CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

La credibilidad en procesos de prueba, el caso de la Geometría Euclidiana

Tesis que presenta

Victor Manuel Guerrero Rojas

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en la

Especialidad de Matemática Educativa

Director de la Tesis: Dra. Claudia Margarita Acuña Soto

México, Distrito Federal Septiembre, 2013

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por otorgarme el apoyo financiero para la realización de los estudios de Maestría, a través de la beca número 324516, con registro 263058.

Agradecimientos

Quiero expresar mi profunda gratitud a la Doctora Claudia Margarita Acuña Soto, por su paciencia, perseverancia y sabia dirección en el transcurso de este trabajo, sin los cuales no hubiese sido posible la realización y culminación del mismo.

Al Dr. Víctor Larios Osorio y al Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco por sus sugerencias, apoyo y atención en la elaboración de esta tesis.

Al departamento de Matemática Educativa por brindarme la oportunidad de la realización de mis estudios de maestría.

A mis padres que siempre me han apoyado y a mis amigos que me apoyaron de distintas maneras.

Gracias por su apoyo.

Resumen

El objetivo de este estudio fue analizar el valor epistémico o la credibilidad que se manifiestan cuando los estudiantes de licenciatura, con conocimientos de demostración, enfrentan tareas de interpretación y construcción de pruebas localmente válidas de ciertas configuraciones geométricas, de las que plantean situaciones de conflicto. Se propuso a los estudiantes una serie de enunciados que son válidos para un número finito de casos, esto con el fin de observar los cambios en el valor epistémico asociado a la figura y a la información discursiva formada por teoremas, definiciones y conocimientos matemáticos previos. Observamos el grado de convicción de los estudiantes sobre las evidencias que aportó la figura, el cual fue detectado en tres niveles o momentos. En el primero se consideró a la figura como una fuente de evidencia, en el segundo se dudó de ella incorporando la información de propiedades y relaciones de forma incipiente y en el último momento las propiedades ganaron espacio y fueron ellas la fuente de evidencia fundamental.

Abstract

The aim of this study was to analyze the epistemic value or the credibility that are appeared when undergraduate students, with knowledge of proof, deal with interpretation and construction activities of locally valid proofs about certain geometric configurations, these activities set out conflict situations. It was proposed to students series of statements that are valid for a finite number of cases in order to observe changes in the epistemic value associated to the figure and the discursive information which consist of theorems, definitions and previous mathematical knowledge. We observed the conviction grade of the students about the evidences that are provided by the figure, that grade was detected in three levels or moments. The figure, in the first moment, was considered as a source of evidence by the students, in the second they doubted figure incorporating information of properties and relations in an incipient way and in the last moment the properties took space and were the source of fundamental evidence.

Índice

1. Introducción

El desarrollo de la comprensión de los procesos de prueba en Geometría euclidiana por parte de los estudiantes resulta bastante complejo en la enseñanza y aprendizaje de ésta. Debido a que la relación entre los aspectos teóricos y el dibujo de la figura en cuestión es crítica para el desarrollo de estos procesos. En otras palabras, las propiedades derivadas de los aspectos estructurales pueden estar en conflicto con los dibujos disponibles a los estudiantes.

En particular, en este trabajo estamos interesados en analizar el valor epistémico[1] o la credibilidad que se manifiesta cuando los estudiantes de licenciatura, con conocimientos de demostración, enfrentan tareas de interpretación y construcción de pruebas localmente válidas de ciertas configuraciones geométricas, en las que se plantean situaciones de conflicto, trabajadas con apoyo en razonamientos inductivos, abductivos y deductivos.

En este trabajo consideramos fundamental que los estudiantes enfrenten situaciones de validación para asumir la responsabilidad de confrontar la verdad y en las que se establezcan conflictos cognitivos, esto con el fin de fomentar un cambio en la credibilidad de los aspectos perceptuales hacia las propiedades estructurales de las figuras.

También consideramos los diferentes tipos de discursos que se establecen en el aula: el propio de la matemática y aquel que se establece en el lenguaje común, lo que nos lleva a distinguir entre argumentación y demostración. Además de considerar el uso de la deducción, la inducción y la abducción como estructuras que organizan la argumentación.

Por otra parte, la actividad experimental consistió en proponer una serie de enunciados que son válidos para un número finito de casos con el fin de observar los cambios que en el valor epistémico de la figura por un lado y la información discursiva formada por teoremas definiciones y conocimientos matemáticos previos por el otro. También se formularon problemas en los que se fomenta el uso de los razonamientos inductivos,

[1] Grado de convicción sobre algo.

abductivos y deductivos. Además de promover en los estudiantes un modelos de acción particular, en estos últimos problemas mencionados, con el fin de establecer un motor de búsqueda de las propiedades estructurales de las figuras.

Observamos el grado de convicción sobre las evidencias que aporta la figura el cual fue detectado en tres niveles o momentos que van desde considerar a la figura como una fuente de evidencia, para luego dudar de ella incorporando la información de propiedades y relaciones de forma incipiente, en el último momento las propiedades ganaron espacio y eran ellas la fuente de evidencia fundamental.

2. Antecedentes del problema

1.1 Introducción

En el presente apartado daremos una breve reseña histórica sobre el surgimiento de la demostración en Geometría. También trataremos los antecedentes de la demostración desde el punto de vista de la investigación actual en Matemática educativa para luego centrarnos en analizar los contenidos de los programas de estudio de Matemáticas y los contenidos de algunos libros frecuentemente utilizados.

En esta última dirección se han realizado estudios que analizan el desempeño de los estudiantes con respecto a la demostración en los niveles superiores de educación. Por ejemplo, Jones (2000) estudió la experiencia de los estudiantes con la prueba matemática en los niveles universitarios, el autor muestra que los estudiantes pueden completar su grado académico sin tener una imagen completa de lo que constituye una demostración y cómo ésta se desarrolla.

Por su parte, Alibert y Thomas (1991) consideran que la demostración es parte fundamental y necesaria en el proceso de construcción del conocimiento matemático, idea con la cual coincidimos, sin embargo, adquirir el conocimiento suficiente de lo que constituye, significa y da sentido a las pruebas matemáticas es una de las principales dificultades de los estudiantes que comienzan un estudio formal de la matemática.

A continuación veremos algunos aspectos que fundamentan el problema que deseamos investigar en este trabajo, para lo cual pasaremos a presentar: 1. Una breve reseña histórica de la Geometría, 2. Investigación en matemática educativa sobre la demostración, 3. Programas de estudio de matemáticas, 4. Libros de texto de Geometría plana.

1.2 Breve reseña histórica de la Geometría

La historia de la matemática y su aprendizaje muestran que la matemática se encuentra en un continuo cambio y construcción, donde sus elementos no permanecen fijos y estáticos, sino que evolucionan y se transforman de acuerdo a las exigencias de cada época o periodo.

En el caso de la Geometría, diversos autores como Bell (1949/2011), Eves (1969) y Kline (1972) señalan que los indicios de lo que hoy conocemos como matemática se debieron a la necesidad práctica de aspectos de la agricultura. Sin embargo, no fue hasta que se logró abstraer las relaciones generales de estos fenómenos que se pudieron establecer propiedades, por ejemplo, de la figura geométrica, así como establecer un medio de validación eficaz que permitió que se constituyera en una disciplina. Un breve repaso por la historia nos muestra algunos aspectos generales que se consideraron para la validación de los resultados geométricos.

Los primeros avances en esta área aparecieron en civilizaciones como la Babilónica y la Egipcia, en las que se lograron resultados que establecían ciertas relaciones geométricas, por ejemplo: reglas para calcular áreas y volúmenes, aproximaciones de la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo y el hecho de que reconocían ciertas proposiciones como lo que después fue llamado teorema de Pitágoras (Eves, 1969).

Los resultados obtenidos entonces se basaron en tanteos y procedimientos empíricos, obteniendo buenas aproximaciones, al mismo tiempo que algunos resultados incorrectos, pero aproximados. Estos resultados fueron suficientes para cubrir las necesidades de esas civilizaciones (Eves, 1969). Este período de la matemática puede considerarse como una época en la que los esfuerzos se dirigían hacia la búsqueda ante todo de soluciones de problemas específicos en los que eventualmente aparecían las reglas operatorias.

Pero fue hasta la llegada de los griegos que se concibió a la matemática como deductiva y con ellos apareció el término "demostración" (Bell, 1949/2011). El hecho de haber comprendido que una proposición matemática requería de una formulación de cierto tipo y que no era suficiente exhibir un número grande de casos en los que se verificara y el hecho de solicitar un cierto tipo de justificación supuso un gran progreso en la historia de la matemática, apareció entonces la demostración.

Entre los griegos más destacados relacionados con la idea de demostración se encuentra Tales de Mileto (630 a.c.-545 a.c.) a quien se le atribuyen varios resultados geométricos elementales, cuyo valor radica no en su contenido, sino en el empleo de razonamiento deductivo como base de sus argumentos, en lugar del uso de la intuición y la experimentación (Eves, 1969).

Otro griego sobresaliente en este sentido fue Pitágoras (572 a.c.), quien propuso y demostró resultados importantes, por ejemplo propiedades relacionadas con las paralelas, la teoría de la proporción limitada a cantidades conmensurables, el llamado teorema de Pitágoras, entre otros. Una de las características de las demostraciones en esa época fue que eran más convincentes que rigorosas, debido a que sus premisas consistían de hechos que eran considerados obvios y evidentes en sí mismos.

Por otra parte, Jankhe (2010) muestra la relación entre el diálogo y el debate establecido por los griegos como un modelo de organización y progreso del método axiomático deductivo en matemáticas. El autor señala que en un principio el estatus epistémico de los axiomas era indefinido, es decir, los axiomas podrían ser considerados verdaderos, probables o incluso incorrectos. El autor basado en los estudios realizados por Szabó (1960) afirma que:

> *De acuerdo con Szabó, los tres conceptos de hipótesis, aitema (postulado) y axioma tienen un significado similar en las dialécticas pre-platónicas y pre-aristotélicas. Todos ellos designaron a aquellas proposiciones iniciales sobre los cuales los participantes en un debate dialectico deberían estar de acuerdo…*
>
> *Szabó (1960) muestra que el uso pre-aristotélico del término axioma fue bastante similar al término aitema, de modo que axioma significa un enunciado sobre el cual los participantes de un debate tienen un acuerdo o cuya aceptación dejaron como indecidida. Por otra parte, deja en claro que las proposiciones designadas en los Elementos de Euclides como axiomas o nociones comunes se habían puesto en duda en el periodo temprano de la filosofía Griega, a saber por Zenón en la escuela Eleática (siglo quinto A.C.)* Janhke (2010, p.19).

Continuando con el proceso de cambio del estatus epistémico de los axiomas Jankhe (2010) nos dice:

> *"En un segundo periodo, comenzando con Platón y Aristóteles (400 A.C) los términos axioma y aitema cambiaron dramáticamente su significado; ahora ellos designaban proposiciones consideradas absolutamente verdaderas. Por lo tanto, el estatus epistémico de un axioma no seguía siendo indefinido sino definitivamente fijo. Este cambio en el estatus epistémico siguió más o menos natural porque en ese momento los matemáticos habían comenzado a construir*

teorías. Los axiomas fueron supuestos como verdaderos de una vez por todas, y los matemáticos se interesaron en derivar tantas consecuencias a partir de ellos como fuese posible." Janhke (2010, p.20).

Desde nuestro punto de vista, el autor sugiere que la práctica de un discurso racional provee un modelo para la organización de una teoría matemática de acuerdo al método axiomático deductivo.

Esta organización axiomática deductiva de las proposiciones fue un principio establecido por los griegos en los tiempos de Euclides que debería aplicarse no sólo a la matemática, sino a cualquier campo de conocimiento (Janhke, 2010).

Así pues, fue gracias a Euclides (325 a.c.-265 a.c.) y su obra los Elementos, que se logró sistematizar la Geometría a partir de 5 postulados o axiomas (Eves, 1969). El gran éxito de Euclides fue sugerir los elementos mínimos que sustentaron la Geometría, esto se debió a la formulación explícita de los axiomas, que eran considerados evidentes por sí mismos. Sin embargo, en la actualidad esta afirmación sobre la evidencia es considerada insuficiente en el marco de una matemática que privilegia al rigor y la formalidad.

Bajo esta óptica, también se considera que en la obra de Euclides existen algunos fallos lógicos como proposiciones no demostradas y definiciones circulares, de la misma manera hay algunas objeciones actuales debido al uso de evidencias empíricas para validar (Kline, 1972). A pesar de estos detalles, se considera a los Elementos de Euclides como el primer gran progreso en la historia del pensamiento matemático, ya que con esta obra se logró una estructura, un procedimiento y un criterio para la matemática que se apoyaba en las cadenas deductivas para su funcionamiento (Eves, 1969).

Por último, destacamos el surgimiento de las Geometrías no euclidianas, que surgieron a partir del debate que provocó la necesidad de demostrar la independencia del quinto postulado de Euclides. El impacto que este descubrimiento tuvo en la matemática, se relaciona con la idea de que los axiomas dejaron de ser considerados como evidentes por sí mismos. Se vería después que los axiomas de las teorías no euclidianas y la propuesta por Euclides pueden ser considerados consistentes unos con otros y que finalmente son sustentos de las teorías respectivas (Eves, 1969).

1.3 Investigación en matemática educativa sobre la demostración

La investigación reciente acerca del aprendizaje y enseñanza de la demostración, ha sido abordada desde distintos puntos de vista y se han considerado diversos elementos que intervienen en su desarrollo escolar.

En particular, para los fines de esta investigación, destacamos entre otros los que se refieren a los aspectos epistemológicos de la demostración (Balacheff, 2004, 2008), sus aspectos cognitivos (Tall, 1999), la relación entre el razonamiento y la demostración (Yackel y Hanna, 2003), las creencias de los estudiantes (Chazan, 1993),la relación entre la argumentación y la demostración (Duval, 1999b; Garuti, Boero y Lemut 1998; Boero, Garuti y Lemut, 2007), la demostración en Geometría (Mclure, 2000), el rol de la visualización y la imagen en la demostración (Hanna y Sidoli, 2007; Mariotti y Antonini, 2009) y las dificultades que enfrentan los estudiantes en la demostración (Harel y Sowder, 2007), trabajos que brevemente abordaremos a continuación.

Sobre los aspectos epistemológicos de la demostración, Balachef (2004, 2008) abordó la existencia de un significado compartido de la prueba matemática y la diversidad de enfoques entre los investigadores en el campo de la matemática educativa. El autor establece que las diferentes posiciones epistemológicas influyen en las investigaciones sobre la enseñanza de la demostración.

> *"El mirar a la demostración desde una perspectiva matemática o una psicológica, o desde una perspectiva lógica o socio-lingüística, puede conducir a diferentes afirmaciones, pero lo que es importante, entonces, es relacionar estas diferencias para explicar la naturaleza de la demostración con el fin de mantener la integridad del objeto que estudiamos y para garantizar la relevancia práctica de la investigación. Recientemente, la situación de nuestro campo de investigación es bastante confusa, con diferencias profundas en las maneras de entender que es la prueba matemática dentro de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje, pero éstas permanecen sin especificar." (*Balachef, 2008, p.501)

Por otra parte, Tall (1999) y Tall, Yevdokimov, Koichu, Whiteley, Kondratieva, & Cheng (2012) estudiaron el desarrollo individual de las pruebas adecuadas en los distintos niveles educativos. Se concentraron en las características del desarrollo cognitivo de las pruebas, enfatizando las maneras cómo los individuos desarrollan sus construcciones desde las acciones y percepciones del mundo real hacia el mundo mental del conocimiento matemático. Tall (1999) mantiene que:

> *"Aunque los expertos en matemáticas pueden afirmar que comparten una noción coherente de la demostración, el desarrollo cognitivo de la demostración es dependiente de la estructura cognitiva y las representaciones disponibles para el estudiante en un momento dado. El concepto formal de demostración en términos de la definición y deducción lógica tiene una dificultad cognitiva significativa; éste requiere una inversión de "conceptos descritos verbalmente" hacia "definiciones verbales que prescriben conceptos"* (Tall, 1999, p.134)

Por lo tanto, Tall (1999) sostiene que es necesario considerar el desarrollo cognitivo del estudiante en las pruebas presentadas en el aula, comenta:

> *"El desarrollo cognitivo de los estudiantes necesita ser tomado en cuenta de modo que las pruebas sean presentadas en formas que son potencialmente significativas para ellos. Esto requiere que los educadores y los matemáticos reformulen la naturaleza de la prueba matemática y consideren el uso de diferentes tipos de pruebas relacionadas con el desarrollo cognitivo del estudiante"* (Tall, 1999, p.135)

Otro aspecto importante es el abordado por Yackel y Hanna (2003) quienes analizan la importancia del razonamiento y la demostración. Muestran estudios que intentan explicar qué significa el razonamiento y cómo los estudiantes aprenden a razonar matemáticamente.

Los autores mantienen que es muy complejo hablar del término "razonamiento", ya que su significado es aceptado universalmente sin ninguna aclaración. Sugieren una forma de entender al razonamiento matemático, esta perspectiva sostiene que el razonamiento matemático es una actividad común en la cual los estudiantes participan con la interacción de otros para resolver problemas matemáticos.

Los estudios señalados por Yackel y Hanna (2003) muestran que los estudiantes en los grados escolares elementales pueden sumergirse en este tipo de actividades, como desarrollar y verificar conjeturas usando razonamientos deductivos e inductivos. Sin embargo, el desarrollo de la comprensión de la prueba matemática permanece como un reto a superar para los estudiantes y es bastante complejo crear una atmosfera en el aula que permita fomentar el razonamiento, la explicación y la justificación.

Lo anterior, debido a que el razonamiento empleado en matemáticas es muy distinto al empleado en la vida cotidiana e incluso puede existir un conflicto entre ellos en determinadas situaciones. Ya que en el razonamiento de la vida cotidiana no se requiere del rigor matemático para las justificaciones de las afirmaciones y la aclaración de sus supuestos, teoremas y reglas de inferencia (Yackel y Hanna, 2003).

Por su parte, Balacheff (1991), citado por Yackel y Hanna (2003, p. 233), subraya que cuando el énfasis en la instrucción se hace sobre la forma de lo escrito y no en el razonamiento de los estudiantes, éstos no logran desarrollar una valoración del rol de la prueba matemática como una herramienta que establece la validez de un enunciado.

Por lo tanto, una tarea en la matemática educativa es desarrollar maneras significativas y adecuadas para ayudar a los estudiantes a comprender las demostraciones formales desde sus explicaciones, justificaciones y experiencias tempranas de razonamiento (Yackel y Hanna, 2003).

Por otro lado, en el terreno de las creencias de los estudiantes, Chazan (1993) realizó un estudio sobre la comprensión de los estudiantes en cuanto a las similitudes y diferencias entre problemas de medición y la prueba deductiva. En él se destacan dos conjuntos de creencias problemáticas que los estudiantes tienen sobre la argumentación deductiva y la empírica.

La primera consiste en considerar la *evidencia como prueba*, al respecto Chazan (1993) mantiene que:

> *"Algunos estudiantes sostienen que la medición, como la escritura de una prueba deductiva, puede permitirle a uno alcanzar conclusiones que son ciertas, que son aplicables a los conjuntos que tienen un número infinito de miembros"*. (Chazan, 1993, p.361)

La segunda consiste en considerar la *prueba deductiva como simple evidencia*. Chazan (1993) afirma que algunos estudiantes ven a las pruebas deductivas en Geometría como pruebas para un solo caso, el caso que representa el diagrama asociado.

Estos resultados nos muestran que los estudiantes manifiestan creencias contrarias a algunas nociones aceptadas acerca de la prueba matemática y que es necesario un trabajo específico con el fin de establecer un cambio en los valores epistémicos de los estudiantes.

Por otra parte, las relaciones entre argumentación y demostración han sido abordadas por diferentes investigadores y han mantenido una discusión sobre este tema. Una postura es la desarrollada por Duval (1999b), quien establece que existe una ruptura cognitiva entre la argumentación y la demostración, esto es, que pasar de la argumentación a un razonamiento válido implica un descentramiento específico que no se favorece por la discusión o por la interiorización de una discusión.

Sin embargo, existe otra postura que pretende resolver en cierto sentido a la anterior y es la propuesta por Boero, Garuti y Lemut (1998) quienes consideran que es posible cerrar esa brecha a través de la unidad cognitiva de teoremas, que consiste en la continuidad existente entre la producción de una conjetura y la posible construcción de su prueba.

Los estudios basados en la unidad cognitiva no niegan que existe la distinción entre argumentación y demostración, sino que se centran en la idea de una posible continuidad entre ellos en lugar de una ruptura (Mariotti, 2006).

Así, las investigaciones realizadas bajo esta perspectiva, mantienen que:

> *"durante la producción de una conjetura, el estudiante trabaja progresivamente su proposición a través de una actividad argumentativa intensa funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de sus opciones. Durante la siguiente etapa de demostración de enunciados, el estudiante se conecta con este proceso en una manera coherente, organizando algunos de los argumentos producidos previamente conforme a una cadena lógica"* (Garuti, Boero y Lemut 1998, p.249).

La investigación experimental muestra que una prueba es más accesible para los estudiantes si una actividad de argumentación es desarrollada para la producción de una conjetura (Boero *et al*, 2007).

Por otra parte, distintos autores han visto a la Geometría como una oportunidad para la introducción a la demostración y a los sistemas axiomáticos. Por ejemplo, Mclure (2000) considera a la Geometría euclidiana como un lugar muy favorable para comenzar un entrenamiento matemático con los estudiantes y mantiene que los Elementos de Euclides son una herramienta valiosa para enseñar los métodos deductivos.

Según Mclure (2000), la Geometría Euclidiana, a diferencia de otras materias como Álgebra lineal y Análisis Matemático, involucra objetos familiares que pueden ser enseñados visual y verbalmente, además de que las afirmaciones que se hacen sobre éstos son accesibles a los estudiantes. El autor también sostiene que los métodos lógicos tienden a ser menos sutiles que en otras partes introductorias de las matemáticas; debido a que, por ejemplo, ellos involucran menos cuantificadores. Por último, mantiene que es posible alcanzar un aprendizaje importante en este tema sin tener una perfecta comprensión sobre los sistemas axiomáticos.

Uno de los aspectos intrínsecos en el estudio de la Geometría es el relacionado con el papel y la naturaleza de la visualización y las imágenes o representaciones visuales. En lo referente a la investigación sobre el potencial y el rol de estos aspectos en la demostración, no hay un acuerdo entre los investigadores y es abordado desde diferentes perspectivas.

Por ejemplo, Hanna y Sidoli (2007) muestran un estudio sobre las maneras en que es discutida la visualización en la filosofía de las matemáticas, donde destacan aspectos relacionados con la justificación y la explicación.

En el estudio, los autores mantienen que hay una controversia sobre el rol de la representación visual en la demostración y muestra tres posturas que se tienen al respecto, las cuales consisten en ver a la representación como un complemento o como una demostración en sí misma o bien como una parte integral de la prueba matemática.

La primera postura mantiene que las representaciones visuales no pueden ser más que complementos en la demostración y su rol consiste en ser facilitadores en la comprensión de la matemática en general. Por ejemplo, Francis (1996), citado por Hanna y Sidoli (2007, p.74), mantiene que el uso de gráficos por computadora no obvia la necesidad del rigor en la verificación del conocimiento adquirido a través de la visualización y que esta clase de experimentación no reemplaza la metodología desarrollada por los matemáticos.

Una segunda postura sostiene que las representaciones visuales pueden constituir una demostración y no ser solamente herramientas heurísticas. Por ejemplo, Barwise y Etchemendy (1991, 1996), citado por Hanna y Sidoli (2007, p.74), buscan maneras de formalizar el razonamiento diagramático y argumentan que es posible construir argumentos lógicos y rigorosos basados en representaciones visuales. Un cuestionamiento a la postura es cómo extraer la información implícita de estas representaciones de tal manera que se produzca una demostración válida sin el uso de sentencias.

La tercera postura mantiene que las representaciones visuales no constituyen una demostración pero si juegan un rol esencial en las pruebas matemáticas. Por ejemplo, Casselman (2000, citado por Hanna y Sidoli, 2007, p.74) exploró el uso de las imágenes en la exposición matemática y sugiere que las ilustraciones pueden fomentar la comprensión matemática y transmitir información que incluso en ocasiones puede tratarse de una demostración.

Por último, Hanna y Sidoli (2007) concluyen que a pesar de que es aceptado universalmente el rol de la visualización como un componente importante en la comprensión matemática, es necesario realizar un esfuerzo para buscar las maneras como la visualización puede ser más útil en los aspectos de la justificación y la explicación en matemáticas.

Por su parte, Mariotti y Antonini (2009) analizan la relación entre aspectos figurales y la demostración por contradicción en Geometría. Los autores mantienen que:

> *"La relación entre los aspectos figurales y los aspectos teóricos se vuelve crucial en el caso de la demostración por contradicción, donde el razonamiento puede necesitar un control teórico específico por la falta de un soporte adecuado de la representación figural."* (Mariotti y Antonini, 2009, p.82).

El aspecto figural fue una herramienta efectiva para el estudio realizado por Mariotti y Antonini (2009), ya que ayudó a describir el proceso cognitivo involucrado en las demostraciones indirectas en Geometría.

De acuerdo a estos autores, la dialéctica entre lo conceptual y lo figural puede explicar las dificultades de los estudiantes en la demostraciones indirectas. En dicho estudio, se presentaron casos en los que la producción de un argumento indirecto usado por los estudiantes puede ser interpretada como emergente de la necesidad de integrar armoniosamente lo figural y lo conceptual.

Por otra parte, diversos estudios han evidenciado distintas dificultades que los estudiantes enfrentan en los procesos de demostración o validación. Por ejemplo, Harel y Sowder (2007) muestran que los estudiantes basan sus respuestas en las apariencias de las imágenes o dibujos que se les presentan, validan sus resultados apoyándose en ejemplos específicos, no son capaces de distinguir entre los argumentos inductivos y los deductivos, no logran entender que no es necesario más ejemplos una vez que una demostración es dada, prefieren aquellas pruebas basadas en rituales o presentadas por la autoridad del maestro o los libros y no encuentran el sentido y significado de la demostración, ya que creen que en una prueba sólo hay que verificar hechos que ellos ya conocen o son demasiado triviales para sentir la necesidad de su prueba.

Los estudios anteriores proveen un panorama de las distintas cuestiones implicadas en la enseñanza y aprendizaje de la demostración que han tenido una atención especial por los investigadores en la matemática educativa.

Las investigaciones muestran que el esfuerzo necesario para fomentar el razonamiento, la explicación y la justificación mediante la elaboración de demostraciones en el salón de clases, es considerable.

