras siete personas. Ese estudio (Clark et al., 1997) propuso el uso de los mecanismos de la triada de Piaget y García para describir el desarrollo de un esquema, específicamente con respecto a

la comprensión de los estudiantes de la regla de la cadena. Este estudio fue diseñado para recopilar datos para poner a prueba esta teoría. Se emplearon métodos cuantitativos y cualitativos. Los datos fueron recolectados a través de un cuestionario sobre el conocimiento y habilidad de un grupo de estudiantes (n = 34) en cálculo, función, composición de funciones, la diferenciación y la regla de la cadena. Los datos se analizaron para investigar cómo su rendimiento en la composición de funciones se relacionó con el de la regla de la cadena. Se reportó que no hay correlación fuerte. Algunos de los sujetos tenían experiencia con un curso de reforma del cálculo que utilizó experiencias computacionales y el aprendizaje cooperativo. Se hizo una comparación entre los dos grupos, aunque no hubo diferencias generales reportadas. Se llevaron a cabo con seis sujetos, entrevistas de seguimiento basadas en las respuestas al cuestionario. Los resultados son positivos en el sentido de que la descripción de la triada encaja con los datos. Presentamos una descripción detallada de los niveles Intra, Inter y Trans del desarrollo del esquema de la regla de la cadena. Algunas evidencias son presentadas para apoyar la idea de que la comprensión de la composición de funciones es clave para entender la regla de la cadena. El tipo de enseñanza era un factor en la forma en que un estudiante realiza estas tareas. Las diferencias entre los tipos parecen estar relacionadas con la diferencia entre el uso de la regla de cadena y la comprensión de la regla de cadena. Una explicación de las diferencias, se ofrece. La necesidad de recoger distintos tipos de datos se ha establecido. Dos estudiantes obtuvieron altos resultados cuantitativamente pero no un buen desempeño en la entrevista, mientras que otro estudiante reprobó el trabajo cuantitativo, pero demostró un alto nivel en la entrevista. Finalmente, se recomienda el uso de la escritura como una herramienta pedagógica, de acuerdo con los resultados.

2. Çetin, İ. (2009). Students' understanding of limit concept: An APOS perspective. Tesis de Doctorado, Middle East Technical University, Turquía.

Introduction (adaptado de la misma tesis)

The main purposes of this study are to investigate first year calculus students' understanding of formal limit concept and change in their understanding after limit instruction designed by the researcher based on APOS theory. The case study method was utilized to explore the research questions. The participants of the study were 25 students attending a first year calculus course in Middle East Technical University in Turkey. All students were first year mathematics majors. Students attended five weeks instruction in the fall semester of 2007-2008. Each week they met for two hours in the computer laboratory to study in groups, and then they attended four hours of classes. In computer labs they were given some programming activities which provided students with the opportunity to think about the limit concept before the formal lecturing in classes. A questionnaire on limits that included open-ended questions was administered to students as a pretest and posttest to probe change in students' understanding of the limit concept. At the end of the instruction a semi-structured interview protocol developed by the researcher was administered to all of the students to explore students' understanding of limit concept in depth. The students' responses in the questionnaire were analyzed both qualitatively and quantitatively. The interview results were analyzed by using the APOS framework. The results of the study showed that the preliminary genetic decomposition was found to be compatible with student data. Moreover, instruction on limits was found to play a positive role in facilitating students' understanding of the limit concept.

Keywords: Computer programming in calculus, Constructionism, Cooperative Learning, Limit concept, APOS theory.

Introducción (traducción)

Los principales objetivos de este estudio son investigar la comprensión de los estudiantes de cálculo de primer año de la universidad, del concepto formal de límite, así como el cambio en su comprensión después de la enseñanza de límite diseñada por el investigador y basada en la teoría APOE. El método de estudio de caso fue utilizado para explorar las preguntas de investigación. Los participantes del estudio fueron 25 estudiantes que asisten al primer año del curso de cálculo en la Universidad Técnica de Medio Oriente en Turquía.

Todos los estudiantes estaban en su primer año de la carrera de matemáticas. Los estudiantes asistieron a cinco semanas de instrucción en el semestre de otoño de 2007-2008. En cada semana se reunieron dos horas en laboratorios de informática para estudiar en grupos, y luego asistieron a clases cuatro horas. En los laboratorios de computación se les dieron algunas actividades de programación que ofrecen a los estudiantes la oportunidad de pensar en el concepto de límite antes de que se les diera un concepto formal en las clases. El cuestionario sobre límite incluyó preguntas abiertas que fueron aplicadas a los alumnos como una pre-prueba y post-prueba para probar el cambio en la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de límite. Al final de la instrucción se desarrolló un protocolo de entrevista semi estructurada por el investigador, que fue aplicada a todos los estudiantes para explorar su comprensión del concepto de límite en profundidad. Las respuestas de los estudiantes en el cuestionario se analizaron cualitativa y cuantitativamente. Los resultados de las entrevistas fueron analizados mediante el uso de marco teórico APOE. Los resultados del estudio muestran que la descomposición genética ofrecida se encontró compatible con los datos de los estudiantes. Por otra parte, se encontró que la enseñanza del límite juega un papel positivo en facilitar la comprensión de los estudiantes del concepto de límite.
Palabras clave: Programación de computadoras en cálculo, el construccionismo, aprendizaje cooperativo, el concepto de límite, la teoría APOE.

3.2.1.2 **Que usan la teoría APOE conjuntamente con algún otro marco**

- **Realizadas en CINVESTAV-IPN**

Las siguientes tesis (1-3) utilizan como marco teórico a la Socioepistemología pero toman elementos de la teoría APOE como complemento a su investigación.

1. Miranda, E. (2000). El entendimiento de la transformada de Laplace: caso de una descomposición genética. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)

En el sistema escolar a nivel Ingeniería, particularmente en los cursos de ecuaciones diferenciales, aparece una integral impropia denominada Transformada de Laplace (TL). A diferencia de temas como la derivada o la integral en donde los textos o los profesores tratan de que el estudiante construya y atribuya significados de esos conceptos a partir de conocimientos anteriores, la TL aparece en el aula de manera artificiosa como una herramienta cuyas propiedades formales son útiles para resolver ciertos problemas y en ningún momento de la enseñanza, la TL es construida o motivada por algún medio físico o geométrico o a partir de un concepto previamente conocido o estudiado

En este trabajo se pretende responder a dos preguntas:

En la primer pregunta se trata de saber ¿Cuáles fueron las ideas y problemas que dieron origen y significado a la TL tal y como la conocemos en la actualidad?

Para la segunda pregunta se pretende responder a ¿cómo sería una descomposición genética inicial para la TL, generada a partir de algunas ideas que dieron origen y significado a la TL?

Una descomposición genética está definida como un modelo de cognición en donde se describen las posibles construcciones mentales que una persona realiza para entender un concepto, además se incluyen las observaciones, a partir de una entrevista con los estudiantes, de sus habilidades y estructuras cognitivas previas. (Asiala et al 1997).

Así mismo, las construcciones mentales que un individuo realiza para entender un concepto, son descritas en el marco epistemológico APOE, en donde se trata de explicar el entendimiento de un estudiante a través de esas construcciones mentales.

Para este marco, la descomposición genética inicial está constituida por el diseño de un análisis teórico inicial del concepto matemático en estudio, en donde se proponen las construcciones mentales específicas (que pueden incluir acciones, procesos, objetos y esquemas) que un estudiante realiza para aprender ese concepto.

En este trabajo, el análisis teórico inicial del concepto estará constituido por la epistemología del concepto basada en el análisis histórico – epistemológico del concepto así como de la exploración preliminar del cómo es conceptualizada la TL tanto por profesores o alumnos que usan la TL como en textos que se usan en el sistema escolar actual.

El análisis histórico – epistemológico sirvió de base para diseñar un conjunto de situaciones de exploración basados en los promedios y valores esperados como ejes para construir la integral de Laplace $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, y los datos generados por estas situaciones evidenciaron la posibilidad de describir las construcciones mentales desarrolladas por los participantes en términos de los mecanismos de desarrollo de conocimientos intra, inter y trans, es decir de un esquema, ademas (*sic.*) de que se reflejó la posibilidad de que una persona pueda construir esa integral o uno de sus antecedentes históricos $\int f(t)e^{st}dt$, $\int_a^b f(t)x^t dt$, $\int_a^b f(t)e^{-st}dt$ y $\int_a^b f(t)e^{st}dt$.

Estos datos junto con la epistemología del concepto nos llevaron finalmente a la descripción de una posible descomposición genética inicial para la TL.

2. Domínguez, I. (2003). La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)

Este trabajo de investigación tiene que ver con dos grandes aspectos, por un lado la responsabilidad de la matemática educativa ante los fenómenos didácticos y por el otro la visión teórica para tratar a éstos.

Se partió de una problemática específica sobre las funciones asintóticas que se imparten en el nivel de Educación Superior de nuestro Sistema Educativo, la cual consistió en formular la ausencia, en la matemática escolar, de marcos de referencia que permitieran resignificar lo asintótico. Así, se contribuyó en formular dicho marco, el cual fue cristalizado en el diseño de la situación de lo asintótico.

El diseño se sustentó con la aproximación socioepistemológica, la cual asume que cuando se trata de fenómenos didácticos de la matemática la construcción de ésta es eminentemente social. Esto significa que el conocimiento se resignifica al paso de la vivencia institucional, donde la actividad humana o las prácticas sociales son los generadores de tal conocimiento. En este marco la socioepistemología de lo asintótico puso en juego dos momentos para lograr las resignificaciones: a) la asíntota cuando alude a la forma de la tendencia y b) la asíntota cuando alude a la razón de la tendencia.

La hipótesis de investigación fue formulada en términos de que las gráficas son argumentaciones que permiten construir significados.

Para vigilar dicha hipótesis de investigación se acudió a un aspecto metodológico el cual consistió en tener un camino (lo más explícito posible) que garantice que el diseño de la situación refleje la hipótesis en cuestión. El concepto descomposición genética de la teoría APOE ayudó a tal fin. Sin embargo la aproximación socioepistemológica obligó ampliar dicho concepto puesto que las construcciones mentales necesariamente fueron tratadas en el marco de las resignificaciones que se generan en la actividad humana.

La investigación finalmente ofreció datos importantes para la construcción del marco de referencia. Estos fueron sobre el papel de los diferentes contextos funcionales que entraron en juego a saber: curva, ecuación y función; sobre el argumento comportamiento tendencial de las funciones que enfoca la atención en las formas de dar lecturas a la gráficas de la situación específica en función de la práctica institucional; y sobre los esquemas que para futuros rediseños de situaciones conviene incorporar aspectos de uso de las gráficas, función y forma de las gráficas y alternancia de los diferentes contextos.

3. Rosado, M. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)

Se consideró una problemática específica sobre el concepto de derivada en Educación Superior de nuestro Sistema Educativo, la cual consistió en formular la ausencia, en la matemática escolar, de marcos de referencia que permitieran resignificar la derivada. Así, se contribuyó en formular dicho marco, el cual fue cristalizado en el diseño de la situación de la linealidad del polinomio.

El diseño se justificó con la aproximación socioepistemológica, la cual asume que cuando se trata de fenómenos didácticos de la matemática la construcción de ésta es eminentemente social. Esto significa que el conocimiento se resignifica al paso de la vivencia institucional, donde la actividad humana o las prácticas sociales son los generadores de tal conocimiento. En este marco la socioepistemología de la linealidad del polinomio puso en juego tres momentos para lograr las resignificaciones: a) Traslación de la gráfica; b) Tendencia de la gráfica y c) Argumentación gráfica.

La hipótesis de investigación fue formulada en términos de que las gráficas son argumentaciones que permiten construir significados.

Para vigilar dicha hipótesis de investigación se acudió a un aspecto metodológico el cual consistió en tener un camino (lo más claro posible) que garantice que el diseño de la situación refleje la hipótesis en cuestión. El concepto descomposición genética de la teoría APOE ayudó a tal fin. Sin embargo la aproximación socioepistemológica obligó ampliar dicho concepto puesto que las construcciones mentales necesariamente fueron tratadas en el marco de las resignificaciones que se generan en la actividad humana.

La investigación finalmente ofreció datos importantes para la construcción del marco de referencia. Estos fueron sobre la función y forma del conocimiento matemático; sobre el uso y la modelación de lo gráfico; y sobre las epistemologías de prácticas que generan esquemas para el rediseño de situaciones didácticas.

La siguiente tesis usa la teoría APOE con el enfoque de Modelos y Modelación.

4. Velasco, K. (2012). Modelación de situaciones reales con ecuaciones de primer grado desde la perspectiva APOE: un estudio a nivel bachillerato. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Resumen (tomado de la misma tesis)

En este trabajo de investigación comenzamos presentando un análisis teórico de las diferentes visiones que existen en la actualidad en torno a la modelación matemática de situaciones reales. También exponemos un análisis teórico sobre el concepto ecuación lineal empleando el marco teórico APOE; dicho análisis consiste en la descripción de una descomposición genética del concepto ecuación lineal diseñada como un esquema en el que se describen las relaciones entre las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y otros esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación y asimilación) que determinan un posible camino que puede construir un estudiante de bachillerato del Instituto de Educación Media Superior del Gobierno del Distrito Federal en México (IEMS) en la construcción del concepto anteriormente citado y para emplear ecuaciones lineales al realizar actividades de modelación de situaciones reales.

Elaboramos tres instrumentos basados en las descripciones del esquema ecuación lineal de la descomposición genética. Aplicamos un cuestionario diagnóstico a 30 estudiantes del IEMS plantel Otilio Montaño, Tlalpan II. Los resultados que obtuvimos de este primer instrumento nos permitieron catalogar las estrategias que utilizan los estudiantes sin ayuda de sus profesores cuando se enfrentan a situaciones reales. Como resultado de la aplicación diagnóstica seleccionamos a 10 estudiantes que por la manera en que construyeron sus

respuestas creímos nos ofrecerían datos relevantes al modelar con ecuaciones lineales. A estos estudiantes les aplicamos una actividad que provocaba modelos; la construcción de las situaciones reales presentadas en la actividad que provoca modelos se hizo con base en el marco teórico Modelos y Modelación.
Los resultados obtenidos de la aplicación del segundo instrumento nos permitieron observar la manera en que los estudiantes comparten y aprenden estrategias y conceptos matemáticos mientras modelan situaciones reales con ecuaciones de primer grado. Derivado de la aplicación de la actividad que provoca modelos encontramos que 5 estudiantes podrían mostrarnos evidencia más detallada de las construcciones descritas en la descomposición genética y a éstos les aplicamos una entrevista que consistió en un cuestionario teórico y tres problemas típicos de libros de texto de bachillerato.

