



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Programa de
Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina

Asistente Neumático para Carga

TESIS

Que presenta

Irving Rosales Díaz

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en

Sistemas Autónomos de Navegación Aéreas y Submarinos

Directores de la Tesis:

Dr. Antonio Osorio Cordero.

Dr. Jesús Ricardo López Gutiérrez.

México, D.F.

Abril, 2015

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo de mis asesores; Doctor Rogelio Lozano Leal, Doctor Sergio Salazar Cruz, y el Doctor Antonio Osorio Cordero. Tanto el Doctor Ricardo López Gutierrez como el Maestro Hipólito Aguilar Sierra, me brindaron su apoyo en todas las etapas del desarrollo del trabajo presentado. También han sido generosamente serviciales, en particular en la publicación del artículo científico en la "18th Conference on System Theory, Control and Computing", realizado en Rumanía.

Quiero resaltar el apoyo otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) para concluir mis estudios de maestría.

A todos mis compañeros y amigos por brindarme su comprensión, apoyo y solidaridad durante el periodo del posgrado.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia que siempre ha sido motivación y sustento durante mi vida profesional y personal, con cuya solidaridad y amor apoyaron mi deseo de continuar por el camino del conocimiento.

RESUMEN

Los exoesqueletos son robots acoplados al cuerpo humano, enfocados principalmente al incremento de su fuerza, velocidad, resistencia y rendimiento. Las principales aplicaciones se reflejan en los campos de la milicia, la industria y la medicina. Este trabajo de tesis está orientado al campo de estudio de la robótica para la rehabilitación humana, específicamente centra la atención sobre el tronco torácico del cuerpo humano, y aun más en específico en la espina dorsal. Dicha sección fisiológica es de suma importancia por que ahí es donde se encuentran la mayor cantidad de sistemas vitales de un ser humano independientemente de su condición, el tronco dorsal es como una caja que contiene instrumentos muy frágiles llamados órganos o hasta sistemas de mantenimiento completos del mismo ente orgánico, el cuidado de tal sección ayuda a mejorar la calidad de vida en el campo laboral, en el hogar y en general en la vida cotidiana. Los instrumentos o mecanismos robóticos que se emplean a diario tienen el objetivo primordial de mejorar la calidad de vida humana.

Tomando en consideración el argumento mencionado, se inicia el proyecto de tesis propuesto generando el diseño, manufactura y construcción de una plataforma que permita experimentar la transmisión de energía o fuerza ejercida sobre dicha sección fisiológica, por medio del mecanismo evitar traumas y severas complicaciones a corto y largo lapso de tiempo.

Para que el prototipo propuesto deba realizar la tarea solicitada es necesario aplicar estrategias de control con la capacidad de manipular automáticamente los actuadores neumáticos (PAM - Pneumatic Artificial Muscle), sin olvidar la sección de electrónica de control y potencia necesaria, de tal manera que se aumente la fuerza requerida para el levantamiento de cargas externas o propias.

ABSTRACT

Exoskeletons are coupled robots to the human body, mainly focused on increasing strength, speed, endurance and performance. The main applications are reflected in the fields of military, industry and medicine. This thesis is oriented to the field of study of robotics for human rehabilitation, specifically attention to the thoracic trunk of the human body focused and even more specific spine. This physiological section is important because is where there are greatest number of vital systems of a human being independently of its status, the dorsal trunk is like a box containing fragile elements calls organs or complete maintenance systems of the same organic entity, the care of such section helps to enhance the quality of life as at work, home and even in everyday life. The robotics instruments or mechanisms that we use every day has the primary objective of improving the quality of human life.

Considering the above argument, the thesis project proposed starts with the creating of the design, construction and manufacture of a platform to experience the transmission of energy or force exerted on said physiological section through the mechanism avoiding trauma and severe complications to short or long period of time.

For the proposed prototype should perform the requested task is necessary to apply control strategies with the ability to automatically handle the pneumatic actuators (PAM - Pneumatic Artificial Muscle), not to mention the control and power electronics section needed, so that increase the force required for lifting loads external or own.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	iii
RESUMEN	v
ABSTRACT	vii
ÍNDICE GENERAL	ix
ÍNDICE DE TABLAS	xi
ÍNDICE DE FIGURAS	xiii
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Objetivos	9
1.2 Justificación	11
2 DISEÑO Y DESARROLLO DEL PROTOTIPO EXPERIMENTAL	13
3 MODELADO MATEMÁTICO DEL EXOESQUELETO	19
3.1 Modelado Dinámico del PAM	20
3.2 Modelo Dinámico del Exoesqueleto	24
3.2.1 Ecuaciones Dinámicas	24
3.2.2 Modelo Dinámico (Euler-Lagrange)	42

3.3 Acoplamiento de modelos matemáticos	49
4 TECNICA DE CONTROL APLICADA	51
4.1 Control PD con compensación de la gravedad	51
4.1.1 Análisis de estabilidad en lazo cerrado	54
5 RESULTADOS	59
5.1 Control PD con compensación de la gravedad	59
5.1.1 Resultados numéricos	59
5.1.2 Resultados Experimentales	64
6 CONCLUSIONES y TRABAJO FUTURO	69
6.1 Conclusiones	69
6.2 Trabajo futuro	70
A Desarrollos	75
A.1 Desarrollo del acoplamiento de dinámicas	75
A.2 Desarrollo de la Matriz de Coriolis y Fuerzas Centrifugas	77
A.3 Ley de Hooke para el sensor LVDT con resorte	91
A.4 Calculo de Polinomios para el Modelo del PAM	93
B Publicaciones	97
B.1 Congresos Internacionales	97
BIBLIOGRAFÍA	99

ÍNDICE DE TABLAS

3.1	Parámetros Físicos del Humano y el Exoesqueleto	26
A.1	Caracterización del Resorte del PAM	94
A.2	Caracterización del Amortiguador del PAM en Contracción	95
A.3	Caracterización del Amortiguador del PAM en Relajación	96

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Marco musculo-esquelético de la región dorsal del tronco.	2
1.2	Sensores para la medición en los cambios de las variables físicas y/o biológicas.	5
1.3	Prototipo Berkeley Lower Extremity Exoskeleton(BLEEX) de la Universidad de California de Berkeley.	6
1.4	Prototipo Japonés para rehabilitación de extremidades inferiores y asistencia de cuerpo completo.	7
1.5	Rehabilitación estacionaria para extremidades inferiores: MotionMaker, NUVABAT y AKROD respectivamente.	8
1.6	Arnés para la sujeción del cuerpo humano con el exoesqueleto.	10
2.1	Músculos Neumáticos Artificiales y Electrovalvula 5/3.	14
2.2	Sistema Mecánico.	14
2.3	Sistema Electrónico.	15
2.4	Sistema Electrónico a bloques.	16
2.5	Fuentes de energía.	16
3.1	Gráfica de Contracción contra Presión de un músculo neumático.	20
3.2	Elementos que definen el tipo de comportamiento del PAM.	21
3.3	Componentes de la fuerza total Γ_{muscle}	23
3.4	Representación del plano sagital del exoesqueleto de cuatro grados de libertad subactuado.	25

5.1	Comparación entre posición angular deseada y posición angular de la articulación del tobillo, rodilla, cadera y sacro en simulación.	60
5.2	Efecto del par gravitacional en la posición de q_4 para distintos valores de m_4	61
5.3	Diagrama a bloques del sistema con control PD+gravedad.	62
5.4	Simulación del proceso del ejercicio del humano con el exoesqueleto.	62
5.5	Control y seguimiento de la posición q_4 con respecto de qd_4	64
5.6	La trayectoria roja muestra la fuerza humana y la verde es la fuerza proporcionada por el par de musculos.	66
5.7	Zoom sobre la trayaectoria de la fuerza humana tomada del sensor LVDT con resorte (5.6).	67
6.1	Diseño de Exoesqueleto hibrido con 6 DOF.	72
6.2	Construcción de Exoesqueleto hibrido con 6 DOF.	73
A.1	Sensor de desplazamiento con resorte.	92
A.2	Gráfica del polinomio para el elemento de resorte.	93
A.3	Gráfica del polinomio para el elemento de amortiguamiento en acción de contracción.	95
A.4	Gráfica del polinomio para el elemento de amortiguamiento en acción de relajación.	96

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El cerebro humano realiza una gran cantidad de funciones, de manera general se puede afirmar que se encarga tanto de regular y mantener las funciones del cuerpo como ser el órgano donde reside la mente y la conciencia.

El cerebro controla y regula las acciones y reacciones del cuerpo. Recibe continuamente información sensorial, rápidamente analiza estos datos y luego responde, controlando las acciones y funciones corporales. El tronco encefálico controla la respiración, el ritmo cardíaco, y otros procesos autónomos. El neocórtex es el centro del pensamiento de orden superior, del aprendizaje y de la memoria. El cerebelo es el responsable del equilibrio corporal, coordinando la postura y el movimiento.

Aunque está protegido por los espesos huesos del cráneo, la delicada naturaleza del cerebro humano lo hace susceptible a muchos tipos de daños y enfermedades. Además, la columna vertebral, la espina dorsal, o el raquis es una compleja estructura osteofibrocartilaginosa articulada y resistente, en forma de tallo longitudinal, que constituye la porción posterior e inferior del esqueleto axial. La columna vertebral es un órgano situado en la parte media y posterior del tronco y va desde la cabeza, a la cual sostiene, pasando por el cuello y la espalda, hasta la pelvis que le da soporte.

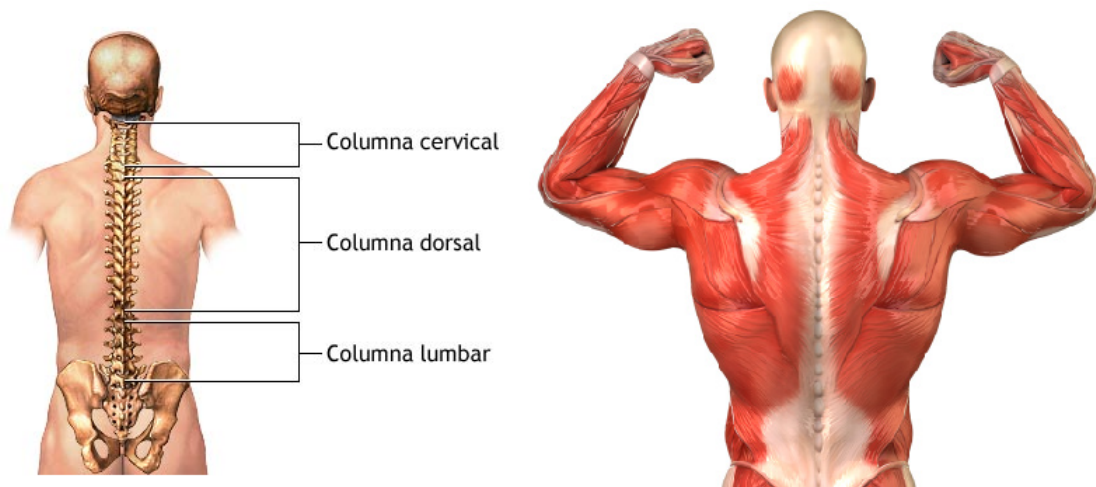


Figura 1.1: Marco musculo-esquelético de la región dorsal del tronco.

La región dorsal del tronco incluye la parte posterior del cuerpo y proporciona el eje musculo-esquelético de soporte para el tronco. Los elementos óseos consisten principalmente en las vertebras, aunque los elementos proximales de las costillas, la parte superior de los huesos pélvicos y las zonas posterobasales del cráneo contribuyen al marco esquelético de esta zona, figura(1.1). El sistema neurológico está fuertemente ligado al sistema óseo, la espina dorsal es la sección media de la cual se vale el cerebro para realizar el control de todo el cuerpo. La espina dorsal además de contribuir al equilibrio, regular ciertos procesos químico/biológicos, distribución del peso y dar soporte a todo el cuerpo, también tiene la tarea de distribuir internamente los circuitos nerviosos que se propagan hasta el último órgano disponible, estos nervios transmiten los impulsos eléctricos que envía el cerebro, reaccionan con químicos específicos de cada órgano para lograr la comunicación y el control del cuerpo.

El conocimiento de la anatomía de la región dorsal permitirá la definición adecuada de los problemas de salud en dicha parte del cuerpo, que podrán solucionarse con el empleo de exoesqueletos, el uso de estos es cada vez más frecuente para la solución de

problemas que causan discapacidad al ser humano.

El exoesqueleto es una estructura externa que recubre, protege y soporta el cuerpo de un individuo, también conocido como dermoesqueleto, armadura de potencia, exoframe o exosuit. Es una máquina móvil que puede estar unida a partes y miembros del cuerpo humano, permitiendo mejorar e incrementar la capacidad móvil y de carga de un individuo con la ayuda de mecanismos robóticos computarizados.

Los primeros exoesqueletos representativos se encuentran de manera natural, existen seres vivos con cualidades variadas para su supervivencia y evolución, tal es el caso del dermoexosqueleto que recubre toda la superficie de aquellos animales de la clase de los artrópodos y otros, donde cumple con la función protectora, de respiración y otra mecánica, proporcionando el sostén necesario para la eficacia del aparato muscular.

En un intento por imitar a la naturaleza, los humanos han utilizado durante mucho tiempo las armaduras como exoesqueletos para su protección, especialmente en combate.

Las ortesis son una forma médica limitada de exoesqueleto. Una ortesis es un mecanismo que acoplado a una pierna, o al dorso, permite mejorar o corregir el comportamiento de esa pierna o de la espina dorsal. Una prótesis de pierna es un dispositivo que sustituye la parte faltante de una pierna. Si la prótesis forma su propia cubierta, se considera exoesqueletal. Si la estructura y el mecanismo son usados de manera interna y está cubierto de un material blando y no estructural, se considera una prótesis endoesqueletal [10].

Los exoesqueletos mecánicos han comenzado a ser usados con propósitos médicos e industriales, saltando del terreno de la ciencia-ficción a la realidad, pero aún se encuentran en estado de prototipo. No obstante, el gobierno de los Estados Unidos ha finan-

ciado varios proyectos para integrar exoesqueletos mecánicos a unidades de Marines, con propósito de aumentar su rendimiento.

La asistencia de un exoesqueleto implica ciertas circunstancias preliminares, es necesario que el dispositivo mecánico tenga la capacidad de referenciarse, es decir, es deseable el conocimiento sobre los movimientos que el individuo procura realizar y así imitar dichas acciones sobre el robot, para ello se emplean sensores piezoeléctricos, de presión, de posición (encoder y LVDT), entre otros. Una vez logrado referenciar al sistema, se aplica la asistencia del aumento de fuerza para incrementar habilidades y capacidades del cuerpo, esto se obtiene por medio de actuadores mecánicos, eléctricos, hidráulicos y neumáticos. En ciertos experimentos se ven reflejados en robots el uso de actuadores interesantes como son los músculos neumáticos artificiales, estos están fabricados de una membrana o vejiga de un polímero muy resistente que al inflarse llega a soportar varios bar de aire comprimido, a su máxima capacidad, se reduce su elongación, y así, jalar con gran fuerza una carga o peso agregado.

Entre las aplicaciones de los exoesqueletos para la asistencia se encuentran la rehabilitación humana, trabajos pesados de construcción y demolición, servicios de auxilio (bomberos, socorristas, etc) y servicios militares.

El problema más interesante dentro de los tópicos de exoesqueletos van relacionados con respecto al suministro y autonomía de energías que solicita el dispositivo completo, entre ellas la energía eléctrica, neumática, hidráulica y otras. La flexibilidad del exoesqueleto debe ser indispensable en relación al crecimiento aleatorio del cuerpo humano, además cada individuo es muy distinto de otro, comparando sus dimensiones, anatomía y fisiología biológica se debe lograr cierto grado de adaptabilidad del prototipo robotico. El proyecto presentado en esta tesis, contempla sensores analógicos y otros digitales, pero ninguno ha sido capaz de obtener datos seguros del cuerpo humano, que permitan realizar algoritmos adecuados de control, es decir, no se puede tomar refer-

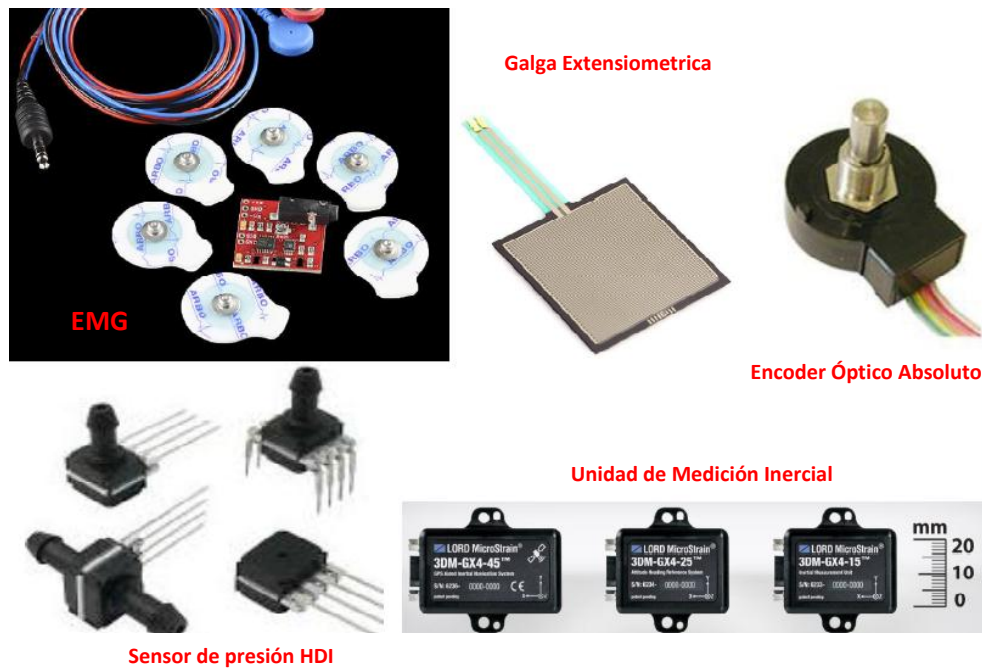


Figura 1.2: Sensores para la medición en los cambios de las variables físicas y/o biológicas.

encias de los movimientos del cuerpo tan exactas y precisas para que estas ayuden a generar el control del mecanismo, para ello suele implementarse los sensores biológicos relacionados a las señales electromiograficas (EMG), sensores químicos, interfaces con el cerebro, magnéticos, entre otros, Fig(1.2). La imagen anterior muestra algunos de los sensores disponibles e implantados en este proyecto, como es el caso de la galga extensiométrica, emite una diferencia de voltaje a razón de la resistencia variable por la presión aplicada sobre su área, el encoder óptico absoluto arroja valores de ($0^\circ - 360^\circ$) por el movimiento circular del eje metálico, el sensor de presión del tipo HDI permite conocer la presión interna que contiene actuador (PAM), mientras que la unidad de medición inercial da lecturas giroscópicas (*yaw*, *pitch* y *roll*)y de aceleración para las posiciones en *X*, *Y* y *Z*.



