



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

PROGRAMA DE SISTEMAS AUTÓNOMOS DE
NAVEGACIÓN AÉREA Y SUBMARINA

Navegación de un VANT de Ala Fija con Visión Artificial

TESIS

Que presenta
Antonio de Jesús Flores Moreno

Para obtener el grado de
Maestría en Ciencias
en Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y
Submarina

Directores de Tesis:
Dr. Iván González Hernández
Dr. Hugo Romero Trejo

Agradecimientos

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría en Ciencias en Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina.

Al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), por acogerme en sus instalaciones.

Al Laboratorio Franco-Mexicano de informática y automática Unidad Mixta Internacional 3175 CNRS, por brindarme sus instalaciones y medios para llevar a cabo este proyecto.

A mis padres, por todo el incommensurable apoyo que me brindaron y la gran guía que son para mí.

A mis asesores de tesis el Dr. Iván y el Dr. Israel, por darme la oportunidad de trabajar bajo su tutela y por toda la ayuda que me brindaron para realizar este trabajo de tesis.

A mis amigos y compañeros de laboratorio, por su apoyo a lo largo de la realización de este trabajo.

Resumen

Este trabajo de tesis trata de la construcción del modelo matemático completo para implementar una simulación que incluya las condiciones lo mas cercanas a la realidad de un vehículo aéreo de ala fija, se tratan también estrategias de control para que la aeronave alcance las referencias necesarias durante un vuelo, estas referencias son la altura, la velocidad y la orientación de curso de la aeronave, además se implementa una estrategia de navegación para el seguimiento de trayectorias rectas o de órbitas con altura constante. Finalmente se desarrolla un algoritmo de geolocalización mediante un sistema de visión para estimar la posición en un marco inercial de un objeto y poder modificar su navegación para que este vuele en órbita sobre él. Esta tesis se puede dividir en cuatro partes fundamentales: En la primera parte de la tesis comprendida por los primeros cuatro capítulos se desarrolla un modelo matemático que involucra todas las fuerzas y momentos debido a la aerodinámica y la propulsión de la aeronave, se desarrolla un modelo matemático estocástico para el modelado del comportamiento del viento, y desarrollar una plataforma en matlab simulink que permite realizar una simulación lo mas certero a la realidad. Como segunda parte se desarrolla un control mediante el conocimiento de la aerodinámica de la aeronave, es implementado un control mediante retroalimentación de la lectura de los sensores. En la tercera parte se implementa un algoritmo de navegación mediante el uso de un campo vectorial, dicho algoritmo es probado bajo una simulación de "hardware in the loop" la cual emplea el simulador CRRCSim que cuenta con la ventaja de enviar y recibir datos mediante el protocolo de comunicación de mavlink, de esta manera también se involucra el hardware autopiloto y se simulan los sensores, por lo que permite obtener el comportamiento del control y seguimiento como si se estuvieran actuando en un vuelo no simulado. Finalmente se procede al diseño de un filtro extendido de Kalman que busca obtener mediante la lectura de las coordenadas en pixeles de imágenes recibidas de un objeto en específico, la ubicación en coordenadas GPS para finalmente hacer que la aeronave vuele sobre él. Una vez validadas las estrategias de control y navegación se procede a implementarlas en una plataforma experimental que utiliza un autopiloto pixhawk y una computadora de compañía Odroid XU4 para el procesamiento digital de imágenes, comunicadas mediante el protocolo de comunicación mavlink y mediante un sistema operativo para robots (ROS) es implementado MAVROS para enviar las referencias del vehículo para su navegación.

Abstract

This thesis deals with the construction of the complete mathematical model to implement a simulation that includes the conditions closest to the reality of a fixed-wing aerial vehicle, control strategies are also treated so that the aircraft reaches the references necessary during a flight, these references are the altitude, speed and orientation of the course of the aircraft, in addition a navigation strategy is implemented for the tracking of straight trajectories or orbits with constant altitude. Finally, a geolocation algorithm is developed by means of a vision system to estimate the position in an inertial frame of an object and to modify its navigation so that it flies in orbit over it. This thesis can be divided in four main parts: In the first part of the thesis covered by the first four chapters a mathematical model is developed that involves all the forces and moments due to the aerodynamics and propulsion of the aircraft, a stochastic mathematical model is developed to model the behavior of the wind, and develop a platform in matlab simulink that allows to simulate this aircraft and its behavior very accurate to reality. As a second part, a control is developed through the knowledge of the aerodynamics of the aircraft, a feedback control is implemented of the reading of the sensors. In the third part a navigation algorithm is implemented through the use of a vector field, this algorithm is tested under a "hardware in the loop" simulation which uses the CRRCSim simulator that has the advantage of sending and receiving data through the Mavlink communication protocol, in this way the autopilot hardware is also involved and the sensors are simulated, so that the control and monitoring behavior can be obtained as if they were acting on a non-simulated flight. Finally we proceed to the design of an extended Kalman filter that seeks to obtain, by reading the coordinates in pixels of images received from a specific object, the location in GPS coordinates to finally make the aircraft fly over it. Once the control and navigation strategies have been validated, they are implemented in an experimental platform that uses a pixhawk autopilot and an Odroid XU4 company computer for the digital processing of images, communicated through the mavlink communication protocol and through Robots operating system (ROS) is implemented MAVROS to send the vehicle references for navigation.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Índice de tablas	VIII
Índice de figuras	IX
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
1.2. Estructura de la Tesis	2
2. Marcos de Coordenadas	3
2.1. Matrices de Rotación	4
2.2. Marco de referencia del VANT	5
2.2.1. Marco de referencia inercial F^i	6
2.2.2. Marco de referencia del vehículo F^v	6
2.2.3. Marco de referencia del vehículo-1 F^{v1}	6
2.2.4. Marco de referencia del vehiculo-2 F^{v2}	7
2.2.5. Marco de referencia del cuerpo F^b	8
2.2.6. El marco de estabilidad F^s	10
2.2.7. El marco del viento F^w	11
2.3. Velocidad aérea, Terrestre y del viento.	12
2.4. El triángulo del viento.	13
3. Cinemática y Dinámica	17
3.1. Variables de Estado	17
3.2. Cinemática	19
3.3. Dinámica de Cuerpo Rígido	20
3.3.1. Movimiento de Traslación	20
3.3.2. Movimiento Rotacional	21

4. Fuerzas y Momentos	25
4.1. Fuerzas debido a la Gravedad	25
4.2. Fuerzas y Momentos Debido a la Aerodinámica	26
4.2.1. Superficies de Control	27
4.2.2. Aerodinámica Longitudinal	28
4.2.3. Aerodinámica Lateral	32
4.2.4. Coeficientes aerodinámicos	33
4.3. Fuerzas y Momentos debido a la Propulsión	33
4.3.1. Empuje de la Hélice	33
4.3.2. Momento Debido a la Hélice	34
4.4. Disturbios Atmosféricos	35
4.5. Resumen de las ecuaciones no lineales del movimiento de la aeronave.	37
5. Sistema Autopiloto	39
5.1. Control del Ángulo de cabeceo	39
5.2. Control de Altura	41
5.3. Control de Velocidad	42
5.4. Control del ángulo de Alabeo	45
5.5. Control de Viraje	47
5.6. Resultados de Simulación	48
5.6.1. Análisis de resultados obtenidos	51
6. Seguimiento de Trayectorias	52
6.1. Seguimiento de Recorridos Rectos	52
6.1.1. Estrategia de Orientación Lateral para el Seguimiento de una Línea Recta	55
6.2. Seguimiento de órbita con altura constante	56
6.3. Resumen de Algoritmos para seguimiento de Trayectorias	58
6.4. Resultados de Simulación Implementando HIL	60
6.4.1. MAV3DSim	60
6.4.2. Resultados de navegación de línea recta	60
6.4.3. Resultados de navegación de órbita	61
7. Navegación guiada por visión	63
7.1. Marco de la Cámara y Geometría proyectiva	63
7.1.1. El modelo de la cámara	64
7.2. Geo-localización	65
7.2.1. Estimación de L mediante la suposición de tierra plana.	66
7.2.2. Geo-localización implementando un filtro extendido de kalman	66
8. Resultados, conclusión y trabajo futuro	69
8.1. Plataforma experimental	69
8.2. Resultados de Navegación del vehículo	69
8.3. Conclusión	71
8.4. Trabajo futuro	72
A. DERIVACIÓN DE UN VECTOR	73

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
B. Algoritmo de visión por computadora	75
C. Publicación	76
Bibliografía	77

Índice de tablas

3.1. Variables de estado empleadas para un VANT de ala fija	18
4.1. Parámetros para el modelo de ráfagas de Dryden [18]	36
5.1. Condiciones iniciales	49
5.2. Ganancias del control	49

Índice de figuras

2.1.	Rotación en 2D a lo largo del eje z	4
2.2.	Rotación en 2D a lo largo del eje z	6
2.3.	Marco de referencia del vehículo-1, es calculado mediante la rotación del marco del vehículo un ángulo de guiñada ψ , se muestra como el eje i^{v1} apunta hacia la nariz del vehículo, j^{v1} hacia el ala derecha y k^{v1} hacia el centro de la tierra. . .	7
2.4.	Marco de referencia del vehículo-2, es calculado mediante la rotación del marco del vehículo-1 un ángulo de cabeceo θ , se muestra como el eje i^{v2} esta alineado con el eje longitudinal del vehículo, j^{v2} hacia el ala derecha y k^{v2} sale del estomago del VANT.	8
2.5.	Marco de referencia del cuerpo, es calculado mediante la rotación del marco del vehículo-2 un ángulo de alabeo ϕ , se muestra como el eje j^b esta alineado con el eje lateral del vehículo, i^b con el eje longitudinal y k^b sale del estomago del VANT.	9
2.6.	Marco de referencia de estabilidad, es calculado mediante la rotación del marco del cuerpo un ángulo de ataque α , se muestra como el eje i^s esta alineado con la proyección del vector del viento relativo sobre el plano longitudinal del VANT.	10
2.7.	Marco de referencia de viento, es calculado mediante la rotación del marco de estabilidad un ángulo de deslizamiento β , se muestra como el eje i^w esta alineado con el vector del viento relativo.	11
2.8.	Ángulo de paso γ y ángulo de curso χ	14
2.9.	el ángulo de guiñada ψ indica hacia a donde apunta el VANT, el ángulo de curso χ indica el trayecto de la aeronave, χ_c muestra la diferencia de ambos ángulos.	14
2.10.	el ángulo de guiñada ψ indica hacia a donde apunta el VANT, el ángulo de curso χ indica el trayecto de la aeronave, χ_c muestra la diferencia de ambos ángulos.	15
3.1.	Ejes de movimiento.	18
4.1.	Distribución de presiones en un perfil aerodinámico	26
4.2.	Fuerza de levantamiento L , fuerza de arrastre D y momento aerodinámico M .	26
4.3.	Configuración estándar de las superficies de control de un VANT de ala fija.[13]	27
4.4.	Coficiente de levantamiento en funcion al ángulo de ataque	30
4.5.	Coficiente de arrastre contra ángulo de ataque	31
4.6.	Diagrama de bloques para agregar los efectos del viento a una simulación. . . .	36

5.1.	Diagrama a bloques del control PD para el control de cabeceo	40
5.2.	Control por retroalimentación para la altura de la aeronave	42
5.3.	Diagrama a bloques del control PI para velocidad.	45
5.4.	Diagrama a bloques del control PID para el ángulo de alabeo	46
5.5.	Diagrama de lazo externo para control de altura	48
5.6.	Respuesta del control lateral del VANT	50
5.7.	Respuesta del control longitudinal del VANT	50
6.1.	Vista superior del vuelo de la aeronave y la trayectoria deseada expresada como $P_{\text{línea}}(r, q)$	53
6.2.	Plano vertical de la trayectoria	54
6.3.	Campo vectorial para distintos valores de k_{path}	55
6.4.	Trayecto orbital con centro en c_n, c_e , y radio ρ . La distancia entre el VANT y el centro es d y la posición angular al con respecto a la órbita es φ	57
6.5.	Trayectoria del VANT contra la trayectoria deseada	60
6.6.	Error respecto a la trayectoria.	61
6.7.	Visualización a través del simulador MAV3DSim del seguimiento de línea recta	61
6.8.	Ángulo de curso de la aeronave y ángulo de curso deseado para el seguimiento de órbitas con alturas constantes	62
6.9.	Error relativo a la trayectoria	62
6.10.	Visualización a través del simulador MAV3DSim del seguimiento de órbita	62
7.1.	Marco de la cámara. La posición en píxeles (0,0) corresponde al centro de la imagen, el cual se asume que está alineado con el eje óptico	64
7.2.	Suposición de tierra plana para geo-localización	66
7.3.	Esquema del algoritmo de geo-localización	67
8.1.	Esquema de comunicación mediante mavros entre la pix falcon y la computadora de compañía odroid XU4	69
8.2.	Thrust(Empuje) aplicado durante el control de altura.	70
8.3.	Velocidad aérea y terrestre durante el vuelo.	70
8.4.	Altura del vuelo, recordar que en el marco de referencia inercial la componente abajo negativa indica una altura positiva.	71
8.5.	Ángulo de cabeceo de la aeronave durante el control de altura.	71
8.6.	Ángulo de alabeo de la aeronave	71
A.1.	Transformación del vector p en dos marcos de referencia.	73

Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados(VANT) o UAV(Unmanned Aerial Vehicles) por sus siglas en ingles son aquellos que cuentan con la avionica necesaria para desempeñar misiones totalmente autónomos, es decir, que no requiere de la intervención de un piloto humano que controle la aeronave. Existe una gran variedad de aplicaciones civiles en VANT's como en aplicaciones militares, por ejemplo el VANT militar MQ-9 Reaper [2] que no arriesga la vida de algún piloto humano y tiene la capacidad de ser pilotado a distancia para vigilancia y/o ataque. A su vez también existe una gran cantidad de aplicaciones para uso civil como de entretenimiento que permiten ser remotamente controlados por civiles para aplicaciones de fotografía o vídeo y cuentan con sistemas de control asegurando la seguridad de personas y animales, un ejemplo de éste vehículo es el cuadricóptero mavic de DJI[9], además de monitorio de tráfico y aplicaciones en campos de agricultura los vehículos autónomos empiezan a tener un impacto en la sociedad actual. Así como se desarrollan aplicaciones militares y civiles para los VANT también hay un gran campo de desarrollo en investigación, en México es llevado a cabo el simposio mexicano de vehículos aéreos no tripulados[25] el cual busca integrar el desarrollo e investigación en la industria y la academia en México. Actualmente se habla de varios artículos científicos que muestran la gran cantidad de técnicas de control de los VANT y desarrollo de autopilotos para el vuelo autónomo tales como el control PID [14], técnicas de navegación como el uso de funciones de Lyapunov para asegurar que la aeronave se acerque a la trayectoria[12]. Los problemas que se tratan en esta tesis es la de implementar un control a una aeronave de ala fija, implementar una estrategia de seguimiento de trayectorias y ademas de ello utilizar una cámara para implementar un algoritmo de visión que permita detectar objetos en tierra, la idea principal es implementar campos vectoriales junto con un control PID que permita la navegación de órbitas con una altura adecuada para el campo de visión de la cámara y así obtener referencias en tierra y construir una trayectoria que permita construir una trayectoria a seguir. Durante el desarrollo de las leyes de control y la estrategia de navegación se utilizó la plataforma de simulación de MATLAB llamada SIMULINK donde es una interfaz adecuada para probar la dinámica y la cinemática del vehículo de ala fija, esta simulación fue construida para la validación de las leyes de control y leyes de navegación. Como medida de seguridad en el momento de validar las leyes de control y la estrategia de navegación se implemento la simulación mediante Hardware in the Loop, implementado en [20] que permite validar las leyes de control y navegación mediante la simulación de los sensores y leyes de control en un ambiente simulado por computadora sin riesgo de exponer el prototipo, otro motivo de utilizar el simulador MAV3Dsim es que es un simulador de código abierto que se pueden hacer modificaciones al código fuente, de esta manera

es fácil adecuar la simulación para poder validar pruebas de navegación. Una vez validadas la estrategia de control y navegación se prosiguió con la implementación en un prototipo armado con una computadora de compañía ODROID XU4 y una tarjeta Pixhawk en la cual calcula el control y lo transmite a las superficies de control para que la aeronave cambie de curso.

1.1. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es llevar a cabo la navegación autónoma de un VANT de ala fija empleando un sistema de visión por computadora y con referencias ubicadas en tierra para guiar su trayectoria. Para llevar a cabo este objetivo se impusieron los siguientes objetivos secundarios:

- Estudiar los marcos de coordenadas para describir de la mejor manera el comportamiento de la aeronave en un espacio 3D.
- Estudiar la cinemática y dinámica que envuelve la aeronave para implementar el mejor modelo matemático que se aproxime a su comportamiento.
- Estudiar las fuerzas y momentos que envuelven a la aeronave para encontrar la mayor aproximación a su modelo matemático.
- Proponer una estrategia de control lo suficientemente robusta ante las perturbaciones del viento que permitan al vehículo realizar el seguimiento de trayectorias.
- Proponer una estrategia de navegación que otorgue las referencias adecuadas para seguir líneas rectas y órbitas
- Proponer un algoritmo de visión por computadora para obtener referencias en tierra e identificar el objetivo en el marco de referencia inercial.

1.2. Estructura de la Tesis

La organización de la tesis está como sigue. En el capítulo 2 se introducen los marcos de referencia que son utilizados para representar el ambiente que rodea a la aeronave. La cinemática y la dinámica de la aeronave se presentan en el capítulo 3. Las fuerzas y momentos que se desempeñan en la aeronave se describen en el capítulo 4. Las estrategias de control son presentadas en el capítulo 5. La estrategia de seguimiento para línea recta y órbitas se desarrollan en el capítulo 6. La navegación guiada mediante visión artificial se describe en el capítulo 7. En el capítulo 8 se discuten los resultados de esta tesis junto con la conclusión y trabajo futuro.

Marcos de Coordenadas

Una gran parte de la cinemática del robot se ocupa del establecimiento de diversos sistemas de coordenadas para representar las posiciones y orientaciones de objetos, y con transformaciones entre estos sistemas de coordenadas. De hecho, la geometría del espacio tridimensional y de los movimientos rígidos juega un papel en todos los aspectos de la manipulación robótica[26].

En el estudio de los vehículos no tripulados es importante comprender como diferentes cuerpos están orientados respecto a otros, mas aún, es necesario comprender como están orientados con respecto a la tierra.

También es importante comprender como los sensores (por ejemplo una cámara) están también orientados con respecto al vehículo que los contiene.

En este capítulo se mostrarán los diversos marcos de coordenadas en los cuales se pueden representar la posición y orientación de un vehículo además de sus sensores, y la transformación entre estos sistemas de coordenadas.

Para ello es necesario el empleo de distintos marcos de coordenadas por las siguientes razones:

- Las ecuaciones de movimiento de Newton están en relación al marco de coordenadas inercial fijo en la tierra, sin embargo, el movimiento es mas fácil de representar en el marco fijo al cuerpo.
- Las fuerzas aerodinámicas y torques que actúan en el cuerpo de la aeronave son mas fáciles de visualizar en el marco de referencia fijado al cuerpo.
- Los sensores embebidos como acelerómetros y giroscopios otorgan información al marco de referencia fijado al cuerpo, mas aún, el GPS entrega posición y velocidad relativo al marco inercial.
- La mayoría de los requisitos de misiones, como puntos para realizar loiter, o trayectorias a seguir requieren de información dada en el marco de referencia inercial.
- El empleo de cámaras en el vehículo requieren de su propio marco de referencia para ubicar objetos en tierra, con respecto al marco de referencia del vehículo y el marco inercial.

Un marco de referencia es transformado a otro mediante dos operaciones básicas: rotación y traslación. En la siguiente sección se analizará las matrices de rotación y su uso para transformar entre marcos de coordenadas.

2.1. Matrices de Rotación

Considerando los dos marcos de referencia mostrados en la figura 2.1. El vector P puede ser expresado en tanto en el marco \mathcal{F}^0 (especificado por (i^0, j^0, k^0)) como en el marco \mathcal{F}^1 (especificado por (i^1, j^1, k^1)). En el marco \mathcal{F}^0 tenemos

$$P = p_x^0 i^0 + p_y^0 j^0 + p_z^0 k^0.$$

Alternativamente tenemos en el marco \mathcal{F}^1 tenemos

$$P = p_x^1 i^1 + p_y^1 j^1 + p_z^1 k^1.$$

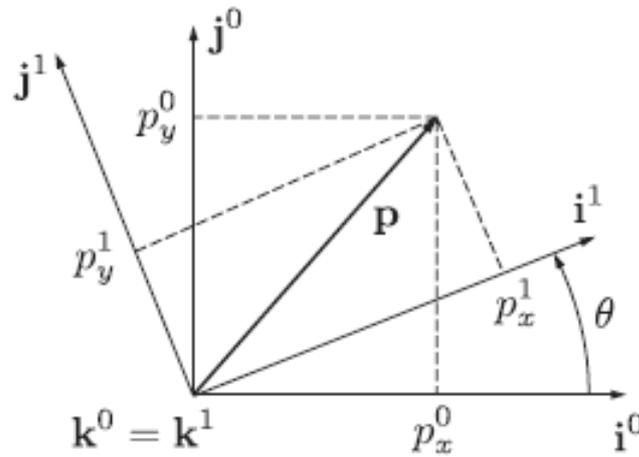


Figura 2.1: Rotación en 2D a lo largo del eje z

Los vectores (i^1, j^1, k^1) y (i^0, j^0, k^0) están formados por un conjunto de vectores perpendiculares como base.

Igualando ambas expresiones tenemos

$$p_x^0 i^0 + p_y^0 j^0 + p_z^0 k^0 = p_x^1 i^1 + p_y^1 j^1 + p_z^1 k^1.$$

Llevando a cabo el producto punto en ambos lados con i^1, j^1 y k^1 y arreglando el resultado en forma de matriz tenemos

$$P^1 \triangleq \begin{pmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1 \cdot i^0 & i^1 \cdot j^0 & i^1 \cdot k^0 \\ j^1 \cdot i^0 & j^1 \cdot j^0 & j^1 \cdot k^0 \\ k^1 \cdot i^0 & k^1 \cdot j^0 & k^1 \cdot k^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{pmatrix}.$$

Basándonos en la geometría de la figura 2.1 tenemos

$$P^1 = R_0^1 P^0 \tag{2.1}$$

Donde

$$R_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La notación R_0^1 es usada para denotar una rotación del marco de coordenadas \mathcal{F}^0 al marco de coordenadas \mathcal{F}^1 .

Procediendo de manera similar, una rotación de mano derecha de el sistema coordenado sobre el eje y nos da

$$R_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y una rotación sobre el eje x nos resulta en la siguiente matriz

$$R_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La matriz R_0^1 es un ejemplo de una clase general de matriz de rotación ortonormal que tiene las siguientes propiedades:

- $(R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T = R_b^a$.
- $R_b^c R_a^b = R_a^c$.
- $\det(R_a^b) = 1$,

En la obtención de la ecuación 2.1, notar que el vector P permanece constante y el nuevo marco de coordenada \mathcal{F}^0 al marco de coordenadas \mathcal{F}^1 fué obtenido rotando \mathcal{F}^0 al marco de coordenadas \mathcal{F}^0 a través de una rotación de mano derecha de un ángulo θ . Alternativamente, una rotación puede ser usada para rotar un vector un ángulo prescrito en un marco de referencia fijo.

2.2. Marco de referencia del VANT

Para obtener la dinámica que involucra un vehículo aéreo de ala fija es necesario comprender algunos marcos de referencia de interés. En esta sección, definiremos y describiremos los siguientes marcos de referencia: el marco de referencia inercial, el marco de referencia del vehículo, el marco de referencia del vehículo-1, el marco de referencia del vehículo-2, el marco de referencia del cuerpo, el marco de referencia de estabilidad y el marco de referencia del viento. Los marcos de referencia inercial y de los de cuerpo están relacionados mediante una traslación, mientras que los del cuerpo están relacionados unicamente por rotaciones. Los ángulos que definen las orientaciones relativas en el marco del cuerpo son los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada (roll”, ”pitchz yaw respectivamente en inglés). Estos ángulos son comúnmente conocidos como los ángulos de Euler. Los ángulos de rotación que definen la orientación relativa en los marcos de referencia de estabilidad y viento son el ángulo de ataque y el ángulo de deslizamiento lateral. Para fines prácticos se asumirá una tierra plana y no rotativa, lo cual es valido para vehículos autónomos en miniatura (MAV por sus siglas en inglés).

