



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO  
PROGRAMA SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN AÉREA Y SUBMARINA

## **Diseño e implementación de un actuador rotacional serie elástico en un exoesqueleto**

Tesis que presenta  
**Ing. Luis Erik Sánchez Cornejo**

Para obtener el grado de  
**MAESTRO EN CIENCIAS**

**En Sistemas autónomos de Navegación aérea y submarina**

Directores de Tesis:  
Dr. Sergio Salazar Cruz  
Dr. Ricardo López Gutiérrez

MÉXICO, Ciudad de México

Enero 2018.



# Agradecimientos

---

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por brindarme los medios financieros que me han permitido realizar este estudio de maestría.

Durante mi desarrollo académico he encontrado retos para los que no siempre he tenido fuerzas con que afrontarlos. Han sido mis padres Socorro Cornejo M. y Martín Sánchez C. quienes me han brindado el apoyo y aliento que me ha permitido seguir adelante. Les doy las gracias por brindarme todo lo necesario para alcanzar y cumplir con mis estudios de maestría.

Quiero agradecer a mi hermano Damián Sánchez Cornejo por siempre ayudarme a despejar aquellas dudas que me impedían fijarme nuevos objetivos. Lo cual me a permitido tomar mis estudios de maestría como una herramienta para cumplir con nuevos objetivos.

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por darme los medios financieros que me han permitido llevar realizar este estudio de maestría.

Agradezco a mis asesores de tesis Dr. Ricardo López G. y Dr. Sergio Salazar C. por su guía durante el desarrollo de este trabajo de tesis. Esto me a ayudado a mejorar mis aptitudes en ramo de la investigación.

## **Resumen**

Motivados por la carencia de opciones para aplicar un control por retroalimentación de la fuerza en un exoesqueleto se ha desarrollado este trabajo sobre el diseño, fabricación y puesta en marcha de un actuador rotacional serie elástico. Partiendo del funcionamiento del actuador lineal serie elástico se empleó un diseño rotacional de 6 resortes. Para esto se consideró el motor que impulsará el actuador, así como el exoesqueleto donde se buscará cumplir con un trabajo.

El diseño del actuador rotacional serie elástico parte del tamaño de los resortes con los que trabaja y permitiendo que el comportamiento de los resortes realice el correcto cálculo de la fuerza en el actuador. Se ha empleado polímero como material de fabricación del actuador rotacional serie elástico y el cual se trabajó con una máquina CNC.

El comportamiento del actuador rotacional serie elástico es simulado para poder resolver los problemas que se puedan presentar en las pruebas con el prototipo. Empleando un algoritmo de control se logra controlar la fuerza aplicada por el exoesqueleto y esto permite a su vez controlar la posición del exoesqueleto lo que significa una gran ventaja comparado con un control de retroalimentación de posición.

Se implementó el control por retroalimentación de fuerza en el prototipo para mover un exoesqueleto y realizar en él un conjunto de pruebas relacionadas a las tareas usuales del exoesqueleto. Se quiere con esto implementar este actuador en diversos exoesqueletos con el mismo enfoque de trabajo, así como poder emplear este conocimiento sobre diversas variantes del actuador rotacional serie elástico.

## **Resume**

Motivated by the lack of options to apply a force feedback control in an exoskeleton, this work has been developed on the design, manufacture and start-up of a rotary series elastic actuator. Starting from the operation of the linear series elastic actuator, a rotational design with 6 springs was designed. During the design of the actuator the motor that will drive the actuator was considered, as well as the exoskeleton where it will perform the transfer of movement and force.

The design of the rotary series elastic actuator part of the size of the springs with which it works and allowing the correct calculation of strength in the actuator. A polymer has been used as manufacturing material of the rotary series elastic actuator.

The behavior of the rotary series elastic actuator was simulated obtaining a set of results more than satisfactory. Using a control algorithm, it is possible to control the force applied by the exoskeleton and this allows us to control the position of the exoskeleton which means a great advantage compared to a position feedback control.

The correct work of research and development gave favorable results in the physical tests of the actuator. The force feedback control was implemented in the prototype obtaining results more than similar than those simulated. This will enable in the future to implement this actuator



in various exoskeletons with the same working approach, as well as designing more compact versions of the rotary series elastic actuator depending on the characteristics and needs of each exoskeleton.



# Índice general

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Agradecimientos</b>  | <b>III</b> |
| <b>Índice de tablas</b>   | <b>IX</b>  |
| <b>Índice de figuras</b>  | <b>XI</b>  |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>   |
| 1.1. Objetivo general. . . . .  | 4          |
| 1.2. Objetivos particulares. . . . .  | 4          |
| 1.3. Justificación. . . . .   | 4          |
| <b>2. Estado del Arte</b>   | <b>7</b>   |
| 2.1. Antecedentes. . . . .  | 7          |
| <b>3. Actuador Lineal Serie Elástico</b>                                      | <b>13</b>  |
| <b>4. Diseño</b>  | <b>17</b>  |
| 4.1. Prototipo . . . . .  | 17         |
| 4.1.1. Análisis de esfuerzos sobre el actuador . . . . .                      | 23         |
| 4.2. Unidad lógica programable . . . . .                                      | 24         |
| <b>5. Desarrollo</b>  | <b>29</b>  |
| 5.1. Análisis de Estabilidad del sistema . . . . .                            | 29         |
| 5.2. Modelo espacio estado . . . . .  | 32         |
| 5.2.1. Controlabilidad . . . . .  | 35         |
| 5.2.2. Función de transferencia . . . . .                                     | 37         |
| 5.2.3. Observabilidad . . . . .   | 38         |
| <b>6. Resultados</b>  | <b>41</b>  |
| 6.1. Simulaciones . . . . .   | 41         |
| 6.1.1. Simulación del modelo en función de transferencia . . . . .            | 41         |
| 6.1.2. Simulación del modelo espacio estado . . . . .                         | 43         |
| 6.2. Resultados experimentales . . . . .                                      | 46         |
| 6.2.1. Resultados de prueba para el control de una posición deseada . . . . . | 46         |
| 6.2.2. Prueba del control de fuerza deseada con una carga . . . . .           | 49         |

|  |           |
|--|-----------|
| 6.2.3. Resultados de prueba control de fuerza aplicada sobre un objeto . . . . | 51        |
| <b>7. Conclusiones</b>   | <b>53</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>57</b> |

# Índice de tablas

---

|  |    |
|--|----|
| 4.1. Especificaciones de los 3 modelos de resortes. . . . .  | 19 |
| 4.2. Especificaciones del Nylamid. . . . .                   | 21 |
| 4.3. Especificaciones de los 3 resortes. . . . .             | 21 |
| 4.4. Torque máximo por cada resorte. . . . .                 | 22 |
| 5.1. Tabla de valores del sistema. . . . .                   | 30 |
| 5.2. Tabla de valores para el modelo espacio estado. . . . . | 35 |



# Índice de figuras

---

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.1.  | Exoesqueleto Hardiman desarrollado por la compañía General Electric. . . . .                  | 7  |
| 2.2.  | Exoesqueleto para asistir a la caminata, Phoenix. . . . .                                     | 8  |
| 2.3.  | Exoesqueleto para fines militares. . . . .  | 9  |
| 2.4.  | Exoesqueleto de dos grados de libertad con control por retroalimentación de fuerza. . . . .   | 10 |
| 2.5.  | Exoesqueleto de pierna con control de fuerza. . . . .   | 10 |
| 3.1.  | Diagrama de un Actuador Lineal Serie Elastico . . . . .                                       | 13 |
| 3.2.  | Actuador rotacional serie elástico . . . . .  | 14 |
| 3.3.  | Modelo masa resorte amortiguador . . . . .  | 14 |
| 3.4.  | Modelo de control aplicado al ARSE . . . . .  | 16 |
| 4.1.  | Diseño de un actuador rotacional serie elástico con arreglo de 6 resortes. . . . .            | 17 |
| 4.2.  | Motor Armonic drive FHA 14C 100 . . . . .   | 18 |
| 4.3.  | Ensamblaje de las dos partes principales que conforman el actuador. . . . .                   | 18 |
| 4.4.  | Los 3 modelos de resortes, con diferentes especificaciones . . . . .                          | 19 |
| 4.5.  | Sujetadores para los resortes, ensamblaje. . . . .  | 20 |
| 4.6.  | Diseño final del Actuador rotacional serie elástico. . . . .                                  | 20 |
| 4.7.  | Marco de soporte entre el motor, el ARSE y el exoesqueleto. . . . .                           | 21 |
| 4.8.  | Exoesqueleto de brazo empleando para probar el ARSE . . . . .                                 | 22 |
| 4.9.  | Gráfico de esfuerzos sobre la pieza,punto mayor y menor de la pieza recibe esfuerzos. . . . . | 23 |
| 4.10. | Gráfico de esfuerzos sobre la pieza de las regiones con mayor y menor deformación. . . . .    | 24 |
| 4.11. | Tarjeta de desarrollo FRDM KL25Z . . . . .  | 25 |
| 4.12. | shields desarrolladas. . . . .  | 25 |
| 4.13. | Diagrama de flujo a programar . . . . .   | 27 |
| 5.1.  | Gráfico de los polos y ceros de la función de transferencia. . . . .                          | 31 |
| 5.2.  | Gráfico de los polos de la función de transferencia. . . . .                                  | 32 |
| 5.3.  | Diagrama masa resorte amortiguador. . . . .   | 33 |
| 5.4.  | Modelo ARSE. . . . .  | 33 |
| 6.1.  | Simulación del actuador rotacional serie elástico. . . . .                                    | 41 |
| 6.2.  | Simulación 3D del ARSE. . . . .   | 42 |

|  |    |
|--|----|
| 6.3. Simulación 3D del ARSE, figura. . . . .   | 42 |
| 6.4. Gráfico de posición del motor y del efector final. . . . .  | 43 |
| 6.5. Gráfico de la fuerza en el sistema. . . . .   | 43 |
| 6.6. Diagrama a bloques de simulación en Simulink. . . . .   | 44 |
| 6.7. Gráfico del desplazamiento angular del motor en la simulación. . . . .                                    | 45 |
| 6.8. Gráfico del desplazamiento del elemento elástico. . . . .   | 45 |
| 6.9. Gráfico del control por retroalimentación de fuerza. . . . .  | 46 |
| 6.10. Prueba de posición . . . . .   | 46 |
| 6.11. Gráfico de posición del sistema . . . . .  | 47 |
| 6.12. Gráfico del control de fuerza . . . . .  | 47 |
| 6.13. Gráfico del error en el sistema . . . . .  | 48 |
| 6.14. Gráfico comparativo . . . . .  | 48 |
| 6.15. Gráfico comparativo entre un control de posición y el control de fuerza. . . . .                         | 49 |
| 6.16. Prueba de posición con carga . . . . .   | 49 |
| 6.17. Gráfico de la posición angular del efector final con el control por retroalimentación de fuerza. . . . . | 50 |
| 6.18. Gráfico de la fuerza a la salida del sistema. . . . .  | 50 |
| 6.19. Prueba de control de fuerza sobre un objeto . . . . .  | 51 |
| 6.20. Gráfico de la posición del sistema . . . . .   | 52 |
| 6.21. Gráfico de la fuerza aplicada sobre el objeto . . . . .  | 52 |



---

# Introducción

---

Un exoesqueleto se puede describir como una estructura mecánica que será portada sobre el cuerpo humano a manera de prenda de vestir para asistir al movimiento de las articulaciones, brindar terapias de rehabilitación y aumentar las capacidades del cuerpo humano. Entre los campos donde existe más desarrollo e interés por estos sistemas están la medicina en el ámbito de la rehabilitación humana, el área militar para potenciar las capacidades humanas y la industria donde se necesita cargar objetos pesados durante periodos repetitivos.

Los exoesqueletos se han convertido en uno de los objetos de estudio y desarrollo con un gran potencial en la actualidad cuyos retos actuales pueden ser mejorar su desempeño y reducir su consumo de energía. Una manera en la que se ha alcanzado estas características es a través de la implementación de algoritmos de control cada vez más complejos aunado al uso de computadoras embebidas cada vez más compactas y con un consumo de energía menor.

El actuador rotacional serie elástico ocupa un lugar en beneficio del funcionamiento de los exoesqueletos al brindar la capacidad de medir el torque que se genera en las articulaciones de los exoesqueletos. Para cualquier motor es posible complementar su funcionamiento con la implementación del actuador rotacional serie elástico siendo este una estructura mecánica que involucra resortes.

Las metodologías de control modernas han cumplido con las necesidades de los exoesqueletos lo cual ha dejado en segundo plano la opción de diseñar e implementar nuevas tecnologías en actuadores. Por el otro lado estas tecnologías son capaces de cumplir con las exigencias de eficiencia en los exoesqueletos con la ayuda de sistemas de control convencionales.

En este escrito se presentan las características y los desarrollos en el área de los exoesqueletos, innovaciones en tecnologías de actuadores, sensores, materiales y sistemas de control además se podrá apreciar el por qué y cómo se diseñó el Actuador Serie Elástico Rotatorio (ASER), la representación matemática que gobierna su funcionamiento así como pruebas y simulaciones de su comportamiento para después pasar a los datos y conclusiones a partir de su fabricación y puesta en marcha. Al finalizar se realizarán las comparaciones que demostrarán las ventajas y desventajas de su implementación en contraposición de un exoesqueleto con control únicamente por algoritmos programables.

Los exoesqueletos son robots automatizados que pueden ser portados por un usuario a

modo de vestimenta [13], estos exoesqueletos abarcan la movilidad de los brazos, torso y piernas. Se parte de una estructura entre otros de aleación de alta resistencia, la cual pueda soportar el peso del usuario y los elementos motrices del sistema.

Los elementos que conforman un exoesqueleto son:

- Fuente de energía: Se requiere de una fuente de energía que puede ser eléctrica, neumática, hidráulica etc. El uso de baterías o tanques neumáticos le brindan autonomía y libertad de movimiento al exoesqueleto, por el otro lado, si no se requiere que el exoesqueleto se mueva de su lugar es posible optar por una toma de corriente eléctrica un compresor de aire etc, como es el caso de los exoesqueletos para rehabilitación, o en algunas industrias que tienen tomas de energía que cubren el área de trabajo.
- Sensores: Se encargan de recabar información para retroalimentación del sistema por ejemplo sensores de torque, encoders, etc. La otra utilidad de los sensores es la de interpretar la intención humana que se emplea para dar instrucciones al exoesqueleto, por ejemplo los sensores electromiograficos para detectar impulsos eléctricos del cuerpo humano.
- Unidad lógica programable: Ocupa el lugar del cerebro del exoesqueleto, es una micro computadora con múltiples características dependiendo de la complejidad del exoesqueleto. Se encarga de recibir la información generada por los sensores y toma las decisiones pertinentes para controlar el movimiento y funcionamiento de los actuadores en el sistema. Se le programan rutinas que permiten el caminar, levantarse, sentarse, etc.
- Actuadores (Motores): Le permiten realizar movimientos al exoesqueleto. Pueden moverse con energía eléctrica o neumática.
- Control del equilibrio: Dotar a un exoesqueleto de un control tal que pueda compensar el desequilibrio al andar es una problemática más en estos proyectos. Algunos trabajos sobre exoesqueletos sortean este problema implementando muletas, al contar con 4 puntos de apoyo se mejora la estabilidad al caminar pero se reduce la maniobrabilidad del sistema.

Para el diseño de un exoesqueleto existen 2 principales apartados a trabajar para la fabricación y puesta en marcha. El primero es un desarrollo mecánico y el segundo es el diseño del sistema de control.

### **Desarrollo mecánico**

Como se menciona en [9] “El factor más importante a trabajar durante el desarrollo de un exoesqueleto son los elementos actuadores del sistema”. Los actuadores proporcionan al exoesqueleto la potencia a convertir en trabajo útil, el peso que será capaz de soportar el exoesqueleto así como las capacidades de interacción entre el usuario y el exoesqueleto entre otros.

Las dimensiones de un exoesqueleto usualmente dependen de factores como la instrumentación disponible para integrarlo, la tarea que desempeñara y el entorno donde será empleado entre otros. Los actuadores que le transmiten movimiento y fuerza al sistema son los elementos

que afectan en mayor medida en las dimensiones del exoesqueleto.

Actualmente se puede emplear de entre 3 diferentes tipos de actuadores: hidráulicos, músculos neumáticos y motores eléctricos.