Figura 1.3: Prototipo Berkeley Lower Extremity Exoskeleton(BLEEX) de la Universidad de California de Berkeley.

Existen trabajos de investigación y desarrollo de exoesqueletos aplicados principalmente para las extremidades inferiores y superiores del cuerpo humano, también hay dispositivos de cuerpo completo. Trabajos como el Berkeley Lower Extremity Exoskeleton (BLEEX) de la Universidad de California de Berkeley, es un trabajo de investigación y desarrollo apoyado por la Defense Advanced Research Project Agency (DARPA) [12],[20], para mejorar las capacidades de fuerza y resistencia humana de los soldados en tareas como desastres naturales, ayuda humanitaria y emergencias medicas, Fig(1.3).

Programas y proyectos orientados a situaciones medicas y de rehabilitación se encuentran en un gran apogeo de investigación y desarrollo, tal es el caso del prototipo japonés HAL [19],[11], es un diseño portátil para una gran variedad de trabajos pesados, rehabilitación y de apoyo a la comunidad, hay en existencia dos versiones de este prototipo (cuerpo completo y extremidades inferiores Fig(1.4)), también los prototipos ReWalk de ARGO Medical Technologies Ltd. [9], y el WalkTrainer de Swortec S.A. [23], son dispositivos comerciales que se encuentran en el mercado para adquisición per-



Figura 1.4: Prototipo Japones para rehabilitación de extremidades inferiores y asistencia de cuerpo completo.

sonal o instituciones medicas, ambos trabajos ayudan a la rehabilitación de pacientes que sufren de enfermedades o trastornos como la hemiplegía, paraplegía, esclerosis y sus variedades, solo por mencionar algunas situaciones medicas, otros sistemas que se encuentran en ensayos clínicos e investigación son WHERE I y II [29], ARTHuR [6], POGO y PAM [5], ALTACRO [25], String-Man [33] para extremidades inferiores.

Prototipos que se ya se encuentran en punto de venta para hospitales, clínicas o personales son: Lokomat [8], LOPES [16], ALEX [28], LokoHELP [27], el MotionMaker de Swortec SA [1], Lokoiran [35] para entrenamiento estacionario, auxiliado por una grua, caminadora o hasta por una cama. En particular existen sistemas que ayudan al ejercicio y rehabilitación del tobillo, entre ellos se encuentran en los sistemas como: IIT-HPARR que esta articulado por medio de actuadores lineales bajo la planta del pie [15], el robot NUVABAT es actuado por medio de motores que accionan los tres grados de libertad permitidos y sensados por la presión en la planta del pie [36], y además el

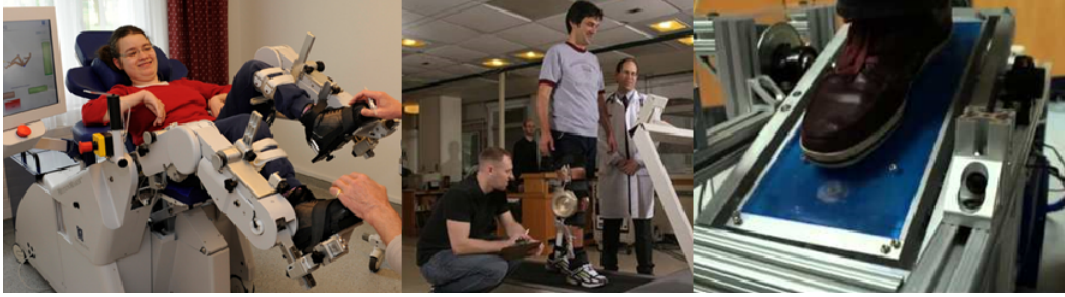


Figura 1.5: Rehabilitación estacionaria para extremidades inferiores: MotionMaker, NUVABAT y AKROD respectivamente.

sistema AKROD se encuentra especializado en el auxilio de la rodilla, con un diseño por amortiguamiento y es considerado un prototipo del tipo estacionario, y actualmente se encuentra en desarrollo para la caminata [17]. En la mayoría de los prototipos se necesita la cooperación y guía del campo de la fisioterapia para un mejor desempeño y resultados favorables en la recuperación de las habilidades humanas, Fig(1.5).

La mayoría de los exoesqueletos mencionados anteriormente son solo algunos de los sistemas que se encuentran involucrados en las extremidades inferiores, es por eso que a continuación se realiza un foco de interés en los exoesqueletos para extremidades superiores como es el caso del prototipo para extremidades superiores con control basado en señales electromiográficas(EMG) [21], ayuda en la asistencia y rehabilitación de pacientes físicamente débiles, otro buen ejemplo de dispositivo es el RehabRoby [24] para la rehabilitación del brazo, y solo por referenciar uno más de los proyectos que se encuentran reportados es un diseño peculiar al emplear músculos neumáticos y señales electromiográficas [7].

Existen estudios relacionados con exoesqueletos en desarrollo para la sección dorsal del tronco y en especial la columna vertebral, un ejemplar es el estudio AAN [22] que provee información sobre el comportamiento de la rehabilitación en personas con lesiones sobre la columna y resultados obtenidos a través de un prototipo robotico-

mecánico, también existen estudios respecto a la utilización de los sensores EMG para clasificar los movimientos de los músculos que interactúan en dicha región [18].

En la mayoría de los prototipos mencionados y los que faltan, no se considera que la flexibilidad y movilidad de la región dorsal, simplemente se deja fija y rígida para que no se pierda la postura, pero en realidad es la sección del sistema biológico humano con mayores articulaciones musculo-esqueléticas que también deben de ejercitarse y mantener el foco de atención en ella, un intento por reactivar, medir estudiar región es el prototipo AcuPath que ayuda a monitorear el movimiento lumbar y a corregir ciertas deficiencias.

A pesar de los esfuerzos de los investigadores, desarrolladores, ingenieros y los que faltan por mencionar en trabajos involucrados en el tema de exoesqueletos aun sigue siendo un campo joven y con mucho espectro para colaborar y aportar más ideas, propuestas de proyectos, mejoras en trabajos realizados. Los exoesqueletos de cuerpo completo son proyectos de gran envergadura y complejos de abstraer por el simple hecho de la gran capacidad dinámica del cuerpo humano.

1.1 Objetivos

El principal objetivo es desarrollar un mecanismo robótico capaz de asistir y aumentar o sustituir la fuerza humana necesaria en el momento de iniciar la carga del peso del mismo individuo o de algún objeto ajeno a él, por medio de la aplicación de un arnés de seguridad para fijar la espalda humana con el robot (ver figura 1.6), considerando un sistema de cuatro grados de libertad con los debidos movimientos del tobillo, rodilla, pelvis y el ultimo ubicado en cierta sección de la columna, de esta forma en la que se encuentra la sección sagital se logra obtener un modelo dinámico del sistema expuesto. Este dispositivo ayuda a evitar lesiones, fracturas y problemas consecuentes con el

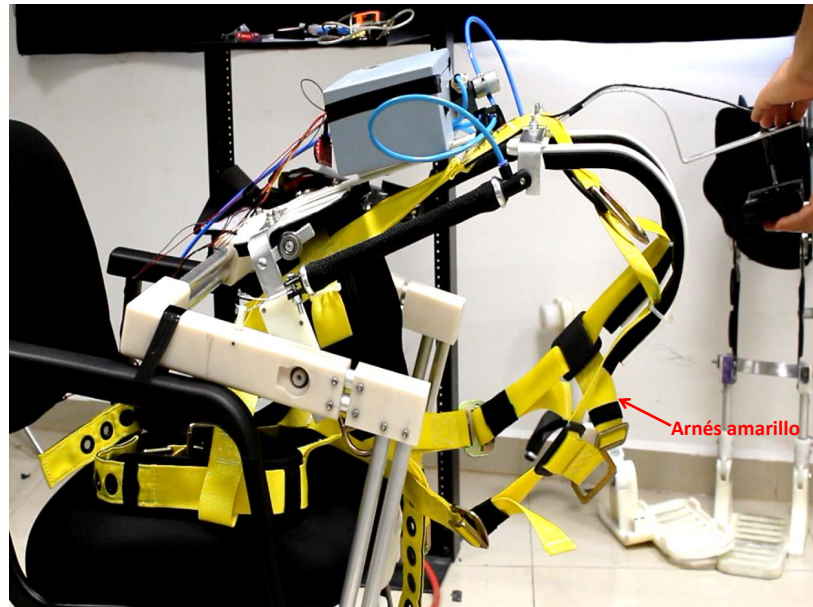


Figura 1.6: Arnés para la sujeción del cuerpo humano con el exoesqueleto.

transcurso del tiempo. Amplifica la fuerza en la parte de la espalda dependiendo de la voluntad del individuo o usuario, indicándole al robot con cuanta fuerza, velocidad y en que dirección debe realizar dicho movimiento, el estudio de las dinámicas del dispositivo y el cuerpo humano se plasmaron sobre el plano sagital, pero solo el ultimo eslabón se encuentra actuado e instrumentado con el robot. Las principales aportaciones en este trabajo es el diseño, desarrollo, y construcción de un mecanismo prototipo capaz de adecuarse a las dimensiones de ciertos individuos, inicio de pruebas con de leyes de control como es el caso del Proporcional-Derivativo, con el fin de experimentar y observar los diversos resultados que pueden aportar cierta variedad de algoritmos de control y así elegir el mejor. Experimentar y caracterizar el actuador implementado en este desarrollo y así, conocer el comportamiento que genera (Anexo [A.4](#)).

1.2 Justificación

En la mayoría de los prototipos se mantiene rígida la sección media dorsal de la columna para evitar lesiones posteriores, pero en realidad dicha área no se encuentra del todo en la misma posición, de hecho es la región con mayor grado de articulación y dinamismo. Aparentemente esta región suele ser vista de forma muy simple, pero en realidad es la parte que contiene la mayor cantidad de órganos, diversos fluidos, es el sustento de todas las partes periféricas a él y ofrece rigidez, orden y equilibrio al cuerpo en general (químico, fisiológico, sistema musculo-esquelético, sistema circulatorio, sistema digestivo, sistema respiratorio, etc).

A medida que se degenera, envejece o daña el cuerpo humano se van perdiendo cualidades propias, este proyecto es el inicio en el avance, desarrollo y aplicación de exoesqueletos más ergonómicos, disponibles y flexibles para toda persona, ágiles y con mejor respuesta a la intención humana con fines de mejorar la calidad de vida y aumentar la esperanza de vida. El Instituto Nacional de Estadística y Geografía indica que en el año 2010 se realizó el último censo de población con discapacidad, se detectó que el 5.1% de la población total en México tiene algún tipo de discapacidad (movilidad, vista, mental, escuchar, comunicarse, atención y aprendizaje, y autocuidado), además, aproximadamente el 10% de la población mundial tiene alguna discapacidad [32].

Este desarrollo permite el análisis matemático de las dinámicas que implican y se ejercen en el sistema robótico, y así, obtener el modelo que describe su comportamiento y los torques que influyen en cada articulación, de manera que se define un sistema de cuatro GDL (Grados de Libertad), donde el mayor interés se centra en el torque del último eslabón por que es donde se experimenta, realiza y aplica control, como es el caso control proporcional-derivativo con compensación de gravedad (PD+gravedad), y es respecto a la manipulación de la posición debido a que el individuo puede indicarle al mecanismo mantener cierto ángulo en un rango de $-70^\circ < q_4 < 0^\circ$ como se muestra

en la tabla 3.1.

Se realizó estudio complejo de la interacción entre el cuerpo humano y las maquinas, es decir, el acoplo de sistemas robóticos que refuerzan, ayudan o mejoran las capacidades de un individuo, independientemente si es aplicado para rehabilitación de pacientes, auxilios generales u otros. El prototipo permite observar la biomecánica y las posibles formas de desarrollar mejoras en el proyecto, además la instrumentación realizada permite medir varios valores como la posición angular, fuerza y dirección del movimiento a realizar.

CAPÍTULO 2

DISEÑO Y DESARROLLO DEL PROTOTIPO EXPERIMENTAL

El exoesqueleto diseñado tiene la capacidad de soportar al menos 50 kilogramos de carga a razón de un par de actuadores neumáticos artificiales, los cuales son fabricados de materiales llamados cloropreno y aramida, cuando se les suministra aire comprimido se contraen y proveen una gran fuerza, aprovechada por el mecanismo, además existe una electroválvula que controla el flujo del suministro de aire y se acciona con 24 vcd, figura (2.1).

Mecánicamente el sistema cubre la sección de la espalda, sujetándose a ella y así, realizar una fuerza de palanca respecto del pivote diseñado y ubicado cerca de la cadera con el fin de realizar el movimiento de flexión y extensión del abdomen al instante de tomar algún objeto cuando se encuentra en una parte inferior, el brazo de palanca necesita un punto fijo para efectuar el torque necesario y este se ubica sobre las piernas del individuo, observar la figura (2.2).

14CAPÍTULO 2. DISEÑO Y DESARROLLO DEL PROTOTIPO EXPERIMENTAL



Figura 2.1: Músculos Neumáticos Artificiales y Electrovalvula 5/3.

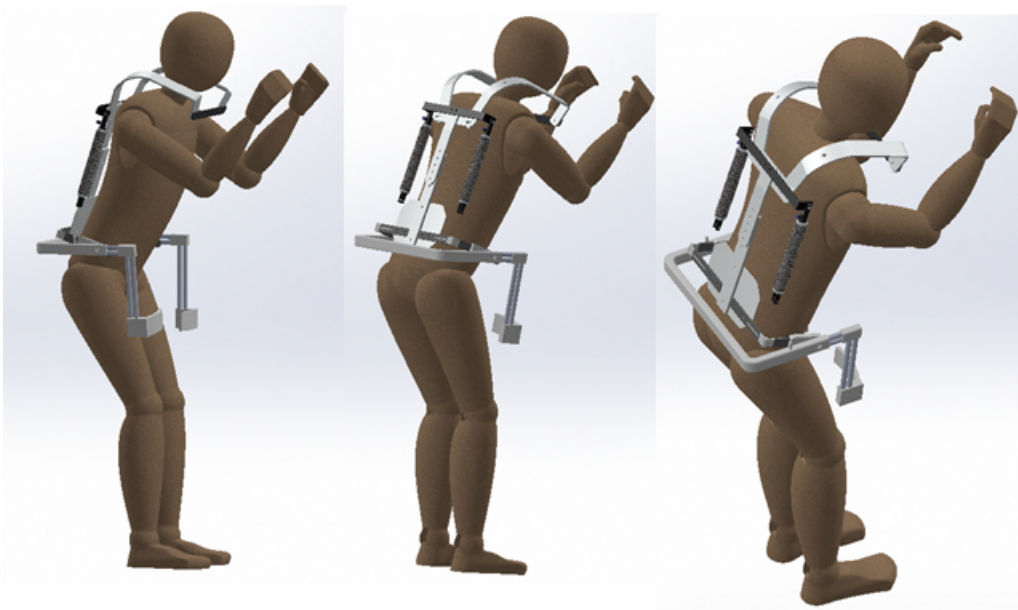


Figura 2.2: Sistema Mecanico.

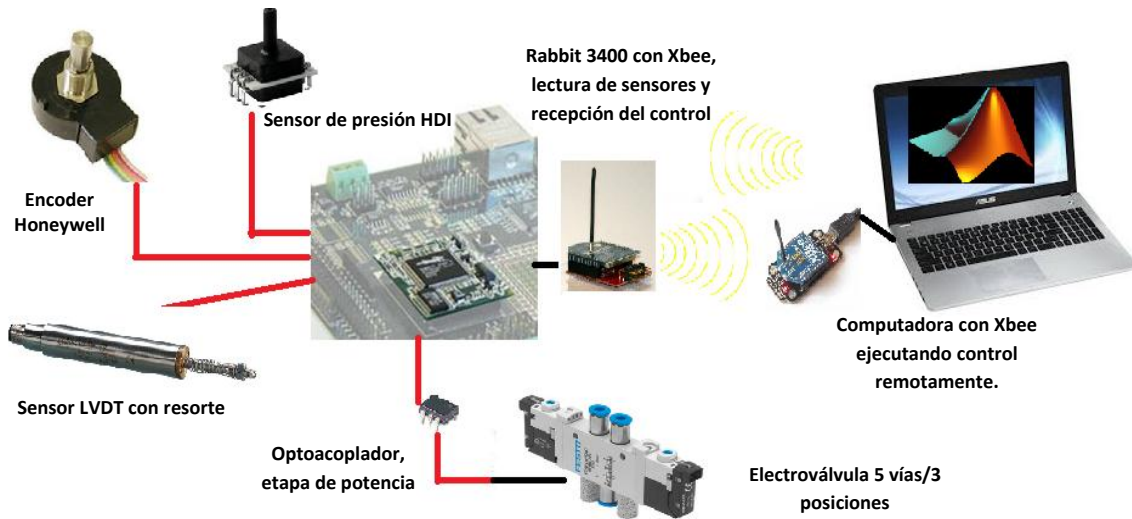


Figura 2.3: Sistema Electrónico.

La instrumentación de sensores sobre la plataforma experimental permiten conocer valores relacionados entre el humano y el robot, para medir la fuerza con la que se desea realizar algún desplazamiento (q_d) por el humano; se implemento el sensor LVDT, son potenciómetros lineales que miden el desplazamiento de un vástago y a este ultimo se le agrega un resorte, así, se puede aplicar la Ley de Hooke para conocer la fuerza adquirida por el individuo y aumentarla con el robot (en el apendice A.3 se encuentra el desarrollo para conocer dicha fuerza), a través del encoder incremental óptico se puede obtener la posición (q) en la que se encuentra el sistema, y por ultimo fue necesario el uso de un sensor de presión de aire comprimido para conocer la cantidad de dicho elemento gaseoso dentro de los músculos neumáticos y así, tener una relación de fuerza aplicada, y re-alimentar ese valor dentro del modelo dinámico del propio actuador (P). Se agrego los transmisores inalámbricos (*XBEE Pro S1*) para tener flexibilidad de comunicación con el prototipo y probar varios algoritmos de control, evitando al procesador *Rabbit3400* mayor trabajo observar la figura(2.3) y(2.4).

