



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Programa de
Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina

**“Seguimiento óptimo de trayectorias
con un cuadricóptero”**

TESIS

Que presenta

ORLANDO GARCÍA PÉREZ

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En

Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina

Directores de la Tesis:

Dr. Sergio Salazar Cruz

Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez

México, D.F.

Marzo 2015

Agradecimientos

Inicialmente quiero agradecer a mis padres por todo su apoyo recibido, no sólo para este proyecto sino por cada etapa de mi vida, a mis hermanas, Ofelia, Flor, Elena, Brigida, Blanca Rosa, porque me han apoyado siempre en cada proyecto educativo y sin ellos nada de esto sería posible.

A todos mis compañeros de la maestría, su ayuda fue muy importante, a mis amigos Donovan Flores, Irving Rosales, Alan Solís, Jorge Hernández, gracias, porque a pesar de lo difícil que fue este proyecto, todos estuvimos dispuestos a ayudar, por sus consejos, por todo lo que me enseñaron. Gracias también a mis amigos de siempre, Eduardo Cortés, Christian Hernández, Silvia Clemente, por todos esos momentos compartidos, son grandes personas en mi vida.

No puedo omitir el apoyo que tuve de todos mis alumnos, fueron una parte importante en mi vida, ustedes fueron un motivo muy grande para continuar con mi formación profesional, aprendí mucho de ustedes, y en general a todos los profesores del Telebachillerato “Morgadal” por haberme dado la oportunidad de mi vida. También quiero agradecer al profesor Hugo Montero Tejeda por todo el conocimiento educativo y de vida compartido, y a mis compañeras de trabajo, las profesoras Guadalupe y Lizbeth, que me apoyaron en todo momento.

A mis asesores de tesis, el Dr. Sergio Salazar Cruz y el Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez, gracias por todo lo que me enseñaron, gracias porque mis conocimientos en esta área eran escasos pero siempre tuve ese apoyo incondicional desde el inicio de este proyecto.

A mis sinodales, por todas sus aportaciones a esta tesis.

Gracias al CONACYT por la beca otorgada, fue el pilar económico durante todo este

proyecto.

Gracias al CINVESTAV, por todo el apoyo recibido.

Resumen

En la última década las investigaciones de vehículos aéreos no tripulados han ido en aumento tal es el caso de los cuadrirotos. El cuadrirotor es un vehículo ágil, el cual, está dotado de cuatro rotores que le permiten moverse en distintos ángulos y posiciones, características que lo hacen idóneo para propósitos de, búsqueda y rescate, vigilancia, inspección de terrenos peligrosos etc.

Para operar de manera autónoma existen diversas técnicas de control que permiten estabilizar el vehículo en orientación y/o posición, aquí se aborda el problema del control óptimo, el cual se sintetiza utilizando el enfoque de programación dinámica. Se obtienen controladores de horizonte finito y de horizonte infinito, cuyos resultados permiten analizar el consumo de energía del vehículo durante el vuelo. El control debe ser capaz de seguir una trayectoria previamente calculada la cual permitirá evadir un obstáculo semicircular, así de ese modo el control generará una trayectoria óptima en el sentido de consumo energético.

Los controles obtenidos se aplicaron sólo a los ejes x , y involucrados en el seguimiento, la altura se mantenía constante. Para estimar la posición del vehículo se utilizó el sistema de visión *Optitrack Flex 3*. Para el controlador óptimo de horizonte finito, éste control fue calculado desde una computadora y enviado a través del dispositivo serial *Xbee Pro S1*, este mismo procedimiento se aplicó al PID que sirvió para establecer un comparativo contra las estrategias óptimas, mientras que para el control de horizonte infinito, todo el control se embarcó en la plataforma. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios para los controladores sintetizados.

Abstract

In the last decade, the recent research in UAVs has been increasing considerably as in the case of quadrotors. The quadrotor is an agile vehicle, which is equipped with four rotors allowing to move at different angles and positions; these are characteristics that make it ideal for some purposes such as search and rescue, surveillance, inspection of dangerous terrain etc.

There are various control techniques for autonomous operation that allow the stabilization of the vehicle in its orientation and/or position, here the problem of optimal control is approached, which is synthesized using the dynamic programming approach. A couple of control strategies considering finite horizon and an infinite horizon are obtained; the results allow the analysis of the energy consumption of the vehicle during flight. This controls must be able to follow a previously computed trajectory which will allow avoiding a semicircular obstacle and thereby generating an optimal control trajectory in the sense of energy.

The controls obtained are applied only to the axes (x, y) involved in the tracking task, while the altitude z remains constant. The vision system Optitrack Flex 3 was used, to calculate the control the finite horizon optimal control, and it was sent via the serial device Xbee Pro S1. The same procedure was applied to the PID that was used to establish a comparison with the optimal strategies to drive the vehicle position, while for the infinite horizon control all control was embedded on the platform. The results were satisfactory for the synthesized controller.

Índice

Agradecimientos	iii
Resumen	v
Abstract	vi
Índice	vii
1 Introducción	1
1.1 Introducción general	1
1.2 Objetivo General	3
1.2.1 Objetivos Particulares	3
1.3 Justificación	3
1.4 Alcances y limitaciones	4
1.5 Revisión bibliográfica	5
2 Expectativas del control	9
2.1 Introducción	9
2.2 Modelado del cuadricóptero	10
2.3 Programación dinámica: Horizonte infinito	13
2.4 Problema del regulador lineal de horizonte finito: Caso discreto	18
2.5 Problema del regulador lineal de horizonte finito: Caso Continuo	23
2.6 Control óptimo lineal para el cuadricóptero de horizonte Finito: Caso discreto	26

2.6.1	Subsistema Z	27
2.6.2	Subsistema ψ	28
2.6.3	Subsistema $y - \phi$	30
2.6.4	Subsistema $x - \theta$	32
2.7	Control óptimo para el cuadricóptero de horizonte infinito: Caso discreto . .	33
2.7.1	Control óptimo del subsistema z	34
2.7.2	Control óptimo del subsistema ψ	35
2.7.3	Control óptimo del subsistema $y - \phi$	36
2.7.4	Control óptimo del subsistema $x - \theta$	38
2.8	Controlador PID	39
2.8.1	Implementación Digital del PID	40
2.8.2	Aplicación de un controlador PID en el seguimiento de una trayectoria	41
2.9	Conclusiones	47
3	Descripción de la plataforma	49
3.1	Introducción	49
3.2	Sistema de visión optiTrack Flex 3	50
3.2.1	Procesamiento de imágenes en el Flex 3	51
3.2.2	Control de Cámaras	53
3.2.3	Conmutación de filtro	54
3.2.4	Lentes intercambiables M12	54
3.2.5	Diseño compacto para un bajo perfil de integración	54
3.2.6	Modo de luz estroboscópica de alta potencia	55
3.2.7	Compatibilidad con versiones V100 y V100:R2	56
3.3	La plataforma experimental	56
3.3.1	Controladores de velocidad	57
3.3.2	Central inercial 3DM-GX3	58
3.3.3	Sistema de comunicación XBee Pro S1	61
3.4	Microprocesador RabbitCore RCM4300	63

3.5	Conclusiones	67
4	Resultados de simulación y experimentales	69
4.1	Introducción	69
4.2	Resultados del controlador PID	69
4.3	Resultados del control óptimo	74
4.3.1	Resultados de simulación en tiempo continuo	74
4.3.2	Resultados de simulación en tiempo Discreto	77
4.3.3	Resultados de simulación del control óptimo de horizonte infinito	80
4.4	Resultados Experimentales	83
4.4.1	Resultados con el PID	84
4.4.2	Resultados experimentales con el controlador óptimo finito	90
4.4.3	Resultados experimentales con el controlador óptimo infinito	96
4.5	Consumo de energía	102
4.6	Conclusiones	106
5	Conclusiones y trabajo futuro	109
5.1	Conclusiones	109
5.2	Trabajo futuro	110
A	Otros Experimentos	113
A.1	Experimentos con un controlador PID	113
A.1.1	Experimento 03 con PID	114
A.1.2	Experimento 05 con PID	116
A.2	Experimentos con el controlador óptimo finito	120
A.2.1	Experimento 04 con controlador óptimo finito	120
A.2.2	Experimento 09 con un controlador óptimo finito	123
A.3	Experimentos con el controlador óptimo infinito	126
A.3.1	Experimento 01 con un controlador óptimo infinito	126
A.3.2	Experimento 05 con un controlador óptimo infinito	129

A.4 Código de Matlab para obtener los parámetros del control óptimo	133
Bibliografía	135

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción general

El Cuadricóptero es un vehículo de cuatro rotores, cuyo control representa un reto, sin embargo existen varias técnicas de control que ayudan a mantener estable al vehículo en orientación y posición. En esta tesis abordaremos el problema del control óptimo, actualmente varios autores están adoptando el uso de este tipo de control en estos dispositivos, ya que como se mencionó anteriormente, este tipo de vehículos no puede estar mucho tiempo en el aire puesto que el consumo de energía es elevado.

Los trabajos recientes de control óptimo muestran resultados de simulación, en su mayoría tratando de resolver el problema del tiempo óptimo, planeación de trayectorias y/o minimización de energía. Para ello utilizan aproximaciones del modelo como en [16], donde desarrollan un control discretizando el sistema y haciendo finalmente pruebas de robustez. Así con ayuda del control óptimo el cual consiste en minimizar un índice de desempeño podemos dedicarnos a la tarea principal del ahorro de la energía. Controladores comunes como el PID, PD son relativamente fáciles de implementar casi en cualquier sistema, pero su problema principal para este tipo de vehículos radica principalmente en que, para lograr la estabilización, se deben hacer muchos experimentos para lograr una sintonización adecuada.

Una de las características del cuadricóptero es que sus inercias son pequeñas, así que

pequeños cambios en la velocidad de los motores puede hacer que tenga una descompensación en la orientación y a su vez en posición, desestabilizando por completo al vehículo. Por ello cuando deseamos seguir una trayectoria, debemos variar la velocidad de los motores haciendo un pequeño cambio en alguno de sus ángulos yaw (guiñada), roll (alabeo), pitch (cabeceo), con esto logramos un movimiento sobre su eje, hacia los lados y hacia adelante o atrás, respectivamente, así de ese modo al intentar seguir la trayectoria utilizando un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), éste actuará en todo momento con la misma magnitud para tratar de compensar el error y por ende tenderá a producir oscilaciones al vehículo. La principal ventaja de desarrollar un control óptimo es que podemos penalizar parámetros para el control y de la velocidad de convergencia a la referencia, entiéndase por penalizar a limitar o aumentar la magnitud de alguno de los procesos mencionados y lograr así que el controlador sea más suave o más fuerte en puntos de interés sobre la trayectoria. Por ejemplo si se desea seguir una trayectoria recta, lo ideal sería empezar de modo suave e ir aumentando la velocidad y finalmente antes de llegar a la referencia empezar a disminuir la señal del control. De ese modo, el vehículo llegará a la referencia sin sobreimpulso, lo cual evitará actos de corrección futuros que para tal caso significaría un uso extra de la energía.

Trabajos recientes han mostrado un buen rendimiento en el uso del control óptimo cuando se requiere estabilizar en altura, por ejemplo [1] donde aparte se realizan pruebas con perturbaciones de viento, éste y otros trabajos recientes han constatado la viabilidad de este tipo de control, específicamente en esta clase de vehículos donde la energía es considerable.

1.2 Objetivo General

Realizar seguimiento de trayectorias con un cuadricóptero utilizando un control óptimo de horizonte finito e infinito.

1.2.1 Objetivos Particulares

- Obtener estimaciones de posición y velocidad del cuadricóptero utilizando el sistema de visión Optitrack.
- Sintetizar un control óptimo para seguir una trayectoria.
- Minimizar el consumo de energía del controlador.
- Comparar el consumo de energía con un controlador PID.

1.3 Justificación

Como se ha mencionado anteriormente, un cuadricóptero es un vehículo que permite realizar varias maniobras y puede ser controlado de manera remota, está equipado con una pequeña computadora y sensores tales como acelerómetros, giróscopos, magnetómetros, ultrasónicos, dispositivos de posicionamiento global entre otros, todo ello le permite llevar a bordo un sistema de estabilización.

El problema actual es que cuando necesitamos que un cuadricóptero lleve a cabo una trayectoria específica, lo usual es proporcionarle la ruta al vehículo y aplicar un control como PD o PID; así nos encontramos frente a la problemática principal de este tipo de vehículos, “el consumo de la energía”, pues resultados experimentales [11] han constatado que el tiempo de vuelo no es prolongado apenas alcanza entre 10 y 15 minutos según las características del mismo.

Al aplicar un controlador PID siguiendo el mismo ejemplo, podemos configurarlo de manera fácil, lo mas probable es que converja a la referencia, cumpliendo así su objetivo, pero no siempre se analiza el consumo de energía. Por ello en este trabajo proponemos encontrar un controlador óptimo aplicado al cuadricóptero, que permita configurarlo de manera idónea con el propósito de hacer más suave el seguimiento y al mismo tiempo que se obtenga un ahorro de energía.

1.4 Alcances y limitaciones

Se pretende una vez encontrado el control óptimo, seguir una trayectoria, simulando que se evita un obstáculo y comparar el efecto del consumo de energía con respecto de otro controlador, en este caso un controlador Proporcional Integral Derivativo(PID). De igual forma se pretende sintetizar un control óptimo de horizonte infinito ya que así se podría embarcar todo el cálculo del control en la plataforma.

Es importante denotar que para obtener una retroalimentación en cuanto a posición del vehículo, es imprescindible el sistema de visión Optitrack como se verá en el capítulo 3, por ello podemos catalogarlo como una limitación puesto que los experimentos de la ley de control en este proyecto, sólo pueden realizarse bajo un ambiente controlado, si en un futuro se desea realizarlo en exteriores deberá montarse al vehículo otro tipo de sensores para tener esa retroalimentación.

1.5 Revisión bibliográfica

El cuadrirotor es un vehículo popular muy pequeño, su control es complejo pues este cuenta con múltiples entradas y salidas además de no linealidades, es por ello que el modelado del sistema es una parte fundamental al momento de controlarlo. En [10] se propone el modelado por subsistemas lo cual simplifica la forma de hallar un control.

El control automático del cuadrirotor ha sido de interés en los últimos años para los investigadores, quienes se interesan por el estudio y desarrollo de leyes de control lineales y no lineales para controlar las dinámicas de dichos vehículos [16]. En el presente trabajo obtiene un controlador para el cuadricóptero de tal manera que pueda seguir una trayectoria previamente establecida, utilizando una aproximación del modelo dinámico por medio de métodos numéricos. Finalmente se hacen pruebas de robustez al control frente a errores en los parámetros, los resultados de dicho controlador se muestran primeramente en simulación. Un método de control para sistemas lineales y no lineales es el control óptimo, que minimiza una función de costo diseñada para el sistema, de manera que para llevar al sistema de un punto inicial a un punto final, el costo sea mínimo, ya sea en tiempo o energía o de la forma que se haya diseñado dicha función [25].

Existen técnicas de control, como el backstepping que son utilizadas para diseñar controladores para seguimiento de trayectorias en una posición cartesiana. Un sistema en lazo cerrado es local asintóticamente estable y el error de seguimiento converge asintóticamente a cero [21]. Cuando un cuadricóptero dispone de un sistema de localización y la posición del cuadricóptero no es estimado de manera precisa debido a alguna perturbación, el sistema en lazo cerrado cuando menos permanecerá acotado [5].

Para determinar una trayectoria óptima, típicamente se desarrolla un control el cual está sujeto a algunas restricciones dentro del espacio de salida y el espacio de estado. Estas restricciones incluyen las restricciones físicas del actuador y restricciones para evitar obstáculos;

en [24] utilizan diferenciales planas ya que permiten la optimización que se presenta en el espacio de salida, el cual simplifica el problema. Para ello se requiere parametrizar la salida y así reducir el problema de dimension finita, esto se puede hacer utilizando varias técnicas, aquí el seguimiento de trayectorias se puede lograr utilizando el control multivariable tal como el LQR. En este trabajo se obtienen resultados satisfactorios en simulación utilizando el modelo dinámico completo del cuadricóptero. Otro caso similar donde se utilizan sistemas diferenciablemente planas para el problema de planeación de trayectorias en tiempo óptimo, es en [22], en ese trabajo se desarrolla una planeación de rutas combinada con el enfoque de seguimiento. Se planea una ruta geométrica como combinación de una o más trayectorias factibles, la dinámica del sistema se parametriza, lo que conduce a un sólo sistema de entrada, entonces el problema de optimización resultante se convierte en un problema de control óptimo en tiempo acotado.

También podemos encontrar trabajos donde utilizan técnicas tales como la programación no lineal; en [9] se aborda el problema del control óptimo, la característica principal de la (NLP) es que el número de pasos en el control está fijo, pero el periodo de muestreo se utiliza como una variable en el proceso de optimización, entonces el objetivo de esta optimización es minimizar dicho periodo de muestreo, el cual debe ser menor al establecido inicialmente. Las soluciones que los autores ofrecen del problema de (NLP) formulado, adoptan algoritmos genéticos los cuales pueden encontrar el movimiento en tiempo óptimo. Los resultados mostrados son de simulación para vuelo estacionario en un helicóptero de cuatro rotores.

En [1] se desarrolla un controlador óptimo de tiempo finito, sintetizan una ley de control usando el enfoque LQR, el cual utilizan para estabilización en altura. Los resultados que muestran fueron aplicados en una plataforma experimental, la cual fue sometida a distintas perturbaciones de viento.

Otros trabajos utilizan los métodos numéricos para calcular maniobras [15], donde dichas

acciones satisfacen el Principio del Mínimo de Pontryagin's (PMP) con respecto a la optimalidad en tiempo. El método desarrollado permite calcular maniobras para los estados inicial y final. Para calcular sus parámetros de control se realiza una transformación a su entrada de control y finalmente para poder visualizar las maniobras calculadas el sistema debe transformarse de nuevo a las variables de estado que representan dimensiones físicas lo que permite una interpretación más clara.

En [20] utilizan un control óptimo cuadrático lineal, aplicado al vuelo longitudinal en un UAV. Para la síntesis del control utilizan la técnica del Regulador Cuadrático Lineal, junto con un estimador basado en el filtro de Kalman para los estados no medibles, de modo similar en [14] donde se realiza el diseño y construcción de un cuadricóptero, se utiliza una aproximación lineal del modelo el cual fue discretizado, posteriormente se sintetiza un controlador empleando la técnica del Regulador Cuadrático Lineal combinado con un filtro de Kalman. Este control se utilizó para estabilizar al vehículo en orientación.

En [19] se propone una ley de control óptimo en tiempo discreto para estabilizar un cuadricóptero en posición y orientación, se utiliza el enfoque de control óptimo con el problema estándar del LQR combinado con una linealización exacta de modo que tenga la forma de un sistema lineal en ecuaciones de estado, así mismo los autores demuestran la estabilidad del vehículo en altura de manera experimental y finalmente hacen una comparación con un control Proporcional Derivativo (PD). En otro trabajo similar, [18] se utilizan Funciones de Control de Lyapunov (FCL) para sintetizar un control subóptimo en lazo cerrado, este control se utiliza para la estabilización de un vehículo de cuatro rotores, logrando buenos resultados de simulación y experimentales.

En esta tesis se pretende obtener no sólo resultados en simulación, sino realizar pruebas de estabilización y seguimiento, con todas las dinámicas libres, sobre una plataforma. Para ello como se explicará en el capítulo 3, se deberá obtener la retroalimentación de posición

para poder controlar todas las dinámicas, mientras se hace el seguimiento de una trayectoria con un control óptimo. Así mismo se harán experimentos bajo las mismas condiciones pero con un controlador PID, pues uno de los objetivos es poder, demostrar que existe un ahorro de energía con el controlador óptimo, para así poder ofrecer mayor tiempo de vuelo.

Capítulo 2

Expectativas del control

2.1 Introducción

En esta sección se abordan la descripción del modelo del cuadricóptero, las bases del control óptimo utilizando el enfoque de programación dinámica, para ello dividiremos en horizonte finito, horizonte infinito y la teoría del regulador lineal en tiempo discreto. En la primera parte se recuerdan los resultados principales para sintetizar la ley de control óptima, la deducción de la ecuación de Bellman y la relación con la ecuación algebraica del tipo de Riccati.

La técnica del control óptimo en horizonte finito es aplicado en este proyecto puesto que ofrece la ventaja de poder “*forzar*” al sistema para que converja a la referencia en un tiempo determinado, es muy importante este procedimiento ya que nuestro proyecto es sintetizar un control óptimo tal que pueda seguir una trayectoria, y para ello es muy importante el tiempo en que el cuadricóptero se mantiene en vuelo.

La diferencia de aplicar un control óptimo de horizonte infinito es que, no tiene un tiempo determinado para llegar a la referencia, pero al tener constantes sus matrices de penalización, implica que convergerá asintóticamente. Como un trabajo complementario también se aplicó esta forma del control ya que, es relativamente más fácil de implementar que el de horizonte

finito.

2.2 Modelado del cuadricóptero

Para modelar el helicóptero de cuatro rotores se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange como en [10].

Las ecuaciones generalizadas del vehículo pueden escribirse como:

$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^6, \quad (2.1)$$

donde $\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ denota la posición del centro de masa del helicóptero relativo al eje de referencia (I), y $\eta = (\psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$ son los ángulos de Euler, ψ es el ángulo de yaw, θ el ángulo de pitch y ϕ el ángulo de roll, dichos ángulos representan la orientación del vehículo.

Se define el siguiente Lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U, \quad (2.2)$$

donde $T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi}$ es la energía cinética translacional, $T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\omega}^T \mathbf{I} \dot{\omega}$ es la energía cinética rotacional, $U = mgz$ es la energía potencial del sistema, z representa la altura de vehículo, m es la masa, ω es la velocidad angular, \mathbf{I} es la matriz de inercia y g es la aceleración gravitacional. El vector ω respecto a los ejes de coordenadas del cuerpo se relaciona con las velocidades generalizadas, en donde los ángulos de Euler son válidos, utiliza la siguiente relación cinemática estándar.

$$\dot{\eta} = W_{\eta}^{-1} \omega \quad (2.3)$$

donde

$$W_{\eta}^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin & 0 & 1 \\ \cos\theta \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\theta \sin\psi & -\sin\psi & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Se define $\mathbb{J}(\eta) = W_\eta^T \mathbf{I} W_\eta$ tal que

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}. \quad (2.5)$$

La matriz \mathbb{J} actúa como la matriz de inercia para la energía cinética rotacional del helicóptero, expresada en términos de coordenadas generalizadas η . El modelo dinámico completo del helicóptero se obtiene de las ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerzas externas generalizadas.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

donde F_ξ es la fuerza traslacional aplicada al vehículo debido a la entrada de control principal, entonces se puede expresar lo siguiente: $\hat{F} = [0 \ 0 \ u]$ y $u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, donde

$$f_i = k_i \omega_i^2 \forall i = 1, \dots, 4 \ k_i > 0, \quad (2.7)$$

k_i es una constante y ω_i es la velocidad angular del motor i -ésimo. Por lo tanto $F_\xi = R \hat{F}$ donde R denota la matriz rotacional $R(\psi, \theta, \phi)$ que representa la orientación del cuadricóptero relacionada al eje de referencia fijo.

Los momentos o pares generalizados son:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau M_i \\ (f_2 - f_4)l \\ (f_3 - f_1)l \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

donde l es la distancia entre los motores y el centro de gravedad, y τ_i es el momento producido por el motor M_i , $i = 1, \dots, 4$, alrededor del centro de gravedad del vehículo.

Debido a que el Lagrangiano no contiene términos en la energía cinética combinando $\dot{\xi}$ con $\dot{\eta}$, las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser divididas en las dinámicas para las coordenadas de ξ y las coordenadas de η .

$$m\ddot{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = F_\xi, \quad (2.9)$$

$$\mathbb{J}\dot{\eta} + \dot{\mathbb{J}}\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) = \tau. \quad (2.10)$$

Definiendo los términos de coriolis que contiene los efectos giróscopos y centrífugos asociados a η como:

$$C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \dot{\mathbb{J}}\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}), \quad (2.11)$$

Finalmente se obtiene:

$$m\ddot{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = F_\xi. \quad (2.12)$$

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} = -C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \tau.$$

Con el objetivo de simplificar el modelo se propone el siguiente cambio de variable:

$$\tau = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \mathbb{J}\tilde{\tau}, \quad (2.13)$$

donde $\tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_\psi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\phi]$ son las nuevas entradas y por lo tanto,

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau}. \quad (2.14)$$

El sistema puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} + mgE_z &= F_\xi \\ \ddot{\eta} &= \tilde{\tau} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde F_ξ está definida como $F_\xi = \begin{bmatrix} -f \sin \theta \\ f \sin \phi \cos \theta \\ f \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$

Finalmente al multiplicar se obtiene:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\
 m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\
 m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg \\
 \ddot{\varphi} &= \tilde{\tau}_\phi \\
 \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \\
 \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde x y y son las coordenadas en el plano horizontal, z es la posición vertical, y $\tilde{\tau}_\psi$, $\tilde{\tau}_\theta$, y $\tilde{\tau}_\phi$, son los momentos de yaw, pitch y roll respectivamente, los cuales están relacionados con los momentos generalizados τ_ψ , τ_θ y τ_ϕ de la ecuación (2.13).

2.3 Programación dinámica: Horizonte infinito

Un sistema de control no lineal puede representarse mediante una ecuación diferencial matricial siguiente:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.17}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, y $f(.,.) \in \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Lipschitz además el control $u(.)$ pertenece a un conjunto \mathbb{U} , subconjunto de \mathbb{R}^m . Una vez elegido el control $u \in \mathbb{U}$, el sistema (2.17) determina una trayectoria o estado $x(.)$ con condición inicial x_0 , en el instante t_0 .

El problema del control óptimo de horizonte infinito. Suponga que se desea hallar un control $u \in \mathbb{U}$, tal que en lazo cerrado con el sistema (2.17), genere una trayectoria que converja lo más rápido posible a la referencia fijada, de acuerdo a un índice de desempeño dado. A este último planteamiento se le conoce como el Problema del Control Óptimo, para hallar la solución de este, se requiere definir un índice de desempeño, que penalice al estado

del sistema y el control, a éste se le llama funcional de costo y puede definirse como:

$$\mathbf{J}^{u(\cdot)}(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{L}(x(t), u(t)) dt, \quad (2.18)$$

donde \mathbf{L} es una función escalar definida positiva. La función \mathbf{L} representa una penalización del estado $x(\cdot)$ y de la energía utilizada $u(\cdot)$. Si sólo se desea minimizar el uso de la energía, se puede tomar $\mathbf{L}(x, u) = u^T u$.

Si un control u^* , es tal que minimiza la funcional de costo $\mathbf{J}^{u(\cdot)}(t_0, x_0)$, se tiene que:

$$\mathbf{J}^{u^*(\cdot)}(t_0, x_0) \leq \mathbf{J}^{u(\cdot)}(t_0, x_0), (\cdot) \in \mathbb{U}, \quad (2.19)$$

entonces a u^* se le denomina control óptimo. En 1957, Richard Bellman presentó el método de programación dinámica para resolver problemas de optimización con restricciones que involucran ecuaciones diferenciales. Una aplicación particular de esta metodología, es el problema del control óptimo, en este problema las restricciones se interpretan como la ecuación de estado. Este método consiste en reemplazar el problema de optimización dado por (2.17) y (2.18), el cual contiene una minimización en el espacio de controles admisibles \mathbb{U} , por una ecuación diferencial matricial en derivadas parciales, llamada ecuación de programación dinámica o ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, definida como sigue:

$$0 = \min_{u \in \mathbb{U}} \mathbf{L}(x, u) + \nabla_x V(x) \cdot f(x, u), t \in [t_0, \infty], x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.20)$$

donde $\frac{dV(x)}{dt} = \nabla_x V(x) \cdot f(x, u)$. La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se satisface por una función de Bellman $V(x)$, la cual se define como:

$$V(x_0) = \min_{u \in \mathbb{U}} \mathbf{J}^{u(\cdot)}(t_0, x_0). \quad (2.21)$$

Para que la función de Bellman (2.21) satisfaga la ecuación (2.20) es necesario que la función $V(\cdot)$ sea continuamente diferenciable a lo largo de las trayectorias de (2.17). A continuación se explica brevemente el uso de estas ecuaciones para resolver el bien conocido problema del control óptimo de horizonte infinito para el caso de los sistemas lineales libres de retardos (Problema del Regulador Cuadrático Óptimo, LQR por sus siglas en inglés).

Considere el sistema lineal en representación espacio estado:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.22)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y defina el índice de desempeño cuadrático siguiente:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt, \quad (2.23)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices constantes semidefinida positiva y definida positiva respectivamente. Se define el siguiente conjunto de controles admisibles:

$\mathbb{U} = \{u/u \text{ es una función continua o al menos continua a tramos que hace al sistema (2.22) estable en lazo cerrado con } u\}$ siendo $u \in \mathbb{U}$, una función lineal del estado $x(t)$, es decir, $u(t) = u(x(t))$. Suponiendo que existen controles admisibles para el sistema (2.22) y que el índice de desempeño (2.23) alcanza un mínimo para:

$$u(x(t)) = u^*(x^*(t)). \quad (2.24)$$

Entonces, en orden de sintetizar la ley de control (2.24) se busca una función $V(x(t))$ definida positiva tal que su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (2.22) es:

$$\frac{dV(x^*(t))}{dt} = -L^*(x(t), u^*(t)), \quad (2.25)$$

donde

$$L^*(x(t), u^*(t)) = x^T(t)Qx(t) + u^{*T}(x(t))R * u(x(t)). \quad (2.26)$$

Integrando de 0 a ∞ ambos lados de la expresión (2.25) se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) - V(x_0) = - \int_0^{\infty} L^*(x^*(t, x_0), u^*(t))dt, \quad (2.27)$$

dado que el sistema es estable (u^* , es un control admisible) se obtiene la siguiente expresión:

$$V(x_0) = \int_0^{\infty} L^*(x(t, x_0), u^*(t))dt, \quad (2.28)$$

donde $x(t, x_0)$ denota la solución del sistema (2.22) en lazo cerrado con (2.24). Puesto que $L^*(x(t), u^*(t))$, es definida positiva, podemos probar que $V(x(t))$ es una función de Lyapunov para el sistema (2.22). De la expresión (2.25) se observa que:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + L^*(x(t), u^*(t)) = 0, \quad (2.29)$$

lo cual se puede reescribir como:

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \left(\frac{dV(x(t))}{dt} \Big|_{2.22} + x^T(t)Qx(t) + u^T Ru(t) \right) = 0. \quad (2.30)$$

De esta forma, a la ecuación (2.30) se le conoce como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para sistemas lineales y a la función que satisface dicha ecuación se le conoce como función de Bellman. Cuando se conoce la función de Bellman $V(x(t))$, la solución de la ecuación (2.30) con respecto de u , proporciona el control óptimo u^* . La solución de esta ecuación es brevemente recordada en lo que sigue.

La función $V(x(t))$ puede considerarse como una función de Lyapunov para el sistema (2.22) en lazo cerrado con $u^*(t)$. Dado que el sistema es lineal y $u^*(t) = u^*(x(t))$, es una función de Lyapunov para el sistema lineal (2.22), que en lazo cerrado con $u^*(t)$ puede proponerse como:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad (2.31)$$

donde $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es definida positiva. Ahora se calcula la derivada de $V(x(t))$ a lo largo de las trayectorias de (2.22),

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \Big|_{(2.22)} = 2x^T(t)P(Ax(t) + Bu(t)), \quad (2.32)$$

ahora sustituyendo la derivada (2.32) en (2.30), se obtiene la siguiente expresión,

$$\min_{u \in \mathbb{U}} (2x^T P A x(t) + 2x^T(t)P B u(t) + (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)R u(t))) = 0. \quad (2.33)$$

De esta última expresión, se desea hallar explícitamente la ley de control óptima u^* . Observe que la ecuación (2.33) es una función cuadrática y fuertemente convexa [3] respecto

a u , por lo que la existencia de un mínimo para la ecuación (2.33) está garantizada y es global. De acuerdo con los resultados clásicos de optimización del enfoque de cálculo de variaciones, la primera variación de la función a optimizar con respecto de u debe ser cero,

$$\frac{\partial}{\partial u}(2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)PBu(t) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) = 0, \quad (2.34)$$

por lo que:

$$2B^T Px(t) + 2Ru(t) = 0. \quad (2.35)$$

Por consecuencia la ley de control óptima para (2.22) es

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t). \quad (2.36)$$

Esta expresión se dice óptima debido a que,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}(2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)PBu(t) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) = 2R, \quad (2.37)$$

la cual es estrictamente definida positiva y de acuerdo a la condición suficiente para la optimalidad, $u^*(t)$ dado por la ecuación (2.36) es óptimo.

Finalmente, sólo es necesario expresar la matriz desconocida P de la función de Bellman $V(x(t))$, en términos de matrices conocidas. Esto se logra mediante el cálculo de la derivada temporal de la ecuación (2.31) y se evalúa a lo largo de las trayectorias del sistema (2.22) en lazo cerrado con la ley de control óptima (2.36), para obtener la siguiente expresión,

$$\left. \frac{dV(x(t))}{dt} \right|_{(2.22)} = x(t)^T(A^T P + PA)x(t) + u^{*T}(t)B^T Px(t) + x^T PBu^*(t), \quad (2.38)$$

sustituyendo la expresión dada en (2.38) y la ley de control óptima dada por (2.37) en la ecuación (2.29), se tiene que para todo estado $x(t)$,

$$x^T(t)(A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P)x(t) = 0, \quad (2.39)$$

y se concluye que,

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0. \quad (2.40)$$

A la ecuación dada por (2.40) se le llama ecuación algebraica de Riccati en estado estable o ecuación algebraica de Riccati para el caso continuo (CARE, Continuous Algebraic Riccati Equation, de sus siglas en inglés). Dadas las matrices Q semidefinida positiva y R estrictamente definida positiva, dicha ecuación puede resolverse numéricamente con respecto a P , la cual define el control óptimo u^* .

2.4 Problema del regulador lineal de horizonte finito: Caso discreto

En esta sección consideramos el sistema discreto denotado por la siguiente ecuación de estado:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad (2.41)$$

donde el estado y los controles no están restringidos. El problema es hallar un control óptimo $u^*(x(k), k)$ que minimice un índice de desempeño:

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)Hx(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)], \quad (2.42)$$

donde

H y Q son matrices reales, semi-definidas positivas de $n \times n$;

R es una matriz de $m \times m$ real, simétrica y definida positiva;

N es un entero fijo mayor que cero.

El problema anterior es la contraparte discreta del problema del regulador lineal continuo, expuesto anteriormente. Para simplificar la notación en el momento de derivar, asumimos que A , B , y Q son matrices constantes. El enfoque que tomaremos será resolver la ecuación

funcional. Empezaremos por definir lo siguiente:

$$J_{NN}(x(N)) = \frac{1}{2}x^T(N)Hx(N) = J_{NN}^*(x(N)) \triangleq \frac{1}{2}x^T(N)P(0)x(N), \quad (2.43)$$

donde $P(0) \triangleq H$.

Con

$$J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) = \frac{1}{2}x^T(N-1)Qx(N-1) + \frac{1}{2}u^T(N-1)Ru(N-1) + \frac{1}{2}x^T(N)P(0)x(N), \quad (2.44)$$

el costo mínimo es:

$$J_{N-1,N}^*(x(N-1)) \triangleq \min_{u(N-1)} \{J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1))\}. \quad (2.45)$$

Ahora $x(N)$ está relacionado a $u(N-1)$ por la ecuación de estado (2.41) y por lo tanto,

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^*(x(N-1)) &= \min_{u(N-1)} \left\{ \frac{1}{2}x^T(N-1)Qx(N-1) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}u^T(N-1)Ru(N-1) + \frac{1}{2}[Ax(N-1) + Bu(N-1)]^T P(0)[Ax(N-1) + Bu(N-1)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Se asumió que los controles admisibles no están restringidos, por lo tanto para minimizar $J_{N-1,N}$ con respecto a $u(N-1)$ necesitamos considerar sólo aquellos controles para los cuáles:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_1(N-1)} \\ \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_2(N-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_m(N-1)} \end{bmatrix} \triangleq \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u(N-1)} = 0. \quad (2.47)$$

Evaluando las derivadas parciales se tiene

$$Ru(N-1) + B^T P(0)[Ax(N-1) + Bu(N-1)] = 0. \quad (2.48)$$

Los valores del control que satisfacen esta ecuación pueden producir un mínimo, máximo o ninguna en $J_{N-1,N}$, entonces se calcula lo siguiente:

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 J_{n-1,n}}{\partial u_1^2(N-1)} & \frac{\partial^2 J_{n-1,n}}{\partial u_1^2(N-1)\partial u_2(N-1)} & \cdots & \frac{\partial^2 J_{n-1,n}}{\partial u_1^m(N-1)} \\ \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_2(N-1)\partial u_1(N-1)} & \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_2^2(N-1)} & \cdots & \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_2(N-1)\partial u_m(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_m(N-1)\partial u_m(N-1)} & \frac{\partial^2 J_{n-1,n}}{\partial u_m^2(N-1)\partial u_2(N-1)} & \cdots & \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_2^2(N-1)} \end{array} \right] \\ \triangleq \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u^2(N-1)} = R + B^T P(0)B. \quad (2.49)$$

Se asumió que H (al igual que $P(0)$) es una matriz semidefinida positiva y R una matriz definida positiva. Por lo que debido a que $P(0)$ es semidefinida positiva, $R + B^T P(0)B$ es la suma de una matriz definida positiva y una matriz semidefinida positiva, ello implica que $R + B^T P(0)B$ es definida positiva. El control que satisface la ecuación (2.48) produce un mínimo absoluto global de $J_{N-1,N}$.