Como resultado de la aplicación de los tres instrumentos obtuvimos información que nos permitió refinar nuestra descomposición genética y que a su vez contribuyó al diseño de una propuesta didáctica que permite motivar a los estudiantes del IEMS, plantel Otilio Montaño, Tlalpan II a modelar situaciones reales con ecuaciones lineales. Finalmente proponemos preguntas de investigación que pueden continuar el estudio de la modelación de situaciones reales empleando una vinculación de los marcos teóricos APOE y Modelos y Modelación.

Abstract (adaptado de la misma tesis)
In this research we start by presenting a theoretical analysis of different points of view that currently exist in relation with mathematical modeling of real situations. We also present a theoretical analysis of the concept of linear equation using the APOS theoretical framework. This analysis consists in the description of a genetic decomposition of the linear equation concept designed as a schema that describes the relationship between the mental constructions (processes, objects and other schemas) and the mental mechanisms (interiorización, coordination, encapsulation, assimilation) and models a possible path that can be followed by high school students, from Instituto de Educación Media Superior del

Gobierno del Distrito Federal en México (IEMS), in order to construct the above mentioned concept and to work with activities related to problems where modeling activities with linear equations are involved.

We elaborated three instruments based on the genetic decomposition of the linear equation schema. We applied a diagnostic questionnaire to 30 students from the IEMS campus Otilio Montaño, Tlalpan II. The results obtained from this first instrument allowed us to make an a priori classification of students' strategies when they work with real situations without receiving help from their teachers. From the results of the diagnostic application, 10 students were selected based on the way they structured their answers, considering that they would provide relevant data when they modeled with linear equations. A model eliciting activity was then preseted to them, in which the real life situations were designed using Models and Modeling theoretical perspective.

Results obtained from this experience and the second instrument allowed us to observe how students share and learn mathematical strategies and concepts while they model real situations with linear equtions. From the results obtained we considered that 5 students might show detailed evidence of the constructions described in the genetic decomposition. We interviewed them using an instrument consisting of a theoretical problem and three problems that are typically included in high school textbooks.

As a result of the implementation of the three instruments, we obtained information that enabled us to refine the genetic decomposition, which in turn contributed to the design of a pedagogical approach that motivates students from IEMS, campus Otilio Montaño, Tlalpan II to model real situations with linear equations. Finally we propose new open research questions that may be responded by new research on the use of real situation modeling and on the complementary use of APOS and Models and Modeling approaches.

3.2.2 **Fuera de RUMEC**

3.2.2.1 **Que usan exclusivamente la teoría APOE**

- **Realizadas en CICATA-IPN**

1. Gómez, E. (2007). La construcción de la noción de variable. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN, Unidad Legaria, D.F. México.

Resumen (adaptado de la misma tesis)
La construcción de conceptos matemáticos de acuerdo con la teoría APOE es una progresión de construcciones mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas, mediante la abstracción reflexiva. En este sentido, la construcción de la noción de variable deberá ser mediante la manipulación de objetos físicos o mentales para formar acciones relacionadas a la idea de cambio. Las acciones deben ser interiorizadas para formar procesos prescindiendo de los objetos físicos. Estos procesos se encapsulan para formar objetos. La noción de variable como objeto es organizada en un esquema, es decir se vuelve parte de la estructura cognitiva del individuo. Sin embargo, la noción de variable puede desempeñar una doble función, como objeto y proceso. Como objeto, cuando la noción está encapsulada y se le pueden aplicar operaciones tales como suma, resta o relacionarlas con alguna función o fórmula, por ejemplo. Como proceso, las reflexiones e interiorizaciones que el individuo realice de las acciones, las manipulaciones físicas o mentales sobre cosas u objetos que cambian sin necesidad de tenerlos presente.

Esta perspectiva teórica contrasta con la forma en que es presentada la noción de variable en los libros de cálculo y la forma en que se enseña. Dolores (1996) muestra diferentes definiciones de variable de libros de cálculo que se usan en el bachillerato. Esto hace suponer que solo basta la definición de variable para que el alumno se apropie de esta noción o es un concepto ya formado que no requiere un análisis exhaustivo para su asimilación. Investigaciones respecto a la noción de variable en situación escolar (Ursini, 1994; 1996; Trigueros et al., 2000; Rosnick, 1981; Wagner, 1983; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Kieran et al., 1990) manifiestan que no es suficiente la definición de variable para que el estudiante se apropie de ella. Por el contrario surgen dificultades en la comprensión del símbolo que representa esta noción y como consecuencia la aparición de concepciones alternativas que distan de las aceptadas formalmente (Dolores, 1998; Dolores et al., 2002; Dolores, 2004).

La mayoría de las investigaciones analizadas parten de la idea de que esta noción ya tiene existencia en forma de símbolo, y sólo se hacen investigaciones entorno a su significado (Kuchemann, 1980; Rosnick, 1981; Schoenfeld & Arcavi, 1988). Otras se preocupan por investigar las dificultades que se presentan en los alumnos al operar con símbolos en la transición de la aritmética al álgebra (Wagner, 1983; Kieran et al., 1990; Ursini, 1994; 1996; Trigueros et al., 2000).

Nuestro trabajo de investigación, a diferencia de estas investigaciones, no está interesado en la noción de variable como símbolo, sino en el proceso de su construcción. Por lo que nuestra pregunta de investigación se centra en investigar ¿cómo se construye la noción de variable en niños pequeños y qué procesos favorecen su construcción? De esta pregunta de investigación se desprende como objetivo de investigación, identificar los procesos que se ponen en juego en la construcción de la noción de variable en niños pequeños.

- **Realizadas en otras instituciones**

1. Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia “La derivada un concepto a caballo

entre la matemática y la física”. Tesis de Doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

Introducción (tomado de la misma tesis)

El objetivo de esta investigación ha sido identificar y describir la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada de profesores de matemáticas en ejercicio. En efecto, nos interesa describir la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano, así como las formas como los profesores interpretan y justifican las situaciones concretas de enseñanza en las que deben actuar, como un punto de partida para entender la práctica profesional del profesor y la generación del conocimiento profesional que nos permita incidir en la formación permanente e inicial del profesorado.

En nuestro propósito hemos adaptado las categorías teóricas y analíticas que proporciona el marco de la teoría APOE para el estudio de las componentes del conocimiento profesional del profesor de matemática, llegando a la construcción de la descomposición genética del concepto de derivada y a la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones definidas: gráfica y analítica, las cuales se revisan a partir de los aportes de los resultados obtenidos. Igualmente, partiendo de la necesidad de estructurar y describir la naturaleza situada del conocimiento profesional del profesor y las formas de usarlo en la estructuración de la agenda de enseñanza, nos hemos centrado en la caracterización de las tareas que propone el profesor para introducir y evaluar dicho concepto.

2. Bodí, S. (2008). Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Tesis doctoral, Universidad de Alicante, Alicante, España.

Capítulo 1. Identificación del problema (tomado de la misma tesis)

El presente trabajo trata de la comprensión de los alumnos de Educación Secundaria sobre la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. El estudio se centra en las formas de conocer y construir el conocimiento de los conceptos de divisibilidad en el conjunto de los números naturales, en un rango de edad de 12 a 17 años-1º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), 4º de ESO, tanto en la modalidad de la opción A como B, y de 1º de Bachillerato, opciones Científico-Técnica y de Humanidades y Ciencias Sociales- (D.O.G.V de 8 de marzo de 2002 y D.O.G.V. de 5 de abril de 2002). El campo en que se ubica el trabajo realizado es el de Pensamiento Numérico, dentro de la investigación en Didáctica de la Matemática.

3. Alvarado, L. (2010). El cuerpo de los números reales: Una propuesta didáctica para su construcción como estructura algebraica. Tesis para optar al Grado de Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Instituto de Matemáticas.

Resumen (tomado de la misma tesis)

El interés de este estudio, radicó en describir y analizar los aspectos necesarios para el aprendizaje de los números reales como cuerpo, desde una perspectiva cognitiva.

La teoría elegida es APOE, la que será utilizada como herramienta teórica con la que se procurará visualizar los conceptos necesarios previamente para la construcción del concepto de cuerpo de los números reales como estructura algebraica, cómo evoluciona esta estructura, las posibles conexiones y dificultades que se presentan en este proceso.

Basada en la información brindada después de realizado el ciclo de investigación se realizan sugerencias didácticas, que tiene por objeto ser un aporte en la enseñanza y el aprendizaje de los reales como cuerpo.

4. Marambio, V. (2010). Construcción del concepto de semejanza de triángulos desde el punto de vista de la teoría APOE. Tesis para optar al Grado de Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Instituto de Matemáticas.

Resumen (adaptado de la misma tesis)
Esta investigación tiene como propósito fundamental estudiar las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes de enseñanza media para aprender el concepto de semejanza de triángulos.

Tomamos como referente el marco teórico APOE. El proceso de investigación en esta teoría conlleva a tener en cuenta un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir el concepto semejanza de triángulos, llamado descomposición genética (Dubinsky, 1991) que es resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala et al., 1996). En la descomposición genética que diseñamos para el concepto semejanza de triángulos, describimos las construcciones mentales que consideramos prerrequisitos, así el proceso de razones y proporciones se coordina con el proceso de ángulos, construyendo el proceso de polígonos congruentes, éste se interioriza, dando origen a la acción de semejanza, la que mediante la coordinación con el proceso de razones y proporciones y los axiomas de triángulos y utilizando el mecanismo de encapsulación construyen el objeto de semejanza de triángulos, así los mecanismos nombrados determinan el camino mediante el cual el estudiante funda el concepto de semejanza de triángulos. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrucción y análisis y verificación de datos, determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de la descomposición genética se diseñó y aplicó un cuestionario, a 6 estudiantes, 2 mujeres y 4 hombres, todos de tercero de enseñanza media de un colegio particular subvencionado, los estudiantes elegidos poseen promedios superiores a 5.5 en matemáticas, por lo que podrían responder a las preguntas entregadas y dar información acerca de la viabilidad de la descomposición genética antes descrita.

5. Van Lamoen, S. (2010). Construcción del concepto función cuadrática en estudiantes sordos: un estudio bajo las teorías APOE y Registros de Representación Semiótica. Tesis para obtener el grado de Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Instituto de Matemáticas.

Resumen (tomado de la misma tesis)

En este estudio, como tesis final para obtener el grado de Magister en Didáctica de las Matemáticas, se busca determinar la manera en que un grupo de estudiantes sordos construyen el concepto función cuadrática. La vía que se utiliza para visualizar esta manera de construir es generando una descomposición genética hipotética del concepto.

Para ello, se realiza primeramente un estudio al concepto función cuadrática desde la matemática, una recopilación de experiencias (estudiantiles, profesionales y personales), tanto nuestras, como de otros profesores, con el fin de elaborar esta descomposición genética del concepto de función cuadrática, donde se exhiban mecanismos mentales (interiorización, encapsulación, asimilación y coordinación) y construcciones mentales (acción, proceso, objeto y esquema) que colaboran en el aprendizaje del objeto matemático. Junto con lo anterior se buscan aquellas representaciones más significativas de los conceptos que subyacen alrededor del concepto en estudio.

Posteriormente se elaboran cuestionarios y entrevistas que se aplican a estudiantes sordos e hipoacúsicos del Centro de Estudios y Capacitación para Sordos de Valparaíso (CECASOV), siempre guiados por la descomposición hipotética, con el fin de documentarla. A continuación se analizan las informaciones obtenidas, buscando en ellas la presencia o ausencia de las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la descomposición genética. También se prestará atención a aquellos mecanismos y construcciones mentales que no están presentes en dicha descomposición genética, con el fin de refinarla.

Se ha considerado esta investigación desde el paradigma cognitivo, ya que los problemas de audición, según las investigaciones, en la mayoría de los casos, no provocan discapacidad cognitiva alguna, sin embargo, si *(sic.)* existen antecedentes de retrasos, de hasta dos años, en alcanzar los diferentes estados de desarrollo cognitivo, debido a los problemas comunicativos entre los participantes del triángulo didáctico. Es así como se han considerado dos teorías: la teoría APOE y la teoría de Registros de Representación Semiótica, con el fin de explicar, de mejor forma, cómo construyen el concepto función cuadrática los estudiantes sordos del CECASOV.

Algunos resultados de esta investigación se relacionan con el proceso de enseñanza-aprendizaje por parte de estudiantes sordos, el cual ha sido abordado desde una variación de la teoría APOE, considerando en ella, además, los registros de representación semiótica, ampliando el marco de desarrollo de esta teoría, más allá de las construcciones mentales y los mecanismos de abstracción, llevándolo al terreno donde estos se ponen en juego, donde finalmente podemos observar si los estudiantes poseen o no un determinado tipo de construcción, y si es que los mecanismo que las articulan están funcionando de manera correcta: la práctica. Este contexto, donde podemos ver plasmados los elementos propuestos por la teoría APOE, es precisamente el que nos ha proporcionado la principal dificultad de este estudio: la comunicación, realizada por medio de diferentes tipos de registros, y es por ello, que es otro de los ejes teóricos que enmarcan este estudio.

6. Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría APOE. Tesis de Doctorado. Universidad de Salamanca-España, Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales.

Resumen (tomado de la página http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-274143_archivo_pdf.pdf)

Numerosas investigaciones han dado cuenta de las dificultades que los alumnos tienen en la comprensión del concepto de integral definida. En esta tesis se ha tratado de identificar cómo se lleva a cabo esta comprensión siendo los sujetos estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas colombianos que estudian por primera vez este concepto matemático. A partir de los resultados de investigaciones previas, se hace un estudio de algunos libros de texto para identificar los elementos matemáticos que configuran el concepto y establecer una descomposición genética. Se ha utilizado como marco teórico "APOE" de Dubinsky (1991) construido a partir de la noción de abstracción reflexiva de Piaget aplicada al pensamiento matemático avanzado.

La recogida de datos se realizó utilizando tres instrumentos: un cuestionario, una entrevista y un mapa conceptual que permitieron la triangulación. Estos datos se analizaron a partir de las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos en diferentes sistemas de representación. El análisis conjunto de los tres instrumentos permitió caracterizar los niveles y subniveles (INTRA 1, INTRA, INTER 1, INTER y TRANS), en el que se encuentra cada sujeto, por las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos que utiliza y por la síntesis entre los modos de representación gráfico, algebraico y analítico.

Entre las conclusiones se caracterizaron el tipo el tipo de relaciones lógicas utilizadas en los diferentes estados de desarrollo y los elementos matemáticos que utilizan en cada nivel y cómo lo hacen puesto que muchas veces son usados de forma incorrecta y/o con concepciones erróneas. Esto permitió comprobar que la mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel INTER 1, y sólo uno alcanzó el nivel TRANS del desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

Descriptores: Integral Definida, APOE, elementos matemáticos, desarrollo del esquema, descomposición genética.