16CAPÍTULO 2. DISEÑO Y DESARROLLO DEL PROTOTIPO EXPERIMENTAL

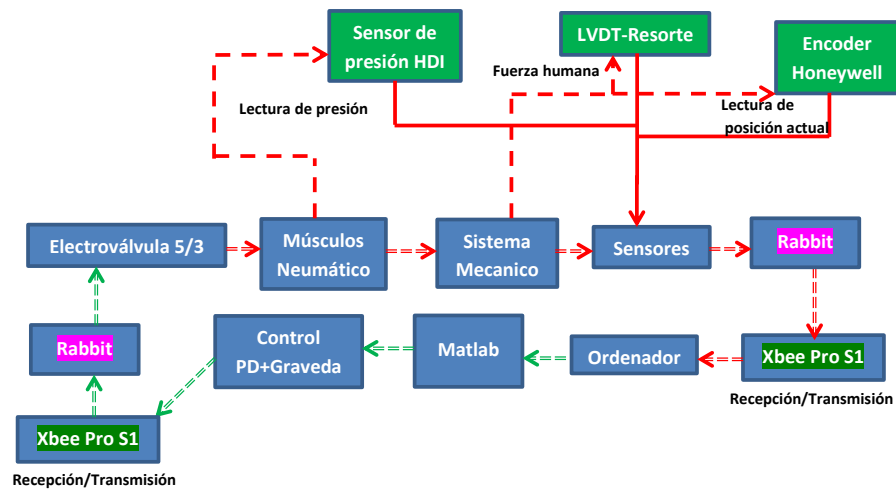


Figura 2.4: Sistema Electrónico a bloques.



Figura 2.5: Fuentes de energía.

En cuanto a la sección de la electrónica del prototipo cabe mencionar las subdivisiones en electrónica de control y de potencia para evitar accidentes entre los dispositivos que manipulen al robot. Para la parte de electrónica de control se utilizó el microprocesador *RCM3400* de la familia de Rabbit Core el cual procesa, mide, captura y dirige el código del programa hacia los sensores, los actuadores y el sistema en general. Para la división en potencia fue de gran apoyo el uso de circuitos optoacopladores para la transmisión y conversión de las señales de control de $5vcd$ a $24vcd$, que son aprovechados por la electroválvula.

Las energías necesarias para el prototipo experimental se dispone de fuentes eléctricas para el suministro de energía eléctrica, ya que la electroválvula se alimenta a $24vcd$ y el microprocesador *RCM3400* trabaja con tal solo $3.3vcd$. En el tema del suministro de aire comprimido se tiene el uso de una compresora de aire junto con un tanque de almacenamiento, y provee hasta $8bar$ de presión de aire con capacidad de 15 litros, con uso continuo tiene una duración desde $30min$ hasta $1hr$, en la figura (2.5) se muestran las fuentes de energía principales.

18CAPÍTULO 2. DISEÑO Y DESARROLLO DEL PROTOTIPO EXPERIMENTAL

CAPÍTULO 3

MODELADO MATEMÁTICO DEL EXOESQUELETO

El exoesqueleto permite realizar movimientos repetidamente y tiene diferentes aplicaciones, este proyecto fue orientado hacia el aumento de fuerza para cargar el propio peso del usuario y posteriormente levantar un peso extra, este tipo de movimiento se debe realizar varias veces, de forma lenta y controlada, es decir, que el mecanismo sea capaz de mantener una posición intermedia. Estas posibilidades permiten cierto grado de flexibilidad para el individuo porque la fuerza aumentada duplica la fuerza humana y hasta sustituirla. Este prototipo está enfocado en el mejoramiento de la resistencia de la región dorsal y evitar futuras lesiones. El modelo de las dinámicas que describen el comportamiento del sistema fue considerado de 4 grados de libertad, donde la última articulación es actuada y controlada.

En este capítulo se presenta el modelado matemático del exoesqueleto, considerando el tobillo-rodilla, rodilla-cadera, cadera-sacro y sacro-columna como los eslabones, restringiendo el análisis de los posibles movimientos del modelo sobre el plano sagital

(plano X, Y). También, de la literatura se estudio y analizó el modelo de las dinámicas de los músculos neumáticos que afectan directamente al sistema mecánico[4], [2], [34].

3.1 Modelado Dinámico del PAM

El actuador PAM así, como diferentes tipos de controles se han estudiado en artículos como [13] y [30]. El modelo dinámico del actuador lineal se obtuvo considerando que tiene efecto de histeresis al momento de inflarse o desinflarse, con una carga constante de 45 N sobre y la presión variando de 0-3.5 bar [3], como se muestra en la gráfica(3.1). Además tiene un comportamiento del tipo resorte, amortiguador y elemento contráctil como se muestra en la figura(3.2).

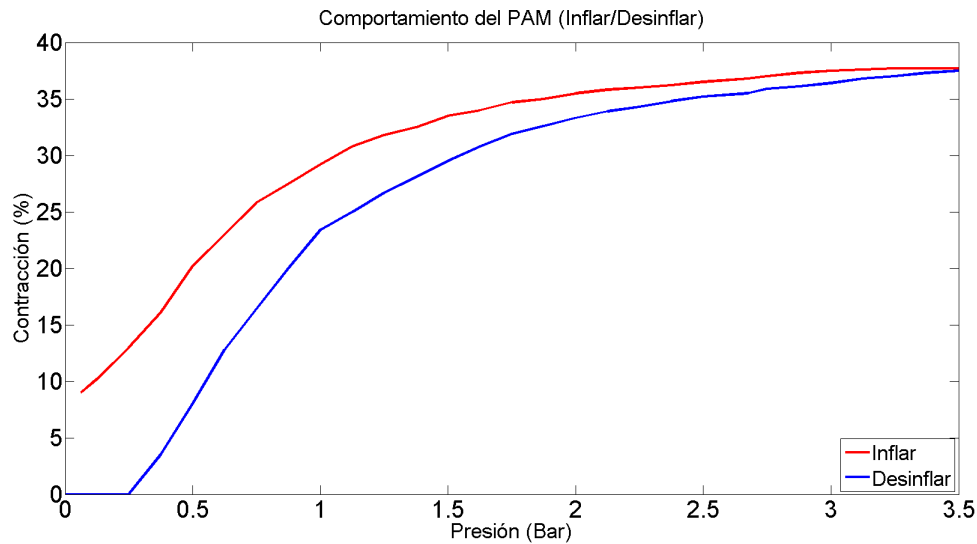


Figura 3.1: Gráfica de Contracción contra Presión de un músculo neumático.

Donde F_k es la fuerza debido al elemento de resorte (K), F_B es la fuerza debido al elemento de amortiguamiento (B) y F_{ce} es la fuerza por el elemento contráctil del

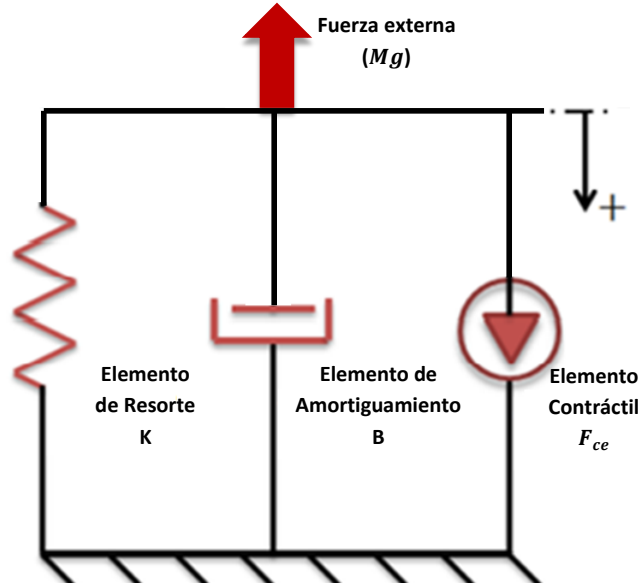


Figura 3.2: Elementos que definen el tipo de comportamiento del PAM.

musculo. Estos elementos fenomenológicos se encuentran de forma paralela, y pueden ser expresados como funciones que dependen de la presión, entonces la ecuación de movimientos está dada de la siguiente forma:

$$M\ddot{y} + B(P)\dot{y} + K(P)y = F_{ce}(P) - Mg \quad (3.1)$$

Donde y , \dot{y} y \ddot{y} son el desplazamiento, velocidad y aceleración del musculo respectivamente, en tanto que; $K(P)$ es la función que caracteriza al coeficiente del resorte, $B(P)$ es aquella función que describe el comportamiento del elemento de amortiguador en sus dos casos, esto es que, dependiendo de si el musculo se encuentra inflandose ($B(P)_i$) o desinflandose ($B(P)_d$) la función varia internamente y la función $F_{ce}(P)$ es la representación para la fuerza efectiva provista por el elemento contráctil. Además, la fuerza externa F_{ex} en la figura(3.2), es la suma de la fuerza generada por el peso (Mg) y la carga inercial ($M\ddot{y}$). Asumiendo que la masa del sistema se encuentra sobre el eje vertical. Si tomamos en cuenta que $Mg = F_{ce}$, el desplazamiento inicial en cero,

y $y(\dot{0}) = y(\ddot{0}) = 0$ implica que no ocurre movimiento alguno.

Los coeficientes $K(P)$, $B(P)$ y $F_{ce}(P)$ son funciones dependientes de la presión interna del musculo neumático y son aproximadas por un polinomio de primer orden con el fin de mantener el rango de presión permisible, como se menciona en [4] y [34], por lo tanto la caracterización del tipo de musculo utilizado nos arroja los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} K(P) &= K_0 + K_1P \\ &= 1.086 - 0.00107P \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} B(P)_i &= B_{0i} + B_{1i}P \\ &= 1.715 + 0.00982P \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} B(P)_d &= B_{0d} + B_{1d}P \\ &= 0.8999 - 0.00285P \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$F_{ce}(P) = 179.2 + 1.39P \tag{3.5}$$

Estos coeficientes son aplicables para los siguientes rangos de presión:

$$\begin{aligned} 103.5 &\leq P \leq 300KPa \\ 1 &\leq P \leq 3BAR \end{aligned} \tag{3.6}$$

El procedimiento para obtener los polinomios anteriores pueden ser consultados en el Anexo (A.4). De la ecuación (3.1) se calcula la fuerza necesaria para vencer los efectos de la masa sobre el sistema.

$$\Gamma_{muscle} = F_{ce}(P) - B(P)\dot{y} - K(P)y \quad (3.7)$$

Sin embargo, está fuerza no se encuentra perpendicular a una distancia, así que, se divide en dos componentes tales que solo una de ellas es útil para el sistema, ver imagen (3.3). Por lo tanto la fuerza queda:

$$\sin(\alpha) = \frac{f}{\Gamma_{muscle}} \Rightarrow f = \sin(\alpha)\Gamma_{muscle}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tau_{PAM} &= l_r f \\ &= l_r \sin(\alpha)\Gamma_{muscle} \\ &= l_r \sin(\alpha)(F_{ce}(P) - B(P)\dot{y} - K(P)y) \\ \Rightarrow \tau_{PAM} &= l_r \sin(\alpha)F_{ce}(P) - l_r \sin(\alpha)B(P)\dot{y} - l_r \sin(\alpha)K(P)y \end{aligned} \quad (3.8)$$

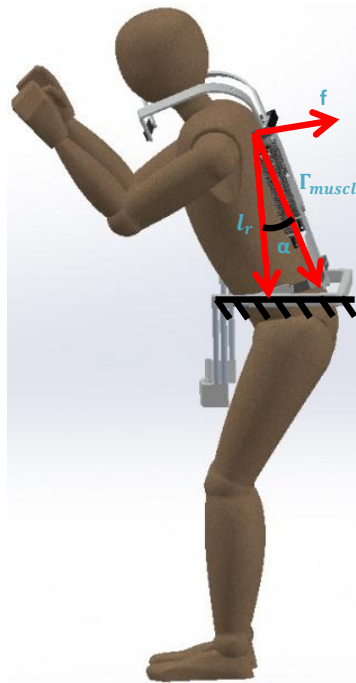


Figura 3.3: Componentes de la fuerza total Γ_{muscle} .

3.2 Modelo Dinámico del Exoesqueleto

3.2.1 Ecuaciones Dinámicas

En las figuras 3.3 y 3.4 se representan las fuerzas que actúan sobre las diferentes articulaciones desde la espalda hasta las extremidades, y producen los diferentes torques que afectan las dinámicas de cada eslabón del sistema propuesto y estudiado; con desplazamiento angular q_1 para el eslabón tobillo-rodilla, desplazamiento angular q_2 para el eslabón rodilla-cadera, desplazamiento angular q_3 para el eslabón cadera-sacro y para el eslabón formado por el sacro-espalda con desplazamiento angular q_4 . Además, l_1 es la longitud de la extremidad que une a el tobillo con la rodilla, l_2 es la longitud de la extremidad inferior a partir de la rodilla hasta la cadera, l_3 es la longitud de la cadera a una vertebra del sacro, y l_{c4} es la distancia de dicha vertebra hasta el centro de masa del tronco torácico.

La fuerza producida por el actuador que asiste a la espalda es Γ_{muscle} y solo una de sus componentes es útil para el sistema, ver figura (3.3), tal que produce un torque τ_{muscle} en q_4 . m_1 es la masa de la sección entre el tobillo y la rodilla del humano, y está concentrada en el centro de gravedad ubicado a una longitud l_{c1} del tobillo. En tanto que m_2 es la masa de la pierna humana(rodilla-cadera), concentrada en el centro de gravedad ubicado a una longitud l_{c2} de la rodilla. La masa m_3 se encuentra en el centro de gravedad ubicado a una longitud l_{c3} a partir de la cadera y l_{c4} es la distancia de la vertebra del sacro hasta el centro de gravedad en el que se encuentra la masa m_4 . Finalmente, g es la aceleración de la gravedad.

Teorema 1 "Köening" supóngase dos sistemas de referencia, uno absoluto con el origen O y otro relativo con origen O' . La energía cinética de un sistema de partículas S se puede calcular como:

$$T = T_{O'} + T_{rel,O'} + M_S \langle v_{O'}, v_{CI,O'} \rangle$$

donde $T_{O'} = \frac{1}{2}m\bar{v}^2$ es la energía cinética de la masa de S si se encontrara concentrada en O' , El término $T_{rel,O'}$ es la energía cinética de S relativa a O' , M_S es la masa del sistema S , $v_{O'}$ es la velocidad absoluta del origen O' y $v_{CI,O'}$ es la velocidad del centro inercial relativa a O' .

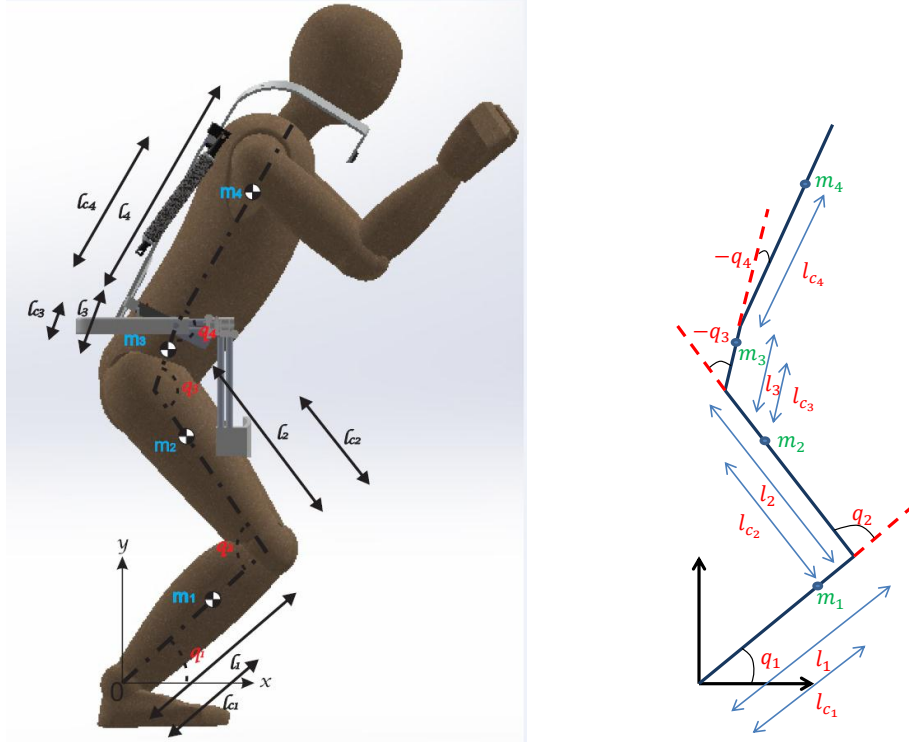


Figura 3.4: Representación del plano sagital del exoesqueleto de cuatro grados de libertad subactuado.

Debido a que el origen O' coincide con el centro de inercia del sistema, entonces $v_{CI,O'} = 0$ y $T = T_{O'} + T_{rel,O'}$ y como S es un cuerpo rígido cuyo pivote coincide con O' entonces $T_{rel,O'} = \frac{1}{2}I\omega^2$.

La energía cinética $T(q, \dot{q})$ para el sistema de 4DOF puede descomponerse en la suma de 4 partes cinéticas $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ donde T_1 , T_2 , T_3 y T_4 son las energías

Tabla 3.1: Parámetros Físicos del Humano y el Exoesqueleto

Parámetro	Cantidad	Unidad
l_1	0.3683	m
l_2	0.3887	m
l_3	0.1365	m
l_{c_1}	0.1958	m
l_{c_2}	0.2072	m
l_{c_3}	0.0685	m
l_{c_4}	0.2359	m
l_r	0.35	m
m_1	3.4875	kg
m_2	7.5	kg
m_3	1.245	kg
m_4	sin/masa - 5 - 10	kg
I_1	0.25	$kg * mm^2$
I_2	0.60	$kg * mm^2$
I_3	0.132	$kg * mm^2$
I_4	0.71	$kg * mm^2$
k_s	412.7142	N/m
α	70	grados $^\circ$
P_{max}	3.5	Bar
Rangos de movimiento para cada articulación		
Articulación	Rango	Unidad
q_1	$60 < q_1 < 90$	grados $^\circ$
q_2	$0 < q_2 < 80$	grados $^\circ$
q_3	$-8 < q_3 < 0$	grados $^\circ$
q_4	$-70 < q_4 < 0$	grados $^\circ$

cinéticas asociadas a las masas m_1 , m_2 , m_3 y m_4 respectivamente. A continuación se obtienen dichas expresiones.

Las coordenadas del centro de masa de m_1 son:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_{c1} \cos(q_1) \\y_1 &= l_{c1} \sin(q_1)\end{aligned}\tag{3.9}$$

Derivando estas ecuaciones.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ \dot{y}_1 &= l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1\end{aligned}\tag{3.10}$$

El vector velocidad \bar{v}_1 del centro de masa es:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix}\tag{3.11}$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado del centro de masa en m_1 resulta ser:

$$\bar{v}_1^2 = l_{c1}^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_{c1}^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 (\sin^2(q_1) + \cos^2(q_1)) = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2\tag{3.12}$$

La energía cinética correspondiente al movimiento de m_1 se obtiene como:

$$T_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 (\dot{q}_1)^2\tag{3.13}$$

Las coordenadas del centro de masa para m_2 son:

$$\begin{aligned}x_2 &= l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ y_2 &= l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)\end{aligned}\tag{3.14}$$

Derivando estas ecuaciones.