El énfasis en los aspectos formales no es suficiente para promover una comprensión significativa en los estudiantes sobre la necesidad de la demostración y su papel en la matemática, por lo que es necesario prestar atención en la credibilidad de los estudiantes cuando usan las fuentes de evidencias disponibles para desarrollar sus justificaciones matemáticas.

Por lo anterior consideramos que para dar sentido al razonamiento en la construcción del conocimiento matemático asociado a la demostración es necesario realizar un trabajo deliberado en la dirección de establecer un cambio en los valores epistémicos de los estudiantes desde las bases empíricas hasta la intelectuales .

A continuación pasaremos a hacer una breve revisión de algunos programas de estudio en matemáticas observando el papel que la demostración tiene en ellos.

1.4 Programas de estudio de matemáticas

Los programas de estudio son un medio que pretende mejorar la educación de manera eficiente, en estos programas se presentan de manera explícita los objetivos y las expectativas que se pretenden sean alcanzadas en los cursos normales.

En esta sección presentamos programas educativos del nivel medio superior y nivel superior en México, con el fin de exhibir aspectos que se relacionan con la enseñanza y aprendizaje de la demostración, y de alguna forma ir mostrando el trayecto y los retos que enfrentan los estudiantes en los cursos de matemáticas, en especial en el desarrollo de la demostración.

De manera breve, mostramos los objetivos y las expectativas de estos programas en relación al desarrollo del razonamiento deductivo y la demostración. Los programas de estudios corresponden a las siguientes instituciones: el Bachillerato general de la Secretaria de Educación Pública (DGB-SEP), la Licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAM-UAZ) y la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (FMAT-UADY).

1.4.1 Nivel medio superior

El plan de estudios de la dirección general del bachillerato de la secretaria de educación pública en México (DGB-SEP, 2011), tiene como objetivo en la asignatura de matemáticas propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Lo anterior, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven al despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores en la resolución de problemas matemáticos. Además de que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar.

Para llevar a cabo su objetivo, el plan de estudios consta de cuatro asignaturas de matemáticas, de las cuales en dos asignaturas se imparten temas de Geometría del plano. En el desarrollo de los temas de Geometría se espera que el estudiante utilice las propiedades y las características de los diferentes objetos abordados a partir de situaciones que identifique en su comunidad. También se espera que los alumnos resuelvan ejercicios o problemas de su entorno mediante la aplicación de los diferentes teoremas, construyan hipótesis, diseñen y apliquen modelos para probar su validez (DGB-SEP, 2013).

Se espera que el estudiante pueda desarrollar la habilidad de pensar críticamente en situaciones matemáticas y en otros contextos a través del razonamiento, la explicación y la justificación en problemas geométricos.

Sin embargo, los estudiantes no cuentan con las herramientas adecuadas para enfrentarse a situaciones donde se fomente el desarrollo de habilidades como argumentar, conjeturar y demostrar, ya que sus antecedentes escolares se enfocan en otro tipo de actividades como el cálculo, la construcción, el algoritmo, entre otros (Acuña, 1996).

Por lo tanto, se requiere que la enseñanza proporcione a los estudiantes herramientas para que ellos estén en condiciones de construir su propio conocimiento, en particular para que logren introducirse en las nuevas estructuras de conocimiento, como lo son: el razonamiento deductivo y la demostración.

En este nivel, el énfasis en las demostraciones es presentarlas sólo para garantizar la validez de un teorema y no para su desarrollo y construcción. El estudiante adopta un lenguaje específico con el cual se desarrollan las pruebas matemáticas establecidas en este nivel y se espera que logre comunicar y validar sobre situaciones presentadas en la vida cotidiana. No obstante, en ocasiones la demostración se llega a ver como una receta y sólo se privilegian aspectos algorítmicos de la matemática.

1.4.2 Nivel superior

Este nivel es crucial en la formación de las concepciones de las pruebas matemáticas de los estudiantes, ya que es en los primeros años de los cursos universitarios de matemáticas cuando se exponen a una matemática formal y rigorosa. En esta etapa los estudiantes desarrollan su perspectiva sobre la necesidad de la demostración en la actividad matemática, la necesidad del rigor y la preferencia de un tipo de prueba sobre otra (Alibert y Thomas, 1991).

A diferencia del nivel medio superior, la demostración juega un papel esencial en el transcurso de los cursos universitarios de matemáticas. A continuación exponemos los objetivos y las expectativas de los programas de estudio de las dos licenciaturas de nivel superior mencionadas anteriormente, en los cuales se establecen como prioridad, entre otras, la comprensión de los fundamentos y métodos de la matemática.

El primer programa es de la licenciatura en matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAM-UAZ, s.f.), el cual es un programa dirigido a jóvenes egresados de cualquier bachillerato que tengan interés por mejorar la calidad de la educación matemática en el país, resolver problemas aplicados y explorar la investigación en matemáticas.

La asignatura de Geometría corresponde al segundo semestre de la carrera. El curso es una exposición general de lo que actualmente se conoce como Geometría Moderna, la cual se refiere principalmente a Geometría en el plano.

Este curso es formal y en cuanto a las demostraciones se tratan durante todo el curso. El objetivo general del curso es que el alumno adquiera una cultura general acerca de los fundamentos de la Geometría Moderna y que formalice la estructuración de las demostraciones con las que trabajará, siendo el mismo aspecto geométrico del curso el que le facilite dicho objetivo (UAM-UAZ, s.f.).

Por otra parte, la licenciatura en enseñanza de las matemáticas que pertenece a la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Yucatán (FMAT-UADY, s.f.) es un programa cuyo objetivo general es formar profesionales en el manejo de las estructuras teóricas fundamentales de la matemática y los procesos matemáticos en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.
En particular, en la asignatura de Geometría plana y del espacio se espera que el alumno plantee y resuelva problemas geométricos, así como también desarrolle su percepción espacial. Esta asignatura se espera que sirva como punto de partida para la introducción al pensamiento matemático formal (FMAT-UADY, 2013).

Al finalizar el curso se espera que el alumno sea capaz de utilizar y aplicar las definiciones, elaborar demostraciones a través de métodos inductivos, deductivos, métodos indirectos como la reducción al absurdo y el contrapositivo, así como el correcto uso de los términos utilizados en dichas demostraciones.

Un objetivo en común de estos programas de estudio es llegar, en cierto sentido, a los aspectos formales y rigurosos de la demostración y es por medio de la Geometría que se introducen estos aspectos. Se enfatiza la prueba matemática como una secuencia de pasos que se establecen a través de la aplicación de reglas lógicas para obtener la verdad en matemáticas, es decir, la demostración es vista como una derivación formal de proposiciones, en la cual no se consideran los aspectos cognitivos necesarios para lograr desarrollar estas actividades bajo la perspectiva de la investigación en matemática educativa, que antes hemos comentado.

1.5 Libros de texto

En esta sección presentamos una breve descripción de tres libros de texto que aparecen en los programas de estudio indicados anteriormente. Exponemos los contenidos, la estructura y el tratamiento que promueven sobre las demostraciones en Geometría. Por último, realizamos observaciones sobre lo expuesto.

Estos libros de texto son: Geometría plana y del espacio (Wenthworth y Smith, 1983), Geometría y Trigonometría (Guzmán, 1992), Geometría plana y del espacio con una introducción en el espacio (Baldor, 2004) e Introducción a la Geometría Moderna (Shively, 1984).

1.5.1 Geometría plana y del espacio (Wenthworth y Smith, 1983)

A continuación mostramos una breve descripción del libro, rescatando ciertas características en la introducción y presentación del método deductivo y las demostraciones.

El primer capítulo es una introducción de cuestiones generales de Geometría plana, se muestran algunas definiciones básicas y algunos axiomas. Se presenta a la Geometría como la encargada del estudio de las propiedades de las formas o figuras a través de demostraciones rigorosas.

Se establece a las figuras geométricas como entes abstractos y los autores se apoyan en ilustraciones para explicar las características de éstas. Se define a la figura geométrica como una combinación de puntos.

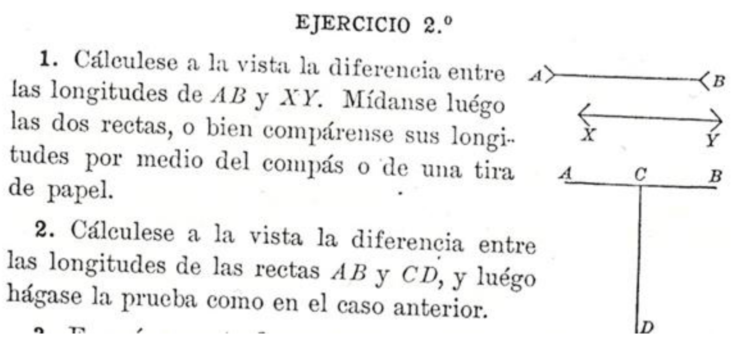
Los autores realizan algunas recomendaciones sobre las figuras geométricas. Se exhorta que al principio el alumno construya las figuras con exactitud empleando el compás y la regla hasta que se acostumbre al uso de estos instrumentos. Posteriormente, se aconseja que se dibujen las figuras a mano, aproximando las condiciones que deben cumplir.

En las indicaciones para realizar las demostraciones se señala que no es necesario que las figuras satisfagan las condiciones exactamente, sino que es suficiente suponer que cumplen las propiedades. También se recomienda el uso de sintagmas en las figuras para facilitar su tratamiento.

Antes de comenzar con las demostraciones, los autores ponen de manifiesto las limitantes de la vista en la solución de problemas geométricos, esto mediante algunos ejercicios y una explicación breve.

"Cuando se dibuja una figura que debe llenar ciertos requisitos, es preciso demostrar por el razonamiento que en efecto los llena. La vista no puede servir de guía seguro, pues a menudo engaña." (Wenthworth y Smith, 1983, p.15).

En la Figura 1 se muestra como los autores buscan confrontar aspectos visuales con las afirmaciones en Geometría a través de mediciones de las figuras en cuestión.


EJERCICIO 2.º

1. Calcúlese a la vista la diferencia entre las longitudes de AB y XY. Mídanse luégo las dos rectas, o bien compárense sus longitudes por medio del compás o de una tira de papel.

2. Calcúlese a la vista la diferencia entre las longitudes de las rectas AB y CD, y luégo hágase la prueba como en el caso anterior.

Figura 1. Confrontaciones sobre aspectos visuales presentadas en el libro

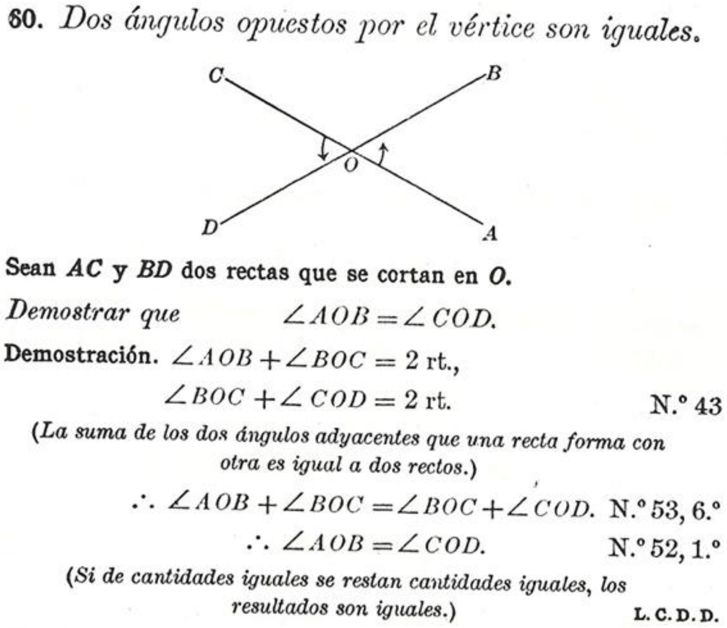
Continuando con la introducción y la necesidad de la demostración, los autores hacen los siguientes apuntes sobre las pruebas matemáticas y sus características.

> *"[prueba matemática] consiste en encadenar axiomas, postulados y teoremas ya demostrados de tal manera que dicho encadenamiento conduzca necesariamente a la conclusión de que la proposición que se trata de demostrar debe ser verdadera; pues de otro modo no lo serían las proposiciones de que tal conclusión se deduce."* (Wenthworth y Smith, 1983, p.35).

Después del primer teorema presentado en el libro, se explica que:

> *"Se observará que este teorema (y lo mismo se aplica a cualquier otro) es en sí el mismo enunciado de una proposición que debe demostrarse, mientras que la demostración que le sigue es un encadenamiento de proposiciones la verdad de las cuales se admite, sea como axioma, sea por haberse demostrado previamente."* (Wenthworth y Smith, 1983, p.25).

La forma de presentar la demostración de una proposición, se hace mediante una columna donde se presenta una secuencia de proposiciones seguidas de su justificación o referencia, por ejemplo, como se muestra en la Figura 2.


60. *Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Sean AC **y** BD **dos rectas que se cortan en** O**.**

Demostrar que $\angle AOB = \angle COD$.

Demostración. $\angle AOB + \angle BOC = 2$ rt.,

$\angle BOC + \angle COD = 2$ rt. N.° 43

(*La suma de los dos ángulos adyacentes que una recta forma con otra es igual a dos rectos.*)

$\therefore \angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$. N.° 53, 6.°

$\therefore \angle AOB = \angle COD$. N.° 52, 1.°

(*Si de cantidades iguales se restan cantidades iguales, los resultados son iguales.*) L. C. D. D.

Figura 2. Demostración del teorema de los ángulos opuestos por el vértice

En conclusión, la estructura general de la presentación de los temas de este libro consiste en mostrar las definiciones y proposiciones (acompañadas de su demostración) relevantes y por último se propone una serie de problemas a resolver, que en su mayoría son acompañadas de la sentencia "*Demuéstrese qué*", a lo largo de todo el texto la actividad se desarrolla con esta dinámica suponiendo que el trabajo duro dará los frutos de identificar cuáles son las proposiciones adecuadas y entender la razón de cierto encadenamiento y no otro.

1.5.2 Geometría y trigonometría (Guzmán, 1992)

En los primeros capítulos se muestran los fundamentos de la Geometría y se explica brevemente en qué consisten los axiomas, los postulados, el método deductivo, la demostración y la figura geométrica.

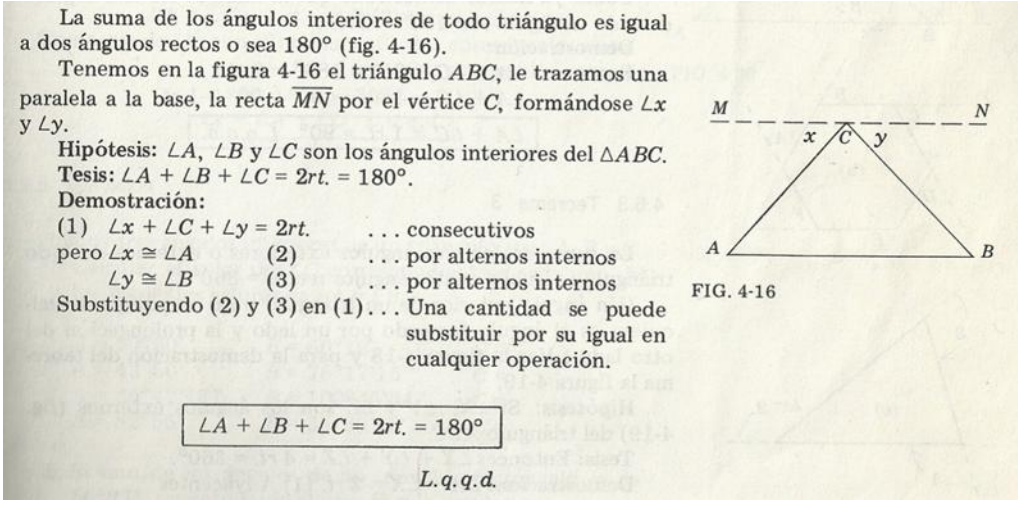
Se presenta a la figura geométrica definiéndola como un conjunto de puntos, se enfatiza como un objeto abstracto y se introduce el método deductivo de la siguiente manera:

> *"[método deductivo] Usado en la ciencia, principalmente en la Geometría, consiste en "encadenar" conocimientos que se suponen verdaderos de tal manera que se obtienen nuevos conocimientos. Es decir, obtener nuevas proposiciones como consecuencia lógica de otras anteriores. Deductivo significa que obra o procede por deducción."* (Guzmán, 1992, p.15).

Sobre la demostración explica lo siguiente:

> *"[la demostración] Fin y termino del procedimiento deductivo; en lógica decimos que es un razonamiento que establece, de modo absolutamente convincente, una verdad, mostrando que ella depende de otra, que es evidente o por lo menos admitida. La demostración es el método propio de las ciencias matemáticas"* (Guzmán, 1992, p.15).

En las demostraciones presentadas en el libro se comienza distinguiendo la hipótesis de la tesis, después se presentan los argumentos en dos columnas. En la Figura 3 se presenta una demostración del libro.



La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a dos ángulos rectos o sea 180° (fig. 4-16).

Tenemos en la figura 4-16 el triángulo ABC, le trazamos una paralela a la base, la recta $\overline{MN}$ por el vértice C, formándose $\angle x$ y $\angle y$.

Hipótesis: $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son los ángulos interiores del $\triangle ABC$.

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle C = 2rt. = 180°$.

Demostración:

(1) $\angle x + \angle C + \angle y = 2rt.$ . . . consecutivos

pero $\angle x \cong \angle A$ (2) . . . por alternos internos

$\angle y \cong \angle B$ (3) . . . por alternos internos

Substituyendo (2) y (3) en (1) . . . Una cantidad se puede substituir por su igual en cualquier operación.

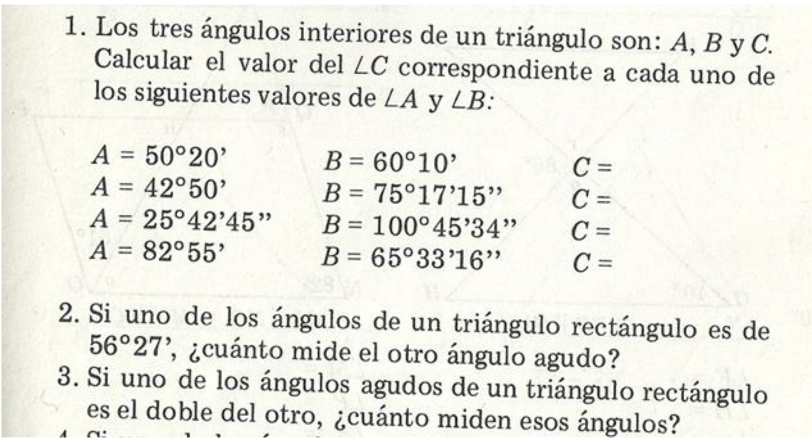
$$\boxed{\angle A + \angle B + \angle C = 2rt. = 180°}$$

L.q.q.d.

FIG. 4-16

Figura 3. Demostración del teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo.

Respecto a la exposición de los temas se destaca que el autor comienza con las definiciones de las figuras a tratar, exhibiendo sus propiedades, después continúa con la exposición de algunas demostraciones de teoremas relevantes. Por último, propone ejercicios que en su mayoría consisten en hallar valores numéricos de propiedades específicas de los objetos geométricos abordados. En la Figura 4 se muestran algunos ejercicios propuestos en el libro.



1. Los tres ángulos interiores de un triángulo son: A, B y C. Calcular el valor del $\angle C$ correspondiente a cada uno de los siguientes valores de $\angle A$ y $\angle B$:

A = 50°20'	B = 60°10'	C =
A = 42°50'	B = 75°17'15''	C =
A = 25°42'45''	B = 100°45'34''	C =
A = 82°55'	B = 65°33'16''	C =

2. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 56°27', ¿cuánto mide el otro ángulo agudo?
3. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es el doble del otro, ¿cuánto miden esos ángulos?

Figura 4. Ejemplos de tipos de problemas presentados en Guzmán (1992).

La mayoría de los ejercicios consisten en establecer propiedades numéricas de los objetos geométricos abordados, existen pocos problemas de demostración. El papel de la demostración en este libro sólo es el de verificar la validez de los teoremas y no su construcción y desarrollo, por lo que no enfrenta los obstáculos que representa su aprendizaje.

1.5.3. Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría (Baldor, 2004).

El autor de este libro presenta a la Geometría como aquella ciencia que estudia las propiedades intrínsecas de las figuras y que es a través del método deductivo como se validan sus proposiciones.

Al definir los elementos básicos de la Geometría el autor se apoya de imágenes para ilustrar sus propiedades, características y se resaltan los aspectos abstractos vinculados a éstos.

Por otra parte, se introduce el método deductivo como sustento de la Geometría y se establecen sus principales características.

> *"[método deductivo] Este método consiste en encadenar conocimientos que se suponen verdaderos de manera, que se obtienen nuevos conocimientos. Es decir, obtener nuevas proposiciones como consecuencia lógica de otras anteriores."* (Baldor, 2004, p.7).

Sobre el manejo de ideas erróneas el autor nos señala que debemos poner cuidado en los teoremas y sus recíprocos, y considerar el posible error de las mediciones debido a las limitaciones técnicas de los instrumentos que se pueden utilizar, como la regla.

En la presentación de las demostraciones se destacan las hipótesis de los teoremas, la tesis y las construcciones auxiliares que se hacen sobre la figura. El formato de las demostraciones es el de dos columnas lo que luego es solicitado como un requisito no sólo de organización cuando hay que demostrar. Por ejemplo en la Figura 5, se muestra la demostración de la proposición que nos indica que todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

DEMOSTRACIÓN:

$\angle x + \angle B = 2R$	Adyacentes
$\therefore \quad \angle x = 2R - \angle B \qquad (1)$	Trasponiendo;
También; $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$	Suma de los ángulos interiores;
$\therefore \quad \angle A + \angle C = 2R - \angle B \qquad (2)$	Trasponiendo;
Comparando (1) y (2), tenemos:	
$\angle x = \angle A + \angle C$	Carácter transitivo.

Figura 5. Demostración presentada en dos columnas.

En ocasiones las demostraciones aparecen en párrafos, combinando el lenguaje común con el lenguaje geométrico. Por ejemplo, en la Figura 6 se muestra la demostración del teorema que nos indica que el número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice de un polígono es igual al número de lados menos tres, el peso de la argumentación verbal es definitivo en este caso.

DEMOSTRACIÓN: Si desde un vértice cualquiera se trazan todas las diagonales posibles, siempre habrá tres vértices a los cuales no se puede trazar diagonal: el vértice desde el cual se trazan y los dos vértices contiguos.

Como el número de vértices es igual al número de lados n, resulta:

$$d = n - 3.$$

Figura 6. Demostración presentada en el lenguaje común.

Los problemas abordados en este libro son de tipo numérico y de demostración. La estructura de exposición es la tradicional que consiste en presentar definiciones, teoremas relevantes y problemas propuestos. No se rescata la observación de los aspectos figurales de la figura ni tampoco establecen explícitamente cómo es el proceso de demostración de determinado teorema.

1.5.4 Introducción a la Geometría Moderna (Shively, 1984)

El libro presenta una introducción a la llamada Geometría Moderna, que se refiere a la que se desarrolló desde los tiempos de Euclides hasta la época actual, pero en donde se agregan ciertos elementos y nuevos descubrimientos con los que los griegos no contaban, por ejemplo, magnitudes con sentido y la idea de elementos infinitos.

Para abordar los temas presentados en el libro, el autor sugiere que el lector debe contar con cierta madurez matemática y conocimientos de Algebra Superior y Trigonometría Plana. En éste no se presentan una lista de los axiomas básicos que sustentan la

Geometría, sino se da por sentado que el lector cuenta con los conocimientos necesarios, por lo que el objetivo del libro no es abordar los fundamentos lógicos axiomáticos del tema.

La forma de presentar los temas consiste en plantear las principales definiciones y componentes de éste, los teoremas importantes del tema y por último sugiere una lista de proposiciones, las cuales deben de ser demostradas por el estudiante.

La forma de presentar las demostraciones en el libro consiste en mostrar las principales ideas que sustentan la demostración del teorema en cuestión, sin embargo, en ocasiones la prueba está incompleta y se pretende que el lector la finalice.

Por ejemplo, el teorema de Ptolomeo, que establece que el producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos, se demuestra de la siguiente manera:

> *"En la figura 10 [muestra un cuadrilátero cíclico con vértices ABCD] dibujemos la línea AE, formando el ángulo DAE igual al ángulo CAB y hagámosla intersectar DB en E. Entonces, puesto que los triángulos DAE y CAB son semejantes, se infiere por la proporcionalidad de sus lados que AD*BC = ED*AC. Y de los triángulos semejantes ADC y AEB, tenemos también AB*CD=BE*AC. Sumando estas ecuaciones y señalando que BE+ED=BD, tenemos AD*BC + AB*CD =AC*BD".* (Shively, 1984, p.26).

En la demostración se observa que el autor primero presenta la descripción del trazo auxiliar, sin embargo, no explica la naturaleza de éste. Luego, no menciona por qué los triángulos DAE y CAB son semejantes, así como los triángulos ADC y AEB, ya que supone que será evidente para el lector. Por último, se espera que a partir de lo anterior y de cierta manipulación algebraica el estudiante complete la demostración.

Por lo anterior, el estudiante debe tener cierta experiencia con el tratamiento de las figuras geométricas, dominar los principales métodos de demostración, así como los fundamentos de validación en geometría, además del conocimiento de las proposiciones principales de la Geometría Euclidiana para poder abordar los temas de estudio que presenta el libro.

Los contenidos del libro, respecto a la demostración, se tratan con pocas sugerencias dando por sentado que el estudiante estaría en condiciones de llevar a cabo las demostraciones con algunas indicaciones, gran parte del problema de este libro es que no sienta bases para la comprensión de la pertinencia de las afirmaciones que llevan a la demostración.

1.5.5 Observaciones de los libros presentados

Parece ser que el objetivo de los libros presentados anteriormente es sólo comunicar algunos hechos relativos a las demostraciones y ciertos resultados relevantes en el estudio de la Geometría, es decir, no se toman en cuenta el aprendizaje de la demostración ni el proceso de desarrollo de los estudiantes en lo relativo a la construcción o aprendizaje de la demostración. Se expone la prueba matemática como una derivación formal de una secuencia de pasos que parten de axiomas o teoremas, a través del razonamiento deductivo para llegar a una conclusión o tesis.

En el proceso de construcción de las demostraciones presentadas en los libros no se establecen por qué y cómo se obtienen las proposiciones que se presentan en las pruebas y se supone que la lógica formal será suficiente indicador para darle sentido al encadenamiento de estas proposiciones y se espera que el estudiante de forma natural asimile estos aspectos.

