CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

"El concepto de dominio de función y su relevancia en el cálculo: un estudio con profesores de bachillerato"

Tesis que presenta:

José Omar Guerrero Hernández

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de Matemática Educativa

Director de la tesis:

Dr. Antonio Rivera Figueroa

Ciudad de México, Abril de 2019

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos los trabajadores mexicanos por el financiamiento otorgado a través del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, principalmente a los compañeros de la extinta Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria.

Sin su noble labor, este trabajo no habría sido posible.

Número de becario: 619026.

AGRADECIMIENTOS

Muchas gracias a todos los trabajadores del CINVESTAV y a quienes conforman el Departamento de Matemática Educativa de este centro de investigación, especialmente al Dr. Antonio Rivera Figueroa por su dirección, sus enseñanzas y sus consejos que mucho sirvieron para la elaboración de esta tesis.

Agradezco también al Dr. Ernesto A. Sánchez Sánchez y al Dr. Roberto Acosta Abreu por fungir como sinodales en el proceso de obtención del título. Muchas gracias a los doctores Ana Isabel Sacristán Rock, Carlos Armando Cuevas Vallejo, Luis Enrique Moreno Armella, Luz Manuel Santos Trigo y Gonzalo Zubieta Badillo por sus enseñanzas en este proceso de aprendizaje.

Gracias también a Adriana Parra Hernández por ser tan atenta y estar tan al pendiente de todos nosotros. A todos ustedes, muchas gracias.

Dedicado a los padres y maestros
de los jóvenes rebeldes,
especialmente a los míos.

Y a la memoria de Roberto Esteban.

ÍNDICE

RESUMEN

El presente trabajo es un estudio exploratorio de carácter cualitativo con profesores de bachillerato, en el cual nos hemos propuesto identificar el nivel de comprensión que ellos poseen acerca del concepto de dominio de función. Nos enfocamos en determinar cuál es el desempeño que muestran estos profesores acerca del concepto de dominio de una función y el quehacer matemático que el profesor desarrolla sobre este concepto. Para nuestra investigación, se tomaron para el marco teórico aspectos de la teoría “aprender matemáticas por comprensión”, descritos por Carpenter y Lehrer (1999), junto con elementos utilizados por Even (1990, 1993), Ball y Bass (2003) para determinar el conocimiento de la materia de los profesores.

Para la recolección de datos, se diseñó un cuestionario que consistió de diez preguntas, el cual fue aplicado a diez profesores de cálculo de nivel medio superior. Además, para complementar los datos obtenidos de este cuestionario, se llevaron a cabo entrevistas no estructuradas a los participantes del estudio.

En esta investigación, se documentaron varias dificultades presentes en la muestra de profesores, las cuales van desde tener una noción aceptable del concepto de dominio de una función, hasta el manejo práctico y comprensión de propiedades de los dominios de funciones particulares. La interpretación de los datos no sólo muestra el desempeño del profesor, sino que también nos da a conocer qué tan consciente está sobre el papel que juega el concepto de dominio de una función dentro de la teoría del cálculo.

ABSTRACT

The present thesis is an exploratory study of qualitative character with high school teachers, in which we have aimed to identify the level of comprehension that these teachers have about the concept of domain of function. We focus on determining the performance these professors show about the concept of domain of a function, and the mathematical task that this concept develops within the Calculus itself. For this purpose, aspects of the theory "learning mathematics with understanding ", described by Carpenter and Lehrer (1999), were used, together with elements used by Even (1990, 1993), Ball and Bass (2003) to determine teachers' subject-matter knowledge.

For the data collection, a questionnaire was designed consisting of ten questions, which was applied to ten calculus teachers of upper middle level. In addition, to complement the data obtained from this questionnaire, unstructured interviews were conducted with the study participants.

In this research, several difficulties in the sample of teachers were documented, which range from having an acceptable notion of the concept of domain of a function, to the practical management and understanding of properties of the domains of particular functions. The interpretation of the data not only shows the performance of the teacher, but also gives us to know how aware they are about the role played by the concept of domain of a function within the theory of calculus.

CAPÍTULO 0: INTRODUCCIÓN

El cálculo diferencial e integral es el campo de las matemáticas que estudia el cambio, la variación y la acumulación en varios fenómenos naturales de gran importancia en la ciencia. Poco después de su concepción en el siglo XVII, el Cálculo se convirtió en uno de los motores de la revolución industrial que influyó en el desarrollo de las naciones occidentales, lo cual lo convierte en un instrumento importante de la actualidad humana.

La importancia del Cálculo se observa también en su inclusión en los currículos preuniversitarios de gran parte del mundo. En México, la reforma al Artículo 3º Constitucional del año 2012 estableció la obligatoriedad de la Educación Media Superior[1]. A partir de entonces, el pensamiento y el lenguaje variacional son dos aspectos matemáticos que los estudiantes mexicanos necesitan desarrollar en su formación académica obligatoria.

Sin embargo, es también en las materias de Cálculo Diferencial e Integral donde muchos estudiantes encuentran con frecuencia problemas de aprendizaje de la matemática. La literatura que aborda dificultades en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo es de las más amplias y antiguas dentro del campo de estudio de la Educación Matemática (*e.g.* Tall 1992, 1993, 2011). Asimismo, algunos autores confirman lo que las experiencias y observaciones de muchos profesores de Cálculo habían mostrado con anterioridad: "si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos [...] y a resolver algunos problemas rutinarios, se encuentran grandes dificultades para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas" (Artigue, 1995, p.97).

[1] http://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5233070&fecha=9/02/2012.

* * *

En el proceso escolarizado de enseñanza-aprendizaje aparecen dos figuras centrales: el profesor[2] y el estudiante. En el entendido de que el conocimiento disciplinar del profesor juega un papel importante en el proceso de aprendizaje del estudiante, exploraremos sobre los conocimientos y el desempeño que los profesores muestran en diferentes situaciones que involucran el uso del concepto de dominio de una función.

Aunque podemos estar de acuerdo que el conocimiento disciplinar es sólo uno de los tipos de conocimiento que debe poseer el profesor de matemáticas competente, cabe mencionar que es una clase de conocimiento muy importante que le da idoneidad a los aspirantes a profesores para ocupar plazas docentes en escuelas públicas. La Coordinación Nacional del Servicio Profesional Docente (CNSPD, 2017), parte del Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE), estableció cuatro etapas de evaluación para el desempeño docente durante el ciclo escolar 2016-2017. La tercera de estas etapas[3], se compone de dos exámenes que determinan la permanencia del profesorado de la educación media superior en funciones académicas: examen de conocimientos disciplinares y el examen de competencias didácticas.

La finalidad de toda investigación en la Educación Matemática es mejorar la calidad de la enseñanza por parte de los profesores y el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes. En este sentido, la responsabilidad del profesor consiste en comunicar adecuadamente los conceptos de esta disciplina a sus estudiantes. Así, la calidad del aprendizaje que estos desarrollen depende de los tipos de experiencias que el profesor les proporcione (NCTM, 2000). Esto le demanda al profesor una comprensión clara de los conceptos y métodos fundamentales del Cálculo. La buena comprensión del profesor le permitirá, entre otras cosas, diseñar situaciones didácticas que promuevan el aprendizaje por comprensión (Brophy, 1991). De alguna manera, en este trabajo de investigación, estamos interesados en averiguar sobre la calidad del conocimiento de los docentes.

---

[2] En este escrito, nos referimos al *profesor* como una figura encargada del proceso de enseñanza, y no como una persona de género específico. Por lo tanto, esta figura incluye tanto a varones como a mujeres. Y lo mismo con los sinónimos y con otros términos que aparecen en todo este texto (*e.g.* estudiante).

[3] El nombre que recibe esta etapa es: "Evaluación de conocimientos disciplinares actualizados y de las competencias didácticas que favorecen el aprendizaje y el logro de las competencias de los estudiantes" (CNSPD, 2017, p.7).

El profesor Freudenthal (1973) afirmaba al respecto: la persona que enseña debe saber más que el que está aprendiendo y lo debe saber no en el momento en que está realizando la acción de enseñar, sino antes.

0.1. Sobre el concepto de función en el cálculo

Podemos afirmar que los objetos de estudio centrales del cálculo diferencial e integral son, precisamente, la derivada y la integral. Sin embargo, estos conceptos involucran objetos matemáticos y nuevos conceptos para su construcción como es el de función, el cual, a su vez, está construido con base en otros conceptos como es el dominio de una función.

En todos los cursos de Cálculo está implícito siempre el empleo de funciones sobre las que se desarrollan varios procedimientos y sobre las que se construye la teoría del Cálculo. De hecho, podría decirse que las funciones son los objetos fundamentales que los estudiantes de bachillerato necesitan asimilar para la comprensión de los conceptos de límite, derivada o integral.

Por *noción de función* vamos a referimos al conjunto de imágenes mentales que posee una persona y que están asociadas con el nombre de este objeto, así como todas las propiedades que lo caracterizan (Vinner, 1983); por ejemplo, una expresión matemática de la forma "$f(x) = \text{fórmula en } x$" o una gráfica en el plano cartesiano de determinada naturaleza. En relación al concepto de función, la noción de función puede estar incompleta, contener asociaciones ingenuas o ser matemáticamente incorrecta. Durante la enseñanza del cálculo en el bachillerato, el concepto de función está en permanente construcción. Por lo que no podemos establecer como objetivo de un primer curso que los estudiantes conozcan ampliamente *el concepto de función*, pero sí esperamos que *la noción de función* que ellos posean, pueda guiar sus acciones dentro de las tareas matemáticas del Cálculo.

Muchos profesores e investigadores relacionados con la Educación Matemática estarán de acuerdo que, para entender un concepto matemático, no es suficiente conocer la definición escrita en algún libro de texto. Entonces, ¿cómo es que logramos entender un concepto matemático?

> Es sólo hasta que hayamos visto ejemplos y no-ejemplos del objeto definido, cuando podamos decir lo que es este objeto y lo que no es, cuando hayamos tomado conciencia de sus relaciones con otros conceptos, cuando hayamos notado que estas relaciones son análogas a otras que nos resultan familiares, cuando hayamos captado la posición que el objeto definido tiene dentro de una teoría y cuáles son sus posibles aplicaciones, entonces podemos decir que entendemos algo del objeto (Sierpinska, 1992, p. 26).

Hablaremos de la comprensión de un concepto matemático siempre que exista un análisis y reflexión sobre los componentes matemáticos que constituyen este concepto, sobre las reglas y condiciones que lo rigen, y sobre las relaciones que estos conceptos generan entre sí. En ocasiones, cuando acotamos al Cálculo a un conjunto de procesos algorítmicos, olvidamos realizar este análisis importante. Profesores y estudiantes *trivializamos* muchas veces las condiciones necesarias y suficientes para implementar algunos métodos o procedimientos, lo cual nos conduce a errores que quizás sean imperceptibles en un vistazo superficial, pero no por ello carentes de importancia.

0.2. Acerca del dominio de una función

Si observamos libros de texto de Cálculo de suficiente antigüedad, que siguen siendo utilizados en la planeación de cursos (*e.g.* Granville, 1911; Phillips, 1916), encontraremos que el concepto de dominio de una función es poco atendido; esencialmente porque las funciones son consideradas como fórmulas o como dependencias entre dos variables. El concepto del dominio de una función surge cuando se pretende definir las funciones como reglas de asociación entre los elementos de dos conjuntos. Cualquier profesor de cálculo actual ha de admitir que el estudio de los dominios merece una atención especial dentro de los primeros cursos de Cálculo; tanto por su relación con el concepto de función, como por ser un terreno adecuado para el desarrollo del quehacer matemático.

El concepto de dominio juega un papel relevante en varios procedimientos del Cálculo; por ejemplo, en la composición de funciones y, consecuentemente, en el cálculo de la derivada de funciones compuestas. Resulta importante que el profesor adquiera consciencia del papel que juega los dominios de las funciones, y que pueda transmitirlo a sus estudiantes. De lo contrario, el profesor podría establecer el problema siguiente:

Encontrar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 2}$,

El cual carece de sentido, dado que la función f tiene dominio vacío. En efecto, sabemos que los valores de la función seno se encuentran acotados en $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, para todo valor de x, lo que implica que $-3 \leq \operatorname{sen} x - 2 \leq -1$. Esto significa que la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 2}$ está definida para ningún real x, pues la raíz cuadrada sólo aplica para los números mayores o iguales que cero. Sin embargo, si se aplican sin reflexión las fórmulas que nos proporcionan las reglas de derivación, es posible hallar la expresión analítica de la supuesta "función derivada", $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x - 2}}$.

No sería raro, pues, que en algún momento dado, hayamos encomendado a nuestros estudiantes derivar funciones inexistentes como la anterior. Quizás, la atención que recibe el concepto de dominio de función por parte de los profesores no corresponde a la importancia que este concepto tiene dentro de la teoría del Cálculo.

En este trabajo de investigación nos proponemos dar cuenta de diferentes partes del Cálculo en donde el concepto de dominio de una función es de especial relevancia, para lo cual hacemos un análisis profundo de los contenidos de la asignatura de Cálculo en bachillerato y explorar sobre los conocimientos y desempeño de los profesores en tareas que involucran el concepto de dominio de una función en esas partes del Cálculo. De alguna manera se trata de explorar el dominio que tienen los profesores sobre el concepto de dominio de una función. Los problemas que plantearemos a los profesores no necesariamente han de incorporarse en la enseñanza del Cálculo en bachillerato, pero sería deseable los profesores tuviesen los conocimientos y reflexionasen, en su caso, sobre el papel que juega el dominio de una función en esas situaciones especiales que reportamos en este trabajo.

0.3. Descripción de este reporte de investigación

A continuación, describimos los contenidos de los diferentes capítulos que integran este documento.

En el **Capítulo 1: Planteamiento del problema y preguntas de investigación** se establece la situación específica que nuestra investigación busca atender, así, como el título lo dice, planteamos el problema y las preguntas de investigación. También hacemos una exposición sobre la importancia que tiene el concepto de dominio de una función en el cálculo diferencial e integral y en su enseñanza.

En el **Capítulo 2: Marco Teórico** exponemos algunas de las ideas de Carpenter y Lehrer acerca del aprendizaje de matemáticas con comprensión, sobre las cuales basamos nuestra investigación. También exponemos acerca de las ideas de Even, Bass y Ball sobre la importancia del estudio del conocimiento de la materia de los profesores.

La matemática involucrada en esta investigación se establece en el **Capítulo 3: Marco de Referencia.** Aquí también se discute sobre la importancia del concepto de dominio de una función en la teoría del Cálculo y sobre algunas disertaciones para la enseñanza de este concepto. Además, se realiza una revisión sobre los planes y programas de estudio que rigen la enseñanza del concepto de función.

En el **Capítulo 4: Metodología,** mostramos las características metodológicas de la investigación, así como el instrumento que utilizaremos para nuestro estudio. Los propósitos de cada una de las preguntas del cuestionario son discutidos ampliamente en este capítulo. Además, se describen las características de los profesores que conforman la muestra de estudio.

El **Capítulo 5: Análisis de Datos** tiene como finalidad presentar los resultados de un análisis cualitativo a las respuestas obtenidas de los profesores por medio del cuestionario. El aspecto principal que discutiremos será la comprensión que tienen los profesores respecto al concepto de dominio de una función, y tratamos de determinar el nivel de dominio que ellos poseen de las nociones básicas del Cálculo.

Finalmente, dedicamos el **Capítulo 6: Conclusiones**, a la mención de los aspectos más relevantes que hemos encontrado en esta investigación. También respondemos las preguntas de investigación que hemos planteado en el Capítulo 1. El análisis de los datos revelará la importancia que tiene el concepto de dominio de función para los profesores de la muestra, así como el desempeño de su pensamiento matemático sobre este tema; sus ideas, juicios y creencias que afectan su práctica matemática.

CAPÍTULO 1:
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

En los primeros cursos de Cálculo en el bachillerato, una función es usualmente concebida con una fórmula que se denota mediante la simbología “$f(x)$” y el *dominio de la función* podría ser definido como *el conjunto de todos los números reales* x *para los cuales “aplica” la fórmula* $f(x)$ (aunque no suele hacerse). Pero lograr que los alumnos de bachillerato tengan un nivel de abstracción aceptable de este concepto es una compleja tarea que enfrentamos todos los profesores de matemáticas de nivel medio superior.

¿Cuál es la importancia de estudiar a los dominios de las funciones dentro del Cálculo? El estudio del dominio es fundamental para asimilar otros conceptos del Cálculo, como la continuidad y la derivabilidad de las funciones. Comúnmente, y así lo muestran los programas de estudio, la determinación de dominios de funciones no es un tema que se atienda lo suficiente en los cursos de cálculo. Sin embargo, poder determinar el dominio de una función es una competencia matemática que integra la habilidad operacional, el razonamiento lógico y el lenguaje del estudiante. El desarrollo de estas competencias, así como una buena noción del concepto de dominio, son objetivos específicos importantes en un curso introductorio de Cálculo.

El papel del profesor de matemáticas es ayudar a sus estudiantes a alcanzar un entendimiento satisfactorio de la disciplina, pero para lograr esto, ellos mismos necesitan tener un sólido conocimiento de la materia. Para una participación efectiva del profesor en el proceso de enseñanza de las funciones, se sugiere que posea un conocimiento amplio de cada componente que integra el concepto de función. En particular, para este proyecto de investigación, nos interesa averiguar sobre los conocimientos de los profesores acerca de del concepto de dominio de una función, así como de las ideas y creencias que poseen sobre el mismo, también sobre su desempeño en diversas funciones elementales que son propias de los primeros cursos de Cálculo.

Nos proponemos observar los procedimientos del profesor en situaciones matemáticas en las que el dominio juega el rol principal. Para ello, necesitamos generar un instrumento de medición que no sólo mida los conocimientos matemáticos de los maestros, sino que nos permita analizar la relevancia que ellos asignan al concepto de dominio y de qué maneras realizan la manipulación matemática con él. En este sentido, es importante exponer con claridad la importancia que tienen los dominios de funciones dentro de la teoría del Cálculo, y analizar el nivel de atención que éstos reciben.

1.2. Justificación y antecedentes

El concepto de función, como muchos otros conceptos matemáticos, es establecido basado en algunos subconceptos y objetos matemáticos asociados a él, por ejemplo: dominio de la función, valor en un punto, imagen de la función y variable. Dreyfus y Eisenberg (1982) llaman *componentes funcionales* a estos subconceptos y remarcan la importancia del desarrollo de la intuición en estos componentes para el aprendizaje del Cálculo. Esta intuición, según los autores, se desarrolla a partir del estudio orientado desde situaciones concretas a situaciones más complejas.

El concepto de función es uno de los temas centrales de matemáticas hoy en día, pues ha tenido un enorme efecto en el desarrollo de la matemática moderna. Este concepto es bastante complejo para su enseñanza y aprendizaje por diversas razones que Dreyfus y Eisenberg (1982) resumen en tres puntos:

1. No es un concepto singular en sí mismo, sino que tiene un considerable número de subconceptos asociados a él, a los cuales ya hemos llamado *componentes funcionales*.

2. Este concepto puede servir para fusionar áreas aparentemente sin relación, por ejemplo, geometría y álgebra. Esta fusión es parte del proceso de abstracción que se logra al utilizar y familiarizarse con las funciones.
3. La misma función puede ser representada en diferentes formas — *e.g.* una tabla, un diagrama de flechas, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal.

Niss (2014) afirma que una función es un ente matemática con distintos niveles de abstracción. Este concepto puede ser introducido como una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, o como un objeto geométrico (conjunto de pares ordenados en un producto cartesiano) que puede ser representado como una gráfica, o como un proceso expresado como una fórmula, o incluso puede ser definida implícitamente mediante una ecuación algebraica.

Las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del concepto de función son muy variadas y van desde tener una noción aceptable de lo que es una función hasta el manejo práctico y comprensión de propiedades de funciones particulares. La conceptualización de la función matemática es el producto acabado de un proceso de conjugación de varias ideas, muchas de ellas de valor histórico. Esta conceptualización no es alcanzable si no se transita por una amplia experiencia con los objetos concretos (Pérez Rosal, 2011). De esta forma, para que el estudiante comprenda la expresión general “sea $f: X \to Y$ una función”, debe haber entrado en contacto previamente con suficientes ejemplos específicos de funciones.

En los primeros cursos de Cálculo en el bachillerato, es muy común que el profesor haga referencia a una función como la dependencia de una variable y con respecto de otra x. Además, si esta dependencia se complementa con la notación “$f(x)$”, podemos enriquecer esta concepción al escribir “$y = f(x) = \text{ fórmula en } x$” y así, las funciones se convierten en procesos regulares expresados mediante fórmulas.

De esta manera, podemos aceptar que el estudiante considere que la función es la fórmula misma. Sin embargo, hace falta enfatizar la importancia de manejar diversos sistemas de representación de la función, además de la simbólica. Hitt (2003) señala que un problema que tienen tanto los estudiantes como algunos profesores para desarrollar un entendimiento profundo del concepto de función es que, generalmente, ellos se restringen y se apegan a una manipulación algebraica relativa al concepto, lo que produce una limitación en su comprensión.

La idea de considerar una función como sinónimo de su fórmula es, en realidad, incompleta; pero, al mismo tiempo, también es válida, pues la mayoría de las funciones que se presentan a los estudiantes en un curso introductorio al Cálculo tienen la propiedad de poder ser expresadas mediante fórmulas. Más aún: a pesar que muchos libros de texto de introducción al Cálculo definen a la función como una clase de regla de asignación entre dos conjuntos, lo más común es que terminen refiriéndose a las funciones como expresiones analíticas, por ejemplo, al utilizar frases como "considere la función $f(x) = x^2$" o "derive la función $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x^2}$".

En todo caso, no podemos esperar que los estudiantes de bachillerato conozcan plenamente el concepto de función después de sus primeros cursos de Cálculo, pero sí se esperaría que pudiesen reconocer la diferencia entre una función (expresada como una fórmula) y otra expresión algebraica distinta — por ejemplo, conocer la diferencia entre una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ (Pérez Rosal, 2011).

1.2.1. La importancia del concepto de dominio de una función

Al momento de definir a las funciones como expresiones matemáticas determinadas por una fórmula, admitiremos por convención que la función puede ser evaluada en todos los puntos donde tenga sentido la fórmula. De esta manera, dada una fórmula que depende de x, la cual es aplicable a ciertos números, podemos plantear un problema interesante dentro del salón de clases: *"¿Cuál es el conjunto de todos los números en la que la fórmula es aplicable?"* Si además este conjunto es vacío, ¿se puede hablar todavía de una función?

Si queremos determinar el dominio de una función de la forma $f(x) = \sqrt{a(x)b(x)}$, por ejemplo, donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones que dependen de x, entonces tenemos que hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq a(x)b(x)$; es decir, se debe cumplir las condiciones

(i) $a(x) \leq 0$ y $b(x) \leq 0$, o bien,

(ii) $0 \leq a(x)$ y $0 \leq b(x)$.

Esto muestra que la manipulación de fórmulas representa una carga cognitiva bastante compleja para la persona, pues aquí empiezan a aparecer problemas del álgebra, de la lógica y del lenguaje que requieren operaciones mentales sofisticadas. En el fondo, con lo que "jugamos" aquí son operaciones de lógica y conjuntos, y es este "juego" el que representa un quehacer matemático interesante dentro del salón de clases. Es común, incluso en las personas bastante instruidas, que se prefiera ignorar en dónde tiene sentido una función. Entre más compleja y sofisticada sea la situación matemática, es más fácil que la persona olvide las condiciones para las cuales se pueden aplicar los teoremas.

Escudero y Domínguez (2014) identifican en estudiantes españoles de bachillerato algunos errores debidos al "uso de teoremas, expresiones o definiciones deformadas", principalmente en funciones compuestas con el logaritmo; por ejemplo, al momento de preguntar a los estudiantes cuál es el dominio de la función $h(x) = \log\left(\frac{(x-4)^2}{x^2-x}\right)$, encuentran común la respuesta $\text{Dom}(h) = (1, \infty)$. Los estudiantes consideran la condición que el argumento del logaritmo debe ser mayor que cero, pero tienen problemas al utilizar esta condición para encontrar los números que conforman el dominio. El dominio de la función h es $(-\infty, 0) \cup (1,4) \cup (4, \infty)$.

Además, Escudero y Domínguez (2014) encuentra que es común que los estudiantes confundan el dominio de una función con el conjunto de puntos en los cuales la función es continua o derivable. Estos tres conceptos están íntimamente ligados, pero tienen significado distinto. Nosotros podríamos agregar que el *conjunto de puntos para los cuales existe la derivada de una función* es distinto al *dominio de la fórmula de la función derivada* y que diferenciar uno del otro también representa un reto para los estudiantes de cálculo. Como ejemplo simple, consideremos la función definida como $f(x) = \log x$. En cálculo elemental, se obtiene que $f'(x) = \frac{1}{x}$. En este caso hay que aclarar que la derivada está dada por esta fórmula, restringida a valores positivos de x, pues la expresión misma $\frac{1}{x}$ está definida para todos los reales diferentes de 0 (esto incluye a los números negativos).

Ante la pregunta ¿Dónde es derivable esta función $f(x) = \log x$? Los puntos de derivabilidad no se determinan solamente analizando en dónde está definida la fórmula $\frac{1}{x}$. Entonces, la afirmación correcta es "si $f(x) = \log x$, entonces f es derivable para toda x positiva y $f'(x) = \frac{1}{x}$".

No debe entenderse al proceso de derivación como aquel que permite obtener la fórmula (la función derivada) a partir de otra fuente (la función original) mediante la aplicación mecánica de las reglas de derivación. la función derivada es obtenida más como resultado de este proceso que como resultado de la aplicación de un conjunto de reglas algorítmicas. Rivera y Ponce (2013) llaman a este último proceso algorítmico la *aplicación formal de las reglas de derivación*. Es necesario hacer una reflexión sobre dónde son aplicables estas reglas, lo cual implica analizar los dominios de las funciones involucradas. Si los profesores reproducen esta idea del cálculo de la derivada mediante la aplicación de las reglas de derivación frente a nuestros estudiantes, podrían provocar la realización de cálculos incorrectos.

La diferenciación o derivación es el proceso de obtener la derivada de una función en cada punto donde es derivable, y sólo en esos puntos. La derivabilidad de una función en un punto se determina mediante el cálculo de un límite $\left(f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}\right)$. Una vez que se conocen todos los puntos en los que una función es derivable, la función derivada (f') queda determinada, y su dominio es precisamente el conjunto de puntos en la que la función es derivable.

Como Rivera y Ponce (2013) señalan, el dominio de la función derivada debe ser determinado *a priori* a la aplicación formal de las reglas de derivación: "el dominio no puede ser determinado a partir de una función (la llamada función derivada) que fue obtenida por la aplicación formal de las reglas de derivación y al determinar subsecuentemente los puntos donde esta función está definida" (p.288).

