



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO
LABORATORIO UMI-LAFMIA 3157 CNRS**

**Diseño, Construcción, Modelado y Control de un
Exoesqueleto para la Amplificación de Fuerza en la
Articulación del Codo.**

T E S I S

Que presenta

Ing. Fermín Castillo Anaya

Para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN
AÉREOS Y SUBMARINOS**

Directores de Tesis:

Dr. Rogelio Lozano Leal

Dr. Antonio Osorio Cordero

Ciudad de México

NOVIEMBRE 2016.

Agradecimientos

A mi Madre que es el ser más maravilloso del mundo, gracias por el apoyo moral su cariño y comprensión que desde siempre me ha brindado, por guiarme en mí camino y estar junto a mí en los momento más difíciles. A mi Padre porque ha sido para mí un hombre grande y maravilloso y que siempre he admirado, gracias por guiar mi vida con energía y a mis hermanos como un testimonio de gratitud y correspondiendo al esfuerzo y apoyo recibido.

Agradezco al Dr. Rogelio Lozano Leal director de esta tesis de maestría, por su apoyo en investigación y publicación de artículos. Al Dr. Sergio Rosario Salazar Cruz, director académico del laboratorio UMI-LAFMIA por su gran apoyo que me ha brindado en el trayecto de estos dos años de maestría.

Con gran admiración y gratitud a mi asesor el Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez, que me compartió su gran conocimiento matemático en el are de Control Óptimo para poder aprenderlo y aplicarlo a este trabajo presentado. Con respeto y afecto a mi asesor el Dr. Jesús Ricardo López Gutiérrez, por transmitir su conocimiento de mecánica, diseño y control para el desarrollo de este exoesqueleto. A mi asesor el Dr. Antonio Osorio Cordero por compartir su gran conocimiento en el área de matemática, inglés y redacción de artículos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por brindarme el apoyo económico necesario para poder concluir mis estudios de maestría. Al Centro de Investigación y de Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional por su apoyo en los eventos de Ciencia y Tecnología que he participado.

Resumen

En esta tesis se presenta el diseño, construcción, instrumentación y control de un exoesqueleto para amplificar la fuerza del codo en el sistema muscular humano, sin perder el control natural del movimiento del cuerpo. El exoesqueleto estará en paralelo al brazo humano con uniones que correspondientes a las del hombro, brazo, antebrazo y mano. El exoesqueleto posee 1 grado de libertad y es sobre actuado; el modelo dinámico que describe el movimiento de flexión y extensión del exoesqueleto se encuentra expuesto en esta tesis.

El diseño mecánico de dicho exoesqueleto es adaptable para un rango de personas. Este diseño se realizó con la ayuda del software SolidWorks, el cual nos permite realizar cálculos de esfuerzos y simular la estructura del exoesqueleto bajo condiciones muy similares a las reales. El proceso de construcción de esta plataforma experimental se llevó a cabo en el taller ACAMSA, ubicado cerca del CINVESTAV.

La instrumentación del exoesqueleto consiste en dos tipos de actuadores, los cuales le permiten asistir a la articulación del codo. Esta contiene un Motor harmonic drive cuyo eje coincide con el centro de la articulación del codo y dos músculos neumáticos que están colocados de manera antagonista asistiendo al bíceps y tríceps del cuerpo humano. También cuenta con sensores para determinar la posición angular de la articulación del codo.

Para el control del exoesqueleto se propone un Ley de control PD y se presentan pruebas de experimentales y de simulación. También se presenta una Ley de control Sub-óptima la cual solo se presenta a nivel de simulación.

Abstract

This thesis presents the design, construction, instrumentation, and control of an exoskeleton to amplify the strength of elbow in the human muscular system, without losing the natural control of the movement of the body. The exoskeleton will be parallel to the human arm with joints that correspond to those of the shoulder, arm, forearm and hand. The exoskeleton has 1 degree of freedom and is about acted; the dynamic model describing the movement of flexion and extension of the exoskeleton is exposed in this thesis.

The mechanical design of this exoskeleton is adaptable to a range of people. This design was carried out with the help of the software SolidWorks, which allows us to perform calculations of efforts and simulate structured it's exoskeleton under conditions very similar to the real ones. The construction of this experimental platform process was held in the ACAMSA workshop, located near the CINVESTAV.

The instrumentation of the exoskeleton consists of two types of actuators, which allow you to attend to the elbow joint. This contains an engine harmonic drive whose axis coincides with the Centre of the joint of the elbow and two pneumatic muscles that are antagonistic way attending the bicep and tricep of the human body. Also has sensors to determine the angle of the elbow joint.

A PD control law is proposed for the control of the exoskeleton and presented experimental and simulation tests. It also presents a control law Sub-optima which occurs only at the level of simulation.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Índice de tablas	X
Índice de figuras	XI
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivo General	2
1.2.1. Objetivos Particulares	2
1.3. Estado del Arte	3
1.3.1. Exoesqueletos de amplificación de fuerza	4
1.3.2. Exoesqueletos de rehabilitación	7
2. ANATOMÍA Y BIOMECÁNICA EN LA ARTICULACIÓN DEL CODO	9
2.1. Anatomía del miembro superior	9
2.1.1. Huesos del miembro superior	9
2.1.2. Articulación del Codo	12
2.1.3. Músculos del Brazo	13
2.1.4. Músculos del Antebrazo	16
2.1.5. Limitaciones de la articulación del codo	17
2.2. Biomecánica en la articulación del codo	18

2.2.1.	Cinemática del codo	18
2.2.2.	Ángulo de carga	19
2.2.3.	Estabilidad del codo	20
2.2.4.	Fuerza en la articulación del codo	21
2.3.	Conclusión	22
3.	MODELADO MATEMÁTICO	23
3.1.	Modelo Dinámico del Exoesqueleto	23
3.2.	Modelo Dinámico en Tiempo Discreto	26
3.3.	Conclusión	28
4.	DISEÑO DEL EXOESQUELETO	29
4.1.	Diseño Mecánico del Exoesqueleto	29
4.2.	Construcción del Exoesqueleto	34
4.3.	Conclusión	35
5.	Instrumentación del Exoesqueleto	37
5.1.	Instrumentación del sistema Electrónico	37
5.2.	Instrumentación del sistema neumático	41
5.3.	Sistema Híbrido	45
5.4.	Conclusión	47
6.	Control	51
6.1.	Control Sub-óptimo	51
6.1.1.	Optimización de horizonte finito	51
6.1.2.	Ley de Control Sub-Óptima	54
6.1.3.	Simulación del control Sub-óptimo	64
6.2.	Control PD	69
6.2.1.	Simulación del Control PD	69
6.3.	Conclusión	73
7.	Resultados Experimentales	74
7.1.	Resultados Experimentales del Motor Harmonic Drive con Control PD . . .	74
7.2.	Resultados Experimentales del Control PD de los Músculos Neumáticos . .	77

7.3. Resultados Experimentales del Control PD en los Motores Harmonic Drive y Músculos Neumáticos	79
7.4. Conclusión	81
8. Conclusión y Trabajo Futuro	83
8.1. Conclusión	83
8.2. Trabajo Futuro	85
Bibliografía	87

Índice de tablas

2.1. Músculos del Brazo	13
5.1. Componentes Electrónicos.	39
5.2. Componentes Electrónicos.	40
5.3. Torque Del Humano.	46
5.4. Torque del Exoesqueleto.	46
6.1. Parámetros de simulación del control Sub-óptimo	64
6.2. Parámetros de simulación del control PD+G	69

Índice de figuras

1.1. Evolución de los exoesqueletos para la amplificación de fuerza.	3
1.2. Exoesqueleto de amplificación de fuerza con señales EMG.	4
1.3. Exoesqueleto de amplificación de fuerza diseñado para rescate.	5
1.4. Exoesqueleto con 6 GDL.	5
1.5. Plataforma experimental de 1 GDL utilizando músculos neumáticos. . . .	6
1.6. Exoesqueleto con músculos y motores eléctricos (Híbrido).	6
1.7. Exoesqueletos de rehabilitación de los miembros inferiores.	7
1.8. Exoesqueleto para la rehabilitación en la articulación del codo.	8
1.9. Exoesqueleto para la rehabilitación en la articulación del hombro.	8
2.1. Húmero visión anterior y visión posterior.	10
2.2. Cúbito y Radio (Visión anterior y posterior).	11
2.3. Movimientos del codo.	12
2.4. Músculos coracobraquial y Músculo braquial.	14
2.5. Músculo bíceps braquial y Músculo tríceps braquial.	15
2.6. Músculos de flexión del antebrazo.	17
2.7. Diagrama que muestra la pérdida dramática de zona de alcance con las contracturas de flexión del codo mayores de 30°.	18
2.8. El ángulo de carga del codo.	19
2.9. Medición del ángulo Euleriano.	20
2.10. Complejo del ligamento lateral interno que contiene los haces anteriores y posteriores además del componente transverso.	21
2.11. Zonas de contacto.	22
3.1. Movimiento del exoesqueleto.	23

3.2. Diagrama de cuerpo libre.	24
4.1. Diagrama de cuerpo libre de los músculos neumáticos.	29
4.2. Diseño exoesqueleto.	30
4.3. Músculos Neumáticos.	31
4.4. Motor Harmonic Drive.	31
4.5. Brazo y antebrazo del exoesqueleto. En color anaranjado (<i>A</i>) es la pieza del hombro y brazo. En color rojo y azul son las piezas que componen el antebrazo (<i>B</i>) y (<i>C</i>).	32
4.6. Articulación del codo en el exoesqueleto.	32
4.7. Diseño del exoesqueleto de miembros superiores.	33
4.8. Exoesqueleto de amplificación de fuerza en la articulación del codo.	33
4.9. Fabricación del exoesqueleto.	34
4.10. Construcción del exoesqueleto	34
4.11. Construcción del exoesqueleto de amplificación de fuerza.	35
4.12. Movimientos en los miembros superiores del exoesqueleto.	35
5.1. Encoder Incremental Yumo E6B2-CWZ3E.	37
5.2. Módulo Joystick 2 ejes XY.	38
5.3. Arduino Mega 2560.	38
5.4. Tarjeta de potencia.	39
5.5. Harmonic-Drive FHA-14C-100.	40
5.6. Válvulas Neumáticas.	41
5.7. Válvula estranguladora y músculo neumático.	41
5.8. Funcionamiento del músculo neumático.	42
5.9. Simulación del sistema neumático.	42
5.10. Sistema neumático de amplificación de fuerza.	43
5.11. Tanque TIPPMANN.	44
5.12. Sistema Híbrido de la articulación del codo en el exoesqueleto.	44
5.13. Validación del sistema Híbrido.	45
5.14. Amplificación de Fuerza.	47
5.15. Instrumentación del exoesqueleto de amplificación de fuerza	48
5.16. Exoesqueleto de amplificación de fuerza en la articulación del codo.	49
6.1. Simulación del control Sub-Óptimo	64

6.2. Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 30°	65
6.3. Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 40°	65
6.4. Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 50°	66
6.5. Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 60°	66
6.6. Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 70°	67
6.7. Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 80°	67
6.8. Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 90°	68
6.9. Señal de control Sub-óptimo.	68
6.10. Simulación del controlador PD	70
6.11. Posición y Velocidad a 20° en la articulación del codo del exoesqueleto. .	70
6.12. Posición y Velocidad a 50° en la articulación del codo del exoesqueleto. .	71
6.13. Posición y Velocidad a 60° en la articulación del codo del exoesqueleto. .	71
6.14. Posición y Velocidad a 80° en la articulación del codo del exoesqueleto. .	72
6.15. Posición y Velocidad a 90° en la articulación del codo del exoesqueleto. .	72
6.16. Señal de control PD.	73
7.1. Posición angular a 30° y 40° con el Motor Harmonic.	75
7.2. Posición angular a 50° y 60° con el Motor Harmonic.	75
7.3. Posición angular a 70° y 80° con el Motor Harmonic.	76
7.4. Posición angular a 90° con el Motor Harmonic.	76
7.5. Posición angular a 30° y 40° con los Músculos Neumáticos.	77
7.6. Posición angular a 60° y 70° con los Músculos Neumáticos.	78
7.7. Posición angular a 80° y 90° con los Músculos Neumáticos.	78
7.8. Posición angular a 30° y 40° en el sistema Híbrido.	80
7.9. Posición angular a 50° y 60° en el sistema Híbrido.	80
7.10. Posición angular a 70° y 80° en el sistema Híbrido.	81

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

En la actualidad la tecnología se ha visto inmersa en casi todos los campos de trabajo, como el militar, la salud, el ocio, entre otros, siendo la medicina uno de los más beneficiados, debido a que estas tendencias impulsan el desarrollo de herramientas especializadas que facilitan el trabajo del médico y la recuperación de los pacientes. Una de las herramientas que buscan mejorar la calidad de vida de las personas, son los exoesqueletos.

Un exoesqueleto es, básicamente, una estructura para ser usada sobre el cuerpo humano a manera de prenda de vestir, que sirve como apoyo y se usa para asistir los movimientos y/o aumentar las capacidades del cuerpo humano.

Los exoesqueletos pueden ser estructuras pasivas o activas, es decir que contengan o no actuadores para el movimiento y por lo tanto necesiten o no un sistema de control asociado al accionamiento de dichos actuadores.

El diseño de estos mecanismos, se concibe con la ayuda de distintas disciplinas como la medicina, la electrónica, la física y la mecánica. Dentro del campo de la electrónica, se reconocen a la instrumentación electrónica que se encarga de recolectar la información útil para ser enviada a un procesador central, el cual contiene las estrategias de control necesarias para tomar una decisión de acuerdo con la información recibida.

1.2. Objetivo General

- Diseñar, construir, instrumentar y controlar de un exoesqueleto para la amplificación de fuerza en la articulación del codo en el sistema muscular humano.

1.2.1. Objetivos Particulares

- Analizar la anatomía de la articulación del codo para el estudio de sus movimientos.
- Diseñar, construir y instrumentar el exoesqueleto.
- Realizar el modelado matemático del exoesqueleto.
- Desarrollar un controlador para regular la posición del exoesqueleto.
- Elaborar pruebas experimentales para verificar la eficiencia del controlador propuesto.
- Someter un artículo de divulgación científica.

1.3. Estado del Arte

Desde hace algunos años el ser humano ha intentado por medio de máquinas bastante robustas e ineficaces aumentar la fuerza de algunas extremidades del cuerpo humano. A medida que pasan los años y la tecnología avanza a un ritmo acelerado surgen los exoesqueletos que son una implementación mas compleja de la robótica que pretenden mejorar la calidad de vida en las personas desarrollando fuerza y resistencia en diferentes articulaciones del cuerpo humano.

En la figura 1.1, se observa a grandes rasgos esta evolución. Algunas aplicaciones de los exoesqueletos están enfocadas para equipos de rescate en desastres naturales. En el campo militar con el objetivo de brindar al soldado la capacidad de moverse mas rápido y poder llevar equipo mas pesado sin ningún problema. En el área medica con el objetivo de brindarle al paciente una mejor rehabilitación o reemplazar una extremidad de su cuerpo.



Figura 1.1: Evolución de los exoesqueletos para la amplificación de fuerza.

Estos aparatos deben cumplir con ciertas características para ser eficientes en la tarea que realizaran. Por lo tanto, el exoesqueleto no tiene que impedir el movimiento natural del ser humano, debe tener una interfaz eficiente para ser manipulado de manera que el ser humano que utilice sienta que es una verdadera extensión de su cuerpo, tener un sistema de energía duradera y principalmente que sea seguro y fácil de poner y quitar.

1.3.1. Exoesqueletos de amplificación de fuerza

Los exoesqueletos diseñados con objetivos militares, han aportado valiosa información acerca de la instrumentación y la construcción de los mismos. Dado que estas estructuras buscan aumentar las capacidades y habilidades del cuerpo humano, su diseño y construcción tiene muchas veces un alto grado de complejidad.

Uno de los exoesqueletos más recientes para la amplificación de fuerza es el que desarrollo Ramos, J. L. A. y Meggiolaro, M. A. en el año 2014, [1]. Donde se describe el diseño de un exoesqueleto que ayuda a amplificar la fuerza de los brazos por medio de músculos neumáticos ya que estos actuadores son muy ligeros y proporcionan una gran fuerza al momento que son actuados. Este exoesqueleto es controlado por señales electromiográficas (EMG) la cual es procesada y finta para realizar una aproximación del esfuerzo de torsión ejercido. Este aparato realiza la tarea de levantar 11 kg. En la figura 1.2, se observa en (a) el diseño en 3D y en (b) el exoesqueleto construido.

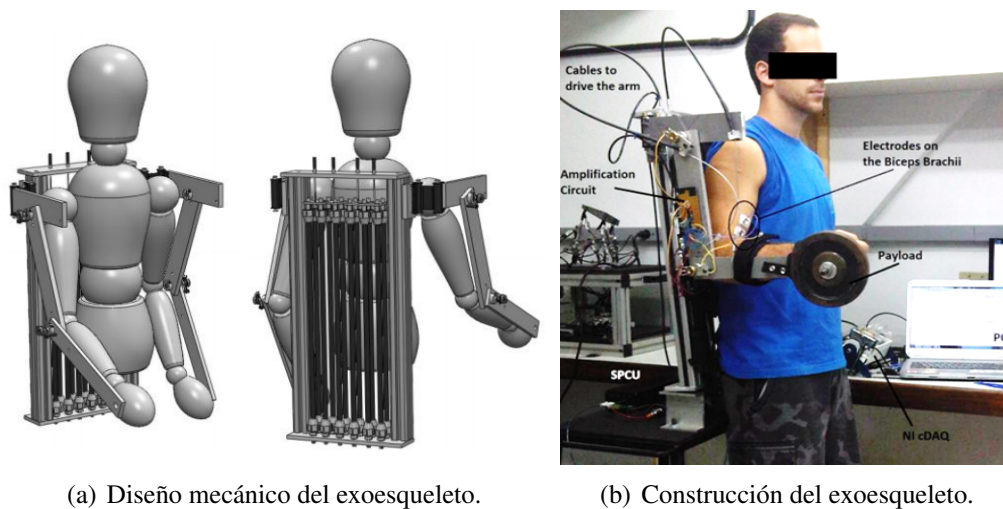


Figura 1.2: Exoesqueleto de amplificación de fuerza con señales EMG.

En el año de 2010 Tsuyoshi Kiyama de la universidad Osaka y su equipo de investigadores [2], desarrollaron un exoesqueleto con el propósito de que este aparato auxilie en desastres naturales, comprende tanto la parte superior como la inferior del cuerpo humano como se visualiza en la figura 1.3, su diseño tiene la capacidad de permitirle al operario realizar tareas de trabajo pesado levantando una carga máxima de 50Kg. Las dimensiones del exoesqueleto es de 1.6 m de alto, 1.0m de ancho y pesa 230kg.

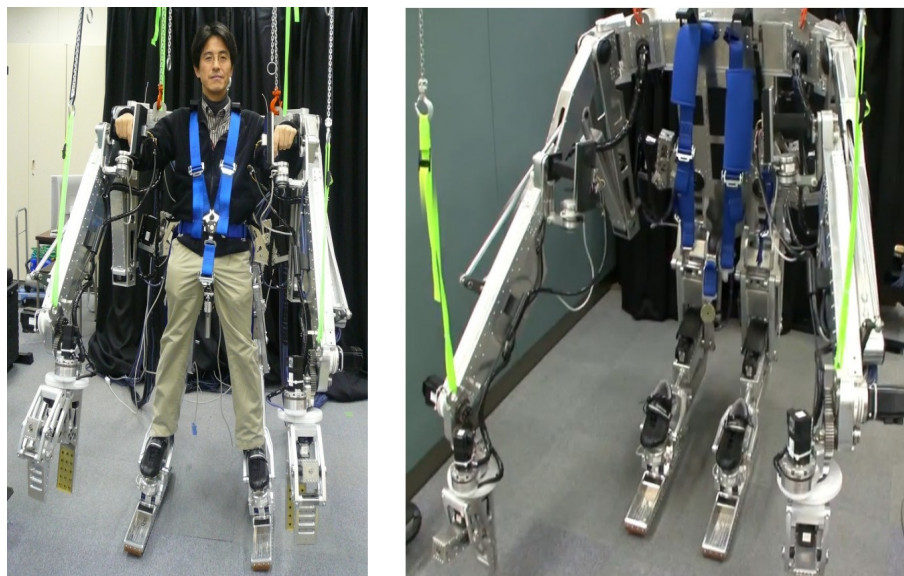


Figura 1.3: Exoesqueleto de amplificación de fuerza diseñado para rescate.

Otro proyecto que propone un sistema para aumentar la capacidad de la fuerza humana, es el que presentan Joel C. Perry, Jacob Rosen y Stephen Burns en agosto del 2007 [3], su diseño es bastante complejo comprender los movimientos del hombro, brazo, antebrazo y muñeca. En la figura 1.4, se observa el exoesqueleto de amplificación de fuerza el cual está equipado con una interfaz gráfica para la interacción hombre-máquina y es un dispositivo portable.

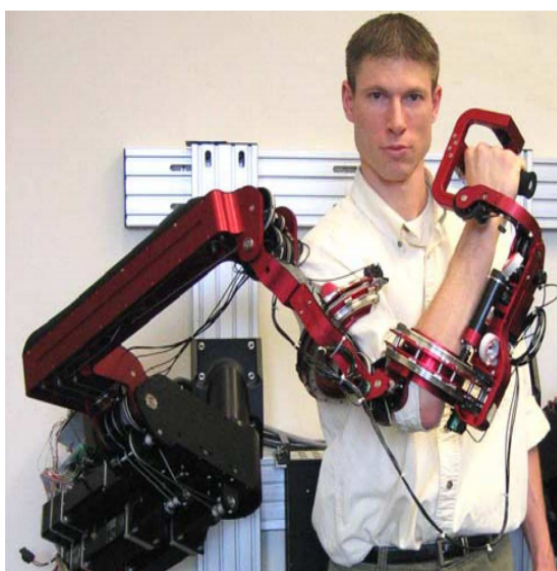


Figura 1.4: Exoesqueleto con 6 GDL.

Algunos proyectos mas sobre los exoesqueletos son los siguientes. En 1999 N.Tsagarakis y su equipo de investigadores [4], construyeron una plataforma experimental de un exoesqueleto de 7 grados de libertad en el emplean músculos neumáticos y los resultados que obtuvo fueron precisos en los movimiento de las extremidades superiores. La tecnología de los músculos neumáticos se ha estudiado demasiado. En el trabajo presentado en [5], proponen un modelo matemático de dicho actuado y en [6],[7] y [8], construyen una plataforma experimental en las cuales utilizan músculos neumáticos como principal actuador del sistema he implementando en cada uno de ellos una ley de control diferente en las figuras 1.5 y 1.6, se puede observar a grandes rasgos la aplicación de estos actuadores.

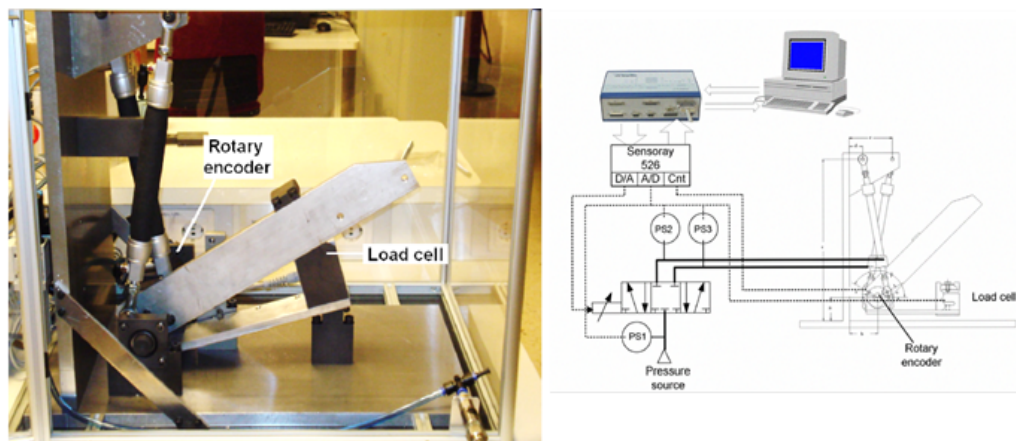


Figura 1.5: Plataforma experimental de 1 GDL utilizando músculos neumáticos.

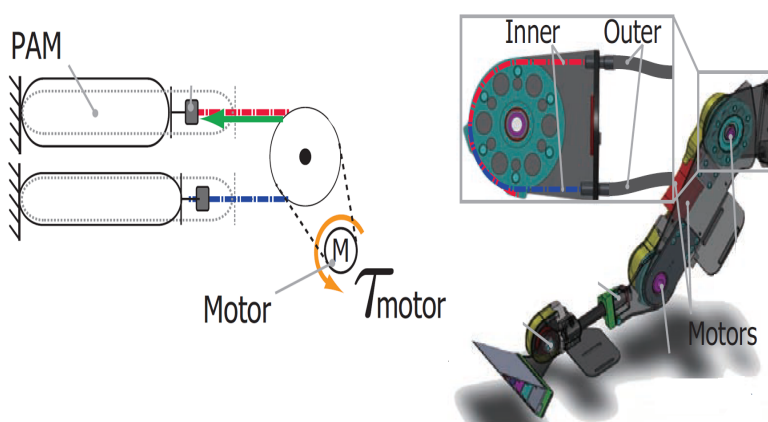


Figura 1.6: Exoesqueleto con músculos y motores eléctricos (Híbrido).

1.3.2. Exoesqueletos de rehabilitación

Los exoesqueletos en el área de la rehabilitación son importantes ya que ayudan a las personas que han sufrido algún accidente o que presentan alguna patología que afecte su movimiento. Estos exoesqueletos tienen restricciones de diseño ya que su objetivo principal es la rehabilitación de una extremidad del cuerpo humano. En la actualidad se han propuesto varios exoesqueletos de miembros inferiores del cuerpo. En los artículos [9], [10] y [11] se presentan dichos prototipos con diferentes leyes de control. En el CINVESTAV de México se han desarrollado dos prototipos para las extremidades inferiores uno de ellos fue desarrollado por el Dr. Ricardo López [12], este exoesqueleto ofrece una reducción en el esfuerzo de doblar o flexionar la rodilla y el segundo exoesqueleto lo desarrolla el M.C. Hipólito Aguilar en conjunto con el Dr. Ricardo López presentan en el artículo [13], un exoesqueleto híbrido ya que utiliza músculos neumáticos y motores eléctricos para realizar el movimiento de las extremidades inferiores. En la figura 1.7 se pueden observar estos dos últimos proyectos de rehabilitarlo en las extremidades inferiores.

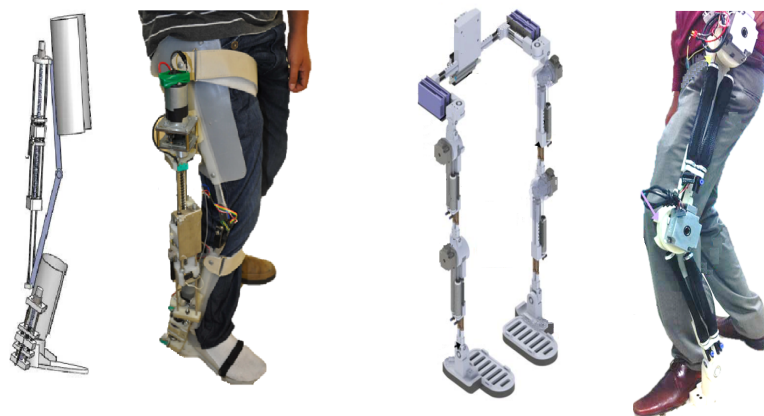


Figura 1.7: Exoesqueletos de rehabilitación de los miembros inferiores.

También existen exoesqueletos de rehabilitación de miembros superiores aunque estos algunas veces son muy pesados y voluminosos. En agosto de 2016 Yi Liu y su equipo de investigadores [14], proponen un exoesqueleto con el objetivo de que el paciente pueda rehabilitarse en casa, sin necesidad de asistir regularmente a centros de rehabilitación.

El sistema está compuesto por 4 grados de libertad y utiliza las señales EMG para verificar que el dispositivo de rehabilitación proporcione la asistencia necesaria para la recuperación del paciente. En la figura 1.8, se observa el prototipo de dicho exoesqueleto.



Figura 1.8: Exoesqueleto para la rehabilitación en la articulación del codo.

La gran mayoría de los exoesqueletos construidos, no toma en cuenta las señales electro-miográficas como parte de su sistema de control, bien sea porque no son necesarias o por la gran complejidad que implica el uso de las mismas.