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 - l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{y}_2 &= l_1 \cos(q_1)\dot{q}_1 + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\end{aligned}\quad (3.15)$$

El vector velocidad \bar{v}_2 del centro de masa en m_2 es en consecuencia:

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 - l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \cos(q_1)\dot{q}_1 + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}\quad (3.16)$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado resulta ser:

$$\begin{aligned}\bar{v}_2^2 &= l_1^2[\sin^2(q_1) + \cos^2(q_1)]\dot{q}_1^2 + l_{c_2}^2[\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2)](\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &\quad + 2l_1l_{c_2}[\sin(q_1)\sin(q_1 + q_2) + \cos(q_1)\cos(q_1 + q_2)]\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Empleando las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\ \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1\end{aligned}\quad (3.18)$$

Se obtiene finalmente

$$\bar{v}_2^2 = l_1^2\dot{q}_1^2 + l_{c_2}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1l_{c_2}\cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\quad (3.19)$$

Así, la energía cinética correspondiente al movimiento de m_2 se obtiene como:

$$\begin{aligned}T_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_2\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}I_{\omega_2}\omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2 [l_1^2\dot{q}_1^2 + l_{c_2}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1l_{c_2}\cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2\end{aligned}\quad (3.20)$$

Las coordenadas del centro de masa para m_3 son:

$$\begin{aligned} x_3 &= l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ y_3 &= l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Derivando estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \dot{y}_3 &= l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{aligned} \quad (3.22)$$

El vector velocidad \bar{v}_3 es:

$$\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado del centro de masa para m_3 resulta ser:

$$\begin{aligned} \bar{v}_3^T \bar{v}_3 &= l_1^2 [\sin^2(q_1) + \cos^2(q_1)] \dot{q}_1^2 + l_2^2 [\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &+ l_{c_3}^2 [\sin^2(q_1 + q_2 + q_3) + \cos^2(q_1 + q_2 + q_3)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\ &+ 2l_1 l_2 [\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) + \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2)] \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ &+ 2l_1 l_{c_3} [\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3)] \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ &+ 2l_2 l_{c_3} [\sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Identidades extra, necesarias para reducir el termino anterior:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha) \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos(\beta + \gamma) \\ \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos(\gamma)\end{aligned}\tag{3.25}$$

Empleando las identidades trigonométricas (3.18) junto que las identidades extra(3.25), se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned}\bar{v}_3^T \bar{v}_3 &= l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_{c_3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ &+ 2l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ &+ 2l_2 l_{c_3} \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\end{aligned}\tag{3.26}$$

Así, la energía cinética correspondiente al movimiento de m_3 se obtiene como:

$$\begin{aligned}T_3(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_3 \bar{v}_3^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_3} \omega_3^2 \\ &= \frac{1}{2} m_3 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_{c_3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ &+ 2l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2l_2 l_{c_3} \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)] \\ &+ \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2\end{aligned}\tag{3.27}$$

Finalmente se calcula la energía cinética para la masa m_4 , comenzando por las

coordenadas de posición en el plano:

$$\begin{aligned} x_4 &= l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\ y_4 &= l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + l_{c_4} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Derivando el termino anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= -l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ &\quad - l_{c_4} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\ \dot{y}_4 &= l_1 \cos(q_1)\dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ &\quad + l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \end{aligned} \quad (3.29)$$

El vector de velocidad \bar{v}_4 queda como:

$$\bar{v}_4 = \begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \quad - l_{c_4} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\ l_1 \cos(q_1)\dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \quad + l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Realizando la velocidad \bar{v}_4 al cuadrado se obtiene:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_4^T \bar{v}_4 = & l_1^2 [\sin^2(q_1 + \cos^2(q_1))] \dot{q}_1^2 + l_2^2 [\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_3^2 [\sin^2(q_1 + \\
& q_2 + q_3) + \cos^2(q_1 + q_2 + q_3)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + l_{c_4}^2 [\sin^2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \cos^2 \\
& (q_1 + q_2 + q_3) + q_4] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 + 2l_1 l_2 [\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1) \cos(q_1 \\
& + q_2)] \dot{q}_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + 2l_1 l_3 [\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2l_1 l_{c_4} [\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3 + \\
& q_4)] \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + 2l_2 l_3 [\sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 \\
& + q_2 + q_3)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2l_2 l_{c_4} [\sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \\
& \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + 2l_3 l_{c_4} [\sin(q_1 + \\
& q_2 + q_3) \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \cos(q_1 + q_2 + q_3) \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\
& + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Por medio de las identidades trigonométricas (3.18) y (3.25), y además:

$$\begin{aligned}
& \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
& \sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) = \cos(q_3) \\
& \sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \cos(q_3 + q_4) \\
& \sin(q_1 + q_2 + q_3) \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \cos(q_1 + q_2 + q_3) \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \cos(q_4)
\end{aligned}$$

Se puede simplificar $\bar{v}_4^T \bar{v}_4$ de la siguiente forma :

$$\begin{aligned}
\bar{v}_4^T \bar{v}_4 = & l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_3^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + l_{c_4}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 \\
& + \dot{q}_2) + 2l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\
& + \dot{q}_4) + 2l_2 l_3 \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \\
& \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + 2l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por lo que la energía cinética respecto de la masa m_4 queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
T_4(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} m_4 \bar{v}_4^T \bar{v}_4 + \frac{1}{2} I_{\omega_4} \omega_4^2 \\
= & \frac{1}{2} m_4 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_3^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + l_{c_4}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) \\
& \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + 2l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\
& + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + 2l_2 l_3 \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \\
& \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + 2l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)] + \frac{1}{2} I_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\
& + \dot{q}_4)^2
\end{aligned} \tag{3.33}$$

De forma similar, la energía potencial puede descomponerse como la suma de 4 partes $V(q) = V(q)_1 + V(q)_2 + V(q)_3 + V(q)_4$ donde $V(q)_1$, $V(q)_2$, $V(q)_3$ y $V(q)_4$ son las energías potenciales asociadas a las masas m_1 , m_2 , m_3 y m_4 respectivamente. Se tiene

entonces

$$\begin{aligned}
V_1 &= m_1 g l_{c_1} \sin(q_1) \\
V_2 &= m_2 g l_1 \sin(q_1) + m_2 g l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) \\
V_3 &= m_3 g l_1 \sin(q_1) + m_3 g l_2 \sin(q_1 + q_2) + m_3 g l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
V_4 &= m_4 g l_1 \sin(q_1) + m_4 g l_2 \sin(q_1 + q_2) + m_4 g l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
&\quad + m_4 g l_{c_4} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

A partir de las energías cinéticas y potenciales puede obtenerse el lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
L(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_1 l_{c_1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 l_{c_3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\
&\quad + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \\
&\quad \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{2} m_4 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_4 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_4 l_3^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{2} m_4 l_{c_4}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
&\quad + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\
&\quad + \dot{q}_4) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 \\
&\quad + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + \frac{1}{2} I_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\
&\quad + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 - m_1 g l_{c_1} \sin(q_1) - m_2 g l_1 \sin(q_1) - m_2 g l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) - m_3 g l_1 \sin(q_1) \\
&\quad - m_3 g l_2 \sin(q_1 + q_2) - m_3 g l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) - m_4 g l_1 \sin(q_1) - m_4 g l_2 \sin(q_1 + \\
&\quad q_2) - m_4 g l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) - m_4 g l_{c_4} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

De esta última ecuación, permite obtener las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = & m_1 l_{c_1}^2 \dot{q}_1 + I_1 \dot{q}_1 + m_2 l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& + I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_1^2 \dot{q}_1 + m_3 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_{c_3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1^2 \dot{q}_1 \\
& + m_4 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_3^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_{c_4}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + I_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] = & m_1 l_{c_1}^2 \ddot{q}_1 + I_1 \ddot{q}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c_2}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_3 l_1^2 \ddot{q}_1 + m_3 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\
& + I_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\
& + m_3 l_{c_3}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\
& - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1^2 \ddot{q}_1 + m_4 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\
& + m_4 l_{c_4}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\
& + \ddot{q}_3) + m_4 l_3^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\
& + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 \\
& + \ddot{q}_4) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4) + I_4 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4) \\
& - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + 2\ddot{q}_3 + \ddot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= - [m_1 g l_{c_1} + m_2 g l_1 + m_3 g l_1 + m_4 g l_1] \cos(q_1) - [m_2 g l_{c_2} + m_3 g l_2 + m_4 g l_2] \cos(q_1 + q_2) \\
& - [m_4 g l_3 + m_3 g l_{c_3}] \cos(q_1 + q_2 + q_3) - m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Con respecto a la articulación q_2 .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_{c_3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& + m_4 l_3^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_{c_4}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \\
& + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \\
& + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 \\
& + \dot{q}_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& + I_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_2 l_{c_2}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_3 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_4 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_3 l_{c_3}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\
& + m_4 l_3^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + m_4 l_{c_4}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4) - m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) \ddot{q}_1 \\
& - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \ddot{q}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) \ddot{q}_1 - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 \\
& + q_3) \ddot{q}_1 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \ddot{q}_1 \\
& - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\
& - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \\
& \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4) \\
& - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + 2\ddot{q}_3 + \ddot{q}_4) \\
& + I_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + I_4 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_2} &= - m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - [m_2 g l_{c_2} + m_4 g l_2 + m_3 g l_2] \\
& \cos(q_1 + q_2) - [m_3 g l_{c_3} + m_4 g l_{c_3}] \cos(q_1 + q_2 + q_3) - m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Con respecto a la articulación q_3 .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} &= m_3 l_{c_3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_3^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_{c_4}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\
& + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + I_4 (\dot{q}_1 + \\
& \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right] = m_3 l_{c_3}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + m_4 l_3^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + m_4 l_{c_4}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4)$$

$$\begin{aligned}
& - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \ddot{q}_1 - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) \ddot{q}_1 \\
& - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \ddot{q}_1 - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \\
& \dot{q}_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \\
& \cos(q_3 + q_4) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (2\ddot{q}_1 \\
& + 2\ddot{q}_2 + 2\ddot{q}_3 + \ddot{q}_4) + I_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + I_4 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_3} &= - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\
& + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 \\
& + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_3 g l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
& - m_4 g l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) - m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Por ultimo los términos relacionados con la articulación q_4 .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} &= m_4 l_{c_4}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + I_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} \right] = & m_4 l_{c_4}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \ddot{q}_1 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + I_4 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + \ddot{q}_4)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_4} = & - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& - m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan al sistema (extremidades inferiores y tronco torácico) sobre el plano sagital, se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.49}$$

De donde se obtiene τ_1 , τ_2 , τ_3 y τ_4 .

$$\begin{aligned}
& [m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_1^2 + m_4 l_2^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \\
& \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + 2m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) \\
& + 2m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + 2m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + 2m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 \\
& + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_2^2 + m_4 l_3^2 \\
& + m_4 l_{c_4}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) \\
& + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + 2m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) \\
& + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_2 + I_3 + I_4] \ddot{q}_2 + [m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
& + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4] \ddot{q}_3 + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_1 l_{c_4} \\
& \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_4 - m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 \\
& + \dot{q}_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + [m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 + m_3 l_1 + m_4 l_1] g \cos(q_1) \\
& + [m_2 l_{c_2} + m_3 l_2 + m_4 l_2] g \cos(q_1 + q_2) + [m_4 l_3 + m_3 l_{c_3}] g \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
& + m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \tau_1
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Para la siguiente ecuación, queda:

$$\begin{aligned}
& [m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) \\
& + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + \\
& q_3 + q_4) + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \\
& \cos(q_4) + I_2 + I_3 + I_4] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + 2m_3 \\
& l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_2 + \\
& I_3 + I_4] \ddot{q}_2 + [m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \\
& \cos(q_3 + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4] \ddot{q}_3 + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 \\
& l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_4 - m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \\
& \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
& \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + \\
& q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + [m_2 l_{c_2} + m_4 l_2 + m_3 l_2] g \cos(q_1 + q_2) \\
& + [m_3 l_{c_3} + m_4 l_{c_3}] g \cos(q_1 + q_2 + q_3) + m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \tau_2
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Para la tercera ecuación de Lagrange se obtuvo:

$$\begin{aligned}
& [m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_3 l_1 l_{c_3} \\
& \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4] \\
& \ddot{q}_1 + [m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4 \\
& l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4] \ddot{q}_2 + [m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4] \ddot{q}_3 + [m_4 l_{c_4}^2 + \\
& m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_4 - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_4 l_1 \\
& l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 (\dot{q}_1 + \\
& \dot{q}_2) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& + m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
& + [m_3 l_{c_3} + m_4 l_{c_3}] g \cos(q_1 + q_2 + q_3) + m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \tau_3
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Por ultimo para τ_4 :

$$\begin{aligned}
& [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_1 \\
& + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_2 + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \\
& \ddot{q}_3 + [m_4 l_{c_4}^2 + I_4] \ddot{q}_4 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \\
& \dot{q}_2) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{q}_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \tau_4
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Siendo τ_1 , τ_2 , τ_3 y τ_4 los pares que actúan en las articulaciones (tobillo, rodilla, cadera y vertebra sacro).

3.2.2 Modelo Dinámico (Euler-Lagrange)

Las ecuaciones dinámicas obtenidas a partir del formalismo de Lagrange nos permiten escribir el modelo dinámico general como se observa en [26], [31] y se muestra a continuación.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \tag{3.54}$$

Para obtener la matriz de inercia $M(q)$ utilizamos las ecuaciones 3.50, 3.51, 3.52 y 3.53, anteriormente obtenidas, donde solamente se involucra el vector de aceleración.

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix}$$

Entonces de la ecuación (3.50), se toma solamente:

$$\begin{aligned}
& [m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_1^2 + m_4 l_2^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \\
& \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + 2m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) \\
& + 2m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + 2m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + 2m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 \\
& + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4] \ddot{q}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [m_2l_{c_2}^2 + m_3l_2^2 + m_3l_{c_3}^2 + m_4l_2^2 + m_4l_3^2 + m_4l_{c_4}^2 + m_2l_1l_{c_2} \cos(q_2) + m_3l_1l_2 \cos(q_2) \\
& + m_3l_1l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3l_2l_{c_3} \cos(q_3) + m_4l_1l_2 \cos(q_2) + m_4l_1l_3 \cos(q_2 + q_3) \\
& + m_4l_1l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + 2m_4l_2l_3 \cos(q_3) + 2m_4l_2l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& + 2m_4l_3l_{c_4} \cos(q_4) + I_2 + I_3 + I_4]\ddot{q}_2 + [m_3l_{c_3}^2 + m_4l_3^2 + m_4l_{c_4}^2 + m_3l_1l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \\
& + m_3l_2l_{c_3} \cos(q_3) + m_4l_1l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4l_1l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4l_2l_3 \cos(q_3) \\
& + m_4l_2l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4l_3l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4]\ddot{q}_3 + [m_4l_{c_4}^2 + m_4l_1l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
& + m_4l_2l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4l_3l_{c_4} \cos(q_4) + I_4]\ddot{q}_4
\end{aligned} \tag{3.55}$$

De la ecuación (3.51):

$$\begin{aligned}
& [m_2l_{c_2}^2 + m_3l_2^2 + m_4l_2^2 + m_3l_{c_3}^2 + m_4l_3^2 + m_4l_{c_4}^2 + m_2l_1l_{c_2} \cos(q_2) + m_3l_1l_2 \cos(q_2) \\
& + m_3l_1l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_4l_1l_2 \cos(q_2) + m_4l_1l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4l_1l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
& + 2m_3l_2l_{c_3} \cos(q_3) + 2m_4l_2l_3 \cos(q_3) + 2m_4l_2l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4l_3l_{c_4} \cos(q_4) \\
& + I_2 + I_3 + I_4]\ddot{q}_1 + [m_2l_{c_2}^2 + m_3l_2^2 + m_4l_2^2 + m_3l_{c_3}^2 + m_4l_3^2 + m_4l_{c_4}^2 + 2m_3l_2l_{c_3} \cos(q_3) \\
& + 2m_4l_2l_3 \cos(q_3) + 2m_4l_2l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4l_3l_{c_4} \cos(q_4) + I_2 + I_3 + I_4]\ddot{q}_2 + [m_3l_{c_3}^2 \\
& + m_4l_3^2 + m_4l_{c_4}^2 + m_3l_2l_{c_3} \cos(q_3) + m_4l_2l_3 \cos(q_3) + m_4l_2l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4l_3l_{c_4} \cos(q_4) \\
& + I_3 + I_4]\ddot{q}_3 + [m_4l_{c_4}^2 + m_4l_2l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4l_3l_{c_4} \cos(q_4) + I_4]\ddot{q}_4
\end{aligned} \tag{3.56}$$

De la ecuación (3.52):

$$\begin{aligned}
& [m_3l_{c_3}^2 + m_4l_3^2 + m_4l_{c_4}^2 + m_3l_2l_{c_3} \cos(q_3) + m_4l_2l_3 \cos(q_3) + m_4l_2l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& + m_3l_1l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_4l_1l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4l_1l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + 2m_4l_3l_{c_4} \cos(q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + I_3 + I_4] \ddot{q}_1 + [m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4] \ddot{q}_2 + [m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4] \ddot{q}_3 \\
& + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_4
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Y por ultimo con (3.53) se tiene:

$$\begin{aligned}
& [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_1 \\
& + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_2 + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_3 \\
& + [m_4 l_{c_4}^2 + I_4] \ddot{q}_4
\end{aligned} \tag{3.58}$$

En cuanto a la matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$ lo hacemos a través de los coeficientes o símbolos de Chistoffel $c_{ijk}(q)$ definidos como:

$$C_{kj}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{1jk} \\ C_{2jk} \\ \vdots \\ C_{njk} \end{bmatrix}^T \dot{q} \quad C_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right]$$

Tal que $\dot{q} \in \mathfrak{R}^4$

Aplicando las formulaciones anteriores se logra calcular cada uno de los elementos de $C(q, \dot{q})$, el desarrollo se muestra en la sección del apéndice(A.2).