1.3. Acerca de los planes y programas de estudio

Los planes y programas de estudio trazan la ruta de acción que debe llevar el profesor para impartir una materia, además de los contenidos disciplinares que debe contener esta ruta de acción. Por ello, vale la pena el análisis de estos documentos, así como de la literatura curricular que recomiendan. Anteriormente, los antiguos planes de estudio del bachillerato en México consideraban al estudio del dominio y el contradominio de una función como temas secundarios, pero de alta jerarquía.

La *Reforma Integral de la Educación Media Superior*[4], conocida como RIEMS, es un proceso consensuado que tiene origen en el año 2008 y que, entre otros objetivos importantes, busca la construcción de un **marco curricular común** para todos los bachilleratos. Este marco curricular común establece elementos académicos compartidos entre las instituciones de educación media superior, sin que por ello exista un plan o programa específico que compartan estas las instituciones. “El elemento curricular común en esta reforma será el enfoque educativo por competencias, las cuales se concretan en las competencias genéricas, disciplinares básicas y extendidas y en las profesionales”. La lista de todas estas competencias genéricas y disciplinares se establecen en SEP (2008).

El siguiente esquema organiza la estructura conceptual de la asignatura de *Cálculo diferencial (Matemáticas IV)* del bachillerato tecnológico como aparece en el Programa de Estudio de Matemáticas de la Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico (COSDAC, 2013). En él se distinguen dos tipos de conceptos: los *conceptos fundamentales*, cuya “función es integrar conocimientos para explicar los fenómenos o procesos que constituyen los aprendizajes principales de la materia”; y los *conceptos subsidiarios*, los cuales “agrupan diversas temáticas o elementos y tienen la función de proporcionar información específica que, al integrarse, construye el concepto fundamental” (p.14). Los conceptos *dominio y contradominio* son situados en la categoría de subsidiario.

[4] http://cosdac.sems.gob.mx/portal/index.php/riems

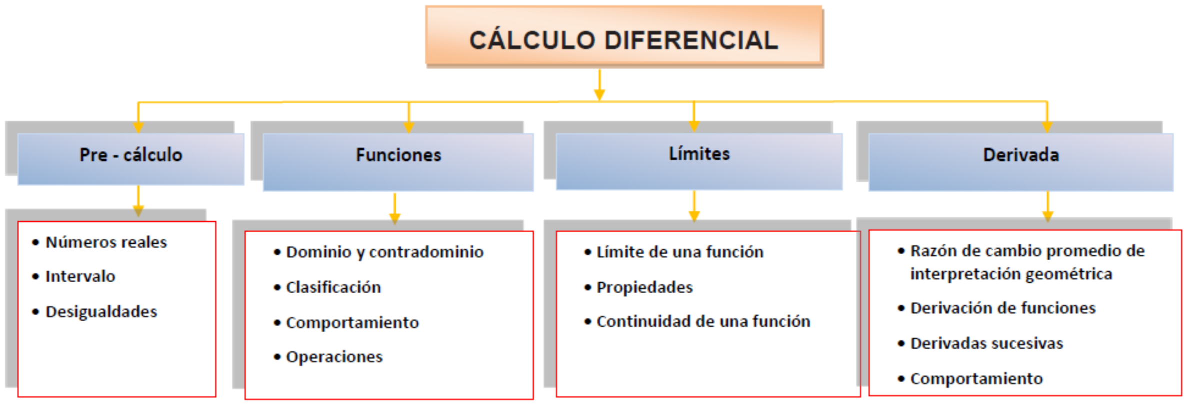


Figura 1: Estructura conceptual de la materia de *Cálculo diferencial* (COSDAC, 2013, p.19).

En cuanto al diseño del plan curricular de matemáticas del bachillerato general y tecnológico, es preciso atender la publicación del *Nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria* (NMEEO). Este documento propone una amplia modificación en el currículo de la educación básica y media superior, y en la gestión educativa de las escuelas públicas del país. El NMEEO involucra un cambio en el discurso didáctico que propicie la argumentación entre estudiantes y la interacción con el profesor, así como nuevas formas de organizar el currículo. Cabe destacar que el NMEEO continúa con el enfoque competencial que ha tenido el currículo de matemáticas desde la implementación de la RIEMS en el 2008.

1.3.1. Sobre el Nuevo Currículo de Matemáticas en México

El NMEEO es una propuesta presentada por el Ejecutivo Federal entre 2016 y 2017 como parte de sus esfuerzos por consolidar la Reforma Educativa[5] en México, la cual fue promulgada por el presidente Enrique Peña Nieto en el año 2012. En sus propias palabras:

> El modelo que se deriva de la Reforma Educativa, es decir, la forma en que se articulan los componentes del sistema [escolar], desde la gestión hasta el planteamiento curricular y pedagógico, tiene como fin último colocar una educación de calidad con equidad donde se pongan los

[5] http://reformas.gob.mx/reforma-educativa/que-es

aprendizajes y la formación de niñas, niños y jóvenes en el centro de todos los esfuerzos educativos (SEP, 2017a, p. 27).

De entre los documentos que acompañan al NMEEO, destacamos y analizamos el *Nuevo Currículo [de la Educación Media Superior del Campo Disciplinar] de Matemáticas*[6] (SEP, 2017b), que abreviaremos como NCM. Este documento pretende mostrar las adecuaciones pertinentes realizadas a los programas de las asignaturas de Matemáticas del bachillerato general y tecnológico en conjunto. El NCM afirma que "más allá del aprendizaje de conceptos aislados, o bien, articulados bajo el título de una asignatura, se pretende que el estudiantado del bachillerato, desarrolle un pensamiento matemático que propicie un pensamiento flexible, crítico y reflexivo que les permita emitir juicios fundados en argumentos válidos" (SEP, 2017b).

Para lograr el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, el NCM propone una articulación jerárquica del currículo en cuatro dimensiones que define de la siguiente forma:

- **Eje**: organiza y articula los conocimientos, destrezas, habilidades, actitudes y valores de las competencias de los campos disciplinares y es el referente para favorecer la transversalidad interdisciplinar.
- **Componente:** genera y/o integra los contenidos centrales y responde a formas de organización específica de cada campo disciplinar.
- **Contenido central:** corresponde a los aprendizajes fundamentales y se refiere al contenido de mayor jerarquía dentro de los programas de estudio.
- **Contenido específico:** corresponde a los contenidos centrales y, por su especificidad, establece el alcance y profundidad de su abordaje. (SEP, 2017b, p. 156)

Entendemos al **eje** como la conjugación de las ideas principales de las que debe dotarse el estudiante en cada una de las asignaturas de matemáticas. Además, ésta es una

[6] Este documento, en realidad, está dividido en dos partes: una de ellas dirigida a las instituciones que imparten la modalidad de bachillerato tecnológico, y otra para las que imparten el bachillerato general. Estas dos partes comparten muchas similitudes una con la otra. A lo largo de este trabajo, estudiaremos la primera.

orquestación de los elementos competenciales (conocimientos, habilidades, actitudes, etc.) que debe favorecer el desarrollo del pensamiento matemático.

El eje **"Pensamiento y lenguaje variacional"** corresponde a las asignaturas de *Cálculo diferencial (Matemáticas IV)* y *Cálculo integral (Matemáticas V)* y se ocupa del tratamiento del "cambio, predicción y acumulación". En cierto sentido, este eje da especial importancia a "modelar situaciones de cambio en matemáticas y en otras ciencias, para que estas situaciones pueden ser vistas como procesos predictivos" (aunque el discurso falla en dar ejemplos verdaderos de estas situaciones). Para fines prácticos, podemos suponer que para el NCM es muy importante desarrollar la capacidad para modelar situaciones en contexto, y esta modelación se realiza a través del uso adecuado de funciones que, cabe decirlo, se conciben como fórmulas analíticas:

> Las funciones, como modelos del cambio, resultan de la mayor importancia en la currícula [sic] del bachillerato tanto por su potencialidad para las matemáticas y las ciencias, como por su flexibilidad para la representación en un sinnúmero de situaciones. El estudio de las funciones, algebraicas y trascendentes elemen-tales, brinda la primera síntesis de las matemáticas que han sido estudiadas hasta este momento (SEP, 2017b, p.165)

El **componente**, por otro lado, es sólo una de las ideas principales que integran al eje. En este caso, el discurso del NCM maneja dos componentes para las asignaturas de Cálculo: ***'cambio y predicción'*** y ***'cambio y acumulación'***. El componente 'cambio y predicción' es también la idea central del curso de *Cálculo diferencial (Matemáticas IV)*. La siguiente tabla ilustra los **contenidos centrales** que integran este componente:

Eje disciplinar	Componentes	Contenidos centrales
Pensamiento y lenguaje variacional.	**Cambio y predicción: Elementos del Cálculo.**	Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición.
		Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.
		Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales.
		Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites.
		Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.
		Graficación de funciones por diversos métodos.
		Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función.
		Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.

Figura 2: lista de contenidos centrales que integran el componente principal del Cálculo diferencial (p. 221)

Como se puede observar en la figura 2, el análisis y tratamiento del dominio no son considerados parte de los contenidos centrales del componente principal del *Cálculo diferencial*. Ni siquiera aparece en la lista de contenidos específicos. De hecho, no se hace mención del dominio en todo el Cuadro de contenidos de la asignatura (pp. 222-223). El NCM elimina la estructura clásica de este curso donde se parte de los números reales para pasar a los elementos de una función, operaciones con funciones, los límites, las funciones continuas y las derivadas de las funciones.

El dominio y el contradominio de una función, dos *conceptos subsidiarios* de los programas de la COSDAC de 2013, desaparecen en el NCM de 2017. Quizá no sean conceptos sobre los cuales deba hacerse especial énfasis en la enseñanza del Cálculo en el nivel bachillerato, pero sería deseable que los profesores contasen con los conocimientos suficientes que les permitiese explicar algunos fenómenos aparentemente paradójicos, que surgen en Cálculo básico, como se lo ilustra más adelante con algunos ejemplos. Este trabajo pretende servir como reflexión sobre estas situaciones.

Consideramos que, para implementar un nuevo modelo educativo, se requiere fortalecer los conocimientos del profesor, de tal manera que su discurso y métodos didácticos sean acordes a los objetivos educativos descritos en el NMEEO.

1.4. Preguntas de investigación

Considerando el análisis anterior tenemos, entonces, dos preguntas generales de investigación en torno a las cuales gira la siguiente tesis:

- **¿Cuál es el desempeño que muestran los profesores acerca del concepto de dominio de una función en diferentes situaciones del quehacer matemático en Cálculo?**
- **¿Qué tan consciente es el profesor sobre el papel que juega el concepto de dominio de una función en Cálculo?**

De estas primeras preguntas generales, se derivan varias preguntas específicas:

Nuestro trabajo consiste en una investigación acerca del conocimiento que poseen los profesores sobre el concepto de dominio de funciones, y en averiguar si son sensibles ante la problemática que plantean diversas situaciones del cálculo en donde el concepto de dominio de una función juega un papel relevante. Por ejemplo, al momento de querer derivar una función, *¿el profesor se percata que, para obtener la derivada de una función, es necesario analizar el dominio?* Y una pregunta que se desprende de ésta es *¿Cómo determina el profesor los puntos de derivabilidad?*

Los maestros no podemos esperar que el estudiante conozca el concepto de dominio de función a profundidad, pero tampoco debemos limitarnos solamente a su mención o establecer su definición. Así, tenemos como propósito averiguar si el docente conoce y maneja los dominios de las funciones elementales básicas, pero, además, deseamos conocer si el maestro es capaz de dirigir sus acciones y pensamientos hacia una correcta interpretación y ejecución de la teoría del Cálculo.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

Algunas investigaciones en Educación Matemática señalan el problema de un aprendizaje carente de comprensión por parte de los estudiantes sobre diversos conceptos del cálculo (*e.g.* Sierpinska, 1992; Artigue, 1995).

Hacia mediados del siglo pasado (Prenowitz, 1992), se atribuían las dificultades en el aprendizaje del cálculo a las dificultades propias e inherentes de esta área de las matemáticas, es decir, se creía que el cálculo era difícil de aprender porque era difícil por sí mismo. Por otra parte, algunas investigaciones más recientes atribuyen el origen de esas dificultades a la enseñanza misma, es decir, a la conducción de la clase por parte del profesor (Lloyd y Wilson, 1998). También en épocas recientes, la enseñanza ha empezado a ser vista como un proceso que involucra tanto el pensamiento como la acción del maestro. Desde este punto de vista, resulta importante averiguar no sólo sobre los conocimientos del profesor, sino también sobre su comprensión, que le permite explicar algunos fenómenos que surgen en diferentes situaciones del cálculo.

En este capítulo establecemos los antecedentes teóricos de la Educación Matemática que rigen los métodos y procedimientos de nuestra investigación. Aquí desarrollamos dos ejes principales: el aprendizaje de las matemáticas por comprensión y el conocimiento de la materia de los profesores.

2.1. El aprendizaje de las matemáticas con comprensión

En las últimas décadas, se ha insistido en la necesidad de un aprendizaje de las matemáticas con comprensión. El entendimiento conceptual constituye uno de los componentes principales para el desarrollo de las competencias matemáticas, junto con el conocimiento y la destreza en los procedimientos (NCTM, 2000); de esta forma, el aprendizaje de las matemáticas queda fundamentado por este trinomio.

Debemos reconocer que la comprensión no es el resultado de llevar a cabo un acto instantáneo de reflexión intelectual, tampoco son actividades mentales en las que se pueda responder simplemente “entiendo” o “no entiendo”, sino que es el resultado de un proceso que se constituye por una sucesión de actos o actividades mentales. Más aún, el entendimiento no es una actividad mental que termina eventualmente, sino que está en permanente desarrollo y modificación. En este sentido, la persona está constantemente construyendo el concepto. Asimismo, suele ocurrir que la persona esté consciente que el concepto es muy complejo y que solamente lo ha comprendido parcialmente.

La educación matemática que promueva un aprendizaje con comprensión es una idea apoyada en consenso general entre autoridades educativas, educadores, padres de familia, e incluso entre los mismos estudiantes, pero ¿qué significa “aprender comprendiendo”?, ¿tiene algún sentido “aprender sin comprender”? Es importante tener claro sobre las bondades y ventajas que tiene el aprendizaje con comprensión sobre un aprendizaje que privilegie sólo la memorización y la aplicación irreflexiva de reglas y procedimientos, para ello, nos apoyaremos en las ideas de Carpenter y Lehrer que exponemos en la siguiente sección.

2.1.1. El proceso de entender matemáticas con comprensión

Carpenter y Lehrer (1999) remarcaron la necesidad de reestructurar la enseñanza de las matemáticas en el salón de clases de manera que éstas puedan ser aprendidas con entendimiento. Cuando el estudiante aprende comprendiendo, señalan, está en mejores condiciones de aprender nuevos temas y de aplicar sus conocimientos a problemas no rutinarios. Por otro lado, cuando aprende sin comprender, tiene mayores dificultades para resolver problemas que no son considerados durante su instrucción. Estos autores proponen cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión:

1) Construcción de relaciones.
2) Extensión y aplicación de conocimiento matemático.
3) Reflexiones sobre las experiencias.

4) Articulación de lo que el individuo conoce.
5) Apropiación del conocimiento matemático.

Como mencionaremos más adelante, al aprendizaje del concepto de función matemática tiene varios niveles de complejidad y demanda una permanente reflexión para su comprensión. Este es un proceso de aprendizaje con diferentes vertientes, debido a la gran diversidad de *componentes funcionales* que constituyen este concepto. En este sentido, la *construcción de relaciones* entre estos subconceptos tiene gran importancia, ya que éstos adquieren significado de las formas en que están relacionados unos con otros; la persona construye significados para un nuevo concepto al relacionarlo con ideas y procesos ya conocidos.

Sabemos que existe una gran distancia entre conocer resultados matemáticos y poder aplicarlos efectivamente en la resolución de un problema. La *extensión y aplicación del conocimiento* en la resolución de problemas ayuda a su comprensión, pero que a una persona no se le ocurra una idea para aplicar un conocimiento en la resolución de un problema no significa que no sepa cómo podría aplicarse. La aplicación de un concepto a diferentes situaciones ayuda a comprender sus significados y, por lo tanto, a la comprensión del concepto mismo.

La resolución de problemas involucra examinar reflexivamente la relación entre un conocimiento y las condiciones de un problema. En este sentido, la *reflexión sobre los conocimientos y las experiencias* adquiridas en la resolución de problemas es un hábito que los profesores requieren desarrollar en ellos mismos y en sus estudiantes. Desarrollar el entendimiento requiere desarrollar el hábito de la reflexión.

Por otra parte, *la articulación y comunicación de los conocimientos* es un proceso que requiere no solamente cierto nivel de comprensión de lo aprendido, sino también es necesario desarrollar y aprender el recurso del lenguaje, incluyendo el lenguaje matemático. Algunos recursos comunes para la comunicación son el uso de diagramas, modelos o dibujos. La articulación y comunicación requiere la reflexión y el reconocimiento de las ideas matemáticas importantes y de los hechos relevantes. El esfuerzo que haga todo individuo por comunicar sus ideas ayudará a la comprensión de lo que desea comunicar.

Por último, *la apropiación del conocimiento matemático* por parte de los estudiantes es una meta fundamental en la Educación Matemática; el estudiante debe participar de manera importante en la construcción y apropiación de su propio conocimiento. El aprendizaje con entendimiento no puede darse simplemente aceptando las ideas de otras personas, sino que requiere un involucramiento crítico del individuo. El estudiante requiere adoptar una postura en la que el conocimiento se recibe provisionalmente en tanto no se realice una reflexión personal. Después de este proceso, se debe aspirar a la apropiación del conocimiento, hacerlo suyo y no aludir siempre a la fuente de la que lo ha aprendido.

Por su parte, los profesores adquieren un doble compromiso en la enseñanza y aprendizaje con comprensión; necesitan comprender la matemática que enseñan y también necesitan involucrarse y entender la forma de pensar y proceder de los estudiantes, es decir, con la manera en la que los estudiantes se expresan y comunican sus conocimientos y resultado. El proceso de comprensión es necesario para toda persona que aspire a aprender matemáticas, en particular, es un proceso que debe desarrollar también el profesor para hacer más efectivo el proceso de enseñanza.

2.2. El conocimiento de la materia de los profesores

Mucha de la literatura relacionada que existe dentro de la comunidad de educadores matemáticos explora los problemas de comprensión de los estudiantes de los conceptos abstractos del Cálculo. Sin embargo, también existen investigaciones que abordan la comprensión de los profesores en estos mismos conceptos y su impacto en el salón de clases. Entre ellos, Even (1990, 1993) es una referencia importante en el estudio de lo que se conoce como *Teachers' Subject Matter Knowledge* (que en español puede ser traducido como *"el conocimiento de la materia de los profesores",* y que abreviamos como TSMK). En palabras de Even (1993):

> No hace muchos años, el TSMK se definía en términos cuantitativos; por las calificaciones obtenidas [por el profesor] en la universidad o mediante exámenes estandarizados […] En años recientes, el TSMK ha sido analizado de formas más cualitativas, enfatizando el conocimiento y

> comprensión de hechos, concep-tos, principios y las maneras en las que éstos se organizan, así como el conoci-miento sobre la disciplina. Es decir, formas de establecer la verdad. (p. 94).

Según Ball (1988) varios trabajos en la investigación educativa han tenido como objetivo entender y categorizar las variables críticas de la enseñanza efectiva de las matemáticas. En la búsqueda de lo que hace que algunos maestros sean más efectivos que otros, los investigadores redefinen a la enseñanza como una actividad que involucra tanto al *pensamiento* como a la *acción* del maestro. Tras este cambio de perspectiva, que pretende estudiar el pensamiento y la toma de decisiones del docente, es cuando el conocimiento y las creencias de los maestros sobre los temas de matemáticas aparecen como variables potencialmente significativas.

Aunque muchos investigadores han dejado de considerar los créditos de cursos o los exámenes estandarizados como base en la investigación del TSMK, la manera de conceptualizar y estudiar el "conocimiento de la materia" varía de un investigador a otro. Según Ball (1988) algunos investigadores examinan las *concepciones o creencias de los profesores sobre la matemática* y sus estudios se concentran en la influencia de las suposiciones matemáticas del profesor en la enseñanza de la materia. En cambio, otros se concentran en el *entendimiento de conceptos y procedimientos matemáticos*. Lo que cuenta, según estos investigadores, es la manera en la que los profesores organizan el campo de estudio y cómo ellos entienden, piensan y actúan sobre los conceptos.

Sin embargo, resulta un problema determinar cuál es el conocimiento disciplinar concreto que necesitan tener los profesores para enseñar un tema específico de matemáticas; además de cuáles son las formas de determinarlos en una población particular de profesores. Según Even (1990), los resultados de un análisis del TSMK deben extenderse más allá de una lista simplista de competencias docentes, estos análisis deben señalar características específicas de conocimiento necesario para enseñar un tema particular en matemáticas.

En el marco de las ideas de Even, nuestra investigación será de carácter cualitativo, con la cual trataremos de identificar algunas situaciones en las que el conocimiento de la materia se involucre para resolver problemas no rutinarios del cálculo. Estos problemas, a su vez, requieren de una amplia comprensión del concepto matemático conocido como “dominio de una función”. Trataremos de encontrar características específicas de conocimiento necesario para enseñar el concepto de dominio de una función. Con respecto a la categorización de Ball, esta investigación se concentra en el entendimiento del concepto de dominio de función por parte de los profesores, y en el análisis de los procedimientos matemáticos que de éste emanan. Exploraremos cómo utilizan los maestros su propio conocimiento matemático, y trataremos de averiguar cómo ellos entienden o confunden ideas específicas.

CAPÍTULO 3:
MARCO DE REFERENCIA

El Cálculo es una firme construcción intelectual que ha sido elaborada para estudiar los cambios, la variación y la acumulación en diversos fenómenos naturales. Desde luego, la creación de esta herramienta no ha sido obra sencilla, ni atribuible a una sola persona, sino que ha sido el resultado de importantes contribuciones de muchas mentes a lo largo de la historia.

Es común referirse a Isaac Newton (1643-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716) como los padres del Cálculo, pero existen ideas igualmente importantes que los precedieron, y sin las cuales no habría sido posible la creación de esta herramienta. Las contribuciones de Galileo Galilei, René Descartes, Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri y John Wallis, entre otros, lograron establecer el estudio geométrico del cambio y el movimiento como un problema central en la ciencia y, junto con la invención del álgebra simbólica y la geometría analítica, sentaron las bases para la creación del Cálculo como herramienta matemática. Newton expresó de manera sencilla y categórica lo que cada generación le debe a las que le preceden: "Si he podido ver más lejos es porque he subido a los hombros de gigantes" (Ímaz y Moreno, 2014). No es coincidencia, entonces, que Newton y Leibniz hayan concebido al Cálculo casi al mismo tiempo; las condiciones matemáticas necesarias y suficientes habían sido establecidas con reciente anterioridad.

Podemos decir que la matemática moderna surge en el siglo XVII, a partir de la creación de la geometría analítica y el cálculo infinitesimal, y junto con ella, nace el concepto de función, uno de los conceptos más importantes de la matemática. La mayoría de las funciones conocidas en el siglo XVII fueron estudiadas como curvas, por ejemplo, la curva senoidal, que es gráfica de la función seno. En aquel tiempo se disponía de tablas de valores para las funciones trigonométricas y logarítmicas con un alto grado de aproximación. Según Rivera (2012), "en la actualidad, el concepto de función es una noción muy depurada; sin embargo, las funciones interpretadas como 'fórmulas', 'expresiones matemáticas' o bien como 'gráficas', siguen teniendo vigencia; pero debe dárseles su justo lugar, reconociéndoles sus bondades o ventajas, pero también sus limitaciones y el papel que juegan en el concepto general de función" (p. 76).

El dominio es un componente importante del concepto de función, pues ésta no puede ser definida sin un conjunto de números en los que pueda ser evaluada. Pero la incorporación del dominio en el concepto de función es algo más o menos reciente. Anteriormente, las funciones eran concebidas como fórmulas y, por tanto, no se tenía cuidado en precisar el conjunto de números para el cual la función estaba definida.

En la siguiente sección exponemos algunos datos sobre el desarrollo del concepto de función y cómo se concibe en la actualidad.

3.1. Antecedentes históricos del concepto de función

Dentro de la historia de las matemáticas, son varios los ejemplos de conceptos abstractos que han sufrido una permanente evolución. El concepto de función no ha sido ajeno a este proceso, a lo largo del cual encontramos diferentes definiciones o concepciones de lo que es una función; cada una de ellas correspondiente a un nivel diferente de abstracción.

Gottfried Leibniz (1646 – 1716) utiliza por primera vez la palabra "función" en 1673 para designar un objeto geométrico (conjunto de puntos en el plano cartesiano diferente al lugar geométrico) asociado con una curva. Díaz Gómez (2013) distingue cuatro etapas en la evolución de este concepto desde el siglo XVIII hasta el siglo XX:

- **Primera etapa:** Leonhard Euler (1707 – 1783) definió función con base en la definición de su maestro, Johann Bernoulli (1667 – 1748): "*Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes*". En esta primera etapa, la función es tratada como una fórmula.

- **Segunda etapa:** En 1822 Joseph Fourier (1768 – 1830) dio una definición de función en la que hacía notar que lo principal era la asignación de valores para la función; y el que esta asignación fuera llevada a cabo por una o varias fórmulas no era de importancia. Aquí se empiezan a concebir las funciones definidas por piezas, que antes no eran consideradas.
- **Tercera etapa:** En 1829 Peter Dirichlet (1805 – 1859) llega a formular por primera vez el concepto moderno de función y de una variable independiente en un intervalo $a < x < b$: *"y es una función de una variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia"* (Kleiner, 1989, citado por Díaz Gómez). Esta definición es mucho muy general, pues no menciona la necesidad de dar a la función por medio de una fórmula definida sobre todo un dominio de definición.
- **Cuarta etapa:** Esta etapa está asociada con el grupo de matemáticos llamado Bourbaki, en 1939 y se caracterizó por dotar de arbitrariedad al dominio y al contradominio de una función. Bourbaki establece el concepto general de función y la concibe como una regla de asignación que asocia a cada elemento de un conjunto E, llamado dominio, un único elemento de un conjunto F que ahora llamamos contradominio, donde ambos conjuntos son arbitrarios. Esta es una definición que prevalece y es muy socorrida en la literatura matemática, particularmente, en los libros de cálculo y análisis matemático.

Entre la tercera y cuarta etapa, el *dominio de definición* dado por una variable $x \in (a, b)$ pasó a ser un conjunto arbitrario E. Durante el siglo XX, se decide llevar el lenguaje de los conjuntos y su álgebra a las aulas, pero en la década de los ochentas este proceso sufre fuertes críticas de científicos como Feynman, Kline y Freudenthal, quienes cuestionan su impacto en la educación matemática, producto de ello, se retira parcialmente del currículo escolar (Gálvez *et al.*, 2015). En la actualidad el álgebra de conjuntos permanece como parte de los programas para los primeros años de carreras como licenciaturas en ciencias e ingenierías.