Otros proyectos en los que se propone un sistema para la rehabilitación de los miembros superiores son los propuestos en [15] y [16]. Estos exoesqueletos utilizan como actuador principal músculos neumáticos para el movimiento de las articulaciones a rehabilitar, cabe mencionar que los proyectos propuestos en [17] y [18], también son para rehabilitar pero solo son actuados por motores y el exoesqueleto comprenden desde el hombro, brazo, antebrazo y muñeca. En la figura 1.9, se puede observar la plataforma del exoesqueletos de rehabilitación en miembros superiores propuesta por el investigador Carignan, C.

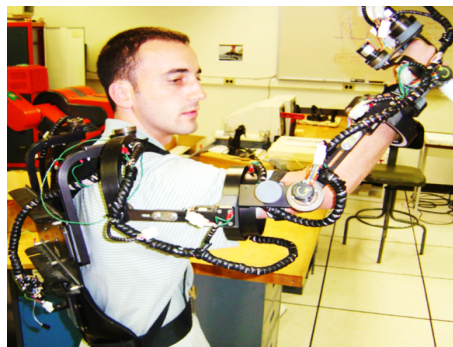


Figura 1.9: Exoesqueleto para la rehabilitación en la articulación del hombro.

El exoesqueleto presentado en esta tesis, consiste en la amplificación de la fuerza en la articulación del codo en ambos miembros superiores del cuerpo humano. El sistema para la amplificación es híbrido. Esta contiene un Motor harmonic drive cuyo eje coincide con el centro de la articulación del codo y dos músculos neumáticos que están colocados de manera antagonista asistiendo al bíceps y tríceps del cuerpo humano.

ANATOMÍA Y BIOMECÁNICA EN LA ARTICULACIÓN DEL CODO

2.1. Anatomía del miembro superior

Para el desarrollo del exoesqueleto en la presente tesis, es esencial investigar la anatomía en la articulación del codo, esto implica saber que huesos, músculos y tendones pertenecen a esta articulación. De esta manera el diseño propuesto del exoesqueleto para la amplificación de fuerza tendrá en consideración algunos parámetros de seguridad para no afectar físicamente a la persona que lo utilice.

2.1.1. Huesos del miembro superior

El miembro superior esta conformado por los siguientes huesos: Clavícula, Omóplato, Húmero, Cubito, Radio, Carpo, Metacarpo y falanges. Todos estos son huesos pares ya que tenemos dos miembros superiores en nuestro cuerpo (miembro superior derecho e izquierdo). Solamente se estudiarán 3 huesos que son el Húmero, Cubito y radio ya que son los participan en la articulación del codo.

- **HÚMERO:** Forma el esqueleto del brazo y es un hueso largo en el que se puede distinguir un cuerpo (diáfisis) y dos extremidades (epífisis) . En la figura 2.1, se observa el cuerpo del húmero que es casi rectilíneo, con un contorno circular por arriba mientras que por abajo es prismático triangular.

En su superficie se insertan numerosos músculos que producen algunos relieves reconocibles. La extremidad superior del húmero presenta tres eminencias. Una de ellas, la cabeza, es articular y las otras dos son de inserción muscular. La extremidad inferior del húmero es ancha y aplanada (paleta humeral) y forma con la diáfisis un ángulo de unos 45 grados abierto hacia delante que evita el choque de los extremos óseos durante la flexión del codo. [19]

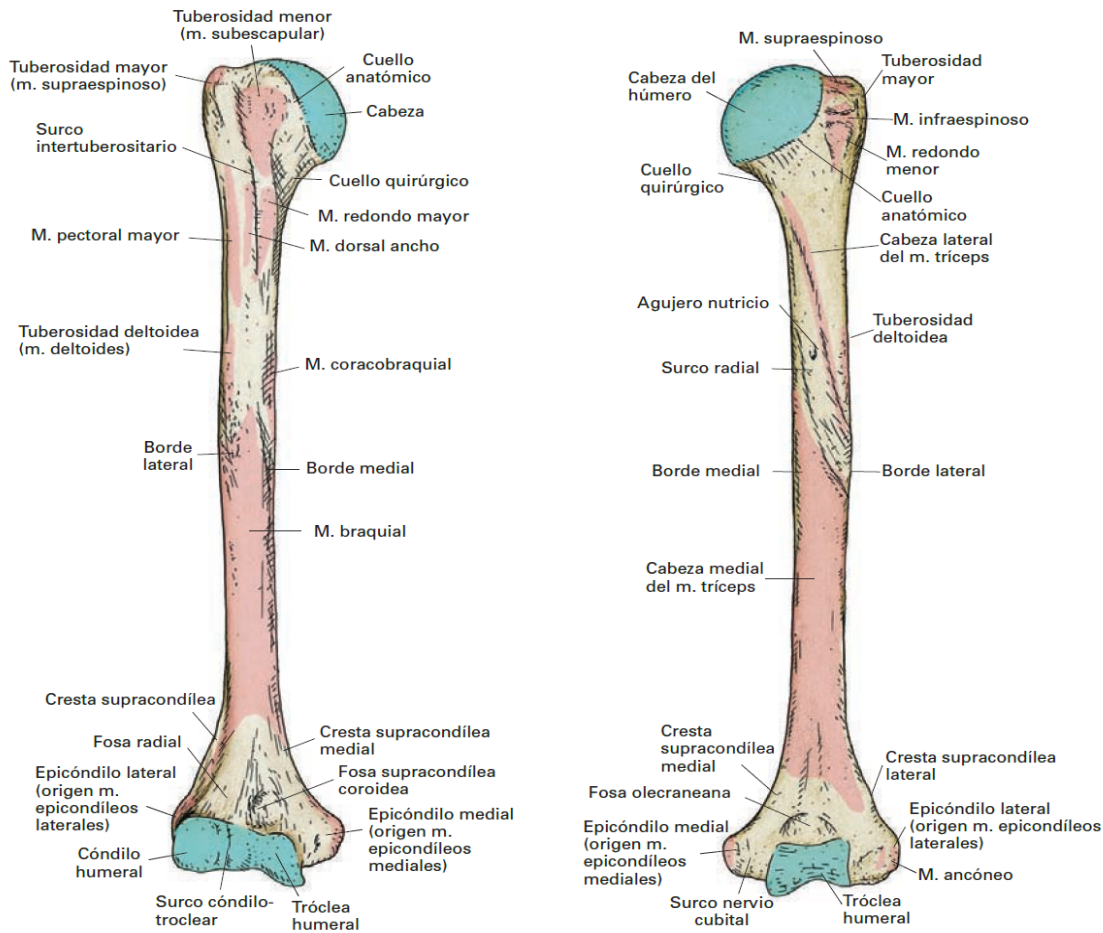


Figura 2.1: Húmero visión anterior y visión posterior.

- CÚBITO:** Constituye junto con el radio el esqueleto del antebrazo, ver figura 2.2. De los dos huesos, el cúbito es el interno. El cuerpo tiene una silueta ligeramente curvada en forma de S muy tendida y consta de tres caras (anterior, posterior y medial) con algunas rugosidades de inserciones musculares. La extremidad superior del cúbito posee dos grandes prominencias óseas, una vertical que continúa el cuerpo hacia arriba, el olécranon, y otra horizontal dirigida hacia delante, la apófisis coronoides. [19]

- RADIO:** El radio completa con el cúbito el esqueleto óseo del antebrazo. Al igual que el cúbito, posee un cuerpo y dos extremidades. El cuerpo es ligeramente cóncavo hacia dentro y se va haciendo más voluminoso de arriba abajo. En él se distinguen tres caras, anterior, posterior y lateral, con numerosas inserciones musculares, algunas de las cuales ocasionan relieves identificables. La extremidad superior del radio presenta dos accidentes anatómicos: la cabeza y el cuello. La cabeza del radio tiene el aspecto de un tambor de contorno ovalado y eje mayor transversal con una superficie superior ligeramente excavada, la fosita articular de la cabeza (cúpula del radio), para el cóndilo del húmero, y un contorno circular (circunferencia articular) que se articula con la escotadura radial del cúbito y con el ligamento anular. [19]

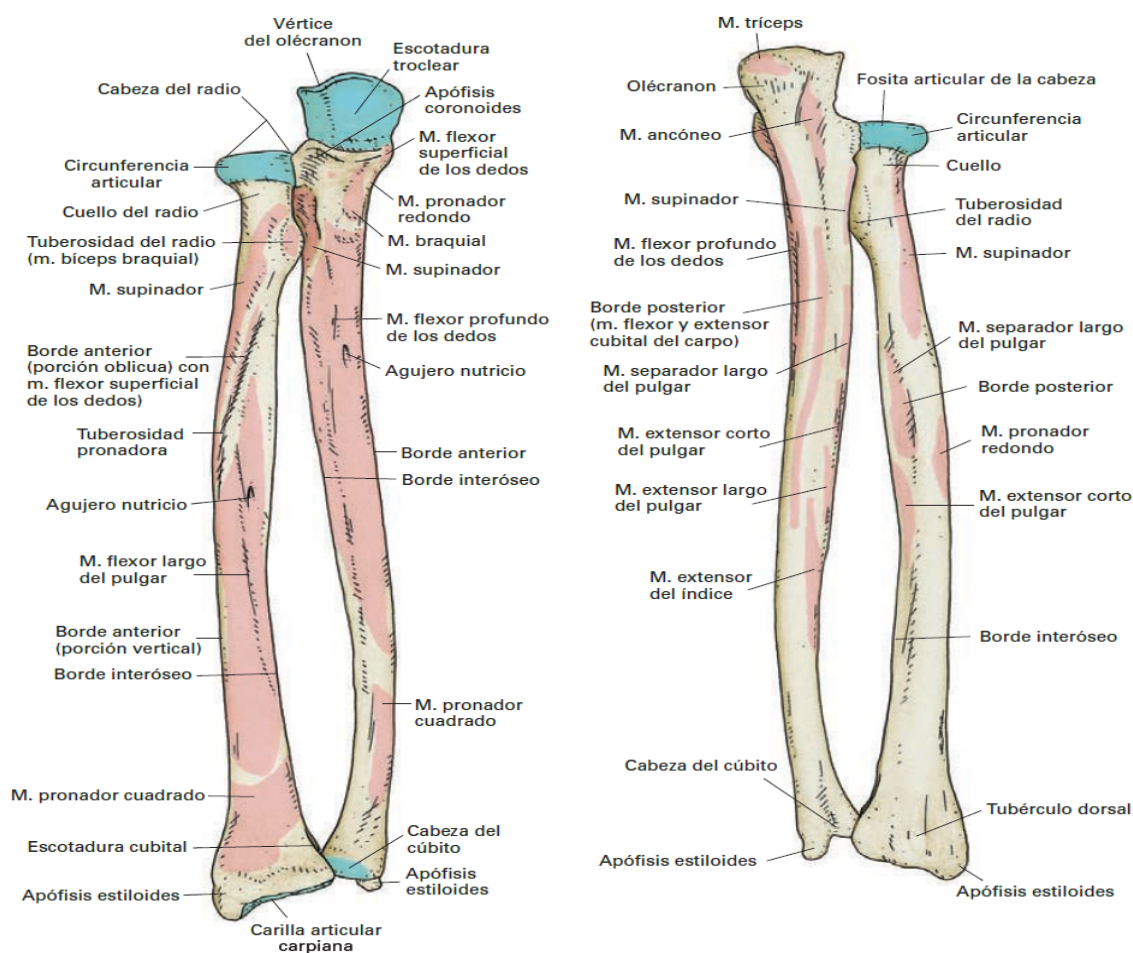


Figura 2.2: Cúbito y Radio (Visión anterior y posterior).

2.1.2. Articulación del Codo

Una articulación es un conjunto de elementos anatómicos los cuales sirven como medios de unión entre dos o mas huesos, mediante ligamentos, vainas sinoviales, cápsulas articulares, etc. Las articulaciones comunmente reciben el nombre de coyunturas, hay diferentes tipos de articulaciones y están estudiadas por la artrología. Los tipos de articulaciones se clasifican de acuerdo a su movilidad: las muy móviles son llamadas diartrosis; las semi-móviles son llamadas anfiartrosis; y las que no tienen movimiento son llamadas sinartrosis.

En la articulación del codo participan diferentes músculos, cada musculo realiza una función principal.

- Extensión: Músculo Tríceps Braquial
- Flexión: Músculo Bíceps Braquial, Braquial anterior y Braquioradial.
- Supinación: Músculo supinador corto.
- Pronación: Músculo pronador redondo y musculo pronador cuadrado.

Los movimientos de esta articulación del codo se observan en la figura 2.3

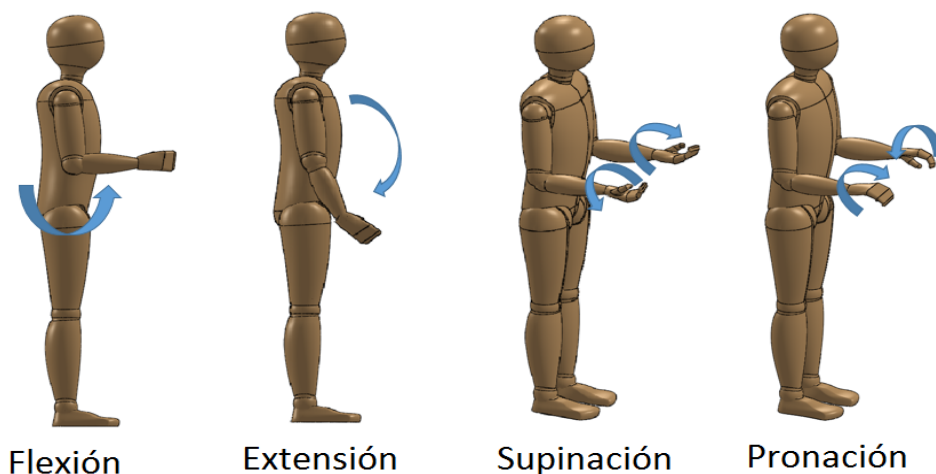


Figura 2.3: Movimientos del codo.

2.1.3. Músculos del Brazo

En el brazo, los músculos se disponen alrededor del húmero profundamente con respecto a la fascia del brazo. Esta fascia forma un manguito por debajo del tejido celular subcutáneo y emite dos tabiques hacia el húmero, los tabiques intermusculares medial y lateral. De modo que los músculos del brazo quedan divididos en dos compartimentos, el braquial anterior, ocupado por los músculos flexores y el braquial posterior, ocupado por los músculos extensores. Ver Tabla 2.1

Tabla 2.1: Músculos del Brazo

Compartimento Flexor	Compartimento Extensor
Músculos Bíceps Braquial,	Músculo Tríceps Braquial.
Músculo Braquial	
Músculo Coracobraquial	

Músculos Flexores

- **Músculo coracobraquial:** Es un músculo alargado y aplanado que contribuye a la formación de la pared externa de la axila. Se origina en el vértice de la apófisis coracoides por un tendón común de la porción corta del bíceps.

Es un músculo aproximador del brazo y puede intervenir, junto con el deltoides y el pectoral mayor, en la flexión del brazo y se inerva por el nervio musculocutáneo, que le aporta fibras. [19] Ver figura 2.4

- **Músculo braquial:** Es un músculo aplanado, ancho y grueso que se dispone sobre la superficie anterior de la diáfisis humeral cubierto por el bíceps braquial. Se origina en la superficie anterior de la mitad distal de la diáfisis humeral, tanto en la cara anterolateral como en la anteromedial, e incluso en los tabiques intermusculares de la fascia del brazo. Ver figura 2.4

Las fibras musculares convergen hacia abajo discurriendo por delante de la articulación del codo, a cuyo nivel se continúan con un potente tendón que se inserta en la vertiente inferior de la apófisis coronoides del cúbito. Este músculo es el motor primario de la flexión del codo. Dada su inserción en la parte proximal del cúbito, al contraerse en el curso de la flexión posee un potente efecto de balanceo del antebrazo sobre el brazo, pero ejerce muy poca fuerza a través de la articulación.

[19]

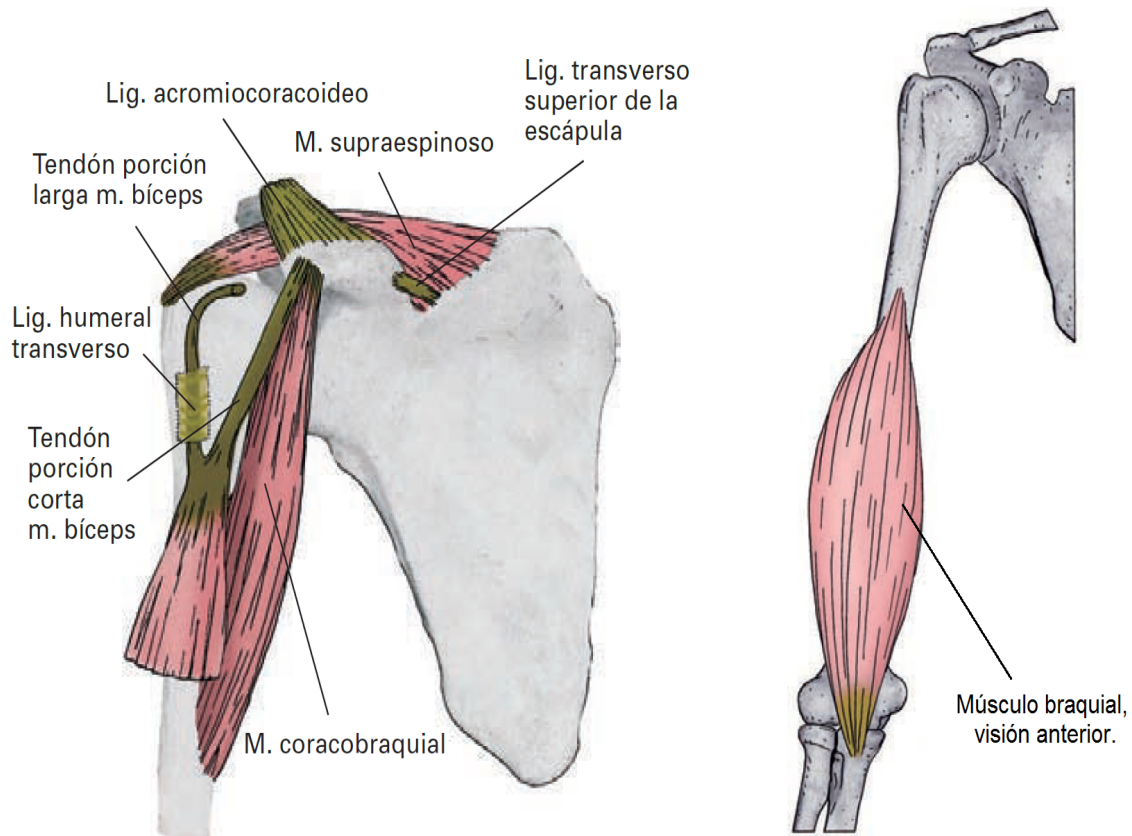


Figura 2.4: Músculos coracobraquial y Músculo braquial.

- Músculo bíceps braquial:** Es un músculo alargado y fusiforme que se dispone por delante del braquial y coracobraquial. En su parte superior está dividido en dos porciones, una interna y otra externa, que reciben el nombre de cabeza corta, la interna y cabeza larga.

La cabeza corta se origina en el vértice de la apófisis coracoides por un tendón común con el del coracobraquial. La cabeza larga arranca por un largo tendón cilíndrico que se inserta la tuberosidad supraglenoidea de la escápula y en la zona próxima del rodete glenoideo de la articulación escapulohumeral. Este musculo es un potente flexor y supinador del antebrazo. Su máxima potencia tanto en la flexión como en la supinación tiene lugar con el codo en flexión de 90°. En posición de máxima extensión se pierde la acción supinadora. [19] Ver figura 2.4

Músculos Extensores

- Músculo tríceps braquial:** Es un potente músculo que ocupa la celda posterior del brazo y que en su origen presenta tres cabezas independientes, la cabeza larga, la cabeza lateral origen de la cabeza medial y el canal radial del húmero. (vasto externo) y la cabeza medial (vasto interno), que se fusionan en un vientre único que termina sobre el cúbito. El tendón del tríceps presenta asociadas una serie de bolsas serosas periarticulares del codo. De ellas, la de mayor interés clínico es la bolsa subcutánea olecraneana, que se dispone en el tejido celular subcutáneo y facilita el deslizamiento del tendón. Ver figura 2.5

Es un potente extensor del codo que actúa cuando el movimiento se realiza de forma rápida o cuando no puede realizarse por la gravedad. Cuando la resistencia que tiene que vencer es pequeña, se activa la cabeza medial. En situaciones de mayor resistencia se incorpora la cabeza lateral y en las condiciones de máxima resistencia participa la cabeza larga. La cabeza larga es, además, estabilizadora de la articulación escapulohumeral y participa en la aproximación del brazo y en la flexión cuando se parte desde posiciones de extensión. [19]

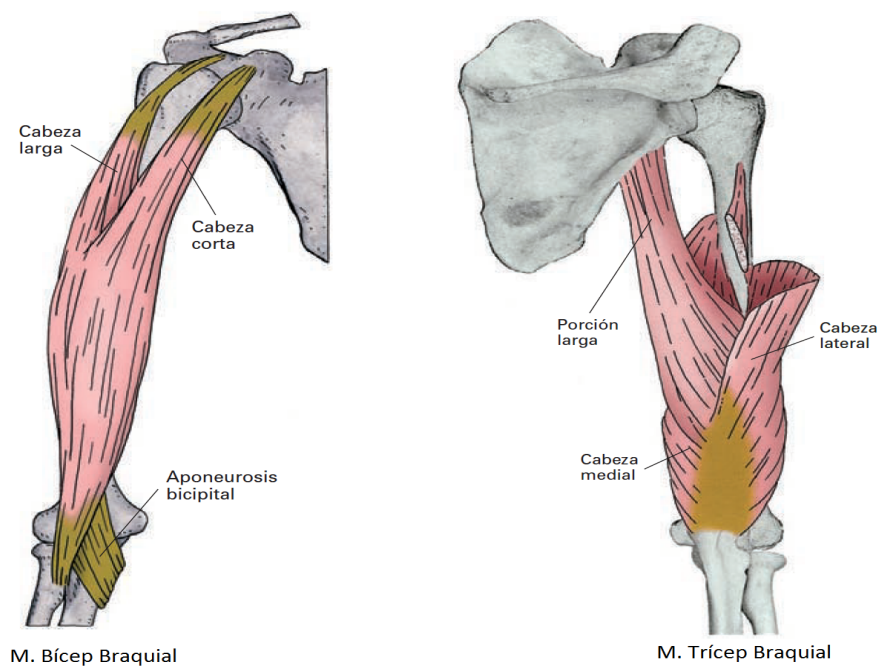


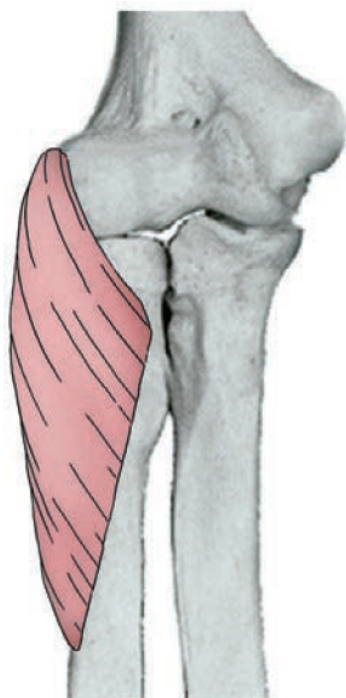
Figura 2.5: Músculo bíceps braquial y Músculo tríceps braquial.

2.1.4. Músculos del Antebrazo

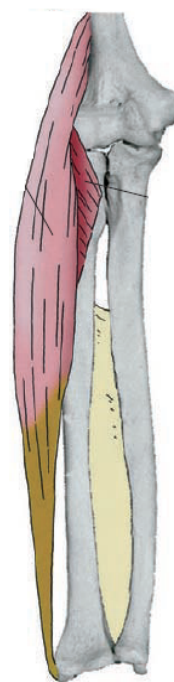
Los músculos en el antebrazo se dividen en dos compartimientos. El primer compartimiento se encuentran los músculos flexores los cuales son: Músculo pronador cuadrado, Músculo flexor profundo de los dedos, Músculo flexor largo del pulgar, Músculo flexor superficial de los dedos, Músculo pronador redondo, Flexor radial del carpo, Palmar largo, Flexor cubital del carpo, Músculo supinador, Músculo extensor radial largo del carpo y los mas importantes de este grupo son: Músculo extensor radial largo del carpo y Músculo braquiorradial, los cuales ayudan para flexionar la articulación del codo. El segundo compartimiento son los músculos de extensión, en este conjunto se encuentran los músculos Músculo separador largo del pulgar, Músculo extensor corto del pulgar, Músculo extensor largo del pulgar, Músculo extensor del índice, Músculo extensor de los dedos.

Los músculos mas importantes del antebrazo que ayudan a la flexión en la articulación del codo se encuentran en el compartimiento de músculos flexores los cuales son :

- **Músculo extensor radial corto del carpo:** Este músculo tiene el aspecto de una cinta muscular que se continúa en la zona media del antebrazo con un tendón estrecho y aplanado que se dirige al dorso del carpo. Se origina en el epicóndilo lateral y el ligamento colateral externo en un tendón común con el resto de extensores y cuando se contrae, interviene en la extensión de la muñeca. Cuando se contrae junto con el flexor radial del carpo interviene en la separación (inclinación lateral) de la mano. Además, puede ayudar a flexionar el codo. [19] Ver figura 2.6
- **Músculo braquiorradial:** Es el más superficial de los músculos laterales. En la región anterior del codo forma un prominente relieve lateral que delimita con el relieve del pronador. El músculo se inserta en la parte inferior del borde externo del húmero (cresta supracondílea) y desciende superficial con respecto a los músculos extensores radiales. Es un músculo flexor del brazo. Actúa, además, como estabilizador (shunt) de la articulación del codo evitando el efecto desestabilizador que desarrolla el músculo braquial cuando se contrae de forma rápida (véase Músculo braquial). [19] Ver figura 2.6



Músculo extensor radial
corto del carpo



Músculo braquiorradial

Figura 2.6: Músculos de flexión del antebrazo.

Movimiento de Supinación del antebrazo

El músculo supinador corto, es un músculo ancho, dispuesto alrededor y sobre la cara lateral del codo y la parte superior del antebrazo. Se extiende desde el epicóndilo lateral y el cúbito hasta el radio. La función del músculo es realizar el movimiento del antebrazo que hace girar la mano de dentro a fuera y poner la palma de la mano hacia arriba o adelante.

2.1.5. Limitaciones de la articulación del codo

Limitación de flexión en el movimiento del codo es por el contacto de las masas musculares de la región anterior del brazo y del antebrazo. Dicha limitación dependerá del volumen de la masa muscular de cada individuo, la flexión será menor cuanto mayor sea esta. Normalmente no suele pasar de los 145°.

