Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales en primer y segundo grados de secundaria

Tesis que presenta

Ponciano Hernández Hernández

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en la
especialidad de Matemática Educativa

Directores:
Dr. Eugenio Filloy Yagüe
Dra. Ana María Ojeda Salazar

México, Distrito Federal Mayo 2014

CONACYT

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** que por medio del programa de becas me permitió desarrollar mis estudios de Maestría.

Becario No: 281898

Agradezco al **Departamento de Matemática Educativa** por brindar las condiciones que permiten una formación como investigador.

Agradezco a la **Escuela Secundaria Diurna No. 103 "República Mexicana"** por las facilidades que otorgaron para realizar la investigación.

Agradezco de **<u>manera especial</u>** a los profesores del **Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas**:

Ana María Ojeda Salazar, por esa paciencia, orientación y ayuda. Por interesarse en el proyecto. ¡Gracias!

Eugenio Filloy Yagüe, por su apoyo y consejos. Por mostrar interés en la investigación. ¡Gracias!

Índice

Resumen

La presente investigación tuvo el objetivo de identificar las principales dificultades que presentan los sujetos durante la transición de la Aritmética al Álgebra en su educación secundaria, durante su iniciación en la solución de ecuaciones lineales. El proceso se enmarcó en los Modelos Teóricos Locales (MTL) y se enfocó principalmente en sus componentes de enseñanza y de procesos cognitivos, para las cuales se consideran los usos del Sistema Matemático de Signos.

La investigación se realizó en una Escuela Secundaria pública mexicana, con un grupo de 30 alumnos de primero y otro de 35 alumnos de segundo, de 12-13 y 13-14 años de edad, respectivamente. En el ciclo escolar 2011-2012 se recopilaron datos mediante cuatro cuestionarios exploratorios aplicados a los alumnos de primer grado, referentes a sus nociones de Aritmética y de solución de situaciones problémicas. En el ciclo 2012-2013 se recopilaron datos de los alumnos de segundo grado con tres cuestionarios: para identificar tres estratos de sus usos de los SMS aritméticos/algebraicos y profundizar en los rasgos de cada estrato mediante una entrevista semiestructurada; para diagnosticar su estado de conocimiento previo al estudio de las ecuaciones lineales y basar la estrategia de enseñanza del tema en esta información y en la solución de problemas; y para caracterizar su comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales posterior a esa enseñanza.

Las dificultades identificadas en primero y en segundo grados concernieron al uso deficiente de los SMS aritméticos y algebraicos, a la incomprensión de los enunciados (texto escrito) de los problemas planteados y a la evitación consecuente de análisis, y al uso del ensayo y error. Según el uso del SMS en las respuestas a un cuestionario dadas por los alumnos de segundo grado, se les clasificó en estratos bajo, medio y alto. Se diseñó y aplicó una estrategia de enseñanza a ese mismo grupo considerando las cuatro etapas que establece Polya (1945) para resolver un problema, el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS) para resolver problemas de Aritmética y el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) para la iniciación en Álgebra (Filloy, 1999). Antes de la enseñanza, dos de cada tres alumnos se ubicaron en el estrato bajo; después de la enseñanza sólo uno de cada tres alumnos se clasificó en ese estrato. Esta estrategia de enseñanza contribuyó a mejorar la comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales.

Abstract

This research study aimed at identifying the main difficulties that pupils have in the transition from Arithmetic to Algebra at their secondary school education, during their initiation into solving linear equations. The process was framed in the Local Theoretical Models (MTL) (Filloy, 1999) and was mainly focused on the components teaching and of cognitive processes, for which the use of the Mathematical Signs Systems are considered.

The research was carried out at a Mexican public secondary school, with 30 first grade pupils and 35 second grade pupils, aged 12-13 and 13-14 years, respectively. During the school year 2011-2012, the data were gathered by means of four questionnaires applied to the first grade pupils, with respect to their arithmetical notions and their solving of word problems. During the 2012-2013 school year, data from the second grade pupils were obtained with three questionnaires: to identify three strata of their uses of arithmetic/algebraic SMS and to deepen into the features of each stratum by means of a semistructured interview; to diagnose their acquired knowledge before the beginning of the study of linear equations and to offer a teaching strategy of the subject based on this information as well as on solving word problems; and to characterize pupils' understanding of the language of algebraic linear equations after the teaching takes place.

The difficulties identified in the first and second grades were due to pupils' poor use of arithmetic and algebraic SMS, to their misunderstanding of the statements (written text) of the word problems posed to them and the consequent avoidance of analysis, and to their use of trial and error. Depending on the use of the SMS in the answers to a questionnaire given by the second graders, they were classified into low, medium and high strata. We designed and implemented a teaching strategy for the second grade group by considering the four steps set by Polya (1945) to solve a problem, the Method of Analytical Successive Inferences (MIAS) to solve arithmetical problems and the Analytical Method of Successive Explorations (MAES) for an initiation into Algebra (Filloy, 1999). Before that teaching, two out of every three students were in the lowest stratum, but after the teaching took place only one out of every three students was classified in that stratum. This teaching strategy contributed to improving pupils' understanding of the language of algebraic linear equations.

Introducción

El Álgebra evolucionó a partir del lenguaje natural y de la Geometría, que por muchos años validaron su conocimiento. La construcción del Álgebra simbólica, como lenguaje formal y autónomo, con el uso de letras, inició en el siglo XVI con el método del análisis griego para la solución de problemas (Viète, 1593).

Los sujetos que inician el estudio del Álgebra se enfrentan a un nuevo lenguaje, nuevos objetos, símbolos, signos, letras; por tanto, se les dificulta la transición de la Aritmética al Álgebra, entre otras razones porque algunos de los signos, propios de la Aritmética, ahora tienen significados totalmente distintos.

Los fenómenos que ocurren durante el aprendizaje del Álgebra pueden estudiarse desde un punto de vista que considere su contenido en la escuela como un Sistema Matemático de Signos (SMS) en uso (Filloy, 1990; Kieran, 1998).

En la actualidad, se pueden identificar diversos orígenes del deficiente pensamiento algebraico de gran número de alumnos que finalizan su educación matemática básica; no logran una adquisición precisa del lenguaje algebraico, una de las causas debido a las estrategias que usan los docentes (por ejemplo, Rosáinz, 2005; Córdoba, 2005; Huesca 2007).

El interés de esta investigación fue el tratamiento de las ecuaciones lineales en los grados primero y segundo, en los que se les prescribe para la educación secundaria (SEP, 2011, pp. 33 y 42). Pretendimos identificar las dificultades que manifiestan los alumnos de esos grados para plantear y solucionar ecuaciones lineales referidas a situaciones problémicas, que consideramos familiares para ellos. También nos propusimos diseñar y poner en práctica una enseñanza del tema en cuestión que aspirara a remontar esas dificultades.

Por la vía de un Acuerdo Académico Colegiado entre la Escuela Secundaria Diurna No. 103 “República Mexicana”, institución pública ubicada en la Ciudad de México, y el Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas, del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav (véase el Anexo 1), se sentaron condiciones para que el presente investigador tuviera acceso a un aula de primer grado durante el periodo escolar 2011-2012 y a una de segundo grado durante el periodo 2012-

2013, en sus ambientes escolares cotidianos, de manera que el constituyente empírico de la investigación se sujetó a la organización, temporalidad y actores (alumnos, docentes de matemáticas titulares y programas de estudio) respectivos, institucionales designados.

Este informe de la investigación realizada se estructura en siete capítulos. Nuestras preguntas de investigación y los objetivos perseguidos se presentan en el Capítulo 1. En el Capítulo 2 nos referimos al marco teórico en el que se sustenta el proceso desarrollado y su lógica, particularmente en las investigaciones efectuadas en el álgebra educativa que atañen a la formación en la educación secundaria. Filloy (1999) propone la construcción de un Modelo Teórico Local (MTL), en la que el objeto de estudio se enfoca desde cuatro componentes interrelacionadas: a) modelos de enseñanza, b) modelos de procesos cognitivos, c) modelos de competencia formal y d) modelos de comunicación. Nosotros nos hemos centrado principalmente en las dos primeras componentes, si bien no desconocemos las dos restantes, ya que subyacen los cuatro componentes al considerar los fenómenos en cuestión desde la perspectiva de los MTL.

El Capítulo 3 presenta a los participantes en la investigación —un grupo de 30 alumnos de primer grado (periodo 2011-2012) y otro de 35 alumnos de segundo grado (periodo 2012-2013), los dos de educación secundaria, con sus docentes de matemáticas titulares—, la organización de los escenarios empíricos y de las acciones implementadas en ellos; especifica los métodos utilizados, los instrumentos diseñados para la recopilación de datos y las técnicas de registro de éstos empleadas.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados de una exploración (en el periodo 2011-2012) referida al conocimiento aritmético de los alumnos de primer grado antecedente a su introducción a las ecuaciones lineales y a los resultados de ésta, efectuada mediante la enseñanza impartida por el docente titular. Una de las dificultades identificadas que presentan los alumnos para la comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales parte de su deficiencia en la Aritmética básica.

El Capítulo 5 se refiere a las condiciones de inicio del grupo de alumnos de segundo grado participante (ciclo escolar 2012-2013) por su desempeño en matemáticas, con miras al tratamiento de las ecuaciones lineales. Esas condiciones se identificaron mediante la aplicación de un cuestionario y la caracterización de los desempeños de los alumnos en él, por estratos —tres—, según su uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos (Filloy, 1999); y por medio de la realización de tres entrevistas semiestructuradas individuales a tres alumnos, uno por cada estrato.

El Capítulo 6 se refiere a los datos que completaron la información de las principales dificultades de los alumnos de segundo grado (también en el periodo 2012-2013) en el conocimiento requerido para su estudio de las ecuaciones lineales antes de que el investigador les enseñara el tema, a la estrategia de enseñanza que se basó en esa información y a los resultados de esa enseñanza en la comprensión de los alumnos del tema. En particular, la estrategia implementada hizo énfasis en la solución de problemas presentados en lengua natural escrita y signos numéricos, mediante la identificación de la incógnita y de los datos, el planteamiento de la ecuación respectiva y el despeje de la incógnita, con lo que se promovió el uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos.

Finalmente, el Capítulo 7 presenta las conclusiones de la investigación realizada.

Capítulo 1

Problemática de la enseñanza y comprensión de la ecuación de primer grado

En la actualidad, la educación en nuestro país enfrenta grandes retos. Particularmente, en la educación matemática básica son manifiestas las dificultades de comprensión de los alumnos en su iniciación al pensamiento algebraico.

Regularmente, los alumnos de secundaria exhiben incomprensión del Álgebra. En específico, llama la atención la complejidad del paso de la Aritmética al Álgebra. “Muchas de las dificultades que los alumnos encuentran en el proceso de apropiación del álgebra manipulativa tienen su origen en un arraigo a las fuentes de significado provenientes de la Aritmética o del lenguaje coloquial, al interpretar símbolos literales y los signos de operación” (Solares, 2007, p. 9). El interés principal de esta investigación se centra en la “comprensión del lenguaje algebraico de ecuaciones lineales en el primero y segundo grados de secundaria”.

1.1. Primeros planteamientos

En el ámbito de la investigación en matemática educativa, durante la década de los ochenta las investigaciones se enfocaron en los procesos de construcción y aprehensión de algunos conceptos matemáticos: los conceptos de número, de variable, de función, etc., con énfasis en las dificultades que entrañan esas construcciones (Rojano, 1993).

En ese tiempo surgió el interés por estudiar los aspectos semántico y sintáctico de la matemática, con la finalidad de explicar las observaciones acerca de las interpretaciones que los estudiantes dan a los símbolos matemáticos (Booth, 1984). Desde esta perspectiva, se considera a los estudiantes como usuarios potenciales del lenguaje matemático y a la enseñanza como el medio que debe propiciar el aprendizaje de ese lenguaje. En este sentido surgieron reflexiones en torno a las diferencias y similitudes del Álgebra con la lengua natural (Freudenthal, 1983), las cuales sugirieron dimensiones de análisis que comprenden los aspectos sintácticos y semánticos. Para Freudenthal, el aprendizaje de nuevos lenguajes debe apoyarse en los lenguajes previamente adquiridos, traduciendo o transformando los contenidos de un lenguaje en el de los otros. El lenguaje natural y el lenguaje algebraico tienen características comunes, como el caso de las variables y las reglas, es decir; la sintaxis en ambos lenguajes, por lo que es necesario identificar la función que tiene cada uno en los distintos contextos (Filloy, 1999).

1.2. Antecedentes

Los alumnos de primer grado de educación secundaria tienen su primer acercamiento al Álgebra, por lo que presentan dificultades para su comprensión. Durante los seis años de su educación primaria sólo utilizaron números para realizar operaciones básicas y resolver problemas. Usaron las literales de las fórmulas para calcular áreas y perímetros de figuras geométricas, pero con un sentido exclusivamente aritmético y no algebraico. Se acostumbra a los alumnos a que consideren esas literales como etiquetas que se refieren a entidades específicas, como la inicial de una palabra; por ejemplo, se suele usar la *b* para representar la base, la *A* para el área, *h (h* es un uso común por la inicial del inglés height) para la altura; cuando se cambian estas letras por otras, el alumno se confunde y no sabe operarlas. Esto significa que tienen dificultades para dar sentido al uso de los símbolos (literales) en las fórmulas geométricas para la resolución de operaciones y resolución de problemas.

1.3. Tratamiento de las ecuaciones de primer grado

Esta investigación, que se realizó *en curso,* es decir, se incorpora a programas que, a su vez, también se sujetan a examen; es en curso por su desarrollo, en tanto a la dialéctica del escenario empírico, sus resultados y los referentes teóricos consecuentes; y también es en curso porque las preguntas y los objetivos que se plantea se precisan y consolidan en el desarrollo mismo de la investigación. Esta investigación se enfocó en la educación básica-secundaria y se interesó en el lenguaje algebraico para "ecuaciones de primer grado" (SEP, 2011 a. p. 17).

El Álgebra es una de las ramas de las matemáticas que mayor complejidad reviste para los alumnos por el nivel de abstracción que requiere y por el uso de su simbología. Se le introduce en primero y segundo grados de secundaria, en el eje de sentido numérico y pensamiento algebraico, con el tema "Ecuaciones" (SEP, 2011; pp. 33 y 42, respectivamente). Actualmente, a la resolución de problemas se le atribuye un papel muy importante en la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles, especialmente en los libros de texto. Sin embargo, es en ese aspecto en el que generalmente se revelan mayores dificultades en la aplicación del contenido matemático y se requiere el uso competente de un Sistema Matemático de Signos (SMS).

1.4. Objetivos

Esta investigación pretendió realizar una propuesta concreta para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado que posibilitara remontar algunas de las dificultades de los alumnos de primero y segundo grados de secundaria, identificadas mediante los datos que proporcionaron, recopilados con los instrumentos diseñados para tal efecto.

1.4.1. Objetivos específicos

Nos propusimos:

- Identificar dificultades de los alumnos en los conocimientos antecedentes al tratamiento del tema "ecuaciones de primer grado".
- Identificar los procesos que se desarrollan en la comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado durante la enseñanza del contenido recurriendo al planteamiento y resolución de problemas.
- Caracterizar los resultados de la aplicación de un modelo de enseñanza para contrastarlos con la información obtenida de la aplicación de instrumentos.

1.5. Preguntas de investigación

Las preguntas a las que se refirió esta investigación fueron las siguientes:

- ¿Cuáles dificultades de comprensión presentan los alumnos de primer grado de secundaria del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado?
- ¿Cuáles conocimientos previos deben tener los alumnos para una mejor comprensión de la sintaxis y semántica del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado?
- ¿Cuáles conflictos presentan los estudiantes en la resolución de problemas que implican a las ecuaciones de primer grado?
- ¿De qué manera el recurso a la resolución de problemas contribuye a la comprensión de las ecuaciones de primer grado de los alumnos que se inician en el aprendizaje del lenguaje algebraico?

1.6. Problema y su justificación

Generalmente, para los estudiantes que se inician en el estudio del Álgebra es difícil comprender el significado de los signos de operación porque cambian del campo de conocimiento aritmético a otro con el que comparte muchos de los signos, pero tienen diferente significado. En su educación primaria solamente calcularon operaciones aritméticas básicas y solucionaron con ellas; como ya señalamos, su primer acercamiento al uso de literales en el cálculo de áreas y perímetros de figuras geométricas fue específicamente aritmético. En esta edad, entre los 12 y 13 años, en su iniciación al Álgebra, se enfrentan al uso de los símbolos, signos, variables; es complejo para esta edad dotar de sentido a las letras en una operación matemática. Por tanto, es necesario identificar las causas que originan las dificultades para la comprensión del lenguaje algebraico de ecuaciones lineales en primero y segundo grados de secundaria y proponer una forma de remontarlas.

Capítulo 2

Perspectiva de investigación

Diversas investigaciones en álgebra educativa hacen referencia al concepto metodológico de Modelos Teóricos Locales, en los que "el objeto de estudio se enfoca desde cuatro componentes interrelacionadas: modelos de enseñanza, modelos de procesos cognitivos, modelos de competencia formal y modelos de comunicación" (Filloy, 1999, p. 4). En la componente de procesos cognitivos se consideran las manifestaciones de la realización de formas de pensamiento matemático, como el uso de la memoria, las concepciones heurísticas utilizadas en la solución de situaciones problémicas, la generalización y la abstracción que, además, requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS). Para el logro de los objetivos planteados en la investigación (véanse en la sección 1.4 en el capítulo 1) se adoptó la propuesta teórica y metodológica de los Modelos Teóricos Locales (MTL) y la noción del Sistema Matemático de Signos (SMS).

2.1 Antecedentes de la investigación. Procesos de abstracción en el aprendizaje del Álgebra

Uno de los fenómenos en el tratamiento de las ecuaciones de primer grado en los primeros años de educación secundaria es el de permanencia en un nivel de lectura entre los niños que acaban de terminar la educación primaria (alrededor de los 12 años), cuando se enfrentan a la solución de ecuaciones de primer grado. Se presenta lo siguiente:

Esquema de la evolución de la ecuación $ax = b$ (Filloy, 1999, p.79)

1. $3 \times \square = 12$
2. $3 \times \square = 672$
3. $\bigcirc \xrightarrow{\times 3} 672$
4. $3 \times x = 672$
5. $3x = 672$

Entre los 10 y los 12 años es fácil centrar a algunos estudiantes para que estas ecuaciones "se lean" como en el inciso 2: ¿Cuál es el número que multiplicado por 3 da 672? (Filloy, 1999, p.79).

Al analizar las respuestas de los niños de las edades señaladas, además de constatar que distinguen las preguntas como es el caso de: ¿cuál es el número que multiplicado por 3 da 672? ya que algunas se pueden contestar y otras no, es fácil para algunos, con cierto perfil, lograr "centrarlos" a los estudiantes en la utilización del método aritmético preferido (Filloy, 1999, p. 79), que es el tanteo, llevándolos incluso a permanecer largo tiempo utilizándolo, a pesar de que los números cada vez sean más grandes y, a su vez, esto les conduce a no contar ya con habilidades aritméticas suficientes como para poder contestar esta pregunta sin cometer un error (Filloy, 1999, p. 80).

El contexto en que aparece la ecuación, aun en su forma escrita, hace que se "olvide" la operatividad lograda con anterioridad, volviéndose a preferir el método aritmético del tanteo o, en algunos casos, a no poner en juego método alguno de solución. Una descripción pormenorizada de lo que está ocurriendo, en este último caso, muestra que la interpretación del signo x es crucial en la descodificación de la expresión $Ax = B$, interpretando a la x como *"una incógnita",* haciendo que el sujeto no sepa qué hacer, pues "se trata de algo desconocido", según sus propias palabras (Filloy, 1999, p. 80).

> Estas observaciones pueden hacerse fácilmente en el salón de clase y ahí mismo es posible inferir que estos hechos están ligados a muchos otros, muestras de las dificultades intrínsecas que el aprendizaje del álgebra presenta: los errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operatoriamente con las expresiones algebraicas, los errores de traducción cuando se utiliza el álgebra para resolver problemas escritos en el lenguaje usual, las interpretaciones erróneas del significado de expresiones algebraicas, dados los diferentes contextos en que ellas aparecen, las dificultades para contrastarles algún significado, la posibilidad de la utilización del álgebra para resolver problemas usuales, etc.
>
> (Filloy, 1999, p. 80).

2.2 Modelos Teóricos Locales

"Utilizaremos un **modelo teórico local** para la observación del uso de un SMS que forma parte, como estrato, de casi todo SMS. Nos referimos a la competencia de uso de los números naturales y sus operaciones básicas" (Filloy, 1999, p. 8). A lo largo de las investigaciones en álgebra educativa se ha determinado, concepciones de lo que es un Modelo Teórico Local (MTL). Por su parte, Solares especifica para un Modelo Teórico Local que "Un MTL así construido de esta manera no tiene un carácter universal, es decir, no es replicable bajo cualquier condición educativa. Su carácter es local, ya que depende del objeto o fenómeno específico estudiado". (Solares, 2007, p. 32).

Cuando los niños se enfrentan a problemas nuevos, problemas para los cuales el conocimiento de que disponen no es suficiente, generan estrategias y códigos personales en un intento por encontrar la solución a partir del conocimiento de que disponen generando nuevas maneras de representar las nuevas acciones que realizan (Filloy y Rojano, 1984).

2.2.1. Componentes del Modelo Teórico Local

El objeto de estudio en el Modelo Teórico Local se enfoca desde cuatro componentes interrelacionadas relativas a la enseñanza, a los procesos cognitivos, a la competencia formal y a la comunicación.

2.2.1.1. Modelos de enseñanza. Para investigar los fenómenos de la enseñanza y del aprendizaje de un contenido matemático específico, Filloy propone la construcción de un Modelo Teórico Local (MTL, 1999). Considera cuatro elementos esenciales: el sujeto que enseña, el sujeto que aprende, el conocimiento matemático en juego y la comunicación que establecen los sujetos implicados en el proceso. En particular, se refiere a la componente de enseñanza en las que propone, "*modelar* en contextos (más) "*concretos*" (es decir, contextos familiares para el alumno) las nuevas operaciones y los nuevos objetos, con el propósito de dotarlos de significados y tomando éste como punto de partida, construir los primeros elementos de sintaxis" (Filloy, 1999, p. 23).

El modelo de enseñanza se define como: "secuencias de textos matemáticos T*n* cuya elaboración y decodificación por el aprendiz le permite al fin interpretar todos los textos T*n* en un SMS más abstracto, cuyo código hace posible descodificar los textos T*n* como mensajes con un código matemático". (Filloy, 1999, p. 78).

Los modelos de enseñanza señalan las estrategias de enseñanza a usar en los inicios de la adquisición de las competencias de un Sistema Matemático de Signos:

- El modelaje concreto, que propone modelar en contextos más concretos (familiares al alumno) las nuevas operaciones y los nuevos objetos a ser enseñados, con el propósito de dotarlos de significados y, tomando este modelo como punto de partida, construir los primeros elementos de sintaxis.
- El modelaje sintáctico, que propone a partir de la sintaxis enseñar las reglas (sintácticas) para aplicarlas más tarde en la solución de ecuaciones y problemas.

"El modelo geométrico y la balanza son ejemplos de modelajes concretos, mientras que los modelos sintáctico-viético (la transposición de términos de un miembro a otro) y el eureliano (la adición y multiplicación de los inversos aditivos y multiplicativos, respectivamente en los dos miembros de la ecuación) son ejemplos del modelaje sintáctico" (Huesca, 2007, p. 49).

En relación al modelaje concreto, Filloy (1999) afirma:

> … Es necesario saber acerca de los procesos que median entre las acciones que se realizan en un nivel "*más concreto*" (es decir, las acciones en el modelo) y los correspondientes elementos de sintaxis que se obtengan a partir de ellas. Estos procesos que aquí llamaremos "*de abstracción de operaciones*" (nos referimos a los procesos de recuperación, en un nivel sintáctico, de los elementos comunes a las acciones ejecutadas en el uso reiterado de un modelo o situación "*concreta*" de enseñanza)…
>
> (p. 23)

2.2.1.2. Modelo de procesos cognitivos. Esta componente está formada por los modelos de procesos de pensamiento, relacionados con los diferentes aspectos de un contenido matemático, que permiten describir cómo el alumno procesa su conocimiento, cómo lo comunica, abstrae y lo generaliza, las dificultades que enfrenta, la caracterización de estrategias y los procesos de análisis y síntesis en la solución de problemas y las competencias generadas por el uso de un modelo de enseñanza (Filloy, 1999).

En este proceso, el sujeto pone en acción formas de pensamiento matemático y su comunicación, que usan códigos, signos, letras, para lo que utiliza la percepción, la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión, el uso de la memoria, las concepciones heurísticas en la solución de situaciones problémicas y requiere de usos novedosos de los Sistemas Matemáticos de Signos.

Para el tratamiento de la solución de problemas aritméticos/algebraicos, se han identificado tres métodos clásicos; Filloy, 1999: 1) Método de Inferencias Analíticas

Sucesivas (MIAS), 2) Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) y 3) Método Cartesiano (MC), que describimos de manera más amplia en la sección 2.4. La aplicación del Método Cartesiano requiere expresiones de un Sistema Matemático de Signos más abstracto que el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas y que el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas, por las que un usuario competente dé sentido a una representación (simbólica). El uso correcto de los SMS implica una evolución en la solución de problemas, que se desprende de los ejemplos concretos dados en el proceso de enseñanza (Filloy, 1999). Para alcanzar una competencia plena en el método algebraico por excelencia es necesario dominar el Método Cartesiano.

Filloy (1999) señala que en la investigación se observan dificultades a lo que Filloy denomina tendencias cognitivas que se presentan en la situación de enseñanza y en el proceso de abstracción del lenguaje algebraico cuando se está tratando de pasar de un estrato de lenguaje del Sistema Matemático de Signos más concreto a uno más abstracto, y describe las tendencias cognitivas hacia un uso competente de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) más abstractos, a lo largo de la investigación se ejemplifican algunas de las tendencias cognitivas que se identificaron.

1. La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.
2. La dotación de sentidos intermedios.
3. El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.
4. La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes. Por ejemplo; cuando hay un dominio de los estudiantes en algún procedimiento, pierden su gran habilidad operatoria para resolverlos.
5. Centración en lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.
6. La articulación de generalizaciones erróneas.
7. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución
8. La presencia de mecanismos inhibitorios.
9. La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.

10. La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentido a las acciones concretas intermedias.
11. La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

2.2.1.3. Modelos de competencia formal. Filloy (1999) señala que el modelo formal se determina mediante un análisis fenomenológico puro, es decir, se describen los fenómenos para los cuales el Sistema Matemático de Signos es medio organizador. “El análisis fenomenológico permite establecer enlaces entre el modelo cognitivo y el modelo de enseñanza” (Huesca, 2007, p. 48).

Este componente posibilita una descripción de las situaciones observadas por medio de un Sistema Matemático de Signos más abstracto que permita descodificar todos los textos que se producen en un intercambio de mensajes, en el que los actores tienen diversos grados de competencia de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos utilizados. Es necesario que el sujeto domine las competencias de uso de un SMS más abstracto.

El uso de los Sistemas Matemáticos de Signos permite descodificar los textos en el proceso de la transición de la Aritmética al Álgebra. “Así, la componente formal de un Modelo Teórico Local corresponde al dominio matemático formal y a las aplicaciones del conocimiento matemático” (Huesca, 2007, p. 48).

2.2.1.4. Modelos de comunicación. Un modelo de comunicación permite describir el intercambio de mensajes en las entrevistas y en la situación de enseñanza. “En este componente se considera el intercambio de mensajes entre sujetos de diversos grados de competencia en el uso de los Sistemas Matemáticos de Signos empleados para crear textos matemáticos” (Huesca, 2007, p. 52).

2.3. La transición de la Aritmética al Álgebra

Desde hace más de dos décadas, la resolución de problemas ha constituido una de las áreas más investigadas en matemática educativa. En los libros de texto aparecen secciones de problemas, a veces llamados de aplicación, que generalmente están enunciados con palabras, debido a que el lenguaje natural, expresado en forma verbal o escrita, es y ha sido el medio más importante y común por el cual puede presentarse una situación problémica a un estudiante para que la resuelva.

Las dificultades en la comprensión de texto a las que se enfrentan los estudiantes en la resolución de problemas mediante el empleo del lenguaje algebraico se presentan en la escuela secundaria al leer o escribir en el Sistema Matemático de Signos algebraico, cuando han recibido instrucción en otros SMS como el aritmético o pre-algebraico. La mayoría de los alumnos consideran al Álgebra difícil por la abstracción que se requiere, el uso de los signos, símbolos, letras. Una de las discontinuidades al inicio que afrontan los alumnos del Álgebra es la introducción de representaciones formales y métodos de solución de problemas que, hasta otra etapa en su escolaridad, había sido tratada intuitivamente.

Cuando los estudiantes comienzan a estudiar Álgebra y se enfrentan a operar las letras, ellos acceden a otros niveles de pensamiento superando lo numérico y los procedimientos netamente aritméticos. Debido a que la Aritmética es de procedimientos que implican a números específicos o datos, al trabajar con problemas algebraicos los estudiantes suelen considerar las operaciones que deberían usar para representar las relaciones de las situaciones a las que se refieren esos problemas (Bonilla, 2008).

Es difícil para los alumnos comprender que los signos de operación cambian su significado al cambiar de un dominio de conocimiento a otro, pues la Aritmética y el Álgebra comparten muchos de los signos y símbolos, tales como el signo igual, el de adición y el de sustracción, inclusive el uso de las letras, los símbolos + y □ , que en la Aritmética denotan operaciones ejecutables como en los algoritmos de la adición y la sustracción y que llevan a un resultado numérico en el campo del Álgebra, pues en Aritmética solo indican la operación a realizar.

2.4. La resolución de problemas aritméticos algebraicos

Como se señaló en § 2.2.1.2 para la solución de problemas aritméticos/algebraicos se han identificado tres métodos clásicos de la componente de procesos cognitivos: Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS), Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES), Método Cartesiano (MC) (Filloy, 1999).