Resolviendo la ecuación (2.49) para el control óptimo, se tiene:

$$u^*(N-1) = [R + B^T P(0)B]^{-1} B^T P(0)Ax(N-1), \quad (2.50) \\ \triangleq F(N-1)x(N-1)$$

ya que $R + B^T P(0)B$ es definida positiva, su inverso está garantizado. Sustituyendo la expresión para $u^*(N-1)$ dentro de la ecuación para $J_{N-1,N}$ obtenemos $J_{N-1,N}^*$, de la forma:

$$J_{N-1,N}^*(x(N-1)) = \frac{1}{2}x^T(N-1)\{[A + BF(N-1)]^T P(0)[A + BF(N-1)] \\ + F^T(N-1)RF(N-1) + Q\}x(N-1) \quad (2.51) \\ \triangleq \frac{1}{2}x^T(N-1)P(1)x(N-1).$$

La definición para $P(1)$ es claro, por inspección desde (2.51). El punto importante es que $J_{N-1,N}^*$ es exactamente de la misma forma que $J_{N,N}^*$, lo cual significa que cuando continuamos con el proceso hacia atrás los resultados serán de la misma forma, por ejemplo:

$$\begin{aligned} u^*(N-2) &= -[R + B^T P(1)B]^{-1} B^T P(1) A x(N-2) \\ &\triangleq F(N-2)x(N-2), \end{aligned} \quad (2.52)$$

y

$$\begin{aligned} J_{N-2,N}^*(x(N-2)) &= \frac{1}{2} x^T(N-2) \{ [A + BF(N-2)]^T P(1) [A + BF(N-2)] \\ &\quad + F^T(N-2) R F(N-2) + Q \} x(N-2) \\ &\triangleq \frac{1}{2} x^T(N-2) P(2) x(N-2), \end{aligned} \quad (2.53)$$

por inducción para el paso k -ésimo

$$\begin{aligned} u^*(N-k) &= -[R + B^T P(k-1)B]^{-1} B^T P(k-1) A x(N-k) \\ &\triangleq F(N-k)x(N-k) \end{aligned} \quad (2.54)$$

y

$$\begin{aligned} J_{N-k,N}^*(x(N-k)) &= \frac{1}{2} x^T(N-k) \{ [A + BF(N-k)]^T P(k-1) [A + BF(N-k)] \\ &\quad + F^T(N-k) R F(N-k) + Q \} x(N-k) \\ &\triangleq \frac{1}{2} x^T(N-k) P(k) x(N-k). \end{aligned} \quad (2.55)$$

En el caso general se obtiene que:

$$\begin{aligned} u^*(N-k) &= -[R(N-k) + B^T(N-k)P(k-1)B(N-k)]^{-1} \\ &\quad \times B^T(N-k)P(k-1)A(N-k)x(N-k) \quad , \\ &\triangleq F(N-k)x(N-k) \end{aligned} \quad (2.56)$$

con

$$\begin{aligned} J_{N-k,N}^*(x(N-k)) &= \frac{1}{2} x^T(N-k) \{ [A(N-k) + B(N-k)F(N-k)]^T \\ &\quad \times P(k-1) [A(N-k) + B(N-k)F(N-k)] \\ &\quad + F^T(N-k) R(N-k) F(N-k) + Q(N-k) \} x(N-k) \\ &\triangleq \frac{1}{2} x^T(N-k) P(k) x(N-k). \end{aligned} \quad (2.57)$$

¿Cuáles son las implicaciones de estos resultados? Primero y el más importante, se observa que el control óptimo para cada etapa, es una combinación lineal de las variables de estado; por lo tanto, la respuesta óptima es una retroalimentación lineal de la variable de estado. Note que la retroalimentación es variante en el tiempo, incluso si A , B , R y Q son matrices constantes esto significa que el controlador para la respuesta óptima puede ser implementada por un tiempo determinado con cierto número de entradas.

Otro resultado importante es la obtención del valor del costo mínimo. Para la N etapa con condición inicial de estado x_0 , está dado por

$$J_{0,N}^*(x_0) = \frac{1}{2}x_0^T P(N)x_0, \quad (2.58)$$

el cual sigue directamente de la definición de $P(N-k)$. Esto significa que la acumulación de las matrices $P(N-k)$ para $k = 1, 2, \dots, N$ nos proporciona un medio para determinar el costo mínimo de procesos desde 1 hasta N etapas. La implicación computacional de estos resultados también son importantes. Con el fin de evaluar las ganancias de retroalimentación y el costo mínimo para algún estado inicial es necesario sólo resolver las ecuaciones siguientes

$$F(N-k) = -[R(N-k) + B^T(N-k)P(k-1)B(N-k)]^{-1} \\ \times B^T(N-k)P(k-1)A(N-k), \quad (2.59)$$

con

$$P(k) = [A(N-k) + B(N-k)F(N-k)]^T P(k-1) \\ \times [A(N-k) + B(N-k)F(N-k)] \\ + F^T(N-k)R(N-k)F(N-k) + Q(N-k), \quad (2.60)$$

con $P(0) = H$. Obtenemos la solución evaluando $F(N-1)$ usando $P(0) = H$, ahora sustituimos $F(N-1)$ en (2.60) para determinar $P(1)$. Esto constituye un ciclo del procedimiento, el cual se continua calculando $F(N-2)$, $P(2)$, etc. La solución se realiza de mejor manera en una computadora. Para reducir el número de operaciones aritméticas, considere la siguiente definición.

$$V(N-k) \triangleq A(N-k) + B(N-k)F(N-k), \quad (2.61)$$

de tal modo que el procedimiento es resolver la ecuación (2.59) y (2.61) y finalmente se obtiene la siguiente ecuación.

$$P(k) = V^T(N - k)P(k - 1)V(N - k) + F^T(N - k)R(N - k)F(N - k) + Q(N - k). \quad (2.62)$$

Las matrices F y P se ocupan en sintetizar el control óptimo y determinar el costo mínimo. Sin embargo de la dinámica lineal de la planta y del índice de desempeño cuadrático obtenemos el resultado en forma cerrada en las ecuaciones (2.56) a través de la ecuación (2.60). Otra característica importante del problema del regulador lineal es que si el sistema (2.41) es completamente controlable y en tiempo invariante $H = 0$ y R y Q son matrices constantes, entonces la ley de control óptima es invariante en el tiempo para un proceso infinito. Esto es

$$F(n - K) \longrightarrow F \text{ (matriz constante)}, \quad (2.63)$$

cuando $N \longrightarrow \infty$.

Desde el punto de vista físico, esto significa que si el proceso es controlado para un número largo de etapas, el control óptimo puede ser implementado por retroalimentación de estado a través de una configuración de amplificadores-sumadores pero con ganancias fijas. Una manera de determinar la constante F es resolviendo las relaciones recursivas por muchas etapas como sean requeridas para $F(N - k)$ que converge a una matriz constante [8] o empleando un regulador de horizonte infinito.

2.5 Problema del regulador lineal de horizonte finito: Caso Continuo

Dada la siguiente ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (2.64)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, las cuáles son matrices con elementos continuos. Se debe minimizar un índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt, \quad (2.65)$$

H y Q son matrices reales, simétricas, semidefinidas positivas, R es una matriz real, simétrica, definida positiva, el tiempo inicial t_0 y el tiempo final t_f , están fijados y $u(t)$, $x(t)$ no están acotadas por ninguna frontera.

Para utilizar la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, primero formamos el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), J_x^*, t) = \frac{1}{2}x^T(t)Qx(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + J_x^*(x(t), t) \cdot [A(t)x(t) + B(t)u(t)]. \quad (2.66)$$

Una condición necesaria para que $u(t)$ minimice \mathcal{H} es que $\partial\mathcal{H}/\partial u = 0$ así

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}(x(t), u(t), J_x^*, t) = Ru(t) + B^T(t)J_x^*(x(t), t) = 0, \quad (2.67)$$

ya que la ecuación

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial u^2} = R, \quad (2.68)$$

es definida positiva y \mathcal{H} es una forma cuadrática en u , siendo este último el control que satisface la ecuación (2.67) que minimiza \mathcal{H} (Globalmente). Resolviendo la ecuación (2.67) para $u^*(t)$ resulta:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)J_x^*(x(t), t), \quad (2.69)$$

el cual cuando es sustituido en (2.66) produce:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x(t), u^*(t), J_x^*, t) &= \frac{1}{2}x^TQx + \frac{1}{2}J_x^{*T}BR^{-1}B^TJ_x^* \\ &\quad + J_x^{*T}Ax - J_x^{*T}BR^{-1}B^TJ_x^* \\ &= \frac{1}{2}x^TQx - \frac{1}{2}J_x^{*T}BR^{-1}B^TJ_x^* + J_x^{*T}Ax. \end{aligned} \quad (2.70)$$

La ecuación de Jamilton-Jacobi-Bellman es

$$0 = J_t^* + \frac{1}{2}x^T Qx - \frac{1}{2}J_x^{*T} B R^{-1} B^T J_x^* + J_x^{*T} Ax, \quad (2.71)$$

de la ecuación (2.65) la condición de frontera está definida como

$$J^*(x(t_f), t_f) = \frac{1}{2}x^T(t_f) H x(t_f). \quad (2.72)$$

Como se vió en la sección 2.2 el costo mínimo para el problema del regulador lineal en tiempo discreto es una función de estado cuadrática, esto parece ser una razón capaz de acertar como una solución de la forma:

$$J^*(x(t), t) = \frac{1}{2}x^T(t) K(t)x(t), \quad (2.73)$$

donde $K(t)$ es una matriz real, simétrica, definida positiva que debe hallarse. Sustituyendo la solución asumida en la ecuación (2.71) produce el siguiente resultado,

$$0 = \frac{1}{2}x^T \dot{K}(t)x + \frac{1}{2}x^T Qx - \frac{1}{2}x^T K B R^{-1} B^T Kx + x^T K Ax. \quad (2.74)$$

El producto matricial KA que aparece en el último término puede ser escrito como una suma de una parte simétrica y una parte antisimétrica.

$$KA = \frac{1}{2}[KA + (KA)^T] + \frac{1}{2}[KA - (KA)^T]. \quad (2.75)$$

Usando una propiedad de matrices $(CD)^T = D^T C^T$ y sabiendo que la transpuesta de un escalar es igual a si mismo, podemos mostrar que sólo la parte simétrica de KA no contribuye en nada a la ecuación (2.74), así que dicha ecuación puede reescribirse como sigue

$$0 = \frac{1}{2}x^T \dot{K}x + \frac{1}{2}x^T Qx - \frac{1}{2}x^T K B R^{-1} B^T Kx + \frac{1}{2}x^T K Ax + \frac{1}{2}x^T A^T Kx. \quad (2.76)$$

Esta ecuación debe cumplirse para toda $x(t)$ así que,

$$0 = \dot{K}(t) + Q(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t), \quad (2.77)$$

y la condición de frontera como en (2.72) y (2.73) es

$$K(t_f) = H. \quad (2.78)$$

Consideramos las implicaciones de este resultado: primero la ecuación diferencial parcial H - J - B se reduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Segundo la matriz $K(t)$ puede ser determinada por una integración numérica de la ecuación (2.77) desde $t = t_f$ a $t = t_0$ mediante el uso de la condición de frontera $K(t_f) = H$. Actualmente ya que la matriz $K(t)$ de $n \times n$ es simétrica necesitamos integrar sólo las ecuaciones diferenciales correspondientes a $n(n+1)/2$.

Una vez que $K(t)$ ha sido determinada la ley de control óptima está dada por:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t). \quad (2.79)$$

Así, por suposición una solución de la forma (2.73) la ley de control es lineal, variante en el tiempo con retroalimentación de estado. Cabe señalar, sin embargo que otras formas son posibles como una solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

2.6 Control óptimo lineal para el cuadricóptero de horizonte Finito: Caso discreto

Se utilizará el modelo reducido del cuadricóptero tomado de [4]:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\ m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\ m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg \\ \ddot{\phi} &= \tau_\phi \\ \ddot{\theta} &= \tau_\theta \\ \ddot{\psi} &= \tau_\psi. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Para obtener el control, el modelo reducido se dividirá en subsistemas, inicialmente se aplicará un control, con el objetivo de cancelar no linealidades. Primero se recordará una definición importante para poder aplicar este método.

Sea el sistema definido por $x(k+1) = f(x(k), u(k))$, $x(k), f(\cdot, \cdot) \in R^n$, $u(k) \in R^m$, el par (x_0, x_1) es controlable si existe un control admisible $u(k)$ tal que transfiere el sistema de x_0 a x_1 en N número de pasos finito.

2.6.1 Subsistema Z

Primero se estabilizará el subsistema z , aplicando una linealización exacta a (2.80). Definimos el siguiente subsistema, como en [17]:

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \phi - mg.$$

Para la representación en espacio estado definimos el vector $(x_z = \begin{bmatrix} x_{1,z} & x_{2,z} \end{bmatrix}^T)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,z} &= x_{2,z} \\ \dot{x}_{2,z} &= -g + \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{m} \right) u. \end{aligned}$$

Utilizando la aproximación de Euler obtenemos la forma discretizada:

$$\begin{aligned} x_{1,z}(k+1) &= x_{1,z}(k) + T x_{2,z}(k) \\ x_{2,z}(k+1) &= x_{2,z}(k) - Tg + T \left(\frac{\cos \theta(k) \cos \phi(k)}{m} \right) u(k), \end{aligned} \tag{2.81}$$

donde T es el tiempo de muestreo. Sabemos que el susbsistema discretizado (2.81) puede ser linelizada aplicando la siguiente ley de control:

$$u(k) = m(u_1(k) + g) (\cos \theta(k) \cos \phi(k))^{-1}, \tag{2.82}$$

donde $\cos \theta(k) \cos \phi(k) \neq 0$, si $\theta, \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ el cual es una suposición razonable para las condiciones de operación del vehículo en este proyecto.

Ahora, sustituyendo el control (2.82) en el subsistema (2.81) obtenemos:

$$x_z(k+1) = A_z x_z(k) + B_z u_1(k), \quad (2.83)$$

$$\text{Donde } A_z = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}.$$

Es posible verificar que el par (A,B) es controlable en un número finito de pasos. Por lo tanto podemos encontrar una ley de control en lazo cerrado con el control linealizante (2.82), tal que el índice de desempeño:

$$J_z = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_z-1} (x_z^T(k) Q_z x_z(k) + u_1^2(k) R_z) + \frac{1}{2} x_z^T(N) H_z x_z(N), \quad (2.84)$$

es minimizado, donde $H_z, Q_z \geq 0$, $R_z > 0$ están dadas y penalizan la convergencia del estado y el consumo de energía respectivamente, $N_z T = t_{f1}$. Así, nosotros deseamos hallar una ley de control $u_1(k)$, el cual minimice J_z sujeto a (2.83). Este problema es conocido, la solución está dada en [8]:

$$u_1^*(k) = -F_z(N-k) x_z^*(k), \quad \forall k = 0, \dots, N-1, \quad (2.85)$$

donde

$$\begin{aligned} F_z(N-k) &= [R_z + B_z^T P_z(k-1) B_z]^{-1} B_z^T P_z(k-1) A_z, \\ P_z(k) &= [A_z + B_z F_z(N-k)]^T P_z(k-1) [A_z + B_z F_z(N-k)] \\ &\quad + F_z^T(N-k) R F_z(N-k) + Q_z, \text{ with } P_z(0) = H_z. \end{aligned}$$

Este control genera una trayectoria óptima del sistema (2.91) el cual minimiza el índice de desempeño (2.92).

2.6.2 Subsistema ψ

El siguiente subsistema se refiere al ángulo de yaw:

$$\ddot{\psi} = \tau_\psi,$$

Cuya representación de estado es,

$$\dot{x}_{1,\psi} = x_{2,\psi}$$

$$\dot{x}_{2,\psi} = \tau_\psi,$$

el cual puede ser representado en el dominio discreto como:

$$x_\psi(k+1) = A_\psi x_\psi(k) + B_\psi \tau_\psi(k),$$

donde $A_\psi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$.

Definimos el siguiente índice de desempeño

$$J_\psi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_\psi-1} (x_\psi^T(k) Q_\psi x_\psi(k) + \tau_\psi^2(k) R_\psi) + \frac{1}{2} x_\psi^T(N_\psi) H_\psi x_\psi(N_\psi), \quad (2.86)$$

donde $H_\psi, Q_\psi \geq 0$ and $R_\psi > 0$, $N_\psi T = tf_2$ entonces el control óptimo está dada por la ecuación siguiente:

$$\tau_\psi^*(k) = -F_\psi(N_\psi - k) x_\psi^*(k), \forall k = 0, \dots, N_\psi - 1,$$

donde

$$\begin{aligned} F_\psi(N_\psi - k) &= [R_\psi + B_\psi^T P_\psi(k-1) B_\psi]^{-1} B_\psi^T P_\psi(k-1) A_\psi, \\ P_\psi(k) &= [A_\psi + B_\psi F_\psi(N_\psi - k)]^T P_\psi(k-1) [A_\psi + B_\psi F_\psi(N_\psi - k)] \\ &\quad + F_\psi^T(N_\psi - k) R_\psi F_\psi(N_\psi - k) + Q_\psi, \text{ with } P_\psi(0) = H_\psi. \end{aligned}$$

Es una ley de control variante en el tiempo que garantiza que el índice de desempeño (2.86) es minimizada.

2.6.3 Subsistema $y - \phi$

El sistema $y - \phi$ se representa como sigue:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\ \ddot{\phi} &= \tau_\phi. \end{aligned}$$

Con su representación en espacio estado ($x_{1y} = y$, $x_{2y} = \dot{y}$, $x_{3\phi} = \phi$, $x_{4\phi} = \dot{\phi}$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1y} &= x_{2y} \\ \dot{x}_{2y} &= \frac{1}{m}u \cos \theta \sin x_{3\phi} \\ \dot{x}_{3\phi} &= x_{4\phi} \\ \dot{x}_{4\phi} &= \tau_\phi, \end{aligned}$$

al igual que los subsistemas anteriores hallamos su representación en tiempo discreto,

$$\begin{aligned} x_{1y}(k+1) &= x_{1y}(k) + Tx_{2y}(k) \\ x_{2y}(k+1) &= x_{2y}(k) + \frac{T}{m}u(k) \cos \theta(k) \sin x_{3\phi}(k) \\ x_{3\phi}(k+1) &= x_{3\phi}(k) + Tx_{4\phi}(k) \\ x_{4\phi}(k+1) &= T\tau_\phi(k) + x_{4\phi}(k). \end{aligned}$$

De acuerdo a la ley de control linealizante $u(k)$ (2.82) se tiene para el segundo estado.

$$x_{2y}(k+1) = T(u_1^*(k) + g) \tan x_{3\phi}(k) + x_{2y}(k),$$

el hecho importante es que cuando la ley de control óptima, $u_1^*(k)$ es cero cuando k es igual al horizonte. Entonces, consideramos que $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $k \geq nT$, $|u_1^*(k)|$ está acotado, por lo tanto llegamos a:

$$x_{2y}(k+1) = gT \tan x_{3\phi}(k) + x_{2y}(k).$$

Deseamos hallar el control $\tau_\phi^*(k)$, tal que $x_{y,\phi}(k) = \begin{bmatrix} x_{1y} & x_{2y} & x_{3\phi} & x_{4\phi} \end{bmatrix}^T$ converja con una tasa acelerada,

$$J_{y,\phi} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_\phi-1} (x_{y,\phi}^T(k) Q_{y,\phi} x_{y,\phi}(k) + \tau_\phi^2(k) R_\phi) + \frac{1}{2} x_{y,\phi}^T(N_\phi) H_\phi x_\phi(N_\phi), \quad (2.87)$$

donde $N_\phi T = t f_3$ y el índice de desempeño es minimizado. Si existe un control óptimo $\tau_\phi^*(k)$ el cual realiza esta tarea, entonces $\tan x_{3\phi}(k) \approx x_{3\phi}(k)$ y podemos así diseñar un control óptimo $\tau_\phi^*(k)$ para el sistema aproximado:

$$x_{y,\phi}(k+1) = A_{y,\phi} x_{y,\phi}(k) + B_{y,\phi} \tau_\phi(k),$$

donde

$$A_{y,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & gT & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}, \quad B_{y,\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Se puede corroborar que el par $A_{y,\phi}, B_{y,\phi}$ es controlable en un número de pasos finito. Así, de acuerdo a la teoría del control óptimo, la ley de control $\tau_\phi^*(k)$ es

$$\tau_\phi^*(k) = -F_\phi(N_\phi - k) x_{y,\phi}^*(k), \quad \forall k = 0, \dots, N_\phi - 1,$$

y

$$\begin{aligned} F_\phi(N_\phi - k) &= [R_\phi + B_{y,\phi}^T P_\phi(k-1) B_{y,\phi}]^{-1} B_{y,\phi}^T P_\phi(k-1) A_{y,\phi}, \\ P_\phi(k) &= [A_{y,\phi} + B_{y,\phi} F_\phi(N_\phi - k)]^T P_\phi(k-1) [A_{y,\phi} + B_{y,\phi} F_\phi(N_\phi - k)] \\ &\quad + F_\phi^T(N_\phi - k) R_\phi F_\phi(N_\phi - k) + Q_\phi, \quad \text{with } P_\phi(0) = H_\phi. \end{aligned}$$

2.6.4 Subsistema $x - \theta$

Para el subsistema que involucra el eje x y el ángulo *Pitch* se obtiene un control de manera similar al subsistema anteriormente estudiado, para ello definimos:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= \tau_{\theta}, \end{aligned}$$

Cuya representación de estado, asignando las siguientes variables ($x_{1x} = x$, $x_{2x} = \dot{x}$, $x_{3\theta} = \theta$, $x_{4\theta} = \dot{\theta}$) es

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1x} &= x_{2x} \\ \dot{x}_{2x} &= -\frac{1}{m}u \sin x_{3\theta} \\ \dot{x}_{3\theta} &= x_{4\theta} \\ \dot{x}_{4\theta} &= \tau_{\theta}. \end{aligned}$$

De modo similar que los subsistemas anteriores obtenemos su forma discretizada:

$$\begin{aligned} x_{1x}(k+1) &= x_{1x}(k) + Tx_{2x}(k), \\ x_{2x}(k+1) &= -\frac{T}{m}u(k) \sin x_{3\theta}(k) + x_{2x}(k), \\ x_{3\theta}(k+1) &= Tx_{4\theta}(k) + x_{3\theta}(k), \\ x_{4\theta}(k+1) &= T\tau_{\theta}(k) + x_{4\theta}(k). \end{aligned}$$

Y utilizando los argumentos anteriormente aplicado llegamos a la siguiente aproximación discreta lineal.

$$x_{x,\theta}(k+1) = A_{x,\theta}x_{x,\theta}(k) + B_{x,\theta}\tau_{\theta}^*(k),$$

donde $x_{x,\theta}(k) = [x_{1x}(k) \ x_{2x}(k) \ x_{3\theta}(k) \ x_{4\theta}(k)]^T$, y la matriz $A_{x,\theta}$ y $B_{x,\theta}$ son similares y están dadas en (2.88). Entonces la ley de control óptima $\tau_\theta^*(k)$ que minimiza un criterio cuadrático similar como en (2.87) es:

$$\tau_\theta^*(k) = -F_\theta(N_\theta - k) x_{x,\theta}^*(k), \forall k = 0, \dots, N_\theta - 1,$$

$$\begin{aligned} F_\theta(N_\theta - k) &= [R_\theta + B_{x,\theta}^T P_\theta(k-1) B_{x,\theta}]^{-1} B_{x,\theta}^T P_\theta(k-1) A_{x,\theta}, \\ P_\theta(k) &= [A_{x,\theta} + B_{x,\theta} F_\theta(N_\theta - k)]^T P_\theta(k-1) [A_{x,\theta} + B_{x,\theta} F_\theta(N_\theta - k)] \\ &\quad + F_\theta^T(N_\theta - k) R_\theta F_\theta(N_\theta - k) + Q_\theta, \text{ with } P_\theta(0) = H_\theta. \end{aligned}$$

Es importante denotar que para hallar estos controles hemos utilizado una linealización exacta, asumiendo ángulos pequeños.

2.7 Control óptimo para el cuadricóptero de horizonte infinito: Caso discreto

Siguiendo la misma mecánica, que el caso para horizonte finito, se ha tomado el modelo reducido (2.80)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\ m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\ m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg \\ \ddot{\phi} &= \tau_\phi \\ \ddot{\theta} &= \tau_\theta \\ \ddot{\psi} &= \tau_\psi. \end{aligned}$$

Este modelo puede ser estabilizado utilizando el resultado del Regulador Cuadrático Lineal (LQR), para poder sintetizar el control, se aplicará una linealización exacta igual al caso finito para ello se procede como en [19].

2.7.1 Control óptimo del subsistema z

Para sintetizar este control, nuevamente se utilizará un control para quitar no linealidades, para ello consideramos el subsistema:

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \phi - mg$$

cuya representación de estado, donde $(x_z = [x_{1,z} \ x_{2,z}]^T)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,z} &= x_{2,z} \\ \dot{x}_{2,z} &= -g + \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{m} \right) u. \end{aligned}$$

Se obtiene su representación en discreto utilizando la aproximación de Euler:

$$\begin{aligned} x_{1,z}(k+1) &= Tx_{2,z}(k) + x_{1,z}(k) \\ x_{2,z}(k+1) &= T \left(\frac{\cos \theta(k) \cos \phi(k)}{m} \right) u(k) \\ &\quad + x_{2,z}(k) - Tg, \end{aligned} \tag{2.89}$$

donde T es el tiempo de muestreo, como se mencionó anteriormente se aplicará una ley de control linealizante, el cual debemos aplicar al sistema (2.89):

$$u(k) = m(u_1(k) + g) (\cos \theta(k) \cos \phi(k))^{-1}, \tag{2.90}$$

con $\cos \theta(k) \cos \phi(k) \neq 0$, si $\theta, \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, éstas son suposiciones que fueron obtenidas específicamente para este proyecto. Entonces, al sustituir la ley de control (2.90) en el subsistema (2.89) obtenemos:

$$x_z(k+1) = A_z x_z(k) + B_z u_1(k), \tag{2.91}$$

donde las matrices $A_z = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$.

El par (A_z, B_z) es controlable. Entonces podemos elegir una ley de control óptima de horizonte infinito para el sistema (2.91) tal que minimice el índice de desempeño:

$$J_z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_z^T(k)Q_z x_z(k) + u_1^2(k)R_z), \quad (2.92)$$

donde las matrices $Q_z \geq 0$, $R_z > 0$ penalizan la convergencia del estado y el consumo de energía respectivamente. Por lo que, se desea obtener una ley de control $u_1(k)$, tal que minimice J_z sujeto al sistema lineal (2.91). Teniendo en cuenta que el par (A_z, B_z) es controlable, entonces la ecuación algebraica discreta de Ricati está dada como sigue [8], utilizando el algoritmo provisto en matlab [2]:

$$P_z = A_z^T P_z A_z - A_z^T P_z B_z (R_z + B_z^T P_z B_z)^{-1} B_z^T P_z A_z + Q_z. \quad (2.93)$$

El cual tiene una única solución y P_z define la secuencia óptima:

$$u_1^*(k) = -(R_z + B_z^T P_z B_z)^{-1} B_z^T P_z A_z x_z^*(k), \quad \forall k \geq 0. \quad (2.94)$$

Por lo que de acuerdo a la teoría de control óptimo el sistema (2.91) en lazo cerrado y con la ley de control óptima (2.94) es estable y minimiza el índice de desempeño (2.92).

2.7.2 Control óptimo del subsistema ψ

Consideramos para el sistema del ángulo Yaw .

$$\ddot{\psi} = \tau_\psi,$$

Representación en espacio estado :

$$\dot{x}_{1,\psi} = x_{2,\psi}$$

$$\dot{x}_{2,\psi} = \tau_\psi,$$

De igual forma obtenemos su representación en el dominio discreto

$$x_\psi(k+1) = A_\psi x_\psi(k) + B_\psi \tau_\psi(k),$$

donde $A_\psi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$ son controlables. Podemos definir el siguiente índice de desempeño.

$$J_\psi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_\psi^T(k) Q_\psi x_\psi(k) + \tau_\psi^2(k) R_\psi), \quad (2.95)$$

donde las matrices $Q_\psi \geq 0$ y $R_\psi > 0$. Por lo que la ley de control óptima queda definida:

$$\tau_\psi^*(k) = -(R_\psi + B_\psi^T P_\psi B_\psi)^{-1} B_\psi^T P_\psi A_\psi x_\psi^*(k), \forall k \geq 0.$$

Y la matriz P_ψ satisface la ecuación algebraica discreta de Riccati: (DARE, por sus siglas en ingles) y es similar a (2.93).

2.7.3 Control óptimo del subsistema $y - \phi$

Para el subsistema $y - \phi$ tenemos:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\ \ddot{\phi} &= \tau_\phi, \end{aligned}$$

obtenemos inicialmente su representación en espacio estado, con $(x_{1y} = y, x_{2y} = \dot{y}, x_{3\phi} = \phi, x_{4\phi} = \dot{\phi})$ es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1y} &= x_{2y} \\ \dot{x}_{2y} &= \frac{1}{m} u \cos \theta \sin x_{3\phi} \\ \dot{x}_{3\phi} &= x_{4\phi} \\ \dot{x}_{4\phi} &= \tau_\phi. \end{aligned}$$

También obtenemos su representación en el dominio discreto:

$$\begin{aligned}
x_{1y}(k+1) &= x_{1y}(k) + Tx_{2y}(k) \\
x_{2y}(k+1) &= \frac{T}{m}u(k) \cos \theta(k) \sin x_{3\phi}(k) + x_{2y}(k) \\
x_{3\phi}(k+1) &= Tx_{4\phi}(k) + x_{3\phi}(k) \\
x_{4\phi}(k+1) &= T\tau_\phi(k) + x_{4\phi}(k).
\end{aligned}$$

De acuerdo a la definición de $u(k)$ (2.90), tenemos que:

$$x_{2y}(k+1) = T(u_1^*(k) + g) \tan x_{3\phi}(k) + x_{2y}(k),$$

Según la teoría del control óptimo, $u_1^*(k)$ tiende a cero cuando k tiende al infinito. Entonces consideramos que $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $k \geq nT$, $|u_1^*(k)|$ está acotado, por lo que llegamos a:

$$x_{2y}(k+1) = gT \tan x_{3\phi}(k) + x_{2y}(k).$$

Deseamos hallar un control $\tau_\phi^*(k)$, tal que $x_{y,\phi}(k) = \begin{bmatrix} x_{1y} & x_{2y} & x_{3\phi} & x_{4\phi} \end{bmatrix}^T$ se vaya a cero muy rápido y el índice de desempeño,

$$J_{y,\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{y,\phi}^T(k) Q_{y,\phi} x_{y,\phi}(k) + \tau_\phi^{*2}(k) R_\phi),$$

sea minimizado. Si existe un control óptimo $\tau_\phi^*(k)$ el cual hace esta tarea tan $x_{3\phi}(k) \rightarrow x_{3\phi}(k)$ podemos diseñar una ley de control óptima $\tau_\phi^*(k)$ para el sistema aproximado:

$$x_{y,\phi}(k+1) = A_{y,\phi} x_{y,\phi}(k) + B_{y,\phi} \tau_\phi^*(k),$$

donde

$$A_{y,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & gT & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}, \quad B_{y,\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

es posible verificar que el par $(A_{y,\phi}, B_{y,\phi})$ es controlable, entonces el control óptimo $\tau_\phi^*(k)$ es

$$\tau_\phi^*(k) = -H_{y,\phi}^{-1} B_{y,\phi}^T P_{y,\phi} A_{y,\phi} x_{y,\phi}^*(k), \quad \forall k \geq 0,$$

donde $H_{y,\phi} = R_\phi + B_{y,\phi}^T P_{y,\phi} B_{y,\phi}$ and $P_{y,\phi}$ es solución única a la *DARE* expresada como sigue:

$$P_{y,\phi} = A_{y,\phi}^T P_{y,\phi} A_{y,\phi} - A_{y,\phi}^T P_{y,\phi} B_{y,\phi} H_{y,\phi}^{-1} B_{y,\phi}^T P_{y,\phi} + Q_{y,\phi}.$$

2.7.4 Control óptimo del subsistema $x - \theta$

Consideramos el subsistema $x - \theta$ definido de la manera siguiente como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= \tau_\theta, \end{aligned}$$

cuya representación en espacio estado, donde: $(x_{1x} = x, x_{2x} = \dot{x}, x_{3\theta} = \theta, x_{4\theta} = \dot{\theta})$ es

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1x} &= x_{2x} \\ \dot{x}_{2x} &= -\frac{1}{m}u \sin x_{3\theta} \\ \dot{x}_{3\theta} &= x_{4\theta} \\ \dot{x}_{4\theta} &= \tau_\theta. \end{aligned} \tag{2.97}$$

y su representación en discreto es:

$$\begin{aligned} x_{1x}(k+1) &= x_{1x}(k) + T x_{2x}(k) \\ x_{2x}(k+1) &= \frac{T}{m} u(k) \sin x_{3\theta}(k) + x_{2x}(k) \\ x_{3\theta}(k+1) &= T x_{4\theta}(k) + x_{3\theta}(k) \\ x_{4\theta}(k+1) &= T \tau_\theta(k) + x_{4\theta}(k). \end{aligned}$$

Aplicamos la ley de control (2.82) y llegamos a:

$$x_{x,\theta}(k+1) = A_{x,\theta}x_{x,\theta}(k) + B_{x,\theta}\tau_\theta^*(k),$$

donde $x_{x,\theta}(k) = [x_{1x}(k) \ x_{2x}(k) \ x_{3\theta}(k) \ x_{4\theta}(k)]^T$, y las matrices $A_{x,\theta}$ y $B_{x,\theta}$ son similares a los dados en (2.96). Entonces la ley de control óptima $\tau_\theta^*(k)$ está dada por:

$$\tau_\theta^*(k) = -H_{x,\theta}^{-1}B_{x,\theta}^T P_{x,\theta} A_{x,\theta} x_{x,\theta}^*(k), \quad \forall k \geq 0,$$

Donde $H_{x,\theta} = R_\theta + B_{x,\theta}^T P_{x,\theta} B_{x,\theta}$ y $P_{x,\theta}$ es única solución a la *DARE*.

2.8 Controlador PID

El controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID), es un controlador muy utilizado, debido a su sencillez de diseño e implementación, pues sólo se necesita sintonizar tres ganancias para que funcione correctamente. La aplicación de un controlador PID consiste en aplicar apropiadamente la suma de los tres tipos de acción de control: una acción proporcional, una acción integral y una acción derivativa [23]. Estas acciones de control se explican a continuación.

- **Acción Proporcional:** La acción de control proporcional para el error actual se expresa como sigue:

$$u(t) = K_p e(t) \tag{2.98}$$

donde K_p es la ganancia proporcional y $e(t)$ es el error actual. Su explicación es sencilla, ya que se trata de incrementar el control cuando el error aumenta (con el signo apropiado) [23]. La función de transferencia para la acción de control proporcional puede ser derivado como:

$$C(s) = K_p. \quad (2.99)$$

- **Acción Integral:** La acción integral es proporcional a la integral del control del error, esto es:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (2.100)$$

donde K_i es la ganancia integral, esto indica que la acción integral está relacionado a los valores pasados del error en el control. La función de transferencia que le corresponde es:

$$C(s) = \frac{K_i}{s}. \quad (2.101)$$

- **Acción derivativa:** Mientras que la acción proporcional está basada en el valor actual del error, la acción integral se basa en los valores pasados del error del control, la acción derivativa se basa en los valores futuros previstos del error del control. Una ley de control derivativa puede expresarse como:

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (2.102)$$

donde K_d es la ganancia derivativa. La función de transferencia del controlador puede deducirse como:

$$C(s) = K_d(s). \quad (2.103)$$

2.8.1 Implementación Digital del PID

Si se adopta una implementación digital del controlador PID, previamente se debe considerar que la ley de control debe ser discretizada. Esto se puede hacer con algún método de discretización. Considere la expresión en tiempo continuo del controlador PID:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (2.104)$$

y defina un tiempo de muestreo Δt . El término integral en (2.104) puede ser aproximado utilizando diferencias finitas hacia atrás como:

$$\int_0^{t_k} e(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^k e(t_i) \Delta t, \quad (2.105)$$

donde $e(t_i)$ es el error del sistema en tiempo continuo en el i th instante de muestreo. Aplicando diferencias finitas hacia atrás también podemos obtener el término derivativo:

$$\frac{de(t_k)}{dt} = \frac{e(t_k) - e(t_{k-1})}{\Delta t}. \quad (2.106)$$

Entonces la ley de control en tiempo discreto se expresa como:

$$u(t_k) = K_p(e(t_k) + \frac{\Delta t}{T_i} \sum_{i=1}^k e(t_i) + \frac{T_d}{\Delta t} (e(t_k) - e_{t_{k-1}})). \quad (2.107)$$

De esta forma el valor de la variable de control es determinada directamente. Por otra parte la variable de control en el instante de tiempo t_k puede ser calculado basado en el valor previo del instante de tiempo $u(t_{k-1})$. Para obtener $u(t_{k-1})$ de $u(t_k)$ se tiene que:

$$u(t_k) = u(t_{k-1}) + K_p \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} + \frac{T_d}{\Delta t} \right) e(t_k) + \left(-1 - \frac{2T_d}{\Delta t} \right) e(t_{k-1}) + \frac{T_d}{\Delta t} e(t_{k-2}) \right]. \quad (2.108)$$

2.8.2 Aplicación de un controlador PID en el seguimiento de una trayectoria

Para implementar este controlador en la plataforma, nuevamente se utilizó el modelo reducido (2.80) como en [10], y se dividió en subsistemas, posteriormente se aplicó una cancelación de no-linealidades.

Subsistema z :

Considere el subsistema correspondiente a la posición vertical:

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \phi - mg.$$

Aplicamos el siguiente control con el objetivo de cancelar las no-linealidades:

$$u_1 = (\cos \theta \cos \phi)^{-1} \quad (2.109)$$

con $\cos \theta \cos \phi \neq 0$, $\theta, \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

y obtenemos un nuevo sistema lineal de la forma:

$$\dot{x}_z = A_z x_z + B_z u_1, \quad (2.110)$$

donde las matrices $A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$.

Entonces podemos implementar un controlador PD y para ello fijamos la referencia en cero y con $m = 1$. Por lo que podemos proponer u_1 como

$$u_1 = -kp_z x_z - kd_z \dot{x}_z. \quad (2.111)$$

donde kp_z , kd_z , son las ganancias proporcional y derivativa del subsistema z .

Se obtiene la determinante de $[sI - (A + BK)]$, donde los valores de $k_{p,z} = 0.55$, $kd_z = 0.35$ fueron elegidas experimentalmente para la plataforma utilizada:

$$P(s) = s^2 + \frac{7}{20}s + \frac{11}{20} \quad (2.112)$$

Las raíces obtenidas son:

$$s_1 = -0.1750 + 0.7207i,$$

$$s_2 = -0.1750 - 0.7207i,$$

Las raíces se encuentran en la parte real negativa por lo que podemos concluir que el sistema se comporta en forma estable.

Subsistema ψ :

$$\ddot{\psi} = \tau_\psi, \quad (2.113)$$

Cuya representación en espacio estado es:

$$\dot{x}_\psi = A_\psi x_\psi + B_\psi \tau_\psi \quad (2.114)$$

$$\text{donde } A_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_\psi = \begin{bmatrix} x_{1,\psi} \\ x_{2,\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad B_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y se puede elegir un controlador Proporcional Derivativo, suponiendo que la referencia es cero,

$$\tau_\psi = -kp_\psi x_{1,\psi} - kd_\psi x_{2,\psi}, \quad (2.115)$$

donde $kp_\psi = 1.37$, $kd_\psi = 0.37$.