Un sistema hidráulico funciona con un circuito de presión entre 100 y 150 bares. Este sistema tiene una variedad de limitantes para ser empleado en los exoesqueletos, como es el caso de requerir de un tanque hidráulico que brinde la presión necesaria para el actuar de los músculos. Esto significa entre 3 a 5 kg de peso sobre el exoesqueleto, sin contar que necesita un sistema de bombeo de un 1 kg de peso que a su vez requiere de una fuente de energía eléctrica o de baterías para funcionar.

Los sistemas que utilizan músculos neumáticos resultan más ligeros de implementar debido a que trabajan con aire comprimido para elongar y contraer un músculo. Los exoesqueletos se benefician por la capacidad de este sistema para imprimir una gran fuerza al accionar cada músculo.

Se emplea un circuito de aire a presión el cual alimenta los músculos. las características mínimas de un músculo son 40mm de diámetro con un peso de 800g son bastante ligeros para ser implementados en un exoesqueleto. La desventaja que presenta este sistema es el carecer de una adecuada precisión en el actuar de los músculos, adicionalmente se necesita de un compresor que mantenga la presión de aire necesaria, esto es entre 3 a 4 kilogramos más de peso en el exoesqueleto.

El uso de motores eléctricos es lo común en la mayoría de sistemas robótico. El peso que le aporten al exoesqueleto depende de su la tecnología disponible, de las necesidades del sistema y de la fuente de energía eléctrica o paquete de baterías necesario. Una amplia gama de trabajos sobre exoesqueletos plantean el uso de motores ya sea usando motores cada vez más compactos y potentes o proponiendo arreglos de engranes y poleas que aumentan las capacidades del motor.

### **Control**

Todos los actuadores empleados en un exoesqueleto requieren ser gobernados por leyes de control. Para automatizar los movimientos en el momento exacto y con la sincronía adecuada, que permita movilizar al sistema. En el control están presentes las restricciones necesarias que evitaren que el exoesqueleto llegue a lastimar o lesionar al usuario y se complementa con topes mecánicos para cumplir con esta medida de seguridad.

El sistema de control emplea sensores para obtener información. La información necesaria abarca desde datos del estado del exoesqueleto posiciones lineales y angulares, instrucciones por parte del usuario y solo en algunos casos información del entorno donde se desplazará el exoesqueleto.

Los sistemas de control son el intermediario entre las instrucciones de usuario y los actuadores. El usuario emplea un sensor para dar una orden al sistema, el control interpreta la orden y decide que actuadores deben moverse y en qué orden lo harán para cumplir con la orden dada. Siempre buscando realizar un trabajo grande con el mínimo de esfuerzo y gasto

energético.

Gracias a que el desarrollo de exoesqueletos lleva más de 30 años la innovación tecnológica le ha permitido a la humanidad sopesar las limitaciones que el propio cuerpo humano tiene como es la fragilidad y poca fortaleza. La maximización de las habilidades físicas del usuario fue la principal motivación del desarrollo de los exoesqueletos en sus inicios, esto para cumplir con las necesidades del área industrial.

## **1.1. Objetivo general.**

Desarrollar un actuador de tipo serie elástico utilizando un motor Harmonic drive y un arreglo mecánico que sea capaz de proporcionar y estimar el torque en la articulación de un exoesqueleto considerando el diseño que el actuador permita ser empleado en diferentes prototipos.

## **1.2. Objetivos particulares.**

- Diseñar la estructura mecánica del actuador y deducir el modelo matemático correspondiente que describa su comportamiento para ser simulado con una ley de control de fuerza apropiada.
  
- Construir la estructura mecánica e integrar en motor Harmonic drive.
  
- Realizar pruebas experimentales con el control de fuerza para ser comparado con sistemas mecánicos convencionales.

## **1.3. Justificación.**

La estimación de torque en un exoesqueleto es importante ya que este tipo de sistemas trabajan directamente sobre las articulaciones humanas generando grandes torques que podrían lastimar al usuario si no se controlan apropiadamente.

Un algoritmo de control apropiado puede encargarse de estimar los parámetros desconocido del sistema y lograr el objetivo de control planteado, pero es importante tener retroalimentación por parte de los sensores que permitan un mejor desempeño del controlador.

De esta forma es posible prescindir de un medio adicional para darle las instrucciones del movimiento al exoesqueleto, consiguiendo un sistema que imita y amplifica la magnitud y dirección del movimiento que el usuario realiza.

Otra ventaja del actuador que se desarrolla es el diseño que le permite ser utilizado en diversos exoesqueletos.

Implementar un algoritmo de control por retroalimentación de torque permite aplicar la fuerza mínima necesaria para determinada tarea o tener un mejor control del motor acorde a la potencia que este es capaz de desarrollar.



## 2.1. Antecedentes.

El desarrollo de exoesqueletos tuvo en sus inicios a "Hardiman" vea la imagen 2.1 creado por Ralph Mosher ingeniero de la compañía General Electric. Este proyecto estuvo en desarrollo durante 1965 hasta 1971, el cual permitiría levantar cargas de 1500 kilogramos. Las dificultades que causaron su fracaso fueron los movimientos violentos del sistema y la poca movilidad de las piernas.

Sentó los primeros avances y retos para alcanzar un exoesqueleto funcional y denota los elementos requeridos para su construcción, un marco o estructura, un conjunto de baterías como fuente de energía, sensores, un controlador o computadora a bordo y actuadores como es el caso de los motores que impulsan el exoesqueleto.

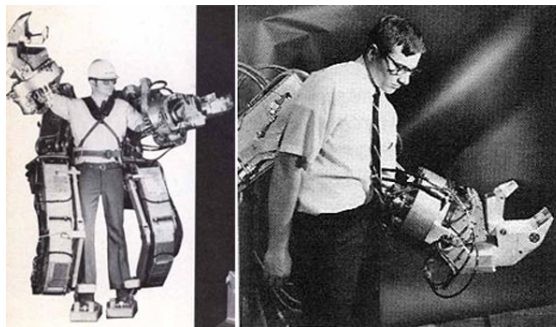


Figura 2.1: Exoesqueleto Hardiman desarrollado por la compañía General Electric.

En la última década la implementación de los exoesqueletos se ha enfocado a brindar un apoyo durante la caminata, esto por supuesto para personas que sufren de alguna discapacidad que les dificulta el andar por su cuenta. Debido a lo anterior, los exoesqueletos actuales se desarrollan poniendo suma atención en mantener las dimensiones y el peso del exoesqueleto en lo mínimo posible lo cual mejora la maniobrabilidad del mismo, su coste de producción y el consumo de energía que requiere para funcionar plenamente.

En la actualidad se tiene el exoesqueleto móvil "Phoenix" el cual se muestra en la imagen

2.2 siendo este uno de los exoesqueletos ensamblados con la tecnología punta de la actualidad. Es empleado en personas paraplégicas teniendo un precio accesible para el consumidor en el mercado. Fue desarrollado por la compañía norteamericana SuitX fundada por Homayoon Kazerooni profesor de ingeniería mecánica en la universidad de California en Berkeley y con un lapso de desarrollo de 10 años. El exoesqueleto es capaz de recorrer una distancia de 1.7 kilómetros por hora y emplea nuevos materiales para hacerlo más liviano.



Figura 2.2: Exoesqueleto para asistir a la caminata, Phoenix.

En el área médica el uso de los exoesqueletos es complementario al tratamiento por parte de un terapeuta. El uso de estos está enfocado a la rehabilitación y se encargan de seguir rutinas de movimiento para que el usuario incapacitado pueda realizar este ejercicio hasta que recupere su propia movilidad. Estos exoesqueletos tienen como característica la capacidad de repetir infinitas veces la misma rutina con error mínimo. La principal ventaja que tienen estos exoesqueletos es ser estacionarios lo cual implica que el diseño de estos puede ser tan voluminoso como sea necesario y no están limitados por una fuente de energía portable.

Lo que en el pasado eran ideas propias de la ciencia ficción hoy en día han demostrado tener una gran gama de posibles aplicaciones. Como se ha expresado el ámbito médico resulta ser el campo donde ha evolucionado esta tecnología a pasos agigantados y de manera benéfica para las personas que requieren algún tipo de apoyo en el movimiento.

El uso de un exoesqueleto como órtesis es otra implementación con un gran desarrollo, debido a la capacidad de brindarle cierta independencia al usuario, así como brindar ayuda al personal médico en el desarrollo de actividades de rehabilitación donde se requiere que el paciente se desplace.

Como se indica en [6] “La aplicación bien implementada de los exoesqueletos tiene una ventaja potencial sobre terapias de rehabilitación para pacientes en términos de precisión y repetitividad”. Los robots son especialmente adecuados para la aplicación en áreas donde se necesita un buen control del movimiento físico y de la fuerza aplicada.

Los exoesqueletos son parecidos a armazones ergonómicos desarrollados para brindar a un usuario la capacidad de realizar actividades cotidianas, invirtiendo una menor cantidad



de energía metabólica en cada movimiento. Es el sistema robótico el que aplica una fuerza potenciada a las extremidades, esto significa un ahorro de energía por parte del usuario dependiendo de la tarea a desarrollar, así como un potenciamiento de las habilidades motoras.

La fisioterapia es la forma tradicional para brindar un tratamiento a personas con afectaciones en sus habilidades motoras, aplicando ejercicios musculares específicos en diferentes extremidades y con esto ayudar a la recuperación parcial o total del paciente.

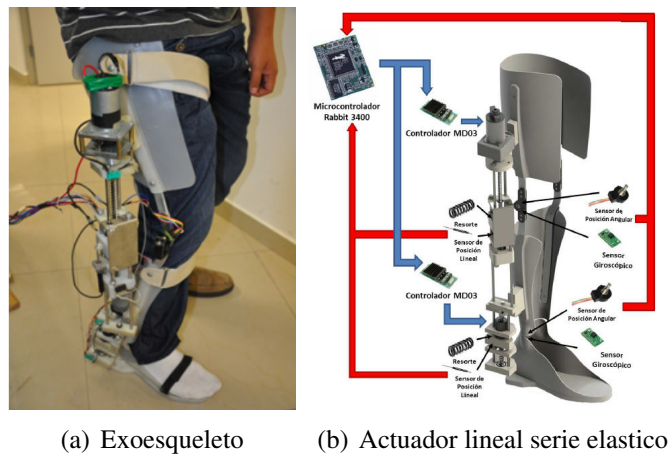
Estos procedimientos de rehabilitación se benefician con el uso de exoesqueletos, los cuales se encargan de brindar la terapia respectiva en sustitución del terapeuta o como auxiliar a la terapia, lo cual mejora la calidad del tratamiento, también le brinda relativa autonomía de movimiento al paciente para realizar la terapia sin la necesidad de contacto físico entre el paciente y el fisioterapeuta, lo cual resulta en una correcta aplicación del tratamiento y beneficiar a la tranquilidad del paciente durante la terapia.



Figura 2.3: Exoesqueleto para fines militares.

En la rama militar existe el exoesqueleto RB3D Hercule mostrado en la imagen 2.3. Desarrollado por la empresa francesa RB3D, el ministerio de defensa de Francia, la escuela de Ingenieros ESME Sudria y el Instituto CEA LIST. El proyecto tiene como objetivo crear una estructura que sea capaz de soportar una carga de 100 kilogramos de peso y cuente con una autonomía de 20 kilómetros a una velocidad media de 4 km/h.

La fuerza es un factor de gran importancia para el funcionamiento de un exoesqueleto. Un sistema mecánico aplica fuerza para movilizar el sistema así como para mover o levantar cargas. Un sistema de control por retroalimentación de fuerza es una opción que tiene ventajas para el funcionamiento de los exoesqueletos. Desde aplicar únicamente la fuerza necesaria para el trabajo requerido o el comunicar al usuario con el exoesqueleto.

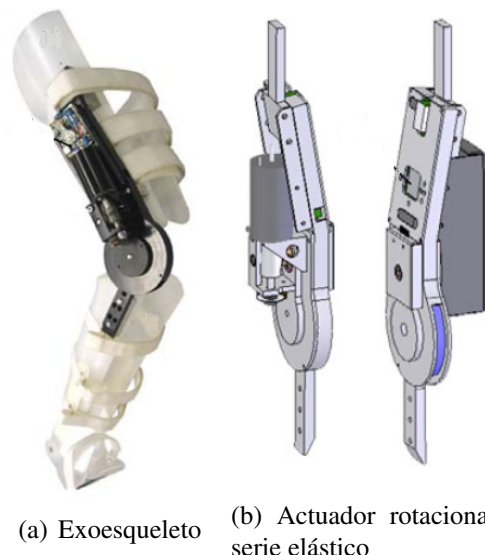


(a) Exoesqueleto (b) Actuador lineal serie elastico

Figura 2.4: Exoesqueleto de dos grados de libertad con control por retroalimentación de fuerza.

El exoesqueleto mostrado en la Figura 2.4 es un exoesqueleto para apoyo a la caminata con un control por retroalimentación de fuerza. Emplea un actuador lineal serie elástico para medir la fuerza aplicada en el exoesqueleto y con ella alimentar al control. Desarrollado por el Ricardo Ricardo López, Hipolito Aguilar, Sergio Salazar, Rogelio Lozano y Jorge A. Torres doctores de la unidad mixta internacional. Este proyecto se creó para brindar una amplificación de la fuerza del usuario con ayuda del exoesqueleto.

El implementar un control de fuerza para exoesqueletos implica la aplicación de un sensor de fuerza. La poca gama de sensores de fuerza limita las aplicaciones en exoesqueletos y es donde los actuadores lineales serie elásticos encuentran un nicho de trabajo.



(a) Exoesqueleto (b) Actuador rotacional serie elastico

Figura 2.5: Exoesqueleto de pierna con control de fuerza.

En la Figura 2.5 se aprecia un exoesqueleto de pierna el cual emplea un actuador rotacional serie elástico para medir la fuerza aplicada en el exoesqueleto al rotar la rodilla [4]. Creado

---

por Kyoungchul Kong, miembro de la IEEE, Joonbum Bae y Masayoshi Tomizuka. Con el propósito de diseñar actuadores rotacionales serie elásticos para exoesqueletos de asistencia al movimiento.



## Actuador Lineal Serie Elástico

El Actuador Lineal Serie Elástico se puede entender como un sensor de fuerza, que a partir de la ley de Hooke donde  $F$  es la fuerza generada por el actuador,  $X_i$  es la posición inicial de del resorte,  $x_f$  es la posición del efector final cuando hay un desplazamiento en el resorte y  $K$  es el la constante del resorte y permite medir la fuerza en un resorte contra una carga de forma lineal. El actuador es impulsado por un motor en contra de una carga y se mide la diferencia del desplazamiento en el resorte como se muestra en la Figura 3.1. Esta estructura permite desacoplar la carga o salida de la inercia del motor. Otras ventajas que tiene el actuador son brindar una seguridad relativa, gran capacidad de potencia al sistema y es posible reducir el consumo de energía [10].

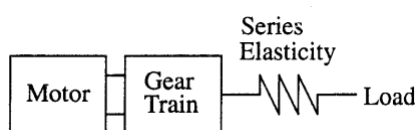


Figura 3.1: Diagrama de un Actuador Lineal Serie Elastico

En el trabajo “Modelado y control de un exoesqueleto para rehabilitación de Extremidad inferior con dos grados de libertad” [5] se expone el uso de un “SEA” para el control de un exoesqueleto de pierna. Se describe el uso del ARSE en un exoesqueleto como “una muy buena opción para el control de la fuerza”. El modelo matemático que describe este funcionamiento se muestra en la ecuación (3.0.1).

$$f_m - b_m \dot{x}_m - f_a = m_m \ddot{x}_m \quad (3.0.1)$$

$$\text{con } f_a = K(x_i - x_f)$$

El actuador serie elástico rotacional es una variación del “SEA”, el cual permite medir la fuerza aplicada a la carga en un desplazamiento angular como se indica en [8]. Existen diversas configuraciones de series de resortes que permiten este funcionamiento. Como se menciona en [5] resulta ideal su aplicación en exoesqueletos que requieren movimiento angular en las articulaciones, codo, rodilla, tobillo entre otros.

En 2009, Kyoungchul Kong, joonbum Bae y Masayoshi Tomizuka [2], se dice que “El diseño de un ASER es la problemática más evidente en este campo”. Concluyen que “El uso

de un actuador ASER es una buena solución como método de actuación para aplicaciones de interacción Humano-máquina”.