Es de esperarse que, ante las etapas de la evolución histórica del concepto de función, los métodos de enseñanza experimenten un proceso de cambio análogo. Entre los matemáticos, así como entre los educadores matemáticos, existen "modas y tendencias", por lo cual esta última idea resulta natural. El impacto del álgebra de conjuntos tiene una historia de más de 50 años en la didáctica de las matemáticas y, desde entonces, una de las más notables aportaciones ha sido convertir a los dominios de las funciones en objetos de estudio dentro de la teoría del Cálculo.

3.2. Función y dominio

Aun cuando en los primeros cursos de Cálculo sólo manejamos funciones de una clase especial, como lo explicaremos más adelante en esta sección, es conveniente que conozcamos los elementos básicos acerca de las funciones en un contexto general. A continuación, cito la definición general de función que utiliza Rivera Figueroa (2012, p. 76).

Definición 1

Dados X, Y, conjuntos cualesquiera, una **función con dominio** X y **contradominio** Y, es toda regla de asociación que asigna a cada elemento $x \in X$ uno y solo un elemento $y \in Y$.

Según Even (1993), *la naturaleza arbitraria de las funciones* se refiere tanto a la relación entre los dos conjuntos en los cuales la función está definida, así como de los conjuntos en sí mismos. La naturaleza arbitraria de la relación hace referencia a que la función no necesariamente debe tener cierta regularidad, como aquellas que se establecen por medio de fórmulas. Por otro lado, la naturaleza arbitraria de los conjuntos significa que la función no necesita estar definida en conjuntos de un tipo específico; en particular, el dominio y el contradominio no tienen por qué ser conjuntos de números. Sin embargo, no podemos esperar que los estudiantes de bachillerato comprendan tal generalidad para la gama de funciones que ellos conocen. El profesor, en todo caso, debe establecer límites para esta arbitrariedad.

No obstante que la Definición 1 está escrita para ser lo más general y sencilla posible, no es la más utilizada en los primeros cursos de Cálculo. Habrá que restarle arbitrariedad a la naturaleza de los conjuntos X y Y limitándolos a conjuntos de números. Así, podemos definir una **función real** al hacer que el contradominio Y sea el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$. Más aún, podemos definir una **función real de variable real** al pedir también que el dominio X sea un subconjunto de $\mathbb{R}$. Atendiendo el otro punto, sobre la naturaleza arbitraria de la relación, pedimos además que todas las funciones reales de variable real puedan ser establecidas mediante una expresión analítica de la forma "$f(x) = \text{fórmula en } x$". A partir de este momento, todas las funciones que consideremos serán funciones reales de variable real que puedan ser establecidas mediante fórmulas.

Es pertinente realizar algunas precisiones: entenderemos a las funciones como reglas de asociación, las cuales son denotadas por letras como f, g o h. Distinguimos los valores de la función de la función misma, es decir, debe distinguirse f de $f(x)$; el símbolo $f(x)$ representa el valor de la función f en el punto x. Por otro lado, dado que los valores de las funciones están dados por una única fórmula, haremos la importante convención de que si no se indica explícitamente el dominio de una función f, entonces entenderemos que el dominio constará precisamente de todos los números reales para los cuales aplique la fórmula (Rivera Figueroa, 2012).

3.2.1. Funciones inversas

A continuación, realizaremos unas modificaciones sencillas de las definiciones que aparecen en Rivera Figueroa (2012) para dar mayor sentido a la teoría que aquí ocuparemos.

Sea $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función [real de variable real] arbitraria.

1. Se dice que f es **inyectiva** si puntos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes; es decir, si siempre que se tenga $x_1 \neq x_2 \in X$ se tiene también que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2. Se dice que f es **suprayectiva** si cada elemento de su contradominio es imagen de al menos un elemento de su dominio. Es decir, si para cada $y \in \mathbb{R}$ existe al menos un $x \in X \subset \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$.
3. Se dice que f es **biyectiva**, si es inyectiva y suprayectiva al mismo tiempo.

Observamos que una función $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no es suprayectiva "esencialmente puede hacerse" suprayectiva redefiniendo su contradominio, haciéndolo igual a su imagen. Es decir, escribiendo a la función como $f: X \subset \mathbb{R} \to f(X)$. De esta forma, podemos nosotros realizar más fácilmente la siguiente definición.

Definición 2

Si $f: X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ es una función biyectiva, su **función inversa**, o simplemente **inversa**, es la función $f^{-1}: Y \to X$ definida como sigue:

Para cada $y \in Y$, tomamos la única $x \in X$, tal que $f(x) = y$ (existe tal x por ser f suprayectiva y es única por ser f inyectiva), entonces hacemos $f^{-1}(y) = x$.

Como sabemos, las funciones seno y coseno son funciones periódicas de periodo 2π (*i.e.* para toda $x \in X,\ f(x) = f(x + 2\pi)$) y, por lo tanto, no son inyectivas. Sin embargo, la restricción adecuada de sus dominios hace posible definir sus funciones inversas, conocidas respectivamente como *arco seno* y *arco coseno*. Más aún, podemos definir las inversas de cada una de las funciones trigonométricas $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}$ y $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, cuyos dominios constan de todos los reales, excepto de aquellos donde la función denominador se anula. Para cada una de ellas debe elegirse un dominio adecuado donde la función sea inyectiva. La elección de estos dominios de inyectividad suele no ser comprendida por alumnos y profesores.

3.2.2. El dominio de las funciones compuestas

El dominio de las funciones generadas a partir de la aplicación de las operaciones aritméticas (suma, resta, producto y cociente) a un par de funciones $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ resulta ser casi siempre $X \cap Y$, excepto en el caso del dominio de la función $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, el cual consiste de todos los números $x \in X \cap Y$ tales que $g(x) \neq 0$.

Sin embargo, en el caso de la operación no aritmética conocida como *composición*, se pide a las funciones f y g cumplir otro tipo de condiciones. Si f y g son funciones arbitrarias, para definir su composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, requerimos que los valores $f(x)$ sean elementos del dominio de g. Esta condición la establecemos en la siguiente definición:

Definición 3

Si X, Y y Z son subconjuntos de los reales, y $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son dos funciones, la **composición** de f y g es la función $g \circ f: X \to Z$ definida como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

El hecho de que la función $g \circ f$ esté definida, no significa que también esté definida la función $f \circ g$, para esto último se requiere que los valores $g(x)$ sean elementos del dominio de f. Para que ambas funciones compuestas estén definidas, se requiere que $X = Z$. La composición de funciones es una operación muy importante, pero hay que cuidar que las funciones cumplan las condiciones que nos permitan componerlas.

En conclusión, el dominio de la función compuesta $g \circ f$ son todos los números x para los cuales exista el valor de $f(x)$ y, además, estos valores $f(x)$ sean elementos del dominio de g.

3.2.3. Funciones elementales

Podría pensarse que, con las precisiones que hemos hecho al principio de esta sección, hemos perdido generalidad en nuestro concepto de función. Definir a las funciones como fórmulas resulta, con seguridad, matemáticamente incompleto, pero esto no debería preocuparnos demasiado, ya que la mayoría de las funciones que se presentan en los primeros cursos de cálculo en el bachillerato tienen esta forma. Estas funciones reciben el nombre de *funciones elementales* y comprenden una categoría muy amplia de funciones que resultan nada simples. A continuación, haremos una breve descripción de cuáles son las funciones elementales como aparece en Rivera Figueroa (1993, pp. 4-5):

Funciones polinomiales

La clase más sencilla de funciones elementales la componen las funciones polinomiales, las cuales pueden ser escritas de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{donde } a_i \in \mathbb{R}, \ \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Esta categoría incluye las funciones cuadráticas, que son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; las funciones lineales, $f(x) = ax + b$ (en particular $f(x) = x$); y las funciones constantes $f(x) = a$.

Funciones racionales

La siguiente categoría de funciones la componen aquellas que pueden ser escritas como el cociente de dos funciones polinomiales. A este tipo de funciones se les conoce como funciones racionales y poseen la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0} \ ; \text{ donde } a_i, b_i \in \mathbb{R}, \ \forall i$$

Funciones algebraicas

Estas funciones se construyen con las operaciones aritméticas elementales: suma, resta, multiplicación, división y radicación de todos los órdenes aplicadas en cualquier número finito y mediante cualquier combinación a funciones racionales o a las mismas funciones que se obtengan mediante este procedimiento. De esta forma, podemos pensar fácilmente en una función algebraica tan complicada como nosotros queramos, por ejemplo:

$$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{1 + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}$$

Sin embargo, existe una categoría de funciones elementales mucho más complejas que las algebraicas y que, de igual modo, utilizamos en los cursos de Cálculo.

Funciones trascendentes

La función genérica trascendente es aquella que puede construirse con las funciones exponencial y logaritmo (e^x, $\log x$), las seis trigonométricas directas ($\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$,

$\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$) y las seis trigonométricas inversas ($\text{arc sen}\, x$, $\text{arc cos}\, x$, $\text{arc tan}\, x$, $\text{arc cot}\, x$, $\text{arc sec}\, x$ y $\text{arc csc}\, x$), todas ellas con las operaciones aritméticas (suma, resta, producto y cociente de funciones), así como la operación no aritmética "$\circ$", que consiste en la *composición de funciones.* La construcción de funciones trascendentes deberá seguir la regla combinatoria de cualquier orden y número finito de operaciones.

Algunos ejemplos de funciones trascendentes son aquellas definidas por las fórmulas e^{x^2}, $e^{\sqrt{x}}$ y $\text{sen}(\text{sen}(\text{sen}\, x))$.

Sin embargo, la libertad que tenemos para crear funciones elementales debe ejercerse con reflexión y algunas reservas, pues fácilmente podemos incurrir en construcciones inválidas produciendo funciones inexistentes, como veremos en la sección siguiente.

3.2.4. Acerca de la continuidad y la derivabilidad

La *continuidad* y la *derivabilidad* de una función son dos conceptos que se definen mediante el concepto de límite. Una función f es *derivable* en un punto x_0 si existe el $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; por otro lado, la función f es *continua* en el punto x_0 siempre que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. La continuidad y la derivabilidad son conceptos puntuales, así por ejemplo hablamos de una función continua en un punto o derivable en un punto, aunque la idea intuitiva de continuidad se considere una propiedad en un intervalo.

Sabemos que si una función es derivable en un intervalo abierto, entonces es continua en ese mismo intervalo, pero que la proposición recíproca no es cierta. La demostración de este resultado es muy fácil; si sabemos que existe $\lim_{x - x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0)\right)$$

$$= \lim \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Dado que toda función derivable es, a su vez, una función continua, debemos tener muy en cuenta que no tiene sentido tratar de encontrar la derivada de una función que no sea continua.

De lo anterior, tenemos que, para hablar de la continuidad y la derivabilidad de una función en un punto se requiere que el punto pertenezca a un intervalo abierto que esté contenido en el dominio, así que, estos conceptos no son aplicables a puntos del dominio que no cumplan con esta condición, en particular, si una función está definida solamente en los naturales, no podemos hablar sobre su derivabilidad en estos puntos. Algunas de las preguntas de nuestro cuestionario, que es parte de nuestro instrumento de investigación, corresponden o tienen que ver con esta situación.

3.3. Casos que ilustran la importancia y necesidad de hacer un análisis de los dominios de las funciones

Un ejemplo que muestra una inadecuada construcción de una función aparece en el conocido libro *"Calculus"* de Michael Spivak, el cual es una referencia importante de muchos cursos de cálculo universitario.

En Spivak (1994, p. 348) encontramos en el inciso (vii) del ejercicio 1 del Capítulo 18 *"Las funciones logaritmo y exponencial"*.

1. *Derivar cada una de las siguientes funciones (recuerde que a^{b^c} siempre denota $a^{(b^c)}$).*

(vii) $f(x) = \left[\arcsin\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right]^{\log(\sin e^x)}$

Un estudiante que inicia su curso de cálculo no dudaría en demostrar sus habilidades operacionales aplicando las reglas de derivación. Sin embargo, antes de poner a trabajar las fórmulas para la obtención de la derivada, hagamos un análisis de la función definida en el inciso (vii).

Primero, cuando consideramos la reducción del dominio $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, tenemos que la función $g(x) = \operatorname{sen} x$ es biyectiva y, por lo tanto, podemos hallar su función inversa, que recibe el nombre de $g^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$. Dado que la imagen $g(x)$ está acotada en $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \forall x$, tenemos que el dominio de la función g^{-1} es el intervalo $[-1,1]$, como se muestra en la figura 3 (abajo).

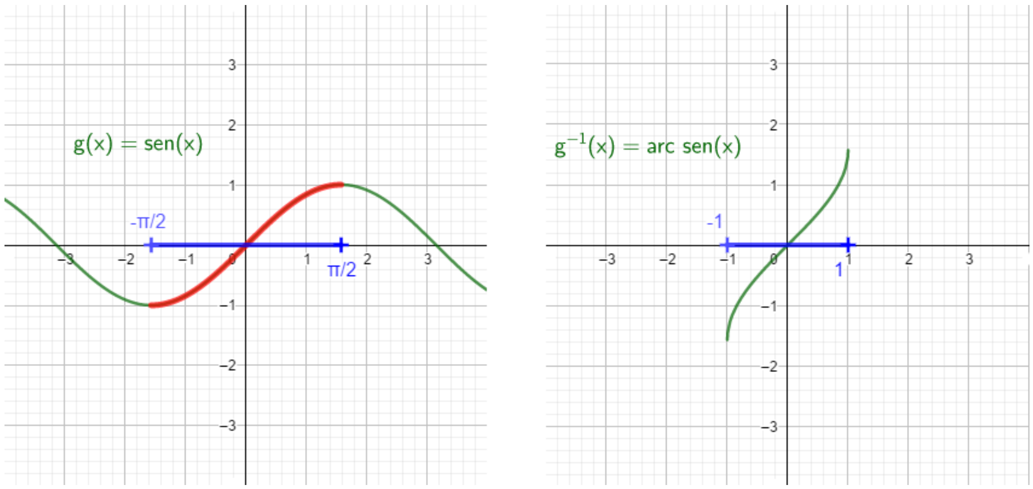


Figura 3: gráficas de las funciones seno y arco seno.

Ahora, la función $h(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$ queda indeterminada cuando $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, para todos los valores de x de la forma $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, tenemos que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \forall x$, lo que implica que $1 < \left|\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right|$ siempre que $\operatorname{sen} x \neq 0$ (véase figura 4). Esto quiere decir que no existen imágenes de la función $h(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$ que se encuentren en el intervalo $[-1,1]$ y, por lo tanto, la composición $(g^{-1} \circ h)(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$ tiene dominio vacío.

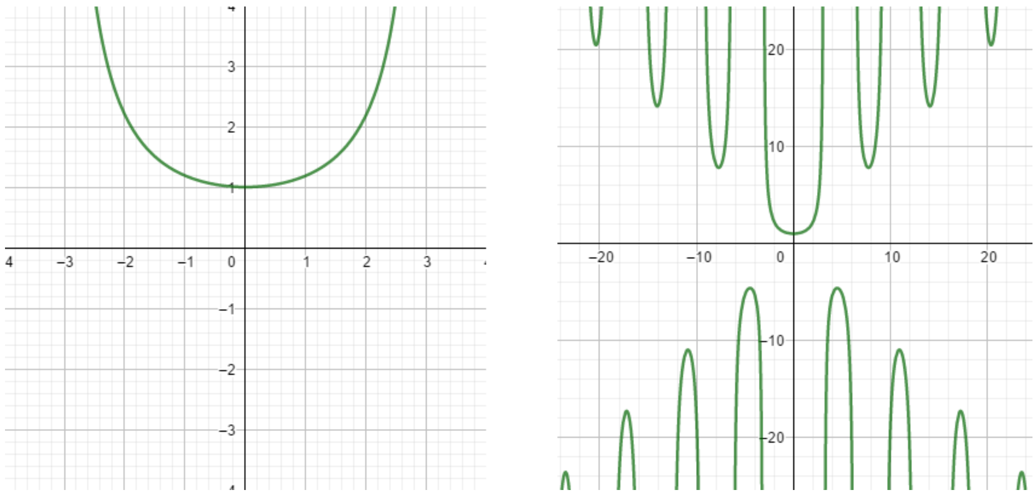


Figura 4: Gráfica de la función $h(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$.

Por lo tanto, la función $f(x) = \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right]^{\log(\operatorname{sen} e^x)}$ que nos pide derivar Spivak tiene dominio vacío. Por cierto, en la sección correspondiente a las respuestas de los ejercicios (p. 987), el autor muestra la siguiente solución, que resulta de la aplicación mecánica de las reglas de derivación.

$$f'(x) = \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right]^{\log(\operatorname{sen} e^x)} \left(\frac{e^x \cos e^x \log\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right.}{\operatorname{sen} e^x} \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) \log(\operatorname{sen} e^x)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sn} x}\right)} \right)$$

A propósito de la gran variedad de funciones elementales que podemos crear, y de las restricciones que debemos considerar, Rivera Figueroa (1993) expone los siguientes ejemplos de funciones:

$$f(x) = \log \log \left(\frac{2x^2}{x^4 + 1}\right)$$

$$g(x) = [\operatorname{sen}^2 x^3 - 2]^{3/2}$$

$$h(x) = \left(\log \frac{1}{x^2 + 1}\right)^x$$

Analicemos primero la función f:

De la desigualdad $0 \leq (x^2-1)^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$, obtenemos que $0 \leq 2x^2 \leq x^4+1, \forall\, x \in \mathbb{R}$, es decir, $0 \leq \frac{2x^2}{x^4+1} \leq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$, y de aquí que $\log\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right) \leq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}-\{0\}$. Es así que la función $f(x) = \log\log\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)$ está definida para ningún real x, pues el dominio de la función logaritmo sólo consta de los reales positivos.

Asimismo, un razonamiento similar podrá hacernos ver que las funciones g y h también tienen dominio vacío: en el caso de g, ésta es una raíz cuadrada de un número negativo; y para h se trata de una exponencial con base negativa. Aun los softwares matemáticos más sofisticados como *Derive* o *Mathematica* incurren en cálculos incorrectos en el proceso de derivación, por ejemplo, ambos programas obtienen $f'(x) = \frac{2}{x^3+x}$ para $f(x) = \log\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)$ cuyo dominio en los reales es el conjunto vacío.

El dominio de las funciones elementales, sobre todo el de funciones sofisticadas, no es evidente a simple vista. Habrá que analizar la fórmula de la función para conocer verdaderamente el dominio y qué tipo de conjunto es; discreto o continuo, finito o infinito, o bien, vacío.

Como hemos visto anteriormente, la aplicación indiscriminada de las reglas formales de derivación, sin realizar un análisis *a priori* de su dominio, puede ocasionar que realicemos operaciones sin sentido y, eventualmente, obtener resultados erróneos. De forma similar, cuando se aplican los métodos de integración sin un análisis de los dominios se corre el riesgo de cometer errores similares.

En los primeros cursos de Cálculo Integral, algunos de los métodos de integración más populares que suelen estudiarse son:

- Identificación de integrales inmediatas.
- Integración de funciones racionales, mediante la descomposición en fracciones parciales.
- Integración por partes.

- Sustitución trigonométricas (para integrales donde aparecen raíces de suma de cuadrados).
- Cambio de variable $u = \tan\frac{x}{2}$ para funciones racionales en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Estos métodos se han convertido en las técnicas de integración de casi todo primer curso de Cálculo Integral. Ilustraremos con un ejemplo cómo este último método puede conducirnos a resultados incorrectos si no se hace un análisis de los dominios de las funciones involucradas.

Supongamos que queremos encontrar el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos x}\,dx$$

Ahora, si proponemos el cambio de variable $u = \tan\frac{x}{2}$, tal como lo indica el último de los métodos de integración de la lista, obtenemos la siguiente primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{5+3\cos x}$:

$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$$

Es fácil verificar que, efectivamente, $F'(x) = f(x)$ para toda x donde F es derivable. Si usamos esta función para calcular la integral definida, obtenemos el siguiente resultado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

Sin embargo, observemos (figura 5) que la función f es continua y positiva en el intervalo $[0, 2\pi]$ por lo que el valor de la integral definida debe ser positivo, lo cual contradice el resultado obtenido.

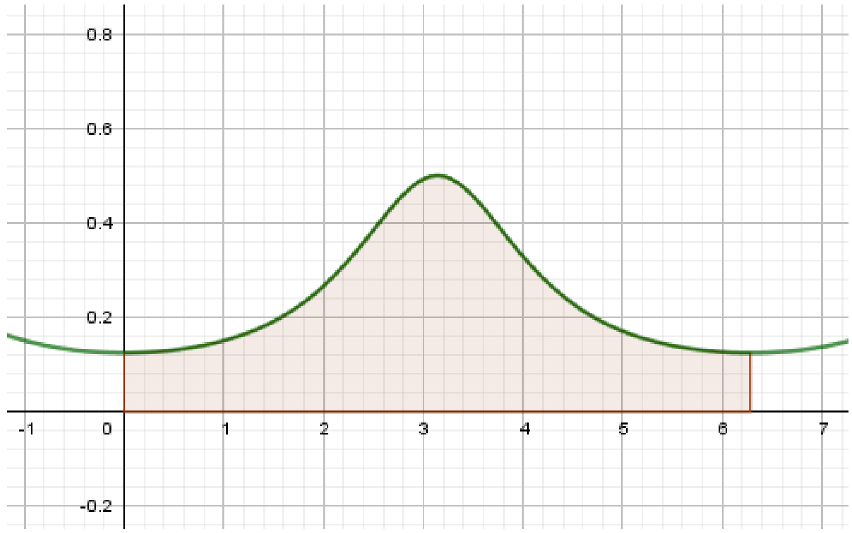


Figura 5: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{5+3\cos x}$ en el intervalo $[0,2\pi]$.

Otra primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{5+3\cos x}$ en el intervalo $[0,2\pi]$ es la siguiente:

$$G(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3+\cos x}\right)$$

Se puede verificar que, efectivamente, $G'(x) = \frac{1}{5+3\cos x}$, para toda $x \in [0,2\pi]$. Usando esta nueva primitiva, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x}\,dx = G(2\pi) - G(0) = \frac{\pi}{2}$$

La aparente contradicción entre los dos resultados obtenidos se debe a que la "primitiva" F no está definida en los puntos de la forma $x = (2n+1)\pi$, donde $n \in \mathbb{Z}$, en particular F no está definida en el punto $\pi \in [0,2\pi]$. Así que F no cumple la condición $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [0,2\pi]$. Observemos que no se trata de una primitiva discontinua (esto no existe, pues toda función derivable es continua), simplemente F no es una primitiva del integrando f en $[0,2\pi]$. Entonces el método de integración que acude a la sustitución trigonométrica $u = \tan\frac{x}{2}$ ha fallado. En la figura 6 se muestran las gráficas de $F(x)$ y $G(x)$ respectivamente.

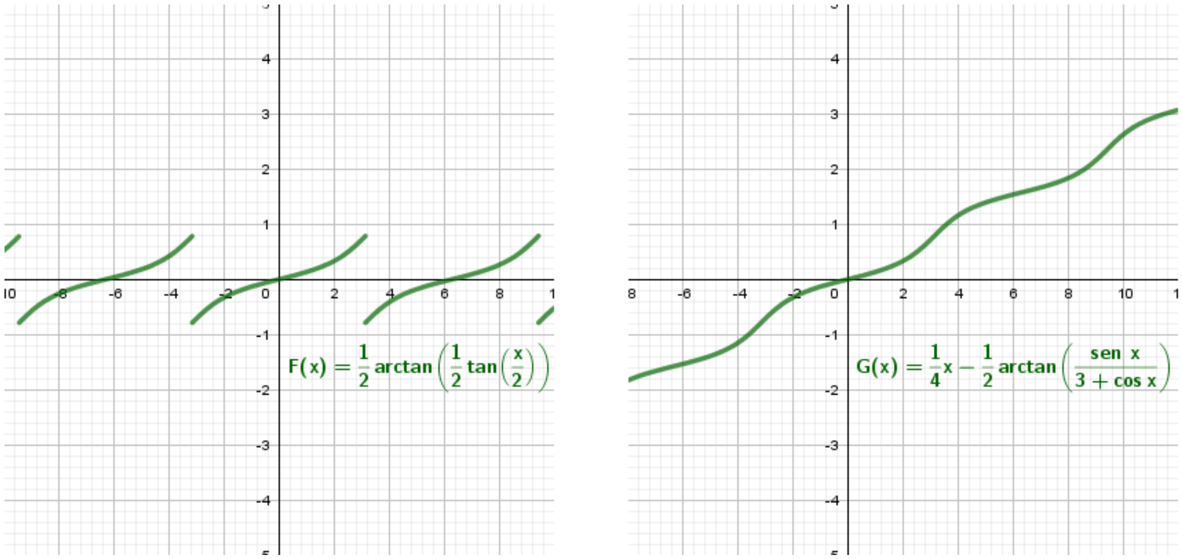


Figura 6: Gráficas de las funciones $F(x)$, a la izquierda y de $G(x)$, a la derecha.

3.3.1. Sobre la tecnología y sus limitaciones

Existen varias herramientas tecnológicas bastante sofisticadas y de fácil acceso que pueden hallarse gratuitamente en Internet, como es el caso de la *calculadora de derivadas*[7].

Esencialmente, en este sitio web, el usuario inserta la fórmula de la función que se desea derivar y el programa arroja paso a paso la aplicación de las reglas formales de derivación. Sin embargo, la calculadora no posee la capacidad de realizar el análisis del dominio de la función, pues al pedirle que derive la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 2}$ (la cual ya hemos mencionado que está definida para ningún real x) el programa arroja el siguiente resultado capturado en la figura 7.

