



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Programa de

**Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina**

**“Navegación de un cuadricóptero en  
exteriores sin asistencia de GPS”**

TESIS

Que presenta

**Alejandro Montiel Varela**

Para obtener el grado de

**Maestría en Ciencias**

EN

**Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina**

Directores de la Tesis:

**Dr. Sergio Rosario Salazar Cruz**

**Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez**

México, D.F.

Febrero, 2016



## AGRADECIMIENTOS

Inicialmente quiero agradecer a mis asesores de tesis el Dr. Omar Santos y Dr. Sergio Salazar por haberme enseñado toda la experiencia necesaria acerca de los UAV's, por el apoyo y ayuda que siempre me brindaron en toda la elaboración de esta tesis.

Gracias al Conacyt por el apoyo con una beca para la realización de mis estudios de maestría.

Gracias al Cinvestav-IPN, por la oportunidad de estudiar y desarrollarme profesionalmente.

Gracias al Dr. Iván González Hernández por los consejos y enseñanza brindados.

Gracias a mi familia por su apoyo y sabios consejos para lograr este escalón mas en la vida.

Gracias a mi familia por su apoyo y sabios consejos para lograr este escalón mas en la vida.

Gracias a los sinodales al Dr. Jorge A. Torres Muñoz y al Dr. Antonio Osorio por el tiempo dedicado y sus revisiones sobre esta tesis.

Y claro, gracias a todos mis compañeros de maestría que en todo momento me brindaron su apoyo y ayuda durante este periodo.

A todos ustedes, Gracias.



## RESUMEN

Durante los últimos años las investigaciones relacionadas a los vehículos aéreos no tripulados ha crecido de manera exponencial esto debido a las múltiples tareas como militares y civiles. El cuadricóptero es un vehículo versátil dotado de cuatro motores, que le permite libertad de movimientos, características que lo hacen idóneo para diferentes tareas como: búsqueda, rescate, inspección y vigilancia entre otras.

Para llevar a cabo la navegación autónoma de un cuadricóptero es necesario dotarlo de múltiples sensores, principalmente con un sistema global de posicionamiento (GPS) para determinar la posición y velocidad traslacional del vehículo. Sin embargo existen algunas condiciones que dificultan su uso para llevar a cabo la navegación, esto lo hace un sistema poco fiable; entre estas condiciones se encuentra un clima nublado, vuelos a baja altura y la posibilidad de perder señal con los satélites. Por lo tanto se propone un observador llevando a cabo una aproximación de la doble integral del modelo de aceleración traslacional para realizar la estimación de la velocidad y posición y realizar de forma autónoma la navegación del vehículo. Aunado a esta aproximación de doble integral se propone un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados el cual aproxima la dinámica de posición a una ecuación no lineal para obtener una mejor estimación de la posición.

Utilizando las estimaciones de velocidad y posición se realiza un control retroalimentando dichas estimaciones, el control sera capaz de realizar un vuelo en modo estacionario y realizar algunas trayectorias propuestas, el control debe ser capaz de seguir dicha trayectoria, además que los controladores obtenidos de altura y orientación también fueron implementados en tiempo real logrando resultados satisfactorios.

Todas las propuestas mencionadas han sido analizadas y validadas usando una plataforma de prueba, construída y sometida a varias pruebas experimentales para determinar el comportamiento de dicho algoritmo, todos los algoritmos fueron implementados en tiempo real bajo un autopiloto.



## ABSTRACT

In recent years, research related to unmanned aerial vehicles has grown exponentially due to its multiple as well as civilian applications. The quadcopter is a versatile vehicle equipped with four brushless motors, that allow freedom of movement, feature that make it simple for different tasks such as search, rescue, inspection and surveillance, among others.

In order to have an autonomous navigation quadcopter it is necessary to equip it with multiple sensors. A global position system (GPS) is one of them, that is used for determining its position and velocity of the vehicle. However, there are some conditions that make GPS fail, making the whole system unreliable. Cloudy weather is one of these conditions and low altitude flights increase the possibility of losing the satellite signal. To overcome the failing of the GPS, a state observer is proposed for estimating the speed and the position of the quadcopter. It is based on the double integration process of the signal given by the acceleration model of the device. In addition to the estimation based on the double integration process a recursive least squares algorithm for estimating the position is proposed.

The control of the device was performed employing the estimates of its velocity and its position. The control law was performed hovering positioning and for trajectory tracking as well as for attitude and altitude. The results obtained were satisfactory.

All the above proposals have been analized and validated using a test platform, built and subjected to various experimental test in order to determine the behavior of the algorithm, all of that were implemented in real time .





# ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	iii
RESUMEN	v
ABSTRACT	vii
ÍNDICE GENERAL	ix
ÍNDICE DE FIGURAS	xiii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción general . . . . .	1
1.2 Objetivo general . . . . .	2
1.2.1 Objetivos particulares . . . . .	2
1.3 Justificación . . . . .	2
1.4 Alcances y limitaciones . . . . .	3
1.5 Revisión bibliográfica . . . . .	4
<b>2 Modelo dinámico</b>	<b>7</b>
2.1 Introducción . . . . .	7
2.2 Modelado del cuadricóptero . . . . .	7
2.3 Conclusiones . . . . .	12
<b>3 Estimación de velocidad y posición traslacional</b>	<b>13</b>
3.1 Introducción . . . . .	13

3.2	Observadores de estado . . . . .	14
3.2.1	Observador lineal en lazo Cerrado . . . . .	14
3.2.2	Observador lineal en lazo abierto . . . . .	16
3.3	Observador de velocidad . . . . .	17
3.3.1	Observador de velocidad en lazo abierto para el cuadricóptero: Caso continuo . . . . .	17
3.3.2	Observador de velocidad en lazo abierto para el cuadricóptero: Caso discreto . . . . .	18
3.4	Observador de posición . . . . .	19
3.5	Algoritmo recursivo de identificación . . . . .	20
3.5.1	Algoritmo de mínimos cuadrados . . . . .	20
3.5.2	Recursividad del algoritmo de mínimos cuadrados . . . . .	24
3.5.3	Observador de posición en lazo abierto para el cuadricóptero: Algoritmo de mínimos cuadrados . . . . .	25
3.6	Conclusiones . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Estrategias de control</b>	<b>31</b>
4.1	Introducción . . . . .	31
4.2	Síntesis de los controladores . . . . .	31
4.2.1	Controlador PD . . . . .	32
4.2.2	Subsistema $z$ . . . . .	32
4.2.3	Sintonización del subsistema $z$ . . . . .	33
4.2.4	Control Subsistema $\psi$ . . . . .	35
4.2.5	Control Subsistema $x - \theta$ . . . . .	36
4.2.6	Control Subsistema $y - \phi$ . . . . .	38
4.3	Seguimiento de una trayectoria . . . . .	40
4.4	Conclusiones . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>43</b>
5.1	Introducción . . . . .	43
5.2	Descripción de la plataforma experimental . . . . .	43
5.2.1	Autopiloto pixhawk . . . . .	43

5.2.2	Motores y controladores de velocidad . . . . .	44
5.2.3	Sistema de posicionamiento global (GPS) . . . . .	44
5.2.4	Prototipo experimental . . . . .	45
5.2.5	Aviónica del cuadricóptero . . . . .	45
5.3	Controladores . . . . .	46
5.4	Controlador de altura . . . . .	47
5.5	Controlador de posición con asistencia de GPS . . . . .	48
5.6	Estado estacionario - Observador de Estado . . . . .	49
5.6.1	Observador de Velocidad $\dot{x}$ . . . . .	49
5.6.2	Observador de Velocidad $\dot{y}$ . . . . .	49
5.7	Estado estacionario - Observador de Estado . . . . .	50
5.7.1	Observador de Estado Posición $x$ . . . . .	50
5.7.2	Observador de Estado Posición $y$ . . . . .	51
5.8	Línea recta - Observador de Estado . . . . .	52
5.8.1	Observador de Velocidad $\dot{x}$ . . . . .	52
5.8.2	Observador de Velocidad $\dot{y}$ . . . . .	54
5.9	Línea recta - Observador de Estado . . . . .	55
5.9.1	Observador de Posición $x$ . . . . .	55
5.9.2	Observador de Posición $y$ . . . . .	56
5.10	Rectángulo - Observador de Estado . . . . .	59
5.10.1	Observador de Velocidad $\dot{x}$ . . . . .	59
5.10.2	Observador de Velocidad $\dot{y}$ . . . . .	60
5.11	Rectángulo - Observador de Estado . . . . .	61
5.11.1	Observador de Posición $x$ . . . . .	61
5.11.2	Observador de Posición $y$ . . . . .	62
5.12	Conclusiones . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>67</b>
6.1	Conclusiones . . . . .	67
6.2	Trabajo futuro . . . . .	68
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>69</b>



# ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	cuadricóptero referenciado al marco inercial . . . . .	10
3.1	Observador en Lazo Cerrado . . . . .	14
3.2	Observador en Lazo Abierto . . . . .	17
3.3	Función de transferencia para la integral discreta. . . . .	19
3.4	Función de transferencia discreta del sistema incluyendo todas las entradas y perturbaciones al sistema . . . . .	21
3.5	Método de estimación recursiva como proceso iterativo para encontrar el vector de parámetros que se aproxime al sistema real . . . . .	24
3.6	Diagrama de flujo de la estimación de velocidad y posición con la doble integral propuesta. . . . .	26
4.1	Respuesta deseada en altura . . . . .	34
4.2	Diagrama de bloques del sistema subactuado $y - \phi$ . [15] . . . . .	37
5.1	Plataforma Experimental . . . . .	45
5.2	Aviónica del prototipo . . . . .	46
5.3	Altura real-altura deseada . . . . .	47
5.4	Error de altura $z$ . . . . .	47
5.5	Control de Posición con asistencia de la señal GPS . . . . .	48
5.6	Estimador de velocidad $x$ - estado estacionario . . . . .	49
5.7	Estimador de velocidad $y$ - estado estacionario . . . . .	50
5.8	Estimador de posición $x$ - estado estacionario . . . . .	51
5.9	Estimador de posición $y$ - estado estacionario . . . . .	51

5.10	Estimador de posición $(x, y)$ - estado estacionario . . . . .	52
5.11	Estimador de velocidad $x$ - línea recta . . . . .	53
5.12	Velocidad $x$ - línea recta retroalimentación GPS . . . . .	53
5.13	Estimador de velocidad $y$ - línea recta . . . . .	54
5.14	Velocidad $y$ - línea recta retroalimentación GPS . . . . .	54
5.15	Estimador de posición $x$ - línea recta . . . . .	55
5.16	Posición $x$ - línea recta retroalimentación GPS . . . . .	56
5.17	Estimador de posición $y$ - línea recta . . . . .	56
5.18	Posición $y$ - línea recta retroalimentación GPS . . . . .	57
5.19	Estimador de posición $(x, y)$ - línea recta . . . . .	57
5.20	Estimador de posición $x, y$ - línea recta . . . . .	58
5.21	Posición $x, y$ - línea recta retroalimentación GPS . . . . .	58
5.22	Estimador de velocidad $x$ - rectángulo . . . . .	59
5.23	Estimador de velocidad $x$ - rectángulo retroalimentación GPS . . . . .	60
5.24	Estimador de velocidad $y$ - rectángulo . . . . .	60
5.25	Estimador de velocidad $y$ - rectángulo retroalimentación GPS . . . . .	61
5.26	Estimador de posición $x$ - rectángulo . . . . .	62
5.27	Estimador de posición $x$ - rectángulo retroalimentación GPS . . . . .	62
5.28	Estimador de posición $y$ - rectángulo . . . . .	63
5.29	Estimador de posición $y$ - rectángulo retroalimentación GPS . . . . .	63
5.30	Estimador de posición $(x, y)$ - rectángulo . . . . .	64
5.31	Estimador de posición $(x, y)$ - rectángulo retroalimentación GPS . . . . .	64

# CAPÍTULO 1

## Introducción

### 1.1 Introducción general

Los vehículos aéreos autónomos han sido un área de gran importancia en los últimos años, la versatilidad de dichos prototipos los hacen ideales para múltiples tareas civiles como militares. En el área militar van desde patrullaje, monitoreo, y en el área civil búsqueda aérea y salvamento, recolección de información para la predicción meteorológica y detección de fuego principalmente.

Desde hace años, grupos de investigación en el área de control automático, robótica y mecatrónica se han interesado cada vez más, en el estudio de estas aeronaves, mejorando su desempeño, optimizando el control y la navegación de dichas aeronaves.

El GPS proporciona una señal que permite acceder a la ubicación mediante geoposicionamiento por satélite; sin embargo está propensa a ser afectada por diferentes factores como el meteorológico y el tipo de ambiente en el cual estemos ubicados, por lo que la calidad de la señal GPS puede variar y por lo tanto no permite el conocer con fidelidad la posición del vehículo, y en el peor de los casos la señal es bloqueada.

En esta tesis abordaremos el problema de navegación en exteriores de un cuadricóptero sin asistencia del GPS. Actualmente varios autores han adoptado este tema bajo el uso

principalmente de la visión artificial y cabe mencionar que sus vuelos han sido en ambientes controlados y lugares cerrados; es por ello que se propone diseñar un algoritmo que permita lograr navegar en exteriores con la mínima cantidad de sensores posibles, estimando tanto velocidad como posición traslacional del cuadróptero.

## 1.2 Objetivo general

Llevar a cabo la estimación de la posición  $(x, y)$  y velocidad  $(v_x, v_y)$  para un helicóptero miniatura de cuatro rotores mediante el uso de la unidad de medición inercial (IMU), para la navegación autónoma en exteriores; debido a la pérdida de la señal GPS.

### 1.2.1 Objetivos particulares

- Diseñar un observador para la estimación de la velocidad  $(v_x, v_y)$  en base a la aproximación de la integral del modelo de aceleración de cuadróptero.
- Implementar un algoritmo que aproxime la dinámica real de la posición, para su corrección.
- En base a los parámetros estimados de velocidad y posición realizar vuelo estacionario y el seguimiento de trayectorias.
- Implementar y sintonizar una ley de control PD para el control de la orientación, posición y altura.

## 1.3 Justificación

Un cuadróptero es un vehículo dedicado a múltiples tareas tales como: apoyo para búsqueda y rescate de personas, supervisar cultivos, inspección de sitios de riesgo y tareas de carácter militar, entre muchas otras. Esto debido a sus múltiples características como ser controlado de manera remota, su versatilidad y la libertad de sus movimientos debida principalmente a los sensores y dispositivos con los que puede ser provisto.



Uno de los problemas principales es debido a ambientes donde no se tiene acceso a un sistema de posicionamiento global GPS, por lo tanto hoy en día se ve limitada la habilidad y realización de navegación autónoma en dichas áreas, esto a su vez nos limita e impide llevar a cabo las tareas ya antes mencionadas.

En los últimos años para lograr estimaciones de posicionamiento se hace uso de diferentes algoritmos basados en visión artificial como se revisará en el apartado de revisión bibliográfica, estos algoritmos, cabe hacer mención, se prueban en habitaciones cerradas y por lo tanto el ambiente de navegación es controlado, las limitaciones al implementar este tipo de algoritmos de visión artificial es el rango de navegación en el cuadricóptero el cual está sujeto a las dimensiones de la habitación.

## 1.4 Alcances y limitaciones

Se pretende el diseño de un observador de velocidad y posición traslacional, el cual realice la función de posicionamiento en exteriores dada por GPS debido a la pérdida de éste, y realizar la navegación autónoma del cuadricóptero con las estimaciones de posición y velocidad.

Es importante denotar que una de las limitaciones es el tiempo de navegación debido a que el algoritmo al paso del tiempo presenta mayor cantidad de errores, esto es porque el ambiente en el cual se está navegando no está controlado y por lo tanto se tienen distintos factores que alteran el comportamiento estacionario del cuadricóptero y por lo tanto la estimación; para realizar la estimación de la velocidad y posición se hace uso del modelo matemático del cuadricóptero mas un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados para el mejoramiento de la posición. Cabe señalar que el vehículo aéreo que se utilizó fue dotado de la mínima cantidad de sensores, no utilizando cámaras para realizar una estimación de su posicionamiento.

Antes de realizar un vuelo con la pérdida de la señal de GPS es necesario realizar un vuelo previo para el cálculo de algunas variables que intervienen en el proceso de estimación, por lo tanto el vehículo se ve limitado al realizar un vuelo desde un inicio sin señal GPS.

## 1.5 Revisión bibliográfica

En los años recientes los investigadores han trabajado fuertemente en el desarrollo de controladores para diferentes fases de vuelo, estas fases son clasificadas como: despegue, aterrizaje, vuelo estacionario y navegación; y una de las conclusiones importantes es el uso de sensores adecuados para las diferentes fases de vuelo.

A fin de implementar un sistema de navegación para un vehículo aéreo autónomo es crucial contar con mediciones tanto de posición, velocidad traslacionales y altura de dicho vehículo. Un sistema de posicionamiento global (GPS) es el candidato para este tipo de trabajo, sin embargo existen un sin fin de problemas relacionados al desempeño de la señal GPS como los son ambientes nublados, vuelos a baja altura, vuelos en espacios cerrados, y la posibilidad de perder comunicación con el sistema satelital. En el presente trabajo se obtiene una estimación de velocidad y posición por medio de la integración doble no exacta de la central inercial IMU y utilizando como base el modelo matemático, estas estimaciones son usadas de tal manera que se puedan seguir dos trayectorias previamente establecidas.

Existen diferentes estrategias que son utilizadas para la navegación sin asistencia de GPS. Para determinar la velocidad se hace uso de sensores de flujo óptico como en [1] en el cual una de las restricciones es la navegación en exteriores ya que la altura máxima de operación del sensor de flujo óptico es de 2 metros, y no se presenta la estimación de la posición mediante el sensor flujo óptico en dicho trabajo se desarrollan controles en cascada tipo PID para los estados de velocidad estimado, y orientación provenientes de una central inercial, se presentan la estimación y control de velocidad experimentales.