2.2. Biomecánica en la articulación del codo

El codo es una articulación compleja que funciona como un fulcro para el sistema de palanca del antebrazo responsable de posicionar la mano en el espacio. El complejo de la articulación del codo permite dos tipos de movimiento: la flexión-extensión y la pronación-supinación. Las articulaciones humerocubital y humerorradial permiten la flexión y extensión del codo y se clasifican como articulaciones en bisagra. La articulación radiocubital proximal permite la pronación y supinación del antebrazo y se clasifica como una articulación trocoide. El complejo de la articulación del codo, si se considera en su totalidad, es por lo tanto una articulación trocleoginglimoide. [20]

2.2.1. Cinemática del codo

La flexión y extensión del codo tienen lugar en la articulación humerocubital y humerorradial. El rango normal de flexión-extensión es de 0 a 146° con un rango funcional de 30 a 130°. El rango normal de pronación-supinación del antebrazo da una media de 71° en pronación y de 81° en supinación. [21]

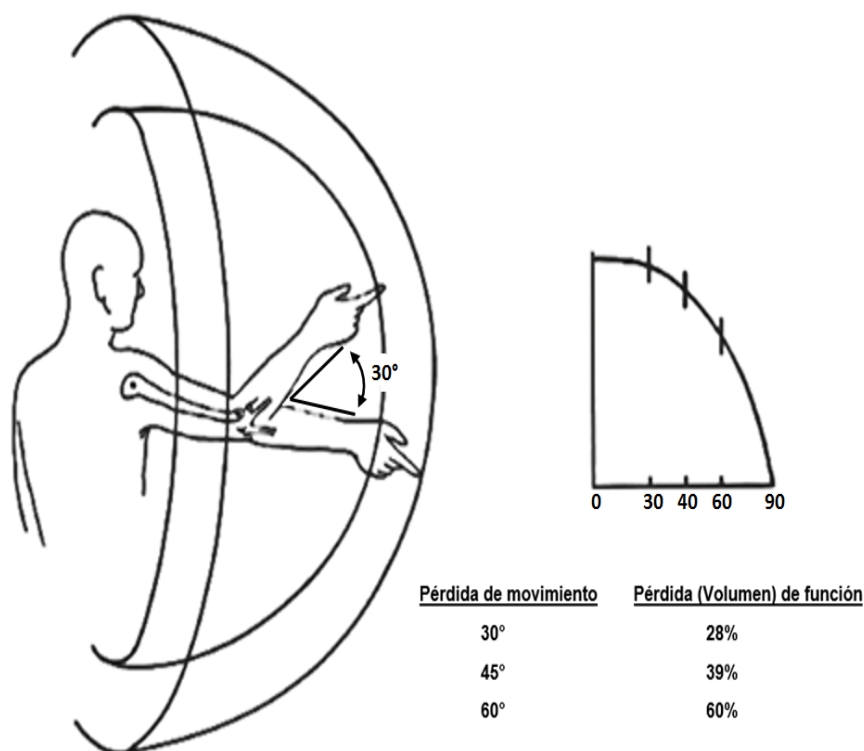


Figura 2.7: Diagrama que muestra la pérdida dramática de zona de alcance con las contracturas de flexión del codo mayores de 30°.

La mayoría de las actividades se llevan a cabo entre el rango funcional de 50° de pronación a 50° de supinación. Clínicamente, los pacientes pueden tolerar contracturas de flexión de hasta 30°, lo que coincide con los valores del rango funcional descrito anteriormente. Las contracturas en flexión mayores de 30° se asocian a molestias de significativa pérdida de movimiento. Hay una considerable y rápida pérdida de la habilidad para alcanzar algo en el espacio con contracturas de más de 30° de flexión como se observa en la figura 2.7. [20]

2.2.2. Ángulo de carga

La posición de valgo del codo en extensión completa se denomina comúnmente como el ángulo de carga, ver figura 2.8. El ángulo de carga se define como el ángulo entre el eje anatómico del cúbito y el húmero medido en el plano anteroposterior en extensión o simplemente la orientación del cúbito con respecto al húmero. El ángulo de carga es menor en los niños que en los adultos y mayor en las mujeres que en los hombres. [20] y [22].

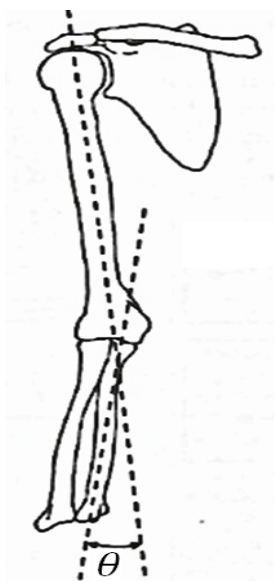


Figura 2.8: El ángulo de carga del codo.

El ángulo de carga del codo, formado por la intersección del eje longitudinal del húmero y del cúbito con el codo en extensión completa y el antebrazo supinador. La angulación en valgo normalmente oscila entre 10 y 15 grados.

Si el ángulo de carga se define como el ángulo de abducción-aducción del cúbito respecto del húmero usando los ángulos Eulerianos para describir el movimiento del brazo, el ángulo de carga disminuye con la flexión articular cambiando a varo en flexión extrema. En la figura 2.9, se puede observar los ángulos Eulerianos. [20]

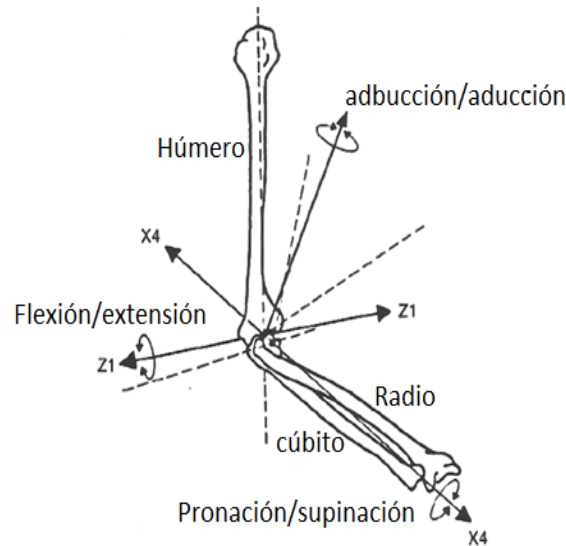


Figura 2.9: Medición del ángulo Euleriano.

Medición del ángulo Euleriano del movimiento cubital en relación al húmero. La abducción-aducción rota alrededor de un eje ortogonal respecto a los ejes Z y X4; la flexión-extensión rota alrededor del eje Z1, la rotación axial del antebrazo se produce alrededor del eje X4.

2.2.3. Estabilidad del codo

Las fuerzas del valgo en el codo son resistidas principalmente por la banda anterior del complejo del ligamento lateral interno (LLI). El complejo del LLI se puede observar en la figura 2.10, este comprende un haz anterior, un haz posterior y el ligamento transversal. [20]

El haz anterior se tensa en extensión mientras que el haz posterior lo hace en flexión. Esto se produce porque el complejo del LLI no se origina en el centro del eje de rotación del codo. La banda anterior del complejo del LLI se origina en la superficie inferior de la epitroclea en la parte distal del húmero y se inserta a lo largo del borde medial del olecranon. Con una banda anterior intacta, la cabeza radial no ofrece resistencia adicional significativa a la sollicitación del valgo.

Sin embargo, con una banda anterior seccionada, la cabeza radial se convierte en el estabilizador primario para la sollicitación en valgo, potenciando su funcionamiento como estabilizador secundario en los codos con un LLI intacto. [23]

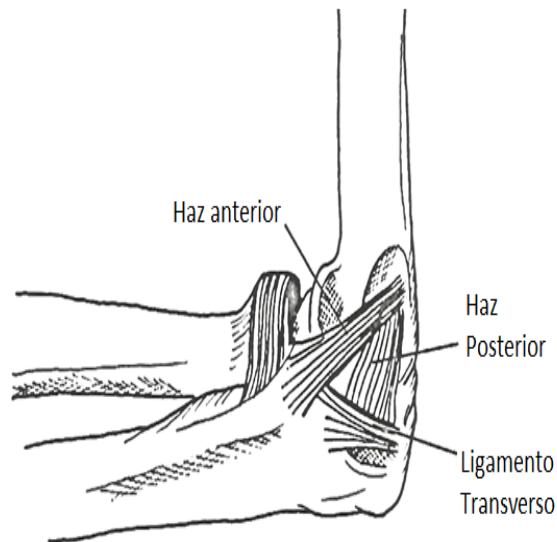


Figura 2.10: Complejo del ligamento lateral interno que contiene los haces anteriores y posteriores además del componente transverso.

En extensión, la resistencia a la sollicitación de valgo es compartida en partes iguales por el complejo LLI, la cápsula y la función articular. En flexión, el primer estabilizador para sollicitar el valgo es el complejo LLI. [20]

2.2.4. Fuerza en la articulación del codo

La fuerza generada en la articulación del codo es máxima cuando se inicia la flexión. El aumento de la fuerza de flexión y la disminución de las fuerzas en el codo se observan con el codo flexionado a 90°. Esto es debido al aumento de la ventaja mecánica de los flexores del codo secundario al alargamiento del brazo del momento de flexión. De forma curiosa, la dirección del vector de la fuerza resultante en el codo cambia más de 180° a través del rango de flexión-extensión. [24]

Durante la flexión del codo, el cúbito se traslada posteriormente a medida que se produce el contacto con la coronoides. Se ha demostrado que la fuerza generada en el codo es hasta tres veces el peso corporal con ciertas actividades. [20]

Fuerza sobre la superficie articular

Las áreas de contacto del codo se producen en cuatro localizaciones: dos se localizan en el olecranon y dos sobre la coronoides, como se puede observar en la figura 2.11. [25] El área de contacto humerocubital aumenta de la extensión a la flexión del codo. La cabeza radial también aumenta su área de contacto con el cóndilo de la extensión a la flexión. Durante las cargas de valgo-varo sobre el codo demostraron que el punto de pivote para el varo-valgo se localiza en el punto medio de la cara lateral de la tróclea. [26] [20]

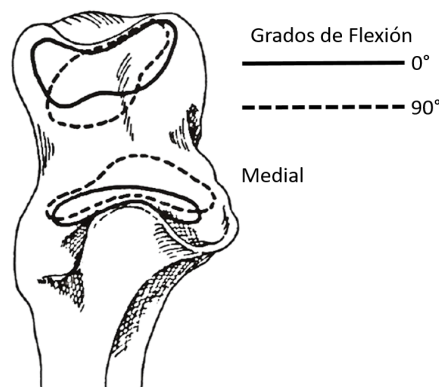


Figura 2.11: Zonas de contacto.

Zonas de contacto en la cavidad sigmoidea durante la flexión del codo demostrando que las zonas de contacto se mueven hacia el centro de la cavidad sigmoidea durante la flexión del codo.

2.3. Conclusión

La investigación de anatomía en los miembros superiores del cuerpo humano, nos ha brindado la información necesaria sobre la articulación del codo. La cual indica que huesos, músculos y tendones comprenden esta articulación, y la Biomecánica para comprender la cinemática, ángulo de carga, la estabilidad y fuerza en dicha articulación. Esta información es esencial para realizar un diseño en CAD, el cual amplifique la fuerza en los movimientos de extensión y flexión del codo. Sin embargo el diseño no solo deberá amplificar la fuerza sino también mantener al usuario sin lesión alguna.

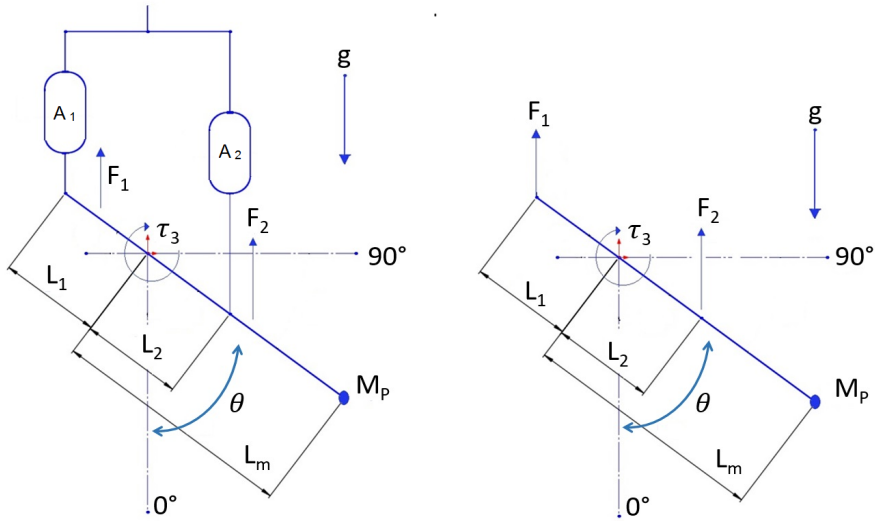


Figura 3.2: Diagrama de cuerpo libre.

Donde:

g =Gravedad.

M_P = Masa de carga.

τ_3 =Torque del motor.

F_1 =Fuerza del músculo (A_1).

F_2 =Fuerza del músculo (A_2).

L_1 =Distancia del pivote al músculo (A_1).

L_2 =Distancia del pivote al músculo (A_2).

L_m =Distancia del pivote al punto de carga.

Comenzando el modelo dinámico por Newton-Euler la descomposición de fuerzas es la siguiente.

$$\begin{aligned}
 \tau = \vec{F} \times \vec{r} = & \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \|\vec{F}_1\| & 0 \\ -L_1 \sin \theta & L_1 \cos \theta & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \|\vec{F}_2\| & 0 \\ L_2 \sin \theta & -L_2 \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\
 & + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -(M_p * g) & 0 \\ L_m \sin \theta & -L_m \cos \theta & 0 \end{vmatrix} + \tau_3 - b \dot{\theta}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Resolviendo el producto cruz de la ecuación (3.1) se obtiene:

$$\tau = (||\vec{F}_1||L_1\text{sen}\theta - ||\vec{F}_2||L_2\text{sen}\theta + M_p g L_m \text{sen}\theta) + \tau_3 - b\dot{\theta} \quad (3.2)$$

Para el movimiento antagonista se utilizó la función escalón de Heaviside, la cual es una función escalón unitario, donde ω toma valores de 1 y 0, dependiendo del sentido del giro de la articulación.

Por lo tanto:

$$||\vec{F}_1|| = F_1\omega(\theta - \theta_0) \quad (3.3)$$

$$||\vec{F}_2|| = F_2\omega(\theta_0 - \theta) \quad (3.4)$$

Considerando la inercia y masa del brazo del exoesqueleto obtenemos la siguiente ecuación:

$$\tau = I\ddot{\theta} \quad (3.5)$$

Por el teorema de los ejes paralelos [27]. Tenemos que el momento de inercia es:

$$I = I_{cm} + mr^2 \quad (3.6)$$

donde:

I_{cm} = Inercia en el centro de masa.

m = Masa de la barra del brazo.

r = Distancia del pivote al centro de masa.

Sustituyendo las ecuaciones (3.5) y (3.6) en (3.2) obtenemos:

$$[I_{cm} + mr^2]\ddot{\theta} = (||\vec{F}_1||L_1\text{sen}\theta - ||\vec{F}_2||L_2\text{sen}\theta + M_p g L_m \text{sen}\theta) + \tau_3 - b\dot{\theta} \quad (3.7)$$

Sustituyendo $||\vec{F}_1||$ y $||\vec{F}_2||$ de (3.3) y (3.4) en la ecuación (3.7) y despejando $\ddot{\theta}$ obtenemos:

$$\ddot{\theta} = \frac{F_1\omega(\theta - \theta_0)L_1\text{sen}\theta - F_2\omega(\theta_0 - \theta)L_2\text{sen}\theta + M_p g L_m \text{sen}\theta}{I_{cm} + mr^2} + \frac{\tau_3}{I_{cm} + mr^2} - \frac{b\dot{\theta}}{I_{cm} + mr^2} \quad (3.8)$$

Por lo tanto:

$$\ddot{\theta} = \frac{(F_1\omega(\theta - \theta_0)L_1 - F_2\omega(\theta_0 - \theta)L_2)\text{sen}\theta + M_p g L_m \text{sen}\theta + \tau_3}{I_{cm} + mr^2} - \frac{b\dot{\theta}}{I_{cm} + mr^2} \quad (3.9)$$

Se define β' como:

$$\beta' = \frac{b}{I_{cm} + mr^2} \quad (3.10)$$

y τ_t como:

$$\tau_t = \frac{(F_1\omega(\theta - \theta_0)L_1 - F_2\omega(\theta_0 - \theta)L_2)\text{sen}\theta + \tau_3}{I_{cm} + mr^2} \quad (3.11)$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\ddot{\theta} = \tau_t + \frac{M_p g L_m \text{sen}\theta}{I_{cm} + mr^2} - \beta'\dot{\theta} \quad (3.12)$$

Llevando el modelo obtenido a su representación en espacio de estados donde las variables son la posición θ_1 y la velocidad θ_2 de la articulación del codo. Se obtiene el siguiente modelo dinámico.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_t + \frac{M_p g L_m \text{sen}\theta_1}{I_{cm} + mr^2} - \beta'\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.2. Modelo Dinámico en Tiempo Discreto

Para obtener el control Sub-óptimo discreto, considere el siguiente sistema discreto no lineal a fin para la discretización la ecuación (3.13) . [28]

$$\bar{x}(k+1) = f_0(\bar{x}(k)) + f_1(\bar{x}(k))u(k) \quad (3.14)$$

donde $k = 0, 1, \dots, N$, $\bar{x}(k), f_0(\bar{x}(k)) \in R^2$, $f_1(\bar{x}(k)) \in R^{n \times m}$ y $u(k) \in R^m$, con el tiempo de muestreo t_s .

Entonces, sabemos que la aproximación de Euler esta definida como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{t_s} \begin{bmatrix} \theta_1(k+1) - \theta_1(k) \\ \theta_2(k+1) - \theta_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde t_s tiempo de muestreo. Sustituyendo (3.15) en (3.13) se obtiene:

$$\frac{1}{t_s} \begin{bmatrix} \theta_1(k+1) - \theta_1(k) \\ \theta_2(k+1) - \theta_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2(k) \\ \tau_t + \frac{M_p g L_m \text{sen} \theta_1(k)}{I_{cm} + m r^2} - \beta' \theta_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Separando el término del lado izquierdo y multiplicando el tiempo de muestreo del lado derecho obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \theta_1(k+1) \\ \theta_2(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_s)(\theta_2(k)) \\ (t_s)(\tau_t) + \frac{t_s M_p g L_m \text{sen} \theta_1(k)}{I_{cm} + m r^2} - t_s \beta' \theta_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Posteriormente, despejando los términos $\theta_1(k)$ y $\theta_2(k)$ obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \theta_1(k+1) \\ \theta_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_s)\theta_2(k) + \theta_1(k) \\ (t_s)(\tau_t) + \frac{t_s M_p g L_m \text{sen} \theta_1(k)}{I_{cm} + m r^2} - (t_s)\beta' \theta_2(k) + \theta_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Por lo tanto $f_0(\bar{\theta}(k))$ es:

$$f_0(\bar{\theta}(k)) = \begin{bmatrix} (t_s)\theta_2(k) + \theta_1(k) \\ \frac{t_s M_p g L_m \text{sen} \theta_1(k)}{I_{cm} + m r^2} - (t_s)\beta' \theta_2(k) + \theta_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Para obtener el término $f_1(\bar{\theta}(k))$ partimos de la siguiente ecuación.

$$\bar{\theta}(k+1) = f_0(\bar{\theta}(k)) + \begin{bmatrix} 0 \\ (t_s)(\tau_t) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ (t_s)(\tau_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (t_s) \left(\frac{(F_1\omega(\theta-\theta_0)L_1 - F_2\omega(\theta_0-\theta)L_2)\text{sen}\theta_1 + \tau_3}{I_{cm} + mr^2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Discretizando:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{(t_s)(F_1\omega(\theta_1(k)-\theta_1(k_0))L_1\text{sen}[\theta_1(k)] - F_2\omega(\theta_1(k_0)-\theta_1(k))L_2\text{sen}[\theta_1(k)] + \tau_3}{I_{cm} + mr^2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Por lo tanto:

$$f_1(\bar{\theta}(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{(t_s)(\omega(\theta_1(k)-\theta_1(k_0))L_1\text{sen}[\theta_1(k)])}{I_{cm} + mr^2} & -\frac{(t_s)(\omega(\theta_1(k_0)-\theta_1(k))L_2\text{sen}[\theta_1(k)])}{I_{cm} + mr^2} & \frac{(t_s)}{I_{cm} + mr^2} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Este modelo, permite sintetizar el control sub-óptimo el cual se expone mas adelante.

3.3. Conclusión

La investigación previa de la Biomecánica en la articulación del codo, nos ayudo a entender la cinemática del codo, ángulo de carga, la estabilidad y fuerza en dicha articulación. Por lo tanto, este capitulo de enfoco principalmente en realizar un modelo matemático por Newton-Euler que representara el movimiento de flexión y extensión de la articulación. Esto se planteó con base a la Biomecánica y a los tipos de actuadores a utilizar. También se obtuvo la discretización del modelo obtenido por Newton-Euler para proponer un control Sub-óptimo para el ahorro de energía.

DISEÑO DEL EXOESQUELETO

4.1. Diseño Mecánico del Exoesqueleto

Uno de los objetivos principales de esta tesis es construir una plataforma experimental, por lo tanto el diseño que se planteó fue en base al tipo de actuadores eléctricos, mecánicos, neumáticos y principal mete al modelo dinámico, recordando que el exoesqueleto asistirá al movimiento de flexión y extensión de la articulación del codo.

El exoesqueleto asistirá a los músculos bícep y trícep cuerpo humano con la ayuda de dos músculos neumáticos. Para determinar la distancia a la cual se encontrarán los músculos neumáticos con referencia a la articulación del codo y los grados de movilidad de la flexión y extensión del antebrazo, se realizó el siguiente cálculo considerando el diagrama de cuerpo libre de la figura 4.1.

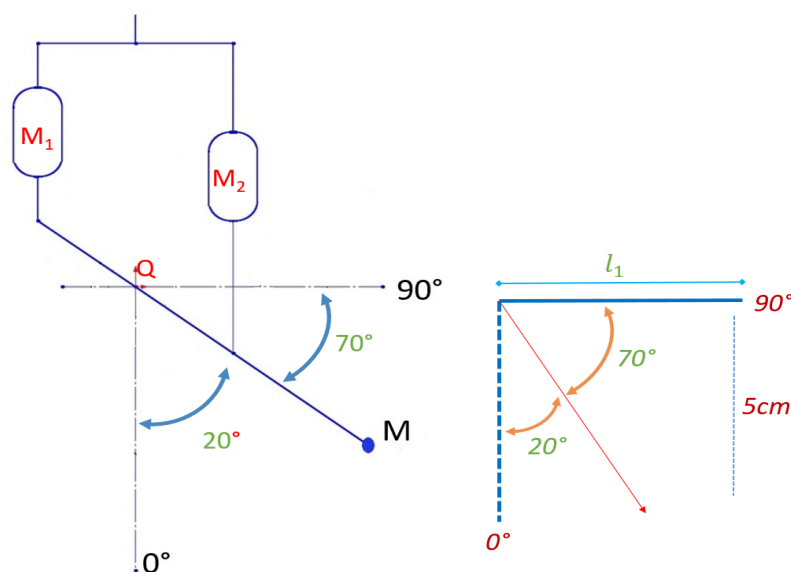


Figura 4.1: Diagrama de cuerpo libre de los músculos neumáticos.

donde:

Q es el punto de pivote. M_1 y M_2 son los músculos neumáticos y M es la masa de carga. Partiendo de la siguiente ecuación, para calcular la distancia del punto de pivote Q a cada músculo neumático:

$$\text{sen}(70^\circ) = \frac{5}{l_1} \quad (4.1)$$

Al despejar l_1 de (4.1)

$$l_1 = \frac{5}{\text{sen}(70^\circ)} \quad (4.2)$$

se obtiene:

$$l_1 = \frac{5}{0.9396} \quad (4.3)$$

$$l_1 = 5.32\text{cm} \quad (4.4)$$

El diseño de la estructura del exoesqueleto se realizó en el software Solidworks el cual nos permite realizar casi a un nivel real las características de cada pieza del exoesqueleto. La plataforma experimental comprende del tronco dorsal, hombro, brazo, antebrazo y mano del ser humano. Este diseño se planteó de tal manera que es ajustable para diferentes personas lo como se muestra en la figura 4.2.

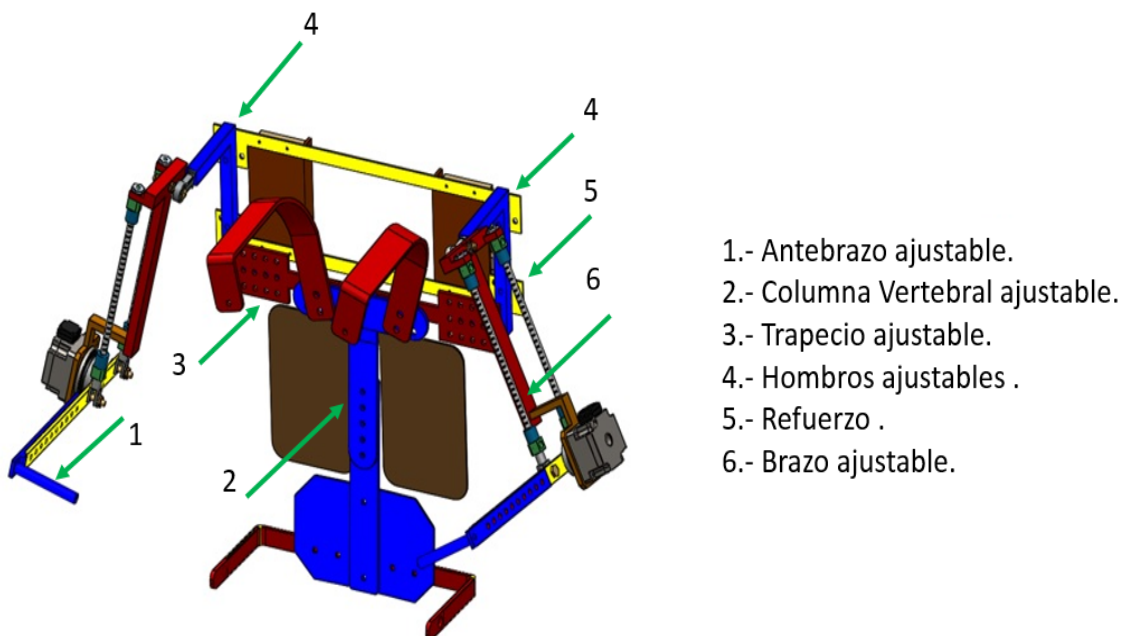


Figura 4.2: Diseño exoesqueleto.

Cada músculo está a una distancia de 5.32cm del punto Q y la articulación del codo tiene una movilidad de 70° suficiente para levantar o bajar objetos. En la figura 5.6, se puede observar los músculos neumáticos que asistirán al bíceps y tríceps y en la figura 4.4, se visualiza el motor eléctrico colocado en la parte externa de la articulación del codo.

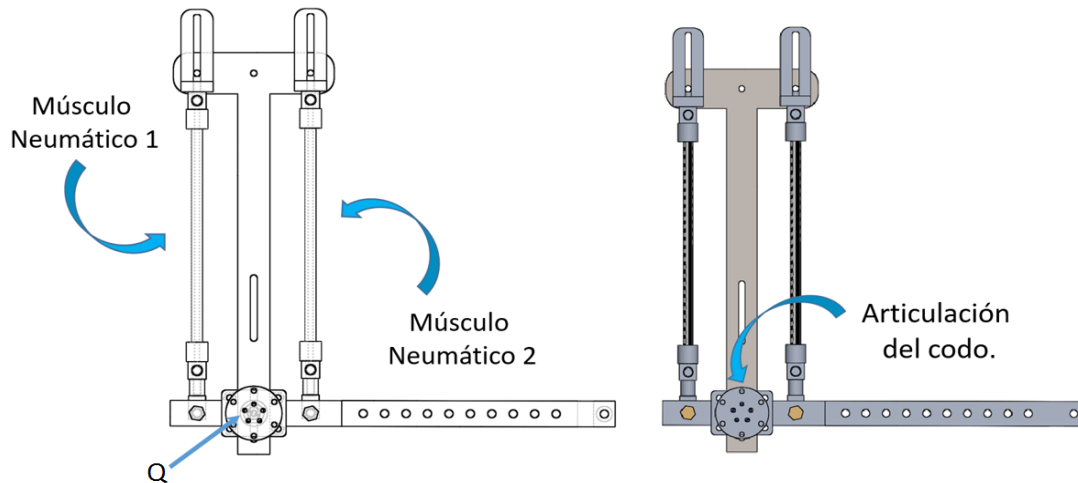


Figura 4.3: Músculos Neumáticos.

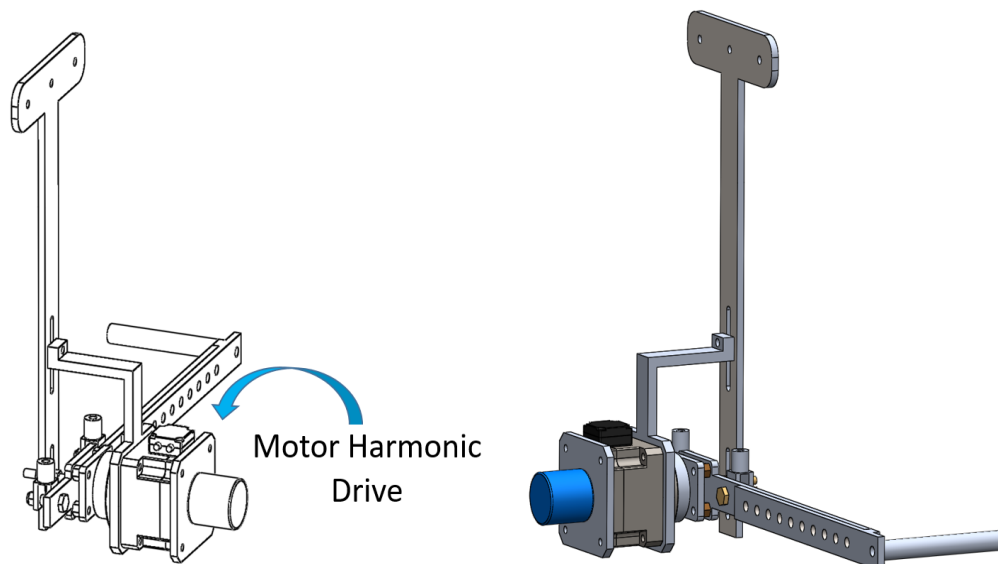


Figura 4.4: Motor Harmonic Drive.