[7] Los detalles técnicos del funcionamiento de esta calculadora pueden ser consultados en la sección "Cómo funciona la calculadora de derivadas", al final de su sitio web: https://www.calculadora-de-derivadas.com/

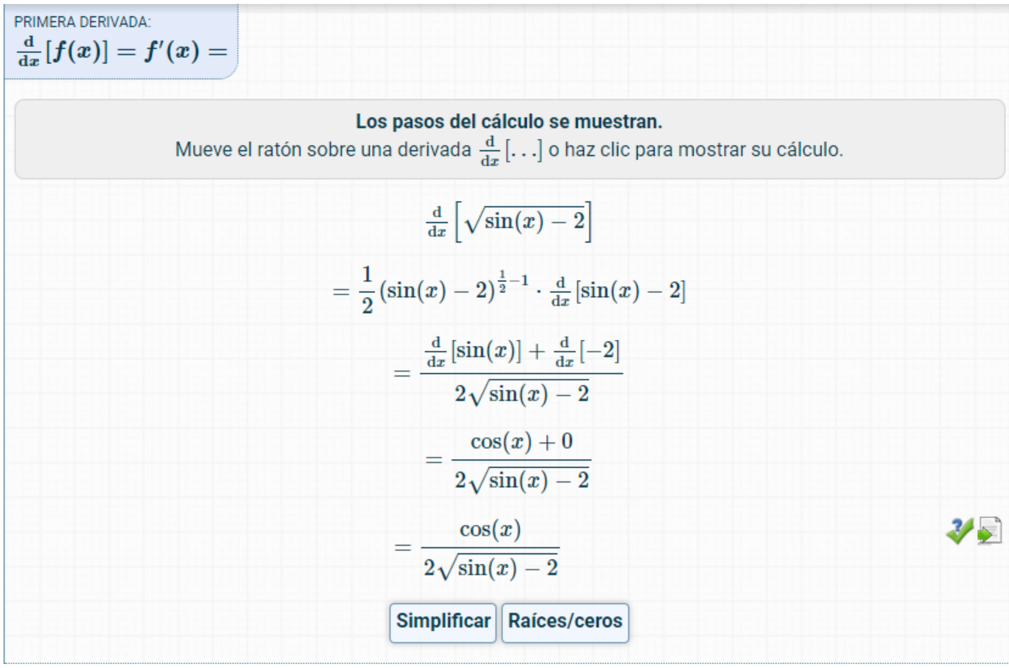


Figura 7: Resultado de la calculadora de integrales al momento de derivar la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 2}$.

Quizás el lector podría pensar que hemos hecho referencia a una herramienta poco conocida y poco fiable para el cálculo de derivadas, pero este error no es propio del software que ofrece este sitio. La calculadora simbólica en línea que proporciona *WolframAlpha*[8] es también un recurso muy conocido y, posiblemente, más eficaz que cualquier otro. A pesar que esta calculadora reconoce que el dominio y el rango de la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 2}$ son vacíos, "calcula" la supuesta derivada de esta función considerada como función real, también "calcula" la integral indefinida de esta función (figura 8).

[8] http://www.wolframalpha.com

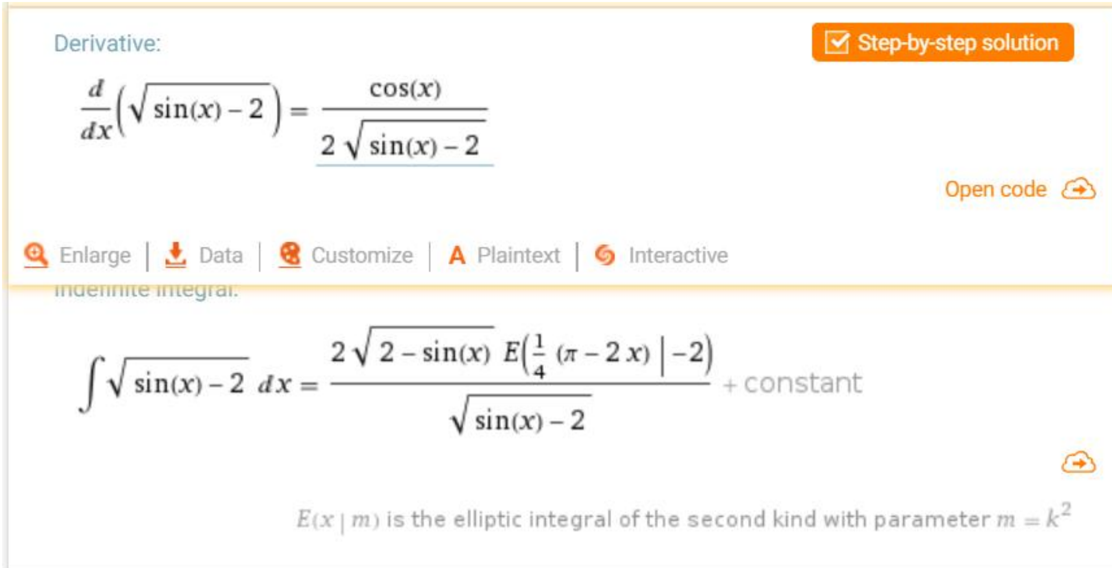


Figura 8: Resultados de *Wolfram Alpha*.

El programa *WolframAlpha* "deriva" la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 2}$ como una función real, la cual en realidad es una función compleja de variable real, es decir, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, y donde $f_1 \equiv 0$ y $f_2(x) = \sqrt{2 - \operatorname{sen} x}$, entonces, se tiene que $f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x)$. *WolframAlpha* también calcula erróneamente las derivadas de las funciones presentadas al inicio de la sección 3.3, como se muestra a continuación.

Derivative:

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left(\log\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)\right)\right) = -\frac{2(x^4-1)}{x(x^4+1)\log\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)}$$

Derivative:

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\sin^2(x^3)-2\right)^{3/2}\right) = 9x^2 \sin(x^3)\sqrt{\sin^2(x^3)-2}\,\cos(x^3)$$

Derivative:

$$\frac{d}{dx}\left(\log^x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right) = \log^x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\left(\log\left(\log\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right) - \frac{2x^2}{(x^2+1)\log\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}\right)$$

Por otro lado, nos parece importante mencionar el caso del comando *Derivative* (en la versión en español, este comando es llamado *Derivada*) en el programa *Geogebra* (versión 6 y anteriores). Como su nombre lo indica, este comando sirve para calcular y graficar la derivada de una función que ya haya sido graficada en *Geogebra*. En general, el comando funciona correctamente para las funciones elementales, sin embargo, falla al calcular la derivada de la función $f(x) = \log\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)$, la cual está definida únicamente para los valores de x tales que $x^2 < 1$, es decir, f está definida únicamente en el intervalo abierto $(-1,1)$. Fuera de este intervalo, no tiene sentido calcular la derivada.

La función derivada de f está dada por la fórmula $f'(x) = \frac{4x}{x^4-1}$, y está definida sólo en los valores $-1 < x < 1$. No obstante, *Geogebra* no toma en cuenta el dominio de la función original y realiza la gráfica de la función dada por la fórmula $\frac{4x}{x^4-1}$ como si fuera una función con dominio independiente, esto se muestra en la figura 9.

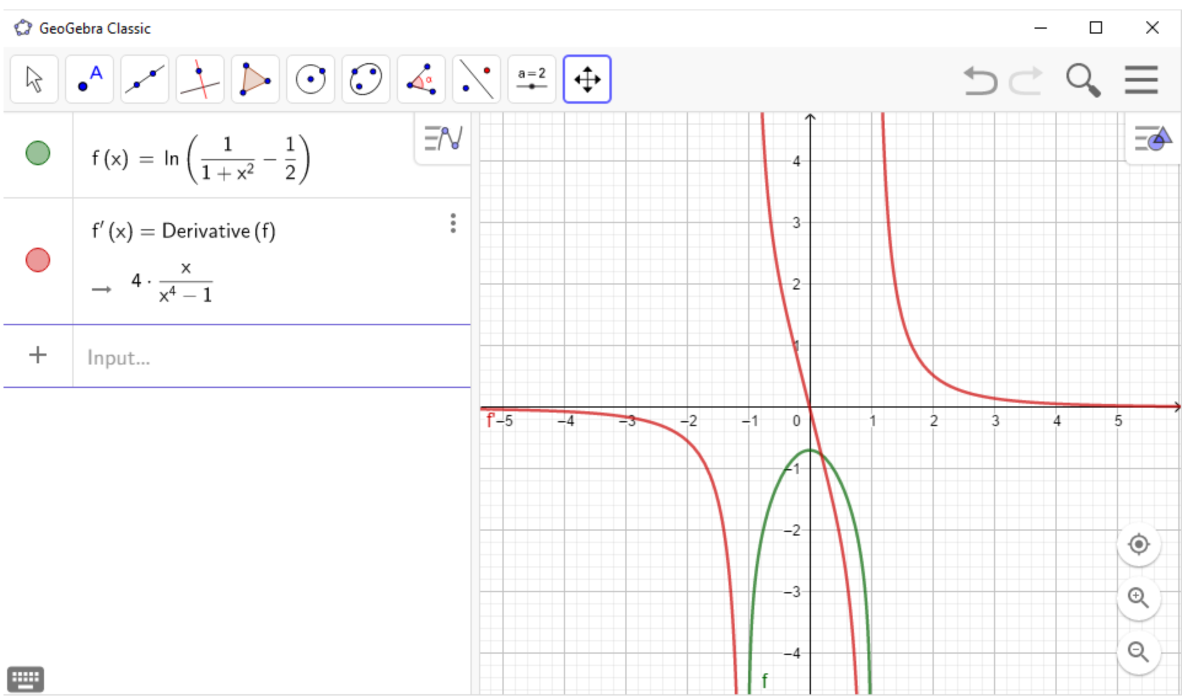


Figura 9: El resultado que muestra *Geogebra* como derivada de la función $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)$.

Los ejemplos antes expuestos ilustran el papel relevante que juegan los dominios de las funciones en el quehacer práctico del cálculo. El análisis de los dominios de las funciones no sólo nos brinda oportunidades para desarrollar y fortalecer nuestros conocimientos de la matemática involucrada en el cálculo, sino que, en situaciones especiales resulta indispensable.

Los profesores deben estar conscientes de la importancia que tiene el dominio de la función en las operaciones propias del cálculo, de otro modo, pueden incurrir en errores como los que hemos señalado anteriormente. Contar con herramientas digitales sofisticadas no implica que los resultados obtenidos en una operación específica sean correctos. Sin duda alguna, la tecnología es un magnífico recurso para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero su uso debe ser acompañado de nuestra propia reflexión sobre los resultados que nos arroja aun el software más poderoso o popular, pues no en todos los casos proporcionan resultados satisfactorios. Por ello, el profesor debe advertir a sus estudiantes sobre las limitaciones que pueda tener esta herramienta.

Capítulo 4: Metodología

Nuestra investigación es de carácter cualitativo. En este capítulo describimos las características metodológicas del estudio. Para responder las preguntas de investigación que hemos planteado en el capítulo 1, nuestro instrumento de investigación constó de un cuestionario que se aplicó a un grupo de profesores de una muestra que se describirá en la siguiente sección y de entrevistas no estructuradas que se llevaron a cabo con los profesores participantes.

Debido a la dificultad de reunir a los profesores y tener una única sesión para la aplicación del cuestionario, éste fue aplicado de manera individual según la disponibilidad de tiempo de cada uno de los participantes. En cada sesión, no se limitó el tiempo para la aplicación del cuestionario, pero en general, fue suficiente una hora. Después de haber hecho su revisión, en una segunda ocasión, se entrevistó a cada uno de los participantes.

4.1. Acerca de la muestra

Todos los profesores seleccionados para la muestra son trabajadores de la Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar (UEMSTAyCM) del estado de Hidalgo, órgano académico dependiente de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS).

Los diez profesores participantes, en su momento, eran maestros activos de los cursos de “Cálculo Diferencial” y “Cálculo Integral” en Centros de Bachillerato Tecnológicos Agropecuarios (CBTa) del estado de Hidalgo. Los centros de bachillerato a los cuales pertenecen los profesores son la totalidad de los colegios de este susbsistema educativo en el estado de Hidalgo, y se ubican en los municipios que se ilustran en la figura

10. Estos centros de bachillerato tienen el propósito de atender las necesidades educativas de la población rural en poblaciones grandes. En el estado de Hidalgo existen ocho planteles distribuidos en los siguientes municipios.

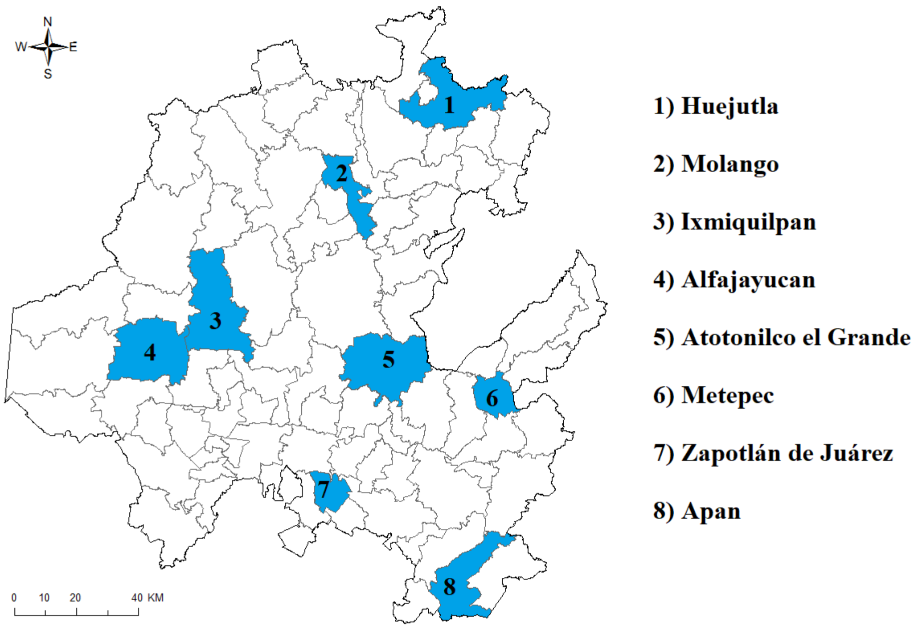


Figura 10: mapa del estado de Hidalgo y los municipios donde están ubicados los planteles.

Los profesores de los CBTa, en general, no cuentan necesariamente con una formación pedagógica en escuelas normales, sino que tienen otras formaciones universitarias que les permiten ofrecer el tipo de educación técnica de los CBTa. Los profesores de matemáticas son usualmente ingenieros agrónomos, agroindustriales, forestales, en sistemas computacionales o en alguna otra rama de la ingeniería.

4.2. Acerca del cuestionario

Como lo expresamos antes, el instrumento que aplicamos en nuestra investigación consistió de un cuestionario de diez preguntas, las cuales se diseñaron con base en los contenidos, ideas y disertaciones presentadas en los capítulos anteriores. Aquí presentamos las diez preguntas así como el propósito de cada una de ellas. La elaboración de este instrumento es producto de discusiones llevadas a cabo en el Seminario de Tesis en el cual participaron el asesor y otros estudiantes de la maestría en ciencias que ofrece el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Como parte de la discusión llevada a cabo en el seminario antes citado, se analizaron diversas situaciones en Cálculo en las que el concepto del dominio de una función juega un papel relevante. La identificación de estas situaciones fue lo que proporcionó los elementos más importantes para el diseño de las preguntas. El cuestionario que finalmente se aplicó a los participantes fue resultado del rediseño de cuestionarios previos de los cuales se realizaron pruebas de pilotaje.

4.2.1. El cuestionario

Pregunta 1

En un video que aparece en un sitio de Internet, en donde se ofrece ayuda a estudiantes de matemáticas, se prueba que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es decreciente, su demostración es la que presentamos ahora como prueba (1). También incluimos una prueba muy común en donde se procede por inducción matemática.

Prueba (1):
Para probar que $\frac{1}{n}$ es decreciente, acudimos a un resultado de Cálculo que dice que, si la derivada de una función es negativa, entonces la función es decreciente. Entonces, como $\frac{d}{dn}\left[\frac{1}{n}\right] = -\frac{1}{n^2}$ y este último resultado siempre es negativo, podemos concluir que $a_n = \frac{1}{n}$ es decreciente.

Prueba (2):
Para probar que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ es válido para todo natural n, procedemos por inducción matemática:

(i) La desigualdad vale para $n = 1$, en efecto, si sustituimos este valor de n, el miembro izquierdo toma el valor $\frac{1}{2}$ y el miembro derecho toma el valor de 1.

(ii) Supongamos que la desigualdad vale para algún valor $n = k$, es decir, $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$. Mostremos que, bajo esta hipótesis, la desigualdad vale para $n = k + 1$.

De la hipótesis $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ se sigue que $k < k + 1$, entonces tenemos que $k + 1 < k + 2$. Por lo tanto, $\frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1}$. Esto prueba que la desigualdad vale para $n = k + 1$.
De lo probado en (i) y (ii) se sigue, por el principio de Inducción Matemática, que la desigualdad vale para todo natural n.

¿Cuál de las dos pruebas prefiere usted?

(a) Prueba (1), (b) Prueba (2) (c) Ninguna de las dos

¿Puede dar una razón breve?

La opción de prueba (1) que aparece en esta pregunta es incorrecta, ya que hace uso de un resultado no aplicable, pues el teorema al que se refiere corresponde a funciones derivables y, en este caso, se “aplica” a una función discreta, es una función cuyo dominio es el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$. En esta pregunta destacamos el hecho de la importancia de la naturaleza del dominio de una función para que pueda ser derivable.

La opción de prueba (2) es correcta, sin embargo, puede resultar sofisticada para varios de los participantes y esto puede hacer que elijan la respuesta incorrecta por ser aparentemente más simple.

Pregunta 2
Determine el dominio de la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)}$.

Esta es una pregunta prototipo de las que aparecen en los libros de texto en las que se pide determinar el dominio de una función. En este caso, para determinar el dominio de la función debe acudirse a un razonamiento lógico que involucra un buen manejo de conjunciones, disyunciones y desigualdades. En este sentido, la pregunta posee un alto grado de dificultad, sin embargo, se esperaría que un profesor con suficiente práctica y experiencia pudiese llevar a cabo el proceso de determinación del dominio correctamente.

Específicamente, para determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)}$, debemos encontrar todos los números reales x que cumplen que $0 \leq (x^2 - 1)(4 - x^2)$, pero esto significa que se satisface la condición [$0 \leq x^2 - 1$ y $0 \leq 4 - x^2$] o bien [$x^2 - 1 \leq 0$ y $4 - x^2 \leq 0$].

La conjunción $0 \leq x^2 - 1$ y $0 \leq 4 - x^2$ nos lleva a que x debe satisfacer $1 \leq x^2$ y $x^2 \leq 4$, es decir, $1 \leq x^2 \leq 4$. Esto ocurre si $\sqrt{1} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}$, de aquí que $1 \leq |x| \leq 2$ y así, obtenemos que $x \in [-2, -1] \cup [1,2]$. Por otro lado, al analizar la segunda conjunción, $x^2 - 1 \leq 0$ y $4 - x^2 \leq 0$, observamos que $x^2 \leq 1$ y $4 \leq x^2$, lo cual se cumple para ningún real x. De lo anterior concluimos que el dominio de la función f es el conjunto dado por la primera conjunción, es decir, $[-2, -1] \cup [1,2]$. En la figura 11 se muestra la gráfica de esta función:

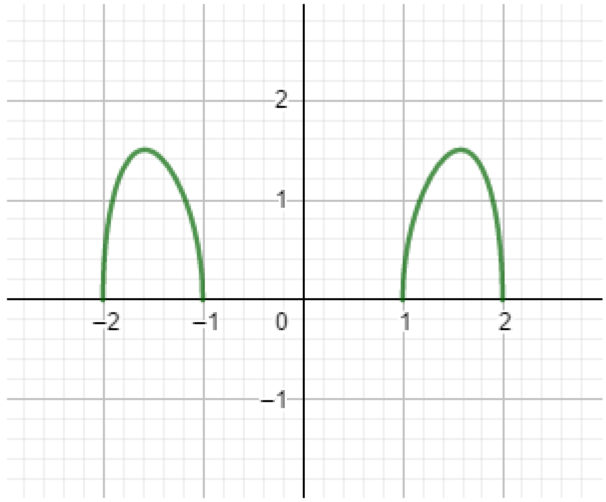


Figura 11: gráfica de la función f.

Con esta pregunta tratamos de averiguar el desarrollo del pensamiento en el terreno lógico-matemático, observando los razonamientos y las estrategias que utiliza el profesor para tratar de llegar al resultado buscado.

Pregunta 3
¿Podría usted derivar la siguiente función $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$? ¿Cuál sería su derivada?

La pregunta 3 podría parecer estar mal redactada, pero la forma de redacción es una manera indirecta de preguntar al profesor si la función es derivable o no. Quisimos evitar dos posibles enunciados para esta pregunta:

a) "¿Es derivable la función $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$?"
b) "Halle la derivada de la función $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$".

Si se hubiese optado por el inciso (a), se le estaría planteando al profesor desde un inicio la posibilidad de que la función no fuese derivable, lo cual podría sugerirle que pusiese especial atención en la naturaleza del dominio de la función. Sin embargo, deseamos averiguar si por propia iniciativa el profesor se hace este cuestionamiento.

También evitamos la opción (b) dado que esta oración supone la derivabilidad de la función g. Es decir, ante la petición explícita de hallar la derivada de la función planteada, se invitaría al profesor a calcular esta derivada usando las reglas formales de derivación, haciéndolo confiar en que es correcto hacerlo.

Creemos que nuestro enunciado, de alguna manera, evita el cuestionamiento explícito sobre la derivabilidad o no derivabilidad de la función. Nosotros intentamos que el profesor se cuestione la derivabilidad o no derivabilidad de la función, pero sin que se lo pidamos explícitamente. En todo caso, durante la entrevista tratamos de averiguar qué piensa al respecto.

Lo que se plantea en esta pregunta es similar, aunque un tanto más sofisticada, a lo que aparece en la pregunta 1, pues ahora se plantea derivar una función cuyo dominio es un conjunto discreto. En efecto, para hallar el dominio de $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$, debemos tener en cuenta que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ implica que $-2 \leq \operatorname{sen} x - 1 \leq 0$, así que g está definida solamente para aquellos x donde $\operatorname{sen} x = 1$, es decir, números de la forma $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, donde n es cualquier entero. Por lo tanto, el dominio de g es un conjunto discreto de números, así que no se puede derivar.

Pregunta 4

Considere la función definida por la fórmula $f(x) = \log\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)$. Cuando aplicamos formalmente las reglas de derivación (fórmulas para la derivada de una suma, producto, cociente de funciones y regla de la cadena), obtenemos:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

Diga en qué puntos la función f es derivable.

Esta pregunta fue extraída de Rivera y Ponce (2013, p.288), quienes utilizan este ejemplo para mostrar que el dominio de la función obtenida a partir de las reglas formales de derivación no es necesariamente igual al conjunto de puntos para los cuales la función original es derivable. Por cierto, ante la pregunta *"¿dónde una función dada es derivable?"*, algunas personas suelen responder determinando el dominio de la función f', lo cual es incorrecto.

Es fácil mostrar que el dominio de la función $f'(x)$ lo compone el conjunto $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. Sin embargo, este conjunto es diferente al dominio de la función original. Por ejemplo, basta notar que existe $f'(2)$, pero no existe $f(2)$. Por cierto, el dominio de la función $f(x)$ es el intervalo $(-1,1)$, y la función es derivable en cada uno de los puntos de su dominio. En realidad, la derivada de f es f' restringida al intervalo $(-1,1)$. Dicho de otra manera, la manera correcta de expresar esta situación es: si $f(x) = \log\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)$, entonces la derivada de f es $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$, para $x \in (-1,1)$. En la figura 12 mostramos las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$.

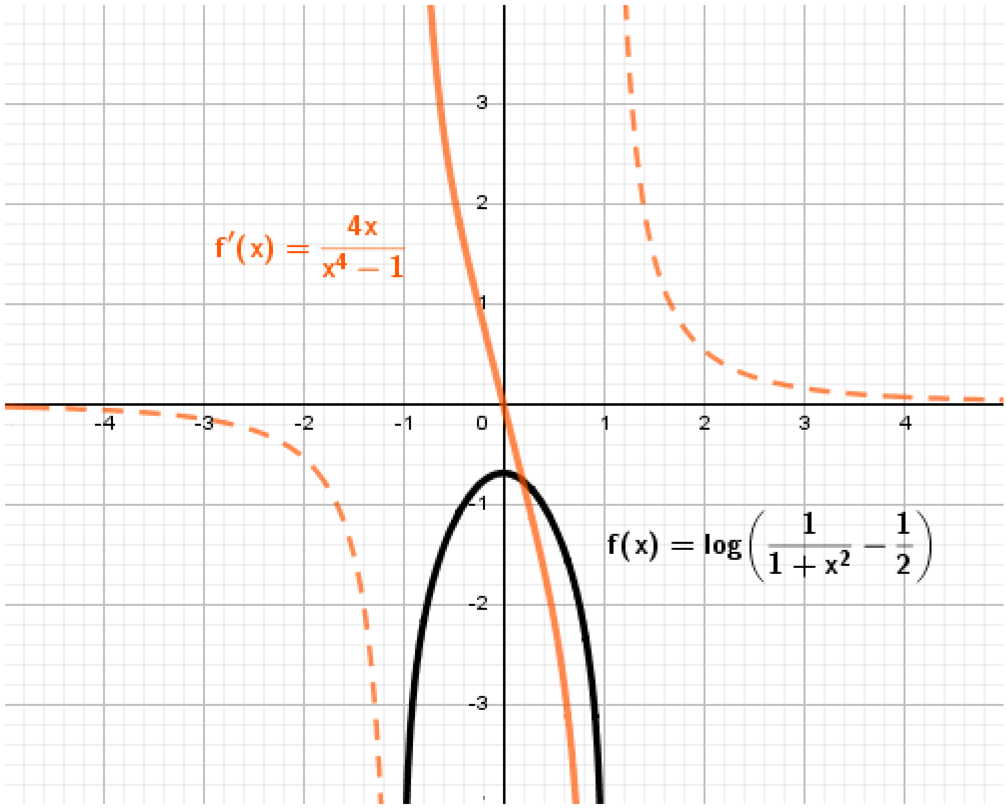


Figura 12: gráficas de las funciones f y f'. La línea punteada indica que la derivada de la función no existe en ese dominio, pero la fórmula sí puede ser evaluada.

Pregunta 5

Considere la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$. Halle la derivada $f'(x)$ y diga en qué puntos existe la derivada.

Esta pregunta tiene mucha similitud con la anterior; en el sentido que ambas son versiones sofisticadas del caso trivial $f(x) = \log x$ cuya derivada está dada por la fórmula $f'(x) = \frac{1}{x}$, pero restringida a los reales $x > 0$. Este caso simple evidencia el hecho de que el dominio de f', la función obtenida mediante las reglas formales de derivación, no necesariamente coincide con el dominio de f. En realidad, $f'(x) = \frac{1}{x}$ definida para todo real $x \neq 0$, es la derivada de la función $F(x) = \log|x|$. Estos ejemplos muestran la relevancia de analizar la naturaleza del dominio de una función en el contexto de la derivación, esta es la razón por la cual se escribe $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$.

Se espera que el profesor, al utilizar las reglas formales de derivación, obtenga la fórmula $f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ sin mucho problema; incluso podría llegar a afirmar que $f'(x) = \tan x$. Pero esto revelaría que, en la práctica, el profesor lleva a cabo el proceso de derivación sin reflexionar sobre el dominio de la función a derivar.

