CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

UN ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL RAZONAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO ACERCA DE LA EQUIVALENCIA ENTRE EXPERIENCIAS ALEATORIAS

T E S I S

Que presenta:
ABIGAIL GONZÁLEZ MALDONADO

Para obtener el grado de:
MAESTRA EN CIENCIAS

En la Especialidad de
MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directores de la Tesis:
Dr. Ernesto A. Sánchez Sánchez
Dra. Guadalupe Carrasco Licea

Ciudad de México | marzo 2019

Tabla de contenido

Agradezco al CONACYT, por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de maestría.

Beca: 456426

Agradecimientos

Agradezco a mis directores de tesis el Dr. Ernesto A. Sánchez Sánchez y la Dra. Guadalupe Carrasco Licea haberme dedicado su tiempo para enseñarme todas las cosas nuevas que he aprendido. Gracias por la paciencia, la comprensión y el apoyo que me brindaron para hacer posible este trabajo.

Gracias al Dr. François Charles Bertrand Pluvinage por tomarse el tiempo para revisar mi tesis y por la retroalimentación brindada. También al Dr. Mario Sánchez Aguilar que me ha apoyado desde mi etapa en la licenciatura, gracias por todo lo que me has enseñado.

A mis padres que me han apoyado en los peores momentos y que siempre han creído en mí, ustedes han sido mi mayor inspiración.

A mi hermana, que es también mi mejor amiga y a mi cuñado por haber hecho más amena esta etapa y por brindarme tantos ratos de felicidad. Gracias por todos los consejos.

A mi Esteban, que día con día me motivaba a ser mejor estudiante y mejor persona. Gracias por enseñarme a no rendirme, por mostrarme que tan fuerte puedo ser. Donde quiera que estés, espero que te sientas orgulloso de mí.

Dedicado especialmente a la persona más valiente, generosa y sincera que he conocido. Roberto Esteban Saucedo Bernal, cada paso que he dado ha sido por ti.

Resumen

Se exponen los resultados de un cuestionario de 7 preguntas sobre Experiencias Aleatorias Equivalentes (EAE) que se aplicaron a 21 estudiantes en un experimento de enseñanza. Tres preguntas fueron de identificación, una de explicitación de propiedades y otra de construcción de EAE. Dado que esta noción está presente en el razonamiento probabilístico de cualquier nivel escolar y ausente en los programas de estudio, surgieron las preguntas: ¿cómo razonan los estudiantes con la noción de EAE?, ¿hacerla explícita les ayuda a mejorar su razonamiento? Para responderlas, se hizo un análisis de las respuestas mediante un proceso de codificación y detección de asociaciones entre las frecuencias de respuestas pertenecientes a cada código. Los resultados confirman que cuando los estudiantes pueden hacer explícitas las propiedades de las EAE tienen mejores niveles de respuesta en las otras preguntas.

Abstract

The answers to 7 questions about Equivalent Random Experiences (ERE) that were applied to 21 high school students in a teaching experiment are analyzed. Three questions were of identification, one of property specification and another one of construction. Given that the ERE notion is present in the probabilistic reasoning of any school level and absent in the probability study programs, the following questions arose: how do students reason with the notion of equivalent random experiences? Does making it explicit help them to improve their reasoning? To answer these questions, an analysis of the responses was made through a process of encoding and detecting associations between the response frequencies belonging to each code. The results confirm that when the students can make explicit the properties of the EAE they have better levels of response in the other questions.

1. Introducción y planteamiento del problema

A través de su paso por los cursos de probabilidad, los estudiantes se enfrentan a una gran variedad de problemas probabilísticos; a menudo en dichos problemas se utilizan diferentes tipos de dispositivos *generadores de probabilidad* (Benson y Jones, 1999) como dados, monedas, urnas con bolas, etc.; para representar una experiencia aleatoria. Sin embargo, algunos de estos problemas parten del mismo modelo matemático, es decir, estructuralmente son equivalentes; por ello, es importante que los estudiantes reconozcan cuando un problema nuevo puede ser resuelto de la misma manera en la que se resolvió otro anteriormente, y que no vean a cada problema de manera aislada. El estudio de la equivalencia de experiencias aleatorias, sin duda, es muy importante para que los estudiantes logren una mejor comprensión de la probabilidad.

Que un estudiante sea capaz de reconocer que dos dispositivos *generadores de probabilidad* son equivalentes, podría ayudarlo a extender los conocimientos a nuevos problemas. Por ejemplo, si un estudiante resuelve de manera correcta un problema situado en el contexto de lanzamiento de un dado, y posteriormente se le presenta un problema en un contexto de urna con seis bolas (de colores distintos); él podría utilizar la equivalencia de dichos generadores y transferir los resultados obtenidos en el problema del dado al problema de la urna, y así no repetir todos los pasos que lo llevaron a resolver el primer problema.

Lo anterior es una de las motivaciones por las que se eligió la equivalencia de experiencias aleatorias, como tema de investigación. También se considera que el estudio este tema es relevante cuando los estudiantes se enfrentan a tareas de simulación, ya sea física o computacional; ya que es indispensable que ellos comprendan que dicha simulación puede representar una situación realista, porque ambos poseen una estructura equivalente.

Los programas de estudio de probabilidad en el bachillerato cada vez reconocen con mayor claridad que el uso de la tecnología es un potente soporte para la didáctica de la probabilidad y estadística. La presentación de las asignaturas correspondientes en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, señala: “Los programas de la materia incorporan las tecnologías digitales como parte de los aprendizajes a lograr y no solo como un recurso para alcanzarlos, con un enfoque que trasciende la sociedad informática, insertando a los alumnos en la sociedad del conocimiento.” (CCH-UNAM, 2016).

Más específicamente, en la descripción del enfoque de las asignaturas Estadística y Probabilidad I y II, se plantea:

> Valorar el hecho de que el tratamiento de problemas de probabilidad se realice desde un enfoque frecuencial, modelando con la simulación, tanto física, que implica una comprensión integral por parte de los alumnos del problema y su solución, como la realizada en la computadora, deviene en un recurso didáctico que coadyuva a diversificar las posibilidades de experiencias de aprendizaje (p. 9)

Se ha reconocido también que el uso de las herramientas tecnológicas es muy importante para hacer mas accesibles y concretos conceptos abstractos, y por tanto no debiera restringirse sólo a facilitar cálculos laboriosos. En el texto citado se señala:

> Asistir al desarrollo del proceso mediante el uso de la computadora para el diseño de experiencias de aprendizaje, debe estar enmarcado en concepciones como la mencionada, pues se debe trascender al mero uso de procesadores de datos que, importantes para algunas etapas, sobre todo para lo referente a las aplicaciones de las técnicas estadísticas y representaciones, resultan insuficientes para el abordamiento de conceptualizaciones probabilísticas en el sentido descrito. (p. 9)

El reconocimiento de que la simulación computacional es una herramienta fundamental que permite a los estudiantes un enfoque experimental para las concepciones estocásticas adecuadas (Hoffman et al. 2014), conducen a la necesidad de diseñar actividades que permitan hacerlo de la mejor manera posible. Chaput et al. (2011) señalan que la importancia del uso de la simulación computacional no reside en su potencia y velocidad para presentar una amplia gama de nuevas experiencias aleatorias, más bien:

> El interés didáctico de la simulación está en otra parte: en el análisis de la situación aleatoria, el diseño de hipótesis del modelo y su traducción a instrucciones de computadora que son necesarias antes de las simulaciones (p. 93, traducción propia)

Ireland y Watson (2009) refuerzan esta idea cuando se preguntan sobre las conexiones que hacen los estudiantes cuando realizan simulaciones por computadora:

> Por ejemplo, ¿cuál es la comprensión de los estudiantes sobre cómo la computadora elige los resultados aleatoriamente? ¿Los estudiantes establecen conexiones entre la simulación por computadora y los manipulables concretos? ¿Qué entendimientos son necesarios para esta transición? (p. 232, traducción propia)

Es precisamente la equivalencia lo que justifica dicha conexión entre la simulación por computadora y los manipulables concretos (Benson y Jones, 1999 le llaman generadores de probabilidad). Aunque no es mencionado por Ireland y Watson, es también importante que los estudiantes razonen acerca de las conexiones entre las situaciones realistas y los dispositivos generadores de probabilidad (modelos pseudo-concretos). En general, que los estudiantes comprendan la equivalencia de experiencias aleatorias podría apoyarles a una transición efectiva de situaciones realistas a dispositivos generadores de probabilidad y posteriormente a simulaciones computacionales.

A pesar de lo planteado anteriormente, la equivalencia de experiencias aleatorias no es un tema que se aborde en clases de probabilidad. Algunos currículos de matemáticas (NCTM, 2000, COMMON CORE, programa del CCH) recomiendan la inclusión de simulaciones de probabilidad como una herramienta para observar los patrones de comportamiento de un fenómeno a largo plazo. Sin embargo, es necesario preguntarse si los estudiantes entienden el porqué dichas simulaciones representan el fenómeno que se quiere estudiar y si tienen claro cuáles son las justificaciones matemáticas que hacen que la simulación sea equivalente al fenómeno.

Por último, a pesar de que parece que es muy importante el concepto de equivalencia para el desarrollo del razonamiento probabilístico, se han encontrado pocas investigaciones enfocadas en la equivalencia de experiencias aleatorias (Herrera, 2017; Zimmermann, 2000; Benson y Jones, 1999). Las investigaciones encontradas abordan la equivalencia entre situaciones realista y modelos pseudo-concretos los cuales se usan para realizar simulaciones físicas; sin embargo, no se encontraron investigaciones donde se estudiara la equivalencia en contextos tecnológicos, es decir, en las simulaciones computacionales.

1.1. Pregunta de investigación

Chaput, et al. (2011) señalan que: “[Una] pregunta es cómo justificar a los estudiantes la equivalencia de experiencias aleatorias reales o descripciones pseudo-concretas con una simulación por computadora, programada juiciosamente desde un modelo teórico. La equivalencia está asegurada por el hecho de que ambas experiencias son relativas al mismo modelo probabilístico, un concepto que aún no está disponible para los estudiantes.” (p. 93). Aunque la equivalencia está presente, uno se puede preguntar cómo la entienden los estudiantes. Con un sesgo constructivista, convendría hacer una pregunta más general concerniente a la equivalencia de experiencias aleatorias, dicha pregunta es la que guía esta investigación:

¿Qué patrones de razonamiento emergen de las respuestas de los estudiantes con relación a la equivalencia entre dos experiencias aleatorias, cuando responden preguntas que implican dicha equivalencia? En particular, nos hacemos la misma pregunta cuando los estudiantes participan en actividades de simulación.

Estos patrones pueden informar sobre cómo los estudiantes hacen explícitas sus ideas sobre la equivalencia, la cual probablemente han utilizado en la solución de problemas o simplemente en la reflexión sobre una situación aleatoria. Por ejemplo, cuando un estudiante acepta que el experimento de observar el sexo de un niño que nace se puede simular con el lanzamiento de una moneda, acepta implícitamente cierta equivalencia ¿en qué se fija para considerarla?

Propiciar que hagan explícitas las características que utilizan los estudiantes para evaluar que dos experiencias aleatorias sean equivalentes es importante para saber qué aspectos hay que reforzar para que se apropien de una caracterización más precisa, que le sirva de instrumento para entender mejor la probabilidad y para resolver problemas, en particular, para entender los procesos de simulación.

En este sentido conviene hacer la pregunta ¿Cómo se puede influir para que tales patrones se acerquen a los razonamientos normativos? No obstante, previamente exploraremos la manera en que los estudiantes intentan darle sentido a una idea de equivalencia, quedándonos sólo en la etapa exploratoria, pues para responder una pregunta sobre el cómo, es necesaria dicha etapa exploratoria. Esto ya no es posible hacerlo con las limitantes de la presente investigación.

1.2. Objetivos

Inicialmente esta investigación tenía como objetivo caracterizar el razonamiento de los estudiantes cuando participaban en actividades de simulación física y computacional de situaciones binomiales, se decidió este objetivo con el fin de darle una continuación al trabajo de Herrera (2017), por lo tanto, la intención era extraer el instrumento de dicho trabajo, para modificarlo y adaptarlo a esta investigación.

Sin embargo, mientras se realizaba la modificación del instrumento, surgió la necesidad de poner más atención a la equivalencia de experiencias aleatorias, ya que a lo largo de las actividades los estudiantes realizaban simulaciones físicas y computacionales de un problema dado, y no había reactivos en los que se pudiera evidenciar si los estudiantes comprendían que dichas simulaciones eran equivalentes al problema que se presentaba. Por ello, se decidió agregar preguntas enfocadas en la equivalencia de experiencias aleatorias.

Los resultados de la aplicación del instrumento arrojaron que, en relación a las actividades de distribución binomial, no hubo mucho cambio en el razonamiento de los estudiantes de esta investigación en comparación con la de Herrera (2017); sin embargo, en el instrumento de esta investigación se aborda un tema en el que Herrera no había profundizado, la equivalencia de experiencias aleatorias; los resultados de los reactivos relacionados con este tema revelan aspectos pertinentes para la didáctica de la probabilidad. Por lo que se decidió modificar el objetivo inicial, quedando de la siguiente manera:

- Identificar y describir patrones en los razonamientos de un grupo de estudiantes de bachillerato con relación a la equivalencia entre dos experiencias aleatorias, en sus respuestas a unas preguntas que implican equivalencia, en particular, algunas relacionadas con actividades de simulación.

2. Antecedentes

El propósito de este capítulo es presentar una revisión de la literatura que es relevante a este estudio. En la primera sección se presenta un reporte de investigaciones en las que se abordan algunos conceptos relevantes en probabilidad. En la segunda se encuentran reportes de investigaciones enfocados en modelación y simulación en probabilidad. En la tercera sección se presentan estudios relacionados con la equivalencia de experiencias aleatorias, el cual es el tema central de esta investigación.

2.1. Investigaciones en probabilidad

Jones, Langrall y Mooney (2007) reportan una revisión de la literatura acerca de las investigaciones de campo en probabilidad y estadística, que se han hecho desde la revisión de Shaughnessy (1992); ya que los autores consideran que el período transcurrido desde la revisión de Shaughnessy ha sido una época de reforma curricular en matemáticas para los Estados Unidos (NCTM, 1989, 2000) y para diversos países, por lo tanto los movimientos curriculares crearon una necesidad urgente de nueva investigación en probabilidad.

Shaughnessy (1992) señaló que, hasta ese momento, no había mucha investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad. Incluso, los esfuerzos de los investigadores en el período previo a la revisión de Shaughnessy fueron en gran parte poco conocidos, ya que la probabilidad casi no recibía atención en las escuelas primarias y secundarias; y en el bachillerato la atención se centraba en gran medida en problemas de bolas dentro de una urna que se resolvían mediante aplicaciones combinatorias.

Para Jones et al. (2007) la investigación en este período anterior también proporcionó una infraestructura y un foco para la investigación de probabilidad en el período actual; además dicha investigación ha sido impulsada por los objetivos y las direcciones de reforma reflejados en los documentos curriculares nacionales. Por ello, los autores enfocan su revisión bibliográfica en cuatro temas conceptuales extraídos del Currículo y Estándares de Evaluación para Matemáticas Escolares (NCTM) y de los currículos de Australia y el Reino Unido. La elección de estos dos últimos documentos curriculares fue porque aparecieron casi al mismo tiempo que los estándares de la NCTM y, con éste, parecían sentar las bases para gran parte del desarrollo curricular en probabilidad y estadística a nivel mundial. Los conceptos en los que se enfoca la revisión bibliográfica de Jones et al. son: el azar y la aleatoriedad, el espacio muestral, la medición de probabilidad (clásica, frecuencial y subjetiva) y las distribuciones de probabilidad.

En relación con el **azar y la aleatoriedad** Jones et al. (2007) manifiestan que el lenguaje que usan los estudiantes para interpretar situaciones que involucran el azar proporciona una visión de la variedad de percepciones que evoca este complejo constructo. Para ejemplificar dicha variedad, los autores usan el trabajo de Fischbein et al. (1991), en el cual se les preguntó a estudiantes de primaria (9-11 años) y de secundaria (11-14 años) que dijeran si diferentes eventos de obtener números dados eran: imposible, posible o certero a) cuando arrojan un dado regular, b) cuando utilizan un generador aleatorio uniforme con números del 1 al 90. Los autores encontraron que la mayoría de los estudiantes de ambos niveles identificaron adecuadamente los eventos imposibles, posibles y certeros; sin embargo, el razonamiento de algunos estudiantes reveló un uso no normativo del lenguaje de la probabilidad. Estos estudiantes utilizaban frases como “es imposible, porque la probabilidad es muy pequeña" o "es certero porque en la tómbola hay un 31”.

Jones et al. (2007) mencionan que cuando los estudiantes cuantifican situaciones de azar, la evidencia sugiere que abusan del lenguaje. El ejemplo más común es el uso de la frase 50–50 para describir la probabilidad de un evento en particular en situaciones en las que un evento es posible, los estudiantes utilizan con frecuencia la expresión 50-50 de probabilidad para indicar la presencia de incertidumbre en lugar de una medida específica. En este sentido, también merece atención considerar las expresiones que utilizan los estudiantes para señalar experimentos equivalentes, como “son lo mismo”, “dan los mismos resultados”, etc. En el problema de Fischbein mencionado anteriormente se presentan situaciones en las que es importante un concepto claro de equivalencia. Por ejemplo, el evento A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} es seguro cuando se arroja un dado regular y es sólo probable cuando se utiliza un generador aleatorio uniforme con números del 1 al 90; y esto se debe a que las experiencias aleatorias no son equivalentes.

Tarr (2002) destacó dos formas distintas en las que la frase 50–50 se usa de manera inapropiada. Uno implica el uso de la expresión “50–50 de probabilidad” para describir un conjunto de más de dos resultados igualmente probables. El otro uso incorrecto de la frase implica el uso de la expresión “50–50 de probabilidad” para describir dos resultados que no son igualmente probables. Una versión generalizada del uso de la expresión “50–50 de probabilidad” es conocida como el sesgo de equiprobabilidad, el cual se refiere a situaciones en las que todos los resultados son tratados como equiprobables, incluso cuando no lo son (Jones et al., 2007). En términos de equivalencia de experiencias aleatorias, los estudiantes que caen en el sesgo de equiprobabilidad considerarían como equivalentes a todas las experiencias aleatorias cuyo espacio muestral tenga la misma cardinalidad.

En cuanto al concepto de **espacio muestral** Horvath y Lehrer (1998), sugieren que entender y utilizar la noción de espacio muestral requiere la coordinación de varias habilidades cognitivas: (a) reconocer las diferentes formas de obtener un resultado, (b) poder generar de manera sistemática y exhaustiva todos los resultados posibles y (c) poder mapear el espacio muestral a la distribución de resultados. Al poner de relieve la complejidad de la noción de espacio muestral, estos autores indirectamente indican la complejidad del concepto de equivalencia de experiencias aleatorias, pues éste presupone la determinación de los espacios muestrales de cada experiencia.

Según Jones et al. (2007) parte de las dificultades para determinar el espacio muestral para situaciones aleatorias compuestas se ha atribuido a la falta de razonamiento combinatorio de los estudiantes, un tema que suele estar insuficientemente representado en el currículo escolar. Los autores utilizan la investigación de Batanero et al. (1997) para mostrar algunos errores combinatorios que comenten los estudiantes cuando construyen espacios muestrales:

- Error de orden: distinguir el orden de los elementos cuando es irrelevante o no considerar el orden cuando es esencial
- Error de repetición: repetir elementos cuando no es posible o no considerar la repetición de elementos cuando es posible
- Listado no sistemático: uso de prueba y error sin un procedimiento recursivo para asegurar la identificación de todas las posibilidades
- Interpretación defectuosa del diagrama de árbol: construir un diagrama inadecuado o interpretar incorrectamente un diagrama

Sobre la base de estos hallazgos, los investigadores sugirieron que la instrucción debería enfatizar "la traducción de problemas combinatorios a los diferentes modelos [tipos de problemas], el razonamiento recursivo y los procedimientos de listado sistemático, en lugar de centrarse simplemente en los aspectos algorítmicos y en las definiciones de las operaciones combinatorias" (p. 196). Aunque no es mencionado, es importante resaltar que, en la base del conteo, y por tanto, de las operaciones combinatorias, está la correspondencia biunívoca; en efecto, la definición de contar los elementos de un conjunto es ponerlos en correspondencia biunívoca con una serie de los primeros números naturales. La correspondencia define una relación de equivalencia que permite la existencia de conjuntos equi-potentes (es decir, que tienen el mismo número de elementos) y, por tanto, es otra forma de equivalencia a la que aquí tratamos.

Fischbein, Nello y Marino. (1991), examinaron los conceptos erróneos de los estudiantes (de 9 a 14 años) sobre eventos compuestos en contextos específicos y generales. El contexto específico se refería al lanzamiento de dos dados donde se les preguntaba a los estudiantes sobre la probabilidad de dos eventos, obtener "un 5 con un dado y un 6 con el otro" o "un 6 en ambos dados". La mayoría de los estudiantes respondió que la probabilidad de estos eventos compuestos era igual y basaron sus justificaciones en dos modos de razonamiento:

- la situación implica aleatoriedad, por lo tanto, no hay razón para esperar un resultado sobre el otro.
- cada resultado simple es igualmente probable y cada lanzamiento es independiente, por lo tanto, cada resultado (compuesto) es igualmente probable.