3.2.2.2 **Que usan la teoría APOE conjuntamente con algún otro marco**

1. Stewart, S. (2008). Understanding linear algebra concepts through the embodied, symbolic and formal worlds of mathematical thinking. Tesis de Doctorado. University of Auckland.

Abstract (tomado de la misma tesis)
Linear algebra is one of the first advanced mathematics courses that students encounter at university level. The transfer from a primarily procedural or algorithmic school approach to an abstract and formal presentation of concepts through concrete definitions, seems to be creating difficulty for many students who are barely coping with procedural aspects of the subject. This research proposes applying APOS theory, in conjunction with Tall's three worlds of embodied, symbolic and formal mathematics, to create a framework in order to examine the learning of a variety of linear algebra concepts by groups of first and second year university students. The aim is to investigate the difficulties in understanding some linear algebra concepts and to propose potential paths for preventing them. As part of this research project several case studies were conducted where groups of first and second year students were exposed to teaching and learning some introductory linear algebra concepts based on the framework and expressed their thinking through their involvements in tests, interviews and concept maps. The results suggest that the students had limited understanding of the concepts, they struggled to recognize the concepts in different registers, and their lack of ability in linking the major concepts became apparent. However, they also revealed that those with more representational diversity had more overall understanding of the concepts. In particular the embodied introduction of the concept

proved a valuable adjunct to their thinking. Since difficulties with learning linear algebra by average students are universally acknowledged, it is anticipated that this study may provide suggestions with the potential for widespread positive consequences for learning.

Resumen (traducción)

Álgebra lineal es uno de los primeros cursos avanzados de matemáticas que los alumnos encuentran en el nivel universitario. El traslado de un enfoque escolar principalmente de procedimientos o algoritmos a una presentación abstracta y formal de los conceptos a través de definiciones concretas, parece estar creando dificultades para muchos estudiantes, quienes apenas pueden hacer frente a los aspectos procedimentales de la materia. Esta investigación propone la aplicación de la teoría APOE, junto con los tres mundos de Tall de la matemática encarnada, simbólica y formal, para crear un marco para examinar el aprendizaje de una variedad de conceptos de álgebra lineal por grupos de estudiantes universitarios de primer y segundo año. El objetivo es investigar las dificultades en la comprensión de algunos conceptos de álgebra lineal y proponer posibles caminos para la prevención de ellos. Como parte de este proyecto de investigación varios estudios de caso se llevaron a cabo donde grupos de estudiantes de primer y segundo año fueron expuestos a la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos introductorios de álgebra lineal basados en el marco y expresaron su pensamiento a través de sus participaciones en las pruebas, entrevistas y mapas conceptuales. Los resultados sugieren que los estudiantes tenían una comprensión limitada de los conceptos, lucharon para reconocer los conceptos en diferentes registros, y su falta de capacidad en la vinculación de los conceptos más importantes se hizo evidente. Sin embargo, también se reveló que aquellos con una mayor diversidad de representación tenían una comprensión más global de los conceptos. En particular la introducción del concepto encarnado demostró ser un valioso complemento a su pensamiento. Ya que las dificultades con el aprendizaje de álgebra lineal por medio de los estudiantes son reconocidos universalmente, se espera que este estudio puede proporcionar sugerencias con el potencial de amplias consecuencias positivas para el aprendizaje.

3.3 LIBROS BAJO LA PERSPECTIVA APOE

3.3.1 **Con participación de miembros de RUMEC**

1. Baxter, N., Dubinsky, E. & Levin, G. (1988). Learning Discrete Mathematics with ISETL. Springer-Verlag, New York, inc.

(Descripción traducida de Arnon et al., 2014)

Este es el primer libro de texto basado completamente en el uso de programación de computadoras junto con la teoría APOE. Fue escrito antes de que se desarrollara la estructura pedagógica ACE. La temática incluye temas para un curso de nivel universitario de matemáticas discretas: cálculo proposicional y de predicado, sets y tuplas, funciones, combinatoria, matrices, determinantes, inducción matemática y relaciones y gráficas. Para cada concepto, los autores desarrollaron una descomposición genética. La descomposición genética guía el diseño de las actividades de laboratorio en las cuales los estudiantes usan el lenguaje de programación matemático ISETL para escribir programas cortos de cómputo. El propósito de las actividades de programación es fomentar abstracciones reflexivas, por ejemplo la interiorización, haciendo que los alumnos escriban programas que realizan acciones sobre entradas adecuadas, y la encapsulación, haciendo que los alumnos utilicen un programa como entrada y/o salida en otro programa.

2. Dubinsky, E. & Leron, U. (1994). Learning Abstract Algebra with ISETL. Springer, New York.

(tomado de la contraportada del libro)

Most students in abstract algebra classes have great difficulty making sense of what the instructor is saying. Moreover, this seems to remain true almost independently of the quality of the lecture.

This book is based on the constructivist belief that, before students can make sense of any presentation of abstract mathematics, they need to be engaged in mental activities which will establish an experiential base for any future verbal explanation. No less, they need to have the opportunity to reflect on their activities. This approach is based on extensive theoretical and empirical studies as well as on the substantial experience of the authors in teaching abstract algebra.

The main source of activities in this course is computer constructions, specifically, small programs written in the mathlike programming language ISETL; the main tool for reflections is work in teams of 2-4 students, where the activities are discussed and debated. Because of the similarity of ISETL expressions to standard written mathematics, there is very little programming overhead: learning to program is inseparable from learning the mathematics.

Each topic is first introduced through computer activities, which are then followed by a text section and exercises. This text section is written in an informed, discussive style, closely relating definitions and proofs to the constructions in the activities. Notions such as cosets and quotient groups become much more meaningful to the students than when they are presented in a lecture.

(traducción)
La mayoría de los estudiantes en clases de álgebra abstracta, tienen grandes dificultades para dar sentido a lo que el profesor está diciendo. Por otra parte, esto parece repetirse casi independientemente de la calidad de la presentación.

Este libro se basa en la creencia constructivista que, antes que los estudiantes pueden dar sentido a cualquier presentación de las matemáticas abstractas, deben participar en las actividades mentales que establecerán una base experimental para cualquier explicación verbal futura. No obstante, tienen que tener la oportunidad de reflexionar sobre sus actividades. Este enfoque se basa en amplios estudios teóricos y empíricos, así como en la amplia experiencia de los autores en la enseñanza del álgebra abstracta.

La fuente principal de actividades en este curso son construcciones en computadora, específicamente, pequeños programas escritos en el lenguaje de programación ISETL que se parece a matemáticas; la principal herramienta para la reflexión es el trabajo en equipos de 2-4 estudiantes, donde las actividades se discuten y debaten. Debido a la similitud de las expresiones de ISETL a matemáticas escritas estándar, existe muy poca programación: aprender a programar es inseparable del aprendizaje de las matemáticas.
Cada tema se introduce por primera vez a través de actividades en computadora, que luego son seguidas por una sección de texto y ejercicios. Esta sección de texto está escrita en un estilo informado, discutido, estrechamente relacionando las definiciones y pruebas a las construcciones en las actividades. Nociones como subconjuntos y grupos cociente llegan a ser mucho más significativos para los estudiantes que cuando se presentan en una plática.

3. Dubinsky, E. & Fenton, W. (1996). Introduction to Discrete Mathematics with ISETL. Springer.

(tomado de la contraportada del libro)
Intended for first – or second – year undergraduates, this introduction to discrete mathematics covers the usual topics of such a course, but applies constructivist principles that promote – indeed, require – active participation by the student. Working with the programming language ISETL, whose syntax is close to that of standard mathematical language, the student constructs the concepts in her or his mind as a result of constructing

them on the computer in the syntax of ISETL. This dramatically different approach allows students to attempt to discover concepts in a “Socratic” dialog with the computer.

The discussion avoids the formal “definition-theorem” approach and promotes active involvement by the reader by its questioning style. An instructor using this text can expect a lively class whose students develop a deep conceptual understanding rather than simply manipulative skills.

Topics covered in this book include: the propositional calculus, operations on sets, basic counting methods, predicate calculus, relations, graphs, functions, and mathematical induction.

Resumen (traducción)
Esta introducción a las matemáticas discretas, dirigida a los estudiantes de primer – o segundo – año de licenciatura, trata los temas habituales de un tal curso, pero aplica los principios constructivistas que promueven - de hecho, requieren - la participación activa por parte del alumno. Trabajando con el lenguaje de programación ISETL, cuya sintaxis es similar a la del lenguaje matemático estándar, el estudiante construye los conceptos en su mente como resultado de su construcción en computadora en la sintaxis de ISETL. Este enfoque radicalmente diferente permite a los estudiantes tratar de descubrir conceptos en un diálogo "socrático" con la computadora.

La discusión evita el enfoque formal "definición-teorema" y promueve la participación activa del lector debido a su estilo interrogatorio. Un instructor usando este texto puede esperar una clase animada cuyos estudiantes desarrollan una profunda comprensión conceptual, en lugar de simplemente las habilidades manipulativas.

Los temas tratados en este libro son: el cálculo proposicional, operaciones con conjuntos, los métodos básicos de conteo, cálculo de predicados, relaciones, gráficas, funciones e inducción matemática.

4. Weller, K.; Montgomery, A.; Clark, J.; Cottrill, J.; Trigueros, M.; Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. 401 pág. Disponible en la dirección http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Resumen (nuestra descripción)

Este es un libro propuesto y diseñado por algunos miembros del grupo RUMEC, para un curso de álgebra lineal de licenciatura. Se basa en la teoría APOE y hace uso del software ISETL. La estructura del libro sigue el ciclo ACE. En cada capítulo se presentan los temas en la forma de actividades, discusión y ejercicios.

5. Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K.(2014). APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer.

Descripción (Adaptado de la portada del libro)

The goal of this book is to present the main elements of APOS Theory and its use. The book is intended to be useful for Mathematics Education researchers, graduate students in Mathematics Education, and Mathematics instructors who work with, or would like to learn more about, this theoretical approach, and who are interested in how, according to this theory, individuals construct their understanding of mathematical concepts.

Resumen (traducción)

El objetivo de este libro es presentar los principales elementos de la Teoría APOE y su uso. El libro pretende ser útil para los investigadores en Educación Matemática, estudiantes de posgrado en Educación Matemática y profesores de Matemáticas que trabajan con, o tienen interés en aprender más acerca de este enfoque teórico, y que están interesados en cómo, según esta teoría, los individuos construyen su comprensión de los conceptos matemáticos.

3.4 INVESTIGACIONES EN OTROS CAMPOS QUE USAN APOE

El siguiente resumen es el único trabajo encontrado fuera del campo de las matemáticas. Es parte de una presentación donde los autores describen el posible uso del marco teórico APOE en la enseñanza de la Química, viendo a la matemática como un vínculo entre el entendimiento de conceptos químicos y su aplicación. Sin embargo, no se encontró alguna publicación que complemente el resumen.

1. Rodríguez, M. & Carrasquillo, A. (2007). Improving pedagogic strategies in analytical chemistry: Applying the action, process, object, schema theory (APOS theory) to chemical education efforts. *Abstract of papers of the American Chemical Society*.

Abstract (tomado del mismo libro de resúmenes)
Analytical Chemistry (AC) will play a key role in the creation of future technologies. Therefore, learning the fundamental concepts of modern AC has become an important educational objective for future chemists and chemical engineers. In this presentation we describe how math education theories in general, and how the Action, Process, Object, Schema (APOS) theory specifically, may be added to the chemical education toolbox to provide useful feedback in the design of AC pedagogy. An example will be given to showcase how the incorporation of this math education theory can be beneficial during the design of chemical education interventions, especially for AC subjects where the physico-

chemical phenomena of interest are obscured from learners due to increasing levels of mathematical abstraction. An analytical problem from general chemistry (i.e. dilution) is selected to demonstrate that the approach can be useful for AC teaching/learning at any level of mathematical abstraction.

Resumen (traducción)

La Química Analítica (QA) jugará un papel clave en la creación de las tecnologías del futuro. Por lo tanto, el aprendizaje de los conceptos fundamentales de la QA moderna se ha convertido en un objetivo importante de educación para los futuros químicos e ingenieros químicos. En esta presentación describiremos cómo las teorías de la educación matemática en general, y cómo específicamente la teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE), se pueden añadir a la caja de herramientas de enseñanza de la química para proporcionar información útil en el diseño de la pedagogía de QA. Se dará un ejemplo para mostrar cómo la incorporación de esta teoría de la educación matemática puede ser beneficiosa durante el diseño de las intervenciones de enseñanza de la química, sobre todo para los temas de QA en donde los fenómenos físico-químicos de interés se ocultan de los alumnos, debido a los crecientes niveles de abstracción matemática. Un problema de análisis de química general (a saber, la dilución) se selecciona para demostrar que el método puede ser útil para la enseñanza/aprendizaje de QA a cualquier nivel de abstracción matemática

Capítulo 4

Reflexiones y Conclusiones

Es evidente a través de las referencias y su lectura, que la teoría APOE se ha encontrado en constante desarrollo. Se han estado introduciendo conceptos y perfeccionando los ya anteriores, gracias al trabajo e investigaciones por parte de los miembros de RUMEC. También se pudo observar que actualmente existen una variedad de investigaciones que han sido desarrolladas por investigadores ajenos a RUMEC, así como algunas trabajadas por investigadores que fueron formados por miembros de RUMEC.

Observamos cómo las primeras apariciones de trabajos bajo la perspectiva APOE lo mencionan como un nuevo enfoque prototipo. Vamos viendo a lo largo de la revisión, los avances y desarrollos de la misma, siendo la teoría de Piaget el sustento de ésta. En Asiala (1996) se presenta el estado, hasta ese momento, del marco teórico APOE. Para ese entonces, ya se tenían varias investigaciones bajo este marco. En Dubinsky (2000 y 2001) también se expone un panorama de la situación, hasta ese entonces, del desarrollo de la teoría APOE: 10 años del desarrollo de la teoría (1987 a 1998 aproximadamente) por investigadores de RUMEC. En febrero del 2000, algunos miembros de RUMEC junto con otro investigador (Dubinsky, E., Clark, J., Weller, K., Loch, S., McDonald, M. & Merkovsky, R.; 2000) hicieron una revisión de los datos arrojados por 13 investigaciones previas con la finalidad de analizar la efectividad hasta ese entonces sobre esa nueva perspectiva. De acuerdo a los resultados obtenidos en dicha revisión, la teoría APOE se considera una herramienta eficaz para una mayor comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los alumnos. Posteriormente se presenta con más detalle este estudio en Dubinsky et al. (2003), con 14 investigaciones previas.