En [2] se desarrolla un algoritmo de visión artificial para la navegación en vuelo estacionario, la plataforma experimental utilizada está construida con la mínima cantidad de sensores. Se basa en un método de visión artificial ICE (Image Coordinates Extrapolation) el cual se basa en la adquisición de distintas imágenes en modo estacionario y se genera una posición de referencia. Las imágenes que se toman en vuelo son comparadas con imágenes de puntos de referencia previamente definidos. Los resultados mostrados son para vuelos en exteriores en modo estacionario para un helicóptero de cuatro rotores.

Otros trabajos hacen fusión con dos o mas sensores implementados en sus plataformas. Por ejemplo en [3] los autores proponen dos algoritmos para estimar la velocidad los cuales no necesitan de gran procesamiento computacional, el primer algoritmo emplea "Unscented Kalman Filter" y el segundo se basa en síntesis de Lyapunov. Los algoritmos están enfocados en el procesamiento de imágenes, en este trabajo las lecturas del acelerómetro son ruidosas debido a la central inercial que fue utilizada, con estos dos algoritmos obtuvieron la estimación de las velocidades translacionales.

En [4] los autores solo estiman la velocidad espacial del cuadricóptero mediante la retroalimentación de la información de imágenes, este algoritmo no necesita conocimiento previo del ambiente, solamente se necesitan cuatro puntos característicos artificiales en la imagen para realizar la estimación; además utilizan el filtro de Kalman en su forma extendida el cual tiene como desventaja el cálculo de los parámetros de covarianza de ruido y proceso ya que depende de las condiciones del escenario en el cual se experimente, en este trabajo fue bajo un sistema de cámaras Optitrack en un ambiente controlado.

Un gran numero de trabajos de investigación han centrado su atención en el uso de flujo óptico, como medio para obtener la velocidad del cuadricóptero como por ejemplo en [5], sin embargo el funcionamiento de dicho sensor depende en gran medida de que la imagen no sufra distorsiones.

Trabajos de investigación como en [6], emplean un filtro extendido de Kalman y el rango de medida con otros cuadricópteros para estimar la posición durante un periodo de tiempo corto en el cual la señal presenta problemas, utilizan la formación de tres cuadricópteros en el cual uno de ellos pierde conexión GPS, dependiendo del patrón de movimiento del cuadricóptero que pierde la conexión temporalmente y su relación geométrica entre el y su conexión con dos o más cuadricópteros con señal GPS, las mediciones de alcance con los otros dos cuadricópteros es suficiente para estimar la ubicación del cuadricóptero que perdió temporalmente su conexión GPS.

En [7] los autores realizan la estimación de la posición usando un Range-Finder, el cual su costo es elevado aunado, el procesamiento de datos es bastante y el peso del dispositivo influye en el tiempo de vuelo. En este trabajo realizaron pruebas en vuelo estacionario y siguiendo una trayectoria en forma cuadrada las estimación de la posición fueron implementadas en su controlador y su error es de  $\pm 20$  cm aproximadamente.

# CAPÍTULO 2

## Modelo dinámico

### 2.1 Introducción

En esta sección se abordará la descripción del modelo matemático del cuadricóptero mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange como en [8]. El modelo matemático nos ayudará posteriormente para lograr la estimación de la posición, velocidad y para el diseño del controlador. El modelo matemático de un sistema real se puede definir como el conjunto de ecuaciones diferenciales que denotan el comportamiento de la dinámica propia del sistema.

### 2.2 Modelado del cuadricóptero

Para la realizar el modelo del cuadricóptero se utilizan las ecuaciones de Euler -Lagrange como se describen en [9].

El estado general para el sistema cuadricóptero de este tipo se pueden expresar por el siguiente vector:

$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in R^6, \quad (2.1)$$

donde  $(x, y, z) \in R^3$  denota la posición tomada del centro de masa del cuadricóptero, relativo al eje de referencia inercial  $I$ , y  $(\psi, \theta, \phi) \in R^3$ , son los ángulos de Euler,  $\psi$  es el ángulo de "yaw",  $\theta$  es el ángulo de "pitch" y  $\phi$  es el ángulo de "roll", estos ángulos representan la

orientación del vehículo.

El modelo es particionado en dos partes  $(\xi, \eta)$ , por un lado la parte traslacional y por el otro la parte rotacional.

$$\xi = (x, y, z) \in R^3, \eta = (\psi, \theta, \phi) \in R^3. \quad (2.2)$$

Ahora, defina el siguiente Lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U, \quad (2.3)$$

donde  $T_{trans}$  denota la energía cinética traslacional,  $T_{rot}$  denota la energía cinética rotacional y  $U$  la energía potencial. La ecuación de energía cinética traslacional y rotacional del mini-helicóptero es:

$$T_{trans} \triangleq \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi}, \quad (2.4)$$

$$T_{rot} \triangleq \frac{1}{2} \omega^T I \omega, \quad (2.5)$$

donde  $m$  es la masa del vehículo,  $\omega$  es la velocidad angular del vehículo,  $I$  es la matriz de inercia. El vector de velocidades angulares  $\omega$  respecto a los ejes de coordenadas del cuerpo se relaciona con las velocidades generalizadas del vector  $\dot{\eta}$ , en la región donde los ángulos de Euler son válidos, se hace uso de una relación estándar de cinemática [10], como sigue:

$$\dot{\eta} = W_{\eta}^{-1} \omega, \quad (2.6)$$

en donde:

$$W_{\eta}^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \theta \sin \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Defina  $\mathbb{J} = W_{\eta}^T I W_{\eta}$ , tal que:

$$T_{rot} \triangleq \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}, \quad (2.8)$$

la matriz  $\mathbb{J}$  actúa como la matriz de inercia para la energía cinética rotacional del helicóptero, expresada en términos de coordenadas generalizadas  $\eta$ . Finalmente la energía potencial que debe ser considerada es:

$$u = mgz, \quad (2.9)$$

en donde  $z$  representa la altura del vehículo y  $g$  es la aceleración gravitacional. El modelo dinámico completo del cuadricóptero se obtiene de las ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerzas externas generalizadas.[10]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F, \quad (2.10)$$

donde el vector de fuerzas externas generalizada  $F$ , está formada por  $F = (F_\xi, \tau)$ ,  $F_\xi$  es la fuerza translacional aplicada al vehículo debido a la entrada de control principal, por lo tanto es posible expresar lo siguiente:  $\hat{F} = [0, 0, u]$  y  $u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ , donde:

$$f_i = k_i \omega_i^2, \quad \forall i = 1, \dots, 4, \quad k_i > 0, \quad (2.11)$$

$k_i$  es una constante y  $\omega_i$  es la velocidad angular del motor  $i$ -ésimo. Por lo tanto  $F_\xi = R\hat{F}$  donde  $R$  es la matriz de rotación que representa la orientación del cuadricóptero relacionada al eje de referencia fijo y está denotada por  $R(\psi, \theta, \phi)$ : (aquí se usa la siguiente notación  $c_\theta$  para  $\cos \theta$  y  $s_\theta$  para  $\sin \theta$ ).

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\psi s_\theta & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\theta & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta s_\phi + s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi - c_\psi c_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Los momentos o pares generalizados encargados de producir los movimientos angulares de roll( $\psi$ ), pitch ( $\theta$ ) y yaw ( $\phi$ ) respectivamente son definidos como:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau M_i \\ (f_2 - f_4)l \\ (f_3 - f_1)l \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

donde  $l$  es la distancia entre los motores y el centro de gravedad del cuadricóptero y  $M_i$  es el momento producido por el motor  $i = 1, \dots, 4$ , alrededor del centro de gravedad como es mostrado en la figura 2.1

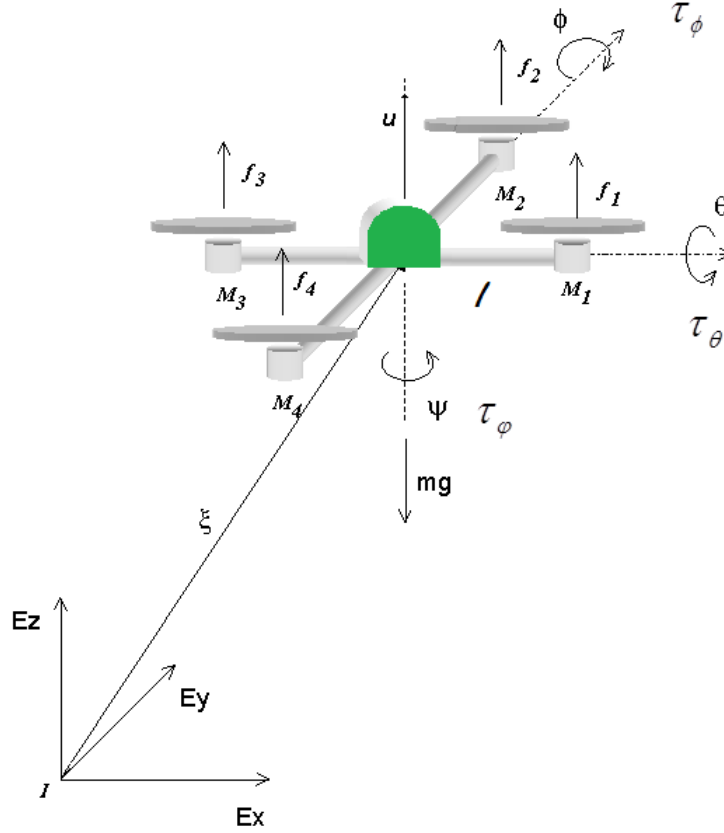


Figura 2.1: cuadricóptero referenciado al marco inercial

Debido a que el lagrangiano no contiene términos en la energía cinética combinando  $\dot{\xi}$  con  $\dot{\eta}$  como se muestra en las ecuaciones (2.4-2.5), al ser divididas las dinámicas se tiene:

$$m\ddot{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = F_{\xi}, \quad (2.14)$$

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} + \dot{\mathbb{J}}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^T \mathbb{J} \dot{\eta}) = \tau. \quad (2.15)$$



Defina los términos del vector de Coriolis que tienen efectos centrífugos y giroscopios asociados al vector  $\eta$  como:

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \mathbb{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}), \quad (2.16)$$

si se reescribe el sistema (2.14) se obtiene:

$$m\ddot{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = F_\xi, \quad (2.17)$$

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta}) = \tau.$$

Con el propósito de simplificar el sistema, se propone el siguiente cambio de variables:

$$\tau = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \mathbb{J}\tilde{\tau}, \quad (2.18)$$

donde  $\tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_\psi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\phi]$  son las nuevas entradas y por lo tanto,

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau}. \quad (2.19)$$

Finalmente el sistema puede reescribirse como :

$$m\ddot{\xi} + mgz = F_\xi \quad (2.20)$$

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau},$$

donde  $F_\xi$  está definido como:

$$F_\xi = \begin{bmatrix} -f \sin \theta \\ f \sin \phi \cos \theta \\ f \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Al sustituir (2.21) en (2.20), finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\ m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\ m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg \\ \ddot{\phi} &= \tilde{\tau}_\phi \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \\ \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi \end{aligned}, \quad (2.22)$$

donde  $x$  y  $y$  son coordenadas en el plano horizontal,  $z$  es la posición vertical. El ángulo alrededor del eje  $z$  es yaw  $\psi$ , alrededor de eje  $y$  es en ángulo de pitch  $\theta$  y finalmente alrededor del eje  $x$  es roll  $\phi$ . Las entradas de control  $\tilde{\tau}_\psi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\phi$  son los momentos de yaw, pitch y roll respectivamente.

## 2.3 Conclusiones

Como producto se obtuvo el modelo matemático del cuadricóptero utilizando algunas relaciones y el lagrangiano principalmente. El modelo matemático es importante ya que nos permitirá posteriormente utilizar dichas ecuaciones dinámicas para realizar la estimación tanto para la velocidad y la posición, además nos ayudará a la realización de la síntesis de control. Es importante el modelo matemático ya que de éste dependerá el obtener una buena o mala estimación de las variables de estado faltantes.

# CAPÍTULO 3

## Estimación de velocidad y posición traslacional

### 3.1 Introducción

Para realizar el control de un sistema es necesario tener presente todo el estado que describe la dinámica del sistema. En la práctica, en muchas ocasiones, las variables de estado no son físicamente accesibles o el costo de los sensores para acceder a ellas es elevado, además de que el funcionamiento de estas depende de factores como el climatológico, que altera el valor real de la variable en cuestión. En este caso es posible diseñar un estimador de estado para obtener de manera indirecta dicha variable de estado faltante [11].

En este capítulo se abordará el método de estimación propuesto para poder construir las variables de estado faltantes para la navegación, las cuales son en este caso velocidad y posición de un vehículo aéreo. Se explicará paso a paso cada una de las etapas para lograr la estimación de la posición; para la estimación de la velocidad se utiliza la integral de la ecuación que dicta la aceleración del cuadricóptero, y para la estimación de la posición se hace uso de la doble integral de la dinámica de aceleración medida, más un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.

## 3.2 Observadores de estado

La idea de observabilidad se relaciona con la posibilidad de conocer el valor de estado inicial con el conocimiento de la entrada y la salida de un sistema en este caso de un cuadricóptero y con técnicas de observación ya sea en lazo abierto o cerrado conocer el valor de las variables de estado en cualquier instante de tiempo. Las variables de estado son, sin embargo, variables internas del funcionamiento del sistema cuyos valores en ocasiones no se pueden medir directamente, por ello existen principalmente dos tipos de observadores de estado, observador en lazo abierto y observador en lazo cerrado[11].

### 3.2.1 Observador lineal en lazo Cerrado

El observador en lazo cerrado es utilizado cuando se conoce la evolución de la entrada y salida del sistema. En general para este tipo de observador es necesario conocer la evolución de la salida  $y(t)$  y entrada  $u(t)$  en un intervalo de tiempo para poder calcular el estado del sistema, ya que se basa en la realización de una copia del sistema original  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$  y en calcular un error de estimación  $e_{est}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  para llevar el estado  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ . En la figura 3.1 se presenta el esquema de dicho observador [11].

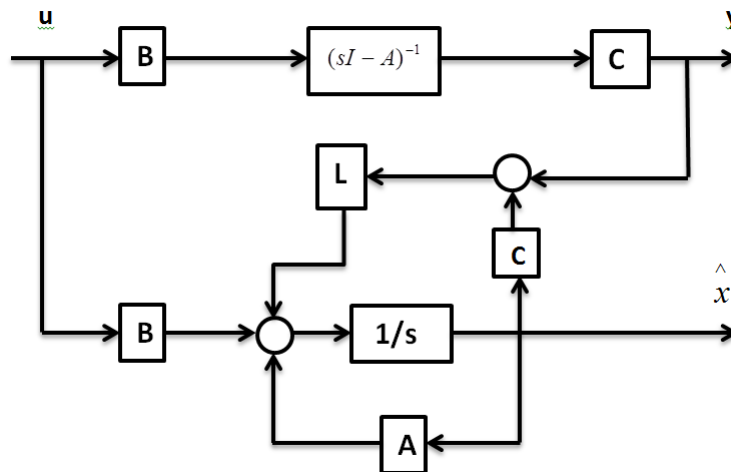


Figura 3.1: Observador en Lazo Cerrado

Para poder aplicar dicho esquema de observación y conocer las variables de estado es

necesario que el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad , \quad (3.1)$$

sea observable, un sistema es observable si y solo si la matriz de observabilidad tiene rango  $n$  es decir que el rango de dicha matriz y el orden del sistema tenga el mismo tamaño [11].

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} . \quad (3.2)$$

Para realizar la estimación de la posición y velocidad  $(x, y)$ , sea el subsistema  $y - \phi$  que se desea estimar la velocidad-posición  $y$  del cuadricóptero:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\ \ddot{\phi} &= \tilde{\tau}_\phi \end{aligned} . \quad (3.3)$$

Su representación en espacio de estado, con  $(x_{1y} = y, x_{2y} = \dot{y}, x_{3\phi} = \phi, x_{4\phi} = \dot{\phi})$  es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1y} &= x_{2y} \\ \dot{x}_{2y} &= \frac{1}{m} u \cos \theta \sin \phi \\ \dot{x}_{3\phi} &= x_{4\phi} \\ \dot{x}_{4\phi} &= \tau \phi \end{aligned} , \quad (3.4)$$

al expresar el sistema (3.4) dada por (3.1) y utilizando la ley de control de altura  $u(t) = m(u_1(t) + g)(\cos \theta \cos \phi)^{-1}$ , se obtiene un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1y} &= x_{2y} \\ \dot{x}_{2y} &= (u_1 + g) \tan \phi \\ \dot{x}_{3\phi} &= x_{4\phi} \\ \dot{x}_{4\phi} &= \tau \phi \end{aligned} , \quad (3.5)$$

donde  $u_1$  es un control PD de altura como se revisará en el capítulo 4 y  $u_1 \rightarrow 0$ , por lo tanto si existe un control  $\tau_\phi$  que realice la tarea de  $\dot{\phi} \approx 0$  entonces,  $\tan \theta \approx \theta$ . Por lo tanto se obtiene el sistema aproximado.

$$\begin{aligned}\dot{x}_y &= A_y \dot{x} + B_y u \\ y &= C_y x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1y} \\ x_{2y} \\ x_{3\phi} \\ x_{4\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad . \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1y} \\ x_{2y} \\ x_{3\phi} \\ x_{4\phi} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Donde la matriz  $C_y$  es elegida debido a que las únicas variables de estado disponibles son  $(\phi, \dot{\phi})$ . Como se observa el par  $(A_y, C_y)$  no es observable ya que el rango de la matriz de observabilidad es  $(A_y, C_y) < 4$  por lo tanto no es posible realizar un observador lineal en lazo cerrado, ya que la información que se tiene en la salida en la matriz  $C$  no es suficiente para hacer posible la reconstrucción del estado de velocidad y posición sobre el eje  $y$ .