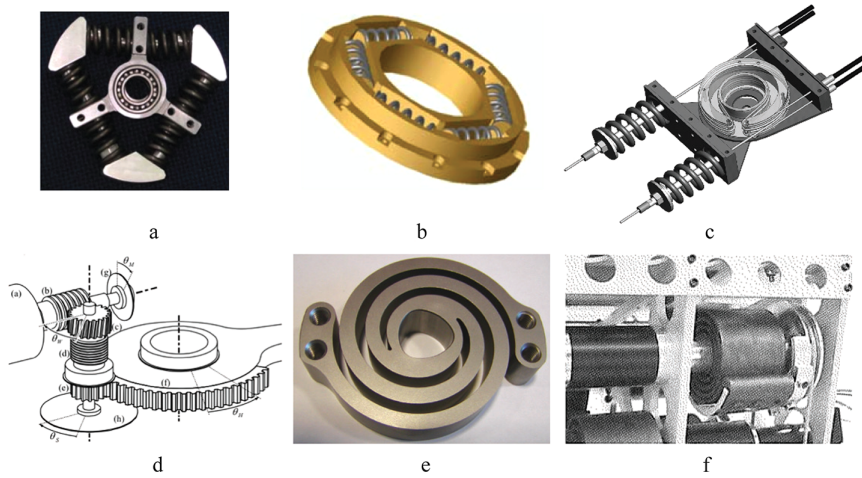


Figura 3.2: Actuador rotacional serie elástico

El desplazamiento lineal que se tiene en un actuador ASE pasa a ser un desplazamiento angular en el ASER. Como se aprecia en las imágenes de la Figura 3.2 existen diferentes diseños mecánicos para el mismo funcionamiento como se menciona en [3] y cada uno cuenta con aptitudes adecuadas dependiendo el trabajo que se les exigirá.

El modelo que describe este comportamiento es descrito en el trabajo [2] por medio de la ecuación (3.0.2).

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_M I_M + \dot{\theta}_M C_M + K(\theta_M - \theta_H) &= \tau_M \\ \ddot{\theta}_H I_H + \dot{\theta}_H C_H + K(-\theta_M + \theta_H) &= \tau_H - mgl \sin(\theta_H) \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

Como el modelo está en función de la masa, el resorte y un amortiguador que se muestra en la Figura 3.3, su estabilidad dependerá de un correcto equilibrio del elemento elástico, el elemento amortiguador y la fricción del sistema.

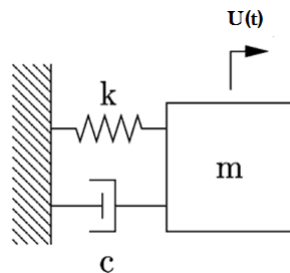


Figura 3.3: Modelo masa resorte amortiguador

Para poder trabajar con este sistema, requerimos que se comporte como un sistema sobre amortiguado. Las oscilaciones que se generan a causa del resorte son características de un sistema en estado subamortiguado y nos impiden modelar un comportamiento estable. Por lo tanto

es necesario un valor del elemento amortiguador que elimine las oscilaciones. Esto se logra mediante el cálculo del parámetro “r” de la ecuación (3.0.3) que mide la magnitud relativa del amortiguador con respecto a la magnitud del resorte.

$$r = \frac{C^2}{4Mk} \quad (3.0.3)$$

- $r = \frac{C^2}{4Mk} > 1$  (Sobre amortiguado) el efecto del amortiguador es mas importante que el del resorte, lo cual permite al sistema alcanzar la referencia de forma exponencial sin oscilar.
- $r = \frac{C^2}{4Mk} < 1$  (subamortiguado) el resorte es mas importante que el amortiguador, el sistema tiende a oscilar.
- $r = \frac{C^2}{4Mk} = 1$  (amortiguamiento critico) en el limite entre los 2 casos anteriores.
- $r = \frac{C^2}{4Mk} = 0$  (oscilatorio) no esta presente ningún amortiguador en el sistema.

Como se menciona en el primer punto calculamos los valores de “c” que permiten un comportamiento sobre amortiguado del resorte en el sistema. Conocemos los valores de  $M=2$ ,  $k=31.5$ , datos tomados de los valores de la masa del sistema y el valor del resorte es propuesto.

$$\begin{aligned} r &\geq 1 \\ r &= \frac{c^2}{4 * M * k} \\ M &= 2kg \\ k &= 31.5 N/m \\ c &> \sqrt{4 * 2 * 31.5} > \sqrt{4 * 2 * 31.5} > 15.8745 \end{aligned}$$

El resorte que se empleara para el “ARSE” posee un coeficiente de elasticidad, el cual deberá ser elegido en función de 2 parámetros, la resolución del par de salida y la magnitud de potencia máxima permitida para el esfuerzo de torsión. El control por retroalimentación de fuerza está limitado por la rigidez presente del resorte y este a su vez por la aplicación para la que fue elegido. El ARSE tienen importantes especificaciones que deben ser tomadas en cuenta, estas son definidas en el trabajo [1].

### Ancho de banda

La rapidez de respuesta a la fuerza deseada en el Actuador rotacional serie elástico se conoce como ancho de banda de fuerza en el actuador. Es la frecuencia más alta con la cual el actuador puede alcanzar una fuerza deseada a la salida. Permite transmitir las fuerzas exactas a través del exoesqueleto.

### Impedancia de salida

El mínimo de fuerza requerida a la salida del actuador para el desplazamiento de una carga (rigidez a la salida del actuador). Si para un sistema el actuador se considerado como una fuente de fuerza con dinámica insignificante es porque tiene baja impedancia.

### Rango dinámico

Es la fuerza máxima dividida por la fuerza minima incremental a la salida del actuador. Sirve como medida de la sensibilidad del sistema a fuerzas pequeñas respectivamente a su

plena capacidad de fuerza a la salida. Un amplio rango dinámico permite realizar trabajos con una gran precisión al igual de necesitar gran fuerza.

### Densidad de fuerza y de potencia

Capacidad de un actuador para entregar fuerza o potencia por unidad de masa o volumen unitario del actuador.

Como ejemplo tenemos los motores que emplean un juego de engranes que pueden entregar una alta fuerza al sistema, así como permiten tener un ancho de banda muy amplio. Como desventaja presenta una impedancia baja lo cual no permite un adecuado control de fuerza.

### Control por retroalimentación de fuerza

Los controles aplicados sobre un ARSE implican una retroalimentación del valor a la salida del actuador. La retroalimentación de fuerza en el sistema será implementada de la forma descrita en la Figura 3.4, en donde se muestra el error a la entrada del controlador y la referencia es una fuerza deseada a la entrada.

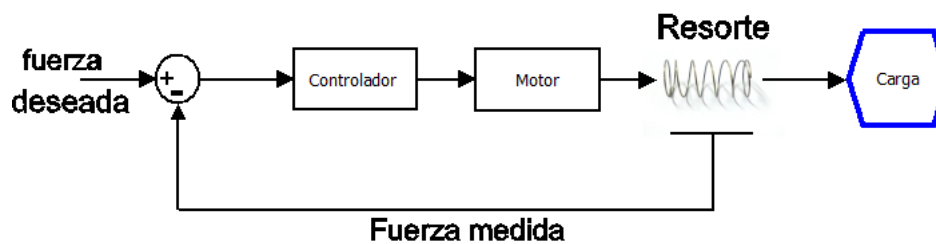


Figura 3.4: Modelo de control aplicado al ARSE



## 4.1. Prototipo

El actuador rotacional serie elástico es un elemento bastante estudiado. Existen diferentes métodos de diseño e implementación de este actuador, como se muestra en la imagen 3.2. 3 de esos diseños son los más adecuados para su aplicación en exoesqueletos. Todos los diseños cumplen la misma función, pero un diseño compacto es la característica principal que los separa entre sí. Este trabajo se tomo como referencia el diseño mostrado en el artículo A Hybrid FES-Exoskeleton Rehabilitation System [15]. El trabajo parte con la fabricación de un actuador funcional empleando resortes prefabricados, esto implica que no es posible conocer todas las características del elemento elástico, como es el caso de la impedancia del actuador.

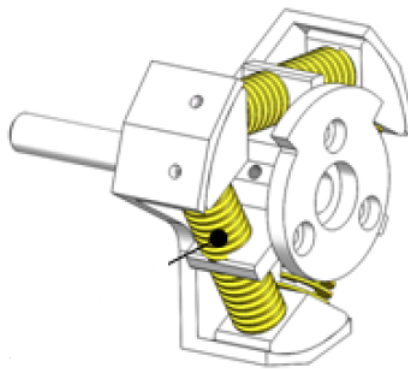


Figura 4.1: Diseño de un actuador rotacional serie elástico con arreglo de 6 resortes.

Se opta por trabajar con el arreglo de 6 resortes pequeños, vea la Figura 4.1 en lugar de trabajar con un solo resorte de gran tamaño. Se conserva el movimiento lineal de los resortes al considerar que para ángulos pequeños como es el caso de este actuador de 6 resortes la deformación en los resortes se mantiene lineal.

La medición de la fuerza del actuador está en función del conjunto de resortes y de la  $K$  resultante. Este es un diseño complejo comparado con las otras alternativas, aunque más resistente. Se emplean diferentes materiales y técnicas de fabricación en la construcción del actuador acorde al diseño elegido adaptado a las características del exoesqueleto donde se

implementara.

Se parte de la estructuración del acoplamiento entre el motor y actuador. Considerando el diseño de atornillado que el motor tiene, el actuador empleara este mismo método de acople. Se ensamblaran entre si con tornillos entandar de 5 mm. El motor mostrado en la imagen 4.2 es un Harmonic Drive FHA 14c que entrega un torque tope de 28 Nm y uno continuo de 6.8 Nm ver la Figura 4.2.

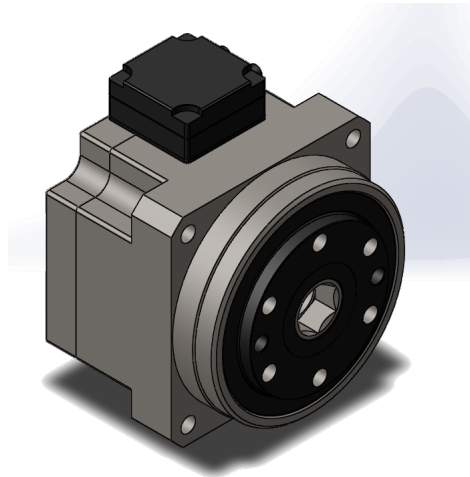


Figura 4.2: Motor Armonic drive FHA 14C 100

En la Figura 4.3 se muestra que el ARSE está integrado por 2 partes, que interactúan entre si por medio de los 6 resortes. Las 2 secciones que conforman el actuador deberán estar unidas fuertemente para sujetar los resortes y al mismo tiempo deben permitir rotación entre una y otra para que los resortes puedan comprimirse y expandirse. Se emplea un rodamiento para fijar ambas piezas a un eje que permitirá el comportamiento descrito.

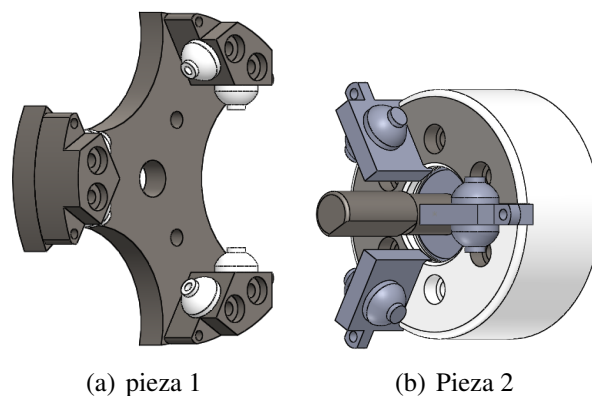


Figura 4.3: Ensamblaje de las dos partes principales que conforman el actuador.

En el caso del ARSE el movimiento es rotacional y se toma como consideración que para ángulos pequeños como es el caso de este actuador la deformación en los resortes sigue siendo lineal.

En el actuador se tiene un conjunto de bases semicirculares, estas se encargan de fijar los resortes al actuador. Estos elementos fueron diseñados tomando en cuenta las dimensiones de los resortes que se emplearan en el prototipo. En la Tabla 4.1 se muestran las características y dimensiones de los resortes mostrados en la imagen 4.4 los cuales se emplean en el prototipo. Para obtener todos los datos necesarios sobre los resortes se ha experimentado con ellos como es el caso de la constante del resorte. En base a un diseño estándar de resortes partiremos para el diseño del ecuador. Los datos de interés son la longitud del resorte y su diámetro, lo que nos indicara la separación de los elementos que sujetaran los resortes, así como las bases para estos.

| Dato                       | Resorte 1 | Resorte 2 | Resorte 3 |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| Longitud                   | 26.93 mm  | 27.56 mm  | 30.33 mm  |
| Diámetro de circunferencia | 15.63 mm  | 15.72 mm  | 15.10 mm  |

Tabla segunda 4.1: Especificaciones de los 3 modelos de resortes.



Figura 4.4: Los 3 modelos de resortes, con diferentes especificaciones

La medición de la fuerza sobre un resorte se realiza por medio de su deformación lineal. Para garantizar que la compresión y elongación de los resortes sea lineal, el diseño permite que el resorte por sí solo se realinee durante su compresión y elongación.

El diseño de la base donde se sitúan los resortes busca resolver la problemática del reajuste del resorte durante el movimiento. Se idearon las piezas a y b de la Figura 4.5. La pieza “a” forma parte del actuador que será conectado del lado del motor y la pieza “b” está pensada para estar del lado de la carga del sistema. Ambas están pensadas para sujetar firmemente y al mismo tiempo brindar libertad de movimiento a los resortes durante el actuar del exoesqueleto esto acorde a las dimensiones de los resortes y el ángulo máximo de libertad en el actuador.

El diseño del actuador rotacional serie elástico se muestra en la Figura 4.6. Como se ha mencionado por un lado se acopla al motor y por el otro a la carga. La posición angular de la carga con respecto al motor se mide por medio de un encoder AMT20, que permitirá medir el desplazamiento correspondiente a la compresión y expansión de los resortes. Internamente se emplea un rodamiento que permite unir ambas partes del actuador y al mismo tiempo permite

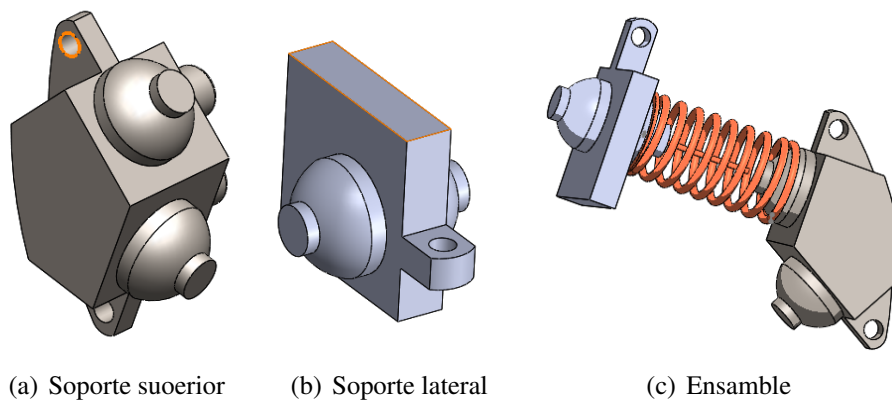


Figura 4.5: Sujetadores para los resortes, ensamblaje.

el libre giro de ambas. El ensamblaje de todas las piezas es por medio de tornillería (M4, M5) así como el ensamblaje del actuador con el motor y la carga.

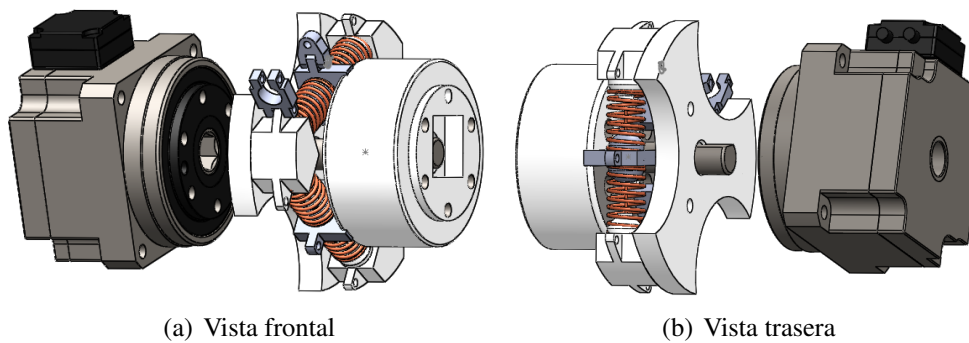


Figura 4.6: Diseño final del Actuador rotacional serie elástico.