Para obtener el vector de fuerzas externas $G(q)$ se obtiene por medio de la siguiente expresión.

$$G(q) = \frac{\partial V(q)}{\partial q} = \frac{\partial V(q)}{\partial q_1} + \frac{\partial V(q)}{\partial q_2} + \frac{\partial V(q)}{\partial q_3} + \frac{\partial V(q)}{\partial q_4} \tag{3.59}$$

Así, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1(q)}{\partial q_1} + \frac{\partial V_2(q)}{\partial q_1} + \frac{\partial V_3(q)}{\partial q_1} + \frac{\partial V_4(q)}{\partial q_1} &= [m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 + m_3 l_1 + m_4 l_1] g \cos(q_1) \\
&+ [m_2 l_{c_2} + m_3 l_2 + m_4 l_2] g \cos(q_1 + q_2) \\
&+ [m_4 l_{c_3} + m_3 l_{c_3}] g \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
&+ m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1(q)}{\partial q_2} + \frac{\partial V_2(q)}{\partial q_2} + \frac{\partial V_3(q)}{\partial q_2} + \frac{\partial V_4(q)}{\partial q_2} &= [m_2 l_{c_2} + m_4 l_2 + m_3 l_2] g \cos(q_1 + q_2) \\
&+ [m_3 l_{c_3} + m_4 l_{c_3}] g \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
&+ m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1(q)}{\partial q_3} + \frac{\partial V_2(q)}{\partial q_3} + \frac{\partial V_3(q)}{\partial q_3} + \frac{\partial V_4(q)}{\partial q_3} &= [m_3 l_{c_3} + m_4 l_{c_3}] g \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
&+ m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial V_1(q)}{\partial q_4} + \frac{\partial V_2(q)}{\partial q_4} + \frac{\partial V_3(q)}{\partial q_4} + \frac{\partial V_4(q)}{\partial q_4} = m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \tag{3.63}$$

Por lo tanto la ecuación 3.54

Donde

$$M(q)\ddot{q} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) & M_{14}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) & M_{24}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) & M_{34}(q) \\ M_{41}(q) & M_{42}(q) & M_{43}(q) & M_{44}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) & C_{14}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) & C_{24}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) & C_{34}(q, \dot{q}) \\ C_{41}(q, \dot{q}) & C_{42}(q, \dot{q}) & C_{43}(q, \dot{q}) & C_{44}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \\ G_3(q) \\ G_4(q) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_{h1} \\ \tau_2 &= \tau_{h2} \\ \tau_3 &= \tau_{h3} \\ \tau_4 &= \tau_{exo} + \tau_{h4} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Donde cada uno de los elementos de las matrices estan definidos como:

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_1^2 + m_4 l_2^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 \\ &+ 2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) \\ &+ 2m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) + 2m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + 2m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\ &+ 2m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ M_{12}(q) &= m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_2^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) \\ &+ m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) \\ &+ m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + 2m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\ &+ 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{13}(q) = & m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_1 l_3 \\
& \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

$$M_{14}(q) = m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4$$

$$\begin{aligned}
M_{21}(q) = & m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) \\
& + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \\
& \cos(q_2 + q_3 + q_4) + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22}(q) = & m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_2^2 + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_3 \\
& \cos(q_3) + 2m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{23}(q) = & m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

$$M_{24}(q) = m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4$$

$$\begin{aligned}
M_{31}(q) = & m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \\
& + m_4 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{32}(q) = & m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3) + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

$$M_{33}(q) = m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_3^2 + m_4 l_{c_4}^2 + 2m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_3 + I_4$$

$$M_{34}(q) = m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4$$

$$M_{41}(q) = m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4$$

$$M_{42}(q) = m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4$$

$$M_{43}(q) = m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4$$

$$M_{44}(q) = m_4 l_{c_4}^2 + I_4$$

$$\begin{aligned}
C_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 - m_4 l_1 l_2 \\
&\quad \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_2 - m_3 l_1 l_{c_3} \\
&\quad \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_3 - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_1 l_{c_4} \\
&\quad \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \dot{q}_3 - m_4 l_1 l_{c_4} \\
&\quad \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_4 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \dot{q}_4 - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \\
C_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \\
&\quad (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
&\quad - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_3 \\
&\quad \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \\
C_{13}(q, \dot{q}) &= -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_3 \\
&\quad \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
&\quad - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
&\quad - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \\
C_{14}(q, \dot{q}) &= -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\
&\quad + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_1 + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 + m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - m_3 l_2 l_{c_3} \\
&\quad \sin(q_3) \dot{q}_3 + m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 + m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 \\
&\quad + q_3 + q_4) \dot{q}_1 - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
&\quad - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
&\quad - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \\
C_{23}(q, \dot{q}) &= -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
&\quad - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \\
C_{24}(q, \dot{q}) &= -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
C_{31}(q, \dot{q}) &= m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\
&\quad + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_4 l_3 l_{c_4} \\
&\quad \sin(q_4) \dot{q}_4 + m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{32}(q, \dot{q}) &= m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_2 l_3 \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\
&\quad (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \\
C_{33}(q, \dot{q}) &= -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \\
C_{34}(q, \dot{q}) &= -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\
C_{41}(q, \dot{q}) &= m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
&\quad + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
C_{42}(q, \dot{q}) &= m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
C_{43}(q, \dot{q}) &= m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
C_{44}(q, \dot{q}) &= 0
\end{aligned}$$

El torque necesario para generar movimiento en las articulación 4 está compuesto por la suma de dos torques, (τ_{h4} y τ_{exo}), y las otras tres solo dependen de la fuerza humana; donde τ_{h1} , τ_{h2} , τ_{h3} y τ_{h4} son torques generados por la fuerza humana en el tobillo, rodilla, cadera y vertebra sacra respectivamente. El torque τ_{exo} es generado por el exoesqueleto en función de la fuerza que produce el actuador (Γ_{muscle} , 3.7), aprovechada para generar un torque (τ_{PAM} , ??) como se ve en la siguiente ecuación:

$$\tau_{exo} = \tau_{muscle} = \Gamma_{muscle} * \delta \quad (3.66)$$

3.3 Acoplamiento de modelos matemáticos

El modelo del exoesqueleto obtenido de la forma (3.54) contiene un vector de torques τ , de los cuales, solo el ultimo elemento τ_4 de (3.65), contiene a τ_{exo} el cual es considerado como la entrada de control disponible y en donde se realiza el acoplamiento con el modelo del actuador obtenido de [4], mostrado en la ecuación (3.1).

Entonces la deducción (3.66) sera introducida en (3.54), y como solo en el ultimo vector es afectado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_1 + \\
& [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_2 + m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + \\
& I_4] \ddot{q}_3 + [m_4 l_{c_4}^2 + I_4] \ddot{q}_4 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + \\
& q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \tau_{h_4} + l_r F_{ce}(P) \\
& \sin(\alpha) - l_r B(P) \dot{y} \sin(\alpha) - l_r K(P) \sin(\alpha) y
\end{aligned}$$

El desarrollo puede ser consultado en el Anexo(A.1) para su mayor comprensión.

CAPÍTULO 4

TECNICA DE CONTROL APLICADA

En el presente capítulo se demuestra el desarrollo de una técnica de control implementada en el robot. En el ejercicio de levantamiento de objetos o el simple hecho de hacer flexiones para simular el levantamiento, el control PD + compensación de la gravedad es el tipo de control aplicado con el fin de experimentar y observar el comportamiento del sistema. La existencia de fuerzas gravitacionales influyen directamente en el robot, al variar la cantidad de masa el par gravitacional cambia.

4.1 Control PD con compensación de la gravedad

En el diseño del control de posición angular para el sistema (3.54) se consideró que el exoesqueleto debe realizar solamente ejercicios lentos que generan aceleraciones y velocidades angulares (\ddot{q} , \dot{q}) pequeñas. Por lo tanto la mayor cantidad del torque necesario para generar movimientos en las articulaciones es debida al vector de pares gravitacionales $G(q)$.

Un control PD ($\tau = k_p \tilde{q} + k_d \dot{\tilde{q}}$) no garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición en sistemas cuyos modelos dinámicos contienen el término de pares gravitacionales, a menos que la posición deseada q_d sea tal que $G(q_d) = 0$. Por lo tanto es necesario compensar el vector de gravedad. A partir de la suma del torque humano generado por la espalda mas el torque de la ecuación 3.8 se obtiene la siguiente expresión de torques:

$$\tau_4 = \tau_{h_4} + l_r F_{ce}(P) \sin(\alpha) - l_r B(P) \dot{y} \sin(\alpha) - l_r K(P) \sin(\alpha) y \quad (4.1)$$

La suposición de que la fuerza total $\Gamma_{muscle} \cong F_{ce}(P)$ es posible debido a que los parámetros K_0, K_1, B_{0i}, B_{1i} son despreciables a comparación de F_0 y F_1 , como se puede observar en anexo (A.4). Por lo tanto $\tau_4 = \tau_{h_4} + l_r F_{ce}(P) \sin(\alpha)$

Donde el término P es la presión y esta definida como:

$$P = \frac{P_{max}}{2} - \Delta P \quad (4.2)$$

P_{max} es la presión máxima que aceptan los actuadores neumáticos, ver tabla (3.1). El término $\frac{P_{max}}{2}$ indica que el musculo se encuentra inicialmente inflado a la mitad de presión máxima de aire, el término ΔP es una variación de presión que nos permite inflar/desinflar los músculos neumáticos y se considera como la entrada de control.

Desarrollando τ_4 y empleando los polinomios del anexo (A.4) y la tabla (3.1), se tiene que:

$$\tau_4 = \tau_{h_4} + l_r (F_0 + F_1 P) \sin(\alpha)$$

Simplificando y factorizando:

$$\tau_4 = \tau_{h_4} + l_r \sin(\alpha) \left[F_0 + (F_1) \frac{P_{max}}{2} \right] - l_r \sin(\alpha) (F_1) \Delta P \quad (4.3)$$

Definiendo las constantes $\phi = l_r \sin(\alpha) [F_0 + (F_1) \frac{P_{max}}{2}]$ y $\beta = l_r \sin(\alpha) F_1$ diferentes de 0 se tiene que:

$$\tau_4 = \tau_{h_4} + \phi - \beta(\Delta P) \quad (4.4)$$

Se implementa una ley de control PD con compensación de la gravedad de la siguiente forma:

$$\Delta P = \frac{K_{p_i} \tilde{q}_i + K_{d_i} \dot{\tilde{q}}_i + G_i(q)}{-\beta} - \phi \quad (4.5)$$

Sustituyendo 4.5 en 4.4 obtenemos:

$$\tau_4 = \tau_{h_4} + K_{p_4} \tilde{q}_4 + K_{d_4} \dot{\tilde{q}}_4 + G_4(q) \quad (4.6)$$

Donde K_{p_4} y K_{d_4} se denominan ganancia de posición y de velocidad de la última articulación, respectivamente. $\tilde{q}_4 = q_{d_4} - q_4$ se denomina error de posición. $\dot{\tilde{q}}_4$ es el error de velocidad. q_{d_4} es la posición articular deseada. $G_4(q_4)$ es la compensación del vector de fuerzas gravitacionales.

Para generar q_d se hace por medio de la ley de hooke para obtener una relación entre la posición deseada y la fuerza aplicada por el humano, como:

$$\delta_s f_h = k_s (q_d - q)$$

$$q_d = \frac{\delta_s f_h}{k_s} + q$$

De manera que f_h es la fuerza humana detectada por el sensor LVDT con resorte, q es la posición angular del mecanismo que es medida con un encoder, el valor de k_s es

la constante de resorte y δ_s es la longitud del brazo de palanca que va desde el pivote mecánico al sensor de fuerza, estos datos se encuentran en la tabla (3.1).

4.1.1 Análisis de estabilidad en lazo cerrado

Como la ecuación 4.4 contiene los torques generados por el humano τ_{h_4} para completar la compensación del vector de gravedad $G_4(q)$ y obtener el modelo dinámico del sistema en lazo cerrado de la siguiente forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_p\tilde{q} + K_d\dot{\tilde{q}} + G(q) \quad (4.7)$$

$$M(q)\ddot{q} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) & M_{14}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) & M_{24}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) & M_{34}(q) \\ M_{41}(q) & M_{42}(q) & M_{43}(q) & M_{44}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) & C_{14}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) & C_{24}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) & C_{34}(q, \dot{q}) \\ C_{41}(q, \dot{q}) & C_{42}(q, \dot{q}) & C_{43}(q, \dot{q}) & C_{44}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \\ G_3(q) \\ G_4(q) \end{bmatrix}$$

Donde K_p y K_d son matrices diagonales simétricas definidas positivas que contiene a las ganancias K_{p4} y K_{d4} , respectivamente. Una condición necesaria y suficiente para

que el origen $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T = 0$ sea equilibrio de la ecuación de malla cerrada es que la posición deseada $q_d(t)$ satisfaga:

$$M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d = 0 \quad (4.8)$$

para cualquier condición inicial $\begin{bmatrix} q_d(0)^T & \dot{q}_d(0)^T \end{bmatrix}^T = 0$, si $q_d(t)$ no satisface la condición anterior, entonces el origen no será equilibrio de la ecuación de malla cerrada y por lo tanto no podrá esperarse que satisfaga cabalmente el objetivo de control de movimiento, que es llevar el error de posición $\tilde{q}(t)$ asintóticamente a cero. No obstante, puede conseguirse que asintóticamente el error de posición $\tilde{q}(t)$ sea tan pequeño como se desee, a condición de seleccionar las matrices K_p y K_d suficientemente grandes. El objetivo del control PD con compensación de la gravedad es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d \quad (4.9)$$

Donde q_d es un vector constante. Considerando la posición deseada q_d como constante, la ecuación de malla cerrada puede entonces escribirse en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q_d - \tilde{q})^{-1}[K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q_d - \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T = 0$ se empleó el método directo de Lyapunov [31]. La función candidata de Lyapunov es:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \quad (4.11)$$

Calculando su derivada con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} \quad (4.12)$$

Se sustituye $M(q)\ddot{q}$ de la ecuación (4.10), para obtener:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T K_p \tilde{q} + \dot{q}^T K_d \dot{\tilde{q}} \\ &\quad + \dot{q}^T [-C(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} \dot{M}(q)] \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Una de las propiedades de la matriz centrífuga y de coriolis establece que dicha matriz $C(q, \dot{q})$ se relaciona con la matriz de inercia $M(q)$ mediante la propiedad anti-simétrica:

$$x^T [\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})] x = 0 \quad \forall q, \dot{q}, x \in \mathfrak{R}^n$$

Aplicando la propiedad anterior y debido a que $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ ya que q_d es un vector constante, la derivada de la función candidata de Lyapunov finalmente resulta como:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_d \dot{q} \quad (4.14)$$

La función $V(\tilde{q}, \dot{q})$ es entonces una función de Lyapunov ya que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq 0$, por lo tanto el origen es estable y las soluciones \tilde{q} y \dot{q} están acotadas. Más aun, existe un conjunto Ω dado por:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\} \quad (4.15)$$

Obsérvese que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ si y sólo si $\dot{q} = 0$. Si definimos $x = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$, para que una solución $x(t)$ pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $\dot{q}(t) = 0$ para

todo $t \geq 0$ y esto satisface que $\ddot{q}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Con todo esto de la ecuación de lazo cerrado (4.10) se concluye que si $x(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$ entonces:

$$M(q_d - \tilde{q}(t))^{-1} K_p \tilde{q}(t) = 0 \quad (4.16)$$

Lo que significa que $\tilde{q}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} = 0$ es la única condición inicial en Ω para la cual $x(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$ y de acuerdo con el teorema de LaSalle [31], esto basta para garantizar estabilidad asintótica global del origen $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T = 0$ y en consecuencia se verifica el objetivo de control. —

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1 Control PD con compensación de la gravedad

5.1.1 Resultados numéricos

En esta sección se muestran los resultados numéricos obtenidos del ejercicio de levantamiento o flexión de la región dorsal en un esfuerzo mutuo entre el cuerpo humano y el exoesqueleto. Este prototipo experimental emplea un sensor LVDT para conocer la trayectoria deseada, generada por el humano intuitivamente.

Para comprobar el desempeño de la técnica de control antes de implementarla en el sistema robótico, se observó los resultados de la simulación de los movimientos de las articulaciones que afectan directa o indirectamente al sistema, dentro de esta simulación se aplicaron trayectorias deseadas cosenoidales no solo para la articulación a controlar (sacro), si no también para la cadera, así, el modelo de las dinámicas tendrá más información para arrojar datos con mayor exactitud y utilidad aunque el modelo obtenido sea de 4GDF, y debido a que solo se tiene puesto un solo enconder para la articulación del sacro, la simulación se limita a que al menos las trayectorias para el

tobillo (q_1) y la rodilla (q_2) sean cero, y las articulaciones de la cadera (q_3) y del sacro (q_4) se tienen datos disponibles con el objetivo de acercarse a resultados reales.

En la experimentación, las trayectorias deseadas se generan intuitivamente y se transmiten al control por medio del sensor de fuerza ubicado en la parte posterior de la cabeza como señal de referencia.

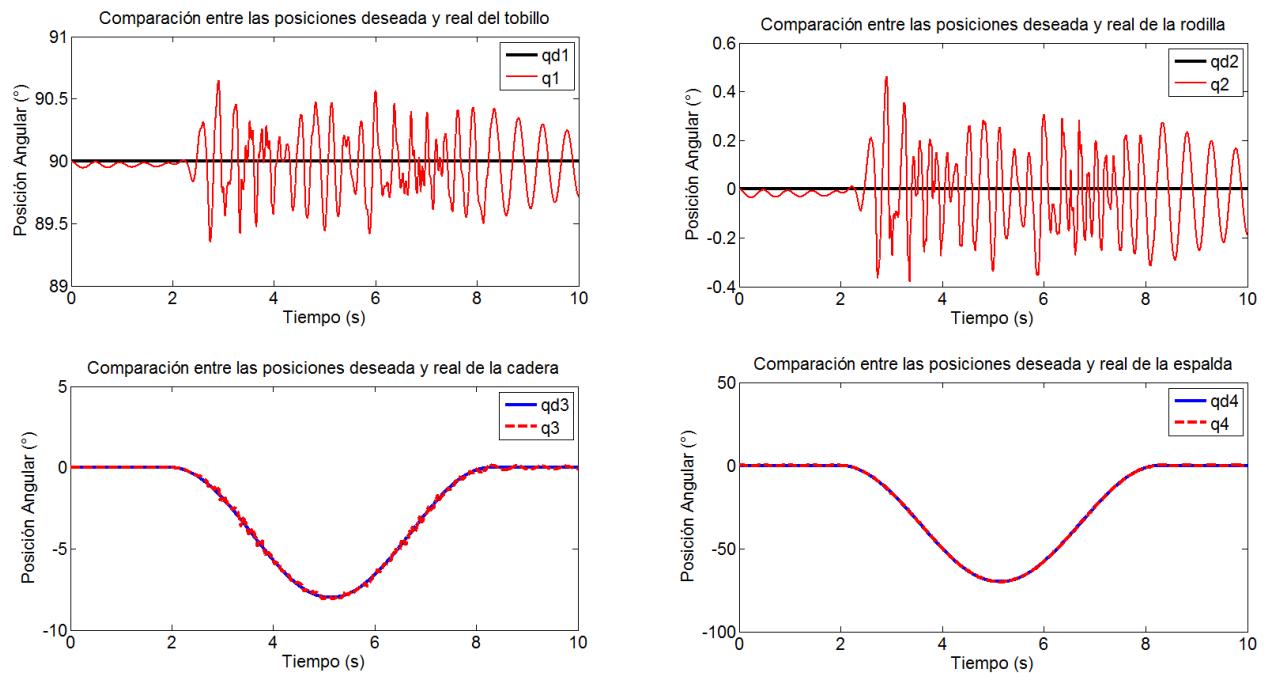


Figura 5.1: Comparación entre posición angular deseada y posición angular de la articulación del tobillo, rodilla, cadera y sacro en simulación.