2.2.1. Marco de referencia inercial F^i

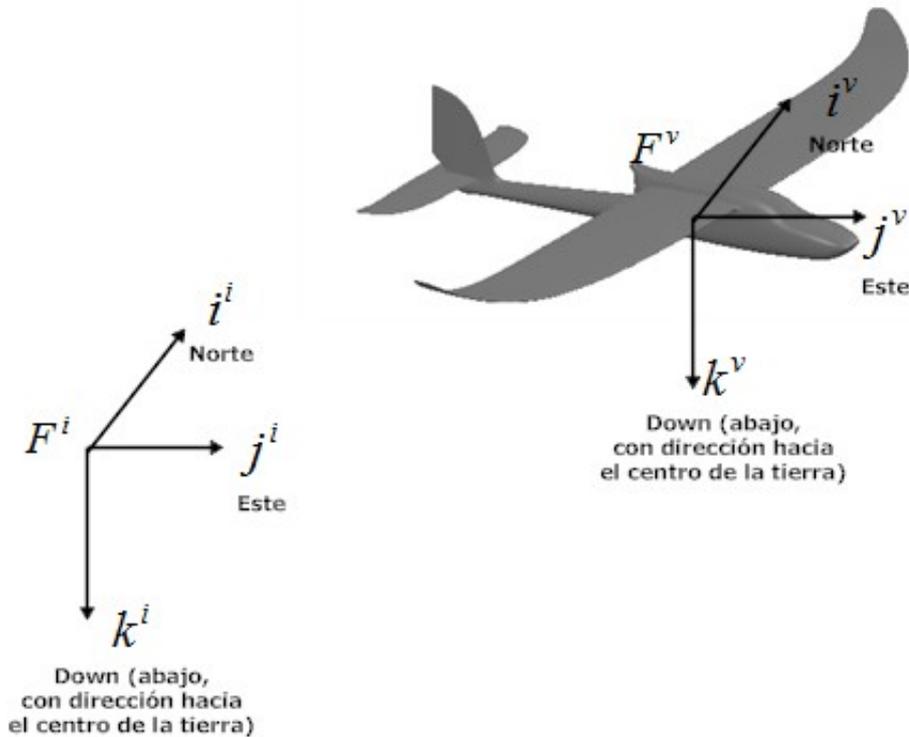


Figura 2.2: Rotación en 2D a lo largo del eje z

El sistema coordenado inercial es un sistema de coordenadas fijado a la tierra con su origen en un punto definido con una localización comúnmente llamada "home". Como se muestra en la Figura 2.2, El Vector unitario i^i apunta hacia el norte, j^i está orientado hacia el este, y k^i esta orientado hacia el centro de la tierra, o hacia abajo. Este sistema es conocido también como "North-East-Down." NED. Es común que el eje x apunte hacia el norte, el eje y hacia el este y el eje z hacia abajo.

2.2.2. Marco de referencia del vehículo F^v

El origen del marco de referencia del vehículo esta justo en el centro de masa del UAV. Los ejes de este marco están alineados con los ejes del marco inercial F^i . En otras palabras el vector unitario i^v apunta hacia el norte, j^v apunta hacia el este, y k^v hacia el centro centro de la tierra como se muestra en la Figura 2.2.

2.2.3. Marco de referencia del vehículo-1 F^{v1}

El origen de este marco es idéntico al del marco del vehículo: El centro de masa de la aeronave. Pero con la particularidad de que éste está rotado con en sentido positivo de la regla de la mano derecha un ángulo de guiñada ψ , de tal manera que ahora i^{v1} apunta hacia la nariz de la aeronave, j^{v1} apunta hacia el ala derecha de la aeronave, y el vector k^{v1} está alineado con k^v y

apunta hacia el centro de la tierra. El marco del vehículo-1 se visualiza en la siguiente Figura 2.3.

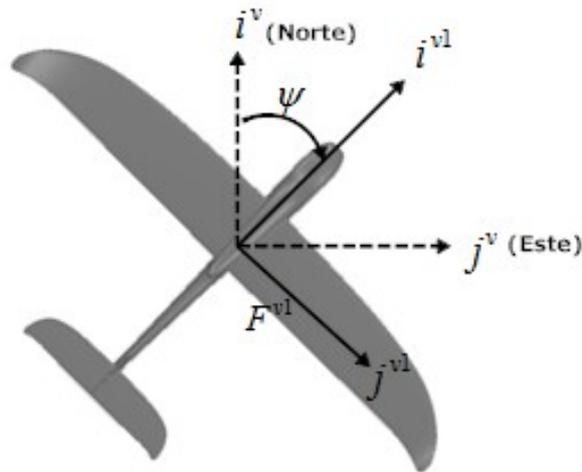


Figura 2.3: Marco de referencia del vehículo-1, es calculado mediante la rotación del marco del vehículo un ángulo de guiñada ψ , se muestra como el eje i^{v1} apunta hacia la nariz del vehículo, j^{v1} hacia el ala derecha y k^{v1} hacia el centro de la tierra.

La transformación de F^v al F^{v1} esta dado por:

$$F^{v1} = R_v^{v1}(\psi)F^v$$

donde

$$R_v^{v1}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.4. Marco de referencia del vehiculo-2 F^{v2}

El origen de este marco de referencia está nuevamente ubicado en el centro de masa del vehículo y es obtenido mediante una rotación del marco de referencia del vehículo-1 sobre j^{v1} en sentido positivo por la regla de la mano derecha un ángulo θ de cabeceo, de tal manera que ahora i^{v2} apunta hacia la nariz de la aeronave, j^{v2} apunta hacia el ala derecha de la aeronave, y el vector k^{v2} está apuntando hacia el vientre de la aeronave. Este marco de referencia se puede visualizar en la Figura 2.4.

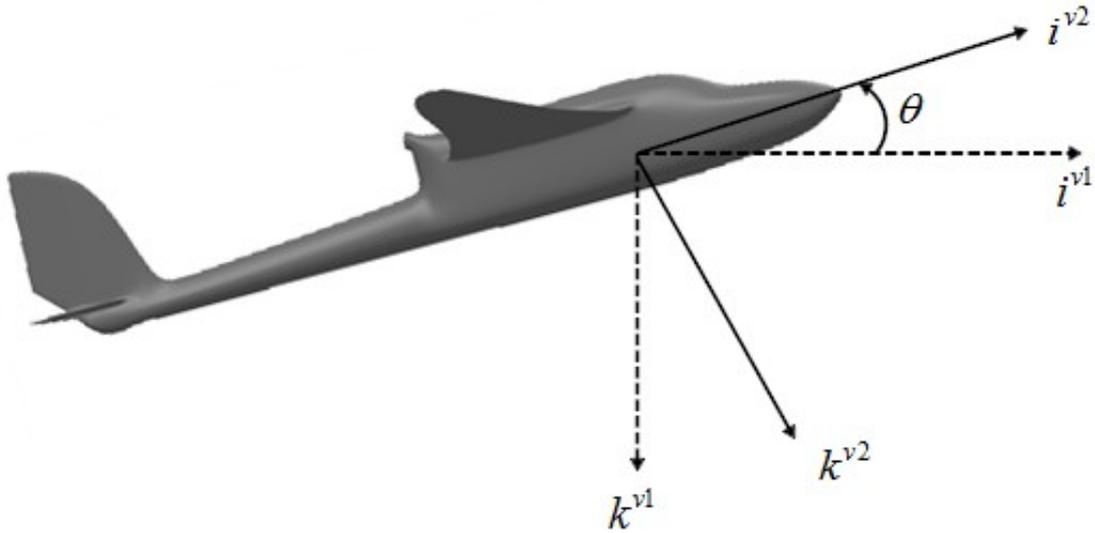


Figura 2.4: Marco de referencia del vehículo-2, es calculado mediante la rotación del marco del vehículo-1 un ángulo de cabeceo θ , se muestra como el eje i^{v2} esta alineado con el eje longitudinal del vehículo, j^{v2} hacia el ala derecha y k^{v2} sale del estomago del VANT.

La transformación de F^{v1} a F^{v2} está dada por:

$$F^{v2} = R_{v1}^{v2}(\psi)F^{v1}$$

donde

$$R_{v1}^{v2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

2.2.5. Marco de referencia del cuerpo F^b

Este marco de referencia es obtenido mediante la rotación del marco de referencia del vehículo-2 F^{v2} sobre i^{v2} un ángulo de alabeo ϕ . de tal manera que, ahora i^b apunta hacia la nariz de la aeronave, j^b apunta hacia la derecha de la aeronave, y el vector k^b está apuntando hacia el vientre de la aeronave. Este marco de referencia se puede visualizar en la figura 2.5.

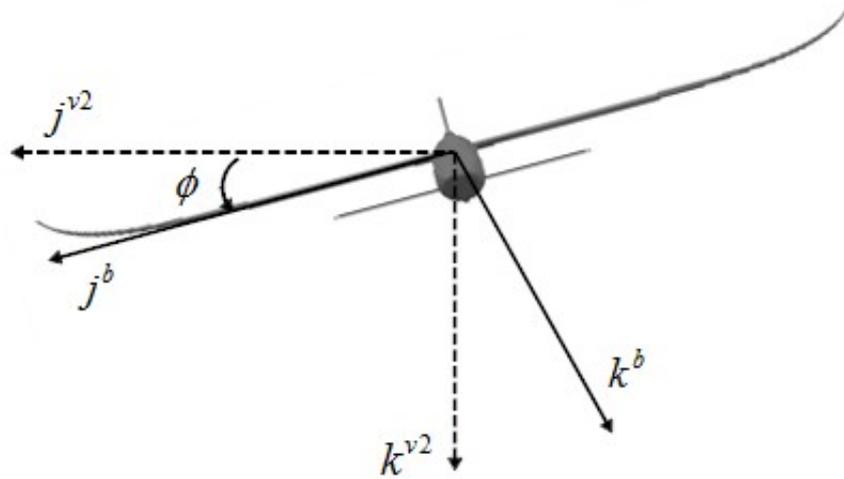


Figura 2.5: Marco de referencia del cuerpo, es calculado mediante la rotación del marco del vehículo-2 un ángulo de alabeo ϕ , se muestra como el eje j^b esta alineado con el eje lateral del vehículo, i^b con el eje longitudinal y k^b sale del estomago del VANT.

La transformación de F^{v2} a F^b está dada por:

$$F^b = R_{v2}^b(\psi)F^{v2}$$

donde

$$R_{v2}^b(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

La transformación del marco de referencia del vehículo al cuerpo está dada por:

$$R_v^b(\phi, \theta, \psi) = R_{v2}^b(\phi)R_{v1}^{v2}(\theta)R_v^{v1}(\psi) \quad (2.2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\psi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Empleando la siguiente abreviación donde $cx \triangleq \cos x$, $sx \triangleq \sin x$. Los ángulos ϕ , θ y ψ son comúnmente referidos como los ángulos de Euler. El empleo de los ángulos de Euler es muy utilizado debido a la representación intuitiva de la orientación de un cuerpo en tres dimensiones.

2.2.6. El marco de estabilidad F^s

Las fuerzas aerodinámicas se generan cuando ocurre una interacción de la superficie del avión con el aire a su alrededor. Nos referiremos a la velocidad del avión con respecto al aire circundante como el vector del viento relativo V_a . La magnitud de este vector es simplemente referido como velocidad aérea. Para generar el levantamiento, las alas de la aeronave deben volar en un ángulo positivo con respecto al vector del viento relativo, este ángulo es conocido como el ángulo de ataque y es denotado por α . Como se muestra en la figura 2.6 el ángulo de ataque está definido con una rotación en dirección de la regla de mano izquierda j^b y es tal que i^s se alinea con la proyección del vector del viento sobre el plano especificado por i^v y k^b . La necesidad de la rotación con dirección de mano izquierda es debido a la definición de un ángulo de ataque positivo, el cuál es positivo para una rotación de mano derecha desde el eje i^s al eje del cuerpo i^b . Ya que la rotación α está dada por una rotación de mano izquierda, la transformación del marco del cuerpo al estable esta dada por

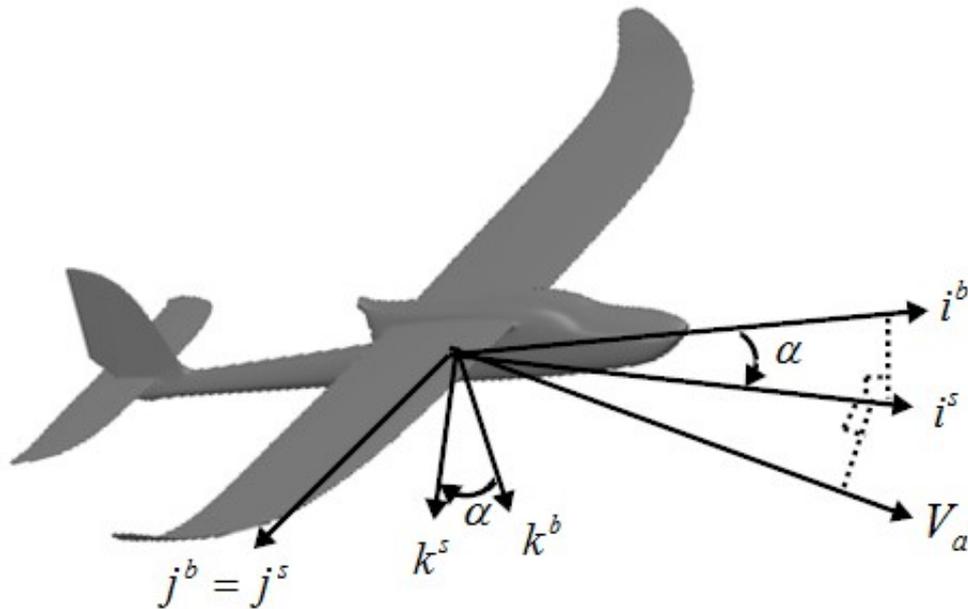


Figura 2.6: Marco de referencia de estabilidad, es calculado mediante la rotación del marco del cuerpo un ángulo de ataque α , se muestra como el eje i^s esta alineado con la proyección del vector del viento relativo sobre el plano longitudinal del VANT.

$$F^s = R_b^s(\alpha)F^b$$

donde

$$R_b^s(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

2.2.7. El marco del viento F^w

El ángulo entre el vector del viento relativo y el plano $i^b - k^b$ es llamado ángulo de deslizamiento y es denotado por β . Como se muestra en la figura 2.7, el marco del viento es obtenido por medio de la rotación de el marco de la estabilidad un ángulo β positivo por la regla de mano derecha sobre el eje k^s . El vector unitario i^w está alineado con el vector del viento relativo V_a . la transformación de F^s a F^w está dada por

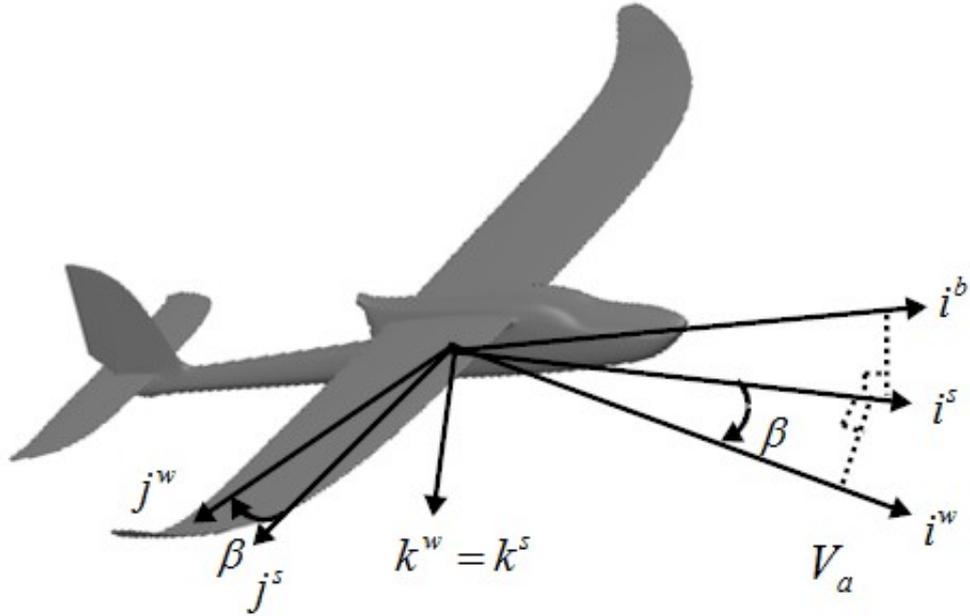


Figura 2.7: Marco de referencia de viento, es calculado mediante la rotación del marco de estabilidad un ángulo de deslizamiento β , se muestra como el eje i^w esta alineado con el vector del viento relativo.

$$F^w = R_s^w(\beta)F^s$$

donde

$$R_b^s(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La total transformación desde el marco del cuerpo al marco del viento esta dada por

$$\begin{aligned} R_b^w(\alpha, \beta) &= R_s^w(\beta)R_b^s(\alpha) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta & -\sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De manera alternativa, la transformación del marco del viento al marco del cuerpo está dada por

$$R_w^b(\alpha, \beta) = (R_b^w)^T(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta \sin \alpha & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

2.3. Velocidad aérea, Terrestre y del viento.

Cuando se desarrollan las ecuaciones dinámicas para un vehículo de ala fija, es importante recordar que las fuerzas de inercia en el VANT son dependientes de las velocidades y aceleraciones relativas a un marco de referencia fijo (marco inercial). Las fuerzas aerodinámicas, sin embargo, dependen de la velocidad del aire circundante al vehículo. por lo tanto es importante distinguir entre la velocidad aérea V_a , representada por la velocidad con respecto al aire circundante, y la velocidad terrestre V_g , representada por la velocidad con respecto al marco inercial. Estas velocidades están relacionadas mediante la siguiente expresión

$$V_a = V_g - V_w \quad (2.4)$$

donde V_w es la velocidad del viento relativo al marco inercial.

La velocidad del vehículo V_g puede ser expresada en el marco del cuerpo en términos de componentes a lo largo de los ejes i^b, j^b y k^b .

$$V_g^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Donde V_g^b es la velocidad del VANT con respecto al marco inercial, expresada en el marco del cuerpo. De manera similar, si definimos las componentes de el viento en el norte, este y abajo como w_n, w_e y w_d respectivamente, podemos escribir una expresión para la velocidad del viento en el marco del cuerpo como

$$V_w^b = \begin{pmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{pmatrix} = R_v^b(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{pmatrix}.$$

Sin olvidar que el vector V_a es la velocidad del VANT con respecto al viento, es posible expresarlo en el marco del cuerpo como

$$V_a^w = \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definiendo u_r, v_r y w_r como las componentes de vector del viento, este puede ser expresado en el marco del cuerpo como

$$V_a^b = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u_w \\ v - v_w \\ w - w_w \end{pmatrix}$$

Cuando se emplea una simulación de un VANT u_r , v_r y w_r son usadas para calcular las fuerzas y momentos aerodinámicos que actúan en el vehículo. Las componentes de la velocidad en el marco del cuerpo u , v y w son estados del sistema del VANT y están disponibles en la solución de las ecuaciones de movimiento. Las componentes de la velocidad del viento u_w, v_w y w_w típicamente vienen de un modelo de viento como entrada a las ecuaciones de movimiento. Combinando expresiones, podemos expresar las componentes del marco del cuerpo del vector del viento en los términos de su magnitud, ángulo de ataque y ángulo de ladeo como

$$V_a^b = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = R_w^b \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta \sin \alpha & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = V_a \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Invirtiendo esta ecuación podemos despejar las siguientes

$$V_a = \sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2} \quad (2.6)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{w_r}{u_r} \right) \quad (2.7)$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{v_r}{\sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}} \right) \quad (2.8)$$

Dadas que las fuerzas y momentos aerodinámicos son expresadas comúnmente en los términos V_a , α y β , estas expresiones son esenciales para formular las ecuaciones de movimiento del VANT.

2.4. El triángulo del viento.

Para VANTs, la velocidad del viento comúnmente se encuentra en un rango de 20 a 50 por ciento de la velocidad aérea[5]. El efecto significativo del viento en VANTs es importante para comprender, más que para un avión convencional mas grande, donde la velocidad aérea es típicamente mucho mayor que la velocidad del viento. Habiendo introducido el conceptos de marcos de la referencia, velocidad de la superficie del avión, velocidad del viento, y el vector de la velocidad aérea, podemos hablar de algunas definiciones importantes que nos relacionan la navegación de VANTs. La dirección del vector de velocidad terrestre con relación a un marco de inercia es especificado usando dos ángulos. Estos ángulos son el ángulo de curso χ y el (de inercia referido) ángulo de paso de vuelo γ . La figura 2.8 muestra cómo éstos son definidos dos

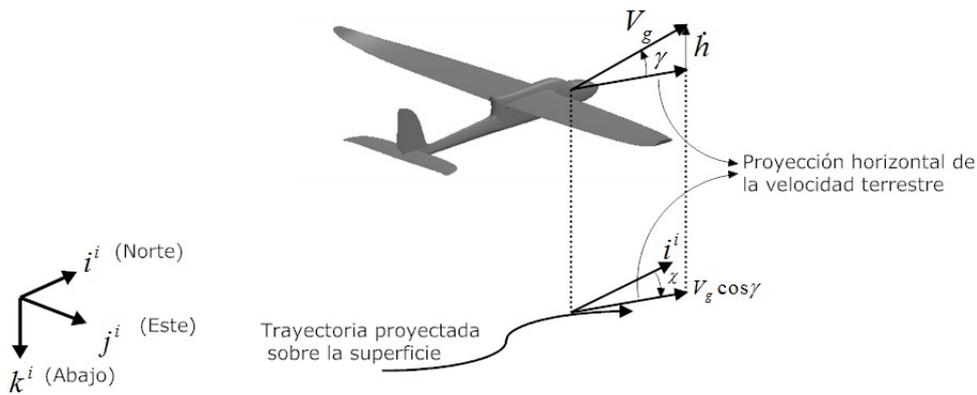


Figura 2.8: Ángulo de paso γ y ángulo de curso χ .

ángulos. El ángulo de paso χ es definido como el ángulo entre el plano horizontal y el vector de velocidad terrestre V_g , mientras el curso χ es el ángulo entre la proyección del vector de la velocidad terrestre en el plano horizontal y norte verdadero.

La relación entre el vector de velocidad terrestre, el vector de la velocidad aérea, y el vector del viento, que da la ecuación 2.4 es llamado el triángulo del viento. Un ejemplo más detallada del triángulo del viento es dado en el plano horizontal en la figura 2.9 y en el plano vertical en la figura 2.10. La figura 2.9 muestra un vehículo aéreo siguiendo una trayectoria en tierra representado por la línea punteada. Para el vuelo horizontal, el ángulo de guiñada ψ , es el ángulo entre i^i e i^b y define la dirección que el vehículo apunta. La dirección el el vehículo viaja con respecto a la masa de aire circundante es dado por el vector de la velocidad aérea V_a . En el vuelo horizontal, estable, V_a es comúnmente alineado con i^b , significando que el ángulo de deslizamiento lateral β es cero.

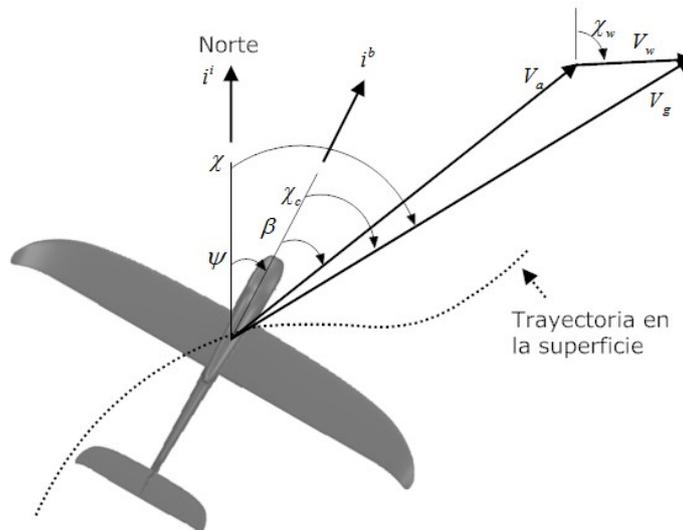


Figura 2.9: el ángulo de guiñada ψ indica hacia a donde apunta el VANT, el ángulo de curso χ indica el trayecto de la aeronave, χ_c muestra la diferencia de ambos ángulos.

La dirección del vehículo con que el que se está moviendo con respecto a la tierra es mostrada con el vector V_g . El ángulo entre el norte del marco inercial y el vector de velocidad es llamado el ángulo de curso χ . Si existe un viento constante, la aeronave necesitará lidiar con el viento para seguir una trayectoria en tierra que no esté alineada con el viento. El ángulo comandado χ_c está definido como la diferencia entre el ángulo de curso y el ángulo de guiñada.

$$\chi_c \triangleq \chi - \psi$$

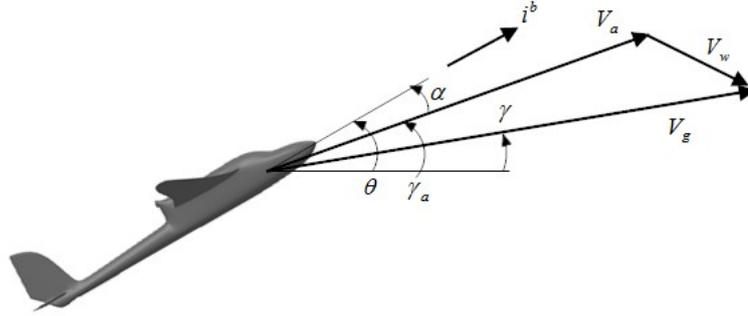


Figura 2.10: el ángulo de guiñada ψ indica hacia a donde apunta el VANT, el ángulo de curso χ indica el trayecto de la aeronave, χ_c muestra la diferencia de ambos ángulos.