En el contexto general investigado en Fischbein et al. (1991) se les preguntó a los estudiantes, qué es más probable, al lanzar dos dados, obtener los mismos números o números diferentes. Los hallazgos revelaron que los porcentajes de respuestas correctas para este problema fueron mayores que para los contextos específicos. Muchos de los estudiantes, que habían proporcionado justificaciones inapropiadas para el problema específico de los dados, explicaron su razonamiento para el contexto general en términos de la composición del espacio muestral. Por ejemplo, un estudiante respondió los siguiente: "Es más probable que obtengamos números diferentes porque, para obtener números iguales, tenemos 6 posibilidades, pero para obtener dos números diferentes, uno tiene 30 posibilidades" (pág. 537–538, mi traducción). Según Fischbein et al. parece ser que el contexto general motivó a los estudiantes a enfocarse más en el espacio muestral.

En relación con la **medición de la probabilidad** Batanero, Henry y Parzys (2005), subrayaron tres enfoques clave para la medición de probabilidad: clásico, frecuentista y subjetivo. Jones et al.(2007), mencionan que, a pesar de la importancia de estos tres enfoques, la investigación sobre la medición de la probabilidad se ha centrado en gran medida en el enfoque clásico, solo algunas investigaciones recientes comienzan a surgir en el enfoque frecuentista, y no pudieron localizar investigaciones sobre el enfoque subjetivo.

Hay que tener en cuenta que, dada una experiencia aleatoria, al aplicar cualquier enfoque se debe llegar a un mismo modelo de probabilidad (espacio muestral y probabilidades), esto significa que el modelo resulta invariante o independiente del enfoque por el cual se llega a determinarlo. Poner énfasis en la equivalencia de experiencias aleatorias también pone en el centro el espacio muestral y las probabilidades, por lo que podría ayudar a dejar claro que en los problemas de probabilidad esos son dos conceptos clave, mientras que los enfoques sólo son diversos caminos para llegar al modelo, alguno más apropiado que otro dependiendo de la situación específica.

Watson, Collis y Moritz (1997), plantearon a una gran muestra de estudiantes en los grados 3, 6 y 9 el siguiente problema:

> "La caja A y la caja B están llenas de canicas rojas y azules de manera en que se describe en los incisos. Las canicas se mezclan bien en cada caja. Se desea obtener una canica azul, pero solo se puede elegir una canica sin mirar. ¿Qué caja elegirías? Por favor explica tu respuesta.
>
> (A) Caja A (con 6 rojas y 4 azules)
>
> (B) Caja B (con 60 rojas y 40 azules)
>
> (=) No importa" (p. 926, traducción propia)

Watson et al. utilizaron el modelo de desarrollo de Biggs y Collis (1991) para interpretar las respuestas. Describieron las respuestas de los estudiantes en cuatro niveles para cada uno de los dos ciclos de desarrollo que aumentaron en complejidad. En el nivel más bajo del primer ciclo (adquisición de conceptos), las respuestas fueron subjetivas (seleccionan (=): el rojo y el azul son mis colores favoritos). En el segundo nivel, las respuestas indicaron el reconocimiento de los colores en las cajas, pero no se hizo referencia a la frecuencia de los colores (seleccionan (=) porque hay azul en cada una). En el tercer nivel, utilizaron frecuencias, pero de manera inadecuada al problema (seleccionan la caja B porque hay más canicas para elegir). En el cuarto nivel, se reconocieron la cantidad de canicas en cada caja y compararon los dos colores (seleccionan (=) porque hay más rojas en ambas cajas).

En el segundo ciclo (aplicación del concepto), se proporcionaron explicaciones más complejas. Primero, la equivalencia de las cajas se reconoció de acuerdo con una similitud básica (seleccionan (=) porque ambas se llenan por igual). Segundo, las justificaciones fueron más matemáticas y las proporciones se usaron a menudo (seleccionan (=) porque la casilla B tiene diez veces la cantidad en la casilla A). Finalmente, las respuestas usaron razones o porcentajes para las comparaciones dentro de la caja y luego las comparaciones entre las cajas (seleccionan (=) porque en ambas cajas son 40% azules).

La mayoría de los estudiantes en los grados 3 y 6 dieron respuestas en el tercer nivel del primer ciclo, mientras que la mayoría de los estudiantes de grado 9 dieron respuestas en el segundo ciclo de desarrollo. Jones et al.(2007), considera que estos resultados sugieren que los estudiantes piensan de manera diferente durante la adquisición o construcción de conceptos de probabilidad que cuando aplican los conceptos de probabilidad. Conviene notar que la solución del problema que formulan Watson et al. (1997) se relaciona con la equivalencia de experiencias aleatorias, ya que para llegar a la solución basta notar que el experimento de extraer una bola al azar de una caja con 6 rojas y 4 azules es equivalente a extraer una bola al azar de una caja con 60 rojas y 40 azules; por lo tanto, sin importar cual caja se elija las probabilidades de obtener una bola azul es la misma.

Falk y Wilkening (1998, citado en Jones et al., 2007), promovieron el uso de tareas de ajuste de probabilidad. Ellos proponen una tarea a los estudiantes en la que se les muestra una urna con dos bolas blancas y tres negras, posteriormente se les pidió que agregaran bolas blancas a una segunda urna (que contenía 6 bolas negras) para que la probabilidad de extraer una bola blanca fuera la misma para cada urna. Falk y Wilkening afirmaron que estas tareas requieren la evaluación de la magnitud de la probabilidad objetivo y al mismo tiempo la necesidad de comparar dos probabilidades.

Los hallazgos generales del estudio de Falk y Wilkening (1998) indicaron que los estudiantes (de 6 a 7 años) no pudieron generar la probabilidad objetivo usando nociones de proporcionalidad. Aunque sus estrategias a menudo no eran sistemáticas, sí reflejaban una tendencia a centrarse en el número de bolas objetivo o no objetivo en la urna completa. Los estudiantes, de 9 a 10 años, intentaron integrar las dos dimensiones, pero tendieron a hacerlo al tomar decisiones basadas en la diferencia entre el número de bolas objetivo y no objetivo en la urna completa. Los estudiantes de 13 años utilizaban la proporcionalidad, aunque con un nivel de rendimiento bajo.

El problema planteado por Falk y Wilkening también involucra la equivalencia de experiencias aleatorias, de hecho, podría reformularse para que se preguntara directamente sobre la equivalencia, quedando de la siguiente manera ¿Cuántas bolas blancas se deben agregar a la segunda urna para que la experiencia aleatoria de sacar una bola al azar sea equivalente a la primera? No obstante, una discusión pendiente sería la conveniencia de que se estudie la noción de equivalencia de experiencias aleatorias en niveles básicos.

2.2. Modelación y simulación

Para Henry (1997) "un modelo es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real o de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo derivado de una descripción de la realidad" (Henry, 1997, p. 78). Como el proceso de construcción de modelos de probabilidad a partir de situaciones de la realidad es especialmente difícil, la instrucción en probabilidad no estudia directamente los fenómenos reales para su modelación, sino crea una "realidad intermedia" formada por los dispositivos que generan resultados aleatorios; Henry (1997) los llama modelos pseudo-concretos.

Chaput, Girard y Henry (2011) sugieren tres pasos que intervienen en el proceso de modelación en probabilidad. El primero consiste en describir la situación concreta en el lenguaje habitual y construir un protocolo experimental que contenga un conjunto de instrucciones a seguir para realizar un experimento y reproducirlo en las mismas condiciones. Con este proceso se obtienen modelos pseudo-concretos. A partir de estos modelos se pueden crear hipótesis destinadas a interpretar la situación. Los autores dan el ejemplo de la elección al azar de un individuo de una población, esta situación se representa mediante la extracción de una canica de una urna llena da un número dado de canicas; en este modelo los estudiantes tienen que decidir que extraer una canica determinada tiene la misma posibilidad de ocurrir que extraer cualquier otra canica.

El segundo paso –continúan Chaput et al.– consiste en traducir las hipótesis de trabajo en hipótesis del modelo, aquí los estudiantes deben traducir el modelo de pseudo-concreto en un sistema simbólico simplificado, y seleccionar las características de los objetos reales que son relevantes para el modelo probabilístico. Por ejemplo, para el modelo de urna, se puede utilizar la distribución uniforme discreta para modelar la situación.

El último paso –siguiendo con Chaput et al.– consiste en traducir los resultados matemáticos al modelo pseudo-concreto y darles un significado para crear respuestas al problema original en el mundo real, y nuevamente comparar estas respuestas con las hipótesis del modelo. Finalmente, las respuestas deben ponerse en perspectiva para estimar si el modelo fue adecuado para el problema real.

En cuanto a la simulación Chaput et al. (2011) consideran que es útil para estudiar el comportamiento del modelo teórico en respuesta a las variaciones de entrada y, eventualmente, planificar las consecuencias de cambios similares en un contexto real. Los autores mencionan que en el currículo de estadística de diversos países la simulación se presenta a los estudiantes como una herramienta que ayuda a representar los resultados de un experimento concreto. Sin embargo, esto no enfatiza la necesidad de un modelo teórico subyacente necesario para lograr la tarea.

Para los autores, los modelos probabilísticos juegan un papel fundamental cuando los estudiantes realizan simulaciones computacionales; pero formulan el problema de justificar la equivalencia de la experiencia aleatoria con el experimento virtual:

> "La pregunta es cómo justificar a los estudiantes la equivalencia de experiencias aleatorias reales o descripciones pseudo-concretas con una simulación por computadora, programada juiciosamente desde un modelo teórico. La equivalencia está asegurada por el hecho de que ambos experimentos son relativos al mismo modelo probabilístico, un concepto que aún no está disponible para los estudiantes." (p. 93, traducción propia)

Para el presente trabajo, la observación formulada por Chaput, et al., es muy importante, pues hace emerger una pregunta acerca del papel que debería jugar el estudio de la equivalencia de experiencias aleatorias. En particular, si perciben naturalmente la equivalencia entre una experiencia aleatoria representada mediante modelo pseudo-concreto y la experiencia virtual correspondiente. ¿Qué papel jugaría hacer explícita la definición de experimentos equivalentes?

En este sentido, Ireland y Watson (2009) sugieren que los estudiantes, no sólo necesitan hacer conexiones conceptuales entre los objetos manipulables concretos tridimensionales y la representación abstracta bidimensional en el simulador, sino también hacer la conexión entre los procesos internos de la simulación y el proceso de obtención de los resultados. Los autores señalan que cuando los estudiantes realizan simulaciones por computadora surgen preguntas acerca de las conexiones que ellos hacen.

> "Por ejemplo, ¿cuál es la comprensión de los estudiantes sobre cómo la computadora elige los resultados aleatoriamente? ¿Los estudiantes establecen conexiones entre la simulación por computadora y los manipulables concretos? ¿Qué entendimientos son necesarios para esta transición? "(p.232, traducción propia)

Ireland y Watson destacan la necesidad de realizar más investigaciones en las que se aborden las preguntas anteriores; ellos consideran que se han llevado a cabo muchas investigaciones sobre el uso de modelos concretos y simulaciones por computadora para desarrollar otros conceptos matemáticos abstractos para estudiantes; sin embargo, a excepción del trabajo de Pratt y Noss (2002) y el de Abrahamson y Wilensky (2007), parece haber una investigación limitada sobre lo que se requiere para facilitar una transición efectiva de modelos concretos a simulaciones informáticas abstractas en el campo de la probabilidad.

Es importante, que se aclaren los anteriores aspectos, para dar paso a sugerencias como las de Konold et al. (2011), quien destaca la necesidad del uso de simulaciones computacionales en el aula; ya que los autores argumentan que una de las limitaciones de la simulación física es que no es posible recolectar suficientes datos en el aula para observar el hecho de que las estimaciones de probabilidad de muestras más grandes son menos variables que las de muestras más pequeñas; por lo tanto los autores sugieren que después de una actividad de simulación con objetos físicos, los estudiantes deben realizar una simulación por computadora, lo que permitirá la visualización de grandes cantidades de datos.

2.2.1. **Simulación en Fathom**

Hoffman et al. (2014) describen la investigación del grupo de trabajo de Rolf Biehler sobre actividades de simulaciones usando el software Fathom; los autores consideran que cumple con característica que lo hacen una potente herramienta educativa ya que con él se pueden modelar situaciones probabilísticas. Los siguientes comentarios de esta sección provienen de diferentes trabajos de autores del equipo de Biehler, por lo que forman parte de un mismo programa de investigación; conviene hacer notar de antemano que a pesar de que no mencionan el concepto de experiencias aleatorias equivalentes, es necesario que los estudiantes lo manejen (quizá implícitamente) en todo lo que sugieren que hagan.

Biehler y Maxara (2007, citado en Hoffman et al. 2014), caracterizaron tres aspectos diferentes del uso de la simulación, estos son: 1) la simulación como herramienta de representación de experiencias aleatorias, 2) la simulación como herramienta de interacción entre cálculos teóricos y métodos empíricos y, 3) la simulación como herramienta sui generis. En estas investigaciones el desafío fue el desarrollo simultáneo de tres niveles de competencias de los estudiantes: la competencia en probabilidad y estadística, la competencia de idear las simulaciones (competencias teóricas) y la competencia de implementarlas en Fathom (competencias prácticas).

Maxara (2009, citado en Hoffman et al. 2014) desarrolló una guía de introducción a la simulación con Fathom, en la que, además de los tres aspectos diferentes del uso de la simulación, dos componentes didácticos adicionales fueron esenciales: un proceso de tres pasos para una simulación estocástica y el uso de un plan de simulación.

El proceso de tres pasos consiste en: la creación de un modelo estocástico (teórico), en el cual el objetivo es que los estudiantes describan la situación aleatoria, especifiquen la distribución de probabilidad, el conjunto de resultados posibles, la variable aleatoria y los eventos de interés; el segundo paso es escribir un plan de simulación, donde los estudiantes transfieren la situación aleatoria analizada a un plan de simulación para Fathom; y el último paso es trasladar el plan de simulación a Fathom. Hoffman et al. (2014) sugieren agregar dos pasos adicionales: la modelación (pseudo concreta) de la situación real al principio, y la interpretación y validación de los resultados después de la simulación.

Maxara menciona que la realización, utilización y modificación de un plan de simulación resultó con fuertes implicaciones pedagógicas pues es a través de este que los estudiantes pueden estructurar, reflexionar y documentar sus simulaciones, por lo que establecieron la hipótesis de que el plan de simulación podría ser una herramienta meta-cognitiva para los estudiantes.

Dentro de los resultados que señala este artículo están los de los estudios de Maxara 2009)y Meyfarth (2006) (citado en Hoffman et al. 2014) que evidencian que Fathom puede apoyar muy bien en el proceso de aprendizaje y en una comprensión más profunda de la probabilidad y la estadística. Sin embargo, es primero indispensable que el software sea comprendido y entendido por parte de los estudiantes para poder trabajar problemas específicos. De esta manera la herramienta puede ser útil para llevar a cabo un aprendizaje autodirigido.

2.3. Experiencias aleatorias equivalentes

Uno de los trabajos que han servido como referencia para esta investigación es el de Herrera (2017), el cual se centró en estudiar el razonamiento probabilístico de los estudiantes de bachillerato acerca de las nociones de variable aleatoria y distribución binomial, la relación entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad y la simulación de distribuciones binomiales con ayuda de la tecnología.

El instrumento propuesto por Herrera (2017), incluía dos reactivos relacionados con la equivalencia de experiencias aleatorias. En uno ellos se les presentaba a los estudiantes una experiencia aleatoria, tomado a su vez de Johnson y Kuby (2012); dicho experimento consistía en responder al azar un examen que consta de tres preguntas, cada una de ellas con dos opciones. El modelo probabilístico que corresponde a este experimento es la distribución binomial con n=3 y p=1/2.

Una vez presentada la experiencia aleatoria a los estudiantes, se les aplicaron pidió que realizaran actividades que los llevaban a construir la distribución de probabilidad correspondiente al experimento. Posteriormente, los estudiantes debían realizar una simulación física, por lo que se les presentaba otra experiencia aleatoria que consistía en lanzar una moneda tres veces y observar los resultados; entonces se les preguntaba si el experimento con monedas podría ser útil para responder a las preguntas planteadas en el experimento del examen. Con esta pregunta la autora pretendía observar si los estudiantes identificaban “las similitudes entre la simulación y la situación que se deseaba representar, es decir, que identificaran experimentos equivalentes.” (Herrera, 2017)

Después de realizar la simulación física, los estudiantes utilizaban el software Fathom para construir una simulación computacional. Posteriormente se les preguntaba si consideraban que los procesos realizados en la computadora correspondían o eran semejantes al que se aplicó en la simulación física para responder el examen. El propósito de esta pregunta era identificar si los estudiantes veían la equivalencia entre la simulación física y la computacional.

En relación al primer reactivo, —continuando con Herrera, (2017)— donde se comparaba el experimento de lanzar monedas con el de responder al examen, la autora encontró que la mayoría de los estudiantes acuden al azar y la aleatoriedad para justificar que los dos experimentos son equivalentes; muy pocos mencionan, cuando justifican la equivalencia, la igualdad entre los espacios muestrales o la igualdad entre las probabilidades de los elementos correspondientes, cuando justifican la equivalencia; de hecho, en los casos que se reportaron, ningún estudiante menciona ambos aspectos simultáneamente. Además, un número significativo de estudiantes no reconocen la equivalencia de estos experimentos.

Los resultados anteriores fueron similares a los encontrados en el segundo reactivo, donde los estudiantes debían comparar la simulación física con la computacional; ya que la autora encontró que generalmente los estudiantes mencionaron que la simulación física y la computacional son equivalentes debido a que ambos procedimientos son azarosos. Solo se presentaron dos casos de estudiantes que utilizan la palabra “probabilidad” en su justificación, aunque este uso era ambiguo, de modo que no se podía considerar si hacían alusión a la igualdad entre las probabilidades de los elementos correspondientes.

Otro estudio que se relaciona con la equivalencia de experiencias aleatorias es el de Benson y Jones (1999), en el cual se investigó cómo los estudiantes (de primaria hasta universidad) usan dispositivos generadores de probabilidad (bolas de colores, dados, spinners y discos de colores) para modelar diferentes tareas contextuales. Los autores definen el concepto de generador de probabilidad como “un dispositivo aleatorio que produce una distribución de probabilidad específica” (p.2).

La investigación de Benson y Jones (1999) tenía dos objetivos centrales: el primero fue estudiar el pensamiento de los estudiantes cuando intentaban modelar una situación probabilística incorporada en un contexto del mundo real; el segundo objetivo de era una extensión del primero y buscaba examinar la facilidad con la que los estudiantes pueden identificar diferentes generadores de probabilidad para modelar el mismo problema contextual. Los autores resaltan que "esto también plantea la pregunta de si los estudiantes pueden reconocer cuándo y por qué dos generadores de probabilidad son equivalentes"

Los estudiantes de Benson y Jones participaron en entrevistas donde intentaban establecer modelos para situaciones probabilísticas bidimensionales (que involucran la realización de dos experiencias aleatorias o la realización de un experimento dos veces) y unidimensionales. Un ejemplo de una tarea bidimensional que Benson y Jones (1999) aplicaron es la siguiente:

> "Está oscuro. Terry quiere vestirse, pero no puede ver de qué color es la ropa. En el cajón de la cómoda superior hay seis camisas. Cada una tiene un color diferente: rojo, azul, blanco, verde, amarillo y marrón. En el cajón inferior, hay dos pantalones: uno es gris y el otro azul. ¿Cómo podrías usar uno o más de estos para modelar lo que hizo Terry? (Señala spinner, dados, bolas de colores)" (p.6, traducción propia)

Benson y Jones encontraron cuatro códigos en los que se agrupaban los tipos de razonamiento de los estudiantes: se codificó como *idiosincrático* si el estudiante razonaba de manera subjetiva o determinista; se utilizó el código *correspondencia uno a uno* cuando el estudiante representaba la situación contextual con un generador de probabilidad de tal manera que cada resultado de la situación contextual coincidía con un resultado correspondiente al generador de probabilidad y sus respectivas probabilidades también coincidían; el código *procedimiento de probabilidad* fue utilizado cuando un estudiante aplicaba una fórmula probabilística sin explicación o indicación de comprensión conceptual; una respuesta se codificó como *probabilidad conceptual* si el alumno explicaba su pensamiento utilizando conceptos de probabilidad que iban más allá de la recitación de la fórmula.

Los autores reportan que seis estudiantes, usaron correspondencia uno a uno en situaciones unidimensionales, en algunos casos antes de cualquier instrucción de probabilidad; además algunos estudiantes que ya tenían acceso a conocimientos de conceptos de probabilidad, también la utilizaban. Para Benson y Jones esto significa que existe evidencia de que el concepto de correspondencia es poderoso y natural en tareas de modelación en probabilidad; aunque también reconocen que lo anterior no significa que los seis estudiantes comprendieran completamente el significado de la correspondencia, de hecho, únicamente dos de ellos la hacían explicita en sus respuestas.

Los resultados de la investigación de Benson y Jones en relación con la modelación de situaciones bidimensionales revela qué tan cognitivamente desafiante es este proceso, incluso para estudiantes de grados avanzados, ya que solamente dos de ellos mostraron razonamientos válidos. Los autores mencionan que, en investigaciones anteriores ya se habían reportado dificultades en tareas bidimensionales teóricas, por lo que su estudio se ha sumado a los anteriores “revelando una complejidad cognitiva similar para la modelación de la probabilidad bidimensional.”(p.16)

Otro resultado del estudio es que los autores notaron que los estudiantes con mayor madurez matemática habían adquirido una concepción más fuerte de cuándo dos generadores de probabilidad eran equivalentes; por lo que los autores concluyen que dada la importancia del concepto de "generadores de probabilidad equivalentes" en el proceso de modelación, los diseñadores de currículos deberían incorporar este concepto en las experiencias de probabilidad temprana.