2.4.1. Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS)

Se concibe a los enunciados de los problemas como descripciones de "situaciones reales" o "estados posibles del mundo" y se transforma a tales textos en oraciones analíticas, esto es, utilizando "hechos" válidos en "todo mundo posible": inferencias lógicas que actúan como descripciones de las transformaciones de las "situaciones posibles" hasta llegar a una que se reconoce como la solución del problema; es el también denominado Método Analítico Clásico para resolver problemas, en donde se utiliza propiamente la Aritmética (Filloy, 1999). Por ejemplo; La mamá de Jacqueline va al supermercado y compró los siguientes productos: $3\frac{1}{2}$ kg de azúcar, 1.5 kg de aguacate, $\frac{1}{4}$ kg de queso panela, 2 kg de manzana y 0.5 kg de tortillas. El kg de azúcar tiene un costo de 22.50 pesos, el kg de aguacate cuesta 30 pesos, el kg de queso panela cuesta 70 pesos, el kg de manzana tiene un costo de 26.50 pesos y el kg de tortillas cuesta 13 pesos. ¿Cuánto tiene que pagar la señora por los productos comprados? Si pagó con un billete de 500 pesos ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es el peso total de los productos comprados? Se utiliza propiamente la Aritmética para resolver el problema.

2.4.2. Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES)

El primer paso que se sigue después de leer el enunciado es identificar lo que se quiere obtener, esto es, lo que el usuario va a considerar como "lo desconocido" en el problema. Una vez hecha la identificación, se asigna un valor numérico para "lo desconocido" considerándolo como una solución hipotética. Con esto se quiere propiciar que el sujeto haga una lectura o re-lectura por la que, en lugar de que razone sobre relaciones en las que hay elementos desconocidos, ahora pueda pensar todas las relaciones del problema en términos de cantidades conocidas. Así, la utilización de una solución hipotética puede facilitar el desencadenamiento del análisis y con ello el proceso de solución, creando condiciones que permitan al usuario producir un proceso de verificación, al final del cual puede establecer una comparación numérica entre dos cantidades que representan lo mismo en el problema, pero que provienen de relaciones numéricas diferentes; a esta representación numérica se va a asignar una letra que va a jugar el mismo papel que el valor numérico hipotético usado como solución, con lo cual se obtiene la ecuación algebraica del problema. Finalmente, se opera algebraicamente con la ecuación obtenida, hasta obtener el valor numérico de la incógnita mediante las reglas de la sintaxis algebraica (Filloy, 1999). Por ejemplo; la base de un rectángulo es el triple que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones, si el perímetro mide 24 cm? (Dibújalo). Para resolver esta situación problémica se introduce el Álgebra.

2.4.3. Método Cartesiano (MC)

El proceso de solución se establece mediante la representación de algunos de los elementos desconocidos del enunciado del problema por medio de expresiones algebraicas, traduciendo después el texto del problema a una serie de relaciones, expresadas en lenguaje algebraico, que conduce a una o varias ecuaciones cuya solución, vía un regreso a la traducción, arroja la solución del problema. La aplicación del Método Cartesiano (MC) requiere expresiones de un Sistema Matemático de Signos más abstracto que el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS) y el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES), por las que un usuario competente dé sentido a una representación (simbólica); el uso correcto de los SMS implica una evolución en la solución de problemas, que se desprende de los ejemplos concretos dados en el proceso de enseñanza (Filloy, 1999). Para alcanzar una competencia plena en el método algebraico por excelencia es necesario dominar el Método Cartesiano (MC).

2.5. Adquisición del lenguaje algebraico

Durante los primeros grados escolares en la educación secundaria (de 11 a 13 años de edad) los estudiantes suelen resistirse usar el nuevo lenguaje de las matemáticas que implica el uso de letras, signos, símbolos, etc. Esto se debe a la poca familiarización que tienen y el poco sentido que le dan al uso de estos símbolos, por lo que deciden solucionar situaciones problémicas usando solamente la aritmética. Solares (2007) afirma:

> Durante la adquisición del lenguaje algebraico surge, además de la necesidad inmediata de dar *significado* a los nuevos objetos: incógnitas y ecuaciones, la necesidad de dotar de *sentido* a estos nuevos objetos y a las operaciones que se requieren para utilizarlos. Una manera de dotarlos de sentido se presenta vía el proceso de verificación de la solución, en el que, una vez obtenido el valor de la incógnita mediante las operaciones propias del álgebra, se sustituye este valor en la ecuación y se realizan las operaciones indicadas. La solución se verifica si la igualdad numérica obtenida se cumple.
>
> (p. 24)

Durante el proceso de la adquisición del lenguaje algebraico se presentan diferentes dificultades. Una de las que se observaron fue el uso del ensayo y error (por ejemplo, véanse aquí §4.3.3.1 y el apartado 6.1.1), que es una de las estrategias más utilizadas en la edad de los 11 a 13 años.

> La insuficiencia operatoria de lo representado en la etapa pre-simbólica del álgebra sugiere la presencia … del cambio de operar y no operar la incógnita, ahora en el nivel del pensamiento individual... La operación de la incógnita aparece … como acción necesaria para resolver con métodos no espontáneos (el tanteo o la adivinanza … son métodos espontáneos de resolución) ciertas ecuaciones de primer grado con al menos dos ocurrencias de la incógnita y para cuya resolución no basta con invertir las operaciones sobre los coeficientes;… el paso de la resolución operatoria … a la solución de ecuaciones … no es inmediato, [sino que] está de por medio la construcción (o adquisición) de ciertos elementos de sintaxis algebraica. La construcción de estos elementos sintácticos se lleva a cabo sobre la base de un conocimiento aritmético hasta cierto punto bien consolidado … sólo es posible (la construcción) si se logra romper con algunas nociones que pertenecen al dominio de la aritmética.
>
> En términos aritméticos, el miembro izquierdo de una ecuación corresponde a una secuencia de operaciones que se realiza sobre números (conocidos o no) y, el miembro derecho, al resultado de haber ejecutado dichas operaciones; esto es lo que pudiera llamarse una noción aritmética de la igualdad (o de la ecuación). A partir de una noción tal, una ecuación del estilo $ax \pm b = c$ (donde a, b y c son números particulares dados) puede ser resuelta con sólo deshacer, una a una, las operaciones de la secuencia de la izquierda, partiendo del resultado c. Llamaremos ecuaciones *aritméticas* a las ecuaciones de este tipo.
>
> Sin embargo, la noción aritmética de igualdad no se aplica a una ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$ (donde a, b, c y d son números particulares dados) y, por tanto, su resolución operatoria involucra operaciones fuera del ámbito del SMS aritmético, como ejemplo, la operación de la incógnita. Para que dichas operaciones puedan llegar a tener sentido para el sujeto … se requiere, a su vez, … la modificación de fondo de la noción de ecuación o igualdad numérica.
>
> … en relación al *significado* de las *nuevas* ecuaciones, habrá que entender que las expresiones en ambos miembros de la igualdad son de la misma naturaleza (o estructura) y que hay una serie de acciones que dan sentido a la igualdad …
>
> (Filloy, 1999, p. 49).

Los cambios o modificaciones profundos en ámbitos y nociones aritméticas no surgen de manera espontánea en el sujeto con sólo enfrentarlo a la necesidad de que dichos cambios se lleven a cabo. La intervención con enseñanza, en ese momento de transición del conocimiento aritmético al algebraico, puede resultar crucial para la mayoría de los sujetos que aprenden por primera vez Álgebra (Filloy y Rojano, 1984).

Para la adquisición del conocimiento algebraico es necesario modificar algunas nociones aritméticas, como es el caso de la igualdad. Sin embargo, también se requiere el conocimiento anterior y su completo dominio como base para la adquisición del lenguaje algebraico.

2.6. Definición de términos básicos

En la transición de la Aritmética al Álgebra se usan nuevos términos, por lo que es importante referirnos al significado de ellos.

2.6.1. Las letras o variables

Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, señalan que "Las letras o variables tienen tres distintos usos, como: incógnita específica, número general o una relación funcional" (2005, p. 15). Para el desarrollo de esta investigación nos enfocaremos al primero, para el que la variable representa una incógnita específica.

2.6.2. Sistema Matemático de Signos (SMS)

Filloy (1999) ha señalado que "La noción de SMS que se use para interpretar las observaciones en Matemática Educativa debe ser bastante amplia, y una noción de significado del signo que cubra tanto el significado formal de la matemática como el significado pragmático" (p. 73). A lo anterior debe agregarse:

> … una noción bastante eficiente de SMS para tratar una teoría de producción de SMS en el que se operen sistemas de signos intermedios que utiliza el aprendiz en los procesos de enseñanza-aprendizaje, durante los cuales el sujeto tendrá que rectificar el uso de esos SMS intermedios, de modo tal que al final del proceso de enseñanza el estudiante llegará a ser competente en el SMS deseado, que es la meta educativa de cualquier modelo de enseñanza.
>
> (p. 73)

En su identificación de las fuentes de significado de los códigos utilizados, Filloy argumenta que:

> Algunos de los SMS intermedios descritos podrían no ser considerados SMS debido al carácter personal de códigos inventados por el aprendiz que no le permitirán usar ese sistema de signos en un proceso amplio de comunicación, debido sobre todo a la falta de un acuerdo de convención social. Pero como estamos tratando, también, con la observación de procesos de pensamiento matemático, tenemos que estar preparados para estudiar esos sistemas de signos e interpretar los códigos personales del aprendiz para estudiar las obstrucciones que se producen por la tensión de tratar con diferentes SMS disponibles para el usuario, mientras que él o ella tratan de ser competentes en el uso de un nuevo SMS y lleguen a tener una buena actuación en términos del significado pragmático socialmente determinado.
>
> (1999, p. 73)

El Sistema Matemático de Signos (SMS) en el que se expresan y comunican los textos matemáticos correspondientes a tales redes conceptuales también tiene una estratificación que se corresponde con los diversos usos, que van dando cuenta de acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y provenientes de estratos de lenguaje cada vez más abstractos (Filloy, 1999).

2.6.3. Diversos estratos de un SMS

En su exposición de modelos de enseñanza, Filloy plantea:

> **Sobre las traducciones entre diversos estratos de un SMS**. Las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de secundaria al tener que leer o escribir en SMS algebraico, cuando han recibido instrucción en el SMS pre-algebraico e introducidos al álgebra elemental en el tema de resolución de ecuaciones lineales y la descodificación de textos aritméticos-algebraicos; pero, aún no han recibido enseñanza sistemática sobre el uso de las expresiones abiertas, equivalencia de expresiones y resolución de sistemas de ecuaciones, son tales que se advierte en los sujetos una tensión entre la manera de leer y expresarse mediante el SMS aritmético y la necesidad de dotar de nuevos significados a los símbolos matemáticos en el contexto del SMS algebraico. Esto último es un indicador más de que la frontera aritmético-algebraica no puede ser obviada, pues ello conduciría a falsas concepciones sobre los procesos de adquisición del SMS algebraico y consecuentemente, sobre el papel de la enseñanza en tales procesos. Por otro lado, resalta la importancia de considerar la lecto-escritura con el SMS algebraico como una importante meta educativa para los sujetos de los niveles escolares medios.
>
> Sucede que las grafías utilizadas en el álgebra son básicamente las mismas que las de la aritmética, a saber, los números, los signos de operación, el signo igual y las letras. Sin embargo, sus significados y el modo de operar son esencialmente distintos al pasar de un ámbito a otro.
>
> (1999, p. 32)

Además Filloy (1999) afirma respecto al uso pertinente de ciertos estratos intermedios:

> … un usuario competente de un SMS más abstracto, realmente lo va a ser, si también lo es en otros estratos de SMS más concretos, que le permitan tener mayor posibilidad para desencadenar el análisis lógico de una situación problemática, de abordar a ésta, mediante el uso de estratos de SMS que no sean necesariamente los más abstractos, sino utilizando aquel estrato del SMS que le permita comprender el problema y con ello desencadenar el análisis lógico de éste.
>
> (p. 41)

De esta manera en nuestra investigación se hizo una clasificación de los distintos estratos de desempeño al uso de los SMS al grupo de segundo grado procurando que la estrategia de enseñanza permitiera tener una mayor posibilidad para desencadenar el análisis lógico en la solución de situaciones problémicas.

2.6.4. El lenguaje

En la adquisición de conocimientos matemáticos, particularmente del Álgebra, la fuente más importante de formalización es la construcción de un vocabulario, la cual permite construir nombres propios que se convierten en un lenguaje algebraico; la Aritmética y el Álgebra tienen su propio lenguaje; sin embargo ambos comparten algunos símbolos y signos que tienen diferente significado. Esto Freudenthal señala en las características del lenguaje de las matemáticas (1983, p. 67) “el paso más largo de la aritmética hacia el álgebra (de la instrucción primaria a la secundaria en matemáticas) es calcular con letras en vez de con números”, es importante que los estudiantes en los primeros grados de secundaria identifiquen el significado que tienen los símbolos y signos en la transición de la Aritmética al Álgebra para una mejor comprensión de las ecuaciones de primer grado.

2.7. Cómo plantear y resolver problemas

En 1945, el matemático y educador George Polya publicó su obra *How to solve it*, en la que propone una metodología en cuatro etapas para resolver problemas. A cada etapa le asocia una serie de preguntas y sugerencias que, aplicadas apropiadamente, contribuyen a resolver el problema.

> *Etapa I. Comprensión del problema*
>
> ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Etapa II. Concepción de un plan

¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? ¿Podría enunciar el problema en otra forma? Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver algún problema similar. ¿Puede resolver una parte del problema? ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Etapa III. Ejecución del plan

Al ejecutar el plan compruebe cada uno de los pasos.

¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?

Etapa IV. Visión retrospectiva

¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

(1945, p. 19)

2.8. Perspectiva de la investigación

La presente investigación se sustenta en la perspectiva teórica metodológica de los MTL, proveniente de lo realizado por los investigadores en Matemática Educativa a los que nos hemos referido. Pretendemos identificar cuáles tendencias cognitivas manifiestan los sujetos y cuáles son las posibles causas que las originan. Nos interesa identificar las causas de las dificultades de comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales por los alumnos de primer y segundo grados de secundaria.

Capítulo 3

Diseño de la experimentación

Con el objetivo de identificar las causas que originan las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado, esta investigación se desarrolló *en curso* (véase la sección 1.3).

3.1. Organización y escenarios de la investigación

Las acciones de investigación se efectuaron en tres escenarios empíricos de una escuela secundaria diurna pública mexicana (véase la Figura 3.1). El primero fue el aula de matemáticas de un grupo de 30 alumnos de 11 a 13 años de edad de primer grado de secundaria en el ciclo escolar 2011-2012, donde se exploró su conocimiento previo requerido por el estudio de las ecuaciones lineales mediante la aplicación de cuatro cuestionarios referidos a esos antecedentes.

El segundo escenario fue el aula de matemáticas de un grupo de segundo grado de secundaria en el ciclo escolar 2012-2013, con un total de 35 alumnos, de quienes la mitad participó también en la investigación referida al primer grado, en el ciclo escolar anterior. Con ellos se llevó a cabo una estrategia de enseñanza y se les aplicaron tres cuestionarios.

El tercer escenario fue el aula de proyectos de la escuela participante, en donde se realizaron tres entrevistas a alumnos seleccionados por su tipo de desempeño del cuestionario 5 “representación de ecuaciones en las situaciones problémicas de ecuaciones de la forma $a \pm x = b$ y $ax = b$”, —de estrato alto, estrato medio o estrato bajo— de acuerdo a sus usos de los Sistemas Matemáticos de Signos en sus procedimientos. “El uso de estratos de SMS que no sean necesariamente los más abstractos, sino utilizando aquél estrato del SMS que le permita comprender el problema y con ello desencadenar el análisis lógico de éste” (Filloy, 1999, p. 41).

Como se viene de señalar, para el desarrollo de la investigación se diseñaron y aplicaron en total siete cuestionarios referentes a la transición de la Aritmética al Álgebra.

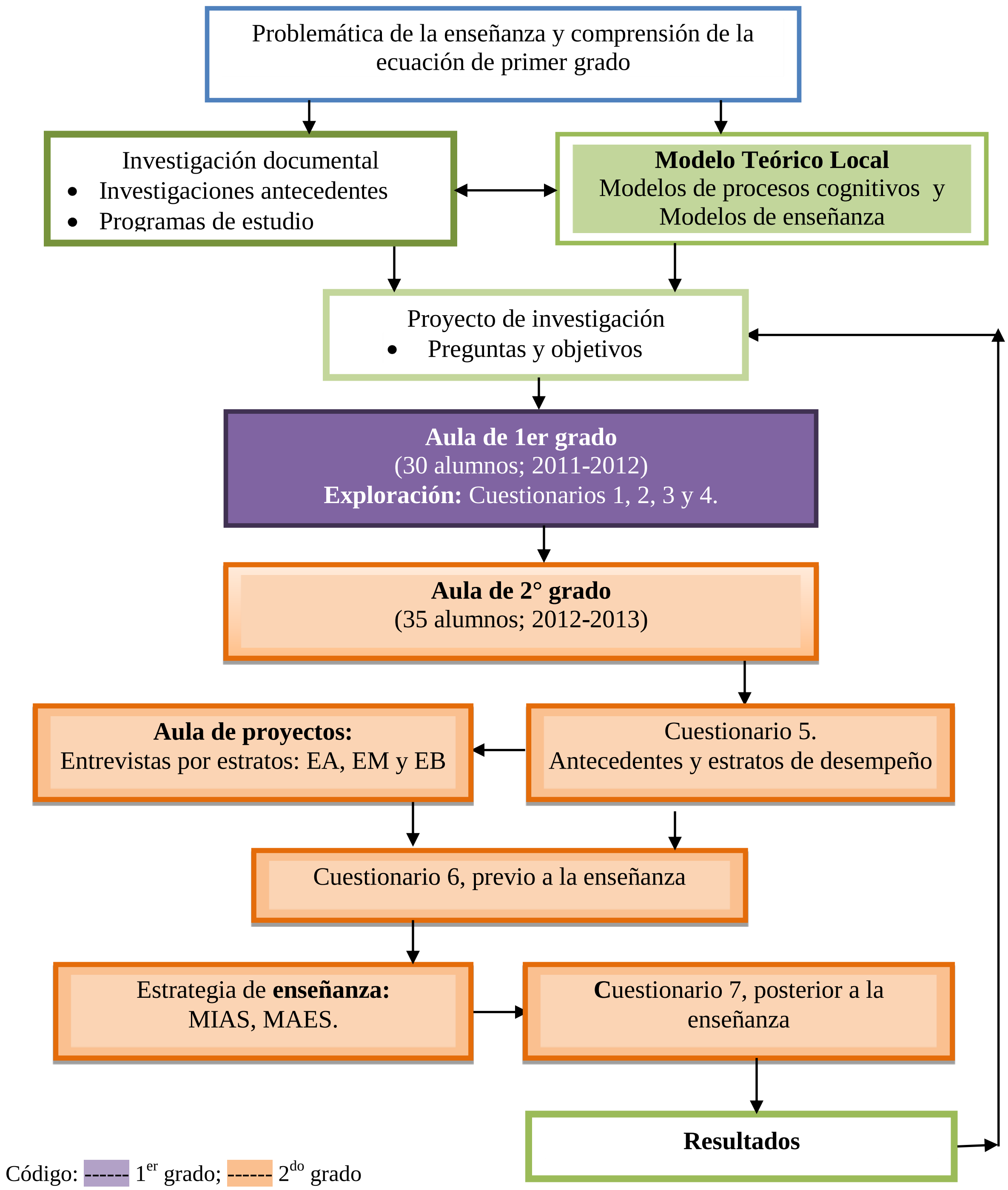


Figura 3.1. Organización y escenarios de la investigación.

3.2. Instrumentos

En primer grado se aplicaron los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 a 35 estudiantes, mientras que en segundo grado se aplicaron los cuestionarios 5, 6 y 7 a 30 estudiantes.

3.2.1. Cuestionarios

Para identificar las dificultades que manifiestan los alumnos en la transición de la Aritmética al Álgebra, se diseñaron siete cuestionarios:

1. Cuestionario 1: antecedentes “nociones de aritmética”
2. Cuestionario 2: antecedentes “nociones de ecuaciones de primer grado”
3. Cuestionario 3: generalidades de las ecuaciones aritméticas “uso del ensayo y error”
4. Cuestionario 4: generalidades de las ecuaciones algebraicas y solución de situaciones problémicas
5. Cuestionario 5: representación de ecuaciones en las situaciones problémicas de ecuaciones de la forma $a \pm x = b$ y $ax = b$
6. Cuestionario 6: diagnóstico para la situación de enseñanza de las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$ y y $ax \pm b = cx \pm d$
7. Cuestionario 7: comprensión de las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$ y $ax \pm b = cx \pm d$ posterior a la situación de enseñanza

Todos los cuestionarios se presentaron impresos en papel y se aplicaron en el aula para su contestación individual con lápiz, durante 40 minutos como máximo, a la hora de la clase de matemáticas y en presencia del docente de matemáticas titular y de este investigador.

3.2.2. Cuestionarios aplicados en primer grado

En el ciclo escolar 2011-2012 se aplicaron los cuestionarios 1, 2, 3 y 4, exploratorios, como antecedentes al tratamiento de las ecuaciones lineales.

Debido a su enseñanza en la escuela primaria (por ejemplo, véanse los Planes y Programas para 6º grado, SEP, 2011), se esperaría que los estudiantes de primer grado de secundaria estuvieran familiarizados con el uso de literales y que dominaran las operaciones aritméticas básicas con números enteros para la solución de situaciones problémicas, por lo que se aplicaron cuestionarios referentes a estos dominios para determinar los conocimientos previos al de las ecuaciones lineales.

3.2.2.1. Cuestionario 1: antecedentes "nociones de aritmética". Este cuestionario se aplicó al grupo de primero antes de la enseñanza del tema de números negativos, de acuerdo a los Planes y Programas vigentes en este periodo escolar para primer grado de secundaria (SEP, 2011, p. 34), la cual fue conducida por el docente titular del grupo de manera expositiva, resolviendo problemas y ejercicios. El tema también se trata en el sexto grado de la educación primaria como contenido de la recta numérica (SEP, 2011, p. 75).

En el instrumento, diseñado por el investigador, se plantearon tres reactivos con preguntas abiertas sobre operaciones básicas, números con signo y recta numérica. Los reactivos fueron los siguientes:

Reactivo 1.- Ubica en la recta numérica 3 números enteros positivos (escríbelos con azul), 3 números enteros negativos (escríbelos con rojo) y tres números naturales (escríbelos con verde):

El objetivo fue recopilar datos de los estudiantes de la identificación del cero en la recta numérica, los números negativos, los números positivos y los números naturales.

Reactivo 2.- En el siguiente problema menciona; ¿Qué operaciones se tienen que realizar para resolverlo y qué conjunto de números están implicados? La mamá de Jacqueline fue al supermercado y compró los siguientes productos:

$3\frac{1}{2}$ kg de azúcar, 1.5 kg de aguacate, $\frac{1}{4}$ kg de queso panela, 2 kg de manzana y 0.5 kg de tortillas.

El kg de azúcar tiene un costo de 22.50 pesos, el kg de aguacate cuesta 30 pesos, el kg de queso panela cuesta 70 pesos, el kg de manzana tiene un costo de 26.50 pesos y el kg de tortillas cuesta 13 pesos. ¿Cuánto tiene que pagar la señora por los productos comprados? Si pagó con un billete de 500 pesos ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es el peso total de los productos comprados?

El objetivo fue recopilar datos de los estudiantes de la identificación de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) que se deben de utilizar para resolver situaciones problémicas familiares al alumno.

Reactivo 3.- Cierto mes del año la temperatura en la Cd. de México es de 6 °C grados mientras que en Toluca Estado de México es de □ 2 °C. Representa en una recta numérica la temperatura de dichas ciudades.

El objetivo con este reactivo fue analizar los resultados de los estudiantes de la ubicación en la recta numérica los números negativos y los números positivos.

3.2.2.2. Cuestionario 2: antecedentes "nociones de ecuaciones de primer grado". El segundo instrumento consistió en siete reactivos con preguntas abiertas referidas a: uso de literales en fórmulas geométricas, ecuaciones aritméticas, generalidades de ecuaciones algebraicas, resolución de problemas y la incógnita en modelos geométricos.

El cuestionario 2 se aplicó al grupo de primero con el objetivo de identificar alguna noción de ecuación de los alumnos antes de que el docente titular del grupo enseñara el tema de ecuaciones de primer grado. La contestación, individual, duró 30 minutos como máximo. Uno de los propósitos de los actuales Planes y Programas de estudio para este nivel educativo es que "el alumno explique el significado de fórmulas geométricas, al considerar a las literales como números generales con los que es posible operar" (SEP, 2011 a, p. 31). Sin embargo, ése es un proceso en el que surgen varias dificultades de comprensión.

Los siete reactivos del segundo cuestionario son (Casarrubias, 2009, p. 92):

Reactivo 1.- ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro de un hexágono regular? Dibuja un hexágono regular, inventa la medida de los lados, utilizando la fórmula calcula el perímetro.

Este reactivo se planteó para actualizar los conocimientos adquiridos en la educación primaria referentes al uso de literales en fórmulas geométricas, específicamente en la generalización de la operación de suma a multiplicación. Se esperaba que los alumnos escribieran la expresión general del perímetro de un polígono regular y usaran la multiplicación en lugar de la suma de la medida que propusieran para el lado de un hexágono. En la educación primaria se trataron estos contenidos con el uso de literales.

Reactivo 2.- Encuentra el número que falta en las siguientes ecuaciones aritméticas:

a) $8 + \quad = 15$, b) $4 \times \quad = 36$, c) $30 \div \quad = 6$, d) $9 + \quad = 0$.

La finalidad de este reactivo fue identificar las diferentes maneras en que los alumnos encontraban el número que satisfacía cada una de las igualdades. En el nivel educativo anterior denominaron a estas igualdades "de número perdido", pero en el actual se les llama "ecuaciones aritméticas". Se les aclaró a los estudiantes de los espacios en cada ecuación son los números faltantes.

Reactivo 3.- Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones algebraicas:

a) $\boldsymbol{x} + 4 = 13$, b) $7 + \boldsymbol{x} = 12$, c) $4\boldsymbol{x} + 2 = 22$, d) $6 - \boldsymbol{x} = 0$.

Este reactivo es similar al anterior, pero se sustituyó el espacio reservado al número perdido por la misma literal, la cual representaba en cada caso el valor que satisfacía la igualdad al efectuar las operaciones. Se esperaba que los alumnos externaran algunas dudas, pues la presentación era nueva para ellos; sin embargo, el interés era obtener datos de la posible influencia del reactivo precedente en su desempeño.

Reactivo 4.- a) Por dos libros y una mochila pagué 400 pesos. Considerando que la mochila tiene un costo de 180 pesos. ¿Cuál es el precio de cada libro?

Este reactivo tuvo la finalidad de identificar la comprensión del alumno del texto presentado. Se esperaba que los alumnos contestaran sin mayores dificultades, ya que el reactivo sólo implicaba efectuar operaciones aritméticas para obtener el resultado. Además se les pidió que la resolvieran con algún otro procedimiento.

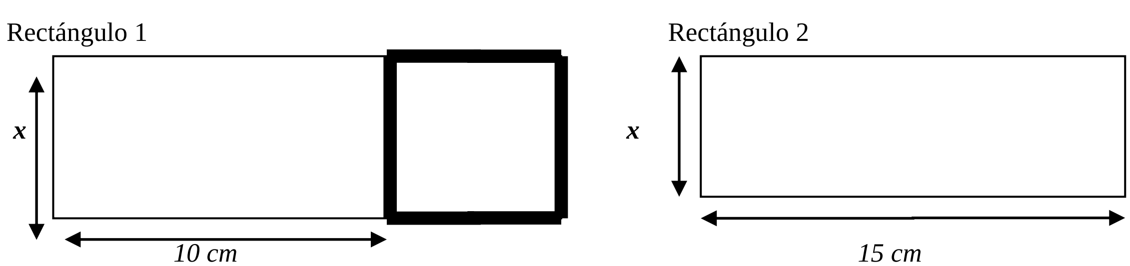
Reactivo 4.- b) La base de un rectángulo es el triple que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones, si el perímetro mide 24 cm? (Dibújalo).

Con esta pregunta la finalidad también fue identificar la comprensión del alumno del texto presentado. Sin embargo, reviste mayor nivel de complejidad que el de los reactivos anteriores porque requiere otros conocimientos como lados de un rectángulo, perímetro, base y altura, y la expresión para calcular su perímetro. Además, también se pidió a los alumnos que expresaran la situación problémica con una ecuación y que la resolvieran.

Reactivo 4.- c) Por 5 plumas y un lápiz se pagaron 65 pesos. Considerando que el costo de las plumas es el mismo y el lápiz cuesta 5 pesos, ¿cuál es el costo de cada pluma?

Este último reactivo referente a solución de problemas es muy similar al reactivo 4 a); los dos revisten el mismo nivel de dificultad, sólo cambian los datos. Se le considera un reactivo sencillo, ya que únicamente requiere efectuar operaciones básicas, factibles de identificar. De igual manera que en los reactivos anteriores, se pide al alumno que exprese la información mediante una ecuación y la resuelva para determinar el valor deseado.

Reactivo 7.- Encuentra el valor de x en las siguientes figuras geométricas.
El área de ambos rectángulos es igual: 60 centímetros cuadrados.



Los alumnos de este curso escolar no habían tenido experiencia previa con la incógnita en modelos geométricos como el que implica este reactivo; sin embargo, conocían el cálculo de áreas de rectángulos. Se esperaba que los alumnos partieran de estos conocimientos previos para encontrar el valor pedido.

3.2.2.3. Cuestionario 3: generalidades de las ecuaciones aritméticas "uso del ensayo y error". Este instrumento consistió en completar diez ecuaciones aritméticas (Arriaga, Benítez y cortés, 2008, p. 136). Estas ecuaciones ya las habían realizado los alumnos en los reactivos 2 y 3 del cuestionario 2, sin embargo, en el cuestionario 3 aumenta el nivel de complejidad ya que se utilizan números más grandes. Las ecuaciones fueron las siguientes:

Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes igualdades. (Escribe el procedimiento)

a) $\boxed{} + 528 = 2025$

b) $\boxed{}$ □ $2\,234 = 1\,245$

c) $529 \div \boxed{} = 23$

d) $\boxed{} \times 7 = 385$

e) 589 □ $\boxed{} = 493$

f) $9 \times \boxed{} = 1\,269$

g) $\boxed{} \div 25 = 29$

h) $555 + \boxed{} = 1\,520$

i) $321 \times \boxed{} = 1\,605$

j) $\boxed{} \div 20 = 50$

El objetivo de este cuestionario fue identificar el procedimiento usado por los estudiantes para encontrar el número perdido en las ecuaciones aritméticas con cantidades relativamente grandes.