Se emplea un marco para poder fijar el motor y el actuador al exoesqueleto. Permite dirigir la fuerza del motor hacia la extremidad que se desea mover, uniendo el marco del motor con la parte superior del exoesqueleto y el eje del motor unido al ARSE que mueve al brazo del exoesqueleto. El marco soportar el peso y fuerzas que genera el motor, echo de acero y nylamid es capaz de soportar todo el esfuerzo que se requiere en el exoesqueleto.

El ARSE está fabricado en polímero Nylamid debido a que es un material muy resistente y ligero sus características se muestran en la Tabla 4.2. Otra de las razones de su uso es la facilidad de fabricar con este material por medio de maquinaria CNC. Las piezas que permiten unir a todo el prototipo están fabricadas en acero y para las piezas que sujetan los resortes se emplea la impresión 3D debido a su diseño demasiado detallado.

El exoesqueleto que se utilizo para hacer las pruebas es un exoesqueleto de brazo vea la Figura 4.8, el cual fue diseñado para trabajar con el mismo motor. El exoesqueleto se conecta con la carcasa del motor por medio de marco que se muestra en la Figura 4.7 con 4 entradas para atornillado de 5mm como anclaje. La instalación del actuador sobre el exoesqueleto resulta practica y sin mayor complicación gracias a que el exoesqueleto fue diseñado para

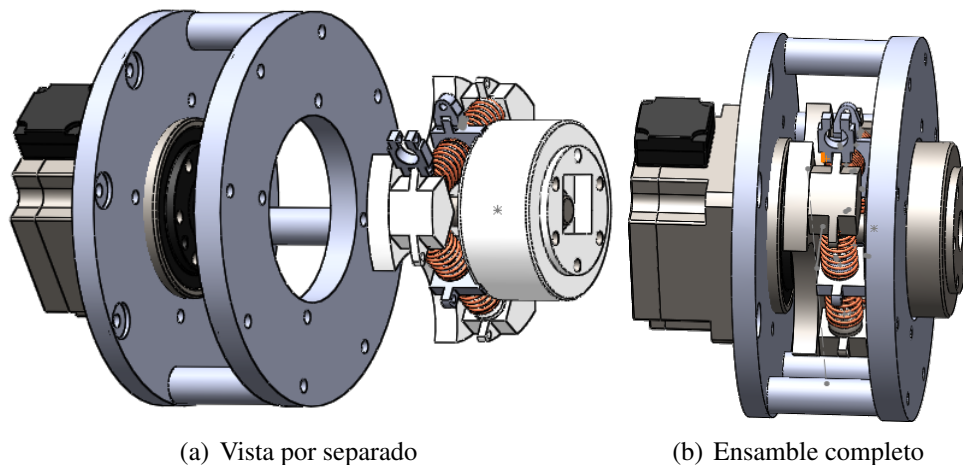


Figura 4.7: Marco de soporte entre el motor, el ARSE y el exoesqueleto.

|                          |               |
|--------------------------|---------------|
| Nylamid                  | $Kg/cm^2$     |
| Módulo de elasticidad    | 24600 - 31600 |
| Resistencia a la torsión | 662           |
| Resistencia a la tensión | 840 - 980     |

Tabla segunda 4.2: Especificaciones del Nylamid.

trabajar con motores Harmonic drive.

El diseño del ARSE debe de cumplir con 2 características para poder desempeñar un trabajo adecuado en exoesqueletos: ser capaz de desempeñar un par máximo que difiere por articulación y está en un rango de entre 25 y 60 Nm, una potencia por articulación de 250 vatios [14] y tener una sensibilidad tal que permita realizar trabajos precisos.

Se trabaja únicamente con los datos de los resortes que se han obtenido por medio de experimentación, estos datos se muestran en la tabla 4.3. Con esta información se obtiene el torque máximo que el actuador puede alcanzar o soportar.

| No        | K (constante de elasticidad) N/m | Fuerza máxima N | Carga máxima Kg |
|-----------|----------------------------------|-----------------|-----------------|
| Resorte 1 | 2907.46536                       | 39.88           | 4.0653          |
| Resorte 2 | 6115.82058                       | 88.975          | 9.069           |
| Resorte 3 | 7830.9443                        | 97.693          | 9.9585          |

Tabla segunda 4.3: Especificaciones de los 3 resortes.

El actuador debido a su fabricación tendrá una fuerza máxima de trabajo en función de los materiales empleados. Por otra parte, es el elemento elástico donde recae la mayoría del esfuerzo en el actuador. Por lo tanto, es el resorte el que define esta característica. La tabla anterior nos muestra las fuerzas máximas para cada resorte.



Figura 4.8: Exoesqueleto de brazo empleando para probar el ARSE

Se emplean diferentes resortes para trabajos específicos, el resorte con menor fuerza máxima tiene la característica de tener mejor sensibilidad por lo tanto podrá ser empleado para trabajos precisos, por el otro lado se puede optar por un resorte que permita soportar una mayor carga.

El cálculo del torque máximo del actuador de la Tabla 4.4 está dado por la ecuación  $Tm = (N * f) * R$ , donde N es el número de resortes que emplea el actuador, f es la fuerza máxima por resorte y R es el radio del actuador donde se aplicara la fuerza a cada resorte (R=0.05 m).

| No        | Torque máximo (Nm) |
|-----------|--------------------|
| Resorte 1 | 11.964             |
| Resorte 2 | 26.6925            |
| Resorte 3 | 29.3079            |

Tabla segunda 4.4: Torque máximo por cada resorte.

Los resultados nos indican un limite al torque que soportara el actuador en caso de emplear cada resorte. Dependiendo de la tarea a desempeñar se podrá intercambiar entre resortes, ya sea para permitir que el actuador realice trabajos que requieran de una gran esfuerzo (resorte 3) o emplear resortes endebles para medir esfuerzos pequeños que permitan trabajos precisos.

Gracias a esto tenemos opciones a elegir dependiendo de las necesidades de la tarea a realizar, siempre y cuando las dimensiones del resorte elegido correspondan a las planteadas anteriormente.

### 4.1.1. Análisis de esfuerzos sobre el actuador

Toda maquinaria durante su vida útil está expuesta a esfuerzos que pueden derivar en un fallo en su funcionamiento o en el deterioro de esta.

El análisis de esfuerzos siguiente tiene como propósito conocer el trabajo máximo al que podrá ser expuesto el prototipo. Se identifican las partes del prototipo que son vulnerables a deformaciones y realizar las pruebas con las respectivas precauciones.

El esfuerzo normal (esfuerzo axial o axial) es el esfuerzo interno o resultante de las tensiones perpendiculares (normales) a la sección transversal de un prisma mecánico. Este es el tipo de esfuerzo que actúa sobre la pieza debido a que funciona como la articulación del exoesqueleto.

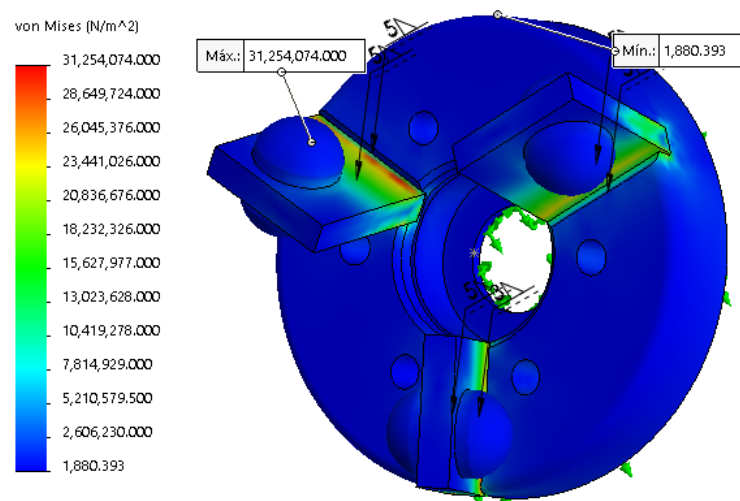


Figura 4.9: Gráfico de esfuerzos sobre la pieza, punto mayor y menor de la pieza recibe esfuerzos.

La figura 4.9 muestra una deformación parcial en las bases de los resortes. Esto indica que esta parte del actuador es la más susceptible a deformaciones. Conociendo la fuerza máxima antes de la deformación de la pieza y el torque máximo del motor deducimos un límite para la fuerza o torque con el cual trabajar el actuador.

En base a la fuerza máxima de 300 N y la distancia del centro de la pieza a los soportes (0.033 m), calculamos el torque máximo de la pieza el cual será de 10 Nm.

Este torque de 10 N\*m es poco más de un tercio del torque máximo del motor. Esto limita el uso del ARSE para trabajos donde no se requiera aplicar una gran fuerza.



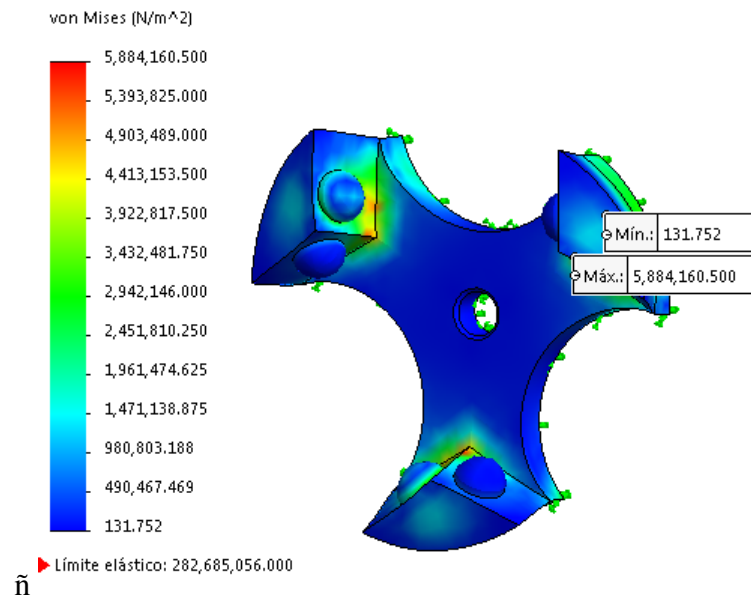


Figura 4.10: Gráfico de esfuerzos sobre la pieza de las regiones con mayor y menor deformación.

La figura 4.10 muestra una menor deformación de la pieza aplicando la misma fuerza de 300 N. Esta pieza no muestra un estrés a la carga tal que pueda interferir en el funcionamiento del ARSE, por lo que únicamente tomaremos como referencia a la figura 4.9 como medio para acotar los límites de uso del actuador.

Debido a estos resultados concluimos las siguientes consideraciones para el uso del prototipo:

Este prototipo será para uso exclusivo de rehabilitación o como ortesis para el apoyo del movimiento. Para ayudar al usuario a movilizar cargas ligeras, siempre y cuando no requiera que el motor aplica toda la fuerza y torque que es capaz de entregar.

Se limita el uso del conjunto de resortes que estén montados en el actuador. Esto implican que seremos capaces de realizar diversos trabajos cambiando el conjunto de resortes dependiendo del caso.

## 4.2. Unidad lógica programable

Para procesar los datos obtenidos del sensor y por medio de estos alimentar al algoritmo de control, se emplea la tarjeta de desarrollo Freedom mostrada en la imagen 4.11, ARM, Kinetis, KL25Z. Esta emplea un procesador ARM Cortex-M0+, 128 kb de memoria flash así como varios dispositivos analógicos.

Es una tarjeta programable multipropósito y de bajo coste que se puede configurar para ser programada con hasta 3 compiladores diferentes, lo cual permite programar de forma sencilla con ella y poder exportar códigos de otras plataformas.



Gracias a lo anterior concluimos como adecuado el uso de esta tarjeta de desarrollo como la unidad lógica para el prototipo. La última ventaja que presenta es la facilidad para conectar componentes externos en esta plataforma, así como desarrollarlos.

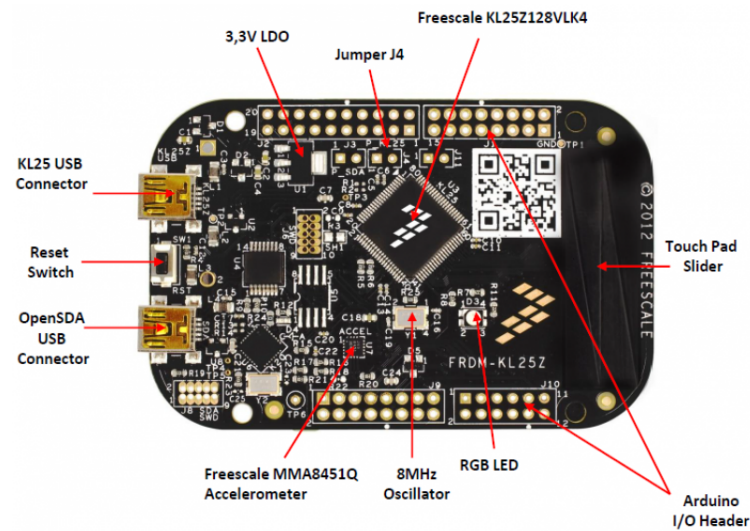


Figura 4.11: Tarjeta de desarrollo FRDM KL25Z

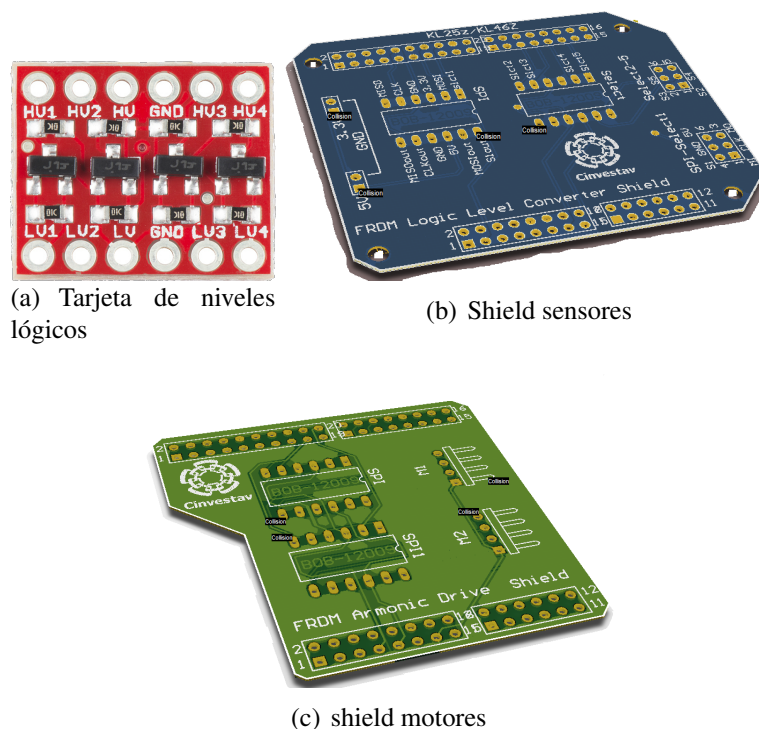


Figura 4.12: shields desarrolladas.

La tarjeta funciona con un voltaje de trabajo de 3.3 V y puede alimentarse con un voltaje de 5V. Sus salidas analógicas y digitales funcionan con 3.3V, esto resulta en una problemática

al intentar comunicar el encóder AMT20 con la tarjeta. Cada encóder emplea el protocolo SPI para comunicarse, este protocolo requiere el uso de 4 entradas/salidas digitales para establecer esta comunicación y 2 de alimentación del sensor.

El encóder funciona con un voltaje de 5V por lo tanto existe un problema en la capacidad de comunicar la tarjeta con el encóder. Lo anterior se resuelve empleando un convertidor de señales lógicas digitales bidireccional, que permite convertir señales de control de 3.3V a 5V y recibir señales de 5V para convertirlas a 3.3V imagen (a) de la Figura 4.12.

Se ha desarrollado la tarjeta mostrada en la imagen (b) de la Figura 4.12 que permite la comunicación de forma práctica entre la tarjeta y los sensores de posición angular. La tarjeta contiene las conexiones necesarias para ser montada sobre la tarjeta programable FRDM. Contiene en ella el puerto que permite montar el convertidor de señales digitales y comunica al encóder por medio de un puerto reservado para esta tarea. Se puede comunicar hasta 5 sensores al mismo tiempo.