Gracias al trabajo de estos investigadores se ha ido fortaleciendo y ampliando la teoría. En Clark, et al. (1997) se presenta una investigación donde se menciona el tener que ampliar la teoría pues observaron que era necesario para dar respuesta a las necesidades de su estudio. Es así que se incluye la tríada de Piaget: Intra, Inter y Trans en la teoría APOE. A partir del

2000 (por ejemplo, Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M., 2000) se incrementan los trabajos sólidos con esta nueva visión en la teoría APOE.

El estado actual de la teoría APOE se encuentra en Arnon et al. (2014), donde se da información sobre la historia del desarrollo de este acercamiento teórico y sus componentes fundamentales.

Algo importante de la teoría APOE, y lo que la hace diferente a la mayoría de las otras teorías sobre el aprendizaje, es que se preocupa por llevar la investigación a las aulas. Dentro de la revisión podemos ver aquellas que buscan hacer propuestas didácticas y curriculares de acuerdo a los resultados obtenidos. Es parte de los principios de la misma, que las investigaciones estén estrechamente relacionadas con el desarrollo curricular y la práctica docente. Se han elaborado libros en álgebra abstracta, álgebra lineal, cálculo y matemáticas discretas bajo esta perspectiva. En ellos podemos encontrar diseños de actividades de clase y computadora, usando ISETL.

Subgrupos de RUMEC se encuentran trabajando sobre diversos proyectos en relación con temas como álgebra lineal, el infinito y matemáticas en los niveles primaria y secundaria.

Más adelante, en este capítulo, podemos encontrar un listado de las revistas donde se han publicado trabajos bajo esta perspectiva, algunas de las cuales de reconocimiento internacional como Educación Matemática, Educational Studies in Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, BOLEMA, RELIME y The Journal of Mathematical Behavior. También se encuentran trabajos que han sido presentados en importantes congresos internacionales de la Educación Matemática como el PME, CERME y RELME. En los PME encontramos presentaciones desde 1988.

4.1 Comentarios generales de la revisión

Muchas de las investigaciones han estudiado la comprensión del estudiante sobre un concepto particular de matemáticas. Sin embargo algunas atienden no solo cómo el estudiante comprende un concepto sino cómo integran el conocimiento construido y cómo lo aplican en problemas más complejos.

No todas las investigaciones han sido enfocadas en estudiantes; muchas estudian el pensamiento del profesor y otras tantas el de ambos. Se han realizado varias investigaciones que tratan de comprender los aspectos procedimentales y conceptuales de maestros en servicio y/o maestros en formación en temas como descomposición prima, valor de posición, divisibilidad y función.

A lo largo de la revisión se pudo observar que se han desarrollado trabajos que han optado conveniente conjuntar APOE con algún otro marco teórico. Dentro de los distintos enfoques que fueron usados junto con APOE podemos citar los siguientes:

- Teoría de la carga cognitiva
- Teoría de los Sistemas de Aprendizaje
- Conocimiento del cotidiano (definido por Mazzitelli y Aparicio, 2010)
- Educación Intercultural, Enculturación Matemática y Etnomatemáticas (principalmente las ideas de Alan Bishop, 1999)
- Enfoque Ontosemiótico (EOS)
- Los tres mundos de pensamiento de Tall: encarnado, simbólico y formal
- Modelos y Modelación
- Registros de Representación Semiótica
- Representaciones sociales
- Socioepistemología (Comportamiento tendencial de las funciones)

- Teoría Antropológia de lo Didáctico (TAD)

Más adelante en este capítulo daremos más explicación sobre los acercamientos teóricos que se han usado junto con la teoría APOE.

También pudimos observar que la mayoría de los trabajos bajo la perspectiva APOE se han concentrado en las áreas de

- Álgebra Abstracta
- Cálculo
- Álgebra Lineal
- Matemática Discreta

En dichos trabajos se trataron los siguientes temas:

- Asintoticidad de las funciones
- Base
- Clases laterales, normalidad y grupos cocientes
- Combinación lineal
- Conjuntos compactos
- Conjunto generador
- Conjunto, subconjunto, elementos de un conjunto y cardinalidad
- Conjunto P(**N**)
- Cuantificación universal y existencial
- Demostración por inducción
- Dependencia lineal
- Derivada (entendimiento de la gráfica, gráfica de una función usando la derivada)
- Divisibilidad
- Ecuación diferencial de segundo orden
- Ecuación lineal
- Error Tipo I
- Espacio vectorial
- Espacio generado
- Estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden
- Función
- Función a trozos

- Funcional y variación
- Función cuadrática
- Función inversa
- Función lineal
- Función exponencial y logarítmica
- Funcional y variación
- Grupos, subgrupos y operación binaria
- Gráfica de funciones
- Grupos diédricos y grupos de simetrías
- Independencia lineal
- Inecuaciones
- Infinito
- Integral definida
- Límite
- Límite funcional finito
- Monotonía y Acotación de las secuencias
- Periodicidad
- Regla de la cadena
- Sistemas de ecuaciones diferenciales
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Subespacio
- Sucesiones
- Teorema Fundamental de la Aritmética
- Transformación de funciones
- Transformaciones geométricas
- Transformación lineal
- Transformada de Laplace
- Traslación de funciones
- Valor absoluto
- Valores y vectores propios
- Valor de posición y sistema numérico decimal

Algunas de estas investigaciones son reportes de cursos que se han diseñado y ofrecido bajo la perspectiva APOE y de su metodología de enseñanza. En algunas se ha realizado estudios de comparación entre un curso basado en la metodología APOE y otro en métodos tradicionales. En la mayoría se reporta mayor éxito en aquellos que han sido guiados bajo el marco APOE. También existen aquellos estudios que reportan, que si bien se han logrado concepciones proceso y hasta objeto en ciertos estudiantes, muchos no pudieron hacer dichas construcciones.

La metodología de enseñanza de APOE se apoya en actividades en computadora. Encontramos variedad de trabajos que hacen uso del lenguaje de programación ISETL, Geometer's Sketchpad y plataformas Blackboard y WebTec. Algunos de estos estudian el uso de la computadora, y otros, el de las calculadoras graficadoras. En algunas investigaciones se estudia la eficacia de un laboratorio de cómputo para la construcción de ideas matemáticas.

Para algunos de los conceptos matemáticos listados arriba, que se reportan mediante publicaciones, se presentan descomposiciones genéticas, por ejemplo espacio vectorial, transformación lineal, base, conjunto generador, inecuación, traducción de enunciados del lenguaje común al de la lógica de primer orden, integral definida, límite, combinación lineal, semejanza de triángulos, función lineal, función cuadrática, límite, grupos y subgrupo, normalidad y clases laterales, y función exponencial, entre otros conceptos. En algunas de estas investigaciones se ha modificado la descomposición genética preliminar, de acuerdo a los resultados obtenidos del análisis de datos empíricos. Recordemos con ello que las descomposiciones genéticas no son únicas y hay investigaciones que reportan sobre más de una descomposición genética para un mismo concepto. También existen investigaciones que muestran en su descomposición genética de un concepto matemático, el desarrollo del esquema del concepto matemático estudiado, por ejemplo el de la integral definida y el esquema de la derivada.

Aunque la teoría APOE fue diseñada particularmente para el nivel Universitario, existen algunas investigaciones en medio superior, secundaria y primaria.

Por otro lado atención a grupos de estudiantes con necesidades especiales ha sido enfoque de algunos trabajos bajo el marco de APOE, por ejemplo los estudiantes con discapacidad auditiva o aquellos alumnos considerados por una comunidad como niños talento.

Dentro de la revisión bibliográfica encontramos investigaciones que comparan la teoría APOE con otros enfoques como el principio ILUO (cada letra representa el grado-calificación, de menor a mayor, del dominio de cualquier habilidad básica) y el modelo de Pirie y Kieren.

4.2 **Análisis de los datos registrados, del número de investigaciones que usan APOE**

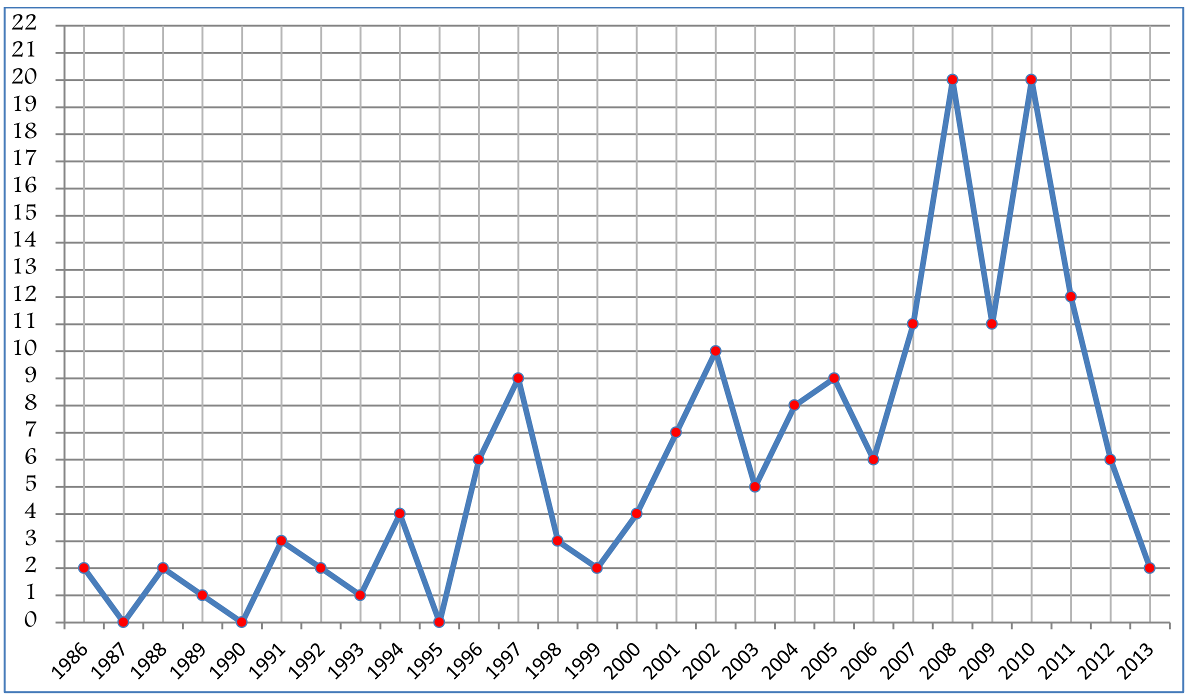
Año	Número de publicaciones
1986	2
1987	0
1988	2
1989	1
1990	0
1991	3
1992	2
1993	1
1994	4
1995	0
1996	6
1997	9
1998	3
1999	2
2000	4
2001	7
2002	10
2003	5
2004	8
2005	9
2006	6
2007	11
2008	20
2009	11
2010	19
2011	12
2012	6
2013	2

Tabla 4.1. Número de publicaciones (no tesis) que usan la teoría APOE, por año.

Esta muestra contiene 165 trabajos, entre artículos publicados en revistas y en actas de congreso. También incluye algunos resúmenes de presentaciones en congresos.

El uso del marco teórico APOE ha ido incrementando en los últimos 10 años. Podemos ver que desde las primeras investigaciones en 1986 con las primeas ideas planteadas de la teoría APOE y hasta 1996, se ha ido fortaleciendo la teoría. La mayor parte de las investigaciones que desarrollan la teoría se ubican en ese lapso de 10 años. Y después se ha ido fortaleciendo y ampliando.

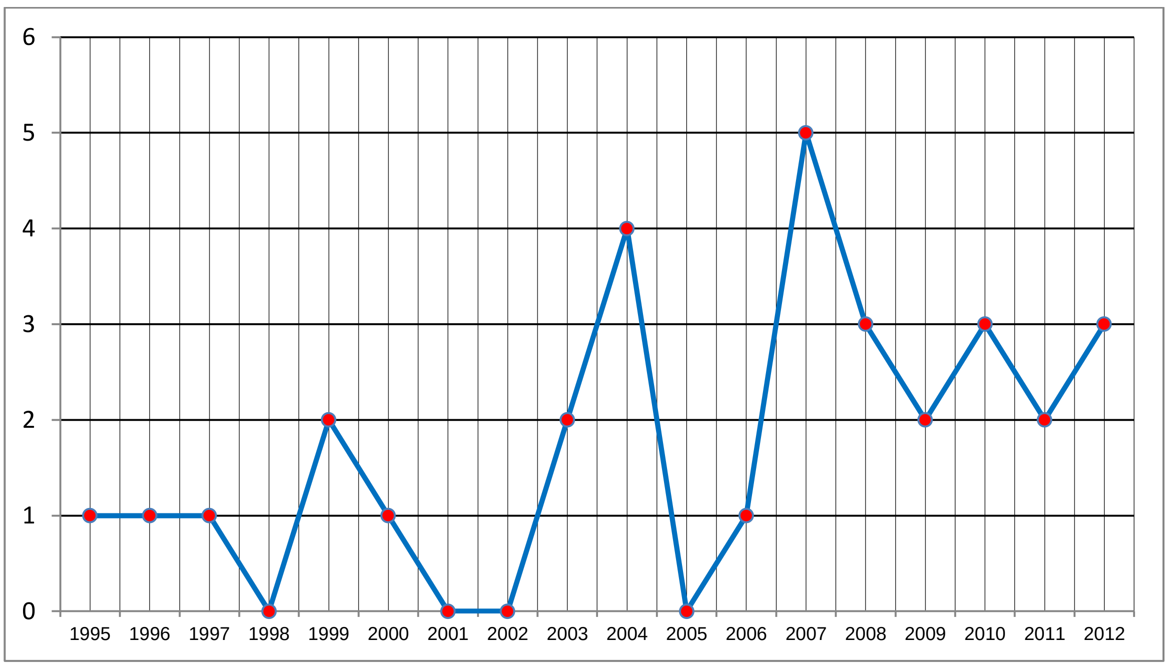
En la siguiente gráfica se muestra la información de la tabla anterior donde se observa en 1996 un incremento notable en trabajos bajo el marco teórico APOE. Notamos en 2008 un máximo importante en el crecimiento de investigaciones bajo esta perspectiva teórica. También en 2010 se realizó un gran número de publicaciones.



Gráfica 4.1. Número artículos que usan la teoría APOE entre 1986 y 2013

En cuanto al trabajo en tesis bajo el marco teórico APOE vemos que 1995 es una fecha muy importante para el inicio de publicaciones de tesis bajo este enfoque. En 2007 hay un máximo en el número de tesis que usan la teoría APOE. En 2008, 2010 y 2012 se mantuvo una constante de 3 publicaciones de tesis. Al igual que para 2003, 2009 y 2011, con 2 publicaciones.