3.2.2.4. Cuestionario 4: generalidades de las ecuaciones algebraicas y solución de situaciones problémicas. Este instrumento se aplicó a los alumnos después de que estudiaron el tema "Despeje de la incógnita de ecuaciones lineales", de acuerdo al Programa de estudios vigentes en este curso escolar (SEP, 2011 a, p. 33), cuya enseñanza fue impartida por el docente titular del grupo. El cuestionario consistió en dos partes; en la primera se propusieron cuatro reactivos con la finalidad de que el alumno resolviera cuatro ecuaciones lineales mediante el despeje de la incógnita de cada una y la realización de la operación inversa a la incluida. Los reactivos (Arriaga, Benítez y Cortés, 2008, p. 138) en esta parte fueron los siguientes:

$$198 + x = 1225,$$

$$100 - x = 0,$$

$$x \div 34 = 23,$$

$$36 + x = 756.$$

La segunda parte del cuestionario planteó dos situaciones problémicas:

a) En un bosque hay 46 hileras de árboles. Si en todo el bosque hay 1564, suponiendo que en cada hilera existen el mismo número de árboles, ¿cuántos árboles habrá en cada hilera?

b) Después del aumento de 95 pesos, por la cuota mensual en el gimnasio se paga 345 pesos. ¿Cuál era la cuota mensual anteriormente?

El objetivo de estos dos planteamientos fue identificar el procedimiento utilizado por los estudiantes para encontrar la solución.

3.2.3. Cuestionarios aplicados en segundo grado

En segundo grado de secundaria los alumnos ya poseen conocimientos de las ecuaciones lineales por su paso en el primer grado; sin embargo, se siguen presentando dificultades de comprensión del lenguaje algebraico, por lo que se decidió realizar entrevistas y aplicar una estrategia de enseñanza en este nivel educativo.

Durante el ciclo escolar 2012-2013 se aplicaron los cuestionarios 5, 6 y 7 al grupo participante de segundo grado de secundaria. Los resultados del análisis de las respuestas al cuestionario 5 fueron la base para identificar estratos de desempeño de los alumnos en la solución de las ecuaciones lineales de la forma $a \pm x = b$. Posteriormente se realizaron tres entrevistas, EA, EM y EB, una por cada estrato de desempeño identificado con ese cuestionario 5 (véase la Figura 3.1). Los cuestionarios 6 y 7 fueron el de diagnóstico y el de resultados de la estrategia de enseñanza de las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$ y $ax \pm b = cx \pm d$ a este grupo, respectivamente.

3.2.3.1. Cuestionario 5: "Representación de ecuaciones en las situaciones problémicas de ecuaciones de la forma $\boldsymbol{a \pm x = b}$ y $\boldsymbol{ax = b}$". Este instrumento se diseñó con el objetivo de identificar las dificultades que exhiben los alumnos al representar algebraicamente una situación problémica y las distintas formas que siguen para solucionarla, por lo que todos los reactivos se presentaron como preguntas abiertas referidas a situaciones problémicas. Este tipo de reactivos permite al alumno contestar libremente a lo que pueda interpretar de los enunciados presentados y, al investigador, analizar el procedimiento que siga el alumno para solucionar la situación problémica presentada. Para los reactivos se consideraron solamente los dos tipos de ecuaciones $a \pm x = b$ y $ax = b$. Este cuestionario se aplicó después del tratamiento de las ecuaciones lineales de acuerdo a los Planes y Programas vigentes, por lo que se espera que los estudiantes recurran a sus conocimientos previos, además se les indicó que lo resolvieran mediante las ecuaciones lineales.

Los seis reactivos del cuestionario 5 plantearon preguntas abiertas referentes a ecuaciones lineales. Los reactivos fueron los siguientes:

Resuelve y comprueba cada una de las siguientes situaciones:

1. Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿qué distancia recorrió en la primera etapa?
2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿cuánto costó la calculadora?
3. Mi hermano me depositó 2 450 pesos. Si el saldo actual es de 6 325 pesos, ¿cuál era el saldo anterior?
4. Carla fue a un restaurante con su amiga. Pidió la cuenta, la cual era de 250.50 pesos más un impuesto de 37.575 pesos. Si pagó con un billete de 500 pesos, ¿cuánto le dieron de cambio?
5. El perímetro de un heptágono regular es de 45.5 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?
6. El precio de 6 computadoras es de 82 800 pesos. ¿Cuánto cuesta cada computadora considerando que tienen el mismo precio?

Estos reactivos se basaron en los ejercicios que presenta el libro de texto para primero de secundaria propuesto por Arriaga, Benítez y Cortés (2008, p. 141). Los primeros cuatro hacen referencia a las ecuaciones de la forma: $a \pm x = b$; los dos primeros son muy similares, su nivel de dificultad es el mismo, sólo cambian los datos, por lo que se esperaba que los alumnos los contestaran planteando una igualdad algebraica y la solucionaran. El reactivo 3 se resuelve con el mismo tipo de ecuación; sin embargo, reviste un grado de dificultad mayor que el de los anteriores, por lo que el alumno podría confundir la operación correcta para responderlo. El reactivo 4 propone una situación problémica que se resuelve con una ecuación de la forma $a \pm x = b$; tiene mayor grado de dificultad que el anterior porque presenta más datos, por lo que pueden surgir dificultades para contestarlo, aunadas a la de la elección de la operación y probablemente los estudiantes no se usen todos los datos proporcionados.

Los reactivos 5 y 6 hacen referencia a las ecuaciones de la forma $ax = b$; son muy similares, sólo difieren en los datos. El reactivo 5 requiere uso de la memoria para recuperar conceptos matemáticos referidos a una figura geométrica. Los datos se consideran por la facilidad de operación, sólo implican cantidades pequeñas, aunque demanda el uso de los decimales. Se espera que los alumnos recurran al dibujo de esa figura geométrica para identificar los datos y contestar el reactivo. Finalmente, el reactivo 6 es similar al anterior por el tipo de ecuación a plantear para solucionar la situación problémica, sólo difiere en los datos; se le considera más fácil que el anterior porque no implica el uso de otros conceptos matemáticos ni el de decimales.

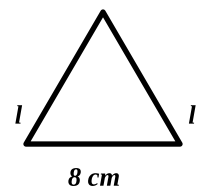
3.2.3.2. Cuestionario 6: diagnóstico "representación de ecuaciones en las situaciones problémicas de ecuaciones de la forma $\boldsymbol{ax \pm b = c}$ y $\boldsymbol{ax \pm b = cx \pm d}$". Este cuestionario se diseñó con el objetivo de identificar las dificultades que exhiben los alumnos al responder una situación problémica y las distintas formas que siguen para solucionarla. Se presentaron cuatro reactivos como preguntas abiertas sobre situaciones problémicas, uno más con un modelo geométrico y, finalmente, el sexto plantea una ecuación. Los reactivos implicaron ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$ a excepción del reactivo 4 ya que requiere el de las ecuaciones de la forma $ax \pm b = cx \pm d$.

El cuestionario se planteó como sigue:

Lee atentamente cada problema, escribe la ecuación que le corresponda, encuentra el valor de la incógnita y comprueba el resultado. Anota las operaciones que realices en esta hoja.

1. Mi padre tiene el cuádruplo de mi edad menos ocho años. Si mi padre tiene 68, ¿cuál es mi edad?
2. Pensé en un número, lo multipliqué por cinco y le resté seis. Si el resultado es 34, ¿en qué número pensé?
3. La suma de las edades de tres hermanos es de 59 años. Si el mayor tiene 23 años y sus hermanas son gemelas, ¿cuántos años tiene cada hermana?

4. El costo de tres boletos de entrada al cine menos diez pesos es igual al costo de dos boletos más treinta y dos pesos. ¿Cuál es el costo de cada boleto de entrada al cine?
5. Perímetro: 32 cm. ¿l = _________?



6. $13x - 4 = 48$. ¿$x =$ _______?

Estos reactivos se basaron también en ejercicios propuestos en el libro de texto para primero de secundaria propuesto por Arriaga, Benítez y Cortés (2008, p. 141) y Arreguín (2007, p. 83). Los primeros tres tienen el mismo nivel de complejidad, sólo cambian los datos en la situación problémica. El cuarto reactivo reviste una complejidad mayor que los anteriores ya que su situación problémica se expresa como $ax \pm b = cx \pm d$, por lo que puede ser difícil para los alumnos contestarlo. El reactivo 5 plantea un modelo geométrico con la finalidad de determinar el valor de cada lado de un triángulo isósceles dados el lado desigual y el perímetro; se pretende que los alumnos expresen la ecuación de primer grado respectiva y determinen el valor de la incógnita. Finalmente se plantea una ecuación para que los estudiantes encuentren el valor de la incógnita despejándola.

Este cuestionario se usó como diagnóstico para definir la estrategia de enseñanza de las ecuaciones lineales a los alumnos de 2º grado.

3.2.3.3. Cuestionario 7 "comprensión de las ecuaciones lineales de la forma $\boldsymbol{ax \pm b = c}$, y $\boldsymbol{ax \pm b = cx \pm d}$ posterior a la situación de enseñanza". Este instrumento se diseñó con el objetivo de caracterizar la comprensión de los alumnos del lenguaje algebraico de ecuaciones de primer grado mediante situaciones problémicas, con la identificación de la incógnita, los datos primarios (datos numéricos y las operaciones implicadas en la situación problémica) y los datos secundarios (datos complementarios que no interfieren en el planteamiento de la ecuación). Se presentaron cinco reactivos como preguntas abiertas sobre situaciones problémicas, de los cuales los tres primeros fueron del mismo nivel de complejidad, sólo cambiaron los datos. El reactivo 4 se refirió a un modelo geométrico y, finalmente, la situación problémica planteada en el reactivo 5 correspondió a una ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$, con un grado de dificultad mayor que el de los reactivos anteriores por la identificación de la incógnita.

Las situaciones problémicas propuestas se consideraron familiares al alumno:

Lee atentamente cada una de las situaciones problémicas, identifica la incógnita (subráyala con rojo), los datos primarios (subráyalos con azul), los datos secundarios (subráyalos con gris), escribe la ecuación que corresponda, comprueba el resultado y anota todas las operaciones que realices en esta hoja.

1. Pensé en un número, lo multipliqué por nueve y le resté ocho. El resultado es 55. ¿En qué número pensé?
2. El precio de cinco libros es de 1 470 pesos. Si uno de ellos cuesta 350 pesos y los otros cuatro tienen el mismo precio, ¿cuál es el costo de uno de los libros que tienen el mismo valor?
3. Al multiplicar por ocho el precio de una pluma y sumarle siete se obtiene 127. ¿Cuál es el precio de cada pluma?
4. El perímetro de un rectángulo es de 82 cm, el largo es el triple del ancho más un centímetro. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
5. El costo de 10 calculadoras menos 410 pesos es igual al costo de seis calculadoras más 550 pesos. ¿Cuál es el costo de cada calculadora?

Estos reactivos se diseñaron también con base en ejemplos propuestos en el libro de texto para primer grado de secundaria propuesto por Arriaga, Benítez y Cortés (2008, p. 141) y Arreguín (2007, p. 83). Los tres primeros reactivos corresponden a ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$, el siguiente reactivo requiere otros conceptos matemáticos y el cálculo del perímetro antes del planteamiento de la ecuación. El último reactivo corresponde a las ecuaciones de la forma $ax \pm b = cx \pm d$.

3.3. Estrategia de enseñanza

Una vez identificadas algunas de las dificultades de los alumnos de primero y segundo grados de secundaria (con la aplicación de los primeros 4 cuestionarios correspondientes a primer grado se identificaron las dificultades del uso de los SMS aritméticos y la aplicación de los cuestionarios 5 y 6 se logró identificar las dificultades en la solución de problemas y el uso de los SMS aritméticos/algebraicos) para su comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales, se diseñó una estrategia de enseñanza con la que se pretendió orientar la interpretación de los enunciados de las situaciones problémicas presentadas, la identificación de la incógnita, de los datos y de las operaciones a efectuar, así como el uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos y la solución de la ecuación planteada mediante el despeje de la incógnita.

El Modelo de Enseñanza (en los MTL; véase la sección 2.2) propone "modelar" en contextos (más) "concretos" (es decir, contextos familiares para el alumno) las nuevas operaciones y los nuevos objetos con el propósito de dotarlos de significados y tomar éste como punto de partida (Filloy, 1999, p. 23), por lo que se plantearon situaciones problémicas (Arriaga, Benítez y Cortés, 2008, p. 143; Arreguín, 2007, p. 83; Arreguín, 2010, p. 93) que se consideraron familiares al alumno.

Se aplicó la estrategia de enseñanza a un grupo de segundo grado de secundaria con un total de 35 alumnos, durante dos sesiones en el aula a la hora de matemáticas, para el tratamiento del tema de ecuaciones de primer grado de la forma $ax \pm b = c$ y $ax \pm b = cx \pm d$.

Al inicio de la clase se entregó a cada uno de los alumnos una hoja de actividades sobre situaciones problémicas presumiblemente familiares a ellos. El objetivo fue identificar en la situación problémica la incógnita específica (véase el apartado 2.6.1), los datos primarios y los datos secundarios subrayando lo correspondiente con diferentes colores. El investigador explicó a los estudiantes la manera de identificar los datos en las situaciones problémicas subrayándolos con diferentes colores, una vez realizada esa identificación, los alumnos escribirían en la hoja de actividades la ecuación que implicaba el enunciado, pero ante las dificultades surgidas para efectuar esa expresión algebraica, el investigador intervino nuevamente para aclarar las dudas manifestadas y que la mayoría de los alumnos lograrían escribir las ecuaciones correspondientes. Una vez escrita la ecuación, los alumnos procedieron al despeje de la variable para determinar su valor.

Para esta actividad se plantearon 10 situaciones problémicas empezando con menor grado de dificultad hasta tratar algunas con mayor grado de dificultad, representando algebraicamente la situación problémica para hallar el valor de la incógnita. Se requirieron dos sesiones de 50 minutos cada una.

Las situaciones problémicas planteadas fueron las siguientes:

Lee atentamente cada una de las situaciones problémicas, identifica la incógnita (subráyalo con rojo), los datos primarios (subráyalo con azul), los datos secundarios (subráyalo con gris), escribe la ecuación que corresponda, comprueba el resultado y anota todas las operaciones que realices en esta hoja.

1. Pensé en un número, lo multipliqué por ocho y le sumé siete. El resultado es 79. ¿En qué número pensé?
2. Mi hermano tiene el triple de mi edad menos 12 años. Mi hermano tiene 30 años. ¿Cuál es mi edad?
3. El precio de tres libros es de 670 pesos. Sabiendo que uno de ellos cuesta 150 pesos y los otros dos tienen el mismo precio, ¿cuál es el costo del libro que tienen el mismo valor?

4. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, el lado desigual mide 12 cm. ¿Cuál es la medida de los lados iguales?
5. Al multiplicar por seis la edad de Daniel y sumarle seis se obtiene 108. ¿Cuál es la edad de Daniel?
6. Jacqueline sabe que si multiplica el tiempo de traslado por cuatro y al producto le suma 12 resulta la cantidad a pagar al taxista. Pagó 72 pesos. ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a su destino?
7. Alice compró nueve lápices, pagó con un billete de 100 pesos y le devolvieron 28 pesos. ¿Cuál es el costo de cada lápiz?
8. El perímetro de un rectángulo es de 34 cm, el largo es el doble que el ancho menos siete centímetros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
9. El costo de seis plumas más 12 pesos es igual al costo de cuatro plumas más 20 pesos. ¿Cuál es el costo de cada pluma?
10. El costo de 10 calculadoras menos 410 pesos es igual al costo de seis calculadoras más 550 pesos. ¿Cuál es el costo de cada calculadora?

Además de estas características, la estrategia de enseñanza de las ecuaciones de primer grado en el segundo curso de secundaria tomó como base los tres modelos didácticos de Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS), Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) y el Método Cartesiano (MC) (Filloy, 1999, p.127; véanse la sección 2.2 y los apartados 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3). Si bien para esta investigación se consideraron los dos primeros planteando situaciones problémicas aritmético/algebraicas familiares al alumno, tomando en cuenta los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS), no se tomó en cuenta el MC ya que se consideró muy abstracto para este nivel educativo.

3.4. Las entrevistas

Las entrevistas EA, EM y EB (véase la Figura 3.1) se aplicaron para aclarar las respuestas proporcionadas en los cuestionarios administrados y para obtener más información acerca de la comprensión de los alumnos del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado.

Las entrevistas se llevaron a cabo con los alumnos seleccionados de acuerdo al estrato de su desempeño en el cuestionario 5, relativo a “ecuaciones de la forma $a \pm x = b$”: EA, con un alumno del estrato alto que obtuvo todos los reactivos correctos, además de que representó algebraicamente las situaciones dadas; EM, con otro alumno del estrato medio, que solamente obtuvo tres reactivos correctos de las ecuaciones de la forma $a \pm x = b$, además de que sus respuestas fueron aritméticas; y, finalmente, EB, con un alumno del estrato bajo, sin aciertos en el cuestionario 5, sino que sólo dio evidencia, aritmética, de algunas nociones en las situaciones problémicas.

A cada alumno se le interrogó acerca de situaciones problémicas familiares a él para clarificar sus respuestas al cuestionario. En estas tres entrevistas nos interesó identificar el uso de la variable que hacen los alumnos como incógnita específica (véase el apartado 2.6.1) en la representación de una expresión algebraica de las situaciones problémicas presentadas.

Las tres entrevistas se video-grabaron y se les transcribió para su análisis.

Capítulo 4

Antecedentes de las ecuaciones lineales en el primer grado de secundaria

El uso de las letras o variables se introduce en el primer curso de la educación secundaria, en el eje de pensamiento algebraico (SEP, 2011 a; p. 33).

4.1. Vinculación de contenidos con las ecuaciones de primer grado

Una de las grandes dificultades que presentan los alumnos en la educación secundaria es la transición de la Aritmética al Álgebra. En el primer curso de este nivel educativo se introducen las ecuaciones lineales, por lo que el tema es nuevo para ellos (SEP, 2011 a, p. 33), no poseen conocimientos previos acerca del uso de las letras más allá del puesto en juego en los últimos cursos de la educación primaria mediante el uso de las letras en las fórmulas para el cálculo de áreas y perímetros. En efecto, desde cuarto grado de primaria se introduce el tema "Uso de fórmulas para calcular perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros" (SEP, 2011 b, p. 63); sin embargo, este uso no tiene sentido algebraico sino de número general. Se acostumbra a los alumnos a considerar las letras como etiquetas que denotan entidades específicas, muy frecuentemente mediante las iniciales de los nombres de esas entidades; por ejemplo, se usa la *b* para representar la base, la *A* para el área, *h (h* es un uso común por la inicial del inglés height) para la altura, etc. Y cuando se cambian estas letras por otras, el alumno se confunde. Incluso, en primer grado de secundaria, los estudiantes se resisten a usar las letras como variables; sólo efectúan las operaciones, sin conocer exactamente la función de la fórmula para obtener un resultado, es lo que se identifica en los primeros grados de educación secundaria. Esto significa que tienen dificultades para darle sentido al uso de las letras en las fórmulas geométricas para la solución de operaciones y solución de problemas.

Los estudiantes de primer grado de educación secundaria tienen el primer acercamiento con Álgebra, por lo que presentan dificultades para su comprensión, es difícil para ellos identificar el papel que juega la variable.

La Aritmética que se enseña en la educación primaria constituye un antecedente mínimo al contenido de las ecuaciones de primer grado. En ese nivel educativo se propone tratar el caso del número perdido, por ejemplo $8 + \quad = 21$, para desarrollar las habilidades en operaciones básicas. Esto constituye un antecedente a las nociones de igualdad que se introducen en el primer curso de educación secundaria, con el tema de ecuaciones de primer grado, para el que se introducen los conceptos de igualdad, la variable, los símbolos.

En el primer curso de secundaria, antes del tema de ecuaciones lineales, se trata el de "Explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar" (SEP, 2011 a, p. 31); este contenido se desarrolla en el primer bloque del eje "Sentido numérico y pensamiento algebraico" de este curso escolar; ya no es un tema del eje "Forma, espacio y medida", como anteriormente se le proponía en la educación primaria. Ésta es una pequeña introducción al uso de las letras pero como número general (véase el apartado 2.6.1). De la experiencia de quien esto escribe, al enseñar este tema a los estudiantes de primer grado se les dificulta transitar del uso de las letras con la función de número general a la de incógnita; por ejemplo, en el caso de la fórmula para calcular el perímetro de un hexágono regular escriben $P = 6l$; cuando se cambia la letra l por cualquier otra letra se les dificulta comprender que esta nueva letra tiene la misma función que la anterior.

Otro contenido que antecede al de ecuaciones lineales es el de patrones y ecuaciones sobre sucesiones numéricas y figurativas, que se propone en el primer bloque del eje sentido numérico y pensamiento algebraico, en donde se establece la:

- Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común.
- Formulación del lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras.
- Explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar.

(SEP, 2011 a, p. 31)

Este contenido dispone el uso de las letras; sin embargo, aún tiene la función de número general, pero es un antecedente a su uso como incógnita específica en las ecuaciones de primer grado, que luego se trata en este curso escolar de acuerdo a los Planes y Programas de estudio vigentes.

Así, antes de introducir el pensamiento algebraico se tratan algunos contenidos referentes al uso de las letras como número general, que de alguna manera dotan de sentido al uso de las letras o variables como incógnita específica, que se propone en el tercer bloque en el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” (SEP, 2011 a, p. 33).

4.2. Exploración de los antecedentes a las ecuaciones lineales en primer grado de secundaria

Durante el ciclo escolar 2011 - 2012 se aplicaron los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 a manera de exploración, antes de la enseñanza del tema de ecuaciones de primer grado (véanse la Figura 3.1 y el apartado 3.2.1) de acuerdo a los Planes y Programas de estudio vigentes (SEP, 2011 a, pp. 33 y 42).

Para identificar los resultados generales de los datos recopilados con estos instrumentos, clasificamos las respuestas de los alumnos proporcionadas en ellos en las categorías: Correctas (**C**), Noción (parcialmente correcta, **N**), Incorrecta (**I**) y Omitida (**O**).

4.2.1. Resultados del cuestionario 1: antecedentes “nociones de aritmética”

En un primer acercamiento al escenario empírico, a principios del ciclo escolar y previamente a la enseñanza de números negativos de acuerdo a los Planes y Programas de estudio vigentes (SEP, 2011 a, p. 34), se aplicó el cuestionario 1 (véase §3.2.2.1) a un grupo de 30 alumnos de primero de secundaria para identificar sus conocimientos de Aritmética adquiridos, ya que se supone que en la educación primaria los utilizaron para el planteamiento y solución de problemas. Además, la Aritmética es la base para la iniciación al Álgebra en la educación secundaria.

En el sexto grado de la educación primaria se introduce el tema de recta numérica (SEP, 2011 b, p. 75), por lo que se consideró este contenido como antecedente al de ecuaciones de primer grado. Por tanto, en el cuestionario 1 se plantearon tres reactivos con preguntas abiertas sobre operaciones básicas, números con signo y la recta numérica (véanse en §3.2.2.1).

La Tabla 4.1 resume los porcentajes de tipos de respuestas otorgadas a los reactivos del primer cuestionario.

Tabla 4.1. Porcentajes de tipos de respuestas otorgadas al cuestionario 1.

	Contenido			
	Identificación del cero en la recta numérica	Identificación de operaciones básicas	Números con signo	Total
Reactivo	**1**	**2**	**3**	3
Tipo de respuesta				
Correcta (C)	19%	57%	24%	33%
Noción (N)	10%	28%	15%	18%
Incorrecta (I)	28%	5%	51%	28%
Omitida (O)	43%	10%	10%	21%

El 43% de las respuestas recopiladas con el primer cuestionario del reactivo 2 para aquellos alumnos que su respuesta fue Noción (N), Incorrecta (I) y Omitida (O) evidenció dificultades para identificar las operaciones a realizar en la solución de problemas, de forma notoria en las restas y divisiones.

Sólo un alumno de cada cinco logró ubicar el cero en la recta numérica, así como a los números negativos y a los positivos a la izquierda y derecha de él, respectivamente. Dos de cada cinco alumnos escribieron los números negativos a la derecha del cero sin darle sentido a este último como referente. Finalmente, dos de cada cinco alumnos no contestaron este reactivo, por lo que se considera que los alumnos en este nivel educativo tienen escasos conocimientos con la identificación del cero y de los números enteros en la recta numérica (consúltese al respecto también Pérez, 2014). La respuesta mostrada en la Figura 4.1 sugiere la confusión entre número positivo y número par, entre número negativo y número impar; sin embargo, no se puede afirmar que el alumno desconozca al cero como referente. El desconocimiento de la notación para número negativo muestra la ubicación de los números negativos en la recta numérica (3, 5 y 10) a la derecha del cero, por lo que el alumno no encuentra sentido alguno a la ubicación del cero.

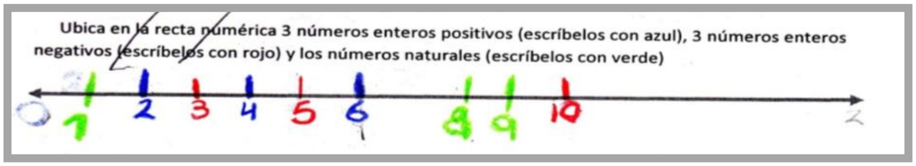


Figura 4.1. Reactivo 1. Ubicación de números positivos, números negativos y números naturales en la recta numérica.

Un estudiante ubicó los números positivos (2, 4 y 6) en la recta numérica pero no los negativos (ya que los ubicó a la derecha del cero: 3, 5 y 10); 24 % de los alumnos contestaron correctamente ubicando el número positivo y el número negativo en la recta numérica. La Figura 4.2 muestra la respuesta de un alumno que ubicó el número negativo a la derecha del cero, y sugiere que su referente fue el número 1, lo que exhibió su falta de noción de números con signo negativo (véase al respecto también la investigación de Pérez, 2014).

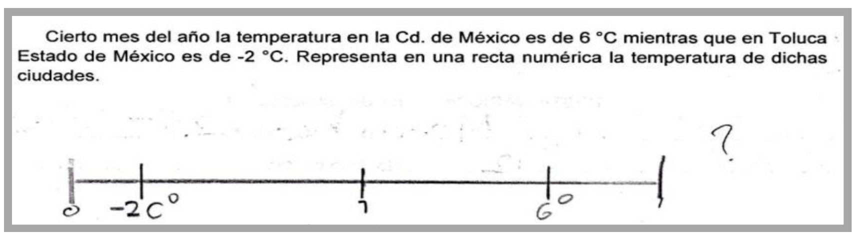
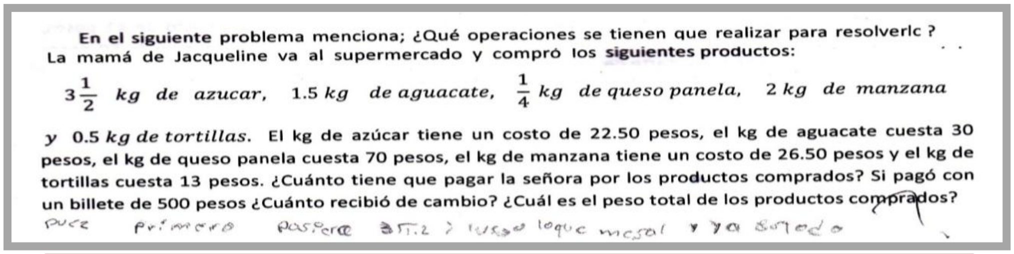


Figura 4.2. Reactivo referente a números con signo.

En el reactivo 2, los alumnos tuvieron dificultades para identificar las operaciones a realizar para solucionar la situación problémica dada. 57% de los alumnos contestaron correctamente identificando con claridad las cuatro operaciones básicas requeridas. De entre las respuestas incorrectas, la Figura 4.3 muestra la de un alumno que, no obstante haber manifestado en lengua natural escrita (casi ilegible, por lo que la transcribimos debajo de la Figura 4.3) algunas nociones para resolver la situación problémica; puede interpretarse que su deficiencia en la identificación de las cantidades implicadas ocasionó su evitación de las operaciones aritméticas a realizar. Esto puede deberse a la falta de atención al texto o a la insistencia en no empezar a analizar un problema, a lo que Filloy (1999) se refiere como la tendencia cognitiva 8: la presencia de mecanismos inhibitorios.



En el siguiente problema menciona; ¿Qué operaciones se tienen que realizar para resolverlc ?
La mamá de Jacqueline va al supermercado y compró los siguientes productos:

$3\frac{1}{2}$ *kg de azucar,* 1.5 *kg de aguacate,* $\frac{1}{4}$ *kg de queso panela,* 2 *kg de manzana*

y 0.5 *kg de tortillas.* El kg de azúcar tiene un costo de 22.50 pesos, el kg de aguacate cuesta 30 pesos, el kg de queso panela cuesta 70 pesos, el kg de manzana tiene un costo de 26.50 pesos y el kg de tortillas cuesta 13 pesos. ¿Cuánto tiene que pagar la señora por los productos comprados? Si pagó con un billete de 500 pesos ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es el peso total de los productos comprados?

Pues primero pusiera 3⟌1.2 y luego lo que me sale y ya es todo

Figura 4.3. Tendencia cognitiva 8: la presencia de mecanismos inhibitorios.

El cuestionario 1, aunque breve, exhibió algunas dificultades de los alumnos para identificar las operaciones aritméticas básicas a realizar para solucionar situaciones problémicas sencillas, para comprender el texto en su presentación y para reconocer y ubicar los números con signo en la recta numérica y la expresión decimal correspondiente a los números fraccionarios. Estas dificultades formaron parte del preámbulo para la introducción del Álgebra.

4.2.2. Resultados del cuestionario 2: antecedentes “nociones de ecuaciones de primer grado”

El cuestionario 2 consistió en siete reactivos con preguntas abiertas referidas a: uso de literales en fórmulas geométricas, ecuaciones aritméticas, generalidades de ecuaciones algebraicas, resolución de problemas y la incógnita en modelos geométricos (véanse en §3.2.2.2). Se aplicó en el aula al grupo participante de primer grado de secundaria, antes de iniciar el tema de ecuaciones de primer grado bajo la conducción del docente de matemáticas titular.

En promedio, 37% de las respuestas proporcionadas mostraron conocimientos básicos para acceder a la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, pues manifestaron usos factibles de literales como número perdido, igualdad, fórmula para el cálculo de áreas, figura geométrica regular (véase la Tabla 4.2).