Para verificar la colocación de las raíces, se obtiene la determinante de $[sI - (A + BK)]$,

$$P(s) = s^2 + \frac{37}{100}s + \frac{137}{100} \quad (2.116)$$

cuyas raíces son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.1850 + 1.1558i, \\ s_2 &= -0.1850 - 1.1558i, \end{aligned} \quad (2.117)$$

Las raíces están en la parte real negativa por lo que se puede decir que el subsistema es estable.

Subsistema $y - \phi$:

Considere el subsistema:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\ \ddot{\phi} &= \tau_\phi \end{aligned} \quad (2.118)$$

sustituyendo el control (2.109) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= mg \tan \phi \\ \ddot{\phi} &= \tau_\phi \end{aligned} \quad (2.119)$$

con $m = 1$. Suponiendo que τ_ϕ puede estabilizar al sistema se puede asumir que $\tan \phi = \phi$ y entonces obtenemos una nueva aproximación lineal del sistema.

$$\dot{x}_{y,\phi} = A_{y,\phi}x_{y,\phi} + B_{y,\phi}\tau_\phi \quad (2.120)$$

donde $A_{y,\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_{y,\phi} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$, $B_{y,\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

La referencia está fijada en cero y se considera $g = 9.8$, se puede definir el control τ_ϕ como:

$$\tau_\phi = -kp_1y - kd_1\dot{y} - ki_1 \int_0^t ydt - kp_2\phi - kd_2\dot{\phi} - ki_2 \int_0^t \phi dt. \quad (2.121)$$

donde $kp_1 = 0.1$, $kd_1 = 0.89$, $ki_1 = 0.09$, $kp_2 = 0.98$, $kd_2 = 0.3$ y $ki_2 = 0$, son las ganancias para el controlador diseñado, éstas fueron elegidas experimentalmente. Para realizar el análisis de controlabilidad, se define $\sigma_1 = \int_0^t ydt$, y $\sigma_2 = \int_0^t \phi dt$, al derivar ambas expresiones se obtiene $y(t)$ y $\phi(t)$ respectivamente. Agregamos dichas variables y se obtiene un sistema aumentado.

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}_{y,\phi}\hat{x}_{y,\phi} + \hat{B}_{y,\phi}\tau_\phi, \quad (2.122)$$

donde $\hat{A}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} A_{y,\phi} & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{x}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

El control τ_ϕ se puede expresar como $-K\hat{x}$ donde $K = -[kp_1 \ kd_1 \ kp_2 \ kd_2 \ ki_1 \ ki_2]$. De acuerdo al criterio de rango descrito en [7] si se cumple lo siguiente:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A_{y,\phi} & B_{y,\phi} \\ c & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (2.123)$$

donde n es el número de variables de estado y m el número de controles, se puede asumir que el par $(A_{y,\phi}, B_{y,\phi})$ es controlable y se puede hallar una K tal que $sI - (\hat{A} + \hat{B}K)$ sea Hurwitz. Utilizando las ganancias anteriormente planteadas podemos hallar el siguiente polinomio característico:

$$P(s) = s^6 + \frac{337}{100}s^5 + \frac{737}{100}s^4 + \frac{4361}{500}s^3 + \frac{49}{50}s^2 + \frac{441}{500}s, \quad (2.124)$$

y las raíces obtenidas son:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0.0000 + 0.0000i \\ s_2 &= -0.7457 + 1.9641i, \\ s_3 &= -0.7457 - 1.9641i, \\ s_4 &= -1.8534 + 0.0000i, \\ s_5 &= -0.0126 + 0.3281i, \\ s_6 &= -0.0126 - 0.3281i. \end{aligned} \quad (2.125)$$

De acuerdo al lugar de las raíces se puede concluir que el sistema se comportará de manera estable, note que una raíz es cero debido al criterio de rango explicado anteriormente, sin embargo puede no ser cero, esto puede verse claramente utilizando un método óptimo como la función *lqr* de matlab, donde ese polo es muy pequeño pero sigue siendo negativo.

Subsistema $x - \theta$:

Considere la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= u \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= \tau_\theta \end{aligned} \quad (2.126)$$

Se sustituye el control (2.109) y de manera similar al subsistema anterior se obtiene una aproximación lineal:

$$\dot{x}_{x,\theta=A_{x,\theta}x_{x,\theta}+B_{x,\theta}\tau_\theta} \quad (2.127)$$

$$\text{donde } A_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_{x,\theta} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad B_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se puede definir el control τ_θ cuando la referencia se fija en 0, con $g = 9.8$ de manera siguiente:

$$\tau_\theta = -kp_1x - kd_1\dot{x} - ki_1 \int_0^t xdt - kp_2\theta - kd_2\dot{\theta} - ki_2 \int_0^t \theta dt. \quad (2.128)$$

donde las ganancias $kp_1 = -0.1$, $kd_1 = -0.89$, $ki_1 = -0.09$, $kp_2 = 0.98$, $kd_2 = 0.3$ y $ki_2 = 0$, se eligieron experimentalmente.

Similar al subsistema anterior defina $\sigma_1 = \int_0^t xdt$, y $\sigma_2 = \int_0^t \theta dt$, al derivar ambas expresiones se obtiene $x(t)$ y $\theta(t)$ respectivamente. Se obtiene un nuevo sistema:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}_{x,\theta}\hat{x}_{x,\theta} + \hat{B}_{x,\theta}\tau_\theta, \quad (2.129)$$

$$\text{donde } \hat{A}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} A_{x,\theta} & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El control τ_θ se puede expresar como $-K\hat{x}$ donde $K = -[kp_1 \quad kd_1 \quad kp_2 \quad kd_2 \quad ki_1 \quad ki_2]$. Utilizando un criterio similar al subsistema anterior, el par $A_{x,\theta}, B_{x,\theta}$ es controlable. Finalmente se puede hallar una K tal que $sI - (\hat{A} + \hat{B}K)$ sea Hurwitz. Con las ganancias presentadas anteriormente se puede obtener el polinomio característico siguiente:

$$P(s) = s^6 + 3.37s^5 + 7.37s^4 + 8.7220s^3 + 0.98s^2 + 0.8820s, \quad (2.130)$$

donde las raíces obtenidas son:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0.0000 + 0.0000i \\ s_2 &= -0.7457 + 1.9641i \\ s_3 &= -0.7457 - 1.9641i \\ s_4 &= -1.8534 + 0.0000i \\ s_5 &= -0.0126 + 0.3281i \\ s_6 &= -0.0126 - 0.3281i. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Debido a la localización de las raíces y bajo un argumento similar al subsistema anterior se puede concluir que este subsistema es estable.

2.9 Conclusiones

El producto final es la síntesis de un control óptimo en horizonte finito, el cual como se ha explicado permitirá elegir un tiempo determinado de convergencia, aunado a ello, primero debemos resolver la ecuación algebraica discreta de Riccati, lo cual construirá la variable adjunta de adelante hacia atrás. Para poder sintetizar el control fue preciso realizar una cancelación de no linealidades. Pero es claro que el control en la escena final deberá enfrentarse a un sistema no lineal.

De la misma manera se realizó la síntesis de un control de horizonte infinito, lo cual podemos concluir que al tener la forma de un controlador Proporcional Derivativo, no será difícil elegir la penalizaciones para seguir una trayectoria. Para ésta forma del control óptimo debemos igual discretizar el sistema y utilizar la función de Matlab *LQR*.

Finalmente se utiliza un control PID el cual fue sintonizado experimentalmente, los resultados se muestran en el apartado de resultados.

Capítulo 3

Descripción de la plataforma

3.1 Introducción

En el presente capítulo se abordará el proceso de obtención de la posición del cuadricóptero, las partes de la plataforma, el software utilizado, y de las características de hardware que se deben cumplir para que las mediciones sean confiables. El control del cuadricóptero es un proceso donde es imprescindible tener las mediciones de su posición y velocidad, tanto espacial como angular, esta última es obtenida mediante una central inercial, que combina dispositivos giróscopos, acelerómetros y magnetómetro que entregan datos de la orientación del vehículo, pero el punto importante es cuando se desea conocer la posición espacial del vehículo. Este proceso es relativo, pues depende de donde se encuentre la referencia, para ello en exteriores se lleva a cabo con el uso de un dispositivo de posicionamiento global, esto permite obtener la posición mediante el uso de satélites y aplicando la técnica de triangulación.

Dado que para este proyecto se necesita mayor precisión, las pruebas las hemos realizado con ayuda de un sistema de visión *Optitrack Flex 3* el cual es una herramienta muy poderosa que mediante la reconstrucción de imágenes puede entregar la posición en una resolución de milímetros de un objeto de interés. Este sistema cuenta con 12 cámaras característica que lo hace robusto en caso de que alguna de ellas pierda visibilidad con el objeto.

3.2 Sistema de visión optiTrack Flex 3

El sistema de visión Flex 3 de Optitrack (3.1) de la compañía Natural Point, ofrece un proceso de captura de imagen integrada, permite procesar y seguir el movimiento de modo robusto en tan sólo un paquete compacto. Este paquete es personalizable pues una característica es que los lentes son cambiables, cuenta con un filtro *Switcher technology* exclusivo de Optitrack. Es escalable modular, y actualmente se le puede encontrar a un precio relativamente bajo [13].

Este sistema es rápido, preciso y eficiente para el seguimiento, es capaz de capturar el movimiento de objetos muy rápido, con su obturador global y su velocidad de captura de 100 FPS. Cuenta con una resolución máxima de 640×480 VGA a través de su avanzado algoritmo de procesamiento de imágenes, este sistema puede también seguir marcadores (3.2) bajo movimientos apenas milimétricos con buen desempeño.



Figura 3.1: Optitrack Flex 3

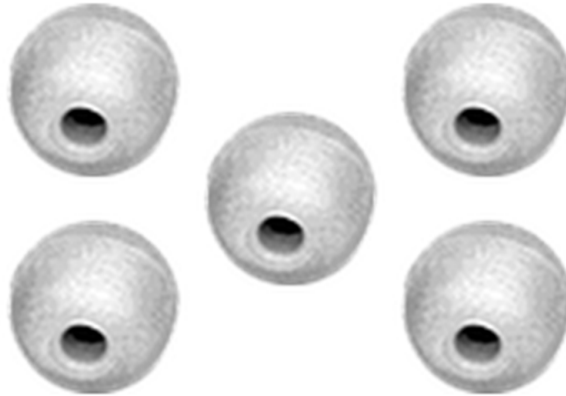


Figura 3.2: Marcadores para el Optitrack

3.2.1 Procesamiento de imágenes en el Flex 3

El sistema *Flex 3* puede enviar distintos tipos de imágenes pre-procesadas a la PC, con el objetivo de disminuir el ancho de banda y la carga del CPU consecuentemente tiene un eficiente seguimiento del movimiento. Los tipos de procesamiento de imágenes incluyen:

- **Precisión en escala de grises:** Mejor detección de marcadores. El procesamiento en escala de grises es propio del Flex 3. Envía información de los marcadores vistos en la figura (3.2) en escala de grises a la PC, para calcular la posición del objeto, el tamaño y la redondez del objeto utilizando su propio método preciso de procesamiento. Proporciona un mejor desempeño que otros modos, pero consume mas recursos y ancho de banda de USB (3.3).
- **Segmento:** Detección balanceada de marcadores (3.4). Similar a la precision en escala de grises. Procesamiento de flujo de linea que agiliza la información del marcador para una detección más eficiente por parte del CPU. Proporciona un equilibrio entre la precisión y el uso de ancho de banda del USB.

- **Objeto:** El CPU más eficiente para detección de marcadores. Ofrece un uso más eficiente del ancho de banda USB pero proporciona menos información del marcador a la PC que en otros modos (3.5).
- **Escala de grises comprimido MJPEG:** Marcos de resolución en escala de grises completa, comprimida sobre la cámara para capacidades de escena altamente escalables.
- **Escala de grises RAW:** Resolución total. Escala de grises sin comprimir.

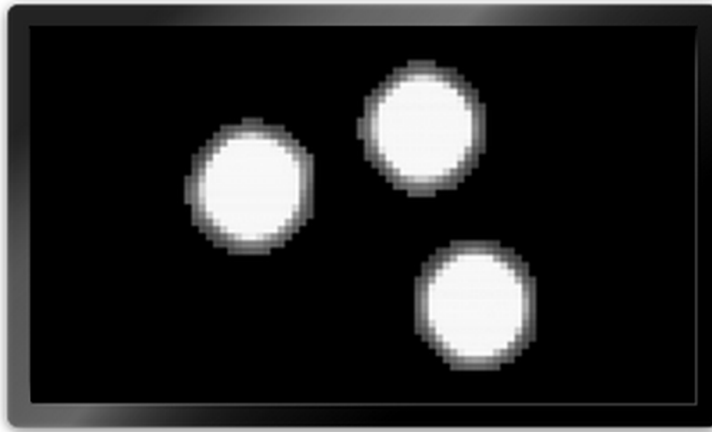


Figura 3.3: Precisión en escala de grises

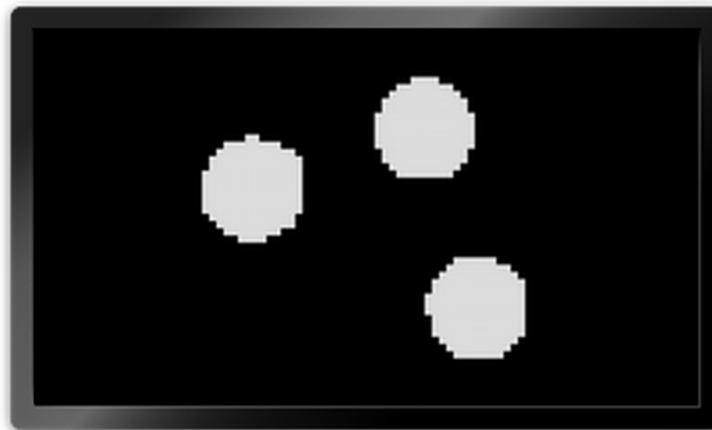


Figura 3.4: Segmentación

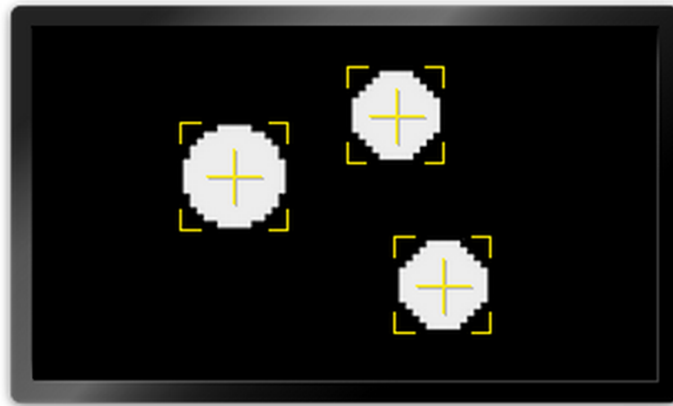


Figura 3.5: Detección del objeto

3.2.2 Control de Cámaras

El sistema cuenta con múltiples accesos para las configuraciones con algún software de aplicación de Optitrack, tales como el *Camera SDK* para un mejor control sobre la captura y la información que entrega a la PC. Las configuraciones posibles incluyen:

- Tipo de procesamiento de imagen
- Velocidad de cuadro
- Exposición
- Umbral
- Iluminación
- Conmutación de Filtro
- Led de estado de control

3.2.3 Conmutación de filtro

Puede alternar el uso de las cámaras entre luz infrarroja o visible con una simple pulsación del mouse, además puede cambiar el filtro de paso de 800nm del Flex 3 aún mientras esté en funcionamiento para así acceder al espectro visible de vídeo en escala de grises, para una mejor calidad de imagen.

3.2.4 Lentes intercambiables M12

El sistema Flex 3 puede optimizarse por una variedad de aplicaciones, tal como sus lentes intercambiables *M12* (Figura 3.6), se puede elegir entre 3.5 mm , 4.5 mm y 5.5 mm de longitud focal efectiva (EFL), para así adaptar las cámaras a una captura de volumen ideal. Los tres lentes cuentan con un enfoque especial, con muy baja distorsión y aperturas rápidas de $1.6F$ para aumento de la distancia de seguimiento. Las aplicaciones típicas utilizan lentes de 3.5 mm para volúmenes de captura en espacios muy pequeños, y de 4.5 mm para volúmenes grandes de captura y lentes de 5.5 mm para captura facial.



Figura 3.6: Lentes M12

3.2.5 Diseño compacto para un bajo perfil de integración

Las cámaras Flex 3 pueden integrarse de forma discreta en grandes instalaciones, y le permiten optimizar los volúmenes de captura en una instalación de escritorio para reconocimiento de rostro y el seguimiento de los cuerpos rígidos. Se puede elegir entre cámaras fotográficas

o cinematográficas rojas, para mayor visibilidad o negro para sutilezas.



Figura 3.7: Forma compacta de las cámaras Flex 3

3.2.6 Modo de luz estroboscópica de alta potencia

Cuando se utilizan con un *OptiHub* (Ver figura 3.9), de Optitrack, el concentrador USB es de alta velocidad. Las cámaras Flex 3 pueden funcionar en modo alta potencia para obtener energía adicional para el estroboscópico IR. La potencia extra aumenta el rango de captura y reduce la pérdida del marcador. El modo de alimentación estándar de la Flex 3, es por USB para su uso en conexiones directas a la PC.



Figura 3.8: Emisión IR de las cámaras Flex 3

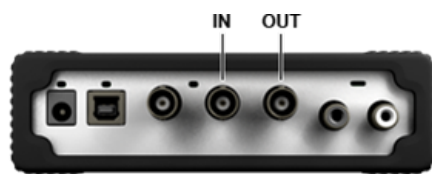


Figura 3.9: OptiHub

3.2.7 Compatibilidad con versiones V100 y V100:R2

El sistema Flex 3 incluye compatibilidad con instalaciones de cámara V100 existentes en el modo tradicional con cable de sincronización y V100, con instalaciones R2 en modo OptiSync o con cable de sincronización. OptiSync sólo está disponible en las cámaras Flex 3, en conexión con un OptiHub.



Figura 3.10: Compatibilidad con instalaciones V100, V100:R2

3.3 La plataforma experimental

El vehículo aéreo en el que se realizaron las pruebas fue construido tomando de base el chasis de un *Parrot* de la compañía Francesa de Drones, ello para no tener mucho peso. Su sistema de orientación es una IMU *3DM-GX3* de la compañía MicroStrain, el cual entrega los datos de orientación y la velocidad angular, para el sistema de comunicación se utiliza el dispositivo

X-bee Pro S1, la fuente de voltaje es un regulador de tension variable que puede entregar hasta 40A (3.11). Todo ello se integra con una tarjeta *Rabbit Core RCM4300*.



Figura 3.11: Fuente de poder de hasta 40A

A este chasis se le montaron motores X-BL-52s de HACKER motors Germany (Figura 3.12)

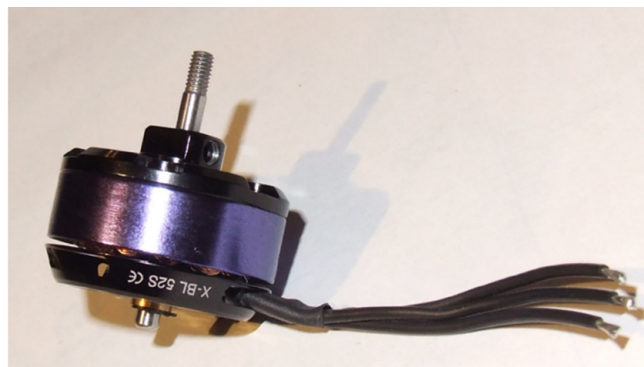


Figura 3.12: Motores X-BL-52s

3.3.1 Controladores de velocidad

Estos motores son compatibles con los ESC's (Electronic Speed Controller) X-BLDC brushless motor controllers (3.13), éste va montado uno en cada eje, puesto que los motores se controlan de manera individual.

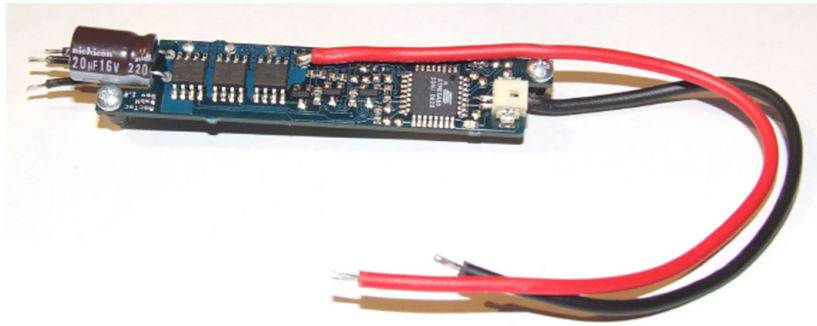


Figura 3.13: Brushless motor controllers X-BLDC

3.3.2 Central inercial 3DM-GX3

La 3DM-GX-35 es un Sistema de Referencia de Posición y Rumbo (AHRS, por sus siglas en inglés) de alto desempeño que cuenta con un GPS, combina tecnología de sensores MEMS con un receptor embebido GPS de alta sensibilidad. Incorpora un acelerómetro triaxial, un giroscopio triaxial, un magnetómetro triaxial, sensores de temperatura y un procesador abordo que corre un sofisticado algoritmo de fusión para proporcionar mediciones de orientación inercial y GPS. Los datos del receptor GPS están sincronizados en tiempo con los sensores inerciales y están disponibles para el usuario como paquetes (ya sea por la técnica Polling o flujo continuo). La 3DM-GX -35 proporciona una plataforma idónea para que cada usuario resuelva su problema de navegación, (véase la figura 3.14).



Figura 3.14: IMU 3DM-GX3 de MicroStrain

El esquema general de este sensor puede verse en la siguiente imagen (3.15)

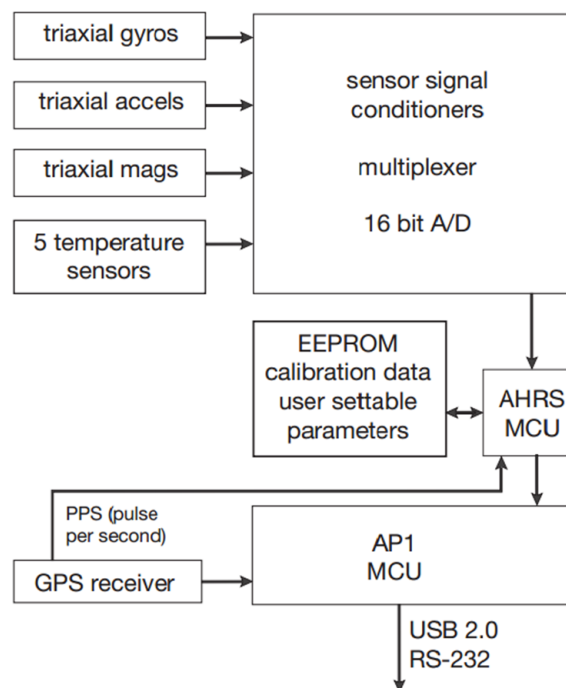


Figura 3.15: Esquema general de la IMU 3DM-GX3 de MicroStrain

La 3DM-GX -35 ofrece un rango de medidas completamente calibradas incluyendo la aceleración, la velocidad angular, el campo magnético, $\delta\theta$ y los vectores de velocidad $\delta\dot{x}$, los

ángulos de Euler (roll, pitch y yaw), la matriz de rotación y el cuaternion. Sus cantidades de datos del GPS incluyen posición LLH, velocidad NED, posición y velocidad ECEF, datos DOP, tiempo UTCm, tiempo GPS, información de reloj, GPS fijo y SVI. Todas las cantidades de temperatura están completamente compensadas y están matemáticamente alineados a un sistema coordinado ortogonal, las cantidades de velocidad angular son además corregidas en cuanto a g-sensibilidad con un factor de escala de tercer orden para la no-linealidad. La arquitectura del 3DM-GX -35 ha sido diseñada cuidadosamente para eliminar sustancialmente las fuentes más comunes de error tales como la histéresis inducida por los cambios de temperatura y la sensibilidad de las variaciones de la fuente de voltaje. La derivación en el Gyro es eliminada en modo AHRS por la referencia magnética norte y la gravedad de la tierra y compensando así su inclinación [12].

Beneficios de el 3DM-GX -35:

Mejor en su clase

- Posición precisa, estimación en velocidad y rumbo.
- Alta velocidad en el muestreo y salida de datos flexible.
- Alto desempeño bajo ruidos por vibraciones.

Fácil de usar

- Pequeño, mas ligero, GPS/INS industrial disponible.
- Integración sencilla con el apoyo completo del SDK y de la API.

Rentable

- Costo reducido y tiempo de compra mínimo para aplicaciones del cliente.
- Descuentos por grandes volúmenes.

3.3.3 Sistema de comunicación XBee Pro S1

Para poder recibir los datos de la posición provenientes del análisis del sistema Optitrack el vehículo está dotado de un dispositivo de comunicaciones serial *XBee* de la compañía *Digi* [6] el cual permite la comunicación unidireccional (específicamente para este proyecto), como lo muestra la figura (3.16).



Figura 3.16: XBee Pro S1

La familia XBee proporciona módulos embebidos de RF OEM con una placa de circuito impreso común compartida para muchas plataformas incluyendo multipunto y Topologías ZigBee/Mesh y ambos trabajando a 2.4 GHz y 900 MHz . Al ser OEM pueden sustituir un Xbee a otro, dependiendo de las necesidades dinámicas, con un mínimo desarrollo, menor riesgo y menor tiempo.

¿Porqué los módulos XBee multipunto RF?: Los módulos XBee multipunto RF son ideales para aplicaciones que requieren baja latencia y sincronización de la comunicación. Proporciona una rápida comunicación robusta en punto a punto, (*peer-to-peer*), y configuraciones en estrella multipunto. Los productos XBee multipunto permiten una conectividad robusta en cada punto final. Ya sea desplegado como un reemplazo del cable puro para la comunicación serial simple o como parte de una red más compleja hub-and-spoke de sensores. Los módulos de XBee RF multipunto maximizan el rendimiento inalámbrico y la facilidad

de desarrollo.

Características técnicas principales

- Potencia de salida: 10 mw - 63 mw .
- Rango en interiores: Arriba de 90 m .
- Rango en exteriores: Arriba de 1.6 km .
- Sensibilidad del receptor: -100 dBm .
- Velocidad de transmisión RF: 250 Kbps .
- Frecuencia de operación: 2.4 GHz .
- Velocidad de la interface de datos: 115.2 Kbps .
- Capacidad de canales: 12 canales.
- Voltaje de alimentación: $2.8\text{-}3.4\text{ VDC}$.

Beneficios

- Topologías de red multipunto 802.15.4
- 2.4 GHz a través de la web.
- 900 MHz para largo alcance.
- Completamente interoperable con otros productos de red Digi Drop-in, incluyendo hosts, y dispositivos adaptadores extendidos.
- Circuito impreso común para varios dispositivos RF.
- Bajo consumo en modo descanso.
- Múltiples opciones para antena.

- Temperatura industrial (-45 y 85) grados celsius.
- Bajo consumo y largo alcance.

3.4 Microprocesador RabbitCore RCM4300

La tarjeta RabbitCore RCM4300 ofrece una gran cantidad de memoria para aplicaciones intensivas. El slot de tarjeta MicroSD (Véase la figura 3.17) puede manejar tarjetas de almacenamiento de hasta 2 Gb, convirtiéndolo en un modulo ideal para aplicaciones de registro de datos. En combinación con su sistema de archivos FAT, el usuario puede fácilmente acceder a los datos a través del servidor web. *Dynamic C* añade soporte a código *Megabyte* (MCS) el cual permite el uso de 1 Mb de memoria SRAM a bordo para la memoria compartida y el espacio de código.



Figura 3.17: Tarjeta RabbitCore RCM4300

La tarjeta RabbitCore RCM4300 es compatible (Pines) con otros módulos RCM4XXX lo cual permite la migración a otros diseños con requerimientos específicos. El kit de desarrollo hace que la evaluación sea fácil en hardware y software necesario para empezar a trabajar rápidamente.

El administrador es una característica de los dispositivos y componentes Digi. Administrar los dispositivos proporciona un robusto conjunto de herramientas de gestión de red, que incluye la autenticación, gestión de la configuración, gestión de cuenta, actualizaciones y alertas asíncronas, actualización de software correspondiente, almacenamiento de datos en red y la programación de soluciones.

Características técnicas principales

- Microprocesador: Rabbit 4000 a 58.98 *MHz*
- Puerto Ethernet: 10/100*Base – T*, RJ45, 3 leds.
- SRAM para datos: 512 *Kb*, 8 bits.
- SRAM para ejecución de programas: 1 *Mb*, 8 bits.
- Memoria Flash Serial para el programa: 2 *Mb*
- Memoria para almacenamiento de datos: MicroSD 128 *MB* a 2 *GB*
- Puertos I/O de propósito general: 28 configurables.
- Entradas analógicas: 8 canales con 12 bits de resolución.
- Puertos seriales: 5 compartidos de alta velocidad, todos configurables en modo asíncrono.
- Tiempo real: sí.
- Relojes: 10 de 8 bits, 1 de 10 *bits*, y 1 de 16 *bits*.
- Watchdog: sí.
- Puertos PWM: 4 con 10 *bits* de resolución.
- Puerto I2C: sí.

La tarjeta RabbitCore es la que integra los motores mediante los controladores de velocidad, la central inercial, dando como resultado el cuadricóptero en configuración de X tal como se muestra en la figura siguiente (3.18).



Figura 3.18: Plataforma completa

Así, una vez que se tiene la plataforma completa el proceso de comunicación para hacer pruebas con los controles siguientes tiene la siguiente estructura:

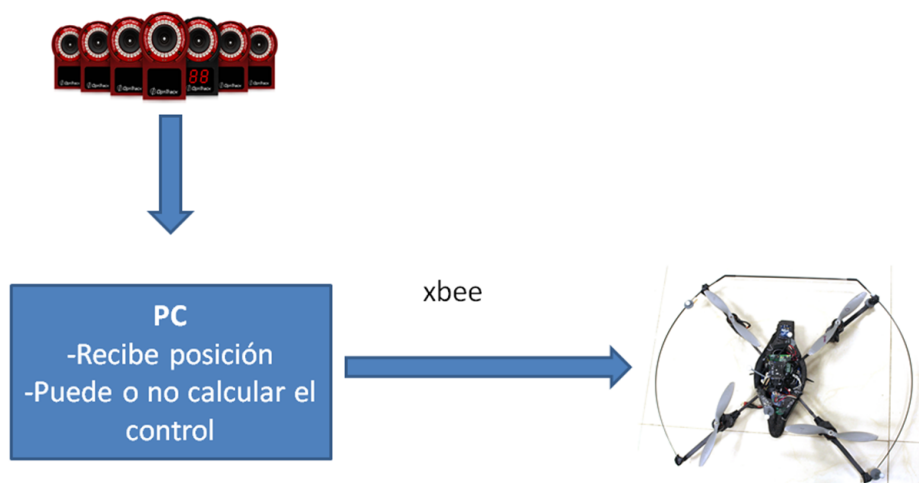


Figura 3.19: Proceso general de comunicación

Inicialmente para poder utilizar el sistema de visión Optitrack, se debe contar con un software del mismo fabricante, en este caso utilizamos el programa *Motive* el cual provee una interfaz en tiempo real, donde podemos ubicar fácilmente las mediciones de la posición espacial y la orientación del vehículo, para ello es importante recordar como se expuso anteriormente que las cámaras emiten una fuente de luz infrarroja el cual rebota en los marcadores y a partir de ello puede unir dichos marcadores para formar un objeto.

Una vez que ya se tiene el objeto, se debe verificar que las cámaras no pierdan visión con algún marcador, en el espacio de trabajo, el fabricante recomienda al menos tener tres marcadores para formar un objeto, pero a fin de obtener resultados idóneos se comprobó que al menos se debe contar con 6 marcadores así, si el sistema llega en algún momento a perder un marcador, cinco serán suficientes para obtener buenas mediciones.

En este mismo software podemos configurar aspectos tales como, filtrado de imágenes, eliminación de ruido debido a la iluminación, reasignación del punto de origen, transmisión de datos hacia una PC, entre otras características. Es importante mencionar que sin importar

las condiciones de las instalaciones siempre existirá el problema de cambios de iluminación por lo que este software es muy útil para auxiliar al sistema en general y así obtener mediciones más precisas como sea posible.

Para poder utilizar los datos obtenidos por el sistema de visión, se desarrolló un programa en lenguaje *C* donde básicamente se capturan los datos mediante comunicación Wi-Fi para ser procesados, calcular una acción de control (en el caso del control óptimo de horizonte finito), o sólo enviar la información de la posición espacial y orientación (para el caso del control óptimo de horizonte infinito). Entre las características mas importantes de este proceso figuran una comunicación serial mediante el dispositivo Xbee con la tarjeta RabbitCore, a 38400 Baudios.

3.5 Conclusiones

La plataforma descrita mostró un desempeño aceptable, hubo instantes en que las cámaras perdían información de algún marcador, pero aun así, fueron suficientes para poder ubicar al objeto en movimiento. En general podemos concluir que el fenómeno más importante es lograr posicionar de manera correcta los marcadores sobre la plataforma para que el software no emita datos erróneos, esto involucra que la disposición de dichos marcadores sea lo más antisimétrica posible.

La plataforma sólo fue probada con un cable de alimentación, eso lo hacia mas ligero, característica importante al momento de hacer vuelos en interiores, ya que si ocurre un accidente en vuelo, los daños son menores. Sin embargo el hecho de que tuviese poco peso, también se vio afectado por las perturbaciones de viento debido a su misma fuerza de sustentación.

Capítulo 4

Resultados de simulación y experimentales

4.1 Introducción

En este capítulo se mostrará los resultados obtenidos en simulación y experimentales del comportamiento del control combinado con una linealización exacta. Inicialmente mostramos los resultados de simulación para tiempo continuo de horizonte finito y posteriormente para tiempo discreto en horizonte finito, se muestran para ambos experimentos los gráficos del comportamiento de la posición, la orientación, los controles hallados y el seguimiento, es decir la salida contra la referencia. Cabe denotar que posteriormente se muestran los resultados obtenidos con un controlador (PID) el cual fue simulado bajo las mismas condiciones que el controlador óptimo, esto servirá para comparar el consumo de energía que hay entre ambos.

4.2 Resultados del controlador PID

En esta sección se muestran los resultados de simulación en tiempo continuo para un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) con el objetivo de mostrar la diferencia entre el seguimiento y el consumo de energía que ambos controladores desempeñan bajo las mis-

mas circunstancias, es decir, misma altura, misma curva a seguir, misma plataforma e igual tiempo de muestreo. Al ser un sistema no lineal, las ganancias fueron obtenidas de manera experimental, para esta simulación quedaron configurados como sigue:

kp	kd	ki
1	3	1

Tabla 4.1: Ganancias para el subsistema z

kp	kd	ki	kp	kd	ki
1	5	1	15	15	1.36

Tabla 4.2: Ganancias para el subsistema $x - \theta$

kp	kd	ki	kp	kd	ki
1	6	1.36	15	15	1.36

Tabla 4.3: Ganancias para el subsistema $y - \phi$

kp	kd	ki
1	8	0.2

Tabla 4.4: Ganancias para el subsistema ψ

Como primer punto, se desea seguir una curva dada por el polinomio siguiente $y = -0.007x^2 + 1.4061x - 0.6197$, el resultado se muestra en la figura (4.1)

La figura siguiente muestra la posición de cada uno de los ejes, x , y y z (4.2). Las condiciones son similares al control óptimo.

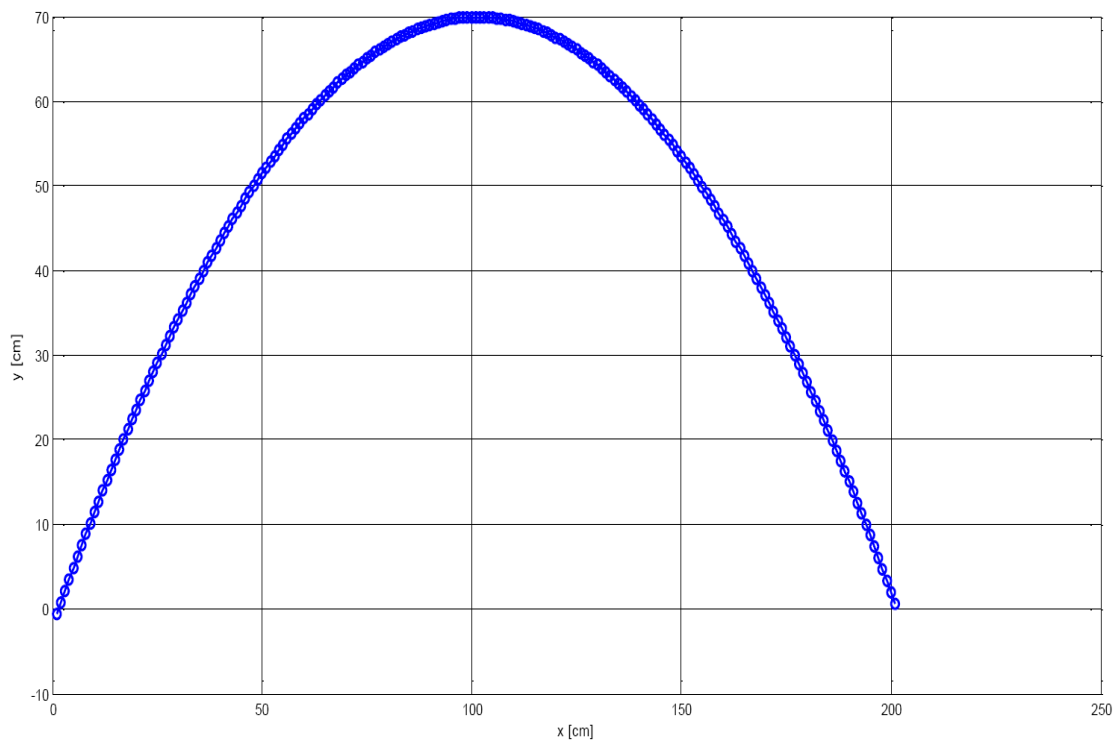
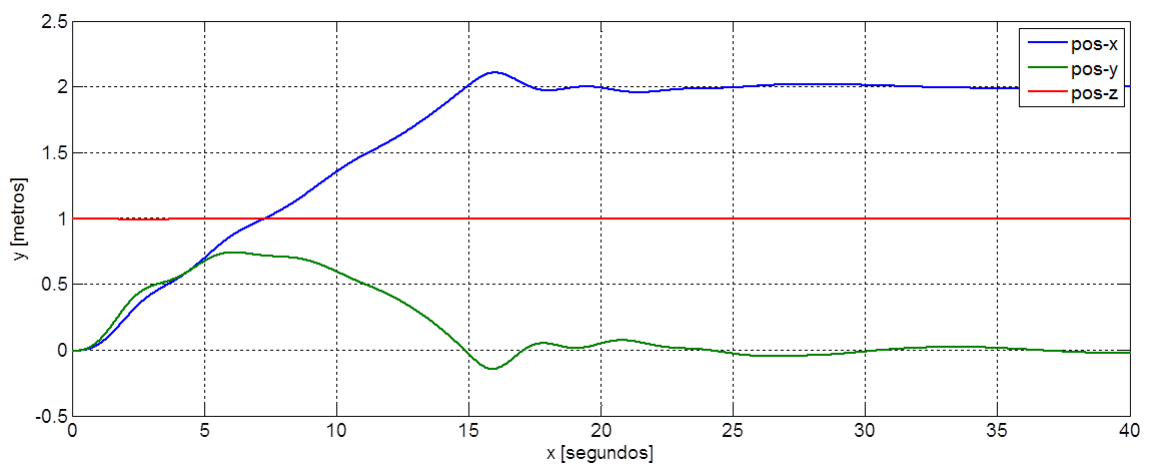


Figura 4.1: Señal de referencia

Figura 4.2: Posición en los ejes x , y , y z

El comportamiento de la orientación puede verse en la siguiente gráfica.