La comunicación con el motor Harmonic drive tiene un problema similar al anterior. El motor funciona con un driver DDP 090 el cual recibe señales lógicas tanto de 3.3 V como con de 5 V. Con el propósito de aumentar la protección entre la unidad lógica y la unidad de potencia se elige emplear el mismo convertidor de señales para brindar una mayor protección contra regresos de corriente.

Un sistema electrónico de control para elementos que funcionan con alta potencia se debe separar el circuito de baja potencia (3 V a 5 V) del circuito que trabaja con potencia alta (12 V a 24 V) para proteger la electrónica de control. Para no poner en riesgo al posible usuario se toman todas las medidas necesarias que permitan eliminar la posibilidad de que el sistema encargado del control pueda fallar o resultar inutilizado.

Se desarrollo la tarjeta que puede verse en la imagen (c) de la Figura 4.12 que comunica a la FRDM k125 con el driver del motor. Está diseñada bajo el mismo concepto de la tarjeta encargada de la comunicación con los sensores. Es fácil de montar, esta dotada de puertos ideados para la conexión con el driver DDP 090 y se pueden conectar y controlar solo 2 motores al mismo tiempo.

Con los periféricos descritos anteriormente, se implementa en la tarjeta FRDM la programación donde se desarrollan 3 tareas principales:

- Recibir y leer los datos enviados por los sensores de posición angular (encóder AMT20).
- Procesamiento de los datos en el control proporcional derivativo (PD).
- Señal PWM a la salida del control para indicar el movimiento del motor Harmonic drive.

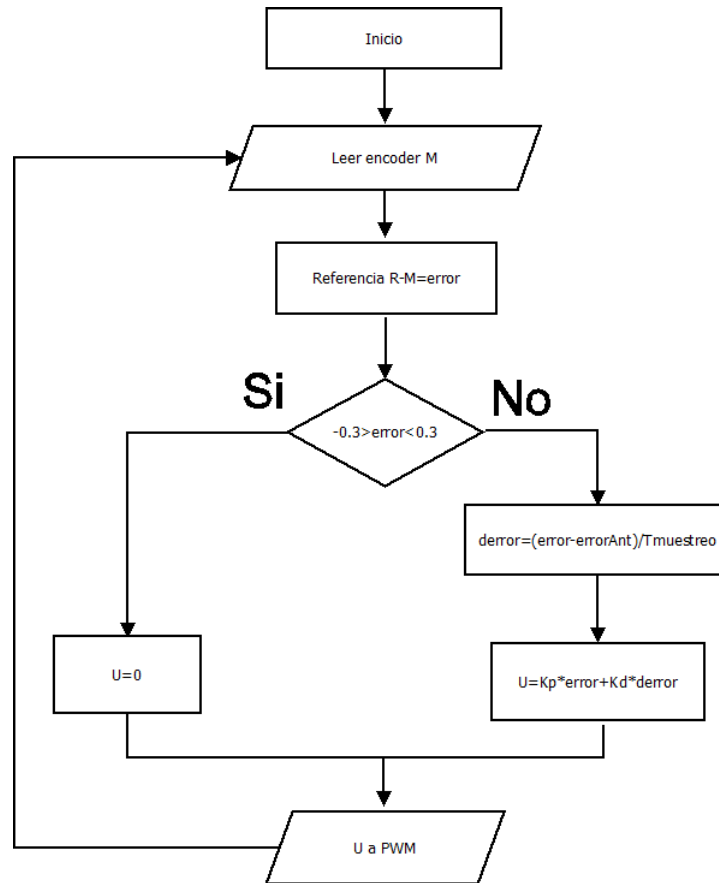


Figura 4.13: Diagrama de flujo a programar

En el diagrama 4.13 se aprecia un rango de  $\pm 0.3$  que amplía la región de convergencia del sistema para alcanzar la referencia y mantenerla.



## 5.1. Análisis de Estabilidad del sistema

En este capítulo se muestra el análisis de estabilidad de los respectivos sistemas. En [2] describen el modelo dinámico del actuador rotacional serie elástico de la siguiente forma:

$$I_M \ddot{\theta}_M + C_M \dot{\theta}_M + K(\theta_M - \theta_H) = \tau_M \quad (5.1.1)$$

$$ml^2 \ddot{\theta}_H + C_H \dot{\theta}_H + K(\theta_H - \theta_M) = \tau_H - mgl \sin(\theta_H) \quad (5.1.2)$$

- $I_M$  es la inercia del motor.
- $C_M$  es la fricción del motor.
- $K$  es la constante del resorte.
- $\tau_M$  es el torque del motor.
- $m$  es el peso del pie humano.
- $l$  es la longitud al centro de masa.
- $C_H$  es la fricción del pie.
- $\theta_M$  es la posición angular del motor.
- $\theta_H$  es la posición angular del pie humano.
- $\tau_H$  es el torque del miembro humano.
- $g$  es la gravedad.

La ecuación (5.1.1) es el modelo del motor y la ecuación (5.1.2) como el modelo dinámico del pie, siendo la ley de Hooke la que relaciona ambas ecuaciones, para este sistema se propone un control PD de la ecuación (5.1.3).

$$I_M \ddot{\theta}_M + C_M \dot{\theta}_M + K(\theta_M - \theta_H) = K_p * er + K_d * \dot{er} \quad (5.1.3)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_H + C_C\dot{\theta}_H + K(\theta_H - \theta_M) = \tau_H - mgl \sin(\theta_H)$$

Donde el error del sistema se compone por la fuerza en el elemento elástico y la fuerza deseada mostrado en la ecuación (5.1.4).

$$K(\theta_m - \theta_C) = Fr$$

El error es la diferencia entre la fuerza del resorte real con respecto a la fuerza en el resorte deseada.

$$er = Fr_d - Fr_r \quad (5.1.4)$$

$$\begin{aligned} I_M\ddot{\theta}_M + C_M\dot{\theta}_M + Fr &= K_p * (Fr_d - Fr_r) + K_d * (\dot{Fr}_d - \dot{Fr}_r) \\ ml^2\ddot{\theta}_C + C_C\dot{\theta}_C - Fr &= \tau_C - mgl \sin(\theta_C) \end{aligned}$$

El análisis de estabilidad se apoya de la transformada de laplace para poner el sistema en términos de la frecuencia, para obtener una función de transferencia lo que nos permitirá conocer los polos del sistema y concluir estabilidad asintótica.

$$I_M\ddot{\theta}_M + C_M\dot{\theta}_M + k\theta_M = K_p * k(\theta_{Md}) - K_p * k(\theta_M) + K_d * k(\dot{\theta}_{Md}) - K_d * k(\dot{\theta}_M)$$

En la ecuación anterior es debido mencionar que se toma como consideración que  $\theta_H = 0..$

$$\begin{aligned} I_M s^2 L\{\theta_M\} + C_M s L\{\theta_M\} + k L\{\theta_M\} &= \\ K_p * k * L\{\theta_{Md}\} - K_p * k * L\{\theta_M\} + K_d * k * s * L\{\theta_{Md}\} - K_d * k * s * L\{\theta_M\} & \\ L\{\theta_M\} (I_M s^2 + C_M s + K + K_p k + K_d k) &= L\{\theta_{Md}\} (K_p * k + K_p * k) \end{aligned}$$

Despejando términos obtenemos la siguiente función de transferencia.

$$\frac{\theta_M(s)}{\theta_{Md}(s)} = \frac{K_p * k + K_d * k}{I_M s^2 + C_M s + K + K_p k + K_d k} \quad (5.1.5)$$

Evaluando la función de transferencia con los valores mostrados en la Tabla 5.1 se gráfica la posición de los polos y ceros.

| Variables | Unidades  |
|-----------|-----------|
| Kp        | 1550      |
| Kd        | 155       |
| K         | 31        |
| Im        | 0.0130134 |
| Cm        | 0.0112426 |
| m         | 2kg       |

Tabla segunda 5.1: Tabla de valores del sistema.

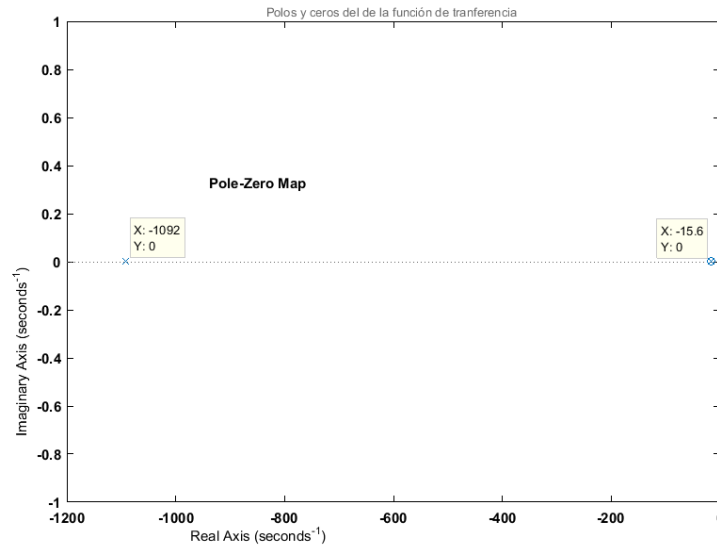


Figura 5.1: Grafico de los polos y ceros de la función de transferencia.

El procedimiento se repite con la segunda parte del modelo matemático.

$$ml^2\ddot{\theta}_H + C_C\dot{\theta}_H + k(\theta_H - \theta_M) = \tau_H - mgl \sin(\theta_H)$$

Aplicamos transformada de laplace.

$$ml^2 * L\{\ddot{\theta}_H\} + C_C * L\{\dot{\theta}_H\} + k * L\{\theta_H\} + mgl * L\{\theta_H\} = \tau_H(s)$$

Separamos términos y agrupamos:

$$L\{\theta_H\}(ml^2 * s^2 + C_C * s + k + mgl) = \tau_H(s)$$

$$L\{\theta_H\} = \frac{\tau_H(s)}{(ml^2 * s^2 + C_C * s + k + mgl)} \quad (5.1.6)$$

Podemos graficar los polos de la función descrita en la ecuación (5.1.6) a pesar de que no hay ceros involucrados.

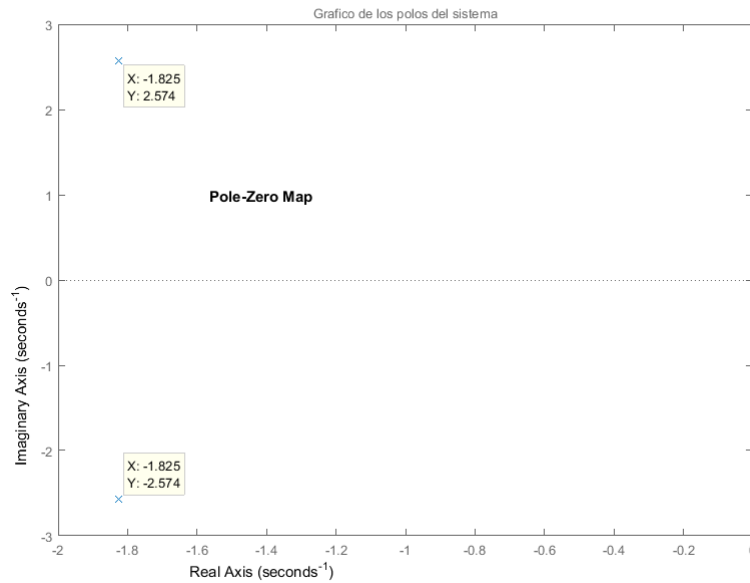


Figura 5.2: Gráfico de los polos de la función de transferencia.

Dado que los polos del sistema están situados del lado izquierdo del semiplano complejo tenemos que el sistema dinámico es estable.

## 5.2. Modelo espacio estado

Queremos entender claramente la forma con la que se transmite la fuerza a través del actuador para esto obtenemos el modelo en espacio de estados a partir del esquema físico del actuador rotacional serie elástico mostrado en la Figura 5.4 .

La Figura 5.3 describe la forma en que interactúan los elementos, masa 1, resorte, amortiguador y masa 2. Donde la masa 2 se desplazara con respecto a la masa 1 y depende del comportamiento del amortiguador y resorte. Este sistema es lineal y se puede llevar a la forma descrita en la Figura 5.4. El sistema describe ángulos pequeños ( $\sin \theta$  es pequeño) por lo tanto aún se comporta de forma lineal.

- L -Distancia entre m1 y m2 en equilibrio
- m1 -Masa del motor
- m2 -Masa de la carga
- $y_1$  -distancia de m1 con respecto al origen en la coordenada  $z''$



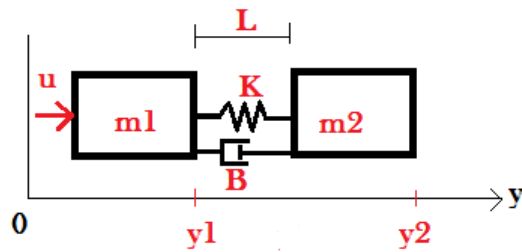


Figura 5.3: Diagrama masa resorte amortiguador.

- $y_2$  -distancia de  $m_2$  con respecto a  $y_1$
- $K$  -Constante elástica
- $B$  -Constante de amortiguación
- Masa total del actuador rotacional serie  $M=m_1+m_2$

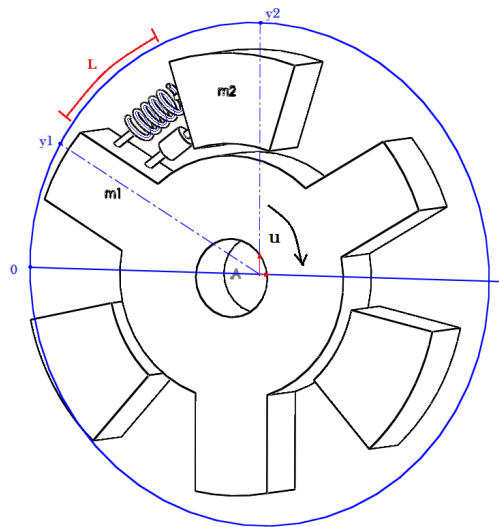


Figura 5.4: Modelo ARSE.

Partimos de la ecuación (5.2.1) de energía cinética, la cual es igual a un medio de la masa por la velocidad al cuadrado. En el sistema se tienen 2 masas, la ecuación será la suma de la energía cinética de cada masa en la ecuación (5.2.2).