Tabla 4.2. Porcentajes de tipo de respuestas a los reactivos del cuestionario 2 “nociones de ecuaciones de primer grado”.

	Contenido					
	Uso de literales en fórmulas geométricas	Ecuaciones aritméticas	Generalidades de ecuaciones algebraicas	Resolución de problemas	La incógnita en modelos geométricos	Total
Reactivo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
Inciso	a b	a b c d	a b c d	a b c	a b	15
Tipo de respuesta						
Correcta (C)	10%	58%	56%	45%	17%	37%
Noción (N)	20%	2%	0%	13%	12%	9%
Incorrecta (I)	13%	24%	27%	24%	10%	20%
Omisión (O)	57%	16%	17%	18%	61%	34%

El uso de literales se introdujo en el ciclo escolar anterior en la educación primaria (SEP, 2011 b. pp. 75, 76). No obstante, quienes contestaron correctamente al reactivo 1 lo hicieron por tanteo; a lo que Filloy (1999) señala la tendencia cognitiva 7: “la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución” (p. 124) , sin exhibir otro tipo de procedimiento y atribuimos la respuesta al cálculo mental, ya que los alumnos no escribieron las operaciones a pesar de que se les dio la instrucción de anotar en la hoja todas las operaciones que efectuaran para obtener el resultado. Sólo 10% de las respuestas fueron correctas para este reactivo, cuando se esperaba que para el cálculo de perímetros los alumnos escribieran la fórmula correspondiente al hexágono regular y, si no podían generalizar mediante la multiplicación, al menos que efectuaran la suma. El 57 % de los alumnos no contestó, además de que si no respondían la pregunta en la primera parte del reactivo 1, no contestarían su segunda parte, que era consecuencia de la primera respuesta.

La Figura 4.4 muestra la respuesta de un alumno al reactivo 1, que pareció confundir perímetro con área, pues la expresión que anotó sugirió ser el área de un triángulo $\frac{base \times altura}{2}$ y no de un hexágono regular $\frac{perímetro \times apotema}{2}$. El tema del perímetro de polígonos regulares se incluye en los últimos tres cursos de la educación primaria (SEP, 2011 b, p. 65). Este estudiante además tampoco reconoció el término “hexágono”.

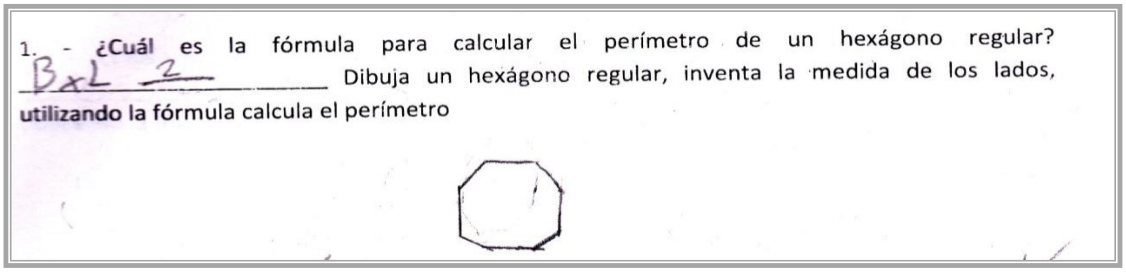
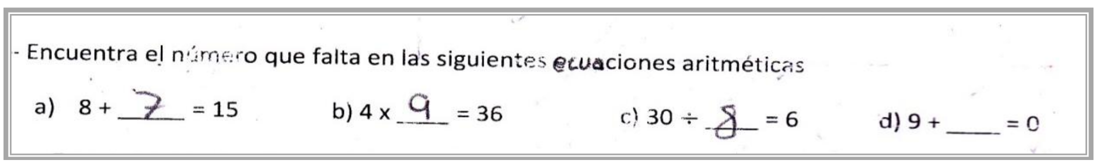

1. - **¿Cuál** es la fórmula para calcular el perímetro de un hexágono regular? BxL 2 ______ Dibuja un hexágono regular, inventa la medida de los lados, **utilizando** la fórmula calcula el perímetro

Figura 4.4. Confusión entre áreas y perímetros; y tendencia cognitiva 8.

Para las ecuaciones aritméticas del tipo número perdido, $a + \square = b$, $a\square\ +\ b = c$, en el reactivo 2, 58% del grupo contestó acertadamente, lo que mostró un cierto dominio de ellas, aunque no como ecuación. Los alumnos tampoco proporcionaron evidencia de sus operaciones al contestar este reactivo. La Figura 4.5 muestra la respuesta de un alumno, que exhibió su dificultad con la división y con números negativos (consúltese también, respecto a estos últimos, la investigación de Pérez, 2014).

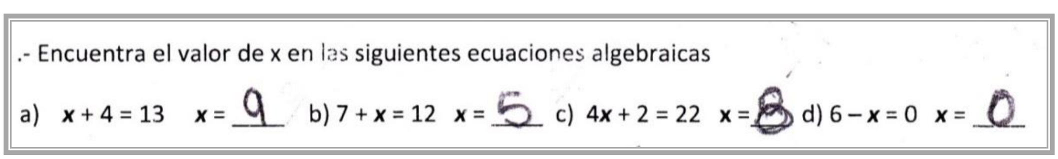

- Encuentra el número que falta en las siguientes ecuaciones aritméticas

a) 8 + 7 = 15 b) 4 x 9 = 36 c) 30 ÷ 8 = 6 d) 9 + ____ = 0

Figura 4.5. Ecuaciones aritméticas y las operaciones contrarias.

En el reactivo 3, planteado para identificar la interpretación de los alumnos de *x* en las igualdades presentadas, como parte de generalidades de ecuaciones algebraicas, 56% del grupo lo respondió correctamente, pero a falta del acercamiento al uso de literales, los alumnos dudaron, por lo que el investigador dio una idea general de la función de la *x* como incógnita en una ecuación durante la aplicación del cuestionario.

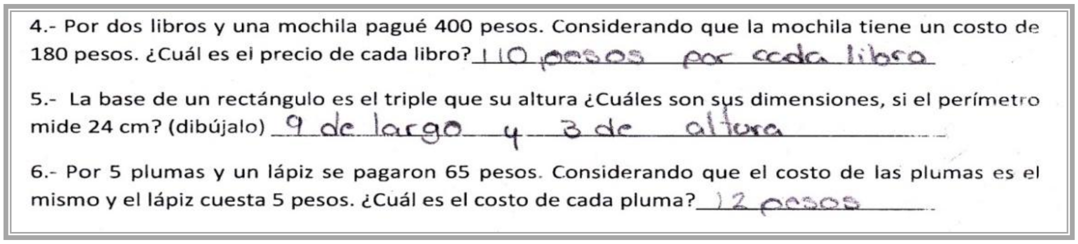
La Figura 4.6 muestra lo que respondió un alumno sin exhibir alguna operación para obtener el resultado; además, dio evidencia de su dificultad con la multiplicación y su desconocimiento del 0 como idéntico aditivo.


.- Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones algebraicas

a) **x** + 4 = 13 **x** = 9 b) 7 + **x** = 12 **x** = 5 c) 4**x** + 2 = 22 **x** = 8 d) 6 − **x** = 0 **x** = 0

Figura 4.6. Ausencia de operaciones para encontrar el valor de la incógnita.

En promedio, 45% del grupo contestó correctamente a los tres incisos del reactivo 4, acerca de solución de problemas aritméticos/algebraicos. La Figura 4.7 muestra las respuestas correctas de un estudiante, que exhibieron su comprensión del texto.


4.- Por dos libros y una mochila pagué 400 pesos. Considerando que la mochila tiene un costo de 180 pesos. ¿Cuál es el precio de cada libro? 110 pesos por cada libro

5.- La base de un rectángulo es el triple que su altura ¿Cuáles son sus dimensiones, si el perímetro mide 24 cm? (dibújalo) 9 de largo y 3 de altura

6.- Por 5 plumas y un lápiz se pagaron 65 pesos. Considerando que el costo de las plumas es el mismo y el lápiz cuesta 5 pesos. ¿Cuál es el costo de cada pluma? 12 pesos

Figura 4.7. Respuestas a los reactivos sobre situaciones problémicas.

La Figura 4.8 evidencia el recurso del estudiante a la figura geométrica propuesta en la situación problémica del reactivo 4 b) y su respuesta correcta. Atribuimos ese procedimiento a la tendencia cognitiva 3, que Filloy caracteriza como: “El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis” (1999, p. 123).

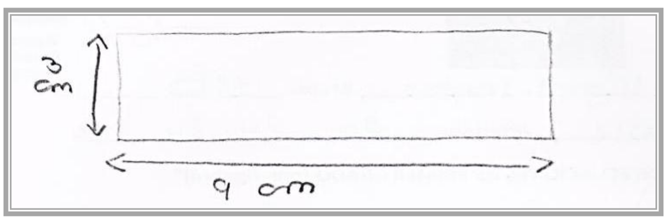


Figura 4.8. Trazo de figuras para la comprensión de la situación problémica (tendencia 3).

Finalmente, para el reactivo 5 referente a la incógnita en modelos geométricos, sólo 17% de las respuestas fueron correctas, lo que indica que la mayoría de los alumnos no poseía los conocimientos requeridos para la enseñanza del tema de interés. La Figura 4.9 muestra la respuesta correcta de un estudiante, sin el registro de alguna operación.

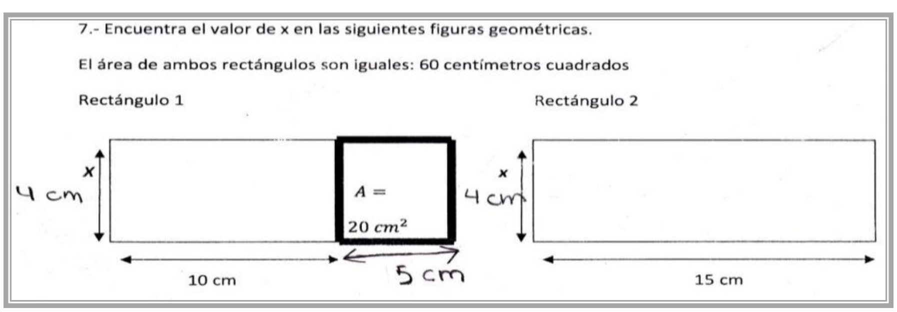


Figura 4.9. Respuesta correcta de un estudiante.

4.2.3. Resultados del cuestionario 3: generalidades de las ecuaciones aritméticas. Ensayo y error

Este cuestionario se refirió a ecuaciones aritméticas con mayor dificultad que las de los reactivos propuestos en los cuestionarios 1 y 2, debido a las magnitudes numéricas que implicó (véase §3.2.2.3), con la finalidad de identificar las distintas estrategias que siguieron los estudiantes para dar sus respuestas. El diseño de este cuestionario obedeció a los resultados de la aplicación del cuestionario 2, en el que los estudiantes tuvieron dificultades para responder correctamente las igualdades aritméticas. La mayor dificultad se debió a que con las magnitudes numéricas propuestas no pudieron poner en juego el cálculo mental, como en el cuestionario 2. Por ejemplo, en lugar de $8+\boxed{}= 15$, como en el segundo instrumento, en el cuestionario 3 se planteó $555+\boxed{}= 1\,520$. La mayoría de los alumnos trató de hallar el número faltante que satisficiera la igualdad por ensayo y error, por lo que tardaron mucho tiempo y no encontraron el número exacto. Esto refleja que no habían dotado de sentido a la sintaxis aritmética, a la relación que existe entre los números y signos de operación en una igualdad aritmética.

El 68% de los alumnos no respondieron correctamente en el cuestionario 3 (en las que se incluyen las respuestas de los estudiantes como: Noción (N), Incorrecta (I) y Omitida (O) de las ecuaciones aritméticas), por lo que sólo uno de cada cuatro estudiantes mostró poseer conocimientos básicos para acceder al tema de ecuaciones de primer grado. La Figura 4.10 muestra respuestas correctas de un alumno en las ecuaciones aritméticas de sumas y multiplicaciones, quien omitió las de las divisiones y restas.

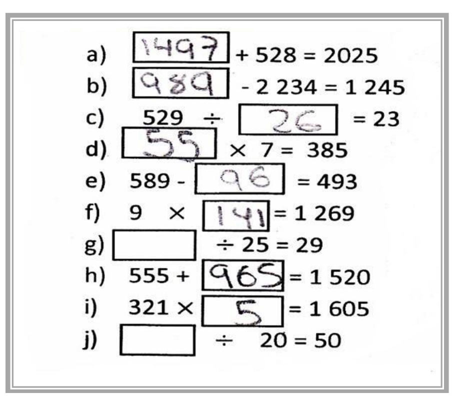

a) $\boxed{1497} + 528 = 2025$
b) $\boxed{989} - 2\,234 = 1\,245$
c) $529 \div \boxed{26} = 23$
d) $\boxed{55} \times 7 = 385$
e) $589 - \boxed{96} = 493$
f) $9 \times \boxed{141} = 1\,269$
g) $\boxed{} \div 25 = 29$
h) $555 + \boxed{965} = 1\,520$
i) $321 \times \boxed{5} = 1\,605$
j) $\boxed{} \div 20 = 50$

Figura 4.10. Ecuaciones aritméticas

La Figura 4.11 exhibe las operaciones que realizó un alumno, que aplicó la operación inversa para hallar el número faltante en la ecuación aritmética; en el caso de la suma realizó la resta $2025 - 528 =$. Para el inciso b) usó la misma estrategia, efectuando una resta en lugar de la operación inversa que era la suma, con un error en este procedimiento porque el número faltante, el minuendo, debía ser mayor que el sustraendo. Para el inciso c) realizó correctamente la división para hallar el número faltante; sin embargo, cometió errores en el procedimiento. Para el inciso d) no aplicó la operación inversa, sino que por ensayo y error trató de encontrar el número faltante. Comenzó multiplicando $30 \times 7 =$, $40 \times 7 =$, hasta que halló $55 \times 7 = 385$; incluso efectuó una operación más para cerciorarse de que había hallado el número correcto. En este caso, para el alumno fue efectiva su estrategia; sin embargo, pudo no serla con números más grandes. En las demás igualdades aritméticas manifestó dificultades para responder en el caso de las divisiones. Esto apela a lo que Filloy (1999), señala como la tendencia cognitiva 7: “la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución” (p. 124).

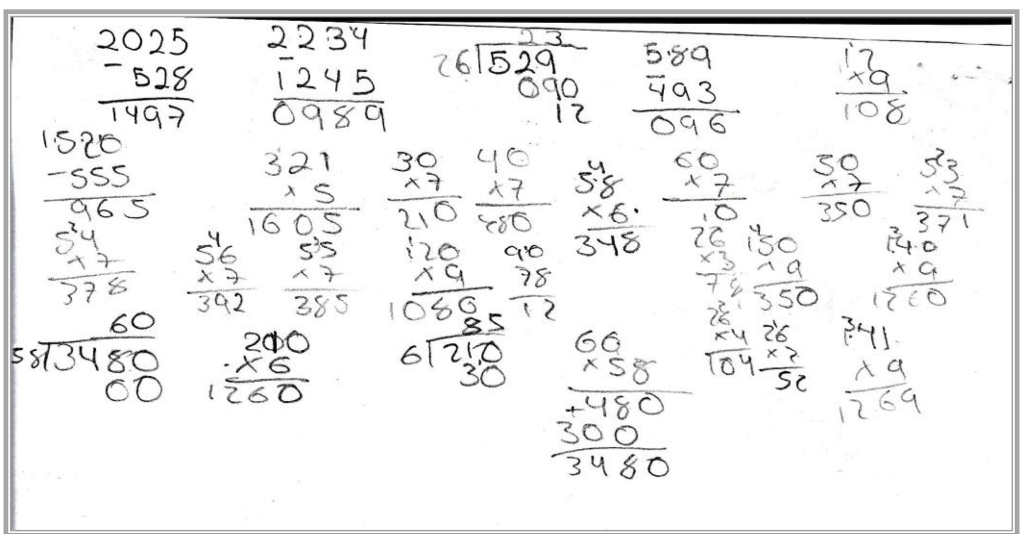


Figura 4.11. Ensayo y error para hallar el número faltante: presencia de la tendencia cognitiva 7.

La Tabla 4.3 resume los porcentajes de tipos de respuestas al cuestionario 3, en el que sólo el 22 % de los alumnos contestaron correctamente a las igualdades aritméticas.

Tabla 4.3. Porcentajes de tipos de respuestas recopiladas con el cuestionario 3.

Contenido	Generalidades de ecuaciones aritméticas										Total
Reactivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tipo de respuesta											
Correcta (C)	27	23	4	31	19	22	12	31	27	19	22 %
Noción (N)	15	4	4	4	0	12	4	4	0	0	5 %
Incorrecta (I)	15	23	35	8	27	12	19	15	8	23	18 %
Omisión (O)	43	50	57	57	54	54	65	50	65	58	55 %

4.2.4. Resultados del cuestionario 4: generalidades de las ecuaciones algebraicas y solución de situaciones problémicas

El cuestionario 4 se aplicó a 30 alumnos de primer grado de secundaria, una vez que el docente titular del grupo trató el tema de despeje de la incógnita mediante la solución de problemas y ejercicios, de acuerdo al Programa de estudios vigente (SEP, 2011 a, p. 33), usando el pizarrón y cuaderno para el planteamiento y solución de problemas de este contenido. Su enseñanza, tradicional, consistió en explicar en el pizarrón el procedimiento a seguir para resolver una ecuación mediante el despeje de la incógnita; a continuación, los alumnos resolvieron problemas y ejercicios relativos a estas ecuaciones. Se esperaba que los estudiantes los resolvieran mediante las ecuaciones lineales por los conocimientos previos, además se les pidió que usaran las ecuaciones lineales para hallar la solución.

Para el aspecto de las generalidades de las ecuaciones algebraicas, se plantearon cuatro reactivos; además se plantearon dos situaciones problémicas de las ecuaciones de la forma $ax = b$ y $a \pm x = b$, respectivamente (véanse los reactivos §3.2.2.4).

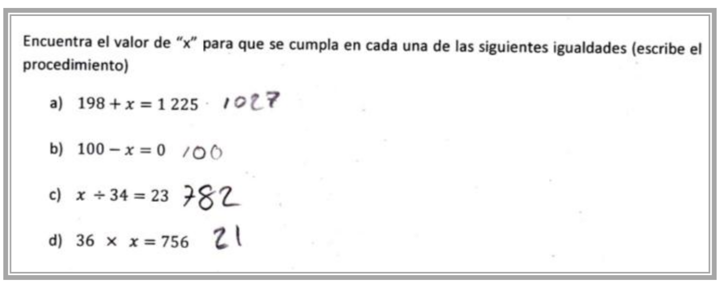
Los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario 4 son similares a los de los tres anteriores. Sólo el 28% de los estudiantes contestaron correctamente, mostraron un conocimiento básico en la solución de problemas, excepto en los reactivos que implicaron las generalidades de las ecuaciones algebraicas, los reactivos 1, 2, 3 y 4 de este cuestionario (véase §3.2.2.4). Los errores en que mayormente incurrieron fueron la incomprensión de texto (enunciado escrito) de los problemas planteados, que los llevó a confundir el procedimiento a seguir, así como de operatividad aritmética.

La Tabla 4.4 resume los porcentajes de los tipos de respuestas que los alumnos proporcionaron en el cuestionario 4, que mostraron falta de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos algebraicos.

Tabla 4.4 Porcentajes de tipo de respuestas recopiladas con el cuestionario 4.

Contenido	Generalidades de las ecuaciones algebraicas				Resolución de problemas		Total
Reactivo	1	2	3	4	1	2	6
Tipo de respuesta							
Correcta (C)	22%				40%		31%
Noción (N)	2%				13%		7%
Incorrecta (I)	18%				17%		18%
Omitida (O)	58%				30%		44%

La Figura 4.12 exhibe respuestas correctas de un alumno; sin embargo, en la Figura 4.13 se muestra que sólo efectuó las operaciones básicas de resta, multiplicación y división en cada caso, pero no realizó despejes, no usó el Álgebra para hallar la respuesta correcta.


Encuentra el valor de "x" para que se cumpla en cada una de las siguientes igualdades (escribe el procedimiento)

a) $198 + x = 1\,225$ 1027

b) $100 - x = 0$ 100

c) $x \div 34 = 23$ 782

d) $36 \times x = 756$ 21

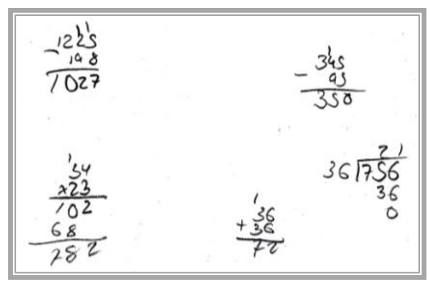


Figura 4.12. Respuestas correctas a las ecuaciones de primer grado.

Figura 4.13. Solución aritmética a las ecuaciones lineales.

La Figura 4.14 muestra los intentos de un alumno de responder algebraicamente; sin embargo, cometió errores de sintaxis algebraica, además de aplicar la operación inversa que no correspondía para la última ecuación. Atribuimos estos desempeños a la tendencia cognitiva 9, que Filloy (1999) describe como: "la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa" (p. 125).

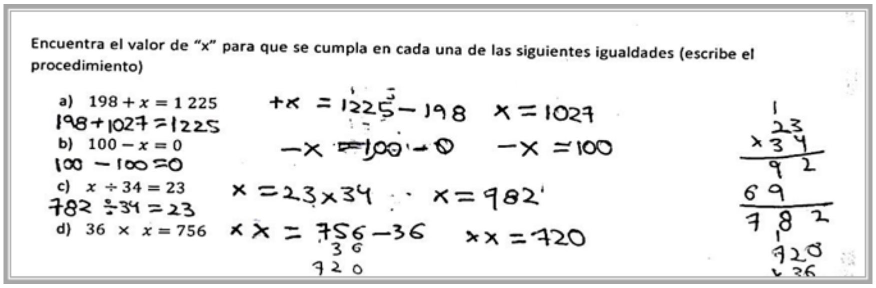


Figura 4.14. Errores de sintaxis algebraica. Tendencia cognitiva 9.

Para la resolución de problemas hubo un mayor porcentaje de reactivos correctos que en las generalidades de ecuaciones algebraicas, debido a que los alumnos contestaron usando la aritmética básica; mientras que en las ecuaciones algebraicas no lograron hacer uso de la variable como incógnita específica. Así, el 40 % de las respuestas fueron correctas, sin embargo, se presentó nuevamente la falta de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos algebraicos, ya que los alumnos respondieron correctamente usando solamente los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos. Además, el 30 % de los alumnos no contestaron estos dos reactivos (véanse en la Figura 4.15) presumiblemente por la falta de comprensión de texto o bien por falta de tiempo. La Figura 4.15 muestra una respuesta correcta mediante un procedimiento aritmético, sin el uso de signos algebraicos.

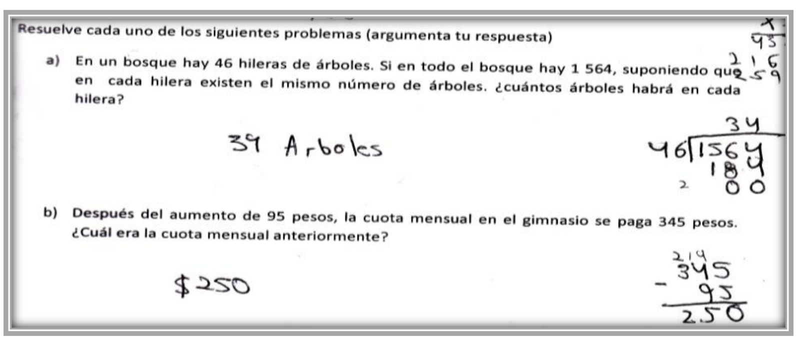


Figura 4.15. Falta de uso de los SMS algebraicos en las situaciones problémicas.

4. 3. Primeros resultados en primer grado de secundaria en el ciclo escolar 2011-2012

La aplicación de los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 reveló que los alumnos de primer grado, participantes en este estudio, poseían escaso dominio del Sistema Matemático de

Signos algebraicos; además, no operaban la notación aritmética de manera eficiente. Esto se refleja en su recurso frecuente a la estrategia de ensayo y error que atribuimos a la tendencia cognitiva 7: “la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución” (Filloy, 1999, p. 124), para encontrar el resultado de las igualdades aritméticas, generalidades de ecuaciones algebraicas, resolución de problemas. Otra de las dificultades fue la incomprensión de texto, por lo que un alumno en el cuestionario 1 no identificó las operaciones aritméticas a realizar, lo que Filloy (1999) denomina la tendencia cognitiva 8: la presencia de mecanismos inhibitorios, “la insistencia en no empezar a analizar un problema”. Otra de las dificultades fue el uso de modelos concretos en el caso de modelos geométricos, a lo que Filloy (1999) se refiere como la tendencia cognitiva 3: “El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis” (p. 123). Finalmente, por errores de sintaxis se exhibió la dificultad de los alumnos en la solución de ecuaciones de primer grado, lo que atribuimos a la tendencia cognitiva 9: “la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa” (Filloy, 1999, p. 125). Éstas fueron las principales dificultades que se identificaron con el grupo de primer grado de secundaria.

Las respuestas a los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 informaron para dar respuesta a la pregunta de investigación “¿Cuáles dificultades de comprensión presentan los alumnos de primer grado de secundaria del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado?” (véase en la sección 1.5). Los alumnos participantes poseían escaso dominio del SMS aritméticos/algebraicos, en particular de los aritméticos, ni lograban la comprensión de texto (enunciados escritos). Para que exista una mejor comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales se debe dominar la aritmética básica, identificar la incógnita específica y los datos para expresar la ecuación de una situación problémica y solucionarla mediante su despeje.

Capítulo 5

Estratos de desempeño en las ecuaciones de la forma $\boldsymbol{a \pm x = b}$ en 2° grado de secundaria antecedentes a su enseñanza

A partir de las respuestas a los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 por los alumnos de primer grado de secundaria, se identificaron diferentes dificultades de los alumnos al resolver situaciones problémicas de ecuaciones lineales. El cuestionario 5 (véase la Figura 3.1) se refiere a la representación de ecuaciones lineales de la forma $a \pm x = b$ y $ax = b$ implicadas en situaciones problémicas y se aplicó a alumnos de 2° grado. Este instrumento fue la base para identificar estratos de desempeño—alto, medio y bajo— en el grupo (véase el apartado 2.6.2) por las expresiones de sus procedimientos. Posteriormente, se entrevistó a tres estudiantes, uno por cada estrato, para clarificar sus respuestas en el cuestionario 5.

5.1. Antecedentes a la enseñanza de las ecuaciones lineales en 2º grado de secundaria

El objetivo del cuestionario 5 fue el de recopilar datos acerca de las dificultades de los estudiantes de 2º grado de secundaria para asignar una ecuación lineal a una situación problémica, antes de la enseñanza del tema. Como ya se señaló, se pretendió identificar estratos del uso de los SMS aritméticos/algebraicos en los procedimientos de los alumnos del grupo participante.

5.1.1. Cuestionario 5 "representación de ecuaciones lineales de la forma $\boldsymbol{a \pm x = b}$ y $\boldsymbol{ax = b}$", implicadas en situaciones problémicas

Las ecuaciones lineales de la forma $a \pm x = b$ y $ax = b$ son consideradas sencillas; sin embargo, resultan difíciles de comprender para los alumnos cuando están implicadas en situaciones problémicas planteadas verbalmente (Filloy, 1999), pues se requiere la comprensión del texto, la identificación de la incógnita, la representación de la ecuación y su solución.

Los reactivos del cuestionario 5 se presentaron como preguntas abiertas referidas a situaciones problémicas (véase §3.2.3.1); cuatro reactivos implicaron ecuaciones de la forma $a \pm x = b$ y dos reactivos implicaron ecuaciones de la forma $ax = b$.

5.1.1.1. Condiciones de aplicación. El cuestionario se aplicó, como ya se indicó en la introducción de este capítulo, al grupo de 32 estudiantes de segundo grado de educación secundaria participante en esta investigación, en su aula de matemáticas a la hora de su clase, durante 30 minutos para su contestación individual. El investigador y el profesor titular estuvieron presentes durante la aplicación para corroborar que el cuestionario fuera contestado individualmente por cada uno de los alumnos y evitar en lo posible distracciones y la alteración de las respuestas.

5.1.1.2. Criterios de análisis de las respuestas. Para la revisión de las respuestas a este instrumento se implementaron las siguientes categorías: Correcta (**C**), Noción (**N**), Incorrecta (**I**) y Omitida (**O**). Se consideró respuesta correcta la de los alumnos que respondieron correctamente utilizando el lenguaje algebraico; sin embargo, se consideró también respuesta correcta la de los alumnos que dieron el resultado de la situación problémica mediante un procedimiento aritmético. Además de estos tipos de procedimientos, hubo alumnos que no lograron llegar al resultado, pero identificaron la incógnita, su procedimiento fue correcto, pero por algún error del valor posicional de los números implicados el resultado fue incorrecto; por lo tanto, se consideró esta respuesta resultante de una noción de ecuaciones de primer grado. Otro tipo de respuesta incorrecta fue la falta de comprensión del enunciado presentado, por lo que se eligió una operación incorrecta. Finalmente, para los reactivos sin respuesta se registró la omisión respectiva.

5.2. Estratos de desempeño identificados en el cuestionario 5

De acuerdo a los procedimientos de los alumnos, se les clasificó en: e*strato de desempeño alto*, el del alumno lo más cercano a uno que domina el Sistema Matemático de Signos Aritméticos/algebraicos; *estrato de desempeño medio*, el del que exhibió dominio de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos; y *estrato de desempeño bajo*, el del que exhibió dificultades para responder correctamente los reactivos debido a la falta de dominio de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y de comprensión de textos, y en particular deficiencia en operaciones básicas. Más específicamente, se consideró de estrato de desempeño alto a los alumnos que contestaron correctamente cinco o seis reactivos, ya fuera de forma algebraica o aritmética; el estrato de desempeño medio fue el de los que respondieron tres o cuatro reactivos correctamente, ya fuera de forma algebraica o aritmética; finalmente, el estrato de desempeño bajo fue el de los alumnos que únicamente contestaron de forma correcta uno o dos reactivos, además de los que sólo mostraron nociones.

La Tabla 5.1 exhibe los distintos estratos de desempeño del grupo.

Tabla 5.1. Porcentajes de “Estratos de desempeño” en el cuestionario 5.