La figura 2.10 muestra la perspectiva vertical del triángulo del viento. Cuando hay una componente hacia abajo del viento, definiremos el ángulo desde el plano norte-este a V_a es el ángulo de paso con respecto a la masa de aire y es denotado por γ_a . La relación entre este ángulo, el ángulo de ataque y el ángulo de cabeceo está dada por

$$\gamma_a = \theta - \alpha$$

En ausencia del viento $\gamma_a = \gamma$. El vector de velocidad terrestre en el marco inercial puede ser entonces expresado como sigue:

$$V_g^i = \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V_g \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \gamma \\ \sin \chi \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix}$$

Donde $V_g = \|V_g\|$. De manera similar, el vector de velocidad aérea puede ser expresado como

$$V_a^i = V_a \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \gamma_a \\ \sin \psi \cos \gamma_a \\ -\sin \gamma_a \end{pmatrix}$$

Donde $V_a = \|V_a\|$. Por lo tanto, el vector del viento puede ser expresado en coordenadas inerciales como

$$V_g \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \gamma \\ \sin \chi \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{pmatrix} = V_a \begin{pmatrix} \cos(\psi + \beta) \cos \gamma_a \\ \sin(\psi + \beta) \cos \gamma_a \\ -\sin \gamma_a \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 permite obtener una relación entre V_g , V_a , χ , ψ , γ y γ_a . Si consideramos el caso en donde χ , γ y las componentes del viento (w_n, w_e, w_d), e incluso V_g y V_a son conocidos. Tomando la norma al cuadrado de ambos lados de la ecuación 2.9 resulta en la expresión siguiente:

$$V_g^2 - 2V_g \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \gamma \\ \sin \chi \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{pmatrix} + V_w^2 - V_a^2 = 0 \quad (2.10)$$

Donde $V_w = \|V_w\| = \sqrt{w_n^2 + w_e^2 + w_d^2}$ es la velocidad del viento. Dado χ , γ , y los componentes del viento, la ecuación 2.10 puede ser resuelta para V_a dado V_g , o V_g dado V_a , dependiendo de la necesidad. Cuando se resuelve la ecuación cuadrática para V_g , la raíz positiva es tomada ya que V_a debe ser positivo.

Con ambas V_a y V_g conocidas, la tercer fila de la ecuación 2.9 puede ser resuelta para encontrar γ_a y obtener la siguiente ecuación:

$$\gamma_a = \sin^{-1} \left(\frac{V_g \sin \gamma + w_d}{V_a} \right) \quad (2.11)$$

Para encontrar una expresión para ψ , se multiplica ambos lados de la ecuación 2.9 por $(-\sin \chi, \cos \chi, 0)$ para obtener la siguiente expresión:

$$0 = V_a \cos \gamma_a (-\sin \chi \cos \psi + \cos \chi \sin \psi) + \begin{pmatrix} w_n \\ w_e \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\sin \chi \\ \cos \chi \end{pmatrix}$$

resolviendo para ψ esto nos resulta:

$$\psi = \chi - \sin^{-1} \left(\frac{1}{V_a \cos \gamma_a} \begin{pmatrix} w_n \\ w_e \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\sin \chi \\ \cos \chi \end{pmatrix} \right) \quad (2.12)$$

Debido a que típicamente el viento tiene un impacto significativo en el vuelo de vehículos aéreos no tripulados de tamaño pequeño, se es tomado en cuenta a lo largo de este trabajo de tesis. Si los efectos del viento son negados, de igual forma las simplificaciones toman los siguientes resultados. Por ejemplo, cuando $V_w = 0$, tenemos que $V_a = V_g$, $u = u_r$, $v = v_r$, $w = w_r$, $\psi = \chi$ (asumiendo que $\beta = 0$), y $\gamma = \gamma_a$.

Cinemática y Dinámica

El primer paso para desarrollar estrategias de navegación, orientación y control para VANTs es desarrollar modelos dinámicos apropiados. Obtener las ecuaciones no lineales de movimiento para un VANT de ala fija es el principal tema tratado en los Capítulos 3 y 4 de esta tesis.

En este capítulo, se obtendrán las expresiones para describir la cinemática y dinámica de un cuerpo rígido. Se aplicarán las leyes de Newton: por ejemplo, $f = mv$, de igual manera este capítulo se enfocará en definir la relación de posición y velocidad (cinemática) y en definir la relación entre fuerzas y momentos (dinámica). En particular, en la sección 3.1 se definirá la notación a emplear para las variables de estado del VANT. En la sección 3.2 se expresará la cinemática, y en la sección 3.3 se presentará la dinámica.

3.1. Variables de Estado

Al momento de desarrollar las ecuaciones que describen un VANT, se deben introducir 12 variables, de entre ellas, hay tres asociadas a la posición y tres a la velocidad. Similarmente, hay tres variables asociadas a la posición angular y otras tres asociadas a la velocidad angular. En la Tabla 3.1 se muestran estas variables de estado.

Nombre	Descripción
P_n	Posición norte inercial del VANT a lo largo de i^i en f^i .
P_e	Posición este inercial del VANT a lo largo de j^i en f^i .
P_d	Posición abajo inercial del VANT a lo largo de k^i en f^i .
u	Velocidad del vehículo medido a lo largo de i^b en f^b .
v	Velocidad del vehículo medido a lo largo de j^b en f^b .
w	Velocidad del vehículo medido a lo largo de k^b en f^b .
ϕ	Ángulo de alabeo definido con respecto a f^{v2} .
θ	Ángulo de cabeceo definido con respecto a f^{v1} .
ψ	Ángulo de guiñada definido con respecto a f^v .
p	Velocidad de alabeo medido a lo largo de i^b en f^b .
q	Velocidad de cabeceo medido a lo largo de j^b en f^b .
r	Velocidad de guiñada medido a lo largo de k^b en f^b .

Tabla 3.1: Variables de estado empleadas para un VANT de ala fija

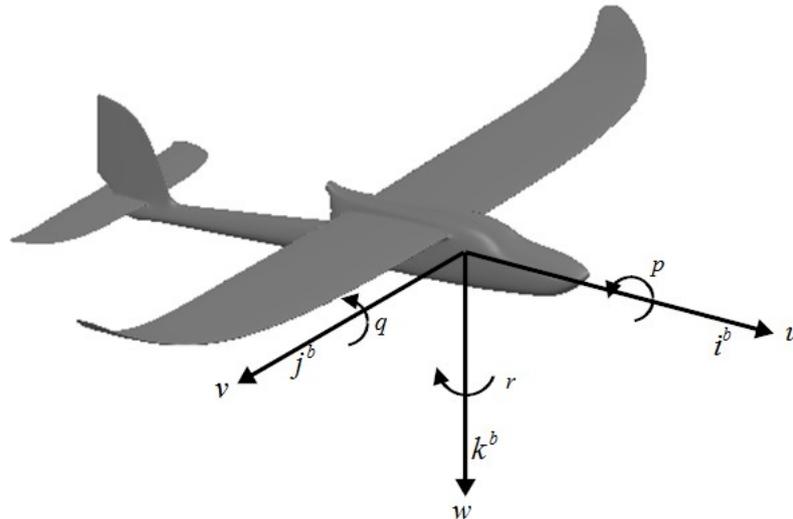


Figura 3.1: Ejes de movimiento.

Las variables de estado son mostradas de manera esquemática en la Figura 3.1. Las posiciones "north-east-down" de el VANT (P_n, P_e, P_d) son definidas con relativo al marco inercial. Por lo tanto se empleará algunas veces la siguiente relación $h = -P_d$ para denotar la altura. Las velocidades de traslación (u, v, w) y las velocidades angulares (p, q, r) del VANT están definidas con respecto al marco del cuerpo. Los ángulos de Euler ϕ, θ, ψ están definidos con respecto al marco del vehículo-2, el marco del vehículo-1 y el marco del vehículo respectivamente. Debido a que los ángulos de Euler están definidos relativamente a marcos intermedios de referencia, no es posible afirmar que las velocidades angulares (p, q, r) son simples derivadas de los ángulos de posición angular, aunque p, q, r están en función de las derivadas de los ángulos de Euler con respecto al tiempo $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ y de los ángulos ϕ y θ .

3.2. Cinemática

La velocidad de traslación de el VANT es comúnmente expresado en componentes a lo largo de los ejes del marco de coordenadas del cuerpo. Las componentes u , v y w corresponden a la velocidad inercial del vehículo proyectado sobre los ejes i^b , j^b y k^b respectivamente. Por otro lado, la posición de traslación del VANT es usualmente expresado en el marco de referencia inercial. Para relacionar ambas se requiere derivar e implementar una transformación de coordenadas

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_n \\ P_e \\ P_d \end{pmatrix} = R_b^v \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (R_v^b)^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

y empleando la ecuación 2.3 se obtiene

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_n \\ \dot{P}_e \\ \dot{P}_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\psi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde se ha empleado la siguiente abreviación $cx \triangleq \cos x$, $sx \triangleq \sin x$. Esta es una relación cinemática que expresa la derivada con respecto al tiempo de la posición con las velocidades, notar que las fuerzas y aceleraciones no están consideradas.

La relación que existe entre la posición angular ϕ , θ y ψ y las velocidades angulares p , q y r está también relacionada por los diferentes marcos de referencia a los que están definidos los ángulos de Euler. Las velocidades p , q y r están definidas con respecto al marco de referencia del cuerpo F^b , el ángulo de alabeo ϕ es una rotación de F^{v2} a F^b sobre el eje $i^{v2} = i^b$, el ángulo de cabeceo θ es una rotación de F^{v1} a F^{v2} sobre el eje $j^{v1} = j^{v2}$, y el ángulo de guiñada ψ es una rotación de F^v a F^{v1} sobre el eje $h^v = k^{v1}$. Las velocidades angulares expresadas en el marco del cuerpo pueden ser expresadas en términos de las derivadas de los ángulos de Euler, mediante la correcta transformación de marcos de referencia, como es expresado a continuación:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^b(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^b(\phi) R_{v1}^{v2}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Invirtiendo esta expresión nos permite obtener

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

la cuál expresa las derivadas de los tres ángulos de Euler en términos de ϕ , θ y las velocidades angulares p , q y r .

3.3. Dinámica de Cuerpo Rígido

Para obtener las ecuaciones dinámicas del movimiento del VANT aplicaremos la segunda ley de Newton, primero a los grados de libertad de traslación y posteriormente a los grados de libertad de rotación. Las leyes de Newton se cumplen en el marco de referencia inercial, por lo tanto el movimiento del cuerpo a estudiar debe estar referenciado a dicho marco de referencia. Se asumirá el modelo de tierra plana y aunque el movimiento este referenciado al marco de referencia inercial puede ser expresado usando un vector asociado a otros marcos, tales como el marco de referencia del cuerpo. Se aplicará esto en la velocidad del VANT V_g , el cuál por conveniencia es comúnmente expresado en el marco del cuerpo como $V_g^b = (u, v, w)^T$. V_g^b es la velocidad del VANT con respecto a la tierra expresado en el marco del cuerpo.

3.3.1. Movimiento de Traslación

La segunda ley de Newton aplicada a un cuerpo bajo movimiento de traslación puede ser expresada como

$$\mathbf{m} \frac{dV_g}{dt_i} = f, \quad (3.4)$$

donde \mathbf{m} es la masa del VANT, $\frac{d}{dt_i}$ es la derivada con respecto al tiempo en el marco inercial, y f es la suma de todas las fuerzas externas actuando en el VANT. Las fuerzas externas incluyen gravedad, fuerzas aerodinámicas, y fuerzas de propulsión.

La derivada de la velocidad tomada en el marco inercial puede ser escrita en términos de la derivada en el marco del cuerpo y la velocidad angular de acuerdo a la ecuación A.6, esto queda como

$$\frac{dV_g}{dt_i} = \frac{dV_g}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V_g, \quad (3.5)$$

donde $\omega_{b/i}$ es la velocidad angular del VANT con respecto al marco de referencia inercial. Combinando las ecuaciones 3.4 y 3.5 resulta en una alternativa representación de la segunda ley de Newton con la derivada llevada a cabo en el marco del cuerpo.

$$\mathbf{m} \left(\frac{dV_g}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V_g \right) = f.$$

En el caso de una aeronave maniobrando, es mas fácil aplicar la segunda ley de Newton expresando las fuerzas y velocidades en el marco del cuerpo como

$$\mathbf{m} \left(\frac{dV_g^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times V_g^b \right) = f^b, \quad (3.6)$$

donde $V_g^b = (u, v, w)^T$ y $\omega_{b/i}^b = (p, q, r)^T$. El vector f^b representa la suma de todas las fuerzas externamente aplicadas y está definida en términos del marco de referencia del cuerpo como $f^b \triangleq (f_x, f_y, f_z)^T$.

La expresión $\frac{dV_g}{dt_b}$ es la razón de cambio de la velocidad expresada en el marco del cuerpo, como si fuera vista por el piloto. Ya que u , v y w son las proyecciones de V_g^b sobre los ejes i^b , j^b y k^b , esto indica que

$$\frac{dV_g}{dt_b} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix}.$$

Expandiendo el producto cruz en la ecuación 3.6 y ordenando los términos, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathbf{m}} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

3.3.2. Movimiento Rotacional

Para el movimiento rotacional, La segunda ley de Newton queda establecida como

$$\frac{dh}{dt_i} = M,$$

donde h es el momento angular en forma de vector y M es la suma de todos los momentos externos aplicados. Esta expresión será verdadera siempre y cuando todos los momentos sean con respecto al centro de masa del VANT. La derivada del momento angular tomada desde el marco de referencia inercial puede ser expandida tomando como referencia la ecuación A.6, resultando.

$$\frac{dh}{dt_i} = \frac{dh}{dt_b} + \omega_{b/i} \times h = M.$$

Al igual que en el movimiento de traslación, es conveniente expresar esta ecuación en el marco del cuerpo, resultando

$$\frac{dh^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times h^b = m^b. \quad (3.8)$$

Para un cuerpo rígido, el momento angular esta definido como el producto de la matriz de inercia J y el vector de la velocidad angular $h^b \triangleq J\omega_{b/i}^b$ donde J está dada por

$$J = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) d\mathbf{m} & -\int xy d\mathbf{m} & -\int xz d\mathbf{m} \\ -\int xy d\mathbf{m} & \int (x^2 + z^2) d\mathbf{m} & -\int yz d\mathbf{m} \\ -\int xz d\mathbf{m} & -\int yz d\mathbf{m} & \int (y^2 + x^2) d\mathbf{m} \end{bmatrix} \\ \triangleq \begin{bmatrix} j_x & -j_{xy} & -j_{xz} \\ -j_{xy} & j_y & -j_{yz} \\ -j_{xz} & -j_{yz} & j_z \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Los términos de la diagonal de J son llamados momentos de inercia, mientras que los productos fuera de la diagonal principal son llamados productos de inercia. Los momentos de inercia son medidas de la tendencia de la aeronave para oponerse a la aceleración sobre sus específicos ejes de rotación, por ejemplo, j_x puede ser conceptualmente expresado como el producto de la masa de cada elemento que compone la aeronave ($d\mathbf{m}$) y el cuadrado de las

distancias de cada elemento desde el eje x ($y^2 + z^2$) y sumando cada producto. En práctica, la matriz de inercia no es calculada usando la ecuación 3.9, en su lugar, es numéricamente calculada usando un software de CAD o es también es medida mediante experimentación usando equipo como el péndulo bifilar[15].

Debido a que las integrales de la ecuación 3.9 son calculadas con respecto a los ejes del marco de referencia del cuerpo, J es constante cuando es visualizada en el marco de referencia del cuerpo, por lo tanto $\frac{dJ}{dt_b} = 0$. Tomando esta derivada y sustituyendo en la ecuación 3.8, obtenemos

$$J \frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times J\omega_{b/i}^b = M^b. \quad (3.10)$$

La expresión $\frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b}$ es la razón de cambio de la velocidad angular expresada en el marco de referencia del cuerpo, como si fuera vista por un observador sobre el VANT. ya que p , q y r son proyecciones instantáneas de $\omega_{b/i}^b$ sobre los ejes i^b , j^b y k^b , obtenemos que

$$\dot{\omega}_{b/i}^b = \frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix}.$$

Reescribiendo la ecuación 3.10, tenemos

$$\dot{\omega}_{b/i}^b = J^{-1} [-\omega_{b/i}^b \times J\omega_{b/i}^b + m^b]. \quad (3.11)$$

La aeronave es usualmente simétrica sobre el plano conformado por los ejes i^b y k^b . En este caso $j_{xy} = j_{yz} = 0$, lo que implica que

$$J = \begin{bmatrix} j_x & 0 & -j_{xz} \\ 0 & j_y & 0 \\ -j_{xz} & 0 & j_z \end{bmatrix}.$$

Bajo la suposición de simetría, la inversa de J esta dada por

$$\begin{aligned} J^{-1} &= \frac{adj(J)}{\det(J)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} j_y j_z & 0 & j_y j_{xz} \\ 0 & j_x j_z - j_{xz}^2 & 0 \\ j_{xz} j_y & 0 & j_x j_y \end{bmatrix}}{j_x j_y j_z - j_{xz}^2 j_y} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{j_z}{\Gamma} & 0 & \frac{j_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{j_y} & 0 \\ \frac{j_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{j_x}{\Gamma} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\Gamma \triangleq j_x j_z - j_{xz}^2$.

Definiendo los componentes de los momentos externos aplicados sobre los ejes del marco del cuerpo como $M^b = (l, m, n)^T$, podemos reescribir la ecuación 3.11 en forma de sus componentes como

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{j_z}{\Gamma} & 0 & \frac{j_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{j_y} & 0 \\ \frac{j_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{j_x}{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_x & 0 & -j_{xz} \\ 0 & j_y & 0 \\ -j_{xz} & 0 & j_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{j_z}{\Gamma} & 0 & \frac{j_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{j_y} & 0 \\ \frac{j_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{j_x}{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_{xz}pq + (j_y - j_z)qr \\ j_{xz}(r^2 - p^2) + (j_z - j_x)pr \\ (j_x - j_y)pq - j_{xz}qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{1}{j_y} m \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr + \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix}, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{j_{xz}(j_x - j_y + j_z)}{\Gamma} \\
\Gamma_2 &= \frac{j_z(j_z - j_y) + j_{xz}^2}{\Gamma} \\
\Gamma_3 &= \frac{j_z}{\Gamma} \\
\Gamma_4 &= \frac{j_{xz}}{\Gamma} \\
\Gamma_5 &= \frac{j_z - j_x}{j_y} \\
\Gamma_6 &= \frac{j_{xz}}{j_y} \\
\Gamma_7 &= \frac{(j_x - j_y)j_x + j_{xz}^2}{\Gamma} \\
\Gamma_8 &= \frac{j_x}{\Gamma}. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Finalmente los seis grados de libertad, el modelo de 12 variables de estado para VANT de ala fija están dados por las ecuaciones 3.1, 3.3, 3.7 y 3.12, y están resumidos a continuación;

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_n \\ \dot{P}_e \\ \dot{P}_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\psi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathbf{m}} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \frac{1}{j_y} m \\ \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Las ecuaciones 3.14-3.17 representan la dinámica del VANT de ala fija. Estas ecuaciones aún no están completas ya que las fuerzas y momentos externos no están definidas. El modelado para las fuerzas y momentos debido a la gravedad, aerodinámica y propulsión será desarrollado en el capítulo 4.

Fuerzas y Momentos

El objetivo de este capítulo es describir las fuerzas y momentos que actúan en el VANT de ala fija. Siguiendo a [6], se asumirá que las fuerzas y momentos son primeramente ocasionadas por tres fuentes; gravedad, aerodinámica y propulsión. Sea f_g la fuerza debido a la gravedad, (f_a, M_a) sean las fuerzas y momentos debido a la aerodinámica, y (f_p, M_p) sean las fuerzas y momentos debido a la propulsión, tenemos

$$\begin{aligned} f &= f_g + f_a + f_p \\ M &= M_a + M_p, \end{aligned}$$

donde f es la fuerza total que actúa en la aeronave y M es el momento total actuando sobre la aeronave. En este capítulo se describirán las expresiones para cada una de las fuerzas y momentos.

4.1. Fuerzas debido a la Gravedad

El efecto del campo gravitacional de la tierra actuando sobre el VANT puede ser modelado como una fuerza proporcional a la masa actuando en el centro de masa. Esta fuerza actúa en dirección de k^i y es proporcional a la masa del VANT por una constante de gravedad g . En el marco del vehículo f^v , la fuerza de gravedad actuando den el centro de masa esta dada por:

$$f_g^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}.$$

Cuando es aplicada la segunda ley de Newton en el capítulo previo, se sumaron las fuerzas a lo largo de los ejes en el marco del cuerpo. por lo tanto, se debe de transformar esta fuerza en el correspondiente marco de referencia del cuerpo, dando como resultado

$$\begin{aligned} f_g^b &= R_v^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

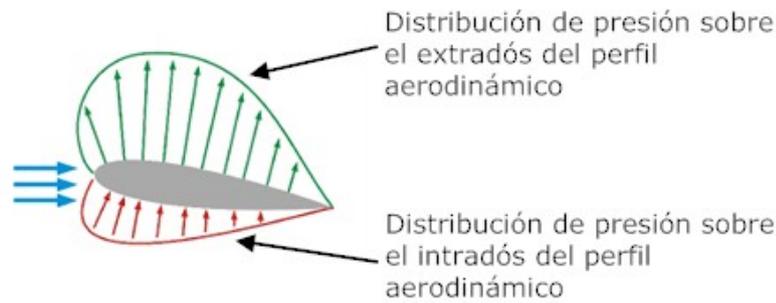


Figura 4.1: Distribución de presiones en un perfil aerodinámico

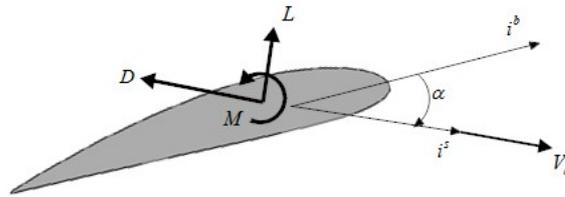


Figura 4.2: Fuerza de levantamiento L , fuerza de arrastre D y momento aerodinámico M

Ya que la fuerza de gravedad actúan sobre el centro de masa del VANT, no produce ningún momento.

4.2. Fuerzas y Momentos Debido a la Aerodinámica

Como el VANT interactúa con el aire, una distribución de presión es generada sobre el cuerpo del VANT, como se muestra en la figura 4.1. En lugar de caracterizar la distribución de presión a lo largo del ala, un enfoque común es capturar el efecto de la presión con una combinación de fuerzas y un momento. Por ejemplo, si se considera el plano conformado por $(i^b - k^b)$, el efecto de la presión actuando sobre la superficie puede ser modelada usando una fuerza de levantamiento, una fuerza de arrastre, y un momento. Como se muestra en la Figura 4.2. Las fuerzas de levantamiento y arrastre están aplicadas en un punto a un cuarto de la cuerda del perfil, también llamado centro aerodinámico.

El levantamiento, arrastre y momento son comúnmente expresados como

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_L \\ D &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_D \\ M &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c C_M, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde C_L , C_D y C_M son coeficientes aerodinámicos adimensionales, S es la superficie del ala del VANT, y c es la cuerda media del ala. Para perfiles aerodinámicos generales, estos coeficientes aerodinámicos son influenciados por la forma del perfil, el numero de Reynolds,

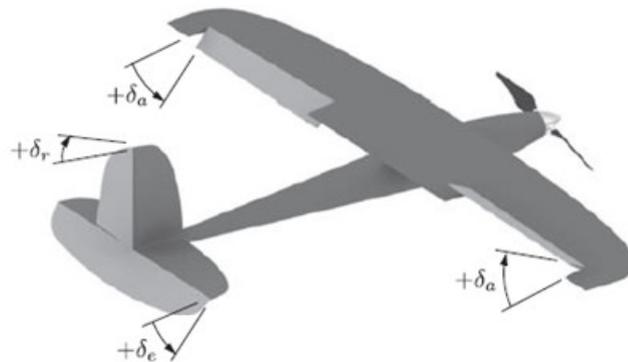


Figura 4.3: Configuración estándar de las superficies de control de un VANT de ala fija.[13]

el número de Mach, y el ángulo de ataque. En el caso de un VANT pequeño (1.5-5 metros de envergadura) los efectos del número de Reynolds y el número de Mach son aproximadamente constantes. Serán consideradas los efectos de los ángulos α y β , las velocidades angulares p , q y r , y la deflexión de las superficies del control sobre los coeficientes aerodinámicos.

Es común descomponer las fuerzas y momentos aerodinámicos en dos grupos: longitudinal y lateral. Las fuerzas y momentos longitudinales actúan sobre el plano $i^b - k^b$, también llamado el plano de cabeceo. Este incluye las fuerzas en las direcciones i^b y k^b causadas por el arrastre y el levantamiento, y el momento sobre el eje j^b . Las fuerzas y momentos laterales incluyen la fuerza en la dirección j^b y los momentos alrededor de los ejes i^b y k^b .

4.2.1. Superficies de Control

Las superficies de control son usadas para modificar las fuerzas y momentos aerodinámicos. Para aeronaves con una configuración estándar, las superficies de control incluyen el elevador, alerón, y timón de profundidad. Otras superficies pueden ser spoilers, flaps y canards, pero en esta tesis no serán discutidas, aún así, son modeladas de manera similar.

La Figura 4.3 muestra la configuración estándar, donde la deflexión del alerón es denotado por δ_a , la deflexión del elevador es denotado como δ_e , y la deflexión del timón de profundidad es denotado por δ_r . La posición positiva de la deflexión de las superficies de control puede ser determinado aplicando la regla de la mano derecha hacia el eje de las bisagras. Por ejemplo, el eje de las bisagra del elevador esta alineado con el eje del cuerpo j^b , esto quiere decir que una deflexión positiva indica una retracción hacia abajo. De manera similar, la deflexión positiva para el timón de profundidad δ_r está definida girando hacia la parte izquierda de la aeronave. La deflexión del alerón δ_a es definida positiva con cada alerón hacia abajo, esto queda totalmente expresado en la siguiente ecuación.

$$\delta_a = \frac{1}{2} (\delta_{a-izq} - \delta_{a-der}).$$

Por lo tanto una deflexión positiva indica que el alerón izquierdo es girado hacia la izquierda y el alerón derecho es girado hacia arriba.