La articulación del codo en el exoesqueleto está compuesta por una pieza en forma de T , esta pieza determina el espacio del hombro y brazo del ser humano y dos piezas rectangulares que componen el antebrazo, esto se puede observar en la figura 4.5.

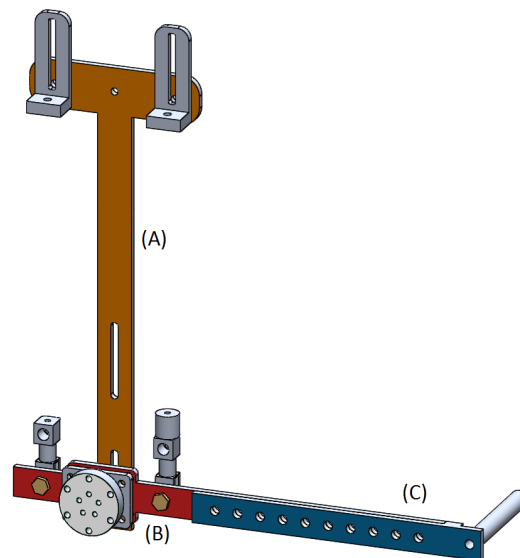


Figura 4.5: Brazo y antebrazo del exoesqueleto. En color anaranjado (A) es la pieza del hombro y brazo. En color rojo y azul son las piezas que componen el antebrazo (B) y (C).

El movimiento de esta articulación es por medio de 3 actuadores los cuales amplificaran la fuerza del ser humano que lo utilice. El diseño completa de esta articulación mecánica se muestra en la figura 4.6.

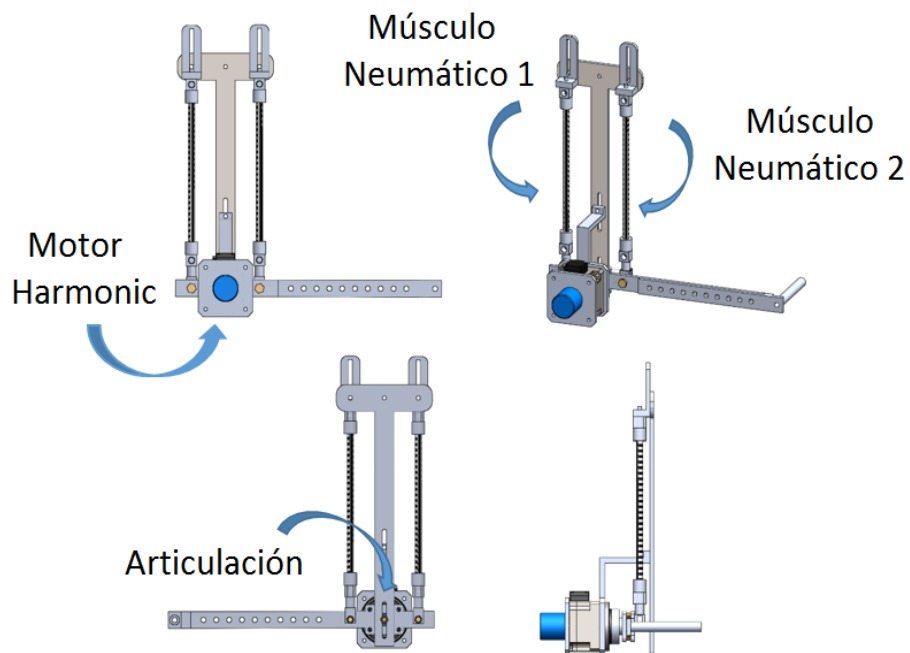


Figura 4.6: Articulación del codo en el exoesqueleto.

Los movimientos que puede realizar el exoesqueleto fueron considerados en el diseño para no lastimar al usuario. En las figuras 4.7 y 4.8, se puede apreciar el diseño terminado, el cual comprende ambos miembros superiores del cuerpo humano.

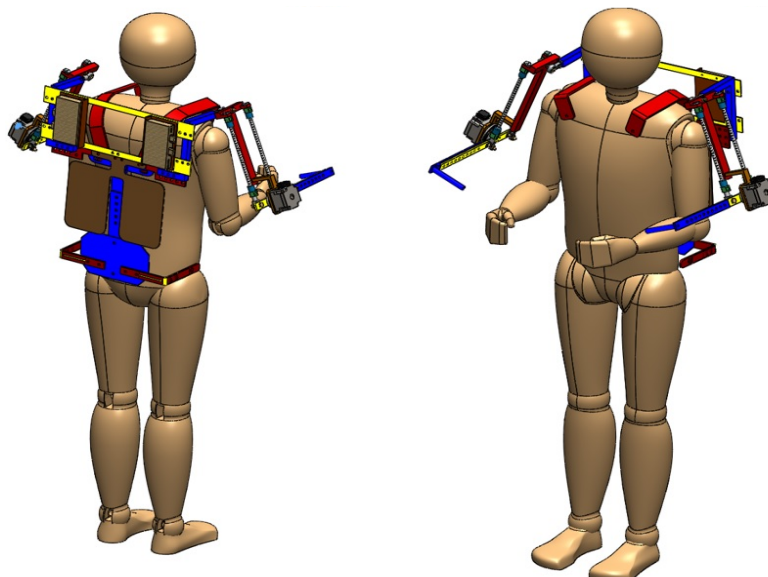


Figura 4.7: Diseño del exoesqueleto de miembros superiores.

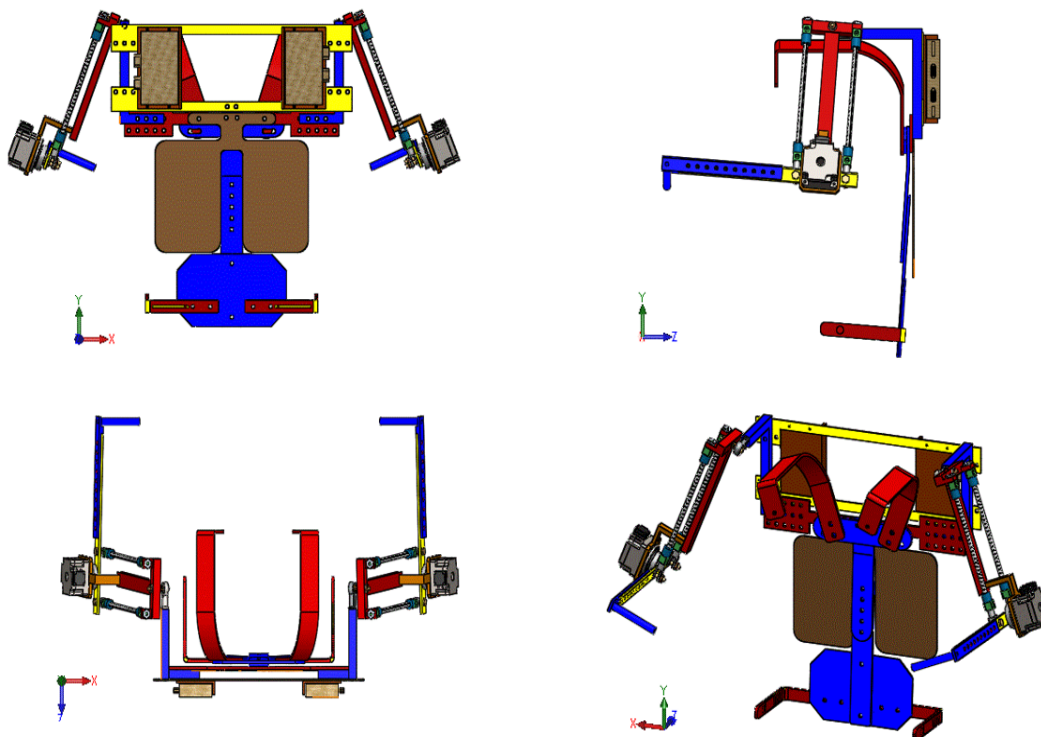


Figura 4.8: Exoesqueleto de amplificación de fuerza en la articulación del codo.

4.2. Construcción del Exoesqueleto

El maquinado y la construcción del exoesqueleto se llevó a cabo bajo la supervisión del autor de esta tesis. Se realizaron los planos correspondientes de cada pieza del exoesqueleto y se fabricaron en una aleación 1060 de aluminio como se puede visualizar en la figura 4.9.



Figura 4.9: Fabricación del exoesqueleto.

El exoesqueleto fue financiado por el laboratorio UMI-LAFMIA, en la empresa ACAM-SA ubicado en Maracaibo 27, Col. San Pedro Zacatenco, Gustavo A Madero. En la figura 4.10, se pueden observar en (a) la parte frontal del exoesqueleto y en (b) la parte posterior, estas dos figuras contienen piezas que conforman la espalda y hombros y fueron maquinadas en torno y fresadora. En la figura 4.11, se visualiza el exoesqueleto con las extremidades superiores y ensamblado.



(a) Vista frontal.

(b) vista posterior.

Figura 4.10: Construcción del exoesqueleto

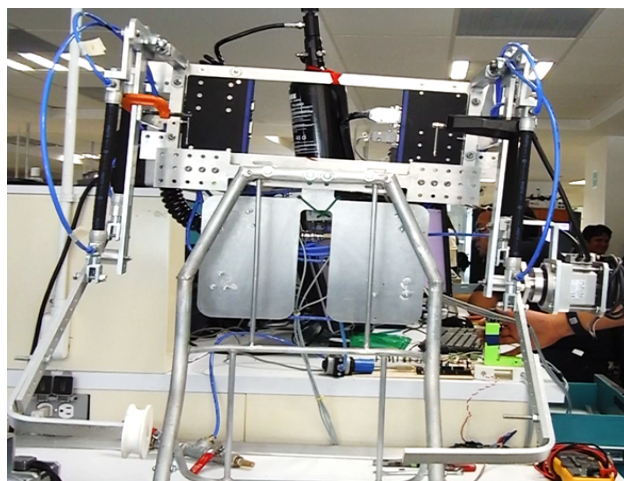


Figura 4.11: Construcción del exoesqueleto de amplificación de fuerza.

A la plataforma experimental del exoesqueleto, se le ha añadido un arnés de seguridad, en la figura 4.12, se visualiza al operario el cual realiza una serie de movimientos en ambos brazos junto con el exoesqueleto.



Figura 4.12: Movimientos en los miembros superiores del exoesqueleto.

4.3. Conclusión

El diseño propuesto del exoesqueleto de amplificación de fuerza para la articulación del codo se realizó en Solidworks con un cálculo de esfuerzo en cada una de las piezas diseñadas; los planos de cada pieza se mandaron al taller de maquinas y herramientas para su fabricación. Este diseño es ajustable para un rango de personas y su peso con toda y la instrumentación es de 11.42 Kg.

Instrumentación del Exoesqueleto

El exoesqueleto tiene tres actuadores principales para la amplificación de fuerza en la articulación del codo. Dos actuadores son músculos neumáticos DMSP de FESTO y un motor Harmonic Drive. La instrumentación se divide en dos sistemas el electrónico y el neumático.

5.1. Instrumentación del sistema Electrónico

En este sistema se encuentran dos tipos de sensores, el primer sensor es un encoder incremental Yumo E6B2-CWZ3E, el cual es un transductor rotativo que transforma un movimiento angular en una serie de pulsos digitales, este sensor ayuda a la retroalimentación de posición angular en la articulación del codo. En la figura 5.1, se observa este componente.



Figura 5.1: Encoder Incremental Yumo E6B2-CWZ3E.

El segundo sensor es un joystick, el cual permite al ser humano darle indicaciones al exoesqueleto para flexionar o extender la articulación del codo, en la figura 5.2, se puede observar este componente.



Figura 5.2: Módulo Joystick 2 ejes XY.

El exoesqueleto está controlado en su totalidad por una tarjeta Arduino Mega 2560, la cual es una plataforma de hardware libre, basada en una placa con un microcontrolador. En la figura 5.3, se visualiza dicho componente. El hardware consiste en una placa con un microcontrolador Atmel AVR y puertos de entrada / salida. Por otro lado el software consiste en un entorno en lenguaje de programación Processing/Wiring.



Figura 5.3: Arduino Mega 2560.

Se diseñó una tarjeta electrónica con el objetivo de transmitir datos para la habilitación del driver, el cambio de giro del motor y dos PWM a $3000H_z$ por cada motor Harmonic. En la parte neumática se transmite solamente 1 PWM a $30H_z$ para las válvulas ultrarrápidas y un bit para habilitar las válvulas de accionamiento continuo. En la tarjeta se separan las señales digitales de la etapa de potencia mediante un optoacoplador de alta frecuencia. En la figura 5.4, se observa la tarjeta electrónica y en la tabla 5.1 y 5.2 los nombres de componentes.

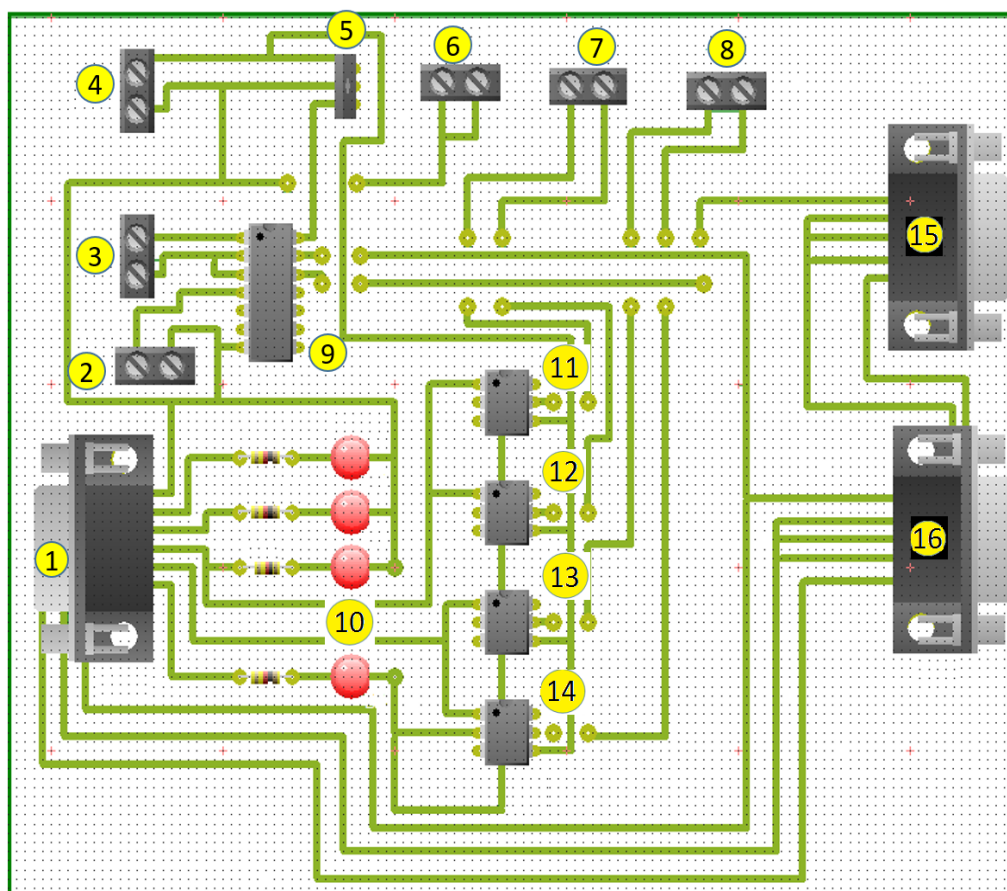


Figura 5.4: Tarjeta de potencia.

Tabla 5.1: Componentes Electrónicos.

1	Conexión con Arduino Mega 2560
2	Bocina de Alerta
3	Conexión con Joystick
4	Alimentación de 24 volts a 1A
5	Regulador a 5 volts
6	Terminal Negativa de la Válvula Neumática
7	Terminal Positiva de la Válvula Neumática de Accionamiento Continuo
8	Terminal Positiva de la Válvula Neumática Ultrarrápida

Tabla 5.2: Componentes Electrónicos.

9	Inversor de Señales
10	Indicadores
11	1° Optoacoplador AQV255 de la Válvula Neumática uno de Accionamiento Continuo
12	2° Optoacoplador AQV255 de la Válvula Neumática dos de Accionamiento Continuo
13	3° Optoacoplador AQV255 de la Válvula Neumática Ultrarrápida 1
14	4° Optoacoplador AQV255 de la Válvula Neumática Ultrarrápida 2
15	Comunicación con el Motor Izquierdo
16	Comunicación con el Motor Derecho

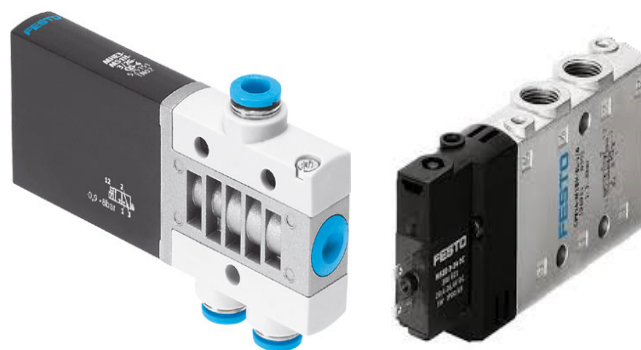
El Exoesqueleto tiene un motor Harmonic-Drive FHA-14C-100 el cual se encuentra en la parte externa de la articulación del codo. De esta manera el motor brinda una mayor precisión en el movimiento de flexión y extensión. Este actuador es controlado por la tarjeta Arduino Mega 2560 y alimentado a 24 volts CD. En la figura 5.5, se observa en (a) el Motor Harmonic FHA-14C-100, en (b) se visualiza el driver del Motor y en (c) se muestra la articulación del codo en el exoesqueleto junto con el motor Harmonic.



Figura 5.5: Harmonic-Drive FHA-14C-100.

5.2. Instrumentación del sistema neumático

Este sistema tiene músculos neumáticos que funcionan como el bíceps y tríceps del cuerpo humano los cuales son activados con 4 válvulas 3/2, dos válvulas son ultrarrápidas y dos de accionamiento continuo. La salida de aire es regulara por válvulas estranguladoras antirretorno. Estos componentes se pueden visualizar en las figuras 5.6 y 5.7.



(a) Válvula ultra rápida. (b) Válvula de acción continua.

Figura 5.6: Válvulas Neumáticas.



(a) Válvula estranguladora. (b) Músculo Neumático.

Figura 5.7: Válvula estranguladora y músculo neumático.

Músculo Neumático

El músculo neumático es un sistema de contracción de membrana, la aplicación del músculo consiste en utilizarlo como un actuador de tracción que tira de un muelle mecánico o de una carga. Cuando no hay presión, la membrana no se comprime. ya que si se aplica presión a un músculo que se encuentra en estado, su fuerza y capacidad dinámica son máximas. En la figura 5.8, se observa el funcionamiento principal de dichos músculos.

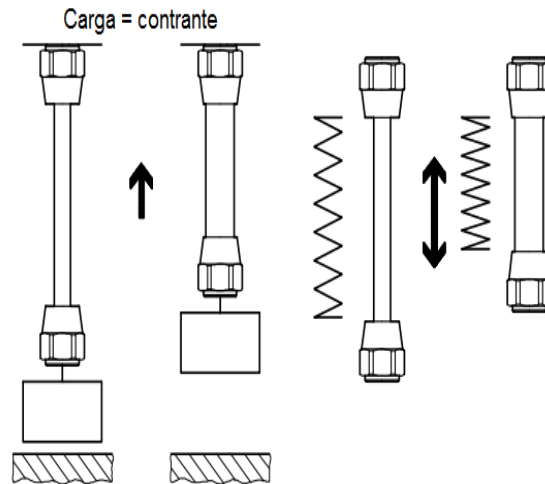


Figura 5.8: Funcionamiento del músculo neumático.

El músculo permite ajustar tanto la pretensión como la rigidez de esta manera se obtienen curvas características diferentes, lo que significa que es posible adaptar el muelle a cada aplicación. Estos actuadores utilizan una presión de aire a 8 bares la cual es suficiente para su funcionamiento adecuado.

La conexión neumática se simuló en el software FluidSim. En la figura 5.9, se muestra el diagrama neumático y en el se puede observar por medio de simbología las 4 válvulas neumáticas, dos músculos, un compresor de aire con sus respectivos filtros y dos válvulas estranguladoras. El sistema es alimentado con 24 volts de corriente continua.

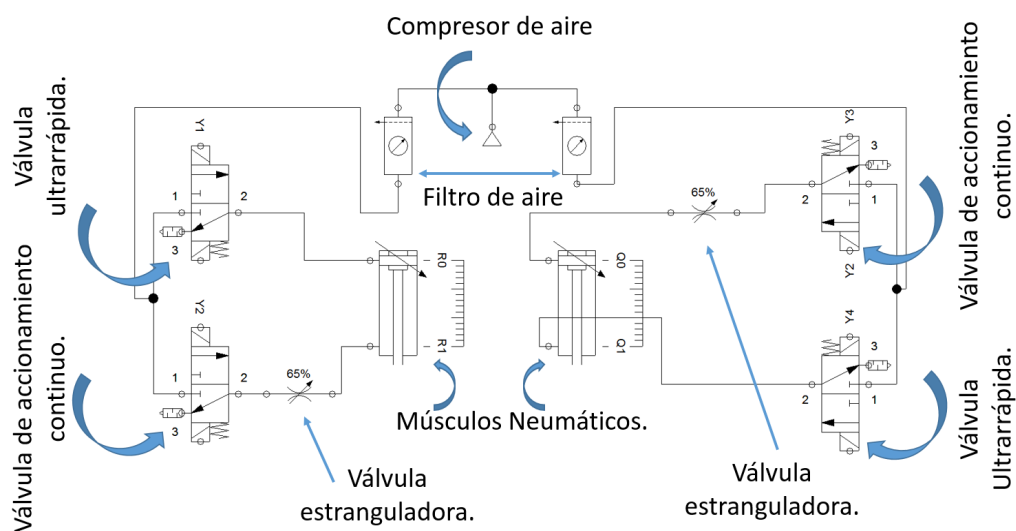
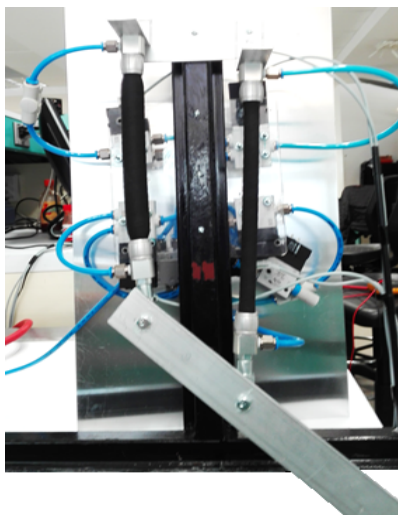
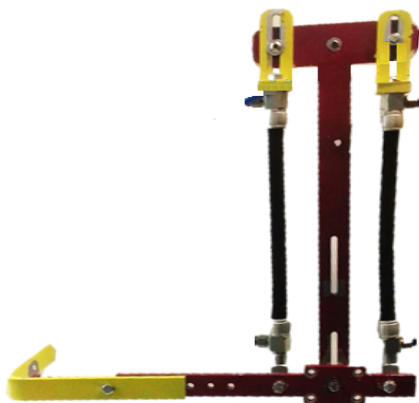


Figura 5.9: Simulación del sistema neumático.

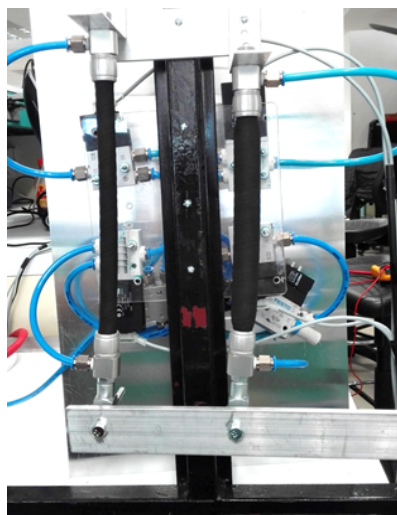
En la figura 5.10, se puede visualizar la articulación del codo con dos músculos neumáticos los cuales están en una configuración antagonista, en la imagen (a) se observa el movimiento de extensión, por lo que uno de los músculos se comprime y el otro se relaja. En la imagen (b) se observan dos músculos en reposo. En (c) se puede apreciar el movimiento de flexión de la articulación, en este caso se observa que el músculo que se comprime es el primero de derecha a izquierda y el de la parte posterior se relaja.



(a) Movimiento de Extensión.



(b) Músculos en reposo.



(c) Movimiento de Flexión.

Figura 5.10: Sistema neumático de amplificación de fuerza.

Para la autonomía del exoesqueleto en cuestión de aire comprimido, se cuenta con un tanque TIPPMANN el cual se observar en la figura 5.11, este tanque tiene una capacidad de 270 Bares el cual brinda una autonomía considerable para independizarse de una compresora, además de que es recargable cuantas veces sea necesario.



Figura 5.11: Tanque TIPPMANN.

En la figura 5.12, se puede observar la articulación del codo en el exoesqueleto, esta articulación es un sistema híbrido ya que esta compuesta por los músculos neumáticos y el motor Harmonic Drive.

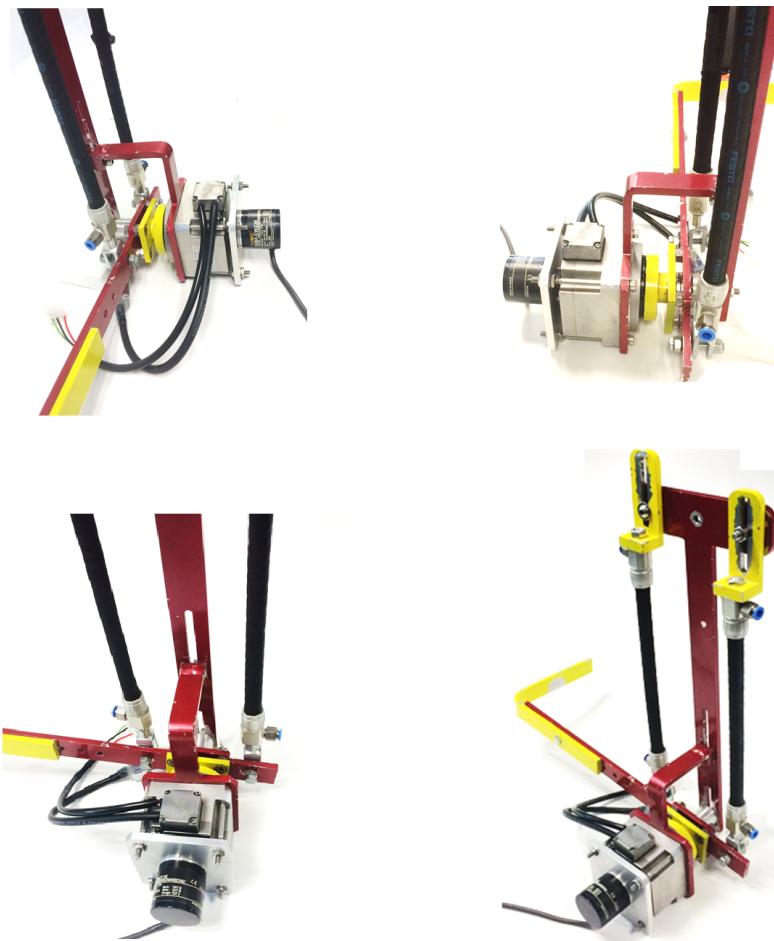


Figura 5.12: Sistema Híbrido de la articulación del codo en el exoesqueleto.