La simulación permite ajustar las ganancias del control y nos da una aproximación para ajustar el control en el prototipo experimental. Los resultados de la simulación se pueden observar en la figura 5.1 para el tobillo, rodilla, cadera y sacro desde la parte superior hacia la inferior respectivamente, donde se observa que la salida o posiciones de las articulaciones siguen la trayectoria deseada en un tiempo de respuesta corto sin

sobretiros considerables que afectarían las articulaciones del humano, posiblemente las gráficas del tobillo y la rodilla sean muy ruidosas al tratar de acercarse a su referencia en cero y además esos sobretiros son pequeños, en realidad se aplicó un control PD con el fin de complementar el hecho de que el cuerpo humano tiene intrínsecamente control en si mismo.

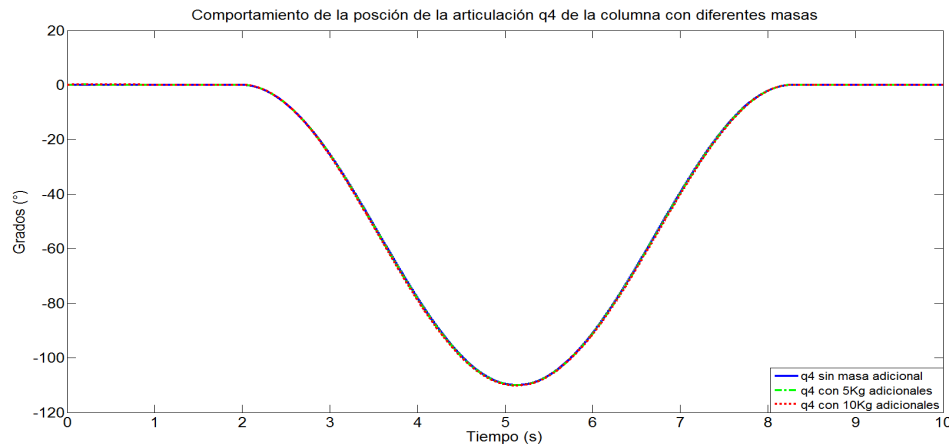


Figura 5.2: Efecto del par gravitacional en la posición de q_4 para distintos valores de m_4 .

En las gráficas de la figura 5.2 se presenta la respuesta del control para la articulación del sacro (q_4) ante una exposición de diferentes masas en m_4 , por lo que el exoesqueleto compensa la gravedad y refleja una disminución del esfuerzo humano en simulación. La tabla (3.1) muestra los parámetros utilizados en la simulación del modelo dinámico del exoesqueleto. Los parámetros se obtienen por medio de mediciones en el mecanismo y datos antropométricos [14].

El diagrama 5.3 muestra la forma fue realizada la simulación, se generan trayectorias deseadas para tener la información completa del vector de posiciones q , después estas posiciones deseadas son comparadas respecto de las posiciones reales que el sistema de

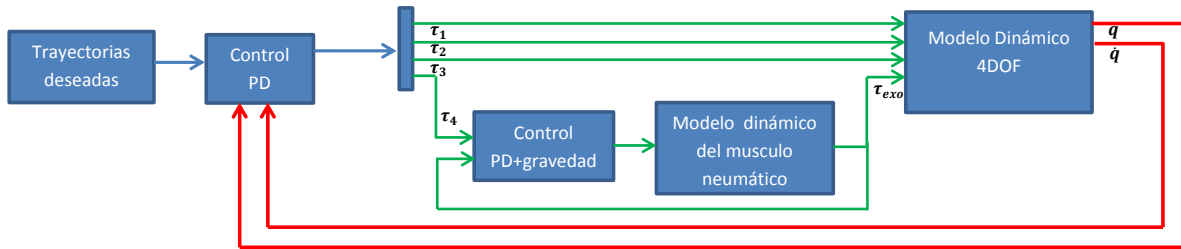


Figura 5.3: Diagrama a bloques del sistema con control PD+gravedad.

4 DOF va generando y así, realizar un control PD para simular el propio control que ejerce el humano, pero para la articulación 4, τ_4 es la referencia deseada a comparar contra el torque producido por el modelo del musculo neumático (τ_{exo}) y el cual es controlado por el control PD+gravedad.

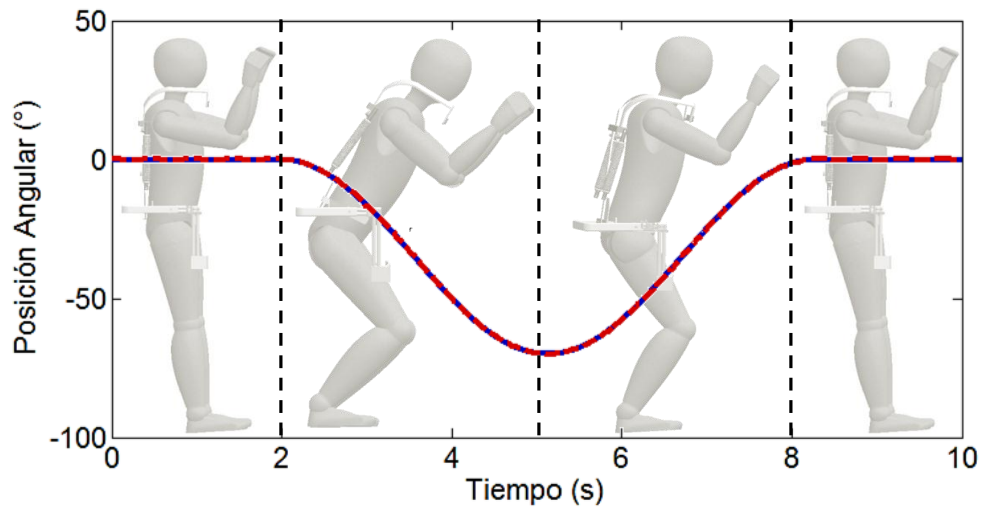


Figura 5.4: Simulación del proceso del ejercicio del humano con el exoesqueleto.

El ejercicio consta de cuatro fases, ver imagen 5.4:

1) En la primer fase del ejercicio, durante el intervalo de tiempo $t = [0, 2]$ *seg* se mantiene una posición fija sobre 0° , es decir, los músculos neumáticos se mantienen inflados casi con su máxima capacidad interna de presión de aire comprimido para mantener una postura recta junto con la indicación intuitiva del humano, presionando el sensor de fuerza ubicado en la cabeza.

2) En la segunda fase del ejercicio, en el intervalo de tiempo $t = [2, 5]$ *seg* se observa el inicio de la curva cosenoidal, la cual indica que los músculos neumáticos comienzan a ceder fuerza para que el humano y el exoesqueleto inicien el descenso, aproximadamente en el tiempo *5seg* se llega a la máxima posición angular -70° , debido al efecto intuitivo del humano a través del sensor de fuerza indicando la referencia de movimiento hacia abajo.

3) Para la tercera fase del ejercicio, en el espacio de tiempo $t = [5, 8]$ *seg*, a partir del segundo 5, inicia el ascenso tanto del humano como del exoesqueleto, debido a que el sensor de fuerza indica a los músculos el comienzo de ganar fuerza, acumulando mayor cantidad de presión interna provocando una posición angular hasta 0° .

4) Para la cuarta y ultima fase del ejercicio, a partir del segundo 8 el sensor se encuentra presionado hasta el final de su carrera, indicando al sistema y a los músculos neumáticos mantener una posición en 0° y una presión aproximada de *3.4 bar* respectivamente, hasta que el usuario indique otro movimiento similar a este ejercicio se podrá observar diferentes señales, el robot permite mantener una posición intermedia entre 0° y -70° debido a la misma intuición producida en el sensor de fuerza generado por el humano.

5.1.2 Resultados Experimentales

En este apartado se muestran los resultados experimentales obtenidos con el exoesqueleto y consisten en ejercicios similares a las simulaciones. En las figuras (5.5), (5.6) y (5.7) se muestra los datos experimentales obtenidos de la posición y su control en tiempo real, la comparación entre la fuerza humana y el aumento por el par de músculos neumáticos, y un zoom sobre la trayectoria ejercida por el humano, respectivamente. En la grafica (5.5) se observa el comportamiento de la posición (q_4), mientras que en la gráfica (5.6) es apreciable la capacidad de fuerza que aumentan los actuadores neumáticos cuando la fuerza intuitiva del individuo es detectada, ver el zoom de la imagen(5.7). La fuerza que proporciona el humano es estimada por medio del sensor de fuerza, podemos analizar el comportamiento del ejercicio experimental en 4 partes principales:

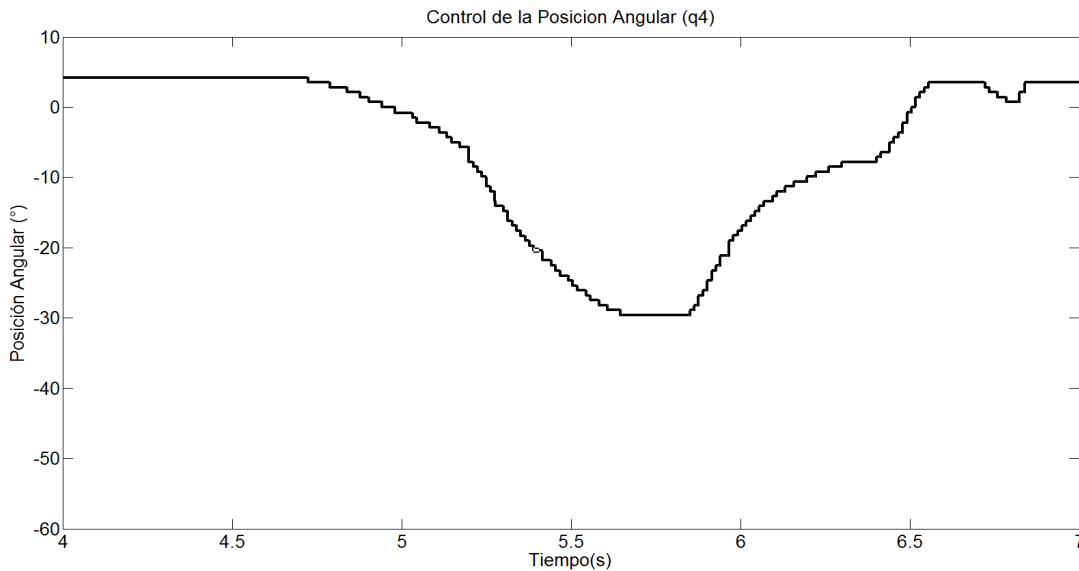


Figura 5.5: Control y seguimiento de la posición q_4 con respecto de qd_4 .

1) En el primera etapa del experimento, durante el intervalo de tiempo $t = [0, 4.75][s]$ el usuario permanece en la posición de pie, totalmente recto y las articulaciones se encuentran en $q_1 = 90^\circ$, $q_2 = 0^\circ$, $q_3 = 0^\circ$ y $q_4 = 0^\circ$. El modelado matemático de

las dinámicas fue propuesto de tal forma que facilitara su desarrollo $q_4 = 0^\circ$, para el experimento se toma el marco de referencia sobre (q_1) de la misma manera que en la simulación, por lo que en la gráfica (5.5), $q_4 = 5^\circ$ es la posición inicial. La fuerza del humano y del actuador son similares cuando no hay movimiento, pero la diferencia radica en que la fuerza del actuador en la grafica (5.6) indica que ya inicia con una fuerza de al menos $10N$ y es debido a su naturaleza mecánica-neumática. En la gráfica mencionada anteriormente se representa que, en el lapso de tiempo $t = [0, 2.8][s]$ hay una fuerza constante de al menos $10N$ y en el intervalo de tiempo $t = [2.8, 3.4][s]$ se aprecia el incremento de fuerza para establecer la posición inicial y mantenerla ahí, esto es con el fin de iniciar correctamente el ejercicio.

2) En la segunda etapa del ejercicio, en el intervalo de tiempo $t = [4.75, 5.8][s]$ de la gráfica (5.5) se observa el momento de la flexión de la articulación del sacro para el movimiento de la espalda, el cual tiene un rango de movimiento de 30° , aproximadamente debe recorrer entre $0^\circ < q_4 < -30^\circ$ y se mantiene así en un lapso corto de tiempo cuando $q_4 = -30^\circ$, de la misma gráfica. Mientras que la fuerza incrementa en el tiempo $t = 2.8s$ para mantener la postura recta del cuerpo y permanece así hasta que el sensor detecta menor presión con el fin de decrementar la fuerza de los músculos y permitir el ejercicio de flexión dorsal en el intervalo de tiempo $t = [4.3, 5.8][s]$ de la gráfica (5.6).

3) Para la tercera etapa, en el intervalo de tiempo $t = [5.8, 6.5][s]$ comienza el ascenso del sistema robótico con el individuo desde -30° aproximadamente hasta llegar a la posición inicial 5° aproximadamente. En la imagen (5.6) en el intervalo temporal $t = [5.9, 6.6][s]$ comienza el aumento de fuerza para el levantamiento y contrarrestar los pares gravitacionales generados en el robot debidos por la masa adicional, la imagen (5.7) es un acercamiento que muestra como la fuerza humana no pasa de los $6N$ pero es la señal de referencia para el sistema. Esta amplificación de fuerza refleja una disminución del esfuerzo físico de las articulaciones del humano para mantener esta posición, además, es

posible observar que las extremidades superiores se ven afectadas por el peso, es decir, reciben gran parte del esfuerzo junto con el exoesqueleto.

4) En la cuarta etapa del ejercicio, durante el intervalo de tiempo $t = [6.6, 7][s]$ se logra establecer la posición inicial $q_4 = 5^\circ$ y mantener ahí hasta que el humano indique alguna señal intuitiva a través del sensor de fuerza. En las graficas (5.6, 5.7) en el intervalo de tiempo $t = [6, 7][s]$ se trata de restablecer la mayor cantidad de fuerza con el objetivo de alcanzar y mantener la posición inicial $q_4 = 5^\circ$.

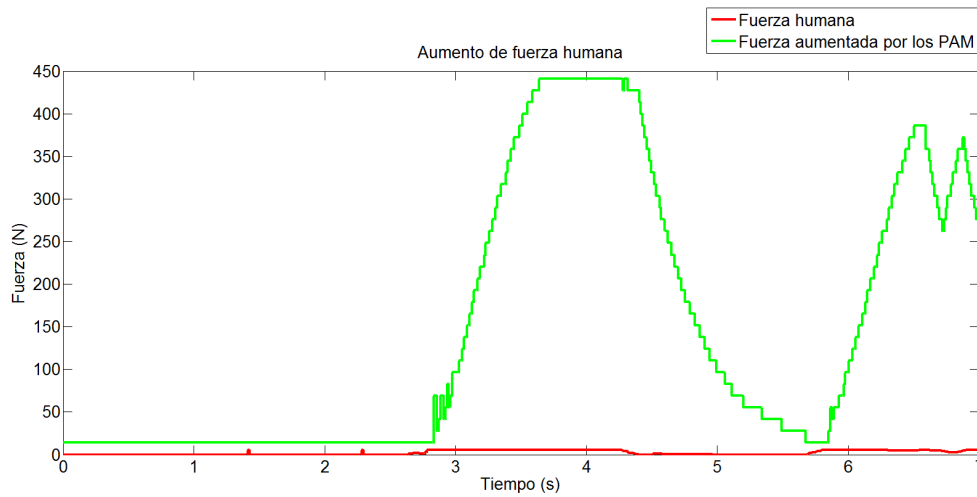


Figura 5.6: La trayectoria roja muestra la fuerza humana y la verde es la fuerza proporcionada por el par de músculos.

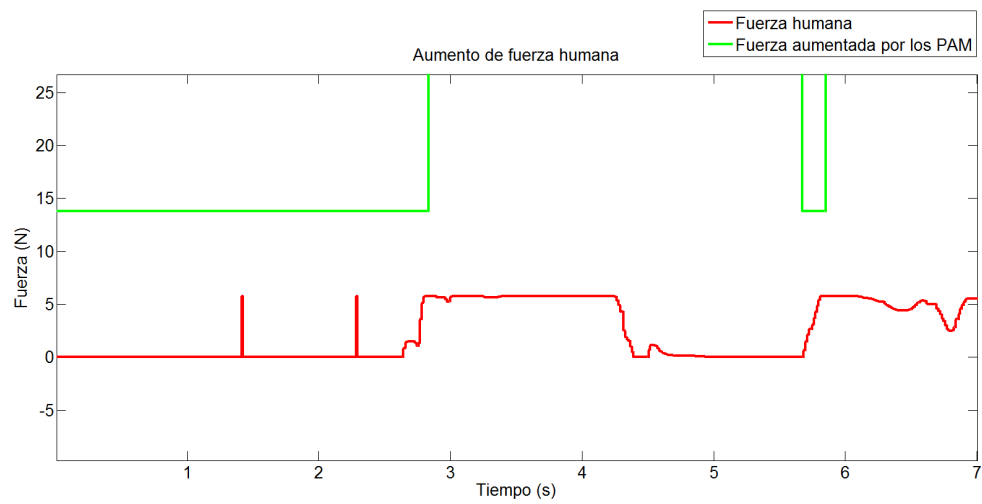


Figura 5.7: Zoom sobre la trayectoria de la fuerza humana tomada del sensor LVDT con resorte (5.6).

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES y TRABAJO FUTURO

6.1 Conclusiones

Esta línea de investigación aun es muy joven en todos sus ámbitos de tecnología, innovación, aplicación y experimentación, pero siempre hay motivaciones particularmente humanas con el fin de mejorar la calidad de vida sin arriesgar la integridad y el valor de la misma. La investigación sobre prototipos de exoesqueletos es de gran apoyo para un gran sector de la población nacional y hasta mundial que dependen y necesitan de la movilidad y accesibilidad de estos, la flexibilidad debe acompañar de la mano a estos robots de gran complejidad, es decir, cualquier individuo tenga la oportunidad de utilizar este dispositivo sin importar sus dimensiones o capacidad económica. Existen una gran gama de aplicaciones para este tipo de proyectos y se debe explotar al máximo, tan solo en la última década ha habido un gran avance al rededor de todo el mundo, pero aun siguen siendo inaccesibles por su alto costo.