### 3.2.2 Observador lineal en lazo abierto

Un observador de lazo abierto solo necesita de la entrada de control  $u$  para poder realizar la estimación de los estados faltantes como se observa en la figura 3.2.

Una de las principales desventajas es que se debe conocer la condición inicial cada vez que se use dicho estimador. Por lo tanto, debido a que el sistema como se observó y se comprobó no es observable se utilizó un observador de lazo abierto.

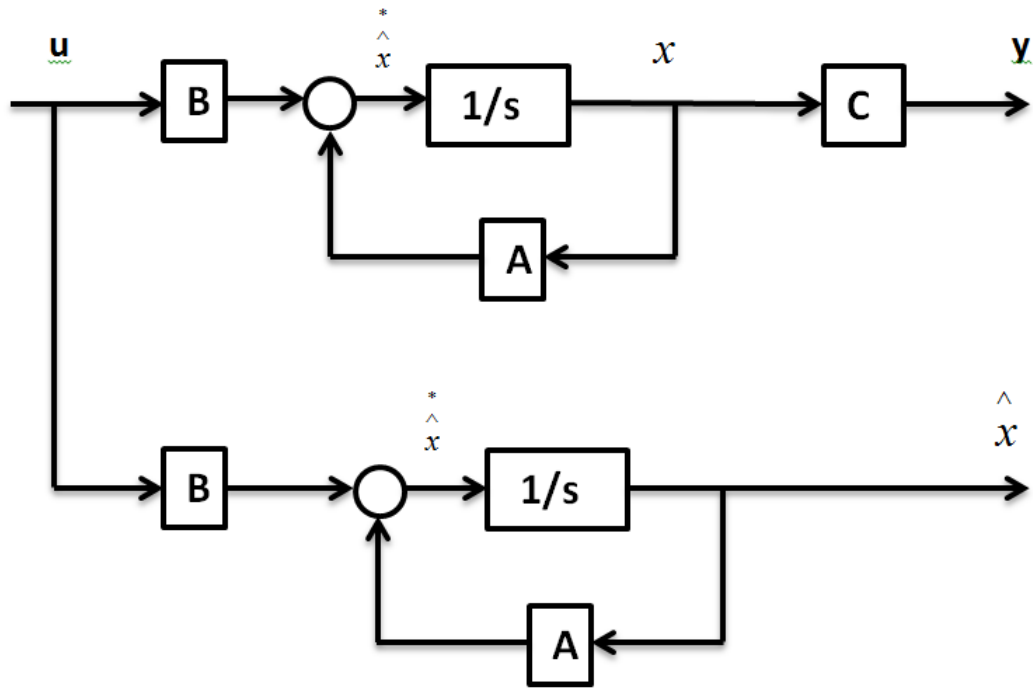


Figura 3.2: Observador en Lazo Abierto

### 3.3 Observador de velocidad

Para el caso de la estimación de velocidad  $(v_x, v_y)$  se propone un observador en lazo abierto, es decir utilizar la entrada de control y las dinámicas de aceleración en  $x, y$  obtenidas en [9]; existe principalmente el problema de la deriva que produce el proceso de la integral, para solucionar esta deriva se propuso una quasi-integral la cual básicamente es un corrimiento del origen respecto a la integral ideal; este corrimiento soluciona el problema de deriva.

#### 3.3.1 Observador de velocidad en lazo abierto para el cuadricóptero: Caso continuo

Para estimar la velocidad en el plano traslacional se hace uso de la dinámica de aceleración  $\dot{x} - \dot{y}$  del modelo reducido tomado de [9].

$$m\ddot{x} = -u \sin \theta \quad , \quad (3.7)$$

$$m\ddot{y} = u \cos \theta \sin \phi \quad , \quad (3.8)$$

donde  $m$  es la masa,  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  es la aceleración en el plano  $(x,y)$  respectivamente,  $u$  es la entrada de control propuesta en (4.5) y  $(\theta, \phi)$  es el angulo de pitch y roll.

Para obtener la estimación de la velocidad en el plano  $x$  se hace uso de la ecuación (3.7), el objetivo principal es realizar la integral de dicha dinámica para obtener la velocidad traslacional en el eje  $x$  del cuadricóptero:

$$v_x = \int m\ddot{x}dt = - \int u \sin \theta dt \quad , \quad (3.9)$$

en donde  $v_x$ , representa la velocidad traslacional en el eje  $x$ . Para realizar la integral de la ecuación (3.9), se utiliza la forma de un filtro de primer orden obteniendo una quasi-integral, esto debido a las problemáticas generadas al implementar la integral. La estructura del filtro de primer orden y de la integral ideal en tiempo continuo está definida como:

$$\frac{1}{s} \approx \frac{1}{s+a} \quad 0 < a \ll 1 \quad , \quad (3.10)$$

por lo tanto  $a$  nos indica el desplazamiento que tiene la integral ideal del origen dando la forma de un filtro de primer orden o quasi-integral, para evitar la deriva que causa la integral ideal.

Para obtener la dinámica de velocidad en el eje  $y$ , de la misma forma que se hizo para el eje  $x$ , se realiza la integral de la dinámica (3.8):

$$v_y = \int m\ddot{y}dt = \int u \cos \theta \sin \phi dt \quad , \quad (3.11)$$

donde  $v_y$  es la velocidad traslacional en el eje  $y$ .

### **3.3.2 Observador de velocidad en lazo abierto para el cuadricóptero: Caso discreto**

Tomando la forma de la integral recorrida mostrada en la figura 3.3, se realiza la discretización de dicha integral para su implementación en tiempo real. La forma de la función de transferencia de dicha integral en tiempo discreta es:



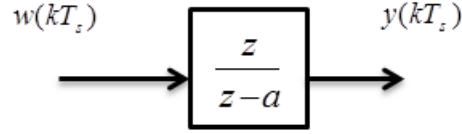


Figura 3.3: Función de transferencia para la integral discreta.

por lo tanto la salida de la integral queda definida como:

$$y(kT_s) = w(kT_s) + y(k - a)T_s \quad , \quad (3.12)$$

donde para el caso del cuadricóptero se define la entrada  $w(kT_s)$  como la aceleración traslacional.

### 3.4 Observador de posición

Para el observador de posición al igual que del observador de velocidad se obtuvo en este caso la doble integral del modelo de aceleración mostrado en (3.7) y en (3.8), como se observará mas adelante en el capítulo dedicado a resultados experimentales, al realizar la doble integral la estimación es pobre y por lo tanto al momento de utilizar esta estimación en el controlador los resultados no fueron satisfactorios, por lo tanto se propuso un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados para corregir la estimación de la posición dada por la doble integral aproximada en base a un polinomio propuesto el cual hay que calcular sus parámetros mediante el algoritmo de mínimos cuadrados previamente a un vuelo sin señal GPS.

Debido a los problemas antes mencionados con el proceso de la doble integral, se propone un polinomio el cual tenga la dinámica del modelo del cuadricóptero y las dinámicas no modeladas. Debido entonces a estas dinámica no modeladas y a la dificultad de obtener una expresión que aproxime la posición traslacional del cuadricóptero nos basamos en la aproximación del teorema de Weierstrass.

**Theorem 1** *Sea  $f(x)$  una función real continua sobre un intervalo compacto  $[a, b]$ . Dado  $\xi > 0$ , existe un polinomio  $p(x)$  tal que este acotado en  $|f(x) - p(x)| < \xi$  para todo  $x \in [a, b]$ .*

Por lo tanto podemos aproximar la dinámica de posición y las dinámicas no modeladas mediante un polinomio debido al teorema de Weierstrass.

## 3.5 Algoritmo recursivo de identificación

Esta técnica se basa principalmente en obtener los parámetros que caracterizan al modelo matemático del sistema en ese caso del cuadricóptero. Esto es básicamente realizando la forma discreta del sistema y utilizando un algoritmo recursivo para obtener dichos parámetros desconocidos que representan el comportamiento dinámico del sistema y aproximar el modelo matemático mediante un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados al comportamiento no lineal que se presenta al estar navegando experimentalmente.

### 3.5.1 Algoritmo de mínimos cuadrados

Considerando la función de transferencia en tiempo discreto del sistema como se presenta en la figura 3.4, donde  $t = kT_s$  y  $T_s$  es el tiempo de muestreo, con la secuencia de entrada  $u(t)$  y con la salida  $y(t)$  sujeta a perturbaciones debidas a los sensores  $v(t)$  y ruidos en el proceso al momento de la navegación. El modelo es escrito de la forma:[12]

$$Ay(t) = Bu(t - 1) + Dv(t) + M(t) + Ce(t), \quad (3.13)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a} \\ B &= b_o + b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b} \\ D &= d_o + d_1z^{-1} + \dots + d_{n_d}z^{-n_d} \\ M(t) &= m_o + m_1t + \dots + m_{n_m}t^{-n_m} \\ C &= 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Cuando los coeficientes del polinomio (3.13) no son conocidos, los parámetros del polinomio son determinados por estimación. Para propósitos de realizar la estimación es conveniente escribir la ecuación (3.13) de tal forma de enfatizar los datos disponibles y los parámetros a estimar:

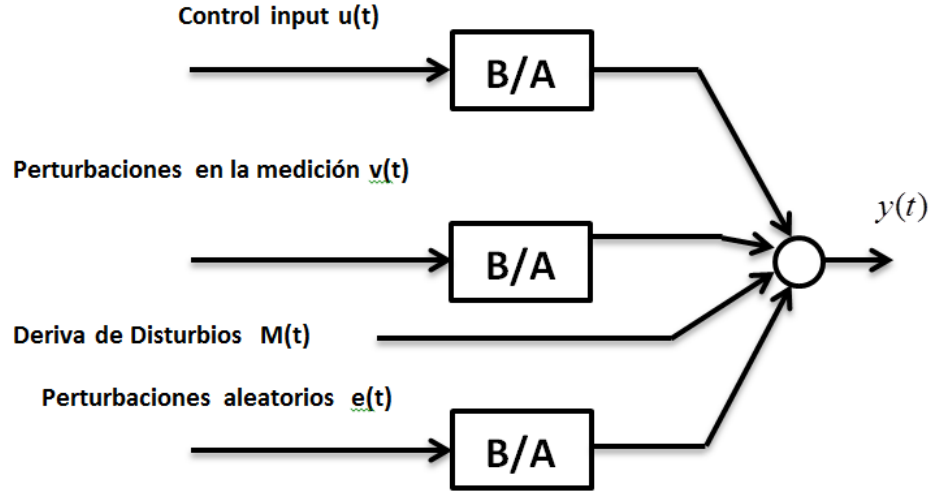


Figura 3.4: Función de transferencia discreta del sistema incluyendo todas las entradas y perturbaciones al sistema

$$y(t) = \chi^T(t)\theta + e(t), \quad (3.15)$$

donde  $\theta$  contiene el vector de parámetros desconocidos del polinomio o vector de parámetros a estimar, y tomando como base la (3.13) queda definido como:

$$\theta^T = [-a_1, \dots, -a_n, b_0, \dots, b_{n_b}, m_0, \dots, m_{n_m}, c_1, \dots, c_{n_c}], \quad (3.16)$$

y  $\chi(t)$  es llamado el vector de regresión lineal o vector de mediciones, el cual prácticamente consiste en las variables que pueden ser medidas como por ejemplo entradas/salidas:

$$\chi^T(t) = [y(t-1), \dots, y(t-n_a), u(t-1), \dots, u(t-n_b-1), v(t), \dots, v(t-n_d), 1, t, \dots, t^{n_d}, e(t-1), e(t-2), \dots, e(t-n_c)] \quad (3.17)$$

Se asume que de (3.15) se tiene una descripción exacta del sistema, por lo tanto el mecanismo de generación del vector de parámetros se determina a partir del vector de mediciones. Para generar el vector de parámetros se supone además un modelo con la estructura correcta dada la siguiente forma:

$$y(t) = \chi^T(t)\hat{\theta} + \hat{e}(t), \quad (3.18)$$

donde  $\hat{\theta}$ , es el vector ajustable de parámetros del sistema es el vector a hallar y  $\hat{e}(t)$  corresponde al error del modelado en el tiempo  $t = kT_s$ . Por lo tanto el objetivo es seleccionar el vector  $\hat{\theta}$ , tal que se minimice el error de modelado. De la ecuación (3.15) y (3.18) se define el error de modelado, el cual corregirá los valores del vector de parámetros:

$$\hat{e}(t) = e(t) + \chi^T(t)(\theta(t) - \hat{\theta}(t)). \quad (3.19)$$

Se observa que  $\hat{e}(t)$  depende del vector de estimación  $\hat{\theta}$ . Una de las técnicas principales para reducir el error de estimación es llamado recursividad de mínimos cuadrados [12].

Reescribiendo la ecuación 3.19 en terminos del error tenemos:

$$\hat{e}(t) = y(t) - \chi(t)\hat{\theta}, \quad (3.20)$$

y seleccionando un vector de estimación  $\theta$  que minimize la función de desempeño siguiente

$$J = \sum_{t=1}^{N=kt_s} e^2(t), \quad (3.21)$$

y seleccionando un mínimo para la función anterior tal que el error  $\xi$ , se encuentre acotado por el teorema de Weierstrass, obtenemos

$$\hat{\theta}(t) = [\chi_y^T(t)\chi_y(t)]^{-1}[\chi_t^T(t)y(t)], \quad (3.22)$$

Ahora definiendo las siguientes variables para reducir el sistema, se tiene

$$\begin{aligned} P(t) &= [\chi_y^T(t)\chi_y(t)]^{-1} \\ B(t) &= [\chi_t^T(t)y(t)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por lo tanto se puede expresar  $\hat{\theta}$  con las variables definidas anteriormente, como

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= P(t)B(t) \\ \hat{\theta}(t+1) &= P(t+1)B(t+1) \end{aligned} \quad (3.24)$$

en donde se define las variables para el tiempo  $(k + 1)$

$$P^{-1}(t + 1) = P^{-1}(t) + \chi_y(t + 1)\chi_y^T(t + 1) \quad (3.25)$$

$$B(t + 1) = B(t) + \chi_y(t + 1)y(t + 1). \quad (3.26)$$

La ecuación 3.26 nos describe su valor para el tiempo  $(t + 1)$ . Ahora se realizo un procedimiento para el valor de  $P(t + 1)$ . Utilizando el lemma de inversión de matriz tenemos:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.. \quad (3.27)$$

Utilizando las variables siguientes tanto para  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$

$$A = P^{-1}(t), \quad C = 1, \quad B = \chi_y(t + 1), \quad D = \chi_y^T(t + 1). \quad (3.28)$$

Reescribiendo la ecuación 3.25 como:

$$P(t + 1) = P(t)[I_m - \chi(t + 1)(1 + \chi_y^T(t + 1)P(k)\chi_y(t + 1))^{-1}\chi_y^T(t + 1)P(t)]. \quad (3.29)$$

Definiendo el nuevo vector de error de estimación para  $\epsilon(t + 1)$

$$\epsilon(t + 1) = y(t + 1) - \chi^T(t + 1)\hat{\theta}(t). \quad (3.30)$$

Para el vector  $B(k + 1)$  utilizamos la ecuación 3.26, y se reescribe en términos del error de estimación  $\epsilon$

$$B(t + 1) = B(t) + \chi_y(t + 1)\chi_y^T(t + 1)\hat{\theta}(k) + \chi_y(t + 1)\epsilon(t + 1). \quad (3.31)$$

Ahora el vector de estimación se reescribe en terminos del vectro de error  $\epsilon(t + 1)$

$$\hat{\theta}(t + 1) = \hat{\theta}(t) + P(t + 1)\chi_y(t + 1)\epsilon(t + 1). \quad (3.32)$$

### 3.5.2    **Recursividad del algoritmo de mínimos cuadrados**

El proceso para encontrar el vector de estimación  $\hat{\theta}$  debe ser iterativo, permitiéndonos encontrar un nuevo modelo correcto del sistema para cada intervalo  $kT$ . El proceso iterativo se muestra en la figura 3.5 y en [12], en dicho esquema nuevas entradas y salida de datos están disponibles para cada intervalo de tiempo. El mecanismo está basado en recolección de información sobre  $\hat{\theta}(t-1)$  y esta información es usada para obtener la estimación de  $\hat{y}(t)$  actual, esta estimación de  $\hat{y}(t)$  es comparada con la salida del sistema real o la salida observada actual  $y(t)$  para generar el error de salida definido como  $\epsilon(t)$ . Este error genera a su vez una actualización del valor de  $\hat{\theta}(t-1)$  corrige para generar el nuevo valor de  $\theta$ . Esta forma del método recursivo de "predicción corrección", permite el ahorro significativo en el cálculo. En lugar de volver a calcular la estimación de mínimos cuadrados en su totalidad, lo cual requiere el almacenamiento de todos los datos anteriores, es mejor almacenar simplemente la vieja estimación calculada en el tiempo  $t$  descrita en  $\hat{\theta}(t)$  y con ella obtener la nueva estimación de  $\hat{\theta}(t+1)$ , esto implica almacenar solo una estimación anterior y el uso del cálculo computacional se disminuye.