Por último, Benson y Jones concluyen que las investigaciones futuras deben examinar con mayor profundidad las concepciones erróneas que tiene los estudiantes acerca de la modelación. Además, ya que su estudio reveló que los estudiantes matemáticamente maduros no necesariamente hacen conexiones entre el proceso de modelación y el conocimiento conceptual y procedimental de los aspectos teóricos de la probabilidad; se necesita más investigación sobre el razonamiento de los estudiantes acerca de la modelación y la probabilidad experimental. El presente trabajo se puede pensar como una respuesta a este llamado de Benson y Jones.

3. Marco conceptual

En el presente estudio se considera la noción de Marco Conceptual como lo formula Jabareen (2009) quien lo define como “una red, o un plano, de conceptos interrelacionados que juntos proveen una comprensión global de un fenómeno o fenómenos”. Los conceptos que constituyen un marco conceptual se relacionan uno con otro de manera tal que ofrecen un acercamiento racional al fenómeno estudiado. En este trabajo se ha construido un marco conceptual a partir de la elección de los conceptos que consideramos intervienen de manera directa en la explicación del estudio. Para comunicarlo, lo hemos dividido en dos partes, una consiste en nociones de contenido y los conceptos generales de razonamiento, modelación y simulación; la otra, que llamamos el *núcleo del marco* es la articulación de los anteriores conceptos en una representación esquemática de manera que sirva para entender mejor el fenómeno que estudiamos.

3.1. Contenido matemático

Una dimensión del marco conceptual la constituye el contenido que se quiere que los estudiantes aprendan. Aunque los lectores potenciales de este trabajo seguramente los conocen, conviene mencionarlos y esbozar de manera sucinta su caracterización. Los principales conceptos involucrados son: experiencia aleatoria, espacio muestral, evento y definición clásica de probabilidad. El concepto central del presente trabajo es el de experiencias aleatorias equivalentes, el cual no suele ser parte de la exposición en la mayoría de los textos de probabilidad, sin embargo, subyace en toda actividad relacionada con la teoría de probabilidades. A continuación, se ofrece una descripción muy breve de cada uno, pero suficiente para los fines del presente trabajo; se ha dejado la noción de equivalencia de experiencias aleatorias en la siguiente sección.

Sánchez et al. (2015) definen la noción de **experiencia aleatoria** como un fenómeno cuyos resultados son impredecibles; sin embargo, se puede determinar el conjunto de todos los posibles resultados y además se puede repetir bajo condiciones similares.

Sánchez et al. (2015) definen al **espacio muestral** como el conjunto de posibles resultados de una experiencia aleatoria. Los autores añaden que muchos fenómenos son azarosos, pero solo son experiencias aleatorias aquellas en que es posible describir el espacio muestral. Cabe aclarar que en una experiencia aleatoria puede haber dos o más espacios muestrales; sin embargo, la elección de uno de ellos queda a disposición de quién realiza el experimento, dependiendo de sus intereses. Dicho de otra manera, podemos ver al espacio muestral como una composición de un dispositivo generador, ya sea físico (como dados, monedas, etc.) o informático; más la toma de decisiones que permiten elegir el espacio muestral que mejor se adecue al fenómeno a estudiar.

Continuando con Sánchez et al. (2015), se llama **evento** a cualquier subconjunto del espacio muestral y a cada elemento de un evento se le llama **resultado** o punto muestral. Se dice que un evento ocurre cuando al realizar la experiencia se presenta alguno de sus resultados.

Johnson y Kuby (2012) definen la **probabiliadad clasica** del evento A, denotada por P(A), como la razón del número de puntos que satisfacen la definición del evento A y el número de puntos muestrales en todo el espacio, con lo que P(A) resulta ser:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\textit{Número de veces que ocurre A en el espacio muestral}}{\textit{Número de elementos en el espacio muestral}}$$

3.1.1. Experiencias aleatorias equivalentes

Benson y Jones (1999) mencionan que dos *generadores de probabilidad* son equivalentes si producen la misma distribución de probabilidad. Más precisamente, los autores mencionan que dos generadores son equivalentes si sus espacios muestrales corresponden y los puntos muestrales correspondientes tienen las mismas probabilidades.

Utilizando la definición de Benson y Jones (1999), se puede decir que dos experiencias aleatorias son equivalentes si ambas producen el mismo modelo de probabilidad, o de manera más específica si cumplen las siguientes tres propiedades:

P1. Ambas experiencias tienen el mismo número de elementos en el espacio muestral

P2. Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del espacio muestral de una experiencia con los elementos del espacio muestral de la otra

P3. Los elementos correspondientes tienen la misma probabilidad

3.1.2. Modelo de probabilidad de experiencias con espacio muestral continuo

Cuando el espacio muestral de una experiencia aleatoria es de tipo continuo no es posible asignar probabilidades puntuales ni tampoco considerar como un evento a cualquier subconjunto del espacio muestral. Aunque en este trabajo no vamos a estudiar el caso de experiencias aleatorias con espacios muestrales continuos vale la pena considerarlos como conocimientos en perspectiva que resultan del desarrollo de lo que sí vamos a estudiar aquí.

Se considera el espacio muestral Ω de una experiencia aleatoria cuyos resultados están en un continuo. Para definir la probabilidad es necesario definir lo que se va a considerar un evento de Ω. Se va a llamar evento a cualquier elemento de una σ-algebra de subconjuntos de Ω. Un conjunto de subconjuntos Ω es una σ-algebra, simbolizada por $\mathcal{A}$ si:

1) El conjunto vacío está en A: $\emptyset \epsilon$ A
2) Si E está en A, también el complemento de E también está en A.
3) Si $E_1, E_2, E_3, \cdots$ es una sucesión de conjuntos de A entonces la unión (numerable) de todos ellos también está en A.

Note que como el conjunto vacío está en $\mathcal{A}$ y también su complemento, entonces Ω está en $\mathcal{A}$.

La probabilidad es una función $P(\cdot)$ definida para los elementos de $\mathcal{A}$, que cumple las siguientes 3 propiedades:

1) $P(E) \geq 0,$ para todo $E \epsilon$ A
2) $P(\Omega) = 1$
3) Si $E_1, E_2, E_3, \cdots$ es una sucesión de eventos de A mutuamente excluyentes por pares, entonces $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \cdots$

Una de las consecuencias de esta definición es que el rango de la función probabilidad es el intervalo [0, 1].

Un *espacio de probabilidad* es una terna $(\Omega, A, P(\cdot))$, donde el conjunto Ω es el espacio muestral, *A* es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y $P(\cdot)$ una función de probabilidad.

3.1.2.1 Experiencias aleatorias equivalentes (caso continuo)

Con base en lo anterior, se dice que dos experiencias aleatorias son equivalentes si dan lugar a un mismo modelo de probabilidad. Esto quiere decir que:

1) Tienen el mismo espacio muestral
2) El conjunto de eventos de ambas experiencias es la misma σ-algebra: A
3) La función de probabilidad definida para los elementos de A, es la misma para ambas experiencias.

Variables aleatorias y sus funciones de densidad

A continuación, definimos variable aleatoria, función de distribución y función de densidad que son los conceptos teóricos de probabilidad que siguen después de definir los espacios y modelos de probabilidad (Gnedenko, 1968).

Dado un experimento aleatorio cuyo espacio de probabilidad es (Ω, $\mathscr{A}$, P), una **variable aleatoria** es una función X: Ω → R, que a cada valor del espacio muestral le hace corresponder un número real de tal manera que los conjuntos $\{w \epsilon \Omega \mid X(w) \leq \alpha\}$ para cada número α, son elementos de $\mathscr{A}$, es decir, son eventos. Estos conjuntos serán denotados de la siguiente forma:

$$\{w \epsilon \Omega \mid X(w) \leq \alpha\} \coloneqq [X \leq \alpha]$$

La anterior definición permite definir la **función de distribución** F de una variable aleatoria como:

$$F(x) = P[X \leq x] \quad \forall\, x \in R$$

Algunas propiedades de esta función son: 1) $F(x)$ es continua por la derecha y no-decreciente, 2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, 3) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Sea X una variable aleatoria continua, y F su función de distribución. Se llama función de densidad $f(x)$ a una función $f(x)$ no negativa, definida sobre la recta real, que cumple con:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = P\{w \epsilon \Omega \mid \alpha \leq X(w) \leq \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) \quad \forall\, \alpha < \beta, \;\; \alpha, \beta \in R$$

Distribución uniforme

Un problema interesante es generar datos aleatorios de una distribución dada. A este proceso se le llama simulación. Decimos que sorteamos una variable aleatoria cuando se generan datos que obedecen la ley de probabilidades asociada a la variable aleatoria. La distribución continua básica es la *distribución uniforme* en el intervalo [0, 1].

La función de densidad de una variable aleatoria uniforme es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ lado \end{cases}$$

Esta función permite calcular la probabilidad de que un número x “elegido” al azar dentro del intervalo [0, 1], esté entre dos límites $a \leq x \leq b$, de la siguiente manera:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} 1dx = b - a.$$

Simulación de valores de la distribución uniforme

De acuerdo a Sobol (1983), hay tres procedimientos para obtener valores de variables aleatorias: 1) Tablas de números aleatorios, 2) Generadores de números aleatorios y, 3) Método de números pseudo-aleatorios.

Tablas de números aleatorios

Para obtener un dígito aleatorio se puede hacer el siguiente experimento. En una urna se depositan 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se mezclan bien las bolas y se extrae una al azar (garantizando que cada una de las 10 bolas tenga la misma oportunidad de salir). El número obtenido es un dígito aleatorio.

Un dispositivo como el descrito arriba para generar un dígito aleatoriamente es suficiente para obtener un número aleatorio entre cero y uno. Para hacerlo se decide de cuántas cifras decimales constará el número, supongamos que de 5 cifras decimales. Entonces se generan 5 dígitos aleatorios sucesivamente y se van colocando después del punto decimal; el resultado será un número de 5 cifras decimales, por ejemplo: 0.23277. Si este procedimiento lo repetimos una gran cantidad de veces, mil, por ejemplo, obtendremos una lista de números aleatorios.

Generadores de números aleatorios

Sobol (1983) menciona una técnica para generar números aleatorios basada en los ruidos de las lámparas electrónicas “Si durante un intervalo fijo Δt de tiempo el nivel de ruido sobrepasa el umbral escogido un número par de veces, se inscribe el cero, si esto ocurre un número impar de veces se escribe el uno” (p. 29). Desde la aparición del libro de Sobol, se han desarrollado métodos más precisos para generar número aleatorios con ideas similares.

Métodos de números pseudo-aleatorios

Otro método se orientó a la producción de números que cumplieran algunas propiedades de los números aleatorios, aunque no fueran propiamente aleatorios, lo importante es que fueran suficientemente cercanos para los objetivos de investigaciones mediante simulación. Esto se hace usando operaciones aritméticas de una computadora. John von Neumann sugirió en un principio, alrededor de 1946, usar el método del “cuadrado medio”. Su idea era calcular el cuadrado del número aleatorio conseguido por algún método previo y entonces, tomar los dígitos del medio del número calculado. Así, por ejemplo, si queremos generar un número aleatorio de 10 dígitos y el número anterior es:

5772156649 elevado al cuadrado es 33317**79238059**4909201

el nuevo número será 7923805949. Esto se hace recursivamente obteniendo números pseudo-aleatorios de 10 cifras.

Se encontró que este método no es muy satisfactorio ya que produce conjuntos de números sesgados hacía números menores. Posteriormente han sido desarrollados métodos más potentes en los que se asegura que los conjuntos de resultados se distribuyen de acuerdo con una distribución uniforme.

Sortear una variable aleatoria finita

Con un generador de números aleatorios se pueden generar números de acuerdo con una variable aleatoria discreta X dada. Supongamos que la distribución es:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$$

Considere el intervalo $0 \leq y \leq 1$ y divídase en n subintervalos de longitud: $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Los puntos de división serán: $d_0 = 0;\ d_1 = p_1, \cdots, d_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

Entonces se sortea un número de la distribución uniforme, supongamos que es $y = \gamma$, y cuando $d_{i-1} \leq \gamma \leq d_i$ se le asigna el valor x_i.

Sortear una variable aleatoria continua

En lo que sigue seguiremos en términos generales la exposición de Sobol (1985, p. 35 y siguientes). Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$ definida en un intervalo [a, b]. Los valores de x se pueden determinar mediante la ecuación:

$$\int_a^x f(t)dt = \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Es decir, que dado el valor γ, es necesario resolver la ecuación (1) para hallar el valor de x.

Consideremos la función:

$$y = \int_a^x f(t)dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Esta función es monótona creciente y va del 0 al 1. Por lo tanto, toda recta $y = \gamma$ donde $0 < \gamma < 1$ necesariamente interseca a la gráfica en un punto. Es decir, la ecuación (2) tiene una solución única.

Entonces para sortear la variable aleatoria X con función de densidad f(x) se sortea un número aleatorio (distribución uniforme), supongamos que este valor es γ, entonces el valor de *x* obtenido mediante la ecuación (3), es el valor buscado.

$$\gamma = \int_a^x f(t)dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sortear una variable aleatoria normal

El anterior procedimiento suele ser difícil de realizar porque implica resolver una ecuación que no siempre es posible resolver con métodos clásicos; por ejemplo, para la distribución normal. En estos casos, es más sencillo generar n valores aleatorios de la distribución uniforme. Luego la media aritmética de eso n valores es un valor normal con media 0 y desviación estándar 1. Esto teniendo en cuenta un teorema llamado Teorema Central de Límite.

Lo anterior es importante para darse una idea de lo que hay detrás de las simulaciones, no obstante, en la práctica ya existen diversos recursos virtuales que proporcionan valores de las variables aleatorias más importantes (Excel, Fathom, Calculadora Graficadoras (p. ej. Ti-89), etc).

3.2. Razonamiento

Otra dimensión del Marco conceptual se refiere a la parte que nos interesa destacar cuando observamos la actividad del estudiante y hemos elegido al razonamiento que realizan y se revela cuando responden preguntas o resuelven los problemas. Shaughnessy, et al. (2009), definen al razonamiento como el proceso de obtener conclusiones con base en evidencia y/o en otras proposiciones supuestas. Los autores consideran que el razonamiento matemático no se refiere únicamente al razonamiento formal, en el que las conclusiones se deducen lógicamente de supuestos y definiciones, ya que:

> El razonamiento matemático puede tomar muchas formas, desde explicaciones y justificaciones informales hasta deducciones formales, así como observaciones inductivas. El razonamiento a menudo comienza con exploraciones, conjeturas en una variedad de niveles, inicios falsos y explicaciones parciales antes de alcanzar un resultado (P.2)

Un concepto que está estrechamente ligado con el razonamiento es la producción de sentido, Shaughnessy, et al. (2009) definen la producción de sentido como el desarrollo de la comprensión de una situación, contexto o concepto al conectarla con el conocimiento existente. Según los autores, cunado un individuo pasa de las observaciones informales a las deducciones formales, su razonamiento y producción de sentido se presentan de manera entrelazada, tal como lo muestra la siguiente figura.

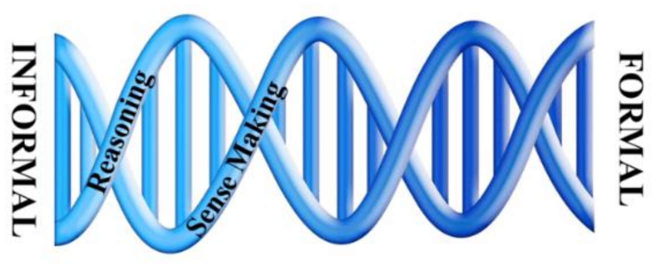


Figura 3.1: relación entre el razonamiento y la producción de sentido (tomado de Shaughnessy et al. 2009).

En esta tesis se aborda particularmente el razonamiento probabilístico, el cual se define, de acuerdo con Batanero, et al. (2016), como un modo de razonamiento que se refiere a juicios y toma de decisiones bajo incertidumbre y es relevante para la vida real. Los autores señalan que el razonamiento probabilístico ocurre en escenarios que permiten la exploración y evaluación de diferentes resultados posibles en situaciones de incertidumbre; por lo tanto, incluye la capacidad de:

- Identificar eventos aleatorios en la naturaleza, la tecnología y la sociedad;
- Analizar las condiciones de tales eventos y derivar los supuestos para hacer un modelado apropiado;
- Construir modelos matemáticos para situaciones estocásticas y explorar diversos escenarios y resultados de estos modelos; y

- Aplicar métodos matemáticos y procedimientos de probabilidad y estadística

Shaughnessy, et al. (2009) proponen una lista de hábitos de razonamiento, que son deseables en los estudiantes cuando se enfrentan a tareas matemáticas:

- Analizar un problema: buscar patrones y relaciones, considerar casos especiales, hacer conexiones con tareas anteriores
- Iniciar una estrategia: seleccionar conceptos matemáticos, representaciones o procedimientos que puedan ser aplicables
- Monitorizar el progreso: revisar la estrategia elegida, evaluar el progreso y cambiar las estrategias utilizadas según sea necesario
- Buscar y utilizar conexiones: conectar dominios matemáticos aparentemente diferentes, conectar contextos aparentemente diferentes y conectar diferentes representaciones
- Reflexionar sobre la solución a un problema: interpretar una solución y cómo responde al problema, justificar o validar una solución, generalizar una solución a una clase más amplia de problemas

Shaughnessy, et al. (2009) sugieren que un ambiente en el que se promueve el razonamiento y producción de sentido es aquel en el que los estudiantes se hacen y responde preguntas como “¿Qué está pasando aquí?” y “¿Por qué piensas eso?”. En este ambiente los estudiantes no solo serán capaces de ejecutar los procedimientos matemáticos sino también de comprender por qué funcionan esos procedimientos y cómo se pueden usar e interpretar.

Particularmente, el instrumento utilizado es para obtener datos que nos permitan inferir el razonamiento de los estudiantes acerca de las experiencias aleatorias equivalentes, en la medida en que este razonamiento se presente. Con el instrumento se enfrentan a tareas donde deben formular condiciones que consideren necesarias para la equivalencia de dos experimentos, en lugar de simplemente listarle dichas propiedades para que las memoricen.

Shaughnessy, et al. (2009) mencionan que la tecnología se puede utilizar para apoyar el razonamiento y producción de sentido en el aula de matemáticas ya que esta puede ser particularmente útil para buscar patrones y relaciones, para formar conjeturas y generalizar una solución. La tecnología también permite a los estudiantes mostrar múltiples representaciones del mismo problema y esto les puede ayudar a hacer conexiones.

3.3. Modelación

La equivalencia de experiencias aleatorias se relaciona con la modelación, pero son dos procesos diferentes. Una experiencia aleatoria puede ser el resultado de un proceso de modelación de una situación de la realidad y a su vez puede ser equivalente a otras experiencias aleatorias, que podrían ser modelos de otra situación de la realidad. Para que esto sea más claro, conviene precisar lo que se entiende por modelo y modelación. Para Niss, Blum, Galbraith. (2007) un modelo matemático se compone de: un dominio extra-matemático de interés, llámese D; algún dominio matemático M; y un mapeo del dominio extra-matemático al matemático. La figura 4.2 sirve para ilustrar la idea anterior.

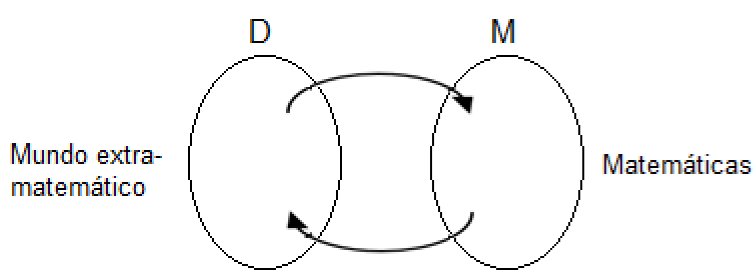


Figura 3.2: mapeo entre el mundo extra-matemático y el matemático

De acuerdo con Niss et al. (2007), en primer lugar; los objetos, relaciones, fenómenos y suposiciones; se identifican y seleccionan en D, según su relevancia con el propósito y la situación. Posteriormente se traducen a objetos, relaciones, fenómenos y suposiciones relacionados con M. Dentro de M, se realizan deliberaciones matemáticas, manipulaciones e inferencias, cuyos resultados se traducen de nuevo a D y se interpretan como conclusiones relativas a ese dominio.

Este ciclo de modelación puede repetirse varias veces, hasta que las conclusiones resultantes relativas a D sean satisfactorias en relación con el propósito de la construcción del modelo. El término modelación se refiere a todo el proceso, y todo lo que implica, desde la estructuración de D, hasta la elección de un dominio matemático adecuado M y un mapeo adecuado de D a M.

Para Shaughnessy, et al. (2009) la modelación matemática es un proceso de conexión de las matemáticas con un contexto del mundo real, dicho proceso consiste en la matematización de algunos fragmentos del mundo real para su estudio. Los autores describen un ciclo que se usa a menudo para organizar el razonamiento en modelos matemáticos, dicho ciclo consiste en:

- Construir un modelo matemático a partir de una situación del mundo real (generalmente comenzando con una simplificación del problema).
- Determinar resultados matemáticos dentro del modelo.
- Interpretar los resultados matemáticos en el contexto del mundo real.
- Verificar estos resultados dentro del contexto del mundo real para determinar si los resultados son factibles y adecuados y, si es necesario, repetir el proceso con un mejor modelo.

La modelación es un proceso central en la ciencia y junto con el concepto de equivalencia de experiencias aleatorias contribuyen a la potencia de la teoría de la probabilidad para entender y resolver problemas tanto de la realidad como probabilísticos, en particular, para entender la función de la simulación como un procedimiento para investigar situaciones reales y resolver problemas de probabilidad.