Este tipo de tratamiento puede ser problemático para los estudiantes que comienzan el estudio de esta materia y enfrentan al aprendizaje de la demostración. Ya que no cuentan con los mismos recursos que tiene un matemático consolidado para dar sentido a establecer el conocimiento matemático. Por ejemplo, reconocer la plausibilidad de una conjetura, la elección de un tipo de pruebas sobre otras, elegir una estrategia adecuada para hacer frente a la demostración, reconocer la naturaleza de los argumentos que sustentan la prueba matemática y establecer los medios adecuados para negar un enunciado matemático.

En el tratamiento de la figura no se rescatan los aspectos pictóricos de ésta, olvidando que si bien hace referencia a un objeto abstracto, es a través de su representación que tenemos acceso a ella y ésta es susceptible de distintas operaciones que permiten dar sentido a la demostración a través del análisis de sus componentes y a partir de ensayos de diversas aproximaciones a la obtención de la tesis en cuestión.

De manera general podríamos decir que tanto en los programas de estudio como en los libros de texto revisados no se consideran las necesidades de desarrollo cognitivo del estudiante, en estos prevalece el tratamiento lógico formal que es difícil para el estudiante.

1.6 Planteamiento del problema

En la actualidad se considera que el razonamiento matemático debe ser parte de los objetivos a desarrollar en todos los niveles educativos. De esta manera la demostración ha sido reconsiderada para ser enseñada en la escuela, en especial en los cursos universitarios de matemáticas.

Pero tenemos que aunque la historia y las investigaciones apuntan sobre la necesidad de incorporar los aspectos cognitivos en la enseñanza de la demostración, los libros de texto y los programas de estudio no hacen eco de estas necesidades, por lo que se justifica analizar aspectos relacionados con su construcción.

Uno de los aspectos poco estudiados en la investigación sobre el aprendizaje de la prueba matemática es el relativo a la credibilidad o valor epistémico[2] que los estudiantes asignan a la demostración, es decir, los estudiantes depositan su confianza con mayor facilidad en las evidencias empíricas que en las teóricas, no es de extrañar que algunos autores consideren que algunas de sus funciones fundamentales son que éstas validen expliquen y en particular que convenzan.

Por otro lado, consideramos que una forma en la que es posible hacer que los estudiantes reconsideren su confianza en las evidencias empíricas es mediante una práctica de aprendizaje que incluya situaciones de conflicto que sean posibles de superar con los medios disponibles.

Las representaciones gráficas, usualmente usadas en la Geometría, son susceptibles de distintas operaciones y tratamientos que nos ayudan a comprender las relaciones entre

[2] Grado de verdad o convicción sobre algo.

los objetos geométricos y el desarrollo de las demostraciones en esta materia, lo que las hace un buen medio para llevar a cabo esta tarea.

Consideramos por lo tanto, que la credibilidad construida sobre el dibujo con apoyo en las propiedades estructurales y teóricas de la figura geométrica, es uno de los aspectos cruciales en el desarrollo del pensamiento geométrico, en particular en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración y es uno de los elementos que contribuyen a dotar de sentido a la prueba matemática, en particular en lo que se refiere a su función de validación.

Por tanto, el problema que vamos a tratar a continuación se refiere al estudio de la credibilidad o valor epistémico que se manifiesta cuando los estudiantes de licenciatura, con conocimientos de demostración, enfrentan tareas de interpretación y construcción de pruebas localmente válidas de ciertas configuraciones geométricas que plantean situaciones de conflicto cuando se desea generalizar, estas son trabajadas con apoyo en razonamientos inductivos, abductivos y deductivos.

2. Marco Teórico

2.1 Introducción

A continuación trataremos sobre el marco teórico que apoya nuestra investigación. En un primer momento haremos algunas consideraciones generales para ubicar adecuadamente el tema. Posteriormente, desarrollaremos las ideas que organizan este capítulo iniciando con la idea de Balacheff (2000) relacionada con la importancia de la validación en la demostración matemática. Después, consideramos a Duval (2007) quien hace referencia a los diferentes tipos de discursos que se establecen en el aula: el propio de la matemática y aquel que se establece en el lenguaje común, lo que nos lleva a distinguir entre argumentación y demostración. Además de considerar el uso de la deducción, la inducción y la abducción como estructuras que organizan la argumentación.

Luego, hacemos mención de la importancia del razonamiento visual (Herhskowitz *et al*, 1996) para acercarnos al aprendizaje de la demostración en Geometría, así como la importancia de la detección de los atributos relevantes. Nos apoyamos en las relaciones entre la visualización y el razonamiento discursivo en términos de Duval (1998), quien considera a la visualización como un medio heurístico en la solución de problemas geométricos.

Por último, hacemos uso del conflicto cognitivo (Herschkowitz y Shwarz, 2011) con el fin de fomentar un cambio de valor epistémico entre los estudiantes que va desde sus concepciones apoyadas en la evidencias perceptuales hasta las necesarias para llevar a cabo una demostración.

2.2 Consideraciones generales

La Geometría está presente en los distintos niveles educativos, desde la escuela primaria hasta los estudios universitarios. Sin embargo, durante ese tiempo ésta no tiene el mismo sentido y significado.

Houdement y Kuzniak (2003) y Kuzniak y Rauscher (2011) ponen en evidencia que existen tres tipos de paradigmas diferentes que llevan a distinguir varias formas de Geometría: Geometría I (Geometría natural), Geometría II (Geometría axiomática natural) y Geometría III (Geometría axiomática formal), sobre estos paradigmas los autores afirman que:

> *"Geometría I (Geometría natural). La fuente de validación es lo sensitivo, está íntimamente relacionado con lo real. La intuición es frecuentemente asimilada a la percepción inmediata, al acto de experimentar y deducir sobre objetos materiales por medio de la percepción y los instrumentos. El ir y venir entre la realidad y el modelo es permanente y es permitido para probar afirmaciones.*
>
> *Geometría II (Geometría axiomática natural). La fuente de validación se basa en leyes hipotéticas deductivas en un sistema axiomático. Un sistema de axiomas es necesario pero los axiomas están cerca a la intuición del espacio que nos rodea. El sistema axiomático puede ser incompleto, pero las demostraciones dentro del sistema son necesarias para el progreso y para alcanzar certeza.*
>
> *Finalmente, Geometría III (Geometría axiomática formal). En esta Geometría, el cordón umbilical se corta entre la realidad y lo axiomático: los axiomas no están más basados sobre lo sensitivo…*
>
> *El tipo de razonamiento es el mismo que en Geometría II, pero el sistema de axiomas es completo e independiente de su aplicación en el mundo real. El único criterio de verdad es la consistencia, (es decir ausencia de contradicciones)."*(Houdement y Kuzniak, 2003, p.4).

El principio fundamental que los autores establecen, es que los paradigmas son homogéneos, es decir, es posible razonar dentro de cada paradigma sin conocer la naturaleza del otro. Otro punto clave en esta propuesta es que los paradigmas no están organizados en una jerarquía estricta haciendo más aceptable uno que otro.

En particular, en este trabajo nos centramos en el paradigma de la Geometría II, debido al carácter de la investigación que pretendemos desarrollar que se refiere a la demostración matemática como medio de validación en Geometría, sin olvidar aspectos perceptivos e intuitivos que participan en su construcción e intervienen en la formación del valor epistémico de las construcciones que le darían sentido.

Por otra parte, como lo hemos venido mencionando, la demostración nos parece esencial en el desarrollo de la matemática, ya que es el medio de validación en esta disciplina y en lo referente a la educación ésta debería estar presente entre los contenidos esenciales, aunque no de la misma forma que se presenta en la actividad de los matemáticos.

A este respecto, tenemos que en el terreno de la educación ésta no es la única función de la demostración, también puede ser una herramienta valiosa para construir conocimiento matemático. En esta dirección, Hanna y Barbeau (2008) nos presentan a las demostraciones como portadoras de conocimiento, es decir, las demostraciones van más allá de establecer la verdad de una afirmación matemática y pueden tener el potencial de transmitir a los estudiantes métodos, herramientas, estrategias y conceptos para resolver problemas, lo anterior en el sentido de Rav (1999, citado por Hanna y Barbeau, 2008, p.85).

Así, la demostración en la escuela contribuye con el desarrollo de la comprensión de la matemática de los estudiantes. No sólo es una necesidad formal y rigorosa de la disciplina, sino que es una herramienta valiosa en el desarrollo de ideas y métodos en la solución de problemas, además de jugar distintos roles en la escuela.

Desde el punto de vista de Hanna (1990), en la escuela se debe diferenciar entre las pruebas que prueban y las pruebas que explican. Para la autora una prueba que explica, muestra por qué un teorema es verdadero y provee un conjunto de razones que se derivan del problema mismo. Este tipo de pruebas son propicias al comienzo de la enseñanza y aprendizaje de la demostración.

Al respecto, De Villiers (1993) hace un análisis basado en consideraciones epistemológicas y en testimonios de matemáticos sobre las funciones de la demostración. El investigador destaca cinco *funciones de la demostración*, en contraparte de sólo considerarla en términos de verificación-convicción. Las funciones son:

- *Verificación* (concerniente a la verdad de una afirmación).
- *Explicación* (profundizado en por qué es verdad).
- *Sistematización* (la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas).
- *Descubrimiento* (el descubrimiento o invención de nuevos resultados).
- *Comunicación* (la transmisión del conocimiento matemático).

En todas estas funciones hay una innegable utilidad para el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes debido a la importancia de construir ideas, las que den sentido a esta actividad para los fines no sólo de construcción de las secuencias lógicas, sino para la aceptación de que ésta es la forma en la que trabaja la matemática.
Por lo tanto, el sentido de los problemas de demostración en la escuela, no está tanto en lo validado, sino en desarrollar formas de pensar a través de ideas y estrategias que son puestas en juego en la solución de estos problemas.

Con relación a la formación de ideas y creencias de los estudiantes en el desarrollo de métodos de prueba, nos centraremos en la credibilidad que los primeros le dan a los procesos que participan de la prueba y en especial al de la demostración, es decir, estamos interesados en la formación de los valores epistémicos desarrollados en los procesos de validación en Geometría y en especial en su poder generalizador.

2.3 Procesos de validación

Nos referimos a los procesos de validación matemática en el sentido de Balacheff (2000) quien los estudió en el aula, donde se establece el papel de la situación como determinante para el tipo de pruebas que se realizan en matemáticas.

La validación en matemáticas se entiende como aquel razonamiento que tiene como fin asegurarse de la validez de una proposición y que para los fines de la educación puede eventualmente contribuir a producir una explicación convincente.

La puesta en marcha o no de un proceso de validación, fundamentado en la teoría, está relacionado con el análisis que el individuo hace de la situación (Balacheff, 2000), donde su evaluación, las decisiones y las acciones sobre la veracidad del enunciado en cuestión están íntimamente relacionadas con los conocimientos del sujeto, la racionalidad que pone en juego sobre el contexto en el cual se desarrolla, así como de los valores epistémicos involucrados en éste.

Sobre la validación, Balacheff (2000) sugiere que existen varias formas y niveles de esta, cuya movilización y puesta en obra son provocadas por la situación en la que uno se pueda encontrar. El hecho de proponer un problema a los estudiantes, no garantiza que se ponga en marcha un proceso de validación de lo que se afirma, debido a que esto puede no parecer relevante.

En el proceso de validación de los estudiantes, Balacheff (2000) menciona dos obstáculos en la producción de las demostraciones geométricas. El primer obstáculo se refiere a que la evidencia de los hechos se impone a la razón; es decir, los alumnos no experimentan la necesidad de demostrar, ya que las figuras son tomadas por ellos como evidencia de la demostración. El segundo obstáculo es que la enseñanza de la matemática, despoja a los estudiantes de la responsabilidad de considerar la verdad; esto es, el enunciado en cuestión es dado por verdadero y lo que está por descubrir es la estructura de la demostración.

Por otra parte, este autor distingue entre *explicación, prueba y demostración*. La *explicación* es un discurso que establece y garantiza la validez de una proposición por parte de quien la emite. *Prueba*, es aquella explicación aceptada por una comunidad. Y una *demostración* matemática, es aquella prueba aceptada por la comunidad matemática, se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. Lo anterior nos permite entender los diferentes usos que se le dan a los términos prueba y demostración en el aula.

Con el tratamiento de proposiciones se diferencian dos tipos de situaciones relacionadas: de validación y de decisión. El objetivo de la primera es la producción de la prueba de un enunciado, mientras que en la segunda se exige la ejecución de procesos de validación, sin que, sea necesaria una producción explícita de pruebas (Balacheff, 2000).

Este autor también distingue dos tipos de pruebas: *las pruebas pragmáticas y las pruebas intelectuales*. Las primeras recurren a la acción o la ostensión, mientras que las segundas se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones. Estas pruebas no establecen de la misma manera las proposiciones que sustentan, porque lo que garantiza la prueba pragmática es la singularidad del evento que la sustenta en cambio la prueba intelectual implica un significado contra otro, una pertinencia contra otra y una racionalidad contra otra.

El desarrollo de pruebas intelectuales requiere desprenderse de la acción y el proceso efectivo de la solución del problema. El lenguaje de la familiaridad permite una evolución en este proceso, donde debe convertirse en una herramienta de cálculo lógico y no sólo en un medio de comunicación, para esto se requiere una descontextualización, una despersonalización y una destemporalización de lo propuesto (Balacheff, 2000).

Según Balacheff (2000), la transición de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales, llegando a la demostración, no sólo se apoya en cierto grado de conocimientos. Se debe reconocer una teoría como tal, donde se establecen claramente los argumentos aceptados por una comunidad. Esta transición se apoya en tres polos que interactúan fuertemente: el polo de los conocimientos, el polo lingüístico o de la formulación y el polo de la validación o de los tipos de racionalidad que sustentan las pruebas producidas.

Las pruebas pragmáticas e intelectuales se dividen a su vez en: en el primer caso *empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico* y en el segundo*: experiencia mental y el cálculo sobre enunciados*.

- El *empirismo ingenuo* se caracteriza por las conjeturas que se obtienen del examen de pocos casos y que son elegidos aleatoriamente, en éste el problema de generalización no es abordado.

-En la *experiencia crucial* existe la voluntad de someter a prueba una proposición a través de la selección de un ejemplo, donde el problema de generalización es abordado en un marco empirista.

-El *ejemplo genérico*, se da cuando se aborda un ejemplo con el fin de hacer explícito un modelo de acción que fundamenta la conjetura. Se formulan operaciones y transformaciones sobre un objeto en particular, siendo éste un representante característico de determinada clase, logrando liberar las propiedades, características y estructuras de la clase a la cual pertenece el objeto.

-La *experiencia mental* se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular; es la explicación de las razones que fundamentan la validez de la proposición y se basa en un análisis de las propiedades de los objetos. Se caracteriza por operaciones mentales que no tienen un estatus matemático.

-El cálculo sobre enunciados es un cálculo simbólico que sostiene pruebas independientes de la experiencia y que se fundamentan en la trasformación de expresiones formales a través de definiciones y propiedades características.

Estos tipos de prueba permiten diferenciar y analizar los distintos procesos de validación, aunque, en un proceso de solución de un problema pueden aparecer distintos niveles de prueba en un mismo binomio de estudiantes (Balacheff, 2000).

En estos tipos de prueba existe una ruptura entre los dos primeros y los restantes, ya que en los últimos no sólo se trata de verificar la verdad del enunciado, sino de establecer el carácter necesario de su validez estableciendo las razones que los justifiquen, en otras palabras, el paso de una verdad formulada con base en la evidencia de los hechos a aquella fundada en la razón (Balacheff, 2000).

Por otra parte, en las pruebas pragmáticas el paso del empirismo ingenuo a la experiencia crucial corresponde a la toma de conciencia de asegurar la generalidad del enunciado en cuestión con base en la experiencia como medio de convicción.

En las pruebas pragmáticas el ejemplo prototipo (Schwarz y Herschkowitz, 1999) juega un papel importante en la medida que el problema de generalización se tome en cuenta, ya que éste puede ser una representación fiel de los objetos a los que se refiere. Además de ser un ejemplo sobre los que los estudiantes tienen más disponibilidad. Sin embargo, este tipo de ejemplos podría ser un primer obstáculo para el desarrollo de pruebas más elaboradas (Balaccheff, 2000).

Por otro lado, recurrir a la experiencia mental marca la transición de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales, en la medida que las acciones dejan de ser efectivas y se vuelven acciones interiorizadas. El ejemplo genérico constituye un estado intermedio que depende del uso del carácter general (Balacheff, 2000). Así, la transición del ejemplo genérico a la experiencia mental debe cumplir con lo siguiente: el paso de la acción a la acción interiorizada y una descontextualización, basándose en una construcción del lenguaje que implica el reconocimiento y la diferenciación de los objetos y de las relaciones en juego que lo separan de lo particular.

Abundando sobre el ejemplo genérico, Biehler y Kempen (2013) presentan a las pruebas genéricas, entendidas como aquellas que se basan en el ejemplo genérico, como herramientas didácticas para comprender y establecer un punto de partida de una demostración. Lo anterior se establece, debido a que este tipo de pruebas permite a los estudiantes encontrar argumentos generales y la idea principal que completan la demostración, además de ser un medio de convicción de la verdad de un enunciado para los alumnos.

Sin embargo, la evolución de la prueba genérica no es sencilla para los estudiantes, ya que tienen dificultad para generalizar desde lo particular, además de reconocer y tomar en cuenta la cualidad genérica del ejemplo en cuestión (Mason y Pim, 1984; Nardi, 2008; Selden, 2012, citados por Biehler y Kempen, 2013, p.2)

Siguiendo con el desarrollo de los tipos de prueba, es a partir de la experiencia mental que los procesos de descontextualización, destemporalización y despersonalización pueden continuar, permitiendo la expresión de pruebas que consisten en un cálculo sobre enunciados, esto es, de acciones interiorizadas a un cálculo de relaciones (Balacheff, 2000).

Consideramos en este trabajo, la importancia de no sólo establecer una jerarquía en los tipos de prueba en los estudiantes, sino también tener en cuenta el desarrollo cognitivo asociado a la prueba en cuestión, es decir, si la prueba es de tipo pragmático las concepciones que la apoyan es probable que también tengan este carácter.

Desde nuestro punto de vista si bien es cierto que en la propuesta de Balacheff se considera que se contraponen dos tipos de pruebas, las pragmáticas y las intelectuales, en donde las primeras recurren a la acción o la ostensión, mientras que las segundas se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones, también están presentes dos tipos distintos de concepciones sobre la forma en que los problemas deben ser resueltos, las que corresponden a dos fuentes distintas de evidencias y por tanto a valores epistémicos distintos.

Por lo anterior suponemos que es importante que los estudiantes enfrenten situaciones de validación para asumir la responsabilidad de confrontar la verdad con el fin de formar un valor epistémico adecuado al tipo de pruebas intelectuales. Pretendemos así entender el significado de las concepciones puestas en juego y los medios de convicción de ellos con el fin de establecer los mecanismos adecuados para provocar una evolución en las pruebas que realizan.

2.4 El papel de los contraejemplos en la formación de los valores epistémicos

Distintos autores se han apoyado en el uso de contraejemplos con el fin de fomentar un desarrollo en los procesos de prueba de los estudiantes. Por ejemplo, Komatsu (2010) sugiere que los contraejemplos pueden funcionar como una fuerza conductora en los estudiantes para refinar sus pruebas.

Por su parte, Balacheff (2000) nos habla de la dialéctica entre pruebas y refutaciones como un mecanismo para el desarrollo de los procesos de validación, aunque, las refutaciones no resultan ser un recurso automático para los estudiantes. Sobre el tratamiento de los contraejemplos en el aula, se observa una diferencia fundamental con los matemáticos, ya que para el estudiante, un sólo contraejemplo no es suficiente para que renuncie a sus supuestos, a diferencia de los matemáticos quienes adoptan las reglas de validación matemática.

Respecto a lo anterior, Balacheff (2000) estable que son necesarias dos condiciones o construcciones para la conciencia de una contradicción: la existencia de una expectativa o una anticipación y la posibilidad de construir o formular una afirmación relacionada a esta expectativa, además de la posibilidad de plantear su negación.

Balacheff (2000) se apoya en la propuesta de Lakatos (1982) sobre las pruebas y refutaciones y logra identificar los siguientes tipos de comportamiento de los estudiantes, sobre el tratamiento de los contraejemplos: *abandono de la conjetura, modificación de la conjetura, modificación ad hoc de la conjetura, introducción de una condición, anotación de una excepción, regreso a la definición y el rechazo del contraejemplo.*

El trabajo de Lakatos (1982) nos ofrece una crítica y una nueva perspectiva sobre el progreso de la construcción del conocimiento matemático a través de la dialéctica entre pruebas y refutaciones. Sin embargo, los resultados de Balacheff (2000) nos muestran que hay distintos factores que intervienen en el aula sobre el tratamiento de las refutaciones en los estudiantes que son distintos a los de los matemáticos consolidados, por lo tanto el proceso puede ser distinto.

De lo anterior, podríamos suponer que el cambio del valor epistémico que asignan los estudiantes a tareas que incluyen contradicciones, no sólo no es suficiente para cambiar su parecer, sino éstas pueden pasar inadvertidas, al parecer el valor epistémico que los estudiantes tienen respecto a su actividad usual y a las evidencias perceptuales que de ella derivan conforman lo que se suele llamar una concepción robusta.

Otro factor en la aceptación, de los contraejemplos según Balacheff (2000) puede ser el que provoca la interacción social entre los propios estudiantes, este hecho puede constituirse en un obstáculo, debido a la incapacidad de coordinar sus puntos de vista y a la manifestación de la imposición entre ellos. Aunque en algunos estudiantes esta interacción puede constituirse como un motor en la evolución de los procesos de prueba, pero en ambos casos, ellos no se pueden sustraer de la influencia de lo que dicta su comunidad.

Consideramos que un tratamiento de pruebas y refutaciones como el que siguió Balacheff en sus investigaciones, da cuenta del hecho de que trabajar una dialéctica de la validación, no es suficiente para provocar en el estudiante la idea de que una racionalidad se opone a otra, ni para establecer una evolución de los procesos de prueba. Con frecuencia el estudiante además tiende a retener como válido aquel tratamiento que le ha dado algún éxito aún incluso cuando no sea completo, pero en el que pueda sentir suficiente confianza.

Las concepciones de los estudiantes sobre lo que es adecuado para resolver un problema, así como la confianza que tienen en los procedimientos que usan para ello son robustas, por ello consideramos que el papel que puede jugar un contraejemplo no es suficiente en la mayor parte de los casos para provocar un cambio en los valores epistémicos o en la credibilidad de ellos, algunos de los factores que prueban ser influyentes en este proceso de cambio son la interacción de ellos con otros estudiantes y el éxito que les ha reportado cierta estrategia, sin embargo, es mediante este tipo de experiencias que será posible que el estudiante considere la importancia de usar fuentes de evidencia intelectuales en contraste con las perceptuales.

2.5 Tipos de estructuras en la construcción del discurso de los estudiantes

El término razonamiento es usado en un una amplia gama de sentidos y significados, que consisten en determinarlo como aquel procedimiento o facultad que usa un individuo para resolver una dificultad o un problema. Específicamente llamamos razonamiento a cualquier proceso que nos permita obtener nueva información a partir de un conocimiento previo (Duval, 1998).

De esta manera, los argumentos son el producto del proceso de razonamiento. En particular estamos interesados en los argumentos válidos en procesos de razonamiento matemático. En el desarrollo de éstos, se pueden incluir, desde el punto de vista estructural, razonamientos inductivos, abductivos y deductivos, además del uso de formas de pensamiento que están influidas por la intuición y los distintos tipos de representación (Viholainen, 2011). Siendo el razonamiento deductivo el medio de validación por excelencia en matemáticas.

Consideramos que una de las dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar matemáticas es adoptar el razonamiento matemático a diferencia de otras formas de razonamiento fuera de ella. Por lo que nos lleva tomar en cuenta las distintas estructuras de los discursos que aparecen en el aula.

Una postura sobre las diferencias y relaciones de la argumentación basada en el lenguaje común y la demostración es la señalada por Duval (2002, 2007), quien sostiene que son dos formas de razonamiento que no funcionan de la misma manera, no obstante que utilizan los mismos conectivos proposicionales y formas lingüísticas semejantes. El autor mantiene que ésta es una de las razones por lo que la mayor parte de los estudiantes no entiende los requisitos de pruebas matemáticas.

Para aclarar lo anterior, Duval (2007) hace las siguientes distinciones entre la argumentación y la demostración, desde un punto de vista cognitivo: la diferencia entre el valor epistémico y el valor lógico de una proposición, el estatus del contenido de las proposiciones y la organización de la demostración al respecto de la argumentación.

Como primer punto, el autor considera que cualquier razonamiento, explícito o implícito, trabaja con proposiciones, las cuales tienen un valor y un estatus. Así, no hay razonamiento sin una organización discursiva, normada por diferencias funcionales entre sus proposiciones que la componen (Duval, 2007).

Abundando sobre esto, en la estructura de un razonamiento deductivo hay dos niveles de organización: el nivel de organización de varias proposiciones en un paso deductivo y el nivel de organización de varios pasos deductivos en una prueba (Duval, 2002).

Esto es: el nivel de organización de varias proposiciones en un paso deductivo consiste en pasar de proposiciones dadas como premisas o como hipótesis a otra proposición (conclusión), en virtud de una regla explícita. Enlazar proposiciones en un paso deductivo requiere tomar en cuenta el *estatus de una proposición* que se refiere a la función específica de una proposición dentro de un proceso discursivo. Se distingue entre estatus operatorio (premisa, conclusión y teorema) y estatus teórico (definición, conjetura, teorema, principio, regla, etc.), Duval (2007).

En cambio, en la argumentación, con base en el lenguaje común, las proposiciones no tienen estatus sino que la inferencia se basa en el contenido (Duval, 2007).

Por lo tanto, se observa una diferencia en el uso de los conectivos de la lengua (o, pero, porque, si… entonces, etc.). Mientras que en la argumentación se emplean estos conectivos para hacer explícita la relación establecida entre el contenido de dos proposiciones, en la demostración los conectivos sirven para señalar el estatus operatorio (Duval, 2007).

Nótese que el estatus es una categoría que puede aplicarse a los elementos que conforman la estructura de la demostración, es decir, en el nivel local como hipótesis, tesis o teorema, y en el nivel global de la teoría como conjetura, teorema, axioma, etc. Consideramos que además hay que hacer una distinción entre los tipos de procedimientos o estrategias propias de los estudiantes que se aplican sobre la información disponible para la demostración, es decir, estrategias algebraicas, aritméticas o figurales.

Por otra parte, Duval (2007) menciona que la brecha que hay que superar es la toma de conciencia de la complejidad implícita en el significado de las proposiciones dentro de distintas organizaciones en las cuales subyacen los distintos tipos de razonamiento. Así, el significado de una proposición es determinado por el contenido, el estatus, el valor epistémico y el valor lógico.