4.2.2. Aerodinámica Longitudinal

Las fuerzas y momentos productos de la aerodinámica longitudinal causan movimiento en el plano formado por $i^b - k^b$. Estas fuerzas y momentos son: el levantamiento, arrastre y momento de cabeceo[27]. Por definición, el levantamiento y arrastre son fuerzas alineadas a los ejes del marco de estabilidad, como se muestra en la Figura 4.2. Cuando se representa como un vector, el momento de cabeceo se alinea con el eje j^s del marco de estabilidad. El levantamiento y el arrastre son fuertemente influenciadas por el ángulo de ataque. La velocidad de cabeceo q y la deflexión del elevador δ_e influyen en las fuerzas y momentos longitudinales. Basado en esto, es posible expresar las ecuaciones del levantamiento, arrastre y momento de cabeceo en función de α , q y δ_e como

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_L(\alpha, q, \delta_e) \\ D &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_D(\alpha, q, \delta_e) \\ M &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S c C_M(\alpha, q, \delta_e). \end{aligned}$$

En general, estas fuerzas y momentos son ecuaciones no lineales. Para pequeños ángulos de ataque el flujo sobre el ala permanece laminar y en contacto a la superficie. Bajo estas condiciones, el levantamiento, arrastre y momento de cabeceo puede ser modelado con una exactitud aceptable usando una aproximación lineal. Trabajando con la ecuación del levantamiento como un ejemplo, una serie de Taylor de primer orden de el levantamiento puede ser escrita como

$$L = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left(C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial q} q + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \delta_e \right). \quad (4.2)$$

El coeficiente C_{L_0} es el valor del C_L cuando $\alpha = q = \delta_e = 0$. Es común adimensionalizar las derivadas parciales de esta aproximación lineal. ya que C_L y los ángulos α y δ_e (expresados en radianes) son adimensionales, la única derivada parcial que se requiere adimensionalizar es $\partial C_L / \partial q$. Debido a que las unidades de q son rad/s , un factor estándar a usar es $c/2V_a$. Reescribiendo la ecuación 4.2 como

$$L = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left(C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \right), \quad (4.3)$$

donde los coeficiente $C_{L_0}, C_{L_\alpha} \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$, $C_{L_q} \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \frac{qc}{2V_a}}$ y $C_{L_{\delta_e}} \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e}$. C_{L_0}, C_{L_α} son cantidades adimensionales comúnmente referidas como derivadas de estabilidad, mientras que $C_{L_{\delta_e}}$ es un ejemplo de una derivada de control. El término "derivada" viene del hecho de que los coeficientes provienen de una derivada parcial en la aproximación de la serie de Taylor. De manera similar, expresamos la aproximación lineal para el arrastre y momento de cabeceo como

$$D = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left(C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha + C_{D_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{D_{\delta_e}} \delta_e \right) \quad (4.4)$$

$$M = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left(C_{M_0} + C_{M_\alpha} \alpha + C_{M_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{M_{\delta_e}} \delta_e \right). \quad (4.5)$$

Las ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5 son comúnmente empleadas como base para el modelo aerodinámico longitudinal. Bajo las típicas condiciones de vuelo de bajo ángulo de ataque, son una

representación acertada de las fuerzas y momentos producidas. El flujo que baña el cuerpo de la aeronave es laminar y esta unido a la superficie, además, el campo del flujo es considerado cuasi-estable, esto significa que cambia muy poco con respecto al tiempo. También el campo del flujo es predecible y solamente cambia en respuesta a cambios en el ángulo de ataque, velocidad de cabeceo y deflexión en el elevador. Esto permite modelar este comportamiento longitudinal. En contraste a la aerodinámica cuasi-estable, la aerodinámica inestable es caracterizada por un modelo no lineal tridimensional, variante en el tiempo, con flujo desprendido que significativamente afecta a las fuerzas y momentos experimentados por la aeronave. Tal vez, uno de los efectos mas importantes causados por el flujo inestables a considerar por los diseñadores de UAV y usuarios es el fenómeno de entrada en pérdida[1], que ocurre cuando el ángulo de ataque incrementa a un punto en el que el flujo comienza a desprenderse del ala, resultando en una drástica pérdida de levantamiento. Bajo condiciones de entrada en pérdida, las ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5 producen estimaciones peligrosamente optimistas.

Dado que el modelo presentado en esta tesis será usado para el diseño de leyes de control de una aeronave y simulación de su desempeño, es importante que los efectos de entrada en pérdida estén incorporados al modelo longitudinal aerodinámico. Para incorporar el fenómeno de entrada en pérdida en el modelo longitudinal debe de modificarse nuestras ecuaciones 4.3 y 4.4 tal que las fuerzas de levantamiento y arrastre sean no lineales con respecto al ángulo de ataque. Esto nos permitirá una aproximación mas acertada del modelo del levantamiento y arrastre sobre ángulos de ataque mas grandes. El levantamiento y arrastre pueden ser mejor modelados como

$$L = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left(C_L(\alpha) + C_{L_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \right) \quad (4.6)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left(C_D(\alpha) + C_{D_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{D_{\delta_e}} \delta_e \right). \quad (4.7)$$

donde C_L y C_D están ahora expresadas por funciones no lineales de α . Para ángulos de ataque que están mas allá de la entrada en pérdida, el ala tiene el comportamiento de un plato plano, cuya ecuación del coeficiente de levantamiento está modelado como [27]

$$C_{L,placa\ plana} = 2 \text{sign}(\alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha. \quad (4.8)$$

Para obtener un modelo de levantamiento contra angulo de ataque para un perfil aerodinámico se requiere experimentación con un túnel de viento o en dado caso un análisis detallado a computadora. Pero para propósitos de simulación no es necesario tener un alto grado de fidelidad en el modelo del levantamiento de la aeronave, pero si es deseable que considere los efectos de entrada en pérdida. Por lo tanto un modelo que incorpore el efecto lineal y los efectos de entrada en pérdida esta dado por

$$C_L(\alpha) = (1 - \sigma(\alpha)) (C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha) + \sigma(\alpha) (2 \text{sign}(\alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha), \quad (4.9)$$

donde

$$\sigma(\alpha) = \frac{1 + e^{-\kappa(\alpha - \alpha_0)} + e^{\kappa(\alpha + \alpha_0)}}{(1 + e^{-\kappa(\alpha - \alpha_0)})(1 + e^{\kappa(\alpha - \alpha_0)})}, \quad (4.10)$$

y κ y α_0 son constantes positivas. La función sigmoide en la ecuación 4.10 es una función que mezcla la transición de $+/- \alpha$. La figura 4.4 muestra el coeficiente de levantamiento en

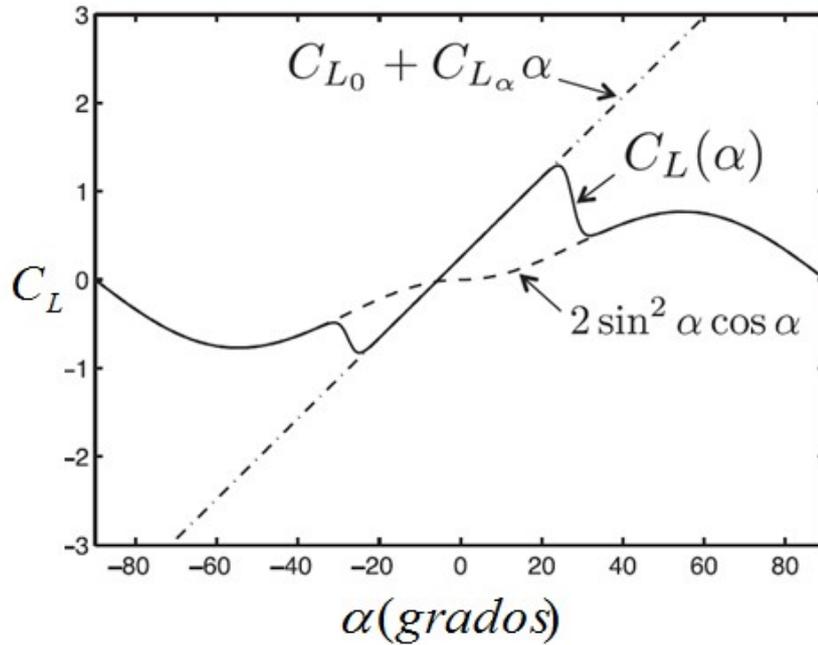


Figura 4.4: Coeficiente de levantamiento en función al ángulo de ataque

la ecuación 4.9 como una combinación de la parte lineal y la parte no lineal separadas por el ángulo de entrada en pérdida. Para VANT pequeños, el coeficiente de levantamiento puede ser aproximado como

$$C_{L_\alpha} = \frac{\pi AR}{1 + \sqrt{1 + (AR/2)^2}},$$

donde $AR \triangleq b^2/S$ es el alargamiento del ala, b es la envergadura y S es la superficie alar.

El coeficiente de arrastre C_D es también una función no lineal del ángulo de ataque. Hay dos contribuciones a el coeficiente de arrastre, llamadas arrastre inducido y arrastre parasitario[27]. El arrastre parasitario es generado por el esfuerzo cortante de el aire moviéndose por la superficie, es más o menos constante y es denotado por C_{D_p} ¹. Para ángulos pequeños de ataque, el arrastre inducido es proporcional al cuadrado de la fuerza del levantamiento. Combinando el arrastre parasitario y el arrastre inducido, tenemos

$$C_D(\alpha) = C_{D_p} + \frac{(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha)^2}{\pi e AR}. \quad (4.11)$$

El parámetro e es el factor de eficiencia de Oswald, el cual se encuentra en un rango de 0.8 a 1.0[29].

La Figura 4.5 muestra un típico gráfico de el coeficiente de arrastre contra el ángulo de ataque para un modelo lineal y un modelo cuadrático. El modelo cuadrático modela de manera correcta la fuerza de arrastre con una función con respecto a α . La fuerza de arrastre siempre es contraria al movimiento de la aeronave, independientemente del signo del ángulo de ataque. El modelo lineal predice de manera incorrecta el arrastre ya que el arrastre se vuelve negativo

¹En la literatura aeronáutica es común denotar el arrastre parasitario como C_{D_0} . Para evitar confusión con el término constante de la ecuación 4.4, en esta tesis será denotada como C_{D_p}

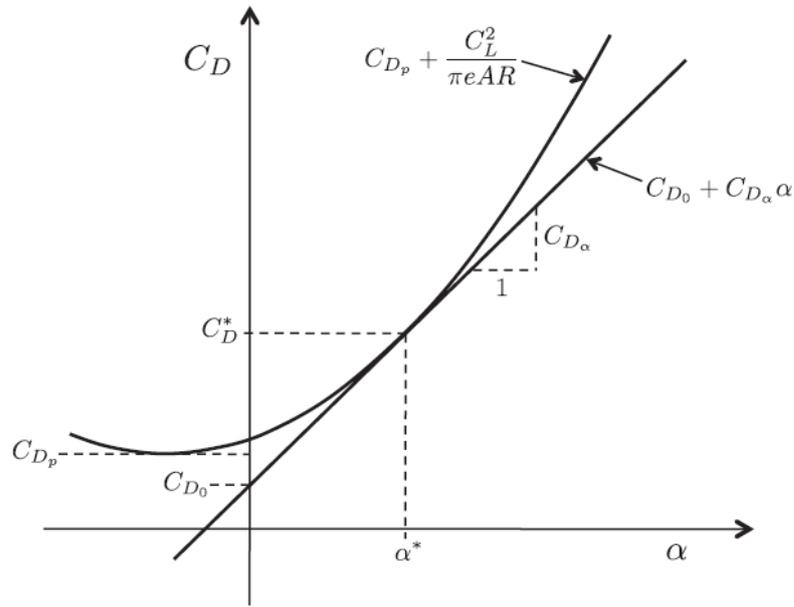


Figura 4.5: Coeficiente de arrastre contra ángulo de ataque

para ángulos negativos de ataque. La Figura muestra claramente la diferencia entre el arrastre parasitario, también conocido como el coeficiente de arrastre con cero levantamiento, y C_{D_0} , el coeficiente de arrastre descrito por el modelo lineal con cero ángulo de ataque. Los parámetros α^* y C_D^* son el ángulo de ataque y el coeficiente de arrastre correspondiente a la condición nominal de vuelo $\alpha = \alpha^*$ sobre el que C_D se linealiza.

Las fuerzas de levantamiento y arrastre expresadas en las ecuaciones 4.6 y 4.7 están expresadas en el marco de referencia de estabilidad. Para expresarlas en el marco del cuerpo es necesaria una transformación de coordenadas que requieren una rotación dada por el ángulo de ataque:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D \\ L \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \begin{pmatrix} (-C_D(\alpha) \cos \alpha + C_L(\alpha) \sin \alpha) + (-C_{D_q} \cos \alpha + C_{L_q} \sin \alpha) \frac{c}{2V_a} q + (-C_{D_{\delta_e}} \cos \alpha + C_{L_{\delta_e}} \sin \alpha) \delta_e \\ (-C_D(\alpha) \sin \alpha + C_L(\alpha) \cos \alpha) + (-C_{D_q} \sin \alpha + C_{L_q} \cos \alpha) \frac{c}{2V_a} q + (-C_{D_{\delta_e}} \sin \alpha + C_{L_{\delta_e}} \cos \alpha) \delta_e \end{pmatrix}$$

Las funciones $C_L(\alpha)$ y $C_D(\alpha)$ usadas en el modelo de fuerzas pueden ser funciones no lineales como están expresadas en las ecuaciones 4.9 y 4.11, el cuál están validadas para amplios ángulos de ataque. De manera alternativa si se desea un modelo mas simple, es posible emplear los modelos lineales dados por

$$C_L(\alpha) = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha \quad (4.12)$$

$$C_D(\alpha) = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha. \quad (4.13)$$

El momento de cabeceo de la aeronave es generalmente una función no lineal del ángulo de ataque y debe ser determinada por un tunel de viento o vuelos experimentales para una aeronave en específico. Para propósitos de simulación, se empleará un modelo lineal

$$C_M(\alpha) = C_{M_0} + C_{M_\alpha}\alpha,$$

donde $C_{M_\alpha} < 0$ implica que la aeronave es inherentemente estable en cabeceo.

4.2.3. Aerodinámica Lateral

Las fuerzas y momentos debido a la aerodinámica lateral causan un movimiento de traslación a lo largo del eje j^b y movimiento rotacional como el alabeo y la guiñada. La aerodinámica lateral es mayormente influenciada por el ángulo de ladeo β . También son afectadas por la velocidad de alabeo p , la velocidad de guiñada r , la deflexión del alerón δ_a y la deflexión del timón de profundidad δ_r . Denotando las fuerzas laterales como f_y y los momentos de alabeo y guiñada como l y n , respectivamente, tendremos

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_Y(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \\ l &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b C_l(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \\ n &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b C_n(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r), \end{aligned}$$

donde C_Y, C_l y C_n son coeficientes adimensionales, y b es la envergadura de la aeronave. Al igual que en la aerodinámica longitudinal, los coeficientes C_Y, C_l y C_n son no lineales con sus parámetros correspondientes, que en este caso son, β, p, r, δ_a y δ_r . Esta relación no lineal, es de por sí difícil de caracterizar, aún así, las aproximaciones lineales otorgan resultados aceptables y otorgan información acerca de la estabilidad dinámica de la aeronave. Usando el enfoque de la sección 4.2.2 se producirá el modelo lineal mediante la aproximación de la serie de Taylor de primer orden, y la adimensionalización de los coeficientes aerodinámicos. Por lo tanto para la fuerza lateral, el momento de alabeo y el momento de guiñada están dados por

$$f_y = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_p}\frac{b}{2V_a}p + C_{Y_r}\frac{b}{2V_a}r + C_{Y_{\delta_a}}\delta_a + C_{Y_{\delta_r}}\delta_r \right) \quad (4.14)$$

$$l = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left(C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_p}\frac{b}{2V_a}p + C_{l_r}\frac{b}{2V_a}r + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r \right) \quad (4.15)$$

$$n = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left(C_{n_0} + C_{n_\beta}\beta + C_{n_p}\frac{b}{2V_a}p + C_{n_r}\frac{b}{2V_a}r + C_{n_{\delta_a}}\delta_a + C_{n_{\delta_r}}\delta_r \right). \quad (4.16)$$

Estas fuerzas y momentos están alineadas con los ejes del cuerpo de la aeronave y no requieren de una rotación para ser implementadas en las ecuaciones de movimiento. El coeficiente C_{Y_0} es el valor del coeficiente de fuerza lateral C_Y cuando $\beta = p = r = \delta_a = \delta_r = 0$. Para aeronaves que son simétricas sobre el plano $i^b - k^b$, C_{Y_0} es típicamente cero. Los coeficientes C_{l_0} y C_{n_0} están definidos de manera similar y son típicamente cero para aeronaves simétricas.

4.2.4. Coeficientes aerodinámicos

Los coeficientes aerodinámicos C_{M_α} , C_{l_β} , C_{n_β} , C_{M_q} , C_{l_p} y C_{n_r} están referenciados como derivadas de estabilidad debido a que sus valores determinan la estabilidad estática y dinámica del VANT[11]. La estabilidad estática está ligada con la dirección de los momentos aerodinámicos al momento en que la aeronave es perturbada de las condiciones de vuelo nominal. Si los momentos tienden a restaurar la aeronave a su condición de vuelo nominal, se dice que la aeronave es estáticamente estable. Los coeficientes C_{M_α} , C_{l_β} y C_{n_β} son los que determinan la estabilidad estática del VANT y representan el cambio en los coeficientes de momento ante los cambios de la dirección del viento relativo, representado por α y β .

C_{M_α} es referenciada como la derivada de estabilidad longitudinal, para que la aeronave sea estable, ésta debe ser menor a cero, de ser así si la aeronave incrementa en el ángulo de ataque, un momento hará que la aeronave vuelva a regresar a las condiciones nominales de vuelo.

C_{l_β} es llamada la derivada de estabilidad estática del alabeo y típicamente está asociada con el ángulo diedro del ala, para estabilidad en el alabeo, C_{l_β} debe ser negativo que dará lugar a momentos de alabeo que llevarán a un ángulo de deslizamiento β a cero.

C_{n_β} es referenciada como la derivada de estabilidad estática de guiñada. Si la aeronave es estable estáticamente en la guiñada, esta siempre apuntará en dirección del viento relativo. El valor de C_{n_β} esta fuertemente influenciado por el diseño de la cola de la aeronave. Mientras mas grande sea la distancia de la cola al centro de gravedad de la aeronave, mas grande será el valor de C_{n_β} . para que la aeronave sea estable en la guiñada, C_{n_β} debe ser positiva, esto implica que un ángulo de deslizamiento positivo induce un momento de guiñada positivo.

La estabilidad dinámica es aquella relacionada con el comportamiento dinámico del VANT ante perturbaciones. Si un disturbio actúa sobre la aeronave, el VANT se dice dinámicamente estable si la respuesta del VANT amortigua los disturbios. Si usamos la analogía del sistema de masa-resorte-amortiguador, las derivadas de estabilidad C_{M_α} , C_{l_β} y C_{n_β} tendrían un comportamiento como un resorte, mientras que las derivadas C_{M_q} , C_{l_p} y C_{n_r} actuarían como amortiguador.

C_{M_q} es referenciada como la derivada de amortiguamiento de cabeceo, C_{l_p} es llamada como la derivada de amortiguamiento de alabeo, y C_{n_r} es conocida como la derivada de amortiguamiento de la guiñada. Cada una de estas derivadas es usualmente negativa, significando que se produce un momento que se opone a la dirección del movimiento, de ahí que lo amortiguan.

Los coeficientes aerodinámicos $C_{M_{\delta_e}}$, $C_{l_{\delta_a}}$ y $C_{n_{\delta_r}}$ están asociadas con la deflexión de las superficies de control y son conocidas como las derivadas de control primarias. son primarias ya que los momentos producidos son el resultado deseado de la deflexión específica de la superficie de control. $C_{l_{\delta_r}}$ y $C_{n_{\delta_a}}$ son llamadas las derivadas de control cruzadas. Debido a que ellas producen momentos fuera del eje en el que las superficies de control se flexionan. Las derivadas de control pueden ser consideradas como ganancias, mientras mas grande sea su valor, mas grande será el momento producido por la deflexión dada por la superficie de control.

4.3. Fuerzas y Momentos debido a la Propulsión

4.3.1. Empuje de la Hélice

Un modelo simple para la propulsión generado por la hélice puede ser obtenido mediante el principio de Bernoulli para calcular presiones antes y después de la hélice y luego aplicando

la diferencia de presión sobre el área de la hélice. Usando la ecuación de Bernoulli, la presión total antes de la propela puede ser escrito de la siguiente manera[5]

$$P_{\text{antes}} = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_a^2,$$

donde P_0 es la presión estática y ρ es la densidad del aire. La presión después de la hélice puede ser expresada como

$$P_{\text{después}} = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_{\text{salida}}^2,$$

donde V_{salida} es la velocidad del aire que sale por la hélice, existe una relación lineal con respecto al "PWM"(modulación por ancho de pulso) del comandado δ_t y la velocidad angular de la hélice. Por lo tanto la propela crea una velocidad de viento de salida expresada como

$$V_{\text{salida}} = k_{\text{motor}}\delta_t.$$

Si S_{prop} es el área barrida por la hélice, entonces el empuje producido por el motor es dado por

$$\begin{aligned} f_{x_p} &= S_{\text{prop}}C_{\text{prop}}(P_{\text{antes}} - P_{\text{después}}) \\ &= \frac{1}{2}\rho S_{\text{prop}}C_{\text{prop}}((k_{\text{motor}}\delta_t)^2 - V_a^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_p = \frac{1}{2}\rho S_{\text{prop}}C_{\text{prop}} \begin{pmatrix} (k_{\text{motor}}\delta_t)^2 - V_a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La mayoría de los VANT están diseñados de tal manera en que el empuje actúe directamente sobre el eje del cuerpo i^b de la aeronave. por lo tanto no produce ningún momento sobre el centro de masa del VANT.

4.3.2. Momento Debido a la Hélice

A medida que la hélice del VANT gira, se presentan fuerzas opuestas aplicadas por el aire hacia la hélice. El efecto de estas fuerzas es un momento sobre el eje de rotación de la hélice. El momento aplicado por el motor a la hélice y luego a el aire resulta en uno igual y opuesto que será soportado por el cuerpo de la aeronave. Este momento es opuesto a la dirección de la rotación de la hélice y proporcional a el cuadrado de la velocidad angular de la hélice, expresado de la siguiente manera como

$$T_p = -K_{T_p}(k_{\Omega}\delta_t)^2,$$

donde $\omega = k_{\Omega}\delta_t$ es la velocidad de la hélice y K_{T_p} es una constante determinada por experimentación. Los momentos debido al sistema de propulsión son entonces

$$M_p = \begin{pmatrix} -K_{T_p}(k_{\Omega}\delta_t)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los efectos del momento debido a la Hélice son usualmente menores, pero si no se considera genera un movimiento suave en el alabeo en dirección contraria al movimiento de la hélice, puede ser contrarrestado aplicando una pequeña deflexión a los alerones.