En nuestra revisión contamos con 4 tesis para el año 2004. Y cabe aclarar que es más difícil obtener información sobre tesis producidas, ya que en general éstas no se publican y no aparecen en las bases de datos regularmente consultadas. En total, la revisión cuenta con 31 tesis. Entre ellas se cuenta con tesis de Licenciatura, Maestría y Doctorado.



Gráfica 4.2 Gráfica del número de tesis publicadas entre los años 1995 a 2012

Año de publicación de tesis	Número de publicaciones
1995	1
1996	1
1997	1
1998	0
1999	2
2000	1
2001	0
2002	0
2003	2
2004	4
2005	0
2006	1
2007	5
2008	3
2009	2
2010	3
2011	2
2012	3

Dentro del CINVESTAV podemos encontrar tesis dirigidas por miembros del grupo RUMEC, como Asuman Oktaç, María Trigueros y Francisco Cordero. En producciones del

CICATA-IPN encontramos algunas tesis dirigidas y codirigidas por miembros del grupo RUMEC como María Trigueros, Asuman Oktaç y Ed Dubinsky. Las tesis de ITAM en su mayoría están dirigidas por María Trigueros.

Los conceptos matemáticos tratados en estas tesis son los siguientes:

- Base de un espacio vectorial
- Conjunto generador
- Construcción de los números reales
- Conteo: ordenación y combinación
- Derivada
- Divisibilidad
- Espacio generado
- Espacios vectoriales
- Función cuadrática
- Funciones asintóticas
- Inecuación
- Integral definida
- Límite
- Operaciones binarias, aritmética modular
- Semejanza de triángulos
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Solución de ecuaciones de segundo grado
- Solución de problemas de cálculo diferencial
- Tangente
- Transformación lineal
- Transformación de funciones
- Transformada de Laplace

- Vector y múltiplos escalares, combinación lineal y espacios vectoriales, dependencia e independencia lineal, bases y subespacios, valores y vectores propios

En los siguientes listados podemos observar las revistas, libros y congresos donde se han publicado las investigaciones consideradas en los datos anteriores.

Revistas, libros o actas donde se han publicado investigaciones bajo el marco teórico APOE:

Revistas

- Annales de Didactiques et de Sciences Mathématiques
- Boletim de Educação Matemática
- Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education
- Educación Matemática
- Educational Studies in Mathematics
- Enseñanza de las Ciencias
- Far East Journal of Mathematical Education
- International Electronic Journal of Mathematics Education
- International Journal of Mathematical Education in Science and Technology
- Journal for Research in Mathematics Education
- Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching
- Journal of Mathematical Education
- Journal of the Indonesian Mathematical Society
- Jurnal Matematika Dan Sains
- Linear Algebra and its Applications
- Mathematical Thinking and Learning
- Notices of the American Mathematical Society
- Números
- Pythagoras
- Revista de Derechos Humanos y Estudios Sociales
- Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

- Revista Mexicana de Investigación Educativa
- The Journal of Mathematical Behavior
- The Montana Mathematics Enthusiast

Libros

- Advanced Mathematical Thinking
- CBMS Issues in Mathematics Education
- New ICMI Study Series

Congresos

- CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education)
- Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas
- Conference of the International Linear Algebra Society
- Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)
- Escuela de Invierno en Matemática Educativa
- International Conference on the Teaching of Mathematics
- Jornadas Nacionales de Educación Matemática
- PME (Psychology of Mathematics Education)
- RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa)
- RUME (Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education)
- Simposio de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Matemática Educativa)
- YERME 3 (3th Young European Society for Research in Mathematics Education)

4.3 Sobre las críticas a la teoría APOE

Recordemos que nuestro interés en esta investigación se basó en los siguientes puntos:

- Dar una caracterización de las investigaciones que usan como marco teórico la teoría APOE desde el punto de vista de los temas matemáticos tratados en ellas, así como de sus aportaciones.
- Indagar sobre la unión de APOE con algún otro marco teórico en estas investigaciones.
- Revisar las críticas que se le han hecho o están haciendo a la teoría APOE.

En 1994, Dubinsky et al. publican un artículo sobre el aprendizaje de conceptos fundamentales en la teoría de grupos: grupos, subgrupos, normalidad, clase lateral y grupo cociente. La intención de ese trabajo es discutir sobre el conocimiento que tienen los alumnos sobre algunos conceptos de teoría de grupos y cómo pueden desarrollar el entendimiento de esos conceptos, así como plantear cuestiones sobre el desarrollo de la teoría APOE y comparar el análisis teórico con los datos empíricos. Para ello consideran poner mayor énfasis en identificar las dificultades que se presentan en torno a la forma de comprender los conceptos matemáticos. Se presentan unas primeras ideas y sugerencias de estrategias pedagógicas, pues se piensa continuar con la serie de estudios alrededor de temas de álgebra abstracta. Pero no se dan conclusiones de estrategias pedagógicas que resulten de las observaciones de esta investigación.

Posteriormente se realizaron más estudios por RUMEC, enfocándose en temas relacionados al álgebra abstracta, álgebra lineal, cálculo, ecuaciones diferenciales y el infinito. El álgebra abstracta se considera una de las materias abstractas a las que se enfrentan por primera vez, estudiantes de Licenciatura. Además en ese momento, el aprendizaje de los conceptos de esta materia no había sido estudiado ampliamente desde otras perspectivas teóricas. Los resultados de este trabajo, así como algunos de sus materiales, fueron plasmados en un libro de texto.

Burn (1996) presenta una crítica hacia Dubinsky, et al. (1994), proponiendo a la permutación y la simetría como conceptos fundamentales de la teoría de grupos. Menciona las ventajas y desventajas que observa en el uso del lenguaje ISETL, en la enseñanza del álgebra abstracta. Indica que el trabajo de Dubinsky et al (1994) es un nuevo enfoque de enseñanza procedimiental usando el software ISETL. Burn cuestiona cuáles son los conceptos fundamentales en teoría de grupos. Menciona cómo en Dubinsky et al. (1994) se reconoce a los conceptos de grupo, subgrupo, subconjunto, subconjunto producto y normalidad como conceptos que conducen al concepto de grupo cociente. Pero cuestiona por qué el concepto de isomorfismo no se considera en ese mismo listado, y que no consideran los términos "cerradura", "asociativa", "identidad" e "inverso" como problemáticas, ni se indican si son fundamentales como "grupo", "subgrupo", "subconjunto", "producto de subconjuntos" y "normalidad". Burn también critica el artículo de Dubinsky et al. (1994) cuando mencionan que "estudiantes quienes no han construido concepciones relativamente poderosas de conjuntos y funciones pueden tener una gran cantidad de problemas con muchos conceptos de grupos", ya que argumenta que no dan sugerencias en cómo pueden ser aprendidos esos conceptos.

Dubinsky et al. (1997) responden a Burn (1996) con el artículo "A reaction to Burn's 'What are the fundamental concepts of group theory?' Para comenzar aclaran que la descripción que hace Burn señalando que Dubinsky et al. (1994) presentan una nueva forma de enseñanza usando el software ISETL no refleja la realidad, ya que en ese trabajo sólo se hace referencia a ésta para indicar el método de enseñanza, pero el trabajo no se enfoca en ISETL. Afirman que intentan contribuir al conocimiento de cómo pueden desarrollar los estudiantes su entendimiento de ciertos conceptos de la teoría de grupos, además de enfocarse en buena parte del trabajo a analizar e interpretar, mediante la teoría APOE, extractos de las respuestas a las entrevistas hechas a los estudiantes. Dubinsky et al. (1997)

indican que siendo uno de los propósitos el comparar la teoría APOE con los datos, se esperaría que la crítica fuera en ese sentido.

Algo en que sí están de acuerdo es que están desarrollando actividades para un curso de Álgebra Abstracta el cual se refleja en un libro de texto. También entienden la preocupación de Burn, por las dificultades que reportan por parte de los estudiantes, que podrían deberse al método de enseñanza particular que usan en Dubinsky et al. (1994). Sin embargo, aclaran que las pruebas realizadas por Zazkis en 1992 arrojan resultados similares a los de Dubinsky et al. (1994), pero que en ese entonces aún no se publicaban. También reconocen que sus investigaciones en el campo del álgebra abstracta y la teoría APOE estaban en desarrollo.

Con respecto al título del artículo y a incluir las cuatro propiedades “cerradura”, “asociativa”, “identidad” e “inverso”, así como a conjuntos, funciones, permutaciones y simetría, no están en total desacuerdo con Burn. Reconocen la importancia de las funciones, permutaciones y simetrías en la teoría de grupos y que bien el título de su artículo Dubinsky et al. (1994) se pudo haber llamado “On Learning Some Fundemental Concepts of Group Theory (Algunos conceptos fundamentales en el aprendizaje de la teoría de grupos)”.

Por último Dubinsky et al. (1997) externan su preocupación en hacer afirmaciones en este tipo de revistas de investigación, sin fundamentos en las mismas, refiriéndose a un párrafo de Burn (1996, p. 374-375). "Sin embargo, incluso para el más abstracto de los grupos finitos, una ilustración visual concreta del grupo cociente está disponible, la cual ha sido utilizada con un efecto de excelencia en la portada de Fraleigh (1967) ... Si el software informático del curso facilitara las permutaciones de las filas y columnas de una tabla del grupo, la construcción de grupos cocientes podría llegar a ser tan concreta y participativa como del resto del curso. " (Dubinsky, et al. 1997, p. 5)

Por otro lado, Tall (1999) presenta el trabajo “Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking (Reflexiones en la teoría APOE en el pensamiento matemático elemental y avanzado)" en respuesta a la presentación de Dubinsky, en el PME

23 (1999). Czarnocha, Dubinsky, Prabhu & Vidakovic (1999) presentan “One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research (Una perspectiva teórica en investigación en Matemática Educativa Universitaria)” en un foro de investigación, dentro del PME 23. Tall (1999) analiza la teoría APOE y muestra un modelo simplificado de las etapas del desarrollo del cerebro en consecuencia a estímulos sucesivos, como un fundamento biológico de la teoría. Pero cuestiona la primacía de las acciones sobre los objetos: es decir, se puede interpretar que la teoría APOE lleva a la formulación de la idea de que las operaciones cognitivas preceden a los conceptos cognitivos.

Tall (1999) menciona haber quedado pasmado al no encontrar en Czarnocha et al. (1999) la palabra “símbolo”. Reconoce que la teoría APOE ha tenido éxito en diseños de planes de estudio pero opina que sus áreas están limitadas. Por ejemplo, no se encuentran trabajos en geometría bajo la perspectiva APOE. Así que considera a APOE como una herramienta para entender la matemática cognitiva de algunos conceptos pero no la considera que sea de uso global. Para ello incluye en su artículo un esquema donde expone los temas cognitivos que considera en el desarrollo de las matemáticas. Incluye a las Matemáticas Simbólicas (procesal y proceptual), Matemáticas axiomáticas (definiciones formal y pruebas) y Espacio y Forma (perceptual – platónico).

En cuanto a trabajos que se realizan bajo el marco teórico de APOE señalando alguna limitación de la misma, encontramos a la tesis Vizcaíno (2004), quien argumenta la necesidad de trabajar en el tema de la evaluación, ya que considera que es un tema inconcluso dentro de la teoría. Aclara que responder la pregunta ¿la evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ACE genera las mismas notas de evaluación a través de entrevistas personalizadas?, es el principal objetivo de su trabajo. Cuestiona también la metodología de enseñanza ligada a la teoría APOE, sobre cómo evaluar el trabajo de un alumno cuando éste ha trabajado siempre de forma colaborativa con alguien: ¿Qué tan justo es asignarle a un alumno la calificación del grupo cuando el alumno no trabajó en la misma proporción que el resto del equipo? Vizcaíno (2004) considera que la teoría APOE sólo nos da una perspectiva inconclusa del proceso de evaluación.

Para responder a su pregunta de investigación, Vizcaíno (2004) realizó los dos tipos de evaluaciones a un grupo de estudiantes. Los datos presentados muestran que no hubo muchas variaciones en las notas obtenidas en ambos tipos de evaluaciones (metodología ACE y entrevistas personalizadas).

4.4 Sobre la unión de la teoría APOE con algún otro marco teórico

Como habíamos comentado, alrededor de toda la revisión encontramos tanto artículos como tesis que han optado por conjuntar la teoría APOE con algún otro acercamiento teórico. Según nuestra revisión la teoría APOE se ha aplicado junto con alguno de los siguientes enfoques:

- Teoría de la carga cognitiva
- Teoría de los Sistemas de Aprendizaje
- Conocimiento del cotidiano (definido por Mazzitelli y Aparicio, 2010)
- Educación Intercultural, Enculturación Matemática y Etnomatemáticas (principalmente las ideas de Alan Bishop (1999))
- Enfoque Ontosemiótico (EOS)
- Los tres mundos de pensamiento de Tall: encarnado, simbólico y formal
- Modelos y Modelación
- Registros de Representación Semiótica
- Representaciones sociales
- Socioepistemología (Comportamiento tendencial de las funciones)

- Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

En esta sección trataremos de exponer la forma en que se ha combinado y/o complementado la teoría APOE con esos otros enfoques. Algunos de estos trabajos se han desarrollado bajo el marco teórico APOE pero han usado alguna metodología ligada a otro enfoque teórico (como la Ingeniería Didáctica) y/o diseñaron actividades características de otros enfoques como la Teoría de Registros y Representación Semiótica (ver Narvaez, Berman & Rodríguez, 2011).

Por ejemplo en el trabajo de Arnon, Dubinsky y Nesher (1994) la Teoría de los Sistemas de Aprendizaje (Nesher, 1989) se complementa con la teoría APOE (Dubinsky, 1991). La intención fue contribuir en el desarrollo de planes de estudio de matemáticas para niños de 7-12 años. En este trabajo se puede ver que la teoría de Nesher no puede dar respuesta en cómo los alumnos se independizan de los objetos físicos, sin embargo, consideran que la noción de esquema en APOE es útil en este sentido.

El trabajo de Stewart en el campo del álgebra lineal usa la teoría APOE junto con “three worlds of embodied, symbolic and formal mathematics” de Tall (Stewart, 2008).

4.4.1 **Teoría APOE y Socioepistemología**

La Socioepistemología es un acercamiento teórico que se ha ido desarrollando desde inicios de los 90’s. Sus principales creadores son investigadores del Departamento de Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN: Ricardo Cantoral, Rosa María Farfán y Francisco Cordero. Actualmente existe un grupo Red CIMATES (Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa) quienes también han estado en colaboración para el desarrollo de la teoría Socioepistemológica.