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad (5.2.1)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 \quad (5.2.2)$$

La energía potencial del sistema representada por la ecuación (5.2.3) será de carácter elástico debido al resorte entre ambas masas. Se obtiene la energía potencial de la masa 2 como extremo final del sistema. Cabe señalar que el desplazamiento de  $y_2$  no es con respecto al origen coordinado del sistema, sino con respecto a la posición de  $m_1$  por lo que se tiene.

$$U = \frac{1}{2}K(y_2 - y_1 - L) \quad (5.2.3)$$

Se considera una fuerza de disipación de energía o fricción viscosa como la ecuación (5.2.4) para representar el elemento amortiguador del sistema, el cual actúa entre la masa 1 y la masa 2.

$$f = \frac{1}{2}\beta(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 \quad (5.2.4)$$

Empleamos la ecuación de Euler-Lagrange (5.2.5) para calcular la ecuación de fuerzas generalizadas  $Q$  (5.2.5) se escribe respecto a la coordenada generalizada  $q$  que corresponde a las posiciones  $y$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial l}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q} \quad (5.2.5)$$

Donde “ $l$ ” es el Lagrangiano dado por la ecuación (5.2.6).

$$l = T - U + f \quad (5.2.6)$$

$$l = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{q}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2)^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{q}_2^2 + \frac{1}{2}\beta\dot{\mathbf{q}}_2^2$$

$$l = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{q}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{q}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{q}}_1\dot{\mathbf{q}}_2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{q}}_2^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{q}_2^2 + \frac{1}{2}\beta\dot{\mathbf{q}}_2^2$$

Sustituimos en la ecuación (5.2.5) y resolvemos de la siguiente forma.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(\frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{q}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2)^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{q}_2^2 + \frac{1}{2}\beta\dot{\mathbf{q}}_2^2)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \quad (5.2.7)$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{q}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{q}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{q}}_1\dot{\mathbf{q}}_2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{q}}_2^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{q}_2^2 + \frac{1}{2}\beta\dot{\mathbf{q}}_2^2)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial(\frac{1}{2}\beta\dot{\mathbf{q}}_2^2)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} \right) - \frac{\partial l}{\partial \mathbf{q}_1} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} = m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{U}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} \right) - \frac{\partial l}{\partial \mathbf{q}_2} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} = m_2\dot{\mathbf{q}}_1 + m_2\dot{\mathbf{q}}_2 + K\mathbf{q}_2 + \beta\dot{\mathbf{q}}_2 = 0$$

Obtenemos la ecuación (5.2.8) de fuerzas generalizadas con respecto a la coordenada generalizada.

$$(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 = u \quad (5.2.8)$$

$$m_2(\ddot{\mathbf{q}}_2 + \ddot{\mathbf{q}}_1) + K\mathbf{q}_2 + \beta\dot{\mathbf{q}}_2 = 0$$

Las variables de estado quedan representadas de la forma.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{q}_1 & \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 &= \dot{\mathbf{q}}_1 & \dot{\mathbf{x}}_2 &= \frac{k\mathbf{x}_3}{m_1} + \frac{B\mathbf{x}_4}{m_1} + \frac{\mathbf{u}}{m_1} \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{q}_2 & \dot{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_4 &= \dot{\mathbf{q}}_2 & \dot{\mathbf{x}}_4 &= -\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}\mathbf{x}_3 - \frac{\beta(m_1+m_2)}{m_1m_2}\mathbf{x}_4 - \frac{\mathbf{u}}{m_1} \end{aligned}$$

Transferimos el sistema a la forma matricial representada en la ecuación (5.2.9) la cual nos permitirá obtener la representación espacio estado del sistema. Esta representación nos indica que el sistema es lineal e invariante en el tiempo (de coeficientes constantes). Podremos identificar las matrices A, B, C y D, las cuales serán empleadas para concluir controlabilidad, observabilidad y estabilidad.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.2.9)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{t})$$

Agrupamos los términos dependiendo de las variables de estado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{Mk}{m_1m_2} & -\frac{M\beta}{m_1m_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (5.2.10)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + [0] \mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (5.2.11)$$

Donde la ecuación diferencial de primer orden se compone por la ecuación (5.2.10) es la ecuación de estado y la ecuación (5.2.11) es la ecuación de salida.

Para cualquier cálculo posterior se consideran los valores presentados en la Tabla 5.2, como valores reales por parte del prototipo desarrollado.

| Variables | Unidades               |
|-----------|------------------------|
| m1 motor  | 1 kg                   |
| m2 carga  | 2 kg                   |
| k         | 6100 N/ms <sup>2</sup> |
| M         | m1+m2 kg               |
| β         | 17.3                   |

Tabla segunda 5.2: Tabla de valores para el modelo espacio estado.

### 5.2.1. Controlabilidad

Se determinará dada una entrada finita en tiempo y energía finita, trasladar al sistema a cualquier punto dentro de la región de espacio de estados en tiempo finito empleando las

técnicas descritas en [12].

Con ayuda del análisis de controlabilidad obtendremos los valores del espacio de estado que podremos alcanzar con las entradas adecuadas. Primero se averigua si existe una entrada tal que lleve al sistema de un estado inicial a uno final en tiempo finito.

Si se da el caso de no controlabilidad queremos averiguar qué puntos del espacio de estado podremos alcanzar a partir de un estado inicial definido.

El análisis de controlabilidad se realiza a partir del calculo de la matriz de controlabilidad ecuación (5.2.12).

$$Q = [B | AB | A^2B | A^{n-1}B] \quad (5.2.12)$$

Sustituimos las matrices A y B en la ecuación (5.2.12), y resolvemos para obtener la ecuación (5.2.13).

$$Q = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{Mk}{m_1 m_2} & -\frac{M\beta}{m_1 m_2} \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{Mk}{m_1 m_2} & -\frac{M\beta}{m_1 m_2} \end{array} \right]^2 * \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{Mk}{m_1 m_2} & -\frac{M\beta}{m_1 m_2} \end{array} \right]^3 * \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (5.2.13)$$

$$Q = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1^2} & -\frac{1}{m_1} \left( \frac{k}{m} - M \frac{\beta^2}{m_1^2 m_2} \right) \\ \frac{1}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1^2} & -\frac{1}{m_1} \left( \frac{k}{m_1} - M \frac{\beta^2}{m_1^2 m_2} \right) & \frac{1}{m_1} \left( \frac{\beta}{m_1} \left( M \frac{k}{m_1 m_2} - M^2 \frac{\beta^2}{m_1^2 m_2^2} \right) + M \frac{k}{m} \frac{\beta}{m_1 m_2} \right) \\ 0 & -\frac{1}{m_1} & M \frac{\beta}{m_1^2 m_2} & \frac{1}{m_1} \left( M \frac{k}{m_1 m_2} - M^2 \frac{\beta^2}{m_1^2 m_2^2} \right) \\ -\frac{1}{m_1} & M \frac{\beta}{m_1^2 m_2} & \frac{1}{m_1} \left( M \frac{k}{m_1 m_2} - M^2 \frac{\beta^2}{m_1^2 m_2^2} \right) & -\frac{1}{m_1} \left( M^2 k \frac{\beta}{m_1^2 m_2^2} + M \frac{\beta}{m_1 m_2} \left( M \frac{k}{m_1 m_2} - M^2 \frac{\beta^2}{m_1^2 m_2^2} \right) \right) \end{array} \right]$$

Es posible determinar la controlabilidad del sistema al determinar el rango de la matriz Q. Para esto requerimos los datos reales de las constantes del sistema, emplearemos los valores presentados en la tabla 5.2.

$$Q = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{0.7} & -\frac{7.3}{0.7^2} & -\frac{1}{0.7} \left( \frac{7.3}{0.7} - 2.7 * \frac{7.3^2}{0.7^2 * 2} \right) \\ \frac{1}{0.7} & -\frac{7.3}{0.7^2} & -\frac{1}{0.7} * \left( \frac{31}{0.7} - (2.7) \frac{7.3^2}{0.7^2 * 2} \right) & \frac{1}{0.7} \left( \frac{7.3}{0.7} \left( 2.7 * \frac{7.3}{0.7 * 2} - 2.7^2 * \frac{7.3^2}{0.7^2 * 2^2} \right) + 2.7 * 7.3 * \frac{7.3}{0.7^2 * 2} \right) \\ 0 & -\frac{1}{0.7} & (2.7) \frac{7.3}{0.7^2 * 2} & \frac{1}{0.7} \left( 2.7 * \frac{31}{0.7 * 2} - 2.7^2 * \frac{7.3^2}{0.7^2 * 2^2} \right) \\ -\frac{1}{0.7} & (2.7) * \frac{7.3}{0.7^2 * 2} & \frac{1}{0.7} * \left( 2.7 * \frac{31}{0.7 * 2} - 2.7^2 * \frac{7.3^2}{0.7^2 * 2^2} \right) & -\frac{1}{0.7} \left( 2.7^2 * 31 * \frac{7.3}{0.7^2 * 2^2} + 2.7 * \frac{7.3}{0.7 * 2} \left( 2.7 * \frac{31}{0.7 * 2} - 2.7^2 * \frac{7.3^2}{0.7^2 * 2^2} \right) \right) \end{array} \right]$$

Al calcular los elementos de la matriz (5.2.13), se obtiene la matriz (5.2.14). Como es de rango pleno, se concluye que el sistema es completamente controlable para los valores que se emplearon.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1.4286 & -14.898 & 194.84 \\ 1.4286 & -14.898 & 146.48 & -2533.4 \\ 0 & -1.4286 & 20.112 & -197.74 \\ -1.4286 & 20.112 & -197.74 & 1581.5 \end{bmatrix} \quad (5.2.14)$$

### 5.2.2. Función de transferencia

La función de transferencia permitirá conocer la relación entre señal de entrada del sistema y sus dos salidas.

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D \quad (5.2.15)$$

La ecuación (5.2.15) es una matriz de funciones de transferencia que pertenecen a  $R^{2 \times 1}$ , cuyos elementos son funciones racionales estrictamente propias con indeterminado  $s$  que es la variable de Laplace, esta ecuación emplea a las matrices A, B, C y D del modelo espacio estado.

Los valores característicos de A, es decir las raíces del polinomio característico de A  $\det(sI - A)^{-1}$  son los polos del sistema. El sistema es estable si todos sus polos se encuentran del lado izquierdo del plano complejo.

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & -\frac{Mk}{m_1 m_2} & -\frac{M\beta}{m_1 m_2} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{k s m_2 m_1^2 + M k \beta m_1 - M k m \beta}{m m_2 s^4 m_1^2 + M m \beta s^3 m_1 + M k m s^2 m_1} & \frac{k m_1 m_2 + m s \beta m_2}{m m_1 m_2 s^4 + M m \beta s^3 + M k m s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{k s m_2 m_1^2 + M k \beta m_1 - M k m \beta}{m m_2 s^3 m_1^2 + M m \beta s^2 m_1 + M k m s m_1} & \frac{k m_1 m_2 + m s \beta m_2}{m m_1 m_2 s^3 + M m \beta s^2 + M k m s} \\ 0 & 0 & \frac{M \beta + s m_1 m_2}{m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} & \frac{m_2}{m_1 m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} \\ 0 & 0 & -M \frac{k}{m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} & \frac{s m_1 m_2}{m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{k s m_2 m_1^2 + M k \beta m_1 - M k m \beta}{m m_2 s^4 m_1^2 + M m \beta s^3 m_1 + M k m s^2 m_1} & \frac{k m_1 m_2 + m s \beta m_2}{m m_1 m_2 s^4 + M m \beta s^3 + M k m s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{k s m_2 m_1^2 + M k \beta m_1 - M k m \beta}{m m_2 s^3 m_1^2 + M m \beta s^2 m_1 + M k m s m_1} & \frac{k m_1 m_2 + m s \beta m_2}{m m_1 m_2 s^3 + M m \beta s^2 + M k m s} \\ 0 & 0 & \frac{M \beta + s m_1 m_2}{m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} & \frac{m_2}{m_1 m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} \\ 0 & 0 & -M \frac{k}{m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} & \frac{s m_1 m_2}{m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2 m_1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{m_1} \frac{k m_1 m_2 + m s \beta m_2}{m m_1 m_2 s^4 + M m \beta s^3 + M k m s^2} \\ -\frac{m_2}{m_1 m_2 s^2 + M \beta s + M k} \end{pmatrix} \quad (5.2.16)$$

La función de transferencia mostrada en la ecuación (5.2.16) permitirá determinar estabilidad del sistema a partir de las raíces de los polinomios. El sistema será estable si las raíces o polos del sistema están del lado izquierdo del plano complejo.

Empleando los valores de la tabla 5.2 se obtienen las raíces de las funciones de transferencia.

Los polos de la primera función de transferencia son:

$$\begin{aligned} & -12.9750 + i94.7716 \\ & -12.9750 - i94.7716 \\ & 0.000 - i0.00 \end{aligned}$$

Los polos de la segunda función de transferencia son:

$$\begin{aligned} & -12.9750 + i94.7716 \\ & -12.9750 - i94.7716 \end{aligned}$$

Debido a que existe un polo en cero se deduce que el sistema es críticamente estable.

### 5.2.3. Observabilidad

Se quiere determinar la posibilidad de inferir o calcular los valores del vector de estado en cualquier instante de tiempo a partir del modelo del sistema y del conocimiento de la señal de entrada  $U(t)$  y de la respectiva señal de salida  $y(t)$ .

El cálculo de la observabilidad del sistema se realiza a partir del gramiano de observabilidad, el cual por medio de su determinante es posible conocer la observabilidad del sistema. Se define en [12] como: Un sistema es observable si todos los puntos del espacio de estado son observables.

La matriz de observabilidad descrito por la ecuación (5.2.17) corresponde al caso invariante en el tiempo. Debe ser de rango completo para que el sistema sea completamente observable.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (5.2.17)$$

Conocemos la matriz C de la ecuación (5.2.11) y la matriz A.

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ CA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{Mk}{m_1 m_2} & -\frac{M\beta}{m_1 m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ CA^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{Mk}{m_1 m_2} & -\frac{M\beta}{m_1 m_2} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & -M\frac{k}{m_1 m_2} & -M\frac{\beta}{m_1 m_2} \end{bmatrix} \\ CA^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{Mk}{m_1 m_2} & -\frac{M\beta}{m_1 m_2} \end{bmatrix}^3 \\ CA^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Mk\frac{\beta}{m_1^2 m_2} & \frac{k}{m_1} - M\frac{\beta^2}{m_1^2 m_2} \\ 0 & 0 & M^2 k\frac{\beta}{m_1^2 m_2^2} & M^2\frac{\beta^2}{m_1^2 m_2^2} - M\frac{k}{m_1 m_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se obtiene la matriz "O" de observabilidad.

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & -M \frac{k}{m_1 m_2} & -M \frac{\beta}{m_1 m_2} \\ 0 & 0 & -M k \frac{\beta}{m_1^2 m_2} & \frac{k}{m_1} - M \frac{\beta^2}{m_1^2 m_2} \\ 0 & 0 & M^2 k \frac{\beta}{m_1^2 m_2} & M^2 \frac{\beta^2}{m_1^2 m_2} - M \frac{k}{m_1 m_2} \end{bmatrix} \quad (5.2.18)$$

Se determina que todas las columnas de la matriz (5.2.18) son linealmente independientes por lo tanto la matriz  $O$  es de rango completo. Concluimos que el sistema es completamente observable.





## 6.1. Simulaciones

### 6.1.1. Simulación del modelo en función de transferencia

Para experimentar con el comportamiento del ARSE, se trabajara con el modelo matemático descrito por la ecuación (3). El modelo representa el comportamiento del motor y la carga del sistema los cuales están ligados por el elemento elástico (resorte), con características específicas entre ellas su coeficiente de elasticidad (K).

Se plantea un comportamiento en lazo abierto del sistema con un valor relativamente pequeño a su entrada para poder conocer su respuesta. Esto permite experimentar finalmente con un control PD con retroalimentación de fuerza.

La simulación queda compuesta por 2 bloques principales mostrados en la imagen de la Figura 6.1. Los cuales contienen el modelo dinámico del motor y el modelo dinámico de la estructura mecánica. Ambos se interconectan por el elemento elástico el cual esta representado por la ley de Hooke. Conocemos a partir del modelo que tenemos a la entrada un torque o par en el motor y como salida tenemos la medición de la fuerza aplicada en el resorte.

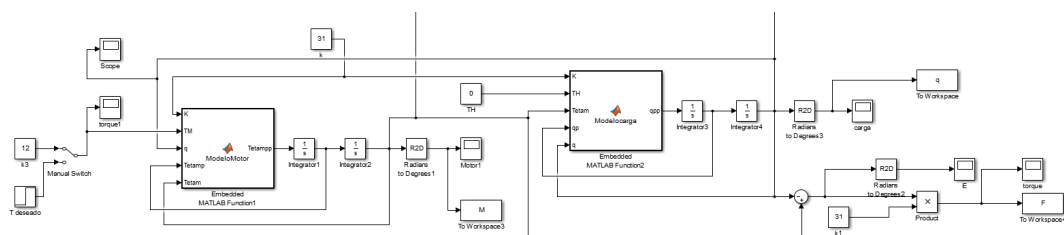


Figura 6.1: Simulación del actuador rotacional serie elástico.

Para complementar los resultados de la simulación se implementa un modelo 3D de una articulación. Se muestra el comportamiento del motor y la carga por separado de tal manera que sea visual el comportamiento del ARSE y podamos analizar defectos y comportamientos imprevistos.

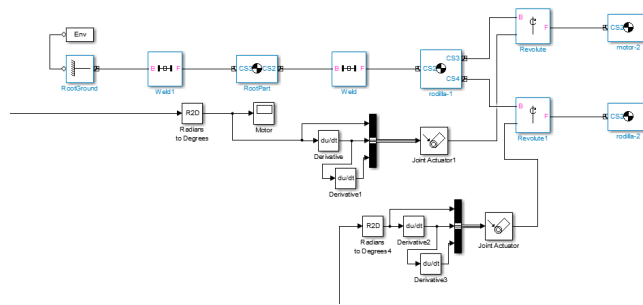


Figura 6.2: Simulación 3D del ARSE.

En esta parte de la simulación se tienen como entradas la posición del motor y la posición de la carga. Para mover la representación gráfica descrita en la Figura 6.3.