4.4. Disturbios Atmosféricos

En esta sección se mostrarán los disturbios atmosféricos, tales como el viento, y se describirán como estos disturbios interactúan con la dinámica de la aeronave. Como se muestra en la ecuación 2.4, la relación que existe entre la velocidad terrestre, la velocidad aérea y la velocidad del viento está dado por

$$V_g = V_a + V_w. \quad (4.17)$$

Para propósitos de simulación, se asumirá que el vector del viento puede ser representado como

$$V_w = V_{w_s} + V_{w_g},$$

donde V_{w_s} es un vector constante que representa el viento en calma, y V_{w_g} es un proceso estocástico que representa las ráfagas y otros disturbios atmosféricos. El viento en calma es típicamente expresado en el marco de referencia inercial como

$$V_{w_s}^i = \begin{pmatrix} w_{n_s} \\ w_{e_s} \\ w_{d_s} \end{pmatrix},$$

donde w_{n_s} es la velocidad del viento en calma con la dirección norte, y de manera similar para w_{e_s} y w_{d_s} con las componentes de este y abajo del viento en calma respectivamente. La componente estocástica del viento están típicamente expresados en el marco del cuerpo de la aeronave, esto es debido a que se presentan con mayor frecuencia sobre la dirección de la aeronave que en direcciones "NED". La porción de las ráfagas del viento pueden ser escritas en términos de componentes del marco de referencia del cuerpo como

$$V_{w_g}^b = \begin{pmatrix} u_{w_g} \\ v_{w_g} \\ w_{w_g} \end{pmatrix}.$$

Los resultados experimentales indican que un buen modelo para ráfagas de viento es obtenido a través de pasar ruido blanco por un filtro lineal invariante en el tiempo dado por el espectro de turbulencia de von Kármán, desafortunadamente no es una función fácil de modelar, pero las funciones de transferencia de Dryden[27] muestran una aproximación aceptable al modelo de Kármán y están dadas por las funciones de transferencia

$$H_u(s) = \sigma_u \sqrt{\frac{2V_a}{L_u}} \frac{1}{s + \frac{V_a}{L_u}}$$

$$H_v(s) = \sigma_v \sqrt{\frac{2V_a}{L_v}} \frac{\left(s + \frac{V_a}{\sqrt{3}L_v}\right)}{\left(s + \frac{V_a}{L_u}\right)^2}$$

$$H_w(s) = \sigma_w \sqrt{\frac{2V_a}{L_w}} \frac{\left(s + \frac{V_a}{\sqrt{3}L_w}\right)}{\left(s + \frac{V_a}{L_w}\right)^2},$$

tipo de ráfaga	altura (m)	$L_u = L_v$ (m)	L_w (m)	$\sigma_u = \sigma_v$ (m/s)	σ_w (m/s)
Baja altitud, baja turbulencia	50	200	50	1.06	0.7
Baja altitud, turbulencia moderada	50	200	50	2.12	1.4
Media altitud, baja turbulencia	600	533	533	1.5	1.5
Media altitud, turbulencia moderada	600	533	533	3.0	3.0

Tabla 4.1: Parámetros para el modelo de ráfagas de Dryden [18]

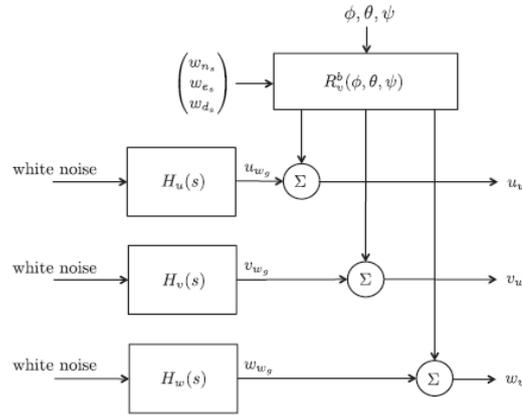


Figura 4.6: Diagrama de bloques para agregar los efectos del viento a una simulación.

donde σ_u , σ_v y σ_w son las intensidades de turbulencia en los ejes del marco del vehículo; y L_u , L_v y L_w son longitud de onda espaciales; y V_a es la velocidad aérea del vehículo. Los modelos de Dryden son típicamente implementados asumiendo una velocidad aérea nominal constante V_{a0} y los parámetros están definidos en [21]. Parámetros adecuados para pequeños VANT están presentados en [18] y son mostrados en la table 4.4

La Figura 4.6 Muestra como introducir el viento en calma y las ráfagas a las ecuaciones de movimiento. El ruido blanco es pasado a través de los filtros de Dryden que producen las ráfagas en componentes del marco de referencia del cuerpo. las componentes de viento en calma son llevadas al marco de referencia del cuerpo y sumadas a las ráfagas de viento. La combinación de ambas puede ser expresada matemáticamente como

$$V_w^b = \begin{pmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{pmatrix} = R_v^b(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} w_{n_s} \\ w_{e_s} \\ w_{d_s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{wg} \\ v_{wg} \\ w_{wg} \end{pmatrix},$$

donde R_v^b es la matriz de rotación de el marco de referencia del vehículo al marco de referencia del cuerpo. Con las componentes de velocidad del viento y velocidad terrestre, podemos calcular las componentes de velocidad aérea como

$$V_a^b = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u_w \\ v - v_w \\ w - w_w \end{pmatrix}.$$

Con las componentes del vector de velocidad aérea en el marco del cuerpo, se puede calcular la magnitud de la velocidad aérea, el ángulo de ataque, y el ángulo de deslizamiento de acuerdo

a la ecuaciones 2.6 a 2.8 como

$$V_a = \sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{w_r}{u_r} \right)$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{v_r}{\sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}} \right).$$

La idea mostrada es que los disturbios atmosféricos afectan la velocidad aérea, el ángulo de ataque y el ángulo de deslizamiento que a su vez afectan a las fuerzas y momentos actuando en el vehículo y por lo tanto influyen en el movimiento de la aeronave. Complementado todo el modelo matemático de las fuerzas y momentos junto con el modelo cinemático y dinámico de la aeronave es posible llevar a cabo una simulación que se acerque a los valores reales lo mas posible para poder desarrollar las leyes de control.

4.5. Resumen de las ecuaciones no lineales del movimiento de la aeronave.

Finalmente en esta sección se resume las ecuaciones de movimiento(3.14 a la 3.17) incorporando los efectos de las fuerzas y momentos vistos en este capítulos quedan expresadas de la siguiente manera con las aceleraciones lineales y angulares que experimenta la aeronave.

$$\dot{u} = rv - qw - mg \sin \theta + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \left[C_X(\alpha) + C_{X_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{X_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e \right] \quad (4.18)$$

$$+ \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}}}{2m} \left((k_{\text{motor}} \delta_t)^2 - V_a^2 \right) \quad (4.19)$$

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos \theta \cos \phi$$

$$+ \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \left[C_{Y_0} + C_{Y_\beta}(\beta) + C_{Y_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{Y_r} \frac{br}{2V_a} + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (4.20)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos \theta \sin \phi$$

$$+ \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \left[C_Z(\alpha) + C_{Z_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{Z_{\delta_e}} \delta_e \right] \quad (4.21)$$

$$\dot{p} = \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr$$

$$+ \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_a}} \delta_a + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (4.22)$$

$$\dot{q} = \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) \quad (4.23)$$

$$+ \frac{\rho V_a^2 S c}{2j_y} \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{cq}{2V_a} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \right] \quad (4.24)$$

$$\dot{r} = \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr$$

$$+ \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{r_0} + C_{r_\beta} \beta + C_{r_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{r_{\delta_a}} \delta_a + C_{r_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (4.25)$$

con las siguientes expresiones para simplificar, definimos

$$\begin{aligned}
 C_{p_0} &= \Gamma_3 C_{l_0} + \Gamma_4 C_{n_0} \\
 C_{p_\beta} &= \Gamma_3 C_{l_\beta} + \Gamma_4 C_{n_\beta} \\
 C_{p_p} &= \Gamma_3 C_{l_p} + \Gamma_4 C_{n_p} \\
 C_{p_r} &= \Gamma_3 C_{l_r} + \Gamma_4 C_{n_r} \\
 C_{p_{\delta_a}} &= \Gamma_3 C_{l_{\delta_a}} + \Gamma_4 C_{n_{\delta_a}} \\
 C_{p_{\delta_r}} &= \Gamma_3 C_{l_{\delta_r}} + \Gamma_4 C_{n_{\delta_r}} \\
 C_{r_0} &= \Gamma_4 C_{l_0} + \Gamma_8 C_{n_0} \\
 C_{r_\beta} &= \Gamma_4 C_{l_\beta} + \Gamma_8 C_{n_\beta} \\
 C_{r_p} &= \Gamma_4 C_{l_p} + \Gamma_8 C_{n_p} \\
 C_{r_r} &= \Gamma_4 C_{l_r} + \Gamma_8 C_{n_r} \\
 C_{r_{\delta_a}} &= \Gamma_4 C_{l_{\delta_a}} + \Gamma_8 C_{n_{\delta_a}} \\
 C_{r_{\delta_r}} &= \Gamma_4 C_{l_{\delta_r}} + \Gamma_8 C_{n_{\delta_r}}
 \end{aligned}$$

Y finalmente definiendo las ecuaciones de fuerza donde el subíndice X o Z indican la dirección de la fuerza ya sea i^b o k^b respectivamente.

$$\begin{aligned}
 C_X(\alpha) &\triangleq -C_D(\alpha) \cos \alpha + C_L(\alpha) \sin \alpha \\
 C_{X_q}(\alpha) &\triangleq -C_{D_q} \cos \alpha + C_{L_q} \sin \alpha \\
 C_{X_{\delta_e}}(\alpha) &\triangleq -C_{D_{\delta_e}} \cos \alpha + C_{L_{\delta_e}} \sin \alpha \\
 C_Z(\alpha) &\triangleq -C_D(\alpha) \sin \alpha - C_L(\alpha) \cos \alpha \\
 C_{Z_q}(\alpha) &\triangleq -C_{D_q} \sin \alpha - C_{L_q} \cos \alpha \\
 C_{Z_{\delta_e}}(\alpha) &\triangleq -C_{D_{\delta_e}} \sin \alpha - C_{L_{\delta_e}} \cos \alpha
 \end{aligned}$$

con estas ecuaciones que extienden el modelo matemático usual de la aeronave es posible realizar una simulación que permita obtener resultados mas adecuados al comportamiento de un VANT de ala fija sometido a las perturbaciones climáticas habituales a las que se están sometidas.

Sistema Autopiloto

En este capítulo se describen los algoritmos de control que permitirán llevar a la aeronave a las referencias deseadas para su apropiada navegación. Este sistema de control se adecua a los sensores disponibles en la aeronave y los recursos computacionales que se encuentran a bordo. En términos generales, un sistema autopiloto es aquel empleado para guiar una aeronave sin asistencia de un piloto, para aeronaves, esto puede ser tan simple como un nivelador de alas sobre un solo eje, o tan completo como un sistema de control que involucre la posición (altitud, latitud y longitud) y orientación (alabeo, cabeceo y guiñada) durante varias fases de vuelo, por ejemplo: despegue, ascenso, vuelo nivelado, descenso, aproximación, aterrizaje.

5.1. Control del Ángulo de cabeceo

El control de ángulo de cabeceo es el encargado de orientar la aeronave a un ángulo de cabeceo deseado, que permitirá a la aeronave ascender, descender o mantener una altura deseada según sea el caso que se requiera. Esto se lleva a cabo mediante el movimiento de la superficie de control, específicamente el elevador.[4].

De la ecuación que describe el movimiento del cabeceo 3.16 y considerando la teoría de disturbios pequeños para linealización como se presentada en [11, 13] tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ &= q + q (\cos \phi - 1) - r \sin \phi \\ &= q + d_\theta\end{aligned}$$

siendo $d_\theta \triangleq q (\cos \phi - 1) - r \sin \phi$, derivando la ecuación anterior y utilizando la ecuación 4.23 tenemos

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \dot{q} + \dot{d}_\theta \\ &= \Gamma_5 p r - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{\rho V_a^2 S c}{2 j_y} \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{c q}{2 V_a} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \right] + \dot{d}_\theta\end{aligned}$$

sustituyendo $q = \dot{\theta} - d_\theta$ y la relación $\alpha + \gamma = \theta$ en la ecuación anterior y agrupando términos tenemos

$$\ddot{\theta} = -a_\theta \dot{\theta} + a_{\theta 2} \theta + a_{\theta 3} \delta_e + d_{\theta 2} \quad (5.1)$$

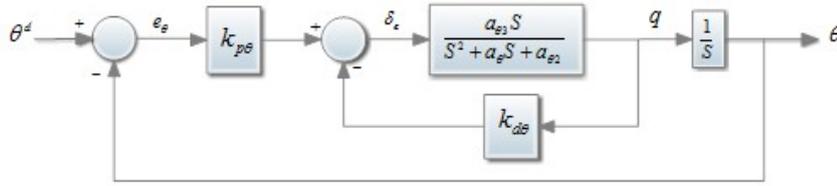


Figura 5.1: Diagrama a bloques del control PD para el control de cabeceo

definiendo algunos términos como a continuación

$$a_{\theta} \triangleq -\frac{\rho V_a^2 S c}{2j_y} C_{m_q} \frac{c}{2V_a}$$

$$a_{\theta 2} \triangleq -\frac{\rho V_a^2 S c}{2j_y} C_{m_{\alpha}}$$

$$a_{\theta 3} \triangleq \frac{\rho V_a^2 S c}{2j_y} C_{m_{\delta_e}}$$

$$d_{\theta 2} \triangleq \Gamma_5 p r - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{\rho V_a^2 S c}{2j_y} \left[C_{m_0} + C_{m_{\alpha}} \gamma + C_{m_q} \frac{c}{2V_a} d_{\theta} \right] + \dot{d}_{\theta}$$

transformando al dominio de laplace para obtener la relación que implica la deflexión del elevador y despreciando los disturbios.

$$\theta(S) = \left(\frac{a_{\theta 3}}{S^2 + a_{\theta} S^2 + a_{\theta 2}} \right) (\delta_e)$$

Proponiendo un control PD y basándonos en el diagrama a bloques en la Figura 5.1 llegamos a la siguiente función de transferencia

$$\frac{k_{p\theta} a_{\theta 3}}{S^2 + (a_{\theta} + k_{d\theta} a_{\theta 3}) S + (a_{\theta 2} + k_{p\theta} a_{\theta 3})}$$

Basándonos en la forma canónica de una función de transferencia de segundo orden como lo muestra [23] tenemos

$$\frac{k_{\theta DC} \omega_{n\theta}^2}{S^2 + 2\zeta_{\theta} \omega_{n\theta} S + \omega_{n\theta}^2} = \frac{k_{p\theta} a_{\theta 3}}{S^2 + (a_{\theta} + k_{d\theta} a_{\theta 3}) S + (a_{\theta 2} + k_{p\theta} a_{\theta 3})}$$

notar que en este caso existe un ganancia $k_{\theta DC}$ a considerar mas adelante para el diseño del control de altura, entonces

$$\begin{aligned} 2\zeta_{\theta} \omega_{n\theta} &= a_{\theta} + k_{d\theta} a_{\theta 3} \\ \omega_{n\theta}^2 &= a_{\theta 2} + k_{p\theta} a_{\theta 3} \end{aligned}$$

conociendo el limite de la deflexión del elevador $\delta_e^{\text{máx}}$ y proponiendo el error máximo anticipado del cabeceo es posible determinar la ganancia proporcional

$$k_{p\theta} = \frac{\delta_e^{\text{máx}}}{e_{\theta}^{\text{máx}}} \text{sign}(a_{\theta 3}) \quad (5.2)$$

ahora ya que $a_{\theta 3}$ esta en función del coeficiente de momento debido al elevador $C_{m_{\delta_e}}$, este es usualmente negativo, para asegurar la estabilidad, $k_{p\theta}$ y $a_{\theta 3}$ deben tener el mismo signo. El ancho de banda es calculada con

$$\omega_{n\theta} = \sqrt{a_{\theta 2} + |a_{\theta 3}| \frac{\delta_e^{\text{máx}}}{e_{\theta}^{\text{máx}}}}$$

y resolviendo la ecuación podemos calcular la ganancia derivativa

$$k_{d\theta} = \frac{2\zeta_{\theta}\omega_{n\theta} - a_{\theta}}{a_{\theta 3}} \quad (5.3)$$

de esta manera seleccionando un factor de amortiguamiento deseado es posible calcular la ganancia derivativa.

La ganancia DC queda definida por

$$k_{\theta DC} = \frac{a_{\theta 3}k_{p\theta}}{a_{\theta 2} + k_{p\theta}a_{\theta 3}} \quad (5.4)$$

notar que esta ganancia se aproxima a uno cuando $k_{p\theta} \rightarrow \infty$. Una ganancia integral puede asegurar que el valor de $k_{\theta DC}$ sea uno, sin embargo según [4] agregar un termino integral reduce el ancho de banda del lazo interno para un control de altura que implemente el angulo de cabeceo como se pretende en esta tesis. Es por ello que se considerará que $\theta \approx k_{\theta DC}\theta^d$ para el diseño del control de altura. Nuestro control para el cabeceo queda por lo tanto queda definido como

$$\delta_e = k_{p\theta} (\theta^d - \theta) - k_{d\theta}q \quad (5.5)$$

5.2. Control de Altura

Utilizando la ecuación de la dinámica para la altura 3.14 y argumentando que la velocidad de ascenso también depende de la velocidad aérea de la aeronave junto con el ángulo de cabeceo es posible adecuar esta expresión.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= u \sin \theta - v \sin \phi \cos \theta - w \cos \phi \cos \theta \\ &= V_a \theta + (u \sin \theta - V_a \theta) - v \sin \phi \cos \theta - w \cos \phi \cos \theta \\ &= V_a \theta + d_h \end{aligned}$$

donde

$$d_h \triangleq (u \sin \theta - V_a \theta) - v \sin \phi \cos \theta - w \cos \phi \cos \theta$$

notar que para un vuelo recto y nivelado ocurre que $v, w, \phi \approx 0$, $V_a \approx u$ y θ es pequeño, por lo tanto $d_h \approx 0$, asumiendo que V_a es constante y que el ángulo de cabeceo θ es nuestra entrada, podemos transformar a laplace

$$h(S) = \frac{V_a}{S} \left(\theta + \frac{1}{V_a} d_h \right)$$

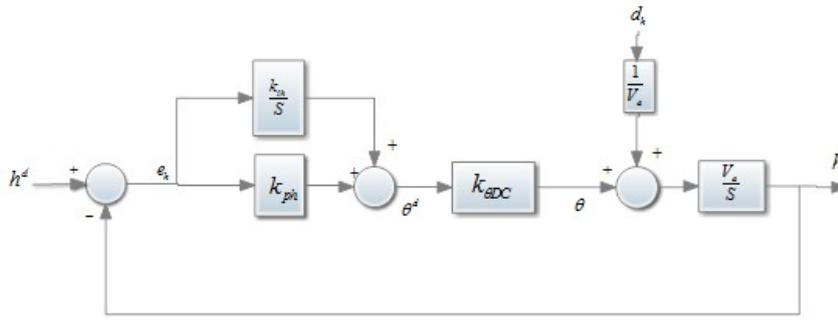


Figura 5.2: Control por retroalimentación para la altura de la aeronave

Proponiendo un control PI, y utilizando el diagrama de la figura 5.2 tenemos la siguiente función de transferencia

$$h(S) = \left(\frac{k_{\theta DC} V_a k_{ph} \left(S + \frac{k_{ih}}{k_{ph}} \right)}{S^2 + (k_{\theta DC} V_a k_{ph}) S + k_{\theta DC} V_a k_{ih}} \right) h^d(s) + \left(\frac{S}{S^2 + (k_{\theta DC} V_a k_{ph}) S + k_{\theta DC} V_a k_{ih}} \right) d_h(s)$$

Las ganancias k_{ph} y k_{ih} deben ser elegidas de tal manera que el ancho de banda del lazo de altura sea menor que el ancho de banda del lazo del control para el cabeceo, entonces

$$\omega_{nh} = \frac{1}{W_h} \omega_{nh}$$

donde W_h es un parámetro de diseño entre 5 y 15, ahora utilizando la función de transferencia canónica

$$\frac{\omega_{nh}^2}{S^2 + 2\zeta_h \omega_{nh} S + \omega_{nh}^2}$$

podemos igualar nuestro polinomio característico para obtener nuestras ganancias

$$2\zeta_h \omega_{nh} = k_{\theta DC} V_a k_{ph}$$

$$\omega_{nh}^2 = k_{\theta DC} V_a k_{ih}$$

y resolviendo

$$k_{ph} = \frac{2\zeta_h \omega_{nh}}{k_{\theta DC} V_a}$$

$$k_{ih} = \frac{\omega_{nh}^2}{k_{\theta DC} V_a}$$

Por lo tanto seleccionando un coeficiente de amortiguamiento ζ_h , un coeficiente de ancho de banda W_h , es posible calcular k_{ph} y k_{ih} , para finalmente tener nuestra salida de este lazo como a continuación

$$\theta^d = k_{ph}(h^d - h) + \frac{k_{ih}}{S}(h^d - h) \quad (5.6)$$

5.3. Control de Velocidad

Utilizando la ecuación 2.6 que describe la velocidad y sus componentes tenemos que

$$V_a = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

derivando

$$\dot{V}_a = \frac{u * \dot{u} + v * \dot{v} + w * \dot{w}}{V_a}$$

utilizando la ecuación 2.5 para sustituir, tenemos

$$\dot{V}_a = \dot{u} \cos \alpha \cos \beta + \dot{v} \sin \beta + \dot{w} \sin \alpha \cos \beta$$

simplificando términos podemos representar de la siguiente manera

$$\dot{V}_a = \dot{u} \cos \alpha + \dot{w} \sin \alpha + d_V \quad (5.7)$$

definiendo

$$d_V \triangleq -\dot{u} (1 - \cos \beta) \cos \alpha - \dot{w} (1 - \cos \beta) \sin \alpha + \dot{v} \sin \beta$$

Notar que si $\beta = 0$, entonces $d_V = 0$. sustituyendo las ecuaciones 4.18 y 4.21 en 5.7 tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & \{rv - qw - mg \sin \theta + \frac{\rho V_a^2 S}{2\mathbf{m}} \left[C_X(\alpha) + C_{X_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{X_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e \right] \\ & + \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}}}{2\mathbf{m}} ((k_{\text{motor}} \delta_t)^2 - V_a^2) \} \cos \alpha \\ & + \left\{ qu - pv + g \cos \theta \cos \phi + \frac{\rho V_a^2 S}{2\mathbf{m}} \left[C_Z(\alpha) + C_{Z_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{Z_{\delta_e}} \delta_e \right] \right\} \sin \alpha + d_V \end{aligned}$$

usando la ecuación 2.5, la aproximación lineal del $C_D(\alpha) \approx C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha$ y simplificando, se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & rV_a \cos \alpha \sin \beta - pV_a \sin \alpha \sin \beta - g \cos \alpha \sin \theta + g \sin \alpha \cos \theta \cos \phi \\ & + \frac{\rho V_a^2 S}{2\mathbf{m}} \left[-C_D(\alpha) - C_{D_\alpha} \alpha - C_{D_q} \frac{cq}{2V_a} - C_{D_{\delta_e}} \delta_e \right] \\ & + \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}}}{2\mathbf{m}} ((k_{\text{motor}} \delta_t)^2 - V_a^2) \cos \alpha + d_V \end{aligned}$$

agrupando términos

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & (rV_a \cos \alpha - pV_a \sin \alpha) \sin \beta - g \sin(\theta - \alpha) - g \sin \alpha \cos \theta (1 - \cos \phi) \\ & + \frac{\rho V_a^2 S}{2\mathbf{m}} \left[-C_{D_0} - C_{D_\alpha} \alpha - C_{D_q} \frac{cq}{2V_a} - C_{D_{\delta_e}} \delta_e \right] \\ & + \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}}}{2\mathbf{m}} ((k_{\text{motor}} \delta_t)^2 - V_a^2) \cos \alpha + d_V \end{aligned}$$

finalmente podemos reducir a la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & -g \sin \gamma + \frac{\rho V_a^2 S}{2\mathbf{m}} \left[-C_{D_0} - C_{D_\alpha} \alpha - C_{D_q} \frac{cq}{2V_a} - C_{D_{\delta_e}} \delta_e \right] \\ & + \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}}}{2\mathbf{m}} ((k_{\text{motor}} \delta_t)^2 - V_a^2) + d_{V2} \quad (5.8) \end{aligned}$$

definiendo

$$d_{V2} \triangleq (rV_a \cos \alpha - pV_a \sin \alpha) \sin \beta - g \sin \alpha \cos \theta (1 - \cos \phi) \\ + \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}}}{2\mathbf{m}} \left((k_{\text{motor}} \delta_t)^2 - V_a^2 \right) (\cos \alpha - 1) + d_V$$

Para controlar la velocidad de una aeronave de ala fija es posible tomar en cuenta dos entradas, la configuración del propulsor δ_t y el ángulo de cabeceo θ , en esta tesis se pretende implementar el propulsor para mantener la velocidad aérea, aún así notamos que de la ecuación 5.8 se tiene un comportamiento no lineal, por lo tanto para encontrar la función de transferencia es necesario linealizar este comportamiento. Siguiendo a [13], sea $\bar{V}_a \triangleq V_a - V_a^*$, donde V_a^* la velocidad de equilibrio, de igual manera $\bar{\theta} \triangleq \theta - \theta^*$ y $\bar{\delta}_t = \delta - \delta_t^*$ para el cabeceo y propulsión, es posible linealizar al rededor de un vuelo nivelado rectilíneo, con altura constante ($\gamma^* = 0$), por lo tanto obtenemos

$$\dot{\bar{V}}_a = g \cos(\theta^* - \alpha^*) \bar{\theta} + \left\{ \frac{\rho V_a^2 S}{\mathbf{m}} [-C_{D0} - C_{D\alpha} \alpha^* - C_{D\delta_e} \delta_e] - \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}}}{\mathbf{m}} (V_a^*) \right\} \bar{V}_a \\ + \left[\frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}} k_{\text{motor}}^2}{\mathbf{m}} \right] \bar{\delta}_t + d_V$$

y finalmente teniendo la forma lineal

$$\dot{\bar{V}}_a = -a_V \bar{V}_a + a_{V2} \bar{\delta}_t - a_{V3} \bar{\theta} + d_V$$

donde

$$a_V = \frac{\rho V_a^2 S}{\mathbf{m}} [C_{D0} + C_{D\alpha} \alpha^* + C_{D\delta_e} \delta_e] + \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}}}{\mathbf{m}} (V_a^*) \\ a_{V2} = \frac{\rho S_{\text{prop}} C_{\text{prop}} k_{\text{motor}}^2}{\mathbf{m}} \delta_t^* \\ a_{V3} = g \cos(\theta^* - \alpha^*)$$

Ahora en el dominio de laplace

$$\bar{V}_a(S) = \frac{1}{S + a_V} (a_{V2} \bar{\delta}_t(S) - a_{V3} \bar{\theta}(S) + d_V(S))$$

Implementando un control PI como lo muestra la figura 5.3, entonces obtenemos la siguiente función de transferencia

$$\bar{V}_a(S) = \left(\frac{a_{V2} (k_{pV} S + k_{iV})}{S^2 + (a_V + a_{V2} k_{pV}) S + a_{V2} k_{iV}} \right) \bar{V}_a^d + \left(\frac{1}{S^2 + (a_V + a_{V2} k_{pV}) S + a_{V2} k_{iV}} \right) d_V$$