El valor epistémico al que se refiere Duval en esta obra, es el grado de verdad o de convicción que una persona tiene en una proposición: absurdo, irreal, posible, probable, obvio, evidente, necesario, apodíctico[3], etc. El valor epistémico "necesario" es propio del hecho de derivar deductivamente una proposición en relación a otras (Duval, 1999c). Por otra parte, el valor lógico es el valor que resulta de una prueba: verdadero, falso, indecidible (Duval, 2007).

El reconocimiento de un valor lógico de verdad de una proposición depende del valor epistémico que le es reconocido por los estudiantes, y no a la inversa (Duval, 1999c). En otras palabras, el valor epistémico de lo evidente está asociado con lo verdadero así como lo absurdo está asociado con lo falso, lo que elimina la exigencia de una prueba en los estudiantes. Así, una proposición que es evidente simplemente por la comprensión de su contenido o por una constatación visual, podría llevar a un estudiante a considerarla automáticamente como verdadera (Duval, 1999c).

El valor epistémico depende del conocimiento base del sujeto y de la comprensión de la proposición, que puede apoyarse en aspectos teóricos o basados en el lenguaje común. De esto resulta, un primer conflicto entre los valores epistémicos del profesor y el de los alumnos, los cuales pueden ser diferentes (Duval, 2002).

Dado que el valor epistémico es parte del sentido de una proposición es necesario determinarlo en los estudiantes, ya que es el grado de fiabilidad o convicción de una proposición (Duval, 1999c) y hace referencia a las creencias arraigadas de los estudiantes. A este respecto, Duval (1999c) afirma que:

> *La* ***explicitación del valor*** *epistémico de una proposición se hace a través de su engarce en aquellas expresiones que luego Russell y Carnap se llaman "actitudes proposicionales", y más generalmente, a través del recurso a las construcciones que se llaman completivas: "yo creo que…", "se admite que…", "estoy seguro*

[3] Incondicionalmente cierto, necesariamente válido

que…", "es evidente que…", "es imposible que…", etc. Una misma proposición p puede ser engarzada en expresiones de actitud proposicional diferentes según el estado del conocimiento del sujeto que la comprende: "yo creo que p", "es evidente que p"…

Sin embargo, se observará que lo más frecuente es que el valor epistémico de una proposición quede implícito. Esto, por una simple razón: la comprensión de la proposición implica la determinación del valor epistémico de su contenido. Para que se explicite el valor epistémico de una proposición, es necesario que haya un conflicto cognitivo potencial… Tal conflicto no surge sólo de la presencia de una contradicción lógica entre dos proposiciones, sino también en la presencia de una escogencia de valores epistémicos para una misma proposición. Este conflicto puede ser más fuerte cuando los valores epistémicos pueden ser tan extremos como evidente o absurdo." (Duval, 1999c, p. 172)

Como se mencionó anteriormente, la presencia de un contraejemplo no es suficiente para provocar una evolución en los procesos de prueba, por lo que al igual que Duval, consideramos que es necesario un conflicto cognitivo potencial, esto es, que la situación provoque una reorganización sobre lo que se cree y lo que no. Este conflicto no es de tipo lógico, su naturaleza es más bien de tipo epistémico porque se provoca desconfianza en lo supuesto anteriormente y obliga al estudiante a reformular su postura respecto a la nueva situación, es decir, hay un conflicto con la escogencia de los distintos valores epistémicos.

Por otra parte, para Duval (2007) el resultado de cualquier razonamiento no es sólo producir nueva información, sino también y sobre todo, el cambio del valor epistémico de una proposición cuya verdad queremos probar o para intentar convencer a alguien más sobre esta.

Los distintos razonamientos juegan sobre una amplia gama de valores epistémicos, sin embargo, un razonamiento válido en matemáticas apunta sobre los valores epistémicos de necesario y apodíctico (Duval, 1999c).

Para entender la organización de un paso deductivo y el modus operandi de un teorema, los estudiantes deben experimentar que el razonamiento cambia el valor epistémico de lo que es afirmado como conclusión que va desde lo visualmente obvio a un valor epistémico de necesario (Duval, 2002).

Por otro lado, e*l nivel de organización de varios pasos en una prueba* es el lazo entre dos o más pasos deductivos. La conclusión de un paso es tomado en el siguiente, pero su estatus cambia. La premisa de un paso debe ser la conclusión de un paso previo o debe ser la hipótesis. Desde la primera conclusión hasta la conclusión final, el razonamiento deductivo se mueve hacia adelante a través de sustituciones sucesivas de conclusiones válidas, mostrando continuidad entre las conclusiones. En la argumentación, apoyada en el lenguaje común, no hay un enlace de las proposiciones como la anterior (Duval, 2002).

Sin embargo, debemos acotar que este camino está lleno de tropiezos debido a que para llevarse a cabo, el estudiante debe adquirir experiencia suficiente para poder decidir cuál de todos los caminos es el adecuado para llegar a la tesis.

Desde nuestro punto de vista, la postura de Duval hace referencia a los diferentes tipos de discursos distinguiendo por un lado aquel propio de la matemática y el que se establece en el lenguaje común, esta distinción se centran en la diferencia entre el valor epistémico y el valor lógico de una proposición además del estatus del contenido de las proposiciones y la organización de la demostración al respecto de la argumentación.

Respecto a la argumentación en clase, se observa que los estudiantes cometen los siguientes errores: mezclar hipótesis con su conclusión, confundir una proposición con su reciproco, no constatar las condiciones de aplicación de un teorema y vacíos en el progreso del razonamiento.

Por otro lado, si bien la validación en matemáticas se lleva a cabo a través del razonamiento deductivo, tenemos otros tipos de razonamiento que pueden jugar un papel importante en el proceso de demostración en Geometría, tales como: el abductivo y el inductivo.

La abducción es una inferencia la cual permite la construcción de una afirmación comenzando de un hecho observado (Magnani, 2001: Pierce 1960; Polya, 1962; citados por Pedemonte, 2007, p.29). La conclusión de una abducción es plausible, no cierta, y procede hacia atrás, desde un resultado o consecuente hacia un caso o antecedente (Pedemonte, 2007). Por su parte Meyer (2010), considera que la abducción es el proceso en el cual el individuo forma hipótesis con el fin de explicar hechos que deben ser verificados, debido a que no se garantiza su validez.

Mientras que la inducción se refiere a una inferencia la cual permite la construcción de una afirmación generalizada desde algunos casos particulares (Fann, 1970; Polya, 1954; citados por Pedemonte, 2007, p.29).

La intención de esta investigación relacionada con el uso de situaciones de conflicto con el fin de cambiar la credibilidad del estudiante, desde lo perceptual hasta lo conceptual en lo que se refiere a la prueba geométrica, hizo importante considerar distintos tipos de estructuras de razonamiento tanto abductivas como inductivas y deductivas.

Al respecto de estos razonamientos, Pedemonte (2007) propone analizar la argumentación y la prueba matemática desde un punto de vista estructural. La conexión lógica entre las proposiciones de una argumentación difiere a la de una prueba, es decir, cada paso de la prueba matemática puede ser descrito como un paso deductivo, mientras que en la argumentación puede ser de distinta naturaleza como el caso de los pasos abductivos e inductivos.

En el caso de pruebas deductivas, la autora afirma que se requiere un cambio estructural: de los pasos o procesos abductivos e inductivos hacia pasos o procesos deductivos. Si la prueba y la argumentación tienen igual estructura, entonces hay una continuidad estructural, aunque es difícil encontrar argumentaciones deductivas (Pedemonte, 2007).

En este trabajo consideramos que aunado a lo dicho por Duval (2007), respecto a los diferentes tipos de discursos puestos en funcionamiento en el aula, es necesario tomar en cuenta los razonamientos abductivos e inductivos como estructuras que organizan el discurso de los estudiantes con el propósito de dar sentido a la demostración a partir de los indicadores del rigor matemático y atendiendo lo relativo al desarrollo de valor epistémico de esta actividad.

2.6 Visualización en Geometría Euclidiana

A continuación mostramos aspectos de la actividad geométrica que tienen que ver con la importancia del razonamiento visual para fomentar la comprensión en Geometría

(Herschkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996), el tipo de representación con las que trata la Geometría y los procesos cognitivos involucrados en esta materia, en especial, la caracterización de la visualización como medio heurístico de trabajo (Duval, 1995,1998).

La visualización es la estructura cognitiva más cercana a la adopción de ideas perceptuales, es a través de esta actividad, que toma forma la llamada intuición, que al decir de Fischbein (2002) tiene aspectos ligados a la credibilidad: ser autoevidente, tener certeza intrínseca, ser perseverante, ser coercitiva, que adquiere un estatus teórico, ser extrapolativa, ser global, hacer implicaciones y ser sumaria.

La visualización juega un papel esencial en la comprensión, coordinación y organización de los elementos figurales y discursivos que participan en el desarrollo de las pruebas de los estudiantes. Sin embargo, en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en Geometría se enfocan en la presentación de las pruebas geométricas como la escritura de una cadena deductiva de argumentos, y así se tiende a descuidar aspectos visuales y pictóricos de la figura geométrica que participan en el proceso de validación de los estudiantes.

Herschkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) mantienen que las representaciones visuales o formas visuales pueden ser medios para una mejor comprensión de los conceptos, procesos y fenómenos de diferentes áreas de las matemáticas.

Por lo que una educación visual es necesaria para una correcta y efectiva interacción con las formas, sus relaciones entre ellas, sus transformaciones y sus interacciones con otras entidades. La forma visual de pensar y razonar no es trivial, y ésta debe ser correctamente planeada en una educación visual y es por medio de un enfoque fenomenológico que el estudiante puede tener una mejor comprensión del espacio y la forma. (Herschkowitz *et al*, 1996).

El razonamiento visual no sólo es un apoyo intuitivo del razonamiento, sino que es la columna vertebral de una prueba rigurosa, ya que éste nos lleva a una nueva forma de mirar la situación y así desarrollar el proceso de demostración, siendo éste en algunas ocasiones el principal método de ataque (Hershkowitz, 1998).

Por otro lado, estaremos considerando a la figura en términos de Mesquita (1998), quien las considera como de naturaleza externa e icónica. Externa, significa que está incorporada materialmente en papel u otro apoyo. Icónica o figurativa, significa que está centrada en una imagen visual (en oposición a otros posibles sistemas semióticos).

Por otra parte, teniendo en cuenta que todo objeto geométrico tiene un conjunto de atributos críticos (características relevantes) y un conjunto de ejemplos (Herschkowitz, 1989), es que consideramos el fenómeno del prototipo, que consiste en aquellos ejemplos de los objetos geométricos que son más populares y mejor reconocidos que otros (Schwarz y Herschkowitz, 1999).

Lo que resulta valioso en Geometría debido a que el carácter de ser o no prototipo establece preferencias que afectan el valor epistémico dado a la figura, estos autores afirman que cada concepto tiene uno o varios prototipos y que el estudiante al enfrentarse a la figura geométrica debe diferenciar entre los aspectos relevantes y aquellos que no lo son.

Las figuras o representaciones gráficas de los objetos geométricos son entonces visibles y exhiben aspectos reconocibles, estas cualidades nos permiten trabajar las proposiciones matemáticas asociadas a las figuras que le dan cuerpo a los objetos geométricos de manera que tenemos una representación particular que hace referencia a las propiedades abstractas del objeto geométrico lo que hace que tenga una naturaleza dual.

El tratamiento de las figuras geométricas requiere de la visualización porque es a través de ellas que tenemos acceso a modelos que nos representan las condiciones bajo las cuales las proposiciones son ciertas o no.

En particular Duval (1999a) distingue entre visión y visualización, los cuales son dos procesos que no juegan el mismo papel en el desarrollo del razonamiento matemático. En su propuesta, la visualización en matemáticas es aquella en la que se construyen representaciones semióticas y es la que usamos para identificar las propiedades y relaciones entre las figuras, las posibles organizaciones de éstas y las modificaciones configurales, por ello es el tipo de visualización que estamos interesados en fomentar entre nuestros estudiantes.

En particular, el tratamiento figural del que habla Duval (1998) destaca la importancia de la relación Gestalt entre los componentes de la figura o elementos figurales:

> *"- Ser una configuración, esto es ser una unión o fusión de varias gestalts constituyentes teniendo relaciones entre ellas las cuales caracterizan la configuración.*
>
> *- Estar anclada en un enunciado que fija algunas propiedades representadas por la Gestalt (hipótesis). Este anclaje discursivo da la entrada matemática en la figura (condición de la prueba)."* (Duval, 1998, pág. 39)

Por otra parte, con el fin de analizar el trabajo heurístico de una figura, Duval (1995) la considera como una aprehensión cognitiva. Este autor distingue cuatro tipos de aprehensiones cognitivas: perceptual, secuencial, discursiva y operativa.

La aprehensión perceptual indica la habilidad de nombrar figuras y reconocer en éstas varias subfiguras, la aprehensión secuencial es requerida para describir una construcción, la aprehensión discursiva se refiere a que las propiedades representadas en un dibujo sean determinadas a través de la aprehensión perceptual y la aprehensión operatoria se refiere a las varias formas de modificar la figura.

Duval (1995) nos menciona que para funcionar como una figura geométrica, un dibujo debe evocar al menos la aprehensión perceptual combinada con una de las otras tres aprehensiones. Pero, es mediante la aprehensión operatoria que logramos entender las modificaciones de una figura, y así lograr obtener una idea de la solución del problema geométrico en cuestión.

Duval (1995) distingue cuatro maneras de modificar una figura:

- Mereológica: consiste en dividir el todo de una figura en partes de distintas formas, y así combinar estas partes en otra figura o subfigura.
- Óptica: consiste en hacer más grande o angosta la figura, incluso inclinarla.
- De lugar: es cambiar la orientación o la posición de la figura.

Cada una de estas modificaciones, pueden ser realizadas mental o físicamente (Duval, 1995). Así, en un problema de Geometría, estas modificaciones pueden mostrar la solución o sugerir las ideas principales de una demostración (Mesquita, 1989, citado por Duval, 1995).

Por lo tanto, al resolver problemas es necesario un desarrollo de habilidades que consisten en un reconocimiento figural y en establecer conexiones de este reconocimiento con el proceso discursivo. Lo que nos lleva a hacer hincapié en la asociación entre los objetos geométricos, sus propiedades y sus relaciones para observar mereológicamente su estructura.

La visualización que requiere la demostración en Geometría está relacionada con la relación entre la actividad de visualización y la de razonamiento.

2.7 Uso del conflicto cognitivo

Distintos estudios (ej. Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000, 2002; Prusak, Hershkowitz y Scharwz 2011; Stylianides y Stylianides 2008, 2009; Zaslavsky 2005; Zazkis y Chernoff 2008) han abordado el uso del conflicto cognitivo como un mecanismo para promover un aprendizaje significativo sobre la demostración. Lo anterior, a través de confrontar la comprensión, las creencias y las concepciones de los estudiantes con el fin de establecer una necesidad de explicaciones deductivas que superen el conflicto.

Es por medio del contraejemplo, la contradicción y la incertidumbre que se intenta establecer un conflicto cognitivo en los estudiantes. La contradicción puede conducir a los estudiantes hacia la incertidumbre de los resultados que obtienen, llevándolos a una búsqueda de explicaciones deductivas que superen la contradicción (Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000, 2002; Hadas y Hershkowitz 2002). Además la incertidumbre puede hacer que los estudiantes tomen conciencia del rol de la demostración como una herramienta de convicción (Hadas y Hershkowitz, 1999).

Sin embargo, a pesar que un contraejemplo es un concepto matemático que refuta una proposición, éste no necesariamente conduce a una situación identificada como contradicción en los estudiantes, como ya hemos comentado. Además de que no es suficiente con tratar de establecer un conflicto para fomentar el desarrollo de la comprensión de los alumnos de manera estable, sino también un medio adecuado para superarlo (Zazkis y Chernoff, 2008).

Por lo tanto es necesario establecer un entorno adecuado para propiciar el desarrollo de la comprensión matemática y la formación de los valores epistémicos de los estudiantes.

Por su parte, Prusak, Hershkowitz y Schwarz (2011) nos muestran cómo a través de un tratamiento llamado diseño argumentativo se puede producir una argumentación productiva. Se entiende por argumentación productiva al cambio de un razonamiento basado en intuiciones y apoyadas principalmente en la imagen a otro tipo de razonamiento producido por una necesidad lógica.

Éste diseño se basa en tres principios que son: una *situación de conflicto, situación de colaboración y proveer un dispositivo para constatar y controlar las hipótesis* (Prusak *et al*, 2011).

La *situación de colaboración* es aquella en la que dos o más personas aprenden o intentan aprender juntas, compartiendo objetivos. El *dispositivo* es fundamental para la toma de decisiones, mover a la discusión y confrontar expectativas y evidencias conflictivas.

La situación de conflicto consiste en establecer un *conflicto cognitivo*, éste ocurre cuando los estudiantes se confrontan con datos u opiniones que contradicen sus argumentos iniciales.

Johnsson y Johnsson (1998, citado por Prusak *et al*, 2011, p.22) mencionan dos tipos de conflictos importantes en la enseñanza y aprendizaje*: los conflictos conceptuales y los conflictos de controversia*. Los primeros ocurren cuando la información recibida no es consistente con la asumida anteriormente por los estudiantes. Mientras que los segundos ocurren cuando las ideas, afirmaciones y conclusiones de un estudiante son incompatibles con las de otro, formando una controversia que conduce a una búsqueda entre los estudiantes para llegar a un acuerdo.

Consideramos que la actividad de validación en los términos de una producción argumentativa como la que mencionan Prusak *et al* (2011), es en la que deseamos situarnos para los fines de esta investigación, en la necesidad de un cambio de valor epistémico entre los estudiantes que va desde sus concepciones apoyadas en la evidencias perceptuales hasta las necesarias para llevar a cabo una demostración, apoyándose en evidencias intelectuales.

Nos referimos a un conflicto que puede establecerse desde la interacción entre los estudiantes para abordar una contradicción, donde se ponen en juego distintas concepciones en la toma de decisiones que mueven la discusión para confrontar expectativas de cada uno, hasta el conflicto potencial mencionado por Duval (1999c) entre la escogencia de valores epistémicos que propicia este tipo de situación.

2.8 Preguntas e hipótesis de investigación

Teniendo en cuenta lo anteriormente discutido, planteamos a continuación nuestras hipótesis y preguntas de investigación:

Hipótesis de trabajo

Los estudiantes con experiencia en demostración podrían aprovechar un entorno de conflicto para dar sentido a la demostración

Hipótesis de investigación

La situación de conflicto cuidadosamente diseñada puede provocar un cambio en la formación de los valores epistémicos de los estudiantes haciéndoles adoptar evidencias de tipo intelectual.

Considerando que en este trabajo se hace una formulación de enunciados que son válidos para un número finito de casos, esto con el fin de observar los cambios que en el valor epistémico asociado a la figura por un lado y la información discursiva formada por teoremas definiciones y conocimientos matemáticos previos por otro, es que las preguntas de investigación se plantean de la siguiente manera:

1. ¿Cómo funciona el valor epistémico de los estudiantes cuando se les solicitan justificaciones de representaciones gráficas que son válidas en casos específicos?

2. ¿Cuál es el papel que la representación gráfica juega en estas tareas?

3. ¿De qué manera se propicia el cambio cognitivo entre los estudiantes cuando se incluye el conflicto como método constructivo?

3. Metodología

3.1 Introducción

Con el fin de alcanzar nuestro objetivo en la dirección de analizar el valor epistémico de los estudiantes e introducir actividades rigurosas para provocar cambios en éste o en la credibilidad asignado a la figura y las inferencias asociadas a una prueba, se realizó un diseño experimental que se llevó a cabo con estudiantes que tenían experiencia en demostración escolar en matemáticas.

Para fomentar el análisis de las relaciones estructurales de las figuras geométricas y el desarrollo de la demostración, es necesaria la construcción activa por parte del estudiante de recursos en donde se relacionan distintos tipos de razonamientos sobre las figuras geométricas, las cuales requieren de un tratamiento especial para la detección, organización y elección de la información relevante.

En este trabajo damos especial importancia a actividades que contradicen las expectativas de los estudiantes, a través de conflictos cognitivos, esto con el fin de fomentar un cambio de la credibilidad en los aspectos perceptuales de las figuras hacia las propiedades estructurales de éstas, donde deberá encontrar las condiciones bajo las cuales la proposición propuesta es cierta.

3.2 Participantes

En este trabajo consideramos clave el primer año de licenciatura en matemáticas, ya que en este año es cuando los estudiantes desarrollan su perspectiva sobre la necesidad de la demostración en la actividad matemática, la necesidad del rigor y la preferencia de un tipo de prueba sobre otra.

El estudio se llevó a cabo con 6 sujetos de nivel universitario cuatro mujeres y dos hombres, cuya edad osciló entre los 18 y 20 años. Ellos comenzaban el segundo semestre de la Licenciatura de Matemáticas en Universidad Autónoma de Zacatecas, en particular, empezaban el curso de Geometría Moderna en donde las primeras semanas se abordó la Geometría Euclidiana.

Los estudiantes, con base a la formación previa, conocían los contenidos básicos de Geometría plana y ya habían tenido experiencia con la demostración en sus cursos de matemáticas de nivel medio superior y en las asignaturas de Álgebra Superior y Cálculo

Diferencial de la licenciatura de matemáticas y comenzaban un estudio formal de las demostraciones geométricas.

Los estudiantes participaron de manera voluntaria como parte de un taller complementario al programa normal de estudios.

3.3 Puesta en escena de la investigación

La puesta en marcha de la actividad experimental fue llevada a cabo en un pequeño taller de tres sesiones de dos horas cada una, en el transcurso de una semana como parte del apoyo de los cursos regulares de Geometría moderna.

En cada sesión se propuso una secuencia de actividades cuyo objetivo era evidenciar y analizar el desarrollo o no de los valores epistémicos o la credibilidad involucrados en los procesos de validación en Geometría, esta secuencia tenía un orden especifico, en los primeros momentos se exploró lo relativo a sus preferencias y formas de proceder respecto a las figuras geométricas, en un segundo momento se buscó establecer conflictos conceptuales y de controversia a partir de los distintos problemas, en un tercer momento la controversia y los conflictos fueron abordados en conjunto de forma que los estudiantes pudieron resolverlos.

En la estructura operativa del planteamiento de los problemas procuramos establecer una situación de conflicto y una situación de colaboración. Lo anterior en un ambiente de lápiz y papel, aclaramos que no se hizo uso de la computadora ya que la figura es abordada de forma distinta debido a que los comandos inducen otro tipo de comportamientos.

3.4 Instrumento

Con el fin de alcanzar nuestro objetivo de investigación, se diseñó un cuestionario que proponía actividades que planteaban conflictos cognitivos, esto con el fin de fomentar un cambio en la credibilidad de los aspectos perceptuales de las figuras apoyadas en las propiedades estructurales de éstas y dar sentido a los razonamientos inductivos, deductivos y abductivos.

Usamos proposiciones válidas en un número finito de casos cuyo análisis requiere de un tratamiento detallado del dibujo de la figura en cuestión. Con el fin de que el estudiante encontrara las condiciones bajo las cuales es cierta la proposición propuesta.

El desarrollo de nuestro diseño consistió en dos etapas. La primera consistía en indagar y explorar las formas de validación de los estudiantes de manera individual en problemas abiertos, en especial deseábamos establecer si los estudiantes incorporaban características irrelevantes a las figuras propuestas basados en un acercamiento meramente visual. Posterior a la solución de algunos problemas se les mostró a los estudiantes una figura que pretendía ser un contraejemplo relacionado con las posibles pruebas de ellos, con el fin de indagar sobre el tipo de argumentos que los estudiantes mantenían a partir de ella, por ejemplo ver Tabla 1.

Tabla 1. *Problemas primera fase.*

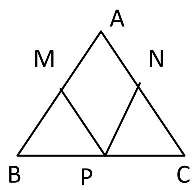
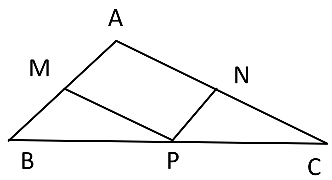
Enunciado	Figura	Posible contraejemplo
Sea un triángulo $\triangle$ABC tal que MP II AC, AB II NP y P es el punto medio de BC. ¿Son iguales CM y BN?		

Tabla 1. Problema 9 de la primera etapa.

En la segunda etapa se abordaron una serie de problemas en donde se fomenta el uso de los razonamientos abductivos, inductivos y deductivos para su solución, además de establecer conflictos en la convicción en los tipos de prueba usados por los estudiantes. En la Tabla 2 se muestra en un ejemplo de los problemas de la segunda etapa.

Tabla 2. *¿Es posible inscribir un triángulo equilátero sobre otro triángulo equilátero?*

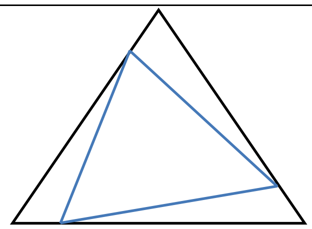
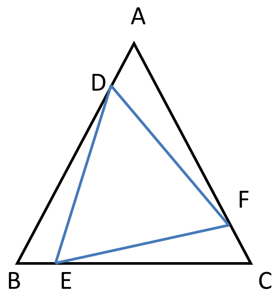


Tabla 2. Problema 2 de la segunda etapa.

Los distintos problemas se pueden abordar de diversas maneras para establecer si es posible o no de inscribir una figura sobre otra del mismo tipo, además de una forma de determinar tal figura inscrita. Estas maneras pueden ser: a través del análisis de casos específicos de figuras, por medio de la abducción o la deducción. Por ejemplo, en la Tabla 3 se muestran tres formas de abordar el problema de inscribir un triángulo equilátero sobre otro triángulo equilátero.

Tabla 3. *Formas de abordar los problemas.*

Formas Problema	Análisis de casos en concreto	Abducción	Deducción
Caso del triángulo equilátero 	Analizar el caso de los puntos medios del △ ABC. Analizar los puntos tercios, cuartos, quintos, etc. De los lados del △ ABC. De modo que si tomamos distancias iguales en cada lado,△ DEF es equilátero.	Supongamos que el △DEF es un triángulo equilátero. Luego ∠EDB + ∠DBE + ∠BED =∠BED + ∠DEF + ∠FEC Entonces ∠FEC=∠EDB Por lo tanto △EDB=△FEC (ALA) Análogamente en △ DFA De modo que si tomamos distancias	Sean los puntos D, F Y E tal que DA=CF=BE. Entonces △FAD=△DBE=△ ECF (LAL) Por lo tanto, △DEF es equilátero.

		iguales en cada lado, $\triangle$ DEF es equilátero.	