La inquietud de desarrollar una nueva teoría surgió de la observación que se estaba dejando de lado la actividad humana del conocimiento matemático. Como resultado de esta inquietud, se incorporó la “dimensión social” como una componente en la construcción social del conocimiento. “La Socioepistemología es una visión teórica que busca modelizar epistemologías de prácticas que den cuenta del conocimiento matemático” (Rosado, 2004). El papel de la actividad humana dentro de la Socioepistemología es muy importante al considerarla fuente principal en la reorganización de la obra matemática. “Se considera que lo Socioepistemológico debe significar el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana” (Domínguez, 2003).

Dentro de la revisión encontramos algunos trabajos donde los autores decidieron conjuntar su marco principal Socioepistemología con la teoría APOE, al tomar ciertas características de ésta. En particular estas investigaciones tomaron de la teoría APOE la noción “Descomposición Genética”, aunque ampliada de acuerdo a las necesidades de la investigación y con la tendencia de la teoría Socioepistemologica.

Como veremos en las siguientes investigaciones Cordero trabaja junto con algunos de sus estudiantes la reinterpretación de la Descomposición Genética de la teoría APOE para poder adaptarla a sus investigaciones con enfoque Socioepistemológico. La variación en la Descomposición Genética de la teoría APOE está en enfatizar el uso de una epistemología como la base para una Descomposición Genética.

En cuanto a las tesis tenemos a Domínguez (2003) y Rosado (2004), ambas de Maestría, las cuales usan como marco principal a la Socioepistemología (tratado en las tesis como “Aproximación Socioepistemológica”). Tomando la noción de descomposición genética de la teoría APOE, ampliándola.

Domínguez (2003) trabaja sobre la asintoticidad de las funciones. Se identifica la ausencia de un marco de referencia en la matemática escolar para resignificar (se refiere al “uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su función y su forma de acorde (*sic*.) con lo que organiza el grupo humano”; Domínguez, 2003, p. 13) la asíntota de una función, y es por ello que trabaja en la construcción de ese marco de referencia. También se identifica que en el discurso matemático escolar no se consideran cuestionamientos sobre "si una curva asintótica puede tocar o cruzar la asíntota; o si las asíntotas pueden ser curvas y no sólo rectas; o si dos curvas paralelas pueden determinar comportamientos asintóticos" (Domínguez 2003, p. 95). Para corroborar su hipótesis de trabajo usa la noción de descomposición genética de la teoría APOE. Sin embargo, ya que su marco principal es la Socioepistemología hace una ampliación de la descomposición genética considerando las resignificaciones generadas en la actividad humana. Recordemos que la Socioepistemología considera la construcción social del conocimiento en los fenómenos didácticos de la matemática e incorpora cuatro componentes fundamentales en la construcción social del conocimiento: epistemológica, cognitiva, didáctica y social.

En cuanto al uso de la teoría APOE en este trabajo, Domínguez (2003, p. 50) dice: "El haber ocupado la teoría APOE en la aproximación socioepistemológica tuvo como propósito, trazar un método para diseñar la situación en cuestión de esta investigación". Entonces la descomposición genética le dio las bases para el diseño de situación y el análisis de datos.

Como se comentaba arriba, esta tesis toma de la teoría APOE la noción de descomposición genética pero la adecúa ya que la noción de resignificación es propia del acercamiento socioepistemológico. En esta investigación, la Socioepistemología ayudó a establecer una epistemología para la asíntota de la función. Ésta a la vez, dio las bases para la descomposición genética (de lo asintótico). Entonces, la variación en el diseño de la descomposición genética está en considerar la reconstrucción de significados de conceptos matemáticos en el salón de clase. Se diseñó una descomposición genética mediante la cual se hizo el diseño de actividades y de acuerdo a los resultados se revisó la descomposición genética original. El autor considera en esta tesis cuatro elementos para la reconstrucción de significados, a saber: significados, procedimientos, procesos y objetos, y argumentación. También parte de la premisa de que el conocimiento "se resignifica al paso de nuestra vivencia institucional, lo que obliga a considerar a la actividad humana o prácticas sociales como los generadores del conocimiento" (Domínguez, 2003, p. 339).

En la misma línea que la tesis de Domínguez (2003) se encuentra la de Rosado (2004), que se trata de la resignificación de la derivada. Su marco principal es la Socioepistemología, en la cual se sustenta su hipótesis de investigación. De la teoría APOE toma la noción de Descomposición Genética, la cual es ampliada al tratarse en el marco de las resignificaciones, generadas en la actividad humana.

Como hipótesis de esta investigación se asume la existencia del comportamiento tendencial de las funciones (ctf) para la construcción de significados de conceptos matemáticos en los estudiantes. "El haber ocupado la teoría APOE en la aproximación socioepistemológica tuvo como propósito, trazar un método para diseñar la situación en cuestión de esta investigación. Con este propósito y conjuntando los trabajos de investigación que desarrolla nuestra línea de investigación, pudiera ayudar a encontrar herramientas didácticas (cada vez más explícitas) que dependan de los significados y de sus reconstrucciones que surgen de la actividad humana, y también encontrar indicadores para que se reproduzcan en el sistema educativo" (Rosado, 2004, p.15). Entonces con la Socioepistemología, marco principal de esta investigación, se determinó una epistemología de la resignificación de la derivada apoyada de la argumentación gráfica de la linealidad del polinomio. Con estas ideas de la resignificación, se diseñó una descomposición genética, que es propia de la teoría APOE, considerando la necesidad de ampliar esta noción al considerar las resignificaciones que son propias de la Socioepistemología. Se consideró necesario para el planteamiento de la descomposición genética, el incluir la reconstrucción de significados en contextos interactivos de conceptos matemáticos, empleando los significados, procedimientos, procesos y objetos, y argumentos (conceptos propios de la Socioepistemología) como elementos base.

Con la misma orientación que las dos tesis de arriba dirigidas por Cordero, se encuentra Cordero y Reyes (2003) enfocado a la reconstrucción de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. En este trabajo también se usa a la Socioepistemología como el marco teórico principal, tomando de la teoría APOE la noción de Descomposición Genética. En Cordero y Miranda (2002) se enfoca también no sólo en una problemática del discurso de la Matemática escolar, la Transformada de Laplace, sino en reinterpretar la noción de Descomposición Genética de la teoría APOE.

Aguilar (2002) expresa el tomar resultados de los trabajos de Cordero y colaboradores, así como su metodología de investigación. Este trabajo usa como marco las aproximaciones teóricas: teoría constructivista de Piaget, teoría APOE y Socioepistemología. No se explica la manera en que conjunta estos tres enfoques, aunque da la idea de que, al igual que los trabajos de tesis mencionados arriba, usa la noción de descomposición genética de la teoría APOE en su versión ampliada en el contexto de las resignificaciones.

4.4.2 **Teoría APOE y Teoría de Registros de Representación Semiótica**

La teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval considera la articulación de los 'Registros de representación semiótica', tales como numérico, gráfico y algebraico, para favorecer el aprendizaje de las matemáticas. Al respecto Duval (1993) dice que "La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión". Dicha teoría reconoce tres actividades cognoscitivas asociadas a toda representación: formación, tratamiento y conversión.

De acuerdo a la interpretación de Ibarra et al. (2002), se considera a un "Registro de representación" como un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y, por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.

Esta teoría tiene como hipótesis base que *no hay neosis nin semiosis*, entendiendo a la *semiosis* como la producción de representaciones semióticas y a la *neosis* como la aprehensión de un concepto (intelección). También se defiende en esta teoría que *no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación (representaciones mentales y representaciones semióticas)*.

Algunos de los trabajos que han complementado la teoría APOE con los Registros de Representación Semiótica fueron Martínez-Planell y Trigueros (2009); Trigueros y Martínez-Planell (2010); Van Lamoen (2010); Parraguez y Van Lamoen (2011); Badillo, Azcárate y Font (2011); Badillo y Azcárate (2011).

De las referencias anteriores Van Lamoen (2010) corresponde a una tesis de Maestría titulada "Construcción del concepto función cuadrática en estudiantes sordos". Con base en los resultados de esta tesis se publicó Parraguez y Van Lamoen (2011). Los autores notan que no hay estudios enfocados a la comprensión del concepto función cuadrática en estudiantes, con déficit auditivo. Es así que analizan cómo construyen este concepto. Para guiar su investigación consideran el uso de dos teorías cognitivas: la teoría APOE y los Registros de Representación semiótica. La teoría APOE les ayudó a construir una descomposición genética que les diera un camino posible de cómo es esta construcción y los mecanismos mentales asociados a ésta. La teoría de Registros de representación semiótica ayudó a ampliar la teoría APOE al tratar de identificar si los estudiantes adquieren "o no un determinado tipo de construcción, y si es que los mecanismos que las articulan están funcionando de manera correcta: la práctica" (Van Lamoen, 2010, p.). Asimismo explican cuáles son los diferentes registros de estas construcciones y mecanismos mentales, sin dejar de lado lo importante de considerar la percepción visual y el manejo entre los diferentes registros que mostraban los estudiantes debido a su déficit visual aunado a las dificultades que de por sí se enfrentan con los conceptos matemáticos.

En esta investigación los autores utilizan los Registros de Representación semiótica para complementar la teoría APOE, ya que usan su metodología y el desarrollo de la descomposición genética para diseñar los instrumentos a aplicar a los estudiantes. Con ello investigan las construcciones y mecanismos mentales necesarios en el entendimiento de un concepto matemático. Por otro lado los Registros de Representación Semiótica les proporciona "las herramientas teóricas y conceptuales para analizar y representar de manera óptima, a nivel de tratamientos y conversiones, las diferentes construcciones y mecanismos presentes en la descomposición genética; considerando que la comprensión de una representación en un registro determinado parece implicar directamente la comprensión del contenido conceptual representado, sobre todo cuando el registro de representación es la lengua natural (Guzmán, I. 1998, p. 7), que para nuestro caso, se expresará en la lengua de señas" (Parraguez y Van Lamoen, 2011, p.332).

Trigueros y Martínez-Planell (2007) observan que aunque hay varios estudios enfocados en ideas generales de una función, no hay estudios enfocados a particularidades de funciones de varias variables. En este trabajo presentado en el acta del PME, utilizan como marco teórico a la teoría APOE. Sin embargo, Trigueros y Martínez-Planell (2009 y 2010) continúan su investigación analizando el trabajo de los alumnos con las funciones de dos variables pero optan por complementar la teoría APOE con los Registros de Representación Semiótica. Estas investigaciones son parte de los primeros desarrollos del trabajo de estos investigadores desde la perspectiva de la conjunción de la teoría APOE con los Registros de Representación Semiótica. En él buscan determinar la relación entre las nociones de los estudiantes para el subconjunto del espacio tridimensional y las gráficas de las funciones de dos variables. Analizan algunos factores geométricos con relación a la noción que tienen los estudiantes sobre las funciones de dos variables.

Otra investigación que usa como marco teórico la teoría APOE y la compementa con los Registros de Representación semiótica estudia la comprensión de profesores sobre la relación entre f'(a) y f'(x) (Badillo, Azcárate y Font, 2011; Badillo y Azcárate, 2011). Los autores usan la teoría APOE como modelo teórico para analizar los niveles de comprensión que logran los profesores, y las Representaciones semióticas para poder describir los conflictos semióticos asociados a los esquemas que construyen los profesores, asimismo para evidenciar la importancia de que se asocie f'(x) con f'(a) en la resolución de problemas.

Narvaez et al. (2011) utilizan como su marco teórico la teoría APOE y toman algunas ideas de los Registros de Representación semiótica para el diseño del material didáctico; la intención de esta investigación es dar aportes en la enseñanza del concepto de límite mediante el desarrollo de nuevos materiales didácticos que apoyen a ello. Usan a la Ingeniería Didáctica como su metodología de investigación.

Todo lo anterior muestra que la teoría APOE es una teoría viva y que está en constante desarrollo. Alrededor del mundo se ha utilizado con cierto éxito para describir la comprensión de las matemáticas, sobre todo en el nivel universitario. Investigadores en formación siguen aprendiendo esta teoría y siguen enriqueciéndola con sus aportaciones.

Bibliografía

Aguilar, M. (2002). Relaciones entre F y F' el papel del registro gráfico… En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1004-1009), vol. 1. Buenos Aires, Argentina: Grupo Editorial Iberoamérica……………………………………………..p. 179

Aguilar, P. (1999). Entendimiento de las operaciones binarias: ¿Qué puede suceder en un cambio de contexto? Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México………..……p. 210

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría APOE. Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca-España, Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. ……………………………..p. 256

Aldana, E. & González, M. (2009). Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática.* Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander…………………………………………………………..p. 148

Almendra, F. & Sotres, D. (2010). Some activities designed for teaching the type I error concept in a constructivist environment using simulation. *Far East Journal of Mathematical Education,* 5(1), 1-15……………………………………………………………......p.160

Alvarado, L. (2010). El cuerpo de los números reales: Una propuesta didáctica para su construcción como estructura algebraica. Tesis para optar al Grado de Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Instituto de Matemáticas……………………………………………………………………p. 253

Alvarenga, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6(3), 199-219...p. 140

Alvarenga, K. (2006). Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN, Unidad Legaria, D.F. México……p. 222

Álvarez, M. (1995). Tangente y derivada: un estudio longitudinal. Tesis de Licenciatura, ITAM, México, D.F., México…………………………………………………………........p. 226

Arnawa, I M., Sumarno, U., Kartasasmita, B., & Baskoro, E. T. (2007). Applying the APOS theory to improve students (*sic*.) ability to prove in elementary abstract algebra. *Journal of the Indonesian Mathematical Society,* 13(1), 133-148……………………………………p. 174

Arnon, I., Dubinsky, E. & Nesher, P. (1994). Actions which can be performed in the learner's imagination: the case of multiplication of a fraction by an integer. *Proceedings of the*

Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 283-290). Lisbon, Portugal: University of Lisbon……………………………………..p. 126

Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(2), 167-214…………………………………………...……p. 112

Arnon, I., Dubinsky, E., Morics, S., Moses, M., Oktac, A., Stenger, C. and Weller, K. (2008). Thinking processes of GCM: a cognitive inquiry. In R. Leikin (Ed.) *Proceedings of the 5th international conference on Creativity in Mathematics and Education of Gifted Student*, (pp. 73-76), Haifa, Israel..…………...………...……….…………………………………..p. 82

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K.(2014). APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer…………………………………………………………………..p.264

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40-55………………………………….p. 137

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II*1-32 (pp. 1-32). CBMS Issues in Mathematics Education, 6.. ………………………………………………………………………………...…….p. 42

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 241-309.…………...…………………………………………………p. 105

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Entendimiento de los estudiantes de clases laterales, normalidad y grupos cocientes. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, ALME 11, 74-77.………...…….p. 74