La innovación en los proyectos de esta índole van encaminados hacia el uso de materiales menos costosos, livianos pero resistentes y de grandes cualidades ergonómicas para

mejorar la apariencia, comodidad y reciclaje de sus piezas. Profundizar y aplicar mas y mejores algoritmos de control que permitan tener mejores resultados en programas del tipo de rehabilitación, en el campo de la milicia, calidad de vida y situaciones de emergencia (bomberos, rescate). El hecho más relevante es explotar todo el conocimiento posible, con este rubro de investigación en el futuro de los exoesqueletos.

Este trabajo de tesis expande el campo de investigación de los exoesqueletos que utilizan los actuadores del tipo PAM (Pneumatic Artificial Muscle), aunque el modelo matematico que describe sus dinamicas abarca 4GDL y solo el ultimo eslabón es controlado para la asistencia de la región dorsal del cuerpo humano, se puede emplear en otros estudios que contemplen las articulaciones inferiores y así tener un prototipo más completo. Se muestra un mecanismo sujeto a la parte trasera de la espalda cuya finalidad es asistir al usuario de levantar su propio peso o uno ajeno a él, y consiste en controlar la posición de la articulación provista de músculos neumáticos.

La aplicación de la tecnica de control del tipo Proporcional-Derivativo con compensación de la gravedad es el primer paso en el proceso de tener un prototipo con las mejores cualidades, por lo que el mecanismo responde de manera aceptable cuando se controla la posición en la que se desea permanecer, se mantiene una velocidad constante por el hecho de que es necesario aplicar otro tipo de valvula para regularla, por el momento se instalo dos valvulas reguladoras de caudal tanto al inflar y desinflar los PAM.

6.2 Trabajo futuro

El prototipo experimental que se presenta en este trabajo consiste en un exoesqueleto para la asistencia y apoyo a la sección dorsal del cuerpo para personas con dificultad motriz o simplemente con el fin de sustituir la fuerza a aplicar. Para realizar movimientos mas finos del cuerpo humano como la bipedestación es necesario la aplicación de

un exoesqueleto que contemple ambas extremidades inferiores y la sección del tronco dorsal, la razón para esto es que las piernas roboticas ayuden a poner de forma vertical las extremidades del individuo, pero si este no es capaz de acomodar su región media por si mismo, el prototipo de esta sección tendría la tarea para ayudarlo de la mejor manera. Donde el exoesqueleto de extremidades inferiores combina la precisión y potencia de un motor con tecnología Harmonic Drive con la gran fuerza de jale que tienen los músculos neumáticos. Este prototipo se encuentra en un status de construcción, pruebas mecanicas y rediseño, ver figura(6.2 y 6.1).

Existe bastante trabajo por realizar con los prototipos, como mejorar la flexibilidad para equiparlo en cualquier cuerpo humano. No se puede permitir que el robot tenga errores, y adquirir las mejores señales de referencia lograra más y mejores resultados, es la razón de implementar los sensores del tipo EMG (Electromiográficos), detectan señales eléctricas provenientes de los músculos fibrosos que interactúan con impulsos eléctricos y reacciones químicas propias del organismo, esto permitirá tener una mejor referencia de los movimientos deseados del individuo. Además, siempre existirán modificaciones en todos los ámbitos de la ingeniería aplicada en estos proyectos, el hecho de que la espalda o región dorsal del cuerpo humano es un conjunto vertical bien organizado para lograr movimientos complejos entre los sistemas oseo y muscular, es necesario incrementar la complejidad de dichos proyectos para alcanzar o al menos aproximarse a la realidad, es por eso que no se deshecha la posibilidad de aumentar la cantidad de grados de libertad para el exoesqueleto de la región dorsal y modificar la mecánica de sus movimientos, aplicando la topología de antagonismo de los músculos neumáticos.

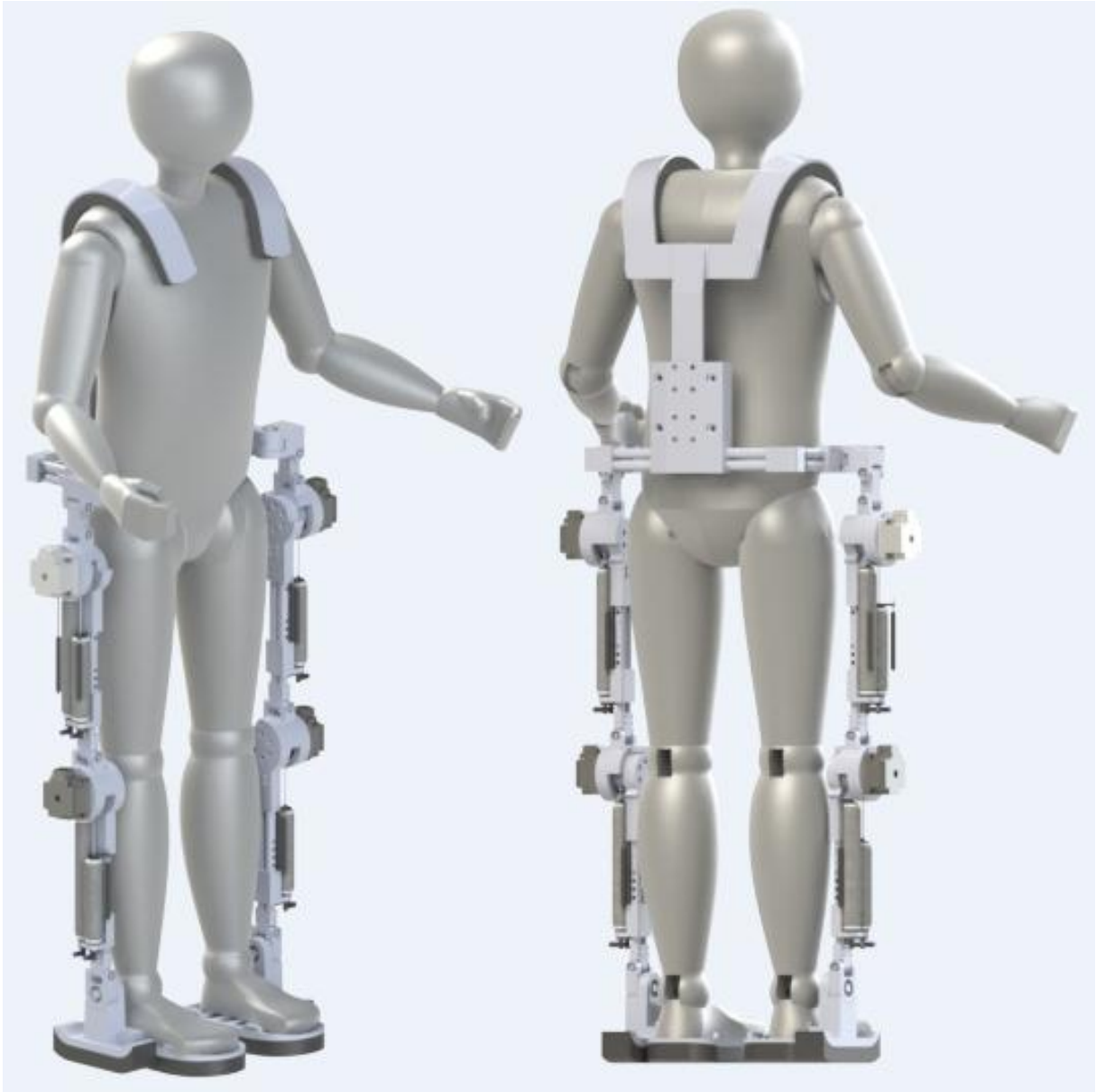


Figura 6.1: Diseño de Exoesqueleto híbrido con 6 DOF.



Figura 6.2: Construcción de Exoesqueleto híbrido con 6 DOF.

ANEXOS A

Desarrollos

A.1 Desarrollo del acoplamiento de dinámicas

El modelo matemático que describe las dinámicas del exoesqueleto y el modelo del actuador neumático esta dado como (3.1), este ultimo tomarlo de la forma (3.7) para que en ultima instancia sea introducido como un torque (3.66) en el vector de torques (3.65), como se ilustra en (3.66).

Así que, del desarrollo de (3.54), solo la ecuación (3.53) se ve como:

$$\begin{aligned} & [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_1 \\ & + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_2 + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \\ & \ddot{q}_3 + [m_4 l_{c_4}^2 + I_4] \ddot{q}_4 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \\ & \dot{q}_2) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\ & + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \\ & (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \tau_4 \end{aligned}$$

De forma que

$$\tau_4 = \tau_{exo} + \tau_{h4}$$

Donde τ_{h4} es el torque generado por el la fuerza humana en dicha sección, por otra parte τ_{exo} es:

$$\tau_{exo} = \tau_{muscle} = \Gamma_{muscle} * \delta$$

Pero, además Γ_{muscle} es la fuerza proporcionada por el musculo con cierto angulo de inclinación, considerado como componente de dicha fuerza.

$$l_r \Gamma_{muscle} \sin(\alpha) = l_r (F_{ce}(P) - B(P)\dot{y} - K(P)y) \sin(\alpha)$$

Los paramentros l_r y α se encuentran registrados en la tabla(3.1), por lo tanto.

$$\begin{aligned} & [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_1 l_{c_4} \cos(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_1 \\ & + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_2 l_{c_4} \cos(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \ddot{q}_2 + [m_4 l_{c_4}^2 + m_4 l_3 l_{c_4} \cos(q_4) + I_4] \\ & \ddot{q}_3 + [m_4 l_{c_4}^2 + I_4] \ddot{q}_4 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \\ & \dot{q}_2) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\ & + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \\ & (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + m_4 g l_{c_4} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = l_r (F_{ce}(P) - B(P)\dot{y} - K(P) \\ & y) \sin(\alpha) * \delta + \tau_{h4} \end{aligned}$$

A.2 Desarrollo de la Matriz de Coriolis y Fuerzas Centrifugas

$$\text{para } C_{11}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{111} \\ C_{211} \\ C_{311} \\ C_{411} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{111} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{11}(q)}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}(q)}{\partial q_1} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} C_{211} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} \right] = -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \\ &\quad - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \\ &\quad - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{311} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{31}}{\partial q_1} \right] = -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \\ &\quad - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\ &\quad - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{411} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{14}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{41}}{\partial q_1} \right] = -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ &\quad - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \end{aligned}$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \\ -m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\ -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \\ -m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\ -m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{11}(q, \dot{q}) = & -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 \\ & - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 \\ & + q_4) \dot{q}_2 - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_3 - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_1 l_3 \sin \\ & (q_2 + q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 \\ & l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \dot{q}_3 - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_4 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 \\ & + q_4) \dot{q}_4 - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{para } C_{12}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{121} \\ C_{221} \\ C_{321} \\ C_{421} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$\begin{aligned}
C_{121} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} \right] = -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \\
&\quad - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \\
&\quad - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{221} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} \right] = -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \\
&\quad - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \\
&\quad - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{321} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{32}}{\partial q_1} \right] = -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \\
&\quad - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
&\quad - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{421} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{14}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{42}}{\partial q_1} \right] = -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\
&\quad - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)
\end{aligned}$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \\ -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \\ -m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\ \\ -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \\ -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \\ -m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\ \\ -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \\ -m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\ -m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ \\ -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{12}(q, \dot{q}) = & -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 \\ & + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_2 \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3)(\dot{q}_1 \\ & + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_3 l_2 l_{c_3} \quad (\text{A.2}) \\ & \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)(\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \\ & \sin(q_4) \dot{q}_4 \end{aligned}$$

$$\text{para } C_{13}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{131} \\ C_{231} \\ C_{331} \\ C_{431} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$\begin{aligned}
C_{131} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{13}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_1} \right] &= -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) - m_4 l_1 \\
& l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
& - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{231} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{13}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_1} \right] &= -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \\
& - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \\
& - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{331} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{13}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_1} \right] &= -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \\
& - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
& - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{431} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{13}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{14}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{43}}{\partial q_1} \right] &= -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\
& - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13}(q, \dot{q}) &= -m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& - m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4)(\dot{q}_1 \\
& + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\text{para } C_{14}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{141} \\ C_{241} \\ C_{341} \\ C_{441} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{141} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{14}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{14}}{\partial q_1} \right] = -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{241} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{14}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{24}}{\partial q_1} \right] = -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{341} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{14}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{34}}{\partial q_1} \right] = -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{441} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{14}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{14}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{44}}{\partial q_1} \right] = -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{14}(q, \dot{q}) = -m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)(\dot{q}_1 \\ + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{para } C_{21}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{112} \\ C_{212} \\ C_{312} \\ C_{412} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{112} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} \right] = m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) + m_3 l_1 l_{c_2} \sin(q_2 + q_3) \\ + m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) + m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \\ + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4)$$

$$C_{212} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} \right] = 0$$

$$C_{312} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{21}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{31}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \\ - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)$$

$$C_{412} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{21}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{24}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{41}}{\partial q_2} \right] = -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_1 + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 + m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\ - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 + m_4 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 + m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\ + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 \\ - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \quad (\text{A.5})$$

$$\text{para } C_{22}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{122} \\ C_{222} \\ C_{322} \\ C_{422} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{122} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} \right] = 0$$

$$C_{222} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} \right] = 0$$

$$C_{322} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{22}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{32}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \\ - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)$$

$$C_{422} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{22}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{24}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{42}}{\partial q_2} \right] = -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \quad (\text{A.6})$$

$$\text{para } C_{23}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{132} \\ C_{232} \\ C_{332} \\ C_{432} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{132} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{23}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)$$

$$C_{232} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{23}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)$$

$$C_{332} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)$$

$$C_{432} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{23}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{24}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{43}}{\partial q_2} \right] = -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{23}(q, \dot{q}) = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \quad (\text{A.7})$$

A.2. DESARROLLO DE LA MATRIZ DE CORIOLIS Y FUERZAS CENTRIFUGAS85

$$\text{para } C_{24}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{142} \\ C_{242} \\ C_{342} \\ C_{442} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{142} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{24}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{14}}{\partial q_2} \right] = -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{242} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{24}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{24}}{\partial q_2} \right] = -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{342} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{24}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{34}}{\partial q_2} \right] = -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{442} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{24}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{24}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{44}}{\partial q_2} \right] = -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{24}(q, \dot{q}) = -m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \quad (\text{A.8})$$

$$\text{para } C_{31}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{113} \\ C_{213} \\ C_{313} \\ C_{413} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$\begin{aligned} C_{113} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{31}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{31}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} \right] &= m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) \\ &+ m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\ &+ m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \end{aligned}$$

$$C_{213} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{31}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial q_3} \right] = m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) + m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \\ + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)$$

$$C_{313} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{31}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{31}}{\partial q_3} \right] = 0$$

$$C_{413} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{31}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{34}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{41}}{\partial q_3} \right] = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{31}(q, \dot{q}) = m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\ + m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 + m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

(A.9)

$$\text{para } C_{32}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{123} \\ C_{223} \\ C_{323} \\ C_{423} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{123} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{32}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{31}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_3} \right] = m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) + m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \\ + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)$$

$$C_{223} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_3} \right] = m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) + m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) \\ + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)$$

$$C_{323} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{32}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{32}}{\partial q_3} \right] = 0$$

$$C_{323} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{32}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{34}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{42}}{\partial q_3} \right] = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$\begin{aligned} C_{32}(q, \dot{q}) = & m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ & + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{para } C_{33}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{133} \\ C_{233} \\ C_{333} \\ C_{433} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{133} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{33}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_3} \right] = 0$$

$$C_{233} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{33}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} \right] = 0$$

$$C_{333} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} \right] = 0$$

$$C_{433} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{33}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{34}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{43}}{\partial q_3} \right] = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{33}(q, \dot{q}) = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) \dot{q}_4 \quad (\text{A.11})$$

$$\text{para } C_{34}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{143} \\ C_{243} \\ C_{343} \\ C_{443} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{143} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{34}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{31}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{14}}{\partial q_3} \right] = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{243} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{34}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{24}}{\partial q_3} \right] = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{343} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{34}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{34}}{\partial q_3} \right] = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{443} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{34}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{34}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{44}}{\partial q_3} \right] = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{34}(q, \dot{q}) = -m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \quad (\text{A.12})$$

$$\text{para } C_{41}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{114} \\ C_{214} \\ C_{314} \\ C_{414} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{114} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{41}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{41}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) \\ + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{214} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{41}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{42}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{314} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{41}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{43}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{31}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{414} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{41}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{44}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{41}}{\partial q_4} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} C_{41}(q, \dot{q}) = & m_4 l_1 l_{c_4} \sin(q_2 + q_3 + q_4) \dot{q}_1 + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ & + m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\text{para } C_{42}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{124} \\ C_{224} \\ C_{324} \\ C_{424} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{124} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{42}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{41}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{224} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{42}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{42}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{324} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{42}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{43}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{32}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{424} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{42}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{44}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{42}}{\partial q_4} \right] = 0$$

$$C_{42}(q, \dot{q}) = m_4 l_2 l_{c_4} \sin(q_3 + q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (\text{A.14})$$

$$\text{para } C_{43}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{134} \\ C_{234} \\ C_{334} \\ C_{434} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{134} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{43}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{41}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{234} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{43}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{42}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{334} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{43}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{43}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_4} \right] = m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)$$

$$C_{434} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{43}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{44}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{43}}{\partial q_4} \right] = 0$$

$$C_{43}(q, \dot{q}) = m_4 l_3 l_{c_4} \sin(q_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (\text{A.15})$$

$$\text{para } C_{44}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{144} \\ C_{244} \\ C_{344} \\ C_{444} \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{144} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{44}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{41}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{14}}{\partial q_4} \right] = 0$$

$$C_{244} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{44}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{42}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{24}}{\partial q_4} \right] = 0$$

$$C_{344} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{44}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{43}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{34}}{\partial q_4} \right] = 0$$

$$C_{444} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{44}}{\partial q_4} + \frac{\partial M_{44}}{\partial q_4} - \frac{\partial M_{44}}{\partial q_4} \right] = 0$$

$$C_{44}(q, \dot{q}) = 0 \tag{A.16}$$

A.3 Ley de Hooke para el sensor LVDT con resorte

En este apartado se muestra el método para obtener la fuerza con la que individuo desea desplazar al mecanismo y aumentar la fuerza a través de este. El sensor aplicado se muestra en la figura (A.1)

La ley de hooke para los resorte esta definida como:

$$F = -K_s(x_f - x_i) \tag{A.17}$$

Donde:

F es la fuerza del resorte.

K_s es el coeficiente del resorte.