Tabla 3. Distintas maneras de abordar los problemas

Por último, los estudiantes confrontaron sus ideas respecto a los problemas planteados grupalmente al final de cada etapa, lo que provocó que muchas de sus ideas originales fueran puestas en duda así como su credibilidad respecto a los tipos de pruebas que desarrollaron anteriormente. Para revisar las actividades de manera íntegra, sugerimos ir al anexo.

Además del cuestionario planteado, se realizaron entrevistas informales a lo largo del desarrollo de las actividades.

3.5 Descripción de las actividades

A continuación mostramos algunos fragmentos representativos de las actividades aplicadas durante las sesiones, así como la explicación de los objetivos específicos de éstas.

3.5.1 Primera etapa

Con el fin de indagar y explorar las validaciones de los estudiantes de manera individual, planteamos problemas abiertos en los cuales en ningún momento se les pidió de forma explícita la demostración o prueba de sus resultados, esto se debió a que deseábamos observar el tipo de acercamientos preferidos por los estudiantes frente a este tipo de tareas.

A continuación en la Tabla 4 presentamos unos ejemplos en donde establecemos el objetivo y detallamos los posibles conflictos esperados en su solución:

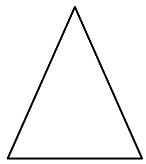
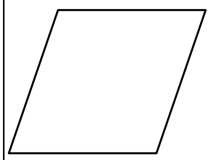
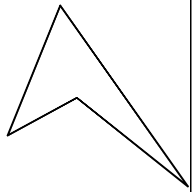
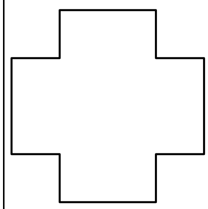
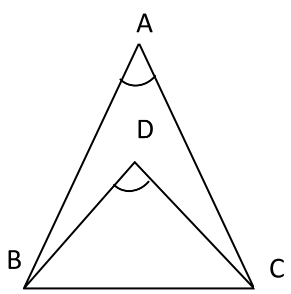
Tabla 4. *Problema de la primera etapa*				
Enunciado	Dibuja y di cuántas diagonales tienen los siguientes polígonos.			
Figura geométrica presentada.				
Objetivo	Indagar si la figura está en relación al número de diagonales encontradas en los polígonos presentados.			
Posible Conflicto	Un posible conflicto se planteó en el sentido de que los estudiantes tienen diferentes concepciones sobre lo que es una diagonal de un polígono, además que en la última figura presentada es muy difícil dibujar todas las diagonales. Por ejemplo, consideran que una diagonal tiene que estar en el interior del polígono, sin embargo esta consideración no se mantiene en las distintas figuras geométricas presentadas.			

Tabla 4. Problema 3 de la primera etapa.

También queríamos ver si ellos asumían la responsabilidad de la verdad además de que tuvieran libertad para explorar la situación. En especial deseábamos establecer si los estudiantes incorporaban características irrelevantes a las figuras propuestas, basados en un acercamiento meramente visual.

Otro tipo de problemas consistió en indagar si los estudiantes eran capaces de detectar, organizar y seleccionar la información relevante de la figura geométrica y el papel de la visualización en la producción de sus pruebas.

Tabla 5. *Problemas de la primera 4-1 y 6-1*		
Enunciado	Figura	Objetivo
Dado un triángulo cualquiera $\triangle$ABC y D un punto en el interior de $\triangle$ABC ¿Cómo es el ángulo $\angle$A respecto del ángulo $\angle$D (mayor, igual o menor)?		Indagar si los estudiantes detectar, organizar y seleccionar la información relevante del diagrama en una forma deductiva.

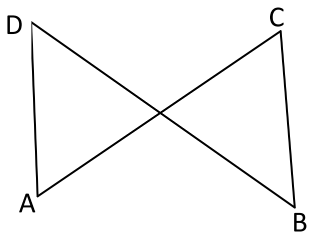
Si en la siguiente figura AD=BC y AC=BD ¿Cómo es ∠A respecto de ∠B (mayor, menor o igual)?		Indagar si los estudiantes descomponen y detectan las subfiguras relevantes y realizan el trazo auxiliar para la prueba.

Tabla 5. Problemas 4 y 6 de la primera etapa.

Posterior a la solución de los estudiantes se les mostró una figura geométrica relacionada con el problema en cuestión, con el fin de convertirse en contraejemplo en aquellos casos en los cuales se basaban en consideraciones meramente visuales. Lo anterior, con el fin de indagar sobre el tipo de argumentos que los estudiantes mantenían e intentar propiciar un conflicto cognitivo. Por ejemplo ver Tabla 6.

Tabla 6. *Ejemplos de problemas propuestos en la primera etapa.*

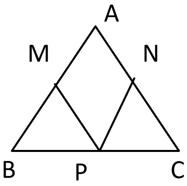
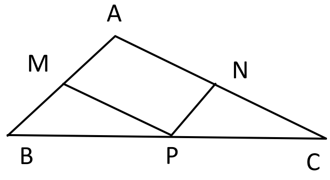
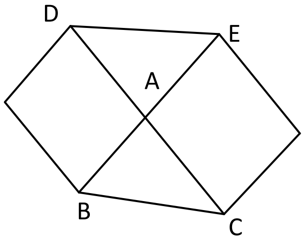
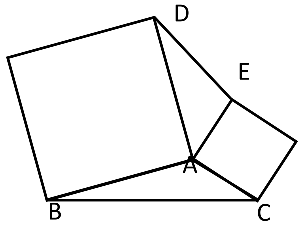
Problema	Figura inicial	Figura de prueba
Sea un triángulo △ABC tal que MP II AC, AB II NP y P es el punto medio de BC. ¿Son iguales MB y CN?		
Sea △ABC un triángulo cualquiera, se trazan dos cuadrados sobre los lados AB y CA y sean D y E los vértices de los cuadrados para formar el △DAE. ¿Son iguales los triángulos △ABC y △DAE?		

Tabla 6. Problemas 8 y 9 de la primera etapa.

3.5.2 Segunda Etapa

Esta etapa consistió en plantear una serie de problemas similares en donde se fomentó el uso de razonamientos abductivos, inductivos y deductivos para su solución.

En la Tabla 7 se muestra la idea general de la problemática en cuestión.

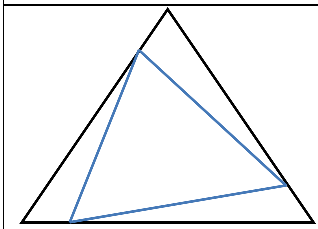
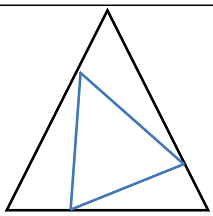
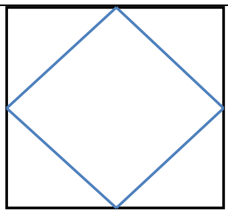
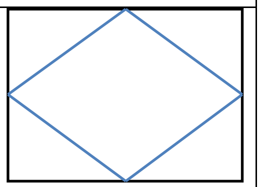
Tabla 7. *¿Es posible inscribir una figura dentro de otra del mismo tipo?*			
Triángulo equilátero	Triángulo isósceles	Cuadrado	Rectángulo
			

Tabla 7. Problemas de la segunda etapa.

La situación planteada consistió en involucrar a los estudiantes en determinar si era posible inscribir una figura dentro de otra del mismo tipo, además se les pidió determinar una forma clara de cómo inscribir las figuras y se les cuestionó si tal forma siempre era posible.

Después se les sugirió una metodología de trabajo que buscaba proporcionar a los estudiantes un *motor de búsqueda* de las propiedades estructurales de las figuras geométricas abordadas, que consistió en establecer un modelo genérico de acción sobre las figuras.

En este caso se refería a construir una figura localizando puntos sobre los lados de la figura original a una distancia igual sobre cada lado, de manera que uniendo los puntos marcados se tenía una figura que era del mismo tipo que la figura original.

Esta situación es muy rica como experiencia para el estudiante debido a que no tiene familiaridad con este tipo de propuestas y también debido a que provoca un cambio de valor epistémico frente a una proposición que funciona sólo para cierto tipo de figuras como el triángulo equilátero o el cuadrado, pero falla en el rectángulo.

A continuación mostramos el orden en el que fueron presentados los distintos problemas, cuestionamientos y objetivos específicos. En la Tabla 8 mostramos el segundo problema planteado así como los principales cuestionamientos, recomendaciones y objetivos de la actividad.

Tabla 8. *Objetivos específicos*

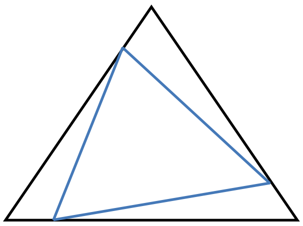
Problema	Cuestionamientos y recomendaciones	Objetivos
¿ Es posible inscribir un triángulo equilatero dentro de otro triángulo? 	1. La primera pregunta se planteó de manera general si era posible o no hacer este tipo de construcción. 2. Se les cuestionó si existe una relación entre los triángulos para determinar la construcción. 3. Se les recomendó analizar el triángulo de los puntos medios o suponer que han encontrado el triángulo inscrito y determinar las condiciones necesarias para la construcción. 4. Se les preguntó que si era posible determinar otros triángulos equiláteros inscritos diferentes a éste. 5. Se les cuestionó cuantos triángulos inscritos se pueden encontrar, con las condiciones establecidas, y cómo determinarlos. 6. Se les planteó en la discusión de la solución un modelo de acción a los estudiantes.	1. Explorar las distintas estrategias que siguen los estudiantes. 2. Determinar el nivel de generalización de la respuesta anterior. 3. Fomentar los razonamientos inductivos y abductivos. 4. Confrontar a los estudiantes con la generalidad de los enunciados que mantenían. 5. Establecer en los estudiantes un modelo de acción sobre el triángulo equilátero para determinar la construcción requerida. 6. Establecer el motor de búsqueda descrito anteriormente.

Tabla 8. Problema 2 de la segunda etapa.

En la Tabla 9 se presenta el problema 3 de esta fase.

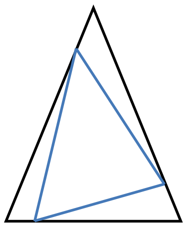
Tabla 9. *Objetivos específicos*		
Problema	Cuestionamientos y recomendaciones	Objetivos
¿Es posible inscribir un triángulo isósceles dentro de otro triángulo isósceles, bajo el modelo de acción descrito anteriormente? 	1. Se puso en juego la validación del modelo de acción propuesto.	1. Confrontar la convicción del modelo de acción de los estudiantes. 2. Indagar la credibilidad de los estudiantes en sus procesos de prueba y su tratamiento sobre la figura en relación con el motor de búsqueda.

Tabla 9. Problema 3, segunda etapa.

Para más información ver las secuencias de actividades completas que aparecen en el anexo.

3.6 Recolección de datos

Los medios utilizados para registrar los datos que se obtuvieron durante el experimento fueron:

1. La producción escrita de los estudiantes de los cuestionarios propuestos

2. La videograbación de las actividades y la transcripción de las escenas más representativas particularmente las discusiones de las parejas como grupales.

3. Apuntes de la bitácora del investigador

El análisis de los datos fue esencialmente cualitativo, destacando los eventos en donde, desde nuestro punto de vista, se dan o no cambios en la credibilidad de los estudiantes

4. Resultados

4.1 Primera etapa. Trabajo individual de los estudiantes

En los resultados mostrados a continuación se enfatizan las actividades en la que los estudiantes tuvieron que confrontar sus ideas y evidenciar su credibilidad o valor epistémico al realizar las pruebas de los distintos problemas, de manera que mostraremos preferentemente estas situaciones.

4.1.1El problema de las definiciones de las diagonales

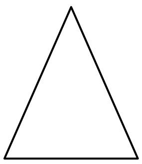
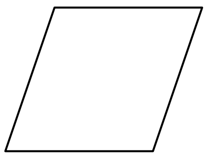
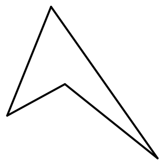
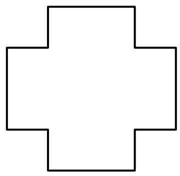
Tabla 10. *Problema de las diagonales.*				
Enunciado	Dibuja y di cuantas diagonales tienen los siguientes polígonos.			
Figura geométrica presentada.	Figura 1 	Figura 2 	Figura 3 	Figura 4 

Tabla 10. Problema 3-1

En el problema 3-1 se pretendía analizar las distintas concepciones de los estudiantes sobre lo que es una diagonal de un polígono. A continuación en la Tabla 11, se muestra las respuestas de los estudiantes sobre el número de diagonales.

Tabla 11. *Resultados del problema de las diagonales*.			
Respuestas	Línea que pasa por un vértice y que divide simétricamente.	Línea que pasa por un vértice y que divide el área por la mitad	Línea interior que pasa dos vértices no contiguos.
Alumnos	A6	A1, A5 Y A3	A2 Y A4

Tabla 11. Distintas concepciones sobre la diagonal de un polígono.

Observamos que sólo dos de ellos pueden dar un acercamiento a la definición pese a la indicación sobre el carácter interior. Los cuatro restantes están sujetos a la descripción de un caso particular en que aparecen las diagonales.

Además que el número de diagonales determinadas por los estudiantes estaba relacionado con las diagonales que ellos podían dibujar sobre la figura, es decir, su respuesta está relacionada con lo ostensivo de la figura. En los casos de los estudiantes A4 y A5, el problema provocó una evolución de las concepciones acerca de la diagonal, como ejemplo mostramos la respuesta del estudiante A4 en la Figura 7.

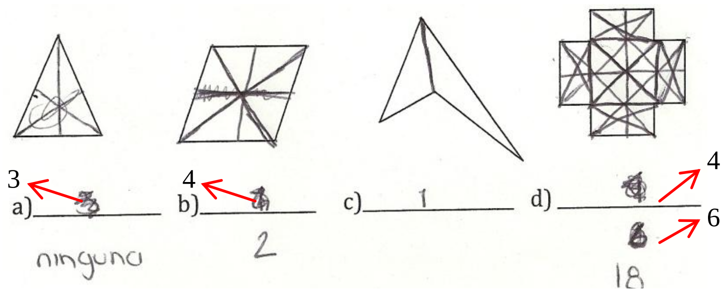


Figura 7. Respuesta del estudiante A4

En un primer momento, el estudiante consideró a la diagonal como aquella recta que divide a la figura simétricamente, como en las primeras respuestas de los incisos a, b y d. Después, el estudiante transformó su concepción al considerar la diagonal como aquella recta interior de la figura que pasa por dos vértices no contiguos. Esta transformación fue obligada por el tipo de ejemplos que tuvieron que ir resolviendo, que fue en general desde considerar una línea que divide a la mitad a la figura y que pasa por un vértice hasta aquella línea interior que pasa por dos vértices no contiguos.

4.1.2 Problemas de interpretación y manipulación de la figura.

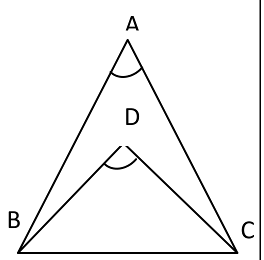
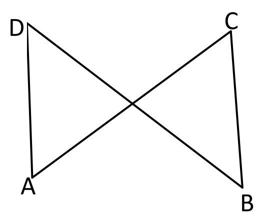
Tabla 12. *Problemas de interpretacion y manipulacion de la figura*.			
Problema 4	Figura sugerida	Problema 6	Figura sugerida
Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ y D un punto en el interior de $\triangle ABC$ ¿Cómo es el ángulo $\angle A$ respecto del ángulo $\angle D$ (mayor, igual o menor)?		Si en la siguiente figura AD=BC y AC=BD ¿Cómo es $\angle A$ respecto de $\angle B$ (mayor, menor o igual)?	

Tabla 12. Problemas 4-1 y 6-1.

En los problemas 4-1 y 6-1 se ponía en juego la interpretación y manipulación de las figuras para evidenciar la credibilidad o valor epistémico puesto en juego en las pruebas de los estudiantes. En la Tabla 13, mostramos los tipos de respuestas que se dieron sobre el problema 4-1.

Tabla 13. *Tipos de respuesta problema 4-1.*				
Respuestas	Imagen como evidencia general en un caso particular , a través de la manipulación de la figura	Imagen como evidencia general en un caso particular, inclinación o tamaño de los lados.	Confunden teorema. "Porque el lado opuesto a los ángulos son iguales".	Organización deductiva, con algunas consideraciones extras.
Alumnos	A5	A4 y A6	A3 y A2	A1

Tabla 13. Tipos de respuesta del problema 4-1.

De manera general podemos decir que en esta actividad los estudiantes A5, A4 y A6 hacen juicios asociados a las pruebas empíricas, mientras que A2, A3 y A4 a las que podrían llegar a ser intelectuales.

Entre las distintas respuestas obtenidas en el problema 4-1, destacamos lo realizado por el estudiante A5 quien logró reconocer a la figura sugerida como un representante de una clase y estableció un modelo de acción genérico sobre ésta, aunque la prueba se apoyaba en lo ostensivo que evidenciaba tal acción.

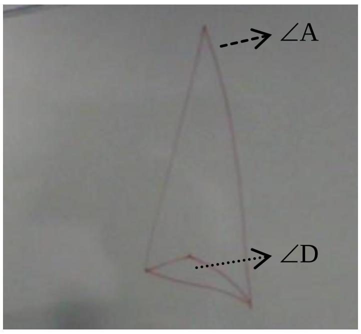


Figura 8. Figura realizada por el estudiante A5, donde muestra que es evidente que el ángulo D es mayor que el ángulo A

El estudiante A5 dio la siguiente explicación sobre la figura que él realizó:

A5: *Lo podemos poner más para abajo* (el punto), *así* (dibuja en la parte cercana a la base) *y aquí no se cumpliría, quedaría demostrado* (que el ángulo D es mayor que el ángulo A), *casi nada más me guié por la figura*.

Sin embargo, el estudiante a pesar que hace referencia a una manipulación de la figura para obtener su respuesta, tuvo dificultades en el lenguaje simbólico y con el lenguaje común para expresar su respuesta.

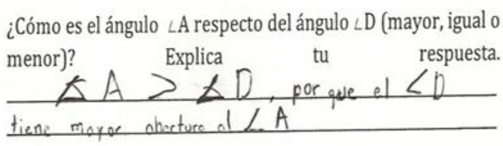


Figura 9. Respuesta del estudiante A5 sobre el problema 4-1.

Por otra parte, a lo largo de la primera etapa algunos estudiantes lograron establecer una organización deductiva en sus pruebas, sin embargo recurrían en aspectos ostensivos de la figura en cuestión. Tal fue el caso del estudiante A1 en el problema 4-1, como se muestra en la Figura 10.

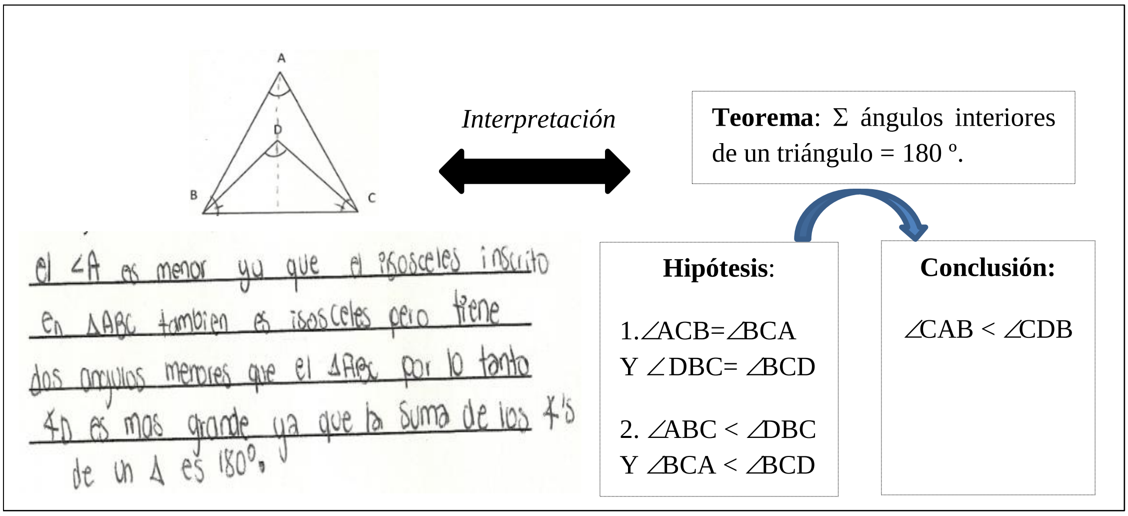


Figura 10. Respuesta del estudiante A1 del problema 4-1

En la respuesta anterior, observamos que el estudiante organizó deductivamente su prueba, sin embargo, debido a lo ostensivo de la figura asumió que los triángulos ABC y DCB eran isósceles, lo que lo llevó a considerar la hipótesis 1.

Por otra parte, en el problema 6-1 (ver página 64), la mayoría de los estudiantes recurrieron a lo ostensivo de la figura para validar sus respuestas. A continuación en la Tabla 14 mostramos las respuestas que se obtuvieron en el problema 6-1.

Tabla 14. *Tipos de respuesta problema 6-1.*			
Respuestas	Imagen usada como evidencia	Imposibilidad de prueba, argumentan la falta de hipótesis.	Imagen usada como evidencia, uso de trazos auxiliares.
Alumnos	A6, A4, A5	A1	A2, A3

Tabla 14. Tipos de respuesta del problema 6-1.

En las respuestas observamos que a pesar de que algunos estudiantes lograron hacer trazos auxiliares, ellos no lograron establecer una estrategia que los llevara a una prueba deductiva, sino que siguieron apoyándose en la figura como una fuente de evidencia perceptual de ciertos argumentos en las pruebas que realizaron, como se muestra en la Figura 11.

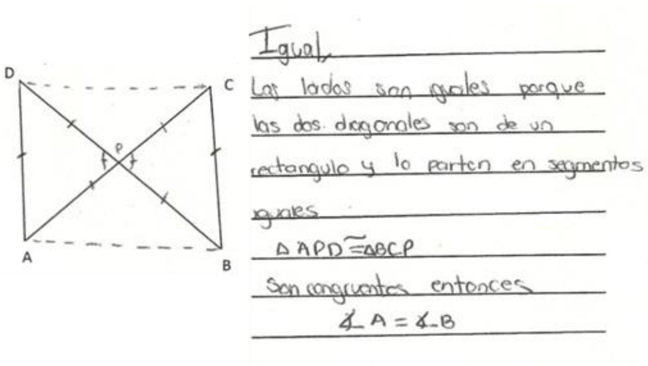


Figura 11. Respuesta del estudiante A3 del problema 6-1.

En la respuesta anterior observamos que el estudiante consideró como un rectángulo al cuadrilátero ABCD, por lo que se desprende que los lados AP, PC, DP y PB son iguales, siendo P el punto de intersección de las diagonales. Por lo tanto, bajo estas condiciones los triángulos DAP Y CPB son congruentes por el criterio de congruencia LAL, ya que los ángulos $\angle$APD Y $\angle$CPB son iguales por ser opuestos por el vértice.

Podemos decir que la forma, cómo los estudiantes están tratando a la figura, se apoya en que ésta impone características a lo largo del tratamiento que se va haciendo de ella, esta consideración carece de generalidad, por lo que los estudiantes, pese a mencionar condiciones cercanas a las definiciones no están en condiciones de hacer pruebas intelectuales en este momento, aquí podemos detectar que la credibilidad de estos estudiantes se apoya en las características del ejemplo dado.

Los problemas 7 y 5 de la primera etapa tienen un diseño equivalente al que aparece en la Tabla 15, donde se pretendía analizar las pruebas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que tienen condiciones similares.

Tabla 15. *Problema 7-.1*
Tarea: Establecer si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos y realizar una figura que poye la respuesta.
a) La diagonal de un cuadrado siempre es mayor que los lados del cuadrado.
b) La diagonal de un rectángulo siempre es mayor que los lados del rectángulo.
c) La diagonal de un rombo siempre es mayor que los lados del rombo.
d) La diagonal de un paralelogramo siempre es mayor que los lados del paralelogramo.

Tabla 15. Problema 7-1

En el problema 7-1, la mayoría de los estudiantes no lograron reconocer que en el caso del rombo, una diagonal no necesariamente es mayor que los lados, sólo el estudiante A1 reconoció que en este caso no se cumple tal afirmación.

Por otra parte, la mayoría de los estudiantes se basaron en el teorema de Pitágoras para responder los enunciados “a” y “b” y sólo un estudiante tuvo un acercamiento meramente visual. Sin embargo, al abordar los enunciados c y d en los cuales el teorema de Pitágoras ya no era aplicable, los estudiantes recurrieron a las propiedades ostensivas de las figuras que realizaron. En algunos casos recurrieron a los ejemplos prototipos de cada objeto geométrico en cuestión, por ejemplo los estudiantes A2 y A6, cuyas respuestas del inciso c se muestran en la Figura 12.

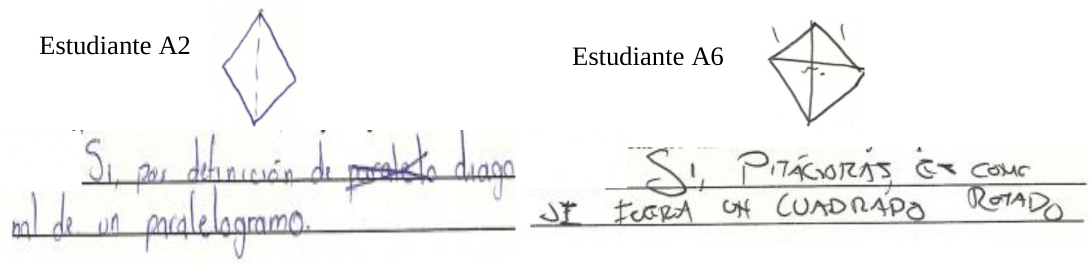


Figura 12. Respuesta del enunciado “c” de los estudiantes A2 y A6 del problema 7-1

Al preguntarle al estudiante A2 a qué se refería con la definición de diagonal de un paralelogramo, éste contestó que la definición nos indicaba que: la diagonal va de un vértice a otro y en la figura se mostraba que la diagonal es mayor que sus lados. La respuesta del estudiante A6, evidencia que la imagen del concepto de rombo que tiene no se apoya en la definición, sino hace referencia al ejemplo prototipo del rombo.

Algunos de ellos hicieron mención a los enunciados anteriores para validar su respuesta, es decir, como se cumplió en los incisos a y b, entonces también se cumple en los incisos c y d. Tal fue el caso del estudiante A4, quien determinó como verdaderos los dos primeros enunciados apoyándose en el teorema de Pitágoras, sin embargo, en los siguientes dos enunciados hizo referencia a los anteriores para validar su respuesta y no dio una prueba sobre estos, detectamos en este caso el uso del método inductivo usado defectuosamente.