3.3.1. **Núcleo del marco**

La simulación de experiencias aleatorias es un recurso muy utilizado actualmente para la investigación estadística. La simulación estocástica también es recomendada para que sea introducida en la enseñanza media, sin embargo, es necesario clarificar y ampliar la manera en que debiera ser tratada en la escuela.

Parzysz (2009) ofrece cinco definiciones que extrajo de sendos manuales escolares con comentarios que destacan una de sus cualidades.

1) La simulación reemplaza la experiencia,
2) Simular una experiencia aleatoria consiste en reemplazarla por otra que permita obtener resultados que se obtendrían de la realización práctica de la primera
3) Simular una experiencia consiste en reemplazarla por otra más económica, más rápida y que permita obtener resultados idénticos
4) Simular una experiencia aleatoria consiste en elegir un modelo para ella

Una quinta definición es la que adopta el Parzysz:

5) La simulación es un método estadístico que permite la reconstrucción ficticia de la evolución de un fenómeno. Es una experiencia que supone la construcción de un modelo teórico que presenta propiedades o relaciones similares al fenómeno que es el objeto de estudio. [Dodge 1993].

Al leer estas definiciones de simulación se percibe inmediatamente que se consideran tres conceptos importantes: Un fenómeno o experiencia aleatoria que se asume como el objeto de estudio, es decir, una situación de la realidad, lo llamaremos “el original” siguiendo la terminología de Fischbein. Se habla de otro experimento que reemplaza al original, pero con la propiedad de que “permita obtener resultados idénticos” (Parzysz señala el problema de verificar que un experimento simulado permite obtener idénticos resultados; nosotros agregamos que además se tendría que aclarar el significado de “idénticos resultados”). El tercer elemento es el de modelo teórico. Tenemos entonces tres conceptos cuyas relaciones se deben aclarar.

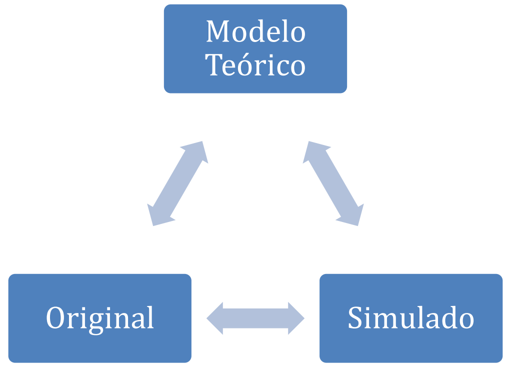


Figura 3.3: conceptos que intervienen en una simulación

Es importante aclarar las relaciones entre estos conceptos, aunque antes, conviene ampliar el esquema con dos conceptos subyacentes en el esquema anterior y entonces definir cada uno de los términos del esquema resultante. Hay tres conceptos adicionales que conducen a un esquema más completo, pero más complicado: Uno es el concepto de *Modelo pseudo-concreto* como un ente que se sitúa entre el original y el modelo teórico. El otro es el concepto de *simulación virtual* (implica un generador de números aleatorios) que se realiza dentro de una computadora y que es diferente de las simulaciones físicas; conviene aclarar aquí que una simulación física es de hecho un modelo pseudo-concreto. Por otro lado, hay que hacer notar que en la interacción con los estudiantes en el nivel bachillerato, quedan ocultos el modelo teórico y el generador aleatorio, sin embargo, su existencia es lo que permite hacer la simulación virtual. Teniendo esto en cuenta un esquema se puede reformular como sigue:

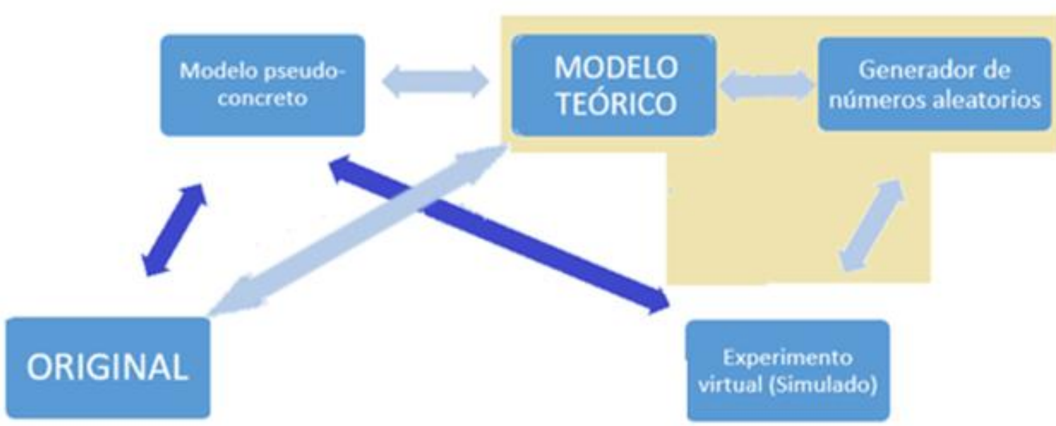


Figura 3.4: conceptos que intervienen en una simulación

En el esquema las flechas azules y los tres rectángulos que señalan representan las relaciones externas que se quiere que el estudiante conozca y utilice en el proceso de simulación que se le propone realizar, mientras que las flechas grises, al igual que la parte encerrada en el polígono, están presentes, pero ocultas para el estudiante en el proceso.

El *original* es la descripción de una situación real o realista, generalmente con el propósito de partir de ella para formular problemas. En un enfoque de modelación se propone como objeto de la modelación una situación extra-matemática que puede ser un fenómeno de la realidad, pero no necesariamente lo es (Niss, Blum y Galbraith 2007). Muchas situaciones que se formulan en los problemas pertenecen a esta categoría, pues, aunque la mayoría de ellas evocan o se refieren a situaciones reales, lo cierto es que solamente son descripciones de aspectos de un fenómeno real y, por tanto, son sólo realistas.

En uno de los reactivos de esta tesis, se incluyó la situación de responder un examen de opción múltiple al azar. Los estudiantes no tendrán ninguna dificultad en reconocer que la situación es un fenómeno que ocurre en la realidad social. No obstante, el problema no enfrenta al estudiante propiamente a la modelación de una situación real, sino sólo a la interpretación del texto que apela a que imagine una situación como la que describe. Una vez resuelto el problema se requerirá que el estudiante interprete el resultado, es decir, que saque alguna conclusión referente a responder exámenes al azar.

Un *modelo pseudo-concreto* es la traducción del original en un sistema simplificado y estructurado. Se trata de destacar los elementos pertinentes y relevantes del original, así como las relaciones explícitas o aparentes entre ellos y su estructuración en un mecanismo o en una representación apropiados. En términos de Henry (1997) es “una situación genérica, descontextualizada, abstracta y portadora de propiedades del objeto de estudio”. Esta construcción se lleva a cabo –siguiendo a Henry– con el apoyo de conocimiento científico.

Un modelo pseudo-concreto en el caso de los exámenes es el de meter en una urna dos bolas, una negra y una blanca que representan respectivamente respuesta incorrecta y respuesta correcta. En general, los dispositivos aleatorios clásicos como monedas, dados, ruletas y urnas sirven para construir modelos pseudo-concretos de experiencias aleatorias. El dispositivo en sí mismo no es el modelo pseudo-concreto si no va acompañado de un código que indique los elementos del dispositivo que corresponden a los elementos relevantes del original.

Una *simulación virtual*. La simulación es un método que permite la reconstitución ficticia y simplificada de aspectos de un fenómeno o proceso real. Es virtual si se realiza mediante un programa de computadora. En general, una simulación se elabora a partir de un modelo del original y consiste en generar datos como si fueran producidos por él. Esto permite prever los patrones de datos que podrían producirse en el original, sin necesidad de obtenerlos mediante la experiencia directa. La simulación virtual ofrece la ventaja de obtener grandes cantidades de datos en poco tiempo. En este trabajo, la simulación virtual se hace con ayuda del software Fathom.

Un *modelo teórico* es lo que Kolmogorov (1933) define como *campo de probabilidad*. Para los fines que nos ocupa, basta con su versión discreta y finita; con estas restricciones la definición de campo de probabilidad se simplifica significativamente. Así, un campo de probabilidad está formado por un espacio muestral Ω y la función $P(*)$ definida para todo evento de Ω, con las siguientes propiedades: a) Para toda $A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0,$ b) $P(\Omega) = 1,$ c) Si A y B (con $A \subset \Omega\ y\ B \subset \Omega$) son mutuamente excluyentes, entonces se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Un *generador de números* aleatorios es un dispositivo informático o físico diseñado para producir secuencias de números de acuerdo con una distribución uniforme de probabilidad; es decir, es casi imposible encontrar un procedimiento para prever el número que aparecerá en cada lugar de la secuencia y, además, cada número del conjunto tiene la misma probabilidad que cualquier otro número del conjunto de aparecer en cualquier lugar determinado de la secuencia. Un generador informático de números aleatorios teóricamente no es aleatorio, pero para fines prácticos se puede considerar como tal.

4. Método

4.1. Participantes

Sesenta y ocho participantes estuvieron involucrados en esta investigación: la autora y tres investigadores participaron en el diseño y aplicación del instrumento, así como en el análisis de los datos; y 64 estudiantes a los que se le aplicaron los cuestionarios.

Todos los estudiantes cursaban el sexto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur, la edad variaba entre los 17 y 18 años. Los cuestionarios se aplicaron a tres grupos de 21, 27 y 16 integrantes cada uno, sin embargo, debido a la limitación del tiempo decidimos reducir el número de cuestionarios respondidos que se considerarían para el análisis de los datos, quedándonos solo con las respuestas del grupo conformado con 21 integrantes. Este grupo se eligió por encontrarse en medio de los otros dos grupos en cuanto al número de participantes.

4.2. Instrumento

El objetivo del estudio era explorar diferentes aspectos del razonamiento de los estudiantes sobre la distribución binomial. Para esto se diseñó un instrumento que abordaba los temas de equivalencia de experiencias aleatorias, variabilidad, combinatoria y trayectorias de probabilidad. Se elaboró un cuestionario que se utilizó como pre-test y post-test, y dos actividades: una simulación física con monedas y una simulación con el software Fathom. Sin embargo, por la extensión de los resultados únicamente se presentará en esta tesis el análisis sobre el razonamiento de los estudiantes con relación a la equivalencia de experiencias aleatorias. Tanto el cuestionario como las dos actividades incluyen preguntas de este tema. Enseguida expondremos únicamente la parte del instrumento relacionada con la equivalencia de experiencias aleatorias.

4.2.1. Cuestionario inicial

Problema 1:

Considere el experimento “lanzar una moneda (justa) y observar la cara que cae”. ¿Cuál de los siguientes experimentos es equivalente a este?

a) Lanzar un dado (justo) y observar el número que se obtiene
b) Extraer al azar una bola de una urna que contiene una bola blanca y una bola negra; y observar el color de la bola que sale
c) Lanzar dos monedas simultáneamente y observar las caras que caen

Respuesta normativa:

La respuesta normativa es el inciso b, ya que se cumplen las tres propiedades de equivalencia.

- El experimento de la moneda contiene dos elementos en el espacio muestral: águila y sol. El experimento de la urna también contiene dos: bola blanca y bola negra.

- La probabilidad de obtener águila es ½ y la de obtener sol es ½, al igual que la probabilidad de extraer una bola blanca es ½ o la de obtener una bola negra es ½.

- Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del espacio muestral de los experimentos.

Justificación del diseño del ítem:

Esta pregunta tiene como propósito evaluar si los estudiantes se fijan en las características matemáticas de los experimentos, es decir en la probabilidad de que sucedan los eventos y en el espacio muestral; por esta razón se eligieron modelos sencillos en los que no es tan complejo identificar el espacio muestral y calcular las probabilidades. En el problema intervienen dos variables distractoras que nos ayudan a evaluar qué tanto valor le dan los estudiantes a las características físicas de los experimentos: el inciso a), en el que se utiliza un modelo de lanzamiento de dado, con el fin de averiguar si para ellos la cantidad de objetos involucrados en los experimentos (un dado y una moneda), es una característica relevante en la equivalencia; y el inciso c), en que se utiliza el modelo de lanzamiento de dos monedas, para averiguar si el objeto involucrado tiene un peso relevante para los estudiantes cuando comparan experiencias aleatorias

Problema 2: Considera las siguientes experiencias aleatorias:

Experimento A: extraer al azar una bola de una urna que contiene: 2 bolas rojas, 1 bola negra y 2 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

Experimento B: extraer al azar una bola de una urna que contiene: 1 bola roja, 1 bola negra y 3 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

a) ¿Son equivalentes los experimentos A y B?

b) ¿Por qué?

Respuesta normativa:

La respuesta normativa es que los experimentos no son equivalentes ya que no existe una correspondencia entre los espacios muestrales de manera que la probabilidad de eventos correspondientes sea la misma. Por ejemplo, en el experimento A la probabilidad de obtener una bola roja es 2/5 y en el experimento B la probabilidad de extraer una bola roja es 1/5.

Justificación del diseño del ítem:

Al igual que el problema anterior, con este se pretende evaluar si los estudiantes se fijan en las propiedades matemáticas del modelo, aunque en este se tiene el objetivo particular de que se fijen en la probabilidad de los eventos. Por ello, se diseñaron ambos experimentos de modo que en el experimento A existen dos eventos ("bola roja" y "bola blanca") cuya probabilidad es distinta en el experimento B. Lo anterior se hace con el propósito de que los estudiantes hagan comparaciones de la probabilidad del mismo evento en ambos experimentos, y se den cuenta que dicha probabilidad difiere; de acuerdo con sus respuestas se podrá observar si ellos consideran o no, la igualdad entre las probabilidades cuando razonan sobre la equivalencia de experimentos. En este problema también existen variables distractoras: ambos experimentos están situados en el mismo contexto y poseen el mismo número de elementos en el espacio muestral, esto nos permite observar si para los estudiantes dichas características son suficientes para concluir que los experimentos son equivalentes.

Problema 3:

Considera los siguientes experimentos

Experimento C: se colocan papeles (doblados por la mitad) en una urna con los nombres de los siguientes estudiantes: Ana, Juan, María, Pedro, Nicolás y Bertha. Se extrae un papel y se observa si el nombre que salió pertenece o no a una mujer.

Experimento D: se lanza un dado y se observa si el resultado es un número par o no.

a) ¿Son equivalentes los experimentos C y D?

b) ¿por qué?

Respuesta normativa:

Los experimentos sí son equivalentes debido a que cumplen con las tres propiedades de equivalencia:

- Ambos experimentos tienen 2 elementos en el espacio muestral
- En el experimento C, la probabilidad de que se elija a una mujer es ½ al igual que la que se elija a un hombre; y en el experimento D la probabilidad de que al lanzar el dado el resultado sea par es ½ al igual de que sea impar
- Es posible hallar una correspondencia biunívoca entre los elementos del espacio muestral de manera que las probabilidades de los experimentos sean las mismas; por ejemplo, asignar a cada mujer un número par y a cada hombre un número impar.

Justificación del diseño del ítem:

El propósito principal de este problema es observar la relevancia que le dan los estudiantes a las propiedades matemáticas de las experiencias aleatorias, cuando se enfrentan a un cambio de contexto. Por esta razón se diseñaron dos experimentos con la misma estructura matemática pero situados en contextos totalmente diferentes: en el experimento C se utilizó un modelo con personas y en el experimento D con números un dado. Lo anterior nos permite ver si los alumnos estudian y comparan el espacio muestral y la probabilidad de los eventos en ambos experimentos, y basan sus conclusiones en ello.

Problema 4:

¿Qué condiciones se deben cumplir para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes?

Respuesta normativa:

Aunque no de manera textual, se espera que los estudiantes pudieran listar las siguientes propiedades:

- Ambos experimentos deben tener el mismo número de elementos en el espacio muestral
- Debe existir una correspondencia biunívoca entre los elementos del espacio muestral
- Los elementos correspondientes deben tener la misma probabilidad

Justificación del diseño del ítem:

Esta pregunta está pensada como una evaluación de las anteriores, con ella se pretendía ver si los estudiantes eran capaces de formular los criterios que habían aplicado. Aquí es donde se puede ver de manera explícita las características que para ellos eran relevantes al analizar si dos experiencias aleatorias son equivalentes. Esta pregunta también nos sirve como un punto de partida para las siguientes, ya que nos permite ver si los estudiantes preservan estas propiedades de equivalencia y las utilizan para resolver problemas.

Problema 5:

En este problema primero se presentó a los estudiantes la **experiencia aleatoria 1** que se muestra a continuación:

> Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige.

En el cuestionario había preguntas donde ellos debían identificar el espacio muestral, describir los valores que podía tomar la variable aleatoria X = “el número de respuestas correctas” y calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome dichos valores. Posteriormente se les planteó la siguiente situación:

> Imagina y describe una experiencia aleatoria que sea equivalente **a la experiencia aleatoria 1**, que se describió arriba.

Respuesta normativa:

Una respuesta que se considera normativa es dar una experiencia aleatoria que tenga la misma distribución de probabilidad que la **experiencia aleatoria 1,** es decir la distribución binomial con n=3 y p=1/2. Una respuesta derivada de la anterior es considerar el experimento Bernoulli, encontrar uno equivalente y mencionar que se repite tres veces. Una expresión concreta de lo anterior podría consistir en fijarse en las propiedades de equivalencia y dar un experimento que cumpla con lo siguiente:

- La experiencia aleatoria 1 es una variable aleatoria que toma los siguientes valores 0, 1, 2 y 3.
- Las probabilidades de cada valor son 1/8, 3/8, 3/8 y 1/8 respectivamente.

Justificación del diseño del ítem:

El propósito de esta pregunta era observar cómo los estudiantes generan experiencias aleatorias equivalentes a partir de otros. Este problema se plantea después de los cuatro anteriores para ver las conexiones que hacen los estudiantes con las propiedades de equivalencia que habían utilizado anteriormente. Se considera que esta pregunta presenta un grado de dificultad mayor, ya que aquí se utiliza la distribución binomial, por lo que encontrar el espacio muestral, los valores de la variable y calcular las probabilidades resulta ser más complicado.

4.2.2. **Simulación física**

En esta parte del instrumento los estudiantes debían realizar una simulación de la **experiencia aleatoria 1,** descrito anteriormente, utilizando monedas, por lo cual se les presentaba la siguiente situación.

> Un equipo decidió simular la situación de la siguiente manera: Se considera que responder al azar una pregunta del examen es equivalente a lanzar una moneda y observar el resultado: Se conviene que si sale “Sol” es como si el estudiante atinara a la respuesta correcta; si sale “Águila” es como si su respuesta fuera incorrecta. Como el examen consta de tres preguntas, se deben lanzar tres monedas (o tres veces una moneda) para simular una vez el experimento. Ahora bien, se puede simular 48 veces el experimento descrito y observar en cuántos exámenes no se responde correctamente ninguna pregunta (no sale ningún “Sol”), en cuántos exámenes se responde correctamente sólo una pregunta (sale un “Sol”), etc.

Posteriormente se les hizo la siguiente pregunta:

Problema 7: ¿Crees que este experimento es equivalente a la experiencia aleatoria 1 descrito arriba? Explica tu respuesta.

Respuesta normativa:

> Una respuesta normativa es mencionar que ambos experimentos son equivalentes porque tienen la misma distribución de probabilidad**,** es decir la distribución binomial con n=3 y p=1/2. Una respuesta similar a la anterior es notar que ambos experimentos están compuestos por tres repeticiones de un experimento Bernoulli; y por ello son equivalentes. Otra respuesta normativa consiste en ver que los experimentos cumplen con las propiedades de equivalencia ya que:

- La experiencia aleatoria 1 es una variable aleatoria que toma cuatro valores: 0, 1, 2, 3; al igual que el experimento de las monedas.

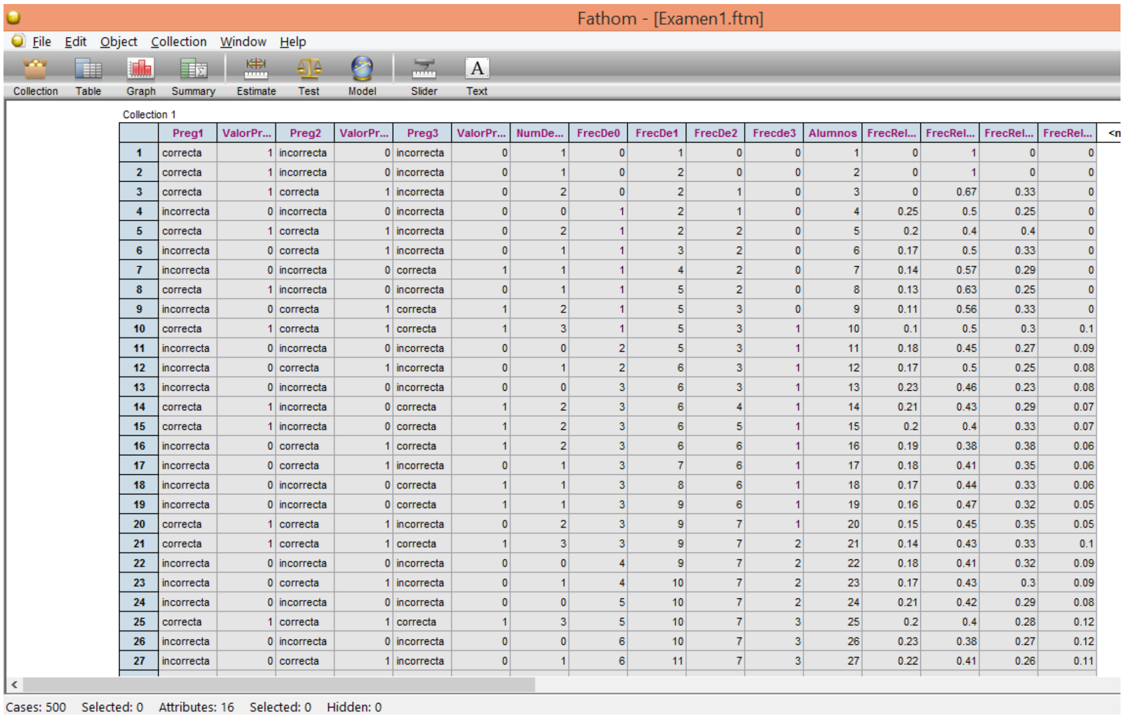
- La probabilidades de los valores de la variable de la experiencia aleatoria 1 son: P(0 correctas)= 1/8, P(1 correcta)= 3/8, P(2 correctas)= 3/8 y P(3 correctas)= 1/8. La probabilidad de los valores de la variable del experimento con monedas es: P(0 soles)= 1/8, P(1 sol)= 3/8, P(2 soles)= 3/8 y P(3 soles)= 1/8.