5.3. Sistema Híbrido

El sistema de amplificación de fuerza en el exoesqueleto, esta basado en un sistema híbrido, para validar este sistema en la figura 5.13, se observan tres gráficas, en la primera se visualiza el comportamiento del motor, llegando a una posición de 60 grados en la articulación del codo del exoesqueleto, se aprecia que el comportamiento de este actuador sigue de una manera muy parecida al resultado numérico y llegando con suavidad a la referencia. En la gráfica central se observa en comportamiento del músculo neumático, se aprecia con claridad como llega a la referencia de 60 grados pero a diferencia del motor Harmonic no llega con suavidad a la referencia. La tercer gráfica presenta el funcionamiento en conjunto del Motor Harmonic Drive y los Músculos Neumáticos, en esta gráfica se observa claramente que el comportamiento de los músculos mejora significativamente y legando con suavidad a la referencia, esto es gracias al motor Harmonic Drive. Por lo tanto los músculos son los encargados de proporcionar casi un 80 % de la fuerza en la articulación del codo en el exoesqueleto y el motor un 20 % de fuerza pero con mayor precisión.

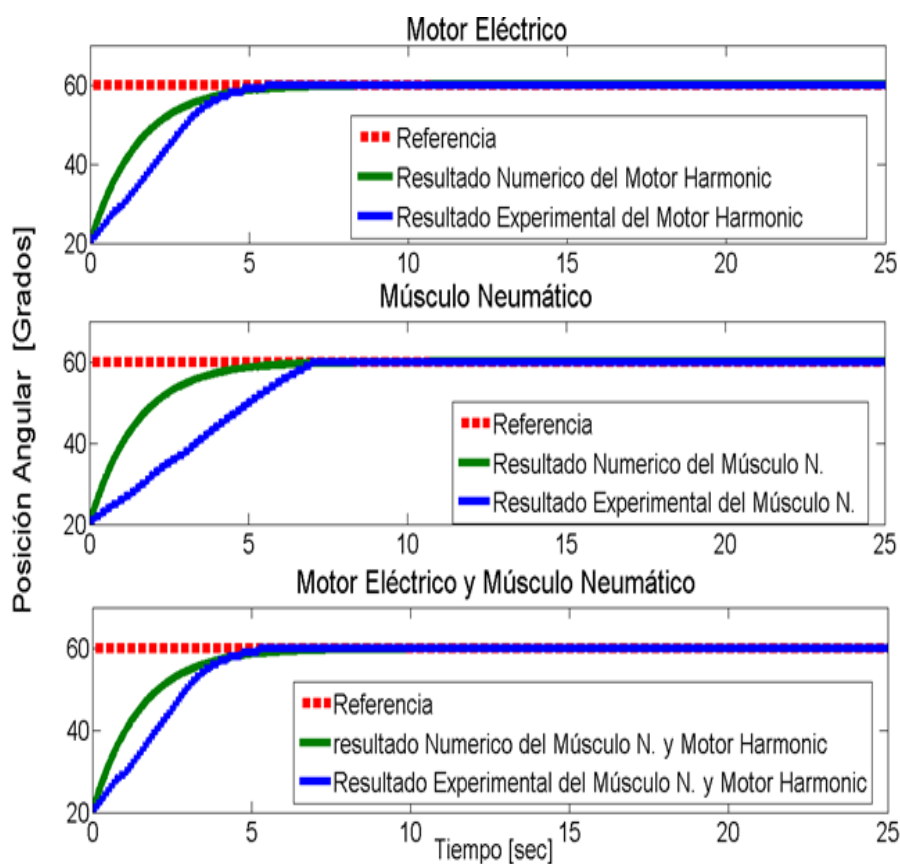


Figura 5.13: Validación del sistema Híbrido.

Para determinar la fuerza genera por el exoesqueleto y la fuerza aplicada por el ser humana se realiza lo siguiente. En el ser humano, la fuerza que aplica sera en base a un joystick. En la tabla 5.3, se encuentra la caracterización de fuerza y torque este. En la tabla 5.4, se encuentra el torque generado por el exoesqueleto.

Tabla 5.3: Torque Del Humano.

Pulsos del Joystick	PESO (<i>Kg</i>)		
0 A 100	0.153 <i>Kg</i>		
101 A 200	0.284 <i>Kg</i>		
201 A 300	0.429 <i>Kg</i>		
301 A 400	0.582 <i>Kg</i>		
401 a 500	0.652 <i>Kg</i>		
FUERZA DEL JOYSTICK			
PULSOS	PESO	GRAVEDAD	FUERZA
0 A 100	0.153 <i>Kg</i>	9.81 m/s^2	1.500 <i>N</i>
101 A 200	0.284 <i>Kg</i>	9.81 m/s^2	2.786 <i>N</i>
201 A 300	0.429 <i>Kg</i>	9.81 m/s^2	4.208 <i>N</i>
301 A 400	0.582 <i>Kg</i>	9.81 m/s^2	5.709 <i>N</i>
401 a 500	0.652 <i>Kg</i>	9.81 m/s^2	6.396 <i>N</i>
TORQUE DEL JOYSTICK			
$T_1=$	0.01 m	1.500 N	0.015 (<i>Nm</i>)
$T_2=$	0.01 m	2.786 N	0.027 (<i>Nm</i>)
$T_3=$	0.01 m	4.208 N	0.042 (<i>Nm</i>)
$T_4=$	0.01 m	5.709 N	0.057 (<i>Nm</i>)
$T_5=$	0.01 m	6.396 N	0.063 (<i>Nm</i>)

Tabla 5.4: Torque del Exoesqueleto.

TORQUE DEL EXOESQUELETO					
	Distancia (<i>m</i>)	Gravedad (m/s^2)	Sen θ	Peso (<i>Kg</i>)	Torque (<i>Nm</i>)
$T_1=$	0.3 <i>m</i>	9.81 m/s^2	Sen (20)	5 <i>Kg</i>	5.032 <i>Nm</i>
$T_2=$	0.3 <i>m</i>	9.81 m/s^2	Sen (30)	5 <i>Kg</i>	7.357 <i>Nm</i>
$T_3=$	0.3 <i>m</i>	9.81 m/s^2	Sen (40)	5 <i>Kg</i>	9.417 <i>Nm</i>
$T_4=$	0.3 <i>m</i>	9.81 m/s^2	Sen (50)	5 <i>Kg</i>	11.271 <i>Nm</i>
$T_5=$	0.3 <i>m</i>	9.81 m/s^2	Sen (60)	5 <i>Kg</i>	12.743 <i>Nm</i>
$T_6=$	0.3 <i>m</i>	9.81 m/s^2	Sen (70)	5 <i>Kg</i>	13.817 <i>Nm</i>
$T_7=$	0.3 <i>m</i>	9.81 m/s^2	Sen (80)	5 <i>Kg</i>	14.479 <i>Nm</i>
$T_8=$	0.3 <i>m</i>	9.81 m/s^2	Sen (90)	5 <i>Kg</i>	14.751 <i>Nm</i>

La fórmula para la caracterizar el joystick es la siguiente: $F = m * g$ donde (m) es la masa en kg y (g) es la gravedad (m/s^2) por lo tanto el torque que genera el humano esta dado por la formula: $\tau = D * N$, donde D es la distancia en (m) y (N) la fuerza.

Para el troque en el exoesqueleto, se utilizo la formula $\tau = D * g * sen(\theta) * m$. Donde (D) es la distancia en metros (m), (g) es la gravedad, (θ) es la posición angular y (m) es la masa de carga.

En la figura 5.14, se puede observar en verde la gráfica del torque generado por el ser humano el cual el máximo es de 0.063Nm y en color morado la gráfica del torque generado por el exoesqueleto donde el torque máximo es de 14.751 Nm.

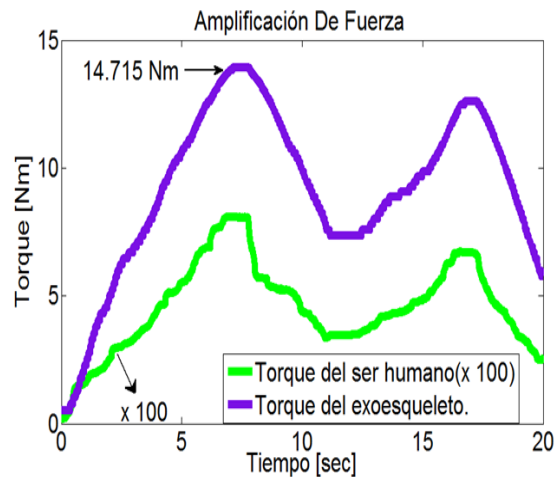


Figura 5.14: Amplificación de Fuerza.

La figura 5.15, se visualiza el sistema eléctrico y neumático colocados en el exoesqueleto de amplificación de fuerza y en la figura 5.16, se aprecia el exoesqueleto ya terminado.

5.4. Conclusión

El exoesqueleto tiene tres actuadores principales para la amplificación de fuerza en la articulación del codo. Dos actuadores son músculos neumáticos DMSP de FESTO y un motor Harmonic Drive. La instrumentan se divide en dos sistemas: electrónico y neumático. Tiene un encoder incremental en el eje del motor para obtener la posición angular y está controlado por la tarjeta Arduino Mega 2560. Para la autonomía el exoesqueleto tiene una batería de 24V a 8A y el sistema neumático cuenta con un tanque de aire comprimido con una capacidad de 270psi.

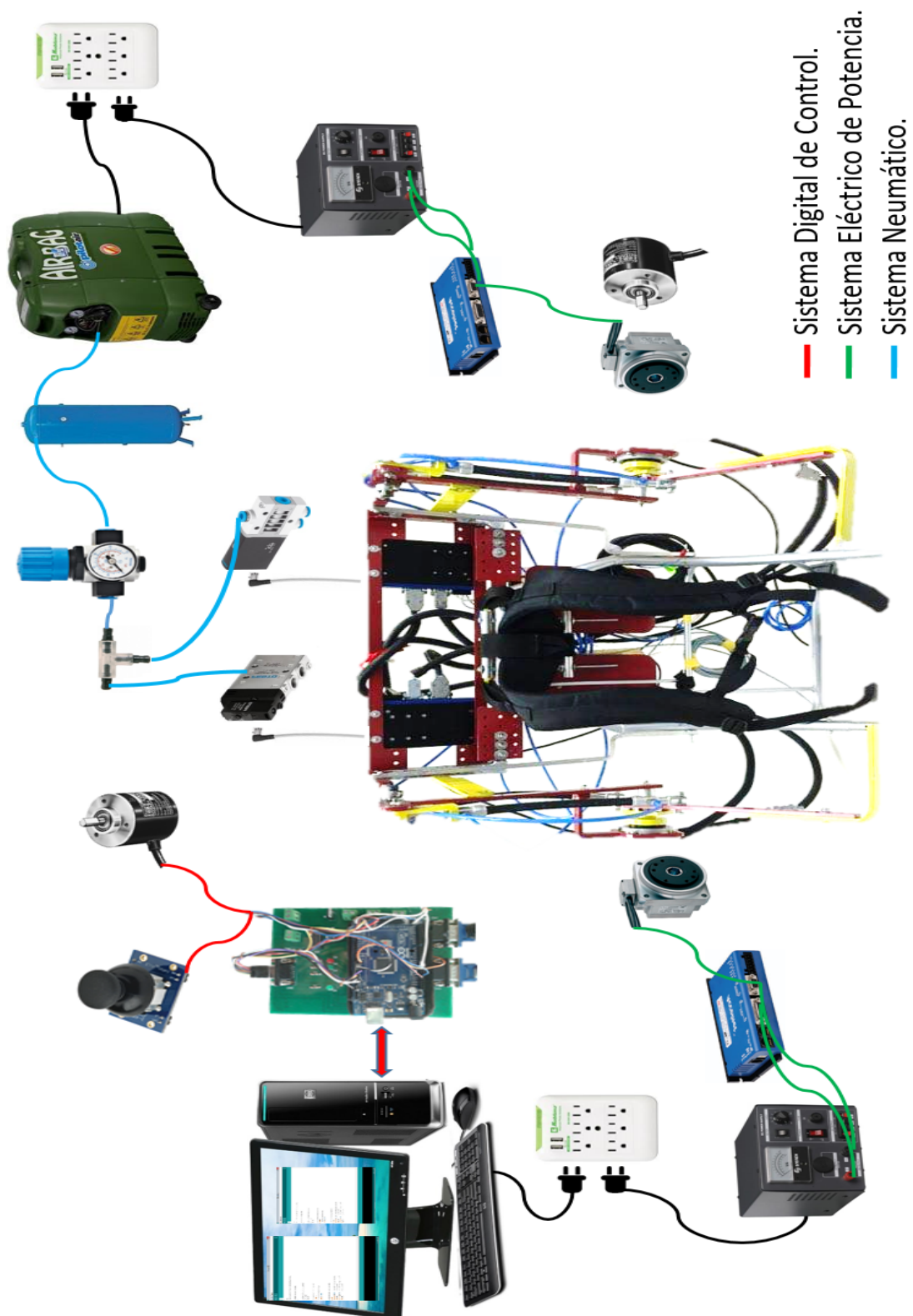


Figura 5.15: Instrumentación del exoesqueleto de amplificación de fuerza



Figura 5.16: Exoesqueleto de amplificación de fuerza en la articulación del codo.

6.1. Control Sub-óptimo

6.1.1. Optimización de horizonte finito

Control Sub-óptimo no lineal discreto para sistemas afines

El exoesqueleto propuesto en esta tesis, tiene un periodo de funcionamiento corto por consumo de energía de los actuadores utilizados, para ampliar su periodo de funcionamiento se propone un control Sub-óptimo. Por lo tanto partiendo de la siguiente definición:

El par (x_0, x_1) es controlable si existe un control admisible $u(k)$ tal que la sistema definido por $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ se transfiere de x_0 a x_1 en N numero finito de pasos . Dónde $x(k), f(\dots) \in R^n, u(k) \in R^m$

Considerando el sistema discreto no lineal a fin de la ecuación (3.14) y definiendo el siguiente indice de rendimiento obtenemos.

$$J = \frac{1}{2} \bar{x}^T(N) H \bar{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ \bar{x}^T(k) Q \bar{x}(k) + u^T(k) R u(k) \} \quad (6.1)$$

Donde el horizonte es $t_f = TN$ y $Q \geq 0$ y $R > 0$ son matrices de dimensiones cuadradas. Se supone que el par de puntos (x_0, x_{t_f}) (3.14) satisface la definición 1. Siguiendo la programación dinámica enfocada en tiempo discreto propuesta originalmente en [29], define la siguiente notación.

$$J_{N,N}^* = \frac{1}{2} \bar{x}^T(N) H \bar{x}(N) \quad (6.2)$$

Teniendo en cuenta que este término no depende de la ley de control $u(N)$ y puede ser llamado el control óptimo de J en tiempo discreto N , entonces el siguiente paso se define como:

$$\begin{aligned} J_{N,N}^* &= \min_{u(N-1)} \left\{ \frac{1}{2} \bar{x}^T(N) H \bar{x}(N) + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-1) Q \bar{x}(N-1) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) \right\} \\ &= \min_{u(N-1)} \left\{ J_{N,N}^* + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-1) Q \bar{x}(N-1) + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) \right\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

El valor del estado $\bar{x}(N)$ podría calcularse por la ecuación de espacio de estado dada por (3.14):

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^*(\bar{x}(N-1), u(N-1)) &= \min_{u(N-1)} \left\{ \frac{1}{2} [f_0(\bar{x}(N-1) + f_1(\bar{x}(N-1)u(N-1))]^T \right. \\ &\quad \left. H \times [f_0(\bar{x}(N-1) + f_1(\bar{x}(N-1)u(N-1))] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-1) Q \bar{x}(N-1) + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

En este paso se procede de la manera tradicional para encontrar el valor mínimo de $J_{N-1,N}$ se deduce que:

$$u^*(N-1) = -[f_1^T(\bar{x}(N-1) H f_1(\bar{x}(N-1) + R)]^{-1} f_1^T(\bar{x}(N-1) H f_0(\bar{x}(N-1)) \quad (6.5)$$

La matriz R es definida positiva esto asegura que $[f_1^T(\bar{x}(N-1) H f_1(\bar{x}(N-1) + R)]^{-1}$ exista. observe que el control en (6.9) es el control óptimo, ya que:

$$\frac{\partial^2 J_{N-1,N}(\bar{x}(N-1), u(N-1))}{\partial^2 u(N-1)} = R > 0 \quad (6.6)$$

La existencia de un mínimo está garantizado, ya que el lado derecho en la ecuación (6.4) es fuertemente convexo con respecto $u(N-1)$. Para el siguiente paso $N-2$, tenga en cuenta

que el valor de $u(N - 1)$ es el valor óptimo, y de acuerdo con el principio de optimalidad de Bellman, este control genera el valor óptimo de $\bar{x}(N - 1)$.

Para este paso tenemos que :

$$\begin{aligned} \bar{J}_{N-2,N}(\bar{x}(N - 2), u(N - 1), u(N - 2)) = & \min_{u(N-1), u(N-2)} \left\{ \frac{1}{2} \bar{x}(N)^T H(\bar{x})(N) + \right. \\ & \frac{1}{2} \bar{x}^T(N - 1) Q \bar{x}^T(N - 1) + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N - 2) \\ & Q \bar{x}(N - 2) + \frac{1}{2} u^T(N - 1) R u(N - 1) + \\ & \left. \frac{1}{2} u^T(N - 2) R u(N - 2) \right\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Tenga en cuenta que el término que implica $\bar{x}(N)$, depende del control $u(N - 1)$ y el término con $\bar{x}(N - 2)$ depende del control $u(N - 3)$, sólo el término con $\bar{x}(N - 1)$ depende del control $u(N - 2)$. Pero el control $u(N - 1)$ hallado en el paso anterior es óptimo y $\bar{x}(N - 1)$ viene dada por la ecuación de estado (3.14), de esto sigue que:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{N-2,N}(\bar{x}(N - 2), u(N - 2)) = & \min_{u(N-2)} \left\{ \frac{1}{2} \bar{x}(N)^T H(\bar{x})(N) + \frac{1}{2} [f_0(\bar{x}(N - 2)) \right. \\ & + f_1(\bar{x}(N - 2)) u(N - 2)]^T Q \times [f_0(\bar{x}(N - 2)) \\ & + f_1(\bar{x}(N - 2)) u(N - 2)] + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N - 2) Q \bar{x}(N - 2) \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{u}^T(N - 1) R u(N - 1) + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N - 2) R u(N - 2) \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ahora, usamos esta ecuación para obtener el control subóptimo $u(N - 2)$ en este paso, con esto evitamos la resolución de las ecuaciones del tipo de Riccati el cual es un problema muy complejo. Sin embargo la ecuación (6.8) es fuertemente convexa respecto a $u(N - 2)$ y este hecho garantiza la existencia de un mínimo, sin embargo es sólo una aproximación al valor óptimo de $u(N - 2)$, porque como bien es conocido el nivel de señal de control óptimo de $u(N - 2)$ se encuentra hallando la solución de Riccati para el caso no lineal, que no es fácil de encontrar. Procedemos de la manera habitual con el fin de encontrar un control subóptimo $u(N - 2)$:

$$\bar{u}(N - 2) = -[f_1^T(\bar{x}(N - 2)) Q f_1(\bar{x}(N - 1)) + R]^{-1} f_1^T(\bar{x}(N - 1)) Q f_0(\bar{x}(N - 1)) \quad (6.9)$$

No es una tarea difícil encontrar las siguientes ecuaciones generales.

$$\begin{aligned} \bar{u}(N-k) &= - [f_1^T(\bar{x}(N-k))Qf_1(\bar{x}(N-k)) + R]^{-1} \\ &\quad f_1^T(\bar{x}(N-k))Qf_0(\bar{x}(N-k)) \\ \bar{J}_{N-k}(\bar{x}(N-k), u(N-k)) &= \bar{J}_{N-k+1, N} + \frac{1}{2}\bar{x}^T(N-k)Q\bar{x}(N-k) \\ &\quad + \bar{u}^T(N-k)R\bar{x}(N-k) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Para todo $k = 2, \dots, N$.

Esta secuencia Sub-óptima garantiza una aproximación para el valor mínimo del índice de rendimiento (6.1), ver ecuación (6.6)

6.1.2. Ley de Control Sub-Óptima

Partiendo de la siguiente Ley de control Sub-óptima la cual es obtenida en la sección anterior de este capítulo.

$$\bar{u}(N-K) = - [f_1^T(\bar{x}(N-k))Qf_1(\bar{x}(N-k)) + R]^{-1} f_1^T(\bar{x}(N-k))Qf_0(\bar{x}(N-k)) \quad (6.11)$$

Se propone la Ley de control de la ecuación (6.11) para cada actuador del exoesqueleto, por lo tanto:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

donde:

u_1 = ley de control Sub-óptimo para el músculo 1

u_2 = ley de control Sub-óptimo para el músculo 2

u_3 = ley de control Sub-óptimo para el motor Harmonic

Por otro lado, considere lo expuesto en el capítulo 4 en la sección del modelo discretizado, retomaremos $f_0(\bar{\theta}(k))$ y $f_1(\bar{\theta}(k))$ para realizar el cálculo matemático de la ley de control Sub-óptima.

$$f_0(\bar{\theta}(k)) = \begin{bmatrix} (t_s)\theta_2(k) + \theta_1(k) \\ \frac{t_s M_p g L_m \text{sen}\theta_1(k)}{I_{cm} + mr^2} - (t_s)\beta'\theta_2(k) + \theta_2(k) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$f_1(\bar{\theta}(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{(t_s)(\omega(\theta_1(k) - \theta_1(k_0))L_1 \text{sen}[\theta_1(k)])}{I_{cm} + mr^2} & -\frac{(t_s)(\omega(\theta_1(k_0) - \theta_1(k))L_2 \text{sen}[\theta_1(k)])}{I_{cm} + mr^2} & \frac{(t_s)}{I_{cm} + mr^2} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Se propone el siguiente cambio de variable y reescribiendo las ecuaciones (6.13) y (6.14).

$$\theta_1 = \theta_1(N - K) = B$$

$$\theta_2 = \theta_2(N - K) = A$$

$$\omega(\theta_1(k) - \theta_1(k_0)) = C$$

$$\omega(\theta_1(k_0) - \theta_1(k)) = D$$

$$f_0(\bar{\theta}(N - K)) = \begin{pmatrix} (A)(t_s) + B \\ \frac{(M_p)(g)(L_m)(\text{sen}B)(t_s)}{I_{cm} + mr^2} - \left(\frac{b}{I_{cm} + mr^2}\right)(A)(t_s) + A \end{pmatrix}$$

$$f_1(\bar{\theta}(N - K)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{(t_s)(C)(L_1)(\text{sen}B)}{I_{cm} + mr^2} & -\frac{(t_s)(D)(L_2)(\text{sen}B)}{I_{cm} + mr^2} & \frac{t_s}{I_{cm} + mr^2} \end{pmatrix}$$

Definiendo las matrices $Q \in R^{2 \times 2}$ y semi-definida positiva, $R \in R^{3 \times 3}$ definida positiva y la transpuesta de $f_1(\bar{\theta}(N - K))$:

$$f_1^T(\bar{\theta}(N - K)) = \begin{pmatrix} 0 & CL_1 t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{cm}} \\ 0 & -DL_2 t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{cm}} \\ 0 & \frac{t_s}{mr^2 + I_{cm}} \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix};$$

Desarrollando la primer operación $f_1^T(\bar{x}(N - k)) * (Q)$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 & CL_1 t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{CM}} \\ 0 & -DL_2 t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{CM}} \\ 0 & \frac{t_s}{mr^2 + I_{CM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} CL_1 Q_{21} t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{CM}} & CL_1 Q_{22} t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{CM}} \\ -DL_2 Q_{21} t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{CM}} & -DL_2 Q_{22} t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{CM}} \\ Q_{21} \frac{t_s}{mr^2 + I_{CM}} & Q_{22} \frac{t_s}{mr^2 + I_{CM}} \end{pmatrix}$$

posteriormente el resultado de $f_1^T(\bar{x}(N - k)) * (Q)$ se multiplica por $f_1(\bar{x}(N - k))$ y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} C^2 L_1^2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -CDL_1 L_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & CL_1 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} \\ -CDL_1 L_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & D^2 L_2^2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -DL_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} \\ CL_1 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -DL_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & Q_{22} \frac{t_s^2}{(mr^2 + I_{cm})^2} \end{pmatrix}$$

La siguiente operación es:

$$[f_1^T(\bar{x}(N - k))Qf_1(\bar{x}(N - k)) + R] \quad (6.15)$$

$$\begin{pmatrix} C^2 L_1^2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -CDL_1 L_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & CL_1 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} \\ -CDL_1 L_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & D^2 L_2^2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -DL_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} \\ CL_1 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -DL_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & Q_{22} \frac{t_s^2}{(mr^2 + I_{cm})^2} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & R_{220} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} R_{11} + C^2 L_1^2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -CDL_1 L_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & CL_1 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} \\ -CDL_1 L_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & R_{22} + D^2 L_2^2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -DL_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} \\ CL_1 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -DL_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & R_{33} + Q_{22} \frac{t_s^2}{(mr^2 + I_{cm})^2} \end{pmatrix}$$

A continuación se obtiene la inversa de la ecuación (6.15) considerando el signo negativo de la ley de control.

$$- [f_1^T(\bar{x}(N-k))Qf_1(\bar{x}(N-k)) + R]^{-1} \quad (6.16)$$

$$- \begin{pmatrix} R_{11} + C^2 L_1^2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -CDL_1 L_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & CL_1 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} \\ -CDL_1 L_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & R_{22} + D^2 L_2^2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -DL_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} \\ CL_1 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & -DL_2 Q_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(mr^2 + I_{cm})^2} & R_{33} + Q_{22} \frac{t_s^2}{(mr^2 + I_{cm})^2} \end{pmatrix}^{-1}$$

Por lo tanto la inversa es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{a}{(d+e)} & -CDL_1 L_2 Q_{22} R_{33} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(d+e)} & CL_1 Q_{22} R_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(d+e)} \\ -CDL_1 L_2 Q_{22} R_{33} t_s^2 \frac{\text{sen}^2 B}{(d+e)} & -\frac{b}{(d+e)} & -DL_2 Q_{22} R_{11} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(d+e)} \\ CL_1 Q_{22} R_{22} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(d+e)} & -DL_2 Q_{22} R_{11} t_s^2 \frac{\text{sen} B}{(d+e)} & -\frac{c}{(d+e)} \end{pmatrix}$$

donde:

$$a = \begin{pmatrix} R_{22} R_{33} m^2 r^4 + 2R_{22} R_{33} m r^2 I_{cm} + Q_{22} R_{33} D^2 L_2^2 t_s^2 \text{sen}^2 B + Q_{22} R_{22} t_s^2 + \\ R_{22} R_{33} I_{cm}^2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} Q_{22} R_{33} C^2 L_1^2 t_s^2 \text{sen}^2 B + R_{11} R_{33} m^2 r^4 + 2R_{11} R_{33} m r^2 I_{cm} + Q_{22} R_{11} t_s^2 + \\ R_{11} R_{33} I_{cm}^2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} Q_{22}R_{22}C^2L_1^2t_s^2\text{sen}^2B + R_{11}R_{22}m^2r^4 + 2R_{11}R_{22}mr^2I_{cm} + Q_{22}R_{11}D^2 \\ L_2^2t_s^2\text{sen}^2B + R_{11}R_{22}I_{cm}^2 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} Q_{22}R_{22}R_{33}C^2L_1^2t_s^2\text{sen}^2B + R_{11}R_{22}R_{33}m^2r^4 + 2R_{11}R_{22}R_{33}mr^2I_{cm} \end{pmatrix}$$

$$e = \begin{pmatrix} Q_{22}R_{11}R_{33}D^2L_2^2t_s^2\text{sen}^2B + Q_{22}R_{11}R_{22}t_s^2 + R_{11}R_{22}R_{33}I_{cm}^2 \end{pmatrix}$$

La inversa será multiplicada por el siguiente termino de la ley de control $f_1^T(\bar{x}(N-k))$.

$$- [f_1^T(\bar{x}(N-k))Qf_1(\bar{x}(N-k)) + R]^{-1}f_1^T(\bar{x}(N-k)) \quad (6.17)$$

la ecuación (6.17) esta formada de la siguiente manera.