Como Rivera y Ponce afirman, la determinación del conjunto de puntos en el que una función es derivable debiera hacerse antes de la obtención de la fórmula derivada. Entonces, en este caso, primero habría que determinar el dominio de la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$, el cual es $\{x \in \mathbb{R} | \operatorname{sen} x > 0\} = \cup_{n\in\mathbb{Z}} (2n\pi, 2n\pi + \pi)$. Por lo tanto, es correcto afirmar que la derivada $f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, pero restringida al conjunto $\cup_{n\in\mathbb{Z}} (2n\pi, 2n\pi + \pi)$, lo cual hace que esta función sea distinta a $\tan x$. En la figura 13 ilustramos las gráficas de las funciones $f(x), f'(x)$ y $\operatorname{sen} x$ cuando esta última función toma valores positivos.

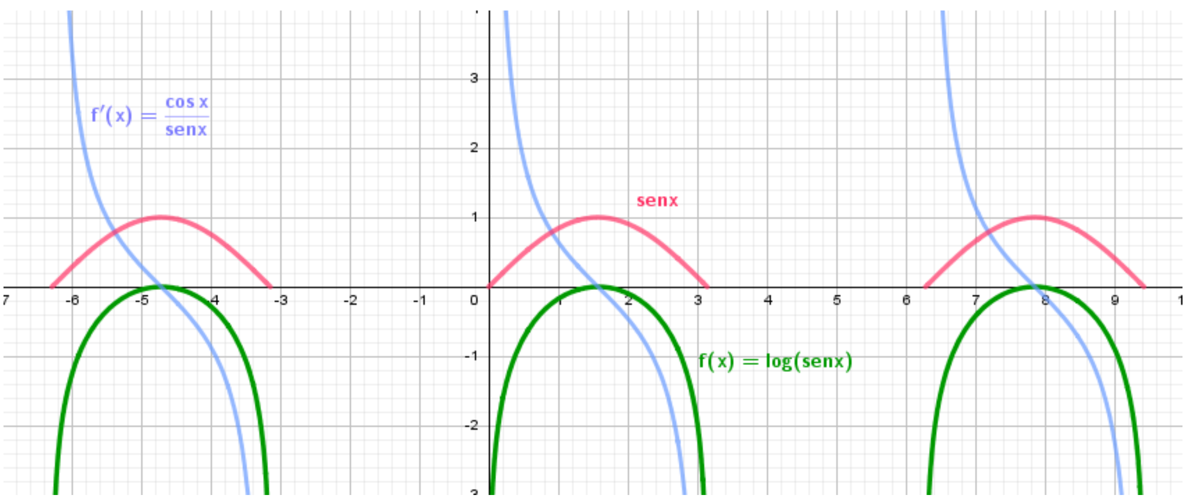


Figura 13: gráficas de las funciones $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$ y $f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $\operatorname{sen} x$ cuando $\operatorname{sen} x > 0$.

Pregunta 6
Halle el dominio de la función $y = \log \log \log(x)$.

En la composición de dos funciones cualesquiera f y g, el dominio de la función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ está compuesto por todos aquellos valores de x tales que $g(x)$ sea elemento del dominio de f. Cuando queremos hallar el dominio de la función $f(f(x))$, debemos considerar todos los reales x para los cuales no sólo exista el valor de $f(x)$, sino que f pueda ser evaluada en $f(x)$. De esta forma, hay que tener en cuenta que la condición $[\mathrm{Imagen}(f) \subset \mathrm{Dominio}(f)]$ no necesariamente se cumple para una función dada.

Para la función $\log x$, y la composición $\log\log x = \log(\log x)$, tenemos por ejemplo que no existe el valor de $\log\log\left(\frac{1}{2}\right)$, debido a que el número $\log\left(\frac{1}{2}\right)$ es negativo. La función $\log x$ está definida para todos los números $x > 0$, pero la composición $\log(\log x)$ está definida siempre que $\log x > 0$, es decir, para cuando $x > 1$.

Con un argumento similar, obtenemos que el dominio de la función $y = \log\log\log x = \log(\log(\log x))$ está constituido por todos aquellos números x tales que $\log(\log x) > 0$, pero esto implica que $\log x > 1$ y, entonces, concluimos que $x > e$. Por lo tanto, el dominio de la función y es el intervalo (e, ∞), como se muestra en la figura 14.

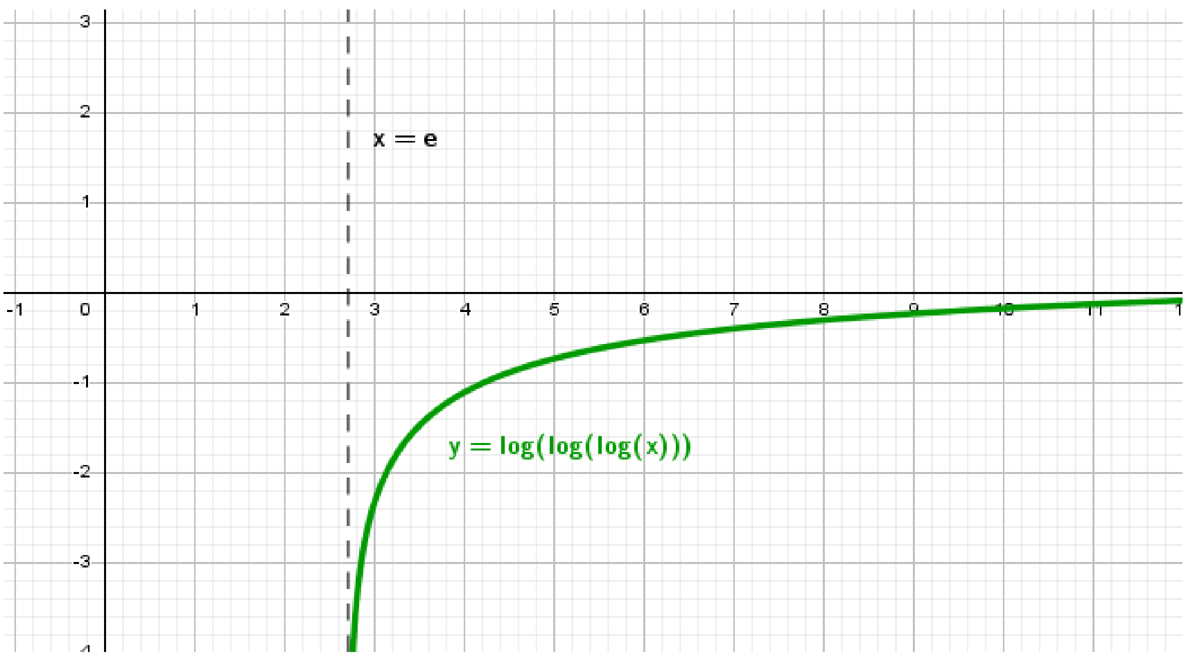


Figura 14: gráfica de la función $y = \log\log\log x$.

La dificultad de este ejercicio no sólo está en el hecho de que el profesor debe conocer bien los valores para los cuales la función $\log x$ está definida, o de los valores de x para los cuales $\log x > 0$ y $\log x > 1$, sino que debe estar consciente que la determinación del dominio de una función compuesta no es una situación trivial y que merece todo el análisis anterior. En este sentido, la pregunta es especialmente difícil, pues se deben tener en cuenta muchos elementos característicos de la función logaritmo.

Pregunta 7
Halle el dominio de la función $$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}$$

Seguramente el profesor sabe que el dominio de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ está dado por todos los números x tales que $q(x) \neq 0$ pero, en el caso de esta pregunta, la función racional es una composición de dos funciones racionales: $g(x) = \frac{1}{1+x}$ y $h(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ tales que $f(x) = g\big(h(x)\big) = \frac{1}{1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}}$, esto le agrega una dificultad adicional al problema de determinar el dominio de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Para determinar el dominio de f, primero tenemos que considerar a la función $h(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}$, la cual está definida para todos los números reales x que cumplen la condición $\left[x \neq 0 \text{ y } x - \frac{1}{x} \neq 0\right]$. De esta forma, la función h tiene dominio $\mathbb{R} - \{-1,0,1\}$.

Por otro lado, es claro que el dominio de la función $g(x) = \frac{1}{1+x}$ es $\mathbb{R} - \{-1\}$. Esto último implica que debemos descartar del dominio de f a todos los valores de $h(x)$ tales que $h(x) = -1$, es decir, todos los números x tales que $\frac{1}{x-\frac{1}{x}} = -1$. Entonces buscamos descartar a todos los números x que satisfagan la condición $[x^2 + x - 1 = 0]$. Utilizando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, concluimos que los números $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ no pertenecen al dominio de f.

Por lo tanto, el dominio de la función f es igual a $\mathbb{R} - \left\{-1,0,1,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

De alguna manera esta pregunta resulta un tanto difícil pues se le pide al profesor hallar el dominio de una composición de funciones racionales, lo cual requiere del análisis de los dominios de las funciones racionales a componer y después se debe determinar dónde tiene sentido componer ambas funciones.

Por supuesto que no hay una única manera de llegar a la solución del problema que se plantea en esta pregunta, por lo que posiblemente al profesor podrá ocurrírsele alguna otra. Pero lo que deseamos averiguar es si el profesor es capaz de identificar las tres condiciones que determinan el dominio de la función f.

Pregunta 8

Si $f(x)$ es una función con dominio $A \subset \mathbb{R}$ y $g(x)$ es una función con dominio $B \subset \mathbb{R}$, diga cuál es el dominio de la función:

$$h(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x) - g(x)}$$

La pregunta 8 tiene un carácter más general que las otras preguntas que constituyen el cuestionario, pues aquí hablamos de dos funciones reales de variable real cualesquiera. Con ella deseamos averiguar si el profesor, en el contexto de esta generalidad, posee los elementos teóricos para determinar el dominio de una función que es combinación de otras funciones.

Resulta fácil ver que, para determinar el dominio de h debemos poner atención no sólo en la parte común que tienen los conjuntos A y B, sino en todos lo valores de x que satisfacen $f(x) - g(x) \neq 0$. Deseamos averiguar si el profesor es capaz de expresar de una manera simbólica o verbal esta condición. Es decir, queremos saber si el profesor sabe que los valores de x deben estar en la intersección de los dominios de f y g, *i.e.*, en el conjunto $A \cap B$, y que además deben cumplir la condición $[f(x) - g(x) \neq 0]$. Por otra parte, también nos interesó averiguar cómo describen estas dos condiciones ya sea de manera verbal o simbólica.

El dominio de la función h está dado por $\{x \in A \cap B | f(x) - g(x) \neq 0\}$.

Pregunta 9

Suponga que $f(x)$ es una función con dominio el intervalo $[4,7]$. Diga dónde está definida la función $g(x) = f(3x-2)$.

Para obtener el dominio que nos pide esta pregunta podemos razonar como sigue: dado que $g(x) = f(3x-2)$ y la función $f(x)$ está definida en el intervalo $[4,7]$, entonces, para que la función $g(x)$ esté definida, se debe cumplir que $4 \leq 3x - 2 \leq 7$, y así obtenemos $6 \leq 3x \leq 9$, o sea, $2 \leq x \leq 3$. De esto se sigue que el dominio de $g(x)$ es el intervalo $[2,3]$.

Un procedimiento equivocado que podría parecer razonable es el siguiente: si consideramos que la función $f(x)$ está definida para $4 \leq x \leq 7$, entonces tendríamos que $10 \leq 3x - 2 \leq 19$ y, de esta forma, el profesor podría llegar a pensar que el dominio de $g(x)$ es igual al intervalo $[10,19]$, la cual, por supuesto, es una respuesta incorrecta.

Pregunta 10

Halle el dominio de la función $h(x) = e^{\log x}$.

Una manera de responder esta pregunta es haciendo la simplificación "trivial" $e^{\log x} = x$ y entonces concluir que el dominio de la función son todos los reales, dado que este conjunto es el dominio de la función identidad $f(x) = x$. Sin embargo, la función $h(x)$ es la función compuesta por e^x y $\log x$, así que, de inicio, tenemos la restricción $x > 0$. Por tanto, la simplificación $e^{\log x} = x$ está condicionada a valores positivos de x. El dominio de $h(x)$ es entonces el conjunto de reales positivos.

CAPÍTULO 5:
ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo mostraremos la manera en la que se realizó el análisis de los datos obtenidos por el cuestionario y complementados por las entrevistas a los participantes. Tenemos presente que, para contestar satisfactoriamente el cuestionario, el profesor debe poseer un sólido conocimiento de la materia del Cálculo. El nivel de abstracción de los conceptos y métodos matemáticos que los maestros mostraron, varía considerablemente de un individuo a otro, por lo tanto, decidimos realizar este análisis de carácter cualitativo. Asimismo, consideramos que el procesamiento de la información obtenida debe estar enfocado en atender las preguntas de investigación de la sección 1.3, las cuales recordamos a continuación:

- ¿Cuál es el desempeño que muestran los profesores acerca del concepto de dominio de una función en diferentes situaciones del quehacer matemático en el cálculo?
- ¿Qué tan consciente es el profesor sobre el papel que juega el concepto del dominio de una función en el Cálculo?

Uno de nuestros objetivos consiste en averiguar cuál es el nivel de dominio que tienen los profesores acerca del concepto de dominio de una función, el cual pretendemos determinar mediante el cuestionario descrito en la sección 4.2 y que se enfoca en la resolución de problemas no rutinarios. Con las respuestas de los profesores, en cada caso, tratamos de averiguar sobre su capacidad de reflexión y si pueden llevar a cabo el análisis para determinar dominios de funciones.

Las entrevistas nos permitirán profundizar sobre el pensamiento de los profesores cuando sus respuestas por escrito no nos proporcionen suficiente información. En algunos casos, los profesores expresan por escrito el resultado sin hacer explícito el procedimiento que utilizaron para obtenerlo. Por cierto, varios profesores insistieron en conocer cuál era la "calificación" que habían obtenido en el cuestionario; se les explicó que esa no era la finalidad del instrumento, aunque durante las entrevistas se les proporcionó la respuesta correcta de cada pregunta para que ellos mismos juzgaran su resultado.

5.1. Respuestas al cuestionario

La muestra de profesores elegida resultó ser bastante heterogénea en sus conocimientos y habilidades matemáticas; encontramos respuestas muy ingeniosas y acertadas, pero también existen otras muy vagas y poco precisas, incluso con el mismo profesor participante. En esta sección discutimos sobre las respuestas más notables que los profesores escribieron en el cuestionario.

En la tabla 1, que aparece a continuación, presentamos de manera resumida quiénes respondieron correcta o incorrectamente cada una de las preguntas. Hemos asignado un nombre ficticio a cada uno de los participantes. En esta tabla también señalamos las preguntas que fueron contestadas parcialmente.

Tabla 1: Lista de nombres de los profesores participantes y relación de sus respuestas por cada pregunta.

Nombre del profesor	**Preguntas**									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
01. Ana										
02. Brenda										
03. César										---
04. Delia	---			---				---	---	---
05. Erick	---									---
06. Félix										
07. Germán										
08. Héctor								---		
09. Ilse				---	---					
10. Juana										

Simbología

	Respuesta correcta		Respuesta incorrecta		Respuesta parcialmente correcta	---	Sin respuesta o respuesta sin sentido

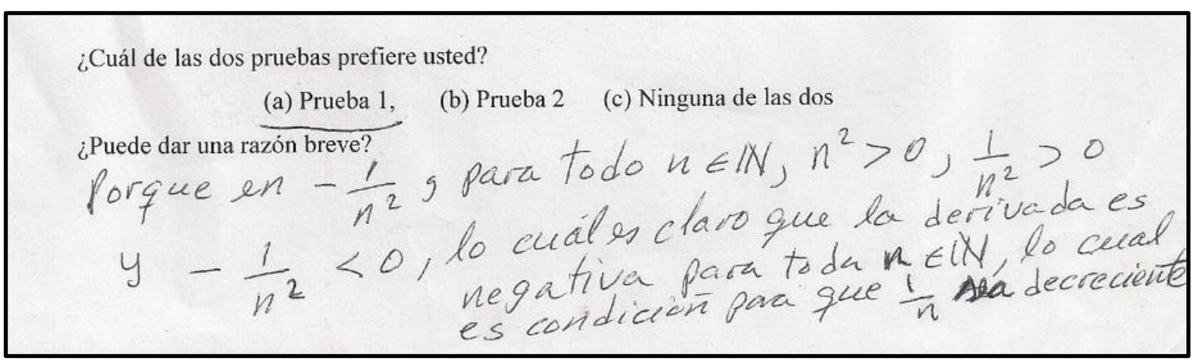
Es notable que la profesora Juana respondió correctamente el 90% de las preguntas, y que la profesora Ana fue contestó incorrectamente cada una de ellas. Cinco de los diez profesores tuvieron resultados insuficientes.

5.1.1. Análisis de respuestas por cada pregunta

Pregunta 1. En la primera pregunta del cuestionario, se le pide al profesor escoger entre dos opciones de prueba para demostrar que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es decreciente. La opción de prueba (1) que aparece en esta pregunta es incorrecta, ya que hace uso de un resultado que no es aplicable a funciones con dominio discreto. Por otro lado, la opción de prueba (2), aunque es correcta, pensamos que podría resultar sofisticada para varios de los profesores participantes y esto puede hacer que elijan la opción incorrecta por ser aparentemente más simple.

Sin embargo, las respuestas que dieron los profesores de la muestra difieren de nuestra suposición: sólo tres de ellos prefieren la opción errónea de prueba (1), otros cinco prefieren la opción correcta de prueba (2), el profesor Erick no pudo decidir cuál de las dos opciones elegir y la profesora Delia no contestó esta pregunta. Esto significa que la mitad de los profesores participantes pudieron elegir la opción de prueba correcta, aunque sea más sofisticada.

La profesora Ana mencionó que la opción de prueba (1) “es mucho más práctica y fácil de explicar, en donde podemos sin problemas comprobar el resultado”. Por otra parte, la profesora Ilse dice que prefiere la prueba (1) porque “se llega al resultado de una manera más práctica”. El profesor Germán, por su parte, escribe la siguiente respuesta:


¿Cuál de las dos pruebas prefiere usted?

(a) Prueba 1, (b) Prueba 2 (c) Ninguna de las dos

¿Puede dar una razón breve?

Porque en $-\frac{1}{n^2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^2 > 0$, $\frac{1}{n^2} > 0$ y $-\frac{1}{n^2} < 0$, lo cuál es claro que la derivada es negativa para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual es condición para que $\frac{1}{n}$ decreciente

Figura 15: Profesor 07 Germán. Respuesta a la pregunta 1.

En su respuesta, podemos percibir que el profesor Germán logra reconocer que el dominio de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, vista como función real, es todo el conjunto $\mathbb{N}$, pero no se percata que el criterio de decrecimiento de la función –dado por los valores negativos de su derivada– es aplicable sólo a funciones continuas. Para Germán, el hecho de que el valor de la "supuesta derivada" sea negativo, es condición suficiente para afirmar que la función es decreciente, sin tomar en cuenta su dominio.

Por su parte, el maestro César dijo que la prueba (1) "no reúne las características ni el rigor de una demostración". Al preguntarle oralmente a la profesora Brenda por qué había elegido la opción de prueba (2), ella respondió lo siguiente:

Entrevistador: ¿Por qué elegiste la opción (2)?
Brenda: Porque siempre he utilizado esta prueba y jamás se me había ocurrido usar la prueba (1) a pesar de su facilidad.
Entrevistador: ¿Te parece más fácil la prueba (1)? ¿Por qué?
Brenda: Sí, porque es más corta y más práctica. De ahora en adelante buscaré aplicar la prueba (1) cuando sea posible.
Entrevistador: No, esa prueba es falsa.
Brenda: ¿Por qué? [Piensa un momento y escribe] Sí es cierto, porque estás tratando de calcular la derivada de una sucesión, y eso no se puede.
Entrevistador: ¿Por qué no se puede?
Brenda: Porque la sucesión son puros puntos, ¿no? O sea, su dominio son los [números] naturales, y la función necesita ser continua para que la podamos derivar.

La profesora Brenda elige la opción (2) con base en su propia experiencia adquirida al demostrar la monotonía de varias sucesiones por medio de la Inducción Matemática. Al principio, Brenda no se da cuenta que la opción de prueba (1) es incorrecta, pero en cuanto pone en duda la veracidad de esta prueba, ella advierte que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es diferente a la función $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por el contrario, el profesor Félix, uno de los profesores con más experiencia de la muestra, sí llega a esta conclusión por su propia cuenta. En la entrevista concedida, comentó lo siguiente:

Entrevistador: ¿Por qué eligió la opción (2)?
Félix: La prueba (1), aunque entrega un resultado cierto, tiene la inconsistencia de que la sucesión $1/\mathrm{n}$ no es la función $\mathrm{f(n)} = 1/\mathrm{n}$; una es discreta y la otra es continua […] Primero tiene que justificarse el porqué [sic] se comportan de la misma forma, para lo que nos interesa, esa función y esa sucesión.
Entrevistador: Entonces, ¿usted diría que la prueba (1) es incorrecta?
Félix: No, pero utilizar cálculo para demostrar que la sucesión $1/\mathrm{n}$ es decreciente es demasiada maquinaria técnica para lo que se quiere probar. La prueba (2) es más natural, lógica y simple. Sin embargo, puede ser que la prueba (1) a veces parezca más sencilla debido al adiestramiento que tienen los estudiantes en cuanto al cálculo.

Es notable que el profesor Félix considere que la prueba por inducción matemáticas es más "natural, lógica y simple". logra advertir que el dominio de la sucesión es un conjunto discreto, sin embargo, no descarta la validez de la prueba (1) siempre que haya una explicación justificada de las condiciones con las que podemos considerar similar el comportamiento de la función $f(x) = 1/x$, para todo $x \in \mathbb{R}$; y de la sucesión $a_n = 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

La supuesta practicidad de la opción de prueba (1) sí la hace parecer válida a muchos profe-sores de la muestra, sin embargo, muchos logran ver más allá de la aparente facilidad con la que se llega al resultado. La predilección por la elección de la opción (2) se basó más en la formalidad que esta opción posee que en la viabilidad que podría tener al presentarla en una clase con estudiantes de bachillerato.

Finalmente, podemos agregar que, dentro de las opciones, también había "ninguna de las dos pruebas", la cual fue elegida por ninguno de los profesores participantes. Elegir las maneras en las que se establece la verdad en matemáticas también es una parte importante del conocimiento de la materia que los profesores necesitan desarrollar para su práctica docente.

* * *

Pregunta 2. En esta pregunta, se le pide a los profesores determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)}$. Como hemos mencionado en la sección 4.1.1, el dominio de esta función es $D = [-2,-1] \cup [1,2]$. Con esta pregunta, queremos averiguar cuál es el desempeño del profesor, en el terreno lógico-matemático, sobre sus razonamientos y estrategias que utiliza para tratar de llegar al resultado.

La mitad de los profesores (Brenda, Félix, Germán, Héctor y Juana) consiguieron llegar al resultado correcto y exponer sus correspondientes métodos de solución. Asimismo, el profesor César logró llegar parcialmente al resultado esperado. Por último, cuatros maestros (Ana, Delia, Erick e Ilse) no pudieron llegar a un resultado concreto. De esta forma, podemos afirmar que esta pregunta no representa necesariamente una dificultad para los profesores. A continuación, analizamos algunas respuestas que nos parecieron importantes.

La profesora Brenda contestó lo siguiente:

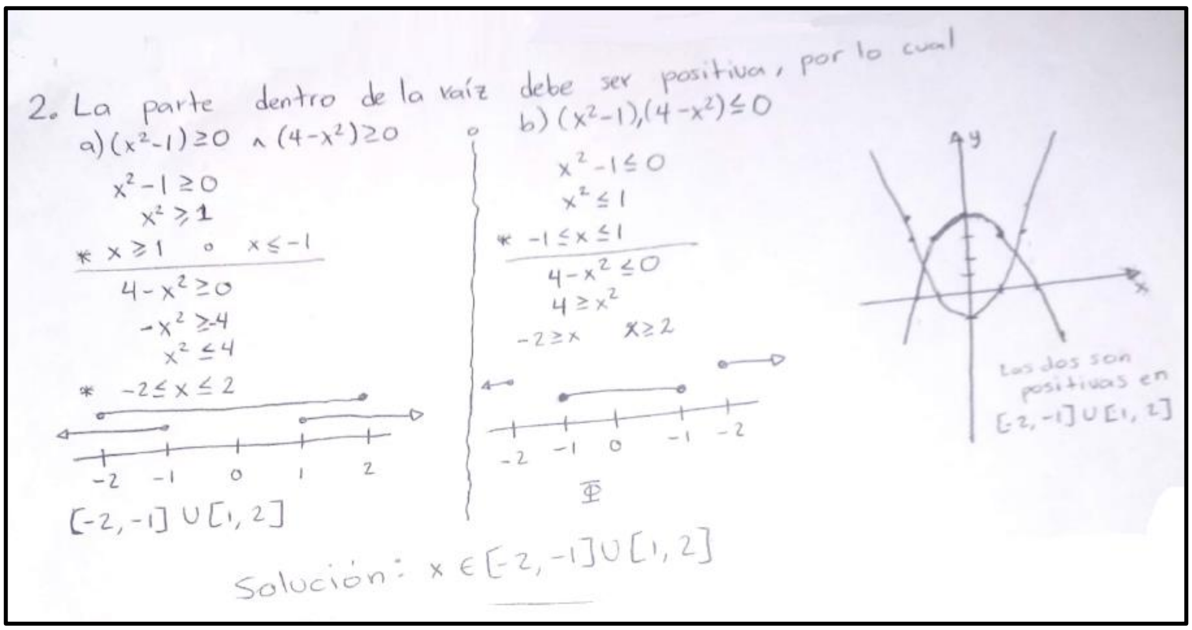
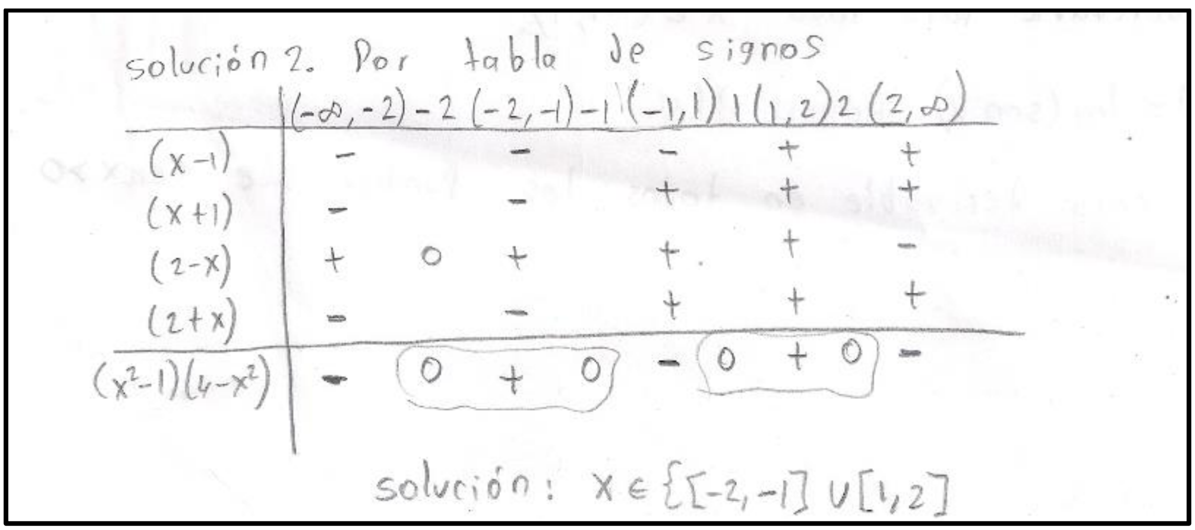


Figura 16: Profesora 02 Brenda. Respuesta a la pregunta 2.