Justificación del diseño del ítem:

En esta pregunta se pretende observar el razonamiento de los estudiantes cuando realizan simulaciones físicas de situaciones realista; particularmente si ellos ven la equivalencia entre el modelo pseudo-concreto de lanzar tres monedas y la situación realista de responder al examen; o si estaban viendo ambos experimentos como dos situaciones diferentes. También se pretendía observar, si en sus argumentos utilizan aspectos relevantes a la equivalencia, dicho de otro modo, si ellos mencionaban las propiedades descritas anteriormente.

4.2.3. Simulación en Fathom

La primera tarea correspondiente a las actividades con el software Fathom consistía en pedir a los estudiantes que construyeran una simulación computacional de la **experiencia aleatoria 1**. La siguiente imagen muestra lo que el estudiante observaba en la pantalla de la computadora después de realizar la simulación.



	Preg1	ValorPr...	Preg2	ValorPr...	Preg3	ValorPr...	NumDe...	FrecDe0	FrecDe1	FrecDe2	Frecde3	Alumnos	FrecRel...	FrecRel...	FrecRel...	FrecRel...
1	correcta	1	incorrecta	0	incorrecta	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
2	correcta	1	incorrecta	0	incorrecta	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	0
3	correcta	1	correcta	1	incorrecta	0	2	0	2	1	0	3	0	0.67	0.33	0
4	incorrecta	0	incorrecta	0	incorrecta	0	0	1	2	1	0	4	0.25	0.5	0.25	0
5	correcta	1	correcta	1	incorrecta	0	2	1	2	2	0	5	0.2	0.4	0.4	0
6	incorrecta	0	correcta	1	incorrecta	0	1	1	3	2	0	6	0.17	0.5	0.33	0
7	incorrecta	0	incorrecta	0	correcta	1	1	1	4	2	0	7	0.14	0.57	0.29	0
8	correcta	1	incorrecta	0	incorrecta	0	1	1	5	2	0	8	0.13	0.63	0.25	0
9	incorrecta	0	correcta	1	correcta	1	2	1	5	3	0	9	0.11	0.56	0.33	0
10	correcta	1	correcta	1	correcta	1	3	1	5	3	1	10	0.1	0.5	0.3	0.1
11	incorrecta	0	incorrecta	0	incorrecta	0	0	2	5	3	1	11	0.18	0.45	0.27	0.09
12	incorrecta	0	correcta	1	incorrecta	0	1	2	6	3	1	12	0.17	0.5	0.25	0.08
13	incorrecta	0	incorrecta	0	incorrecta	0	0	3	6	3	1	13	0.23	0.46	0.23	0.08
14	correcta	1	incorrecta	0	correcta	1	2	3	6	4	1	14	0.21	0.43	0.29	0.07
15	correcta	1	incorrecta	0	correcta	1	2	3	6	5	1	15	0.2	0.4	0.33	0.07
16	incorrecta	0	correcta	1	correcta	1	2	3	6	6	1	16	0.19	0.38	0.38	0.06
17	incorrecta	0	correcta	1	incorrecta	0	1	3	7	6	1	17	0.18	0.41	0.35	0.06
18	incorrecta	0	incorrecta	0	correcta	1	1	3	8	6	1	18	0.17	0.44	0.33	0.06
19	incorrecta	0	incorrecta	0	correcta	1	1	3	9	6	1	19	0.16	0.47	0.32	0.05
20	correcta	1	correcta	1	incorrecta	0	2	3	9	7	1	20	0.15	0.45	0.35	0.05
21	correcta	1	correcta	1	correcta	1	3	3	9	7	2	21	0.14	0.43	0.33	0.1
22	incorrecta	0	incorrecta	0	incorrecta	0	0	4	9	7	2	22	0.18	0.41	0.32	0.09
23	incorrecta	0	correcta	1	incorrecta	0	1	4	10	7	2	23	0.17	0.43	0.3	0.09
24	incorrecta	0	incorrecta	0	incorrecta	0	0	5	10	7	2	24	0.21	0.42	0.29	0.08
25	correcta	1	correcta	1	correcta	1	3	5	10	7	3	25	0.2	0.4	0.28	0.12
26	incorrecta	0	incorrecta	0	incorrecta	0	0	6	10	7	3	26	0.23	0.38	0.27	0.12
27	incorrecta	0	correcta	1	incorrecta	0	1	6	11	7	3	27	0.22	0.41	0.26	0.11

Figura 4.1: caputra de pantalla de la simulación en Fathom de la experiencia aleatoria 1

inmediatamente se les planteaba lo siguiente:

Problema 7: ¿Consideras que este proceso corresponde o es equivalente al que se aplicó en la simulación física para responder el examen? Explica tu respuesta.

Respuesta normativa

Se considera como respuesta normativa mencionar que el proceso realizado en la simulación física es equivalente al realizado en la computacional, porque esta última está programa de tal manera que el espacio muestral en ambas simulaciones sea el mismo, que halla una correspondencia entre los elementos de dicho espacio muestral y que las probabilidades correspondientes sean las mismas. Dicho de otro modo se considera normativo mencionar que el experimento de lanzar una moneda es equivalente a la función *randompick(0,1)* [esta función elige al azar uno de los números 0 o 1]; además en la simulación física el lanzamiento se realiza tres veces así como la función *randompick(0,1)* se repite tres veces en la simulación computacional; por lo tanto, ambas experiencias son equivalentes.

Justificación del diseño del ítem:

Esta pregunta está diseñada para observar el razonamiento de los estudiantes acerca de la equivalencia de experiencias aleatorias en contextos tecnológicos. Aquí se pretendía averiguar si cuando los estudiantes realizan simulaciones computacionales reconocen que las operaciones que realizan en el software son equivalentes a lo que realizan en la simulación física con monedas; es decir, si ellos consideran que la simulación computacional creada en Fathom es equivalente al modelo pseudo-concreto de lanzamiento de monedas. También se quería observar como utilizan las características de la equivalencia de experimentos en sus argumentos.

4.3. Procedimientos

4.3.1. De ejecución

La primera etapa consistió en la elaboración del instrumento, para ello, dos de los cuatro investigadores nos reuníamos semanalmente a proponer y discutir el diseño de las actividades. Se utilizó como referente el instrumento propuesto en la tesis de Herrera (2017). Una de las principales modificaciones que se le hicieron a dicho instrumento, fue agregar reactivos para explorar la equivalencia de experiencias aleatorias.

Posteriormente se procedió a la aplicación del instrumento, en la cual participaron dos investigadoras, una de ellas impartía la asignatura *Estadística y probabilidad II* al grupo participante. Se llevaron a cabo cuatros sesiones:

1. En la primera sesión se les proporcionó a los estudiantes un cuestionario que servía como pre-test; el cual debían responder de manera individual, con base en sus propias ideas y reflexiones; por lo que los investigadores nos limitamos a responder dudas acerca de la redacción del cuestionario, y no de los temas que se abordaban; la duración de esta sesión fue de aproximadamente una hora.

2. En la segunda sesión los estudiantes realizaban una simulación física que consistía en lanzamientos de monedas. Ellos debían hacer un total de 48 lanzamientos, registrar sus resultados en una tabla de frecuencia y responder diversas preguntas acerca de lo que obtuvieron. Lo anterior implicaba que tenían que realizar muchos conteos y cálculos, para hacer sus registros; por esta razón se decidió que trabajaran en grupos de cuatro, únicamente para hacer los lanzamientos y llenar la tabla, sin embargo, para responder las preguntas de la simulación, debían trabajar individualmente. La duración de esta sesión fue de aproximadamente dos horas.

3. En la tercera sesión los estudiantes trabajaron en el aula de cómputo, ellos debían realizar una simulación computacional del experimento con ayuda del software Fathom. A cada uno se le proporcionó una computadora, por lo que el trabajo fue individual; también se les dio un cuestionario que debían responder basándose en los resultados de la simulación. Los estudiantes ya estaban familiarizados con el software, debido a que habían trabajado con él durante su curso de estadística, por lo cual no fue necesario dar una introducción del manejo de éste, esto ayudó a que realizaran la simulación de una forma no tan guiada. La duración de esta sesión fue de aproximadamente dos horas.

4. La última sesión consistió en responder individualmente a un cuestionario que sirvió como post-test, dicho cuestionario era igual al aplicado en la primera sesión. La duración de esta sesión fue de aproximadamente una hora.

   Una vez que se terminó de aplicar el instrumento, se procedió a capturar y organizar los datos obtenidos; estos se organizaron por respuestas a una misma pregunta, para que así fuese más fácil el análisis.

4.3.2. De análisis

Para estudiar y describir los datos recabados se utilizó un análisis basado en las estrategias propuestas en la teoría fundamentada (Birks y Mills, 2011); la cual es un método general que promueve la creación de marcos conceptuales o teorías locales, por medio del análisis comparativo de los datos recabados. Un rasgo característico de este método general es buscar que la teoría emerja de los datos y no a partir de un marco teórico preestablecido. En particular los métodos que se utilizaron fueron: análisis comparativo constante, codificación y categorización de datos, y escritura de memorandos.

Los cuatro investigadores analizaban los datos de manera individual, dicho análisis consistía en la identificación de patrones en las respuestas de los estudiantes; esto se logra mediante el método de comparación constante. Las respuestas normativas fueron un referente para asignar códigos generales que describían cada tipo de respuesta.

Se realizaban reuniones semanales de los investigadores con una duración de dos horas, cada una. En estas reuniones se contrastan los códigos que cada investigador había propuesto y se discutían hasta llegar a un acuerdo común acerca de la asignación de códigos a las respuestas de los estudiantes. Durante el análisis se elaboraron memorandos, que servían para organizar la información obtenida y formular conjeturas acerca de esta.

5. Resultados

La equivalencia de experiencias aleatorias resulta importante para la resolución de problemas de probabilidad, ya que cuando los alumnos se mueven de un contexto a otro deben ser capaces de identificar cuándo ese cambio de contexto ha alterado las propiedades matemáticas del experimento o cuándo ha producido una experiencia aleatoria equivalente.

En especial, cuando se hace uso de métodos basados en simulaciones para resolver problemas de probabilidad, es pertinente preguntarse si los estudiantes están comprendiendo que la simulación ya sea física o en el software es equivalente a realizar el experimento original; por esto conviene identificar cuáles son los elementos que los estudiantes consideran necesarios para que dos o más experimentos sean equivalentes.

Para poder evaluar los comentarios de los estudiantes al respecto, se utilizó como referencia la definición propuesta en la sección 3.1.1 que menciona que dos experiencias aleatorias son equivalentes si tienen la misma estructura, es decir, cuando se cumplen las siguientes tres propiedades:

P1. Ambos experimentos tienen el mismo número de elementos en el espacio muestral

P2. Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del espacio muestral de una experiencia con los elementos del espacio muestral de la otra

P3. Los elementos correspondientes tienen la misma probabilidad

Siete preguntas del total de las cuatro actividades aplicadas (pre-test, simulación física, simulación en Fathom, post-test), están enfocadas a la equivalencia de experiencias aleatorias: cuatro de ellas pertenecían al pre-test, dos eran parte de la simulación física, y una era parte de las actividades de la simulación en Fathom. A continuación, se describen las preguntas y los resultados encontrados.

5.1. Reactivos del pre-test

Problema 1: Considere el experimento "lanzar una moneda y observar la cara que cae". ¿Cuál de los siguientes experimentos es equivalente a este? Justifica tu respuesta.

a) Lanzar un dado y observar el número que se obtiene
b) Extraer al azar una bola de una urna que contiene una bola blanca y una bola negra; y observar el color de la bola que sale
c) Lanzar dos monedas simultáneamente y observar las caras que caen

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en 4 grupos, a cada grupo se le asignó un código de la siguiente manera:

Tabla 5.1: clasificación de respuestas al problema 1

Código	Frecuencia	Eligen el inciso correcto	Eligen el inciso incorrecto
A1. Mismo número de elementos del espacio muestral e igualdad de probabilidades	8	8	0
A2. Mismo número de elementos en el espacio muestral	6	6	0
A3. Igualdad de probabilidades	3	3	0
A4. Centra su atención en el instrumento generador	4	0	4
Total	21	17	4

A continuación, se presentan ejemplos de las respuestas de los estudiantes, relacionadas a cada código.

A1. Mismo número de elementos del espacio muestral e igualdad de probabilidades. Este grupo se refiere a los estudiantes que eligen el inciso b, el cual es correcto y su justificación se basa en la igualdad de probabilidades y la igualdad del número de elementos existentes en el espacio muestral. Los estudiantes no invocan la propiedad 2 (correspondencia biunívoca entre elementos del espacio muestral); aunque esto no es suficiente para argumentar que no la tengan presente; tal vez se deba a que lo hacen de manera implícita, por la simplicidad de los experimentos. Ocho de los 21 participantes se encuentran en este grupo, ejemplo de las repuestas proporcionadas son las siguientes.

> Estudiante 7: *"b) El experimento de lanzar la moneda la probabilidad de cada una (águila, sol) es de 50% y en la urna con dos bolas la probabilidad es la misma 50%."*

> Estudiante 16*: "b) Ya que solo se trata de dos bolas una blanca y una negra, porque al haber 2 bolas de diferente color hay un 50% de probabilidad de que salga una u otra al igual que la moneda que caiga águila o sol."*

A2. Mismo número de elementos en el espacio muestral. Los estudiantes que se encuentran en este grupo eligen el inciso correcto (b), pero solo consideran la cantidad de elementos del espacio muestral para justificar su respuesta, sin mencionar la igualdad de probabilidades. Seis de 21 estudiantes se encuentran en este grupo, los cuales proporcionaron respuestas similares a las siguientes:

> Estudiante 9: *"b) Es aleatorio ya que no se sabe exactamente qué caerá, solo se sabe que hay dos opciones (águila, sol) (bola blanca, bola negra)"*

> Estudiante 13: *"b) Es igual o equivalente porque solamente hay 2 opciones que pueden salir"*

A3. Igualdad de probabilidades. En este grupo se encuentran los estudiantes que eligen el inciso correcto, pero su argumento únicamente se basa en la igualdad de probabilidades y no hacen explicita la igualdad de la cantidad de elementos en el espacio muestral. Es posible que los estudiantes que dicen que estas probabilidades son ½ en los dos experimentos, consideren innecesario señalar que hay dos resultados en cada uno de ellos. Tres de 21 estudiantes se encuentran en esta categoría, ejemplos de las respuestas proporcionadas son los siguientes:

Estudiante 12: “b) Tienen la misma probabilidad y son aleatorios e independientes”

> Estudiante 14: “b) *El experimento de la urna es el más equivalente, dado que en ambos casos la probabilidad está repartida equivalente en ½ y solo vamos a observar el resultado obtenido.”*

A4. Centra su atención en el instrumento generador. En este grupo están los estudiantes que responden el inciso a (lanzar un dado y observar el número que se obtiene), lo cual es incorrecto. Esta elección se basa en que en ambos experimentos hay el mismo número de objetos tangibles: una moneda y un dado. , o en que en ambos se hace un solo lanzamiento. Esto quiere decir que este grupo de estudiantes no capta el modelo abstracto, solo consideran la forme física de los experimentos. Cuatro de 21 participantes se encentran en esta categoría, y algunos ejemplos de sus respuestas son:

> Estudiante 17: *“a) Porque en el experimento solo hay un elemento. El dado tiene 6 posibilidades y la moneda 2 pero sigue siendo solo 1 elemento.”*

> Estudiante 21: *“a) Estás realizando el experimento de lanzar un elemento y ver su resultado, en las dos opciones (b y c) son varios elementos los que están involucrados.”*

Problema 2: Considera las siguientes experiencias aleatorias

Experimento A: extraer al azar una bola de una urna que contiene: 2 bolas rojas, 1 bola negra, 2 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

Experimento B: extraer al azar una bola de una urna que contiene: 1 bola roja, 1 bola negra, 3 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

a) ¿Son equivalentes los experimentos A y B?
b) ¿Por qué?

Las tres categorías en la que se agruparon las respuestas de los estudiantes fueron las siguientes:

Tabla 5.2: clasificación de respuestas al problema 2			
Categoría	**Frecuencia**	**Responde que sí son equivalentes**	**Responde que no son equivalentes**
B1. No hay igualdad de probabilidades	10	0	10
B2. Mismo número de elementos en el espacio muestral	4	4	0
B3. Centra su atención en el instrumento generador	5	5	0
B4. Otros	2	2	0

A continuación, se describen y ejemplifican cada categoría:

B1. No hay igualdad de probabilidades. En este grupo están los estudiantes que responden que los experimentos no son equivalentes, lo cual es correcto, y su justificación se basa en que algunos de los colores no son igualmente probables en los dos experimentos. Diez de 21 estudiantes caen en esta categoría, ellos proporcionaron respuestas parecidas a las siguientes:

Estudiante 1: “No. Pues la probabilidad de una bola color rojo en el experimento A es mayor que en el experimento B, del mismo modo la probabilidad de una blanca es mayor en el experimento B.”

> Estudiante 5: *“Los experimentos a pesar de ser parecidos con la misma equivalencia o fórmula para el procedimiento, el número de bolas de cada color es distinto lo que hace que no sean equivalentes, las probabilidades son distintas excepto en la bola negra de los dos problemas.”*

B2. *Mismo número de elementos en el espacio muestral*. Los estudiantes de esta categoría responden que los experimentos son equivalentes (lo cual es incorrecto) ya que ambos tienen la misma cantidad de elementos en el espacio muestral. Las respuestas de esta categoría muestran la importancia de la relación biunívoca entre elementos correspondientes en los espacios muestrales de dos experimentos equivalentes, evidenciando que no es suficiente que ambos espacios muestrales tengan el mismo número de elementos. Cuatro de 21 estudiantes se encuentran en esta categoría, las respuestas de los estudiantes eran parecidas a las siguientes:

Estudiante 8: “Sí. Porque son la misma cantidad de bolas y colores”

> Estudiante 9: “*Ya que hay 3 opciones, pero diferencia en la dominación por el mayor número de bolas en ese caso (A=blancas, rojas) (B=blancas)”*

B3. Centra su atención en el instrumento generador. Los estudiantes de esta categoría responden que ambos experimentos son equivalentes (lo cual es incorrecto) argumentando exclusivamente que hay la misma cantidad de bolas en las dos urnas. Las respuestas consideradas en esta categoría no manifiestan explícitamente que las urnas contienen la misma cantidad de colores (3) razón por la cual no fueron consideradas en la categoría anterior. Cinco de 21 estudiantes respondieron de manera similar a los siguientes ejemplos:

> Estudiante 2: “Sí. Porque tienen las mismas cantidades de bolas”

> Estudiante 21: “Son el mismo número de bolas pero distribuidos de manera distinta pero al final son el mismo número de bolas en cada urna.”

B4. Otros. En este grupo se encuentran los estudiantes contestan de manera incorrecta y además proporcionan un argumento confuso. Dos de 21 estudiantes caen en este grupo:

> Estudiante 3: *“Son equivalentes ya que en ambas hay dos opciones con la misma probabilidad y una con distinta.”*

> Estudiante 12: *“Sí. Porque tienen las mismas probabilidades y son independientes y aleatorios”*

Problema 3. Considera los siguientes experimentos

Experimento C: se colocan papeles (doblados por la mitad) en una urna con los nombres de los siguientes estudiantes: Ana, Juan, María, Pedro, Nicolás y Bertha. Se extrae un papel y se observa si el nombre que salió pertenece o no a una mujer.

Experimento D: se lanza un dado y se observa si el resultado es un número par o no.

1. ¿Son equivalentes los experimentos C y D?
2. ¿Por qué?

Las respuestas se clasificaron en cuatro categorías:

Tabla 5.3: clasificación de respuestas al problema 3	
Categoría	**Frecuencia**
C1. Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad de probabilidades	5
C2. Mismo número de elementos en el espacio muestral	11
C3. Centran su atención en el instrumento generador	3
C4. Otros	2

C1. *Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad entre las probabilidades.* Este grupo corresponde a los estudiantes que responden que los experimentos son equivalentes, y basan su argumento en dos de las tres propiedades mencionadas anteriormente: ambos experimentos tienen el mismo número de elementos en el espacio muestral y existe una igualdad de probabilidad entre los elementos correspondientes. Cinco de 21 estudiantes están en esta categoría, y algunos ejemplos del tipo de respuestas son:

Estudiante 5: “Sí. En los dos experimentos a pesar de ser o parecer distintos ya que uno son personas y otro no, la probabilidad es la misma, 3 mujeres-3 hombres (C) y en el (D) 3 impares y 3 pares. Son equivalentes.”

Estudiante 17: “Sí. En el experimento C hay 3 mujeres y en el D pueden caer 3 números pares y el total de la muestra es 6. Así que en los 2 experimentos existe la misma probabilidad a pesar de que son casos diferentes.”