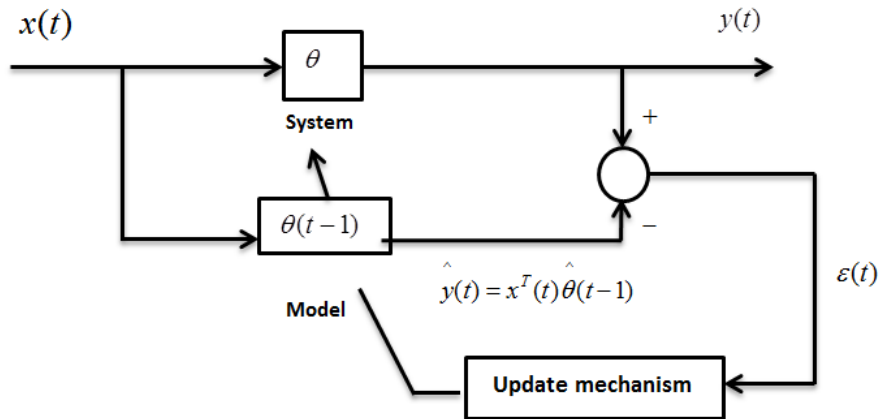


Figura 3.5: Método de estimación recursiva como proceso iterativo para encontrar el vector de parámetros que se aproxime al sistema real

El proceso de estimación recursivo se muestra a continuación. Como ya se menciono anteriormente nos permite el ahorro de gran cantidad en cálculos al solo tomar la muestra anterior:

Para el tiempo  $t + 1$ :

(i) Formar el vector de mediciones  $x(t + 1)$

(ii) Formar el vector de error en el modelado  $\epsilon(t + 1)$  usando:

$$\epsilon(t + 1) = y(t + 1) - x^T(t + 1)\hat{\theta}(t) \quad (3.33)$$

(iii) Formar la matriz  $P(t + 1)$  usando:

$$P(t + 1) = P(t) \left[ I_m - \frac{x(t + 1)x^T(t + 1)P(t)}{1 + x^T(t + 1)P(t)x(t + 1)} \right] \quad (3.34)$$

(iv) Actualizar el vector de parámetros  $\theta(t)$ :

$$\hat{\theta}(t + 1) = \hat{\theta}(t) + P(t + 1)x(t + 1)\epsilon(t + 1) \quad (3.35)$$

(v) Esperar al próximo paso  $x(t + 2)$  y empezar el bucle de nuevo al paso (i)

Las variables están definidas como:

- $y(t + 1)$  : Variable medida
- $\hat{\theta}$  : vector de parámetros a estimar
- $x^T$  : es el vector de mediciones
- $\epsilon$  : error de modelado

### 3.5.3 Observador de posición en lazo abierto para el cuadróptero: Algoritmo de mínimos cuadrados

Como se realizó en la estimación de la velocidad, para el caso de la posición se realiza el proceso de una doble quasi-integral del modelo matemático de la aceleración, como se muestra en la ecuación (3.36).

$$p_y = \int \int m \ddot{y} dt dt = \int \int u \cos \theta \sin \phi dt dt \quad , \quad (3.36)$$

donde  $P_y$ , es la posición en el eje  $y$ . A continuación se presenta un diagrama de flujo 3.6 de dicho proceso tanto para la estimación de la velocidad como de la posición, con la doble integral y el proceso siguiente el cual es el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.

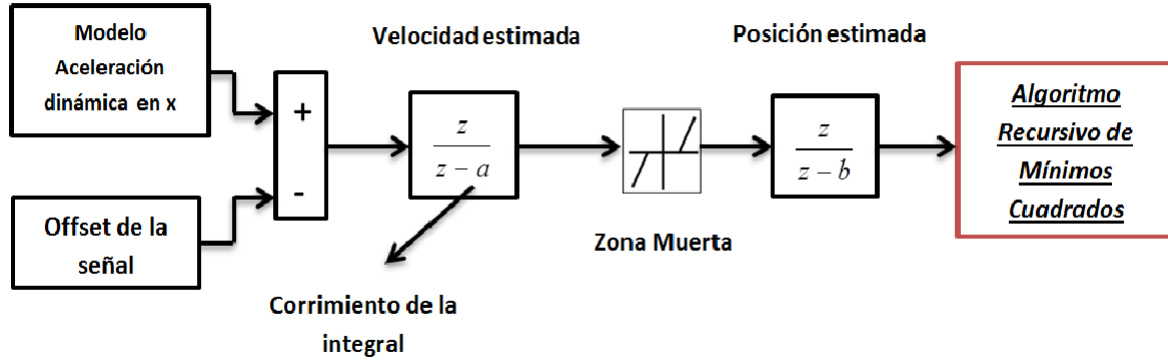


Figura 3.6: Diagrama de flujo de la estimación de velocidad y posición con la doble integral propuesta.

Para la realización de dicho algoritmo se define un modelo dinámico discreto el cual aproxime la dinámica real en la variable de estado posición  $y$  en el cuadricóptero, es decir obtener un modelo no lineal en base a la navegación experimental hecha con el cuadricóptero y su modelo dinámico. Por lo tanto se halla el modelo discreto en base a la dinámica de aceleración en el eje  $y$ , y posteriormente se añadirán términos no lineales para enriquecer la dinámica de posición en el eje  $y$  cuyos parámetros serán calculados mediante el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.

$$\nabla^2 \left[ \frac{y(t) - y(t-1)}{T_s} \right] = \frac{u}{m} \cos \theta \sin \phi. \tag{3.37}$$

$$y(k) = \left[ \frac{u_k}{m} \cos \theta_k \sin \phi_k \right] T_s^2 + 2y(k-1) + y(k-2). \tag{3.38}$$

Para la realización del algoritmo de mínimos cuadrados se propone el siguiente polinomio no lineal el cual enriquecerá la dinámica de posición en el eje  $y$  propuesta en (3.38) es decir



tomando la ecuación (3.38) del cuadricóptero y la estructura propuesta en la ecuación (3.13) obtenemos dicho polinomio no lineal.

$$y(k) = a_0 (\cos \theta_k \sin \phi_k) T_s^2 + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 + a_4 y(k-1)^2 + a_5 y(k-2)^2 + a_6 y(k-3)^3 \quad , \quad (3.39)$$

$$y(k) = f_o(y(k)) + f_1(y(k)) \quad , \quad (3.40)$$

donde  $f_o(y(k)) = \left[ \frac{u_k}{m} \cos \theta_k \sin \phi_k \right] T_s^2 + 2y(k-1) + y(k-2)$  representa el modelo dinámico del cuadricóptero en forma discreta y  $f_1(y(k)) = a_3 + a_4 y(k-1)^2 + a_5 y(k-2)^2 + a_6 y(k-3)^3$  son los parámetros a estimar mediante el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.

Una vez obtenida la dinámica de posición no lineal (3.39), se procede al calculo de los siete parámetros  $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$ , utilizando el algoritmo de recursividad de mínimos cuadrados (3.33), (3.34), (3.35), por lo tanto el sistema queda definido como:

$$y(k) = x^T \hat{\theta} \quad (3.41)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} T_s^2 (\cos \theta_k \sin \phi_k) & y(k-1) & y(k-2) & 1 & y(k-1)^2 & y(k-2)^2 & y(k-3)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.42)$$

Para el eje  $x$ , el proceso es similar, se realiza la doble integral de la dinámica de aceleración en  $x$  para obtener la posición en  $x$ .

$$p_x = \int \int m \ddot{x} dt dt = \int \int -u \sin \theta dt dt \quad . \quad (3.43)$$

A la estimación hecha anteriormente 3.43, al igual que para la posición en el eje  $y$  se utiliza el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, por lo tanto el sistema anterior se discretiza para utilizar dicho algoritmo.

$$\nabla^2 \left[ \frac{x(t) - x(t-1)}{T_s} \right] = -\frac{u_k}{m} \sin \theta_k. \quad (3.44)$$

$$x(k) = \left[ -\frac{u_k}{m} \sin \theta_k \right] T_s^2 + 2x(k-1) - x(k-2). \quad (3.45)$$

El método de mínimos cuadrados utiliza la discretización del sistema y la propuesta del polinomio no lineal como lo visto similarmente en la ecuación 3.39 para el eje  $y$ , la propuesta para el eje  $x$  es la siguiente:

$$x(k) = a_0 (\sin \theta_k) T_s^2 + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + a_3 + a_4 x(k-1)^2 + a_5 x(k-2)^2 + a_6 x(k-3)^3, \quad (3.46)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} T_s^2 (\sin \theta_k) & x(k-1) & x(k-2) & 1 & x(k-1)^2 & x(k-2)^2 & x(k-3)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x0} \\ a_{x1} \\ a_{x2} \\ a_{x3} \\ a_{x4} \\ a_{x5} \\ a_{x6} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

## 3.6 Conclusiones

Una de las problemáticas al realizar la estimación de la velocidad, fue el desbordamiento de la integral al momento de su implementación como se verá más adelante en el capítulo 5 de simulaciones, por tal motivo se recorrió la integral. El algoritmo recursivo de mínimos

cuadrados mejora la estimación de la posición como se observará en el apartado de los resultados.

El algoritmo de mínimos cuadrados fue implementado en la plataforma experimental para obtener los parámetros que dictan la dinámica de la posición, es por ello que antes de realizar la prueba de navegación sin asistencia de GPS, se realiza un vuelo previo para que el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados implementado dicho algoritmo, en la plataforma experimental, primero calculará los parámetros del vector de estimación  $\hat{\theta}$ ; y además calculará el corrimiento sobre el eje real de la integral para evitar la deriva al momento de calcular la velocidad traslacional.



# CAPÍTULO 4

## Estrategias de control

### 4.1 Introducción

En este capítulo se presentan las diferentes estrategias de control implementadas en el prototipo experimental para la navegación autónoma.

El control está basado en estrategias tipo PD para los estados de orientación y altura. Para la realización de las trayectoria se asignan distintos posiciones y velocidades traslacionales deseados, este seguimiento de trayectoria basado en una línea recta y un cuadrado utilizando la estimación proporcionada por el observador.

### 4.2 Síntesis de los controladores

Se utiliza el modelado reducido del cuadricóptero tomado de [9].

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg \\ \ddot{\phi} &= \tilde{\tau}_\phi \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \\ \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi\end{aligned}\tag{4.1}$$

Para obtener el control de los seis grados de libertad, el modelo reducido (4.1), se dividirá en subsistemas, inicialmente se aplicara un control linealizante, con el objetivo de cancelar las no linealidades. A continuación se aborda la definición de controlabilidad para aplicar controlador al sistema.

Sea la función continua definida por  $x(t+1) = f(x(t), u(t), f(\dots)) \in R^n$ , el par  $(x_o, x_1)$  es controlable si existe un control  $u(t)$  tal que transfiera el estado  $x_o \rightarrow x_1$  en un tiempo finito.

### 4.2.1 Controlador PD

Un control Proporcional Derivativo es un controlador de los más usados, debido a su sencillez de diseño e implementación, es un mecanismo por realimentación el cual calcula el error entre un valor medido y un valor deseado. El valor proporcional depende del error actual y el error derivativo es una predicción de los errores futuros [13].

$$u(t) = k_p e(t) + k_D \dot{e}(t) \quad (4.2)$$

### 4.2.2 Subsistema $z$

Para controlar la altura se aplica linealización exacta a (4.1), considerando la dinámica del modelo translacional, como en [14]

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \phi - mg \quad (4.3)$$

Se representa (4.3) en espacio de estado, definiendo el vector de estado como:  $x_z = [x_{1z}, x_{2z}]^T$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1z} &= x_{2z} \\ \dot{x}_{2z} &= -g + \left( \frac{\cos \theta \cos \phi}{m} \right) u \end{aligned} \quad (4.4)$$

Se sabe que el subsistema (4.4) puede linealizarse de forma exacta aplicando la siguiente ley de control.

$$u(t) = m(u_1(t) + g)(\cos \theta \cos \phi)^{-1}, \quad (4.5)$$

donde  $\cos \theta \cos \phi \neq 0$ , si  $\theta, \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  las cuales son condiciones deseables de operación en un cuadróptero.

Sustituyendo la ley de control propuesta (4.5), en el subsistema descrito en (4.3) obtenemos:

$$\dot{x}_z = A_z x_z + B_z u, \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1z} \\ x_{2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

Se puede verificar que el par  $(A_z, B_z)$  es controlable en un tiempo finito. en conclusión es posible encontrar una ley de control en lazo cerrado aunado al control linealizante tal que el sistema se comporte de manera deseada.

Tomando como base el control (4.5) se propone la siguiente ley de control en  $u_1$ , donde representa un controlador tipo PD, tal que:

$$u_1(t) = -k_{Dz}(\dot{z} - \dot{z}_d) - k_{pz}(z - z_d), \quad (4.7)$$

con:  $k_{pz}, k_{Dz} > 0$  y  $z_d$  la altura deseada.

### 4.2.3 Sintonización del subsistema $z$

Para la sintonización del control en el subsistema  $z$  (4.7), el control se diseñó mediante el enfoque de control clásico, es decir las características de desempeño del sistema se especifican en términos de la respuesta transitoria ante una entrada escalón. Por lo tanto se especifican los siguientes parámetros: tiempo de establecimiento  $t_s = 11s$  y factor de amortiguamiento  $\epsilon = 4.5$ , esto fue seleccionado ya que se desea que el sistema tenga un comportamiento suave. En la figura 4.1 se observan las características deseadas del subsistema  $z$ .

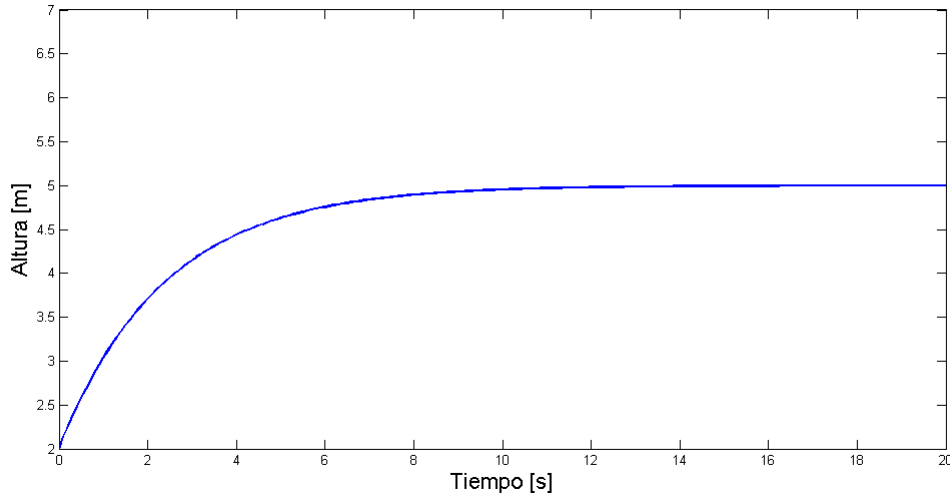


Figura 4.1: Respuesta deseada en altura

Al sustituir las características deseadas del subsistema  $z$  se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{3.828}{s^2 + 34.78s + 14.65}, \quad (4.8)$$

definiendo las ganancias como:  $k_p = \omega n^2$   $k_d = 2\xi\omega n$ . Entonces los valores de las ganancias son  $k_{pz} = 15$   $k_{Dz} = 35$ . Estos valores de ganancias ( $k_{pz}, k_{Dz}$ ) fueron implementadas y probadas en la plataforma experimental.

Se obtiene el determinante de  $[sI - (A_z + B_z k_z)]$ , donde el vector  $k_z$  está formado por  $[k_{pz}, k_{Dz}]$ :

$$P(s) = s^2 + 35s + 15, \quad (4.9)$$

Las raíces obtenidas son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -34.5660 \\ s_2 &= -0.4340 \end{aligned}, \quad (4.10)$$

Las raíces se encuentran en la parte real negativa del plano complejo, por lo tanto el sistema se va a comportar de forma estable.



#### 4.2.4 Control Subsistema $\psi$

El siguiente subsistema se refiere al ángulo de yaw, para llevar a cabo el control de yaw se usa como sensor el magnetómetro ya que siempre toma como referencia o inicio de movimiento el norte magnético de la tierra, y lo que siempre deseamos fue que el cuadricóptero nunca perdiera dicha orientación.

El subsistema en yaw es:

$$\ddot{\psi} = \tau_{\psi}, \quad (4.11)$$

cuya representación en espacio de estados es de la forma:

$$\dot{x}_{\psi} = A_{\psi}x_{\psi} + B_{\psi}u, \quad (4.12)$$

$$\dot{x}_{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\psi} \\ x_{2\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau_{\psi},$$

Se observa que el par  $(A_{\psi}, B_{\psi})$  del sistema (4.12) cumple con la condición de controlabilidad y por lo tanto es posible aplicar un control PD de la forma:

$$\tau_{\psi} = -k_{p\psi}(\psi - \psi_d) - k_{D\psi}(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d). \quad (4.13)$$

Donde  $\psi_d$  y  $\dot{\psi}_d$  son la posición y velocidad angulares deseados. Para verificar la estabilidad se obtiene el polinomio característico mediante  $\det(sI - (A_{\psi} + B_{\psi}k_{\psi}))$  y el vector de ganancias  $k_{\psi} = [k_{p\psi} = -100, k_{D\psi} = -115]$ :

$$P(s) = s^2 + 115s + 100 \quad . \quad (4.14)$$

Cuyas raíces son:

$$s_1 = -114.1238s_2 = -0.8762. \quad (4.15)$$

Las raíces como se observa están en la parte real negativa del plano complejo, por lo tanto se concluye que el subsistema  $\psi$  utilizando las ganancias mencionadas es estable.