Estrato de desempeño	Número de alumnos	Porcentaje %
Alto	3	9%
Medio	7	22%
Bajo	22	69%
Total	32	100%

El alto porcentaje de los alumnos en el estrato bajo presagió su introducción difícil al lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado, que ya habían sido tema de la enseñanza en el primer grado. Por la relativamente reciente introducción al álgebra de los alumnos participantes (cuando mucho hacía un año de ella), en la constitución de los estratos alto y medio propuesta se incluyeron respuestas de los estudiantes en SMS aritméticos, ya que “es difícil para ellos leer o escribir en SMS algebraico” (Filloy, 1999, p. 32), por la enseñanza que han recibido.

La Figura 5.1 resume los tipos de procedimientos de las respuestas correctas de los alumnos. De las 128 respuestas correctas esperadas para las ecuaciones de la forma $a \pm x = b$, sólo 53 fueron acertadas; de las 64 respuestas esperadas correctas para las ecuaciones de la forma $ax = b$, sólo 14 lo fueron, prácticamente la quinta parte del grupo. Prevaleció el procedimiento aritmético sobre el algebraico; aun y cuando se comprendió el enunciado de la situación problémica presentado, el alumno en general no recurrió al planteamiento algebraico, aunque se le introdujo al Álgebra en el curso anterior del primer grado de secundaria.

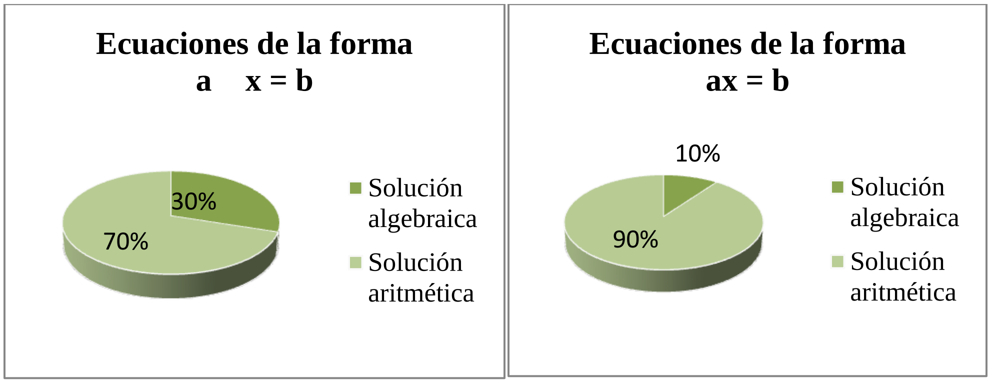


Figura 5.1. Porcentajes de tipo de procedimiento de las respuestas correctas.

La Tabla 5.2 presenta los porcentajes promedios de los tipos de respuestas dadas por los alumnos por forma de ecuación implicada en los reactivos.

*Tabla 5.2.*Porcentajes promedio de tipos de respuestas al cuestionario 5.

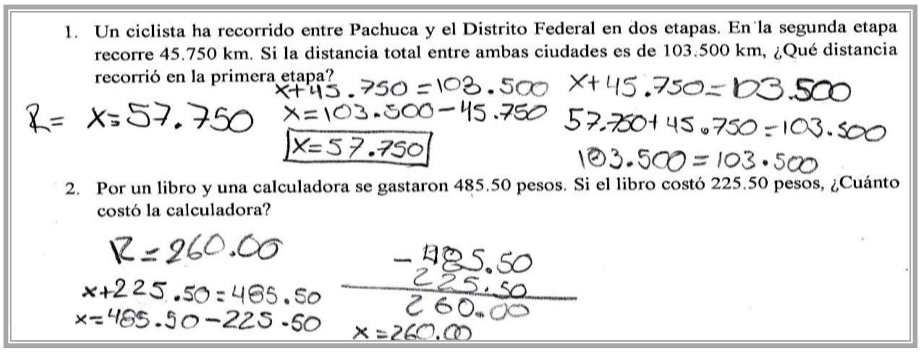
Contenido	Ecuaciones de la forma $a \pm x = b$				Ecuaciones de la forma $ax = b$		Total
Reactivo	1	2	3	4	5	6	6
Tipo de respuesta							
Correcta (C)	42%				22%		28%
Noción (N)	18%				17%		7%
Incorrecta (I)	21%				11%		18%
Omitida (O)	18%				50%		47%

De las ecuaciones de la forma $a \pm x = b$, el reactivo 4 fue el más difícil para el grupo, mientras que para las ecuaciones de la forma $ax = b$ el reactivo 5 fue el más difícil porque implicó operaciones con decimales.

5.2.1. Análisis de las respuestas al cuestionario 5

Presentamos los procedimientos de algunos alumnos a manera de ejemplos de los aspectos considerados en el análisis de las respuestas proporcionadas en el cuestionario 5.

5.2.1.1. El estrato alto. La respuesta, considerada como correcta, de un estudiante de este *estrato* (véase la Figura 5.2) mostró, no obstante, una comprensión parcial del enunciado de la situación problémica. El alumno escribió la letra R y el signo igual para referirse al valor de la incógnita encontrada, acción derivada de una práctica común en la enseñanza básica según la cual se debe de especificar así la respuesta final; también fue recurrente la omisión de las unidades de medida de que se trataba (solución incompleta). El alumno expresó correctamente la incógnita con una letra y la despejó para hallar su valor.


1. Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿Qué distancia recorrió en la primera etapa?

x+45.750 = 103.500

x = 103.500 − 45.750

$\boxed{x = 57.750}$

R= x=57.750

x+45.750 = 103.500

57.750+45.750 = 103.500

103.500 = 103.500

2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?

R=260.00

x+225.50 = 485.50

x = 485.50 − 225.50

− 485.50

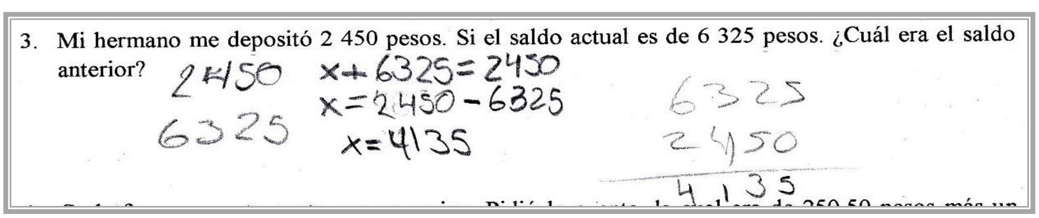
225.50

260.00

x = 260.00

*Figura 5.2.*Uso de la variable y solución incompleta.

5.2.1.2. El estrato medio. Un alumno ubicado en este *estrato* planteó la ecuación para la situación problémica del reactivo 3(véase la Figura 5.3) incluyendo todos sus datos, los de una clase en el miembro izquierdo (saldos) y los de otra (depósitos) en el derecho, invirtiendo el orden en que los presentó el enunciado.


3. Mi hermano me depositó 2 450 pesos. Si el saldo actual es de 6 325 pesos. ¿Cuál era el saldo anterior?

2450

6325

x+6325 = 2450

x = 2450 − 6325

x = 4135

6325

2450

4135

*Figura 5.3.*Falta de atención al valor posicional de los números y omisión del signo negativo (tendencia cognitiva 9).

Este planteamiento no revela que el estudiante haya advertido la petición implícita de *comparar* saldos mediante una sustracción, sino al contrario, que su interpretación del enunciado fue de cantidades agregadas; y su primera igualdad expresada le exigió, una vez que despejó la incógnita, correctamente, no sólo efectuar la sustracción (lo que hizo incorrectamente) de la segunda igualdad, sino interpretar el signo negativo de la diferencia (por ejemplo, “había menos”), el cual omitió y el valor de la incógnita encontrado fue incorrecto. Atribuimos este desempeño a lo que Filloy (1999 señala como la tendencia cognitiva 9: “la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa” (p. 124). El joven también omitió las unidades y no efectuó la comprobación que correspondía. Su respuesta exhibe que las deficiencias identificadas en el primer grado respecto a los números negativos (véanse las Figuras 4.1 y 4.2; consúltese también Pérez, 2014) y a la sustracción prevalecieron en el segundo grado.

La Figura 5.4 muestra un procedimiento meramente aritmético para solucionar las situaciones problémicas propuestas. El alumno, también del *estrato medio*, comprendió el enunciado por la ubicación de los datos de la situación problémica en la operación identificada, correcta, pero con la comisión de errores en su algoritmo y en la comprobación, por lo que el resultado fue incorrecto y parece haber confundido al alumno, quien dio como respuesta un dato de la situación problémica.

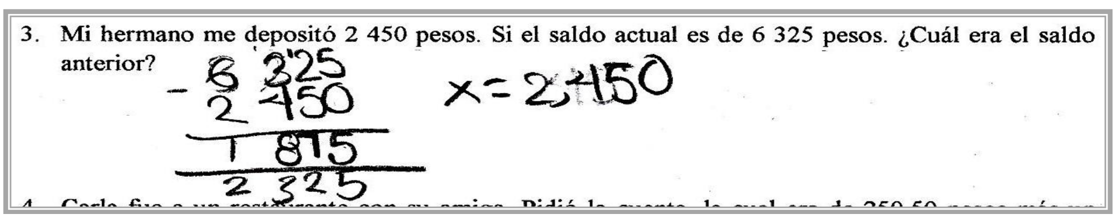


*Figura 5.4.*Errores en el algoritmo de la resta.

La Figura 5.5 exhibe el procedimiento aritmético de otro alumno del *estrato medio* para hallar el resultado correcto, lo que evidenció su comprensión del enunciado, aunque omitió las unidades de medida en su respuesta.

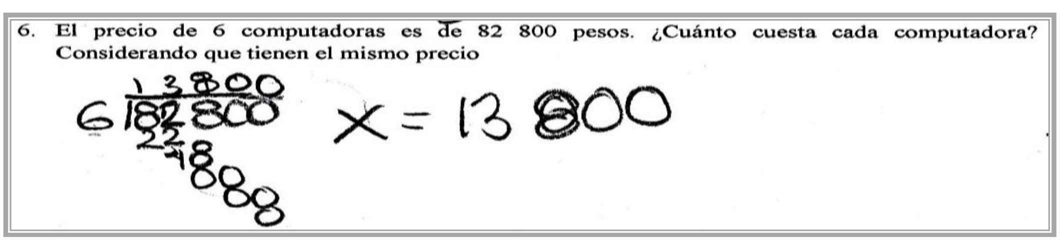
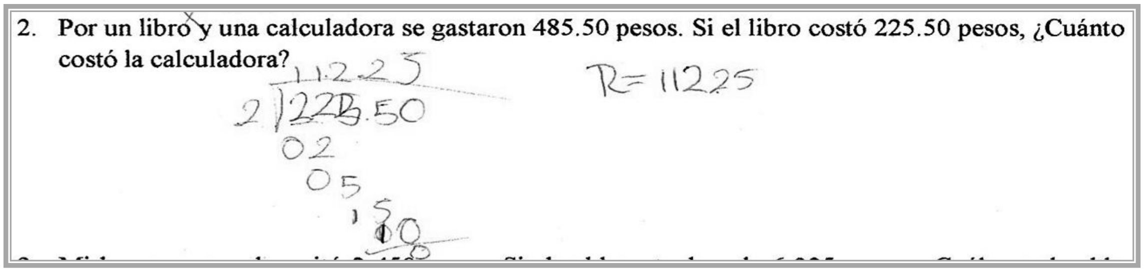


*Figura 5.5.*Uso de conocimientos previos para la solución de situaciones problémicas.

5.2.1.3. El estrato bajo. La Figura 5.6 muestra la respuesta de un alumno ubicado en este *estrato*, con escaso dominio de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, su falta de comprensión del enunciado y de identificación de la operación a realizar, así como su omisión de datos en su procedimiento.


2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?

112.25

2)225.50

R= 11225

Figura 5.6. Falta de comprensión del enunciado en la situación problémica.

5.2.2. Resultados y conclusiones de las respuestas al cuestionario 5

Sólo 25% de los alumnos que contestaron el cuestionario 5 evidenciaron el uso del Sistema Matemático de Signos algebraicos, pues el resto utilizó el de los aritméticos. Uno de cada dos alumnos contestó incorrectamente al menos un reactivo por el tipo de operación que usó; incluso, un alumno empleó la división en lugar de la resta, pero otro que seleccionó la operación correcta respondió incorrectamente por falta de atención al valor posicional de los números. Para los reactivos del tipo $a \pm x = b,$ 42% de las respuestas fueron correctas, de las cuales en 16% se representó algebraicamente la situación problémica y en las del 84% restante sólo se realizó una operación aritmética. Los reactivos del tipo $ax = b$ fueron más difíciles; 21% de las respuestas fueron acertadas, de las cuales sólo un estudiante representó algebraicamente las situaciones problémicas; 79% de las respuestas exhibieron operaciones erróneas o fueron omitidas.

La utilización de una operación incorrecta al responder la situación problémica indicó la dificultad para comprender su enunciado. Filloy (1999) se refiere a la tendencia cognitiva 6 como la articulación de generalizaciones erróneas, el “uso incorrecto de conceptos y operaciones” (Filloy, 1999, p. 124). Mientras, el tratamiento deficiente del valor posicional en las cantidades implicadas en la operación, identificada correctamente, dio lugar a resultados incorrectos en el 15% del total de respuestas.

5.3. Entrevistas por estratos

Con formato semiestructurado, por cada estrato se entrevistó a un alumno (A_1, A_2, y A_3, en entrevistas EB, EM, EA, respectivamente; véanse la Figura 3.1 y la sección 3.4), con la finalidad de clarificar sus dificultades de representación algebraica de las ecuaciones de primer grado de la forma $a \pm x = b$, exhibidas en el cuestionario 5 y, como señalamos en la sección 3.4, caracterizar su uso de la variable como incógnita específica. Estas entrevistas se realizaron después de la aplicación del cuestionario 5 y antes de que el investigador aplicara la estrategia de enseñanza de la ecuación lineal.

El escenario, las condiciones en las que se realizaron las entrevistas EA, EM y EB, así como las técnicas de registro de datos, se han indicado en la sección 3.4.

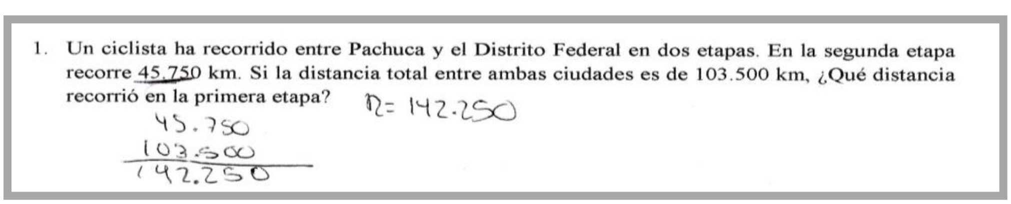
5.3.1. Guión de entrevistas y los participantes

A los alumnos entrevistados, A_1, A_2 y A_3, se les interrogó acerca de los reactivos 1 y 2 del cuestionario 5 (véanse en §3.2.3.1):

1. Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿Qué distancia recorrió en la primera etapa?
2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?

Se eligieron las mismas situaciones problémicas para las tres entrevistas con la finalidad de observar las respuestas a ellas de los alumnos clasificados en los distintos estratos. Los interrogatorios se orientaron a la comprensión de los alumnos del enunciado (texto escrito presentado en la hoja de control) de la situación problémica y su solución.

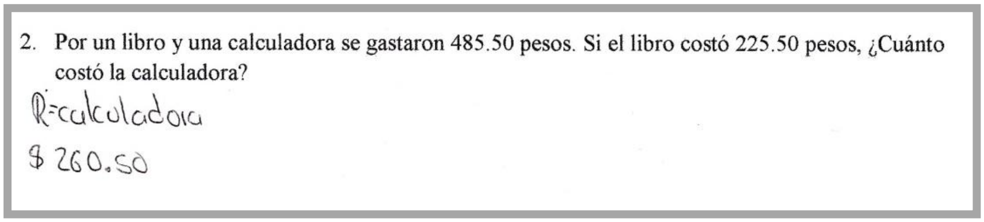
Las respuestas de A_1, del estrato bajo, a esos dos reactivos fueron incorrectas, ya que en el segundo tiene errores en la resta de decenas (véanse en las Figuras 5.7 y 5.8).


1. Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿Qué distancia recorrió en la primera etapa?

R= 142.250

45.750
103.500
142.250

Figura 5.7. Respuesta de A_1 al reactivo 1 del cuestionario 5.



2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?

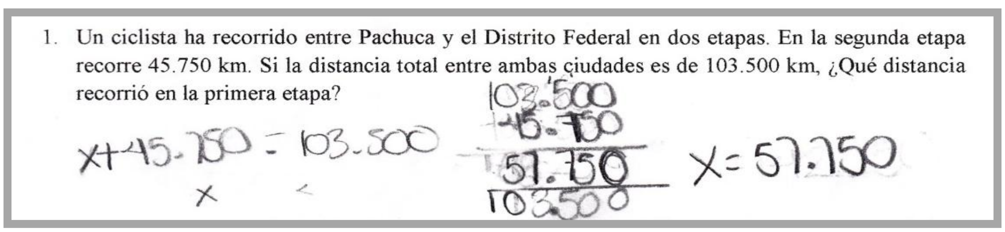
R=calculadora

$ 260.50

Figura 5.8. Respuesta de A_1 al reactivo 2 del cuestionario 5.

Para el reactivo 1 planteó una resta, pero su cálculo fue incorrecto; para el reactivo 2 sólo anotó los datos sin identificar las operaciones a realizar.

A_2, del estrato medio, respondió correctamente a los dos reactivos (véanse las Figuras 5.9 y 5.10). Para el primero sólo planteó la ecuación; enseguida, anotó las operaciones aritméticas sin darle mayor importancia a la ecuación. Para el reactivo 2 sólo realizó operaciones aritméticas para dar el resultado.



1. Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿Qué distancia recorrió en la primera etapa?

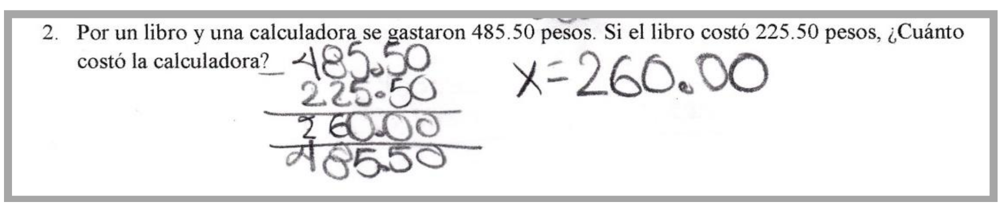
x+45.750 = 103.500

x

103.500
-45.750
57.750
103.500

X=57.750

Figura 5.9. Respuesta de A_2 al reactivo 1 del cuestionario 5.



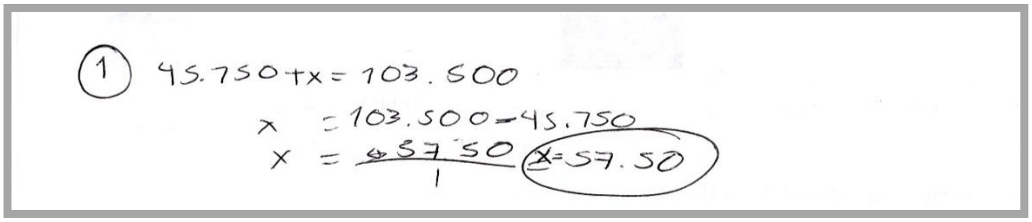
2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?

-485.50
225.50
260.00
485.50

X=260.00

Figura 5.10. Respuesta de A_2 al reactivo 2 del cuestionario 5.

Finalmente, se eligió al alumno A_3, del estrato alto, porque contestó correctamente todos los reactivos (por ejemplo, véanse las Figuras 5.11 y 5.12). Para el reactivo 1 planteó la ecuación, despejó la incógnita y calculó su valor. Sin embargo, para el reactivo 2 sólo realizó operaciones aritméticas para responder la pregunta.

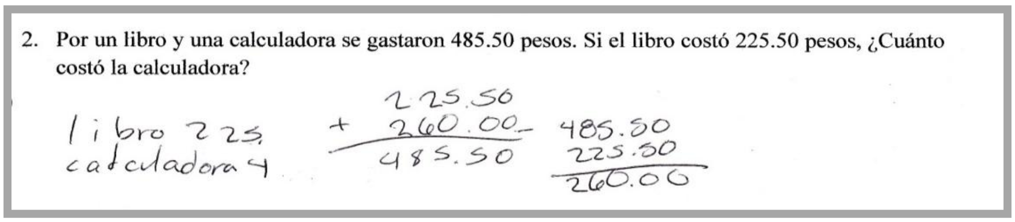


(1) 45.750 + x = 103.500

x = 103.500 − 45.750

x = $\frac{57.50}{1}$ x = 57.50

Figura 5.11. Respuesta de A_3 al reactivo 1 del cuestionario 5.



2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?

libro 225
calculadora 4

225.50 + 260.00 = 485.50

485.50 − 225.50 = 260.00

Figura 5.12. Respuesta de A_3 al reactivo 2 del cuestionario 5.

Específicamente, los criterios de análisis de los datos recopilados en cada una de las entrevistas realizadas fueron: comprensión del enunciado, igualdad, solución algebraica y solución aritmética.

En las transcripciones de los pasajes seleccionados para nuestra argumentación, “I” denota al investigador y A_1, A_2 y A_3, al alumno entrevistado del estrato bajo, del medio y del alto, respectivamente.

5.3.2. Estrato de desempeño bajo: la entrevista EB

A_1 no obtuvo acierto alguno en el cuestionario 5, sino sólo dio evidencia de algunas nociones aritméticas frente a las situaciones problémicas planteadas.

Al inicio del interrogatorio, A_1 logró identificar los datos conocidos y la incógnita de la situación problémica; sin embargo, mostró dificultad para expresar algebraicamente la ecuación respectiva, pues decía que no recordaba qué era una ecuación.

La función de la igualdad. Con preguntas relativas a sus conocimientos previos, A_1 comprendió la función del signo de igualdad en forma aritmética y de ahí mostró tener una noción de ecuación. Tampoco recordaba lo que era la incógnita, pero con el interrogatorio identificó la implicada en la situación problémica. Después logró la expresión algebraica respectiva y solucionó la ecuación.

Comprensión del enunciado. En una primera lectura del enunciado del reactivo 1, A_1 no logró comprender qué tenía que hacer. En el transcurso del interrogatorio, al identificar los datos, A_1 consiguió darle sentido a la incógnita y, aunque también con dificultades porque no recordaba algunos conceptos matemáticos como igualdad e incógnita, logró representarla en una ecuación.

Solución aritmética. A_1 tuvo dificultades para calcular una resta, la cual tuvo que reescribir en forma correcta. En un principio reconoció los datos, sin embargo, no los ordenó correctamente (minuendo y sustraendo) en la resta y, al tratar de calcularla, reconoció su error.

Solución algebraica. Con referencia a la situación problémica del reactivo 1, A_1 dio evidencia de dificultades para reconocer a la incógnita y a la ecuación. La tendencia 8, la presencia de mecanismos inhibitorios (Filloy, 1999; véase §2.2.1.2), "la insistencia en no empezar a analizar un problema, negarse a resolver ecuaciones simples" (p. 125), se evidenció con las respuestas de A_1: "no sé", "no me acuerdo".

I: En este caso, ¿cuál es la incógnita?
A_1: La incógnita es la distancia que… la distancia que ha recorrido en la primera etapa.
I: Muy bien. Entonces, lo que estamos buscando aquí es la distancia que ha recorrido en la primera etapa. ¿Cómo representas algo que no conoces?
A_1: ¿Cómo? … No te entendí.
I: Sí, por ejemplo, ¿en la segunda etapa cuánto recorrió?
A_1: En la segunda etapa recorrió 45.750 km.
I: Muy bien. En este caso, ¿cuáles son los datos conocidos? Hay datos conocidos y datos que desconoces.
A_1: En la segunda, los kilómetros que recorrió.
I: Muy bien.
A_1: Y los kilómetros que hay entre una ciudad y otra.
I: Correcto. Entonces, los datos conocidos es [son] el recorrido que hace en la segunda etapa, también el total del recorrido, sí, son los datos conocidos. ¿Y el [valor] desconocido?
A_1: Es el número de la primera etapa.
I: Entonces tenemos tres datos [valores]: en [para] la primera etapa, ¿cómo tú puedes representar…? recuerda, en las ecuaciones de primer grado, ¿cómo representaban algo que tú desconoces? Algo que tú no sabes….
A_1: ¿Con un cero?
I: Cero. ¿Por qué el cero?
A_1: **No… no me acuerdo.**
I Algo [un valor] que tú desconoces en las ecuaciones, ¿cómo representas algo [un valor] desconocido, algo [un valor] que no sabes …
A_1 ¿Como el signo de qué?
I Algo que no sabes cuánto vale, cuál es el valor… ¿Cómo representas algo así que no sabes, cuál es ese valor, qué valor tiene? Eso es lo que vamos a encontrar al final, pero ...
A_1 Tiene valor uno.
I ¿Por qué uno?
A_1 **No, no me acuerdo**
I: ¿No te acuerdas?

A_1: No.

I: Entonces, esto [señala a la situación problémica] lo podemos representar mediante una ecuación, todo esto, entonces, ¿qué tienes que hacer tú para representar una ecuación? ¿Qué es una ecuación?

A_1: Una ecuación es una operación …

I: Una operación… sí, puede haber una o varias operaciones, pero en sí, ¿qué significa una operación? ¿Qué elementos tiene una ecuación? ¿Qué es lo que lleva una ecuación? ¿Qué es lo que hace diferente una ecuación a una simple operación?

A_1: **No sé, no me acuerdo**.

I: En las ecuaciones, ¿qué es lo que lleva[n]? Dime qué es lo que lleva una ecuación, dime [dame] algún ejemplo de una ecuación.

A_1: Una ecuación… puede ser un … [por] ejemplo una multiplicación.

La preferencia por solucionar una situación problémica en forma meramente aritmética se debió a que A_1 aún no reconocía las variables ni le daba sentido a su representación algebraica, porque la aritmética requerida para solucionar la ecuación algebraica prevaleció, debido probablemente a la insistencia en ella en la educación primaria del alumno, y a él se le facilitó interpretar la ecuación y solucionarla aritméticamente.

5.3.3. Estrato de desempeño medio: la entrevista EM

A_2, alumno del estrato de desempeño medio en el cuestionario 5, obtuvo tres reactivos correctos en ese instrumento, incluidos los de las dos situaciones propuestas para la entrevista, con procedimientos meramente aritméticos. Sólo para el reactivo 1 trató de contestarlo con una ecuación (véase §5.1.1.3).

Durante la entrevista, A_2 mostró dificultades para representar el valor desconocido en la situación problémica. Al igual que en sus procedimientos en el cuestionario 5, al inicio de la entrevista respondió de forma aritmética a la situación problémica (reactivo 1) e identificó claramente la incógnita en ella; sin embargo, no sabía cómo expresarla. Con las interrogantes que le planteó el investigador, logró recordar la forma de representar la incógnita mediante una letra, como comúnmente, por la letra *x*. A_2 identificó los datos del problema, pero al principio no logró expresar la ecuación respectiva y fue necesario nuevamente el planteamiento de las preguntas por parte del investigador y recordarle que este tipo de ecuaciones ya lo había estudiado en el primer grado, para que arribara a la expresión correcta de la ecuación correspondiente. Una vez que A_2 planteó la ecuación, logró acordarse del procedimiento a realizar despejando la incógnita para hallar su valor y respondió así la pregunta planteada en la situación problémica.

Comprensión del enunciado. Aunque A_2 dio evidencia de haber comprendido el enunciado de la situación problémica, manifestó dificultades para expresar la ecuación respectiva. En una primera lectura identificó los datos; sin embargo, como ya se señaló antes, no sabía cómo expresar la incógnita, pero mediante preguntas del investigador logró expresarla y la ecuación correspondiente de manera correcta.

La función de la igualdad. Una vez expresada la ecuación se le pidieron los valores de sus miembros; contestó correctamente el valor del segundo, pero no logró identificar el valor del primero, hasta que mediante preguntas dio respuesta a la función que adquiere la incógnita: una vez encontrado su valor, al sustituirlo en la ecuación se establece la igualdad.

Solución aritmética. Después de leer el enunciado e identificar los datos, por medio de interrogantes A_2 logró identificar también la operación a realizar; solucionó el reactivo primero de forma aritmética correctamente, pero señaló que no podía expresar la ecuación.

Solución algebraica. Durante su procedimiento, A_2 tuvo dificultades en identificar la operación inversa al pasar un término de un miembro a otro. Esto fue indicio de su aún inestable comprensión de la "resolución de ecuaciones basada en los modelos sintáctico-viético, transposición de términos de un término a otro" (Filloy, 1999, p. 23).

En el desempeño de A_2 se identificó la tendencia cognitiva 9: la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa (Filloy, 1999, p. 125) "al resolver problemas y dotar de significados a los signos algebraicos". A_2 manifestó dificultades para expresar la incógnita y la ecuación para la situación problémica planteada.

I: ¿Cuáles son los datos del problema?
A_2: La distancia que ha recorrido, la distancia total .
I: Muy bien. Ahora ¿cuál es la incógnita?
A_2: La distancia…
I: ¿Cuál es la pregunta en la situación problémica?
A_2: La distancia que recorrió en la segunda etapa.
I: Muy bien. Y ¿cómo expresas la incógnita?
A_2: Con una pregunta.
I: En la situación problémica está expresada mediante una pregunta, pero ahora en la ecuación, ¿cómo expresarías la incógnita?
A_2: Mediante un signo…
I: ¿Qué signo usarías?
A_2: **No sé…**
I: ¡Acuérdate!, al momento de escribir una ecuación, ¿cómo lo escribes?

A_2: Con números.
I: Además de números …
A_2: ¡Ah! ya recuerdo, con letras.
I Muy bien. ¿Qué letras usas?
A_2 La letra x para representar la incógnita.
I Ahora bien, expresa la ecuación que describe esta situación problémica.
A_2 **No recuerdo….**
I Con los datos que mencionaste en un principio y la incógnita, escribe la ecuación…

La articulación de generalizaciones erróneas, la tendencia cognitiva 6 (Filloy, 1999), "se trata de un uso incorrecto de conceptos y operaciones" (p. 124) que se manifestó en la entrevista a A_2, cuando se le dificultó solucionar la ecuación al aplicar la operación inversa para pasar un término de un miembro a otro de la ecuación.