$$\begin{pmatrix} -\frac{a}{(d+e)} & -CDL_1L_2Q_{22}R_{33}t_s^2\frac{\text{sen}^2B}{(d+e)} & CL_1Q_{22}R_{22}t_s^2\frac{\text{sen}B}{(d+e)} \\ -CDL_1L_2Q_{22}R_{33}t_s^2\frac{\text{sen}^2B}{(d+e)} & -\frac{b}{(d+e)} & -DL_2Q_{22}R_{11}t_s^2\frac{\text{sen}B}{(d+e)} \\ CL_1Q_{22}R_{22}t_s^2\frac{\text{sen}B}{(d+e)} & -DL_2Q_{22}R_{11}t_s^2\frac{\text{sen}B}{(d+e)} & -\frac{c}{(d+e)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & CL_1t_s\frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}} \\ 0 & -DL_2t_s\frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}} \\ 0 & \frac{t_s}{mr^2+I_{cm}} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el resultado de la ecuación (6.17) es el siguiente.

$$\begin{pmatrix} 0 & CL_1Q_{22}R_{22}t_s^3 \frac{\text{sen}B}{(mr^2+I_{cm})(f+g)} - CL_1t_s \frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}} \frac{i}{f+g} + CD^2L_1L_2^2Q_{22}R_{33}t_s^3 \frac{\text{sen}^3B}{(mr^2+I_{cm})(f+g)} \\ 0 & DL_2t_s \frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}} \frac{j}{f+g} - DL_2Q_{22}R_{11}t_s^3 \frac{\text{sen}B}{(mr^2+I_{cm})(f+g)} - C^2DL_1^2L_2Q_{22}R_{33}t_s^3 \frac{\text{sen}^3B}{(mr^2+I_{cm})(f+g)} \\ 0 & C^2L_1^2Q_{22}R_{22}t_s^3 \frac{\text{sen}^2B}{(mr^2+I_{cm})(f+g)} - \frac{t_s}{mr^2+I_{cm}} \frac{l}{f+g} + D^2L_2^2Q_{22}R_{11}t_s^3 \frac{\text{sen}^2B}{(mr^2+I_{cm})(f+g)} \end{pmatrix}$$

donde:

$$f = \left(Q_{22}R_{22}R_{33}C^2L_1^2t_s^2\text{sen}^2B + R_{11}R_{22}R_{33}m^2r^4 + 2R_{11}R_{22}R_{33}mr^2I_{cm} \right)$$

$$g = \left(Q_{22}R_{11}R_{33}D^2L_2^2t_s^2\text{sen}^2B + Q_{22}R_{11}R_{22}t_s^2 + R_{11}R_{22}R_{33}I_{cm}^2 \right)$$

$$h = \left(mr^2 + I_{cm} \right)$$

$$i = \left(\begin{array}{c} R_{22}R_{33}m^2r^4 + 2R_{22}R_{33}mr^2I_{cm} + Q_{22}R_{33}D^2L_2^2t_s^2\text{sen}^2B + Q_{22}R_{22}t_s^2 + \\ R_{22}R_{33}I_{cm}^2 \end{array} \right)$$

$$j = \left(\begin{array}{c} Q_{22}R_{33}C^2L_1^2t_s^2\text{sen}^2B + R_{11}R_{33}m^2r^4 + 2R_{11}R_{33}mr^2I_{cm} + Q_{22}R_{11}t_s^2 + \\ R_{11}R_{33}I_{cm}^2 \end{array} \right)$$

$$l = \left(\begin{array}{c} Q_{22}R_{22}C^2L_1^2t_s^2\text{sen}^2B + R_{11}R_{22}m^2r^4 + 2R_{11}R_{22}mr^2I_{cm} + Q_{22}R_{11}D^2L_2^2 \\ t_s^2\text{sen}^2B + R_{11}R_{22}I_{cm}^2 \end{array} \right)$$

Posteriormente se resuelve la siguiente ecuación.

$$Q * f_0(\bar{x}(N - k)) \quad (6.18)$$

resolviendo.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A)(t_s) + B \\ \frac{(M_p)(g)(L_m)(\text{sen}B)(t_s)}{I_{cm}+mr^2} - \left(\frac{b}{I_{cm}+mr^2}\right)(A)(t_s) + A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{11}(B + At_s) + Q_{12}\left(A - Ab\frac{t_s}{mr^2+I_{cm}} + M_p g L_m t_s \frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}}\right) \\ Q_{21}(B + At_s) + Q_{22}\left(A - Ab\frac{t_s}{mr^2+I_{cm}} + M_p g L_m t_s \frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para obtener finalmente la ley de control Sub-óptima, se multiplicaran los resultados de las ecuaciones (6.17) y (6.18)

$$(-[f_1^T(\bar{x}(N - k))Qf_1(\bar{x}(N - k)) + R]^{-1}f_1^T(\bar{x}(N - k))) * (Qf_0(\bar{x}(N - k))) \quad (6.19)$$

Resolviendo la ecuación (6.19) la ley de control Sub-óptima para cada actuador del exoesqueleto es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} (m) \left(CL_1 Q_{22} R_{22} t_s^3 \frac{\text{sen}B}{(mr^2+I_{cm})(q+r)} - CL_1 t_s \frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}} \frac{s}{q+r} + v \right) \\ (n) \left(DL_2 Q_{22} R_{11} t_s^3 \frac{\text{sen}B}{(mr^2+I_{cm})(q+r)} - DL_2 t_s \frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}} \frac{t}{q+r} + w \right) \\ (p) \left(C^2 L_1^2 Q_{22} R_{22} t_s^3 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2+I_{cm})(q+r)} - \frac{t_s}{mr^2+I_{cm}} \frac{u}{q+r} + z \right) \end{pmatrix}$$

donde:

$$m = \left(Q_{21}(B + At_s) + Q_{22}\left(A - Ab\frac{t_s}{mr^2+I_{cm}} + M_p g L_m t_s \frac{\text{sen}B}{mr^2+I_{cm}}\right) \right)$$

$$n = - \left(Q_{21} (B + At_s) + Q_{22} \left(A - Ab \frac{t_s}{mr^2 + I_{cm}} + M_p g L_m t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{cm}} \right) \right)$$

$$p = \left(Q_{21} (B + At_s) + Q_{22} \left(A - Ab \frac{t_s}{mr^2 + I_{cm}} + M_p g L_m t_s \frac{\text{sen} B}{mr^2 + I_{cm}} \right) \right)$$

$$q = \left(Q_{22} R_{22} R_{33} C^2 L_1^2 t_s^2 \text{sen}^2 B + R_{11} R_{22} R_{33} m^2 r^4 + 2 R_{11} R_{22} R_{33} m r^2 I_{cm} \right)$$

$$r = \left(Q_{22} R_{11} R_{33} D^2 L_2^2 t_s^2 \text{sen}^2 B + Q_{22} R_{11} R_{22} t_s^2 + R_{11} R_{22} R_{33} I_{cm}^2 \right)$$

$$s = \left(\begin{array}{c} R_{22} R_{33} m^2 r^4 + 2 R_{22} R_{33} m r^2 I_{cm} + Q_{22} R_{33} D^2 L_2^2 t_s^2 \text{sen}^2 B + Q_{22} R_{22} t_s^2 + \\ R_{22} R_{33} I_{cm}^2 \end{array} \right)$$

$$t = \left(\begin{array}{c} Q_{22} R_{33} C^2 L_1^2 t_s^2 \text{sen}^2 B + R_{11} R_{33} m^2 r^4 + 2 R_{11} R_{33} m r^2 I_{cm} + Q_{22} R_{11} t_s^2 + \\ R_{11} R_{33} I_{cm}^2 \end{array} \right)$$

$$u = \left(\begin{array}{c} Q_{22} R_{22} C^2 L_1^2 t_s^2 \text{sen}^2 B + R_{11} R_{22} m^2 r^4 + 2 R_{11} R_{22} m r^2 I_{cm} + Q_{22} R_{11} D^2 L_2^2 \\ t_s^2 \text{sen}^2 B + R_{11} R_{22} I_{cm}^2 \end{array} \right)$$

$$v = \left(C D^2 L_1 L_2^2 Q_{22} R_{33} t_s^3 \frac{\text{sen}^3 B}{(mr^2 + I_{cm})(q+r)} \right)$$

$$w = \left(C^2 D L_1^2 L_2 Q_{22} R_{33} t_s^3 \frac{\text{sen}^3 B}{(mr^2 + I_{cm})(q+r)} \right)$$

$$z = \left(D^2 L_2^2 Q_{22} R_{11} t_s^3 \frac{\text{sen}^2 B}{(mr^2 + I_{cm})(q+r)} \right)$$

Simplificando el resultado de la ecuación la ley de control Sub-óptima queda de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} J = & 2R_{11}R_{22}R_{33}I_{cm}^2 + 2Q_{22}R_{11}R_{22}t_s^2 + 2m^2r^4R_{11}R_{22}R_{33} \\ & + D^2L_2^2Q_{22}R_{11}R_{33}t_s^2 + 4mr^2R_{11}R_{22}R_{33}I_{cm}C^2L_1^2Q_{22}R_{22}R_{33}t_s^2 \\ & + C^2L_1^2Q_{22}R_{22}R_{33}t_s^2\text{sen}2B + D^2L_2^2Q_{22}R_{11}R_{33}t_s^2\text{sen}2B \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} H = & AQ_{22}I_{cm} + BQ_{21}I_{cm} - AbQ_{22}t_s + AQ_{21}t_sI_{cm} + Amr^2Q_{22} + Bmr^2Q_{21} \\ & + Amr^2Q_{21}t_s + M_p g L_m Q_{22} t_s \text{sen} B \end{aligned} \quad (6.21)$$

por lo tanto la Ley de control Sub-óptimo es:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2CL_1R_{22}R_{33}t_s \frac{\text{sen}B}{J} (H) \\ 2DL_2R_{11}R_{33}t_s \frac{\text{sen}B}{J} (H) \\ -2R_{11}R_{22} \frac{t_s}{J} (H) \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

6.1.3. Simulación del control Sub-óptimo

Para verificar el desempeño del control sub-óptimo se realizó una simulación con el modelo obtenido en (3.13) implementando un perfil de velocidad en Simulink de Matlab. El diagrama de bloques de dicha simulación se observa en la figura 6.1. Los parámetros de simulación se observan en la tabla 6.1.

Tabla 6.1: Parámetros de simulación del control Sub-óptimo

M_p	5
L_m	0.35
I_{cm}	0.0469
m	200
r	2
L_1	0.0532
L_2	0.0532
b	0.010
t_s	0.05

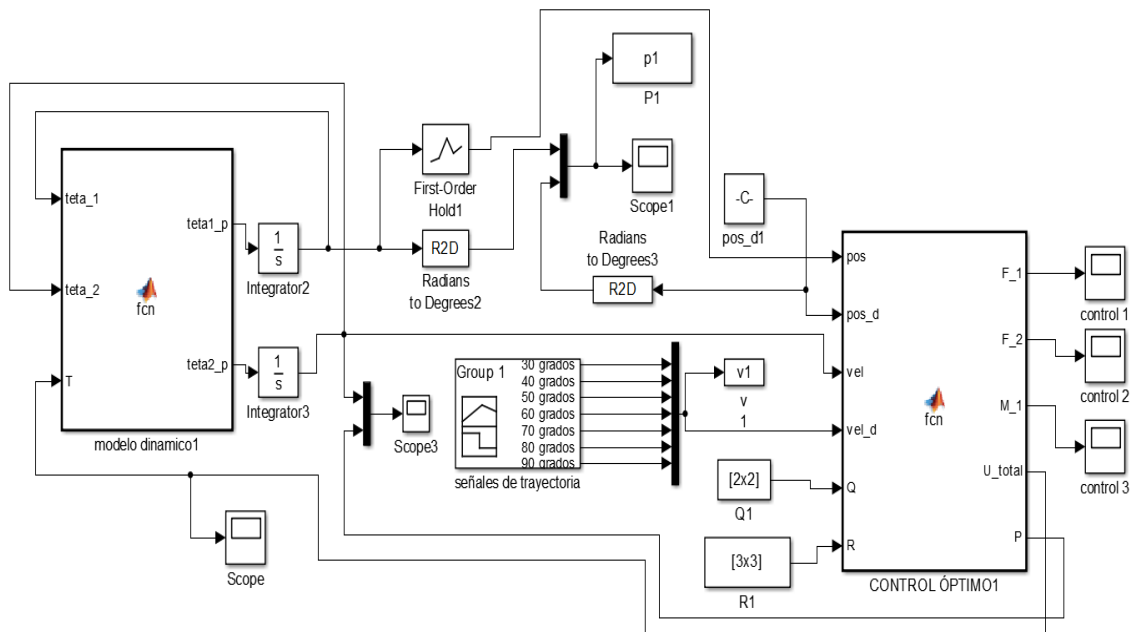


Figura 6.1: Simulación del control Sub-Óptimo

A continuación se presentan los resultados de la simulación del control Sub-óptimo donde se observa la posición angular de la articulación del codo del exoesqueleto que comienza de 20 grados hasta llegar a 90 grados y la velocidad angular con un perfil determinado.

Posición de 20° a 30°, figura 6.2. Posición de 20° a 40°, figura 6.2.

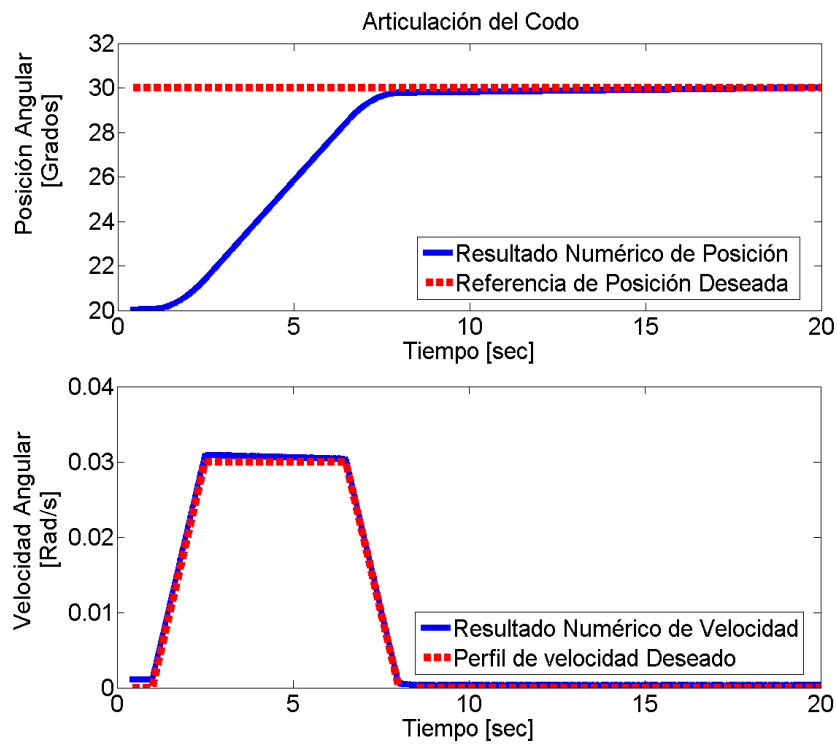


Figura 6.2: Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 30°.

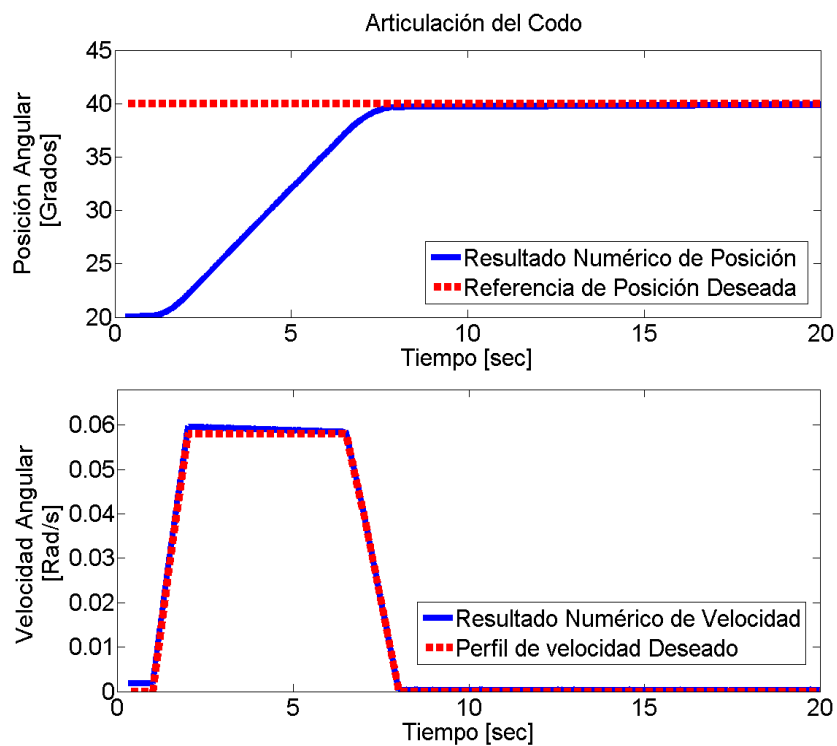


Figura 6.3: Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 40°.

Posición de 20° a 50°, figura 6.4. Posición de 20° a 60°, figura 6.5.

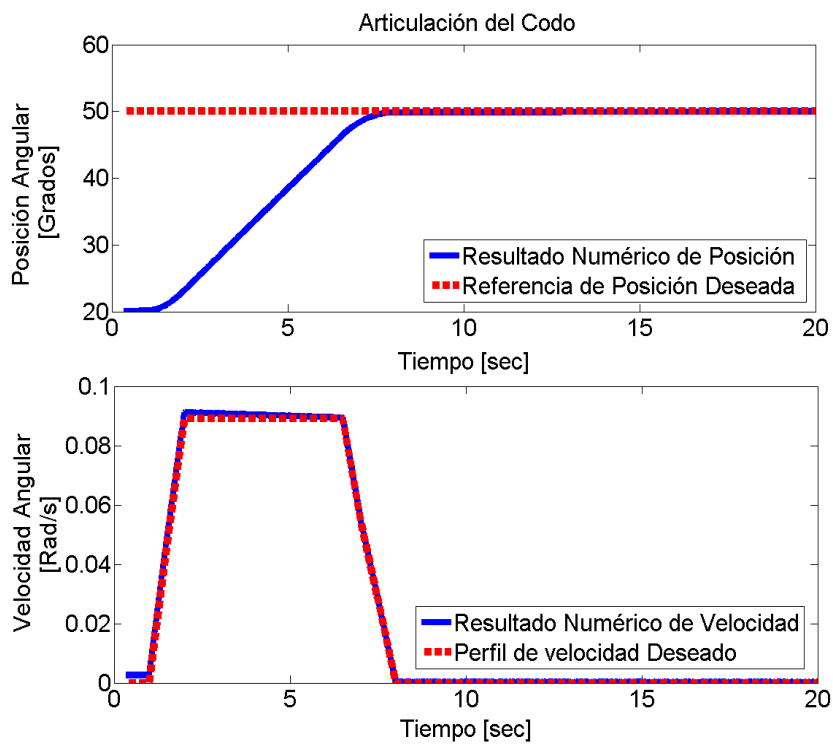


Figura 6.4: Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 50°.

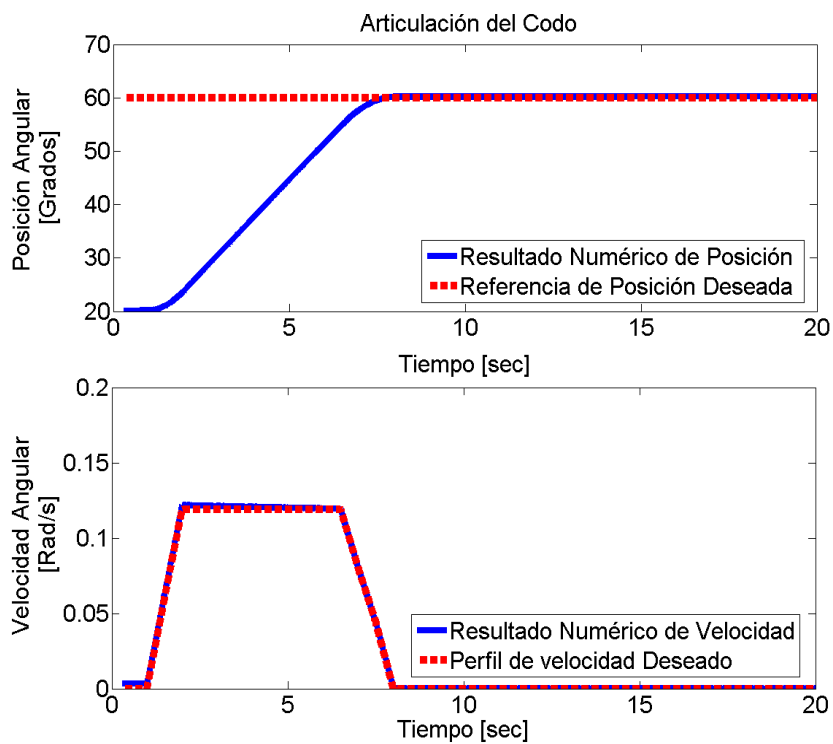


Figura 6.5: Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 60°.

Posición de 20° a 70° , figura 6.6. Posición de 20° a 80° , figura 6.7.

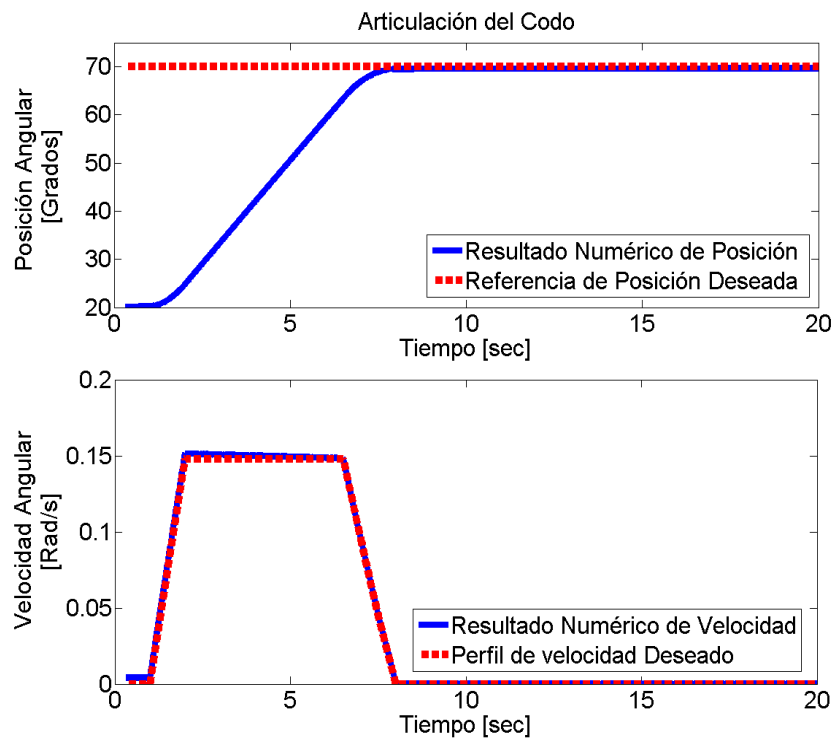


Figura 6.6: Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 70° .

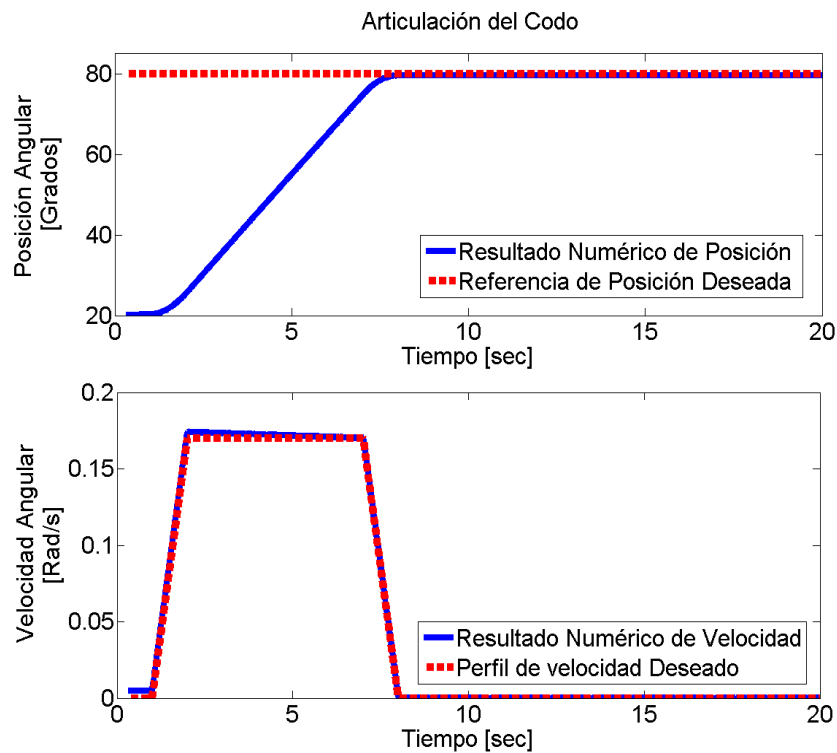


Figura 6.7: Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 80° .

Posición de 20° a 90° , figura 6.8.

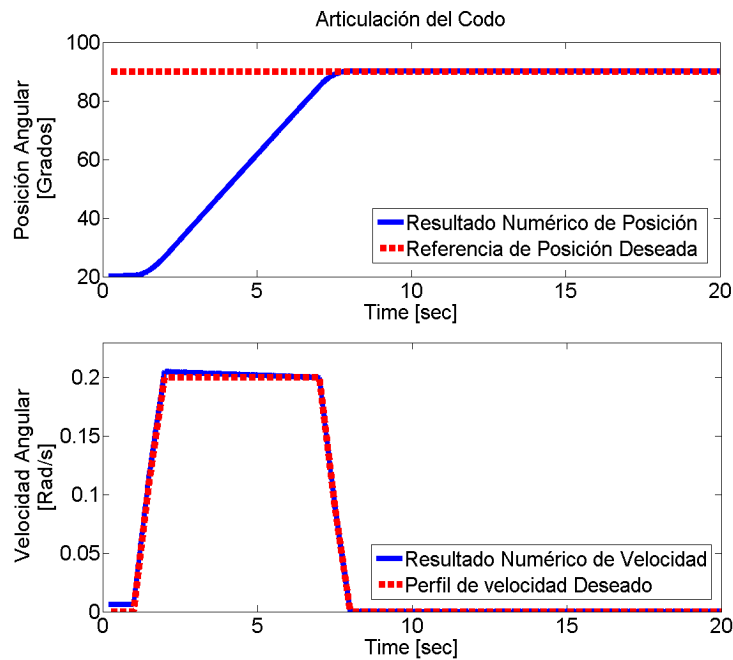


Figura 6.8: Simulación del control Sub-Óptimo de la posición angular a 90° .

La simulación del control Sub-óptimo demuestra que es factible el uso de este controlador, ya que llega con suavidad a la posición deseada, y el perfil de velocidad empleado muestra claramente que la velocidad al principio incrementa lentamente hasta mantenerse constante, posteriormente esta empieza a disminuir para llegar a la posición deseada. El consumo de energía en este controlador es bajo comparado con el PD, en la figura 6.9, se observa que al inicio es algo alta pero después decae y se estabiliza.

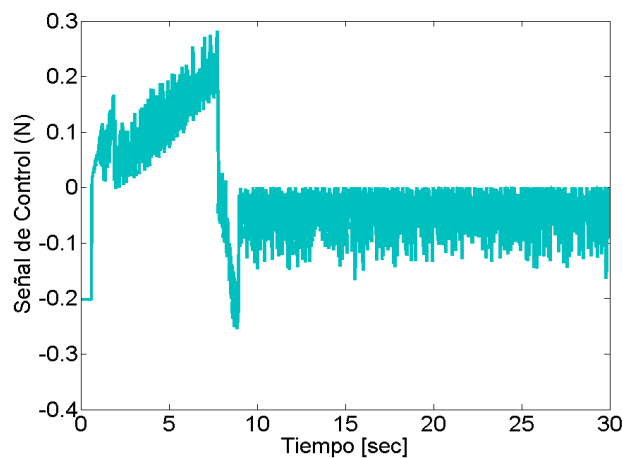


Figura 6.9: Señal de control Sub-óptimo.