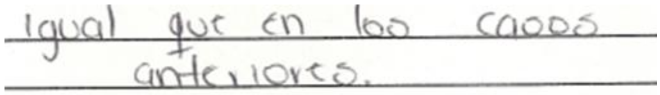


Figura 13. Respuesta del estudiante A4 del enunciado d del problema 7-1.

Por otra parte, como lo mencionamos anteriormente, sólo el estudiante A1 reconoció que en el rombo una diagonal no necesariamente es mayor que sus lados. Sin embargo, al responder el enunciado “d” acerca de los paralelogramos, éste se guió por la figura que realizó y aplicó el teorema que dice que a mayor ángulo se opone mayor lado en un triángulo para contestar que era verdadero tal enunciado. En la Figuras 14 se muestran las respuestas del estudiante A1.

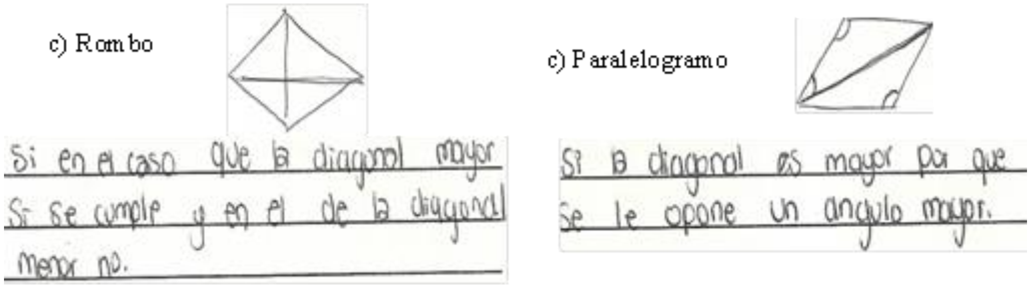


Figura 14. Repuesta del estudiante A1 del enunciado c y d del problema 7-1.

En el problema 5 (ver Tabla 12) los estudiantes se basaron en la fórmula del área de un triángulo, hicieron consideraciones apoyadas en lo visual y también hicieron referencia al caso anterior, en la Tabla 16 se muestran los tipos de respuesta de los problemas 5.1 y 5.2.

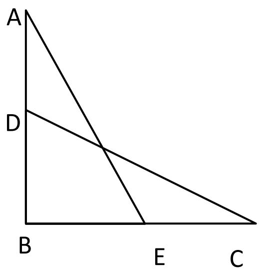
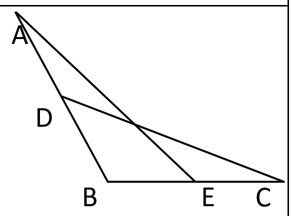
Tabla 16. *Problema 5-1.*			
Problema 5.1		Problema 5.2	
Enunciado	Figura sugerida	Enunciado	Figura sugerida
Dado un triángulo rectángulo $\triangle$ABE y sean D el punto medio de AB y C un punto talque E es punto medio de BC. ¿Cómo es el área del triángulo $\triangle$ ABE respecto del triángulo$\triangle$DBC (mayor, igual o menor)?		Dado un triángulo cualquiera $\triangle$ABE y sean D el punto medio de AB y C un punto talque E es punto medio de BC ¿Cómo es el área del triángulo $\triangle$ ABE respecto del triángulo $\triangle$DBC (mayor, igual o menor)?	

Tabla 16. Problema 5-1.

En la Tabla 17 mostramos los tipos de respuesta obtenidos en este problema.

Tabla 17. *Tipos de respuesta del problema 5-1.*			
Problema 5.1		Problema 5.2	
Formula del área del triángulo.	Ostensivo	Influencia caso anterior	Ostensivo
A2, A5, A1, A4	A3 y A6	A2 y A4	A3, A5, A6

Tabla 17. Tipos de respuesta problema 5-1

De las distintas respuestas, destacamos el acercamiento visual de A1, quién se apoyó en el reconocimiento visual de distintas subfiguras, distinguiendo y operando distintas relaciones visuales entre ellas. En la Figura 15 se muestra la respuesta del estudiante A1.

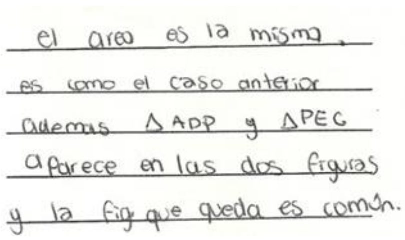


Figura 15. Respuesta del estudiante A1 del problema 5.2-1

El estudiante logró distinguir las subfiguras que se muestran en la Figura 15.

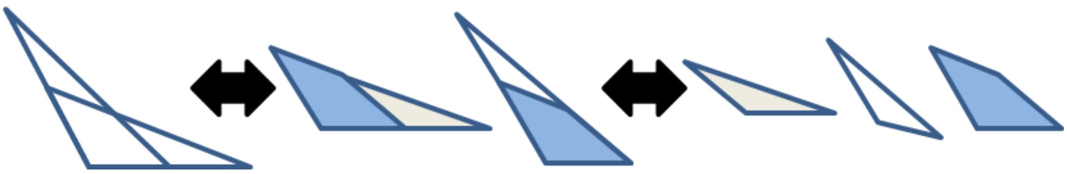


Figura 16. Las subfiguras del proceso de reconocimiento figural del estudiante A1.

En la Figura 17 se muestra el proceso de reconocimiento figural del estudiante A1, donde realizó distintas operaciones entre las subfiguras mostradas anteriormente.

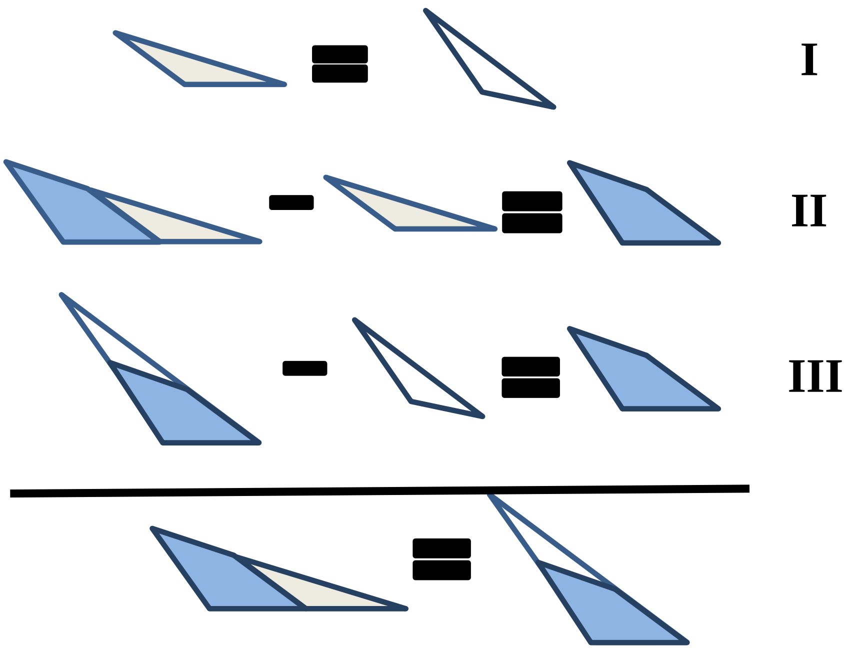
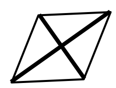
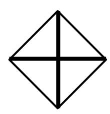


Figura 17. Proceso de reconocimiento figural del estudiante A1.

En el proceso de reconocimiento figural, se observa que el estudiante asumió la ecuación 1 debido a las características percibidas de la figura sugerida, lo que fue un obstáculo para la necesidad de una prueba intelectual.

Por otra parte, en el problema 10-1 (ver Tabla 18) se mostraron dos problemas en los cuales el contenido de los enunciados era el mismo, sin embargo establecían condiciones distintas, a diferencia de los problemas 7 y 5 donde el contenido era ligeramente distinto. Lo anterior con el fin de establecer si se mantenía en los estudiantes el valor epistémico semántico del que hace mención Duval.

Tabla 18. *Problema 10-1.*

Tarea	Enunciado	Figura sugerida
1. Determina las propiedades que tienen las diagonales de un rombo.	a) Las diagonales se bisecan.	
	b) Las diagonales son perpendiculares.	
	c) Las diagonales son iguales.	

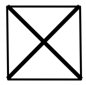
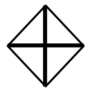
		
	d) Las diagonales bisecan los ángulos de los vértices.	
2. Determina en cuales casos las diagonales siempre pertenecen a un rombo y realiza una figura que apoye tu respuesta.	a) Las diagonales se bisecan.	Sin figura sugerida.
	b) Las diagonales son perpendiculares.	
	c) Las diagonales se bisecan y son perpendiculares.	
	d) Las diagonales son iguales y son perpendiculares.	

Tabla 18. Problema 10-1

Resultó que ningún estudiante logró diferenciar las tareas 1 y 2. Todos los estudiantes mantuvieron que se trataban de tareas iguales en los primeros dos enunciados de cada una. Por ejemplo en la Figura 18 se muestran las respuestas del estudiante A1 que muestran lo anterior.

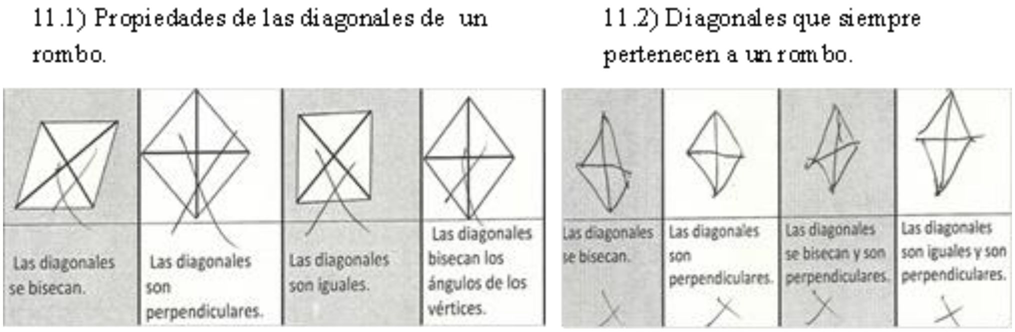


Figura 18. Respuesta del estudiante A1 del problema 10-1

Por otro parte, algunos estudiantes recurrieron a ejemplos prototipo para sustentar su respuesta. Por ejemplo, en la Figura 19 se muestran las respuestas del estudiante A2.

11.1) Propiedades de las diagonales de un rombo.

11.2) Diagonales que siempre pertenecen a un rombo.

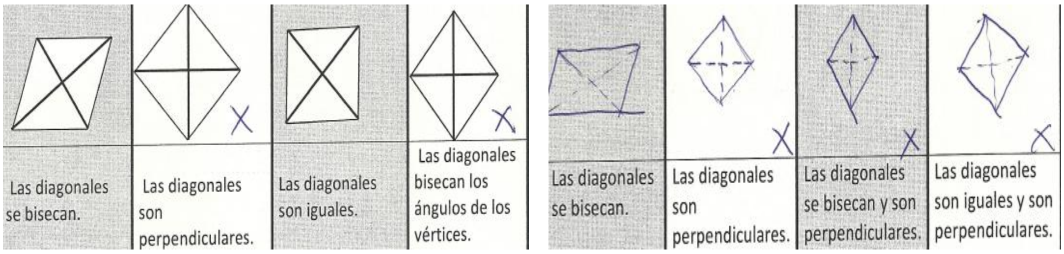


Figura 19. Respuesta del estudiante A2 del problema 10-1

En la Figura 19 se observa que el estudiante reconoció como propiedades del rombo sólo aquellas características no relevantes que son visibles en el ejemplo prototipo.

Los resultados anteriores nos llevan a considerar que se han desarrollado los siguientes tipos de eventos relacionados con la fuente de credibilidad de los estudiantes hasta este momento por principio de cuentas consideran a las propiedades ostensivas de las figuras particulares como la fuente de sus evidencias, utilizan métodos inductivos y deductivos inadecuadamente también hacen uso de definiciones y teoremas lo que no pueden usar con éxito y finalmente no distinguen el valor epistémico teórico de las inferencias utilizadas.

4.1.3 Conflictos cognitivos en el trabajo individual

Al intentar establecer un conflicto cognitivo en los estudiantes, con el fin de fomentar un cambio en la credibilidad que tienen sobre la figura, ellos evadieron el conflicto y mantienen firmes sus concepciones a pesar de que logran tomar conciencia de la contradicción que supone tal conflicto.

A continuación mostramos los resultados obtenidos en el trabajo individual de los estudiantes del problema 8-1, los cuales ejemplifican lo antes mencionado.

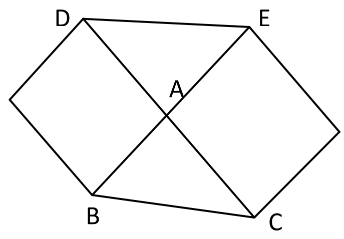
Tabla 19. *Problema 8-1.*	
Enunciado	Figura
Sea △ABC un triángulo cualquiera, se trazan dos cuadrados sobre los lados AB y CA y sean D y E los vértices de los cuadrados para formar el △ DAE. a) Si el ángulo ∠ABC= 70º y el ángulo ∠BCA= 40º ¿Cuánto mide el ángulo ∠DAE? b) ¿Cuánto suman los dos ángulos rectos más los ángulos ∠DAE y ∠CAB?	

Tabla 19. Problema 8-1

La mayoría de los estudiantes reconocieron un conflicto conceptual que surgió de la medida que obtuvieron del ángulo ∠DAE y la suma de éste con los dos ángulos rectos más el ángulo ∠CAB. Sin embargo, este conflicto no provocó un cambio en ese momento de la credibilidad de los estudiantes sobre las propiedades ostensivas de la figura sugerida. Por ejemplo las respuestas de los estudiantes A1 y A4.

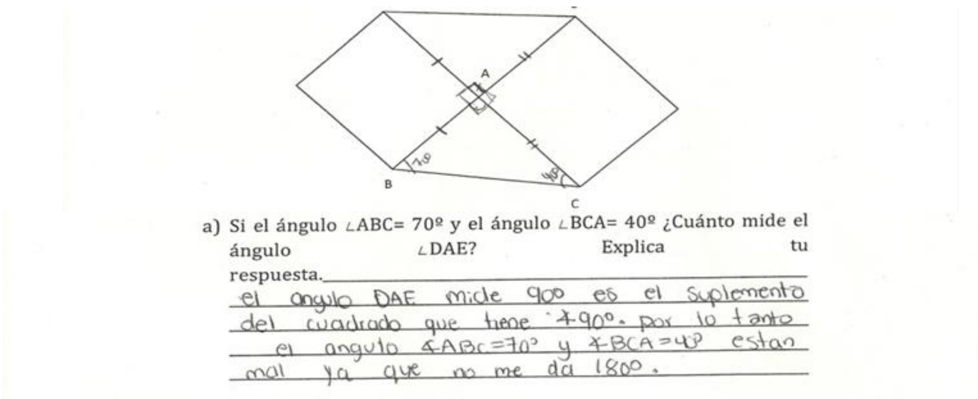
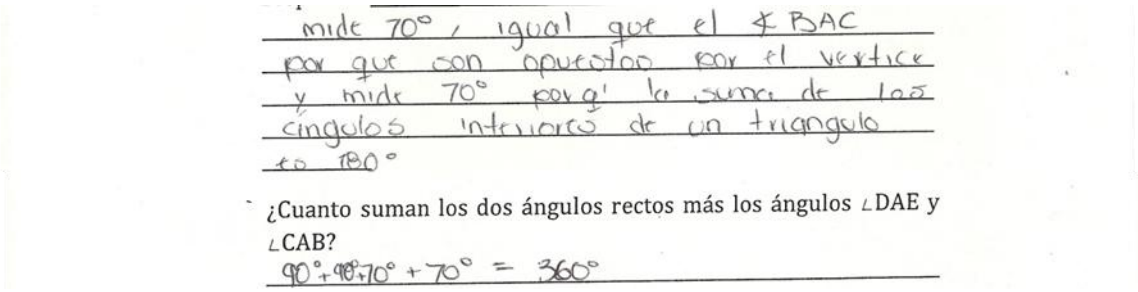


Figura 20. Respuesta del alumno A1 del problema 8.

En la respuesta observamos que el estudiante basa su respuesta en características no relevantes de la figura, ya que ésta le sugiere que el ∠ DAE es de 90 grados. Lo que provoca un conflicto con las propiedades encontradas, debido a que éstas le indican que el ∠ CAB es de 70 grados y este ángulo, para el estudiante, tendría que ser igual al ∠ DAE. Sin embargo, su manera de superar tal conflicto es argumentando que la hipótesis del problema no son correctas, por lo que es necesario adecuar las hipótesis del problema.

Otro caso fue el del estudiante A4, que a pesar del conflicto hizo caso omiso a las propiedades de la figura que él conocía y forzó sus argumentos.


mide 70° / igual que el ∢BAC por que son opuestos por el vertice y mide 70° porq' la suma de los angulos interiores de un triangulo es 180°

¿Cuanto suman los dos ángulos rectos más los ángulos ∠DAE y ∠CAB?

90°+90°+70° + 70° = 360°

Figura 21. Respuesta del estudiante A4 del problema 8-1.

Algo que resultaría sorprendente de la respuesta de este estudiante es la suma que realiza sobre los ángulos, aunque en este caso no es que el estudiante no conozca el resultado, sino que trata de no contradecir sus argumentos los cuales están basados en la idea que tiene él sobre la figura.

Por último, en la Tabla 20 mostramos los resultados generales sobre el sustento de las pruebas realizadas por los estudiantes en la primera etapa.

Podemos observar que la actitud de los estudiantes ante el conflicto que supone la figura y los resultados conocidos no es bienvenido por ellos, no se preguntan sobre posibilidad de que la figura que tienen frente a ellos no sea más que una representación particular y que por ello no represente exactamente lo indicado por la hipótesis, de manera que delegan su confianza en la figura no solo para obtener información sino como fuente de información verdadera. Muchos de las dificultades que observamos en esta situación en la que se propone el conflicto, se relacionan con las que vienen teniendo en la primera parte de la actividad y que ya hemos comentado pero que se puede resumir en el uso de métodos, definiciones y teoremas de manera incorrecta debido al papel que juega la figura de la cual hacen un uso ostensivo por lo que no distinguen el valor epistémico de la inferencia semántica.

A continuación en la Tabla 20 presentaremos un panorama de los tipos de pruebas desde el punto de vista que incluye aspectos adicionales a las pruebas pragmáticas e intelectuales que los estudiantes realizaron durante esta etapa de trabajo:

Tabla 20. *Resultados generales sobre el sustento de las pruebas realizadas por los estudiantes.*						
Estudiante / Problema	A1	A2	A3	A4	A5	A6
4	Ostensivo-Deductivo	Teorema mal aplicado	Teorema mal aplicado	Ostensivo	Inductivo-Ostensivo	Ostensivo
5.1	Fórmula área	Fórmula área	Ostensivo	Fórmula área	Fórmula área	Ostensivo
5.2	Ostensivo	Ostensivo	Ostensivo	Inductivo-Ostensivo	Ostensivo	Ostensivo
6	Imposibilidad de prueba	Ostensivo	Deductivo-Ostensivo	Ostensivo	Ostensivo	Deductivo-Ostensivo
7.1	Deductivo	Deductivo	Deductivo	Deductivo	Ostensivo	Inductivo
7.2	Deductivo	Deductivo	Deductivo	Deductivo	Ostensivo	Inductivo
7.3	Ostensivo	Ostensivo	No contesto	Inductivo	Ostensivo	Ostensivo
7.4	Deductivo-Ostensivo	Ostensivo	Ostensivo	Inductivo	Ostensivo	Ostensivo
8	Deductivo-Ostensivo	Deductivo-Ostensivo	Deductivo-Ostensivo	Deductivo-Ostensivo	Deductivo-Ostensivo	Deductivo-ostensivo
9	Ostensivo	Deductivo-Ostensivo	Deductivo-ostensivo	Tma. Mal aplicado	Ostensivo	Ostensivo
10.1	Deductivo	Ostensivo	Ostensivo	Ostensivo	Ostensivo	Ostensivo
10.2	Confusión hipótesis – Tesis	Confusión Hipótesis-Tesis Ostensivo	Confusión Hipótesis-Tesis Ostensivo	Confusión hipótesis Tesis	Confusión hipótesis Tesis	Confusión hipótesis Tesis

Tabla 20. Resultados generales sobre las pruebas realizadas en la primera etapa.

En la tabla anterior consideramos a las pruebas deductivos-Ostensivas como aquellas que tienen una estructura deductiva, sin embargo, tienen argumentos que se obtienen a partir de las características ostensivas de la figura en cuestión.

También distinguimos las pruebas ostensivas de las inductivas ostensivas, siendo las primeras las que se obtienen a partir de las características ostensivas de una figura en particular, mientras que las inductivas-ostensivas son aquellas que se obtienen de las características ostensivas pero que surgen del análisis de varios casos de figuras.

De acuerdo a los resultados generales de las pruebas realizadas en la primera etapa es que clasificamos a los estudiantes en tres tipos de concepciones que presentan con mayor regularidad en las pruebas que realizan y dan cuenta de las decisiones y acciones sobre la veracidad del enunciado en cuestión.

Estos tipos de concepciones son: pragmático-ostensivas, antes del tipo intelectual o transicional e intelectual-deductiva (ver Tabla 21).

Las primeras consisten en apoyarse en la acción, la ostensión y en la singularidad del evento analizado, además que provoca en el estudiante una necesidad efectiva de la solución del problema, es decir, si funciona lo planteado en la respuesta es suficiente para validarla.

Las segundas consisten en establecer el carácter necesario de validez, los estudiantes logran establecer un discurso con cierta racionalidad a través de la formulación y organización de algunas propiedades generales, sin embargo, este discurso puede o no ser deductivo y recurren a lo ostensivo como referencia para validar sus respuestas.

En las últimas se establece una necesidad lógica deductiva de las propiedades formuladas, es decir, establecen una organización de un paso deductivo como de un encadenamiento de varios pasos deductivos para validar una proposición o recurren al contraejemplo para refutarla.

Tabla 21. *Concepciones presentes en las pruebas de los estudiantes de la primera etapa.*			
Concepciones / Estudiante	Pragmático-Ostensivo	Antes del intelectual o transicional	Intelectual Deductivo
A1		X	
A2		X	
A3		X	
A4		X	
A5	X		
A6.	X		

Tabla 21. Tipos de concepciones presentes en las pruebas de los estudiantes de la primera etapa.

Ningún estudiante considera necesario establecer un discurso deductivo para validar sus respuestas, sino que se basan en otro tipo de consideraciones. Cuatro de los seis estudiantes se encuentran en las concepciones del tipo transicional donde el uso de las figuras se mantiene como un medio de evidencia absoluta que en algunos casos se impone a los aspectos teóricos de ésta y dos estudiantes mantiene fuertemente las concepciones pragmáticas ostensivas como sustentos de las pruebas que realizan.

4.1.4 Discusión grupal de los problemas de la primera etapa

La primera etapa también contó con una sesión de discusión en grupo, donde en el primer momento se indujo a los estudiantes a compartir el resultado de la tarea 8-1 que contenía el conflicto cognitivo presentado en la sección anterior además de cuestionarles sobre la congruencia o no de los $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ (ver Tabla 19).

La discusión giró alrededor de la importancia de la definición de recta lo que no les permitía avanzar para resolver el conflicto, por lo que el investigador interviene proponiendo una segunda figura (ver Figura 22) que responde a las misma hipótesis, lo que desencadena otra discusión ya que resulta un contraejemplo para sus suposiciones debido a que los puntos que suponían sobre una recta no lo están.

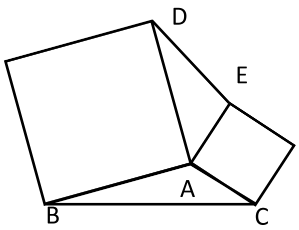


Figura 22. Figura presentada después del conflicto cognitivo con la suma de los ángulos.

Esta situación los condujo a una situación de conflicto que profundiza sobre la aceptación de la existencia de ejemplos que no son los usuales y que podrían estar en conflicto con los aceptados.

Algunos estudiantes expresaron que la figura no hacía referencia al problema, sin embargo a cuestionarles si ésta cumplía las hipótesis del problema se mantuvieron en un estado de incertidumbre o duda, lo que provocó en ellos una discusión sobre lo que significa que tres puntos sean colineales.

En la discusión se manifestaron distintos puntos de vista sobre lo que es una línea recta, sin embargo no lograron ponerse de acuerdo y expresaron que era necesario conocer la definición de línea recta para poder contestar el problema de una forma correcta.

En el comienzo de la discusión no lograron darse cuenta de que esta nueva figura resulta un ejemplo no usual de sus suposiciones y que es tan válida como la anterior. Sin embargo, en el transcurso de ésta los estudiantes aceptaron que no necesariamente al construir cuadrados sobre un triángulo cualquiera los $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son congruentes.

4.2 Segunda etapa trabajo por parejas

La segunda etapa consistió en analizar si los estudiantes seguían incorporando características irrelevantes a las figuras propuestas o si había una mayor aceptación de ejemplos que refutan sus opiniones, basados en un acercamiento meramente visual, a diferencia de la primera etapa ellos estaban en una situación de colaboración primero por parejas y luego grupal. El primer problema se muestra en la Tabla 22.

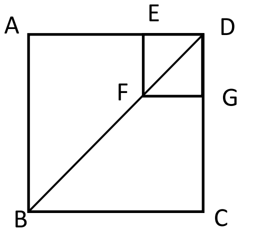
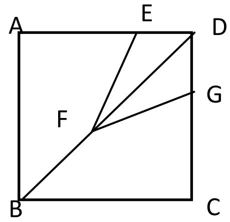
Tabla 22. *Problema 1-2.*		
Enunciado	Figura 1	Figura 2
Si en el cuadrado ABCD, ED=DG y F esta sobre BD. ¿El cuadrilátero DEFG es un cuadrado?		

Tabla 22. Problema 1-2

En los equipos se observó distintos comportamientos de los estudiantes, a diferencia de la primera fase, la credibilidad sobre la figura fue distinta en algunos de ellos. Por ejemplo, el equipo de los estudiantes A3 y A4 no asumió la propiedad sugerida por la figura dada y antes de mostrarles la segunda figura lograron establecer un modelo de acción sobre ésta que validaba su respuesta, es decir, reconoció las distintas posiciones que puede tener F dentro de la diagonal del cuadrado ABCD.