### 4.2.5 Control Subsistema $x - \theta$

Para realizar el control de posición sobre el eje  $x$  se involucra el ángulo de  $\theta$  (pitch), tal como lo muestra el sistema (4.1) debido a que nuestro sistema es subactuado como se muestra en la figura 4.2, se define un control PD, para ello definimos:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= \tau_\theta \end{aligned}, \quad (4.16)$$

Cuya representación en espacio de estados, donde sus variables son:  $x_{1x} = x$ ,  $x_{2x} = \dot{x}$ ,  $x_{3\theta} = \theta$ ,  $x_{4\theta} = \dot{\theta}$  es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1x} &= x_{2x} \\ \dot{x}_{2x} &= -\frac{1}{m}u \sin x_{3\theta} \\ \dot{x}_{3\theta} &= x_{4\theta} \\ \dot{x}_{4\theta} &= \tau_\theta \end{aligned}, \quad (4.17)$$

al sistema (4.17) le aplicamos la entrada de control  $u$  (4.5), obteniendo el siguiente sistema:

$$\dot{x}_{2x} = -\frac{u_1 + g}{\cos \phi} \tan \theta. \quad (4.18)$$

Se hace la suposición que los ángulos de  $(\phi, \theta)$  son pequeños, debido a su intervalo de operación, con esta suposición  $\cos \phi \approx 1$ , al igual que  $\phi, \theta \approx 0$  por lo tanto se concluye que  $\tan \theta \approx \theta$ ; con ello obtenemos:

$$\dot{x}_{2x} = -(u_i + g)\theta. \quad (4.19)$$

De la linealización (4.19) se concluye el siguiente sistema lineal.

$$\dot{x}_{x,\theta} = A_{x,\theta}x_{x,\theta} + B_{x,\theta}\tau_\theta. \quad (4.20)$$

donde:

$$A_{x\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_{x,\theta} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad B_{x\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Se puede definir el control  $\tau_\theta$ , debido a que el par  $(A_{x\theta}, B_{x\theta})$  es controlable, con una acción de control PD, la cual controle tanto la posición en  $x$  y el ángulo de  $\theta$  respectivamente; con la estructura siguiente:

$$\tau_\theta = -k_{px}(x - x_d) - k_{Dx}(\dot{x} - \dot{x}_d) - k_{p\theta}(\theta - \theta_d) - k_{D\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d), \quad (4.22)$$

en donde  $x_d, \dot{x}_d$  son la posición y velocidad traslacional deseadas y  $\theta_d, \dot{\theta}_d$  son la posición y velocidad angular deseadas respectivamente. Las ganancias  $k_{px} = -3, k_{Dx} = -6, k_{p\theta} = -49, k_{D\theta} = -80$  se eligieron experimentalmente.

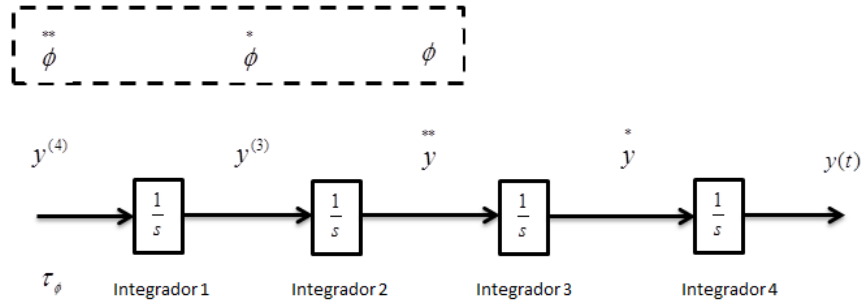


Figura 4.2: Diagrama de bloques del sistema subactuado  $y - \phi$ . [15]

El control  $\tau_\theta$  se puede expresar como  $-k_x \theta$  donde  $k_x = [k_{px}, k_{Dx}, k_{p\theta}, k_{D\theta}]$ . Entonces con las ganancias anteriores se puede encontrar que el polinomio característico mediante  $\det(sI - (A_{x\theta} + B_{x\theta}K_x))$ :

$$P(s) = s^4 + 85s^3 + 97s^2 + 29.4s + 0, \quad (4.23)$$

donde las raíces obtenidas son:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 + 0i \\ s_2 &= -83.8473 + 0i \\ s_3 &= -0.5763 + 0.1359i \\ s_4 &= -0.5763 - 0.1359i \end{aligned} \quad , \quad (4.24)$$

De acuerdo al lugar de las raíces se puede concluir que el sistema se comportara de manera estable, note que una raíz es cero pero como se observa el sistema es controlable debido a su rango.

#### 4.2.6 Control Subsistema $y - \phi$

Para realizar el control de posición sobre el eje  $y$  se involucra el ángulo de  $\phi$  ya que su dinámica esta subactuada como se mostró para el eje  $x$ , así también como lo muestra el sistema 4.1, Por lo tanto se propone un control tipo PD y para ello utilizamos el siguiente subsistema:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\ \ddot{\phi} &= \tau_\phi \end{aligned} \quad , \quad (4.25)$$

su representación en espacio de estados, donde:  $x_{1y} = y$ ,  $x_{2y} = \dot{y}$ ,  $x_{3\phi} = \phi$ ,  $x_{4\phi} = \dot{\phi}$  es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1y} &= x_{2y} \\ \dot{x}_{2y} &= \frac{u}{m} \sin \phi \cos \theta \\ \dot{x}_{3\phi} &= x_{4\phi} \\ \dot{x}_{4\phi} &= \tau_\phi \end{aligned} \quad , \quad (4.26)$$

al sistema (4.26) le aplicamos la entrada de control (4.5) para linealizar al sistema, obteniendo el siguiente sistema:

$$\dot{x}_{2y} = u_1 + g \tan(\phi) \quad . \quad (4.27)$$

Se hace la suposición que el ángulo de  $\phi$  es pequeño debido al rango de operación deseado, se concluye que si  $\phi \approx 0$  por lo tanto se puede llegar a que  $\tan \phi \approx \phi$ , y el sistema queda definido como:

$$\dot{x}_{2y} = u_1 + g\phi \quad (4.28)$$

De la linealización (4.28) se determina el sistema lineal:

$$\dot{x}_{y,\phi} = A_{y,\phi}x_{y,\phi} + B\tau_\phi \quad (4.29)$$

donde:

$$A_{y\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_{y,\phi} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad B_{y\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Se puede definir el control  $\tau_\phi$ , tal que establezca la orientación en  $\phi$  y la posición traslacional en el eje  $y$ , se propone una acción de control PD, del modo siguiente:

$$\tau_\phi = -k_{py}(y - y_d) - k_{Dy}(\dot{y} - \dot{y}_d) - k_{p\phi}(\phi - \phi_d) - k_{D\phi}(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) \quad (4.31)$$

Similar al subsistema  $x - \theta$ , el control  $\tau_\phi$  se puede expresar como  $-k_y x_{y\theta}$  donde  $k_y = -[k_{py}, k_{Dy}, k_{p\phi}, k_{D\phi}]$ . Se puede hallar una  $k_y$  tal que  $\det(sI - (A_{y\phi} + B_{y\phi}k_y))$  sea Hurwitz. Con las ganancias siguientes que fueron elegidas experimentalmente  $k_y = -[k_{py} = -3, k_{Dy} = -6.2, k_{p\phi} = -32, k_{D\phi} = -85]$  se tiene:

$$P(s) = s^4 + 85s^3 + 97s^2 + 29.4s + 0 \quad (4.32)$$

donde las raíces obtenidas son:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 + 0i \\ s_2 &= -83.8473 + 0i \\ s_3 &= -0.5763 + 0.1359i \\ s_4 &= -0.5763 - 0.1359i \end{aligned}, \quad (4.33)$$

Debido a la localización de las raíces y bajo el argumento similar al subsistema  $x - \theta$  se puede concluir que el subsistema es estable.

### 4.3 Seguimiento de una trayectoria

El seguimiento de la trayectoria se realizó en base a una posición y velocidad traslacional deseada como la estudiada en [16]. Definimos el polinomio deseado para cada una de las trayectorias.

- Línea recta:

Para la realización de la línea recta se propuso el siguiente polinomio deseado:

$$\begin{aligned}x_d &= -at^3 + bt^2 + ct - d \\y_d &= -at^3 + bt^2 + ct - d\end{aligned}\tag{4.34}$$

Entonces la velocidad deseada es automáticamente dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= -at^2 + bt + c \\ \dot{y}_d &= -at^2 + bt + c\end{aligned}\tag{4.35}$$

- Rectángulo:

Para la realización de la trayectoria rectangular se utiliza el mismo principio que para la línea recta es decir ahora en este caso son dos trayectorias rectas deseadas para formar el rectángulo y sus ecuaciones al igual que para la línea recta se propone con un polinomio deseado:

$$\begin{aligned}x_d &= -at^3 + bt^2 + ct - d \\y_d &= -at^3 + bt^2 + ct - d\end{aligned}\tag{4.36}$$

La velocidad deseada: Para la velocidad deseada se toma como base las ecuaciones de posición como:

$$\begin{aligned}x'_d &= -at^2 + bt + c \\y'_d &= -at^2 + bt + c\end{aligned}\tag{4.37}$$

Para el seguimiento de la trayectoria se implementó un controlador PD, se dividió en subsistemas el modelo matemático; en el subsistema  $z$  permaneció la misma ley de control y su linealización propuesta en (4.7); de la misma forma para el estado de yaw se permaneció con la misma ley de control que fue propuesta (4.13). Para el caso del subsistema  $(x - \phi)$  y  $(y - \theta)$  se utilizó un controlador tipo PD utilizando las posiciones y velocidades deseadas.

## 4.4 Conclusiones

Para poder sintetizar el control del cuadricóptero como se observó, fue preciso realizar como primera instancia una cancelación de no linealidades mediante la ley de control  $u$ . Una vez realizada la cancelación de las no linealidades, se aplicó un control PD para los estados de altura, posición y orientación.

Para el seguimiento de la trayectoria, como se observa se utilizó un control tipo PD, en este caso se propuso la trayectoria y velocidad traslacionales deseadas.





# CAPÍTULO 5

## Resultados experimentales

### 5.1 Introducción

En el presente capítulo se abordarán las partes de la que está formada la plataforma experimental, su construcción y sus características principales de hardware. Se presentarán los resultados obtenidos experimentalmente del comportamiento del observador y del controlador, además se muestran los gráficos del comportamiento de la estimación de posición y velocidad del vehículo.

### 5.2 Descripción de la plataforma experimental

El vehículo aéreo en el que se realizaron las pruebas consiste en un chasis de fibra de carbono de la marca Turnigy de 550 mm entre sus extremos. Para llevar a cabo el control, se utilizó el autopilot de la marca 3D-Robotics llamado Pixhawk. A este sistema se le pueden añadir periféricos tales como magnetómetro, GPS, el sistema de radio comunicación RC, tubos de pitot, entre otros módulos.

#### 5.2.1 Autopiloto pixhawk

Pixhawk es un autopilot de última generación que ofrece una gran cantidad de beneficios ya que puede integrar y es compatible con una gran cantidad de módulos entre los que destacan: puertos I2C, conectores para integrar módulo de GPS y magnetómetro, puerto de

comunicación serial, puertos analógico-digital, etc. El autopiloto ofrece una gran cantidad de almacenamiento externo a través de la tarjeta integrada MicroSD, ideal para el almacenamiento de los datos [17].

### **Características técnicas principales**

- Microprocesador core cortex 32-bit STM32F427.
- Memoria RAM 168 MHz/256KB, Memoria Flash 2MB.
- Invensense MPU 6000 3-ejes acelerómetro y giroscopio.
- Barómetro MS5611.
- 5 puertos de comunicación serial.
- Comunicación I2C.
- Puerto analógico-Digital 3.3 y 6.6 V.

Para el sistema de orientación el autopiloto cuenta con una Unidad de Medición inercial MPU 6000 3-axis accelerometer/gyroscope, con datos de orientación y velocidad angular los cuales son obtenidos al fusionar los diferentes elementos como son acelerómetros y giroscopios.

### **5.2.2 Motores y controladores de velocidad**

Los motores utilizados en esta plataforma son tipo brushless de 16 polos, marca Multistar con una corriente máxima de 22 A. Los controladores de velocidad son de la marca AFRO y su corriente máxima de operación es de 30 A, dichos controladores son compatibles con los motores antes mencionados [18].

### **5.2.3 Sistema de posicionamiento global (GPS)**

El GPS utilizado en la plataforma experimental es de la marca uBlox, y una de las principales ventajas es que integra un compass digital tipo HMC5883L. Este GPS es recomendado por la marca 3DRobotics para vuelos en exteriores: la frecuencia de muestreo es de 5 Hz y maneja una precisión de  $\pm 2.8 m$  [19], .

### 5.2.4 Prototipo experimental

La figura 5.1 muestra la plataforma experimental desarrollada. Los componentes que conforman la estructura son:

- Estructura de fibra de carbono en forma de cruz
- Sensor Compass ublox
- Sensor GPS Ublox6
- Autopilot Pixhawk
- Cuatro motores Brushless Multistar
- Transmisor y receptor Futaba 7C



Figura 5.1: Plataforma Experimental

### 5.2.5 Aviónica del cuadricóptero

La figura 5.2 muestra la conexión y como está formada la plataforma experimental, es decir la conexión del autopilot con los diferentes controladores de velocidad y éstos a su vez con los motores ,sensores y radio control.

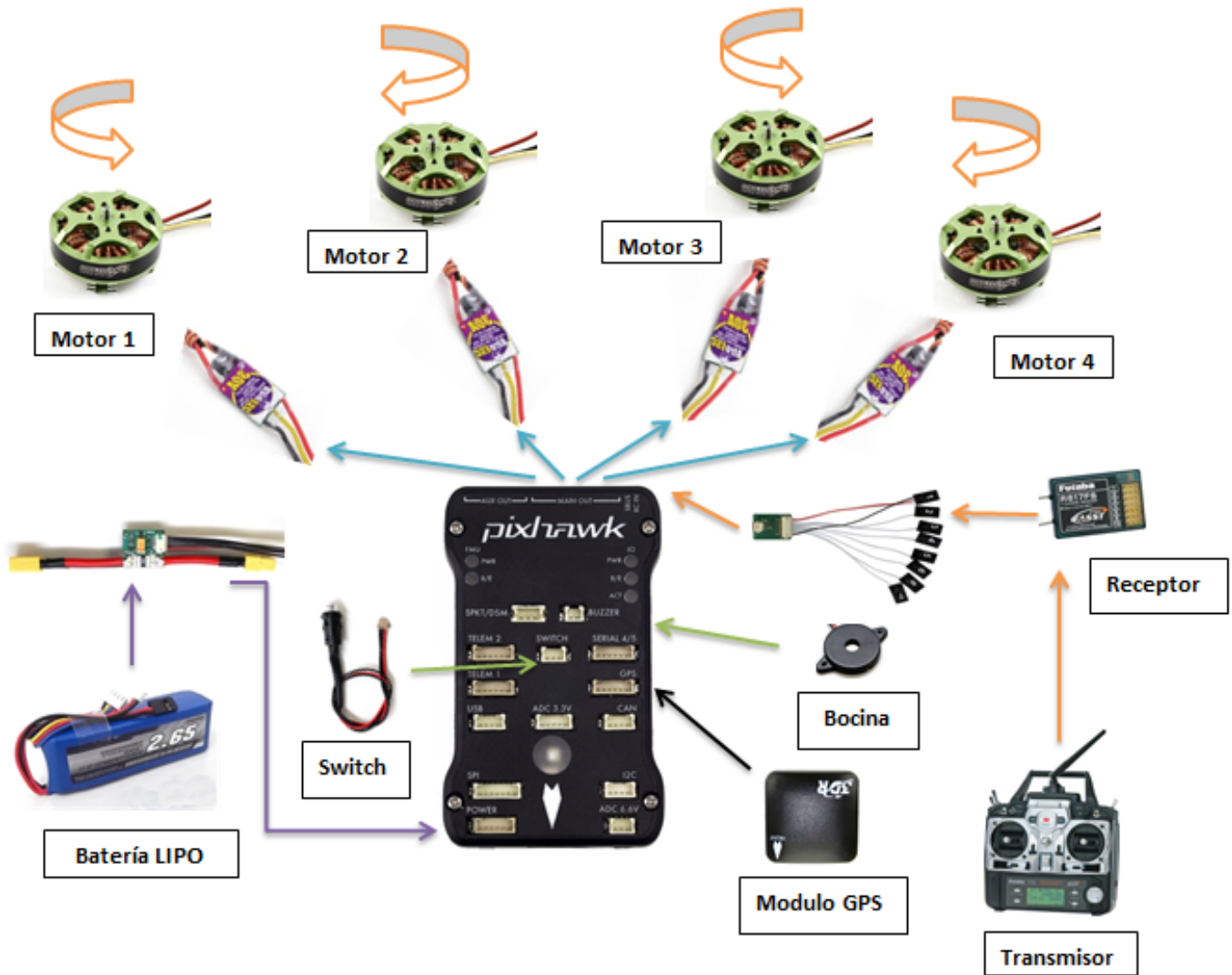


Figura 5.2: Aviónica del prototipo

### 5.3 Controladores

En esta sección se muestran los diferentes controladores y gráficos obtenidos. Se realizaron muchas pruebas, con el objetivo de ejecutar una navegación con las señales estimadas, también es importante señalar que el sistemas fue dividido en subsistemas, es decir se tomaron los subsistemas  $x - \theta$ ,  $y - \phi$ ,  $z$ , y  $\psi$  para su control y estimación.

## 5.4 Controlador de altura

Para el control de altura se usó un barómetro proporcionado por el Pixhawk, las señales de dicho barómetro fueron filtradas a través de un filtro segundo orden. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

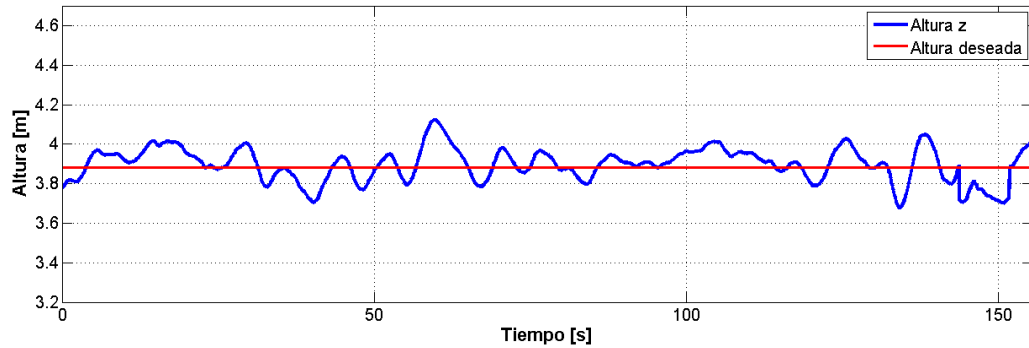


Figura 5.3: Altura real-altura deseada

La figura 5.3 muestra el comportamiento de la altura aplicando un control como el mostrado en la ecuación 4.5 , como se observa dicho comportamiento fue estable.