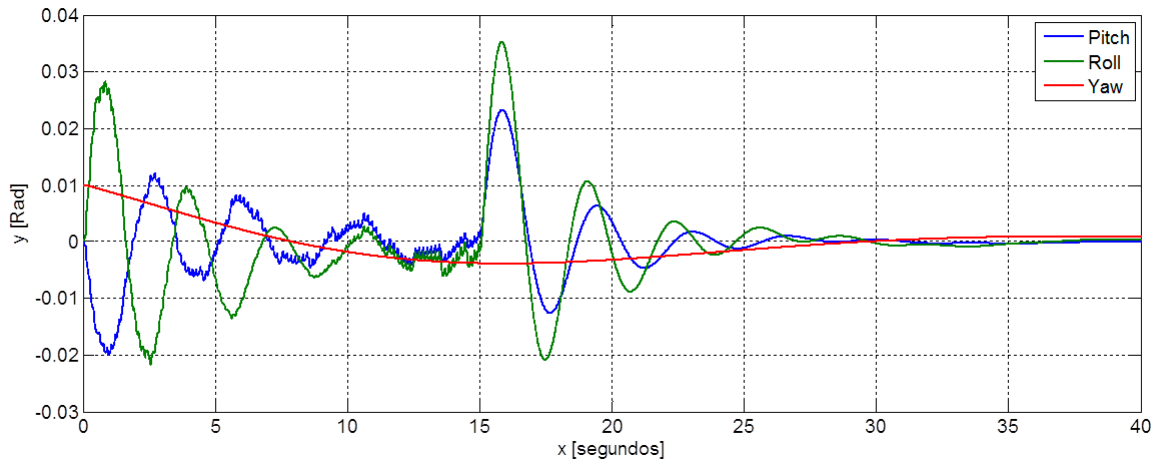


Figura 4.3: Orientación con PID

Los controles se ven en la siguiente figura:

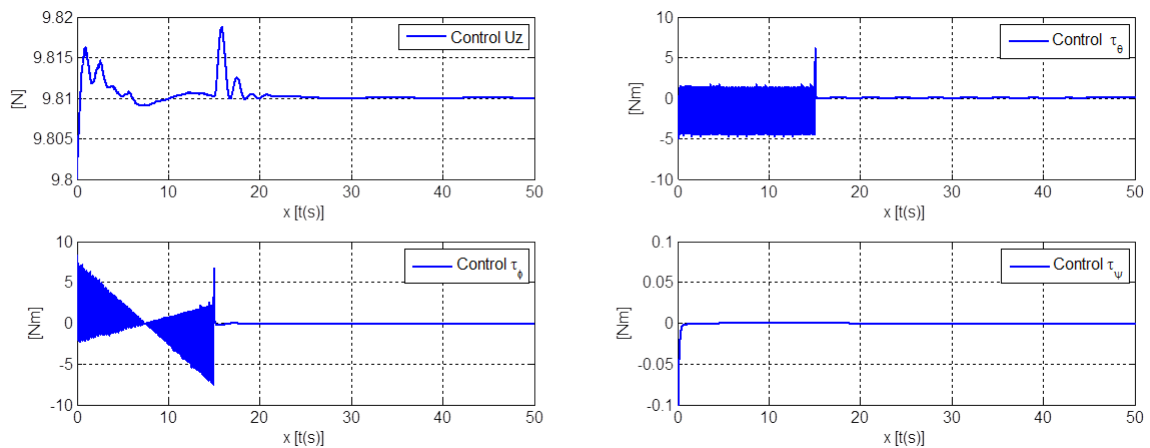


Figura 4.4: Controladores PID u_z , τ_θ , τ_ϕ y τ_ψ

Finalmente vemos el seguimiento de la referencia, podemos apreciar que con estas ganancias que fueron obtenidas experimentalmente el seguimiento no es tan suave como el del control óptimo:

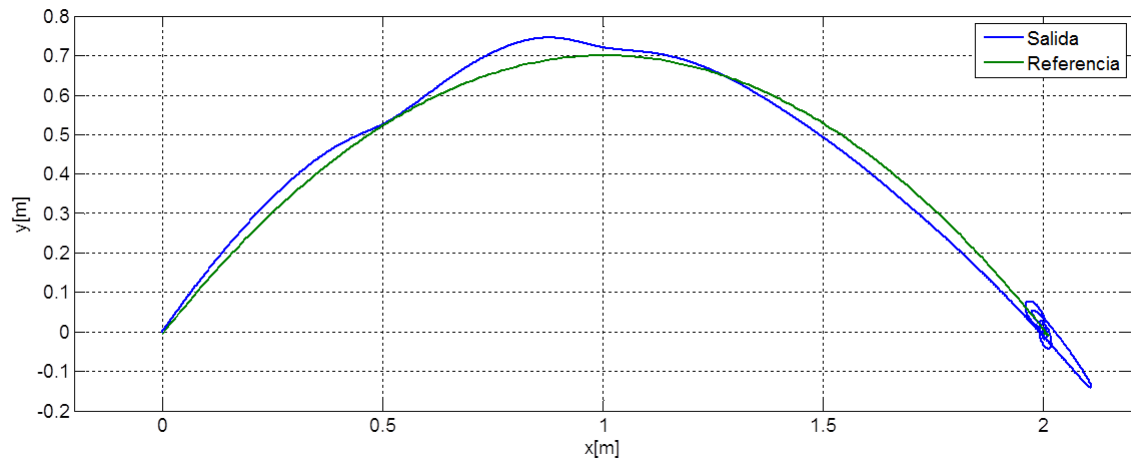


Figura 4.5: Seguimiento de la curva con PID

4.3 Resultados del control óptimo

4.3.1 Resultados de simulación en tiempo continuo

Para lograr el objetivo de esta tesis se procedió a dividir el modelo del cuadricóptero en subsistemas, combinado con una cancelación de no linealidades para poder sintetizar el control, posteriormente los cuatro controles hallados fueron simulados en tiempo continuo y discreto.

Los resultados obtenidos fueron desarrollados considerando los siguientes parámetros:

Para la dinámica en Z el parámetro S que penaliza la llegada a la referencia, Q que penaliza al estado y R que penaliza el control fueron seleccionados como sigue:

$$Q_z = \begin{bmatrix} 240 & 0 \\ 0 & 350 \end{bmatrix}, S_z = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}, R_z = 50 \quad (4.1)$$

Es importante señalar que el seguimiento sólo es en dos ejes x y y por lo que las matrices Q y R fueron seleccionados cuidadosamente para poder llevar a cabo el seguimiento:

Parámetros para el subsistema $x - \theta$:

$$Q_x = \begin{bmatrix} 260 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 260 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 470 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450 \end{bmatrix}, S_x = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, R_x = 12 \quad (4.2)$$

Parámetros para el subsistema $y - \phi$:

$$Q_y = \begin{bmatrix} 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 130 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140 \end{bmatrix}, S_y = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, R_y = 12 \quad (4.3)$$

Para el ángulo de yaw(guiñada) igual que la posición en Z no se mueven durante la trayectoria por lo que podemos mover mas libremente sus parámetros, para esta simulación

los parámetros para el ángulo ψ son las siguientes:

$$Q_\psi = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}, S_\psi = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, R_\psi = 15 \quad (4.4)$$

En la gráfica siguiente podemos observar el comportamiento de la posición de cada uno de los ejes, como se mencionaba con anterioridad el eje z no se mueve, es decir el cuadricóptero se mantiene a una altura constante y la trayectoria se realiza en x y y .

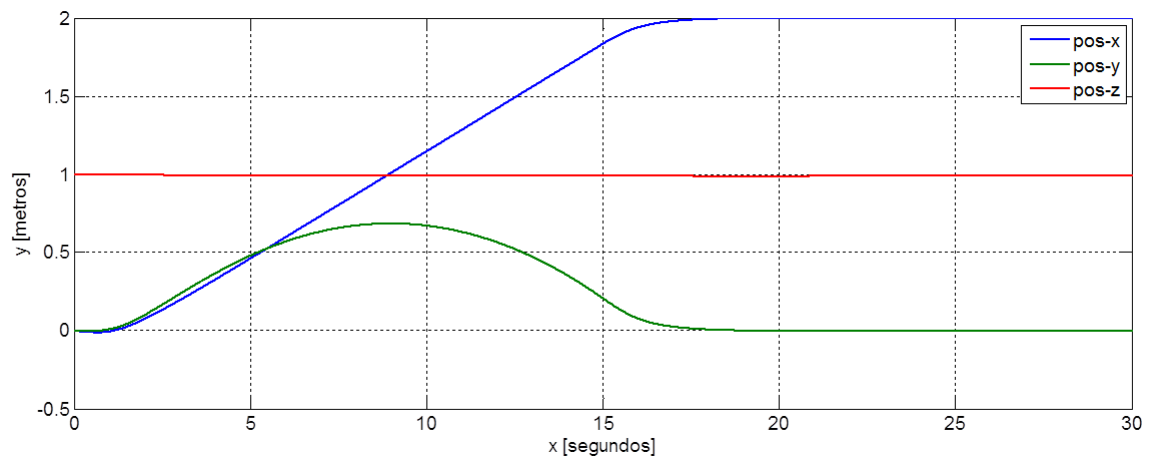


Figura 4.6: Posición en x , y , z

La orientación en los ángulos roll, pitch y yaw al seguir la curva son los siguientes:

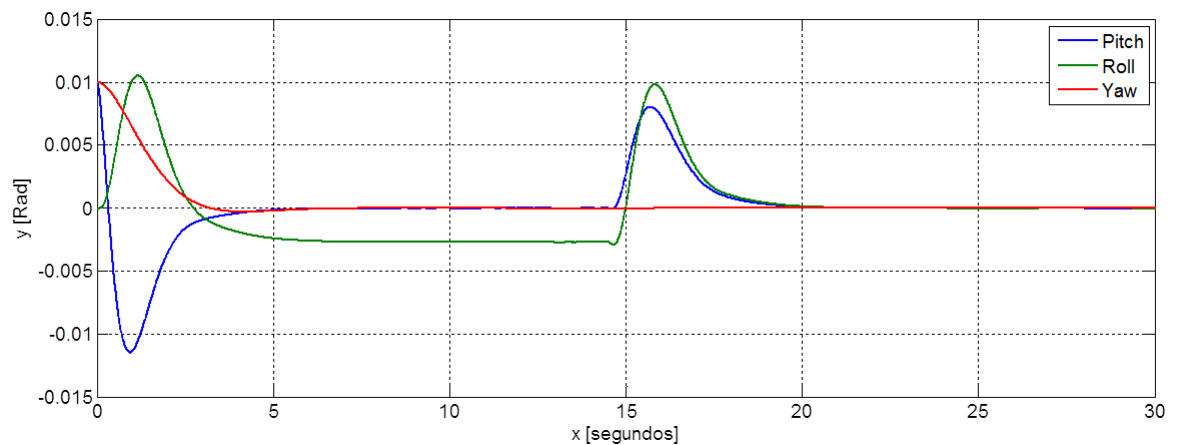


Figura 4.7: Orientación en roll, pitch y yaw

Los controles se aprecian en la siguiente imagen para roll, pitch y yaw.

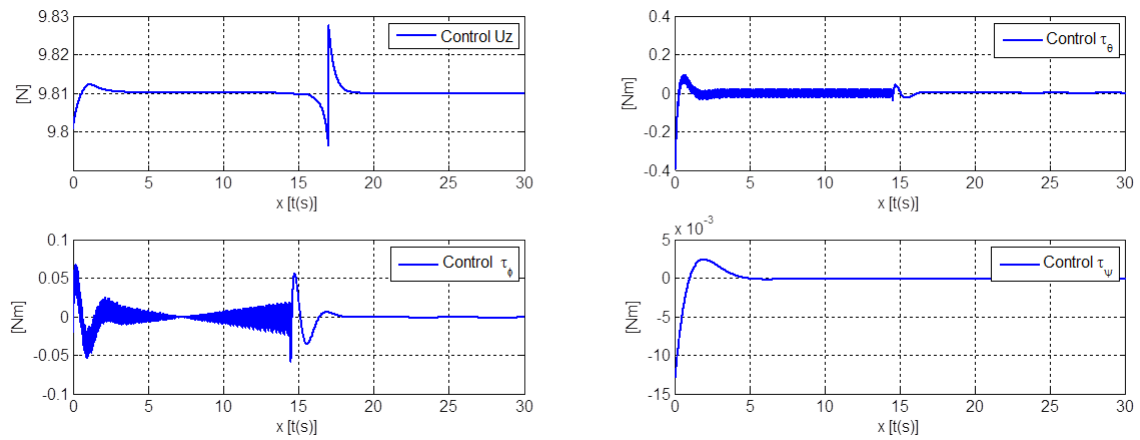


Figura 4.8: Comportamiento de los controles

Como resultado de este primer enfoque mostramos los siguientes resultados para el seguimiento, nótese que como error máximo se tiene aproximadamente 2 cm.

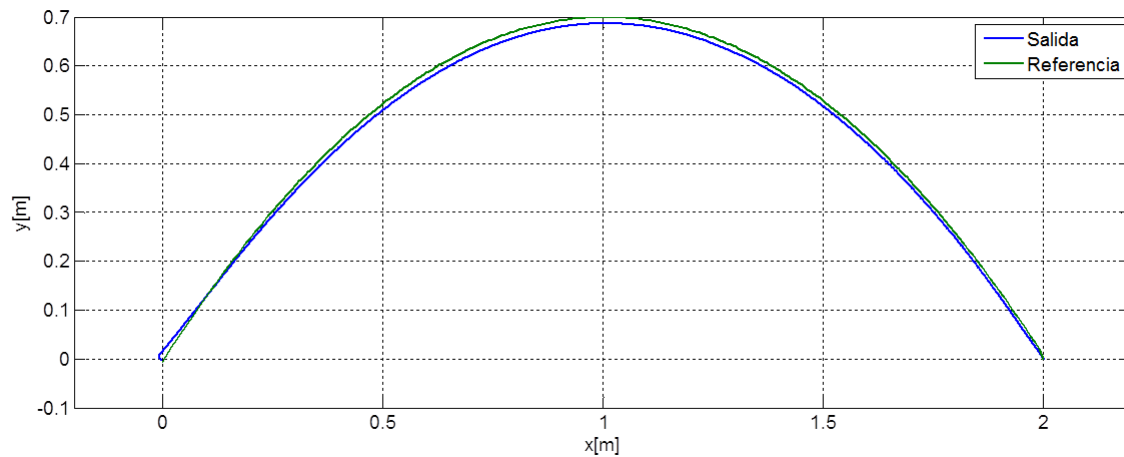


Figura 4.9: Resultado del seguimiento

4.3.2 Resultados de simulación en tiempo Discreto

En esta sección se presentan los gráficos obtenidos como resultado de discretizar el modelo utilizando la aproximación de Euler con un tiempo de muestreo $T_s = 0.01$ s

Los resultados de simulación siguientes fueron obtenidos utilizando los siguientes parámetros, los cuales fueron modificados en experimentación, por lo que podemos decir que son los datos reales necesarios para las características de la plataforma que se utilizó.

Parámetros para el subsistema Z

$$Q_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, H_z = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}, R_z = 1000 \quad (4.5)$$

Parámetros para el subsistema $x - \theta$

$$Q_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, H_x = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, R_x = 33 \quad (4.6)$$

Parámetros para el subsistema $y - \phi$

$$Q_y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, H_y = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}, R_y = 32 \quad (4.7)$$

Finalmente los parámetros para el ángulo de yaw.

$$Q_\psi = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, S_\psi = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}, R_\psi = 1240 \quad (4.8)$$

Los resultados para la posición en los ejes x , y y z son los siguientes

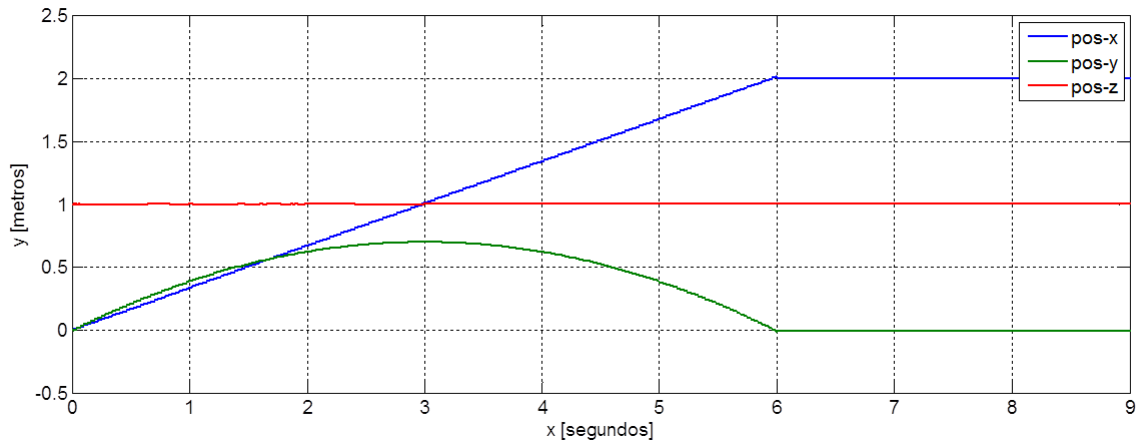


Figura 4.10: Posición en discreto

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la orientación, con condiciones iniciales de -0.3 , 0.2 , 0.1 para pitch, roll y yaw respectivamente.

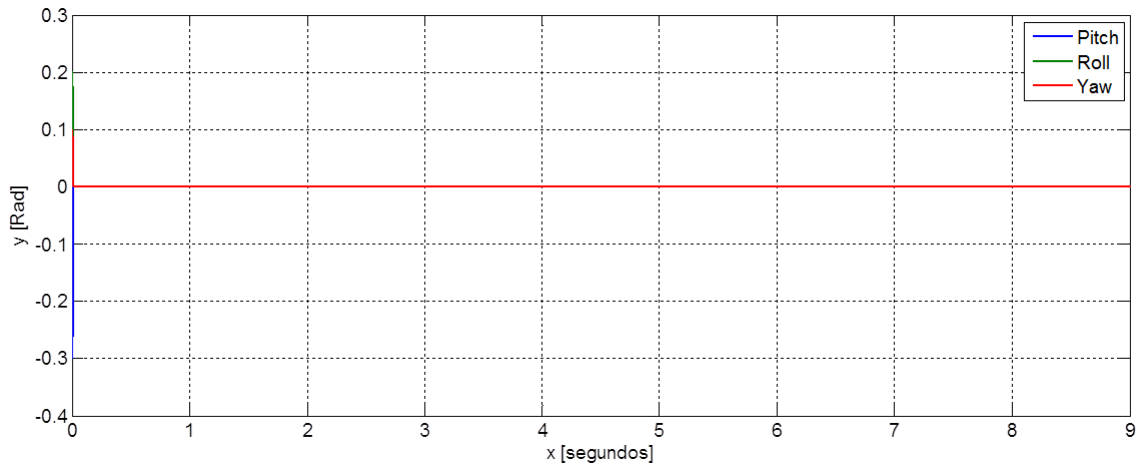


Figura 4.11: Orientación en discreto

La siguiente figura muestra los controles resultantes.

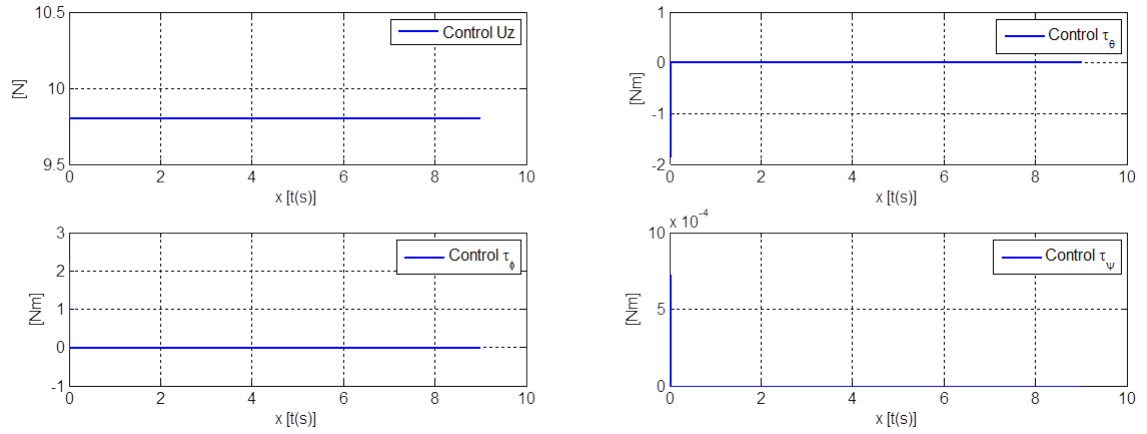


Figura 4.12: Controles en tiempo discreto

Y para finalizar esta subsección presentamos el seguimiento, y como se puede ver, el error no es significativo, pues no se distingue una trayectoria de la otra.

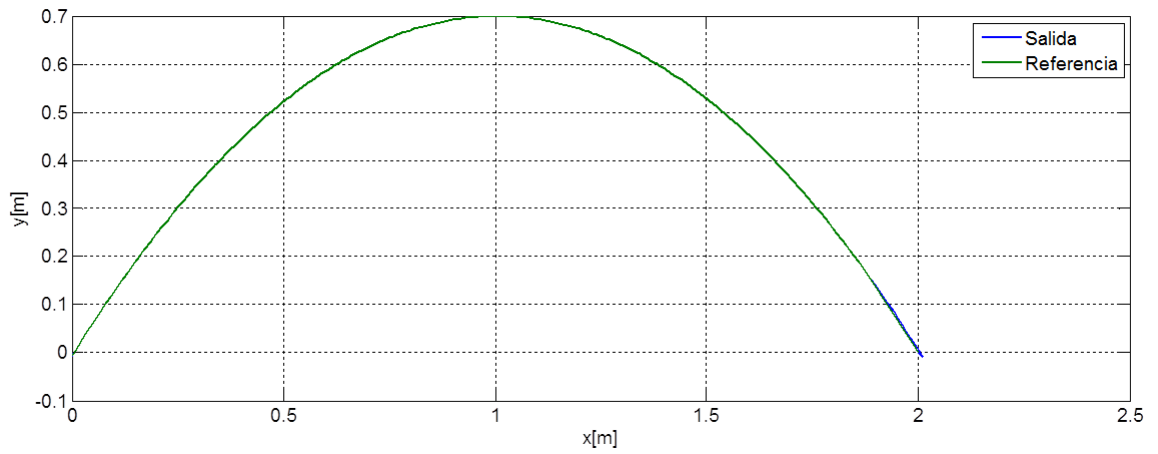


Figura 4.13: Seguimiento de la curva

4.3.3 Resultados de simulación del control óptimo de horizonte infinito

En este apartado mostramos los resultados obtenidos en las simulaciones utilizando un controlador óptimo de horizonte infinito, es decir, a diferencia de la subsección anterior esta forma del control óptimo no tiene un tiempo fijo de convergencia, las ganancias son fijas, esta característica nos permitió calcular el control abordo del vehículo, a diferencia de un horizonte finito donde se deben hacer grandes cálculos y es más complicado calcular el control en la tarjeta.

La condiciones para estas simulaciones son las mismas, recordemos que los resultados están en el dominio discreto. Como se vio en el capítulo 2, podemos elegir una matriz Q y R que penalicen la convergencia del estado y el control respectivamente, tanto como lo necesitemos.

La matriz Q y R fueron elegidos como sigue.

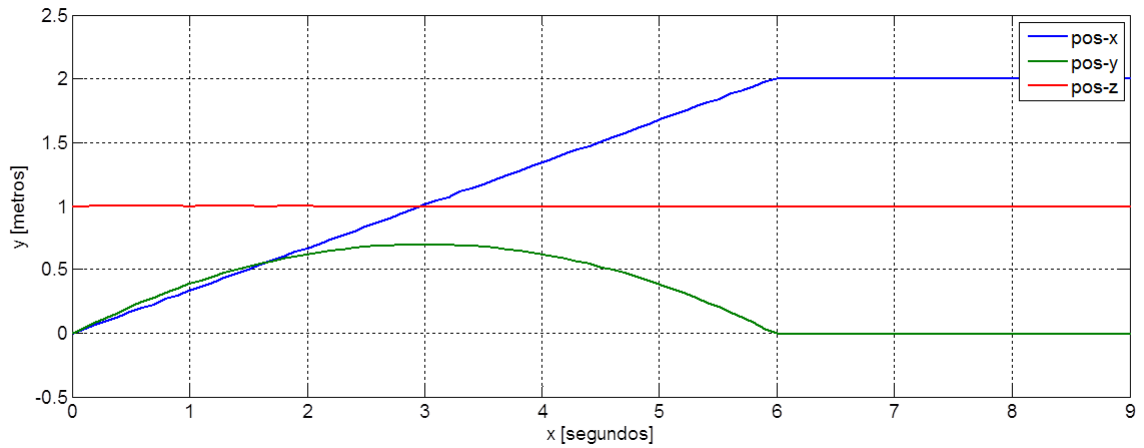
Para el subsistema $z - \psi$

$$Q_{z-\psi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 140 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

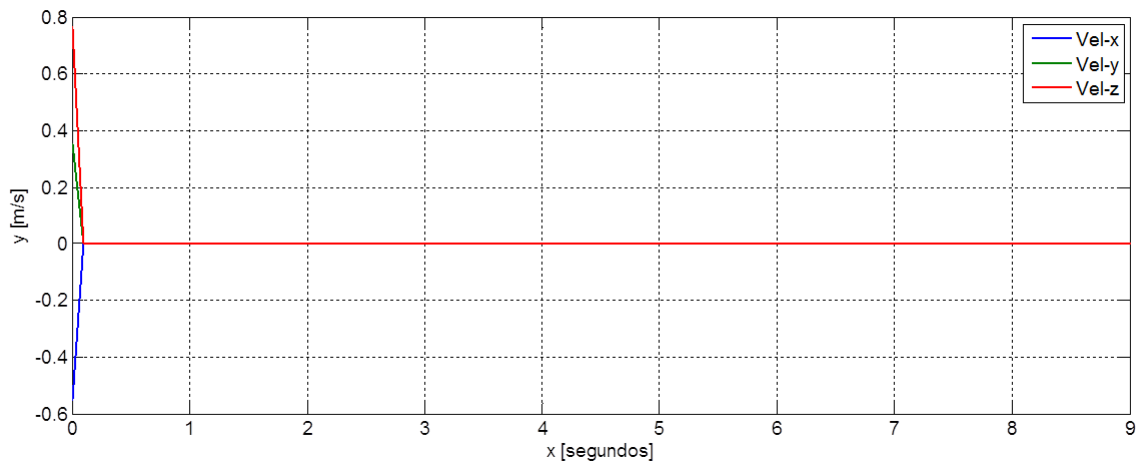
Parámetros para el subsistema $x - \theta$ y para $y - \phi$

$$Q_{x,y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, R_{x,y} = 100 \quad (4.10)$$

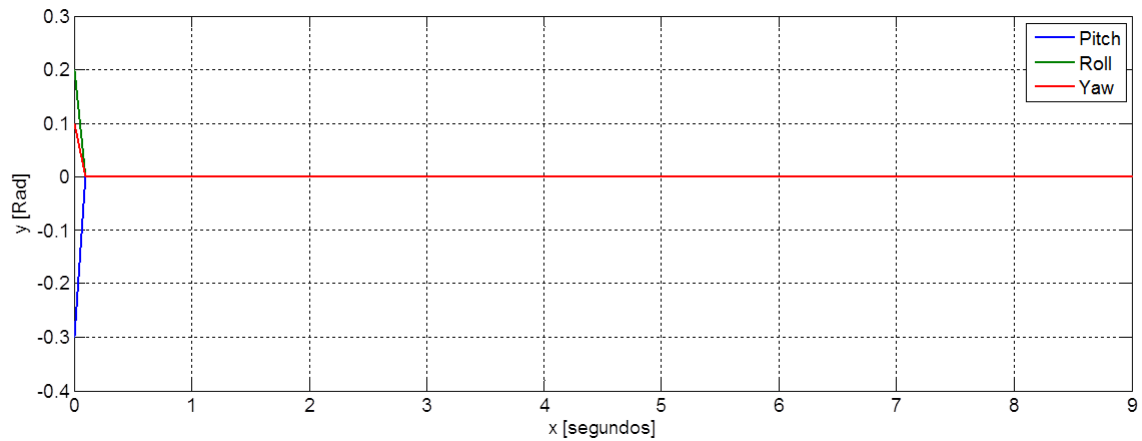
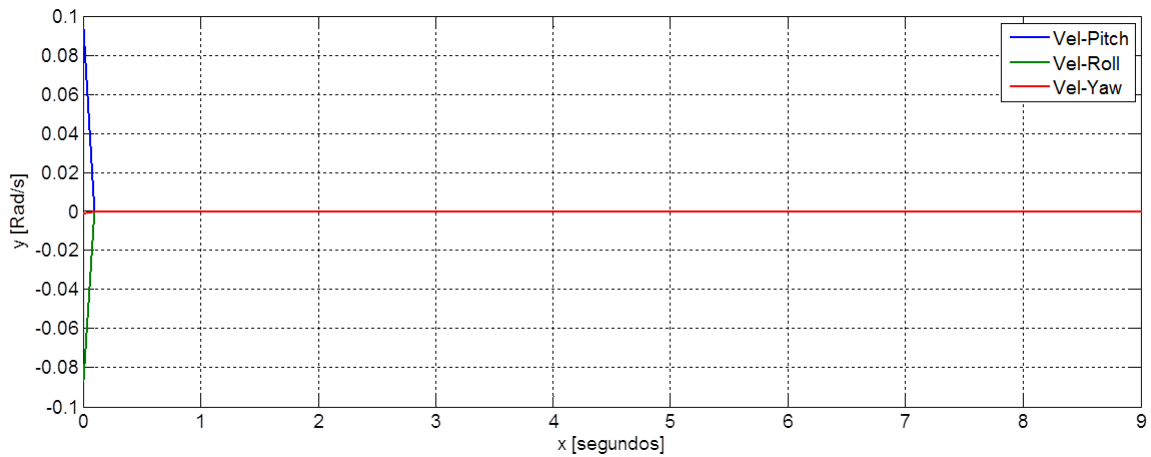
Comportamiento de la posición:

Figura 4.14: Posición en los ejes x , y y z

En la siguiente figura se muestra el comportamiento de la velocidad (4.15)

Figura 4.15: Velocidad de los ejes x , y y z

Podemos observar que hay pequeños cambios en los ángulos de Pitch y Roll durante la trayectoria (4.16). La siguiente figura muestra las velocidades angulares (4.17)

Figura 4.16: Orientación *pitch*, *roll* y *yaw*Figura 4.17: Velocidad angular *pitch*, *roll* y *yaw*

Puede observarse también que hay un cambio en los controles durante la trayectoria, puesto que estos actúan por cada cambio en la referencia.

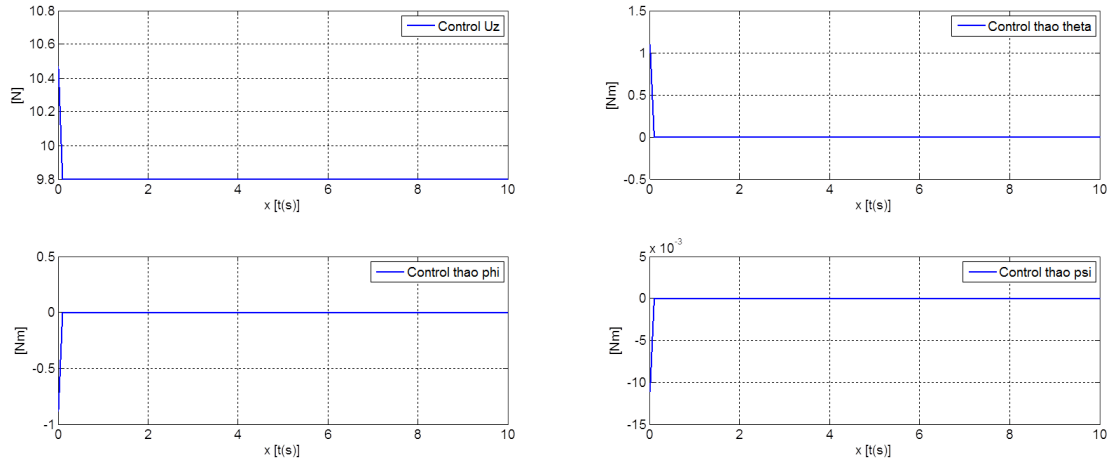


Figura 4.18: Controles U_z , τ_θ , τ_ϕ y τ_ψ

Finalmente observemos que el seguimiento se realiza con éxito utilizando este control óptimo en horizonte infinito.

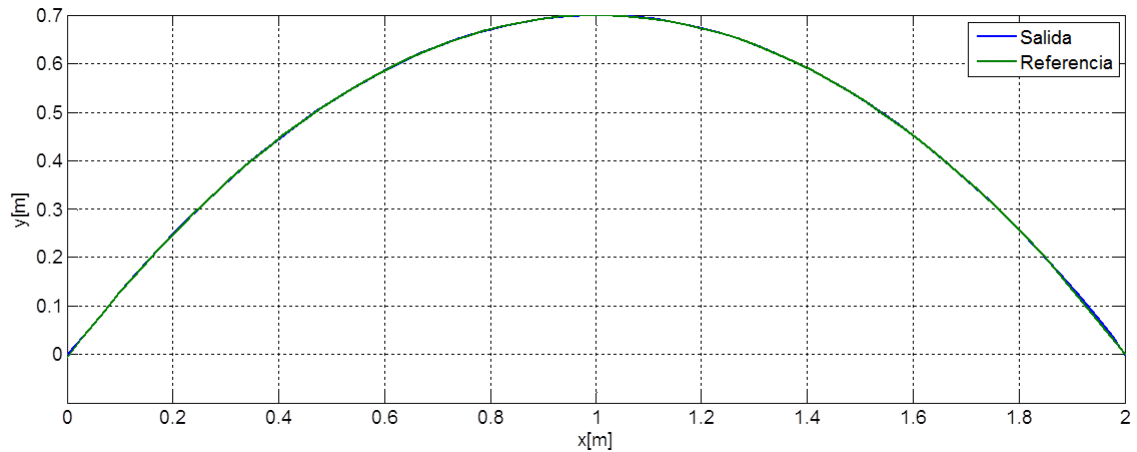


Figura 4.19: Seguimiento de la curva con un controlador óptimo de horizonte infinito

4.4 Resultados Experimentales

Se realizaron muchas pruebas, con el objetivo de analizar el consumo de energía, así mismo es importante mencionar que las señales de control para los subsistemas $x - \theta$ y $y - \phi$ fueron

separados, es decir, sólo se tomó en cuenta la parte del control de la posición espacial en el eje x y y respectivamente, ello porque la orientación se controlaba a bordo del vehículo.

Las ganancias del controlador PD para la orientación y para la altura se fijaron de la manera siguiente.

kp	kd
0.98	0.3

Tabla 4.5: Ganancias para el ángulo pitch y roll

kp	kd
1.37	0.37

Tabla 4.6: Ganancias para el ángulo yaw

kp	kd
0.55	0.35

Tabla 4.7: Ganancias para el control de altura

4.4.1 Resultados con el PID

Las ganancias para los controles τ_x y τ_y fueron elegidas de manera experimental, éstas quedaron de la siguiente manera:

kp	kd	ki
0.1	0.89	0.09

Tabla 4.8: Ganancias para el PID

En esta primera gráfica se puede apreciar el seguimiento de la trayectoria, utilizando un controlador PID.

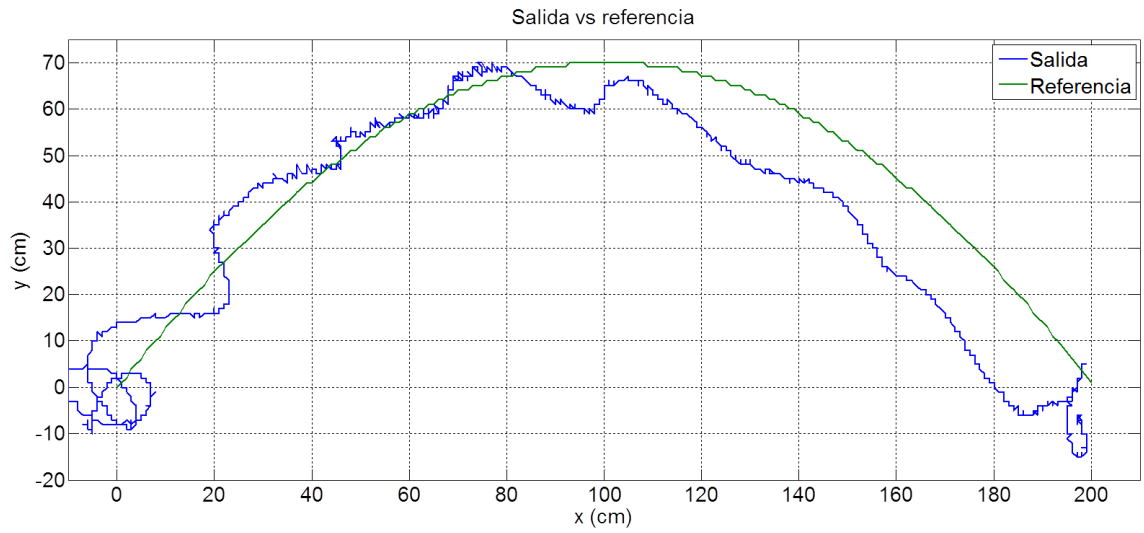


Figura 4.20: Seguimiento con PID

La gráfica siguiente muestra la posición, velocidad y orientación.