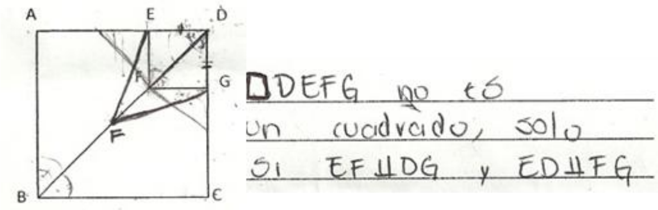


Figura 23. Respuesta de los estudiantes A3 y A4 del problema 1 de la segunda fase.

Los otros dos equipos mantuvieron un conflicto de controversia al mantener puntos de vista contrarios, lo anterior propiciado por el contraejemplo. Por ejemplo, el equipo de los estudiantes A1 y A6 no logró establecer un acuerdo entre ellos, ya que para el estudiante A6 no era suficiente una figura como contraejemplo para negar que el cuadrilátero EFGD sea un cuadrado. A continuación mostramos un extracto de su diálogo:

A7: En este caso está bien (se refiere a que EFGD es un cuadrado)

A1: Es que tampoco te dicen cuánto valen, te dicen que ED=DG pero tampoco te dicen cuanto es la unidad de ese segmento, si estos dos segmentos son iguales aquí te lo dicen como cuadrado (señala la figura sugerida en el problema), pero por ejemplo aquí ya te lo están poniendo así (señala el contraejemplo), hasta entonces no.

A7: Aquí forman un ángulo recto (señala la figura dada)

A1: Por la figura que él (hace referencia al observador) puso pero dado el caso que no fuera así, eso lo tienes que demostrar.

A7: Pues demuéstrame que no es (pausa prolongada). Nosotros decimos que si es.

A1: No me convenció tu idea

Como se muestra en el diálogo, los estudiantes mantenían puntos de vista distintos y no lograron establecer un acuerdo en la respuesta. Como vemos en la figura 24, la respuesta del estudiante A6 se impuso.

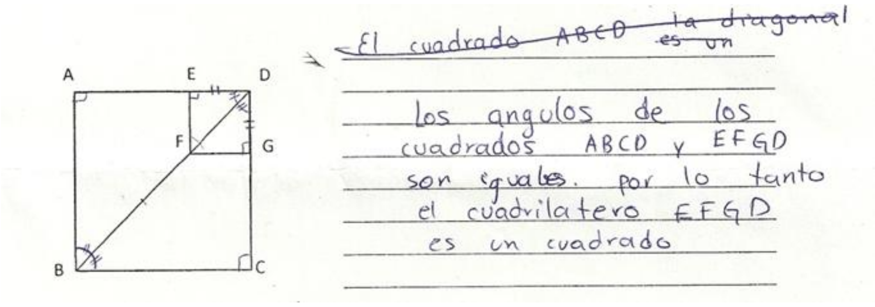


Figura 24. Respuesta de los estudiantes A1 y A6 del problema 1-2.

En el primer caso presentado, la exploración de los estudiantes muestra un uso diferente sobre la figura, donde la figura ya no es un medio de evidencia absoluta, sino se empieza a establecer como un medio heurístico para encontrar los argumentos necesarios para validar o refutar los enunciados, esto a través de las propiedades en juego. En el segundo caso, el conflicto de controversia se mantiene debido a que para el estudiante A1 la información visual que presenta la figura, ya no es suficiente para establecer la validez de un enunciado, a diferencia del estudiante que considera la figura como determinante para validar su respuesta.

Por otra parte, después del problema anterior se propuso a los estudiantes una serie de problemas que consistían en establecer si era posible o no inscribir una figura dentro de otra del mismo tipo, además de determinar una forma de construir tal figura. Para la solución de estos problemas se fomentó el uso de razonamientos abductivos, inductivos y deductivos.

En el primer problema abordado por los estudiantes fue en determinar si era posible inscribir un triángulo equilátero dentro de otro triángulo equilátero. En este problema se les recomendó a los estudiantes el análisis de casos en concreto o la abducción. A continuación mostramos características relevantes del proceso de solución de dos equipos, en donde el primero se apoyó en el análisis puntos en específico del triángulo equilátero, mientras que el segundo trató por medio de la abducción.

El equipo de estudiantes A3 y A4 logró establecer un desarrollo de sus pruebas a partir del análisis de ejemplos de puntos sobre el triángulo equilátero. Primero, por medio del triángulo de los puntos medios del $\triangle ABC$ y a través de la deducción de las propiedades en juego, lograron establecer que es posible inscribir un triángulo equilátero dentro de otro triángulo equilátero, como se muestra en la figura 25.

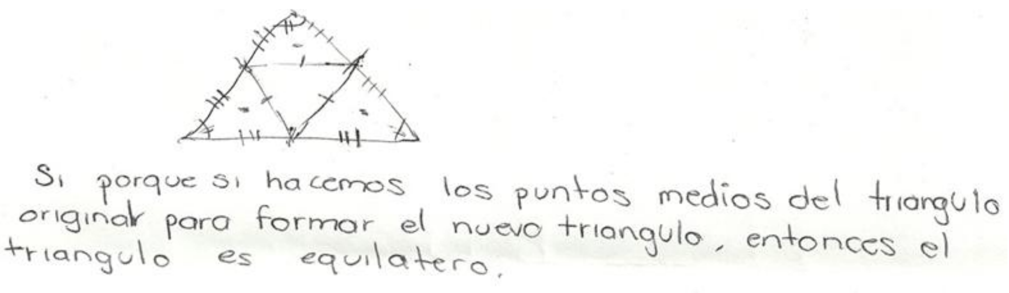


Figura 25. Respuesta del equipo de estudiantes A3 y A4 del problema 2-2

Cabe señalar en esta respuesta que el lenguaje escrito no presenta de forma explícita el razonamiento que siguieron los estudiantes al resolver el problema. Sin embargo, los sintagmas usados sobre la figura señalan que los lados del triángulo inscrito son iguales y por lo que expresaron verbalmente en su proceso de solución fue con base al criterio de congruencia LAL.

Sin embargo, al cuestionarles sobre la forma de determinar el triángulo inscrito, no fueron más allá del triángulo de los puntos medios.

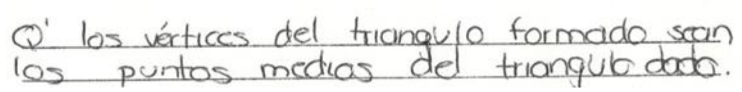


Figura 26. Respuesta de los estudiantes A3 y A4 sobre como determinar un triángulo equilátero inscrito dentro de otro triángulo equilátero.

En un segundo momento, cuando se les preguntó si era posible construir otro triángulo diferente del de los puntos medios, ellos lograron establecer un modelo de acción sobre la figura para determinar el triángulo equilátero inscrito y dieron las razones por las cuales se sustentaba su prueba.

Respecto de lo anterior, los estudiantes tuvieron la siguiente conversación:

A4: Porque si hacemos este igual a este pedacito, igual a este pedacito (señala la figura), entonces este pedacito grandote es igual a este pedacito grandote y a este de acá (señala la figura) y tienen de nuevo un ángulo, otro ángulo y otro ángulo.

A3: No, pero como garantizas que estos dos son iguales.

A4: (vuelve a explicar)

A3: Ah entonces, puedes decir que los triángulos son congruentes.

A4: Si, se pueden hacer todas las combinaciones, solo que los puntos estén partidos exactamente.

Los estudiantes manifestaron tener problemas para explicar la forma que encontraron para determinar los triángulos inscritos, por lo que se apoyaron en la figura para comunicar su respuesta, como se indica en la Figura 27.

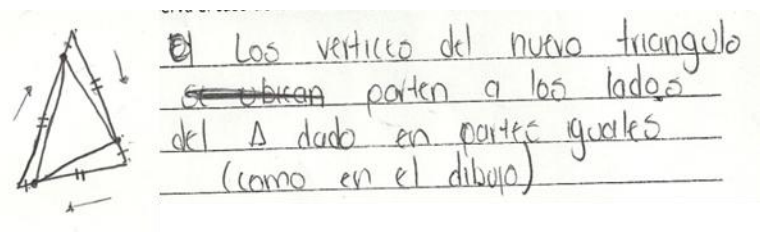


Figura 27. Explicación del Modelo de acción sobre la figura de los estudiantes A3 y A4.

Posterior, los estudiantes establecieron una prueba deductiva para validar sus resultados, aunque tuvieron algunas dificultades con el lenguaje simbólico para expresar su prueba, como se muestra en la Figura 28.

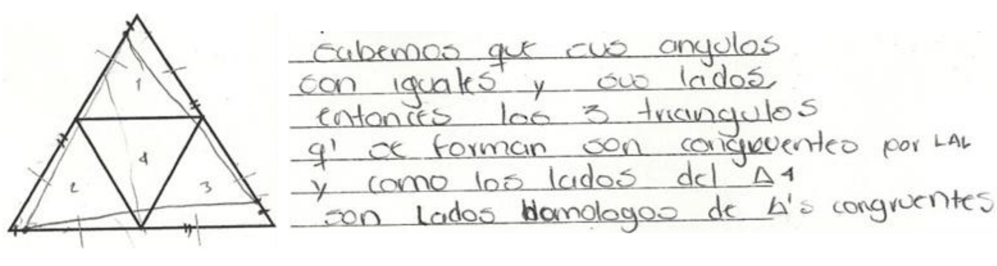


Figura 28. Prueba de los estudiantes A3 y A4 el problema 2-2.

Las concepciones puestas en juego en este problema por ambos estudiantes muestran un cambio con respecto a las puestas en juego de ambos en la primera etapa, ya que en su mayoría ellos hicieron pruebas pragmáticas apoyadas en lo ostensivo de la figura. Mientras que en este problema los estudiantes lograron establecer una prueba deductiva, aunque tuvieron dificultades en expresar correctamente su prueba. En otras palabras su credibilidad de los estudiantes ya no está sólo en los aspectos pictóricos de la figura en cuestión, sino en las propiedades geométricas puestas en juego en el problema.

Por otro lado, el equipo de los estudiantes A1 y A6 tuvo una discusión sobre el uso de la abducción, ya que para un estudiante resultó especialmente complejo debido a su experiencia con la demostración y pensó como incorrecto suponer la tesis. A continuación se muestra un extracto del diálogo que mantuvieron los estudiantes:

A6: Supón que los has encontrado ¿Qué condiciones cumple?

A1: Supones que lo has encontrado, pero llegas a ¿qué?

A6: Si.

A1: No se puede, pero es que no se puede.

A6: Y luego como lo encontraste.

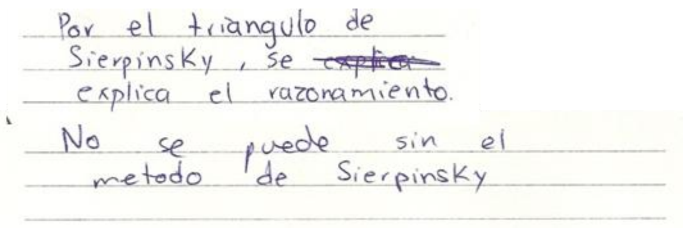
A1: Mmm… (Titubeante).

A6: La triangulibilidad (se refiere a triángulos congruentes).

A1: ¿Cómo observar algo que no tenemos?

La estrategia de abducción es rechazada por la advertencia conocida en clase de no suponer la tesis en los procesos de demostración aunque se advierte que se trata de un procedimiento de descubrimiento.

Los estudiantes no lograron ponerse de acuerdo con su respuesta sobre como determinar un triángulo equilátero inscrito sobre otro triángulo equilátero y optaron por otro argumento aludiendo al triángulo de Sierpinsky.

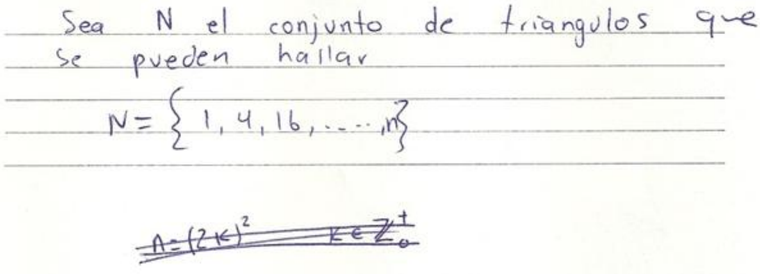


Por el triángulo de
Sierpinsky, se ~~explica~~
explica el razonamiento.

No se puede sin el
metodo de Sierpinsky

Figura 29. Respuesta de los estudiantes A1 y A6 sobre el problema 2 de la etapa 2.

Al cuestionarles sobre la generalidad de su respuesta, los estudiantes se basaron en el análisis de ejemplos en específico para determinar su respuesta, que consistió en ir dividiendo en distintos puntos los lados del triángulo equilátero.



Sea N el conjunto de triangulos que
se pueden hallar

$N = \{1, 4, 16, \ldots, n\}$

$\cancel{A=(2k)^2 \quad k \in \mathbb{Z}^{+}_{0}}$

Figura 30. Respuesta de los estudiantes A1 y A6 sobre la cantidad de posibles triángulos equiláteros inscritos.

Los estudiantes expresaron verbalmente que podían encontrar los triángulos equiláteros inscritos que ellos quisieran sobre otro triángulo equilátero, sin embargo, ellos no dieron ninguna prueba que validara su respuesta y se basaron sólo en el análisis de pocos casos.

En este problema se observó que el equipo de los estudiantes A3 y A4 logró establecer un modelo de acción sobre la figura, lo que los ayudó a resolver el problema. Sin embargo, los otros equipos no lograron establecer una manera adecuada para determinar los triángulos inscritos.

Después del problema sobre el triángulo equilátero, se les sugirió una metodología de trabajo a los estudiantes que buscaba proporcionar lo que nosotros hemos dado en llamar *un motor de búsqueda* de las propiedades estructurales de las figuras geométricas abordadas, que consistió en establecer un modelo genérico de acción sobre las figuras.

En este caso se refería a construir una figura localizando puntos sobre los lados de la figura original a una distancia igual sobre cada lado, de manera que uniendo los puntos marcados teníamos una figura que era del mismo tipo que la figura original.

El modelo genérico de acción de búsqueda propuesto fomentó la búsqueda de propiedades geométricas sobre las figuras en cuestión, sin embargo en los casos en donde el modelo no era viable para inscribir una figura sobre otra del mismo tipo los estudiantes tuvieron dificultades en dar una prueba convincente sobre esto, como fue el caso del triángulo isósceles.

En el caso de inscribir un triángulo isósceles dentro de otro triángulo isósceles, al momento de preguntarles si era posible encontrar un triángulo isósceles inscrito a través del modelo de acción propuesto, ningún equipo logró encontrar un contraejemplo que refutara al modelo, sino que se basaron en la imposibilidad de establecer el modelo en el triángulo isósceles. Tal fue el caso del equipo de los estudiantes A3 y A4.

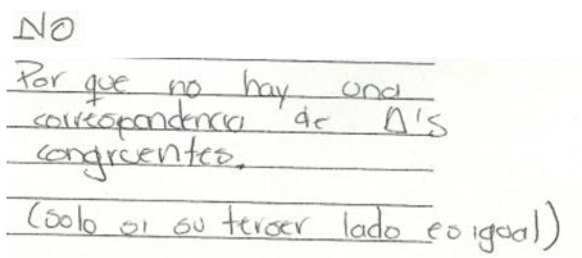


Figura 31. Respuestas de los estudiantes A3 y A4 del problema 3-2.

La respuesta de los estudiantes hace referencia al éxito del modelo propuesto en el triángulo equilátero, al argumentar que como el tercer lado ya no es igual entonces no se podrán construir triángulos congruentes por lo que los lados del triángulo inscrito no serán iguales. Sin embargo, la afirmación de que los triángulos no sean congruentes no es suficiente para argumentar que los lados del triángulo inscrito no sean iguales.

Por otra parte, en el caso de inscribir un cuadrado dentro de otro cuadrado, el modelo de acción propuesto fomentó una búsqueda de propiedades geométricas. Sin embargo, cuando escribieron la prueba no refleja de forma clara el razonamiento que siguieron. Tal fue el caso de los estudiantes A1 y A6.

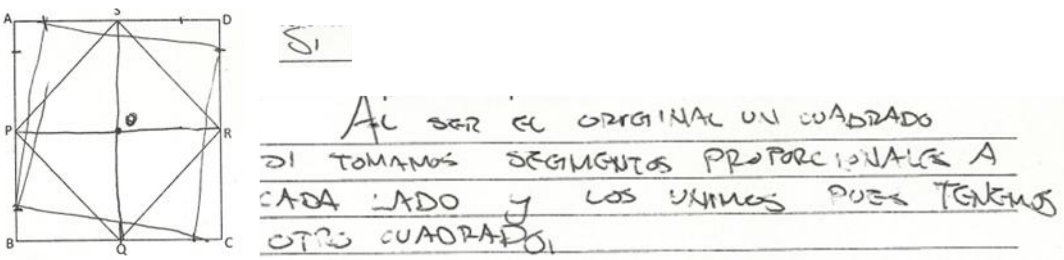


Figura 32. Respuesta de los estudiantes A1 y A6 del problema 4-2.

Los estudiantes A1 y A6 no hacen explícito en su respuesta por qué en el cuadrilátero inscrito, que encontraron a través del modelo de acción, los ángulos son rectos y los lados son iguales. Sin embargo, en el transcurso de la solución de este problema, ellos expresaron verbalmente el uso de propiedades geométricas.

Lo anterior da cuenta de que los estudiantes no le dan la importancia en determinar un discurso deductivo escrito para comunicar su prueba, lo que refleja que su credibilidad está sólo en enunciar aquellas ideas o propiedades que son relevantes para la solución y no en la organización deductiva.

Una vez que se acepta el modelo de acción propuesto en distintas figuras pasa a ser parte de los resultados en los que confían, sin embargo, esto puede convertirse en un obstáculo para la elaboración de pruebas en los problemas que involucraban nuevas figuras. Por ejemplo, el caso de inscribir un rectángulo sobre otro rectángulo cualquiera, que en la secuencia de actividades tiene el objetivo de detonar el conflicto nuevamente.

En esta situación, el equipo de estudiantes A3 y A4 en un primer momento contestó que si era posible construir un rectángulo dentro de otro rectángulo a través del modelo de acción propuesto.

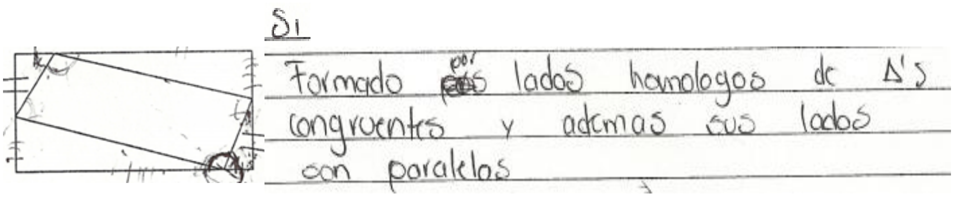


Figura 33. Respuesta de los estudiantes A3 y A4 del problema 5-2

Sin embargo, en un segundo momento, después de una exploración a través de figuras que ellos mismos realizaron se dieron cuenta de su error y contestaron lo siguiente en la Figura 34.

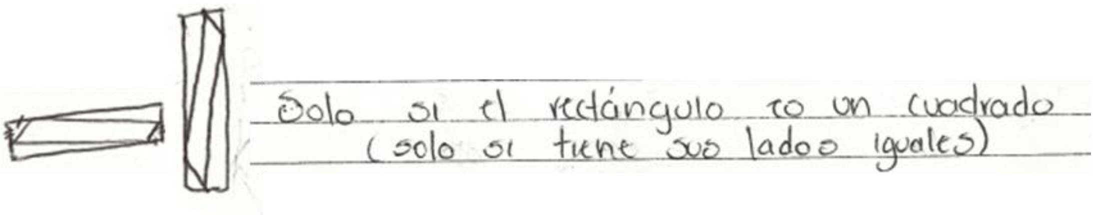


Figura 34. Corrección de la respuesta de los estudiantes A4 y A3 del problema 5-2

En la Figura 33 se observa que para los estudiantes A3 y A4, ya no son suficientes las propiedades ostensivas de la figura para establecer la verdad de una proposición, ahora fue el modelo de acción el que sustento su respuesta. En la Figura 34, se observa que los estudiantes aceptan las figuras como un ejemplo que refutaba que los ángulos del cuadrilátero encontrado eran rectos.

En el caso del equipo de estudiantes A1 y A6 el modelo de acción propuesto fomentó una búsqueda de propiedades geométricas y lograron contestar correctamente el problema, sin embargo, no lograron expresar de forma clara la prueba que realizaron.

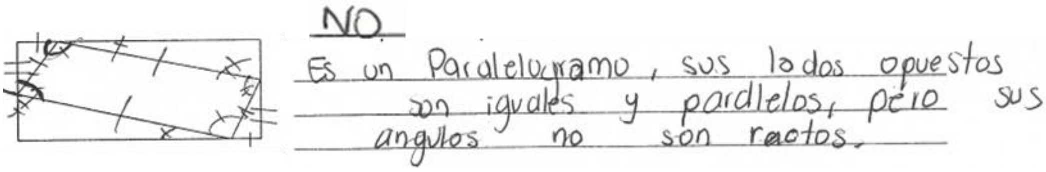


Figura 35. Respuestas de los estudiantes A1 y A6 del problema 5-2

En los casos anteriores, observamos el uso de sintagmas que dan cuenta del empleo de las propiedades puestas en juego. En el primer caso, este uso refleja que las propiedades fueron empleadas para determinar la congruencia de triángulos, que en los casos anteriores eran suficientes para validar el modelo de acción propuesto, en lugar de determinar si las propiedades del cuadrilátero correspondían a un rectángulo. En el segundo caso, a diferencia del primero, el uso de propiedades fue para determinar si el cuadrilátero era un rectángulo.

La situación que propició el modelo de acción como un motor de búsqueda de las propiedades estructurales fue muy rica como experiencia de cambio del valor epistémico de los estudiantes debido al hecho de funcionar para ciertas figuras como el triángulo equilátero o el cuadrado, pero falla en el triángulo isósceles y en el rectángulo, propició un conflicto que fue superado con base en las propiedades de las figuras geométricas en cuestión.

En los casos donde el modelo de acción se convirtió en un obstáculo para la elaboración de pruebas en los estudiantes, no fue tan difícil para ellos en el transcurso de las actividades desprenderse de la idea de que éste era lo que validaba la construcción de la figura inscrita, sino que es a través de las propiedades de las figuras lo que determina tal construcción, es decir, el modelo era una estrategia que no podía ser generalizada en todas las figuras.

Por otra parte, respecto al comportamiento individual de los estudiantes, tenemos por ejemplo a A6 quien en la primera etapa hace pruebas pragmáticas-ostensivas y en este momento conjuntamente con A1, ya es capaz de construir argumentos apoyados en las propiedades de las figuras en cuestión.

5. Conclusiones

5.1 Consideraciones generales

En este trabajo observamos de manera general tres momentos de cambio en la credibilidad o valor epistémico de los estudiantes frente a las dos fuentes de evidencias disponibles: las figuras y las propiedades discursivas formadas por teoremas, definiciones y conocimiento anteriores.

En un primer momento los estudiantes tuvieron que analizar figuras estándar y otras en las que aparecían posibles conflictos de interpretación, al inicio la fuente de credibilidad de los estudiantes consistió en considerar a las propiedades ostensivas de las figuras particulares como la fuente de sus evidencias, utilizaron métodos inductivos y deductivos aunque inadecuadamente también hacen uso de definiciones y teoremas, los que no pueden usar con éxito y finalmente no reconocen el estatus operativo de la proposiciones y solo se basan en el contenido de éstas, esto es, no distinguen el valor epistémico teórico de las inferencias utilizadas.

Tomando en cuenta lo anterior, el tipo de pruebas realizadas en ese momento consistieron en lo que hemos llamado pragmático-ostensivas y transicional. Los estudiantes se apoyan en la acción, la ostensión y en la singularidad del evento analizado, además que sus acciones mostraban la necesidad de obtener sólo una solución para el problema, no una demostración.

Se pudo observar que la actitud de los estudiantes en este momento respecto al conflicto cognitivo que supuso la figura y los resultados no fue bienvenido, dado que delegaban su confianza en la figura no sólo para obtener información sino como una fuente de información verdadera. Al proponerles los ejemplos que confrontaran sus ideas, los estudiantes se percatan de que algo está mal pero no lograban darse cuenta de la fuente del conflicto, es decir, la actitud fue de rechazo al ejemplo no usual.

En un segundo momento, los estudiantes tienen indicios de producir una racionalidad apoyada en los conocimientos matemáticos anteriores para formular el carácter necesario de validez en sus respuestas, la logran establecer a través de la formulación y organización de algunas propiedades, sin embargo, ésta no es presentada coherentemente de forma deductiva y recurren a las características ostensivas como fuente de validación de sus respuestas, en este momento comienzan aceptar aquellos ejemplos no usuales en el proceso de validación con la intención de afrontar el problema.

Desde el punto de vista del cambio en el valor epistémico tenemos que los estudiantes ya no delegan la verdad de sus proposiciones a la figura, sino que la complementan con las propiedades conocidas e incluyen exploraciones más detalladas del problema propuesto.

Finalmente durante el tercer momento de las actividades se observó un cambio en las concepciones, en algunos casos, ya no fueron suficientes las propiedades ostensivas que detectaban en las figuras sugeridas sino en las propiedades geométricas a través de una organización deductiva.

Observamos un tratamiento y confianza en la figura de forma distinta que la que se había mantenido en momentos anteriores, y este pasó de ser un medio de evidencia absoluta a ser un medio heurístico. En este momento para los estudiantes las figuras funcionaba para explorar, es decir, tenían la necesidad de coordinar aspectos figurales y discursivos por medio de distintas operaciones sobre ellas.

Tal fue el caso del modelo de acción propuesto, que funcionó como experiencia para el cambio del valor epistémico de los estudiantes, debido a que no podía ser generalizado en distintas figuras, esto provocó un cambio en la credibilidad de los estudiantes ya que el conflicto fue superado con base en la coordinación entre las propiedades estructurales de las figuras geométricas en cuestión y las propiedades que debían ser tomadas en cuenta.

Observamos que las actividades a través del conflicto cognitivo pueden propiciar un cambio en los valores epistémicos del estudiante, sin embargo este no ocurre de manera instantánea y tienen que pasar por etapas de aceptación del conflicto para que este provoque mayor confianza en las propiedades, definiciones y en la estructura deductiva como el medio de validación y convicción.

Consideramos que este tipo de experiencias van en la dirección de investigar cuáles son las actividades cognitivas mínimas necesarias para que el estudiante de licenciatura pueda aprender a demostrar. Otras aproximaciones serán necesarias para complementar la presente propuesta.