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431…………………………………………………………………………….p. 50

Asiala, M., Brown, A., Kleiman J. & Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 13-43.…………………..…………………………………..p. 75

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. & Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 246-259. ……………………………………………………………………………………...p. 99

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia "La derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física". Tesis de Doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España…………………………………………………………………......p. 251

Badillo, E. & Azcárate, C. (2011). Líneas de coherencia y redes sistémicas: Una aproximación metodológica para el análisis de la comprensión de profesores de los macro objetos f'(a) y f'(x). En M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 137-155). Lleida...p. 207

Badillo, E., Azcárate, C. & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-201……. ………………………………………………………………………………………p. 206

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.………………...………………………......p. 65

Baker, B., Trigueros, M. & Hemenway, C. (2001). On transformations of functions. En R. Speiser, C. Maher & C. Walter (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 91-98), vol. 1. Snowbird-Utah..…………………………..…………..p. 52

Baker, B. & Trigueros, M. & Cooley, L. (2002). On the integration of knowledge: Geometrical interpretation of the properties of functions. Abstracts of the *2nd international conference on the teaching of mathematics* (at the undergraduate level), 27………….………….p. 68

Baker, B. & Montgomery, A. (2006). A unified representation of function in college algebra: Graphs. En S. Alatorre, J. L.Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

………......p. 115

Barrera, J. (2001). Un acercamiento al entendimiento de la regla de la cadena. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 548-553). Panamá, Panamá: Grupo Editorial Iberoamérica……….p. 198

Baxter, N., Dubinsky, E. & Levin, G. (1988). Learning Discrete Mathematics with ISETL. Springer-Verlag, New York, inc……….p. 260

Bayazit, I. & Gray, E. (2004). Understanding inverse functions: The relationship between teaching practice and student learning. En M. J. Høines & A. B. Fuglestad, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 103-110), vol. 2. Bergen- Norway……….p. 163

Bayazit, I. (2010). The influence of teaching on student learning: The notion of piecewise function. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(3), 146-164……….p. 166

Bayazit, I. & Gray, E. (2008). Qualitative differences in the teaching and learning of the constant function. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 7(2), 147-163……….p. 164

Berman, C., Narvaez, A. y Rodríguez, M. (2011). ¿Problemas con el límite o el límite de los problemas enseñados? En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.585-594). Cd. de Guatemala, Guatemala: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C……….p. 144

Bodí, S., Valls, J., Llinares, S. (2005). Analysis of the developmental schema for divisibility in N. Constructing a tool. (El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento). *Números*, 60, 3-24……….p. 172

Bodí, S. (2008). Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Tesis doctoral, Universidad de Alicante, Alicante, España……….p. 252

Boester, T. (2010). Testing Conceptual Frameworks of Limit: A Classroom-Based Case Study. *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*……….p. 205

Boigues, F. (2010). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. D. Contreras & R. Ordoñez (Eds.), *Jornadas de Investigación en Didáctica del análisis matemático de la SEIEM*, 42-61. Baeza……….p. 143

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285..................p. 101

Brijlall, D. & Maharaj, A. (2008). Applying APOS theory as a theoretical framework for collaborative learning in teacher education. *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, México..………………………...……………………………..p. 165

Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239.……........……p. 51

Brown, A., McDonald, M. & Weller, K. (2010). Step by Step: Infinite iterative process and actual infinity. En F. Hitt, D. Holton & P. Thompson (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education*, VII. CBMS Issues in Mathematics Education, 16, 115-142....p. 88

Brust, M. (1997). Solución de Ecuaciones de segundo Grado: Un análisis comparativo. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, D.F., México…...p. 232

Burn, B. (1996). What are the fundamental concepts of group theory? *Educational Studies in Mathematics*, 31, 371-377…………………………………………………………….p. 34

Campero, J. & Trigueos, M. (2009). Una propuesta didáctica para optimización dinámica: El caso del cálculo de variaciones y la teoría de control. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 951-960). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. ……...……………………………...…………………p. 120

Carmona, G. (1996). El concepto de tangente y su relación con derivada. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, D.F., México.…………………p. 230

Çetin, İ. (2009). Students' understanding of limit concept: An APOS perspective. Tesis de Doctorado, Middle East Technical University, Turquía……………………………….p. 240

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule? *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.………………...………………………………………..p. 63

Chen, Xue-mei. (2007). On the learning of the concept of linear dependence of vectors. *Journal of Mathematical Education*, 16(2), 64-67…………………………………………......p. 151

Code, W., Kohler, D., Piccolo, C. & MacLean, M. (2012). Teaching methods comparison in a large introductory calculus class. En S. Brown et al. (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual*

Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 123-133), vol. 1. Portland, Oregon…………………………………...………………………………..p. 175

Codes, M. & Sierra, M. (2005). Entorno computacional y educación matemática: Una revisión del estado actual. IX Simposio SEIEM………..………………………………………..p. 138

Cooley, L., Vidakovic, D., Loch, S., Meagher, M. & Martin, B. (2006). The learning of linear algebra from an APOS perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 84-85). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional……….…………………………….......p. 115

Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 370-392…………....p. 72

Cordero, F. & Miranda, E. (2002). El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(2), 133-168………………………………p. 122

Cordero, F. & Martínez, E. (2002). El comportamiento periódico de una función como un argumento contextual. La manifestación del movimiento fuera del instante. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.55-60). Buenos Aires, Argentina: Grupo Editorial Iberoamérica……………..………………………………..p. 125

Cordero, F. & Reyes, A. (2003). Reconstrucción de significados de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. En J. R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 105-111), vol. 1. La Habana, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.……………………………….……………………p. 124

Cortés, M. (2004). Integración de conceptos en la solución de problemas de cálculo diferencial. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, D.F., México………………………………………………………………………………p. 234

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingerdorf, K., Tomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.………..……………………………………...p. 49

Cottrill, J. (1999). Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding composition of functions. Tesis de Doctorado, Pardue University……………………………………………………………………………p. 238

Cruz, K. (2008). Análisis del concepto de inecuación en libros de texto de enseñanza media desde la teoría APOE. Reporte de Investigación, Educación media. *XIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Universidad de Concepción………………………………….p. 154

Cuevas, J. (2010). Recuperación de conocimiento sociocultural a partir de las etnomatemáticas y elementos Piagetianos. Una propuesta metodológica para el aprendizaje conceptual. *Revista de Derechos Humanos y Estudios Sociales*, 2(3), 49-67…………….…………….......p. 177

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. En O. Zaslavsky (Ed.), 23 *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 95-109), vol. I. Israel-Haifa..p. 46

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. En Heuvel-Panhuizen, Marja van den (Eds.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 297-304), vol. 2.……………………………..……………………....p. 66

Davis, G. & Tall, D. (2002). What is a scheme? En D. Tall & M. Thomas (eds.) *Intelligence, learning and understanding in mathematics: A tribute to Robert Skemp* (pp. 141-160). Post Pressed, Flaxton, Qld……………………………………………………………..p. 136

De la Roque, G. (2002). Analysis of students' mental constructions when producing and interpreting graphs of functions. (Uma análise construções mentais subjacentes à produção e interpretação de gráficos de funções.) L. M. Carvalho, et al. (Eds.) 1. *Colóquio de história e tecnologia no ensino de matemática* (IHTEM) (pp. 251-260). Editora IME-UERJ: Rio de Janeiro.………………………………….…………………………………......p. 149

DeVries, D. & Arnon, I. (2004). Solution - what does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. En Johnsen Høines, M. et al. (Eds.). *Proceedings of the 28th international conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (*55-62). Bergen, Norway. Bergen: Bergen University College…………………………….…………………………...……p. 78

Domínguez, I. (2003). La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México……..p. 244

Dubinsky, E. (1986). Teaching Mathematical Induction I. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 305-317……..………………………………………………………………………..p. 37

Dubinsky, E. & Lewin, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5 (1), 55-92.…………...…………………………………………………………......p. 36

Dubinsky, E. (1988). On helping students construct the concept of quantification. 12 *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (pp. 255-262), vol.1. Hungary-Veszprem.……………...……………………………………….……p. 38

Dubinsky, E. (1989). On Teaching Mathematical Induction II. *Journal of Mathematical Behavior*, 8(3), 285-304.……………………………………………………………..………..p. 100

Dubinsky, E. (1991a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer...p. 39

Dubinsky, E. (1991b). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (pp. 160-201), New York: Springer-Verlag.…………………………………….………………p. 41

Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1991). Constructing Calculus Concepts: Cooperation in a Computer Laboratory. En C. Leibach (Ed.), *The Laboratory Approach to Teaching Calculus*………………………………………………………………………..p. 100

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). Mathematical Association of America. …………………………………….…p. 41

Dubinsky, E. & Leron, U. (1994). Learning abstract algebra with ISETL. *Springer*, New York..........……………………………………………………………………..……p. 260

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 267-305.………..................p. 102

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24-41…………………………………..…p. 44

Dubinsky, E. & Fenton, W. (1996). Introduction to Discrete Mathematics with ISETL.Springer…...………………………………p. 262

Dubinsky, E. (1997). On Learning Quantification. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(2/3), 335-362.…..………………………………………………p. 108

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, A. Duane Porter, A. Watkins and W. Watkins (eds.). *Resources for Teaching Linear Algebra*, Mathematical Association of America, MAA Notes Vol 42, 85-105.……..…………………………………………………………..p. 106

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1997). A reaction to Burn's "What are the fundamental concepts of group theory?" *Educational Studies in Mathematics*, 34, 249-253...……………………………………….......p. 34

Dubinsky, E. (1998). Una década de investigación en Educación Matemática sobre algunos temas de matemáticas avanzadas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa. *Serie: Antologías*, 3, 223-247……………….p. 45

Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (2000). On Student Understanding of AE and EA Quantification. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV*. CBMS Issues in Mathematics Education, 8, 239-289.….………………….p. 98

Dubinsky, E. (2001). Una década de investigación en algunos temas de matemáticas avanzadas. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 127-131, vol. 1. Panamá, Panamá: Grupo Editorial Iberoamérica.…………...…………………………..p. 46

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282). New ICMI Study Series, V7, Dordrecht: Kluwer. ………………………..…………………………………………………......p. 47

Dubinsky, E. (2004). Towards A Theory of Learning Advanced Mathematical Concepts. En H. Fujita, et al. (Eds.). *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (pp. 121-123), kluwer academic publishers..………………..……..………..p. 48

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335-359.………………………...…………………......p. 80

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 253-266.…...…………………………………….......p. 81

Dubinsky, E., Weller, K., Stinger, C. & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. European Journal of Pure And Applied Mathematics, 1(1), 99-121…………………………………………………………………………….…p. 84

Dubinsky, E., Arnon, I. & Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of $0.\overline{9}$ and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(3), 232-258.p.97

Dubinsky, E., Arnon, I. & Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of $0.\overline{9}$ and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(3), 232-258……………………………………………………………………………p.

Dubinsky, E. & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83-101………………………………...p.121

Font, V., Malaspina, U., Giménez, J. & Wilhelmi, M. R. (2011). Mathematical objects through the lens of three different theoretical perspectives. En M. Pytlak, *T.* Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 7 (pp. 2411-2420). Rzeszow, Poland: University of Rzeszów……………………………………………………………………..……p. 183

Gaita, C. (2008). Marcos de referencia para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las matemáticas*. Curso. Pontificia Universidad Católica del Perú, 127-140……………………………………………………………..p. 138

Gavilán, J., García, M. y Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática*, 19(2), 5-39……..…p. 208

Gavilán, J. M., García, M. & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), 157-170………………………………………………………………………......p. 199

Glosario de la teoría RUMEC/APOS [en línea] (Editado por DeVries, et al.). [Año de consulta: 2010, 2011, 2012]. Disponible en: http://www.avizora.com/publicaciones/epistemologia/textos/apos_glosario_conocimiento_0003.htm

Gómez, E. (2007). La construcción de la noción de variable. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN, Unidad Legaria, México, D.F. México…………….……………………………….…….p. 250

Hähkiöniemi, M. (2005). Is there a limit in the derivative?-Exploring students' understanding of the limit of the difference quotient. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 4 (pp. 1758-1767), Sant Feliu de Guixols, Spain: FUNDEMI IQS – UniversitatRamonLlull.……………………..…………………......p. 150

Hamdan, M. (2006). Equivalent structures on sets: equivalence classes, partitions and fiber structures of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 127-147……......p. 141

Hamdan, M. (2012). Genetic Decomposition of integration. *Proceedings of the 15th annual conference on research in undergraduate mathematics education*, 2, 444-450……….p. 147

Harding, A. & Engelbrecht, J. (2002). Using Japanese industry principles to model the learning of undergraduate mathematics. *Abstracts of the 2nd International conference on the teaching of mathematics* (at the undergraduate level), p. 162……………………..…………....p. 203

Hazzan, O. (1999). Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 71-90.

Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 55-72…. ……………………………………………………………………………………p. 167

Kú, D. (2007). Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde un punto de vista de la teoría APOE. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México……………...……..p. 213

Kú, D., Trigueros, M. & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89. 89……………………………………………………………………………...p. 61

Kú, D., Oktaç, A. & Trigueros, M. (2009). Conjunto generador y generado: Un análisis desde la teoría APOE. *XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Instituto Tecnológico de Ciudad de Madero. Avance de Investigación. 139-140.…………..………….............p. 87

Kú, D. (2010). Construcción del concepto de conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal desde el punto de vista de la teoría APOE. *XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Instituto tecnológico de la Ciudad de Madero…………………………….….p. 143

Kú, D. y Roa-Fuentes, S. (2010). La asimilación del conocimiento matemático como una actividad del sujeto. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 767-773). Santo Domingo, República Dominicana: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C…………………………..……………………………...…………p. 139

Kú, D., Oktaç, A. y Trigueros, M. (2011). Spanning set and span: an analysis of the mental constructions of undergraduate students. *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 176-186…………………………p. 88

Kú, D. (2012). Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México, D.F., México……………………..……………………………………………………p. 216

Lage, A. (2004). Análisis del aprendizaje sobre transformaciones de funciones. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, D.F., México.......p. 236

Lerman, S. (2000). The Social Turn in mathematics education research. Boaler, J. (eds.). International Perspectives on Mathematics Education, 19-44.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas, en Ponte, J.P. y Sarrazina, L. (eds.). Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia, *Actas da Escola de Verao*-1999, pp. 109-132. Lisboa: Sección de Educación Matemática Socieda Portuguesa de Ciencias de la Educación/Sociedad de Educación y Matemática.