El comportamiento del error en  $z$  está dado por la gráfica 5.4, como se puede observar el vuelo presentó un error de  $\pm 20$  *cm* en su máximo.

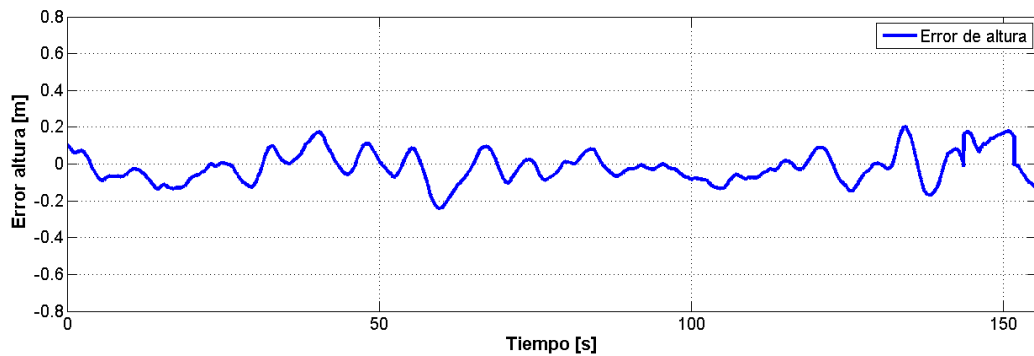


Figura 5.4: Error de altura  $z$

## 5.5 Controlador de posición con asistencia de GPS

Para el control de posición, primero se diseñó un controlador tipo PD para su posición en  $x$  y  $y$  usando como sensor el GPS. Es necesario tener un control de posición por que en la primera etapa para la realización de la navegación sin asistencia de GPS, se necesita estimar los parámetros del modelo polinomio no lineal propuesto de la dinámica de posición en  $x$  y  $y$  vistos en las ecuaciones 3.46 y 3.39 a través de la técnica de mínimos cuadrados.

El control de posición es el mostrado en la figura 5.5, el comportamiento retroalimentando la señal GPS es idóneo obteniendo un error mínimo  $\pm 2$  m como se puede verificar en dicha figura.

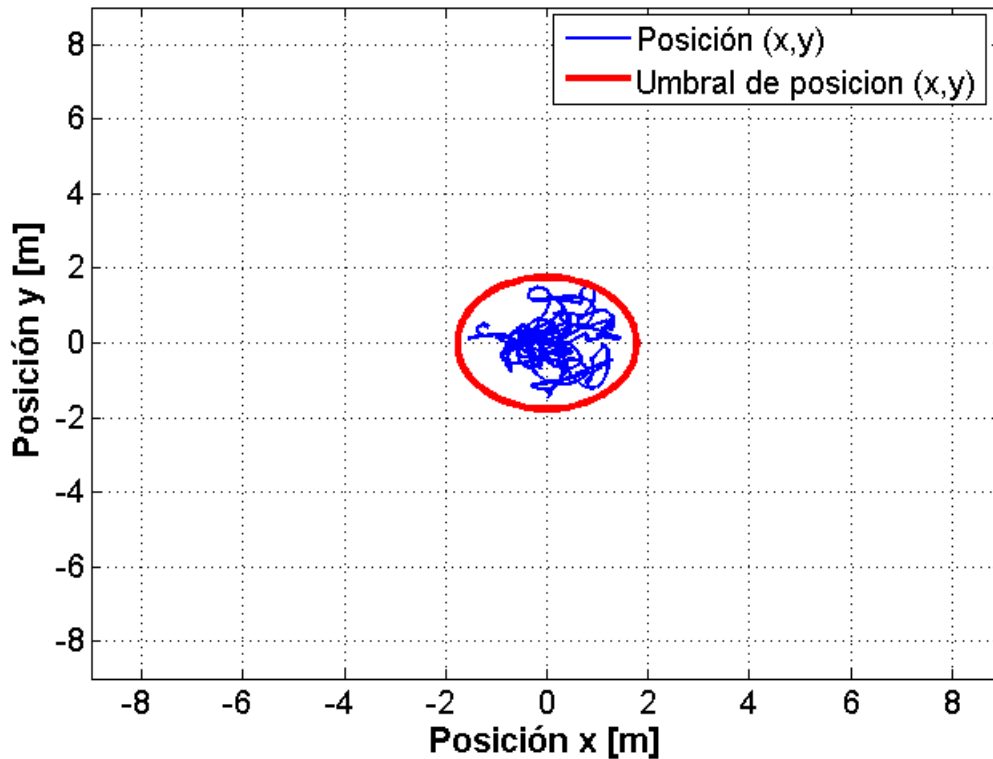


Figura 5.5: Control de Posición con asistencia de la señal GPS

El control PD utilizado para posición en  $x$  y  $y$  se muestran sus ecuaciones en 4.22 y 4.31.

## 5.6 Estado estacionario - Observador de Estado

Para poder observar la velocidad como se comentó en el capítulo 3 se hace el uso del modelo matemático del cuadricóptero desarrollado en el capítulo 2, se propone la integral cerca al origen para evitar la divergencia.

### 5.6.1 Observador de Velocidad $\dot{x}$

Para el observador de velocidad se integró el modelo de aceleración del cuadricóptero  $m\ddot{x} = -u \sin \theta$ , dicha integral como ya se mencionó es cercana al origen para evitar la divergencia.

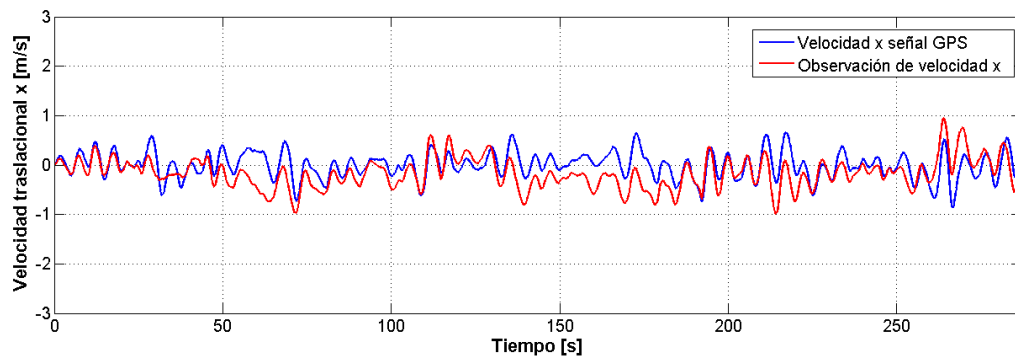


Figura 5.6: Estimador de velocidad  $x$  - estado estacionario

### 5.6.2 Observador de Velocidad $\dot{y}$

Para el observador de velocidad para el eje  $y$  se integró el modelo del cuadricóptero al igual que se hizo para el eje  $x$ ,  $m\ddot{y} = -u \sin \phi \cos \theta$ , dicha integral de la aceleración es cercana al origen.

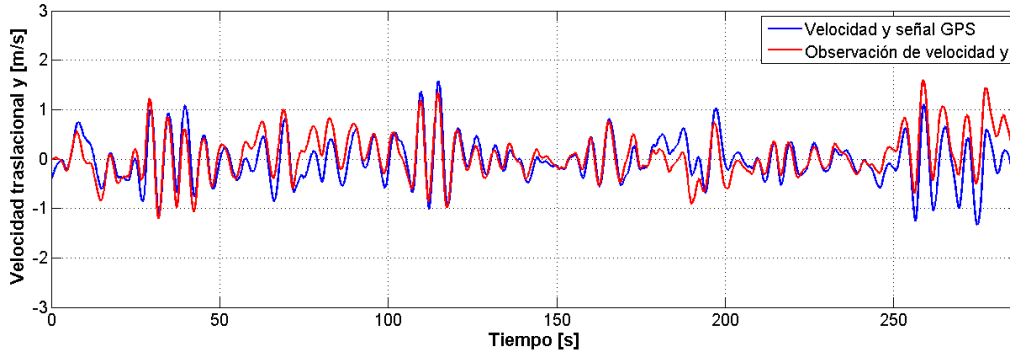


Figura 5.7: Estimador de velocidad  $y$  - estado estacionario

En las figuras 5.6 y 5.7 se muestra la estimación de velocidad en comparación con la señal GPS, tanto para el eje  $x$  y  $y$ . La ganancias propuestas para el vuelo estacionario fueron similares a las ganancias propuestas en el capítulo 4, en este caso para vuelo sin asistencia de GPS fueron  $k_p = 2.5$ ,  $k_d = 5.4$ .

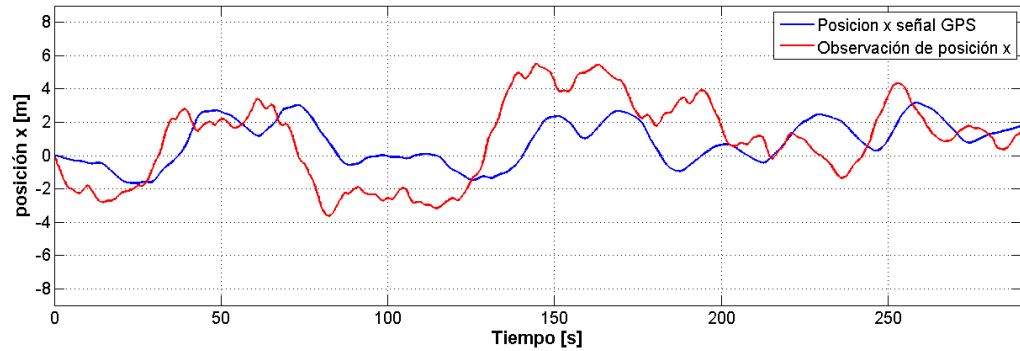
## 5.7 Estado estacionario - Observador de Estado

Para el observador de estado posición se basó en sintonizar un polinomio no lineal por el método de mínimos cuadrado el cual consiste en sintonizar los parametros de los polinomios propuestos en las ecuaciones 3.39 y 3.46 y así obtener una representación del comportamiento de posición en el eje  $x$  y  $y$  del cuadricóptero.

### 5.7.1 Observador de Estado Posición $x$

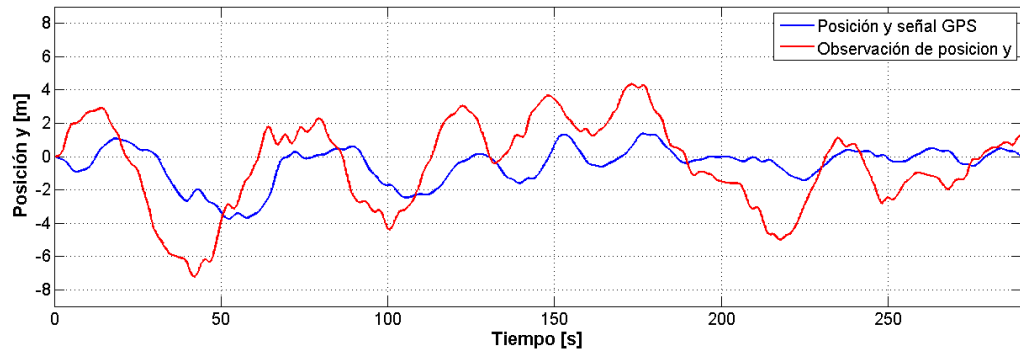
El estado de posición  $x$  estimado presenta algunos errores al hacer la comparación con la señal GPS, sin embargo presenta una ventaja ya que al aplicar la segunda integración a la dinámica de aceleración el sistema tiende a la divergencia, al aplicar la técnica de mínimos cuadrados, el comportamiento dinámico es aceptable, en la figura 5.8 se observa de forma más notoria dicho comportamiento.



Figura 5.8: Estimador de posición  $x$  - estado estacionario

### 5.7.2 Observador de Estado Posición $y$

Para el estado de posición  $y$  la estimación se observa en la figura 5.9, en dicha figura se observa la comparación de la estimación de la posición  $y$  con la medición proporcionada por la señal GPS.

Figura 5.9: Estimador de posición  $y$  - estado estacionario

En la figura 5.10 se muestra la estimación de posición basada en el algoritmo de mínimos cuadrados en vuelo estacionario, con retroalimentación al controlador PD de las señal de la posición y velocidad estimadas.

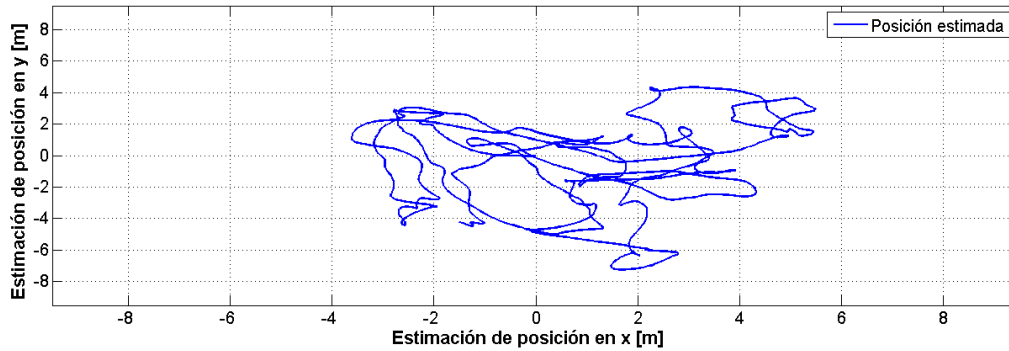


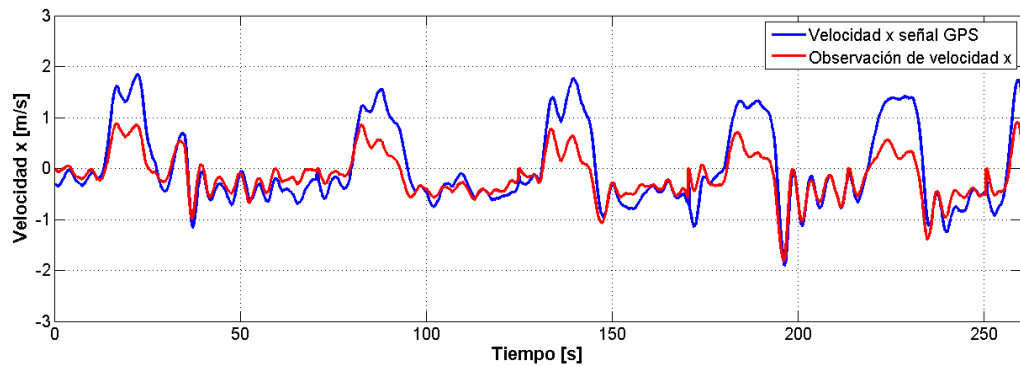
Figura 5.10: Estimador de posición  $(x, y)$  - estado estacionario

## 5.8 Línea recta - Observador de Estado

Para estimar la velocidad como ya se comentó en el capítulo 3 se hace el uso del modelo matemático del cuadricóptero desarrollado en el capítulo 2, se propone la integral cerca del origen para evitar la divergencia.

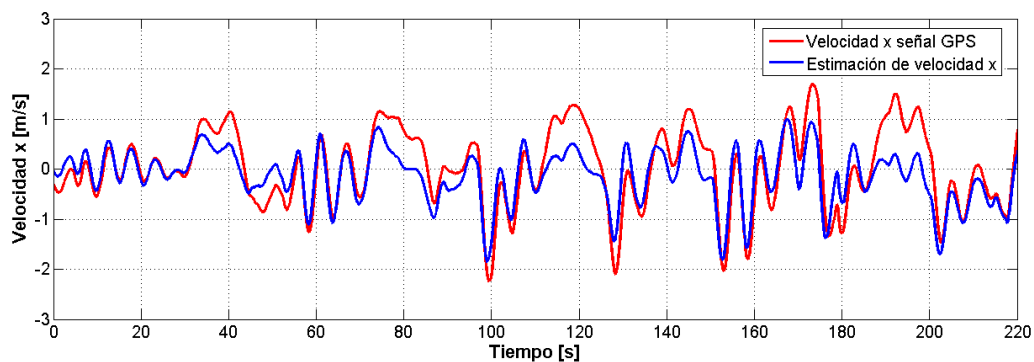
### 5.8.1 Observador de Velocidad $\dot{x}$

Para el observador de velocidad se integró el modelo de aceleración del cuadricóptero  $m\ddot{x} = -u \sin \theta$ , dicha integral como ya se mencionó es cercana al origen.

Figura 5.11: Estimador de velocidad  $x$  - línea recta

En la figura 5.11, se compara la velocidad traslacional del cuadricóptero con la señal GPS, el control PD implementado utilizó como retroalimentación las estimaciones de velocidad y posición.

En la figura 5.12 se muestra el mismo controlador PD, ahora utilizando como retroalimentación las mediciones de velocidad y posición dadas por el GPS.

Figura 5.12: Velocidad  $x$  - línea recta retroalimentación GPS

Como se muestra en la figura 5.12 se muestra una mejor estimación y esto es debido a que el control implementado utiliza la señal GPS.

### 5.8.2 Observador de Velocidad $\dot{y}$

Para el observador de velocidad se integro el modelo de aceleración del cuadricóptero  $m\ddot{y} = -u \sin \phi \cos \theta$ , dicha integral como ya se menciona se desplazo del origen para poder evitar la divergencia.