5.2 Respuestas a las preguntas de investigación

A continuación pasaremos a responder las preguntas de investigación que planteamos antes:

1. ¿Cómo funciona el valor epistémico de los estudiantes cuando se les solicitan justificaciones de representaciones gráficas que son válidas en casos específicos?

Estudiantes con antecedentes en la demostración fueron sujetos a experiencias que incluían posibles conflictos cognitivos con figuras. Observamos el grado de convicción sobre las evidencias que aporta la figura, el cual fue detectado en tres niveles o momentos que van desde considerar a la figura como una fuente de evidencia, para luego dudar de ella incorporando la información de propiedades y relaciones de forma incipiente y en el último momento las propiedades ganaron espacio y eran ellas la fuente de evidencia fundamental.

2. ¿Cuál es el papel que la representación gráfica juega en estas tareas?

La figura pasa de ser un medio de evidencia absoluta a ser un medio heurístico de trabajo, es decir, se puede establecer como un medio de descubrimiento de las relaciones estructurales a través de distintas operaciones sobre ella, donde se coordinan e interactúan aspectos figurales y discursivos para el desarrollo de los procesos de prueba de los estudiantes.

3. ¿De qué manera se propicia el cambio cognitivo entre los estudiantes cuando se incluye el conflicto como método constructivo?

La fuente de evidencia que parte de la figura es fácilmente confrontada debido a que lo que tenemos frente a nosotros, es solo un ejemplo de una categoría de posibles ejemplos asociados a la proposición, por ello un cambio entre lo esperado y lo inesperado en la figura permite la situación de conflicto, lo que lleva al estudiante a revisar la evidencia.

6. Referencias

Acuña, C. (1996). Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior. *Investigaciones en matemática educativa*, (pp.93-109). México: Grupo Editorial Ibearomérica.

Alibert, D. and Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Kluwer: The Netherlands

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Balaccheff, N. (2004). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. En *2002 International conference on mathematics-understanding proving and proving to understand* (pp. 23-44).

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM*, *40*(3), 501-512.

Baldor, J. A. (2004). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*. México: Ed. Publicaciones Cultural.

Bell, E.T. (1940/2011). *Historia de las matemáticas.* México: Fondo de cultura económica.

Biehler, R. y Kempen, L. (2013). Student's use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. Recuperado el 1 de marzo de 2013 de http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Kempen.pdf

Boero, P.; Garuti, R. y Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. En: P. Boero (ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249-264). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Chazan, D. (1993), High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-387.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon, 26*, 15-30.

Dirección general del bachillerato de la secretaria de educación pública en México-DGB-SEP-. (2011). *Documento base del bachillerato general.* Recuperado el 22 de mayo del 2013, de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/programasdeestudio.php

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representational and specific processing, En R. R. Sutherland & J. Mason (eds.) *Exploiting Mental mathematics with computers in Mathematics education*, (pp.142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study* (pp. 37–62). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Duval, R. (1999a) Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions inMathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the 21th the American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, PMENA Annual Meeting*. México, 1999.

Duval, R. (1999b). *Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México D.F.: Iberoamérica.

Duval, R. (1999c). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad Del Valle y Peter Lang.

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students. En *Proceedings of 2002 international conference on mathematics: Understanding proving and proving to understand*, 61-77.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice*, (137-162). Rotterdam: Sense publishers.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías*. México: UTEHA.

Facultad de Matemáticas de la universidad Autónoma de Yucatán –FMAT-UADY-. (2013) *Propuesta de plan de estudios LEM-2013.* Recuperado el 22 de mayo del

2013, de http://www.matematicas.uady.mx/files/programas/lem/propuesta2013/Modificacion_LEM_2013_VF_Con_Programas.pdf

Facultad de Matemáticas de la universidad Autónoma de Yucatán –FMAT-UADY- (s.f.). *Objetivos*. Recuperado el 22 de mayo del 2013, de http://www.matematicas.uady.mx/index.php/oferta-academica/licenciaturas/licenciatura-en-ensenanza-de-las-matematicas/20-programas-de-estudio/licenciaturas/licenciatura-en-ensenanza-de-las-matematicas/17-objetivos

Fischbein, E. (2002). *Intuition in Science and Mathematics, an Educational Approach*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, Academic Press.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. En A. Olivier y K. Newstead, K. (eds.), *Procedings of 22th Conference of the International grupo for Psychology of Mathematics education* (2), 345-352.

Guzmán, A. (1992). *Geometría y trigonometría*. México: Ed. Publicaciones Cultural

Hadas, N., & Hershkowitz, R. (1999). The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environment. En *PME CONFERENCE* (Vol. 3, pp. 3-57).

Hadas, N., & Hershkowitz, R. (2002). Activity analyses at the service of task design. En *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56).

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational studies in Mathematics*, *44*(1-2), 127-150.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2002). Analyses of activity design in geometry in the light of student actions. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *2*(4), 529-552.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM*, *40*(3), 345-353.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM*, *39*(1-2), 73-78.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry--Two Sides of the Coin, R. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11* (2), 61-76.

Hershkowitz, R. (1998). Reasoning in Geometry. En C. Mammana & V. Villani (Eds.). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study* (pp. 29–37). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Van Dermolen, J. (1996). Space and shape. *International handbook of mathematics education*, *1*, 161-204.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In *Proceedings of CERME* (Vol. 3, pp. 1-10).

Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical physics. En *Explanation and proof in mathematics* (pp. 17-32). Springer US

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31 (1), 53-60

Kline,M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Vol I. New York: Oxford University Press.

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(1), 1-10.

Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties?. *Educational studies in Mathematics*, *77*(1), 129-147.

Lakatos, I. (1982). *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 173-204.

Mariotti, M. A., & Antonini, S. (2009). Breakdown and reconstruction of figural concepts in proofs by contradiction in geometry. En *Proof and proving in mathematics education, ICMI Study 19 Conference Proceedings* (Vol. 2, pp. 82-87).

McClure, J. E. (2000). Start where they are: Geometry as an introduction to proof. *American Mathematical Monthly*, 107(1), 44-52.

Mesquita A., (1998), On conceptual obstacles linked with external representation in geometry, *Journal of mathematical behavior*, 17 (2) 183-195

Meyer, M. (2010). Abduction—A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences, *Educational Studies in Mathematics*, 74, 185–205.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23-41.

Prusak, N., Hershkowitz R. & Schwarz. (2011). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design, *Educational Studies in Mathematics*, published on line 23 de junio de 2011.

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 362-389.

Shively, L. S. (1984). *Introducción a la Geometría Moderna*. México: Editorial Continental.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2008). "Cognitive conflict" as a mechanism for supporting developmental progressions in students' knowledge about proof. Artículo disponible en la página web Del *11th International Congress on Mathematical Education, under Topic Study Group 18* (http://tsg.icme11.org/tsg/show/19). Monterrey, México.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 314-352.

Tall, D. O. (1999). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? En Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, vol. 4, 117–136.Reston, Virginia: NCTM.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. En *Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-49). Springer Netherlands.

Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas -UAM-UAZ-. (s.f.). *Programa de estudios.* Recuperado el 22 de mayo del 2013, de http://matematicas.reduaz.mx/home/Programas/geomo.htm

Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas -UAM-UAZ-. (s.f.). *Metas y objetivos.* Recuperado el 22 de mayo del 2013, de http://matematicas.reduaz.mx/web/index.php/getting-started

Viholainen, A. (2011). The view of mathematics and argumentation. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Conference of European Researchers in Mathematics Education* (pp. 243-252). Rzeszow, Poland.

Wentworth, J. y Smith, D. (1983). *Geometría plana y del espacio*. México: Ed. Porrúa

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D.Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 297-321.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics,* 68, 195-208.

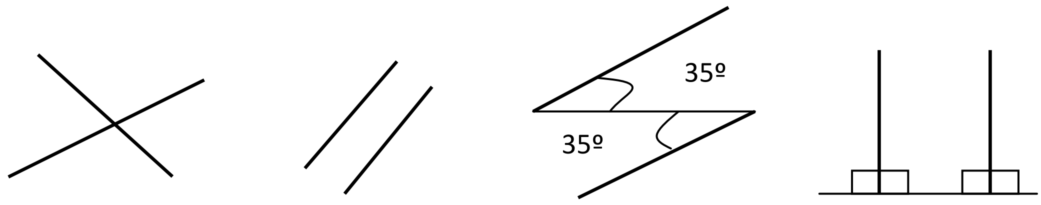
7. Anexos

Primera Etapa

Nombre: ____

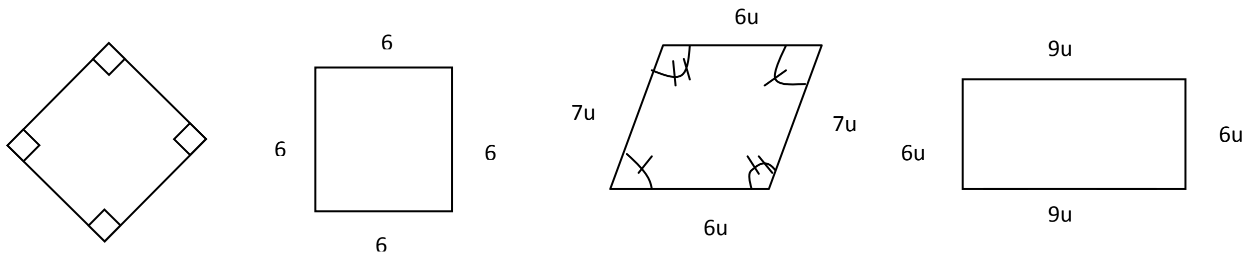
Fecha: _____________ Hora inicial: _____________ Hora final: ____________

1. Di cuales de las siguientes rectas son paralelas



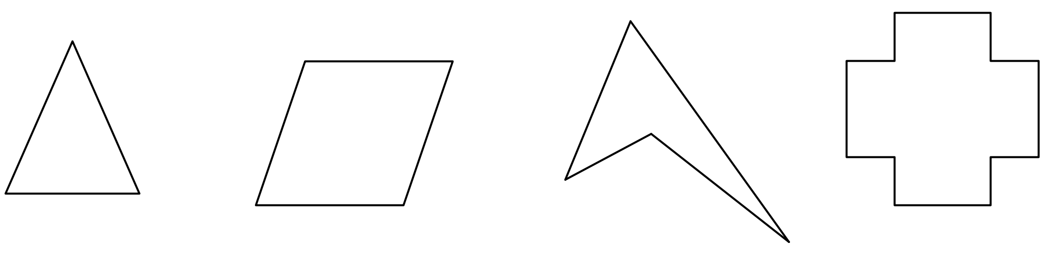
a) ___________ b) ___________ c) ___________ d) ___________

2. Di cuales de los siguientes cuadriláteros es un paralelogramo, cuadrado, rectángulo y rombo.



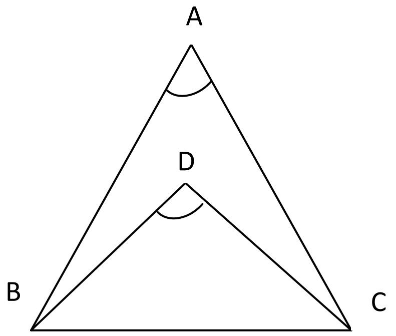
a) ____________ b) ____________ c) _______________ d) ___________

3. Dibuja y di cuantas diagonales tienen los siguientes polígonos.



a)____________ b)___________ c)_______________ d) ______________

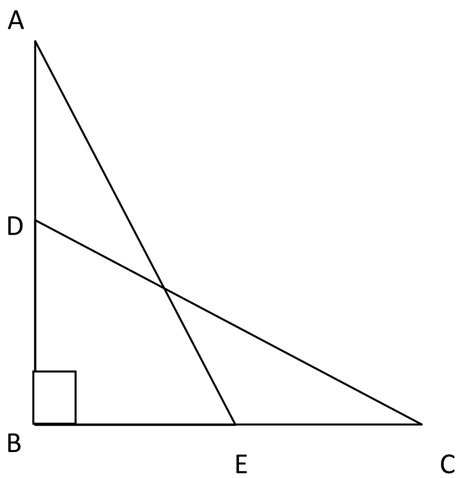
4. Dado un triángulo cualquiera△ABC y D un punto en el interior de △ABC.



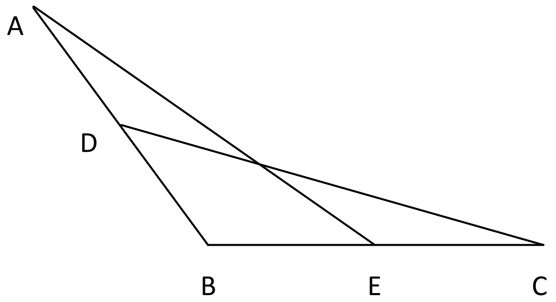
¿Cómo es el ángulo ∠A respecto del ángulo ∠D (mayor, igual o menor)? Explica tu respuesta.

5. Observa las siguientes figuras y contesta lo que se te pide.

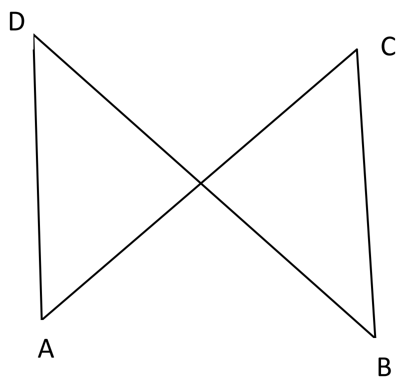
5.1 Dado un triángulo rectángulo △ABE y sean D el punto medio de AB y C un punto talque E es punto medio de BC ¿Cómo es el área del triángulo △ ABE respecto del triángulo△DBC (mayor, igual o menor)? Explica tu respuesta.



5.2 Dado un triángulo cualquiera △ABE y sean D el punto medio de AB y C un punto talque E es punto medio de BC ¿Cómo es el área del triángulo △ ABE respecto del triángulo △DBC (mayor, igual o menor)? Explica tu respuesta.



6. Si en la siguiente figura AD=BC y AC=BD ¿Cómo es ∠A respecto de ∠B (mayor, menor o igual)?



7. Di si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas, realiza un dibujo para apoyar tu respuesta y explica el porqué de tu respuesta.

a) Dibujo:

a) La diagonal de un cuadrado es siempre mayor que los lados del cuadrado.____

____

____

____

____

____

b) Dibujo:

b) La diagonal de un rectángulo es siempre mayor que los lados del rectángulo.____

____

____

____

____

____

____

c) Dibujo:

c) La diagonal de un rombo es siempre mayor que los lados del rombo.____

____

____

____

____

____

______

d) Dibujo:

d) La diagonal de un paralelogramo es siempre mayor que los lados del paralelogramo.

____

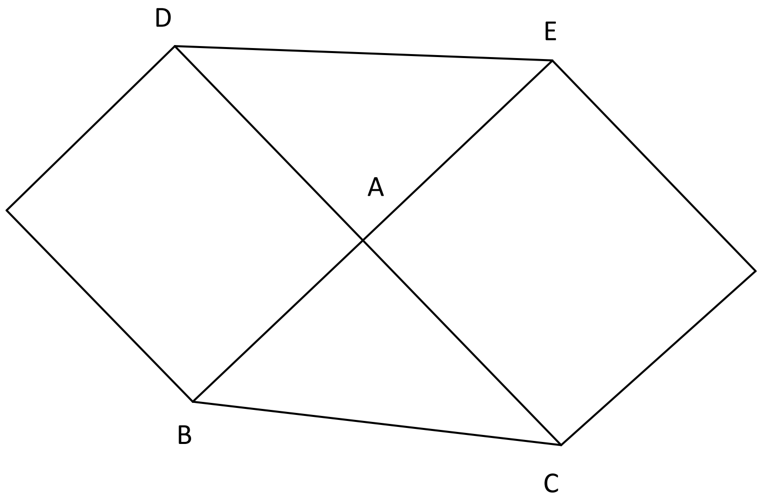
____

____

____

____

8. Sea △ABC un triángulo cualquiera, se trazan dos cuadrados sobre los lados AB y CA y sean D y E los vértices de los cuadrados para formar el △DAE.

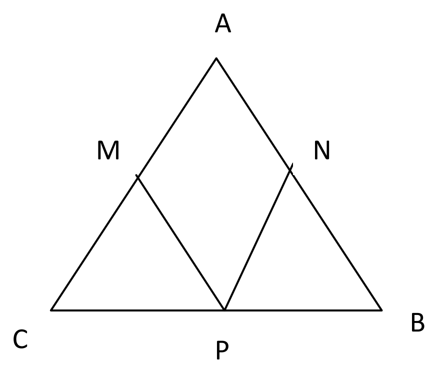


a) Si el ángulo ∠ABC= 70º y el ángulo ∠BCA= 40º ¿Cuánto mide el ángulo ∠DAE? Explica tu respuesta.____

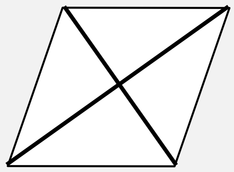
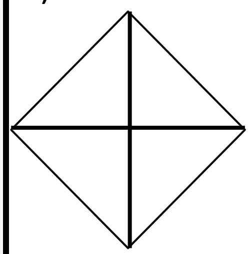
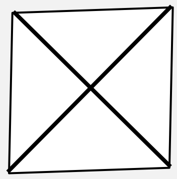
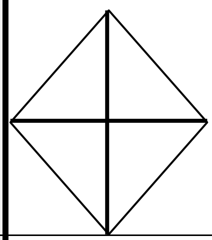
b) ¿Son iguales los triángulos △ABC y △DAE? ¿Por qué?

c) ¿Cuánto suman los dos ángulos rectos más los ángulos ∠DAE y ∠CAB?

9. Sea un triángulo △ABC tal que MP II AB, AC II NP y P es el punto medio de BC. ¿Son iguales CM y BN? ¿Por qué?



10.1. Marca con una cruz las propiedades que tiene un rombo.

a) 	b) 	c) 	d) 
Las diagonales se bisecan.	Las diagonales son perpendiculares.	Las diagonales son iguales.	Las diagonales bisecan los ángulos de los vértices.

10.2. Marca con una cruz en cuáles de los incisos las diagonales siempre pertenecen a un rombo y completa los dibujos que falten.

DIAGONALES DE UN CUADRILATERO				
CARACTERÍSTICAS	Las diagonales se bisecan.	Las diagonales son perpendiculares.	Las diagonales se bisecan y son perpendiculares.	Las diagonales son iguales y son perpendiculares.

Etapa 2

Centro de Investigación y estudios Avanzados
Del Instituto Politécnico Nacional
Departamento de Matemática Educativa

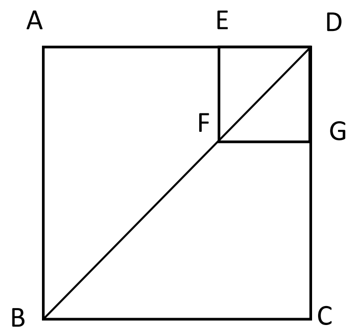
Nombre: ____

Institución: ____

Nivel Escolar: ___________________________ Edad: _________________________

Hora inicio: _____________________________ Hora final: _____________________

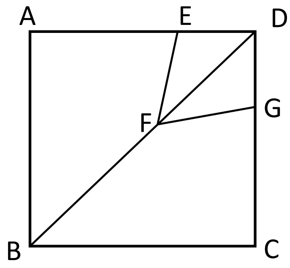
1. Observa la siguiente figura y contesta las siguientes preguntas.
   Si en el cuadrado ABCD, ED=DG y F esta sobre BD. ¿El cuadrilátero DEFG es un cuadrado? Justifica tu respuesta.



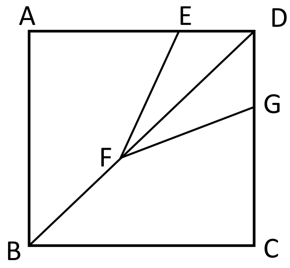
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

a) Observa los siguientes casos del problema anterior.

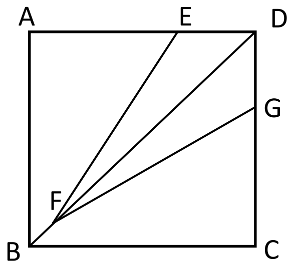
a)



b)



c)



b) ¿Los casos anteriores cumplen las hipótesis planteadas en el problema? ¿Qué diferencias encuentras entre las figuras presentadas con respecto a la figura de la pregunta anterior?

c) ¿Qué requisitos debe cumplir el punto F para que DEFG sea un cuadrado? Explica tu respuesta.

2. ¿Es posible inscribir un triángulo equilátero dentro de otro triángulo equilátero cualquiera? Es decir ¿Podemos construir un equilátero dentro de otro donde cada vértice del inscrito esté sobre un lado del otro?

____

Sugerencia:

* Ensaya construcciones de este tipo y comenta abajo porque si o porque no es posible.

b) En caso de ser posible ¿existe alguna relación que ambos deben cumplir? _______________ ¿Cuál sería esta? Explica abajo:

____

____

____

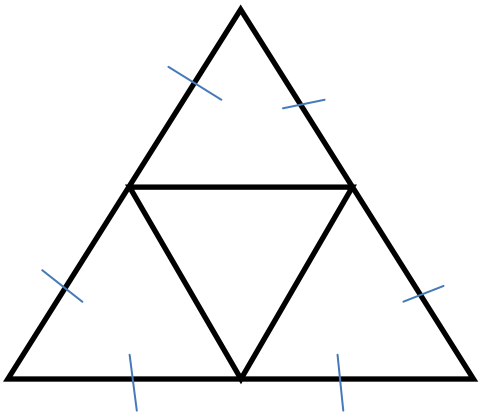
____

____

____

____

c) Un ejemplo de inscribir un triángulo equilátero en otro triángulo equilátero es a través de los puntos medios.



Explica las condiciones que hacen que los puntos medios de un triángulo equilátero sirven como vértices para construir un triángulo equilátero inscrito.

____

____

____

____

____

____

d) ¿Es posible encontrar otro triángulo equilátero inscrito distinto al triángulo de los puntos medios? Si es posible, describe abajo como construir ese triángulo inscrito.

Sugerencias:

*Supón que lo has encontrado y observa las condiciones necesarias para que el nuevo triángulo sea un equilátero inscrito.

*Observa el caso de la construcción con los puntos medios.

____

____

____

____

____

____

e) Considerando tus observaciones ¿Cuántos triángulos equiláteros inscritos se pueden encontrar?_______________ ¿por qué?

____

____

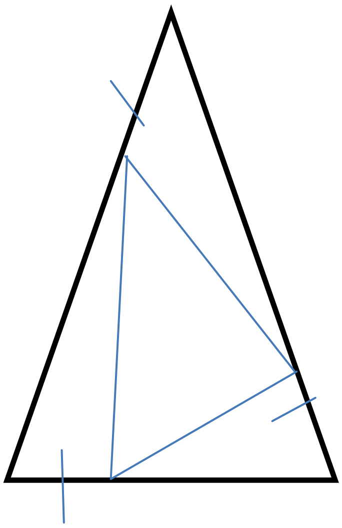
____

____

____

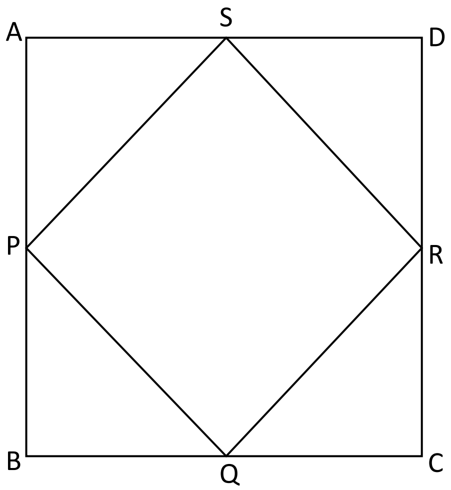
3. Si tenemos un triángulo isósceles y le inscribimos otro triángulo como se indica en la siguiente figura (tomamos segmentos iguales sobre sus lados) ¿Este será también isósceles? ________

b) Analiza la figura y explica tu respuesta.



4. Los puntos P, Q, R y S son los puntos medios de los lados de un cuadrado ABCD. Determina qué tipo de cuadrilátero es PQRS con base en el tamaño de los lados y los ángulos.

a) Justifica tu respuesta.



b) ¿Es posible construir otro cuadrado inscrito diferente al cuadrado de los puntos medios en el ABCD? _________ Explica tu respuesta.

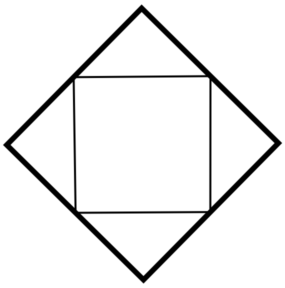
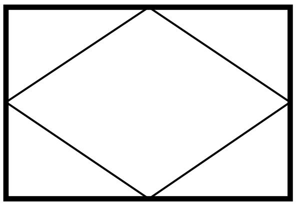
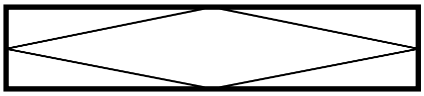
c) ¿Es posible inscribir un cuadrado dentro de un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta abajo.

Sugerencias:

* Ensaya posibles situaciones
* Para contestar la pregunta anterior analiza la posible posición de los vértices del cuadrado inscrito. Por ejemplo, ¿El cuadrilátero de los puntos medios del rectángulo es un cuadrado? ¿Por qué si o por qué no?

d). Considerando tus exploraciones anteriores determina las condiciones que harían posible inscribir un cuadrado en un rectángulo cualquiera.

e) Observa las siguientes figuras y contesta las siguientes preguntas.

a)	b)	c)
		

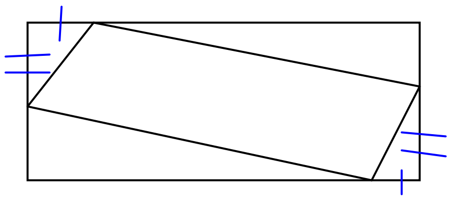
¿Qué diferencias encuentras entre las tres figuras?

¿Qué semejanzas encuentras entre las tres figuras anteriores?

¿Crees que es posible inscribir un cuadrado en un rectángulo cualquiera? ____________ Explica tu respuesta, dando las razones que la apoyen.

¿Qué tipo de cuadrilátero podría tener un cuadrado inscrito? Explica tu respuesta y realiza un dibujo que guíe tu respuesta.

5. Si tenemos un rectángulo y le inscribimos un cuadrilátero como se indica en la siguiente figura (tomamos segmentos iguales sobre sus lados opuestos) ¿Este será también rectángulo? _________



Explica tu respuesta:

b) Considerando tus exploraciones anteriores determina las condiciones que harían posible inscribir un rectángulo en un rectángulo cualquiera.