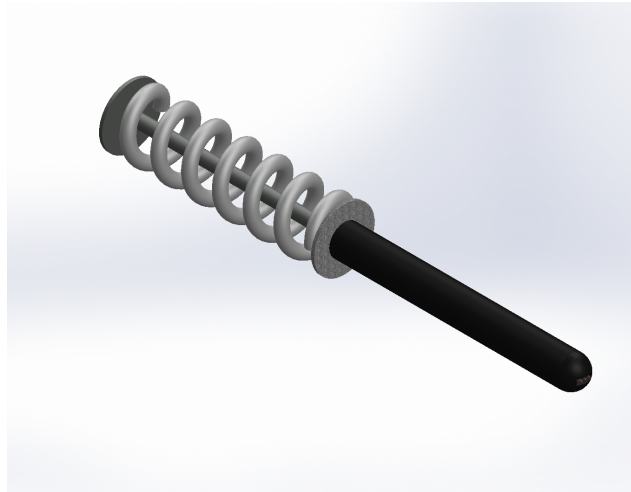


Figura A.1: Sensor de desplazamiento con resorte.

x_f es la elongación o desplazamiento después de aplicar una fuerza o un peso.

x_i es la posición inicial del resorte sin aun sufrir cambios físicos.

Tomando las mediciones necesarias para $x_f = 19.50mm$ y $x_i = 5.5mm$

$$\Rightarrow F = -K_s(19.50 - 5.5)$$

$$-F = K_s(0.014)$$

Suponiendo que la fuerza $-F$ puede ser calcula como $m * g$, entonces:

$$mg = -F$$

$$(0.589Kg)(9.81m/s^2) = 5.7780 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Por lo que la constante del resorte es:

$$\begin{aligned}
 5.7780 \frac{kg \cdot m}{s^2} &= K_s(0.014) \\
 K_s &= \frac{5.7780N}{0.014m} \\
 &= 412.7142 \frac{N}{m}
 \end{aligned}$$

El termino K_s se puede consultar en la tabla (3.1) y la fuerza con dicha constante es efectivamente F .

A.4 Calculo de Polinomios para el Modelo del PAM

De la reproducción de los experimentos con los músculos neumáticos en [4], se obtuvieron las tablas siguientes de datos (A.1, A.2, A.3) con sus gráficas respectivas, para poder realizar la caracterización para cada elemento que describe el comportamiento mecánico-neumático (3.2) que provee dicho actuador.

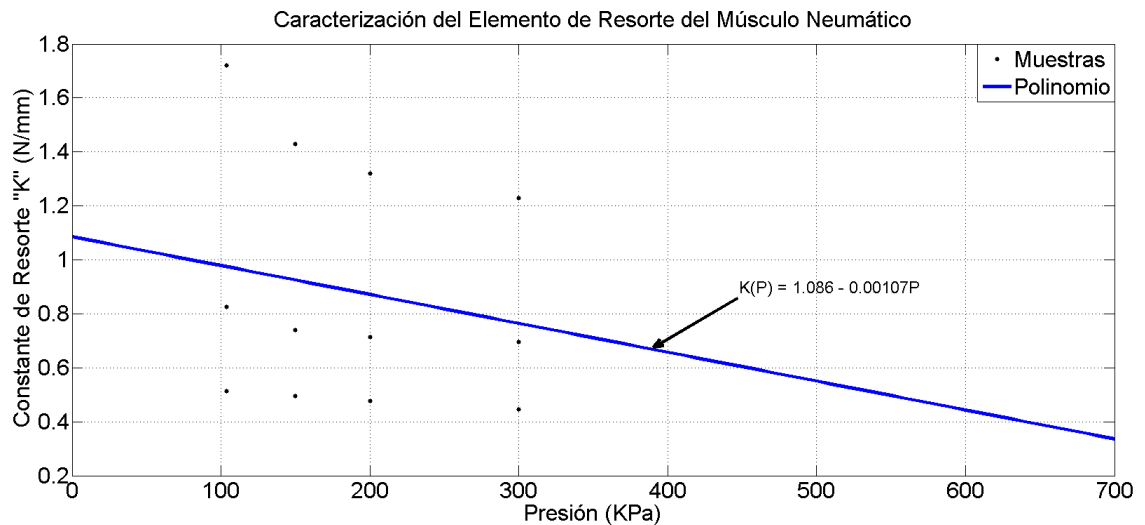


Figura A.2: Gráfica del polinomio para el elemento de resorte.

Tabla A.1: Caracterización del Resorte del PAM

$(F = -Kx \Rightarrow K = -F/x)$			
Presión (<i>Bar/KPa</i>)	Carga (<i>N</i> ó <i>Kg * m/s²</i>)	Diferencia de Elongación (<i>mm</i>)	Constante de resorte (<i>K</i>)
103.5 <i>Kpa</i> (1 <i>bar</i>) →	33.354	285 – 220 = 65	0.5131
150 <i>Kpa</i> (1.5 <i>bar</i>) →	33.354	285 – 217.5 = 67.5	0.4941
200 <i>Kpa</i> (2 <i>bar</i>) →	33.354	285 – 215 = 70	0.4764
300 <i>Kpa</i> (3 <i>bar</i>) →	33.354	285 – 210 = 75	0.4447
103.5 <i>Kpa</i> (1 <i>bar</i>) →	50	285 – 224.5 = 60.5	0.8264
150 <i>Kpa</i> (1.5 <i>bar</i>) →	50	285 – 217.5 = 67.5	0.7407
200 <i>Kpa</i> (2 <i>bar</i>) →	50	285 – 215 = 70	0.7142
300 <i>Kpa</i> (3 <i>bar</i>) →	50	285 – 213 = 72	0.6944
103.5 <i>Kpa</i> (1 <i>bar</i>) →	86	290 – 240 = 50	1.72
150 <i>Kpa</i> (1.5 <i>bar</i>) →	86	290 – 230 = 60	1.43
200 <i>Kpa</i> (2 <i>bar</i>) →	86	290 – 225 = 65	1.32
300 <i>Kpa</i> (3 <i>bar</i>) →	86	290 – 220 = 70	1.23
Polinomio	$K(P) = 1.086 - 0.00107P$		

Para el caso del elemento de amortiguamiento se tiene dos situaciones por el efecto de histeresis, cuando el musculo se expande y se contrae.

Tabla A.2: Caracterización del Amortiguador del PAM en Contracción

Presión	Coefficiente de Amortiguamiento
103.5 Kpa (1 bar) →	1.25
103.5 Kpa (1 bar) →	2.45
103.5 Kpa (1 bar) →	2.75
150 Kpa (1.5 bar) →	3.1
150 Kpa (1.5 bar) →	3.25
150 Kpa (1.5 bar) →	4.25
200 Kpa (2 bar) →	3.6
200 Kpa (2 bar) →	4
200 Kpa (2 bar) →	4.25
300 Kpa (3 bar) →	3.8
300 Kpa (3 bar) →	4.25
300 Kpa (3 bar) →	5.3
Polinomio	$B(P) = 1.7156 + 0.009826P$

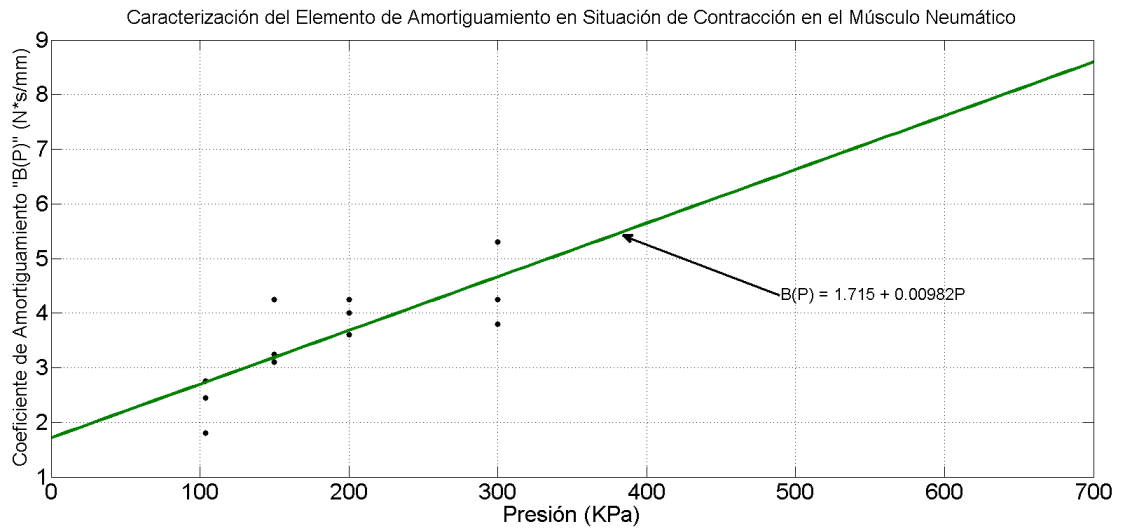


Figura A.3: Gráfica del polinomio para el elemento de amortiguamiento en acción de contracción.

Para cuando el Musculo se despresuriza se obtuvieron los siguientes datos.

Tabla A.3: Caracterización del Amortiguador del PAM en Relajación

Presión	Coefficiente de Amortiguamiento
103.5 Kpa (1 bar) →	0.7
150 Kpa (1.5 bar) →	0.4
200 Kpa (2 bar) →	0.25
300 Kpa (3 bar) →	0.1
Polinomio	$B(P) = 0.8999 - 0.002853P$

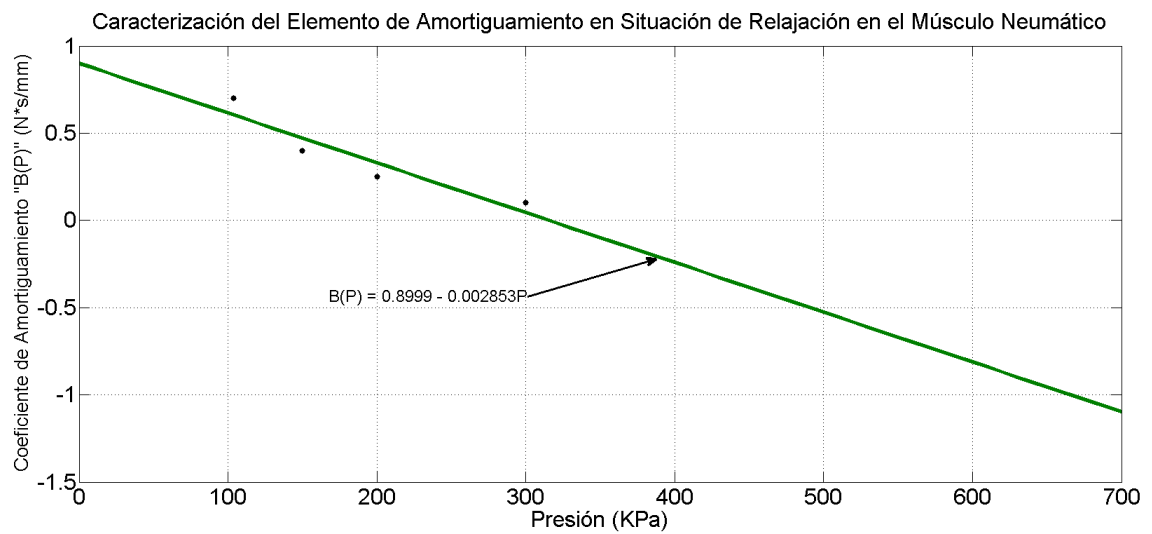


Figura A.4: Gráfica del polinomio para el elemento de amortiguamiento en acción de relajación.

Por ultimo, el elemento contráctil se tomo de la forma como se muestra en [4].

ANEXOS B

Publicaciones

B.1 Congresos Internacionales

I. Rosales, R. Lopez, H. Aguilar-Sierra, A. Osorio-Cordero, S. Salazar, R. Lozano, "Design and Modelling of a Backbone Pneumatic Exoskeleton", 18th International Conference on System Theory, Control and Computing, ICSTCC 2014.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. Metrailler C. Schmitt and A. Al-Khodairy. The motion maker: a rehabilitation system combining an orthosis with closed-loop electrical. In *in Proceedings of the 8th Vienna International Workshop on Functional Electrical Stimulation*, pages 117–120, 2004.
- [2] D.G. Caldwell and N. Tsagarakis. ”soft” grasping using a dextrous hand. *Industrial Robot: An International Journal*, pages 194–199, 2000.
- [3] The ShadowRobot Company. *Pneumatic Artificial Muscles*. www.shadowrobot.com, 2009.
- [4] C. A. Phillips D. B. Reynolds, D. W. Repperger and G. Bandry. Modeling the dynamic characteristics of pneumatic muscle. *Annals of Biomedical Engineering*, pages 310–317, 2003.
- [5] D Aoyagi D. J. Reinkensmeyer and J. L. Emken. Tool for understanding and optimizing robotic gait training. *Journal of Rehabilitation Research and Development*, pages 657–670, 2006.
- [6] J. Wynne D. Reinkensmeyer and S. Harkema. A robotic tool for studying locomotor adaptation and rehabilitation. *in Proceedings of the 2nd Joint Meeting of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society and the Biomedical Engineering Society*, pages 2013–2353, 2002.

- [7] Joao Luiz Almeida de Souza Ramos and Marco António Meggiolaro. Use of surface electromyography to control an active upper limb exoskeleton actuated by pneumatic artificial muscles and optimized with genetic algorithms. *22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM'13)*, 2013.
- [8] R Schreier G. Colombo, M. Joerg and V. Dietz. Treadmill training of paraplegic patient using a robotic orthosis. *Journal of Rehabilitation Research and Development*, pages 693–700, 2000.
- [9] A. Goffer. Gait-locomotor apparatus, 2006.
- [10] Jesus Ricardo López Gutiérrez. *Modelado y Control de un Exosqueleto*. PhD thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), Febrero 2014.
- [11] T. Sakurai K. Eguchi H. Kawamoto, T. Hayashi and Y. Sankai. Development of single leg version of hal for hemiplegia,. *in Proceedings of the 31st Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, (EMBC '09)*, pages 5038–5043, 2009.
- [12] Andrew Chu H. Kazerooni and Ryan Steger. That which does not stabilize, will only make us stronger. *The International Journal of Robotics Research*, pages 75–89, January 2007.
- [13] Alexander Hosovsky and Michal Havran. Dynamic modeling of one degree of freedom pneumatic muscle-based actuator for industrial applications. *Technical Gazette*, 3(19):673–681, 2012.
- [14] R. L. Hutson. Principles of biomechanics. *University of Rhode Island, CRC Press*, 2012.

- [15] J. S. Dai J. A. Saglia, N. G. Tsagarakis and D. G. Caldwell. A high-performance redundantly actuated parapara mechanism for ankle rehabilitation. *International Journal of Robotics Research*, pages 1216–1227, 2009.
- [16] E. Hekman R Ekkelenkamp E. Van Asseldonk J. F. Veneman, R. Kruidhof and H. Van Der Kooij. Design and evaluation of the lopes exoskeleton robot for interactive gait rehabilitation. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, pages 379–386, 2007.
- [17] P. K. Canavan J. Nikitczuk, B. Weinberg and C. Mavroidis. Active knee rehabilitation orthotic device with variable damping characteristics implemented via an electrorheological fluid. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, pages 952–960, 2010.
- [18] Abhijit Kadrolkar and Frank Sup. Classification of trunk motion for a backbone exoskeleton using inertial data and surface electromyography. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pages 3978–3983, 2013.
- [19] H. Kawamoto and Y. Sankai. Power assist system hal-3 for gait disorder person. In *in Proceedings of the 8th International Conference on Computers Helping People with Special Needs*, pages 196–203, 2002.
- [20] H Kazerooni and R. Steger. The berkeley lower extremity exoskeletons. *ASME Journal of Dynamics Systems, Measurements and Control*, pages 14–25, March 2006.
- [21] Kazuo Kiguchi and Yoshiaki Hayashi. An emg-based control for an upper-limb power- assist exoskeleton robot. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, pages 1064–1071, 2012.
- [22] Joel Budick Lance L. Cai, Andy J. Yongqiang Liang and V. Reggie Edgerton. Assist-as-needed training paradigms for rorobot rehabilitation of spinal cord in-

- juries. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3504–3511, Mayo 2006.
- [23] Y. Stauffer M. Bouri and C. Schmitt. The walktrainer: a robotic system for walking rehabilitation. In *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, (ROBIO '06)*, pages 1616–1621, 2006.
- [24] Fatih Ozkul and Duygun Erol Barkana. Upper-extremity rehabilitation robot rehabroby: Methodology, usability and validation. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, pages 1–13, 2013.
- [25] R. van Ham R Versluys P. Beyl, M. van Damme and B. Vanderborght. An exoskeleton for gait rehabilitation: prototype design and control principle. in *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '08)*, pages 2037–2042, 2008.
- [26] Victor Santibañez Rafael Kelly and Antonio Loría. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. 2005.
- [27] T Husak-Sotomayor S. Freivogel, J Mehrholz and D. Schmalohr. Gait training with the newly developed "lokoHELP" system is feasible for non-ambulatory patients after stroke, spinal cord and brain injury, a feasibility study. *Brain Injury*, pages 625–632, 2008.
- [28] S. K. Agrawal S. K. Banala and J. P. Scholz. Active leg exoskeleton (alex) for gait rehabilitation of motor-impaired patients. In *in Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics*, pages 401–407, 2007.
- [29] K. H. Seo and J. J. Lee. The development of two mobile gait rehabilitation system. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, pages 156–166, 2009.

- [30] Sheng Q. Xie Shahid Hussain and Prashant K. Jamwal. Control of a robotic orthosis for gait rehabilitation. *Robotics and Autonomous Systems*, pages 911–919, 2013.
- [31] M. Spong and M. Vidyasagar. *Robots Dynamics and Control*. 1989.
- [32] I. M. Staff. Las personas con discapacidad en México, una visión al 2010. *Instituto Nacional de Estadística y Geografía*, 2010.
- [33] D. Surdilovic and R. Bernhardt. String-man: a new wire robot for gait rehabilitation. In *in Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004.
- [34] Jeong Jung Kim Tae Yong Choi and Ju Jang Lee. An artificial pneumatic muscle control method on the limited space. *SICE-ICASE International Joint Conference*, pages 4738–4743, 2006.
- [35] A. Taherifar and M. R. Hadian. Lokoiran- a novel robot for rehabilitation of spinal cord injury and stroke patients. *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Mechatronics*, pages 218–223, February 2013.
- [36] B. Weinberg-C. Mavroidis Y. Ding, M. Sivak and M. K. Holden. Nuvabat: Northeastern university virtual ankle and the balance trainer. *in Proceedings of the IEEE Haptics Symposium, (HAPTICS'10)*, pages 509–514, 2010.