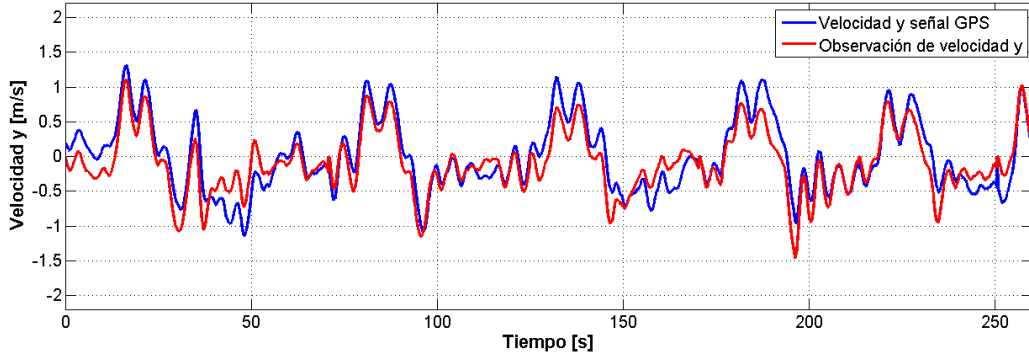


Figura 5.13: Estimador de velocidad  $y$  - línea recta

En las figuras 5.11 y 5.13, las estimaciones de velocidad comparadas con las señal de GPS, muestran un comportamiento similar, por lo tanto al implementar el mismo control que con la señal GPS su comportamiento es similar.

La figura 5.14 muestra la estimación de la velocidad traslacional  $y$  utilizando un controlador tipo PD con retroalimentación de la señal GPS.

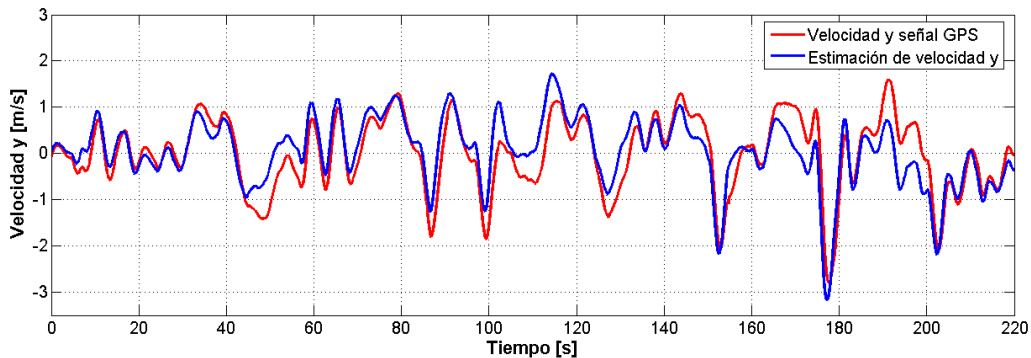


Figura 5.14: Velocidad  $y$  - línea recta retroalimentación GPS

## 5.9 Línea recta - Observador de Estado

Como se propuso en el capítulo 3 se diseñó un polinomio deseado de velocidad y posición para llevar a cabo la navegación del cuadricóptero en una línea recta. Para el estado de posición al igual que presentado para el estado estacionario se basó en una técnica de mínimos cuadrados, se compara la posición estimada contra la señal dada por GPS; las estimaciones de posición fueron implementadas en el control tipo PD para la ejecución de la línea recta.

### 5.9.1 Observador de Posición $x$

El estado de posición  $x$  estimado presenta algunos errores, todos los resultados siguientes fueron realizados utilizando un controlador tipo PD, utilizando en su retroalimentación las señales estimadas de velocidad y posición. En la figura 5.15 se observa de forma más notoria el comportamiento de la señal estimada  $x$  realizando líneas rectas y su comparación con la señal GPS.

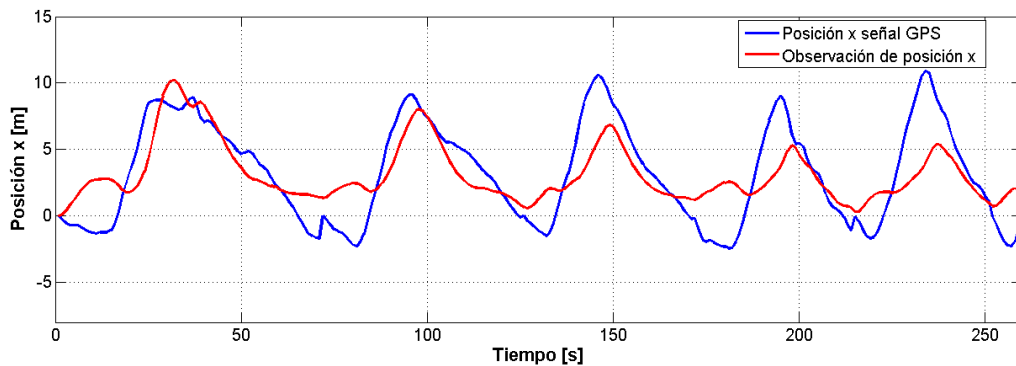


Figura 5.15: Estimador de posición  $x$  - línea recta

En la figura 5.15 se observa la estimación de la posición y la posición dada por la señal GPS. En la figura se observa la realización de la línea recta, cabe destacar que se realizó la línea recta cinco veces en un movimiento del ida y regreso las estimaciones de posición son llevadas a cabo por el algoritmo de mínimos cuadrados.

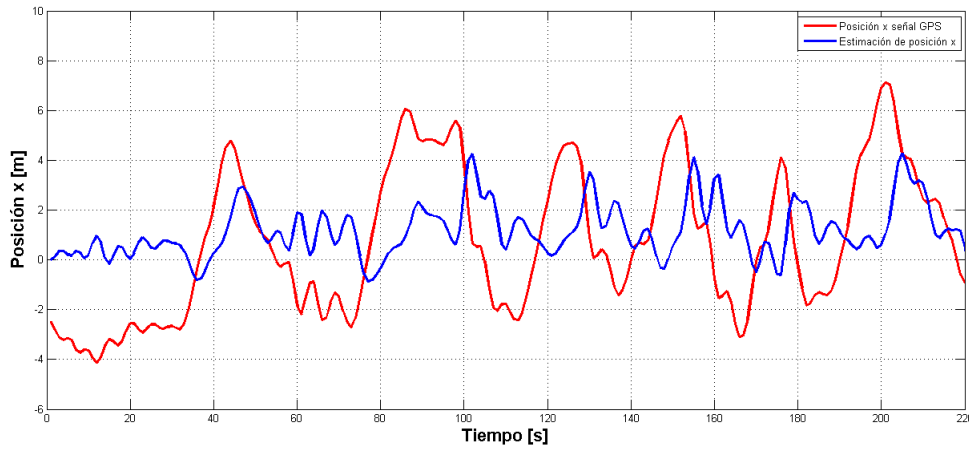


Figura 5.16: Posición  $x$  - línea recta retroalimentación GPS

La figura 5.16 muestra la estimación de posición  $x$  utilizando como retroalimentación al controlador las mediciones de la señal GPS.

### 5.9.2 Observador de Posición $y$

El estado de posición  $y$  estimado al igual que en el eje  $x$  es aceptable. Se realizó la navegación del cuadricóptero utilizando como retroalimentación la estimación de posición y velocidad.

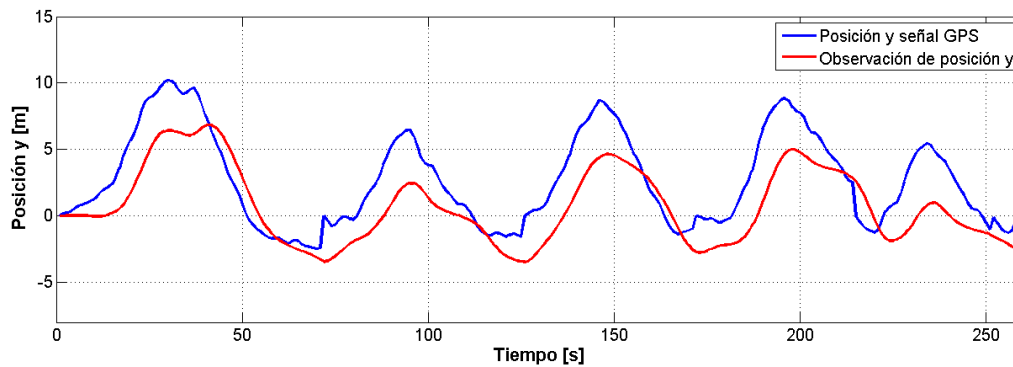


Figura 5.17: Estimador de posición  $y$  - línea recta

En la figura 5.17 se observa que la estimación no llega a la posición final de la recta

generada por la señal GPS, sin embargo la forma de la señal es parecida con el GPS al igual que para el eje  $x$ .

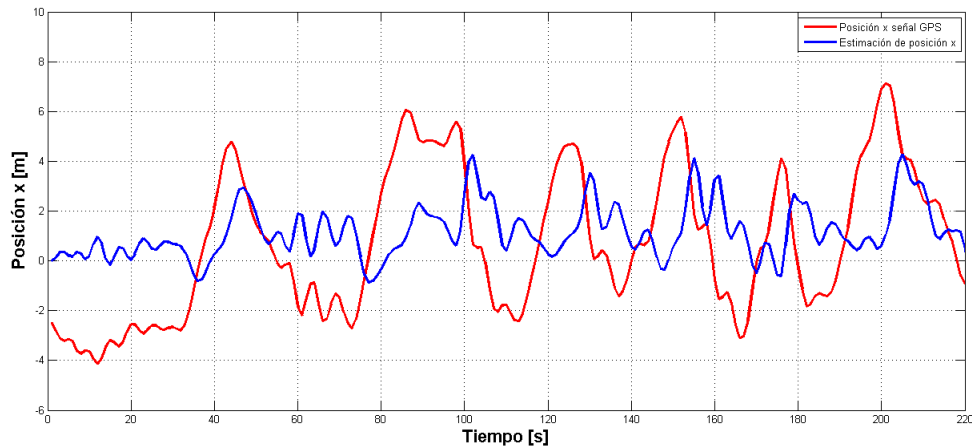


Figura 5.18: Posición  $y$  - línea recta retroalimentación GPS

La figure 5.18 muestra la estimación de posición  $y$  utilizando un controlador tipo PD retroalimentando la señal dada por el GPS.

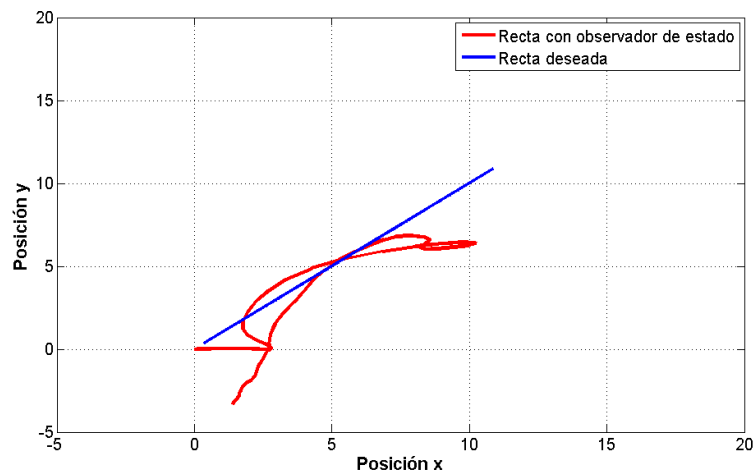


Figura 5.19: Estimador de posición  $(x, y)$  - línea recta

En la figura 5.20 se compara la estimaciones de posición  $x$  y  $y$  con la posición de la señal

GPS y la línea recta deseada, utilizando un control PD con retroalimentación al controlador de las señales de posición y velocidades estimadas.

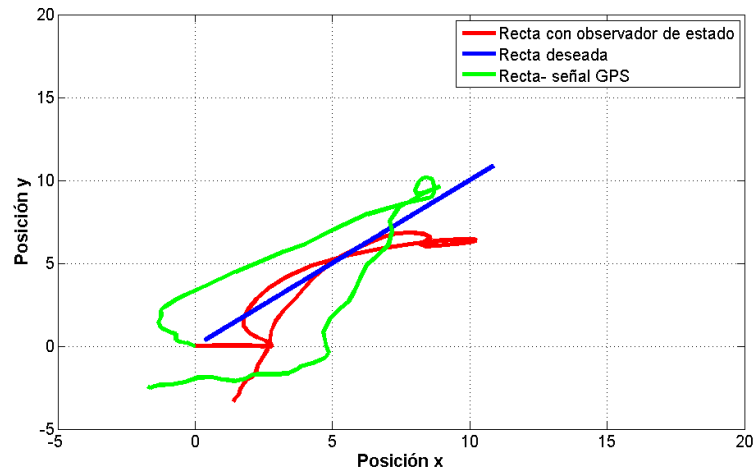


Figura 5.20: Estimador de posición  $x, y$  - línea recta

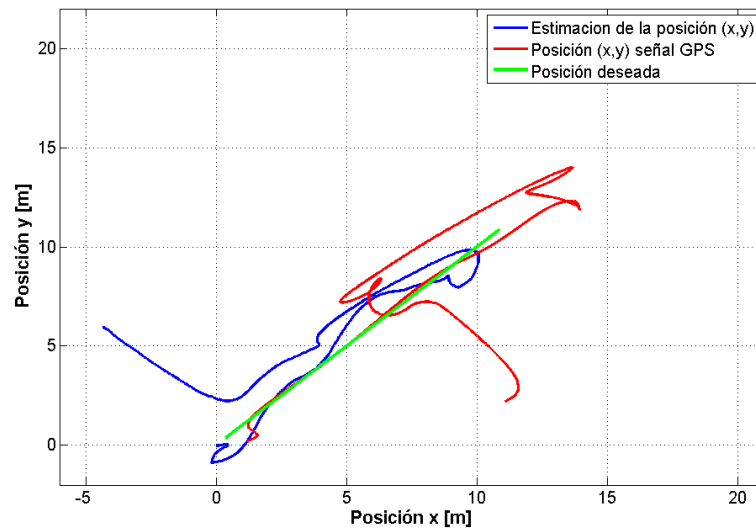


Figura 5.21: Posición  $x, y$  - línea recta retroalimentación GPS

En la figura 5.21, se utilizó para realizar la línea recta, la posición y velocidad dada por



la señal GPS, se observa que la línea recta dada por la retroalimentación de la señal GPS es similar a la línea recta deseada.

## 5.10 Rectángulo - Observador de Estado

Para realizar la estimación de la velocidad se realizó la integral cercana al origen para evitar la divergencia.

### 5.10.1 Observador de Velocidad $\dot{x}$

Para realizar la estimación de la velocidad, se propuso la integral del modelo matemático de aceleración, en este caso del la aceleración en el eje  $x$

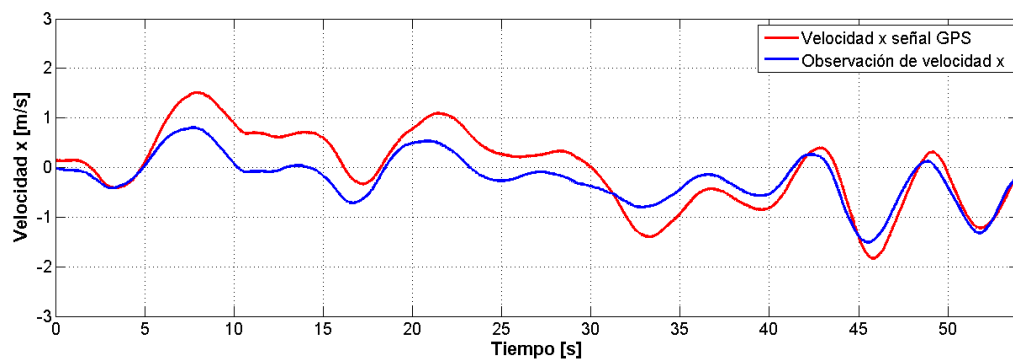


Figura 5.22: Estimador de velocidad  $x$  - rectángulo

La figura 5.23 muestra la estimación de la velocidad  $x$  retroalimentando al controlador la señales de velocidad y posición dadas por el GPS.

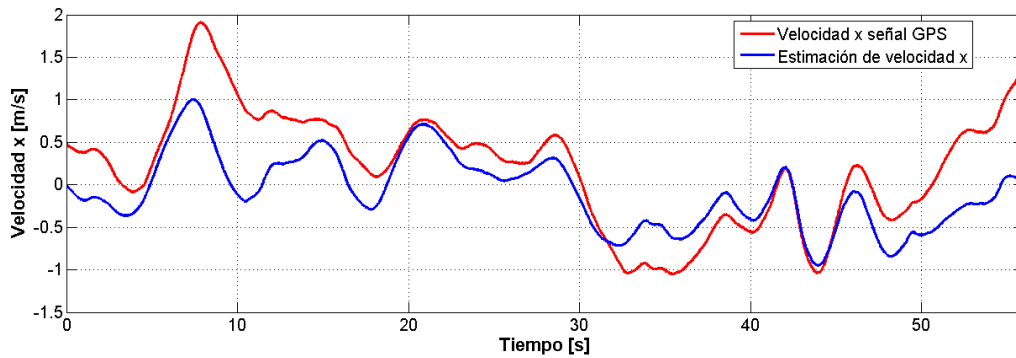


Figura 5.23: Estimador de velocidad  $x$  - rectángulo retroalimentación GPS

### 5.10.2 Observador de Velocidad $\dot{y}$

Para el caso de la estimación de la velocidad en el eje  $y$ , se utilizó el modelo matemático de aceleración para dicho eje. Se realizó un desplazamiento de la integral ideal, para evitar la divergencia debida al ruido generado por la central inercial.

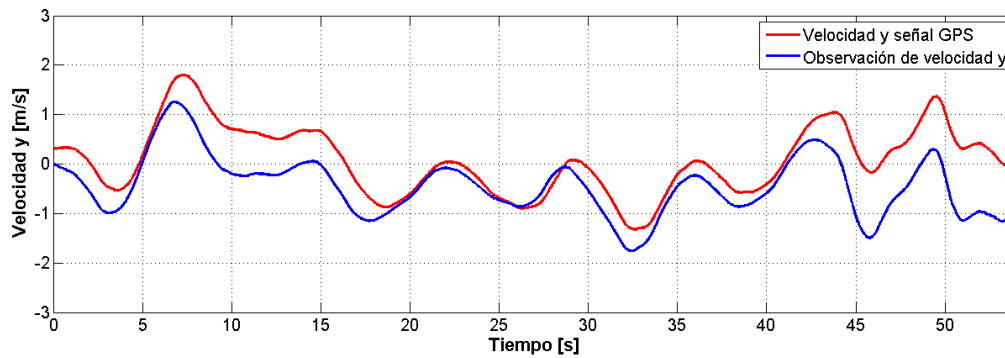


Figura 5.24: Estimador de velocidad  $y$  - rectángulo

Dadas las figuras 5.22 y 5.24, se detecta que las estimaciones de velocidad comparadas, en este caso, con las velocidades de la señal GPS, muestra un comportamiento aproximado siguiendo la forma la velocidad dada por GPS.