6.2. Control PD

El control Proporcional - Derivativo PD es una extensión inmediata del control Proporcional con retroalimentación de velocidad. Como su nombre indica, la Ley de control está formada no solo por un término proporcional al error de posición $\tilde{\theta}$ como el controlador Proporcional con retroalimentación de velocidad, sino también por otro término proporcional a su derivada, i.e., al error de velocidad $\dot{\tilde{\theta}}$. La Ley de control PD viene dada por:

$$\tau = K_p \tilde{\theta} + K_v \dot{\tilde{\theta}} \quad (6.23)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas seleccionadas adecuadamente por el diseñador.

El control PD es local en el sentido que el par o fuerza determinado por dicho controlador, y a ser aplicado en una articulación, sólo depende de la posición y velocidad de dicha articulación y no de las demás articulaciones. Este hecho se traduce en una selección diagonal de las matrices de diseño K_p y K_v . [30]

6.2.1. Simulación del Control PD

Para verificar el desempeño del control PD se realizó una simulación en Simulink de Matlab del movimiento de flexión y extensión con el modelo obtenido en (3.13). El diagrama de bloques de dicha simulación se observa en la figura 6.10, y los parámetros de simulación se observan en la tabla 6.2.

Tabla 6.2: Parámetros de simulación del control PD+G

Mp	5
Lm	0.35
Icm	0.0469
m	200
r	2
L1	0.0532
L2	0.0532
b	0.010

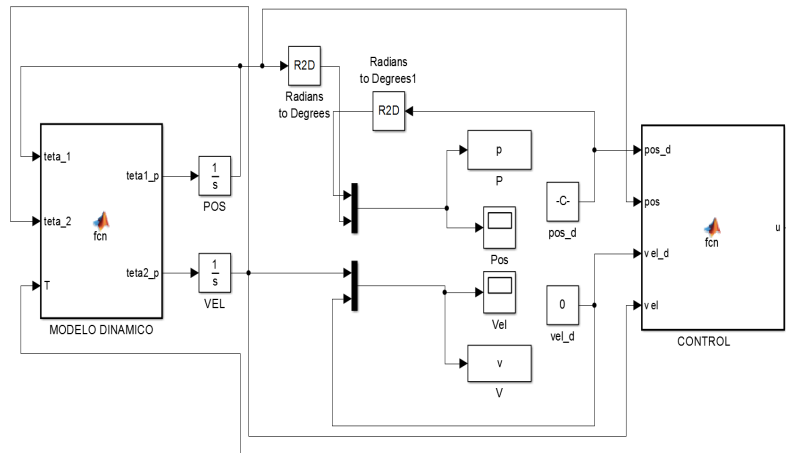


Figura 6.10: Simulación del controlador PD

En las figuras 6.11, 6.12, 6.13, 6.14 y 6.15, se presentan los resultados de la simulación del control PD, donde se observa la posición angular de la articulación del codo en el exoesqueleto que comienza de 20° hasta llegar a 90° y la velocidad angular de cada movimiento.

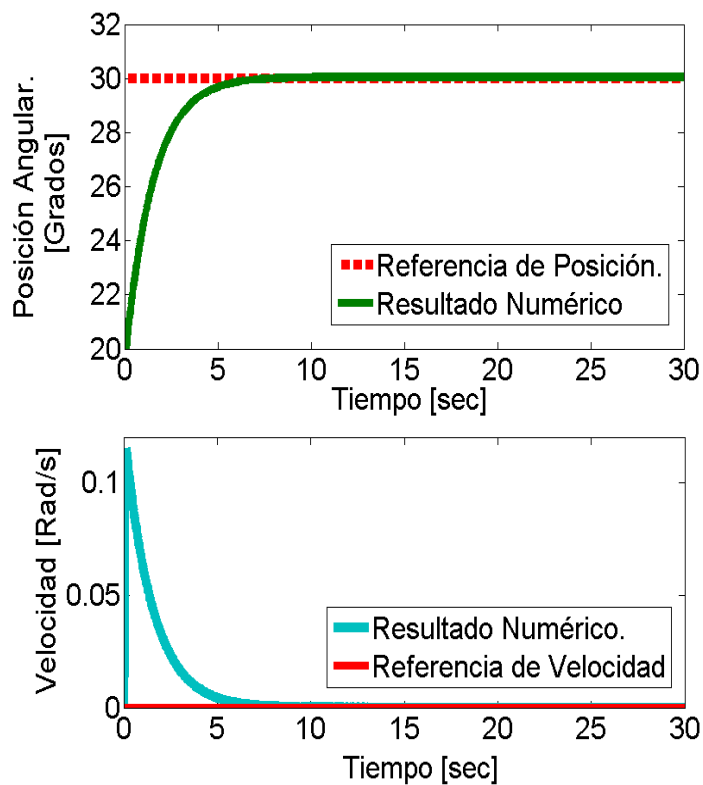


Figura 6.11: Posición y Velocidad a 20° en la articulación del codo del exoesqueleto.

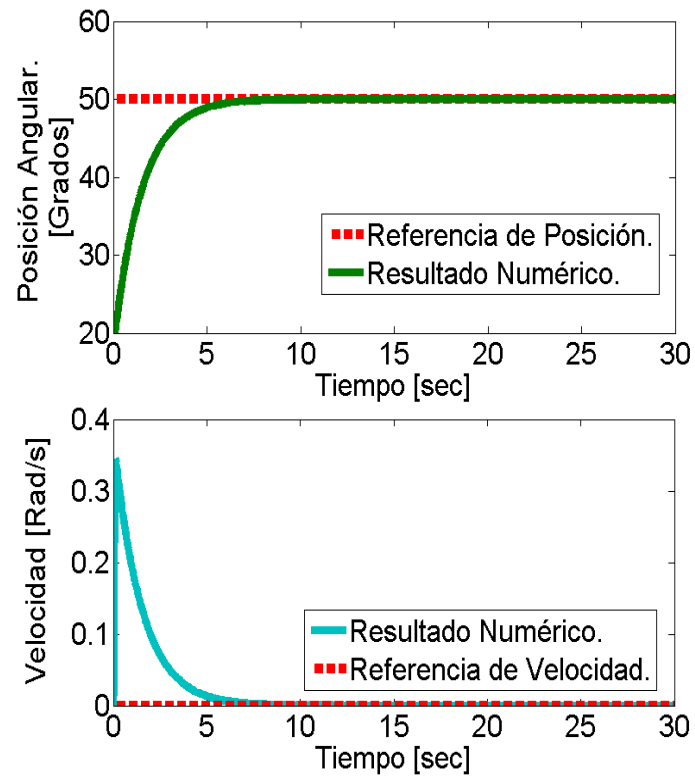


Figura 6.12: Posición y Velocidad a 50° en la articulación del codo del exoesqueleto.

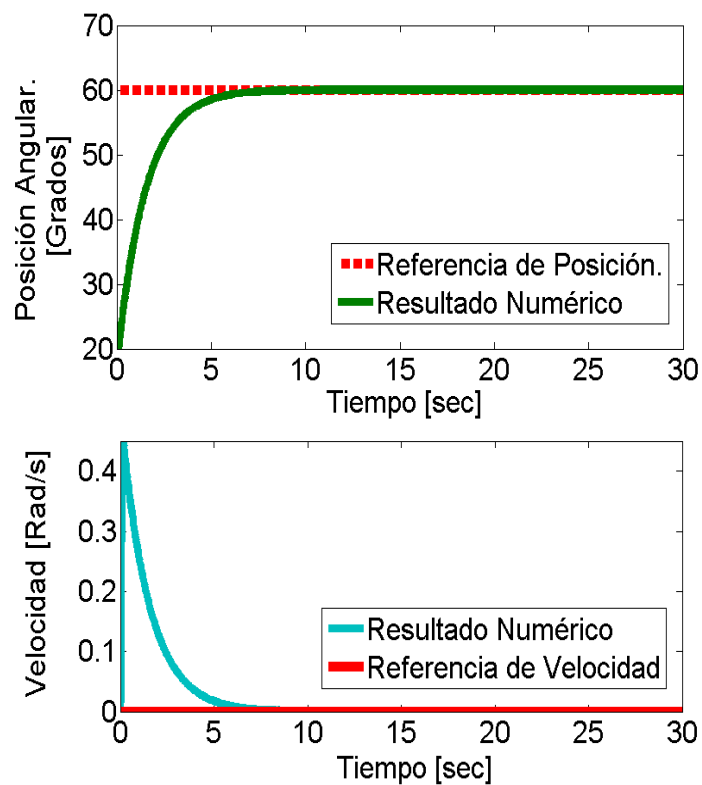


Figura 6.13: Posición y Velocidad a 60° en la articulación del codo del exoesqueleto.

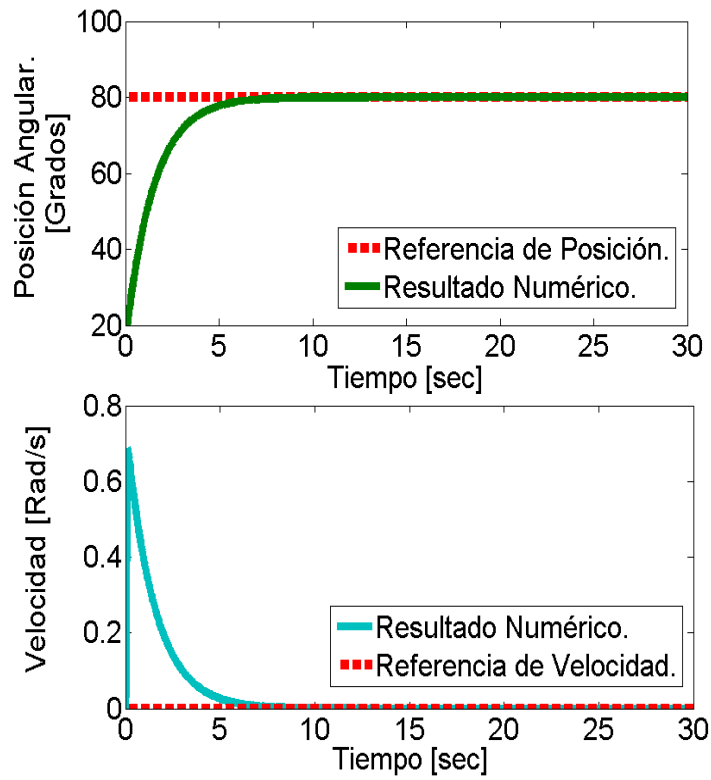


Figura 6.14: Posición y Velocidad a 80° en la articulación del codo del exoesqueleto.

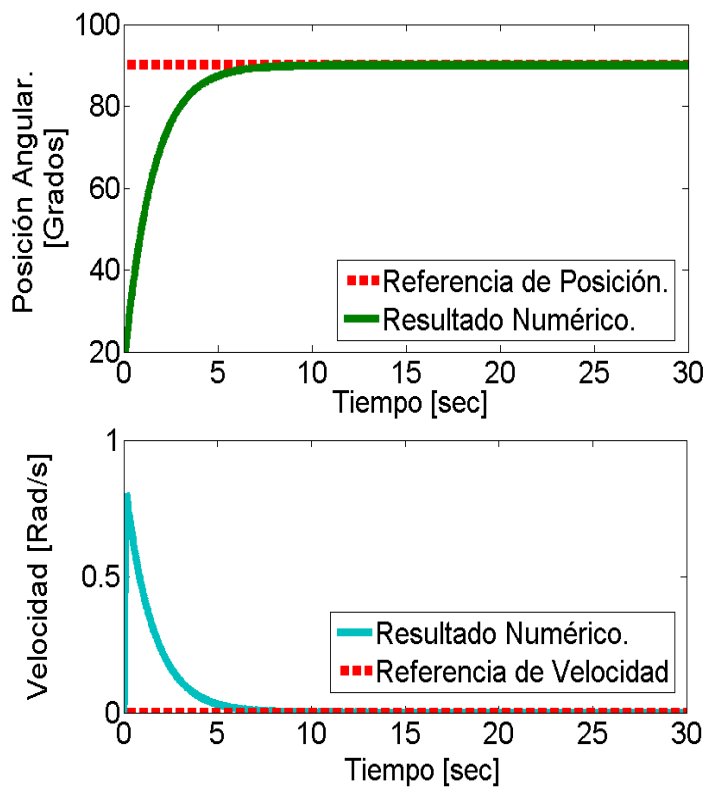


Figura 6.15: Posición y Velocidad a 90° en la articulación del codo del exoesqueleto.

La simulación del control PD, nos arroja resultados bastante favorables, en las gráficas anteriores se observó el comportamiento de la posición angular y de la velocidad en la articulación del codo. Es notable que la articulación llega a la posición deseada, en comparación con el controlador Sub-óptimo este tiene un mayor desgaste de energía. En la figura 6.16, se observa la gráfica del consumo de energía del controlador PD.

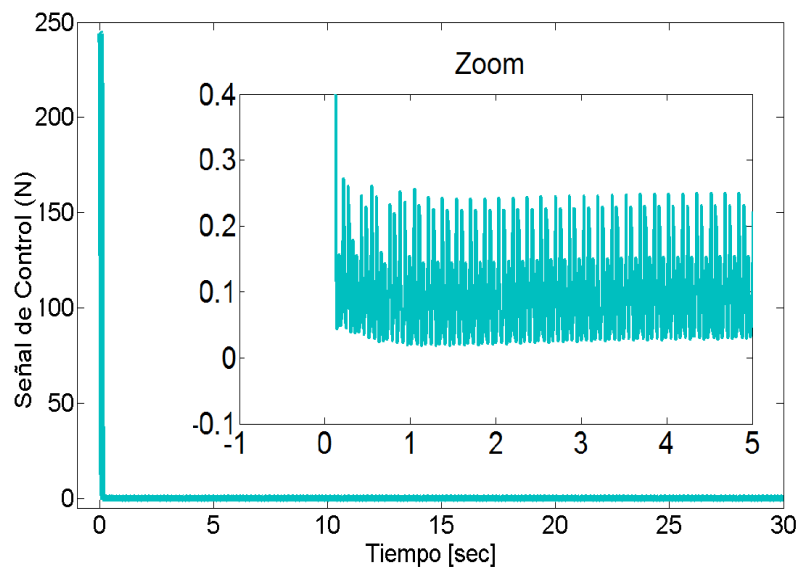


Figura 6.16: Señal de control PD.

6.3. Conclusión

Se obtuvo la ley de control Sub-óptima en tiempo discreto para cada uno de los actuadores, esta ley de control sólo llegó a simulación ya que el procesador utilizado en el prototipo propuesto en esta tesis no tiene la capacidad computacional que se requiere; debido a esto se propone una estrategia de control PD para posición en la articulación del exoesqueleto, este controlador se simuló para verificar su comportamiento tanto en posición angular como en velocidad angular.

Resultados Experimentales

En el capítulo 5 se habló del funcionamiento y características tanto del motor Harmonic Drive como de los músculos neumáticos. En este capítulo hablaremos de los resultados que brindaron estos dos tipos de actuadores controlados mediante la ley de control PD, el cual se implementó en la tarjeta Arduino Mega 2560. Los actuadores se pusieron a prueba independientemente y posteriormente en conjunto, esto es para observar si el sistema híbrido funcionara correctamente, a continuación se presentan las gráficas del comportamiento de estos actuadores.

7.1. Resultados Experimentales del Motor Harmonic Drive con Control PD

En las siguientes gráficas se observa en color rojo la posición angular deseada, en verde se visualiza el resultado numérico de la simulación del controlador PD y en color azul se observa la gráfica del comportamiento físico del motor Harmonic Drive. En las figuras 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4, se presentan los resultados experimentales del Motor Harmonic Drive utilizando el controlador PD, se observa la posición angular de la articulación del codo en el exoesqueleto. Como se puede observar en las gráficas, el motor Harmonic Drive tiene un comportamiento muy similar al resultado de simulación. El controlador propuesto (PD) satisface claramente la necesidad deseada en este actuador, llegando a la referencia sin sobresalto alguno, esto es bastante favorable para el exoesqueleto ya que si hubiera alguno causaría inconvenientes en el sistema de flexión y extensión de la articulación del codo.

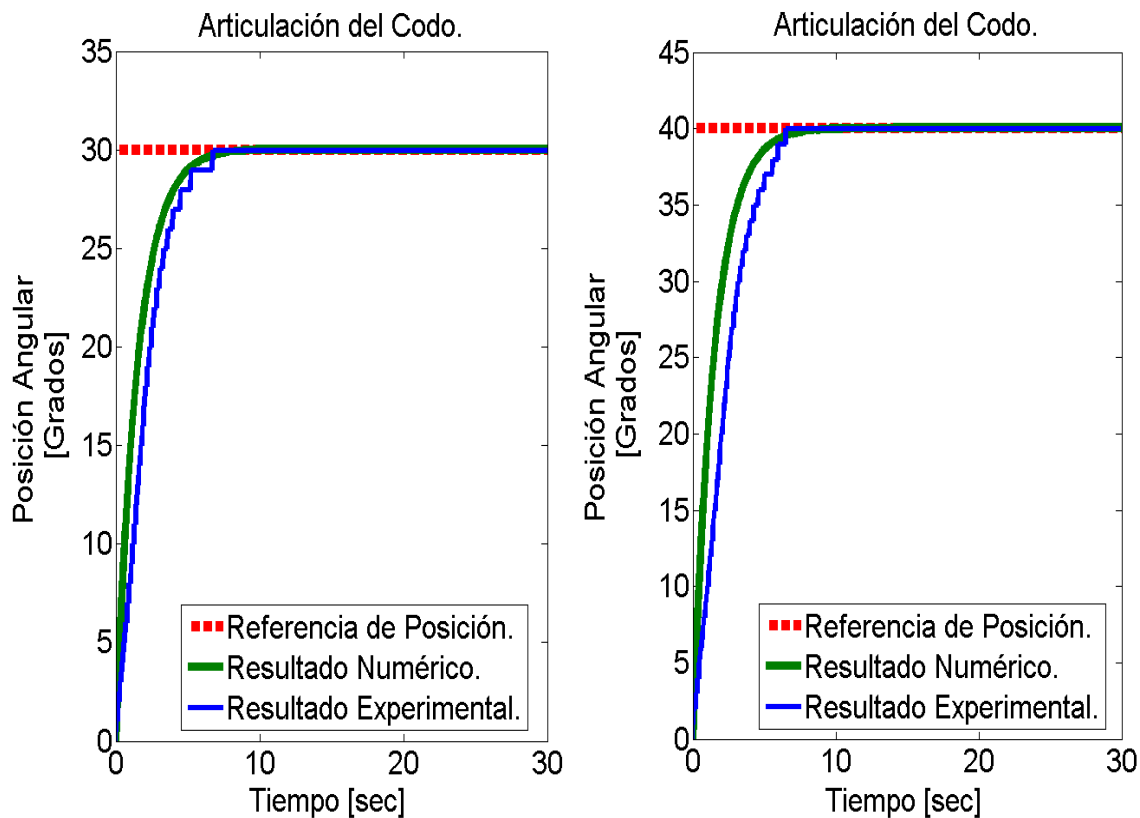


Figura 7.1: Posición angular a 30° y 40° con el Motor Harmonic.

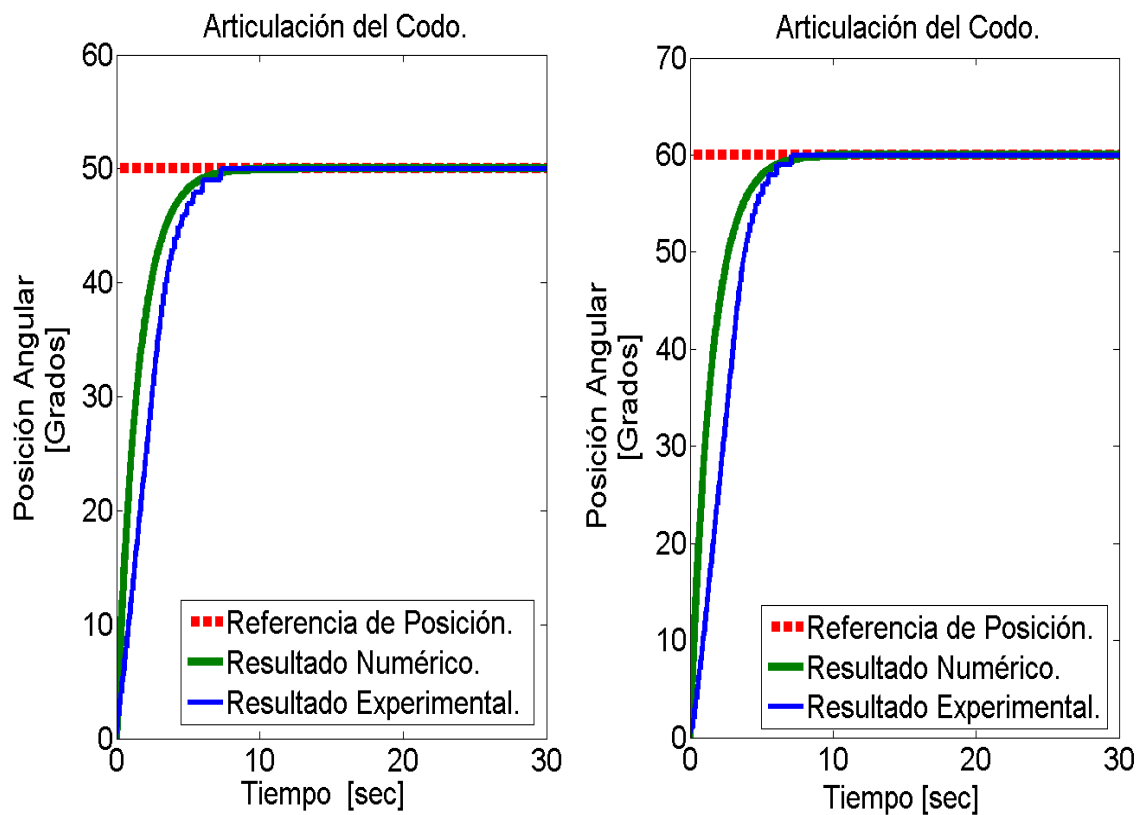


Figura 7.2: Posición angular a 50° y 60° con el Motor Harmonic.

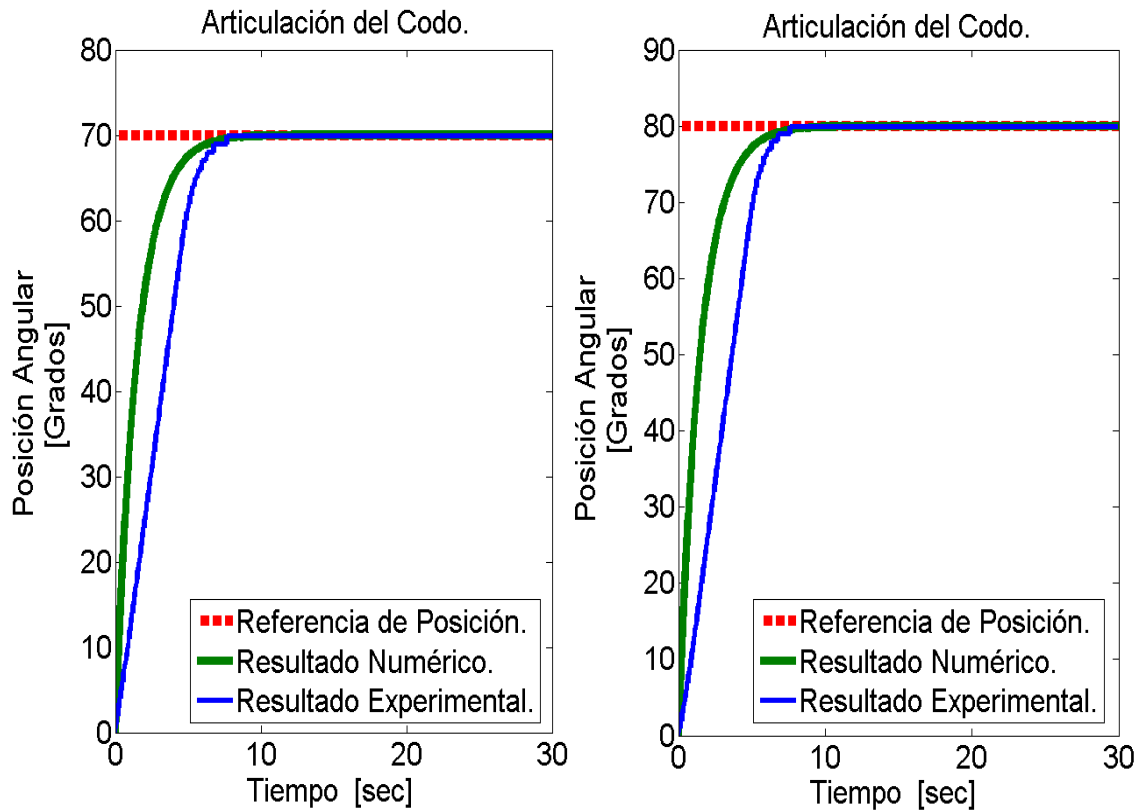


Figura 7.3: Posición angular a 70° y 80° con el Motor Harmonic.

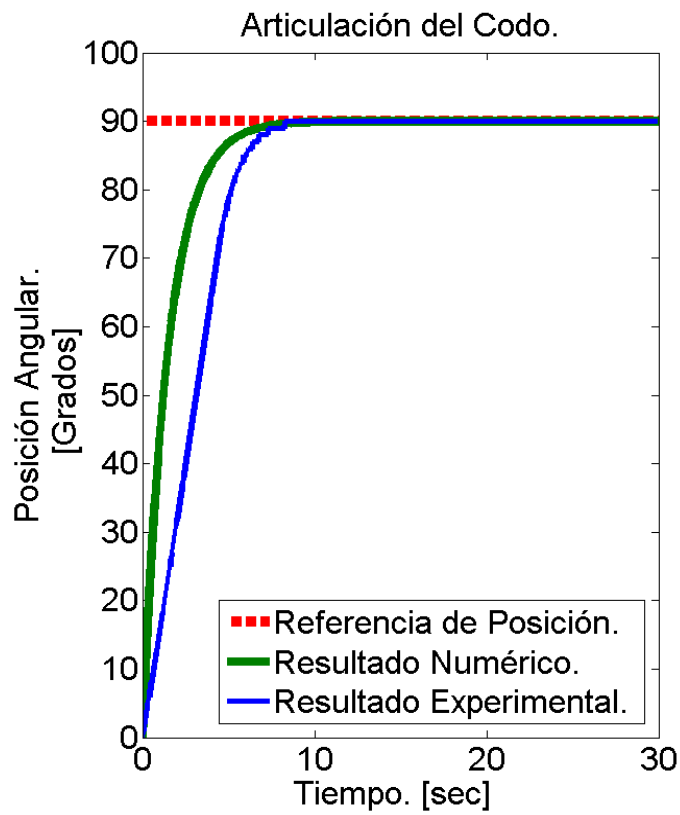


Figura 7.4: Posición angular a 90° con el Motor Harmonic.

7.2. Resultados Experimentales del Control PD de los Músculos Neumáticos

En las siguientes gráficas se observa en color rojo la posición angular deseada, en verde se visualiza el resultado numérico de la simulación del controlador PD y en color azul se observa la gráfica del comportamiento físico de los Músculos Neumáticos. En las figuras 7.5, 7.6 y 7.7, se presentan los resultados experimentales de los Músculos Neumáticos utilizando el controlador PD.

Como se puede observar en las gráficas, los Músculos Neumáticos tiene un comportamiento muy lineal y casi no siguen el comportamiento de la simulación. El controlador propuesto (PD) satisface muy poco la necesidad deseada en este actuador, ya que si llega a la referencia deseada de posición sin sobresalto alguno, pero a diferencia del motor Harmonic este actuador no llega con bastante suavidad y esto no es favorable para la articulación del codo en flexión y extensión.