I: Ahora que tienes la ecuación, ¿qué tienes que hacer para resolverla?
A_2: Hacer operaciones.
I: ¿Qué operaciones tienes que hacer?
A_2: Una suma…
I: ¿Por qué una suma?
A_2: Para saber cuánto recorrió [en] la primera etapa.
I: Muy bien. Sin embargo, ¿qué vas a sumar?
A_2: La distancia que ha recorrido y…
I: Ya tienes la ecuación; ¿qué sucede con la incógnita?
A_2: Es el dato que no sabemos cuánto vale.
I: Muy bien. ¿Qué tienes que hacer para saber el valor de la incógnita?
A_2: Hacer operaciones.
I: ¿Qué operaciones tienes que realizar?
A_2: Una suma…
I: ¿Qué sucede cuando despejas la incógnita? Los datos que están en el primer miembro, ¿cómo pasan al segundo miembro?
A_2: **No recuerdo …**
I En este caso, si está sumando en el primer miembro, ¿cómo pasa al segundo miembro?
A_2 ¡Ah!, sí, pasa restando…
I Muy bien. Si está sumando, pasa con la operación inversa.
A_2 Entonces realizo una resta.
I Muy bien. [Realiza la operación para hallar el valor de la incógnita].

5.3.4. Estrato de desempeño alto: la entrevista EA

Para la primera situación problémica, A_3 identificó claramente la incógnita y la representó mediante una letra. Enseguida reconoció los datos del problema, planteó correctamente la ecuación respectiva sin dificultades, aplicó la operación inversa correspondiente al despejar la incógnita y halló su valor sin dificultad. A_3 mostró dominio de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos. Su desempeño indicó su comprensión precisa del enunciado que se le presentó.

Para la segunda situación problémica planteada reconoció sin dificultad la incógnita y los datos implicados; pero al tratar de resolver la ecuación confundió la operación a realizar, planteó una resta con valores invertidos del minuendo y sustraendo, pero mediante las preguntas del entrevistador logró reconocer el error que había cometido y la solucionó.

Comprensión del enunciado. Con la primera situación problémica A_3 no tuvo dificultades en identificar la incógnita ni los datos implicados para expresar la ecuación respectiva; con una primera lectura identificó la incógnita y la representó con una letra (x), enseguida escribió los demás datos y logró expresar correctamente la ecuación y la resolvió. A_3 no presentó dificultades para comprender la situación problémica.

La función de la igualdad. A_3 reconoció sin dificultades la función del signo igual; se refirió a la relación entre una ecuación y una igualdad, mencionando que la ecuación es una igualdad con la diferencia de que existe una letra denominada incógnita y con una serie de pasos se halla el valor de la incógnita.

Solución aritmética. A_3 logró resolver las situaciones problémicas mediante sus ecuaciones respectivas; usó correctamente las operaciones aritméticas básicas como la resta para solucionarlas.

Solución algebraica. Después de leer el enunciado, A_3 comprendió lo que tenía que realizar, por lo que usó una letra, los signos de igualdad y los datos implicados en la situación, para expresar la ecuación respectiva, reconoció el tipo de ecuación de que se trataba y el procedimiento preciso para hallar el valor de la incógnita; sin embargo, todavía no reconocía a la unidad como el idéntico multiplicativo.

I: ¿Qué hiciste para resolver la primera pregunta?

A_3: Aquí dice [lee] "Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿Qué distancia recorrió en la primera etapa?"... Resté y ya salió… Entonces, en la ecuación lo que hice… lo que no sabemos es la primera etapa, es la x.

I: Es [de] lo que desconoces el valor…

A_3: Sí, la primera etapa más la segunda etapa me va a dar el total: $x + 45.750 = 103.500$

I: ¿Y luego?

A_3: Ya teniendo la ecuación, éste [la distancia recorrida en la segunda etapa], está sumando, [por lo que] pasa restando.

I: Muy bien. ¿Qué tienes que hacer en ese caso?

A_3: Restar estos dos [el total de la distancia recorrida menos la distancia de la segunda etapa] **y lo que salga dividirlo entre uno.**

I: Muy bien. ¿Y el resultado obtenido será….?

A_3: El valor de x, el valor que nos hace falta.

I: En ese caso, ¿qué operaciones hiciste para encontrar el valor de la incógnita?

A_3: Una resta …

No obstante, A_3 todavía incurrió en la articulación de generalizaciones erróneas (la tendencia cognitiva 6; Filloy, 1999), que "trata de un uso incorrecto de conceptos y operaciones":

I: En el caso del segundo reactivo…
A_3: Dice… Es lo mismo, ¿no? [Lee] "Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿cuánto costó la calculadora?..." La incógnita es el precio de la calculadora …
I: ¿Cómo formulas la ecuación?
A_3: El precio del libro [225.50] más la x que es el precio de la calculadora me va a dar el total de 485.50 pesos.
I: ¿Tiene algo similar con la ecuación anterior?
A_3: Todo, es lo mismo. Se hace una resta, éste [el costo del libro] pasa como resta…
I: ¿Cuál sería el resultado?
A_3: El resultado sería 225.50 menos 485.50…
I: Pero éste [485.50] es el valor de ambos, ¡485.50 es lo que se paga por el libro y la calculadora! Sabiendo que el libro cuesta 225.50, la pregunta es: ¿cuánto cuesta la calculadora?
A_3: ¡Ah! Sí es cierto …
I: ¿Qué tenías que hacer ahí?
A_3: Una resta de 485.50 menos 225.50 y el resultado es 260.
I: Muy bien, ése es el valor de la incógnita.

5.3.5. Conclusiones de las entrevistas

A_3, del estrato alto, identificó con facilidad la incógnita en el enunciado planteado y la representó con una letra; igualmente representó la situación problémica con una ecuación y mostró familiarización con el uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritmético y algebraico; le dio sentido al uso de la letra en la ecuación como número desconocido y con su despeje encontró su valor.

A_2, del estrato medio mostró dificultades para representar el valor desconocido en la situación problémica; pero durante el interrogatorio logró identificarlo y representarlo en una ecuación, sin dar sentido todavía a la letra como incógnita, sino sólo para realizar las operaciones aritméticas y contestar la pregunta planteada.

Finalmente A_1, del estrato bajo, mostró algunas nociones de igualdad, de incógnita y expresó en forma aritmética las situaciones presentadas en la entrevista, pero no identificó claramente la operación a utilizar, cometió errores en el algoritmo a seguir y en el valor posicional de los números, por lo que por sí mismo no pudo representar algebraicamente la situación problémica propuesta. Sin embargo, con preguntas que apelaron a sus conocimientos previos a lo largo de la entrevista, al final logró expresar algebraicamente la ecuación y resolverla, aunque sin un uso fluido del lenguaje algebraico en la solución de las situaciones problémicas de ecuaciones de primer grado propuestas.

5.4. Interpretación en términos del Modelo Teórico Local

Durante las entrevistas se pudieron controlar algunos factores para identificar las dificultades de comprensión de los alumnos del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado.

Filloy (1999) ha señalado cambios conceptuales y/o simbólicos que marcan la diferencia entre el pensamiento individual aritmético y el algebraico, relacionados con el uso de las letras, la noción de igualdad, símbolos para la codificación de operaciones. En nuestra investigación, de forma generalizada y en particular en las entrevistas a A_1 y A_2 (estratos bajo y medio, respectivamente), se identificó la falta de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos algebraicos, debido a que los alumnos no dotaron de sentido a las letras ni a los signos. Como conocimiento previo, ellos manifestaron nociones de igualdad y de incógnita específica; dieron indicios de nociones del papel que adquieren los signos en Álgebra; por ejemplo, evidenciaron la idea de que a la derecha del signo igual se debía tener un número como resultado, como en "cinco más cuatro igual a nueve" ($5 + 4 = 9$); pero no de la igualdad, pues se les dificultó comprender que "cinco más cuatro es igual a tres por tres" ($5 + 4 = 3 \times 3$ ó $5 + 4 = 12 - 3$), (véase Figura 5.13). En esta igualdad, en ambos miembros existen operaciones. Otro factor es el significado que adquieren los signos de "+" y "$-$" como signos del número positivo y negativo (véase Pérez, 2014); los alumnos participantes los trataron sólo como operadores de suma y resta.

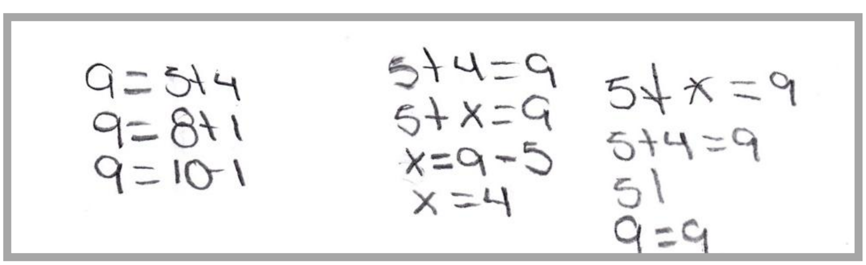


Figura 5.13. La noción de igualdad

De esta manera, en la transición de la Aritmética al Álgebra, los alumnos mostraron dificultades de comprensión del funcionamiento de los signos de “+” y “−” y de símbolos algebraicos, además de dificultades por incomprensión de texto (enunciado escrito) que se evidenciaron en los cuestionarios aplicados (cuestionario 5 y 6); también en las entrevistas a los alumnos de los estratos bajo y de medio se pusieron en evidencia dificultades de comprensión del texto escrito. No obstante, la aplicación de la estrategia de enseñanza contribuyó a que se lograra una mejor comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales con la identificación de los datos primarios, de los datos secundarios y de la incógnita específica.

Capítulo 6

Enseñanza y comprensión en segundo grado de secundaria de ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$

De la aplicación de los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 al grupo de primer grado y del cuestionario 5 aplicado al grupo de segundo grado (véase la Figura 3.1) se identificaron dificultades para solucionar una situación problémica. Entre ellas, se reconoció la presencia de mecanismos inhibitorios, tal como "la insistencia en no empezar a analizar un problema", que Filloy señala (1999, p. 125) como la tendencia cognitiva 8 (véase el apartado 5.3.2). También se identificó el uso del tanteo numérico, al que Filloy (1999) se refiere como la tendencia cognitiva 7: la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución (véase §4.3.3.1). Otra tendencia que se observó fue la 6 (Filloy, 1999; véase en §2.2.1.2), la articulación de generalizaciones erróneas y el "uso incorrecto de operaciones" (p. 124; véase aquí también el apartado 5.3.3).

Se diseñó una estrategia de enseñanza (véase la Figura 3.1) de las ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$ para aplicarla a los 35 alumnos de segundo grado de secundaria de entre 13 y 14 años de edad, a quienes ya se había aplicado el cuestionario 5. La mitad de los alumnos de este grupo perteneció al grupo de primer grado al que se aplicaron los cuestionarios 1, 2, 3 y 4. Previamente a la enseñanza se aplicó el cuestionario 6 para identificar las dificultades de los alumnos en estas ecuaciones; una semana después de terminada la enseñanza, se aplicó el cuestionario 7, con la finalidad de caracterizar la comprensión de los alumnos de las ecuaciones lineales.

Para la estrategia de enseñanza aplicada (véase la Figura 3.1), dada la presencia de la tendencia cognitiva 8, se consideró la conveniencia de plantear problemas e incluir al menos las tres primeras etapas para resolverlos (Etapa I, comprender un problema; Etapa II, concebir un plan; Etapa III, ejecución del plan; y, de manera restringida la Etapa IV, con la llamada de atención a la identificación de las unidades de medida a que hubiera lugar. Polya, 1945; véase aquí el apartado 2.6.4). Por tanto, esa estrategia se basó en la solución de situaciones problémicas familiares al alumno, considerando el Método de Inferencias

Analíticas Sucesivas (MIAS) (véase §2.2.1.2) para resolver problemas de Aritmética —el cual implica descripciones de "situaciones reales" o "estados posibles del mundo" (Filloy, 1999, p. 130)— y el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) para el inicio del uso del Álgebra por medio de la lectura del enunciado para identificar lo desconocido. El Método Cartesiano (MC) no se puso en práctica con los alumnos, ya que resultaría más abstracto para ellos, sino con su profesor titular, explicándole que favorecería la comprensión del alumno de las ecuaciones de primer grado, es decir, el alumno lograría interpretar correctamente el enunciado presentado y su representación algebraica. Esta estrategia de enseñanza se puso en juego en el ciclo escolar 2012-2013.

6.1. Cuestionario 6 "Diagnóstico para la estrategia de enseñanza de las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$"

Como se planteó en el parágrafo §3.2.3.2, el cuestionario 6 se usó como diagnóstico para orientar la estrategia de enseñanza de las ecuaciones lineales, que se impartió a los alumnos de segundo grado de secundaria (véanse los reactivos planteados en ese mismo parágrafo). Específicamente, el objetivo de este instrumento fue conocer las dificultades que manifiestan los estudiantes al expresar algebraicamente una situación problémica, al identificar la incógnita, su comprensión del texto (enunciado escrito de la situación problémica), su procedimiento de solución —algebraico o aritmético— y los errores aritméticos que pudieran exhibir.

El objetivo particular de los reactivos 1, 2 y 3 fue para que los estudiantes lograran identificar la incógnita, despejarla y calcular su valor al asignar a la situación problémica una ecuación de la forma $ax \pm b = c$. El objetivo del reactivo 4 es igual al de los anteriores, para una ecuación de la forma: $ax \pm b = cx \pm d$, por lo que la comprensión del texto propuesto respectivo implica una dificultad mayor. El reactivo 5 tuvo el objetivo de identificar la incógnita en una situación problémica de tipo geométrico. Finalmente, el reactivo 6 puso en juego directamente el SMS algebraicos mediante el planteamiento de una ecuación lineal para que el alumno despejara la incógnita y determinara su valor.

El cuestionario 6 se aplicó a un grupo de 30 estudiantes de segundo grado (5 de ellos no asistieron para la aplicación de este instrumento) de educación secundaria a la hora y en el aula de matemáticas, durante un lapso de 40 minutos, para su contestación individual. Nuevamente, el investigador y el profesor titular estuvieron presentes durante la aplicación para corroborar que el cuestionario fuera contestado por cada uno de los alumnos sin distracciones ni alteración de las respuestas.

6.1.1. Análisis de las respuestas

Al igual que para el cuestionario 5, para el 6 consideramos las siguientes categorías de respuesta: Correcta (C), Noción (N), Incorrecta (I) y Omitida (O). Para este instrumento, también nuevamente, se consideró respuesta correcta la de los alumnos que respondieron correctamente utilizando el lenguaje algebraico; sin embargo, se consideró también respuesta correcta la de los que contestaron de forma aritmética. Además de estas respuestas, hubo alumnos que no lograron llegar al resultado, pero identificaron la incógnita, usaron el procedimiento correcto, pero por algún error en las operaciones aritméticas el resultado fue incorrecto; por lo tanto, se consideró en estos casos que el alumno tenía una noción de las ecuaciones de primer grado. Otro tipo de respuesta en la que el alumno respondió incorrectamente pudo ser causada por incomprensión del texto y eligió una operación incorrecta. La Tabla 6.1 resume los resultados generales por tipo de respuesta al cuestionario 6.

Tabla 6.1. Porcentajes de tipo de respuestas recopiladas con el cuestionario 6 “ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$"

Planteamiento	Situaciones problémicas		Modelo geométrico	Ecuación	Total
Reactivo	1 2 3	4	5	6	6
Tipo de respuesta	$ax \pm b = c$	$ax \pm b = cx \pm d$	$ax \pm b = c$		
Correcta (C)	53%	10%	23%	33%	30%
Noción (N)	17%	13%	3%	9%	10%
Incorrecta (I)	14%	20%	27%	21%	20%
Omitida (O)	16%	57%	47%	37%	40%

Como se anticipó, para los primeros tres reactivos hubo mayor porcentaje de respuestas correctas que para el reactivo que implicó a la ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$. La tercera parte de las respuestas correctas al cuestionario fueron expresadas con el Sistema Matemático de Signos aritméticos/algebraicos, con más del 50% de los procedimientos sólo aritméticos; y en la quinta parte de las respuestas correctas no se exhibió el procedimiento.

La Figura 6.1 exhibe la frecuencia de los tipos de procedimientos mostrados en las contestaciones al cuestionario 6.

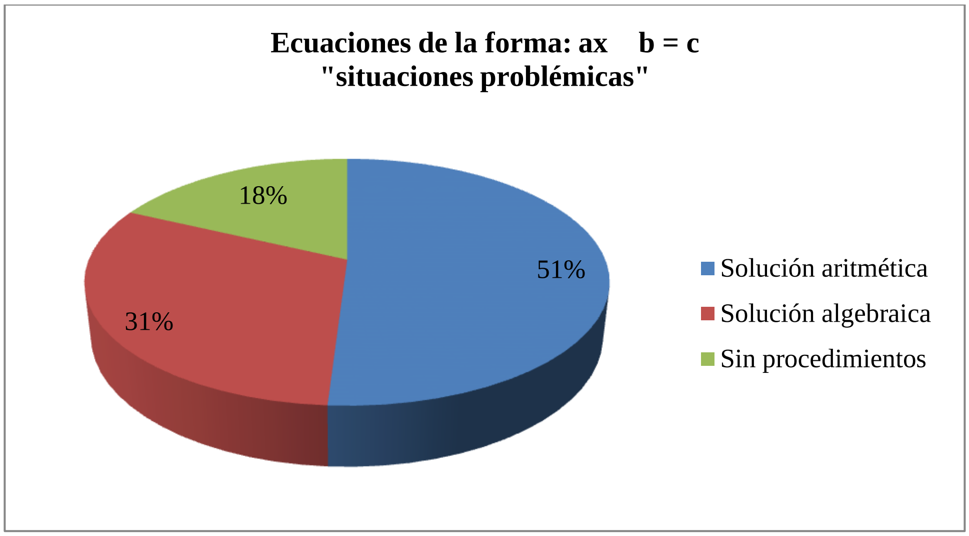
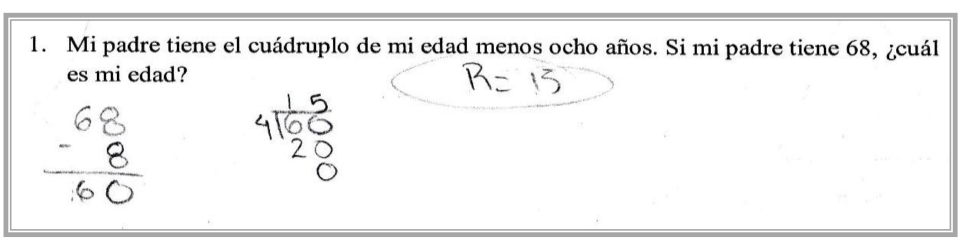


Figura 6.1. Tipos de procedimientos mostrados en las respuestas correctas.

La contestación a este cuestionario exhibió un dominio parcial de la solución de las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$ y de su identificación. Las respuestas de los estudiantes, en un porcentaje considerable (más del 50 %), fueron aritméticas y algunos de ellos incluso no mostraron su procedimiento, lo que podría haberse debido al cálculo mental para hallar el valor de la incógnita.

La Figura 6.2 exhibe la respuesta netamente aritmética de un alumno al reactivo 1. Su comprensión del texto fue parcial, ya que sus operaciones lo condujeron a una respuesta incorrecta, pero mostró una idea para dar solución al reactivo.


1. Mi padre tiene el cuádruplo de mi edad menos ocho años. Si mi padre tiene 68, ¿cuál es mi edad?

R= 15

68
\- 8
60

4|60 = 15
20
0

*Figura 6.2.*Respuesta con SMS aritméticos y comprensión de texto parcial.

Las operaciones realizadas son correctas, pero al no plantear la ecuación, el alumno omitió la operación inversa, por lo que su respuesta es incorrecta; además, omitió la unidad de medida de la edad. Su respuesta correspondería al enunciado:

> La edad de mi padre menos ocho años es el cuádruplo de mi edad. Si mi padre tiene 68 años, ¿cuál es mi edad?

Si el estudiante hubiera planteado la ecuación $4x - 8 = 68$ (o bien $4\ x - 8\ \ = 68$), su procedimiento lo hubiera encaminado a una respuesta correcta.

La Figura 6.3 muestra la comprobación aritmética del resultado de un alumno para el reactivo 2.

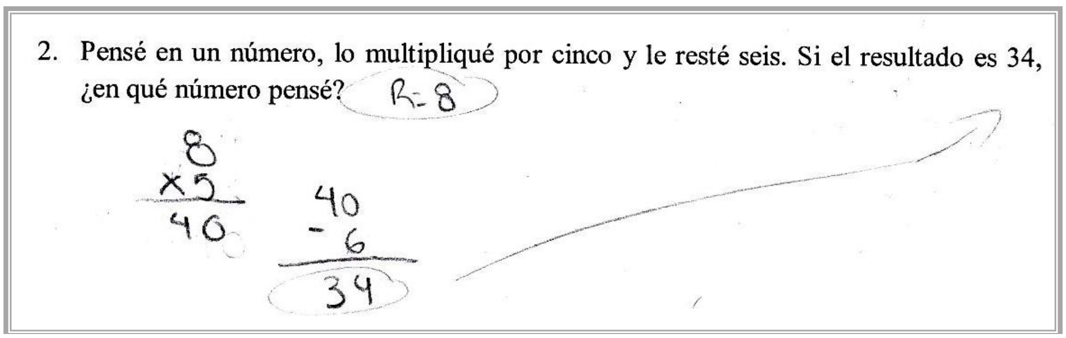


*Figura 6.3.*Aparente uso del cálculo mental y SMS aritméticos.

Si bien debajo de sus operaciones se notan otras borradas, aparentemente encontró el número deseado mediante un cálculo mental sin realizar muchas operaciones, el cual no revistió mayor dificultad pues los números implicados son pequeños; pero cuando las cantidades son grandes, el cálculo mental ya no funciona y es común que los alumnos recurran al ensayo y error, lo que con frecuencia los conduce a cometer errores, como el mostrado en la Figura 4.10 (uso de ensayo y error) correspondiente al cuestionario 3.

La Figura 6.4 presenta la respuesta correcta al reactivo 3, meramente aritmética, de otro estudiante. Aunque comprendió el texto, exhibió el recurso al ensayo y error, la tendencia cognitiva 7: mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución (Filloy, 1999). Éste es uno de los procedimientos más comunes de los alumnos de este nivel educativo, válido, pero cuyas limitaciones se pretenden subsanar mediante la enseñanza de ecuaciones de primer grado y el uso de los SMS aritméticos/algebraicos, como plantea Filloy (1999).

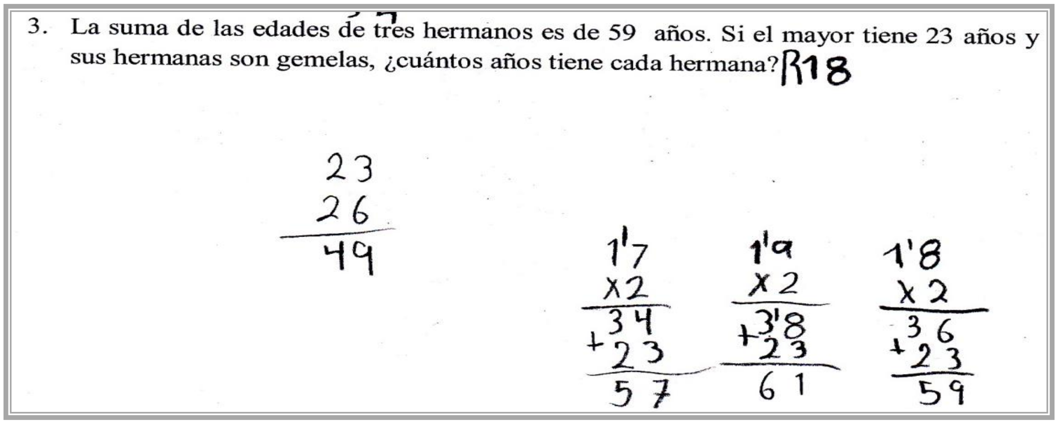


Figura 6.4. Ensayo y error por la tendencia 7 y ausencia del uso de SMS algebraicos.

Un procedimiento algebraico incorrecto para el reactivo 3 lo exhibe la Figura 6.5. El error provino de la aparente incomprensión del enunciado de la situación problémica, en el que, según el procedimiento seguido, se interpretó “gemelas” por “trillizas” en la primera parte del texto, y sin percatarse del cambio consecuente de “tres hermanos” por cuatro. Esta comprensión del texto parcial (o bien, falta de atención a la lectura) es otra dificultad de los alumnos para expresar una ecuación lineal en la solución de situaciones problémicas. De acuerdo a Filloy (1999), corresponde a la tendencia 6: “La articulación de generalizaciones erróneas.” (p. 124), gemelas por trillizas.

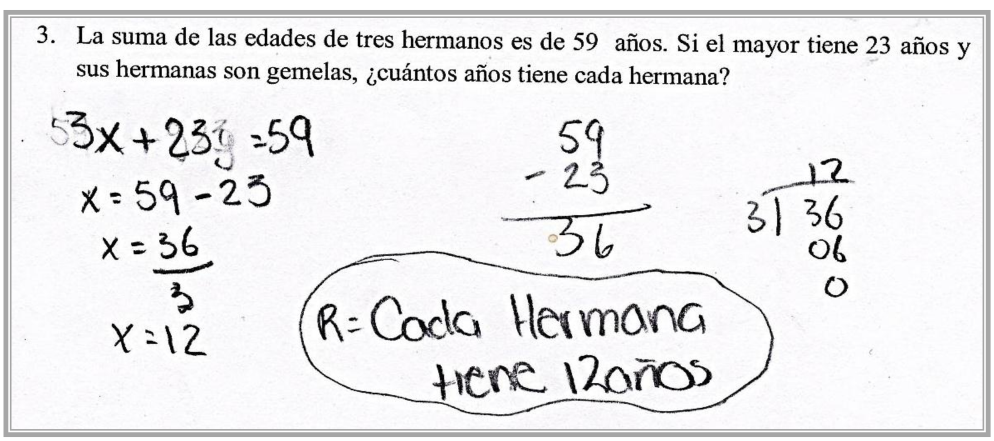


Figura 6.5. La articulación de generalizaciones erróneas (tendencia 6).

La Figura 6.6 exhibe el poco sentido que el alumno otorgó a la letra “y” que él mismo introdujo y a los datos para expresar el planteamiento más abstracto de la situación problémica del reactivo 4, la cual implicó una ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$. Para reducir su propuesta a la forma $ax \pm b = c,$ el alumno desconoció sin más la literal que introdujo y cometió errores de sintaxis, desconoció también al coeficiente de x en el segundo miembro de la igualdad y exhibió su duda de si sumar o restar los términos independientes, así que decidió la operación según el resultado que de cada caso le pareció más plausible. También omitió las unidades de medida.

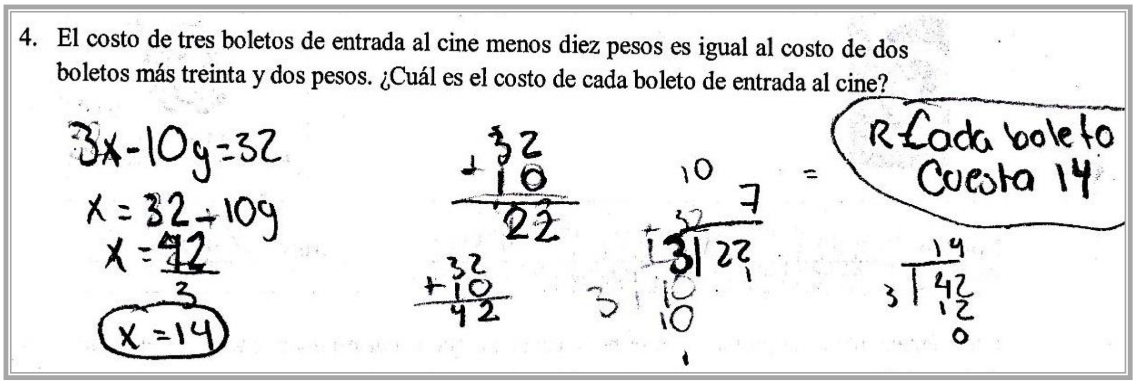


Figura 6.6. Dotación de sentidos intermedios (tendencia 2) y omisión de datos de la situación problémica.

La Figura 6.7 exhibe el procedimiento meramente aritmético de un alumno para hallar el valor, correcto, de la incógnita relativa a una situación problémica geométrica. Él además explicó textualmente lo que realizó (aunque con faltas de ortografía). Sin embargo, es notoria la ausencia de los SMS algebraicos en la solución de esta situación problémica.

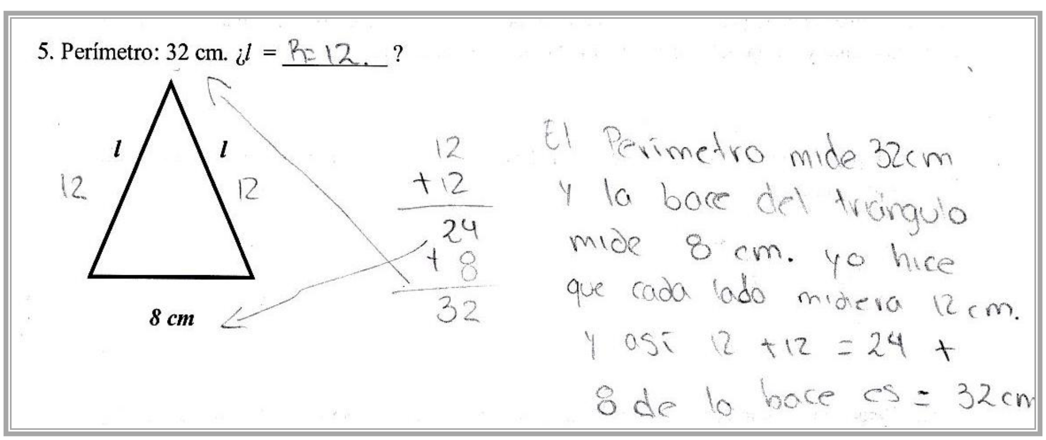


Figura 6.7. Solución aritmética.

Finalmente, la Figura 6.8 corresponde al reactivo 6, que plantea una ecuación lineal para despejar la incógnita y encontrar su valor (véase la Tabla 6.1). El alumno cometió errores de sintaxis, transgredió la función de la igualdad, aunque escribió el valor correcto de la incógnita.