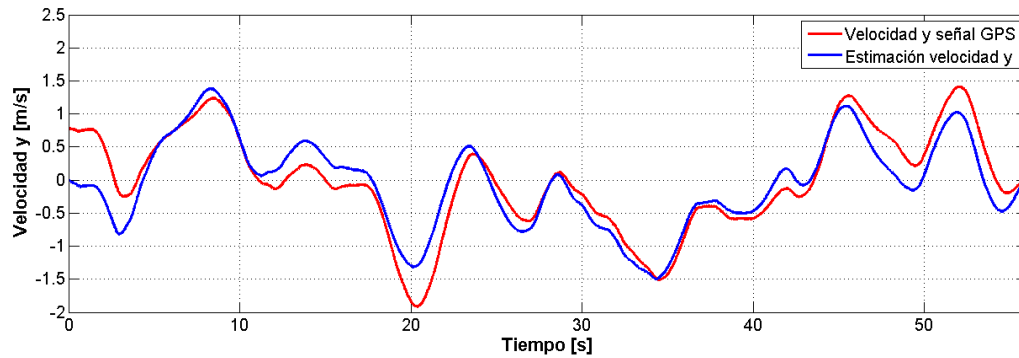


Figura 5.25: Estimador de velocidad  $y$  - rectángulo retroalimentación GPS

La estimación de la velocidad  $y$  retroalimentando la posición y velocidad de la señal GPS al controlador se muestra en la figura 5.25.

## 5.11 Rectángulo - Observador de Estado

Para realizar la estimación de la posición además de la doble integral desplazada del origen, se propuso un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados el cual consiste, en aproximar el comportamiento del cuadricóptero a un modelo aproximado para la corrección de la doble integral del modelo de aceleraciones tanto en  $x$  y  $y$ . Se compara la estimación de la posición con la posición dada por el GPS.

### 5.11.1 Observador de Posición $x$

Para llevar a cabo la navegación de un rectángulo en el capítulo 3 se muestra las ecuaciones para generar la trayectoria deseada, estas ecuaciones fueron embarcadas en el cuadricóptero; al igual que para la generación de la línea recta. Las estimaciones generadas por la doble integral y el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados fueron retroalimentadas al controlador.

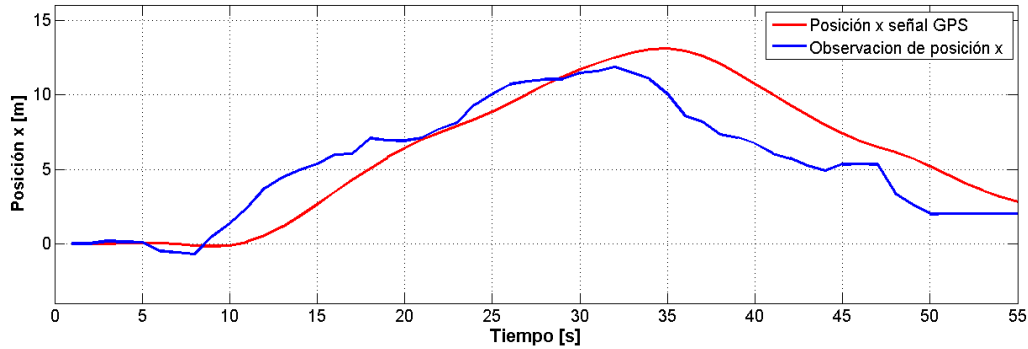


Figura 5.26: Estimador de posición  $x$  - rectángulo

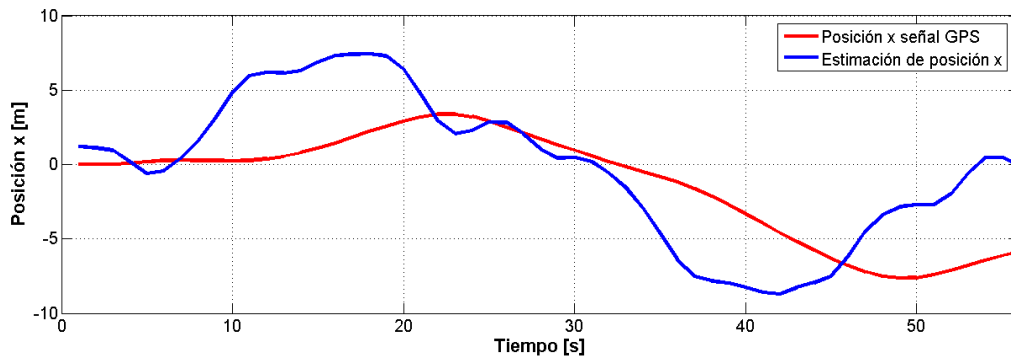
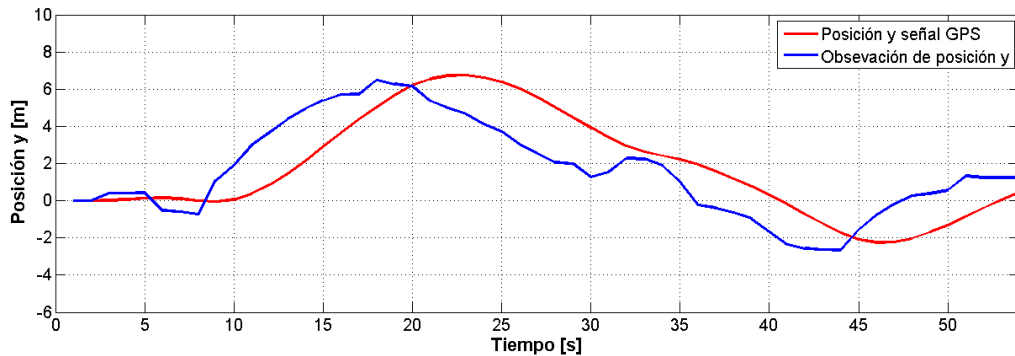


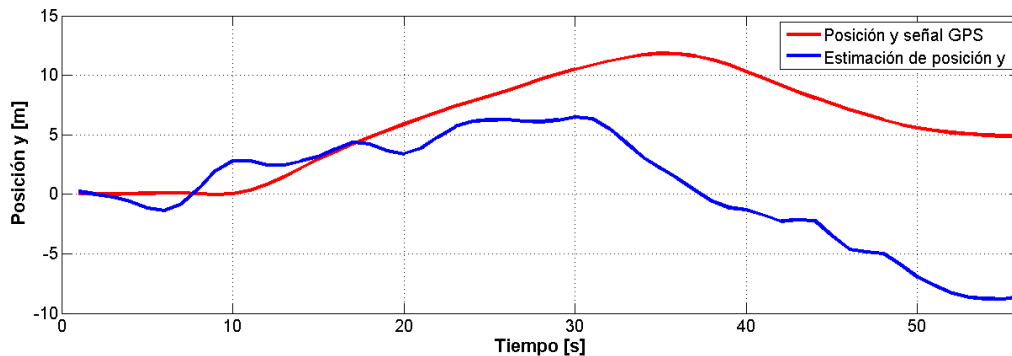
Figura 5.27: Estimador de posición  $x$  - rectángulo retroalimentación GPS

### 5.11.2 Observador de Posición $y$

Para el caso de la navegación del rectángulo, al igual que para el eje  $x$  se propone una ecuación que genera la trayectoria deseada para el movimiento de dicho eje, cabe resaltar que para la navegación de la trayectoria en ángulo de yaw siempre esta orientado hacia el norte magnético de la tierra, por lo tanto los ángulos de pitch y roll son los encargados de generar la trayectoria.

Figura 5.28: Estimador de posición  $y$  - rectángulo

En las figuras 5.26 y 5.28, se observa que la estimación de la posición tiene mayor error que el de velocidad, esto debido a que ya se tiene una doble integral la cual tiene mucho más error, y al algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, al realizar el cuadrado a medida que se realiza la navegación el error va en aumento como se observará más adelante al comparar las estimaciones en el plano  $x - y$ . Estas estimaciones fueron generadas retroalimentando al controlador las mismas señales estimadas

Figura 5.29: Estimador de posición  $y$  - rectángulo retroalimentación GPS

Las figuras 5.29 y 5.27 muestran las estimaciones de posición  $x$  y  $y$  respectivamente, retroalimentando la posición y velocidad del GPS.

En la figura 5.30 se compara la señal GPS, la señal estimada y el rectángulo deseado, se utilizó un control tipo PD con la retroalimentación de las posiciones y velocidades estimadas.

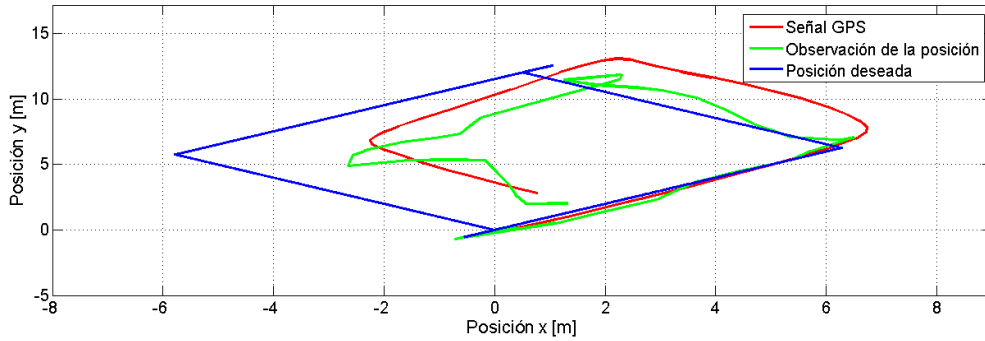


Figura 5.30: Estimador de posición  $(x, y)$  - rectángulo

En la figura 5.31 se compara la señal GPS, la señal estimada y el rectángulo deseado, utilizando un control tipo PD con la retroalimentación de las posiciones y velocidades de la señal GPS.

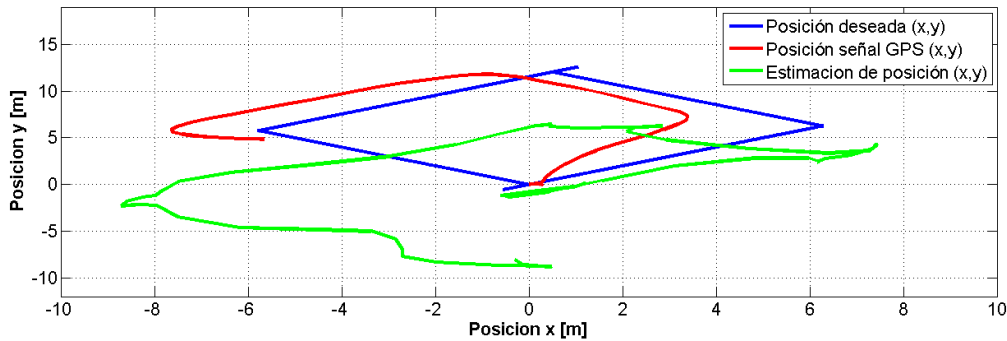


Figura 5.31: Estimador de posición  $(x, y)$  - rectángulo retroalimentación GPS

## 5.12 Conclusiones

En el capítulo se abordó la parte experimental, se ejecutaron diferentes modos de vuelo desde la realización de trayectoria como la línea recta y un rectángulo y vuelo estacionario; los resultados obtenidos de los experimentos fueron satisfactorios, la velocidad se logró reconstruir y tener una buena aproximación haciendo su comparación con la señal GPS; los resultados de la estimación de posición, se observó que se puede prescindir de la señal GPS aproximadamente por un minuto; ya que después el algoritmo empieza a presentar errores, cabe

mencionar que este tiempo es suficiente para tomar medidas necesarias como su aterrizaje.





# CAPÍTULO 6

## Conclusiones y trabajo futuro

### 6.1 Conclusiones

Las aportaciones de este trabajo de tesis fueron principalmente en los siguientes aspectos: Se trabajó con el autopiloto de la marca 3D Robotics llamado Pixhawk, con el que se obtuvieron los datos de posición espacial y angular mediante el GPS ublox 6 y de la central inercial que está integrada en el autopiloto, los datos de posición espacial fueron capturados para tomar de referencia la posición y poder tener una referencia con la estimación de la posición.

Se aplicaron controles tipo PD para controlar la orientación y altura del cuadricóptero, los resultados fueron satisfactorios. La estimación de la velocidad en un inicio presentó grandes problemas debido a que la integración presentaba derivas debido al ruido en los sensores, al cambiar la manera de integración se obtuvieron resultados exitosos de estimación ya que el ruido fue tomado en cuenta.

Para la estimación de la posición se propuso un modelo no lineal, ya que nos permitió aproximar el comportamiento del cuadricóptero en cuanto a la dinámica de su posición, se realizó el embarque del algoritmo que calcula los parámetros del modelo no lineal, es decir estos cálculos fueron realizados en tiempo real. Con las estimaciones de velocidad y posición se realizaron vuelos estacionarios obteniendo resultados satisfactorios, una de las limitaciones de la estimación de posición es el tiempo de vuelo, pero este tiempo de vuelo cabe mencionar

que es suficiente para tomar medidas como el aterrizaje del vehículo y factores meteorológicos que afectan por ende la aproximación del modelo no lineal.

Otro del trabajo fue el realizar y diseñar trayectorias deseadas y con el uso de las estimaciones de posición y velocidad, realizar una navegación de dichas trayectorias con el cuadricóptero, los resultados obtenidos fueron satisfactorios logrando realizar las trayectorias y navegación sin GPS.

Para la estimación de la posición se realizaron varios experimentos con el objetivo de ver el valor de los parámetros de la ecuación no lineal.

## 6.2 Trabajo futuro

Para el seguimiento de este trabajo se propone, la utilización de visión artificial y el flujo óptico de tal manera que nos permita corregir la estimación de la posición y mejorar la experimentación en vuelo estacionario.

Analizar el modelo no lineal del cuadricóptero para tratar el tema de la observabilidad, y por ende verificar si es posible reconstruir el estado.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] CHANG, LIU., AND STEPHEN D, PRIOR. *Design and Implementation of a Mini Quadrotor Control System in GPS Denied Enviroments*, International Conference on Unmanned Aircraft Systems ICUAS, 2015
- [2] DENUELLE, AYMERIC., THURROWGOOD, SAUL., STRYDOM REUBEN. *Biologically-inspired Visual Stabilization of a Rotorcraft UAV in Unknown Outdoor Enviroments*, International Conference on Unmanned Aircraft Systems ICUAS, 2015
- [3] MEBARKI, RAFIK., CACACE, JONARHAN., AND LIPPIELLO VICENZO *Velocity estimation of an UAV in a GPS-denied enviroment with IMU and visual data*, Safety, Security, and Rescue Robotics (SSRR), 2013 IEEE International Symposium on
- [4] RAFIK, M. AND VINCENZO, L. *Image momentos-based velocity estimation of UAVs in GPS denied enviroments*, Safety, Security, and Rescue Robotics (SSRR), 2014 IEEE International Symposium on, 2014
- [5] HAIYANG, C., YU, G., GROSS, J. AND FRAVOLINI M. *A Comparative Study of Optical Flow and Traditional Sensors in UAV American Control Conference (ACC)*, 2013.
- [6] GEOQIANG, M., DRAKE, S. AND ANDERSON, B. *Design of an Extended Kalman Filter for UAV Localization, Information, Decision and Control*, 2007.
- [7] YINGLI, S., BIN, X., YAO ,Z., XINRAN, J. AND XU, FINDER. *Towards autonomous control of quadrotor unmanned aerial vehicles in a GPS-denied urban area via laser ranger finder*, International Journal for Light and Electron Optics, July 2015
- [8] LOZANO, R. *Unmadded aerial vehicles: Embedded control*, 2013, John Wiley & Sons.

- [9] CASTILLO, P., LOZANO, R., ALBERTOS, P. *Modelado y Establizacion de un Helicoptero de Cuatro Rotores*, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI, 2007
- [10] GOLDSTAIN, C.P., POOLE AND J.L. SAFKO *Classical Mechanics, 1983, Addison-Wesley*
- [11] CHEN, C *Linear System Theory and Design, 2013, Oxford University*
- [12] WELLSTEAD , PE., AND ZARROP, MB. *Self Tuning Systems, Control and Signal Processing, 1991, Wiley*
- [13] VISIOLI *Practical PID control, 2006, Springer Science & Business Media*
- [14] SANTOS, O., ROMERO, H., SALAZAR, S., LOZANO, R. *Finite Horizon Nonlinear Optimal Control for a Quadrotor Experimental Results Optimal control applications and methods, under review, 2016.*
- [15] SALAZAR, S., GONZÁLEZ, I., LOPEZ, R AND LOZANO, R. *Simulation and robust trajectory-tracking for a Quadrotor UAV, 2014, international Conference on Unmanned Aircraft System (ICUAS)*
- [16] SALAZAR, SERGIO. , PALOMINO, A., AND LOZANO, ROGELIO *Trajectory Traking for a Four Rotor Mini-aircraft , Conference on Decision and Control and the European Control Conference, Seville, Spain 2005*
- [17] <https://store.3drobotics.com/products/3dr-pixhawk>, Julio de 2015
- [18] <http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/38455/TurnigyMultistar/4220>, Agosto de 2015
- [19] <https://store.3drobotics.com/products/3dr-gps-ublox-with-compass>, Agosto de 2015