De igual manera que en los otros controles, igualando los denominadores con una función de transferencia canónica de segundo orden, se obtiene

$$\omega_{nV}^2 = a_{V2} k_{iV} \\ 2\zeta \omega_{nV} = a_V + a_{V2} k_{pV}$$

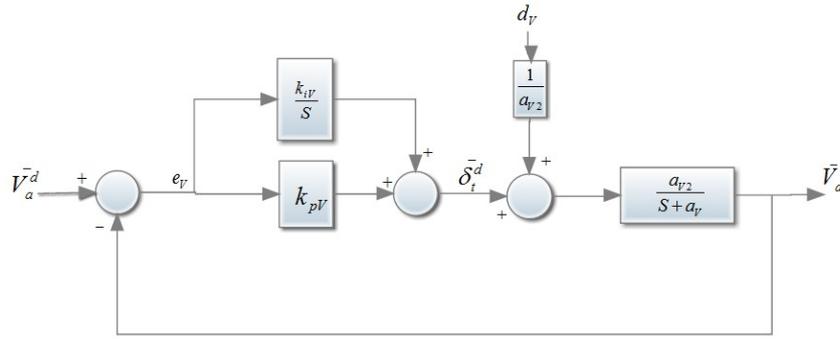


Figura 5.3: Diagrama a bloques del control PI para velocidad.

y resolviendo para las ganancias proporcional e integral

$$k_{pV} = \frac{2\zeta_V \omega_{nV} - a_V}{a_{V2}}$$

$$k_{iV} = \frac{\omega_{nV}^2}{a_{V2}}$$

notar que $\bar{V}_a \triangleq V_a - V_a^*$ y $\bar{V}_a^d \triangleq V_a^d - V_a^*$, entonces el error simplemente es

$$e = V_a^d - V_a$$

por lo tanto no es necesario conocer la velocidad de equilibrio de la aeronave para implementar este control. Nuestra salida de este lazo sera entonces.

$$\delta_t = \delta_t^* + k_{pV} (V_a^d - V_a) + k_{iV} (V_a^d - V_a) \quad (5.9)$$

5.4. Control del ángulo de Alabeo

El control del ángulo de alabeo es el responsable de llevar ϕ a un ángulo deseado ϕ^d . Esto se logra mediante el movimiento de los alerones. Partiendo de la ecuación 3.3 para describir el comportamiento del ángulo de alabeo tenemos

$$\dot{\phi} = p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta$$

considerando ángulos pequeños es posible reducir la ecuación para considerar $q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta$ los disturbios

$$\dot{\phi} = p + d_\phi \quad (5.10)$$

Derivando esta ecuación y utilizando la ecuación 4.22 tenemos

$$\ddot{\phi} = \dot{p} + \dot{d}_\phi$$

$$= \Gamma_1 p q - \Gamma_2 q r + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{p0} + C_{p\beta} \beta + C_{pp} \frac{bp}{2V_a} + C_{pr} \frac{br}{2V_a} + C_{p\delta_a} \delta_a + C_{p\delta_r} \delta_r \right] + \dot{d}_\phi$$

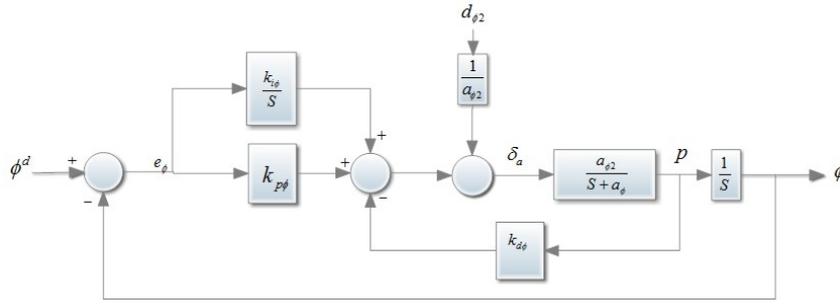


Figura 5.4: Diagrama a bloques del control PID para el ángulo de alabeo

sustituyendo a $p = \dot{\phi} - d_\phi$ y agrupando términos

$$\ddot{\phi} = \left(\frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_{p_p} \frac{b}{2V_a} \right) \dot{\phi} + \left(\frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_{p_{\delta_a}} \right) \delta_a + \Gamma_1 p q - \Gamma_2 q r + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] + \dot{d}_\phi$$

Agrupando y definiendo algunos términos de la siguiente manera

$$a_\phi \triangleq -\frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_{p_p} \frac{b}{2V_a}$$

$$a_{\phi 2} \triangleq \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_{p_{\delta_a}}$$

$$d_{\phi 2} \triangleq \Gamma_1 p q - \Gamma_2 q r + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] + \dot{d}_\phi$$

siendo $d_{\phi 2}$ considerado como disturbios del sistema es posible reducir nuestro modelo de la siguiente manera

$$\ddot{\phi} = -a_\phi \dot{\phi} + a_{\phi 2} \delta_a + d_{\phi 2} \quad (5.11)$$

transformando al dominio de la place.

$$\phi(S) = \left(\frac{a_{\phi 2}}{S^2 + a_\phi S} \right) \left(\delta_a(S) + \frac{1}{a_{\phi 2}} d_{\phi 2}(S) \right)$$

Proponiendo un control PID con el cuál podemos argumentar que para contrarrestar esa perturbación que a su vez durante un vuelo estable es constante, y por lo tanto el error de estado estacionario es cero gracias a la acción integral.

De la Figura 5.4 cuya función de transferencia resulta ser

$$\phi(S) = \left(\frac{S}{S^3 + (a_\phi + a_{\phi 2} k_{d\phi}) S^2 + k_{p\phi} a_{\phi 2} S + a_{\phi 2} k_{i\phi}} \right) d_{\phi 2} + \left(\frac{a_{\phi 2} k_{p\phi} \left(S + \frac{k_{i\phi}}{k_{p\phi}} \right)}{S^3 + (a_\phi + a_{\phi 2} k_{d\phi}) S^2 + k_{p\phi} a_{\phi 2} S + a_{\phi 2} k_{i\phi}} \right) \phi^d$$

Cuyo polinomio característico es

$$S^3 + (a_\phi + a_{\phi 2} k_{d\phi}) S^2 + k_{p\phi} a_{\phi 2} S + a_{\phi 2} k_{i\phi} = 0$$

y condiciones de estabilidad

$$\begin{aligned} a_\phi + a_{\phi 2} k_{d\phi} &> 0 \\ k_{p\phi} a_{\phi 2} &> 0 \\ a_{\phi 2} k_{i\phi} &> 0 \\ (a_\phi + a_{\phi 2} k_{d\phi}) k_{p\phi} &> k_{i\phi} \end{aligned}$$

con lo que nuestro control para el aleron resulta dado por la ecuación

$$\delta_a = k_{p\phi} (\phi^d - \phi) + \frac{k_{i\phi}}{S} (\phi^d - \phi) - k_{d\phi} P \quad (5.12)$$

5.5. Control de Viraje

Partiendo de un análisis de viraje coordinado de una aeronave de ala fija nos indica que es posible cambiar la el ángulo de curso de la aeronave, cambiando el ángulo de alabeo de la aeronave, como lo describe la siguiente ecuación[11]

$$\dot{\chi} = \frac{g}{V_a} \tan \phi$$

de la cual usando la teoría de pequeñas perturbaciones para linealizar tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \frac{g}{V_g} \phi + \frac{g}{V_g} (\tan \phi - \phi) \\ &= \frac{g}{V_g} \phi + \frac{g}{V_g} d_\chi \end{aligned}$$

con

$$d_\chi = (\tan \phi - \phi)$$

siendo d_χ una pequeña perturbación, obteniendo la función de transferencia del comportamiento del ángulo de curso

$$\chi(S) = \frac{g/V_g}{S} (\phi(S) + d_\chi(S))$$

con lo cual es posible trazar el siguiente diagrama de flujo asumiendo que existe una sintonización adecuada en el control de alabeo que permita una relación $\frac{\phi}{\phi^d} \approx 1$ para obtener el siguiente diagrama de bloques, implementando un control PI en un lazo externo.

de la figura 5.5 es posible obtener la siguiente función de transferencia

$$\chi(S) = \frac{g/V_g S}{S^2 + (k_{p\chi} g/V_g) S + k_{i\chi} g/V_g} d_\chi + \frac{((k_{p\chi} g/V_g) S + k_{i\chi} g/V_g)}{S^2 + (k_{p\chi} g/V_g) S + k_{i\chi} g/V_g} \chi^d$$

con el siguiente polinomio característico

$$S^2 + (k_{p\chi} g/V_g) S + k_{i\chi} g/V_g = 0 \quad (5.13)$$

de la figura 5.5 la función de transferencia tiene la siguiente forma

$$H_\chi = \frac{2\zeta_\chi \omega_{n\chi} S + \omega_{n\chi}^2}{S^2 + 2\zeta_\chi \omega_{n\chi} S + \omega_{n\chi}^2} \quad (5.14)$$

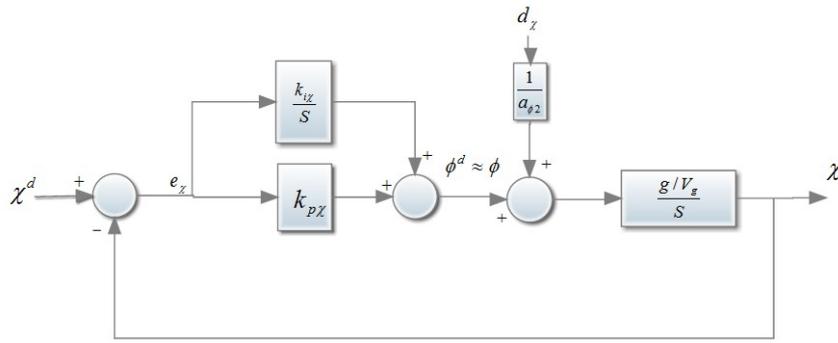


Figura 5.5: Diagrama de lazo externo para control de altura

por lo tanto igualando el polinomio característico de las ecuaciones 5.13 y 5.14 tenemos

$$\begin{aligned}\omega_{n\chi}^2 &= g/V_g k_{i\chi} \\ 2\zeta_{\chi}\omega_{n\chi} &= g/V_g k_{p\chi}\end{aligned}$$

resolviendo para nuestras ganancias

$$k_{p\chi} = 2\zeta_{\chi}\omega_{n\chi}V_g/g \quad (5.15)$$

$$k_{i\chi} = \omega_{n\chi}^2 V_g/g \quad (5.16)$$

Cabe mencionar que para obtener un correcto funcionamiento es importante que el ancho de banda del lazo interno y el lazo externo estén suficientemente separados, Para lograr ello es posible dejar

$$\omega_{n\chi} = \frac{1}{W_{\chi}}\omega_{n\phi}$$

donde W_{χ} es un parámetro de diseño usualmente mayor a cinco[4], generalmente, mayor separación de ancho de banda requiere de una respuesta del ángulo de curso mas lenta (menor ω_{χ}), o una respuesta mas rápida en el lazo interno del alabeo, para conseguir esto se requiere de una mayor acción del alerón, lo que es imposible debido a las restricciones físicas

La salida del lazo del ángulo de curso esta dada por

$$\phi^d = k_{p\chi} (\chi^d - \chi) + \frac{k_{i\chi}}{s} (\chi^d - \chi) \quad (5.17)$$

5.6. Resultados de Simulación

En esta sección se muestran los resultados de la simulación implementada en matlab probando las leyes de control planteadas en este capítulo, junto con el modelo matemático de la aeronave y las perturbaciones ambientales presentado en los capítulos previos. Todos los controles son usados de manera simultanea.

Variable	Valor inicial
P_n	0 m
P_e	0 m
$P_d = -h$	-100 m
u	17 m/s
v	0 m/s
w	0 m/s
ϕ	0 grados
θ	0 grados
ψ	0 grados
p	0 rad/s
q	0 rad/s
r	0 rad/s

Tabla 5.1: Condiciones iniciales

Ganancia	Valor
$k_{p\phi}$	3
$k_{d\phi}$	0.1985
$k_{i\phi}$	1
$k_{p\chi}$	0.8788
$k_{i\chi}$	0.1739
$k_{p\theta}$	-3
$k_{d\theta}$	-1.1618
$k_{\theta_{DC}}$	0.7979
k_{ph}	0.016
k_{ih}	0.0016
k_{pV}	0.3121
k_{iV}	1.0549

Tabla 5.2: Ganancias del control

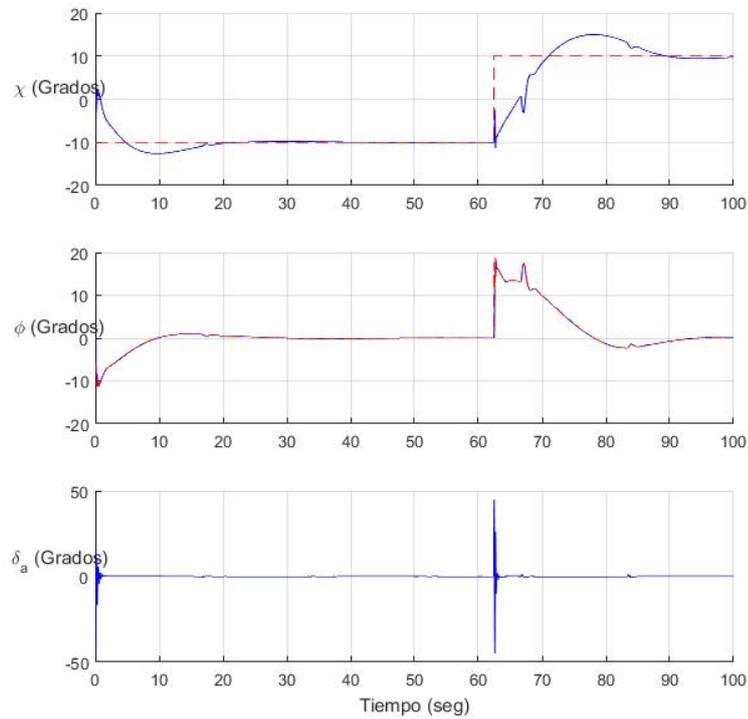


Figura 5.6: Respuesta del control lateral del VANT

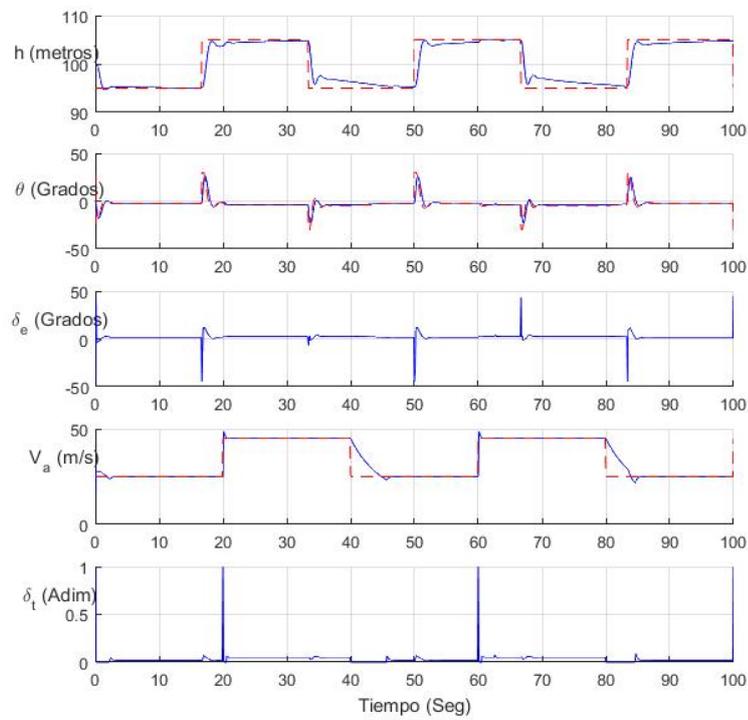


Figura 5.7: Respuesta del control longitudinal del VANT

5.6.1. Análisis de resultados obtenidos

En las tablas 5.6 y 5.6 se muestran las condiciones iniciales de la simulación y las ganancias calculadas respectivamente.

Como se muestra en las figuras 5.6 y 5.7 se observa que aproximadamente en el rango de los 60 a 70 segundos tenemos un cambio en la guiñada, que es debido a que el control debe cambiar la altura del VANT, esto se explica debido a que la aeronave se encuentra en una transición de ángulo curso χ que ocasiona que el ángulo de alabeo no sea cero, por lo tanto el efecto del elevador cuando se encuentra virando la aeronave, también afecta el ángulo de curso, el control soluciona esto con el elevador para mantener la altura y una breve actuación de los alerones para corregir el cambio de curso.

Las referencias en el control son variadas mediante una señal cuadrada a distintas frecuencias, estas son la altura, la velocidad y el ángulo de curso de la aeronave. En las figuras 5.6 y 5.7 se muestran con líneas punteadas las variables deseadas a alcanzar..

Seguimiento de Trayectorias

En este capítulo se mostrarán las leyes para navegación para el seguimiento de segmentos rectos y órbitas con altura constante. Uno de los principales retos en la navegación es el viento en el cuál se describe entre un 20 y 60 por ciento de la velocidad del VANT y el radio mínimo de viraje de un VANT esta entre 10 a 50 metros. Por lo tanto es importante que la estrategia de navegación emplee el uso de la capacidad de la aeronave lo mejor posible. El objetivo es desarrollar un método para un seguimiento de trayectorias aún en presencia de viento. Para este capítulo se asumirá que el VANT se mueve con una velocidad aérea constante.

6.1. Seguimiento de Recorridos Rectos

Un segmento recto a recorrer por el VANT será definido como

$$P_{\text{línea}}(r, q) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r + \lambda q, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

donde $r \in \mathbb{R}^3$ es el origen de la trayectoria y $q \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario que describe la dirección del trayecto. La Figura 6.1 muestra la vista superior de la trayectoria y el vuelo de la aeronave. El ángulo de curso medido desde el norte está dado por

$$\chi_q \triangleq \text{atan2} \left(\frac{q_e}{q_n} \right), \quad (6.1)$$

donde $q = (q_n, q_e, q_d)^T$ expresa las componentes, norte, este y abajo del vector unitario de la dirección.

Seleccionando a r como el centro de este marco, con su eje x alineado con la dirección del trayecto y el eje z alineado con el eje z del marco inercial y el eje y para crear un sistema coordenado basado en la mano derecha, entonces tenemos la matriz de transformación del marco inercial a el marco de la trayectoria.

$$R_i^P \triangleq \begin{bmatrix} \cos \chi_q & \sin \chi_q & 0 \\ -\sin \chi_q & \cos \chi_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

expresando el error relativo al trayecto en el marco de referencia del trayecto tenemos

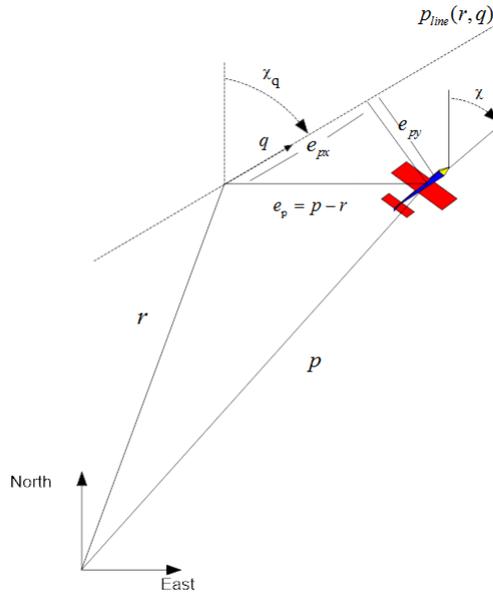


Figura 6.1: Vista superior del vuelo de la aeronave y la trayectoria deseada expresada como $P_{\text{línea}}(r, q)$

$$e_p = \begin{pmatrix} e_{px} \\ e_{py} \\ e_{pz} \end{pmatrix} \triangleq R_i^P (p^i - r^i).$$

Por lo tanto la dinámica del error en el plano Norte-este inercial, expresado en el marco de referencia del trayecto está dado por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_{px} \\ \dot{e}_{py} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \chi_q & \sin \chi_q \\ -\sin \chi_q & \cos \chi_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_g \cos \chi \\ V_g \sin \chi \end{pmatrix} \\ &= V_g \begin{pmatrix} \cos(\chi - \chi_q) \\ \sin(\chi - \chi_q) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Para el seguimiento del trayecto, se desea llevar el error de trayectoria cruzada e_{py} a cero mediante comandar el ángulo de curso de la aeronave. La dinámica relevante por lo tanto está dada por

$$\dot{e}_{py} = V_g \sin(\chi - \chi_q) \quad (6.3)$$

$$\ddot{\chi} = b_{\dot{\chi}}(\dot{\chi}_d - \dot{\chi}) + b_{\chi}(\chi_d - \chi). \quad (6.4)$$

El problema entonces es seleccionar un χ_d tal que $e_{py} \rightarrow 0$ cuando χ_q es conocida.

Para calcular la altura deseada del seguimiento es necesario proyectar el vector relativo de trayectoria del avión en el plano vertical de la trayectoria. Escribimos la proyección de e_p como S y usando triángulos semejantes como se muestra en la Figura 6.2 es posible determinar

$$\frac{h_d + r_d}{\sqrt{S_n^2 + S_e^2}} = \frac{-q_d}{\sqrt{q_n^2 + q_e^2}}.$$

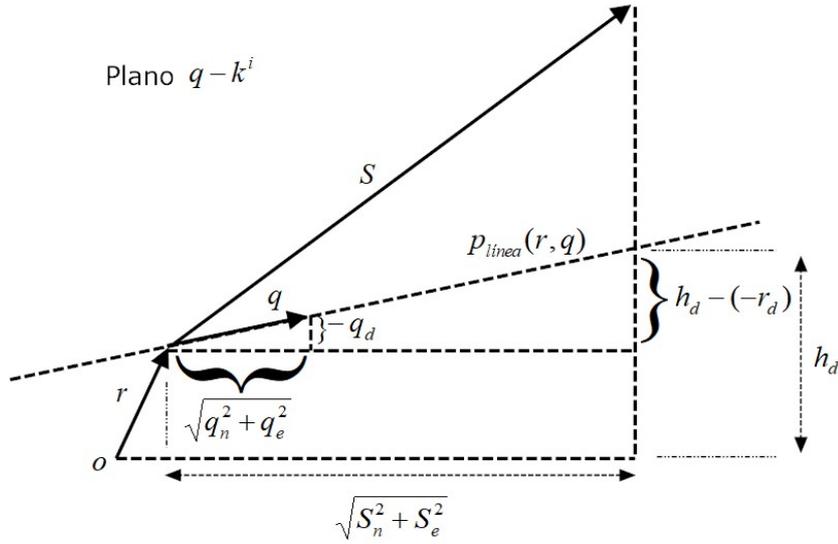


Figura 6.2: Plano vertical de la trayectoria

La proyección de S al vector relativo del error está definido como

$$\begin{aligned} S^i &= \begin{pmatrix} S_n \\ S_e \\ S_d \end{pmatrix} \\ &= e_p^i - (e_p^i \cdot n)n \end{aligned}$$

donde

$$e_p^i = \begin{pmatrix} e_{pn} \\ e_{pe} \\ e_{pd} \end{pmatrix} \triangleq p^i - r^i = \begin{pmatrix} P_n - r_n \\ P_e - r_e \\ P_d - r_d \end{pmatrix}$$

el vector normal al plano $q - k^i$ es calculado como

$$n = \frac{q \times k^i}{\|q \times k^i\|}$$

La altura deseada en $P_{\text{línea}}(r, q)$ esta definida entonces como

$$h_d(r, p, q) = -r_d - \sqrt{(r_n - P_n)^2 + (r_e - P_e)^2} \left(\frac{q_d}{\sqrt{q_n^2 + q_e^2}} \right) \quad (6.5)$$

Dado que la dinámica de la altitud está gobernada por

$$\ddot{h} = b_{\dot{h}}(\dot{h}_d - \dot{h}) + b_h(h_d - h) \quad (6.6)$$

El punto es seleccionar una altura h_d tal que $h \rightarrow h_d(r, q, p)$.

Con la altura deseada definida por 6.5 y la dinámica de la altura definida por 6.6 se sabe del capítulo anterior que el control será estable.

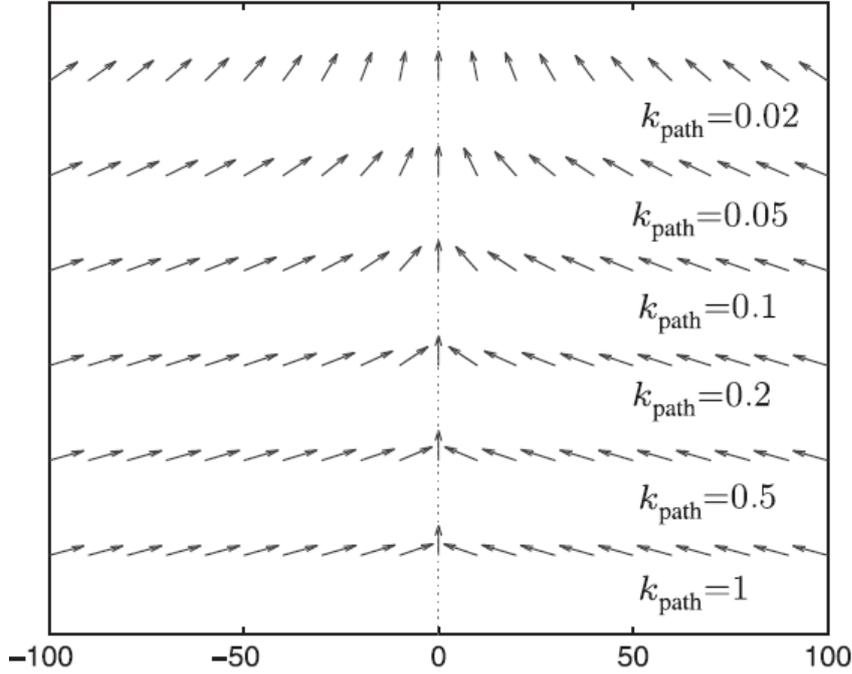


Figura 6.3: Campo vectorial para distintos valores de k_{path}

6.1.1. Estrategia de Orientación Lateral para el Seguimiento de una Línea Recta

El objetivo en esta sección es seleccionar χ_d en la ecuación 6.4 tal que $e_{py} \rightarrow 0$ asintóticamente. Esta estrategia se basa en construir un ángulo de recorrido en cada punto especial con respecto a la trayectoria de la línea recta que resulte en el que el VANT se mueva hacia la trayectoria.