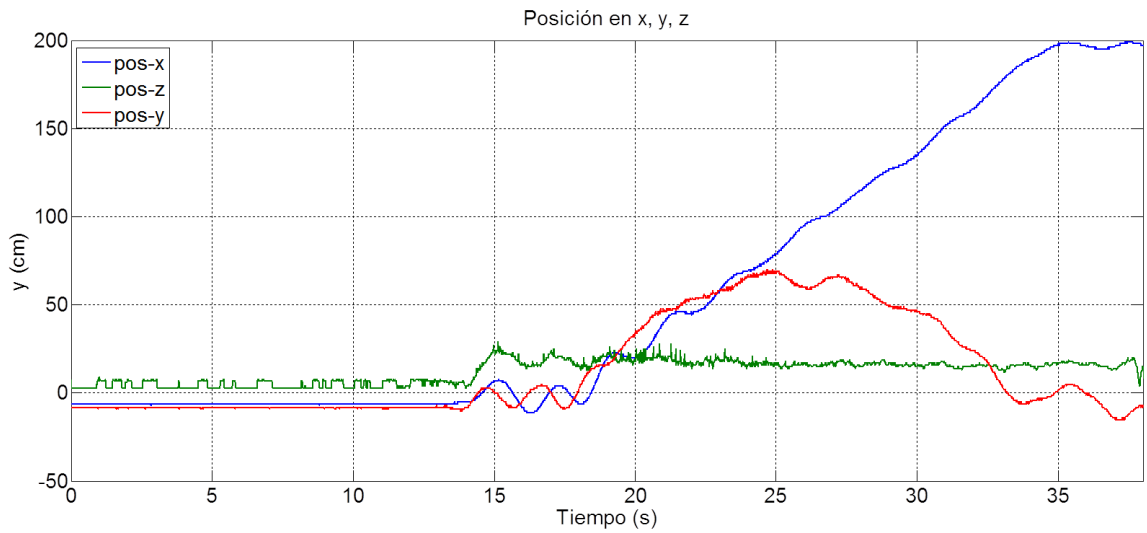


Figura 4.21: Comportamiento de la posición

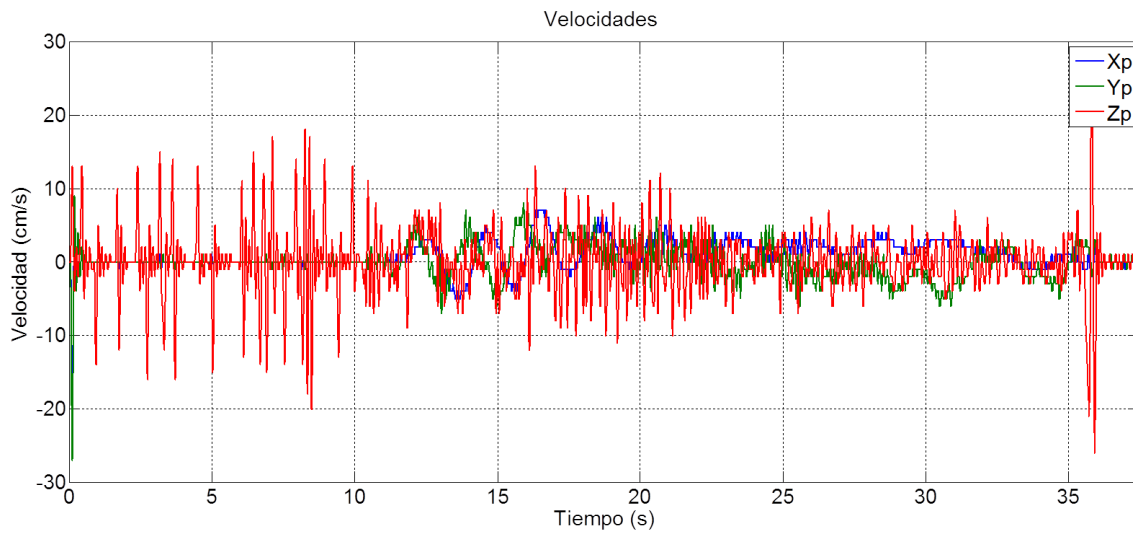
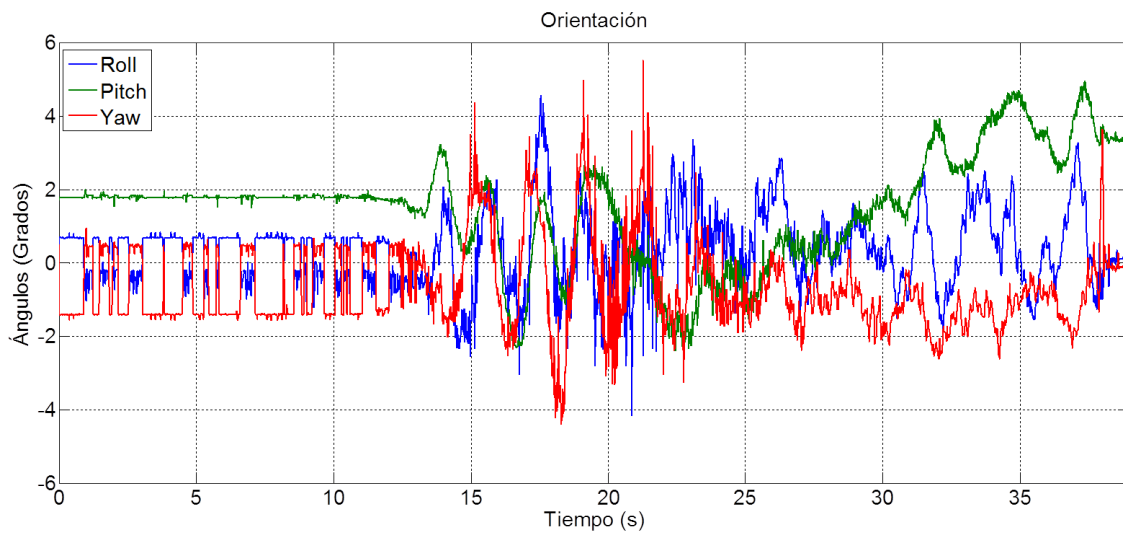
Figura 4.22: Comportamiento de la velocidad en los ejes x , y , z 

Figura 4.23: Orientación roll, pitch y yaw

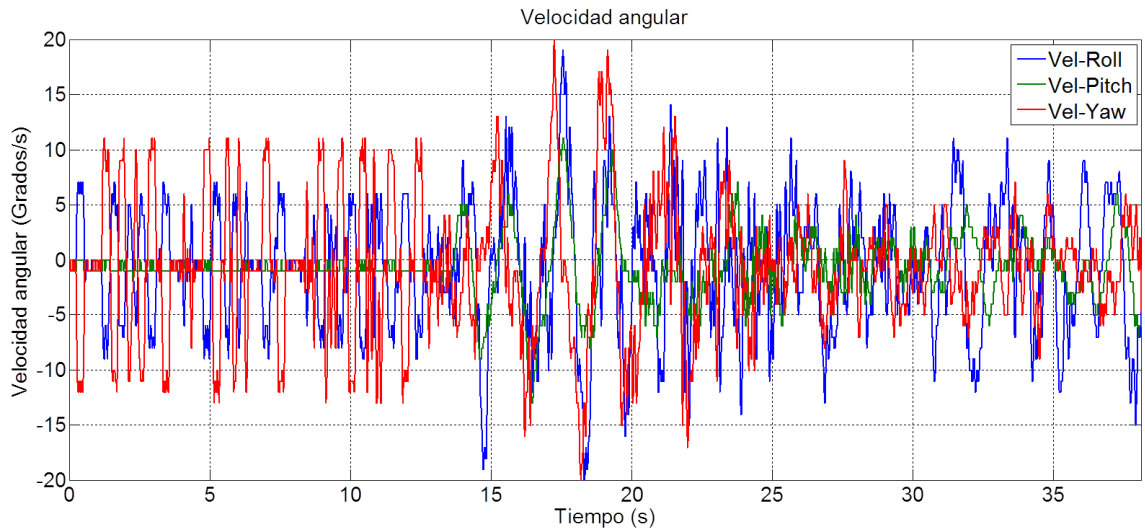
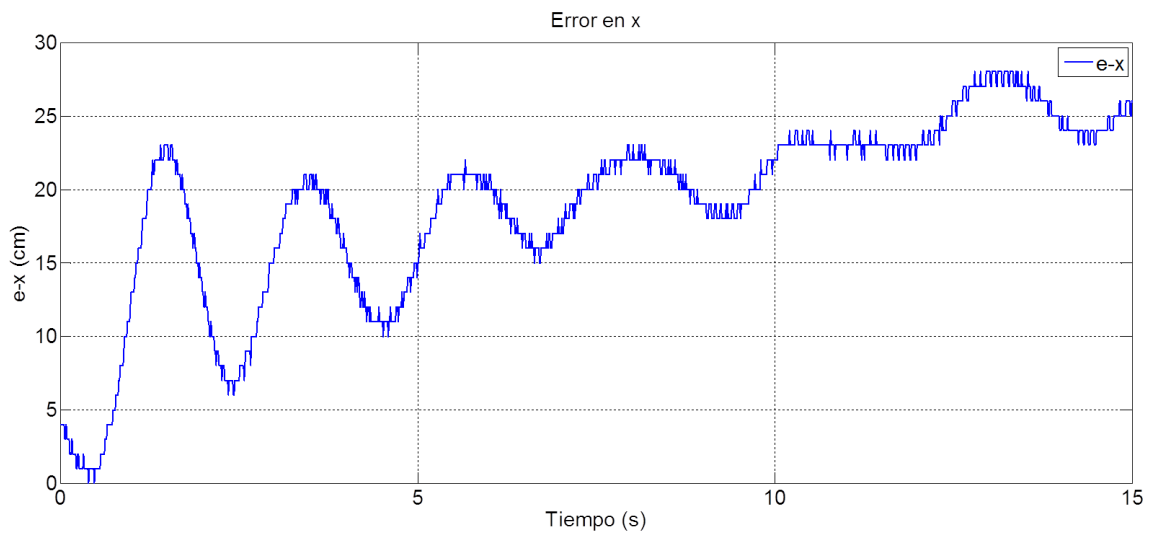
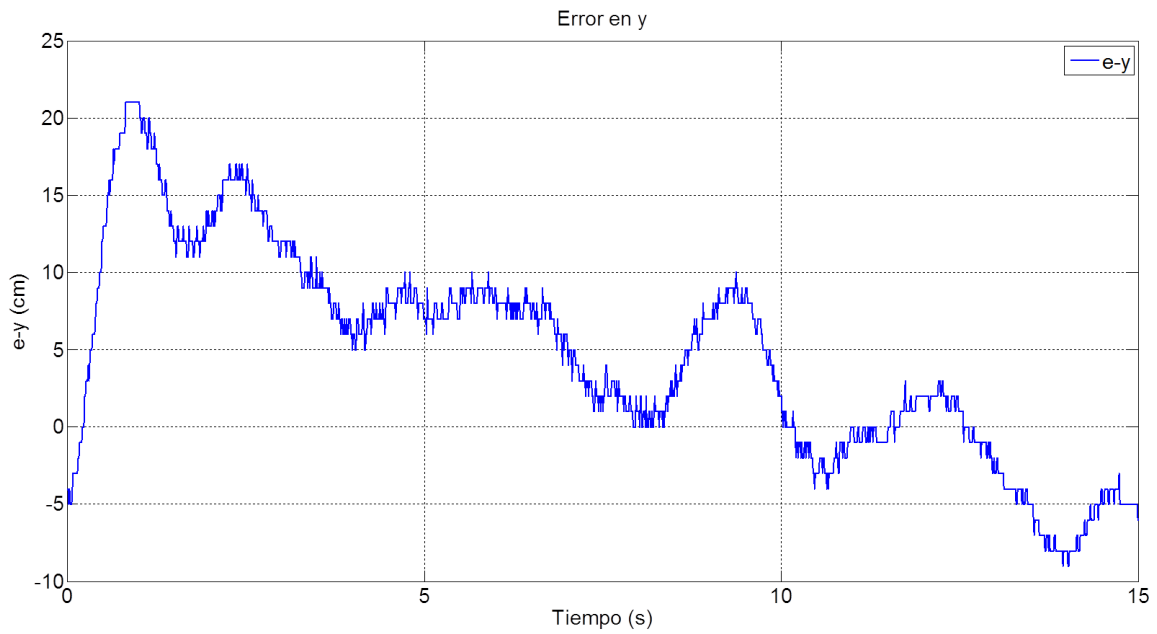
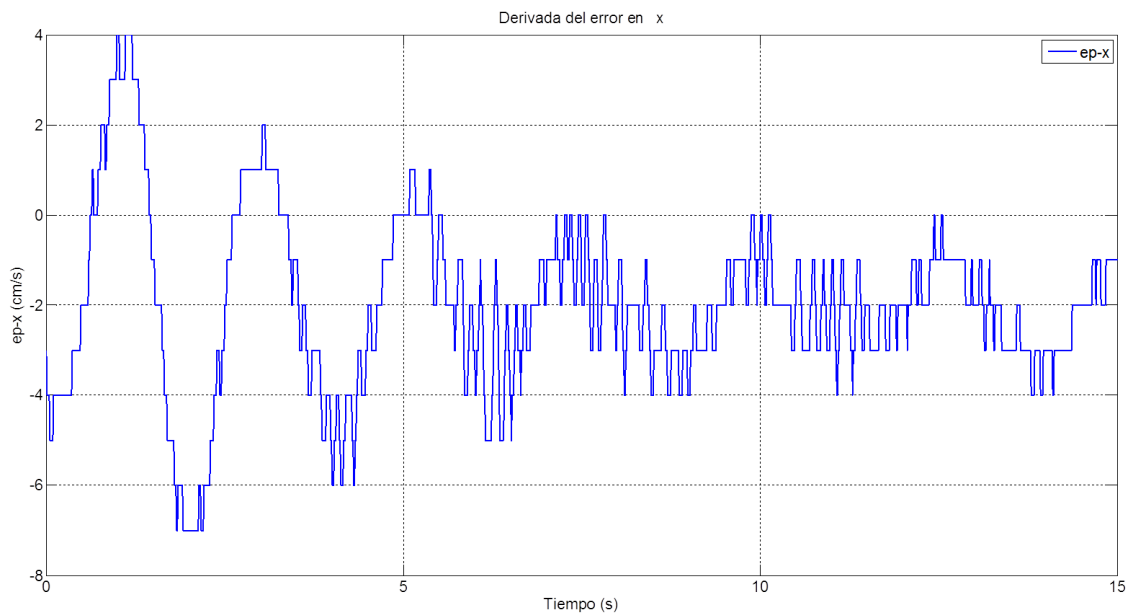
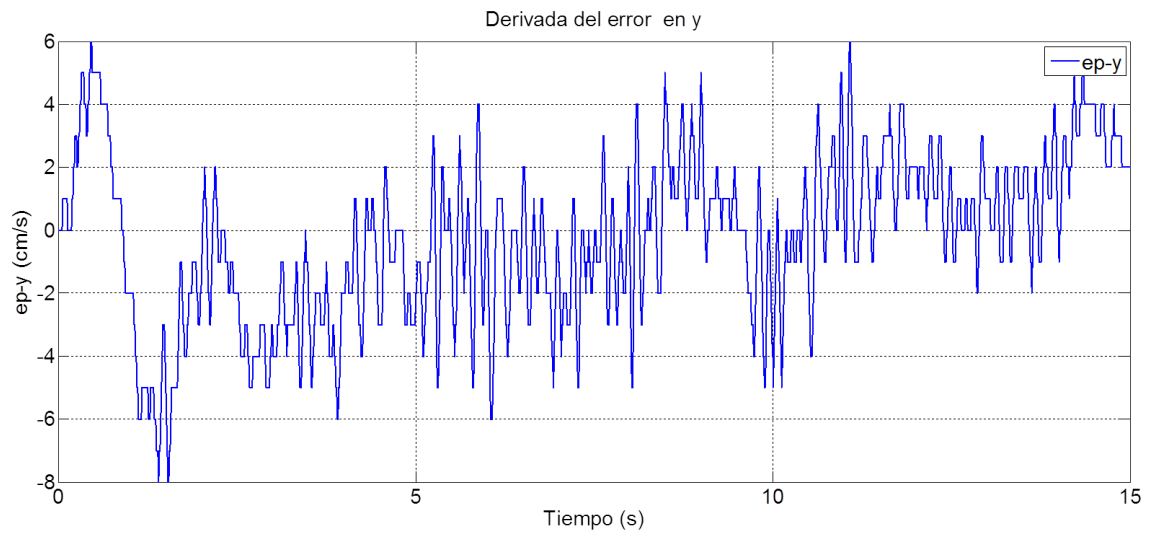


Figura 4.24: Comportamiento de la velocidad angular

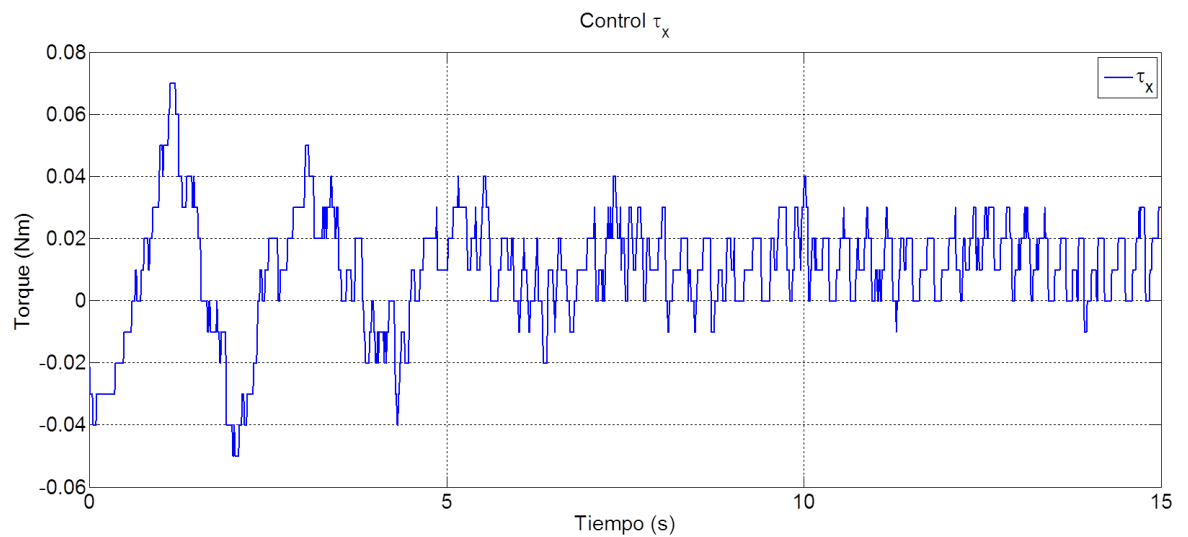
Se muestran también los errores de seguimiento y sus derivadas. Ya que el control sintetizado sólo se aplicó a los ejes x , y , sólo se muestra el error en dichos ejes y únicamente durante el tiempo en que se realiza la trayectoria.

Figura 4.25: Error de seguimiento en el eje x

Figura 4.26: Error de seguimiento en el eje y Figura 4.27: Derivada del error en el eje x

Figura 4.28: Derivada del error en el eje y

En las siguientes dos gráficas (4.29), (4.30) se pueden ver los controles obtenidos de forma experimental para el eje x y y del PID.

Figura 4.29: Señal de control en el eje x del PID

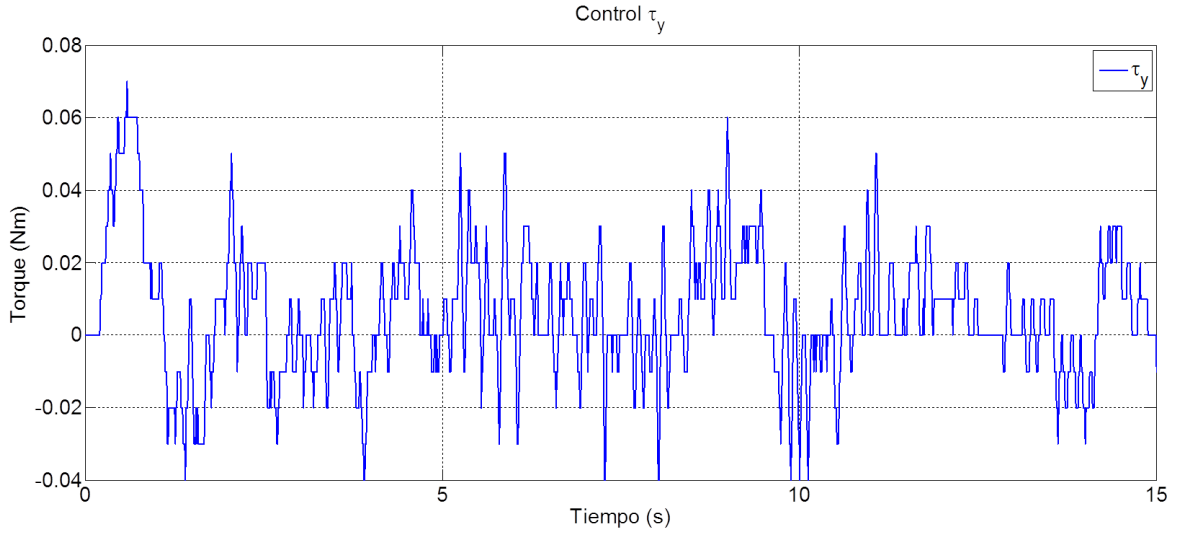


Figura 4.30: Señal de control en el eje y del PID

4.4.2 Resultados experimentales con el controlador óptimo finito

Los resultados mostrados son del seguimiento de la curva presentada inicialmente, de igual forma que el PID. En la figura (4.31) podemos apreciar el seguimiento de la trayectoria utilizando el controlador óptimo sintetizado en el capítulo 2.

El algoritmo para calcular los parámetros utilizados en los experimentos, se incluirá en la parte de los anexos. A continuación se presentan las matrices de penalización utilizadas para este experimento:

$$Q_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, H_x = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, R_x = 33. \quad (4.11)$$

$$Q_y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, H_y = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}, R_y = 32. \quad (4.12)$$

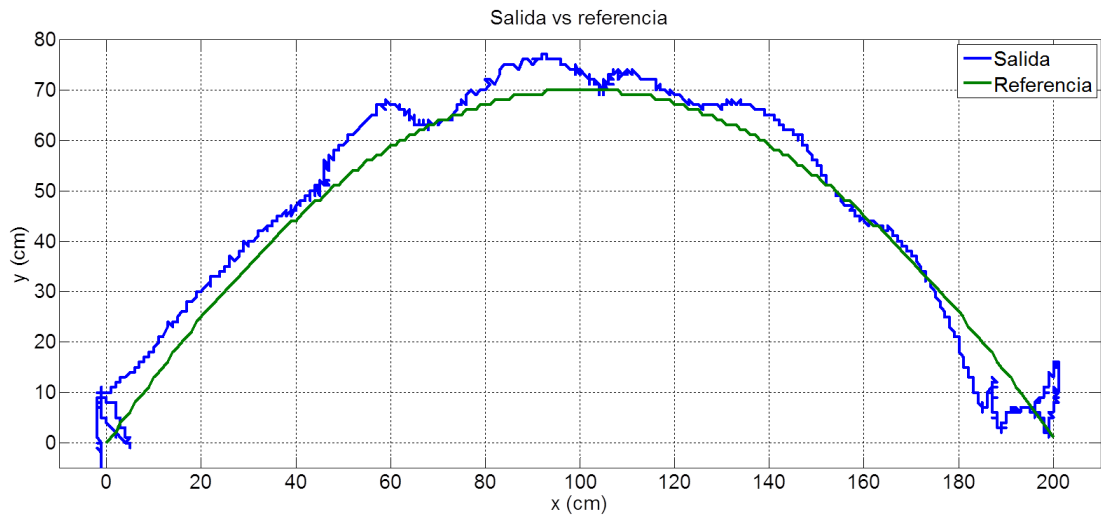


Figura 4.31: Seguimiento de la curva con el control óptimo de horizonte finito

La posición, velocidades y orientación se muestran a continuación

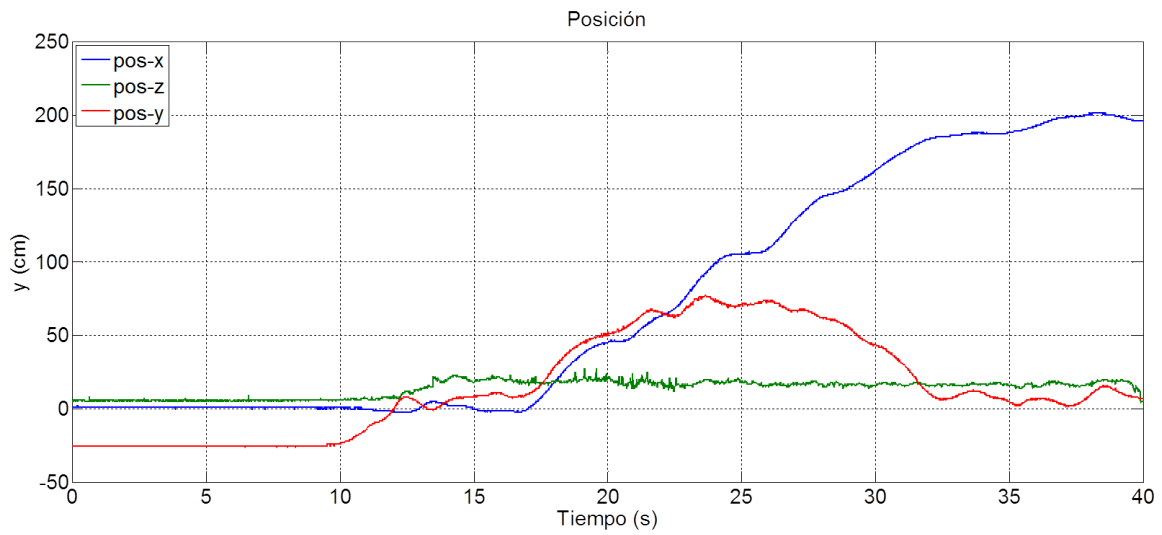
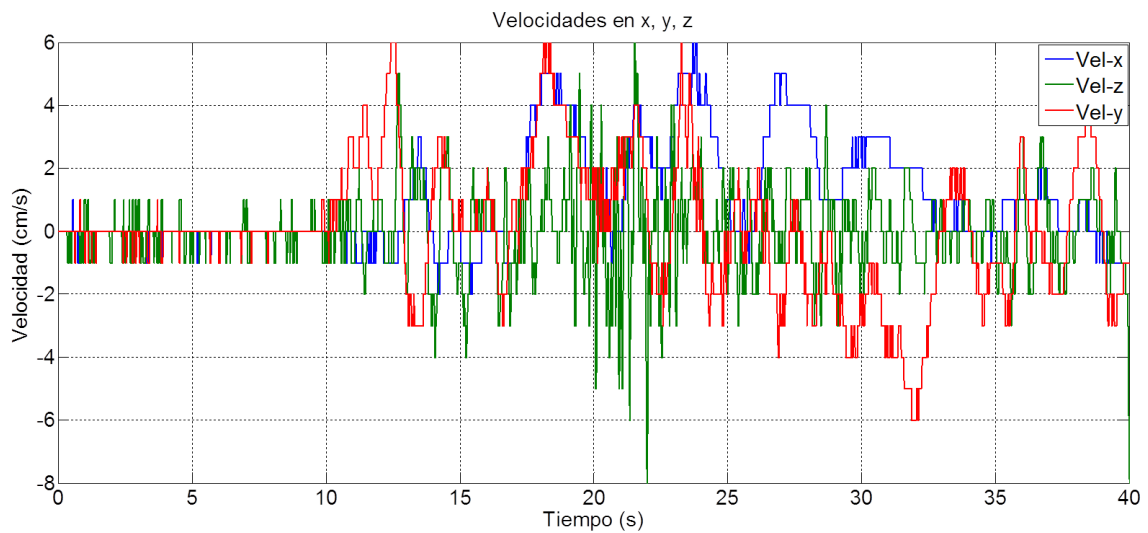


Figura 4.32: Comportamiento de la posición

Figura 4.33: Comportamiento de la velocidad en los ejes x , y , z

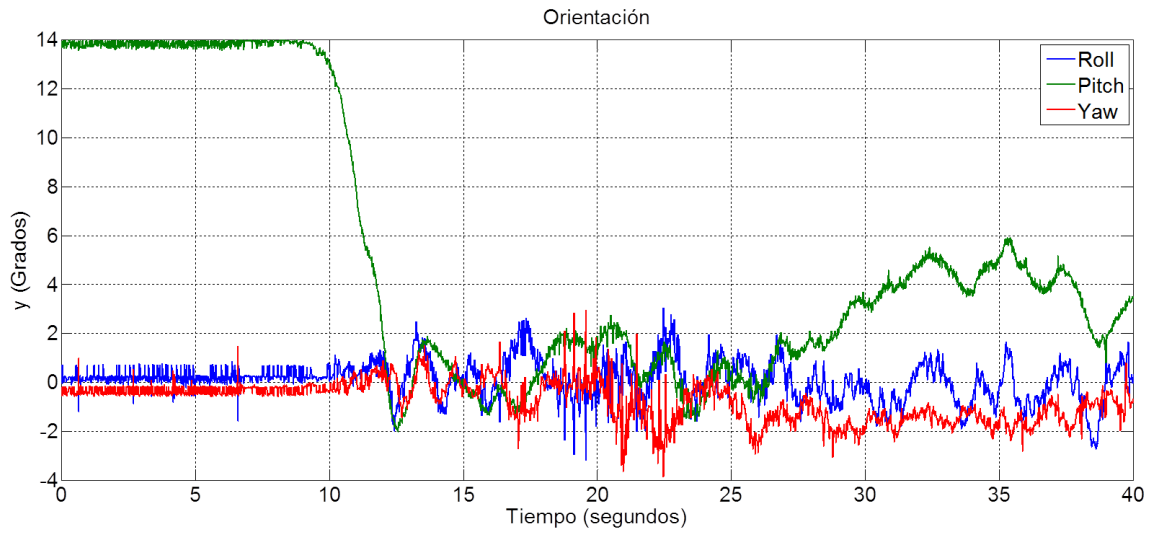


Figura 4.34: Orientacion en roll, pitch y yaw

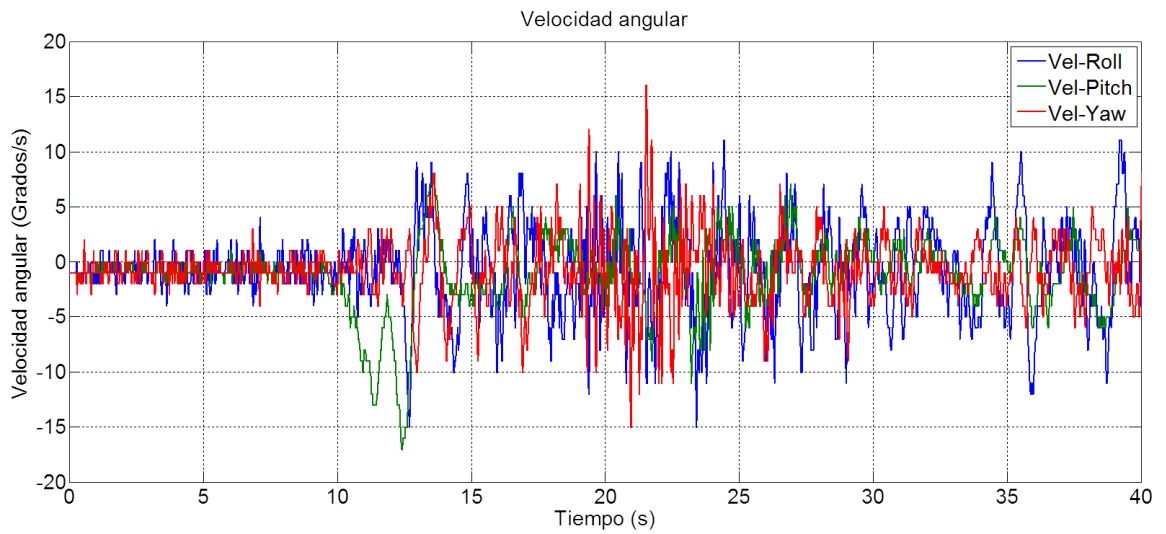
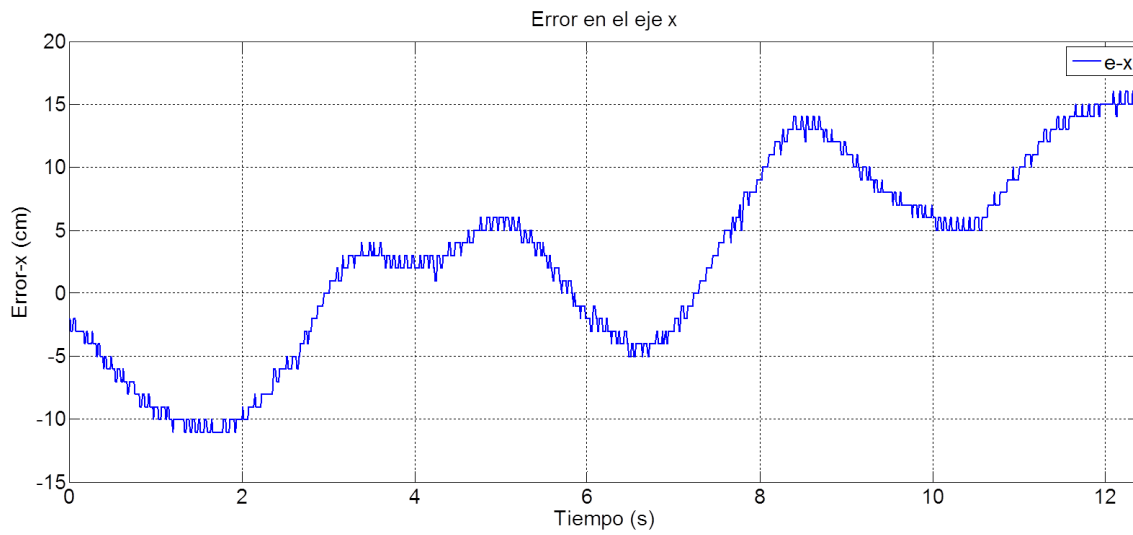
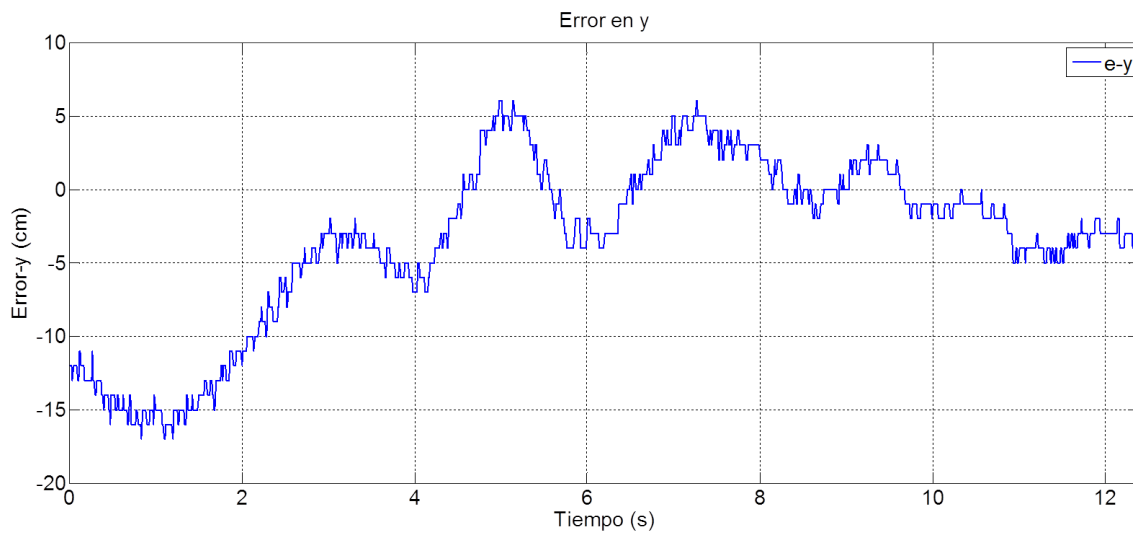
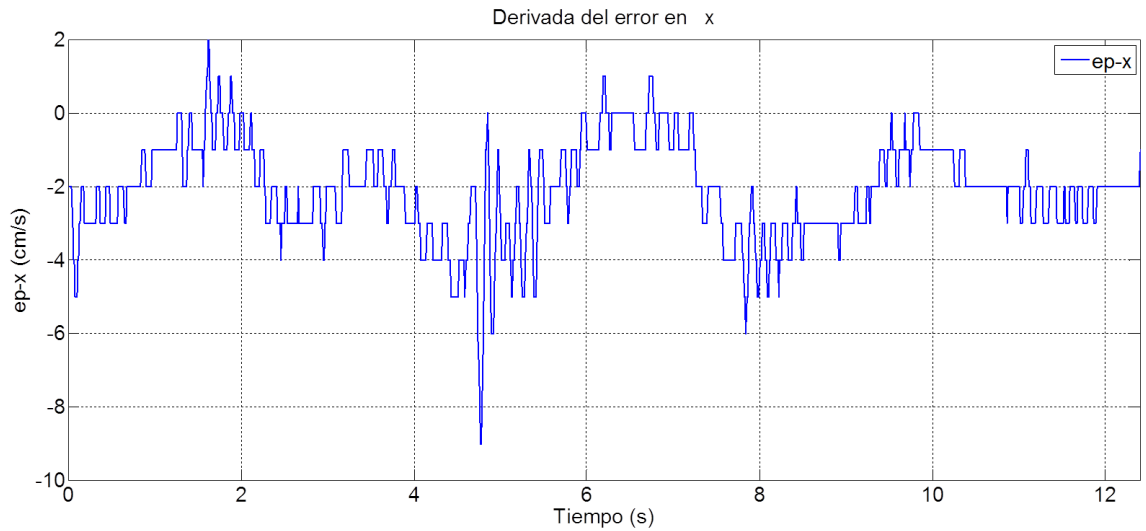
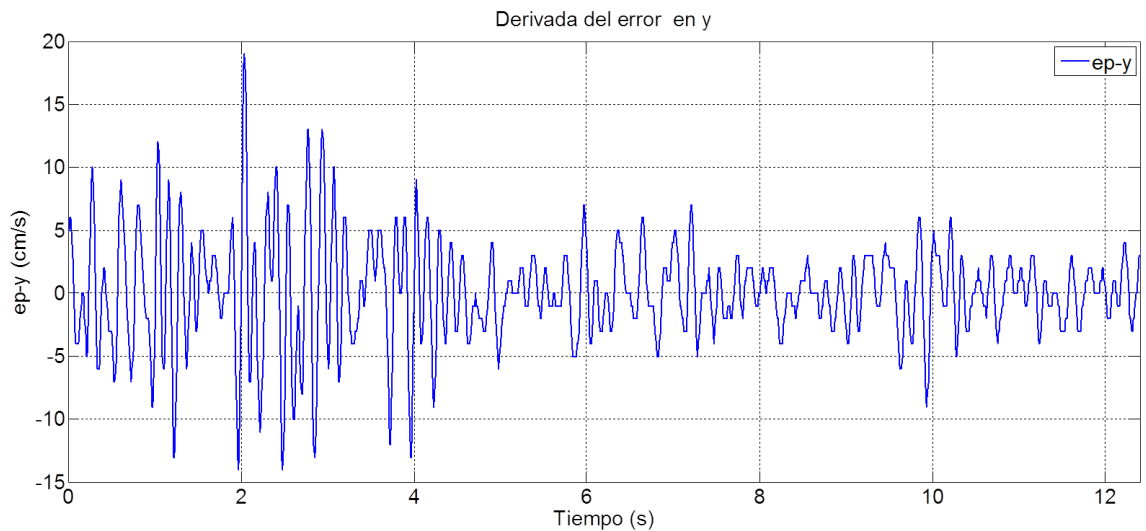