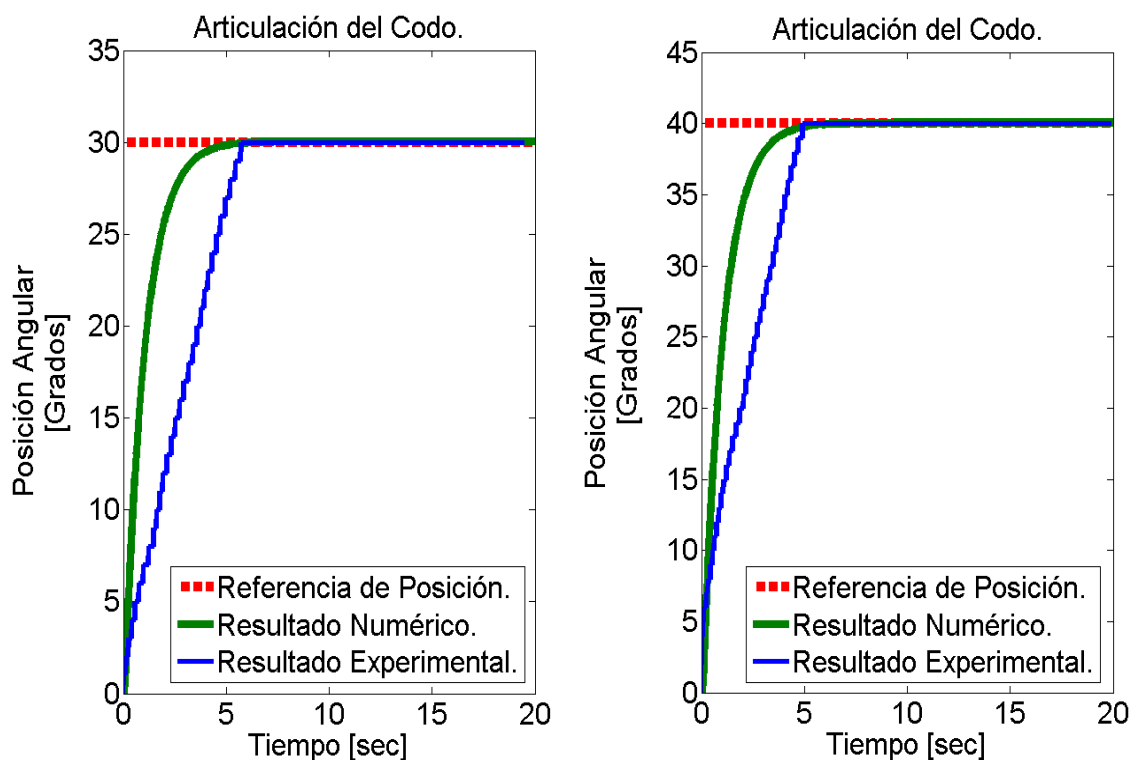


Figura 7.5: Posición angular a 30° y 40° con los Músculos Neumáticos.

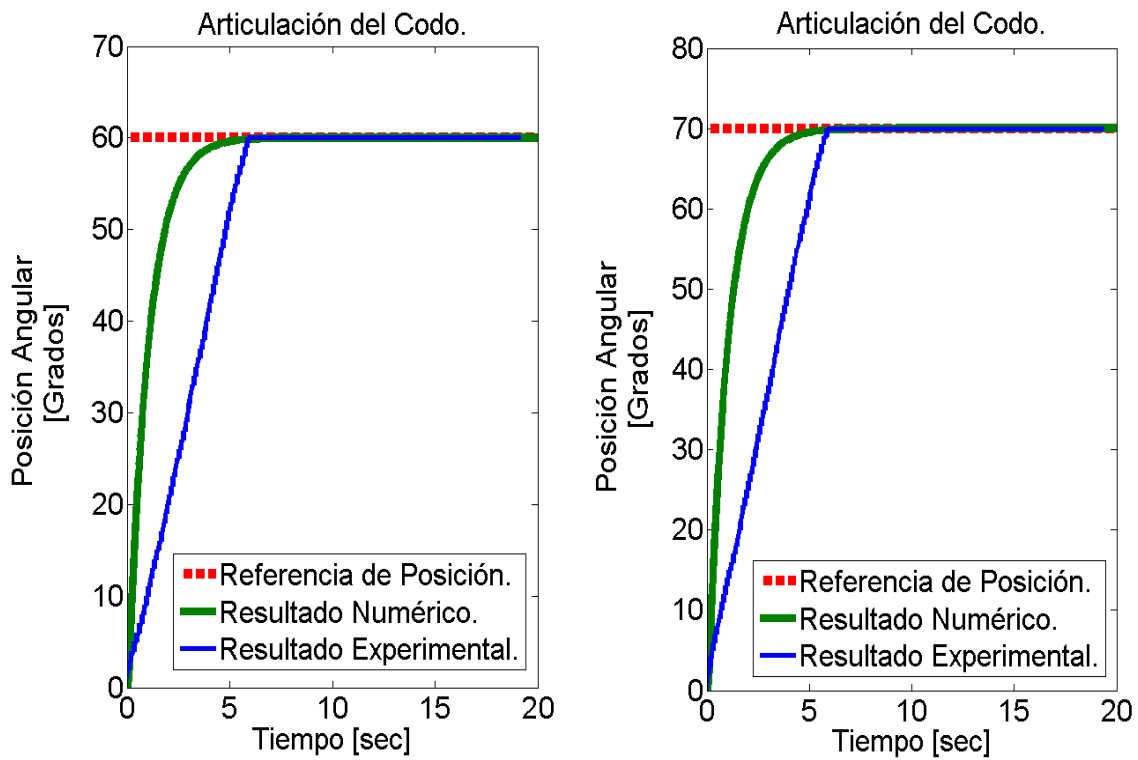


Figura 7.6: Posición angular a 60° y 70° con los Músculos Neumáticos.

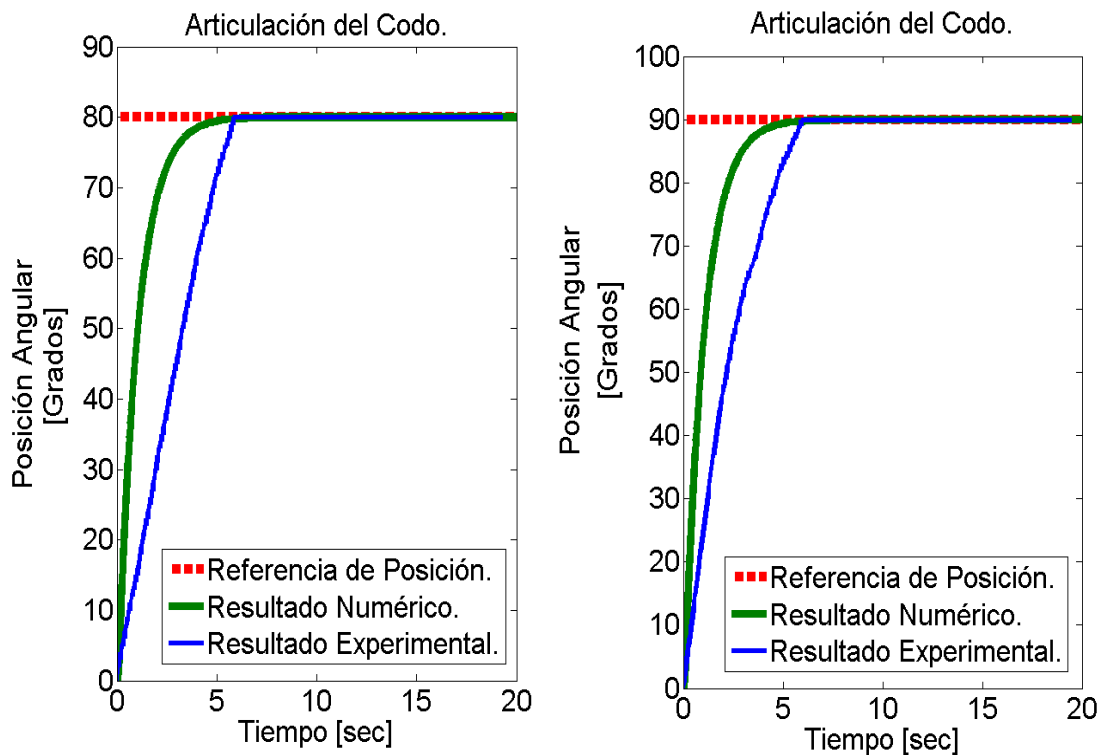


Figura 7.7: Posición angular a 80° y 90° con los Músculos Neumáticos.

7.3. Resultados Experimentales del Control PD en los Motores Harmonic Drive y Músculos Neumáticos

En las siguientes gráficas se observa en color rojo la posición angular deseada, en verde se visualiza el resultado numérico de la simulación del controlador PD y en color azul se observa la gráfica del comportamiento físico de los motores Harmonic Drive y Músculos Neumáticos. Esta unión de actuadores es el sistema híbrido, en las figuras 7.8, 7.9, 7.10 y ??, se presentan los resultados experimentales de sistema Híbrido utilizando el controlador PD.

Como se observo en los resultados anteriores, el motor Harmonic Drive llega a la referencia de posición deseada de una manera suave y sin sobre impulso con un seguimiento casi similar a la simulación, y en los resultados utilizando los Músculos Neumáticos, estos presentaron no seguir la simulación y llegando de una manera muy rápido sin sobre impulso a la referencia.

En las siguientes gráficas están sincronizados los motores Harmonic y Músculos Neumáticos para realizar el movimiento de flexión y extensión de la articulación del codo en el exoesqueleto. Al realizar esta unión de actuadores obtenemos la fuerza de los Músculos Neumáticos con la suavidad del motor Harmonic Drive.

El control propuesto (PD) satisface claramente la necesidad deseada de este sistema híbrido, llegando a la referencia sin sobresalto alguno, y es notable como el comportamiento de los Músculos Neumáticos cambia favorablemente llegando de una manera mas suave a la referencia gracias al motor Harmonic Drive.

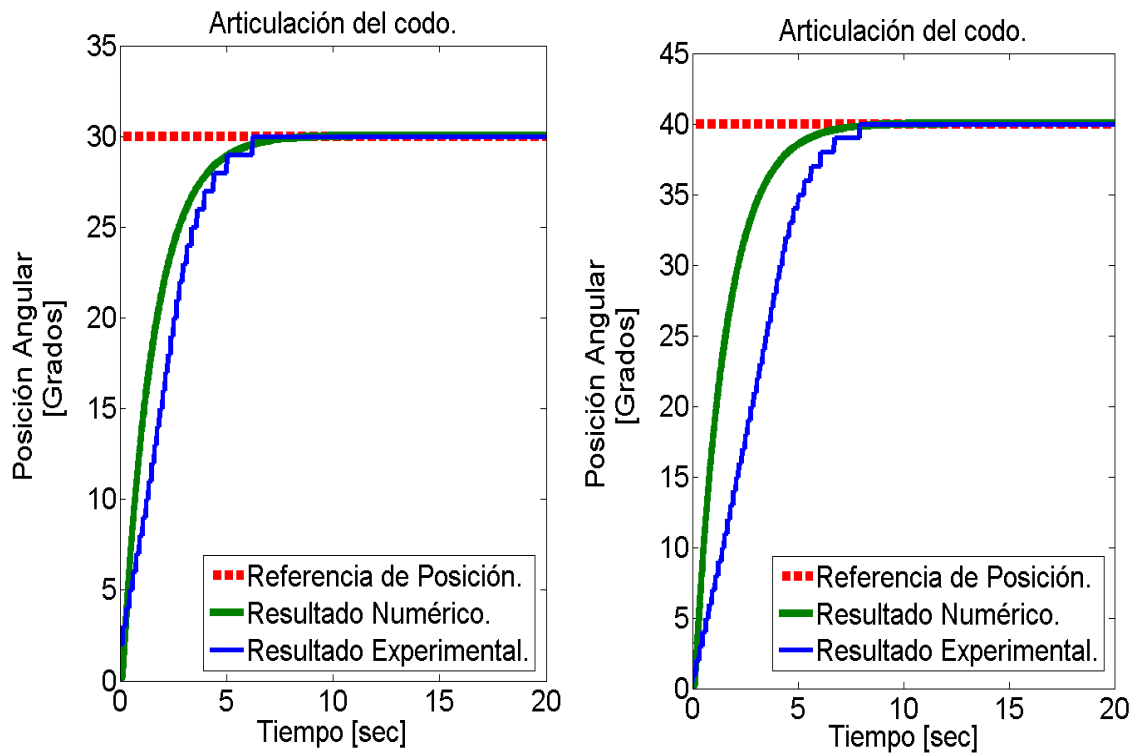


Figura 7.8: Posición angular a 30° y 40° en el sistema Híbrido.

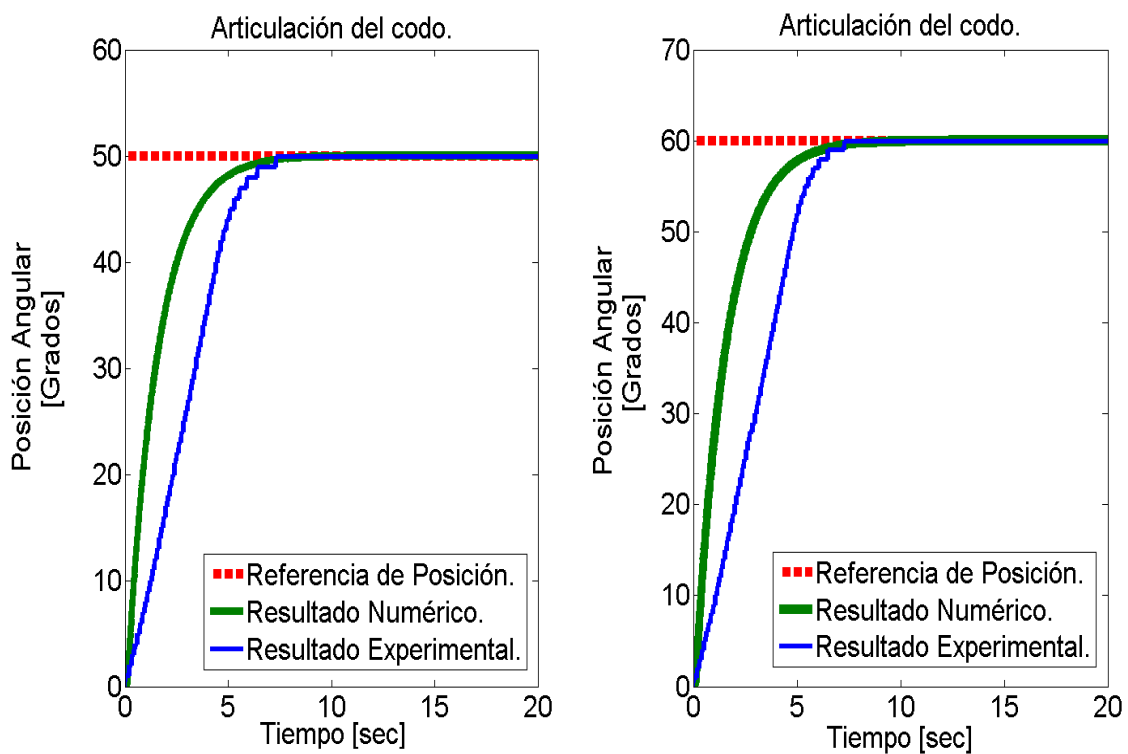


Figura 7.9: Posición angular a 50° y 60° en el sistema Híbrido.

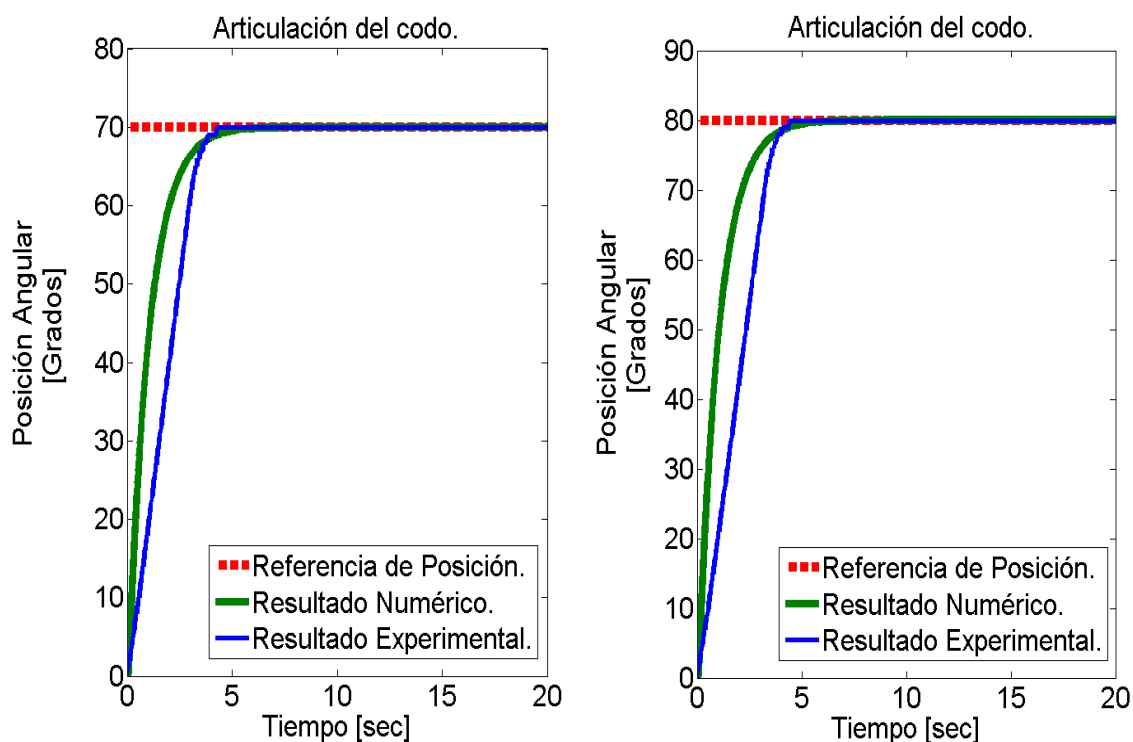


Figura 7.10: Posición angular a 70° y 80° en el sistema Híbrido.

7.4. Conclusión

Las pruebas experimentales realizadas solamente en el motor Harmonic Drive dieron resultados favorables llegando a la referencia con suavidad y de una manera similar a la simulación. En cambio las pruebas experimentales realizadas a los músculos neumáticos no se asemejan a la simulación pero llegan a la referencia deseada sin sobre impulso alguno. esto indica que el motor Harmonic Drive nos da una gran suavidad en el movimiento de flexión y extensión, en cambio el músculo neumático solamente proporciona demasiada fuerza. Esto indica que combinando ambos actuadores tendremos la suavidad del motor y la fuerza del músculo neumático, lo cual se refleja claramente en la gráficas anteriores.

Conclusión y Trabajo Futuro

8.1. Conclusión

La importancia de los exoesqueletos en el área medica, militar, rescate, etc, ha abierto una linea de investigación bastante emplea con diferentes prototipos que ayudan a entender la complejidad de estos aparatos. Esta tesis ha colaborado con investigación de un sistema híbrido en un exoesqueleto de amplificación de fuerza.

Se presento un estudio de los movimientos que puede realizar la articulación del codo, así como los huesos y músculos que intervienen en esta articulación.

El diseño propuesto del exoesqueleto se baso en parámetros basados en la anatomía humana y este alcanzo las expectativas deseadas.

En este trabajo se muestra una comparación entre los movimientos de este exoesqueleto y los de otros proyectos: contrario a otros diseños, nuestro diseño propuesto incluye un sistema híbrido, un rango de flexión y extensión mayor a otros.

La instrumentación llevo a niveles algo costosos por los tipos de actuadores utilizados, la tarjeta de programación y sensores son de gama media pero cumplen satisfactoriamente el funcionamiento exigido para el proyecto, tiene un peso de 9.5 Kg, movilidad, equilibrio y es ajustable para un rango de personas.

Se presento también el modelo dinámico en tiempo continuo y en tiempo discreto, esto se realizo para proponer dos leyes de control. La primer ley obtenida es (Control PD) la cual fue simulada he implementada en la tarjeta de programación Arduino Mega 2560 para realizar pruebas experimentales de flexión y extensión en el exoesqueleto de amplificación de fuerza en la articulación del codo. La segunda es la Ley de control Sub-óptimo, esta ley se propuso para un ahorro de energía, y solo llego a nivel de simulación.

Los resultados experimentales de la ley de control PD son presentados, los dos actuadores trabajando en conjunto forman el sistema Híbrido y los resultados obtenidos son satisfactorios.

Se realizo un articulo sobre el exoesqueleto en el congreso (International conference on Control, Mechatronics and Automation. Barcelona, Spain. ICCMA 2016), el cual ya fue aceptado.

También se presento el exoesqueleto en la exposición hecho Alemania en el Wolter Centery de la Ciudad de México y en la exposición de Emprendedores. Ambos eventos fueron de gran ayuda para ampliar el área de investigación y relacionarse con empresas como FESTO, BMW, SIMES.

8.2. Trabajo Futuro

El prototipo diseñado en este trabajo únicamente ayuda aumentando la fuerza del codo en los movimientos de flexión y extensión de esta articulación. El peso que levanta aun sigue recayendo en el exoesqueleto del ser humano, por lo que se propone realizar el diseño y construcción de las extremidades inferiores del exoesqueleto, de esta manera el ser humano solo cargaría una porción del peso que esta levantando.

Los resultados experimentales con la ley de control PD en el sistema híbrido son satisfactorios, aunque si cambiamos el motor Harmonic Drive por un Motor lineal, colocado donde esta el músculo neumático que asiste al trícep y el músculo que asiste al trícep colocarlo de manera paralela al músculo neumático que asiste al bícep el peso en el exoesqueleto bajaría de una manera significativa y la fuerza generada seria mayo.

Para el sistema neumático es recomendable remplazar las válvulas de accionamiento continuo por las válvulas ultrarrapidas para tener un mejor control en el flujo de aire que entra a los músculos.

El exoesqueleto genera un incremento considerable en la fuerza, para poder levantar los objetos, pero para tomar los objetos solo cuenta con un gancho al final del antebrazo, por lo que es muy considerable colocar un gripper de alta potencia y precisión para tomar los objetos con delicadeza y seguridad.

Una de las mejoras mas importantes la complementación del control Sub-Óptimo en la tarjeta de adquisición de datos en la tarjeta NI myRIO de National Instruments.

Bibliografía

- [1] Ramos, J. L. A., & Meggiolaro, M. A. *Use of surface electromyography for human amplification using an exoskeleton driven by artificial pneumatic muscles*. In 5th IEEE RAS/EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (pp. 585-590). IEEE, 2014, August.
- [2] Ishida, T., Kiyama, T., Osuka, K., Shirogauchi, G., Oya, R., & Fujimoto, H. *Movement analysis of power-assistive machinery with high strength-amplification* In SICE Annual Conference 2010, Proceedings of (pp. 2022-2025). IEEE, 2010, August.
- [3] Perry, J. C., Rosen, J., & Burns, S. *Upper-limb powered exoskeleton design*. IEEE/ASME transactions on mechatronics, 12(4), 408, 2007.
- [4] Tsagarakis, N., Caldwell, D. G., & Medrano-Cerda, G. A. *A 7 DOF pneumatic muscle actuator (pMA) powered exoskeleton*. In Robot and Human Interaction, 1999. RO-MAN'99. 8th IEEE International Workshop on (pp. 327-333). IEEE, 1999.
- [5] Pujana-Arrese, A., Arenas, J., Retolaza, I., Martinez-Esnaola, A., & Landaluze, J. *Modelling in Modelica of a pneumatic muscle: application to model an experimental set-up*. In 21st European conference on modelling and simulation, ECMS (pp. 4-6), 2007, June.
- [6] Pujana-Arrese, A., Mendizabal, A., Arenas, J., Riano, S., & Landaluze, J. *Research on the position control of a 1-DoF set-up powered by pneumatic muscles*. In Mechatronics, 2009. ICM 2009. IEEE International Conference on (pp. 1-6). IEEE, 2009, April.
- [7] Martinez, F., Retolaza, I., Pujana-Arrese, A., Cenitagoya, A., Basurko, J., & Landaluze, J. *Design of a five actuated DoF upper limb exoskeleton oriented to workplace*

- help*. In 2008 2nd IEEE RAS & EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (pp. 169-174). IEEE, 2008, October.
- [8] Noda, T., Teramae, T., Ugurlu, B., & Morimoto, J. *Development of an upper limb exoskeleton powered via pneumatic electric hybrid actuators with bowden cable*. In 2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (pp. 3573-3578). IEEE, 2014, September.
- [9] Agrawal, S. K., Banala, S. K., Fattah, A., Scholz, J. P., Krishnamoorthy, V., & Hsu, W. L. *A Gravity Balancing Passive Exoskeleton for the Human Leg*. In Robotics: Science and Systems, 2006, December.
- [10] Ghafari, A. S., Meghdari, A., & Vossoughi, G. R. *Intelligent control of powered exoskeleton to assist paraplegic patients mobility using hybrid neuro-fuzzy anfis approach*. In 2006 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (pp. 733-738). IEEE, 2006, December.
- [11] Weinberg, B., Nikitczuk, J., Patel, S., Patrilli, B., Mavroidis, C., Bonato, P., & Canavan, P. *Design, control and human testing of an active knee rehabilitation orthotic device*. In Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation (pp. 4126-4133). IEEE, 2007, April.
- [12] López, R., Salazar, S., Torres, J., & Lozano, R. *Modeling and control of a lower limb exoskeleton with two degrees of freedom*. In Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), 2012 9th International Conference on (pp. 1-6). IEEE, 2012, September.
- [13] Aguilar-Sierra, H., Lopez, R., Yu, W., Salazar, S., & Lozano, R. *A lower limb exoskeleton with hybrid actuation*. In 5th IEEE RAS/EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (pp. 695-700). IEEE, 2014, August.
- [14] Zhang, Y., Guo, S., Cao, G., Zhang, S., & Liu, Y. *A novel variable stiffness actuator-based exoskeleton device for home rehabilitation*. In Mechatronics and Automation (ICMA), 2016 IEEE International Conference on (pp. 878-883). IEEE, 2016, August.
- [15] Balasubramanian, S., Huang, H., & He, J. *Quantification of dynamic property of pneumatic muscle actuator for design of therapeutic robot control*. In Engineering

- in Medicine and Biology Society, 2006. EMBS'06. 28th Annual International Conference of the IEEE (pp. 2734-2737). IEEE, 2006, August.
- [16] Noda, T., & Morimoto, J. *Development of upper-extremity exoskeleton driven by pneumatic cylinder toward robotic rehabilitation platform for shoulder elevation.* In 2015 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR) (pp. 496-501). IEEE, 2015, August.
- [17] Kiguchi, K., Tanaka, T., Watanabe, K., & Fukuda, T. *Design and control of an exoskeleton system for human upper-limb motion assist.* In Advanced Intelligent Mechatronics, 2003. AIM 2003. Proceedings. 2003 IEEE/ASME International Conference on (Vol. 2, pp. 926-931). IEEE, 2003, July.
- [18] Carignan, C., & Liszka, M. *Design of an arm exoskeleton with scapula motion for shoulder rehabilitation.* In ICAR'05. Proceedings., 12th International Conference on Advanced Robotics, 2005. (pp. 524-531). IEEE, 2005, July.
- [19] García-Porrero, J. A., & Hurlé, J. M. *Anatomía humana.* McGraw-Hill/Interamericana de España. 2005
- [20] Nordin, M., Frankel, V. H., & Forssén, K. *Biomecánica básica del sistema musculoesquelético.* McGraw-Hill. Interamericana, 2004.
- [21] An, K. N., Hui, F. C., Morrey, B. F., Linscheid, R. L., & Chao, E. Y. *Muscles across the elbow joint: a biomechanical analysis.* Journal of biomechanics, 14(10), 659-669, 1981.
- [22] Atkinson, W. B., & Elftman, H. *he carrying angle of the human arm as a secondary sex character.* The Anatomical Record, 91(1), 49-52, 1945.
- [23] Palmer, A. K., Glisson, R. R., & Werner, F. W. *Ulnar variance determination.* The Journal of hand surgery, 7(4), 376-379, 1982.
- [24] Pearson, J. R., McGinley, D. R., & Butzel, L. M. *A dynamic analysis of the upper extremity: planar motions.* A dynamic analysis of the upper extremity: planar motions, 1963.

- [25] Stormont, T. J., An, K. N., Morrey, B. F., & Chao, E. Y. *Elbow joint contact study: comparison of techniques*. Elbow joint contact study: comparison of techniques, 1985.
- [26] Morrey, B. F., An, K. N., & Stormont, T. J. *Force transmission through the radial head*. J Bone Joint Surg Am, 70(2), 250-256, 1988.
- [27] Resnick, R., Halliday, D., & Krane, K. S. *Física* 1993
- [28] Santos Sanchez, Omar, García, O. , Romero, H., Salazar, S. and Lozano, R. *Finite horizon nonlinear optimal control for a quadrotor: experimental results*. optimal control applications and methods, under review, 2016.
- [29] Kirk, D.E. *Optimal Control Theory: An Introduction, Dover Books on Electrical Engineering Series*. PB Dover Publications, 2004.
- [30] R. Kelly, V. Santibáñez *Control de Movimiento de Robots Manipuladores* Prentice Hall, 2003.