El conjunto de ángulos de curso deseados en cada punto se llamará campo vectorial[22], porque el ángulo de curso deseado es especificado por un vector unitario y relativo a la trayectoria recta a seguir.

El paso siguiente es construir un campo vectorial tal que cuando e_{py} es grande, el VANT sea dirigido para acercarse al trayecto.

$$\chi_d(e_{py}) = \chi^\infty \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(k_{\text{path}} e_{py}) \quad (6.7)$$

donde k_{path} es una constante positiva que influye en la naturaleza del campo vectorial para cambiar la dirección de χ^∞ a cero. La Figura 6.3 muestra que a mayores valores de k_{path} la transición es mas lenta. Si χ^∞ está restringido en $\chi^\infty \in (0, \frac{\pi}{z}]$ entonces

$$-\frac{\pi}{2} < \chi^\infty \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(k_{\text{path}} e_{py}) < \frac{\pi}{2}$$

para todos los valores de e_{py} . Por lo tanto, ya que $\tan^{-1}(\cdot)$ es una función impar y $\sin(\cdot)$ es impar en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podemos usar la siguiente función candidata de Lyapunov para verificar que

existe una atracción hacia la trayectoria deseada como en [19]

$$W(e_{py}) = \frac{1}{2}e_{py}^2$$

para argumentar que si $\chi = \chi_q + \chi_d(e_{py})$ entonces $e_{py} \rightarrow 0$ asintóticamente, ya que expandiendo la ecuación 6.3 tenemos

$$\begin{aligned}\dot{e}_{py} &= -V_g \sin(\chi_q) \cos(\chi) + V_g \cos(\chi_q) \sin(\chi) \\ &= V_g \sin(\chi - \chi_q) \\ &= V_g \sin(\chi_d(e_{py}))\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{W} &= e_{py} \dot{e}_{py} \\ &= V_g e_{py} \sin\left(-\chi^\infty \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(k_{\text{path}} e_{py})\right) \\ &= -V_g e_{py} \sin\left(\chi^\infty \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(k_{\text{path}} e_{py})\right)\end{aligned}$$

ahora si $\dot{W} < 0 \forall e_{py} \neq 0$ el comando para el seguimiento esta dado por

$$\chi^c(t) = \chi_q - \chi^\infty \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(k_{\text{path}} e_{py}) \quad (6.8)$$

Notar que es posible que mediante el uso de la ecuación 6.8 pueda resultar desfavorable debido a que χ_q es calculado con la ecuación 6.10, ya que la función *atan* regresa un ángulo entre $\pm\pi$ puede darse el caso en que un valor cercano a π ocasione que la aeronave gire hacia el lado contrario. Para solucionar esto es mejor calcular χ_q usando

$$\chi_q = \text{atan2}(q_e, q_n) + 2\pi m$$

donde $m \in \mathbb{N}$ de tal forma que mantenga $-\pi \leq \chi_q - \chi \leq \pi$, así se toma en cuenta el ángulo de curso de la aeronave en el cálculo de la χ^c para hacerla virar en el sentido contrario.

6.2. Seguimiento de órbita con altura constante

En este caso una órbita se describe con un centro $c \in \mathbb{R}^3$, un radio $\rho \in \mathbb{R}^3$ y una dirección $\lambda \in \{-1, 1\}$ como

$$P_{\text{orbit}}(c, \rho, \lambda) = \{r \in \mathbb{R}^3 : r = c + \lambda \rho (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

donde $\lambda = 1$ es recorrer la órbita en el sentido de las agujas del reloj, $\lambda = -1$ indica el recorrido en sentido contrario. Asumimos que el centro de la órbita está expresado en coordenadas del marco inercial $c = (c_n, c_e, c_d)^T$ donde $-c_d$ representa la altitud deseada, entonces para mantener la altura deseada hacemos $h_d = -c_d$.

La estrategia para llevar a cabo el seguimiento de la órbita será mejor si se manejan coordenadas polares. Sea d la distancia radial desde el centro de la órbita a la aeronave y sea φ el

$$\chi_d \approx \chi^0 + \lambda \frac{\pi}{2}$$

cuando $d = \rho$ el curso deseado es ahora $\chi_d = \chi^0$ por lo tanto un candidato para campos vectoriales está dada por

$$\chi_d(d - \rho, \lambda) = \chi^0 + \lambda \tan^{-1} \left(k_{\text{orbit}} \left(\frac{d - \rho}{\rho} \right) \right) \quad (6.12)$$

con $k_{\text{orbit}} > 0$ como una constante que especifica la razón de cambio de $\frac{\lambda\pi}{2}$ a cero.

Usando una función de Lyapunov como

$$W = \frac{1}{2}(d - \rho)^2$$

para argumentar que si $\chi = \chi_d$ entonces el seguimiento está completo y recordando la dinámica dada por las ecuaciones 6.9 a la 6.11 tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{W} &= (d - \rho)\dot{d} \\ &= (d - \rho)V_g \cos(\chi - \varphi) \end{aligned}$$

sustituyendo el valor de $\varphi = \chi^0 - \lambda \frac{\pi}{2}$ introduciendo el valor de χ por el de la ecuación 6.12

$$\begin{aligned} \dot{W} &= (d - \rho)V_g \cos\left(\chi - \chi^0 + \lambda \frac{\pi}{2}\right) \\ &= (d - \rho)V_g \cos\left(\chi^0 + \lambda \tan^{-1} \left(k_{\text{orbit}} \left(\frac{d - \rho}{\rho} \right) \right) - \chi^0 + \lambda \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -(d - \rho)V_g \sin\left(\chi^0 + \tan^{-1} \left(k_{\text{orbit}} \left(\frac{d - \rho}{\rho} \right) \right) - \chi^0\right) \\ &= -V_g(d - \rho) \sin\left(\tan^{-1} \left(k_{\text{orbit}} \left(\frac{d - \rho}{\rho} \right) \right)\right) \end{aligned}$$

Lo cual resulta que $\dot{W} < 0$ e implica que $d \rightarrow \rho$ asintóticamente. Lo que resulta que un buen ángulo de curso a comandar sera dado por la siguiente ecuación

$$\chi^c(t) = \varphi + \lambda \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(k_{\text{orbit}} \left(\frac{d - \rho}{\rho} \right) \right) \right] \quad (6.13)$$

Un punto a considerar es que la posición angular φ es calculada con una rango de $\pm\pi$, por lo tanto se presentará un salto repentino de 2π en el cálculo del ángulo de curso cuando el propio ángulo de curso de la aeronave pase de $\varphi = \pi$ a $\varphi = -\pi$. Para solucionar este problema debe calcularse φ como

$$\varphi = \text{atan2}(p_e - c_e, p_n - C_n) + 2\pi m$$

donde $m \in \mathbb{N}$ y debe seleccionarse de tal manera que $-\pi \leq \varphi - \chi \leq \pi$.

6.3. Resumen de Algoritmos para seguimiento de Trayectorias

Algoritmo 1 Seguimiento de segmentos rectos

Entrada: definición de la trayectoria $r = (r_n, r_e, r_d)^T$ y $q = (q_n, q_e, q_d)^T$, la posición del VANT $P = (P_n, P_e, P_d)^T$, el ángulo de curso χ , ganancias χ_q, k_{path} .

- 1: Calcular la altura deseada h_d usando 6.5
- 2: $\chi_q \leftarrow \text{atan2}(q_e, q_n)$
- 3: **mientras** $\chi_q - \chi < -\pi$ **hacer**
- 4: $\chi_q \leftarrow \chi_q + 2\pi$
- 5: **mientras** $\chi_q - \chi > \pi$ **hacer**
- 6: $\chi_q \leftarrow \chi_q - 2\pi$
- 7: $e_{py} \leftarrow -(P_n - r_n) \sin \chi_q + (P_e - r_e) \cos \chi_q$
- 8: Calcular el ángulo de curso usando la ecuación 6.8
- 9: **devolver** h_d, χ^c

Algoritmo 2 Seguimiento de órbitas con altura constante

Entrada: centro de la órbita $c = (c_n, c_e, c_d)^T$, radio ρ y la dirección λ , la posición del VANT $P = (P_n, P_e, P_d)^T$, el ángulo de curso χ , ganancias $\chi_\infty, k_{\text{orbit}}$.

- 1: $h_d \leftarrow -c_d$
- 2: $d \leftarrow \sqrt{(P_n - c_n)^2 + (P_e - c_e)^2}$
- 3: $\varphi \leftarrow \text{atan2}(P_e - c_e, P_n - c_n)$
- 4: **mientras** $\varphi - \chi < -\pi$ **hacer**
- 5: $\varphi \leftarrow \varphi + 2\pi$
- 6: **mientras** $\varphi - \chi > \pi$ **hacer**
- 7: $\varphi \leftarrow \varphi - 2\pi$
- 8: Calcular el ángulo de curso usando la ecuación 6.13
- 9: **devolver** h_d, χ^c

6.4. Resultados de Simulación Implementando HIL

En esta sección se presenta el simulador en el que se utiliza y los resultados para validar las estrategias de seguimiento y el hardware mediante una simulación completa que implementa "hardware in the Loop". El HIL es un recurso para probar un algoritmo de control de la manera mas cercana a la realidad, como se expresa en [16] también nos permite mayor seguridad y posible ahorro de dinero al no comprometer un vehículo aéreo obteniendo una alta fidelidad en los resultados con un modelo matemático exacto y consideraciones de perturbaciones muy acertadas.

6.4.1. MAV3DSim

La plataforma de simulación está basada en en simulador CRRCSIM[7], este simulador es de código abierto lo que permite descargar desde su pagina de internet. Es un simulador que implementa el modelo matemático completo que incluye las fuerzas aerodinámicas. El simulador puede ser configurado para adaptar los coeficientes de cada aeronave en específico, posee también una representación gráfica en 3D para visualizar la posición y orientación de la aeronave. El simulador puede enviar datos simulando una central inercial, un GPS, un barómetro, un giroscopio y un acelerómetro y puede recibir los datos del control para mover las superficies de control de la aeronave. De este modo se logra crear un enlace con la pixhawk y la Odroid XU4 para lograr simular el hardware que será posteriormente usada en el prototipo.

6.4.2. Resultados de navegación de línea recta

En esta sección se muestran los resultados de navegación para el seguimiento de línea recta.

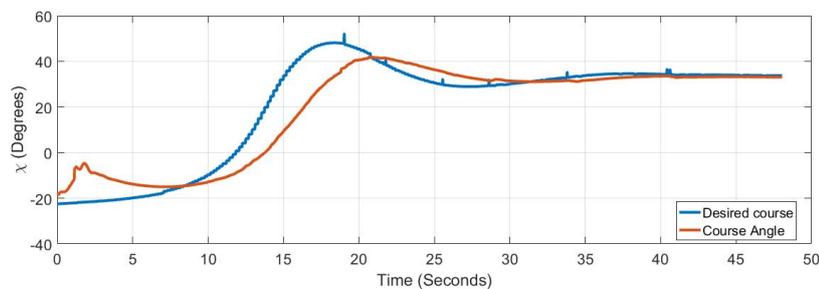


Figura 6.5: Trayectoria del VANT contra la trayectoria deseada

De la figura 6.5 se empieza la navegación del VANT, posteriormente se inicia el control que es lo que esta registrado en la gráfica, también se observa que en el segundo 2 la aeronave tiene una variación en su ángulo de curso, esto es debido a la acción del elevador mediante un viraje, como ya se observo en la simulación del capítulo pasado, el elevador en un viraje afecta el ángulo de curso χ .

De la figura 6.6 se muestra el error lateral a la trayectoria e_{py} que nos muestra la distancia que tiene el VANT con respecto a la trayectoria vista desde un plano superior. Se observa que este error tiende a cero asintóticamente como fué demostrado. Notamos que cuando el error tiende a cero el ángulo de curso de la aeronave se aproxima el ángulo de la orientación de la trayectoria.

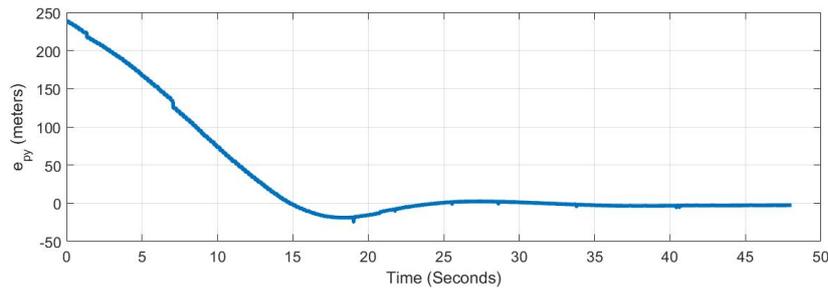


Figura 6.6: Error respecto a la trayectoria.

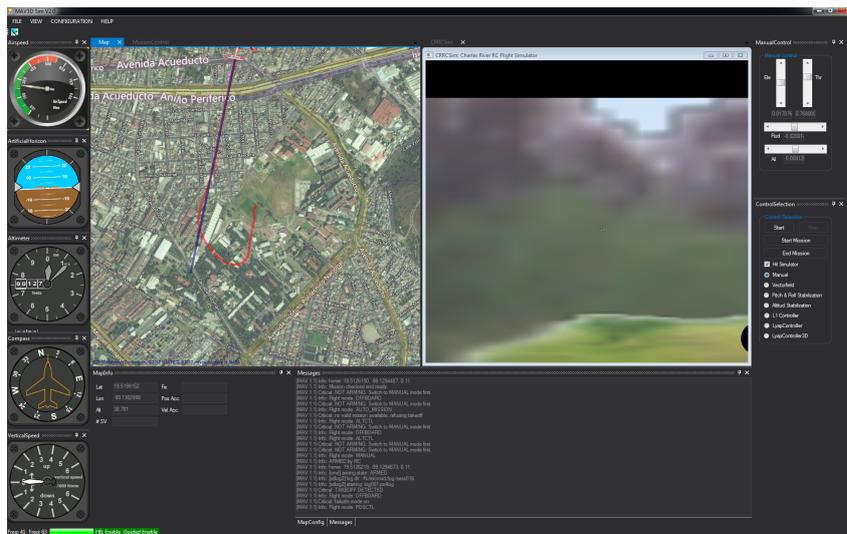


Figura 6.7: Visualización a través del simulador MAV3DSim del seguimiento de línea recta

6.4.3. Resultados de navegación de órbita

En esta sección se muestran los resultados de navegación para el seguimiento de la órbita con altura constante.

En la figura 6.8 se observa como la aeronave trata de alcanzar un ángulo para mantenerse sobre la órbita, a diferencia de la trayectoria, que el VANT tiende al ángulo de la trayectoria recta, este ángulo cambia a χ^0 de acuerdo al punto ubicado en la órbita.

En la figura 6.9 muestra el error relativo a la trayectoria, se nota una oscilación debido a los efectos del modelo longitudinal para mantener la altura requerida mientras se esta realizando un viraje.

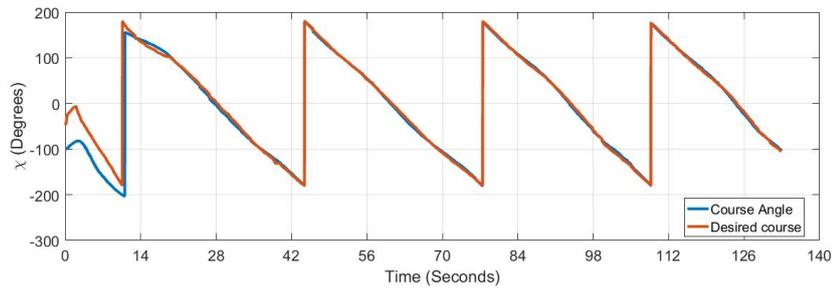


Figura 6.8: Ángulo de curso de la aeronave y ángulo de curso deseado para el seguimiento de órbitas con alturas constantes

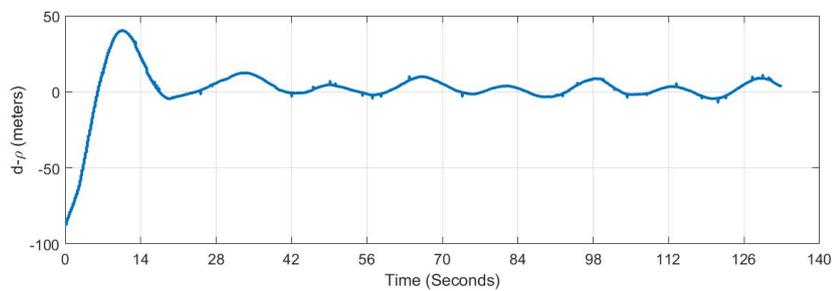


Figura 6.9: Error relativo a la trayectoria

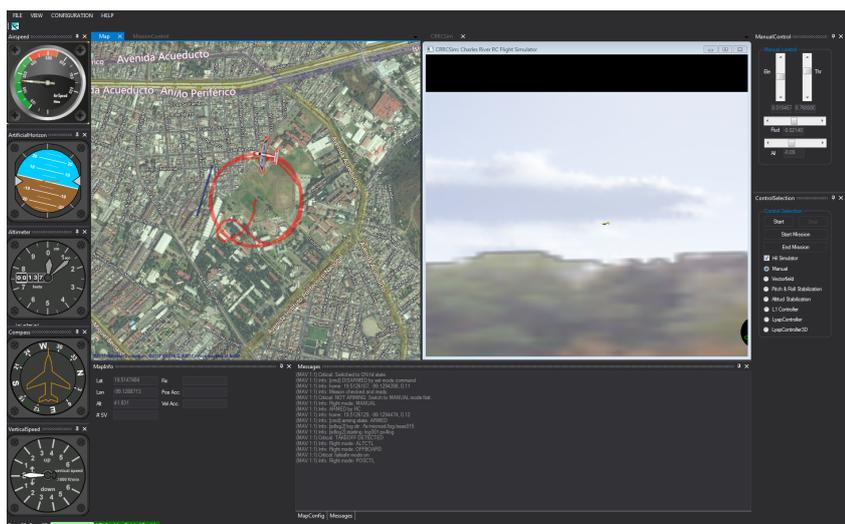


Figura 6.10: Visualización a través del simulador MAV3DSim del seguimiento de órbita

Navegación guiada por visión

Una de las razones principales del interés en vehículos autónomos no tripulados es que ofrecen una plataforma de bajo costo para poder llevar alguna cámara a bordo. Mientras que el uso de una cámara es entregar información al usuario, es posible también utilizarla como medio para la navegación y control. En este capítulo se muestra la navegación guiada a través de la visión por computadora. En la sección 7.1 se revisará el marco de coordenadas de manera similar al capítulo 2 ampliando un marco de cámara que será empleado, además se discute el modelo de la cámara y la geometría proyectiva. En la sección 7.2 se describe un algoritmo de geo-localización que estima la posición de un objeto basado en la localización y movimiento en la secuencia de vídeo.

7.1. Marco de la Cámara y Geometría proyectiva

En esta sección se asumirá que el origen del marco de la cámara está localizado en el centro de masa de la aeronave, el marco de la cámara estará denotado por $F^c = (i^c, j^c, k^c)$. Dependiendo de la rotación de la cámara con respecto al vehículo se utilizarán marcos de referencia auxiliares. Se utilizará el marco de referencia que llamaremos como marco de referencia cámara-2 y es obtenido mediante una rotación a lo largo del eje k^b un ángulo α_{az} , el cuál es llamado ángulo de acimut. La matriz de rotación del marco de referencia del cuerpo al de la cámara-2 está definido por

$$R_b^{c2}(\alpha_{az}) \triangleq \begin{bmatrix} \cos \alpha_{az} & \sin \alpha_{az} & 0 \\ -\sin \alpha_{az} & \cos \alpha_{az} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Otro marco auxiliar a emplear será el marco de referencia de cámara-1 que será obtenido mediante la rotación a lo largo del eje j^{c2} por un ángulo de α_{el} , el cual es llamado ángulo de elevación. Un ángulo de elevación negativo mueve la cámara hacia la tierra. La rotación del marco de referencia de la cámara-2 hacia la cámara-1 está definida por la matriz de rotación

$$R_{c2}^{c1}(\alpha_{el}) \triangleq \begin{bmatrix} \cos \alpha_{el} & 0 & -\sin \alpha_{el} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_{el} & 0 & \cos \alpha_{el} \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Por lo tanto la matriz de rotación que lleva desde el marco del cuerpo al de la cámara-1 está definido como

$$R_b^{c1} = R_{c2}^{c1}(\alpha_{el})R_b^{c2}(\alpha_{az}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{el} \cos \alpha_{az} & \cos \alpha_{el} \sin \alpha_{az} & -\sin \alpha_{el} \\ -\sin \alpha_{az} & \cos \alpha_{az} & 0 \\ \sin \alpha_{el} \cos \alpha_{az} & \sin \alpha_{el} \sin \alpha_{az} & \cos \alpha_{el} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Es común en la literatura de visión por computadora que se opte por alinear los ejes del marco de referencia de la cámara de tal forma que i^c apunte hacia la derecha dentro de la imagen, el eje j^c hacia abajo y el eje k^c apunte a lo largo del eje óptico. Por lo tanto la matriz de transformación que permita pasar del marco de referencia cámara-1 al de la cámara está dado por

$$R_{c1}^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

7.1.1. El modelo de la cámara

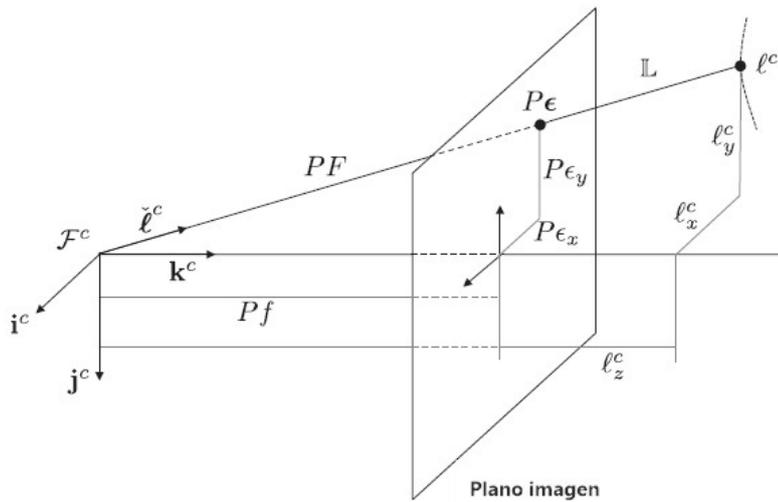


Figura 7.1: Marco de la cámara. La posición en píxeles (0,0) corresponde al centro de la imagen, el cual se asume que está alineado con el eje óptico

De la imagen 7.1 f muestra la distancia focal en unidades de píxeles, mientras que P nos permite convertir de unidades de píxeles a metros. Ahora si el ancho de píxeles es M y el campo de visión v de la cámara es conocida entonces tenemos que la distancia focal puede ser expresada como en [28]

$$f = \frac{M}{2 \tan\left(\frac{v}{2}\right)}. \quad (7.5)$$

La localización de la proyección del objeto de interés está por lo tanto expresado en el marco de referencia de la cámara como $(P_{\epsilon_x}, P_{\epsilon_y}, Pf)$, donde $(\epsilon_x$ y $\epsilon_y)$ son la ubicación del pixel de el objeto. La distancia del origen del marco de la cámara a la del la localización del pixel (ϵ_x, ϵ_y) , es entonces PF donde

$$F = \sqrt{f^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}. \quad (7.6)$$

Y utilizando triángulos semejantes en la imagen 7.1 podemos obtener la siguiente relación

$$\frac{l_x^c}{L} = \frac{P\epsilon_x}{PF} = \frac{\epsilon_x}{F}. \quad (7.7)$$

De manera similar están las siguientes igualdades $i_y^c/L = \epsilon_y/F$ y $i_z^c/L = f/F$ combinando ambas es posible obtener la siguiente ecuación

$$l^c = \frac{L}{F} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ f \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

donde l es el vector que va hacia nuestro objeto de interés y $L = \|l\|$. Notar que el vector l^c no puede ser obtenido de manera directa unicamente con la cámara ya que la distancia L es desconocida. Este será el problema a tratar en la siguiente sección con la geo-localización de un objeto empleando una cámara. Sin embargo, es posible determinar un vector unitario que indique la dirección hacia éste empleando la siguiente ecuación

$$\frac{l^c}{L} = \frac{1}{F} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{f^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ f \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

siendo el vector unitario l^c/L un vector que desempeña un rol importante se opta por darle la siguiente notación

$$\hat{l} \triangleq \begin{pmatrix} \hat{l}_x \\ \hat{l}_y \\ \hat{l}_z \end{pmatrix} \triangleq \frac{l^c}{L}$$

que indica el vector unitario cuya dirección apunta hacia el objeto de interés desde el origen del marco de la cámara.