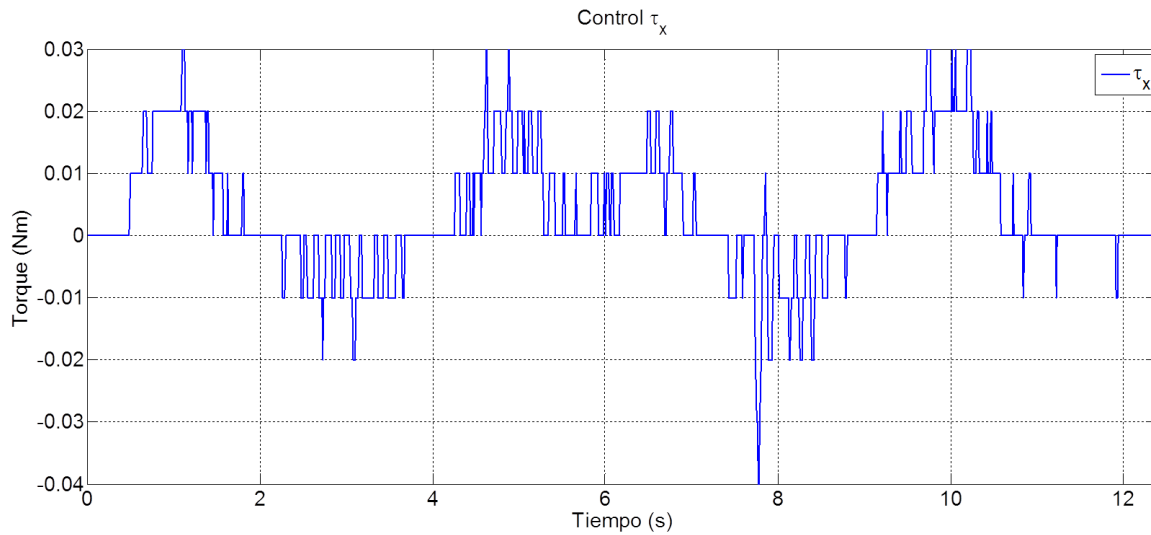
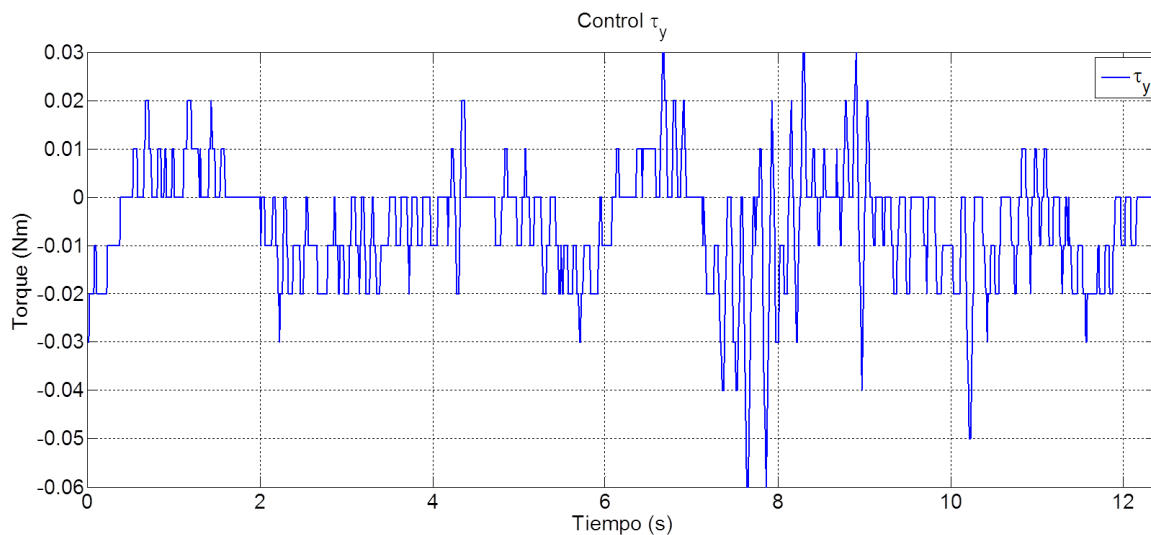
Figura 4.35: Comportamiento de la velocidad angular

Las siguientes gráficas muestran los errores de seguimiento respectivos.

Figura 4.36: Error de seguimiento en el eje x Figura 4.37: Error de seguimiento en el eje y

Figura 4.38: Derivada del error en el eje x Figura 4.39: Derivada del error en el eje y

Finalmente podemos observar las gráficas (4.40), (4.41) de los controles en el eje x y y en horizonte finito.

Figura 4.40: Señal de control óptima en el eje x Figura 4.41: Señal de control óptima en el eje y

4.4.3 Resultados experimentales con el controlador óptimo infinito

Se aplicó también un control de horizonte infinito, entre las ventajas que ofrece esta forma del control óptimo es que, así se logró calcular abordo el control, también para disminuir el efecto del control óptimo finito, cuando se acerca a la referencia, puesto que el control tiende

a cero.

Se realizaron varios experimentos en donde se analizaron sólo las señales de control durante la trayectoria con el objetivo de verificar el consumo de energía, a continuación se muestra uno de los experimentos realizados. Es importante mencionar que los datos del control fueron calculados a partir del error de posición y la velocidad respectiva, pues como se mencionó anteriormente en estos experimentos todo estaba embarcado.

El algoritmo para obtener los parámetros se incluirá en la parte de anexos. Las matrices de penalización son las siguientes:

$$Q_{x,y} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, R_{x,y} = 120. \quad (4.13)$$

Primero se muestra la gráfica de la salida y la referencia.

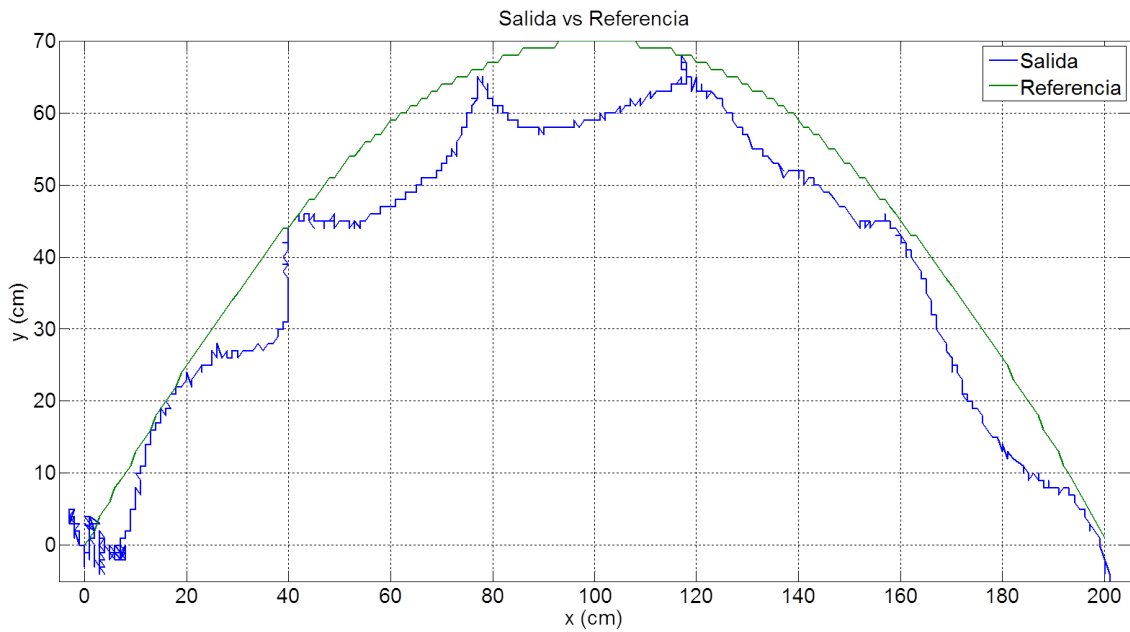
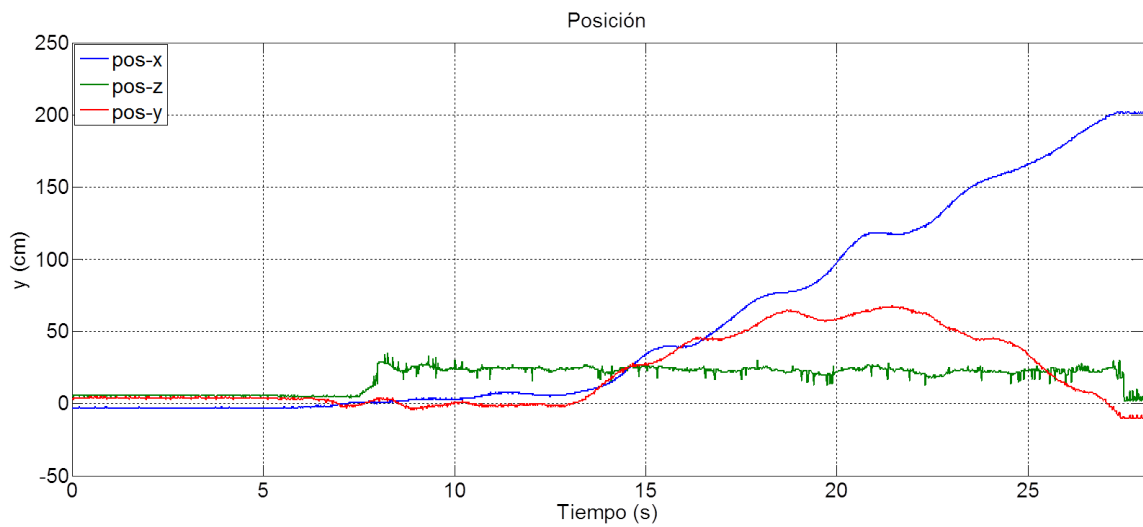


Figura 4.42: Seguimiento con un control óptimo de horizonte infinito

Gráficos de la posición, orientación y velocidades

Figura 4.43: Posición de los ejes x , y , z

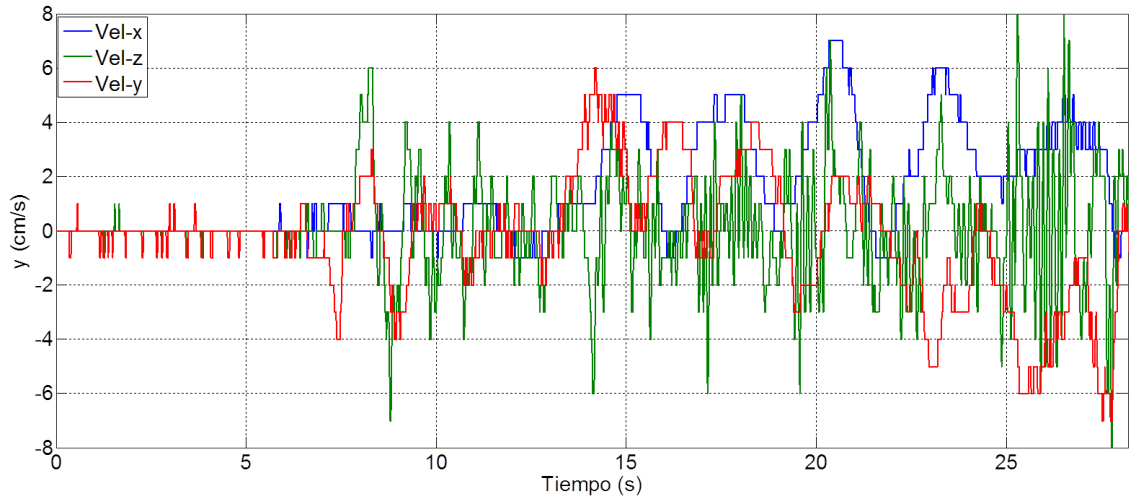
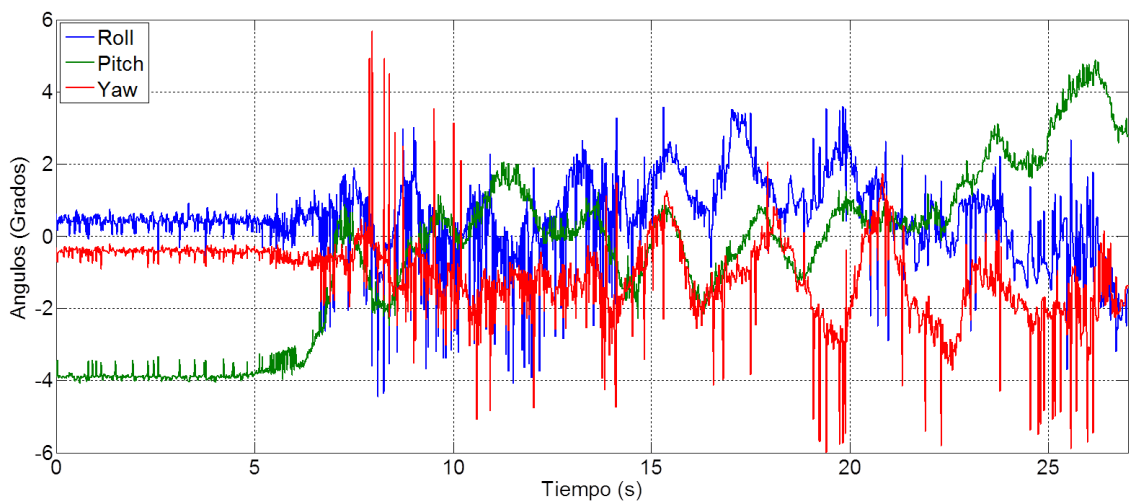
Figura 4.44: Comportamiento de la velocidad en los ejes x , y , z 

Figura 4.45: Orientación en los ángulos roll, pitch y yaw

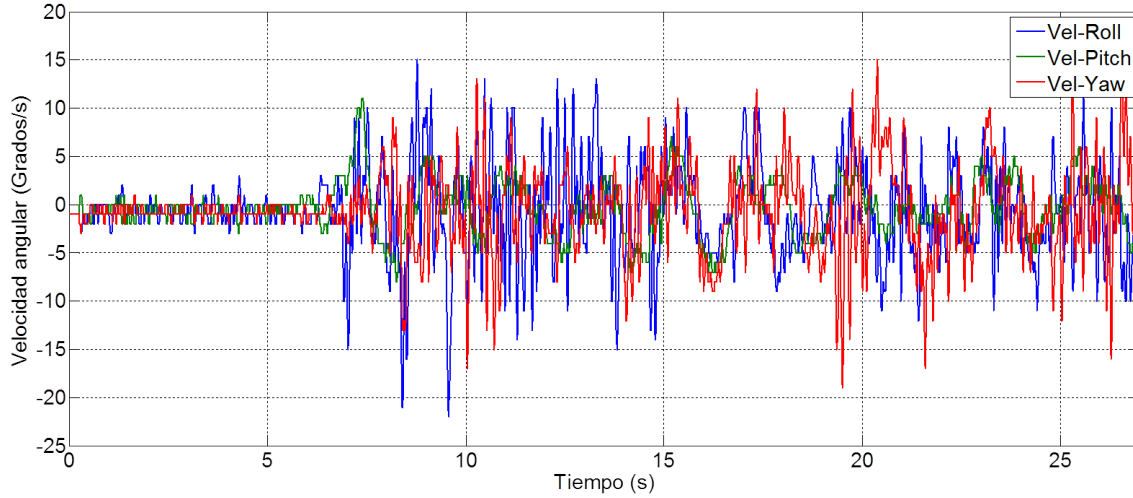


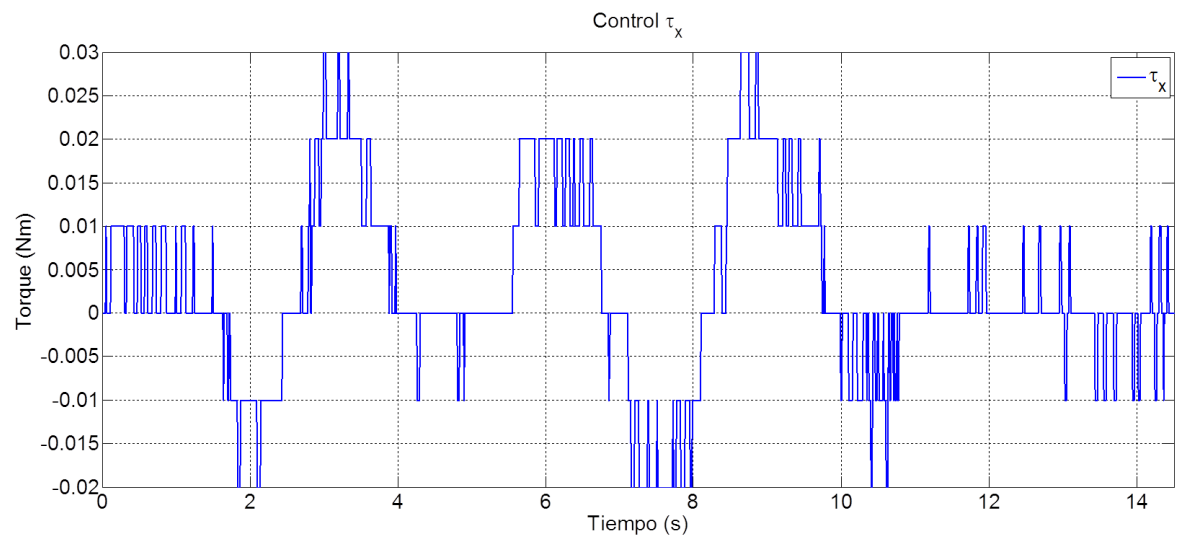
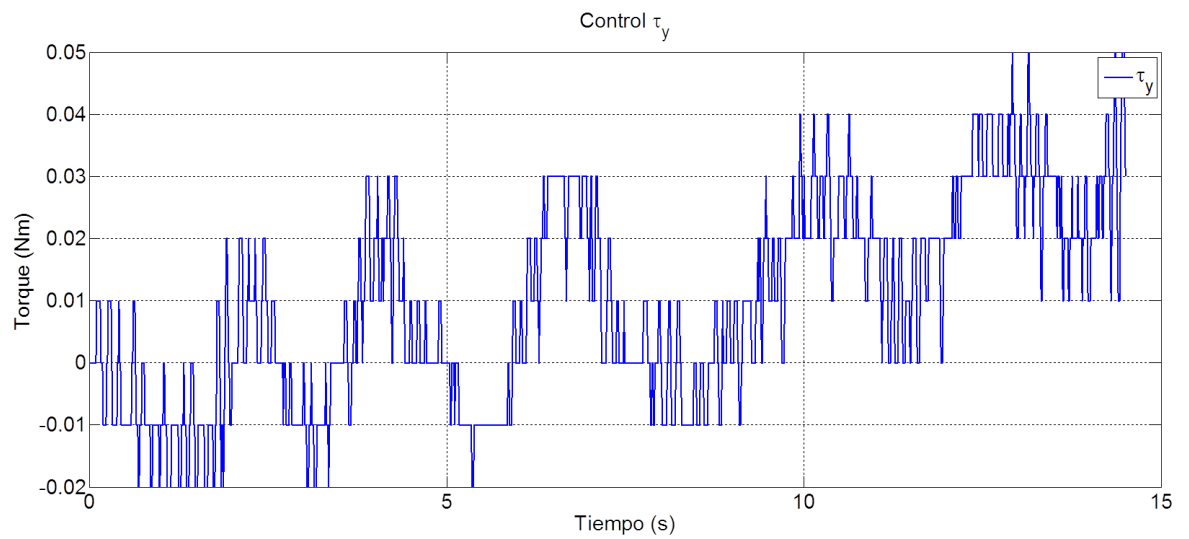
Figura 4.46: Comportamiento de la velocidad angular

Para poder calcular el control, obtenemos las señales de error en posición así como sus velocidades. La tabla siguiente muestra la integral absoluta del error.

$\int_{t_0}^{t_f} e_x dt$	$\int_{t_0}^{t_f} e_y dt$
7269	6259

Tabla 4.9: Sumatoria del error absoluto

Una vez que se ha obtenido los errores de posición, podemos aproximar el control τ_x y τ_y , ya que como lo explicamos, el control en tiempo real se calcula a bordo, las gráficas (4.47), (4.48) muestran los controles en el eje x y y del óptimo de horizonte infinito.

Figura 4.47: Señal de control óptima en el eje x de horizonte infinitoFigura 4.48: Señal de control óptima en el eje y de horizonte infinito

4.5 Consumo de energía

A continuación se presenta el análisis del controlador PID respecto al controlador óptimo de horizonte finito e infinito. Los experimentos se realizaron bajo las mismas condiciones, el control de altura que se aplicó, no es la encargada de llevar el vehículo a la referencia, en este caso la referencia en altura estuvo fijada con el radio control, y el control de altura sólo actuaba para mantenerlo en esa posición; la orientación para todos los experimentos se calculó abordo del vehículo.

La siguiente tabla muestra las magnitudes del control óptimo de horizonte finito e infinito y del controlador PID, el cual nos servirá de base para hacer la comparación respecto al consumo de energía, es importante señalar que el análisis realizado es sólo con respecto del índice de desempeño siguiente:

$$J_{|u|} = \int_{t_0}^{t_1} |u| dt \quad (4.14)$$

ya que la energía real consumida, se debe medir utilizando algún sensor específico.

ID. Prueba	PID		Total
	$ \tau_x $	$ \tau_y $	
4p	1636	1754	3390
5p	1660	1257	2917
6p	1367	1761	3128
7p	2554	1793	4347
8p	2613	2307	4920
9p	1712	2004	3716
10p	1984	2258	4242
11p	1547	1619	3166
12p	1457	1712	3169
13p	3045	2716	5761
14p	1845	1745	3590
15p	1952	1809	3761
16p	1922	1896	3818
17p	1396	1834	3230
03p	1892	2234	4126
02p	2000	1720	3720
Promedio	1911.375	1901.1875	3812.5625

Tabla 4.10: Sumatoria absoluta los controles τ_x y τ_y para el PID

En la siguiente figura se observa la tabla de la sumatoria del controlador óptimo de horizonte finito para los ejes x y y .

ID. Prueba	ÓPTIMO FINITO		Total
	$ T_x $	$ T_y $	
4f	1237	819	2056
5f	1360	990	2350
6f	451	1329	1780
7f	1515	890	2405
8f	1417	724	2141
9f	1801	1244	3045
10f	1713	1134	2847
11f	1105	804	1909
12f	1509	2055	3564
13f	2089	1497	3586
14f	1244	1069	2313
15f	1390	861	2251
16f	1851	938	2789
17p	1009	765	1774
07t	836	1087	1923
04t	1233	959	2192
Promedio	1360	1072.8125	2432.8125

Tabla 4.11: Unidades dadas por el índice de desempeño (4.14) para el controlador óptimo finito

Así mismo se realizaron varios experimentos para el controlador de horizonte infinito, las señales de control se aproximaron fuera de línea, ya que las señales en tiempo real se calculaban en la tarjeta utilizada.

ID. Prueba	ÓPTIMO INFINITO		Total
	Tx	Ty	
1i	1262	1966	3228
2i	1127	1614	2741
3i	2961	3035	5996
4i	1504	2602	4106
5t	1460	2067	3527
6i	951	1940	2891
7t	988	1377	2365
8i	1534	2136	3670
2-5i	1163	2218	3381
2-6i	1291	2280	3571
13i	1372	1963	3335
14i	1597	2612	4209
15i	1669	2394	4063
16i	1764	2130	3894
17i	1640	2594	4234
18i	2572	2279	4851
Promedio	1553.4375	2200.4375	3753.875

Tabla 4.12: Unidades dadas por el índice de desempeño (4.14), para el controlador óptimo infinito

En la siguiente figura se muestra la sumatoria de los controles τ_x , τ_y del PID, del óptimo finito e infinito. Este análisis únicamente se aplica al control calculado durante la trayectoria en un tiempo de $t_0 = 0$ a $t_f = 12$ segundos.

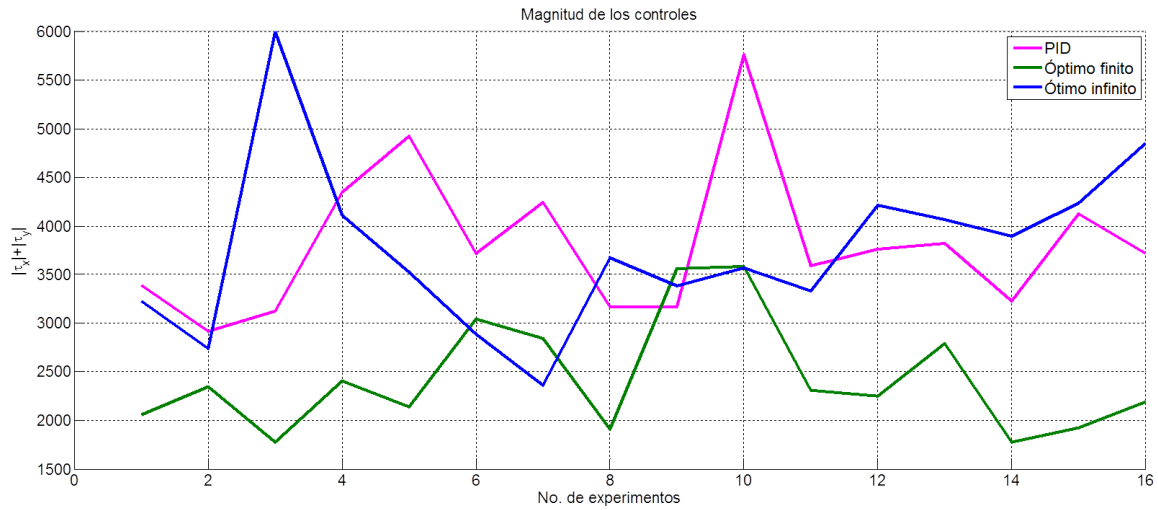


Figura 4.49: Unidades de τ_x y τ_y respecto del índice de desempeño

De la gráfica anterior podemos deducir la siguiente tabla:

<i>Controlador</i>	$J_{ \tau_x + \tau_y }$	<i>Porcentaje de ahorro de energía</i>
PID	3812.56	-
Control óptimo finito	2432.81	36.21%
Control óptimo infinito	3753.87	1.53%

Tabla 4.13: Análisis del desempeño

4.6 Conclusiones

Al aplicar el control PID de manera experimental en comparación con el controlador óptimo de **horizonte finito** podemos concluir que:

- La acción de control del PID es más brusco, en consecuencia podría gastar más energía.
- Con el PID el cuadricóptero siempre sobrepasaba el ultimo punto de la referencia.

-Las ganancias del PID se movieron experimentalmente, lo cual al ser un procedimiento eurístico tiene la posibilidad de mejorar.

-La señal del controlador óptimo, es más suave, ahorra energía.

-Se debe penalizar la llegada con cuidado, pues puede no llegar a la referencia.

-Las penalizaciones para el control óptimo, llevan más tiempo. Es más complicado aplicar por los cálculos computacionales

-El control óptimo de horizonte finito, se puede fijar de modo que llegue a la referencia en tiempo acotado.

Comparación del PID respecto a un control óptimo de **horizonte infinito**.

-El control óptimo de horizonte infinito, es aun más pequeño en magnitud que el PID, pero aun mayor que el de horizonte finito.

-Su implementación es más fácil, pues es similar a un controlador Proporcional Derivativo.

-La acción del control óptimo siempre puede conducir al cuadricóptero a la referencia, pero puede ser un poco más lenta.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1 Conclusiones

Las aportaciones de este proyecto de tesis fueron principalmente los siguientes aspectos: Se obtuvieron los datos de posición, espacial y angular mediante el sistema de visión *Optitrack*, estos datos fueron capturados en un programa en lenguaje *C++*, ahí mismo mediante una aproximación se calculó la velocidad en los ejes x , y y z , a partir de ello se obtuvo el control, para el caso del control óptimo de tiempo finito y el controlador PID, mismo que fue enviado a través de un puerto serial a una velocidad de 38400 baudios, como una limitación de este proceso podemos mencionar, que el sistema de visión ocasionalmente presentaba ruido moderado en las mediciones, aunado a ello el área de trabajo, estaba limitada aproximadamente de dos metros cuadrados en el centro del sistema de cámaras y una altura de aproximadamente 1 m , fuera de dichos límites las cámaras empezaban a perder el objetivo y por ende las mediciones comenzaban a tener errores significativos. Debido a la configuración del fabricante y por la naturaleza de la trayectoria que se propuso seguir en los experimentos, se modificaron los ejes y y z puesto que debido a la configuración el sistema tomaba al eje “ y ” como la altura, también por la disposición de la trayectoria se intercambiaron los ángulos de *roll* y *pitch*, no se dio mucha importancia a ello, ya que como lo mencionamos la orientación en todos los experimentos se controló abordo del vehículo utilizando la central inercial descrita en el

capitulo 3.

El control sintetizado basado en [19], se aplicó con éxito para controlar los ejes x y y , inicialmente se probó el control óptimo finito, el cual como se vio en el análisis del consumo de energía (4.49), fue el que mejores resultados obtuvo, podemos concluir que ello fue debido a que en esta forma de control, los parámetros que interactúan con el error, van cambiando en todo momento, calculando la señal de control óptima para cada punto de referencia de la trayectoria. Como una limitación para este controlador podemos mencionar la cantidad de cálculos que se deben realizar, haciendo un poco complicado el calculo abordo de un vehículo. Sin embargo siempre podemos tener una estación base donde podemos calcular el control y enviarlo hacia el vehículo tal como se realizó en este proyecto. El Controlador óptimo de horizonte infinito presentó la ventaja de poder embarcar todo el control en la plataforma, pero por las limitaciones de la tarjeta y del tiempo destinado, la señal de control en tiempo real no pudo recuperarse por lo que fue calculado fuera de línea. También se aplicó un controlador PID de modo satisfactorio, calculado en la estación base, las ganancias utilizadas fueron obtenidas de manera experimental.

Se realizaron varios experimentos con el objetivo de obtener una aproximación en el consumo de energía resolviendo para ello la integral absoluta $J_{|u|} = \int_{t_0}^{t_1} |u| dt$ en un intervalo de tiempo finito para los controladores τ_x y τ_y . Para este procedimiento se tomaron 16 experimentos para cada controlador, donde pudimos observar un mejor desempeño en el controlador óptimo.

5.2 Trabajo futuro

Para el seguimiento de este proyecto proponemos como trabajo futuro, la utilización de un sensor tal que permita obtener el consumo de energía desde el punto de vista del voltaje utilizado.

En el caso del costo computacional que conlleva el control óptimo de horizonte finito, se propone el uso de alguna tarjeta de almacenamiento donde se pueda hacer el cálculo de parámetros fuera de línea, y recuperarlos en tiempo real durante la trayectoria, para así de ese modo embarcar todo el control.

En este proyecto sólo se aplicó el control óptimo para los ejes x y y por lo que sería importante poder aplicarlo a todas las dinámicas.

Como última propuesta, aplicando los principios descritos en este proyecto, sería un gran aporte poder utilizar esta técnica de control para vuelo en exteriores, utilizando por ejemplo sensores de posicionamiento global.

Apéndice A

Otros Experimentos

El análisis del consumo energético que se presentó en esta tesis, se dedujo a partir de varios experimentos, en este apartado se mostrarán dos experimentos adicionales, utilizando un controlador PID, el controlador óptimo finito y el controlador óptimo infinito. Dichos experimentos se realizaron bajo las mismas condiciones a los presentados en el capítulo de resultados.

A.1 Experimentos con un controlador PID

A continuación se presentan dos experimentos utilizando el controlador PID, cuyas ganancias fueron elegidas de manera heurística. El controlador sólo se aplicó a los ejes x y y . Las ganancias para ambos experimentos se muestran en la siguiente tabla.

kp	kd	ki
0.1	0.89	0.09

Tabla A.1: Ganancias para el PID

A.1.1 Experimento 03 con PID

En la siguiente figura se puede observar el seguimiento de la referencia.

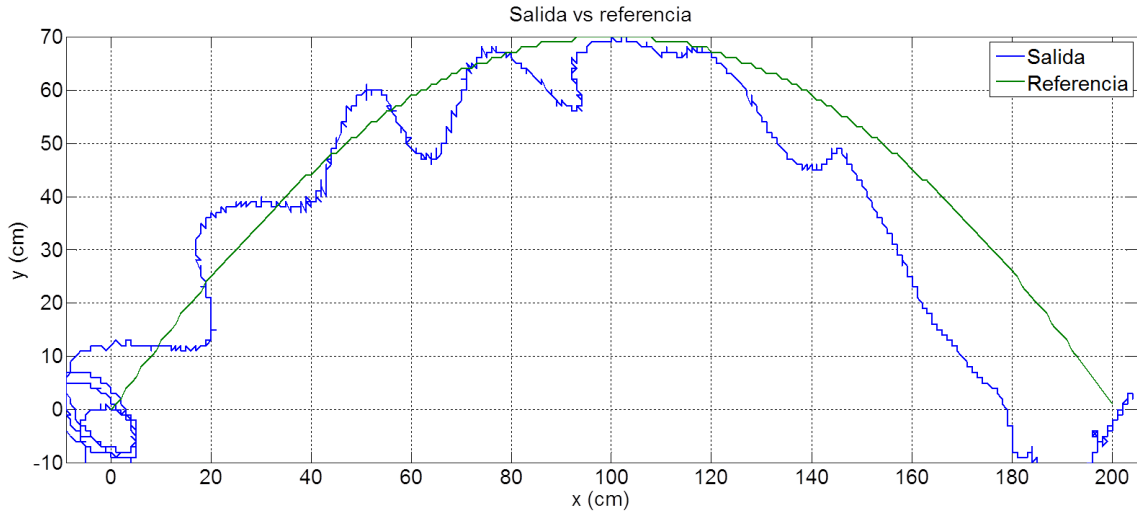


Figura A.1: Resultado del seguimiento con un controlador PID

Comportamiento de la posición:

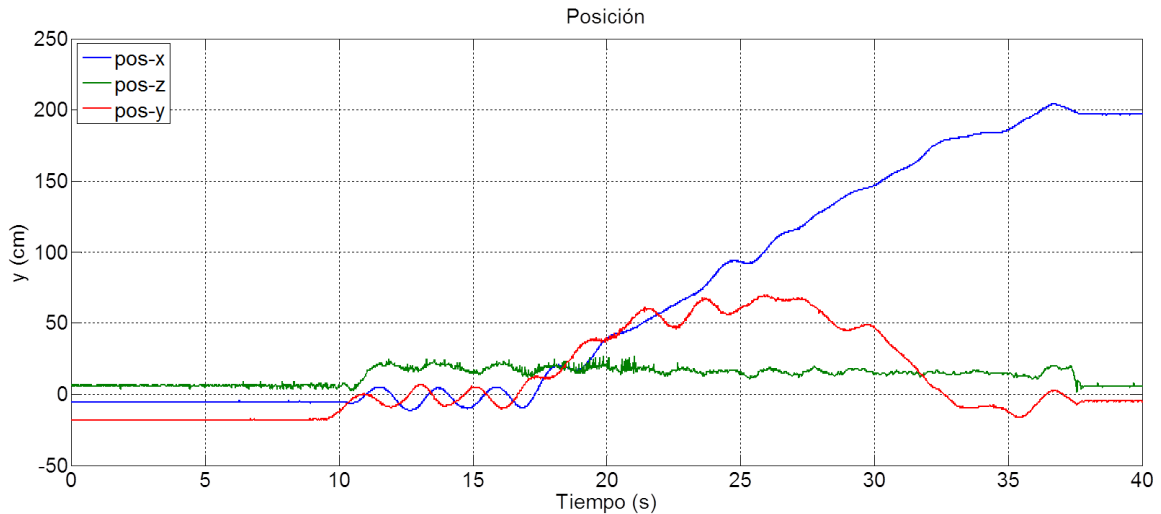


Figura A.2: Posición en los ejes x , y , z

La siguiente figura muestra la orientación del vehículo durante el seguimiento de la trayec-

toria.