Aunque no está escrito en su respuesta, podemos observar que la maestra Brenda es capaz de distinguir la condición $(x^2-1)(4-x^2) \geq 0$ que hace que la función $f(x) = \sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}$ esté definida. Para encontrar el resultado, Brenda utiliza varios sistemas de representación gráfica y simbólica. Los incisos (a) y (b) de su escrito indican que Brenda considera los dos casos de conjunciones: $[(x^2-1) \geq 0 \; \wedge (4-x^2) \geq 0]$ y $[(x^2-1) \leq 0 \; \wedge (4-x^2) \leq 0]$, los cuales desarrolla utilizando métodos algebraicos para la resolución de desigualdades y un buen razonamiento lógico. Finalmente, Brenda es capaz de caracterizar la condición $(x^2-1)(4-x^2) \geq 0$ utilizando el bosquejo de las gráficas de las funciones dadas por las fórmulas $y_1 = x^2 - 1$ e $y_2 = 4 - x^2$.

El profesor Félix también llega al resultado correcto, pero con otro método de solución: Félix considera el hecho de que $(x^2-1)(4-x^2) = (x-1)(x+1)(2-x)(2+x)$. De esta forma, el profesor logra distinguir todos los valores de x que anulan a $f(x) = \sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}$, los cuales son $\{-2,-1,1,2\}$. Entonces, Félix particiona todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ en intervalos abiertos con límites en estos valores. Posteriormente, analiza el valor del signo de cada uno de los cuatro factores $(x-1), (x+1), (2-x)$ y $(2+x)$ en sendos intervalos. Finalmente, realiza una tabla en la que él puede constatar fácilmente que los valores en los que la función está definida son, precisamente, aquellos intervalos en los que el producto de todos los signos son positivos o cero.


solución 2. Por tabla de signos

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$
$(x-1)$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$(x+1)$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$(2-x)$	$+$	0	$+$		$+$		$+$		$-$
$(2+x)$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$(x^2-1)(4-x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

solución: $x \in \{[-2,-1] \cup [1,2]$

Figura 17: Profesor 06 Félix. Respuesta a la pregunta 2.

Por otro lado, el profesor César escribió la siguiente respuesta que consideramos parcialmente correcta:

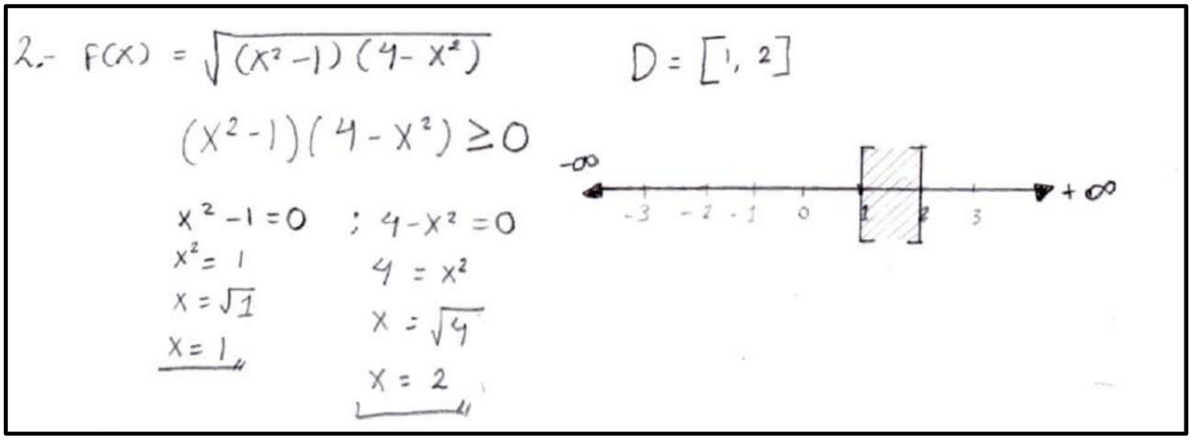


Figura 18: Profesor 03 César. Respuesta a la pregunta 2.

Al igual que Brenda, el profesor César es capaz de distinguir la condición $(x^2 - 1)(4 - x^2) \geq 0$ que hace que la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)}$ esté definida. Sin embargo, el profesor no realiza la manipulación simbólica de ninguna desigualdad ni conjunción, sino que opta por resolver las ecuaciones $x^2 - 1 = 0$ y $4 - x^2 = 0$. Al momento de resolver estas ecuaciones, César olvida que existen dos raíces cuadradas para cualquier número positivo. Esto lo lleva a "determinar parcialmente la solución" del problema, obteniendo los límites de uno sólo de los intervalos en los que está definida la función y, por tanto, la respuesta

$D = [1,2]$.

En la misma pregunta, la profesora Delia respondió lo siguiente:

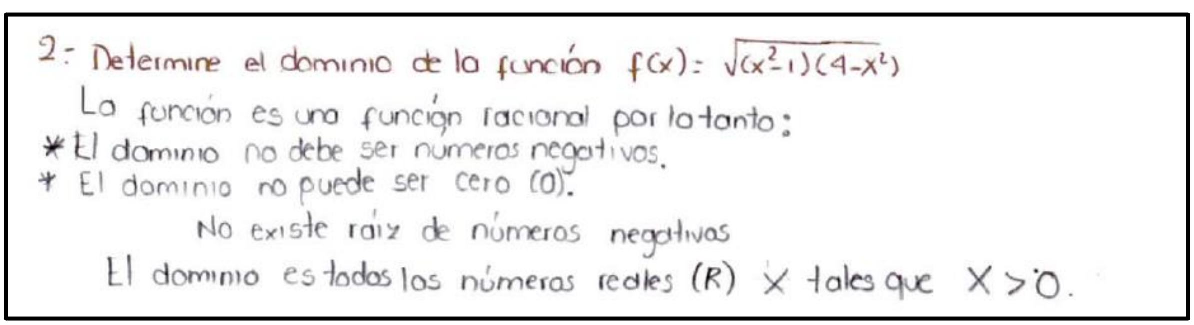
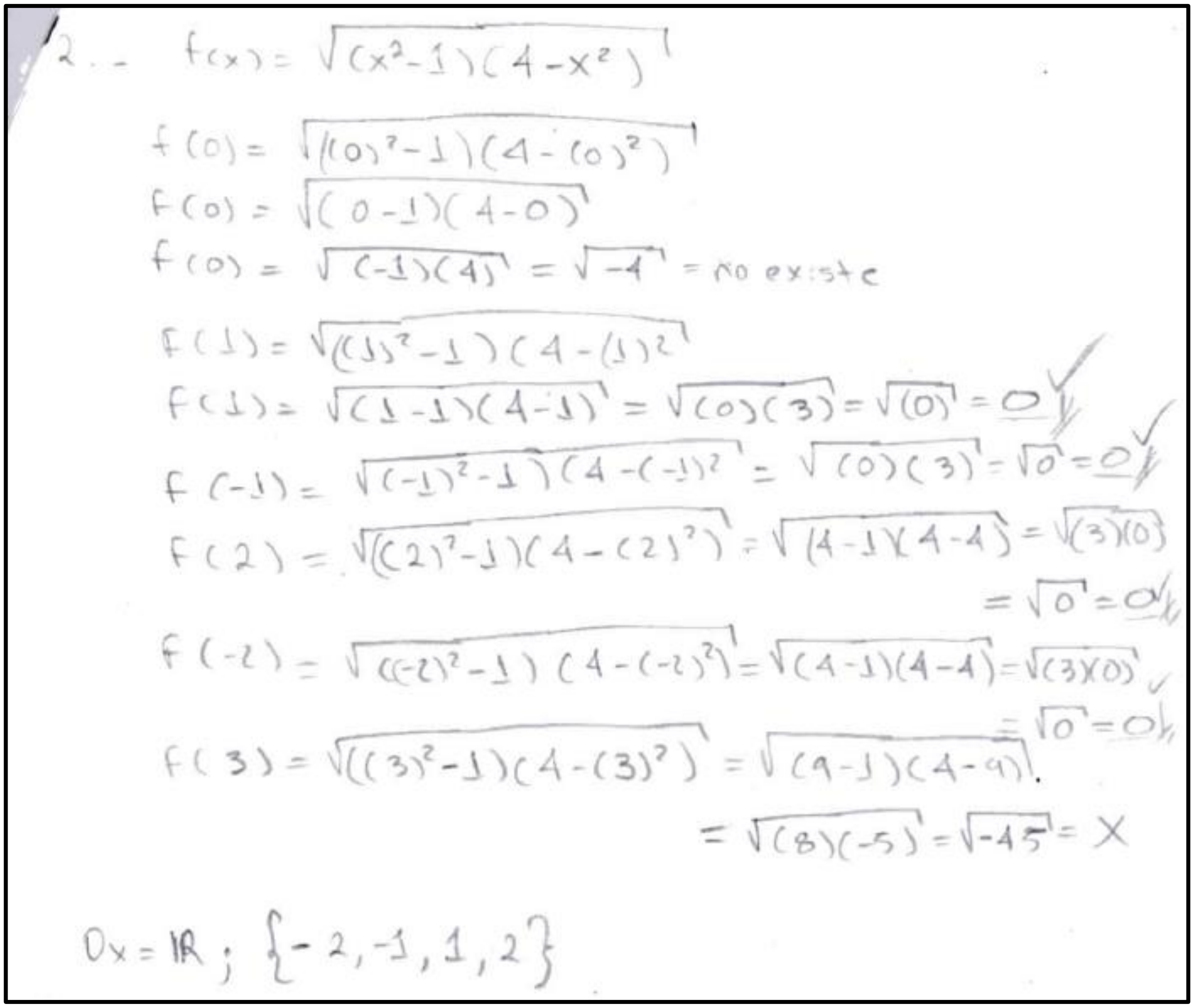


Figura 19: Profesora 04 Delia. Respuesta a la pregunta 2.

En la figura anterior, observamos que la profesora Delia se refiere erróneamente a la función raíz cuadrada, llamándola *función racional*, pero reconoce que el argumento de la raíz cuadrada debe ser no negativo. Quizás sea cuestión de semántica, pero su respuesta revela que no conoce la terminología para las funciones elementales. Para ella función racional se refiere a las raíces cuadradas. Delia concluye que el dominio de la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)}$ es el conjunto de todos los números reales positivos. Nos ha llamado la atención el hecho que la profesora Delia no realiza ninguna operación algebraica para determinar su respuesta. De hecho, muestra argumentos imprecisos como "el dominio no debe ser números negativos" o "el dominio no puede ser cero (0)". Su respuesta sugiere que la profesora Delia no tiene una noción correcta del concepto de dominio.

Como hemos mencionado en la sección 1.1, el estudio de los dominios de funciones puede traer beneficios en dos sentidos: por un lado, este concepto es fundamental para asimilar otros conceptos del cálculo; por otro lado, la tarea de determinar el dominio de una función es una competencia matemática que integra la habilidad operacional, el razonamiento lógico y el lenguaje de la persona. Poder conducir el pensamiento desde la condición $(x^2 - 1)(4 - x^2) \geq 0$ hasta el resultado $D = [-2, -1] \cup [1,2]$ es señal de un alto nivel de logro de esta competencia matemática.

Por último, debemos mencionar que existen casos, como el del profesor Erick (figura 20) y la profesora Ilse, en la que ambos profesores trataron de evaluar la función g en cada uno de los valores que, según ellos, podrían pertenecer al dominio de la función. Sus procedimientos no le conducirán a la respuesta correcta.



2.- $f(x) = \sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}$

$f(0) = \sqrt{((0)^2-1)(4-(0)^2)}$

$f(0) = \sqrt{(0-1)(4-0)}$

$f(0) = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{-4} =$ no existe

$f(1) = \sqrt{((1)^2-1)(4-(1)^2)}$

$f(1) = \sqrt{(1-1)(4-1)} = \sqrt{(0)(3)} = \sqrt{(0)} = 0$

$f(-1) = \sqrt{((-1)^2-1)(4-(-1)^2)} = \sqrt{(0)(3)} = \sqrt{0} = 0$

$f(2) = \sqrt{((2)^2-1)(4-(2)^2)} = \sqrt{(4-1)(4-4)} = \sqrt{(3)(0)}$

$= \sqrt{0} = 0$

$f(-2) = \sqrt{((-2)^2-1)(4-(-2)^2)} = \sqrt{(4-1)(4-4)} = \sqrt{(3)(0)}$

$= \sqrt{0} = 0$

$f(3) = \sqrt{((3)^2-1)(4-(3)^2)} = \sqrt{(9-1)(4-9)}$.

$= \sqrt{(8)(-5)} = \sqrt{-45} = X$

$D_x = \mathbb{R}$; $\{-2, -1, 1, 2\}$

Figura 20: Profesor 05 Erick. Respuesta a la pregunta 2.

* * *

Pregunta 3. En la tercera pregunta, los profesores deben decidir si es posible o no derivar la función $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$. En caso de ser derivable, habría que hallar su derivada.

Casi de manera unánime, los profesores procedieron a derivar la función $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$ utilizando indiscriminadamente la regla de la cadena, y obtuvieron la respuesta $g'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x - 1}}$. Esto muestra que la mayoría de los profesores conciben a la derivación como el proceso de aplicar algoritmos y reglas de derivación sin hacer una reflexión sobre la validez de su aplicación en cada caso. Los profesores mostraron preferencias por utilizar las reglas formales de derivación antes que hacer un análisis del dominio de la función, como habíamos conjeturado anteriormente. Nueve de los diez profesores participantes afirmaron que $g'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x - 1}}$ es la función derivada de $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$; ninguno de estos nueve profesores se percató que la función g' está definida para ningún real x.

Sin embargo, la profesora Juana tuvo una respuesta distinta:

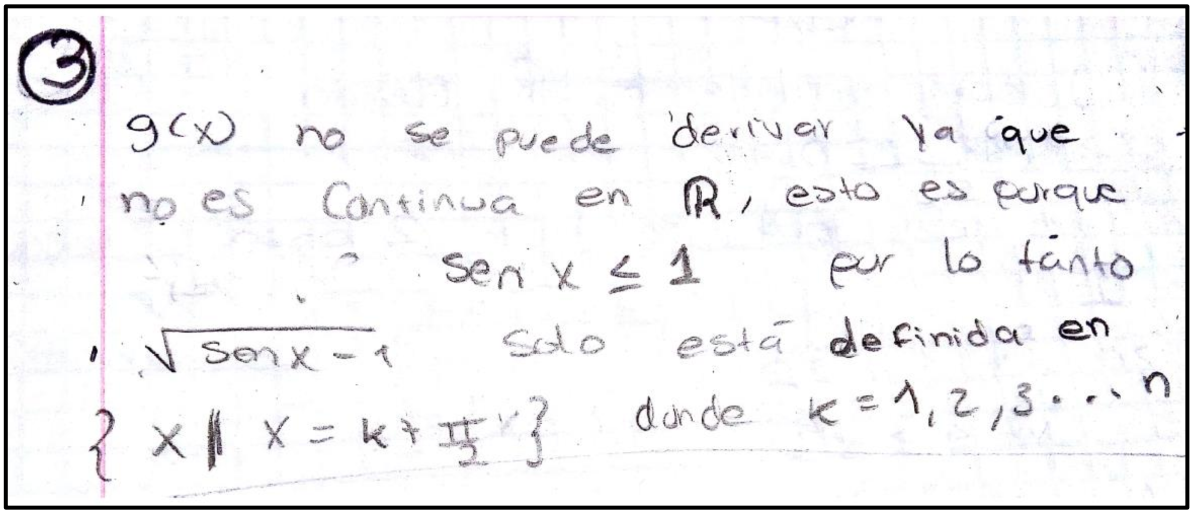


Figura 21: Profesora 10 Juana. Respuesta a la pregunta 3.

Juana argumenta que la función $g(x)$ no es derivable porque desde un principio no es continua, sin embargo, no se percata que esta función está definida sólo en un conjunto discreto. El dominio de la función g es el $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \text{donde}\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. En un fragmento de la entrevista, la profesora Juana señala lo siguiente:

Entrevistador: ¿Cómo te diste cuenta que la función no podía ser derivada?

Juana: En realidad, todo fue "a ojo". Algo me pareció extraño en la función, como que algo no cuadraba, y pensé que [la pregunta] podría tener "un truco". Empecé a mirar más de cerca a la función y de repente todo fue muy lógico.

Entrevistador: ¿Sabías que fuiste la única profesora que contestó correctamente?

Juana: ¿En serio? Sí, me doy cuenta que es un error muy fácil de cometer; a simple vista parece que la función es perfectamente derivable, pero no lo es […] Nos equivocamos porque nos enfocamos en el método. Pensamos inmediatamente "¿Cómo le voy a hacer?" En vez de ponernos a pensar si tiene sentido lo que hacemos o no.
Creo que esto habla mucho de nuestra función docente, de las cosas que priorizamos los

maestros. A pesar de que sabemos que no debemos darle prioridad a la memorización y a las operaciones, seguimos pensando que esto

* * *

Pregunta 4. En esta pregunta, se le pide al profesor determinar el conjunto de puntos para los cuales la función $f(x) = \log\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)$ es derivable. Para ello, se les proporciona la función que se obtiene al aplicar las reglas formales de derivación, $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$. La función f', vista como fórmula, está definida en más puntos que en los que está definida la función f. El propósito de esta pregunta es averiguar si los profesores tienen presente que el conjunto de puntos para los cuales una función es derivable se determina *a priori* al proceso de derivación.

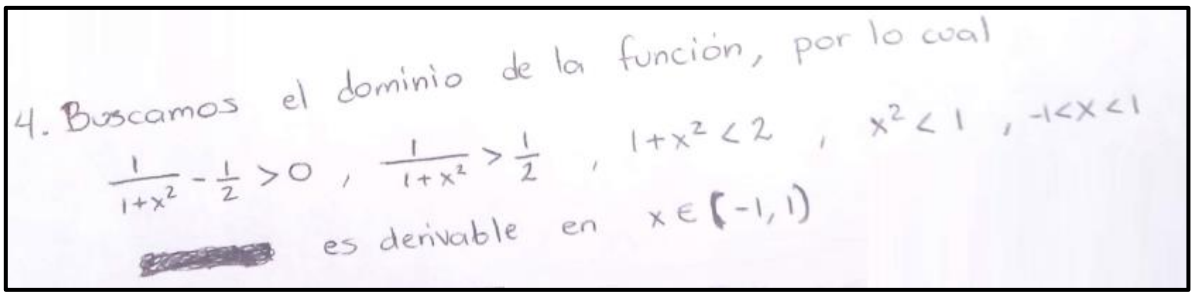


Figura 22: Profesora 02 Brenda. Respuesta a la pregunta 4.

La profesora Brenda fue uno de los cuatro profesores que pudieron determinar correctamente el conjunto de puntos en los que la función es derivable. Los otros profesores que llegaron al mismo resultado fueron Félix, Germán y Juana. En su entrevista, Brenda explica más detalladamente cuáles son las ideas que dan soporte a su razonamiento.

Entrevistador: ¿Podrías explicarme tu procedimiento en la pregunta 4?
Brenda: Bueno, el argumento dentro de la función logaritmo debe ser positivo, y de ahí partí yo para encontrar el dominio de la función […] Ahora, $f(x)$ está definida en $(-1,1)$ y es continua en todo su dominio […] Por lo tanto, puede ser derivada solamente en $(-1,1)$.
Entrevistador: ¿Cómo sabes que $f(x)$ es continua en $(-1,1)$?
Brenda: Porque la función logaritmo es continua y derivable en cada punto de su dominio.

Los profesores Erick y Héctor determinaron erróneamente su respuesta al considerar que el conjunto de puntos en los que la función es derivable es el mismo conjunto que el dominio de la función derivada. Es decir, la respuesta que estos profesores dieron fue la siguiente.

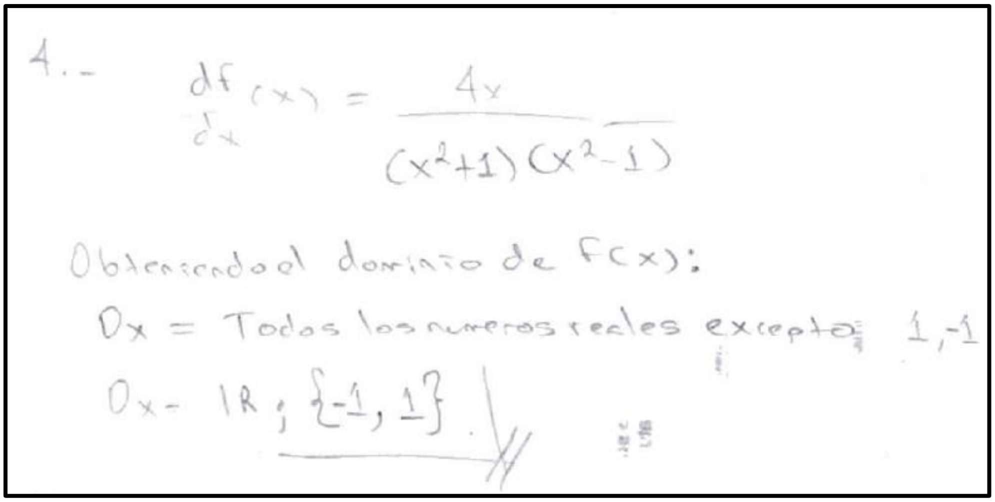


Figura 23: Profesor 05 Erick. Respuesta a la pregunta 4.

* * *

Pregunta 5. En esta pregunta, se les pide a los profesores que encuentren la derivada de la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$ y que, además, determinen el conjunto de puntos para los cuales existe la derivada de esta misma función.

La mayor parte de los profesores tuvieron el acierto de encontrar la expresión correcta de la derivada $f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$. Sin embargo, sólo las profesoras Brenda y Juana lograron determinar correctamente el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x > 0\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$ para el cual la función f es derivable.

En esta pregunta, hemos obtenido varias respuestas cortas. Muchos profesores se limitaron a escribir la fórmula de la función derivada, sin especificar su dominio. Otros más mencionaron solamente el dominio de la función. Algunas de las respuestas erróneas o incompletas que hemos obtenido en la aplicación del cuestionario son las siguientes.

$$f'(x) = \frac{\log e \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{Cuando } x \neq 0$$

Figura 24: Profesora 01 Ana. Respuesta a la pregunta 5.

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \log e$$

Figura 25: Profesora 04 Delia. Respuesta a la pregunta 5.

$$f'(x) = \frac{\cos x}{(\ln 10)\operatorname{sen} x}$$

Figura 26: Profesor 05 Erick. Respuesta a la pregunta 5.

Dominio para $x \neq \pi x$ donde x es número entero.

Figura 27: Profesor 08 Héctor. Respuesta a la pregunta 5.

Las respuestas de las profesoras Ana y Delia (figuras 24 y 25) son muy similares, pero ello se debe a que ninguna de ellas advierte que $\log e = 1$, pues denotamos con $\log x$ al logaritmo natural (base e) de x. Ana parece reconocer que el término $\operatorname{sen} x$ debe ser distinto de cero en la razón $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, pero sólo indica que la variable $x \neq 0$. El maestro Erick (figura 26) confunde las funciones logaritmo natural y logaritmo base diez. Por otro lado, el profesor Héctor (figura 27) es capaz de distinguir los puntos en los que la función seno es igual a cero, pero olvida que el argumento de la función logaritmo debe ser un número real no negativo. Algo similar ocurre con el profesor Germán (figura 28).

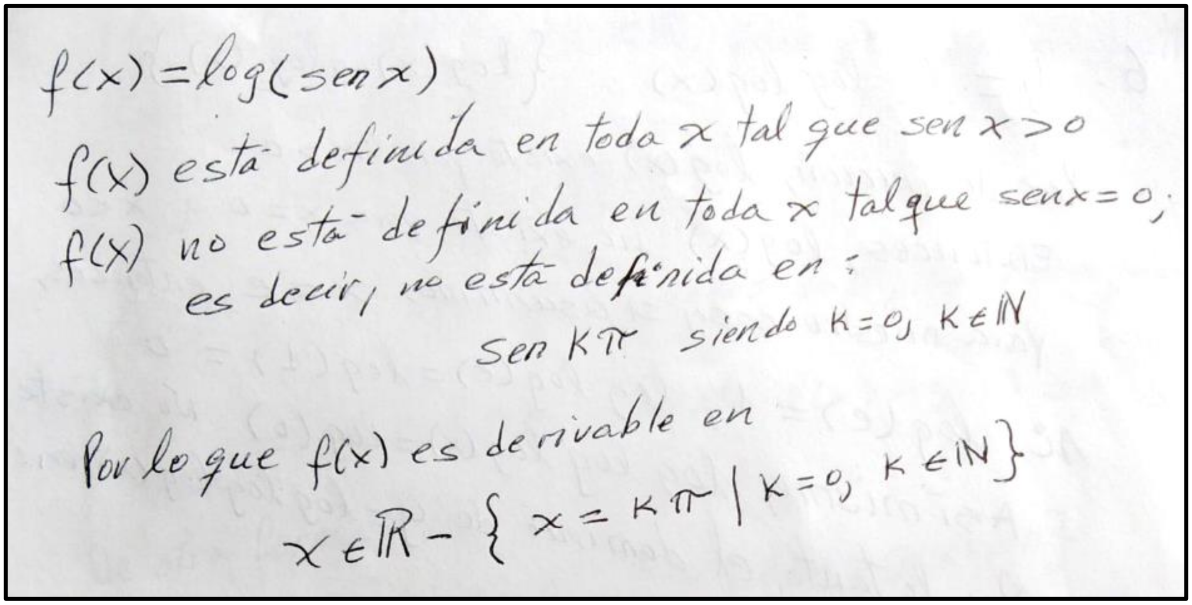


Figura 28: Profesor 07 Germán. Respuesta a la pregunta 5.

El profesor Germán reconoce que el dominio de la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$ está sujeto a la condición $\operatorname{sen} x > 0$. Sin embargo, tuvimos que solicitarle una aclaración respecto a su argumento "$f(x)$ no está definida en toda x tal que $\operatorname{sen} x = 0$". En un fragmento de su entrevista, el profesor Germán respondió lo siguiente.