7.2. Geo-localización

En esta sección se presenta un método para determinar la ubicación de un objeto en coordenadas inerciales usando una cámara a bordo del vehículo de ala fija. Se asume que se conoce la posición del vehículo mediante el uso del GPS. De acuerdo a las sección previa se tiene que $l = P_{obj}^i - P_{VANT}^i$ es la posición relativa entre el VANT y el objeto de interés, y definiendo $L = \|l\|$, entonces, tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} P_{obj}^i &= P_{VANT}^i + R_b^i R_{c1}^b R_c^{c1} i^c \\ &= P_{VANT}^i + L(R_b^i R_{c1}^b R_c^{c1} \hat{i}^c), \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde $P_{VANT}^i = (p_n, p_e, p_d)^T$, $R_b^i = R_b^i(\phi, \theta, \psi)$, $R_{c1}^b = R_{c1}^b(\alpha_{el}, \alpha_{az})$. El único elemento ubicado en parte derecha de la ecuación 7.2 que no es conocida es L . por lo tanto el problema de geo-localización se reduce a la estimación de la distancia L .

7.2.1. Estimación de L mediante la suposición de tierra plana.

Si las mediciones de la altura de la aeronave están disponibles, entonces es posible implementar una simple estrategia para estimar L , la cual implica la suposición de tierra plana, implementada en [3] La figura 7.2 muestra un simple esquema de un plano horizontal y su

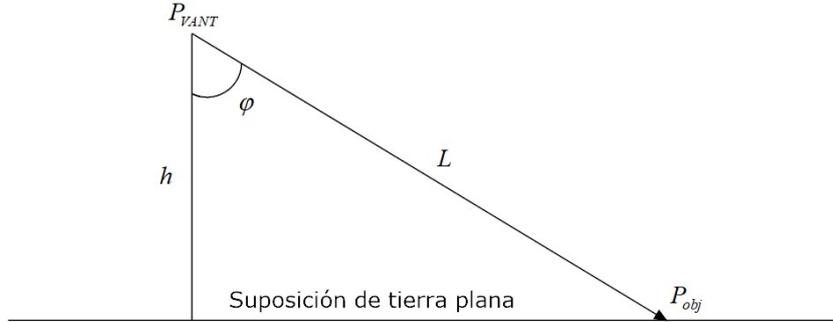


Figura 7.2: Suposición de tierra plana para geo-localización

relación con un objeto en tierra que puede ser descrito mediante la siguiente ecuación

$$L = \frac{h}{\cos \varphi}$$

donde

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= k^i \cdot \hat{i}^i \\ &= k^i \cdot R_b^i R_{c1}^b R_c^{c1} \hat{i}^c \end{aligned}$$

y por lo tanto la estimación de L queda expresado por

$$L = \frac{h}{k^i \cdot R_b^i R_{c1}^b R_c^{c1} \hat{i}^c} \quad (7.11)$$

Ahora combinando las ecuaciones 7.2 y 7.11 tenemos que

$$P_{obj}^i = P_{VANT}^i + h \frac{R_b^i R_{c1}^b R_c^{c1} \hat{i}^c}{k^i \cdot R_b^i R_{c1}^b R_c^{c1} \hat{i}^c} \quad (7.12)$$

Sin embargo la ecuación 7.12 es altamente sensible al ruido (de los sensores) que genera error, por lo que es necesario implementar algún filtro que reduzca este error, para solucionar este problema se optó por implementar un filtro extendido de kalman, este es presentado en la siguiente sección

7.2.2. Geo-localización implementando un filtro extendido de kalman

Reescribiendo la ecuación 7.12 para despejar la ubicación del objeto tenemos que

$$P_{VANT}^i = P_{obj}^i - L (R_b^i R_{c1}^b R_c^{c1} \hat{i}^c) \quad (7.13)$$

considerando que el objeto permanecerá en reposo tenemos que

$$\dot{P}_{obj}^i = 0$$

además considerando que $L = \|P_{obj} - P_{VANT}\|$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{d}{dt} \sqrt{(P_{obj} - P_{VANT})^T (P_{obj} - P_{VANT})} \\ &= \frac{(P_{obj} - P_{VANT})^T (\dot{P}_{obj} - \dot{P}_{VANT})}{L} \\ &= - \frac{(P_{obj} - P_{VANT})^T (\dot{P}_{VANT})}{L} \end{aligned}$$

y para un control de orbita con altura constante indica que no hay cambio en la altura por lo tanto el modelo del VANT queda

$$\dot{P}_{obj}^i = \begin{pmatrix} V_g \cos \chi \\ V_g \sin \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

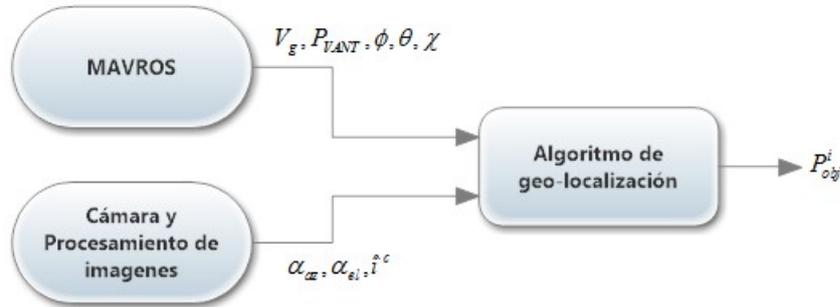


Figura 7.3: Esquema del algoritmo de geo-localización

En la figura 7.3 se muestra el esquema que emplea el algoritmo donde se obtiene las mediciones de orientación y posición del vehículo a través del protocolo comunicación de MAVLINK en ROS conocido como MAVROS, que publica las señales de la imu y el GPS ya filtradas para una estimación mas adecuada.

Para implementar el filtro extendido de kalman se elige como estado a estimar

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{obj}^i \\ \hat{L} \end{pmatrix}$$

La ecuación de predicción dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{P}}_{obj}^i \\ \dot{\hat{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{(P_{obj} - P_{VANT})^T (\dot{P}_{VANT})}{L} \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\cdot^i T}{\hat{P}_{VANT} \hat{L}} & \frac{(\hat{P}_{obj}^i - \hat{P}_{VANT}^i)^T \hat{P}_{VANT}^{\cdot^i}}{\hat{L}^2} \end{bmatrix}$$

La ecuación de salida está dada por la ecuación 7.13 y su matriz jacobiana esta definido por

$$\frac{\partial h}{\partial x} = (I \quad R_b^i R_{c1}^b R_c^{c1} \hat{j}^c)$$

En el siguiente algoritmo se muestra como implementar el filtro extendido de Kalman discreto-continuo

Algoritmo 3 Continuo-discreto filtro extendido de Kalman

- 1: Inicializamos $\hat{x} = x_0$
 - 2: Seleccionamos una tasa de muestreo T_s menor a la de los sensores
 - 3: Por cada tasa de muestreo T_s
 - 4: **para** $i = 1$ hasta N **hacer**
 - 5: $\hat{x} = \hat{x} + \frac{T_s}{N} f(\hat{x}, u)$
 - 6: $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u)$
 - 7: $P = P + \frac{T_s}{N} (AP + PA^T + Q)$
 - 8: **si** la medición es recibida por algun sensor i **entonces**
 - 9: $C_i = \frac{\partial h_i}{\partial x}(\hat{x}, u[n])$
 - 10: $L_i = PC_i^T (R_i + C_i PC_i^T)^{-1}$
 - 11: $P = (I - L_i C_i) P$
 - 12: $\hat{x} = \hat{x} + L_i (y_i[n] - h(\hat{x}, u[n]))$
 - 13: **devolver** \hat{x}
-

Resultados, conclusión y trabajo futuro

Este capítulo describe la plataforma experimental y los resultados obtenidos con las leyes de navegación y control mostradas a lo largo de esta tesis. Se termina concluyendo los resultados finales mostrando el trabajo futuro por realizar con esta tesis como base.

8.1. Plataforma experimental

La plataforma experimental consta de una aeronave de ala fija bixler 3, esta plataforma cuenta con un autopiloto denominado Pixfalcon que es el encargado de recibir la información de los sensores y calcular el control. También se cuenta con una computadora de compañía Odroid XU-4 que es la encargada de realizar el procesamiento de imágenes para realizar el algoritmo de geo-localización descrito en el capítulo 7, además de implementar los algoritmos de navegación mediante los campos vectoriales descritos en el capítulo 6.

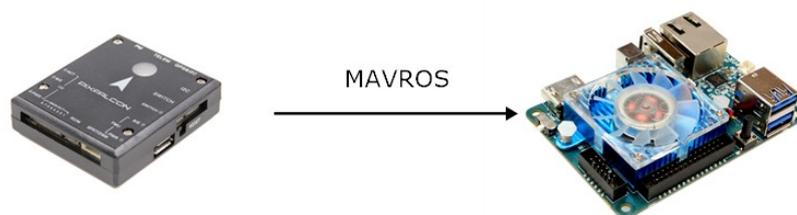


Figura 8.1: Esquema de comunicación mediante mavros entre la pix falcon y la computadora de compañía odroid XU4

La ventaja de utilizar mavros para intercomunicar la computadora odroid con la pixfalcon reside en que la odroid realiza el trabajo de procesamiento mas pesado, de esta manera la pix-falcon se dedica unicamente al procesamiento del control de la aeronave.

8.2. Resultados de Navegación del vehículo

Se muestra a continuación los resultados obtenidos mediante el uso de la plataforma experimental.

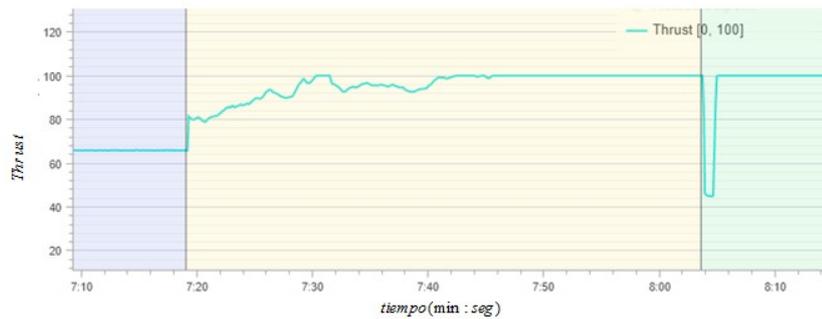


Figura 8.2: Thrust(Empuje) aplicado durante el control de altura.

En la Figura 8.2 se muestra la manipulación del propulsor en una escala de 0 a 100 donde 100 representa la máxima capacidad de empuje del motor.

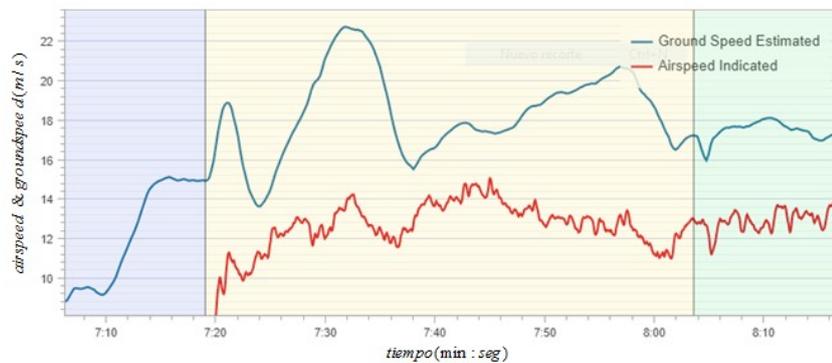


Figura 8.3: Velocidad aérea y terrestre durante el vuelo.

En la Figura 8.3 se muestra la velocidad aérea(airspeed) y la velocidad terrestre (groundspeed) obtenida mediante el uso del GPS y el Tubo Pitot, notamos la mayor magnitud de la velocidad terrestre sobre la aérea debido a posiblemente la dirección del viento.

En la Figura 8.4 se muestra la altura expresada en el marco de coordenadas inercial NED, muestra que a pesar del control es muy difícil mantener el vuelo, como se mostró en resultados de simulación en los capítulos previos el cambio de altura también es ocasionado por cambios en el ángulo de alabeo y cambios en la velocidad sin mencionar corrientes de aire presentes en el ambiente.

Como se muestra en la Figura 8.5 el ángulo de cabeceo es controlado para mantener la altura adecuada, es notable que por convención de ángulos, un ángulo de cabeceo negativo indica que la nariz de la aeronave apunta hacia arriba.

Finalmente en la Figura 8.6 se trata de mantener en cero grados pero por efectos del viento la aeronave se ve afectada al cambiar su propio curso lo que cambia el ángulo de alabeo.

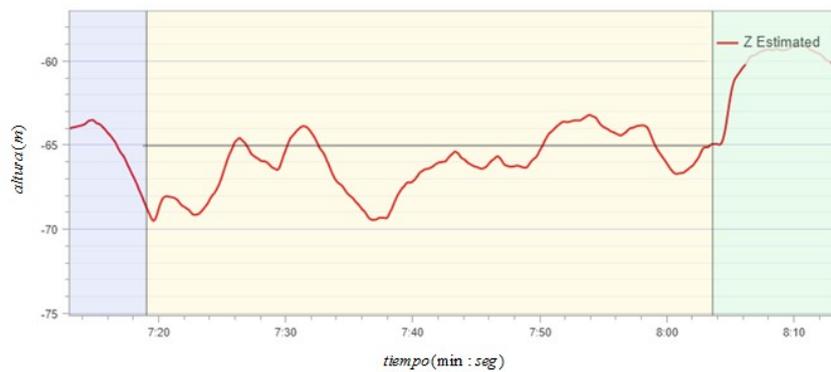


Figura 8.4: Altura del vuelo, recordar que en el marco de referencia inercial la componente abajo negativa indica una altura positiva.



Figura 8.5: Ángulo de cabeceo de la aeronave durante el control de altura.

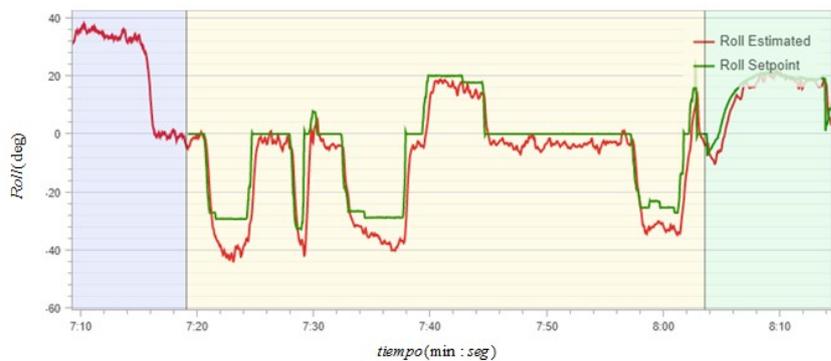


Figura 8.6: Ángulo de alabeo de la aeronave

8.3. Conclusión

Durante este trabajo de tesis se abordó la problemática de la navegación de un vehículo de ala fija, dicho vehículo está fuertemente relacionado al estudio aerodinámico que describen las fuerzas y momentos que actúan sobre él, por lo tanto, para diseñar una ley de control que aproveche estas características es necesario tener un conocimiento general de su comportamiento en vuelo, como lo son los efectos del viento sobre vehículos de envergadura de 2 a 5 metros, que a diferencia de la gran literatura aeronáutica que desprecian el efecto del triángulo del viento en

aviones comerciales, es mostrado en resultados que no se puede despreciar este efecto.

Además de la consideración del triángulo del viento para el modelado del vehículo aéreo, al momento de diseñar el control se suele considerar dos modelos matemáticos para describir el VANT, estos son el modelo longitudinal y lateral del vehículo, sin embargo los resultados muestran que los efectos de un modelo longitudinal afectan al modelo lateral y viceversa para llevar a cabo un viraje, mantener una altura o realizar un ascenso o descenso.

Los resultados de hardware in the loop permiten obtener un buen desempeño de las leyes de control y navegación antes de implementar en la plataforma, de esta manera se logra salvaguardar la aeronave de un posible accidente que pueda comprometer a alguna persona.

Durante este trabajo se desarrolló la navegación mediante campos vectoriales, para obtener referencias de acuerdo a la posición del VANT con respecto a la trayectoria a seguir, sumando al modelado del vehículo los efectos del triángulo de viento es posible obtener un resultado mucho más adecuado para el seguimiento.

El seguimiento de trayectorias mediante segmentos rectos y órbitas fácilmente puede ser extendido al seguimiento de trayectorias formados por dubins.

8.4. Trabajo futuro

- Realizar un seguimiento de trayectorias agregando un administrador de trayectorias y un generador de trayectorias, para realizar un vuelo mucho más preciso capaz de realizar misiones de mayor alcance y en zonas urbanas
- Implementar un algoritmo de visión para realizar fusión de datos con la central inercial y el horizonte captado por la cámara, para obtener un control de orientación más fiable.
- Realizar misiones que implementen trayectorias basadas en dubins que permitan un aterrizaje mediante visión.
- Realizar un algoritmo que permita mediante un sistema de cámaras estéreo la estimación del tiempo de impacto con un objeto cercano para así evitar dicho impacto cambiando el curso de la aeronave.
- Extender el algoritmo de geo-localización para objetos con movimiento acelerado y objetos aéreos.
- Modificar la estructura de la aeronave para un aterrizaje y despegue vertical.

DERIVACIÓN DE UN VECTOR

En el proceso de obtención de las ecuaciones de movimiento de un VANT, es necesario calcular las derivadas de vectores con respecto al tiempo en marcos de referencias que se mueven con respecto a otros. Por ejemplo, dos marcos de referencia como se muestra en la Figura A.1, en el caso de un VANT se puede suponer que F^i representa el marco inercial y F^b el marco del cuerpo, por lo tanto es necesario obtener la derivada con respecto al tiempo de p vista desde el marco F^i , tomando en cuenta que el vector p se mueve sobre el marco de referencia F^b y que F^b esta unicamente rotando con respecto a F^i , para llevar a cabo la derivada, denotamos la velocidad angular de F^b expresada en F^i como $\omega_{b/i}$ y expresando el vector p en sus componentes obtenemos

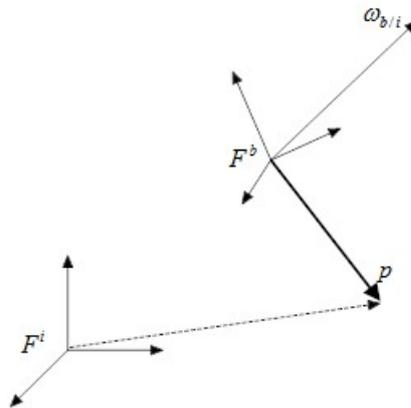


Figura A.1: Transformación del vector p en dos marcos de referencia.

$$p = p_x i^b + p_y j^b + p_z k^b \quad (\text{A.1})$$

la derivada con respecto al tiempo de p expresado en el marco F^i puedes ser obtenida derivando la ecuación anterior para obtener

$$\frac{d}{dt_i} p = \dot{p}_x i^b + \dot{p}_y j^b + \dot{p}_z k^b + p_x \frac{d}{dt_i} i^b + p_y \frac{d}{dt_i} j^b + p_z \frac{d}{dt_i} k^b \quad (\text{A.2})$$

donde $\frac{d}{dt_i}$ representa la derivada temporal respecto a F^i . Los tres primeros términos de la ecuación A.2 muestran la razón de cambio de p como si fueran visto por un observador en el marco

de referencia f^b , considerando la rotación de f^b con respecto a f^i podemos denotar esta derivada local como

$$\frac{d}{dt_b} p = \dot{p}_x i^b + \dot{p}_y j^b + \dot{p}_z k^b \quad (\text{A.3})$$

Los siguientes tres términos de la ecuación A.2 nos muestran la razón de cambio de p debido a la rotación de f^b relativo a f^i , y dado que i^b, j^b y k^b están fijos en el marco f^b sus derivadas pueden calcularse como en [17]

$$\begin{aligned} \dot{i}^b &= \omega_{b/i} \times i^b \\ \dot{j}^b &= \omega_{b/i} \times j^b \\ \dot{k}^b &= \omega_{b/i} \times k^b \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ahora podemos escribir los tres últimos términos como

$$p_x \dot{i}^b + p_y \dot{j}^b + p_z \dot{k}^b = p_x (\omega_{b/i} \times i^b) + p_y (\omega_{b/i} \times j^b) + p_z (\omega_{b/i} \times k^b) = \omega_{b/i} \times p \quad (\text{A.5})$$

finalmente utilizando las ecuaciones A.3, A.4 A.5 podemos obtener el resultado deseado.

$$\frac{d}{dt_i} p = \frac{d}{dt_b} p + \omega_{b/i} \times p \quad (\text{A.6})$$

Algoritmo de visión por computadora

A continuación se muestra el algoritmo empleado para la detección de un objeto mediante su color, las operaciones son mostradas a detalle en [8]

Algoritmo 4 Detección de un objeto por color azul,

- 1: Se inicia la lectura de la cámara.
 - 2: Se realiza una transformación de espacio de RGB a HSV.
 - 3: Realizar una umbralización con los parámetros $HSV_{min} = [110, 50, 50]$ y $HSV = [130, 255, 255]$ para el color azul.
 - 4: Implementar una operaciones morfológica de apertura y cerradura para eliminar el ruido no deseado.
 - 5: Encontrar los contornos.
 - 6: **si** la longitud de los contornos es mayor a cero **entonces**
 - 7: Encontrar el área del contorno mas grande.
 - 8: Utilizar esta área para hallar su centroide mediante la operación de momentos invariantes.
 - 9: **devolver** coordenadas del centroide en pixeles C_x, C_y
-

ApéndiceC

Publicación

A lo largo de este trabajo de tesis se logró realizar la siguiente publicación de congreso:

- A. Flores, I. Lugo, I. González, R. Lozano, Vector Field Guidance Law for Fixed Wing UAV, 21st International Conference on System Theory, Control and Computing, aceptado para publicación el 13 de Julio de 2017.

Bibliografía

- [1] Ira Herbert Abbott and Albert Edward Von Doenhoff. *Theory of wing sections, including a summary of airfoil data*. Courier Corporation, 1959.
- [2] U.S. air force. Mq-9 reaper. <http://www.af.mil/About-Us/Fact-Sheets/Display/Article/104470/mq-9-reaper/>, 2017.
- [3] D Blake Barber, Joshua D Redding, Timothy W McLain, Randal W Beard, and Clark N Taylor. Vision-based target geo-location using a fixed-wing miniature air vehicle. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 47(4):361–382, 2006.
- [4] Randal W Beard. Embedded uas autopilot and sensor systems. *Encyclopedia of Aerospace Engineering*, 2010.
- [5] Randal W Beard and Timothy W McLain. *Small unmanned aircraft: Theory and practice*. Princeton university press, 2012.
- [6] Michael V Cook. *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann, 2012.
- [7] CRRCsim-community. Crrcsim. <http://sourceforge.net/apps/mediawiki/crrcsim>, 2014.
- [8] Erik Cuevas, Daniel Zaldívar, and Marco Pérez-Cisneros. *Procesamiento digital de imágenes usando MATLAB y Simulink*. Number 006.6 C8. 2010.
- [9] DJI. Mavic pro. <https://www.dji.com/es/mavic>, 2017.
- [10] ES Espinoza, I Lugo, Octavio Garcia, Alejandro Malo, and Rogelio Lozano. Micro helicopter-airplane system: Trajectory tracking and attitude control. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2013 International Conference on*, pages 744–753. IEEE, 2013.
- [11] Bernard Etkin and Lloyd Duff Reid. *Dynamics of flight: stability and control*, volume 3. Wiley New York, 1996.
- [12] Gerardo Flores, Israel Lugo-Cárdenas, and Rogelio Lozano. A nonlinear path-following strategy for a fixed-wing mav. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2013 International Conference on*, pages 1014–1021. IEEE, 2013.
- [13] Thor I Fossen. Mathematical models for control of aircraft and satellites. *Department of Engineering Cybernetics Norwegian University of Science and Technology*, 2011.

-
- [14] Gene F Franklin, J David Powell, and Michael L Workman. *Digital control of dynamic systems*, volume 3. Addison-wesley Menlo Park, CA, 1998.
- [15] Matt Jardin. Improving mass moment of inertia measurements. *Journal of Aircraft*, 46(3):163–775, 2009.
- [16] Dongwon Jung and Panagiotis Tsiotras. Modeling and hardware-in-the-loop simulation for a small unmanned aerial vehicle. *AIAA Infotech at Aerospace*, AIAA, pages 07–2763, 2007.
- [17] Thomas R Kane and David A Levinson. *Dynamics, theory and applications*. McGraw Hill, 1985.
- [18] Jack W Langelaan, Nicholas Alley, and James Neidhoefer. Wind field estimation for small unmanned aerial vehicles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(4):1016–1030, 2011.
- [19] Dale A Lawrence, Eric W Frew, and William J Pisano. Lyapunov vector fields for autonomous unmanned aircraft flight control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(5):1220, 2008.
- [20] I Lugo-Cárdenas, S Salazar, and R Lozano. The mav3dsim hardware in the loop simulation platform for research and validation of uav controllers. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2016 International Conference on*, pages 1335–1341. IEEE, 2016.
- [21] D Moorhouse and R Woodcock. Us military specification mil-f-8785c. *US Department of Defense*, 1980.
- [22] Derek R Nelson, D Blake Barber, Timothy W McLain, and Randal W Beard. Vector field path following for small unmanned air vehicles. In *American Control Conference, 2006*, pages 7–pp. IEEE, 2006.
- [23] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [24] Warren F Phillips. *Mechanics of flight*. John Wiley & Sons, 2004.
- [25] SEMAR. Simevant. <http://www.semar.gob.mx/simevant/>, 2017.
- [26] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*, volume 3. Wiley New York, 2006.
- [27] Robert F Stengel. *Flight dynamics*. Princeton University Press, 2015.
- [28] Emanuele Trucco and Alessandro Verri. *Introductory techniques for 3-D computer vision*, volume 201. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1998.
- [29] Thomas R Yechout. *Introduction to aircraft flight mechanics*. Aiaa, 2003.