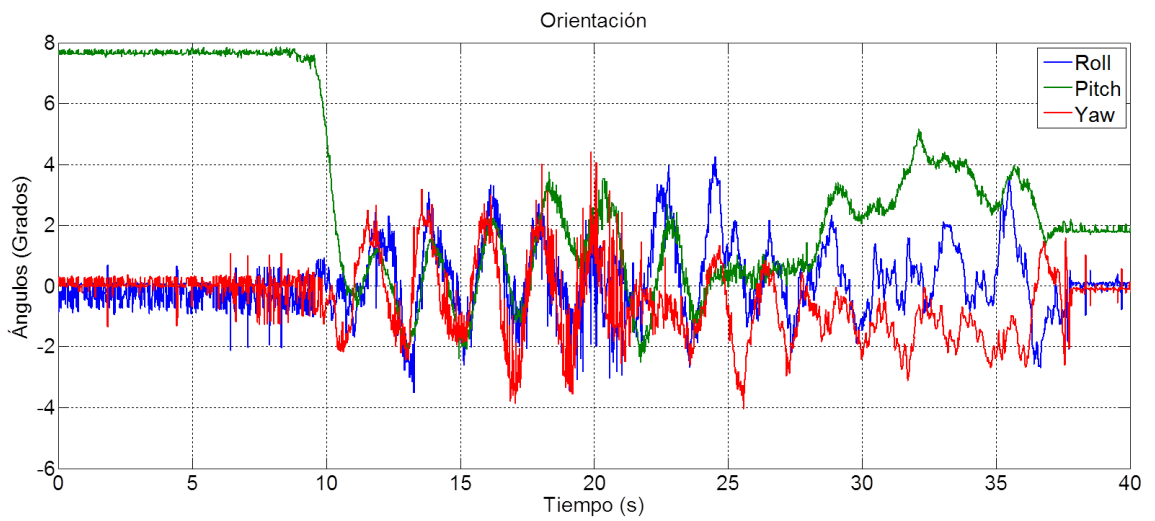


Figura A.3: Orientacion en roll, pitch y yaw

Grafica de las velocidades:

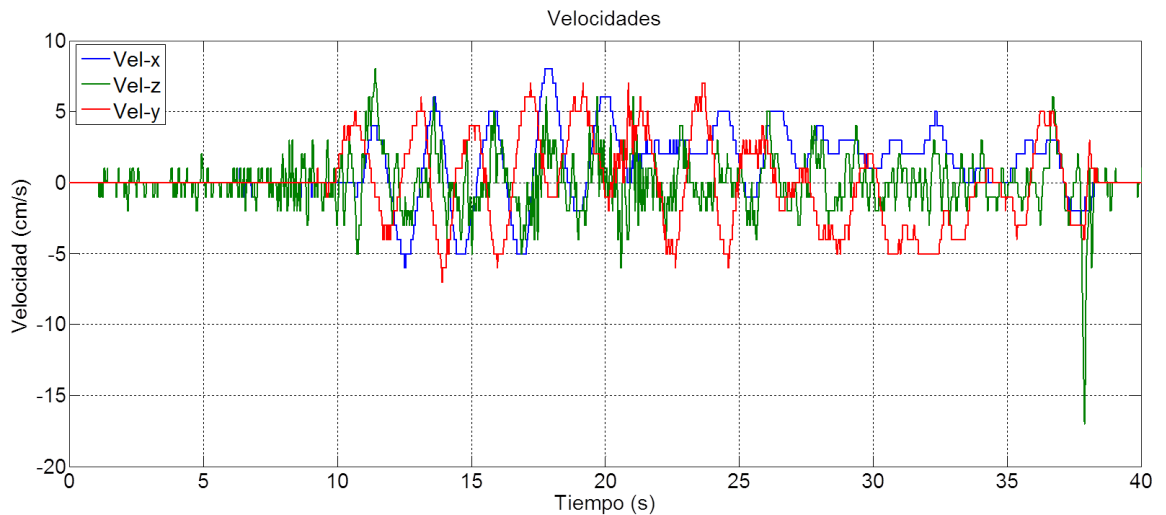


Figura A.4: Velocidades: \dot{x} , \dot{y} , \dot{z}

En la gráfica siguiente se muestra el comportamiento de las velocidades angulares, estos datos fueron obtenidos del sistema de cámaras ya que las medidas reales fueron obtenidas de la central inercial.

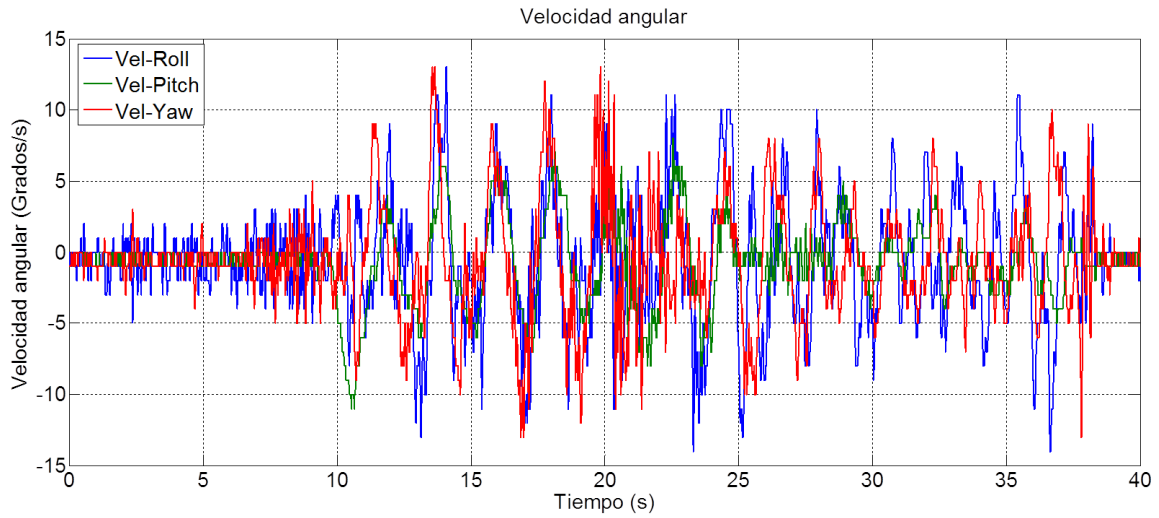


Figura A.5: Velocidades: $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$

El comportamiento de los controles τ_x y τ_y se muestran en la figura siguiente:

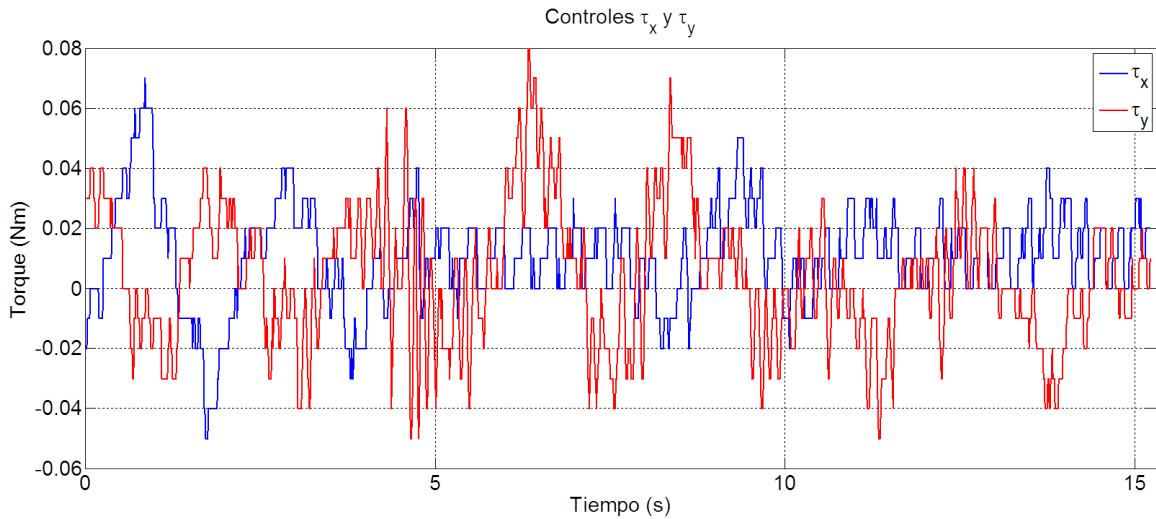


Figura A.6: Controles: τ_x , τ_y

A.1.2 Experimento 05 con PID

En este experimento se utilizaron las ganancias presentadas anteriormente en el experimento 03, la figura A.7 muestra el seguimiento de la referencia.

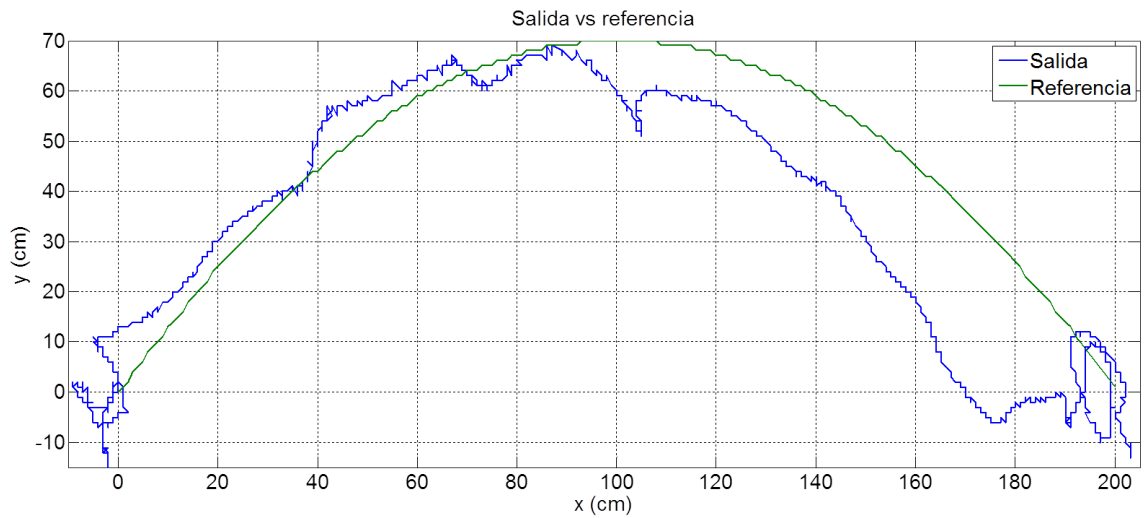


Figura A.7: Resultado del seguimiento con un controlador PID

En las figuras siguientes, podemos observar el comportamiento de la posición, orientación, velocidades espaciales y velocidades angulares.

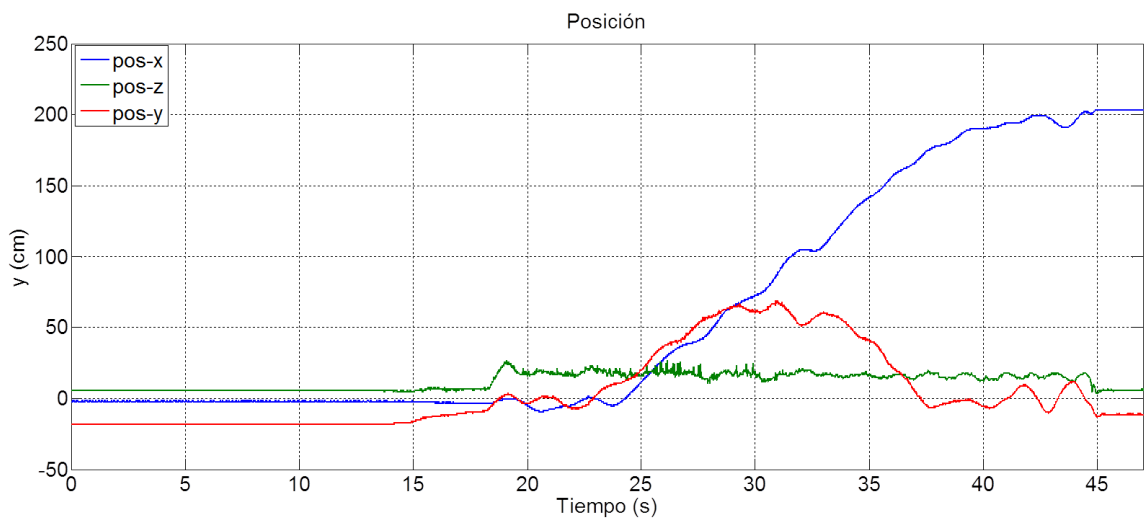


Figura A.8: Posición en los ejes x, y, z

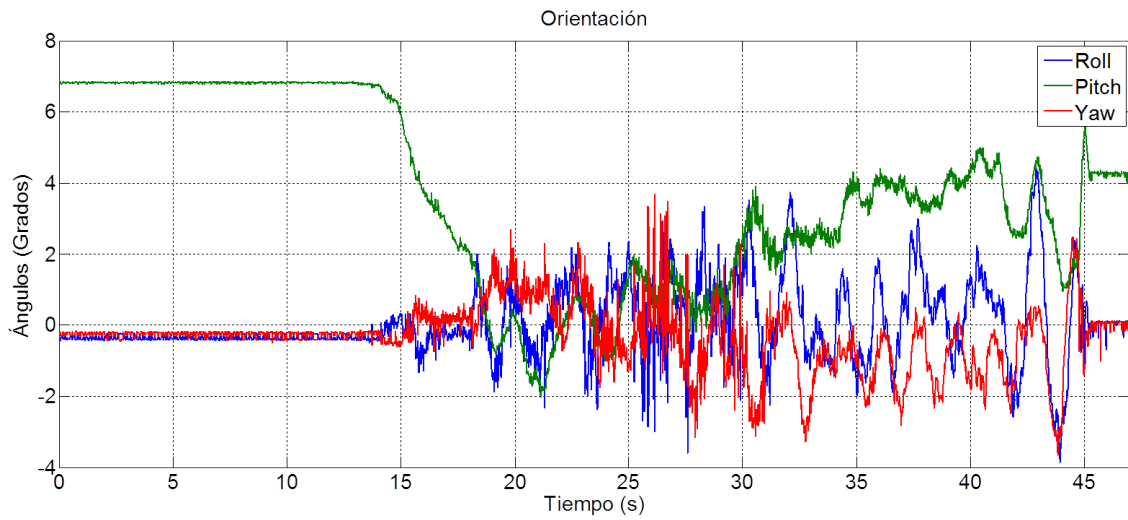
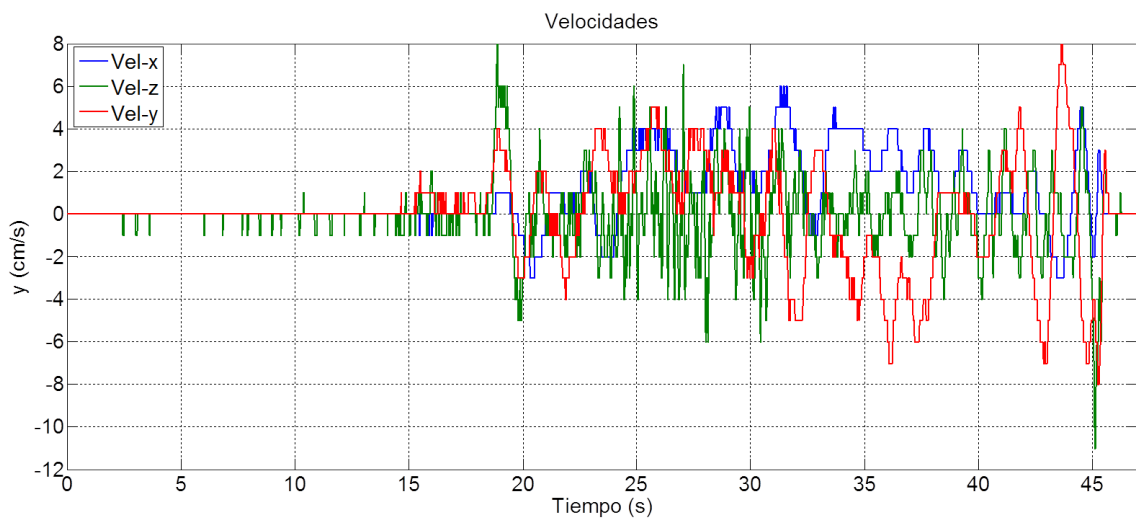


Figura A.9: Orientación en roll, pitch y yaw

Figura A.10: Velocidades: \dot{x} , \dot{y} , \dot{z}

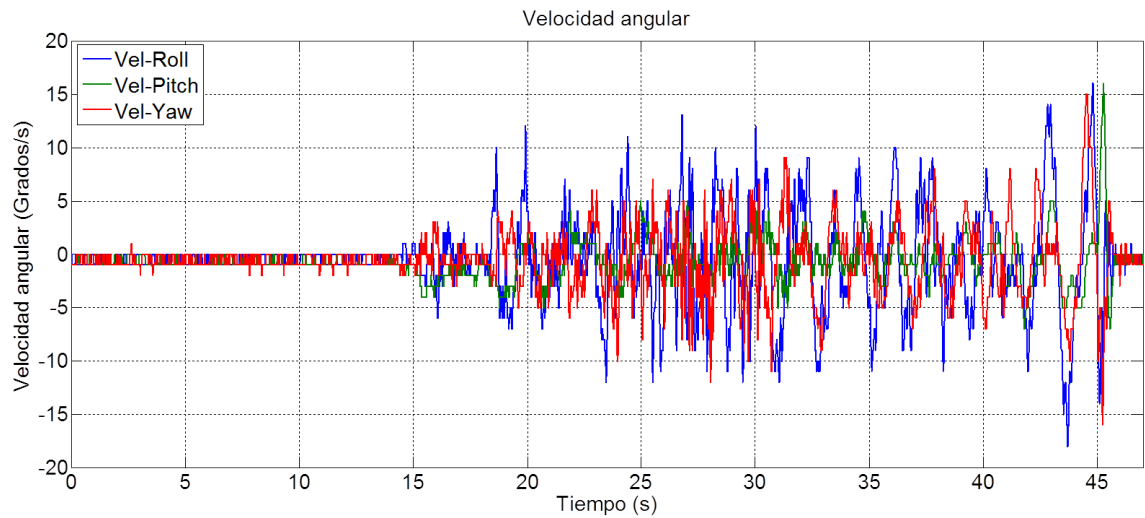


Figura A.11: Velocidades: $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$

Finalmente podemos observar las dos señales de control involucradas en el seguimiento.

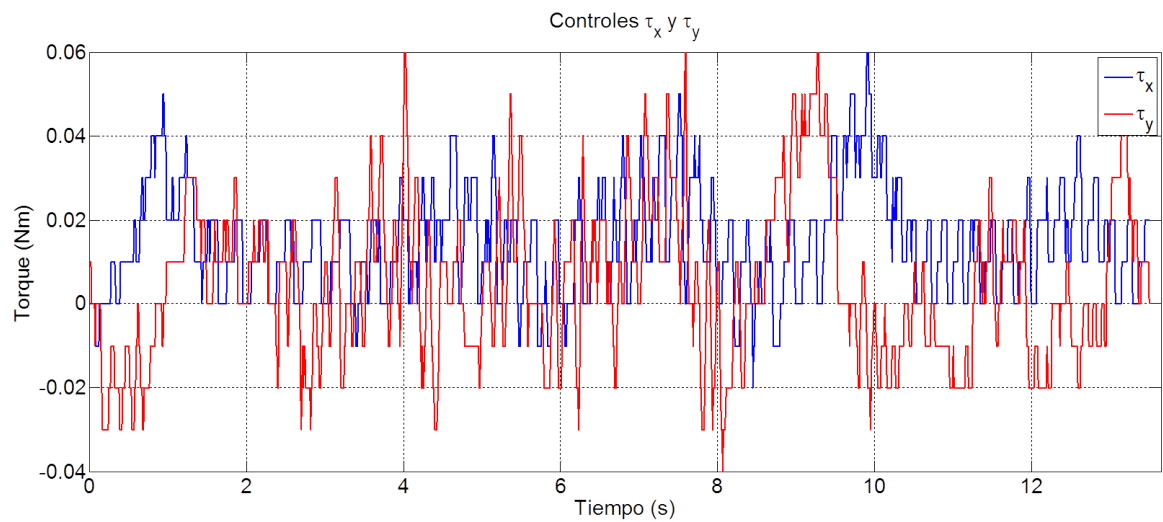


Figura A.12: Controles: τ_x , τ_y

A.2 Experimentos con el controlador óptimo finito

Los experimentos se realizaron utilizando las siguientes matrices de penalización.

$$Q_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, H_x = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, R_x = 33. \quad (\text{A.1})$$

$$Q_y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, H_y = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}, R_y = 32. \quad (\text{A.2})$$

A.2.1 Experimento 04 con controlador óptimo finito

En la primer figura se puede observar el resultado del seguimiento de la curva.

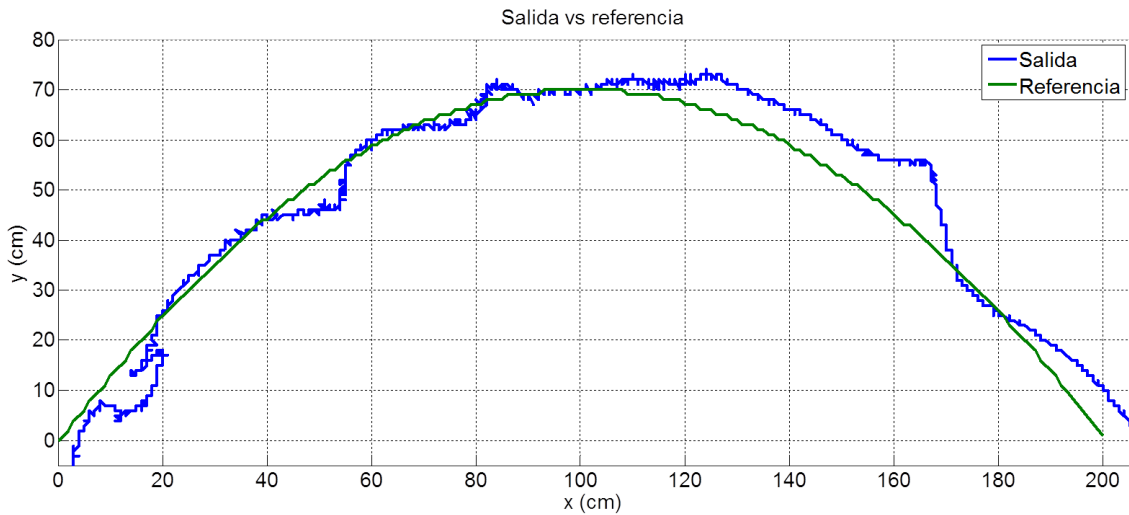


Figura A.13: Resultado del seguimiento con un controlador óptimo finito

Las gráficas siguientes muestran el comportamiento de la posición, la velocidad, la orientación del vehículo durante la trayectoria y su velocidad angular en los tres ejes.

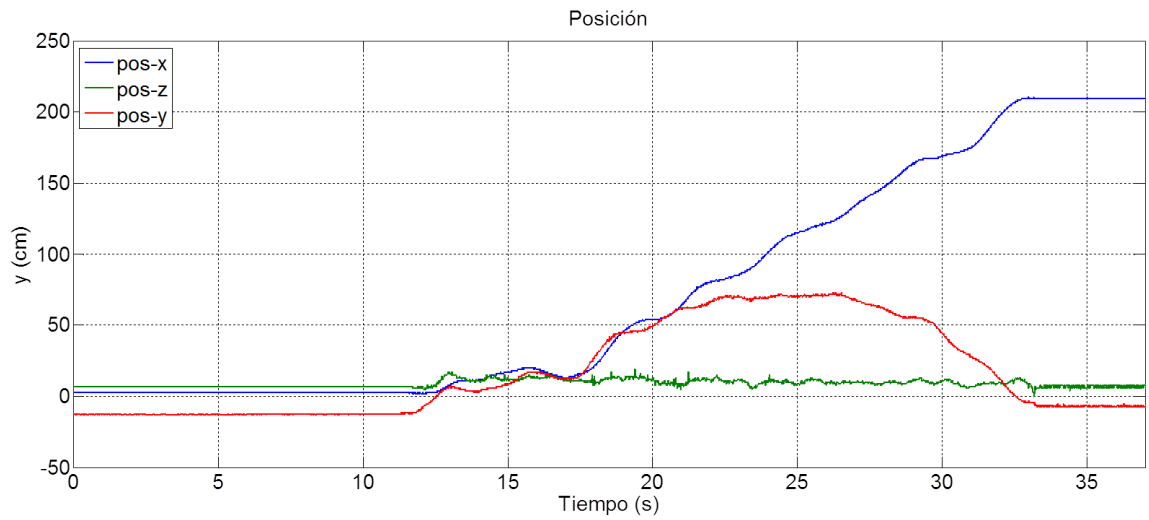


Figura A.14: Posición en los ejes x , y , z

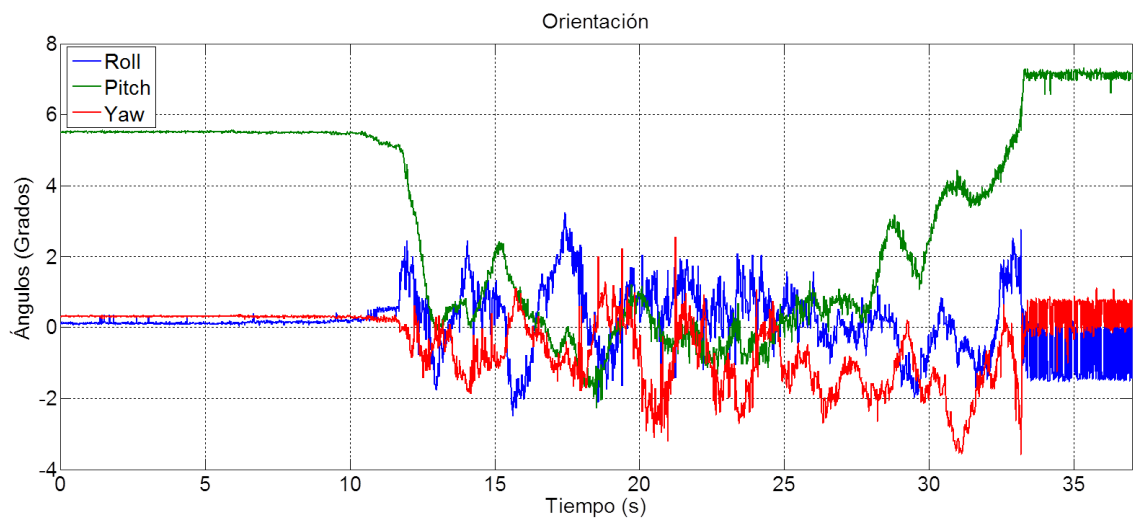
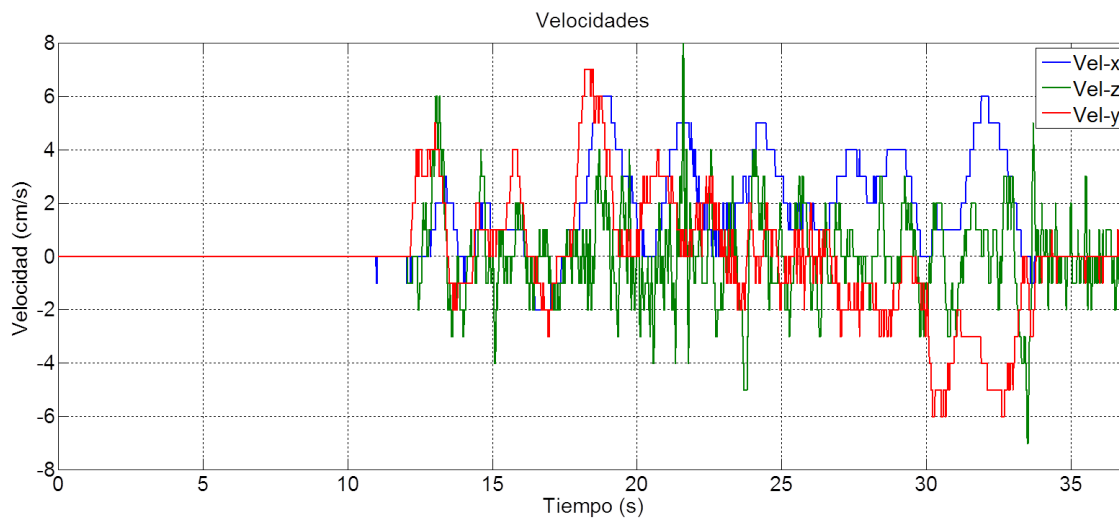
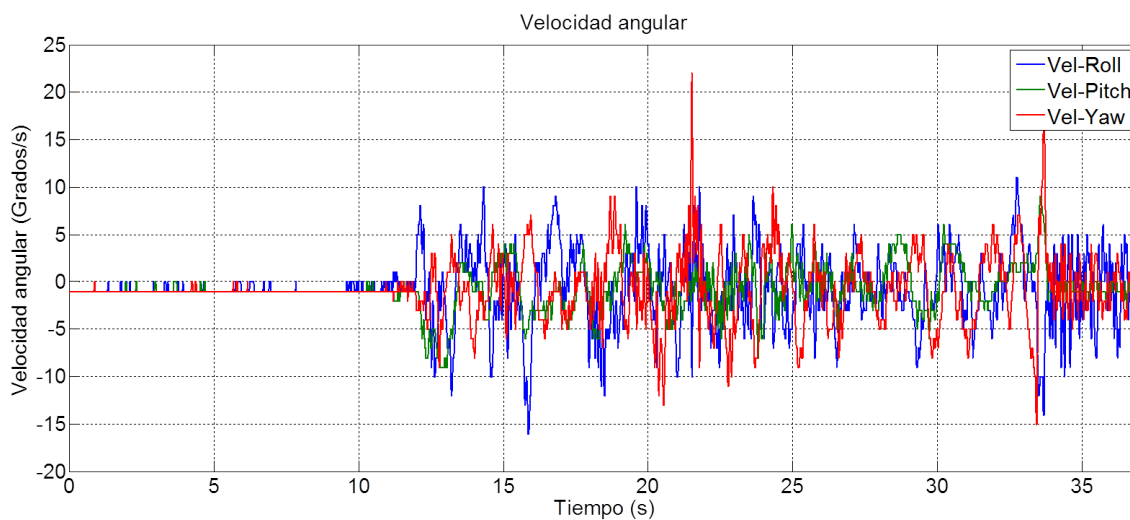


Figura A.15: Orientación en roll, pitch y yaw

Figura A.16: Velocidades: \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} Figura A.17: Velocidades: $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$

Finalmente en esta gráfica (A.18) podemos observar la señal de control óptima durante la trayectoria.

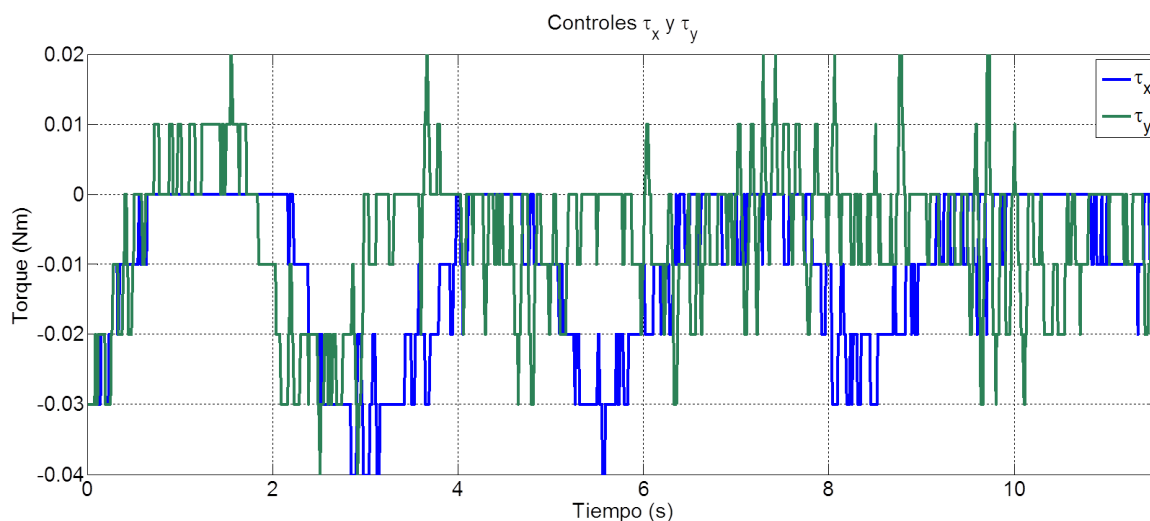


Figura A.18: Controles: τ_x, τ_y

A.2.2 Experimento 09 con un controlador óptimo finito

El seguimiento de la curva de referencia puede apreciarse en la siguiente gráfica.

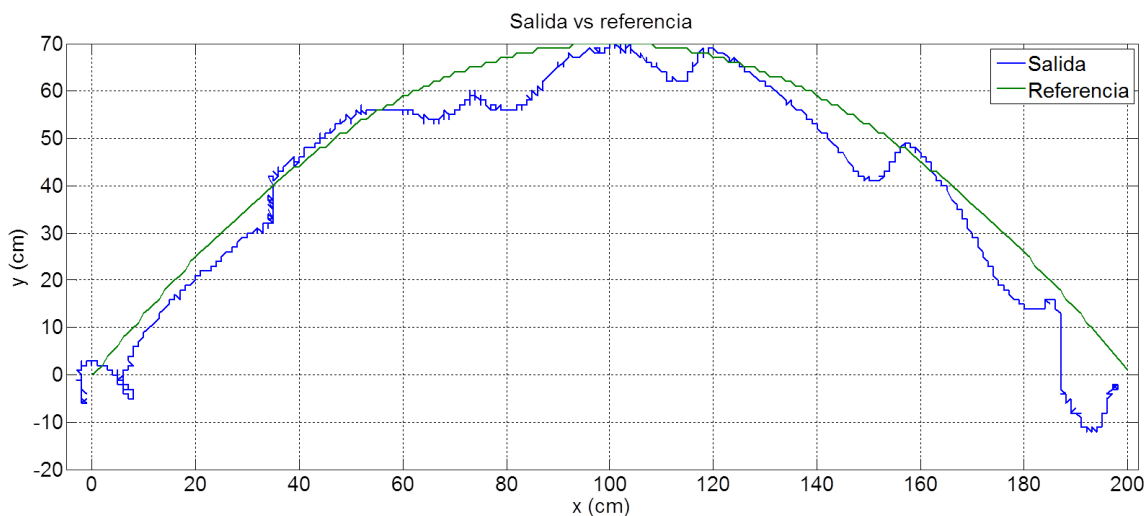


Figura A.19: Resultado del seguimiento con un controlador óptimo finito

Las gráficas siguientes muestran el comportamiento de la posición, la velocidad, la orientación y la velocidad angular.