C2. *Mismo número de elementos en el espacio muestral.* En este grupo se encuentran los estudiantes que responde de manera correcta pero su argumento se basa en una sola propiedad: ambos experimentos tienen el mismo número de elementos en su espacio muestral.

Estudiante 2: “Sí. Porque en ambos solo tienen dos respuestas mujer u hombre o si es par o no.”
Estudiante 13: “Sí. Porque solo pueden se números pares o nones y solo pueden ser hombre o mujer, las variables aleatorias.”

C3. *Centran su atención en el instrumento generador.* Los alumnos de esta categoría responden que los experimentos no son equivalentes y su justificación se basa en que ambos experimentos están en contextos diferentes (en uno son personas y en otro son números). Estos estudiantes identifican solo las físicas de los experimentos, sin contemplar la estructura matemática. Tres de 21 estudiantes se encuentran en esta categoría:

Estudiante 14: “No. Porque son condiciones y resultados completamente diferentes entre ambos experimentos.”

Estudiante 21: “No. Aunque son el mismo número de muestras (6 personas y 6 caras del dado) no es lo mismo calcular la probabilidad de que sea mujer y sacar un numero par.”

C4. *Otros.* En este grupo están las respuestas que carecen de claridad. Dos de 21 estudiantes se encuentran en este grupo:

Estudiante 12: “*No, No tienen la misma probabilidad, ni ambos son independientes.”*

Estudiante 15: *“Sí, ya que en ambos hay un impedimento y recalcan un parámetro”*

Problema 4: ¿Qué condiciones se deben cumplir para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes?

Tabla 5.4: clasificación de respuestas al problema 4	
Categoría	**Frecuencia**
D1. Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad entre las probabilidades	5
D2. Mismo número de resultados	5
D3. Igualdad de probabilidades	7
D4. Otros	4

D1. *Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad de probabilidades* En esta categoría se encuentran los estudiantes que reconocen que para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes deben cumplir dos propiedades: que ambos tengan un mismo número de elementos en el espacio muestral y que los elementos correspondientes del espacio muestral tengan la misma probabilidad. Esta es la respuesta más completa, aun cuando no hace explícita la propiedad que se refiere a la correspondencia biunívoca entre los elementos del espacio muestral. Cinco de 21 estudiantes se encuentran en esta categoría, estos son ejemplos de las respuestas:

Estudiante 7: Mismo espacio muestral y probabilidad de resultados

Estudiante 10: *Que tenga la misma cantidad total y la misma probabilidad entre los casos existentes.*

D2. *Mismo número de resultados.* Los estudiantes que se encuentran en este grupo consideran que para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes, estos deben tener el mimo número de resultados posibles. Cinco de 21 estudiantes respondieron de manera semejante a los siguientes:

Estudiante 6: *“Que tengan el mismo número de posibles resultados y sus variables sean muy similares.”*

Estudiante 17: *“Exista la misma cantidad de objetos que se quiera seleccionar para que puedan ser equivalentes.”*

D3. *Igualdad de probabilidades.* Los estudiantes que se encuentran en esta categoría mencionan que para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes se debe cumplir solo una propiedad: que los elementos correspondientes en el espacio muestral tengan la misma probabilidad. Siete de 21 respondieron de manera semejante a los siguientes:

Estudiante 5: *Que tenga la misma probabilidad en sus opciones sin importar que tipo de experimento se use (dados, monedas, personas, etc.)*

Estudiante 15: *Ambas partes deben tener la misma probabilidad de ser elegidos, sin que uno tenga más ventaja que el otro.*

D4. *Otros.* En este grupo se encuentran las respuestas que no se comprenden o aquellas cuyo razonamiento no se puede establecer en los grupos anteriores. Cuatro de 21 estudiantes se encuentran en esta categoría, a continuación, ejemplos de las respuestas:

Estudiante 2: *"Que ambas tengan las mismas condiciones puede ser si se puede completar por un similar"*

Estudiante 8: *"Ser similares condiciones como cantidad, objeto y clasificables"*

5.2. Reactivos de la simulación física

Experiencia aleatoria 1. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta <u>tiene dos opciones</u> de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige.

Problema 5: Imagina y describe una experiencia aleatoria que sea equivalente a la **experiencia aleatoria 1**, que se describió arriba.

Tabla 5.5: clasificación de respuestas al problema 5	
Categoría	Frecuencia
E1. Experiencia equivalente	11
E2. Experimento de Bernoulli	10

E1. *Experiencia equivalente.* Los estudiantes que se encuentran en este grupo son aquellos que fueron capaces de proporcionar una experiencia equivalente a la **experiencia aleatoria 1.** Un patrón que se repite en todos los estudiantes de ese grupo es que proporcionaron experiencias aleatorias relacionadas con lanzamientos de una moneda. Once de 21 estudiantes están es esta categoría, algunos ejemplos de las respuestas son la siguientes:

Estudiante 4: *"Se lanzan 3 monedas regulares, ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 2 águilas y un sol?"*

Estudiante 17: *“Lanzar una moneda 3 veces y observar la cantidad de soles.”*

E2. *Experimento de Bernoulli.* Un experimento binomial consiste repetir n-veces un experimento Bernoulli, dicho de otra forma, este es una composición de un experimento simple. En la **experiencia aleatoria 1** la regla de composición está dada por n=3 y p=1/2. Los estudiantes que se encuentran en esta categoría prestan atención únicamente al experimento Bernoulli del problema y proporcionan uno equivalente, sin embargo, descuidan la situación compuesta. Diez de 21 estudiantes están en esta categoría, ellos proporcionaron respuestas como las siguiente:

Estudiante 4: “Se elegirá un representante de salón y los candidatos son juan y Sofia ¿Cuál es la probabilidad que quede Sofia como representante?”

Estudiante 8: “Si se le aplica una encuesta sobre si fuma o no, a 20 personas, en la cual son 10 preguntas ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad son fumadores?”

Problema 6: Para responder un equipo decidió **simular** la situación de la siguiente manera:

Se considera que responder al azar una pregunta del examen es equivalente a lanzar una moneda y observar el resultado: Se conviene que si sale “Sol” es como si el estudiante atinara a la respuesta correcta; si sale “Águila” es como si su respuesta fuera incorrecta. Como el examen consta de tres preguntas, se deben lanzar tres monedas (o tres veces una moneda) para simular una vez la experiencia aleatoria. Ahora bien, se puede simular 48 veces el experimento descrito y observar en cuántos exámenes no se responde correctamente ninguna pregunta (no sale ningún “Sol”), en cuántos exámenes se responde correctamente sólo una pregunta (sale un “Sol”), etc.

¿Crees que esta experiencia es equivalente a la **experiencia aleatoria 1** descrita arriba? Explica tu respuesta.

Tabla 5.6: clasificación de respuestas al problema 6		
Categoría	Frecuencia	
F1. Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad entre las probabilidades	7	
F2. Mismo número de elementos en el espacio muestral	7	
F3. Igualdad de probabilidades	2	
F4. Otros	5	

F1. *Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad entre las probabilidades.* Los estudiantes que se encuentran en esta categoría responden que las experiencias aleatorias son equivalentes debido a la igualdad entre los elementos del espacio muestral y la probabilidad; pero refiriéndose al experimento de Bernoulli, no al binomial; es decir, ellos relacionan las caras de la moneda (águila y sol) con las opciones de respuesta (correcta e incorrecta) y comparan la probabilidad de que dichos eventos sucedan, la cual es ½ para cada uno. Siete de 21 estudiantes caen en esta categoría, ejemplos de las repuestas son la siguientes:

> Estudiante 3: "Sí ya que tiene la misma cantidad de posibilidades de que caiga sol o águila en cada lanzamiento que el de acertar o no una pregunta."

> Estudiante 21: "Sí, hay la misma probabilidad en una moneda que en un examen con dos preguntas y una de ellas es la correcta."

F2. *Mismo número de elementos en el espacio muestral*. Los estudiantes que se encuentran en esta categoría responden que las experiencias aleatorias son equivalentes y su justificación se basa en la igualdad de los espacios muestrales de los experimentos de Bernoulli; es decir, relacionan las dos caras de la moneda con las dos formas de responder la pregunta. Siete de 21 estudiantes se encuentran en esta categoría, estos son ejemplos de las respuestas proporcionadas:

> Estudiante 6: "Sí porque ambos experimentos tienen dos posibles resultados, uno está bien y el otro no."

> Estudiante 10: "Sí, porque como lo menciona hay dos posibles respuestas."

F3. Igualdad de probabilidades. En este grupo se encuentran los estudiantes que responden que las experiencias aleatorias son equivalentes, utilizando como argumento la igualdad de probabilidades entre los elementos correspondientes en el espacio muestral de los experimentos de Bernoulli; es decir, ellos comparan la probabilidad de obtener águila o sol en un lanzamiento con la de responder correcta o incorrectamente en una pregunta, la cual es ½. Dos de 21 estudiantes se encuentran en esta categoría

Estudiante 5: “Sí, la probabilidad de éxito del examen es de cada pregunta 0.5 y lanzar la moneda sería la misma probabilidad.”

Estudiante 13: “Sí es equivalente porque se pueden distribuir las probabilidades de la misma manera.”

F4. *Otros*. En este grupo se encuentran las respuestas que no son claras o que no describen un patrón en específico para clasificarlas. Cinco de 21 estudiantes se encuentran en este grupo, cuatro de ellos reconocen que las experiencias aleatorias sí son equivalentes y solo uno es el que menciona que no considera que lo sean; a continuación, ejemplos de las respuestas:

Estudiante 8: “No, porque en el experimento 1 son 3 preguntas con 2 opciones c/u y en este es una moneda y dos caras.”

Estudiante 9: “Sí es lo mismo solo con monedas”

5.3. Reactivos de la simulación en Fathom

La primera tarea correspondiente a las actividades de la simulación con software consistía en pedir a los estudiantes que construyeran una simulación de la **experiencia aleatoria 1** en Fathom; inmediatamente se les planteaba lo siguiente:

Problema 7: Antes de continuar, responde a la siguiente pregunta: ¿Consideras que este proceso corresponde o es equivalente al que se aplicó en la simulación física para responder el examen? Explica tu respuesta.

Tabla 5.7: clasificación de respuestas al problema 7	
Categoría	Frecuencia
G1. Perciben alguna característica relevante de equivalencia	4
G2. Prestan atención a las características del software	7
G3. Otro	10

G1. Mencionan alguna característica relevante de equivalencia. Los estudiantes que se encuentran en este grupo responden que el procedimiento realizado sí es equivalente al de la simulación física; y en sus argumentos utilizan términos relacionados con la equivalencia, por ejemplo: los posibles resultados y la probabilidad de obtenerlos. En estas respuestas los estudiantes no muestran alguna evidencia de haber calculado las probabilidades de los eventos o de haber encontrado el espacio muestral; ellos únicamente hacen mención de los conceptos, de modo que no se puede asegurar que los están utilizando de manera adecuado en sus justificaciones.

Estudiante 6: "Sí por los resultados obtenidos al igual que las frecuencias"

Estudiante 14: "Sí porque las probabilidades son las mismas y por tener el mismo efecto"

G2. Prestan atención a las características del software*.* Los estudiantes incluidos en esta categoría son aquellos que en su respuesta únicamente mencionan las características que tiene el software para procesar los datos, es decir, ellos en sus respuestas hablan de la exactitud o la rapidez con la que se realizan los procedimientos. Cabe mencionar que todos ellos se dirigen de manera positiva al software. Solo un estudiante, considera que los procedimientos realizados en la simulación en Fathom no son equivalentes a los realizados en la simulación física, el resto respondió afirmativamente.

Estudiante 2: "No, considero que este es más preciso que en la simulación física"

Estudiante 5: "Sí, esta es más exacta y rápida, pero son muy parecidas o incluso similares"

G3. Otros. En esta categoría se incluyen a los estudiantes que no respondieron la pregunta, los que no argumentaron o su argumento es confuso. La mayoría de los estudiantes de esta categoría responden afirmativamente, a excepción de dos, los cuales no respondieron la pregunta.

Estudiante 12: “Sí, porque va siendo de 1 en 1”

5.4. Niveles de respuestas

Las categorías que resultaron en las preguntas anteriores muestran distintos niveles de razonamiento por parte de los estudiantes de acuerdo con la cantidad de elementos relevantes para la equivalencia de experiencias aleatorias que contemplan en sus respuestas. Por lo tanto, resulta pertinente agrupar las categorías por nivel de razonamiento, para así poder contrastar los niveles que obtuvieron los estudiantes por cada respuesta a los problemas anteriores. Definimos los niveles de la siguiente manera:

N1. *Prestan atención a dos aspectos relevantes*. En este nivel se encuentran las respuestas en las que se muestra que los estudiantes se fijan en dos aspectos relevantes a la equivalencia de las experiencias aleatorias, los cuales son: mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad de probabilidades.

N2. *Prestan atención a un solo aspecto relevante.* Las respuestas agrupadas en este nivel son aquellas en las se percibe que los estudiantes prestan atención solo a la igualdad de probabilidades.

N3. *Prestan atención a aspectos irrelevantes.* En este nivel están las respuestas en las que se muestra que los estudiantes perciben aspectos irrelevantes a la equivalencia de experiencias aleatorias.

La siguiente tabla muestra el nivel que se le asignó a las categorías encontradas en cada problema.

Tabla 5.8: niveles asignados a las categorías		
Problema	Nivel	Categorías
Problema 1	N1	A1. Mismo número de elementos del espacio muestral e igualdad de probabilidades
	N2	A2. Mismo número de elementos en el espacio muestral A3. Igualdad de las probabilidades
	N3	A4. Centra su atención en el instrumento generador
Problema 2	N1	B1. Notan que no hay igualdad de probabilidades y aluden al espacio muestral.
	N2	B2. Mismo número de elementos en el espacio muestral
	N3	B3. Centra su atención en el instrumento generador B4. Otros
Problema 3	N1	C1. Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad entre las probabilidades
	N2	C2. Mismo número de elementos en el espacio muestral
	N3	C3. Centra su atención en el instrumento generador C4. Otros
Problema 4	N1	D1. Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad entre las probabilidades
	N2	D2. Mismo número de resultados D3. Igualdad de probabilidad
	N3	D4. Otros
Problema 5	N1	E1. Experiencia equivalente
	N2	E2. Experimento de Bernoulli
Problema 6	N1	F1. Mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad entre las probabilidades
	N2	F2. Mismo número de elementos en el espacio muestral F3. Igualdad de probabilidades
	N3	F4. Otros
Problema 7	N3	G1. Perciben alguna característica relevante de equivalencia
	N3	G2. Prestan atención a las características del software
	N3	G3. Otro

A continuación, se muestra el nivel que obtuvo cada estudiante en los cuatro problemas

Estudiante	Problema					
	1	2	3	4	5	6
1.	N1	N1	N2	N2	N2	N1
2.	N2	N3	N2	N3	N2	N2
3.	N1	N3	N1	N2	N1	N1
4.	N1	N1	N2	N2	N1	N1
5.	N1	N1	N1	N2	N2	N2
6.	N1	N2	N2	N2	N2	N1
7.	N1	N1	N2	N1	N1	N3
8.	N3	N2	N3	N3	N2	N3
9.	N2	N2	N2	N2	N2	N3
10.	N2	N2	N2	N1	N1	N2
11.	N1	N3	N1	N1	N1	N1
12.	N2	N3	N3	N2	N2	N3
13.	N2	N3	N2	N3	N1	N2
14.	N2	N3	N3	N2	N2	N1
15.	N2	N1	N3	N2	N2	N2
16.	N1	N1	N2	N2	N1	N3
17.	N3	N1	N1	N1	N1	N2
18.	N2	N1	N2	N1	N1	N2
19.	N2	N1	N2	N2	N1	N2
20.	N3	N1	N1	N3	N1	N2
21.	N3	N2	N3	N2	N2	N2
Frecuencia	N1= 8	N1= 10	N1= 5	N1= 5	N1= 11	N1= 6
	N2= 9	N2= 5	N2= 11	N2= 12	N2= 10	N2= 10
	N3= 4	N3= 6	N3= 5	N3= 4	N3= 0	N3= 5

5.4.1. Observaciones derivadas de la tabla

Con relación al problema 4. Resulta importante hacer conexiones con los resultados obtenidos en el problema 4 ya que en él los estudiantes debían hacer explicitas las propiedades que utilizaron en los reactivos anteriores, los cuales eran problemas concretos, a diferencia de este que era más abstracto. Los siguientes ítems muestran un análisis enfocado al problema 4.

- Los estudiantes que obtienen el nivel más alto **(N1) en el problema 4** (i. e. que dan dos propiedades de las experiencias aleatorias equivalentes) tuvieron (excepto por 18 y 10) dos de los tres problemas concretos, en el nivel más alto (N1). Aunque la respuesta del estudiante 18, sólo tiene una respuesta a nivel N1, no tiene ninguna en el nivel N3. El estudiante 10 es un caso atípico, pues no tiene ninguna respuesta en N1 en las preguntas 1-3. La siguiente tabla sirve para ilustrar lo anterior mencionado.

Estudiante	**Problema**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
7	N1	N1	N2	N1	N1
10	N2	N2	N2	N1	N1
11	N1	N3	N1	N1	N1
17	N3	N1	N1	N1	N1
18	N2	N1	N2	N1	N1

- También se puede observar que todos los estudiantes que obtuvieron el nivel 1 en el problema 4, también obtuvieron el nivel 1 en el problema 5, es decir fueron capaces de dar una experiencia aleatoria equivalente.

- Excepto por el estudiante 20, los estudiantes que no hacen explícita ninguna de las propiedades de las experiencias aleatorias equivalentes (**N3 en el problema 4**), tiene deficiencias para identificar cuando dos experiencias son equivalentes en las preguntas concretas. La respuesta de 20 es atípica, pues habiendo respondido adecuadamente en los problemas 2 y 3, no pudo formular las propiedades de las experiencias aleatorias equivalentes. Tal como se muestra en la tabla

Estudiante	Problemas				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
2	N2	N3	N2	N3	N2
8	N3	N2	N3	N3	N2
13	N2	N3	N2	N3	N1
20	N3	N1	N1	N3	N1

Con relación al problema 5. Este problema también es interesante debido a que en él los estudiantes debían generar una experiencia aleatoria equivalente a partir de otra, a diferencia de la anteriores donde solo había que hacer comparaciones entre dos experiencias aleatorias ya establecidas. Los siguientes ítems muestran un análisis enfocado al problema 4.

- Los estudiantes que proporcionaron una experiencia aleatoria equivalente en el problema 5 (los que **obtuvieron N1**), generalmente se desempañaron bien en los problemas anteriores ya que la mayoría de ellos (8 de 11) obtuvieron al menos dos respuestas en N1 en los primeros cuatro problemas. La siguiente tabla sirve para ilustrar lo anterior mencionado.

Estudiante	**Problema**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
3	N1	N3	N1	N2	N1
4	N1	N1	N2	N2	N1
7	N1	N1	N2	N1	N1
10	N2	N2	N2	N1	N1
11	N1	N3	N1	N1	N1
13	N2	N3	N2	N3	N1
16	N1	N1	N2	N2	N1
17	N3	N1	N1	N1	N1
18	N2	N1	N2	N1	N1
19	N2	N1	N2	N2	N1
20	N3	N1	N1	N3	N1

- Los estudiantes que proporcionaron únicamente una experiencia equivalente a la de Bernoulli en el problema 5 (los que obtuvieron N2), generalmente se desempeñaron de manera regular en los reactivos anteriores, ya que la mayoría de ellos (6 de 10) no obtuvo N1 en ninguno de los primeros 4 reactivos; más aún ninguno de ellos obtuvo N1 en el problema 4; tal como lo muestra la tabla siguiente.

Estudiante	Problema				
	1	2	3	4	5
1	N1	N1	N2	N2	N2
2	N2	N3	N2	N3	N2
5	N1	N1	N1	N2	N2
6	N1	N2	N2	N2	N2
8	N3	N2	N3	N3	N2
9	N2	N2	N2	N2	N2
12	N2	N3	N3	N2	N2
14	N2	N3	N3	N2	N2
15	N2	N1	N3	N2	N2
21	N3	N2	N3	N2	N2

6. Discusión de resultados

6.1. Reactivos del pre-test

En el capítulo anterior se encontraron tres niveles de repuestas que proporcionaban los estudiantes, dichos niveles estaban en función de los aspectos relevantes que los estudiantes consideraban cuando trabajan en tareas relacionadas con la equivalencia de experiencias aleatorias. En nivel 1 es para las respuestas que muestran que los estudiantes se fijan en dos aspectos relevantes: mismo número de elementos en el espacio muestral e igualdad de probabilidades. En el nivel 2 se agrupan las respuestas que muestran que los estudiantes consideran un solo aspecto relevante, de los mencionados anteriormente. Finalmente, en el nivel 3 están las respuestas en las que se muestra que los estudiantes consideran aspectos irrelevantes a la equivalencia de experiencias aleatorias.

Los resultados de este estudio muestran que los estudiantes se sitúan en distintos niveles, dependiendo el de problema que se les plantea, es decir, un estudiante no muestra el mismo nivel en las respuestas para cada problema, sin embargo, algunos estudiantes muestran cierta consistencia en sus niveles de respuesta. Para ser más explícitos con la conclusión anterior, a continuación, se contrastan los niveles obtenido en cada uno de los problemas aplicados.