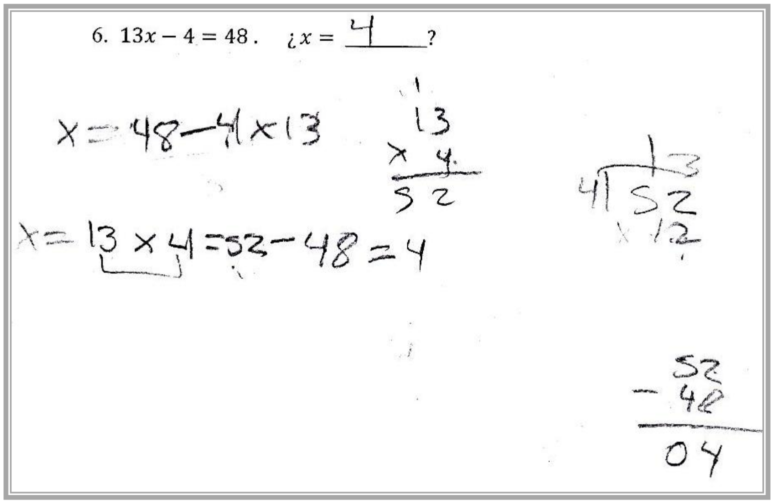


Figura 6.8. El uso incorrecto del signo de igualdad.

6.1.2. Resultados del cuestionario 6

Las respuestas a este cuestionario exhibieron como principales dificultades la interpretación incorrecta de la situación problémica, la estrategia de ensayo y error, la falta de dotación de sentido a las letras en las ecuaciones y la ausencia del uso de los SMS algebraicos. Sólo 33% de las respuestas de los estudiantes fueron correctas, aunque la mayoría de los alumnos procedieron aritméticamente sin recurrir al Álgebra para solucionar las situaciones problémicas.

En las contestaciones a este instrumento identificamos las siguientes tendencias cognitivas (Filloy, 1999; véase aquí §2.2.1.2): 2. La dotación de sentidos intermedios; 6. La articulación de generalizaciones erróneas; 7. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de solución; y 8. La presencia de mecanismos inhibitorios.

Estas dificultades orientaron la estrategia de enseñanza que se puso en juego con este grupo.

6.2. Enseñanza de las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$

Como se indicó en la sección 3.3 y en la introducción de este capítulo, se diseñó una estrategia de enseñanza con el objetivo de contribuir a mejorar la interpretación de los enunciados de situaciones problémicas que implican ecuaciones lineales, identificar la incógnita, plantear la ecuación respectiva con el uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos y solucionarla mediante el despeje de la incógnita.

Para el componente de Modelo de Enseñanza, Filloy (1999) propone el recurso a contextos "concretos" (es decir, contextos familiares para el alumno; p. 23), con el propósito de que los estudiantes doten de sentido a las entidades matemáticas implicadas (véase la sección 2.2). Por lo tanto, incluimos en la estrategia de enseñanza el planteamiento de situaciones problémicas familiares al alumno, que aquí se presentan en la sección 3.3.

6.2.1. Tratamiento de las ecuaciones lineales de la forma $\mathrm{ax} \pm \mathrm{b} = \mathrm{c}$ en su enseñanza

Como se indicó en la sección 3.3, durante la enseñanza, conducida por este investigador, los alumnos leyeron atentamente cada una de las situaciones problémicas, identificaron la incógnita —a la que se hacía referencia en la pregunta de la situación problémica—, la subrayaron con color rojo y la expresaron mediante una letra (incógnita específica) para plantear la ecuación. Luego procedieron a identificar los datos primarios —que son los datos numéricos y las operaciones implicadas en la situación—, los subrayaron con color azul y los escribieron para completar la ecuación. Finalmente, identificaron los datos secundarios subrayándolos con color gris; estos datos son complementarios, no interfieren en el planteamiento de la ecuación. Tomando en cuenta las etapas I y II que propone Polya (1945; "Comprensión del problema", y "Concepción de un plan", respectivamente), a continuación de la identificación de datos los alumnos procedieron al planteamiento de la ecuación respectiva y a la solución de la situación problémica, correspondiente a la Etapa III (Ejecución del plan); y para la etapa IV (Visión retrospectiva), la comprobación de la solución de la ecuación (verificación del resultado); no obstante, durante la enseñanza además se hizo énfasis en incluir en las respuestas las unidades de medida que correspondieran al resultado, lo cual supone confrontar éste con la situación problémica respectiva. Las situaciones problémicas planteadas se consideraron familiares al alumno; la estrategia de enseñanza apeló al Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS) para resolver problemas de Aritmética y al Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) para la iniciación al Álgebra.

La Figura 6.9 muestra la hoja de control de uno de los alumnos. Se decidió esta estrategia (la identificación de la incógnita específica, los datos primarios y los datos secundarios) porque en la aplicación de los instrumentos una de las principales dificultades fue la incomprensión del texto. Filloy (1999) caracteriza la tendencia cognitiva 8 como “La presencia de mecanismos inhibitorios” (p. 44), refiriéndose a la insistencia en no empezar a analizar un problema (como se señaló en la introducción de este capítulo). La estrategia de enseñanza implementada subraya la importancia de la lectura correcta de una situación problémica identificando la incógnita, los datos primarios y los datos secundarios.

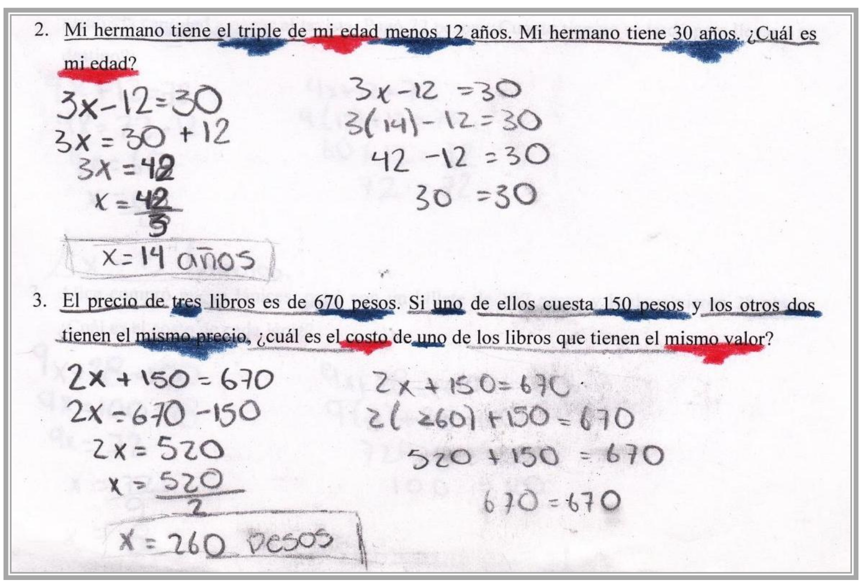


Figura 6.9. Identificación de la incógnita, datos primarios y datos secundarios en un texto durante la enseñanza.

6.2.1.1. Puesta en juego de la estrategia de enseñanza. Para la selección de las situaciones problémicas que se plantearon en la enseñanza se tomó en cuenta que Filloy (1999) señala que la aplicación del Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS) se motiva cuando se necesita el procedimiento algebraico para solucionarlas. De la siguiente manera quedaron identificados la incógnita específica, los datos primarios, los datos secundarios y el planteamiento de la ecuación, correspondientes a cada una de las situaciones problémicas propuestas a los alumnos (véanse en la sección 3.3).

Clave de los colores: **Rojo: incógnita**; **azul: datos primarios**; **gris: datos secundarios**.

a) *Dificultad baja*

1. Pensé en un número, lo multipliqué por ocho y le sumé siete. El resultado es79, ¿en qué número pensé?
   $8x + 7 = 79$
2. Mi hermano tiene el triple de mi edad menos 12 años. Mi hermano tiene 30 años, ¿cuál es mi edad?
   $3x - 12 = 30$
3. El precio de tres libros es de 670 pesos, sabiendo que uno de ellos cuesta 150 pesos y los otros dos tienen el mismo precio, ¿cuál es el costo del libro que tienen el mismo valor?
   $2x + 150 = 670$
4. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, el lado desigual mide 12 cm, ¿Cuál es la medida de los lados iguales?
   $2x + 12 = 48$
5. La edad de Daniel al multiplicar por seis y sumarle seis se obtiene 108, ¿cuál es la edad de Daniel?
   $6x + 6 = 108$
6. Jacqueline sabe si multiplica el tiempo de traslado por cuatro al producto le suma 12 resulta la cantidad a pagar al taxista. Pagó 72 pesos, ¿cuánto tiempo se tardó para llegar a su destino?
   $4x + 12 = 72$

b) *Dificultad media*

7. Alice compró nueve lápices, pagó con un billete de 100 pesos y le devolvieron 28 pesos, ¿cuál es el costo de cada lápiz?
   $9x + 28 = 100$
8. El perímetro de un rectángulo es de34 cm, el largo es el doble que el ancho menos siete centímetros, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
   $6x - 14 = 34$

c) *Dificultad alta*

9. El costo de seis plumas más 12 pesos es igual al costo de cuatro plumas más 20 pesos, ¿cuáles el costo de cada pluma?
   $6x + 12 = 4x + 20$
10. El costo de10 calculadoras menos 410 pesos es igual al costo de seis calculadoras más 550 pesos, ¿cuáles el costo de cada calculadora?

$$10x - 410 = 6x + 550$$

Estas situaciones problémicas se trataron durante dos sesiones en la enseñanza a 35 estudiantes de segundo grado de secundaria de 50 minutos cada una, de los cuales cinco no asistieron el primer día de actividades de la situación de enseñanza.

6.2.1.2. **Desempeño general durante la enseñanza.** Al principio, en la primera sesión, algunos alumnos tuvieron dificultades para identificar los datos en la situación problémica, pero a su término lograron la expresión algebraica respectiva con el uso de los SMS aritméticos/algebraicos y su solución mediante el despeje de la incógnita.

La situación problémica 8 (véase en la sección 3.3 y en § 6.2.1.1) fue la más difícil de comprender para los alumnos, porque implica conceptos geométricos, como las características de un rectángulo. Filloy (1999) describe a la tendencia cognitiva 8 como la presencia de mecanismos inhibitorios “la insistencia en no empezar a analizar un problema” (p.124), por lo que fue necesario interpretar los datos con la figura geométrica trazada en el pizarrón y que el investigador orientara a los alumnos mediante una serie de preguntas, para que lograran plantear la ecuación correspondiente y la resolvieran.

6.3. Cuestionario 7 “Comprensión de las ecuaciones lineales de la forma $\boldsymbol{ax \pm b = c}$, posterior a su enseñanza”

Como se indicó en el parágrafo §3.2.3.3 y en la introducción de este capítulo, el cuestionario 7 (véase la Figura 3.1) tuvo el objetivo de caracterizar la comprensión de los alumnos del lenguaje algebraico de ecuaciones de primer grado, luego de la enseñanza del tema, mediante el planteamiento de cinco situaciones problémicas (o reactivos) para que identificaran en cada una la incógnita, los datos primarios y los datos secundarios, plantearan la ecuación lineal respectiva y la solucionaran. Uno de los reactivos se refirió a una situación geométrica y otro implicó una ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$ (véase también §3.2.3.3).

El cuestionario 7 se aplicó durante 40 minutos a 25 de los 35 alumnos registrados en la lista de asistencia, después de la impartición de la enseñanza por este investigador descrita en la sección 6.2. Al igual que ocurrió para la aplicación de los seis primeros cuestionarios en el aula de matemáticas, tanto el investigador como el profesor titular estuvieron presentes en la del cuestionario 7 para asegurar su contestación individual, sin distracciones ni, en lo posible, alteración de las respuestas.

Los mismos criterios de clasificación de respuestas a los cuestionarios 5 y 6 (véase el parágrafo §5.1.1.2 y el apartado 6.1.1, respectivamente) se utilizaron para identificar los resultados de la contestación de los alumnos al cuestionario 7.

6.3.1. Desempeño general en la contestación al cuestionario 7

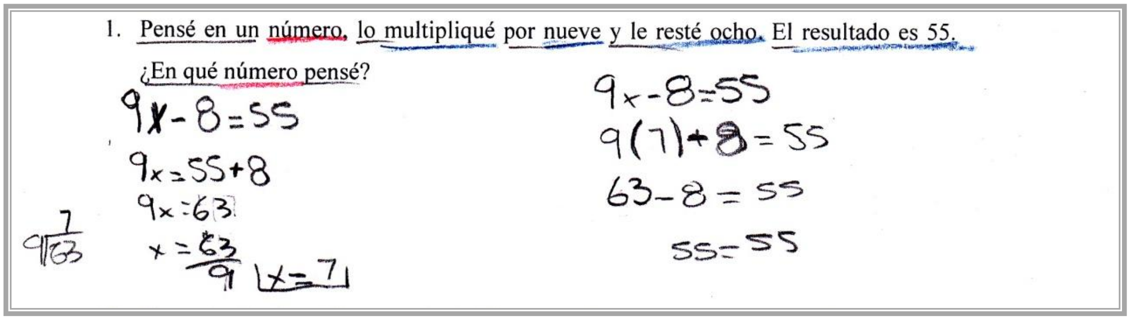
El 52% de las respuestas de los alumnos al cuestionario 7 (véase la Figura 3.1), aplicado después de haberles impartido la enseñanza de las ecuaciones lineales con la estrategia descrita en la sección 6.2, fue correcta (véase la Tabla 6.2).

Tabla 6.2. Porcentajes de tipo de respuestas recopiladas con el cuestionario 7, "ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$, después de la situación de enseñanza".

	Situaciones problémicas	Situación geométrica	$ax \pm b = cx \pm d$	Total
Reactivos	1 2 3	4	5	5
Tipo de respuesta				
Correcta (C)	74%	52%	28%	52%
Noción (N)	5%	12%	40%	19%
Incorrecta (I)	1%	0%	0%	0%
Omitida (O)	20%	36%	32%	29%

Si bien el desempeño general de los alumnos al contestar el cuestionario 7 fue mejor del que mostraron en los cuestionarios 5 y 6 (véanse las Tablas 5.1 y 6.1), persistió la dificultad al plantear referentes geométricos y situaciones que implicaran la ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$. Sin embargo, sus respuestas manifestaron el uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, lograron identificar la incógnita y los datos primarios, lo que facilitó que expresaran la ecuación correspondiente a la situación problémica planteada.

6.3.1.1. Análisis de las respuestas al cuestionario 7. La Figura 6.10 exhibe el procedimiento de un estudiante para el reactivo 1, con su identificación de la incógnita, de los datos primarios y de los secundarios, su expresión de la ecuación correspondiente y su solución mediante el despeje de la incógnita. Además, comprobó la igualdad para el valor encontrado.


1. Pensé en un número, lo multipliqué por nueve y le resté ocho. El resultado es 55. ¿En qué número pensé?

$9x-8=55$

$9x=55+8$

$9x=63$

$x=\frac{63}{9}$ $\boxed{x=7}$

$9x-8=55$

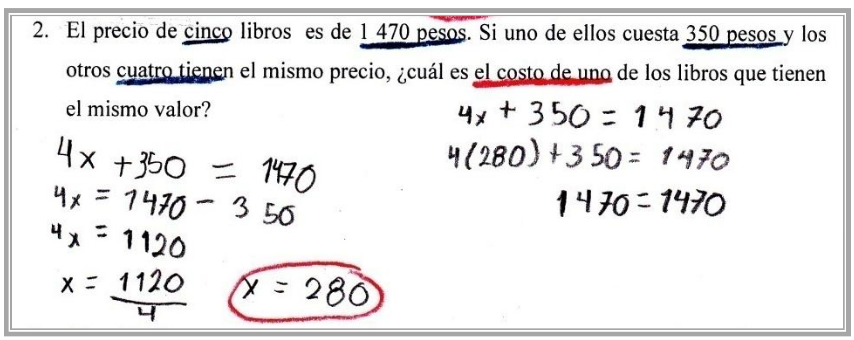
$9(7)+8=55$

$63-8=55$

$55=55$

Figura 6.10. Identificación de incógnita y de datos en la situación problémica.

La Figura 6.11 muestra el procedimiento de un alumno para el reactivo 2 que, sin identificar todas las palabras referidas a la incógnita específica (adjetivo "mismo"), fue suficiente lo que señaló para expresar la ecuación lineal respectiva. Aunque el valor encontrado es el correcto, omitió la unidad de medida correspondiente, como ocurrió con la mayoría de las respuestas de los demás alumnos.


2. El precio de cinco libros es de 1 470 pesos. Si uno de ellos cuesta 350 pesos y los otros cuatro tienen el mismo precio, ¿cuál es el costo de uno de los libros que tienen el mismo valor?

$4x+350=1470$

$4x=1470-350$

$4x=1120$

$x=\frac{1120}{4}$ $x=280$

$4x+350=1470$

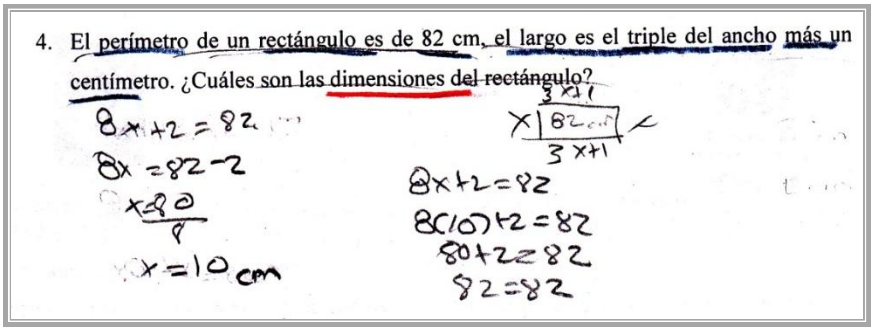
$4(280)+350=1470$

$1470=1470$

Figura 6.11. Respuesta correcta pero incompleta.

La Figura 6.12, correspondiente al reactivo 4, de alto grado de dificultad, muestra el procedimiento de un alumno que identificó los datos y recurrió al trazo de una figura para comprender el enunciado dado, plantear la ecuación respectiva y solucionarla. Sin embargo, no respondió a la pregunta planteada, por lo que su respuesta se clasificó de noción, pues se limitó a anotar el valor de la incógnita. Su comprensión del texto (enunciado escrito) fue parcial, por la tendencia cognitiva 8 que Filloy (1999) describe como la presencia de mecanismos inhibitorios, "la insistencia en no empezar a analizar un problema" (Filloy, 1999, p. 124), pues sólo especificó el valor del ancho del rectángulo. Ésta fue la única tendencia cognitiva que se presentó en este cuestionario 7, después de la aplicación de la estrategia de enseñanza.

De los 13 alumnos que contestaron este reactivo, cuatro recurrieron al modelo geométrico y tres tuvieron respuesta incompleta al no encontrar el valor de la incógnita.


4. El perímetro de un rectángulo es de 82 cm, el largo es el triple del ancho más un centímetro. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

$8x+2=82$

$8x=82-2$

$x=\frac{80}{8}$

$x=10$ cm

$3x+1$

x | 82 cm

$3x+1$

$8x+2=82$

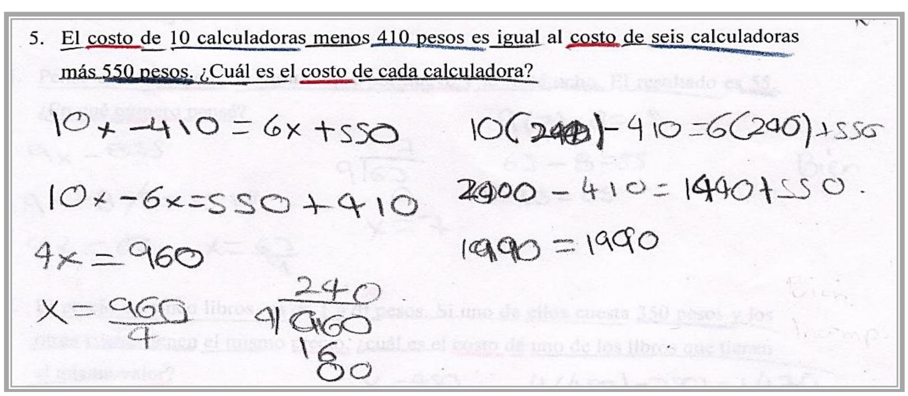
$8(10)+2=82$

$80+2=82$

$82=82$

Figura 6.12. Uso del modelo geométrico.

La Figura 6.13, correspondiente al reactivo 5, considerado también de alto grado de dificultad por la comprensión del enunciado requerida para identificar los datos, muestra el procedimiento de un alumno que identificó correctamente la incógnita, los datos primarios (omitió dos: menos y más, que subrayó como secundarios) y los datos secundarios en la situación problémica, planteó correctamente la ecuación y la solucionó agrupando los términos semejantes para despejar la incógnita; sin embargo, en su respuesta no indicó de qué unidad de medida se trataba, lo cual, como ya se señaló, fue recurrente en la contestación de los estudiantes.


5. El costo de 10 calculadoras menos 410 pesos es igual al costo de seis calculadoras más 550 pesos. ¿Cuál es el costo de cada calculadora?

$10x-410=6x+550$

$10x-6x=550+410$

$4x=960$

$x=\frac{960}{4}$

$4\overline{)960}$ = 240, 16, 00

$10(240)-410=6(240)+550$

$2400-410=1440+550$

$1990=1990$

Figura 6.13. Identificación de datos y planteamiento de la ecuación para el reactivo 5.

6.3.1.2. Estratificación del grupo. Al igual que se clasificaron los alumnos por sus respuestas al cuestionario 5, se consideró en el *estrato alto* a los que contestaron correctamente los cinco reactivos, ya fuera de forma algebraica o aritmética; en el *estrato medio* a quienes respondieron tres y cuatro reactivos correctamente; y en el *estrato bajo* a los que sólo contestaron correctamente uno y dos reactivos, o que sólo mostraron nociones de ecuaciones. La Tabla 6.3 resume los porcentajes de alumnos correspondientes a los estratos alto, medio y bajo, por sus procedimientos en el cuestionario 7, después de la aplicación de la estrategia de enseñanza.

Tabla 6.3. Estratificación del grupo por sus desempeños en el cuestionario 7 "ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$, después de la estrategia de enseñanza".

Estrato de desempeño	Número de alumnos	Porcentaje %
Alto	4	16%
Medio	14	56%
Bajo	7	28%
Total	25	100%

Aun y cuando el cuestionario 7 constó de cinco reactivos y el cuestionario 5 constó de seis, existe una diferencia notable en los porcentajes del estrato bajo con el cuestionario 5 (véase la Tabla 5.1) y con el cuestionario 7. Esto permite avanzar que la estrategia de enseñanza aplicada mejoró la comprensión de texto (enunciado escrito) identificando la incógnita específica, los datos primarios y los secundarios en las situaciones problémicas propuestas.

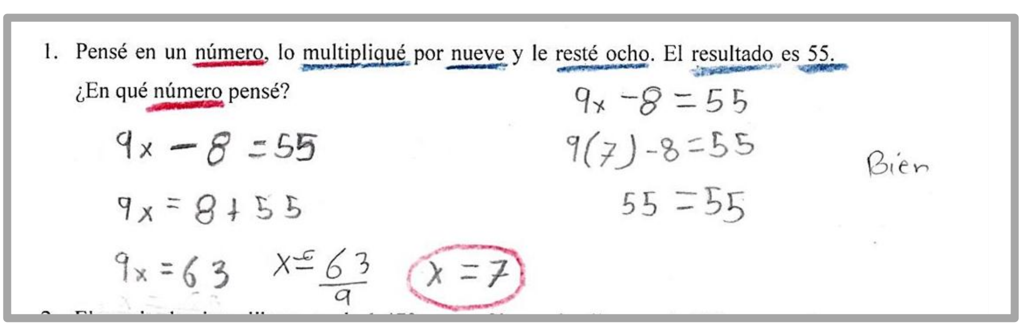
6.4. Resultados de la estrategia de enseñanza implementada

Los alumnos lograron identificar la incógnita y los datos implicados en las situaciones problémicas planteadas, lo que favoreció su expresión de las ecuaciones respectivas y sus soluciones, logrando el uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, aunque persistieron algunas dificultades de sintaxis algebraica y de atención a las unidades de medida en el tratamiento de las ecuaciones lineales. Estas situaciones problémicas, como ya se señaló, se consideraron "concretas", familiares al alumno, situaciones reales o posibles del mundo que facilitarían su comprensión. Además, para solucionar las situaciones problémicas planteadas, en la estrategia de enseñanza se tomaron en cuenta los métodos clásicos: Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) y el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS), con el propósito de que los alumnos se iniciaran en usos cada vez más abstractos y generales del SMS algebraico que se requieren para alcanzar una competencia plena en el método algebraico denominado Método Cartesiano (MC).

En la contestación del cuestionario 7, después de la aplicación de la estrategia de enseñanza, se presentaron menos dificultades que en la contestación del cuestionario 6. La identificación de datos y de la incógnita en la situación problémica contribuyó a mejorar la comprensión del texto, aunque persistió la omisión de la unidad de medida correspondiente.

Después de la estrategia de enseñanza, los alumnos identificados en el estrato bajo y en el estrato medio (véase la Tabla 6.3) lograron mejorar su comprensión del enunciado de la situación problémica (véanse las Figuras 6.14. y 6.15), ya que mediante la identificación de la incógnita, de los datos primarios y de los secundarios, consiguieron expresar la ecuación respectiva, si bien persistieron algunas dificultades en el procedimiento para solucionarla.

La Figura 6.14 presenta la respuesta de A_1, estudiante entrevistado clasificado en el estrato bajo por el cuestionario 5 (véase el apartado 5.3.2), que migró al estrato medio después de la enseñanza. A_1 mostró una mejor comprensión de texto con la identificación de la incógnita específica, los datos primarios y los datos secundarios.



1. Pensé en un número, lo multipliqué por nueve y le resté ocho. El resultado es 55.
¿En qué número pensé?

$9x - 8 = 55$

$9x = 8 + 55$

$9x = 63 \quad x = \frac{63}{9} \quad x = 7$

$9x - 8 = 55$

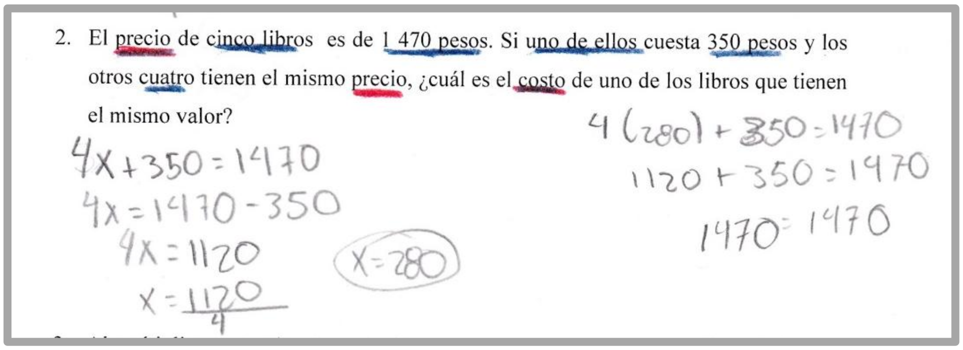
$9(7) - 8 = 55$

$55 = 55$

Bien

Figura 6.14. Respuesta de A_1, anteriormente clasificado en el estrato bajo, que migró después de la enseñanza al estrato medio.

La Figura 6.15 evidencia la respuesta de A_2, clasificado anteriormente en el estrato medio (cuestionario 5; véase el apartado 5.3.3). Aunque permaneció en este mismo estrato según su desempeño en el cuestionario 7, A_2 mostró mejoría en su comprensión de enunciados de situaciones problémicas; además, realizó la comprobación de la ecuación para verificar el valor de la incógnita encontrado.



2. El precio de cinco libros es de 1 470 pesos. Si uno de ellos cuesta 350 pesos y los otros cuatro tienen el mismo precio, ¿cuál es el costo de uno de los libros que tienen el mismo valor?

$4x+350=1470$

$4x=1470-350$

$4x=1120$

$x=\frac{1120}{4}$

$x=280$

$4(280)+350=1470$

$1120+350=1470$

$1470=1470$

*Figura 6.15.*Respuesta de A_2 del estrato medio.

Mientras, el alumno identificado en el estrato alto (A_3, entrevistado por su desempeño en el cuestionario 5; véase el apartado 5.3.4) siguió mostrando habilidad para expresar la ecuación y solucionarla, permaneciendo en estrato alto.

Capítulo 7

Conclusiones

La Aritmética y el Álgebra son dos áreas que se introducen en la escuela primaria y secundaria, respectivamente. En esos niveles educativos la Aritmética se caracteriza por la ausencia de letras, mientras que en el Álgebra, por la presencia de letras para lo “desconocido”, símbolos, signos. Durante su transición de la Aritmética al Álgebra, los alumnos enfrentan nuevos objetos y lenguajes.

Enmarcada en la propuesta teórica-metodológica de los Modelos Teóricos Locales, esta investigación se enfocó en algunas de las dificultades de comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales en primero y segundo grados de secundaria. La transición de la Aritmética al Álgebra es un proceso complejo, porque los alumnos se inician en el uso de símbolos, signos, letras; se les dificulta comprender el papel que juegan y lo que representan por la abstracción que ello requiere.

La comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales es un proceso que implica el uso del Sistema Matemático de Signos (SMS) aritméticos/algebraicos. Una de las causas que originan las dificultades para comprender el Álgebra es el escaso dominio de los alumnos de los (SMS) aritméticos, que son la base para este proceso.

Por tanto, nos abocamos a identificar la comprensión de los alumnos de primero de secundaria del concepto de número, de las operaciones aritméticas básicas y del uso del SMS con el que ponen en juego estos conocimientos, para agregar estos datos a los de las formas en que enfrentan, en el segundo grado, la solución de ecuaciones lineales y diseñar una estrategia de enseñanza del tema consecuente con los datos recopilados, así como informar de los resultados de ella en la comprensión de los alumnos del tema enseñado.

7.1. Dificultades de comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales en primer grado de secundaria

A los alumnos que participaron en esta investigación, su docente titular de matemáticas les impartió la enseñanza, tradicional —prescrita para el bloque III por el programa de estudios vigente en ese momento (SEP, 2011 a, p. 33)—, de las ecuaciones lineales de la forma $a \pm x = b, ax = b,$ y $ax \pm b = c$. El tema se impartió en el aula cuando los alumnos aún tenían dificultades con las operaciones básicas, principalmente en la resta y en la división, lo que se reveló con las respuestas que dieron los participantes en esta investigación en el cuestionario 1 "antecedentes: nociones de aritmética" (véase §4.3.1.2). Ésta es una primera dificultad para el proceso de comprensión de las ecuaciones de primer grado.