Llinares, S., Boigues, F. & Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(3), 255-282…………………………………………………………......p. 144

Lu Yu-Wen. (2007). Understanding Mathematical Representations and transformation of functions and their graphs with the use of ICT. J. H. Woo et al. (Eds.). *Proceedings of the 31 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (p. 262). Seoul, Korea: PME.….………………………………………………………p. 152

Maharaj, A. (2010). An APOS analysis of students' understanding of the concet of a limit of a function. *Pythagoras*, 71, 41-52……………………………………………….........p. 161

Mamolo, A. (2007). Infinite magnitudes vs infinite representation: The story of π. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (pp. 233-240),vol. 3, Seoul: PME.…..………………………………………………………………p. 180

Mamolo, A. (2007). Infinite magnitude vs infinite representation: intuitions of "infinite numbers". *Proceedings for the Tenth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education…………………………………………..p. 189

Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradox as lens for exploring notions of infinity. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, 3, 353-360……………………………….………………p. 127

Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 167-182……………………………………………………………..p. 128

Mamolo, A. (2009). Accommodating infinity: a leap of imagination. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (pp.65-72), vol.5. Atlanta, GA: Georgia State University.……………………………………p. 182

Mamolo, A. (2009). How to Act? A Question about Encapsulating Infinity. *Proceedings for the Twelfth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Marriott Raleigh City Center - Raleigh, North Carolina……………………………………………………………………….......p. 159

Mamolo, A. (2009). Intuitions of "infinite numbers": Infinite magnitude vs. infinite representation. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 305-330…………………………………p. 181

Manzanero, L. (2007). Sistemas de ecuaciones lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México………..……………….......p. 214

Marambio, V. (2010). Construcción del concepto de semejanza de triángulos desde el punto de vista de la teoría APOE. Tesis para optar al Grado de Magíster en Didáctica de la

Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Instituto de Matemáticas…………………………………………………………………………p. 254

Martin, W., Loch, S., Cooley, L., Dexter, S. & Vidakovic, D. (2008). Integrating learning theories and application-based modules in teaching linear algebra. Abstracts of the ………..…p. 116

Martin, W., Loch, S., Cooley, S., Dexter, S. & Vidakovic, D. (2010). Integrating learning theories and application-based modules in teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2089-2099.…………..……………………………………………p. 118

Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2009). Students' ideas on functions of two variables: domain, range, and representations. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-80). Atlanta, GA: Georgia State University.…………….…………………………………………p.129

Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 365-384…………p. 131

Martínez-Planell, R., González, A., DiCristrina, G. y Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 235-249……………………..p. 197

McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV*. CBMS Issues in Mathematics Education, 8, 77-100…....p. 110

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), 221-278…………p. 204

Mena, A. (2011). Estudio epistemológico del Teorema del Isomorfismo de grupos. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN, Unidad Legaria, D.F. México……………………………p. 224

Miranda, E. (2000). El entendimiento de la transformada de Laplace: caso de una descomposición genética. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México, D.F., México………………...p. 243

Mora, G. y Parraguez, M. (2012). Estudio de la función lineal en estudiantes con déficit auditivo: ¿Un problema de tiempo o ritmo de aprendizaje? *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 31, 85-106……………………………………………………………..p. 209

Moreira, R. & Wodewotzki, M. (2004). A perspective on the conceptions of college freshmen regarding absolute value of real numbers. *Boletim de Educação Matemática*, 17(22), 63-81……………………………………………………………………………………p. 169

Murphy, C. (2010). Analysing children's calculations: the role of process and object. En M. Joubert & P. Andrews (Eds.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education* (pp. 145-150), vol. 30, Mánchester, Inglaterra: BSRLM.…….…………………p. 162

Narvaez, A., Berman, C. y Rodríguez, M. (2011). Una descomposición genética del límite. En Z. Cataldi & F. Lage (compiladores) *Actas de la I Jornada de enseñanza de la* Ingeniería (pp.19-25). Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional………………………..p. 178

Parraguez, M. (2009). Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial. Tesis de Doctorado, CICATA-IPN, Unidad Legaria, México, D.F., México. ……………….……………..p. 224

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2008). Construction of a vector space schema [resumen]. *15th Conference of the International Linear Algebra Society.* Cancún, México, pp. 53……..p. 55

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112-2124.…...……………..p. 59

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construcción esquema del concepto espacio vectorial. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 45-53). Santo Domingo, República Dominicana: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.….…p. 62

Parraguez, M. (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.263-271). Cd. de Guatemala, Guatemala. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.…...…...…………………………………………………p. 145

Pegg, J. & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education* (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) (pp.468-475), 37 (6).…………………………………....p. 174

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. & Lozano, P. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432 (8), 2125–2140……………..p. 193

Pu, An-shan; Shi, Ning-zhong. (2007). On senior middle school students/rq understanding of the function concept from APOS theory. *Journal of Mathematical Education*, 16(2), 48-50…… ……………………………………………………………………………………p. 154

Quintanilla, C. (2008). Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOE. *Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las* Matemáticas (pp. 311-319), Pontificia Universidad Católica del Perú: Editores Gaita……………………………………………………………………………………p. 156

Ramírez, J., Azcárate, J. & Manya, F. (2004). La teoría APOE y su aplicación en la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la lógica de primer orden. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 313-318). Santiago, Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C……….…………………………..p. 140

Roa-Fuentes, S. (2008). Mecanismos y construcciones mentales asociados al concepto transformación lineal. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México........p. 215

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 89-112.………..………………………………………p. 60

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2011). El infinito y niñ@s talento en matemáticas: una mirada desde APOE. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Recife Brasil…...p. 90

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232...p. 62

Roa-Fuentes, S. (2012). El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en Matemáticas. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México, D.F., México……..……p. 217

Rodríguez, M. & Carrasquillo, A. (2007). Improving pedagogic strategies in analytical chemistry: Applying the action, process, object, schema theory (APOS theory) to chemical education efforts. *Abstract of papers of the American Chemical Society*...…..................………p. 265

Rogers, E. C., Reynolds, B. E., Davidson, N. A. & Thomas, A. D. (eds.) (2001). *Cooperative learning in undergraduate mathematics. Issues that matter and strategies that work*. Washington, DC: Mathematical Association of America……………………..………..p.200

Rojas, C. (2008). Construcción esquema del concepto de inecuación de primer grado con coeficientes en los números reales. Reporte de Investigación, educación media. *XIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Universidad de Concepción……….p. 157

Rosado, M. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México……………………………………………………………………………………p. 246

Rosado, M. & Cordero, F. (2002). La variación, la aproximación y la transformación, como un marco de reconstrucción de significados de la derivada. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 115-120), vol.1. Buenos Aires, Argentina: Grupo Editorial Iberoamérica.…………..………………………………………………p. 76

Salgado, H. (2007). Conteo: Una propuesta didáctica y su análisis. Tesis de Maestría. CICATA-IPN, Unidad Legaria, México, D.F. México…………………………………...…p. 223

Salgado, H. y Trigueros, M. (2012). Teaching eigenvalues and eigenvectors with a modeling approach. *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 148-154.……..……………………………………......p. 134

Santiago, D. & Quezada, L. (2005). El uso de nuevas tecnologías de la información en la enseñanza de las matemáticas. En J. Lezama, M. Sánchez & J. Gabriel (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 693-699), vol. 18. Tuxtla Gutiérrez, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.…………………..p…173

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E. &Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P(N). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 93-125.…...……p. 58

Stewart, S. & Thomas, M. (2006). Student Thinking about Eigenvalues and Eigenvectors: Formal, Symbolic and Embodied Notions. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces (Proceedings of the 29th annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 487-495), vol. 2. Canberra: MERGA……………………………………………………………………..p. 184

Stewart, S. & Thomas, M. (2007). Eigenvalues and Eigenvectors: Formal, Symbolic and Embodied Thinking. *Proceedings for the Tenth Special Interest Group of the Mathematical*

Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education. Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. San Diego, California…………………………………………………………………………………p. 186

Stewart, S. & Thomas, M. (2007). Embodied, symbolic and formal aspects of basic linear algebra concepts. En J. H. Woo et al. (Eds.), *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (pp. 201-208), vol. 4. Seoul, Korea: PME…..…………………………………………………………......p. 185

Stewart, S. (2008). Understanding linear algebra concepts through the embodied, symbolic and formal worlds of mathematical thinking. Tesis de Doctorado, University of Auckland……. …………………………………………………………………………………p. 258

Stewart, S. & Thomas, M. (2008). Embodied, symbolic and formal thinking for linear combination and independence in linear algebra. *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, México……………………….……………………………..p. 188

Stewart, S. & Thomas, M. (2008). Linear Algebra Snapshots through APOS and Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking. En R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), Crossing divides: *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2). Palmerston North, NZ: MERGA……………………………………………………………………………..p. 189

Stewart, S. (2009). Understanding linear algebra concepts through APOS and the three worlds of mathematical thinking theories. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 169-176), vol. 5. Thessaloniki, Greece…….………...…p. 190

Stewart, S. & Thomas, M. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 173-188.………………………………………………………………………p. 191

Tabaghi, S. G., Mamolo, A. & Sinclair, N. (2009). The effect of DGS on students' conception of slope. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 226-234), vol. 5. Atlanta, GA: Georgia State University……….………………...………………………………………………………p. 194

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring numbers and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271–284.

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. En O. Zaslavsky (Eds.), 23 *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.111-118), vol. I. Israel-Haifa..………….…………….….....p. 35

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 223-241.

Tossavainen, T. (2009). Who can solve 2x=1? – An analysis of cognitive load related to learning linear equation solving. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 435-448……….p. 195

Trigueros, M. (2000). Students' conceptions of solution curves and equilibrium in systems of differential equations. *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. V1, 93-97…………………………………………………………………………….......p. 75

Trigueros, M. (2001). Analysis of students' strategies when solving systems of differential equations in a graphical context. *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 529-537), vol. 1. ………………...……………………………………...p. 67

Trigueros, M. (2004). Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations. En D.E. McDougall y J.A. Ross (Eds.). *Proceedings of the Twenty-sixth Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 127-134), vol. 1. Toronto..…..……p. 70

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(001), 5-31………………………………………..p. 71

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 157-176…………………………p. 54

Trigueros, M. & Lage, A. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (23-30). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional……………………….…………………………………………………......p. 54

Trigueros, M., Oktaç, A. & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. En D. Pitta – Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME* (pp. 2359-2368). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.……………..…………………………………p. 73

Trigueros G., M. y Escandón M., C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 13(36), 59-85.……..…………………………………….....p. 57

Trigueros, M. (2008). Modeling in a dynamical system course. Proceedings for the Eleventh Special *Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. San Diego - Mission Valley, California…………………..…p. 133

Trigueros, M., Ku, D. & Oktaç, A. (2008). Spanning sets and vector spaces they generate: an APOS analysis. Abstracts of the *15th Conference of the International Linear Algebra Society*, 71. Cancún, México..……………..……………………………………………p. 86

Trigueros, M. & Campero, J. (2010). Propuesta didáctica en optimización dinámica. Investigación en el aula. *Educación Matemática*, 22(3), 87-117………....…………………………p. 120

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19…………………p. 130

Trigueros, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. M. Bosch et al. (Eds.). *III Congreso Internacional sobre la TAD* (pp. 77-116), Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica..p. 135

Trigueros, M., Oktaç, A. & Kú, D. (2011). Spanning set: an analysis of mental constructions of undergraduate students. *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 210-212.…………..………………………p. 89

Van Lamoen, S. (2010). Construcción del concepto función cuadrática en estudiantes sordos: un estudio bajo las teorías APOE y Registros de Representación Semiótica. Tesis para obtener el grado de Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Instituto de Matemáticas……………………………………......p. 255

Van Lamoen, S. & Parraguez, M. (2011). Construcción del concepto función cuadrática en estudiantes sordos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 331-339). Cd. de Guatemala, Guatemala: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C……………………………………………………………………..…..p. 196

Vargas, X., Oktaç, A. & Trigueros, M. (2006). Using Apos theory to analyze the learning of the concept of vector space. *3th Young European Society for Research in Mathematics Education* YERME 3. Jyväskyla, Finland………………………………………………p. 82

Vargas, X. (2007). El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México, D.F., México……………..………….....p. 211

Vargas, X. (2008). Students (*sic.*) difficulties with concept of vector space from the point of view of Apos theory. Abstracts of the *15th Conference of the International Linear Algebra Society*. Cancún, México, 75……………………………………………………...p. 157

Vargas, J., González, Ma. & Llinares, S. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, CIAEM. 1-12, Recife, Brasil…………………………………………….p. 146

Velasco, K. (2012). Modelación de situaciones reales con ecuaciones de primer grado desde la perspectiva APOE: un estudio a nivel bachillerato. Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México, D.F., México…………………………………………………………….p. 247

Vidakovic, D. (1996). Learning the Concept of Inverse Function. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 15(3), 295-318.……………...…………………..p. 104

Vizcaíno, O. (2004). Evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN, Unidad Legaria, México,D.F. México…………...p. 220

Vízcaino, O. (2004). Evaluación de un curso de cálculo desde una perspectiva constructivista. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.467-472). Santiago, Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C………………………p. 170

Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En I. Vakalis et al. (Eds.), *2nd international conference on the teaching of mathematics* (at the undergraduate level). Wiley, New York, NY..……………………………….………p. 77

Weller, K.; Montgomery, A.; Clark, J.; Cottrill, J.; Trigueros, M.; Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Disponible en la dirección http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf ………………………………………………………………………………….……..p. 264

Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. & Merkovsky, R. (2003). Student Performance and Attitudes in Courses Based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. En A. Selden, G. Harel & F. Hitt (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education* V. CBMS Issues in Mathematics Education, 12, 97-131………..……......p. 113

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the American Mathematical Society*, 5(7), 741-750.…………………….....…p. 79

Weller, K., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology education*, 9(1), 5-28.……………………………………p. 94

Weller, K., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2011). Preservice Teachers' Understandings of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: Strength and Stability of Belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11(2), 129-159.p.96

Zazkis, R. (1993). What is the meaning of 12.34five? Preservice teachers' Interpretations. *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1. Pacific Grove, California, 275-281.…………...……………………………………………………......p. 91

Zazkis, R. & Campbell, S. (1994). Divisibility and division: Procedural attachments and conceptual understanding. En J. Pedro da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 423-430), vol 3. Lisbon, Portugal: University of Lisbon.…………..…...…………….…………..p. 92

Zazkis, R. & Khoury, H. (1994). To the Right of the "Decimal" Point: Preservice Teachers' Concepts of Place Value and Multidigit Structures. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education, I.* CBMS Issues in Mathematics Education, 4, 195-224.……..……………………………………..………p. 93

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 540-563.………………...……………………………………………………………p. 93

Zazkis, R. & Gunn, C. (1997). Sets, Subsets, and the Empty Set: Students' Constructions and Mathematical Conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(1). 133-169……………………………………………………………….........p. 109