Entrevistador: ¿Podría explicarme qué quiso decir con esto en la pregunta 5?

Germán: Sí. Hemos dicho que $f(x)$ está definida en todo x tal que $\operatorname{sen} x > 0$. Lo que yo quise decir es que esta función $\left[\text{se refiere a } f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]$ no está definida cuando $\operatorname{sen} \mathrm{x} = 0$, pero tampoco está definida cuando el $\operatorname{sen} \mathrm{x}$ es negativo, por lo que dije anteriormente. Entonces, lo que yo hice fue tomar [como dominio de la función] a todo $\mathbb{R}$ y quitarle los valores de x que hagan que $\operatorname{sen} x = 0$, y que $\operatorname{sen} x < 0$.

El profesor Germán, aún con su lenguaje matemático un tanto confuso y una notación incorrecta, mostró durante la entrevista conocimientos y sensibilidad para abordar el problema planteado. El profesor Germán finalmente expresa que la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$ es derivable en aquellos puntos x que cumplen la condición $\operatorname{sen} x > 0$ (agrega innecesariamente la condición que también deben excluirse los puntos x donde sen $x = 0$), aunque fue incapaz de representarla simbólicamente como la unión de todos los intervalos abiertos de la forma $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ para todo entero n (positivo, negativo o cero).

El profesor Félix, como lo hizo el profesor Germán, determina los puntos donde la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$ es derivable y es capaz de representar el conjunto de puntos de derivabilidad cuando ellos son positivos.

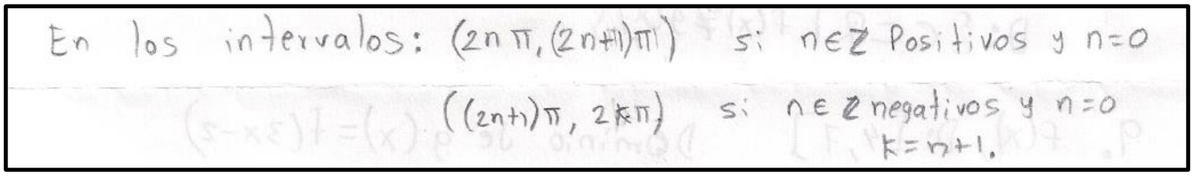

En los intervalos: $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ si: $n \in \mathbb{Z}$ Positivos y $n=0$
$((2n+1)\pi, 2k\pi)$ si: $n \in \mathbb{Z}$ negativos y $n=0$
$k=n+1$.

Figura 29: Profesor 06 Félix. Respuesta a la pregunta 5.

Aunque el profesor Félix sabe cómo determinar los puntos de derivabilidad negativos no logra escribir los intervalos de manera correcta.

Entrevistador: ¿Cuál fue su punto de partida para la respuesta de la pregunta 5?

Félix: Sabemos que la función cotangente existe en todos los reales, excepto en los múltiplos enteros de π. Sin embargo, para la función $\mathrm{f(x)} = \log(\operatorname{sen} \mathrm{x})$ la derivada $\mathrm{f'(x)}$ sólo existe en el dominio de f.

Entrevistador: ¿Cómo determina el dominio de f?

Félix: Como el logaritmo sólo existe para valores positivos [de x], entonces $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$ sólo existe en los puntos donde $\operatorname{sen} x > 0$. Es decir, $f(x)$ es derivable en el intervalo $(0, \pi)$ y también en $(2\pi, 3\pi)$ y en $(4\pi, 5\pi)$, etcétera. Pero también es derivable en $(-\pi, -2\pi), (-3\pi, -4\pi)$, $(-5\pi, -6\pi)$, etcétera.

Entrevistador: Entonces, ¿cómo determina usted todo el conjunto de puntos donde es derivable la función?

Félix: Si n es [un entero] positivo, o es cero, la función es derivable en $(2n\pi, (2n+1)\pi)$; pero si n es negativo, la función es derivable en $\big((2n+1)\pi, 2n\pi\big)$.

En esta respuesta, Félix falla en la representación simbólica. Es notable que los profesores Félix y Germán priorizan la determinación del dominio sobre el cálculo de la derivada para obtener el conjunto de puntos de derivabilidad de la función.

* * *

Pregunta 6. En esta pregunta, se le pide a los profesores que determinen el dominio de la función $y = \log\log\log x$, el cual consta de los puntos del intervalo $D = (e, \infty)$. Tres profesores (Ana, Erick e Ilse) obtuvieron como respuesta que el dominio de y es $D^* = (0, \infty)$. El profesor César no contestó esta pregunta. Mientras tanto, la profesora Delia contestó lo siguiente:

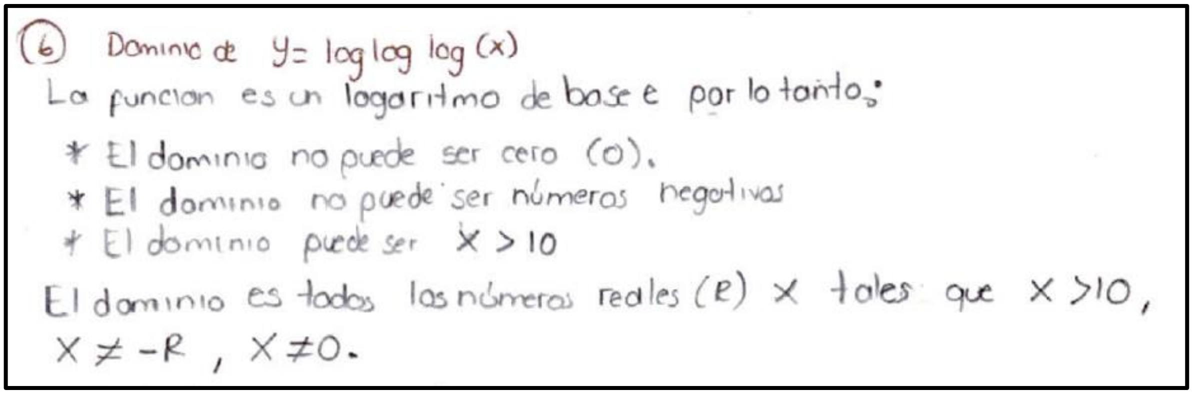
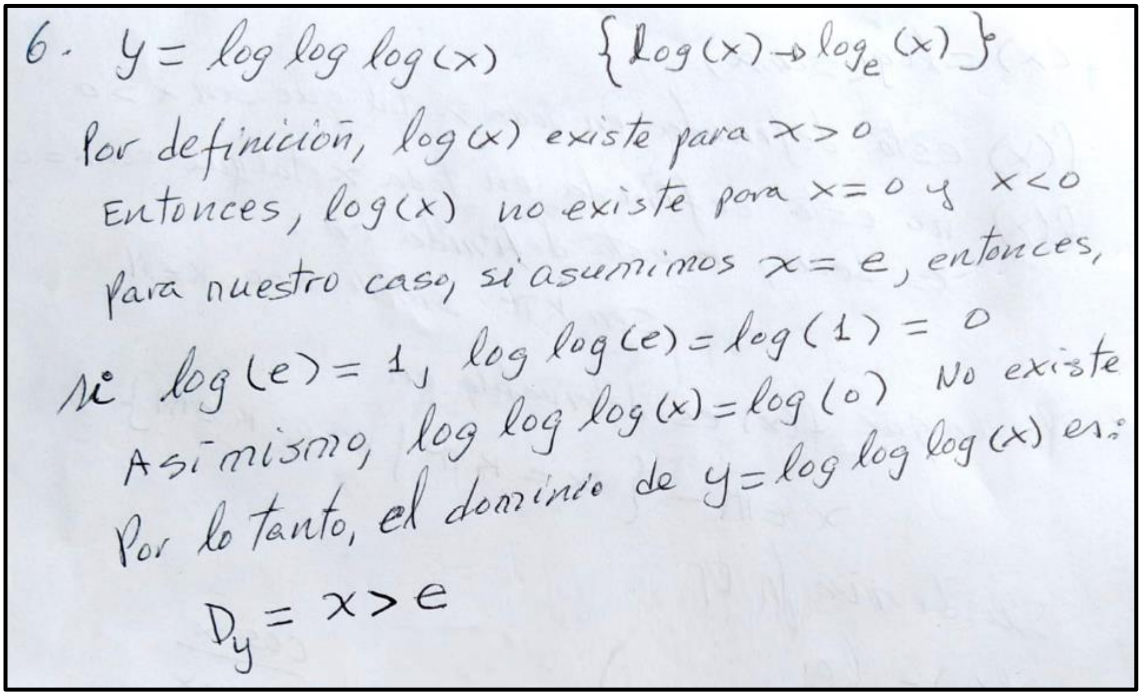

(6) Dominio de $y = \log\log\log(x)$
La funcion es un logaritmo de base e por lo tanto:
* El dominio no puede ser cero (0).
* El dominio no puede ser números negativos
* El dominio puede ser $x > 10$
El dominio es todos los números reales (R) x tales que $x > 10$, $x \neq -R$, $x \neq 0$.

Figura 30: Profesora 04 Delia. Respuesta a la pregunta 6.

Tanto en el problema 2 como en el 6, la profesora Delia muestra una insuficiencia de conocimientos y un lenguaje desafortunado sobre el concepto de dominio de una función. Esto le impide siquiera acercarse a la solución de esos problemas. Si bien no buscamos determinar una lista simplista de competencias docentes para la enseñanza del cálculo, pensamos que el profesor debe poseer un nivel adecuado del lenguaje matemático que le permita expresarse y comunicarse de manera correcta y con claridad.

La mitad de los profesores participantes (Brenda, Félix, Germán, Héctor y Juana) pudieron contestar correctamente esta pregunta. De estos profesores, mostramos la respuesta del profesor Germán (figura 31).


6. $y = \log\log\log(x)$ $\{\log(x) \to \log_e(x)\}$

Por definición, $\log(x)$ existe para $x > 0$

Entonces, $\log(x)$ no existe para $x = 0$ y $x < 0$

Para nuestro caso, si asumimos $x = e$, entonces,

si $\log(e) = 1$, $\log\log(e) = \log(1) = 0$

Asimismo, $\log\log\log(x) = \log(0)$ No existe

Por lo tanto, el dominio de $y = \log\log\log(x)$ es:

$D_y = x > e$

Figura 31: Profesor 07 Germán. Respuesta a la pregunta 6.

* * *

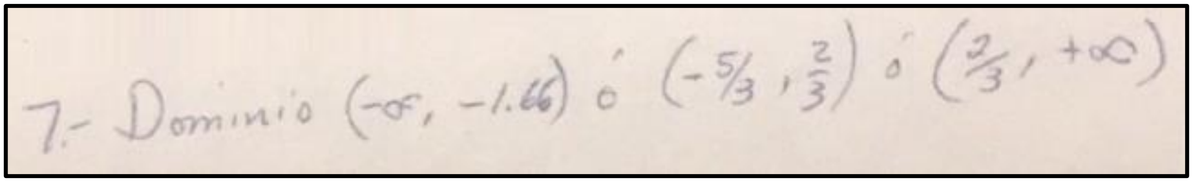
No obstante que el profesor Germán obtiene la solución del problema, el dominio pedido lo obtiene con argumentos insuficientes, su análisis es incompleto y llega a su conclusión apoyado en valores particulares. Los profesores Germán y Félix muestran que tienen conocimientos y un potencial para fortalecer sus conocimientos que les permita resolver adecuada y correctamente los problemas del cuestionario.

Pregunta 7. En la séptima pregunta del cuestionario, se le pide al profesor que halle el dominio de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}$$

En esta ocasión, obtuvimos respuestas con mayor diversidad que aquellas de la pregunta 6.

Las respuestas de los profesores Ana, Delia, Héctor e Ilse no guardan ninguna similitud con el resultado correcto. Las respuestas de estos profesores no corresponden con ninguna similitud al resultado correcto. Un ejemplo es el siguiente.

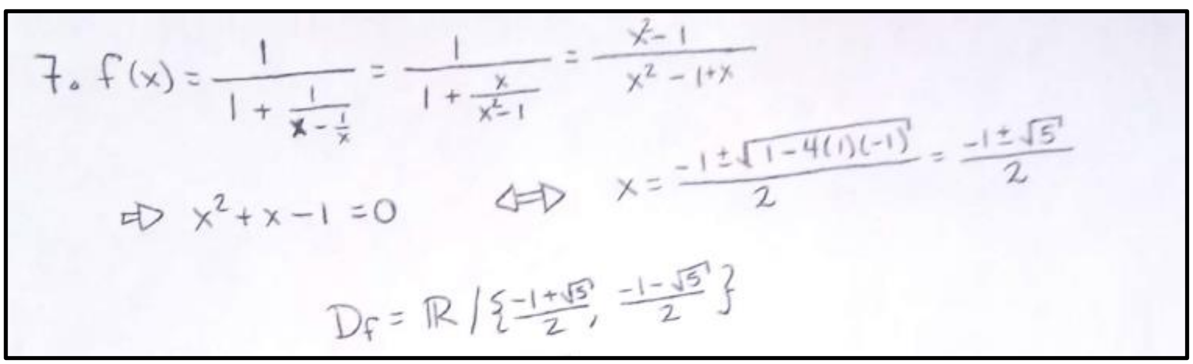


7.- Dominio $(-\infty, -1.66)$ ó $(-5/3, \frac{2}{3})$ ó $(\frac{2}{3}, +\infty)$

Figura 32: Profesor 08 Héctor. Respuesta a la pregunta 7.

Los profesores César, Erick y Germán se enfocan sólo al término "$x - \frac{1}{x}$" en la fórmula $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}}$ y concluyen que el dominio de la función f se compone de todos los números reales, excepto aquellos que hacen que $x - \frac{1}{x} = 0$. Es decir, el dominio de f, según estos profesores, es el conjunto $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

Los profesores Brenda y Félix obtienen su respuesta basados en la simplificación $\frac{1}{1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}} = \frac{x^2-1}{x^2-1+x}$. De aquí concluyen que el dominio de la función f se compone de todos los números reales, excepto aquellos para los cuales $x^2 - 1 + x = 0$. Es decir, el dominio de $f(x)$ es el conjunto $\mathbb{R} - \left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.



7. $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\frac{x}{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x^2-1+x}$

$\Rightarrow x^2+x-1=0 \iff x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$D_f = \mathbb{R} / \left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

Figura 33: Profesora 02 Brenda. Respuesta a la pregunta 7.

De los diez profesores participantes, sólo la profesora Juana obtuvo el resultado correcto. Ella logra determinar que el dominio de la función es $\mathbb{R} - \left\{-1, 0, 1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(7) f no está definida cuando

$x=0$, $x-\frac{1}{x}=0$ y $1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=0$

Por un lado:

$x-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Por otro:

$1+\frac{1}{x-1/x}=0 \Rightarrow \frac{1}{x-\frac{1}{x}}=-1 \Rightarrow \frac{1}{x}-x=1$

$\Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

el dominio de f es

$\{x \mid x\neq 0, x\neq 1, x\neq -1, x\neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x\neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Figura 34: Profesora 10 Juana. Respuesta a la pregunta 7.

* * *

Pregunta 8. En este problema, el profesor debe determinar el dominio de la función $h(x)=\frac{f(x)g(x)}{f(x)-g(x)}$, conociendo que $f(x)$ es una función con dominio $A\subset\mathbb{R}$ y $g(x)$ es una función con dominio $B\subset\mathbb{R}$.

La dificultad de esta pregunta radica en la comprensión de cómo es el dominio de una función que es el producto o cociente de dos funciones y en el uso de una notación y lenguaje adecuados para escribir el resultado.

Descubrimos que la mayoría de los profesores no pudieron contestar correctamente esta pregunta. Los profesores Delia y Héctor decidieron no responderla. A continuación mostramos la respuesta de algunos profesores.

(8) El dominio de la función son todos los números reales de A y B, es decir la unión de los números reales de A y B

Figura 35: Profesora 09 Ilse. Respuesta a la pregunta 8.

La notación utilizada por los maestros varía incluso entre aquellos que obtuvieron una respuesta que podríamos considerar correcta.

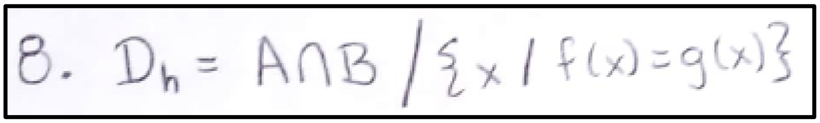


Figura 36: Profesora 02 Brenda. Respuesta a la pregunta 8.

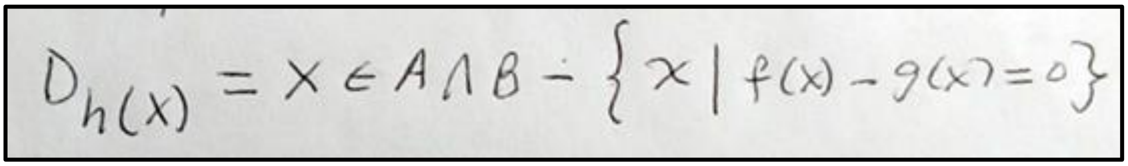


Figura 37: Profesor 07 Germán. Respuesta a la pregunta 8.

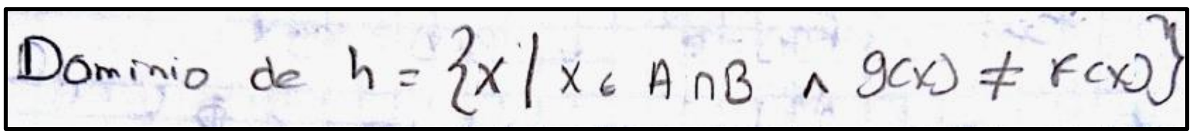


Figura 38: Profesora 10 Juana. Respuesta a la pregunta 8.

Una respuesta que consideramos incorrecta es la de Félix (figura 39)

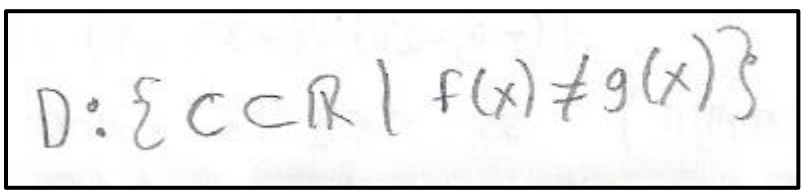


Figura 39: Profesor 06 Félix. Respuesta a la pregunta 8.

* * *

Pregunta 9. En la novena pregunta, el profesor debe determinar en dónde está definida la función $g(x) = f(3x - 2)$ sabiendo que $f(x)$ es una función con dominio el intervalo [4,7].

El profesor Erick (ilustración 23) yerra al pensar que para obtener el dominio basta evaluar la función $f(x) = 3x - 2$ en los puntos $x \in \{4, 5, 6, 7\}$, los cuales obtiene del dominio [4,7]. Lo que obtiene, al final de este proceso, es el conjunto de números $\{10, 13, 16, 19\}$ que él afirma se trata del dominio de $g(x)$.

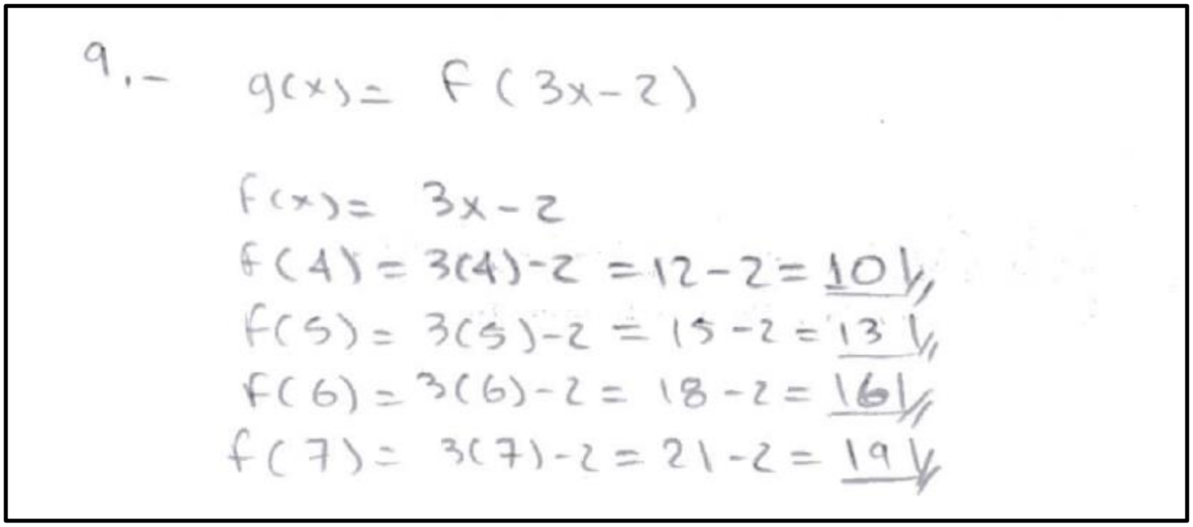


Figura 40: Profesor 05 Erick. Respuesta a la pregunta 9.

Los profesores César e Ilse afirmaron que el dominio de $g(x) = f(3x - 2)$ es el mismo intervalo $[4,7]$, el cual es el dominio de $f(x)$. Según César, esto se justifica debido a que "la función $f(x)$ no puede ser evaluada en otros números que no sean los del intervalo $[4,7]$". Por otro lado, Ilse afirma que "el dominio de $f(x)$ son todos los números entre 4 y 7, pero $3x - 2$ puede ser evaluado en $(-\infty, \infty)$, por lo tanto, el dominio de $g(x)$ es la intersección de estos intervalos".

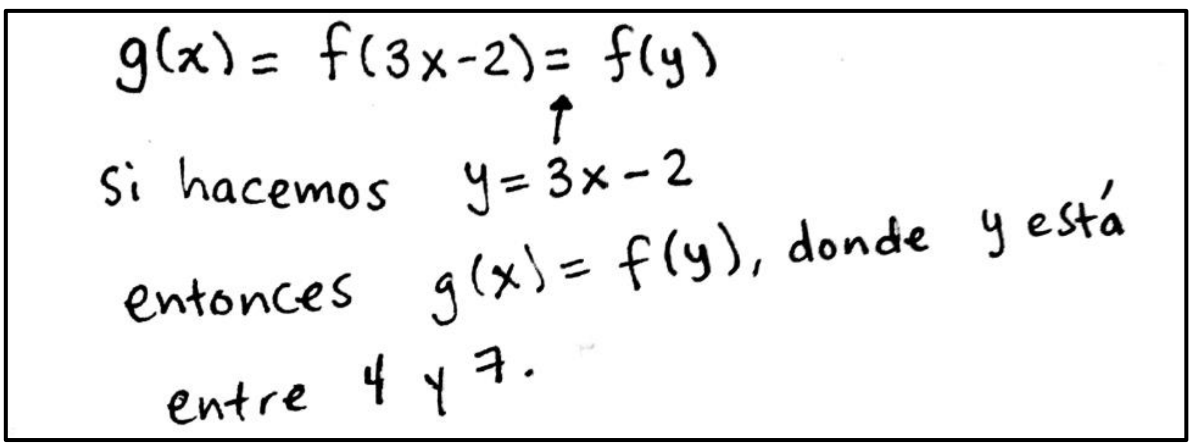
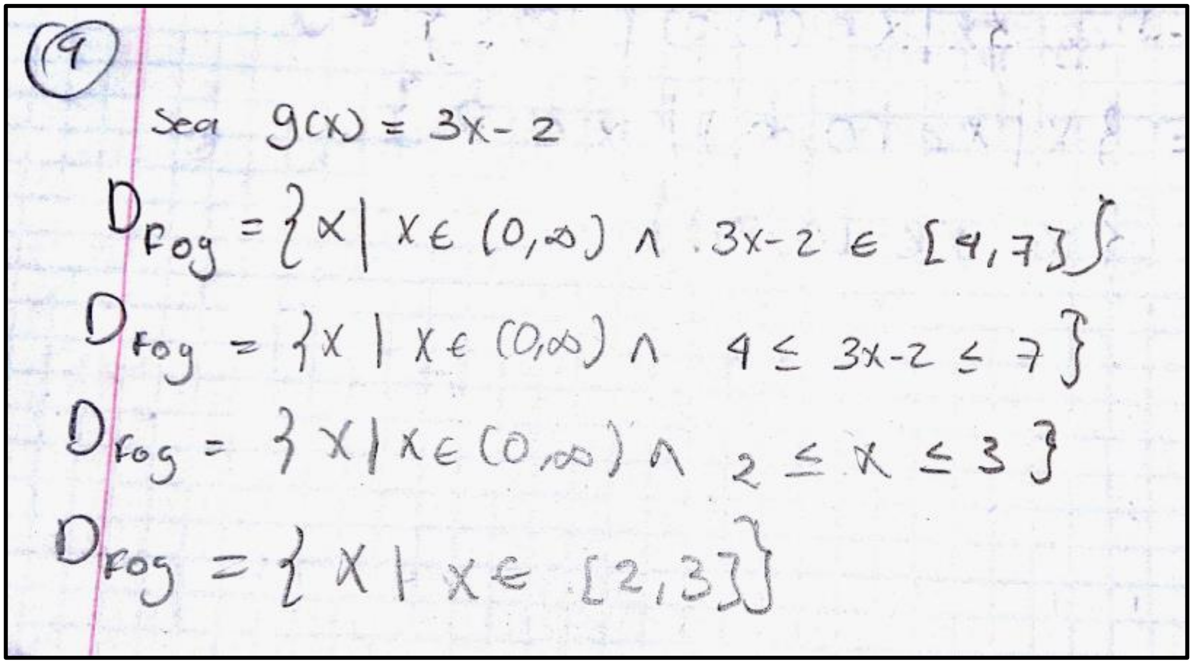


Figura 41: Profesora 09 Ilse. Respuesta a la pregunta 9.

Por otro lado, la profesora Juana (figura 42) pudo determinar efectivamente la condición $3x - 2 \in [4,7]$, la cual la conduce a obtener el resultado correcto.