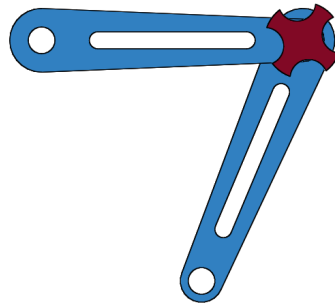


Figura 6.3: Simulación 3D del ARSE, figura.

En esta prueba se le aplica un torque al motor para generar movimiento en la articulación de la rodilla. Se espera que exista alguna oscilación en la articulación debido al resorte que une a esta con la flecha del motor. Estas oscilaciones deben ser atenuadas cuando se calcula de manera correcta el control y los parámetros del resorte. Esto se ve reflejado en los gráficos de la posición del efector final.

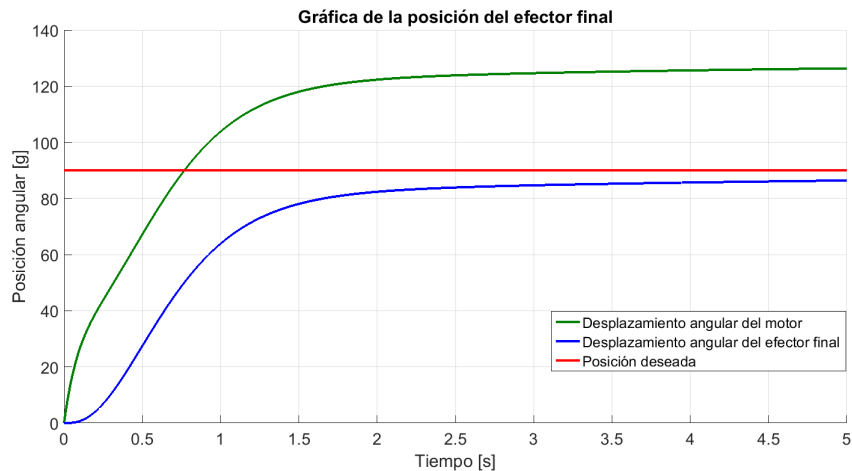


Figura 6.4: Gráfico de posición del motor y del efector final.

En el gráfico de la Figura 6.4 se puede notar el desplazamiento del eje del motor y el desplazamiento de la articulación, la diferencia de posición angular entre el motor y el efector final es la deformación que sufre el resorte y la cual permite medir la fuerza obtenida.

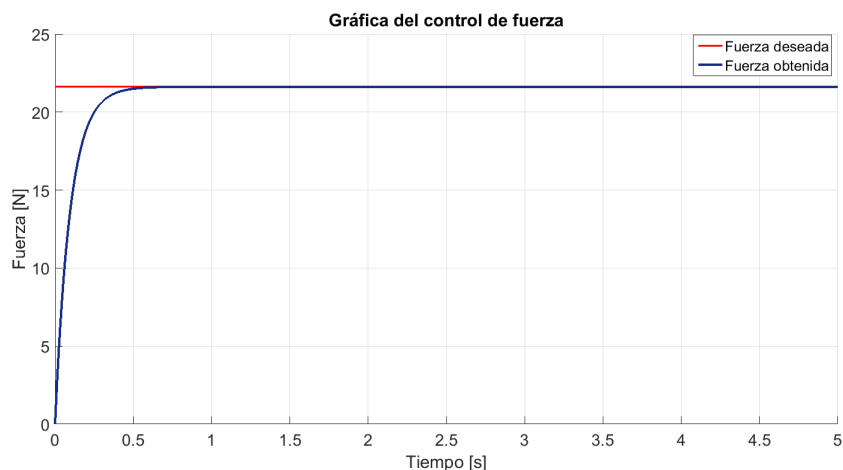


Figura 6.5: Gráfico de la fuerza en el sistema.

En el gráfico de la Figura 6.5 se muestra el torque generado por el actuador aplicando un control por retroalimentación de fuerza. El control permite que el sistema alcance la fuerza deseada con una dinámica suave.

Durante las primeras simulaciones obteníamos un comportamiento oscilante desmedido que impedía alcanzar la referencia. Esto debido a que el valor de la impedancia genera un comportamiento subamortiguado. Como solución se elige un valor de la impedancia que nos entregue un sistema sobre amortiguado el cual reduce la oscilación en el comportamiento del actuador.

### 6.1.2. Simulación del modelo espacio estado

En base al modelo representado por la ecuación (5.2.10), se formula la simulación mostrada en la Figura 6.6, la simulación muestra el comportamiento del ARSE en lazo cerrado con un



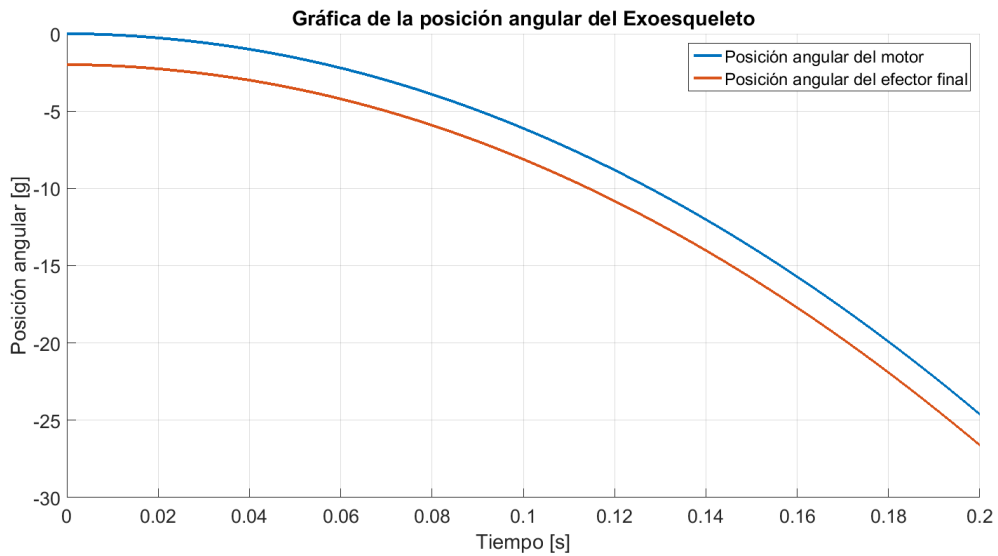


Figura 6.7: Gráfico del desplazamiento angular del motor en la simulación.

En el gráfico de la Figura 6.8 el valor del torque se obtiene a partir de una fuerza de 12 N y la distancia al centro de masa de la carga que es de 30 cm.

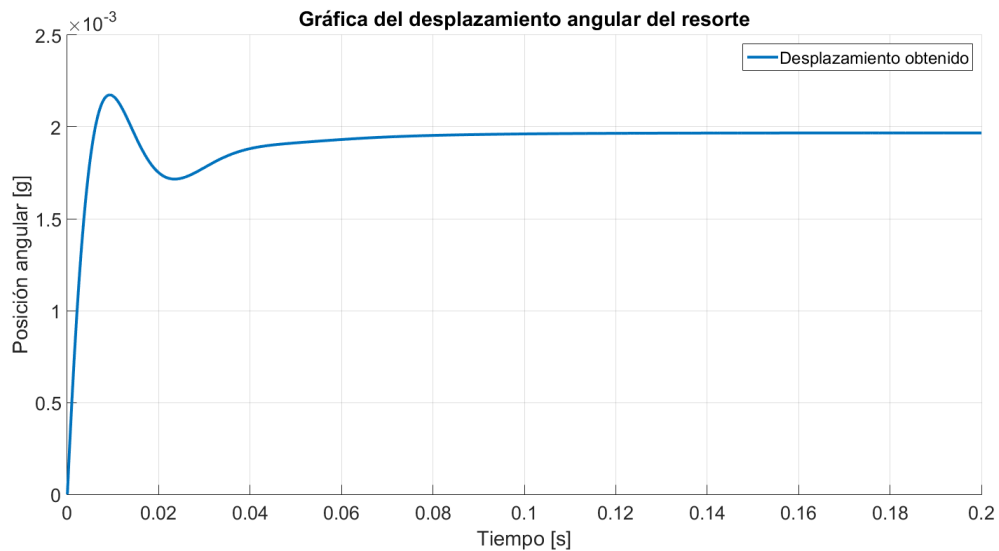


Figura 6.8: Gráfico del desplazamiento del elemento elástico.

El control logra alcanzar el torque deseado y se muestra en el gráfico de la Figura 6.9 pero resulta imposible situar el efector final en una posición específica debido al torque aplicado por el motor de manera ininterrumpida.

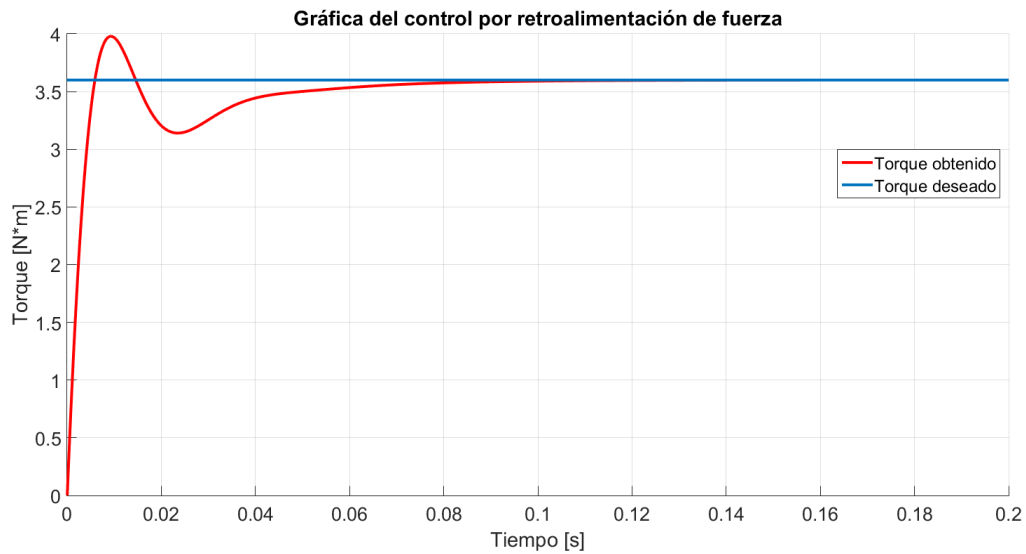


Figura 6.9: Gráfico del control por retroalimentación de fuerza.

## 6.2. Resultados experimentales

### 6.2.1. Resultados de prueba para el control de una posición deseada

La siguiente prueba tiene como objetivo el poder alcanzar una posición angular deseada del efector final a partir del control por retroalimentación de fuerza vea la Figura 6.10. Deducimos que existe una fuerza específica para toda posición angular, en función del peso de la carga y de la longitud del brazo de palanca. Podemos obtener un control de posición sin necesidad de una retroalimentación del error de posición.

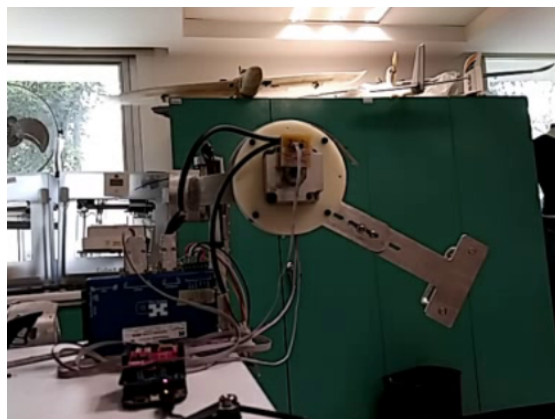


Figura 6.10: Prueba de posición

En esta prueba se conoce el peso (0.430 kg) y la longitud del brazo de palanca (32cm), por experimentación el sistema tiene un rango de 0 a 12 N en un rango de movimiento de 0 a 100 grados, se quiere alcanzar la posición de 98 grados para la cual se necesita una fuerza deseada

de 12 N.

Como se muestra en el gráfico de la Figura 6.11 se logra alcanzar la posición, el sistema alcanza la referencia gracias al algoritmo de control por retroalimentación de fuerza como se observa en la Figura 6.12, donde se aprecian oscilaciones debidas al comportamiento del elemento elástico representadas por pequeñas oscilaciones las cuales son mas apreciables en el gráfico del error en la Figura 6.13.

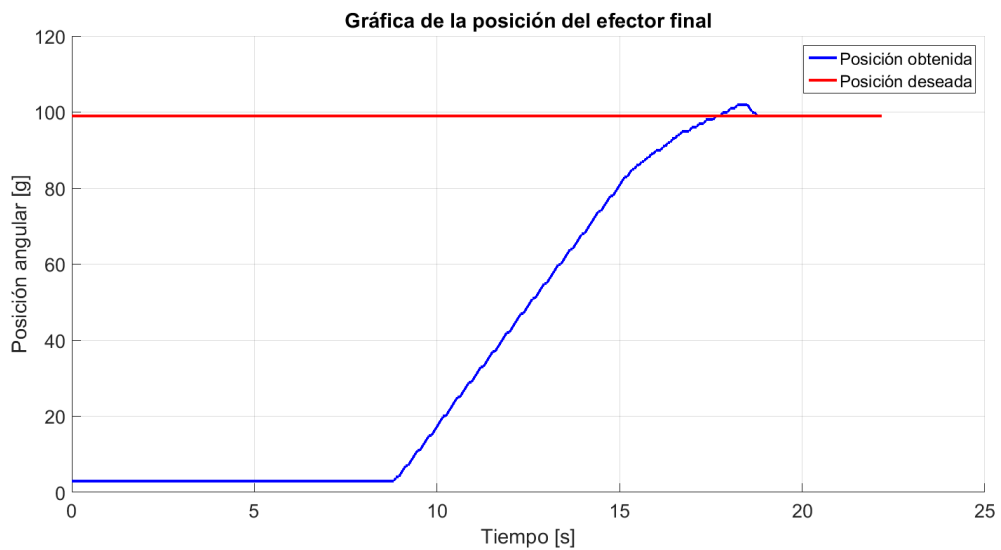


Figura 6.11: Gráfico de posición del sistema

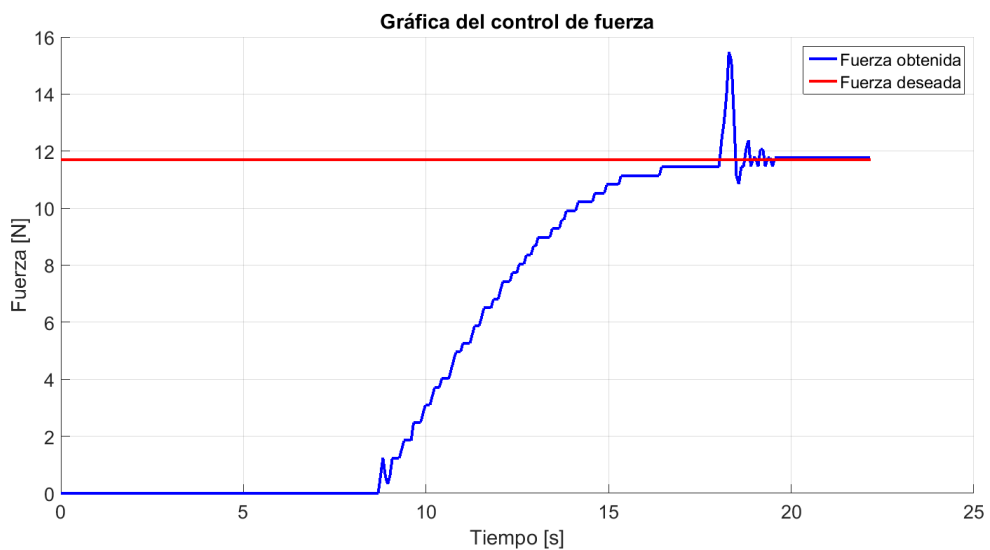


Figura 6.12: Gráfico del control de fuerza

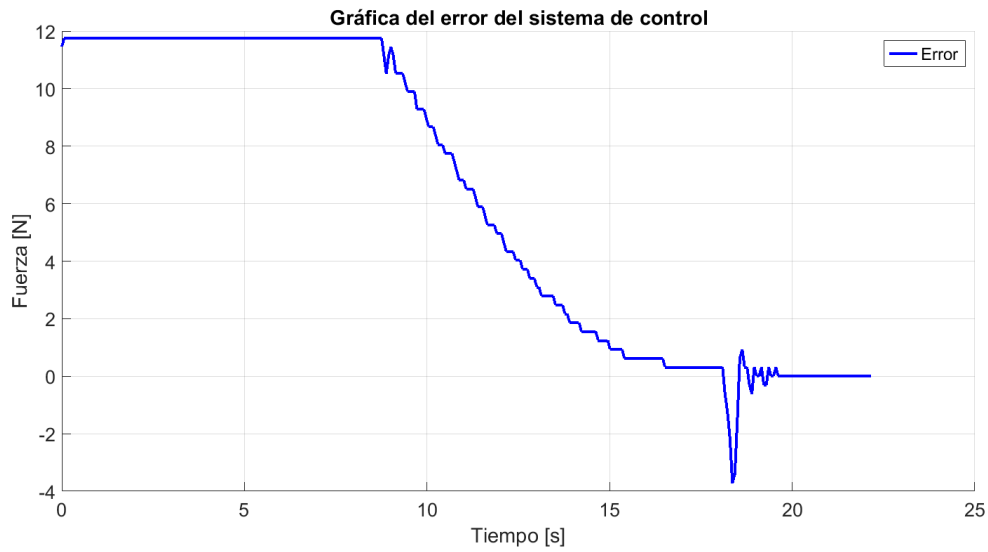


Figura 6.13: Gráfico del error en el sistema

En el gráfico de la Figura 6.14 se comparan los datos obtenidos de la simulación del modelo espacio estado con los datos obtenidos de la prueba del prototipo donde ambos datos muestran una evolución similar y la diferencia radica en como converge cada uno. En el caso de la simulación se colocó un límite para la velocidad angular del motor acorde con la velocidad empleada en las mediciones reales lo que termina afectando a la velocidad con la que converge a la referencia, resultando en una mejor velocidad de convergencia en los datos reales.