Otra de las dificultades de comprensión del lenguaje algebraico identificadas fue la ausencia de dotación de sentido a las operaciones que se requieren para utilizarlo. Es el caso de las operaciones en las ecuaciones aritméticas del cuestionario 2 (véase §4.3.2.1), "nociones de ecuaciones de primer grado": *a) 8 + ___ = 15, b) 4×___ = 36, c) 30 ÷___= 6, d) 9 +___= 0*. Los alumnos encontraron el valor desconocido en cada una de las igualdades mediante el cálculo mental sin realizar operación escrita para hallar el número. En el cuestionario 3, "generalidades de las ecuaciones aritméticas" (véase §4.3.3.1), también trataron de responder mediante el cálculo mental; sin embargo, ya no les funcionó esta estrategia porque los números implicados eran más grandes; por ejemplo: $555 + \quad = 1\,520$. Varios alumnos calcularon el número faltante por medio del tanteo, la tendencia cognitiva 7 que Filloy (1999) caracteriza como "la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución" (p. 125), pues la mayoría de ellos no encontraron el valor deseado por algún error aritmético que cometieron.

El conocimiento previo imprescindible de los alumnos que se inician en el Álgebra es la Aritmética básica; sin embargo, aunque esto se cumpla no precisamente indica que un sujeto pueda dominar el Álgebra básica, ya que en esta transición surgen otras dificultades, como el uso de las letras en las ecuaciones. Esto se debe a que no le dan sentido a las letras o variables. En el cuestionario 2, "antecedentes: nociones de aritmética", se incluyó un reactivo en el que las letras denotaban dimensiones para cálculo de áreas y perímetros; los alumnos las trataron como etiquetas con un solo rol (número general). Este mecanismo se exhibió cuando comenzaron con el uso de las letras en las ecuaciones de primer grado; al encontrarse con las variables, desconocieron el rol que tenían las letras, por lo que se les dificultó usarlas. El cálculo mental fue una estrategia que usaron para encontrar el valor de la incógnita en las generalidades de las ecuaciones algebraicas aun teniendo nociones del despeje de la incógnita, lo que se evidenció en los resultados del cuestionario 4 (véase §4.3.4.1). Además, los alumnos, exhibieron dificultades de comprensión de texto (escrito en lengua natural y signos numéricos) para solucionar situaciones problémicas. Las tendencias cognitivas que se identificaron en la aplicación de los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 en el primer grado de secundaria fueron: la tendencia cognitiva 7: “la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución” y la tendencia cognitiva 8: “la presencia de mecanismos inhibitorios” (Filloy, 1999, p. 125).

7.2. Antecedentes y enseñanza de las ecuaciones lineales en segundo grado de secundaria

Del grupo de segundo grado participante en la investigación, 17 alumnos también pertenecieron al grupo participante de primer grado.

En el cuestionario 5, “representación de las ecuaciones de la forma $a \pm x = b$ implicadas en situaciones problémicas” (véase el apartado 5.1.1), los estudiantes del segundo grado optaron por contestar aritméticamente en lugar de representar la ecuación y solucionarla algebraicamente por medio del despeje de la incógnita, como se les indicó cuando se les distribuyó el cuestionario. Para solucionar las situaciones problémicas propuestas en sus reactivos, una de las principales dificultades que se presentó fue la comprensión de texto (enunciado escrito del problema; véase el apartado 5.1.1). Esto pudo deberse a la falta de atención de los alumnos en la lectura de los textos (lengua escrita); leyeron una vez el enunciado de la “situación problémica” y no lograron identificar lo que tenían que hacer para solucionarla, por lo que realizaron una operación incorrecta.

7.2.1. Estratos de desempeño previos a la enseñanza de ecuaciones lineales

Con base en las respuestas que dieron los alumnos en el cuestionario 5 (véase §5.1.1.4) se clasificó al grupo en estratos de desempeño: alto, medio y bajo (véase la Tabla 5.2). Sólo a tres estudiantes, de los 32 respondientes, se les ubicó en el estrato de desempeño alto, ya que sus respuestas fueron correctas en los seis reactivos propuestos, aunque sus procedimientos no necesariamente fueron algebraicos para solucionar las situaciones problémicas. A 22 de los 32 estudiantes se les clasificó en el estrato de desempeño bajo, ya que sólo tuvieron 1 o 2 reactivos correctos, además de que sus procedimientos fueron exclusivamente aritméticos. Sólo cinco alumnos, de los 20 que contestaron correctamente y mostraron noción en las ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$, manifestaron familiarización con el Sistema Matemático de Signos algebraicos, pues el resto procedió de forma aritmética. Posteriormente, se entrevistó a un estudiante de cada estrato de desempeño para clarificar sus respuestas concernientes a las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$ implicadas en las dos primeras situaciones problémicas planteadas en el cuestionario 5. El alumno A_1, del estrato del bajo (véase apartado 5.3.2), evidenció su insistencia en no empezar a analizar un problema, lo que Filloy (1999) señala como la tendencia cognitiva 8: “la presencia de mecanismos inhibitorios” (p. 125). A_2, el alumno entrevistado del estrato medio (véase apartado 5.3.3), evidenció su dificultad para expresar la incógnita y la ecuación para la situación problémica que se le presentó, lo que Filloy señala como tendencia la cognitiva 9: “la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa” (1999, p. 125). Otra dificultad se debió al uso incorrecto de conceptos y operaciones, que Filloy incluye en la tendencia cognitiva 6: “la articulación de generalizaciones erróneas” (1999, p. 124). Finalmente, A_3, el alumno entrevistado del estrato alto (véase el apartado 5.3.4), evidenció también la tendencia cognitiva 6 al usar incorrectamente conceptos y operaciones.

Después de las entrevistas (antes de la aplicación del cuestionario 6), se resumieron los diferentes usos y dificultades que presentaron los alumnos. Sólo el estudiante ubicado en el estrato alto hizo uso de los SMS algebraicos y se evidenciaron las tendencias cognitivas del resto de los participantes que dificultarían su transición de la Aritmética al Álgebra.

7.2.2. Condiciones iniciales y enseñanza de las ecuaciones lineales

Previamente a la enseñanza se aplicó el cuestionario 6 para identificar dificultades en estas ecuaciones (véanse la Figura 3.1 y la sección 6.1). A los reactivos de este instrumento el 51% de los estudiantes respondieron de forma aritmética y algunos de ellos no mostraron procedimiento alguno, lo cual pudo haberse debido al cálculo mental para hallar el valor de la incógnita. En las contestaciones recopiladas identificamos las siguientes tendencias cognitivas (Filloy, 1999; véase aquí §2.2.1.2): 2. La dotación de sentidos intermedios; 6. La articulación de generalizaciones erróneas; 7. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de solución; y 8. La presencia de mecanismos inhibitorios.

Estos datos y los recopilados con los cuestionarios 1, 2, 3, 4 y 5, orientaron la estrategia de enseñanza que el investigador puso en juego con este grupo, en presencia de su docente titular. La enseñanza se basó en la solución de situaciones problémicas, consideradas familiares al alumno. El enfoque consideró la propuesta de Polya (1945) para resolver un problema (etapa I, comprensión del problema; etapa II, concepción de un plan y etapa III, ejecución del plan). Se aplicaron el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS) para resolver problemas de Aritmética y el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) (Filloy, 1999, véanse en §2.2.1.2) para la iniciación al Álgebra por medio de la lectura del enunciado del problema para identificar lo desconocido, concretamente para identificar los datos primarios, los datos secundarios y la incógnita específica en cada situación problémica propuesta. Este planteamiento de la enseñanza supone una preparación para la posterior introducción de los alumnos al Método Cartesiano (MC), la cual ya no se puso en práctica porque rebasaba los objetivos propuestos con la investigación.

7.2.3. Resultados de la enseñanza: estratificación

Una semana después de finalizada la enseñanza, se aplicó al grupo el cuestionario 7 (véase el apartado 6.3.1). Resultó que más de la mitad de los alumnos (52 %, 13 alumnos) respondió correctamente a las situaciones problémicas planteadas; en sus procedimientos usaron los SMS aritméticos/algebraicos.

Con base en el desempeño del grupo en ese instrumento, se clasificó nuevamente a los alumnos por estratos (véase la Tabla 6.3); 72 % de los alumnos (18 de 25 alumnos) se clasificaron en los estratos de desempeño medio o alto, mientras que en la clasificación anterior a la enseñanza (véase Tabla 5.2), sólo el 31 % (10 de 32 alumnos) se ubicó en esos estratos. Los alumnos A_1 y A_2 entrevistados antes de la enseñanza, de los estratos de desempeño bajo y medio, respectivamente, mejoraron sus procedimientos. A_1 logró identificar los datos primarios, datos secundarios y la incógnita específica, consiguió escribir la ecuación correspondiente y la solucionó despejando la incógnita haciendo uso de los SMS aritméticos/algebraicos (véase §6.3.1.3), por lo que se puede concluir que mejoró su comprensión de texto y migró al estrato de desempeño medio después de la enseñanza. A_3, el alumno entrevistado del estrato alto, permaneció en él.

7.2.4. El papel de las situaciones problémicas en la enseñanza

De acuerdo al análisis de los cuestionarios aplicados y a la estrategia de enseñanza implementada, la solución de situaciones problémicas planteadas en lengua natural escrita, aunada al marcaje (subrayado diferenciado) en el enunciado de lo correspondiente a la incógnita y a los datos, contribuyó a que los alumnos se iniciaran en el uso del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado, pues pusieron en acción diferentes procesos para llevar a cabo formas de pensamiento matemático; la percepción, la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión, el uso de la memoria, y las concepciones heurísticas (procesos para hallar el valor de la incógnita).

Las situaciones problémicas planteadas, familiares al alumno, constituyeron referentes más concretos para que diera sentido a las letras, signos y símbolos numéricos en la ecuación lineal implicada, la cual expresó y solucionó a partir del nivel sintáctico basado en el modelo sintáctico-viético (transposición de términos de un miembro a otro). Este "proceso de abstracción de operaciones" (Filloy, 1999) le permitió el primer acercamiento semántico al Álgebra modelando nuevos objetos y operaciones.

En general, se podría afirmar que ante un texto escrito, los alumnos sólo buscan identificar los signos o las palabras clave que les indiquen lo que tienen que hacer; ni siquiera se podría asegurar que leen el texto completo al menos una vez si se sobreentiende que la tarea a realizar es de matemáticas, no de español, de literatura o de alguna otra disciplina. Pero el requerimiento de marcar en el enunciado mismo de la situación problémica lo relevante para esa tarea lo obliga al menos a leerlo completo con detenimiento y no sólo a sondearlo.

7.2.5. Tendencias cognitivas en la comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales en primero y segundo grados de secundaria

Con base en los resultados de los cuestionarios aplicados en primero (1, 2, 3 y 4; véase el Capítulo 4) y en segundo (5, 6 y 7; véanse los Capítulos 5 y 6) grados de secundaria, se identificaron tendencias cognitivas (Filloy, 1999, p. 123) que, como ya señalamos, dificultan la transición de la Aritmética al Álgebra, dificultan la comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales. La Tabla 7.1 resume las tendencias que se identificaron en las respuestas proporcionadas en cada cuestionario.

Tabla 7.1. Tendencias cognitivas identificadas relativas a la comprensión de los alumnos del lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales en los grados primero y segundo de secundaria.

Tendencias cognitivas	**Cuestionarios**						
	Primer grado				Segundo grado		
	1	2	3	4	5	6	7
2. Dotación de sentidos intermedios							
3. Retorno a situaciones más concretas cuando se presenta una situación de análisis							
6. Articulación de generalizaciones erróneas							
7. Mecanismos apelativos que desencadenan procesos erróneos de resolución							
8. Mecanismos inhibitorios							
9. Obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa							

La estrategia de enseñanza que se puso en práctica con los alumnos de segundo grado de secundaria aspiró a que remontaran algunas de las dificultades identificadas. Como ya señalamos, una semana después de esa enseñanza se aplicó el cuestionario 7, en el que se manifestó sólo una tendencia cognitiva, distinta a las tres que se manifestaron en el cuestionario 6 precedente, esto pudo haberse debido a la falta de atención a la situación problémica o bien la falta de comprensión de texto (véanse los reactivos respectivos en §3.2.3.2. y §3.2.3.3).

7.3. Alcances y limitaciones de la investigación

Las dificultades para la investigación que suponen el ajuste a los tiempos institucionales y la falta de titularidad del investigador como docente para intervenir en el aula con la aplicación de cuestionarios, la enseñanza regida por la estrategia que diseñó y la realización de entrevistas en el segundo grado, se pudieron remontar con un Acuerdo Académico Colegiado por dos años entre la Escuela Secundaria que alojó a la investigación y el Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. No obstante, no fue posible efectuar el seguimiento de todo un grupo de alumnos en su primer grado y luego en el segundo grado de secundaria, sino sólo con la mitad del grupo, si bien se pudo concretar la puesta en práctica del esquema de investigación completo que nos propusimos. Durante la aplicación de los cuestionarios, algunos alumnos (tres de 35) mostraron su apatía para contestarlos y no proporcionaron datos relativos a nuestras preguntas de investigación; siete alumnos no asistieron cuando se aplicó el cuestionario 7, posterior a la aplicación de la estrategia de enseñanza.

Empero, se cumplieron los objetivos que se plantearon en esta investigación (véase la sección 1.4). El principal fue diseñar y aplicar una estrategia de enseñanza que posibilitara remontar algunas de las dificultades de los alumnos de primero y segundo grados de secundaria, identificadas en sus respuestas a los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 en el primero y a los cuestionarios 5 y 6 en el segundo. Las dificultades fueron la falta de uso del SMS aritméticos para introducirse al lenguaje algebraico, la incomprensión de texto, la insistencia en no empezar a analizar un problema (Filloy, 1999, p. 125), el uso del tanteo, el uso incorrecto de conceptos y operaciones aritméticas. Estas dificultades obstaculizan la transición de la Aritmética al Álgebra, por lo que se recomendaría a la docencia la promoción de la comprensión lectora de los alumnos siempre que sea posible, pero particularmente para la solución de problemas verbales. En nuestra investigación, con la implementación de la estrategia de enseñanza se pudieron remontar algunas de estas dificultades, si bien se requiere profundizar sobre el proceso de traducción de un enunciado en lengua natural escrita al lenguaje algebraico.

Referencias bibliográficas

Arriaga, A., Benítez, M. y, Cortés, M. (2008). *Matemáticas 1. Inducción a las competencias*. México: Pearson Educación.

Bonilla, M. (2008). *Del lenguaje natural al lenguaje simbólico: un estudio con alumnos de secundaria en la resolución de problemas verbales*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Booth, L. (1984). Algebra: *Children's Strategies and errors*. NFER-Nelson,Wingsor.

Casarrubias, A. (2009). *Complemento matemático 2. Cuaderno de trabajo*. México: Punto Fijo Ediciones.

Córdoba, J. (2005). *Uso didáctico de errores de sintaxis para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamérica.

Filloy, E y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L' educazione matemática 5* (3), pp 278-306.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. USA: Kluwer Academic Publishers.

Huesca, M. (2007). *Resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos con el uso del CAS (Computer Algebra Systems) como manipulador simbólico. Estudio clínico sobre la relación sintaxis-semántica algebraicas.* Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Kieran, C. (1998). Models in Mathematics Education Research: a broader view of research results. En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (eds) *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity*. Inglaterra: Kluwer Academic Press.

Pérez, A (2014). *De la suma aritmética a la suma algebraica, en alumnos de 1º de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Rojano, T. (1993). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, Universidad Autónoma de Barcelona.

Rosáinz, V. (2005). *Tres modelos de enseñanza: obstructores que generan errores en la resolución de problemas que utilizan sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en telesecundaria.* Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

SEP, (2011 a). *Educación básica. Secundaria. Programas de Estudio*. México: Conaliteg.

SEP, (2011 b). *Educación básica. Primaria, sexto grado. Programas de estudio*. México: Conaliteg.

Solares, A. (2007). *Sistema Matemático de Signos y distintos niveles de representación de la incógnita*. Tesis de doctorado no publicado. DME, Cinvestav-IPN. México

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M., (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Apéndice

SEP SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA 90 años 1921 - 2011

Cinvestav
Departamento de Matemática Educativa
Área *Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas*

Acuerdo Académico Colegiado

para el Desarrollo del Seminario

Procesos cognitivos asociados al Pensamiento Algebraico de estudiantes que cursan el primer grado de educación secundaria

ACUERDO ACADÉMICO COLEGIADO PARA

EL DESARROLLO DEL SEMINARIO

Procesos cognitivos asociados al Pensamiento Algebraico de estudiantes que cursan el primer grado de educación secundaria.

Recibí Original

La coordinación del área de concentración para la investigación en Matemática Educativa "*Ciencias de la cognición y Tecnología de la Información Aplicadas*" del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN y la Escuela Secundaria Diurna No. 103 "República Mexicana", turno matutino, acuerdan abrir espacios conjuntos para la reflexión, el análisis *y la construcción de alternativas en torno a problemas relacionados con el pensamiento algebraico de estudiantes* que cursan el primer grado de la educación secundaria.

Nombre del Seminario de Vinculación:

Asimilación del lenguaje algebraico en ecuaciones de primer grado

Objetivo General del Seminario:

Indagar y analizar problemas relativos a los procesos de la **asimilación** del **lenguaje algebraico** de estudiantes que cursan el primer grado en el ciclo de Educación Secundaria, mediante el desarrollo de proyectos de investigación y de Indagación de las Matemáticas.

Compromisos de las instancias académicas:

1. Apoyar la creación y el desarrollo del Seminario de indagación e investigación para orientar investigaciones *en curso* relacionadas con procesos de adquisición de conocimiento matemático de estudiantes que cursan el primer grado de "Educación Secundaria".
2. Acordar sobre los procedimientos logísticos para la operación de las actividades pertinentes al desarrollo de los procesos de indagación y de investigación propuestos.
3. Reconocer que los integrantes del Seminario serán Docentes e Investigadores de ambas instancias académicas bajo el compromiso expreso de participación en las actividades propias de él.
4. Elaborar de manera conjunta un Reporte Técnico *anual* del desarrollo del Seminario.
5. Apoyar la realización de las actividades del Seminario:
   - Reconociendo el quehacer de sus miembros como parte integrante de sus labores institucionales;
   - Proporcionando los requerimientos académicos para dar seguimiento al desarrollo de *indagaciones y de investigaciones en curso;*
   - Permitiendo administrativamente el desarrollo de las tareas del Seminario de cada instancia, sin que ello implique necesariamente generar partidas especiales;
   - Proporcionando vías expeditas para el intercambio de fuentes de información pertinentes a la realización de las actividades del Seminario;
   - Admitiendo el compromiso declarado de sus miembros a reportar los resultados de indagaciones y/o de investigaciones realizadas por ellos de manera conjunta

en artículos, que se presentarán en foros nacionales o internacionales relativos a las temáticas estudiadas en el seminario;

- Utilizando los logos institucionales para la presentación y el desarrollo de las actividades del seminario;

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 3 de mayo de 2012.
Firman el acuerdo las partes responsables de cada Institución:

p. a

Profesora Honoria Luz Olguín
Directora de la Escuela Secundaria Diurna No. 103 "República Mexicana", turno matutino clave 09DES0103D

M. en C. Ignacio Garnica Dovala
Coordinador de Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas

Vo. Bo

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Jefe del Departamento de Matemática Educativa

Participantes:

Cinvestav
Ponciano Hernández Hernández
Estudiante de Posgrado en Matemática Educativa

Anexos

Cuestionario 1. Antecedentes “nociones de aritmética”

Nombre: ____ Grupo: ______________
Fecha: __________________________________ Edad:__________________________

1. Ubica en la recta numérica 3 números enteros positivos (escríbelos con azul), 3 números enteros negativos (escríbelos con rojo) y tres números naturales (escríbelos con verde):

2. En el siguiente problema menciona; ¿Qué operaciones se tienen que realizar para resolverlo y qué conjunto de números están implicados? La mamá de Jacqueline va al supermercado y compró los siguientes productos:

   $3\frac{1}{2}$ kg de azúcar, 1.5 kg de aguacate, $\frac{1}{4}$ kg de queso panela, 2 kg de manzana y 0.5 kg de tortillas.

   El kg de azúcar tiene un costo de 22.50 pesos, el kg de aguacate cuesta 30 pesos, el kg de queso panela cuesta 70 pesos, el kg de manzana tiene un costo de 26.50 pesos y el kg de tortillas cuesta 13 pesos. ¿Cuánto tiene que pagar la señora por los productos comprados? Si pagó con un billete de 500 pesos ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es el peso total de los productos comprados?

3. Cierto mes del año la temperatura en la Cd. de México es de 6 °C grados mientras que en Toluca Estado de México es de □ 2 °C. Representa en una recta numérica la temperatura de dichas ciudades.

Cuestionario 2: antecedentes “nociones de ecuaciones de primer grado”

Cinvestav
Matemática
Educativa

Nombre: ____ Grupo: ______________
Fecha: ____________________________________ Edad:___________________________

1. ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro de un hexágono regular? Dibuja un hexágono regular, inventa la medida de los lados, utilizando la fórmula calcula el perímetro.

2. Encuentra el número que falta en las siguientes ecuaciones aritméticas:

   a) $8 + \quad = 15$, b) $4 \times \quad = 36$, c) $30 \div \quad = 6$, d) $9 + \quad = 0$.

3. Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones algebraicas:

   a) $\mathbf{x} + 4 = 13$, b) $7 + \mathbf{x} = 12$, c) $4\mathbf{x} + 2 = 22$, d) $6 - \mathbf{x} = 0$.

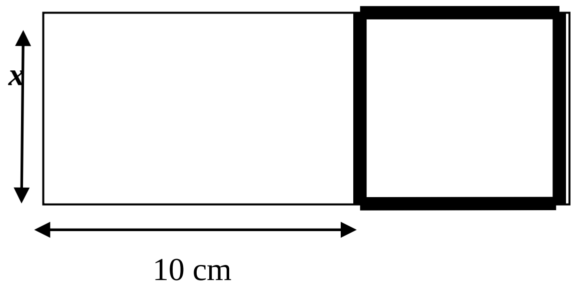
4. 4.- a) Por dos libros y una mochila pagué 400 pesos. Considerando que la mochila tiene un costo de 180 pesos. ¿Cuál es el precio de cada libro?

5. 4.- b) La base de un rectángulo es el triple que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones, si el perímetro mide 24 cm? (Dibújalo).

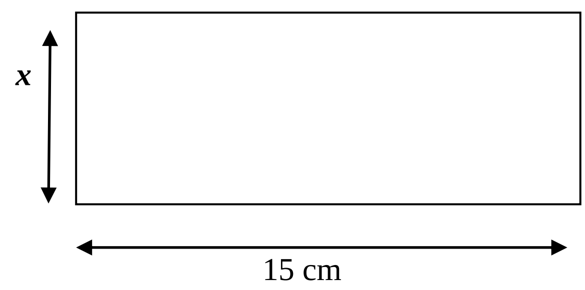
6. 4.- c) Por 5 plumas y un lápiz se pagaron 65 pesos. Considerando que el costo de las plumas es el mismo y el lápiz cuesta 5 pesos, ¿cuál es el costo de cada pluma?

7. .- Encuentra el valor de x en las siguientes figuras geométricas.
El área de ambos rectángulos es igual: 60 centímetros cuadrados.

Rectángulo 1



Rectángulo 2



Cuestionario 3: generalidades de las ecuaciones aritméticas “uso del ensayo y error”.

Cinvestav
Matemática
Educativa

Nombre: ____ Grupo: ______________
Fecha: ____________________________________ Edad:_____________________________

Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes igualdades. (Escribe el procedimiento)

a) $\square + 528 = 2025$

b) $\square$ □ $2\,234 = 1\,245$

c) $529 \div \square = 23$

d) $\square \times 7 = 385$

e) 589 □ $\square = 493$

f) $9 \times \square = 1\,269$

g) $\square \div 25 = 29$

h) $555 + \square = 1\,520$

i) $321 \times \square = 1\,605$

j) $\square \div 20 = 50$

Cuestionario 4: generalidades de las ecuaciones algebraicas y solución de situaciones problémicas.

Cinvestav
Matemática
Educativa

Nombre: ____ Grupo: ______________
Fecha: __________________________________ Edad:__________________________

1. Encuentra el valor de la incógnita

   1. $198 + x = 1225$,
   2. $100 - x = 0$,
   3. $x \div 34 = 23$,
   4. $36 + x = 756$.

   5. a) En un bosque hay 46 hileras de árboles. Si en todo el bosque hay 1564, suponiendo que en cada hilera existen el mismo número de árboles, ¿cuántos árboles habrá en cada hilera?

   6. b) Después del aumento de 95 pesos, por la cuota mensual en el gimnasio se paga 345 pesos. ¿Cuál era la cuota mensual anteriormente?

Cuestionario 5: “Representación de ecuaciones en las situaciones problémicas de ecuaciones de la forma $a \pm x = b$ y $ax = b$”

Cinvestav
Matemática
Educativa

Nombre: ____ Grupo: ______________
Fecha: __________________________________ Edad:__________________________

Resuelve y comprueba cada una de las siguientes situaciones:

1. Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿qué distancia recorrió en la primera etapa?

2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿cuánto costó la calculadora?

3. Mi hermano me depositó 2 450 pesos. Si el saldo actual es de 6 325 pesos, ¿cuál era el saldo anterior?

4. Carla fue a un restaurante con su amiga. Pidió la cuenta, la cual era de 250.50 pesos más un impuesto de 37.575 pesos. Si pagó con un billete de 500 pesos, ¿cuánto le dieron de cambio?

5. El perímetro de un heptágono regular es de 45.5 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?

6. El precio de 6 computadoras es de 82 800 pesos. ¿Cuánto cuesta cada computadora considerando que tienen el mismo precio?

Cuestionario 6 “Diagnóstico para la situación de enseñanza de las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$ y $ax \pm b = cx \pm d$"”.

Cinvestav
Matemática
Educativa

Nombre: ____ Grupo: _____________
Fecha: _________________________________ Edad:__________________________

Lee atentamente cada problema, escribe la ecuación que le corresponda, encuentra el valor de la incógnita y comprueba el resultado. Anota las operaciones que realices en esta hoja.

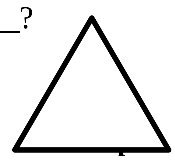
1. Mi padre tiene el cuádruplo de mi edad menos ocho años. Si mi padre tiene 68, ¿cuál es mi edad?

2. Pensé en un número, lo multipliqué por cinco y le resté seis. Si el resultado es 34, ¿en qué número pensé?

3. La suma de las edades de tres hermanos es de 59 años. Si el mayor tiene 23 años y sus hermanas son gemelas, ¿cuántos años tiene cada hermana?

4. El costo de tres boletos de entrada al cine menos diez pesos es igual al costo de dos boletos más treinta y dos pesos. ¿Cuál es el costo de cada boleto de entrada al cine?

5. Perímetro: 32 cm. ¿l = _________?



l

8 cm

6. $13x - 4 = 48$. ¿ $x =$ _______?

Cuestionario 7 “comprensión de las ecuaciones lineales de la forma $ax \pm b = c$ y $ax \pm b = cx \pm d$"posterior a la situación de enseñanza”.

Cinvestav
Matemática
Educativa

Nombre: ____ Grupo: ______________
Fecha: __________________________________ Edad:__________________________

Lee atentamente cada una de las situaciones problémicas, identifica la incógnita (subráyala con rojo), los datos primarios (subráyalos con azul), los datos secundarios (subráyalos con gris), escribe la ecuación que corresponda, comprueba el resultado y anota todas las operaciones que realices en esta hoja.

1. Pensé en un número, lo multipliqué por nueve y le resté ocho. El resultado es 55. ¿En qué número pensé?

2. El precio de cinco libros es de 1 470 pesos. Si uno de ellos cuesta 350 pesos y los otros cuatro tienen el mismo precio, ¿cuál es el costo de uno de los libros que tienen el mismo valor?

3. Al multiplicar por ocho el precio de una pluma y sumarle siete se obtiene 127. ¿Cuál es el precio de cada pluma?

4. El perímetro de un rectángulo es de 82 cm, el largo es el triple del ancho más un centímetro. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

5. El costo de 10 calculadoras menos 410 pesos es igual al costo de seis calculadoras más 550 pesos. ¿Cuál es el costo de cada calculadora?

Estrategia de enseñanza

Nombre: ____ Grupo: ______________
Fecha: _________________________________ Edad:_________________________

Lee atentamente cada una de las situaciones problémicas, identifica la incógnita (subráyalo con rojo), los datos primarios (subráyalo con azul), los datos secundarios (subráyalo con gris), escribe la ecuación que corresponda, comprueba el resultado y anota todas las operaciones que realices en esta hoja.

1. Pensé en un número, lo multipliqué por ocho y le sumé siete. El resultado es 79. ¿En qué número pensé?

2. Mi hermano tiene el triple de mi edad menos 12 años. Mi hermano tiene 30 años. ¿Cuál es mi edad?

3. El precio de tres libros es de 670 pesos. Sabiendo que uno de ellos cuesta 150 pesos y los otros dos tienen el mismo precio, ¿cuál es el costo del libro que tienen el mismo valor?

4. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, el lado desigual mide 12 cm. ¿Cuál es la medida de los lados iguales?

5. Al multiplicar por seis la edad de Daniel y sumarle seis se obtiene 108. ¿Cuál es la edad de Daniel?

6. Jacqueline sabe que si multiplica el tiempo de traslado por cuatro y al producto le suma 12 resulta la cantidad a pagar al taxista. Pagó 72 pesos. ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a su destino?

7. Alice compró nueve lápices, pagó con un billete de 100 pesos y le devolvieron 28 pesos. ¿Cuál es el costo de cada lápiz?

8. El perímetro de un rectángulo es de 34 cm, el largo es el doble que el ancho menos siete centímetros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

9. El costo de seis plumas más 12 pesos es igual al costo de cuatro plumas más 20 pesos. ¿Cuál es el costo de cada pluma?

10. El costo de 10 calculadoras menos 410 pesos es igual al costo de seis calculadoras más 550 pesos. ¿Cuál es el costo de cada calculadora?