(9)

Sea $g(x) = 3x - 2$

$D_{fog} = \{x \mid x \in (0,\infty) \wedge 3x-2 \in [4,7]\}$

$D_{fog} = \{x \mid x \in (0,\infty) \wedge 4 \leq 3x-2 \leq 7\}$

$D_{fog} = \{x \mid x \in (0,\infty) \wedge 2 \leq x \leq 3\}$

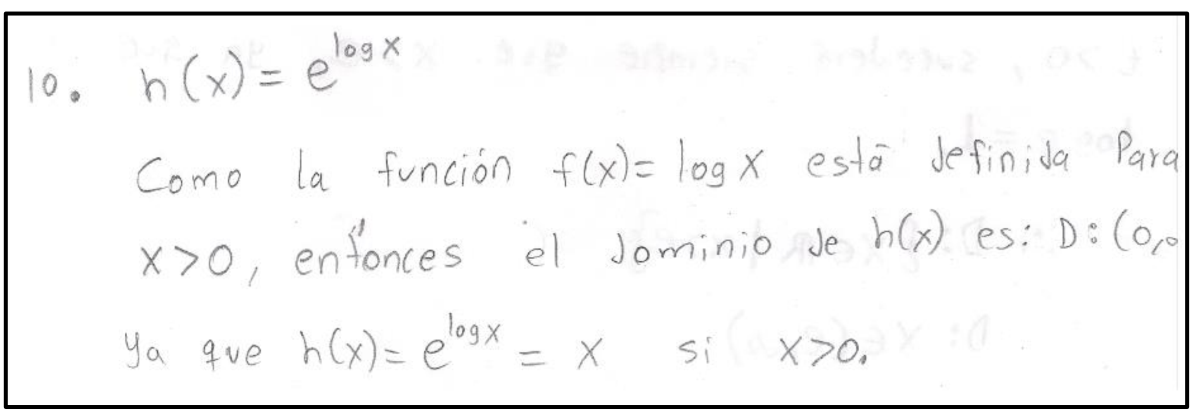
$D_{fog} = \{x \mid x \in [2,3]\}$

Figura 42: Profesora 10 Juana. Respuesta a la pregunta 9.

* * *

Pregunta 10. En la última pregunta de este cuestionario, el profesor debe determinar el dominio de la función $h(x) = e^{\log x}$.

Tres de los diez profesores participantes no contestaron esta pregunta o dieron respuestas carentes de sentido. Otros cinco profesores lograron encontrar correctamente el dominio de la función $h(x)$ sin aparente problema. Por ejemplo, el profesor Félix escribió esta respuesta (figura 43).



10. $h(x) = e^{\log x}$

Como la función $f(x) = \log x$ está definida para $x > 0$, entonces el dominio de $h(x)$ es: D: (0,

ya que $h(x) = e^{\log x} = x$ si $x > 0$.

Figura 43: Profesor 06 Félix. Respuesta a la pregunta 10.

En esta pregunta, la profesora Brenda afirmó que el dominio de la función $h(x)$ consiste en todos los números reales. Mientras que la profesora Ilse llegó a la conclusión que el dominio de esta función es el intervalo $(1, \infty)$.

5.1.2. Sobre lo que significa para el profesor el dominio de una función

Para complementar el cuestionario anterior, durante las entrevistas, a siete de los profesores se les planteó explícitamente la pregunta "¿Qué significa para usted el concepto de dominio de una función?" A continuación, mostramos sus respuestas.

¿Qué significa para usted el concepto de dominio de una función?
Ana: El dominio es el intervalo en el que está definido una función. Nos sirve para conocer cómo se comporta la función en esos intervalos; si es creciente o decreciente, o si tiene algunos "agujeros" en su gráfica.
Brenda: Significan los valores en los que la función se comporta de una manera conocida, lo que me permite menos dificultad para trabajar. Este concepto es importante pues nos dicta "las reglas del juego", ya que nos dice en dónde es válida [sic] la función con la que trabajamos.
Félix: Concepto de dominio de una función. Es el conjunto de valores de la variable x (variable independiente), para los cuales la función está definida. El dominio de una función es fundamental para comprender cómo se comporta la función en el conjunto de los [números] reales. Sin establecer correctamente el dominio, no se puede caracterizar y clasificar a la función. Ni siquiera se podría graficar de forma intuitiva.
Héctor: Yo se los explico a los chavos de la siguiente manera: el dominio son todos los puntos en los que la función es "cierta". El dominio es el eje equis y el contradominio es el eje ye, y se acabó.
Ilse: Yo siempre he entendido al dominio como la parte que "está debajo" de la gráfica [de una función]. Por ejemplo, si tú "aplastas" la gráfica de la función en el eje equis, lo que te queda es el dominio, ¿no?
Juana: Podemos definir de varias formas el dominio de una función. A mí me gusta pensar que es el conjunto de puntos "x" en los que existe la función "f(x)" y ya. Hay

quienes definen a las funciones como cosas muy sofisticadas, y tienen razón, pero es más difícil que te entiendan los alumnos.

Creo que es muy importante ponerles atención a los dominios porque explican muchas cosas que suceden en el cálculo. Son muy importantes para graficar una función, por ejemplo. Además, uno puede realizar operaciones que no son ciertas o que no tienen sentido.

En principio todos estos profesores cuentan con perfiles adecuados para impartir las asignaturas de Cálculo, sin embargo, en el tema de dominio de funciones, una mayoría de ellos mostraron conocimientos insuficientes y en algunos casos equívocos, para enseñar con éxito este tema, o al menos para hacer un análisis, para sí mismos, de los objetos matemáticos que enseña que son las funciones y los dominios de estas.

Podemos decir que cinco de los 10 profesores tuvieron un desempeño aceptable. El desempeño de los profesores restantes en general fue insuficiente. Cuatro de los 10 profesores (Ana, Brenda, Félix y Juana), ante la pregunta directa sobre qué entendía por dominio de una función, no sólo expresaron una idea aceptable sobre lo que es el dominio de una función, sino que destacaron la importancia que tiene en el estudio de las funciones. Sin embargo, no todos respondieron de manera acertada cuando se enfrentaron a situaciones en donde tenían que poner en juego un análisis de los dominios de funciones.

CAPÍTULO 6:
CONCLUSIONES Y RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las respuestas a las preguntas del cuestionario y de las entrevistas no estructuradas no sólo nos proporcionaron información sobre la concepción que tienen los profesores acerca del dominio de una función, si están o no conscientes del papel que puede jugar el dominio de una función en Cálculo y de sus dificultades técnicas que tienen para determinarlos, sino que sus intentos por responder las preguntas del cuestionario y las entrevistas mismas, permitieron que los profesores ampliasen y fortaleciesen sus conocimientos sobre la matemática involucrada en el Cálculo. Aun cuando éste no era su propósito, el instrumento de investigación tuvo este resultado positivo.

Respecto al papel que juega el dominio de una función en el cálculo diferencial, algo que se debe destacar y que podría parecer trivial, pero que no lo es desde el punto de vista de la práctica operacional, es que la derivada sólo tiene sentido en aquellos puntos del dominio de una función que pertenecen a un intervalo contenido en su dominio. En otras palabras, la derivada no se define para puntos aislados, por lo que, por ejemplo, no tiene sentido derivar una función que sólo está definida en los números naturales. Sin embargo, aun cuando esta condición para la derivabilidad pudiera ser evidente para los profesores en un contexto teórico del Cálculo, para la mayoría de los profesores participantes, durante su práctica en el cálculo de derivadas, fue ignorada, de hecho, se evidenció que los profesores en general no tienen el hábito de verificar que los puntos para los cuales se calcula la derivada de una función no son de naturaleza discreta (es decir, puntos aislados), a menos que se les inste a hacerlo. Una situación muy específica de este tipo se les planteo a los profesores de manera explícita, pero no repararon que se trataba de un caso de una función definida sólo en los números naturales por lo que no reaccionaron ante este proceso inválido de derivación. Casos extremos fueron en los que se les pidió que calcularan la derivada de funciones con dominio vacío, aun cuando se le preguntaba, a manera de advertencia, si podían derivar la función, la cual estaba definida en ningún punto.

Los profesores tienden a aplicar las técnicas o reglas de derivación mecánicamente. Algunos no se percatan de que estas reglas en ocasiones no son aplicables. En este mismo sentido, en general no están conscientes de que la derivada es un concepto puntual, es decir la derivada está definida punto a punto, por lo que no se cuestionan sobre "dónde es calculable la derivada de una función".

Los profesores conciben el proceso de derivación como uno que consiste en obtener una fórmula $f'(x)$ a partir de reglas o algoritmos aplicados a otra fórmula, que es la función $f(x)$.

$$f(x) \xrightarrow{\text{Reglas o algoritmos}} f'(x)$$

En general, los puntos de derivabilidad de una función dada los profesores los determinan basados en la fórmula que obtienen mediante la aplicación mecánica de las reglas de derivación. Solamente después de una reflexión durante la entrevista se convencieron de que el análisis para determinar los puntos de derivabilidad debe hacerse sobre la función misma, para lo cual es importante analizar su dominio y no hacerlo sobre una fórmula para la derivada que se obtuvo, si no indebidamente, sin analizar para qué puntos debe aplicarse. Los puntos de derivabilidad de una función $f(x)$ no necesariamente son los mismos donde la fórmula de la derivada $f'(x)$ es posible evaluarla. Un ejemplo trivial es la función $f(x) = \log x$. Los puntos donde es derivable la función son los reales positivos y la fórmula de la derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$ debe entonces aplicarse sólo para estos puntos, aunque esta fórmula también pueda evaluarse en los reales negativos. Esta es una reflexión que en general los profesores no la hacen por sí mismos, y sólo algunos logran hacerla o cuando se les invita a hacerla. Este es un caso donde el análisis del dominio de una función juega un papel fundamental y hace que este concepto sea de especial relevancia en el Cálculo.

Respecto a las dificultades de carácter técnico, hubo de diversos tipos. Por ejemplo, la mayoría de los profesores no pudieron hallar los valores de x que satisfacen algunas condiciones expresadas en términos de desigualdades. Este fue el caso de la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)}$. El problema consiste en determinar los valores de para las cuales se satisfacen las dos desigualdades $x^2 - 1 \geq 0$ y $4 - x^2 \geq 0$ o las dos desigualdades $x^2 - 1 \leq 0$ y $4 - x^2 \leq 0$. Algunas de sus dificultades fueron de naturaleza lógica. No supieron manejar las condiciones que corresponden a esta disyunción de las dos conjunciones.

En su mayoría, los profesores mostraron que tienen dificultades en determinar el dominio de una función que es una combinación aritmética simple de dos (o más) funciones, por ejemplo, la suma o cociente de dos funciones, cada una con su propio dominio y ambos dominios no necesariamente iguales. Esto se observó en la pregunta 8 que consiste en determinar el dominio de una función de la forma $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x)-g(x)}$.

Una función que causó mayor dificultad fue $h(x) = \log\log\log x$. El análisis del dominio de esta función tiene un mayor grado de dificultad y sólo uno de ellos fue capaz de obtenerlo, aunque con argumentos no del todo aceptables. Su resultado lo obtuvo a partir de una combinación de argumentos válidos y de ideas intuitivas, pero finalmente logra obtener el dominio (e, ∞). La determinación de dominios de funciones adecuadamente construidas ofrece excelentes oportunidades para adquirir, desarrollar y fortalecer los conocimientos matemáticos que están involucrados en Cálculo.

Recordemos que la muestra de profesores de este estudio fue extraída de trabajadores en centros de bachillerato tecnológicos ubicados en áreas rurales del estado de Hidalgo. Todos estos profesores cuentan con perfiles profesionales que les permite impartir las asignaturas de cálculo, pero sólo algunos de ellos lograron demostrar el conocimiento matemático adecuado para llegar a los propósitos descritos en los programas educativos.

El cuestionario descrito en la sección 4.2 y las entrevistas no estructuradas cumplieron con el objetivo de proporcionar datos acerca del nivel de comprensión que tienen los profesores sobre el concepto de dominio de una función y este instrumento también sirvió para que los profesores de la muestra pudieran reflexionar acerca de sus ideas y creencias sobre este componente funcional. Las ideas de Carpenter y Lehrer (1999) sobre una enseñanza y aprendizaje con comprensión que son: construcción de relaciones, extensión y aplicación de conocimiento matemático, reflexión sobre las experiencias, articulación de lo que el individuo conoce y apropiación del conocimiento matemático y que se utilizaron para diseñar el cuestionario y las entrevistas en esta investigación favorecieron el entendimiento de las matemáticas de los profesores participantes. En este estudio, nos enfocamos sobre características específicas del conocimiento disciplinar que los profesores requieren para enseñar un tema particular de matemáticas; en este caso, sobre el dominio de las funciones elementales.

6.1. Respuestas a las Preguntas de Investigación

Considerando el análisis de datos obtenidos en este estudio (capítulo 5) y algunas de las conclusiones antes expuestas, podemos emitir respuestas a las preguntas de investigación que planteamos en el capítulo 1.

- **¿Cuál es el desempeño que muestran los profesores acerca del concepto de dominio de una función y el quehacer matemático en Cálculo?**

Para responder esta pregunta general nos auxiliaremos de la formulación y respuestas de otras peguntas particulares. Una primera pregunta nos hacemos y que también planteamos directamente a los profesores fue sobre el significado que le dan al concepto de dominio de una función.

¿Qué entiende el profesor de bachillerato por dominio de función?

Los profesores de la muestra describen al dominio como un conjunto de valores, aunque algunos de ellos utilizan el término “intervalo” como sinónimo de dominio. Algunos de los maestros participantes consideran a las funciones como relaciones entre dos variables; una independiente y otra dependiente, lo que hace que definan al dominio de una función como todos los valores que puede tomar la variable independiente. El dominio de una función considerado como un conjunto arbitrario no es un concepto que consideren los profesores participantes, la idea general de dominio es la de un intervalo.

Para algunos profesores de la muestra, el dominio de una función puede ser definido sin la necesidad de una fórmula, por ejemplo, para quien considera que se obtiene “aplastando la gráfica” sobre el eje x.

¿Cuál es el desempeño del profesor en el quehacer matemático que se deriva del estudio de los dominios?

Podemos afirmar que el desempeño de los profesores en cuanto al quehacer derivado del manejo de los dominios es apenas suficiente. Cuando se les pidió a los profesores determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)}$, en la pregunta 2, cinco de 10 lograron obtener una respuesta correcta. Un resultado similar ocurrió con la determinación del dominio de la función $y = \log\log\log(x)$. El dominio de la función $h(x) = e^{\log x}$ de la pregunta 10 sólo fue obtenido por tres profesores. Este problema plantea una problemática sutil, ya que el dominio debe analizarse a partir de la fórmula original y no de ella ya simplificada. Nueve de ellos tuvieron dificultades significativas para determinar el dominio de funciones más complejas, como las de las preguntas 7 y 9. La pregunta 8 que está enunciada en términos más abstractos y que podría esperare fuese respondida por la mayoría de los profesores, sólo 4 de ellos la respondieron correctamente. En general podemos concluir que fue bajo su desempeño.

Para responder las preguntas planteadas en el cuestionario no sólo se ponen en juego conocimientos y habilidades operacionales sino también el uso de un lenguaje apropiado, de la semiótica y la lógica. Determinar el dominio de una función significa establecer las condiciones bajo las cuales la función está definida. Es decir, reconocer todos los valores de x para los cuales *aplica* la fórmula dada por $f(x)$, pero esto debe comunicarse adecuadamente.

En general los profesores suelen trivializar las condiciones para las cuales aplican ciertos métodos y teoremas en los que el dominio juega un papel importante. Esto nos lleva a plantear y responder nuestra segunda pregunta de investigación.

- **¿Qué tan consciente es el profesor sobre el papel que juega el concepto del dominio de una función en el Cálculo?**

Una pregunta enfocada a responder la anterior es

¿En qué situaciones resulta importante para los profesores la reflexión y el análisis del concepto de dominio de función?

En términos generales, los profesores participantes no prestan especial atención a las condiciones del dominio de la función si no se les pide explícitamente que así lo hagan. Las respuestas a las preguntas 2, 6, 7, 8 y 10 del cuestionario demuestran este hecho. Algunos profesores buscan la manera de representar el dominio de la función en uno o varios intervalos de números reales. Esto no siempre es posible, así que la creencia de que el dominio de una función es necesariamente un intervalo interfiere en la búsqueda de un resultado correcto. Cabe señalar que, en esta investigación, obtuvimos muchas respuestas ambiguas o carentes de sentido.

¿Cómo determinan los profesores los puntos para los cuales existe la derivada?

Podemos decir que en general los profesores no se percatan que algunas funciones no pueden ser derivadas debido a la naturaleza de su dominio. Por ejemplo, la pregunta 3 fue respondida correctamente por ninguno de los profesores. Uno de los profesores podemos considerar que la respondió parcialmente pues, aunque pudo darse cuenta de que la función $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$, de la pregunta 3, es derivable en ningún punto de su dominio, sus argumentos dejaron mucho qué desear.

Rivera y Ponce (2013) señalan la importancia de determinar los puntos en los que existe la derivada *antes* de realizar la aplicación de las reglas formales de derivación. En este sentido, sólo la mitad de los profesores participantes mostraron algún tipo de análisis del dominio de la función original, sin que esto implique que el análisis realizado haya conducido a resultados correctos. Por ejemplo: en la pregunta 4, dos profesores determinaron correctamente el conjunto $(-1,1)$ en el cual la función $f(x) = \log\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)$ está definida y es derivable, pero no pudieron responder correctamente en qué puntos existe la derivada de $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$, de la pregunta 5, incluso cuando ambos pudieron concluir que $f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

Esencialmente, podemos afirmar que gran parte de los profesores participantes fueron capaces de determinar el dominio de varias funciones elementales básicas cuando se les solicita explícitamente. Sin embargo, también podemos observar que el análisis de los dominios de funciones no es un asunto al que los profesores presten mucha atención, incluso en las situaciones que dependen de este concepto.

En el problema 1 del cuestionario, se le plantea al profesor elegir dos opciones de prueba para determinar que una sucesión es decreciente. Ante la disyuntiva, la mitad de los profesores participantes eligieron la opción de prueba correcta, aunque ésta sea más sofisticada que la opción de prueba incorrecta. Sin embargo, los profesores que contestaron correctamente esta pregunta afirmaron que su elección se basó principalmente en la formalidad y complejidad aparente de la opción de prueba correcta. Pocos profesores mencionaron que la opción de prueba incorrecta hacía referencia a un resultado de cálculo que no podía ser aplicado debido a las condiciones del dominio de la sucesión.

En general, los profesores muestran un bajo nivel de comprensión del concepto de dominio y son pocos los profesores que se muestran conscientes sobre la importancia del dominio de una función en los procesos y métodos del cálculo.

6.2. Consideraciones y Comentarios Finales

Es cierto que el amplio conocimiento de la materia de los profesores si bien no es una condición suficiente para garantizar la enseñanza efectiva del cálculo, no podemos negar que es una condición necesaria. En este sentido, el conocimiento y manejo de los dominios de las funciones y comprender su relevancia en el Cálculo por parte de los profesores, sin duda alguna redundará en una mejor enseñanza del Cálculo. Pensamos que nuestro trabajo de investigación aporta algunos elementos que permitan diseñar programas de profesionalización que tiendan a fortalecer el conocimiento de los profesores en el área del Cálculo.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Matemática Educativa: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (1ra. Ed., pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica: Bogotá, Colombia.

Ball, D. (1988). *Research on Teaching Mathematics: Making Subject Matter Knowledge Part of the Equation*. National Center for Research on Teacher Education: East Lansing, MI.

Ball, D.; Bass, H. (2003). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. En E. Simmt y B. Davis (Eds.) *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton Alberta.

Brophy, J. E. (Ed.) (1991). *Advances in Research on Teaching: Teachers' Subject-matter Knowledge and Classroom Instruction* V.2. Greenwich CT. JAI Press.

Carpenter, T; Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics with Understanding. En Fenemma y Romberg (Eds.), *Mathematics Classroom that Promote Understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

CNSPD (2017). *Guía para el Examen de conocimientos disciplinares. Docente. Matemáticas. Educación Media Superior*. Consultado en abril de 2018 de http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/content/ms/docs/2017/permanencia/guias_1/examen_conocimientos/01A_E3_GUIA_A_DOCMS.pdf

COSDAC (2013). *Acuerdo Secretarial 653 por el que se establece el Programa de estudios de matemáticas del bachillerato tecnológico: componentes de formación básica y propedéutica.* Consultado en octubre de 2017 de: http://cosdac.sems.gob.mx/portal/index.php/2013-07-03-15-41-10/category/50-matematicas

Díaz Gómez, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. En C. Cuevas (Ed.), *El Cálculo y su Enseñanza.* Vol. 4, pp. 13-25. Cinvestav-IPN: México, D.F.

Dreyfus, T.; Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 13, No. 5 (November), pp.360-380.

Edwards, B.; Ward, M. (2008). The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 223-232). Mathematical Association of America. doi:10.5948/UPO9780883859759.018

Escudero, A.; Domínguez, J. (2014). De los errores identificados en la investigación a los errores encontrados en un aula de primero de bachillerato. En H. Afonso et al. (Eds.), *Números. Revista de didáctica de las matemáticas.* (pp. 111-130). Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas: Tenerife, España.

Even, R. (1990). Subject-Matter Knowledge for Teaching and the Case of Function. *Educational Studies in Mathematics. 21(*6*)* pp. 521-544.

Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education. 24(*2*)* pp. 94-116.

Freudenthal, H. (Ed.) (1973). *Mathematics as an Education Task.* Dordrecht. Reidel.

Gálvez, C.; Mandujano, M.; Zamora, I.; Maturana, I. (2015). *Un estudio sobre el álgebra de conjuntos basado en registros semióticos.* En Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Pontificia Universidad Católica de Chile: Villarrica, Chile.

Granville, W. A. (1911). *Elements of the Differential and Integral Calculus*. Ginn & Company.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo: Morelia, Mich.

Ímaz, C.; Moreno, L.(2014) *Cálculo. Su evolución y enseñanza.* México, D.F.: Trillas.

Kleiner, I. (1989). *Evolution of the function concept: A brief survey*. The college Mathematics Journal. 20(4), 282-300.

Lloyd, M. y Wilson, M. (1998). Supporting innovation: The impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. En *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 29, núm. 3, 1998, pp. 248-274.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston.

Niss, M. (2014). Functions Learning and Teaching. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 238-241). Springer: London, UK.

Pérez Rosal, L. (2011). *Un estudio sobre el aprendizaje del concepto de función con estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades* (Tesis de maestría). Cinvestav, IPN. México, D.F. (No. TME-748).

Phillips, H. B. (1916). *Differential Calculus*. John Wiley & Sons, Inc.: New York.

Prenowitz, W. (1992). "Insight an understanding in the calculus", en Tom M. Apostol et al. (eds.), *A Century of Calculus*, Washington, D. C., Mathematical Association of America, 1992, pp. 32-37.

Rivera Figueroa, A. (1993). *Un Teorema de Liouville y la Enseñanza del Cálculo*. Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional: México, D.F.

Rivera Figueroa, A. (2012). *Cálculo diferencial. Fundamentos, aplicaciones y notas históricas*. Grupo Editorial Patria: México, D.F.

Rivera Figueroa, A.; Ponce Campuzano, J. (2013). Derivative, maxima and minima in a graphical context. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44:2, pp. 284-299.

SEP (2008). *Acuerdo número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato.* Diario Oficial de la Federación: 21 de octubre de 2008. Consultado en diciembre de 2017 de:
dof.gob.mx/nota_to_doc.php?codnota=5064950.

SEP (2017a). *Modelo Educativo para la Educación Obligatoria*. Diario Oficial de la Federación: 28 de junio de 2017. Consultado en diciembre de 2017 de: https://www.gob.mx/sep/documentos/nuevo-modelo-educativo-99339

SEP (2017b). *Nuevo Currículo de la Educación Media Superior: Campo Disciplinar de Matemáticas [Bachillerato Tecnológico]*. Consultado en diciembre de 2017 de: http://www.sems.gob.mx/es_mx/sems/campos_disciplinares .

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.) *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* pp. 25-58.

Spivak, M. (1994). *Calculus. Third Edition.* Publish or Perish, Inc.: Houston, Texas.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In Grouws D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan: New York (pp. 495–511).

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of working group 3.* ICME-7 1992, Québec, Canada (pp. 13-28).

Tall, D. (2010, September). A sensible approach to the Calculus. In *Plenary at The National and International Meeting on the Teaching of Calculus.*

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **14**, pp. 239-305.

Vinner, S.; Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal or research in mathematics Education. 20*(4) pp. 356-366.

ANEXOS

Instrumento de Consulta Docente
para Profesores de Cálculo Diferencial e Integral.

Instrucciones: responda el cuestionario en hojas blancas. No es necesario volver a escribir toda la pregunta. Incluya las operaciones de sus cálculos.

Nota: En este cuestionario, la expresión $\log(x)$ denota el logaritmo natural (base e) de x.

Nombre____

1. En un video que aparece en un sitio de Internet, en donde se ofrece ayuda a estudiantes de matemáticas, se dan las siguientes dos alternativas para probar que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es decreciente:

Prueba 1: Para probar que $\frac{1}{n}$ es decreciente, acudimos a un resultado de Cálculo que dice que, si la derivada de una función es negativa, entonces la función es decreciente. Entonces, como $\frac{d}{dn}\left[\frac{1}{n}\right] = -\frac{1}{n^2}$ y este último resultado siempre es negativo, podemos concluir que $a_n = \frac{1}{n}$ es decreciente.
Prueba 2: Para probar que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ es válido para todo natural n, procedemos por inducción matemática: (iii) La desigualdad vale para $n = 1$, en efecto, si sustituimos este valor de n, el miembro izquierdo toma el valor $\frac{1}{2}$ y el miembro derecho toma el valor de 1. (iv) Supongamos que la desigualdad vale para algún valor $n = k$, es decir, $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$. Mostremos que, bajo esta hipótesis, la desigualdad vale para $n = k + 1$. De la hipótesis $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ se sigue que $k < k + 1$, entonces tenemos que $k + 1 < k + 2$. Por lo tanto, $\frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1}$. Esto prueba que la desigualdad vale para $n = k + 1$. De lo probado en (i) y (ii) se sigue, por el principio de Inducción Matemática, que la desigualdad vale para todo natural n.

¿Cuál de las dos pruebas prefiere usted?

(a) Prueba 1, (b) Prueba 2 (c) Ninguna de las dos

¿Puede dar una razón breve?

2. Determine el dominio de la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)}$.

3. ¿Podría usted derivar la siguiente función $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$? ¿Cuál sería su derivada?

4. Considere la función definida por la fórmula $f(x) = \log\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)$. Cuando aplicamos formalmente las reglas de derivación (fórmulas para la derivada de una suma, producto, cociente de funciones y regla de la cadena), obtenemos:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

Diga en qué puntos la función f es derivable.

5. Considere la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$. Halle la derivada $f'(x)$ y diga en qué puntos existe la derivada.
6. Halle el dominio de la función $y = \log\log\log(x)$.
7. Halle el dominio de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}$$

8. Si $f(x)$ es una función con dominio $A \subset \mathbb{R}$ y $g(x)$ es una función con dominio $B \subset \mathbb{R}$, diga cuál es el dominio de la función:

$$h(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x) - g(x)}$$

9. Suponga que $f(x)$ es una función con dominio el intervalo $[4,7]$. Diga dónde está definida la función $g(x) = f(3x-2)$.
10. Halle el dominio de la función $h(x) = e^{\log x}$.