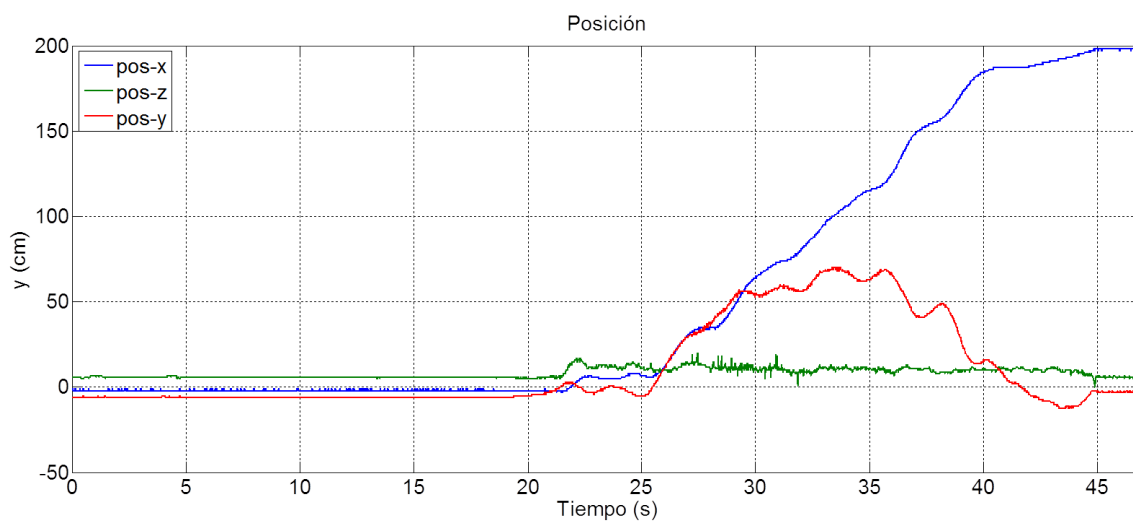
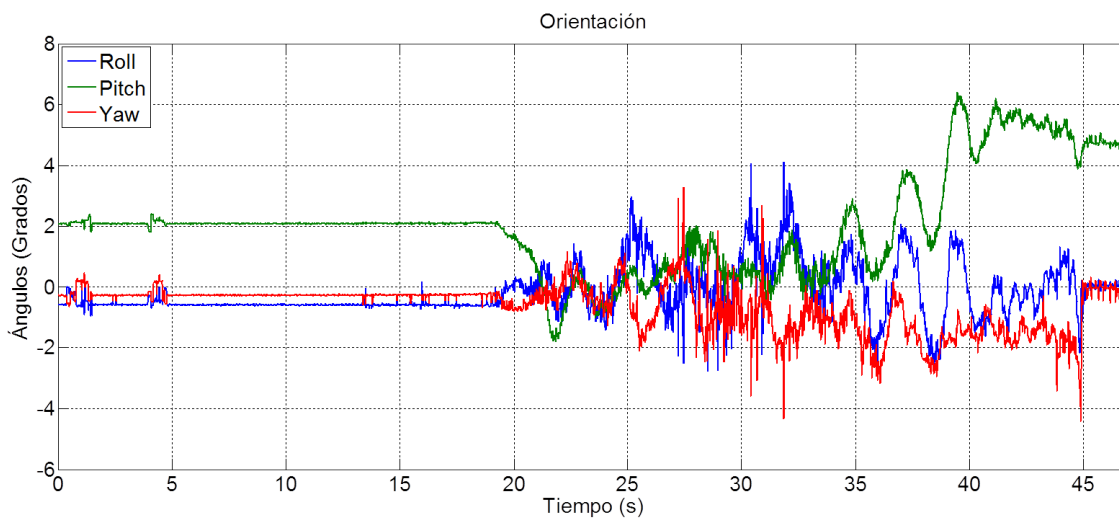
Figura A.20: Posición en los ejes x , y , z 

Figura A.21: Orientación en roll, pitch y yaw

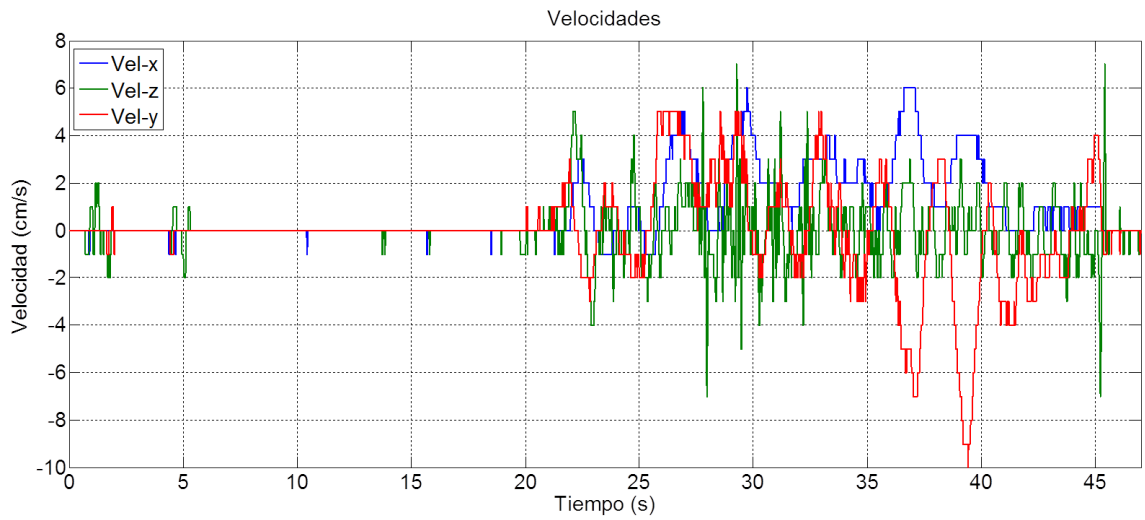


Figura A.22: Velocidades: \dot{x} , \dot{y} , \dot{z}

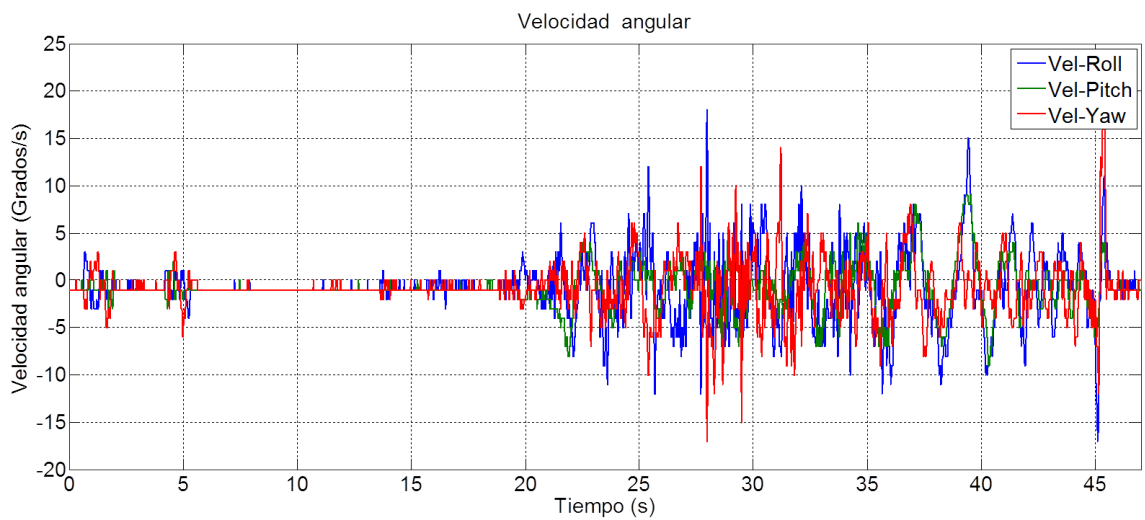


Figura A.23: Velocidades: $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$

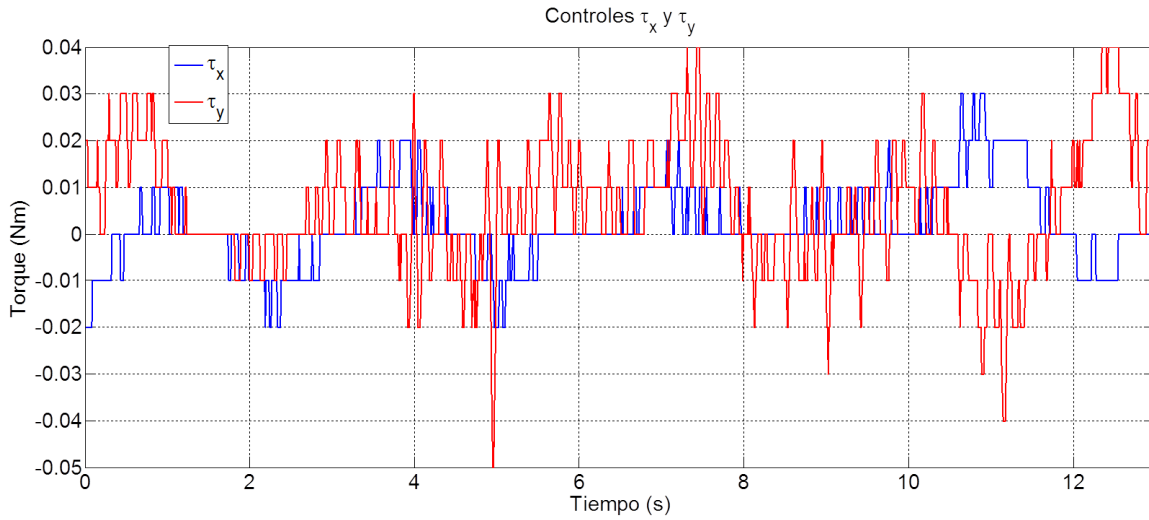


Figura A.24: Controles: τ_x , τ_y

A.3 Experimentos con el controlador óptimo infinito

A continuación se muestran los resultados de otros experimentos utilizando el controlador óptimo infinito, las cuales se implementaron con las siguientes matrices de penalización:

$$Q_{x,y} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, R_{x,y} = 120. \quad (\text{A.3})$$

A.3.1 Experimento 01 con un controlador óptimo infinito

El resultado del seguimiento puede apreciarse en la figura siguiente.

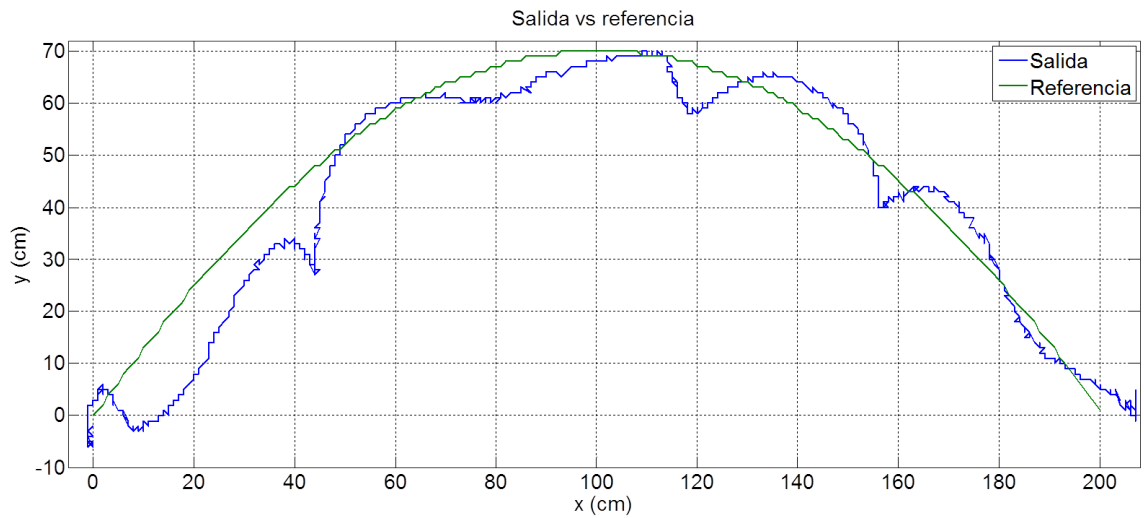


Figura A.25: Resultado del seguimiento con un controlador óptimo infinito

En las gráficas siguientes se muestran la posición del vehículo, la orientación, la velocidad espacial y la velocidad angular.

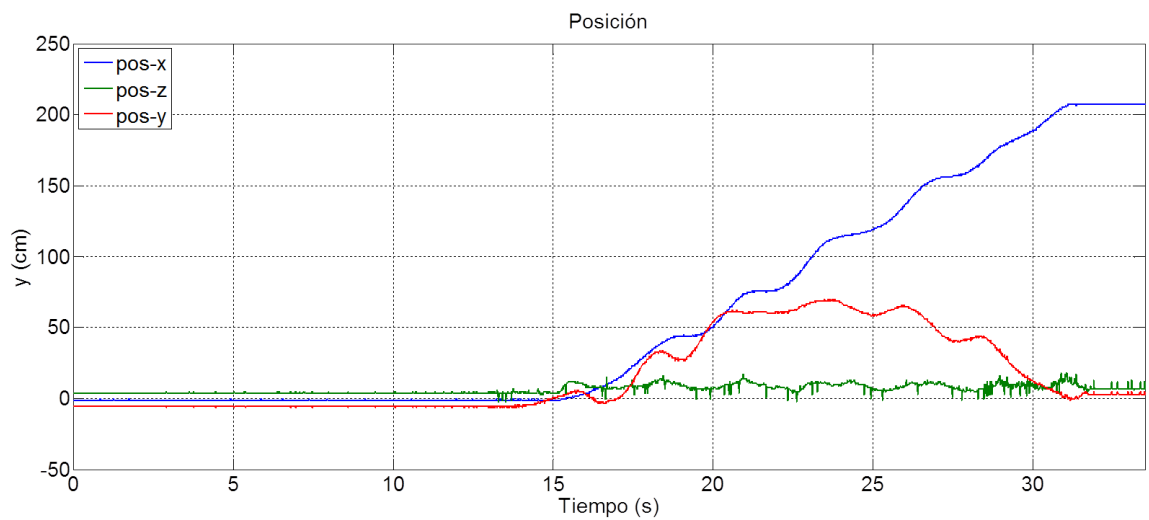


Figura A.26: Posición en los ejes x, y, z

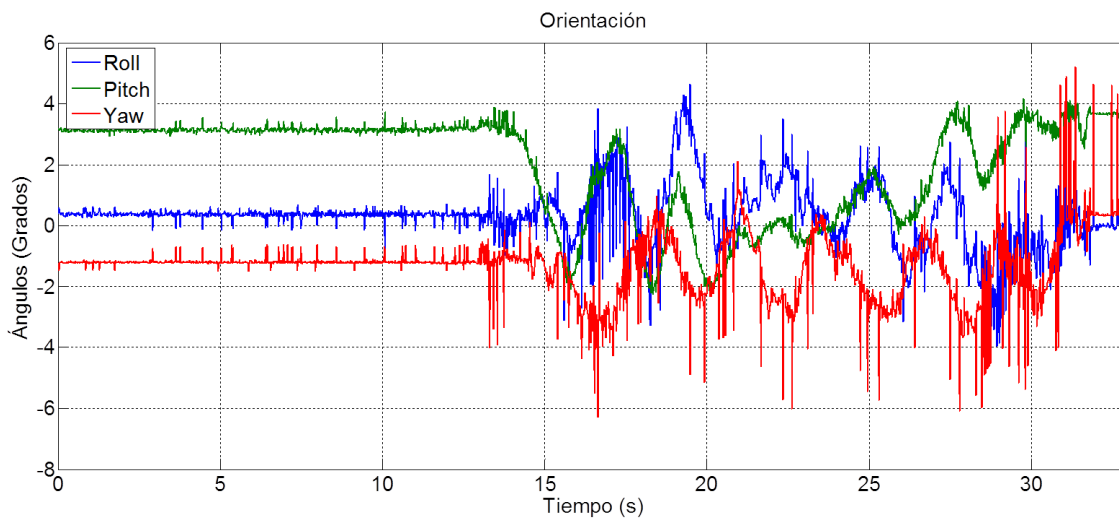
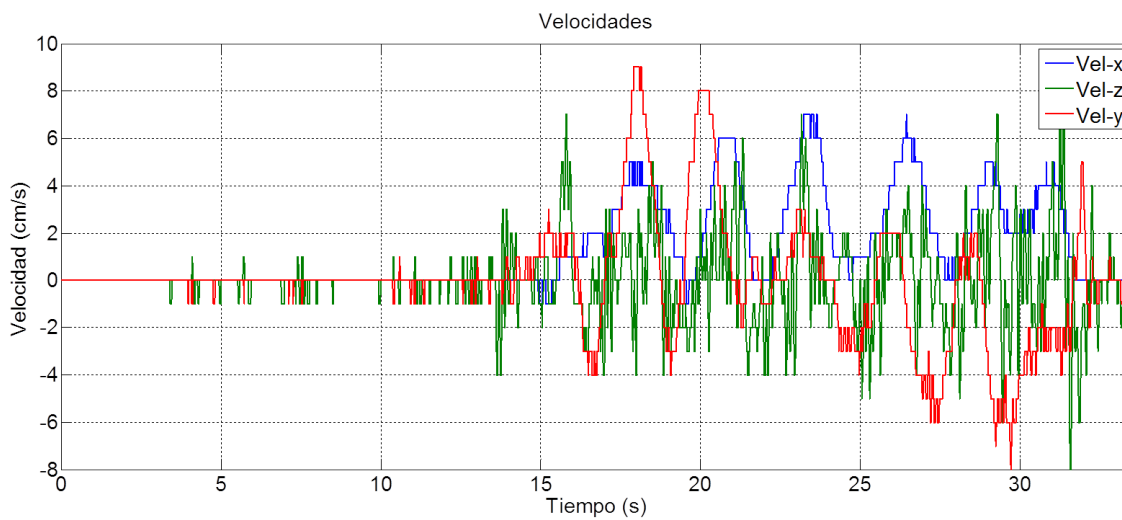


Figura A.27: Orientación en roll, pitch y yaw

Figura A.28: Velocidades: \dot{x} , \dot{y} , \dot{z}

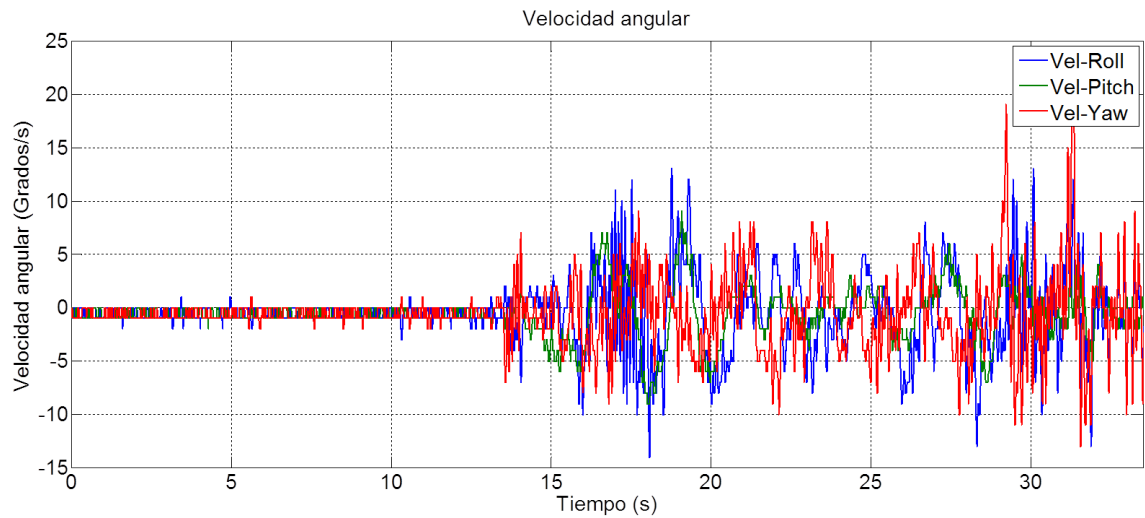


Figura A.29: Velocidades: $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$

La señal de control para τ_x y τ_y se muestra a continuación.

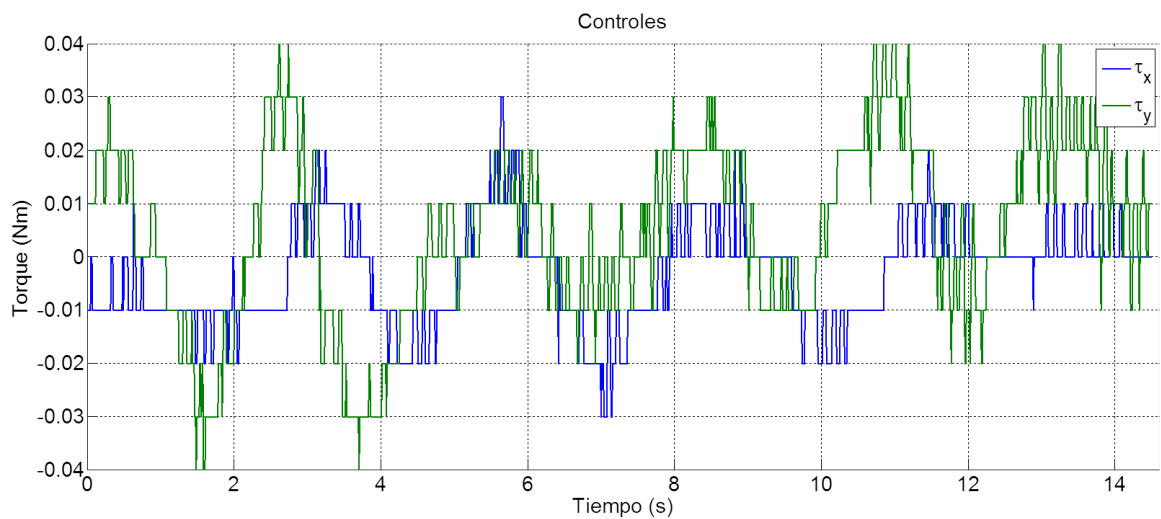


Figura A.30: Controles: τ_x , τ_y

A.3.2 Experimento 05 con un controlador óptimo infinito

Resultado del seguimiento, aplicando el controlador óptimo infinito.

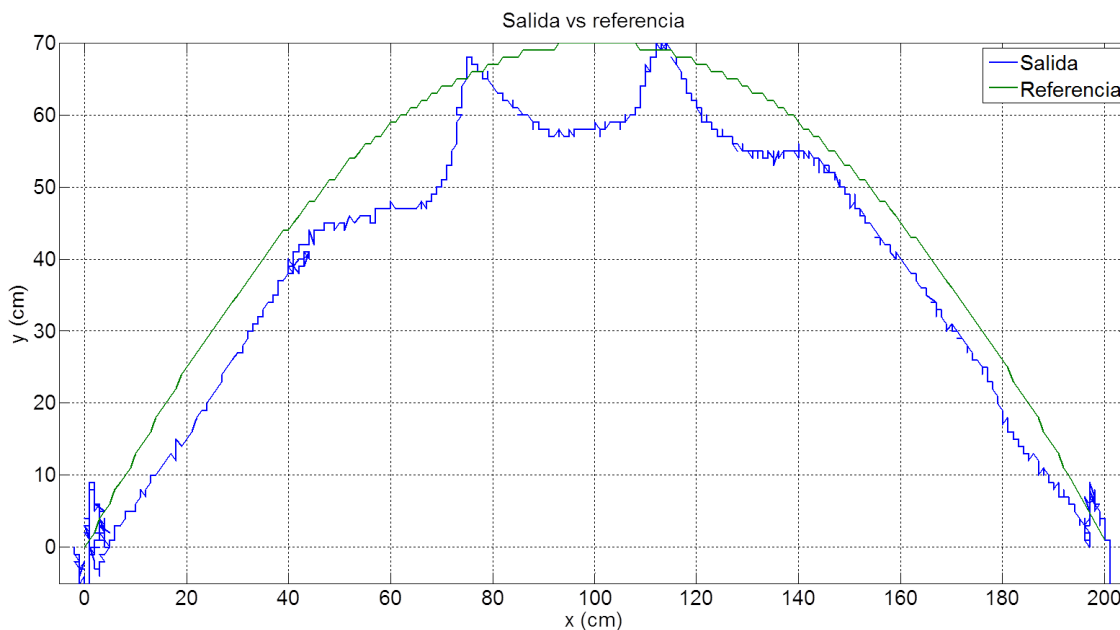


Figura A.31: Resultado del seguimiento con un controlador óptico infinito

El comportamiento de la posición, orientación, velocidad espacial y velocidad angular se muestran en las gráficas siguientes.

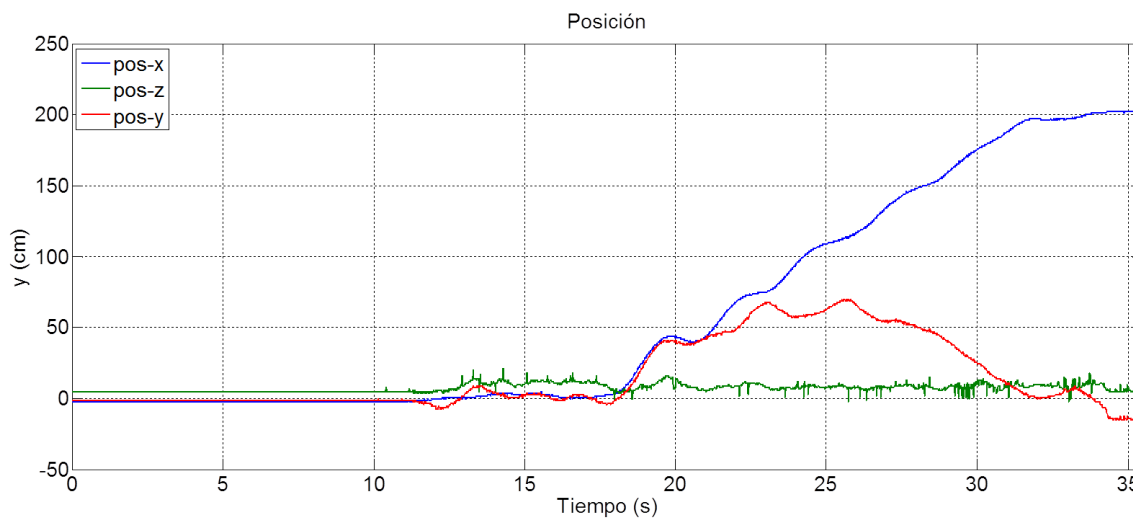


Figura A.32: Posición en los ejes x , y , z

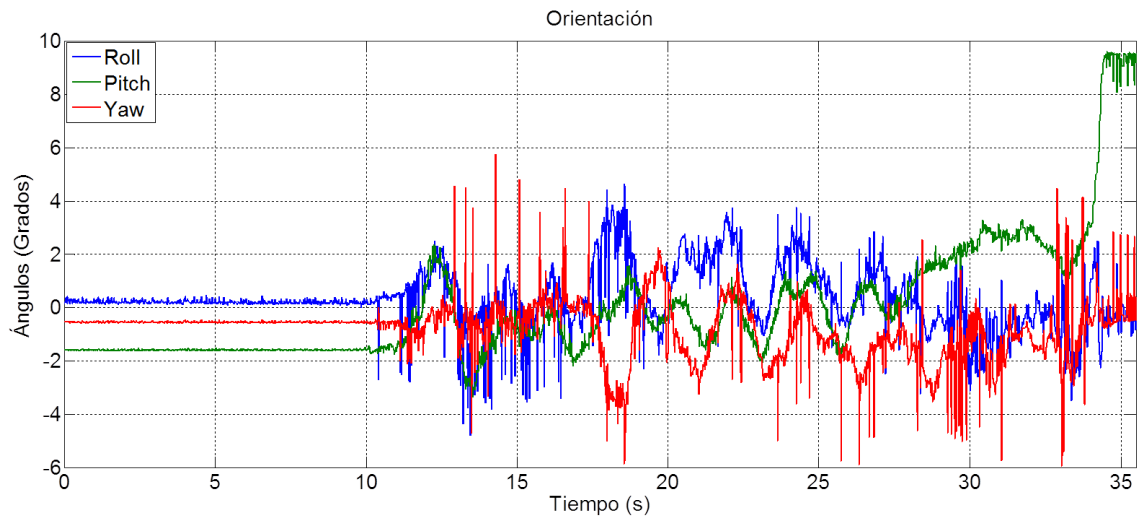


Figura A.33: Orientación en roll, pitch y yaw

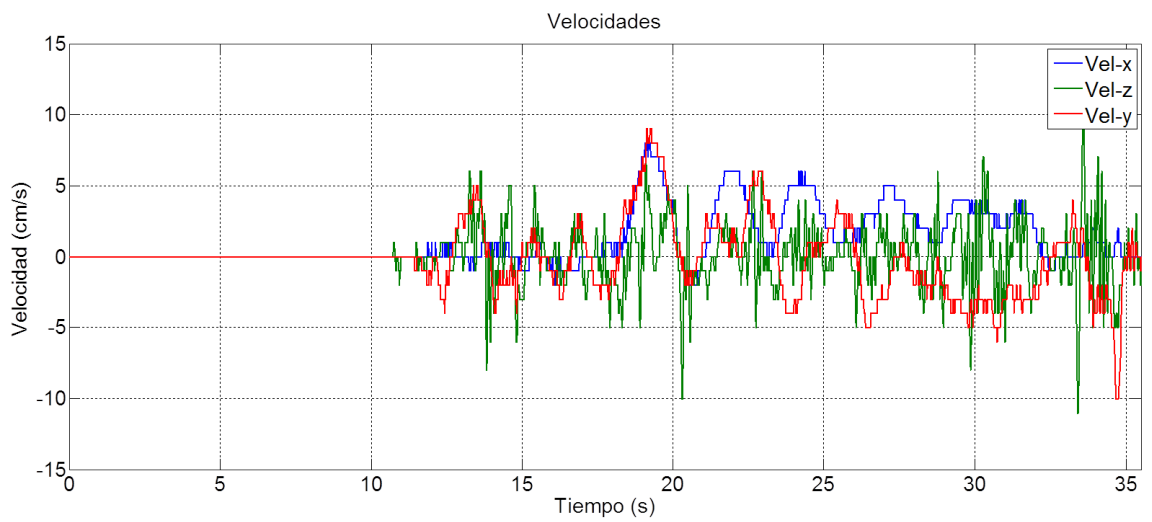


Figura A.34: Velocidades: \dot{x} , \dot{y} , \dot{z}

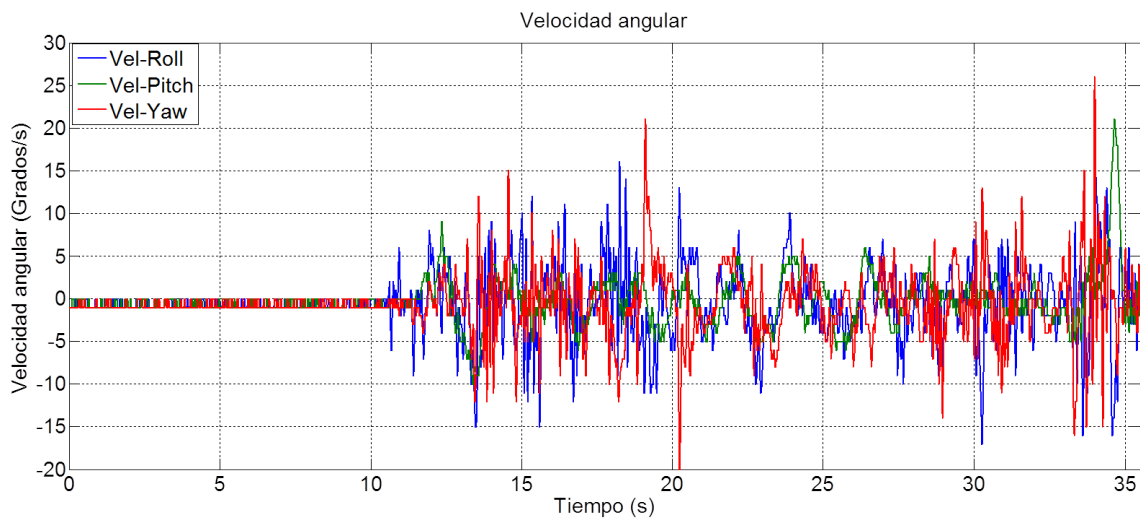


Figura A.35: Velocidades: $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$

Las señales de control se muestran en la siguiente figura, únicamente durante el seguimiento de la trayectoria.

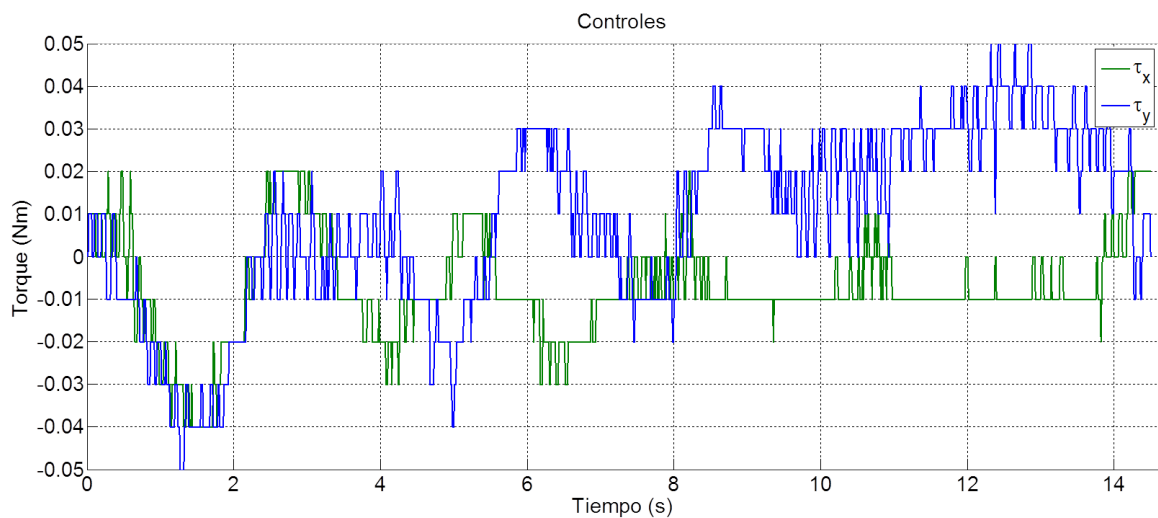


Figura A.36: Controles: τ_x , τ_y

A.4 Código de Matlab para obtener los parámetros del control óptimo

Código de Matlab para obtener los parámetros del control en horizonte finito.

```

clear all
%Parámetros para horizonte finito
global T g m FzDiscreto FyDiscreto FxDiscreto ref tfz tfy tfx
bandera aux1 aux2 contador
T=0.1; g=9.8; m=1; contador=0;
bandera=0; aux1=0; aux2=0;
ref=[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]'; tfz=3;
sistemazc=ss([0 1 0 0;0 0 0 0; 0 0 0 1;0 0 0 0],[0 0;1 0;0 0;0
1],eye(4),zeros(4,2));
sistemazd=c2d(sistemazc,T);
Qz=[2 0 0 0;0 5 0 0;0 0 2 0; 0 0 0 5]; Rz=[1000 0; 0 1240]; Hz=[10
0 0 0;0 15 0 0;0 0 10 0; 0 0 0 15];
sistemayc=ss([0 1 0 0;0 0 g 0; 0 0 0 1;0 0 0
0],[0;0;0;1],eye(4),zeros(4,1));
sistemayd=c2d(sistemayc,T); tfy=21;
Qy=[2 0 0 0;0 13 0 0;0 0 2 0; 0 0 0 10]; Ry=32;Hy=[70 0 0 0;0 32 0
0;0 0 30 0; 0 0 0 30];% Original
sistemaxc=ss([0 1 0 0;0 0 -g 0; 0 0 0 1;0 0 0
0],[0;0;0;1],eye(4),zeros(4,1));
sistemaxd=c2d(sistemaxc,T); tfx=21;
Qx=[2 0 0 0;0 7 0 0;0 0 2 0; 0 0 0 10]; Rx=33;Hx=[45 0 0 0;0 30 0
0;0 0 20 0; 0 0 0 25];
[Az,Bz,Cz,Dz] = ssdata(sistemazd); Nz=tfz/T;
[Ay,By,Cy,Dy] = ssdata(sistemayd); Ny=tfy/T;
[Ax,Bx,Cx,Dx] = ssdata(sistemaxd); Nx=tx/T;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P kz=Hz; %Condición inicial
for k=1:1:Nz
Fkz = -inv(Rz+Bz'*P kz*Bz)*Bz'*P kz*Az;
P kz = (Az+Bz*Fkz) '*P kz*(Az+Bz*Fkz)+Fkz '*Rz*Fkz+Qz;
FzDiscreto(:, :, (Nz+1)-k)=Fkz;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P ky=Hy; %Condición inicial
for k=1:1:Ny
Fky = -inv(Ry+By'*P ky*By)*By'*P ky*Ay;
P ky = (Ay+By*Fky) '*P ky*(Ay+By*Fky)+Fky '*Ry*Fky+Qy;
FyDiscreto(:, :, (Ny+1)-k)=Fky;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P kx=Hx; %Condición inicial
for k=1:1:Nx
Fkx = -inv(Rx+Bx'*P kx*Bx)*Bx'*P kx*Ax;
P kx = (Ax+Bx*Fkx) '*P kx*(Ax+Bx*Fkx)+Fkx '*Rx*Fkx+Qx;
FxDiscreto(:, :, (Nx+1)-k)=Fkx;
end

```

Algoritmo para obtener los parámetros para el control óptimo de horizonte infinito

```

clear all
%Horizonte infinito (Parámetros)
global T g m Kz Kphi Ktheta ref
T=0.1; g=9.8; m=1;
ref=[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]';
sistemazc=ss([0 1 0 0;0 0 0 0; 0 0 0 1;0 0 0 0],[0 0;1 0;0 0;0
1],eye(4),zeros(4,2));
sistemazd=c2d(sistemazc,T);
Qz=[2 0 0 0;0 5 0 0;0 0 2 0; 0 0 0 5]; Rz=[100 0; 0 140];
[Kz,Sz,Ez] = lqr(sistemazd,Qz,Rz,zeros(4,2));
sistemayc=ss([0 1 0 0;0 0 g 0; 0 0 0 1;0 0 0
0],[0;0;0;1],eye(4),zeros(4,1));
sistemayd=c2d(sistemayc,T);
Qy=[5 0 0 0;0 12 0 0;0 0 2 0; 0 0 0 10]; Ry=120;
[Kphi,Sy,Ey] = lqr(sistemayd,Qy,Ry,zeros(4,1));
sistemaxc=ss([0 1 0 0;0 0 -g 0; 0 0 0 1;0 0 0
0],[0;0;0;1],eye(4),zeros(4,1));
sistemaxd=c2d(sistemaxc,T);
Qx=[5 0 0 0;0 12 0 0;0 0 2 0; 0 0 0 10]; Rx=120;
[Ktheta,Sx,Ex] = lqr(sistemaxd,Qx,Rx,zeros(4,1));

```

Bibliografía

- [1] ALEXIS, K., NIKOLAKOPOULOS, G., AND TZES, A. Design and experimental verification of a constrained finite time optimal control scheme for the attitude control of a quadrotor helicopter subject to wind gusts. In *Robotics and Automation (ICRA), 2010 IEEE International Conference on* (2010), IEEE, pp. 1636–1641.
- [2] ARNOLD III, W. F., AND LAUB, A. J. Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic riccati equations. *Proceedings of the IEEE* 72, 12 (1984), 1746–1754.
- [3] BOYD, S., AND VANDENBERGHE, L. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2009.
- [4] CASTILLO, P., GARCÍA, P., LOZANO, R., AND ALBERTOS, P. Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 4, 1 (2007), 41–57.
- [5] CORONA-SANCHEZ, J. J., AND RODRIGUEZ-CORTÉS, H. Path following control for the cartesian position of the quadrotor*. In *Memoria XV Congreso Latinoamericano de Control Automático* (2012).
- [6] DIGI. <http://www.digi.com/products/wireless-wired-embedded-solutions/zigbee-rf-modules>, Diciembre de 2014.
- [7] KHALIL, H. K., AND GRIZZLE, J. *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice hall New Jersey, 1996.

-
- [8] KIRK, D. E. *Optimal control theory: an introduction*. Courier Dover Publications, 2012.
- [9] LAI, L.-C., YANG, C.-C., AND WU, C.-J. Time-optimal control of a hovering quadrotor helicopter. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 45, 2 (2006), 115–135.
- [10] LOZANO, R. *Unmanned aerial vehicles: Embedded control*. John Wiley & Sons, 2013.
- [11] MEIER, L., TANSKANEN, P., FRAUNDORFER, F., AND POLLEFEYS, M. Pixhawk: A system for autonomous flight using onboard computer vision. In *Robotics and automation (ICRA), 2011 IEEE international conference on* (2011), IEEE, pp. 2992–2997.
- [12] MICROSTRAIN. <http://www.microstrain.com/inertial/3dm-gx3-35>, Diciembre de 2014.
- [13] NATURAL POINT. <http://www.naturalpoint.com/optitrack/>, Diciembre de 2014.
- [14] NUCHKRUA, T., AND PARNICHKUN, M. Identification and optimal control of quadrotor. *Thammasat International Journal of Science and Technology* 17, 4 (2012), 36.
- [15] RITZ, R., HEHN, M., LUPASHIN, S., AND D’ANDREA, R. Quadcopter performance benchmarking using optimal control. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2011 IEEE/RSJ International Conference on* (2011), IEEE, pp. 5179–5186.
- [16] ROSALES, C., SCAGLIA, G., CARELLI, R., AND JORDAN, M. Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos.
- [17] SÁNCHEZ, L., SANTOS, O., ROMERO, H., SALAZAR, S., AND LOZANO, R. Finite horizon nonlinear optimal control for a quadrotor: experimental results.
- [18] SÁNCHEZ, L., SANTOS, O., ROMERO, H., SALAZAR, S., AND LOZANO, R. Nonlinear and optimal real-time control of a rotary-wing uav. In *American Control Conference (ACC), 2012* (2012), pp. 3857–3862.
-

-
- [19] SANTOS, O., ROMERO, H., SALAZAR, S., AND LOZANO, R. Discrete optimal control for a quadrotor uav: Experimental approach. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014 International Conference on* (2014), IEEE, pp. 1138–1145.
- [20] SANTOSO, F., LIU, M., AND EGAN, G. Linear quadratic optimal control synthesis for a uav. In *12th Australian International Aerospace Congress, AIAC12, Melbourne, Australia* (2007).
- [21] SKJETNE, R., FOSSEN, T. I., AND KOKOTOVIĆ, P. V. Robust output maneuvering for a class of nonlinear systems. *Automatica* 40, 3 (2004), 373–383.
- [22] VAN LOOCK, W., PIPELEERS, G., AND SWEVERS, J. Time-optimal quadrotor flight. In *Control Conference (ECC), 2013 European* (2013), IEEE, pp. 1788–1792.
- [23] VISIOLI, A. *Practical PID control*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [24] WHIDBORNE, I. D. C. J. F., AND COOKE, A. K. Optimal trajectory planning and lqr control for a quadrotor uav.
- [25] ZAK, S. H. *Systems and control*. Oxford University Press New York, 2003.