Experiencia con dos elementos en el espacio muestral equiprobables. En el primer problema que se aplicó los estudiantes consistía en elegir, de tres opciones, una experiencia aleatoria que fuera equivalente al modelo de lanzamiento de una moneda. Diecisiete de 21 estudiantes mencionaron al menos un aspecto relevante a la equivalencia de experiencias aleatorias, cuando justificaban la elección de su respuesta. Particularmente, ocho estudiantes mencionaron la igualdad entre las probabilidades correspondientes y la igualdad entre los espacios muestrales; seis estudiantes mencionaron únicamente la igualdad entre los espacios muestrales; y tres hacían alusión solamente a la igualdad entre las probabilidades correspondientes.

Cuatro de los 21 participantes consideraron que el contexto en el que se sitúan los experimentos era relevante en la equivalencia. Estos estudiantes seleccionaron una experiencia que no era equivalente (por ejemplo, el lanzamiento de un dado) y sus justificaciones se basaban en que la cantidad de objetos que intervienen en la experiencia debe considerarse para elegir una equivalente. No existe evidencia de que algún estudiante aludiera a la correspondencia biunívoca entre los elementos del espacio muestral, sin embargo, esto no quiere decir que los estudiantes no la consideren, únicamente se encontró que no la hacen explicita.

Comparando con el resto de los problemas, en este se obtuvo la mayor cantidad de estudiantes colocados en el nivel 1 o 2. El a de la moneda tiene como característica que su espacio muestral se compone de dos elementos equiprobables, se considera que para los estudiantes es más sencillo trabajar con este tipo de problemas, además los modelos de lanzamiento de monedas son comúnmente usados en el aula para plantear problemas de probabilidad, por lo que esto puede ser la causas de que en esta pregunta se obtuvieron mejores resultados.

Experiencia con tres elementos en el espacio muestral no equiprobables. En el segundo reactivo los estudiantes debían evaluar la equivalencia de experiencias situados en el mismo contexto (modelo de urna), pero ambos con diferente distribución de probabilidad. Una experiencia aleatoria consistía en extraer una bola de una urna con 2 bolas rojas, 1 bola negra, 2 bolas blancas; y en la otra la urna contenía 1 bola roja, 1 bola negra, 3 bolas blancas.

Diez de 21 respuestas de los participantes se situaron en el nivel 1 debido a que ellos se fijaban en la probabilidad de cada evento de una experiencia aleatoria y la comparaban con la probabilidad del mismo evento en la otra experiencia, entonces notaban que algunas no eran iguales (por ejemplo, el evento “bola roja”) y concluían que las experiencias no eran equivalentes. Cuatro estudiantes mencionaron que las experiencias eran equivalentes debido a que tenían ambas tres elementos en el espacio muestral, este tipo de respuesta es considerada no normativa, sin embargo, se situó en el nivel 2 ya que significa que los estudiantes consideran un aspecto relevante (aunque de manera incorrecta) para establecer la equivalencia de dos experiencias.

También hubo siete estudiantes situados en el nivel 3, ellos consideraron aspectos no relevantes para justificar que las experiencias eran equivalentes; cuatro de ellos aludían a que el contexto en el que se situaban las experiencias era el mismo, por lo tanto, era equivalentes; el resto de los estudiantes proporcionó respuestas confusas.

Este problema fue en el que se encontraron más respuestas no normativas, en comparación con el resto. La mayoría de los estudiantes consideró que las experiencias eran equivalentes, aunque sus respuestas están situaditas en niveles distintos. La razón de esto podría ser que intervienen distintas variables distractoras como que ambos tienen el mismo número de elementos en el espacio muestral y que ambos están situados en el contexto de urnas con bolas, puede que por ello los estudiantes tiendan a considerar estas características como suficientes para justificar la equivalencia.

Experiencias realistas y pseudo concretos. En el tercer problema los estudiantes debían analizar la equivalencia de dos experiencias aleatorias con la misma distribución de probabilidad, pero situados en contextos diferentes. La primera experiencia consistía elegir al azar a una persona de un grupo conformado por 3 mujeres y 3 hombres y observar si la persona elegida era mujer o no. La segunda experiencia consistía observar si al lanzar un dado cae un numero par o impar.

Cinco estudiantes respondieron que las experiencias son equivalentes debido a que ambas tienen el mismo número de elementos en el espacio muestral y existe una igualdad de probabilidad entre los elementos correspondientes; estas respuestas se situaron en el nivel 1. Once estudiantes respondieron que ambas experiencias son equivalentes porque tienen el mismo número de elementos en el espacio muestral, sin embargo, no mencionaron ninguna de las otras dos propiedades, por ello sus respuestas se situaron en el nivel 2. Se clasificaron cinco respuestas en el nivel 3; en tres de ellas los estudiantes mencionaron que las experiencias no eran equivalentes debido a que estaban situados es contextos diferentes; las dos respuestas restantes eran aquellas que carecían de claridad.

En este problema fue donde se encontró el menor número de respuestas situadas en el nivel 1; además, únicamente los estudiantes de este nivel resaltaron la igualdad de probabilidades como característica relevante para la equivalencia de experiencias aleatorias, es decir, todos los que se situaron en el nivel 2 mencionaron la igualdad de espacios muestrales. Parece ser que este tipo de problema los hizo centrarse en el espacio muestral más que en la probabilidad de los eventos.

En los dos problemas anteriores, los estudiantes debían comparar experiencias aleatorias, a los que nosotros llamamos en esta tesis *modelos pseudo-concretos*; este tercer problema es diferente en el sentido de que aquí se debe comparar una *situación realista* con un modelo *pseudo-concreto.* Lo anterior puede ser la causa de que, a pesar de que el problema parece tener la misma dificultad que los demás, los niveles en los que se situaron las respuestas son diferentes.

Propiedades de equivalencia. En el cuarto reactivo se les preguntaba a los estudiantes qué condiciones se deben cumplir para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes. Esta pregunta nos permitía observar de manera explícita las características que para ellos son relevantes cuando estudian la equivalencia de experiencias aleatorias.

Cinco estudiantes respondieron que para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes deben tener el mismo número de elementos en el espacio muestral y debe existir una igualdad entre las probabilidades, esta respuesta se clasificó en el nivel 1. Siete estudiantes respondieron que la igualdad entre las probabilidades es una condición que debe cumplirse para que dos experiencias sean equivalentes; y cinco respondieron que la condición que debe cumplirse es que ambas experiencias tengan el mismo número de resultados; ambas repuestas se situaron en el nivel 2. Cuatro estudiantes respondieron de manera confusa e irrelevante para el problema, por lo que sus respuestas se situaron en el nivel 3.

Los resultados de este reactivo muestran algunas inconsistencias respecto a los reactivos anteriores; por ejemplo, los cuatro estudiantes que se situaron en el nivel 3 en este reactivo, obtuvieron al menos una respuesta en el nivel 2 en los anteriores; dicho de otro modo, estos estudiantes, en los reactivos anteriores mencionaron un aspecto relevante a la equivalencia de experiencias aleatorias, pero en este reactivo no hacían mención de él, ellos solo mencionaron características irrelevantes. Algo parecido ocurrió algunos estudiantes (más del 50%) que obtuvieron el nivel 2 en este reactivo; ya que ellos habían obtenido al menos una respuesta en el nivel 1, en los reactivos anteriores.

Esta pregunta no es tan concreta como las anteriores ya que aquí los estudiantes debían abstraer las propiedades que habían ocupado en sus justificaciones anteriores, para dar respuesta a una pregunta más general; es posible que esto sea la causa de que los estudiantes que en los reactivos anteriores mencionaron algunas propiedades de equivalencia, no fueron capaces de mencionar las mismas propiedades en esta pregunta.

6.2. Reactivos de la simulación física

Generar experiencias aleatorias equivalentes. En el primer reactivo correspondiente a la simulación física, se les planteaba a los estudiantes una experiencia aleatoria que consistía en responder al azar un examen de tres preguntas con dos opciones cada una; posteriormente se les pedía a los estudiantes que describieran una experiencia aleatoria que fuese equivalente a esta. La experiencia aleatoria de responder al examen una distribución binomial con n=3 y p=1/2, la cual a su vez está compuesta por un experimento Bernoulli repetido tres veces.

Once estudiantes fueron capaces de describir una experiencia aleatoria equivalente a la anteriormente mencionada, por lo que su repuesta se situó en el nivel 1. Diez estudiantes consideraron únicamente el experimento de Bernoulli y proporcionaron una experiencia aleatoria equivalente a él, por lo que su respuesta se clasificó en el nivel 2.

Esta pregunta presentaba un grado de dificultad mayor a las anteriores, ya que, como se mencionó anteriormente, la experiencia aleatoria de responder al examen genera una distribución binomial; además en este reactivo los estudiantes tenían que generar una experiencia aleatoria a partir de otra, a diferencia de los anteriores donde únicamente tenían que comparar dos experiencias aleatorias ya establecidas. Aun así, más del 50% de los estudiantes obtuvieron el nivel 1 en sus respuestas a este reactivo.

Un patrón interesante que surgió en las respuestas a este problema es que todos los estudiantes situados en el nivel 1 utilizaron el contexto de lanzamiento de monedas para proporcionar la experiencia aleatoria equivalente; los estudiantes que utilizaron un contexto diferente fueron aquellos que solo dieron una experiencia equivalente al experimento de Bernoulli. El contexto de lanzamiento de monedas suele ser muy familiar para los estudiantes, posiblemente esta sea la causa de que prestaran atención al experimento binomial completo, a diferencia de los que quisieron cambiar de contexto y solo se fijaron en el de Bernoulli.

Comparar situación realista con modelo pseudo concreto. En el segundo reactivo correspondiente a la simulación física se les planteaba a los estudiantes una experiencia aleatoria que consistía en lanzar tres monedas (o tres veces una) y observar los resultados obtenidos; posteriormente se les preguntaba que si ellos consideraban que esta experiencia aleatoria era equivalente a la de responder aleatoriamente al examen.

En este problema, los estudiantes que se situaron tanto en el nivel 1 como en el 2 hicieron mención únicamente del experimento de Bernoulli; y no del binomial (la cual era considerada la respuesta normativa). Siete de ellos mencionaron que ambas experiencias aleatorias eran equivalentes porque tenían el mismo número de elementos en el espacio muestral (de Bernoulli) y existía una igualdad entre las probabilidades (considerando el experimento Bernoulli); esta respuesta se clasificó en el nivel 1. Siete estudiantes respondieron que las experiencias aleatorias eran equivalentes porque tenían el mismo número de elementos en el espacio muestral; y dos estudiantes respondieron que eran equivalentes porque existía una igualdad entre las probabilidades; ambas respuestas se clasificaron en el nivel 2. Cinco estudiantes se situaron en el nivel 3 porque utilizaron argumentos irrelevantes en sus justificaciones.

6.3. Reactivo de la simulación en Fathom

Después de plantearles a los estudiantes la experiencia aleatoria que consistía en responder un examen de tres preguntas con dos incisos; se les pedía que realizaron una simulación computacional de dicha experiencia aleatoria, con la ayuda del software Fathom. Cuando los estudiantes terminaban la simulación se les preguntaba si ellos consideraban que el proceso realizado en la computadora era equivalente al que se aplicó en la simulación física.

Cuatro estudiantes respondieron que ambos procesos son equivalentes y en sus justificaciones utilizaron términos relacionados con la equivalencia de experiencias aleatorias, sin embargo, el uso de estos términos era confuso ya que no mostraron evidencia de haber calculado y comparado las probabilidades y el espacio muestral. Siete estudiantes respondieron que los procesos son equivalentes, pero en sus justificaciones únicamente describían características del software, por ejemplo, la cantidad de datos que es capaz de procesar y la rapidez con la que los procesa. Cinco estudiantes respondieron que los procesos eran equivalentes, sin embargo, presentaban argumentos que no se comprendían.

Todas las respuestas proporcionadas en esta pregunta fueron clasificadas en nivel 3. Las respuestas en las que se incluían términos relacionados con la equivalencia se clasificaron en este nivel porque carecían de claridad y no fue posible asegurar que los estudiantes realmente estaban aplicando los conceptos correctamente. Las respuestas en las que se describían las características del software también se clasificaron en el nivel 3 ya que dichas características no son relevantes para la equivalencia de experiencias aleatorias.

Esta pregunta fue la única donde todas las respuestas de los estudiantes se consideraron no normativas; incluso las respuestas de los estudiantes que habían obtenido niveles 1 y 2 en los reactivos anteriores; es decir, hubo estudiantes que habían utilizado una o dos propiedades de equivalencia en sus respuestas anteriores y en este reactivo no hicieron mención de ellas, más bien mencionaban características del software. Parece ser que el estudio de equivalencia de experiencias aleatorias en contextos tecnológicos presentó mayor dificultad para los estudiantes.

7. Conclusiones

En esta investigación nos preguntamos acerca de los patrones de razonamiento que emergen de las respuestas de los estudiantes cuando responden preguntas de equivalencia entre dos experiencias aleatorias. Después de clasificar todas las repuestas de cada reactivo, fuimos capaces de encontrar dos características relevantes que los estudiantes utilizan para justificar la equivalencia: el mismo número de elementos en los espacios muestrales y la igualdad entre las probabilidades correspondientes.

Todos los estudiantes que participaron en esta investigación utilizaron al menos una de las dos propiedades antes mencionadas para justificar algunas de sus respuestas. Incluso la mayoría de los estudiantes participantes (16 de 21) utilizaron las dos propiedades simultáneamente al responder algunos reactivos. Un tipo de respuesta que se esperaba encontrar era que los estudiantes mencionaran la correspondencia biunívoca entre los elementos del espacio muestral, sin embargo, no se encontró evidencia de que alguno la utilizara, esto no quiere decir que no la consideren.

Cuando se les planteaba a los estudiantes una experiencia aleatoria que producía una distribución binomial y se les pedía generar una experiencia aleatoria equivalente; la mayoría de ellos (11 de 21) respondieron normativamente. Incluso los 10 restantes generaban una experiencia equivalente, aunque considerando el experimento Bernoulli. Es decir, todos los estudiantes fueron capaces de generar experiencias aleatorias equivalentes a partir de otras; aunque unos en un nivel distinto a otros.

Observamos que hay una cierta correlación entre identificar y argumentar adecuadamente en los problemas concretos (los primeros tres problemas) con hacer explícitas las propiedades de experiencias aleatorias equivalentes (problema 4). En general, los estudiantes que no hacen explícita ninguna de las propiedades de las experiencias aleatorias equivalentes tiene deficiencias para identificar cuando dos experiencias son equivalentes en las preguntas concretas. Se observa que es fue más fácil para los estudiantes señalar dos propiedades en situaciones concretas que hacerlas explícitas de manera general, es decir, en una definición de equivalencia de experiencias.

Con base en lo anterior, consideramos que puede ser útil poner atención en la enseñanza en hacer explícito el concepto de experiencias aleatorias equivalentes, no dando la definición, sino eligiendo actividades-problemas en los que se les cuestione sobre dicha equivalencia, con actividades como las utilizadas en esta investigación y otras mejor elaboradas.

Se puede decir que esta investigación ha presentado un avance con relación al trabajo de Herrera (2017) ya que ella reportó que la mayoría de sus estudiantes acudían al azar y la aleatoriedad para justificar que dos experiencias aleatorias eran equivalentes, es decir, ellos mencionaban que dos experiencias son equivalentes porque ambas son azarosas. Además, muy pocos estudiantes de Herrera (2017) mencionaron la igualdad entre los espacios muestrales o la igualdad entre las probabilidades de los elementos correspondientes y ningún de ellos mencionó ambos aspectos simultáneamente. También un número significativo de estudiantes no reconocían la equivalencia de dos experiencias aleatorias, cuando sí lo eran.

Los reactivos de Herrera (2017) solo se centraron en comparar experimentos binomiales a diferencia de esta tesis donde se empezaban comparando experimentos más simples como experimentos de Bernoulli o experimentos con espacio muestral equiprobable. Además, en esta tesis, antes de preguntar a los estudiantes sobre la equivalencia entre un modelo pseudo-concreto y uno realista, se les preguntaba acerca de la equivalencia entre dos modelos pseudo concretos. En resumen, el instrumento de esta tesis empezaba con reactivos con un menor grado de dificultad que los de Herrera (2017), posiblemente esto facilitó a los estudiantes reconocer cuándo dos experiencias aleatorias eran equivalentes. Además, en cada reactivo del instrumento de esta tesis, se incluían variables distractoras con el propósito de que los estudiantes prestaran atención a la probabilidad de los eventos o al número de elementos del espacio muestral. Es posible que lo anterior ayudara a los estudiantes a fijarse en características relevantes cuando argumentaban la equivalencia de experiencias aleatorias.

La mayoría de los estudiantes de Benson y Jones (1999), usaban la correspondencia biunívoca cuando resolvían problemas referentes a la equivalencia de experiencias aleatorias, incluso los estudiantes más jóvenes que no habían llevado cursos de probabilidad. Como se mencionó anteriormente, en esta investigación no se encontró evidencia de que los estudiantes consideraran la correspondencia biunívoca en sus justificaciones. El instrumento aplicado por Benson y Jones (1999) incluían problemas más concretos, donde resultaba más natural hacer corresponder un elemento del dispositivo generador con un evento del problema planteado. Por ejemplo, ellos pedían a los estudiantes encontrar un dispositivo generador (entre dados, ruletas, urnas, etc.) que modelara un problema que consistía en elegir una película entre un catálogo de seis. Hacer la correspondencia en este tipo de problemas parece ser más sencillo, comparado con los problemas que contenía el instrumento aplicado en esta tesis, ya que aquí se encontraban problemas más abstractos.

Benson y Jones (1999) reportaron que una minoría de sus estudiantes mostraron razonamientos validos cuando estudiaban la equivalencia de dispositivos *generadores de probabilidad* con experimentos bidimensionales. Cuando nuestros compraban dos experimentos binomiales, ellos únicamente se fijaban en el experimento de Bernoulli, es decir, ellos comparaban la probabilidad y los espacios muestrales de la situación Bernoulli y no mencionaban nada acerca de la binomial; se puede decir que esta dificultad es parecida a la que encontraron Benson y Jones, considerando que la experiencia aleatoria en el que se define la binomial es bidimensional. Benson y Jones (1999) mencionan que en investigaciones anteriores ya se habían reportado dificultades en tareas bidimensionales teóricas, pero no se habían reportado en el contexto de equivalencia de experiencias aleatorias, por lo que su estudio se ha sumado a los anteriores. Los resultados encontrados en esta investigación refuerzan los de Benson y Jones, haciendo un llamado a prestar atención a este tipo de tareas.

Diversas investigaciones promueven que el uso de simulaciones computacionales apoya en el proceso de aprendizaje de la probabilidad y la estadística (Hoffman et al. (2014), Ireland y Watson (2009) y Konold et al. (2011)); sin embargo, es necesario preguntarse si los estudiantes comprenden por qué las simulaciones computacionales representan las situaciones realistas o pseudo concretas que se quieren estudiar en la simulación; es decir, si ellos entienden que hay cierta estructura matemática que sustenta la equivalencia entre la simulación computacional y la situación realista o el modelo pseudo concreto.

Los estudiantes de esta investigación no manifiestan este tipo de razonamiento, ya que a pesar de que ellos aceptan la equivalencia entre un modelo pseudo-concreto y la simulación computacional, no usan ningún argumento matemático para justificar dicha equivalencia, más bien, ellos mencionan características del software en sus justificaciones, por ejemplo "son equivalentes, pero este es más rápido". Algunos estudiantes que respondieron de esta manera, sí consideraron aspectos relevantes a la equivalencia en los reactivos donde no se utilizaban simulaciones computacionales, por ejemplo, en aquellos en los que se comparaban experimentos pseudo-concretos. Al parecer hacer preguntas de equivalencia en contextos tecnológicos presentó un mayor grado de dificultad para los estudiantes.

Ireland y Watson (2009) mencionan que se han llevado a cabo muchas investigaciones sobre el uso de modelos concretos y simulaciones por computadora para desarrollar otros conceptos matemáticos abstractos para los estudiantes; sin embargo, parece haber una investigación limitada sobre lo que se requiere para facilitar una transición efectiva de modelos concretos a simulaciones informáticas abstractas en el campo de la probabilidad. Los resultados de esta tesis refuerzan la necesidad de Ireland y Watson para llevar a cabo investigaciones acerca de la equivalencia de experiencias aleatorias en contextos tecnológicos.

7.1. Limitaciones

En este estudio hacemos un análisis de los datos producidos por los estudiantes en una actividad prediseñada. En el curso del análisis surgen dudas acerca de lo que quieren decir los estudiantes con ciertas respuestas, que nos lleva a pensar que sería bueno realizar algunas entrevistas. Paralelamente también surgen ideas de cómo mejorar el instrumento para obtener mejores datos, por ejemplo, pedir a los estudiantes que elaboren un plan de simulación en el que se pueda ver cómo se refleja su conocimiento sobre equivalencia de experiencias aleatorias. Estas consideraciones nos llevarían a un segundo ciclo de investigación, que infortunadamente no fue posible llevar a cabo por falta de tiempo.

Bibliografía

Abrahamson, D., y Wilensky, U. (2007). Learning axes and bridging tools in a technology-based design for statistics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*(1), 23–55. https://doi.org/10.1007/s10758-007-9110-6

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., y Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. En C. Batanero, E. J. Chernoff, J. Engel, H. S. Lee, y E. Sánchez (Eds.), *Research on Teaching and Learning Probability* (pp. 1–33). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The Nature of Chance and Probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 15–37). Boston, MA: Springer US. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181–199. https://doi.org/10.1023/A:1002954428327

Benson, C. T., y Jones, G. A. (1999). Assessing Students' Thinking Modeling Probability Contexts. *The Mathematics Educator*, *4*(2), 1–21.

Biggs, J. B., y Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. En H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and Measurement* (pp. 57–76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Birks, M., y Mills, J. (2011). *Grounded Theory: A Practical Guide* (1 edition). Los Angeles, Calif: SAGE Publications Ltd.

Chaput, B., Girard, J.-C., y Henry, M. (2011). Frequentist Approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 85–95). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_12

Fischbein, E., Nello, M. S., y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 523–549. https://doi.org/10.1007/BF00312714

Gnedenko, B. V. (1968). The Theory of Probability. New York: Chelsea.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélisation en l'enseignement. *Enseigner les probabilités au lycée*, 77–84.

Herrera, M. del A. (2017). EL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN ACTIVIDADES DE PROBABILIDAD BINOMIAL CON APOYO DE SIMULACIÓN COMPUTACIONAL (tesis de maestría). CINVESTAV- IPN, Ciudad de Mexico.

Hofmann, T., Maxara, C., Meyfarth, T., y Prömmel, A. (2014). Using the software FATHOM for learning and teaching statistics in Germany – A review on the research activities of Rolf Biehler's working group over the past ten years. En T. Wassong, D. Frischemeier, P. R. Fischer, R. Hochmuth, y P. Bender (Eds.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (pp. 283–304). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-03104-6_21

Horvath, J., y Lehrer, R. (1998). A Model-Based Perspective on the Development of Children's Understanding of Chance and Uncertainty. *Reflections on statistics: Agendas for learning, teaching, and assessment in K-12, 121148.*

Ireland, S., y Watson, J. (2009). Building a Connection between Experimental and Theoretical Aspects of Probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 339–370.

Jabareen, Y. (2009). Building a Conceptual Framework: Philosophy, Definitions, and Procedure. *International Journal of Qualitative Methods*, *8*(4), 49–62. https://doi.org/10.1177/160940690900800406

Johnson, R., y Kuby, P. (2012). *Estadística Elemental.* México: CENGAGE, Learning.

Jones, G. A., Langrall, C. W., y Mooney, E. S. (2007). Research in Probability: Responding to Classroom Realities. En Lester F. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Lester F., pp. 909–955). USA: NTCM.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., … Kazak, S. (2011). Conceptual Challenges in Coordinating Theoretical and Data-centered Estimates of Probability. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1–2), 68–86. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538299

Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. L. (2007). 1 INTRODUCTION. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 10, pp. 1–32). New York, NY: Springer Science y Business Media.

Parzysz, B. (2009). DE L´EXPERIENCE ALEATOIRE AU MODELE, via LA SIMULATION. *REPERES - IREM*, *74*. Recuperado de http://www.academia.edu/15964021/DE_LEXPERIENCE_ALEATOIRE_AU_MODELE_via_LA_SIMULATION

Pratt, D., y Noss, R. (2002). The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness. *Journal of the Learning Science*, *11*(4), 453–488.

Sánchez, E. A. S., Cazares, S. I., y Antuna, R. Á. (2015). *Probabilidad y Estadística 1*. Grupo Editorial Patria.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 465-494). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc

Shaughnessy, M., Chance, B., y Kranendonk, H. (2009). *Focus in High School Mathematics: Statistics and Probability*. (NCTM, Ed.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sobol, I. M. (1985). El método de Montecarlo. [Lecciones Populares de Matemáticas]. Moscú: Editorial MIR.

Tarr, J. (2002). The confounding effects of “50–50 chance” in making conditional probability judgments. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *24*, 35–53.

Watson, J. M., Collis, K. F., & Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. Mathematics Education Research Journal, 9, 60–82.

Apéndice A: cuestionario 1 (pre-test)

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, UNAM, Plantel Sur
CUESTIONARIO 1 DE PROBABILIDAD

Profesora: Guadalupe Carrasco Licea

Nombre del alumno: ____

Grupo: ___________ Edad________________

Instrucciones: Lee con cuidado cada situación y responde las preguntas que se hacen; en algunas probablemente no sepas de antemano la respuesta, pero reflexiona y escribe lo que consideres que es correcto.

PARTE 1

1. Considere el experimento “lanzar una moneda y observar la cara que cae”. ¿Cuál de los siguientes experimentos es equivalente a este? Justifica tu respuesta.
   d) Lanzar un dado y observar el número que se obtiene
   e) Extraer al azar una bola de una urna que contiene una bola blanca y una bola negra; y observar el color de la bola que sale
   f) Lanzar dos monedas simultáneamente y observar las caras que caen

   Justificación: ____

   ____

   ____

2. Considera los siguientes experimentos aleatorios

Experimento A: extraer al azar una bola de una urna que contiene: 2 bolas rojas, 1 bola negra, 2 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

Experimento B: extraer al azar una bola de una urna que contiene: 1 bola roja, 1 bola negra, 3 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

   c) ¿son equivalentes los experimentos A y B?
   d) ¿Por qué?

   ____

   ____

   ____

3. Considera los siguientes experimentos
   Experimento C: elegir al azar a una persona del siguiente grupo de estudiantes: Ana, Juan, María, Pedro, Nicolás y Bertha. Observar si es mujer o no.
   Experimento D: lanzar un dado y observar si el resultado es un número par o no.
   3. ¿son equivalentes los experimentos C y D?
   4. ¿por qué?

   ____

   ____

   ____

4. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que dos experimentos aleatorios sean equivalentes?

   ____

   ____

   ____

   ____

PARTE 2

Experiencia aleatoria 1. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige.

1. ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente la primera pregunta? Explica tu respuesta

2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol)

3. ¿Cuántos diferentes resultados hay en el *Espacio Muestral* del experimento?

4. Considera la variable X = "El número de respuestas correctas". Describe todos los valores que puede tomar esta variable.
5. Enlista los resultados que corresponden a cada valor de la variable

Valor de X	Resultados

6. Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 0? ____________

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 1? ____________________

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 2? _____________________

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 3? _____________________

7. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla:

Valor de X	Probabilidad
Suma	

8. Si el estudiante acredita el examen cuando responde al menos dos preguntas correctamente.

   a) ¿para qué valores de la variable se aprueba el examen?

   b) calcula la probabilidad de acreditar el examen

Imagina y describe un experiencia aleatoria que sea equivalente al **experiencia aleatoria 1**, que se describió arriba.

Si 1000 estudiantes respondieran el examen y todos ellos respondieran al azar

a) ¿Cuántos acertarían cero preguntas? Explica tu respuesta

b) ¿Cuántos acertarían en una sola pregunta? Explica tu respuesta

c) ¿Cuántos acertarían en dos preguntas? Explica tu respuesta

d) ¿Cuántos acertaría en 3 preguntas? Explica tu respuesta

Apéndice B: cuestionario 2 (simulación física)

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, UNAM, Plantel Sur
CUESTIONARIO 2

Profesora: Guadalupe Carrasco Licea

Nombre del alumno: ____

Grupo: ____________ Edad_________________

Teniendo en cuenta nuevamente el **experiencia aleatoria 1**, que se reproduce en seguida:

> Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

1. Sea X la variable: “el número de respuestas correctas” En la siguiente tabla anota la probabilidad de obtener cada valor:

Valor de X	**Probabilidad**
Suma	

2. Explica cómo calculaste cada probabilidad:

3. Considera las siguientes preguntas: Si 48 estudiantes responden al azar el examen
   a) ¿Cuántos alumnos contestarían incorrectamente todas las preguntas?
   b) ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente solo una pregunta?
   c) ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente exactamente dos preguntas?
   d) ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente todas las preguntas?

Para responder un equipo decidió **simular** la situación de la siguiente manera:

Se considera que responder al azar una pregunta del examen es equivalente a lanzar una moneda y observar el resultado: Se conviene que si sale “Sol” es como si el estudiante atinara a la respuesta correcta; si sale “Águila” es como si su respuesta fuera incorrecta. Como el examen consta de tres preguntas, se deben lanzar tres monedas (o tres veces una moneda) para simular una vez el experimento. Ahora bien, se puede simular 48 veces el experimento descrito y observar en cuántos exámenes no se responde correctamente ninguna pregunta (no sale ningún “Sol”), en cuántos exámenes se responde correctamente sólo una pregunta (sale un “Sol”), etc.

4. ¿crees que este experimento es equivalente al **experiencia aleatoria 1** descrito arriba? Explica tu respuesta.

5. ¿Crees que hay una respuesta única para cada pregunta?

a) Si respondes “Sí” ¿Cuáles son esas respuestas únicas?

b) Si respondes “No”, explica las razones

Práctica 1. Formen equipos de 4 estudiantes y con ayuda de una moneda (o tres monedas) simulen 48 veces el experimento; anoten en cada renglón de la tabla de abajo si la respuesta a la pregunta correspondiente es “correcta” o “incorrecta” de acuerdo a los resultados de la moneda y a lo convenido anteriormente:

Alumno	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Numero de respuestas correctas: variable X**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				

6. Con la información que obtuviste de tu simulación responde de manera indivudual:
   a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?

   b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?

   c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?

   d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

7. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla:

Valores de x	**Frecuencia Absoluta**
Suma	

8. Responde las siguientes preguntas con ayuda de la tabla
   a) ¿Qué valores de la variable son los menos frecuentes?
   b) ¿Qué valores de la variable son los más frecuentes?
   c) ¿Crees que lo anterior ocurra en general o que es sólo casualidad?
   d) Si ocurre en general ¿Por qué crees que eso pase?
   e) Si ocurre por casualidad, explica.

Practica 2. Reúnete de nuevo con tu equipo. Utilicen los primeros 20 resultados de la practica 1 para llenar la tabla de frecuencias.

9. Responde de manera individual las siguientes preguntas

 a) ¿Qué observas de las frecuencias relativas del evento contestar "0 preguntas correctas"?

 b) ¿A qué número tienden las frecuencias relativas del evento contestar "0 preguntas correctas"? ¿Por qué crees que esto pase?

 c) ¿Qué observas de las frecuencias relativas del evento contestar "1 pregunta correcta"?

 d) ¿A qué número tienden las frecuencias relativas del evento contestar "1 pregunta correcta"? ¿Por qué crees que esto pase?

 e) ¿Qué observas de las frecuencias relativas del evento contestar "2 preguntas correctas"?

 f) ¿A qué número tienden las frecuencias relativas del evento contestar "2 preguntas correctas"? ¿Por qué crees que esto pase?

 g) ¿Qué observas de las frecuencias relativas del evento contestar "3 preguntas correctas"?

 h) ¿A qué número tienden las frecuencias relativas del evento contestar "3 preguntas correctas"? ¿Por qué crees que esto pase?

10. Consideren cada par (Alumno, Frecuencia relativa) como las coordenadas de un punto. Marquen en el siguiente plano cartesiano los puntos y unan con un segmento los puntos sucesivos para trazar la trayectoria de cada una de las tres secuencias de frecuencias relativas; utilicen colores diferentes: un color para la secuencia de frecuencia relativas de 0, otro color para la secuencia de frecuencias relativas de 1 , otro diferente, para la secuencia de frecuencias relativas de 2 y otro color para para la secuencia de frecuencias relativas de 3.
11. ¿Qué observas en las trayectorias de la secuencia de frecuencia relativas de 0?

12. ¿Qué observas en las trayectorias de la secuencia de frecuencia relativas de 1?

13. ¿Qué se observa en las trayectorias de la secuencia de frecuencia relativas de 2?

14. ¿Qué se observa en las trayectorias de la secuencia de frecuencia relativas de 3?

15. ¿Ves alguna relación entre las probabilidades de cada valor de la variable y las frecuencias relativas?

16. Supongamos que se repite el experimento con 500 estudiantes

a) ¿Qué crees que pase con las frecuencias relativas del evento contestar “0 preguntas correctas”?

b) ¿Qué crees que pase con las frecuencias relativas del evento contestar “1 pregunta correcta”?

c) ¿Qué crees que pase con las frecuencias relativas del evento contestar “2 preguntas correctas”?

d) ¿Qué crees que pase con las frecuencias relativas del evento contestar “3 preguntas correctas”?

17. ¿Cómo crees que sea la gráfica de las secuencias de frecuencias relativas? (intenta dibujarla)

Apéndice C: cuestionario 3 (simulación en Fathom)

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, UNAM, Plantel Sur

CUESTIONARIO 3

Profesora: Guadalupe Carrasco Licea

Nombre del alumno: ____

Grupo: __________ Edad_______________

Considere el **experiencia aleatoria 1:**

> Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta <u>tiene dos opciones</u> de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

A continuación, se simulará en Fathom el evento "**contestar aleatoriamente la pregunta 1**", para ello sigue las instrucciones.

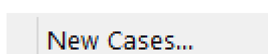
I. Utiliza el icono 

para crear una tabla.

II. Para crear la columna que registre el número alumnos que respondieron el examen da clic en 

y nómbralo "Alumnos". Ahora da clic derecho sobre la columna "Alumnos" y selecciona 

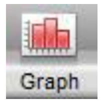
y en el espacio en blanco escribe "**caseindex**" y da clic en "OK".

III. Para agregar el número de estudiantes que contestaron el examen, da clic derecho sobre la tabla, posteriormente selecciona 

y escribe **100.**

IV. A la siguiente columna nómbrale "Preg1".

El siguiente paso es construir una **gráfica de frecuencias.** Para ello:

I. Utiliza el icono *"Graph"*  y arrástralo hacia la ventana. Aparece un recuadro en el que se graficará.
II. Da click sobre la columna *"Preg1"* y arrastra hasta la parte horizontal del recuadro que apareció cuando presionaste "Graph".
III. En la parte superior derecha del gráfico selecciona del menú desplegable la opción "Histogram"

1. Contesta las siguientes preguntas
a) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente la pegunta 1? __________________
b) ¿Cuantos alumnos contestaron incorrectamente la pregunta 1? ________________
2. Presiona Ctrl+y para cambiar los datos de la muestra (puedes repetir este paso las veces que consideres necesarios) ¿Qué observas cuando realizas lo anterior?

3. Aumenta la muestra a 500, para esto debes dar click derecho sobre la caja y click sobre "New Cases" .
   a) ¿Qué observas en esta nueva grafica?

   b) ¿Qué observas al comparar la gráfica de las 100 muestras con las de 500?

Ahora se va a construir una **gráfica de frecuencias relativas.** Para ello:

I. utiliza el icono *"Graph"*  y arrástralo hacia la ventana. Aparece un recuadro en el que se graficará.
II. Da click sobre la columna *"Alumnos"* y arrastra hasta la parte horizontal del recuadro que apareció cuando presionaste "Graph".
III. Da click sobre la columna *"FrecRelCorrecta"* y arrastra hasta la parte vertical del recuadro que apareció cuando presionaste "Graph".
IV. En la parte superior derecha del gráfico selecciona del menú desplegable la opción "Line Scatter Plot"

4. Observa las secuencias de frecuencias relativas del evento "contestar de manera correcta" (la columna "FrecRelCorrecta")
   a) ¿A qué número se aproximan? ______________________

b) ¿Por qué crees que esto ocurra?

5. Observa gráfica y contesta: ¿Cómo es el comportamiento de la línea quebrada conforme va hacia a la derecha?

6. A continuación, realiza la gráfica de la recta $FrecRelCorrecta = .5$, para ello da clic derecho sobre la gráfica y selecciona “Plot function”, posteriormente escribe .5 en el espacio en blanco y da clic en “Ok”.
   a) ¿Qué relación hay entre esta nueva recta y la línea quebrada?

   b) ¿Por qué crees que esto pase?

7. Presiona Ctrl+y para cambiar los datos de la muestra (puedes repetir este paso las veces que consideres necesarios) ¿Qué observas cuando realizas lo anterior?

8. ¿Qué observas al comparar la gráfica de las 100 muestras con las de 500?

9. ¿Cómo crees que sería la gráfica de las frecuencias relativas del evento “contestar de manera correcta” si 1000 alumnos respondieran el examen? (**dibuja la gráfica sin usar Fathom**, utiliza la parte de atrás de esta hoja)

10. Completa la primera tabla con la información para 100 casos y la segunda con la información para 1000.

Valores de X	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia Relativa**
Suma		

Valores de X	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia Relativa**
Suma		

Elabora un plan de simulación donde expongas como simular el **experiencia aleatoria 1** completo.

Nota: recuerda que primero debes crear una columna con el nombre "Alumnos" y utilizar la formula *caseindex* para llevar el conteo de los estudiantes que respondieron el examen. El tamaño de la muestra debe ser 100

11.- Antes de continuar, responde a la siguiente pregunta: ¿Consideras que este proceso corresponde o es equivalente al que se aplicó en la simulación física para responder el examen? Explica tu respuesta.

El siguiente paso es construir una **gráfica de frecuencias.** Para ello:

I. Utiliza el icono *"Graph"* 

y arrástralo hacia la ventana. Aparece un recuadro en el que se graficará.

II. Da click sobre la columna *"NumDeAciertos"* y arrastra hasta la parte horizontal del recuadro que apareció cuando presionaste "Graph".

III. En la parte superior derecha del gráfico selecciona del menú desplegable la opción "Histogram"

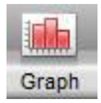
11. Contesta las siguientes preguntas
    a. ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas? ________________
    b. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta? __________________
    c. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente dos preguntas? ____________
    d. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas? __________________

12. Presiona Ctrl+y para cambiar los datos de la muestra (puedes repetir este paso las veces que consideres necesarios) ¿Qué observas cuando realizas lo anterior?

13. Aumenta la muestra a 500, para esto debes dar click derecho sobre la caja y click sobre "New Cases" . ¿Qué ahora observas en esta nueva grafica?

14. ¿Qué observas al comparar la gráfica de las 100 muestras con las de 500?

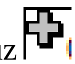
Ahora se va a construir una **gráfica de frecuencias relativas.** Para ello:

I. U tiliza el icono *"Graph"* 

y arrástralo hacia la ventana. Aparece un recuadro en el que se graficará.

II. Da click sobre la columna *"Alumnos"* y arrastra hasta la parte horizontal del recuadro que apareció cuando presionaste "Graph".

III. Da click sobre la columna *"FrecRelDe0"* y arrástralo hasta la parte vertical del recuadro.

IV. Da click sobre la columna *"FrecRelDe1"* y arrástralo sobre la cruz  que esta en la parte vertical del recuadro.

V. Realiza el paso IV para las columnas *"FrecRelDe2" y "FrecRelDe3"*

VI. En la parte superior derecha del gráfico selecciona del menú desplegable la opción "Line Scatter Plot"

15. Observa las secuencias de frecuencias relativas del evento "contestar correctamente 0 preguntas" (la columna "FrecDe0")
    a) ¿A qué número se aproximan? ______________________
    b) ¿Por qué crees que esto ocurra?

16. Observa las secuencias de frecuencias relativas del evento "contestar correctamente 1 pregunta" (la columna "FrecRelDe1")
    a) ¿A qué número se aproximan? ______________________
    b) ¿Por qué crees que esto ocurra?

17. Observa las secuencias de frecuencias relativas del evento "contestar correctamente 2 preguntas" (la columna "FrecRelDe2")
    a) ¿A qué número se aproximan? ______________________
    b) ¿Por qué crees que esto ocurra?

18. Observa las secuencias de frecuencias relativas del evento "contestar correctamente 3 preguntas" (la columna "FrecRelDe3")

c) ¿A qué número se aproximan? ______________________
d) ¿Por qué crees que esto ocurra?

19. Observa la gráfica que realizaste y contesta ¿cómo es el comportamiento de las líneas quebradas conforme van hacia a la derecha?
    a) Comportamiento de la gráfica de las frecuencias relativas de 0

    b) Comportamiento de la gráfica de las frecuencias relativas de 1

    c) Comportamiento de la gráfica de las frecuencias relativas de 2

    d) Comportamiento de la gráfica de las frecuencias relativas de 3

20. ¿Cómo se relacionan estos comportamientos con los datos de tu tabla?

21. Presiona Ctrl+y para cambiar los datos de la muestra (puedes repetir este paso las veces que consideres necesarios) ¿Qué observas cuando realizas lo anterior?

22. ¿Qué observas al comparar la gráfica de las 100 muestras con las de 500?

23. ¿Qué rectas debes graficar para estudiar la tendencia de las trayectorias? (por ejemplo, en la pregunta 6 se graficó la recta $FrecRelCorrecta = .5$) Argumenta tu respuesta.

24. Crea una nueva grafica donde únicamente grafiques las frecuencias relativas de 0. A continuación, realiza la gráfica de la recta $FrecRelDe0 = 1/8$, para ello da clic derecho sobre la gráfica y selecciona “Plot function”, posteriormente escribe 1/8 en el espacio en blanco y da clic en “Ok”.
a) ¿Qué relación hay entre la recta $FrecRelDe0 = 1/8$, y la línea quebrada?

b) ¿Por qué crees que esto pase?

25. Crea otra grafica donde únicamente grafiques las frecuencias relativas de 1. A continuación, realiza la gráfica de la recta $FrecRelDe1 = 3/8$.
a) ¿Qué relación hay entre la recta $FrecRelDe1 = 3/8$, y la línea quebrada?
b) ¿Por qué crees que esto pase?

26. Crea otra grafica donde únicamente grafiques las frecuencias relativas de 2. A continuación, realiza la gráfica de la recta $FrecRelDe2 = 3/8$.
a) ¿Qué relación hay entre la recta $FrecRelDe2 = 3/8$, y la línea quebrada?

b) ¿Por qué crees que esto pase?

27. Crea otra grafica donde únicamente grafiques las frecuencias relativas de 3. A continuación, realiza la gráfica de la recta $FrecRelDe3 = 1/8$.
a) ¿Qué relación hay entre la recta $FrecRelDe3 = 1/8$, y la línea quebrada?

b) ¿Por qué crees que esto pase?

28. ¿Cómo crees que sería la gráfica de las frecuencias relativas si 1000 alumnos respondieran el examen? intenta dibujar la gráfica sin usar Fathom (utiliza la parte de atrás de esta hoja**).**