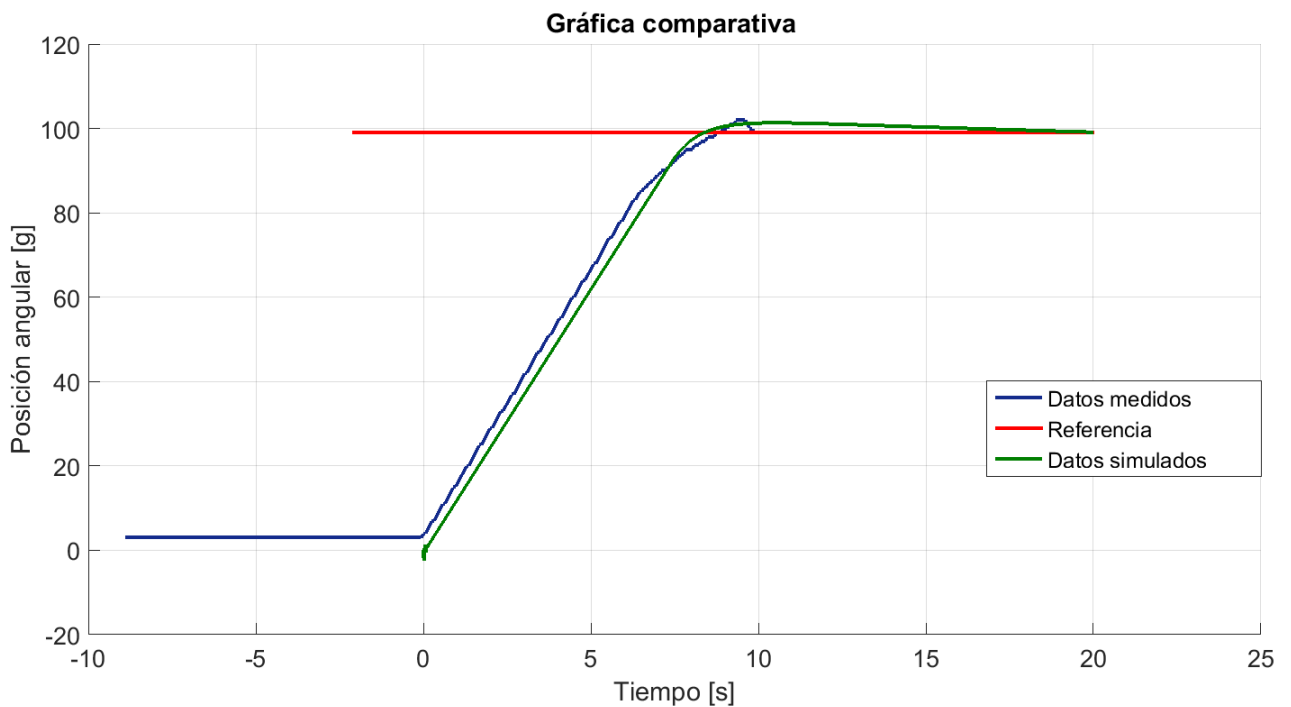


Figura 6.14: Gráfico comparativo



El gráfico de la Figura 6.15 muestra una comparativa de la posición angular de la articulación cuando se utiliza el control por retroalimentación de fuerza propuesto y un control convencional de retroalimentación de posición. Se aprecia que la velocidad de convergencia es similar y al acercarse a la referencia tarda en hacer converger a la posición. Se aprecia un sobreimpulso del control de fuerza en comparación del control de posición.

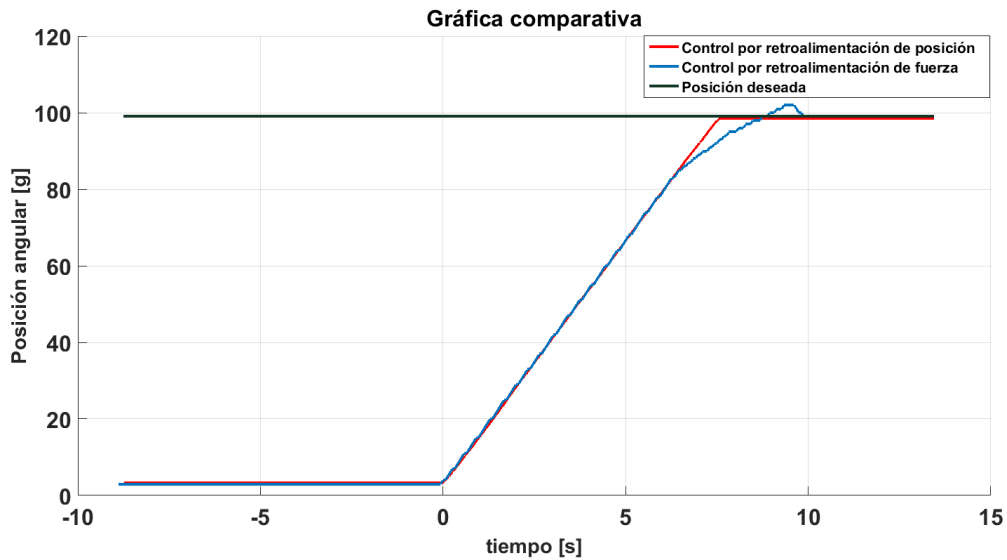


Figura 6.15: Gráfico comparativo entre un control de posición y el control de fuerza.

### 6.2.2. Prueba del control de fuerza deseada con una carga

La prueba se desarrolla de manera similar que la anterior. Se quiere alcanzar una posición deseada basándonos en una fuerza deseada en el control de fuerza teniendo una carga de 0.9 Kilogramos vea la Figura 6.16.

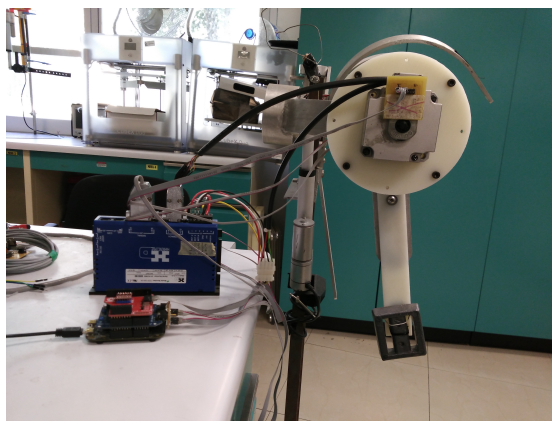


Figura 6.16: Prueba de posición con carga

Debido al peso nuestro rango de fuerza va desde 0 a 26 Newtons y un movimiento angular de 0 a 100 grados.

El gráfico de la Figura 6.17 muestra el comportamiento del control midiendo la posición angular de la carga, el motor y la referencia.

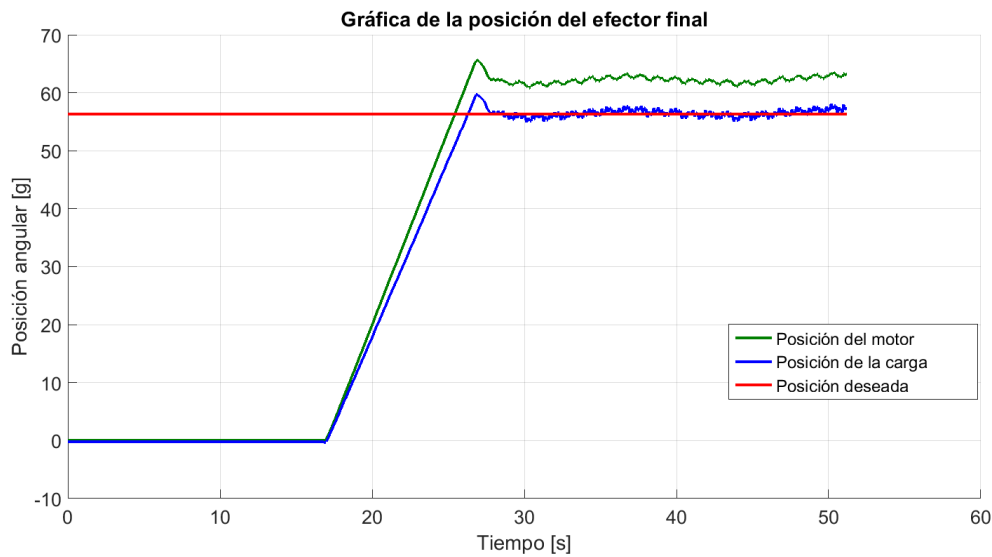


Figura 6.17: Gráfico de la posición angular del efector final con el control por retroalimentación de fuerza.

Como se aprecia en el gráfico de la Figura 6.18 el cambio en el peso de la carga genera oscilaciones. Estas se pueden suprimir con un ajuste de las ganancias en función de los resortes empleados y el peso de la carga. Estas oscilaciones son apreciables en ambos gráficos y son generadas por el resorte del sistema.

Por medio de estos resultados se aprecia con claridad el comportamiento del resorte en el funcionamiento del sistema. Donde la deformación de este entrega la medición de fuerza para el control para que el motor entre en acción.

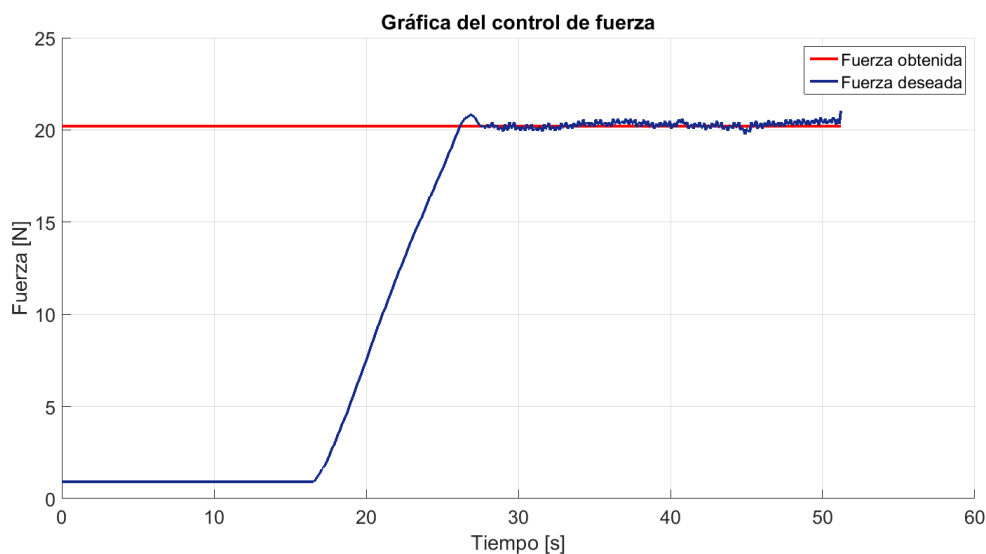


Figura 6.18: Gráfico de la fuerza a la salida del sistema.

### 6.2.3. Resultados de prueba control de fuerza aplicada sobre un objeto

En esta prueba se aplicó una fuerza deseada sobre un objeto endeble vea la Figura 6.19. El objetivo es comprobar que es posible controlar la fuerza con la que el exoesqueleto interactúa con objetos externos y de esta forma brindarle mayor capacidad de manipulación al usuario como es el caso de sujetar un objeto relativamente frágil y no se desea aplicar fuerza excesiva para moverlo y manipularlo.

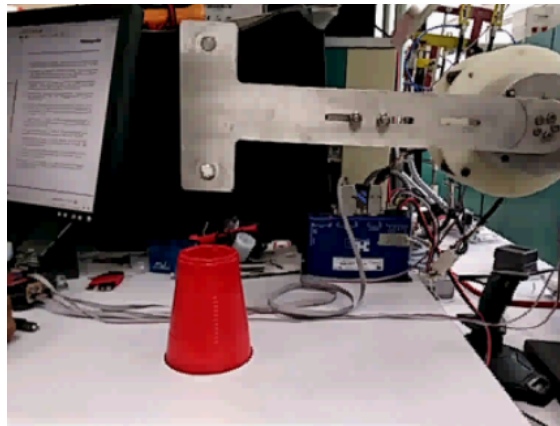


Figura 6.19: Prueba de control de fuerza sobre un objeto

Se le programó al prototipo de brazo el situarse a 70 grados, partiendo de una posición inicial de 100 grados y sobre una mesa, entre el brazo y la mesa tenemos un baso desechable al que el sistema puede aplicarle una fuerza máxima de 25 Newtons.

Como se muestra en el gráfico de la Figura 6.20, el sistema nunca alcanza la referencia a 70 grados esto debido a que el baso se interpone en su camino y el control de fuerza interviene en la posición limitándola a la necesaria para aplicar la fuerza máxima sobre el baso desechable.

En el gráfico de la Figura 6.21 se muestra que en el sistema se generan una fuerza inicial debida a la gravedad y en el momento que se toca el baso la dirección de la fuerza cambia, por eso la medición de la fuerza necesariamente pasa por cero y se dispara hasta alcanzar la referencia (25 Newtons).

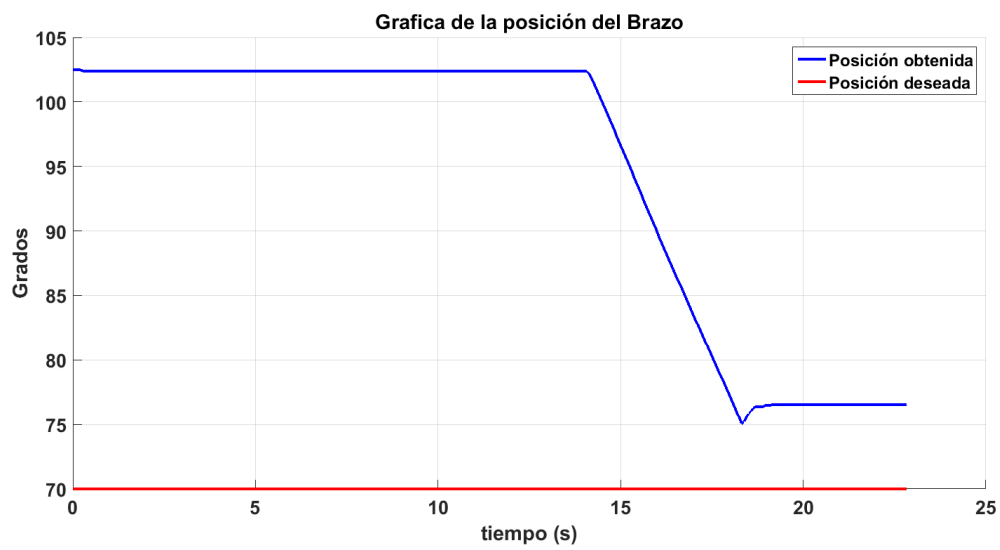


Figura 6.20: Gráfico de la posición del sistema

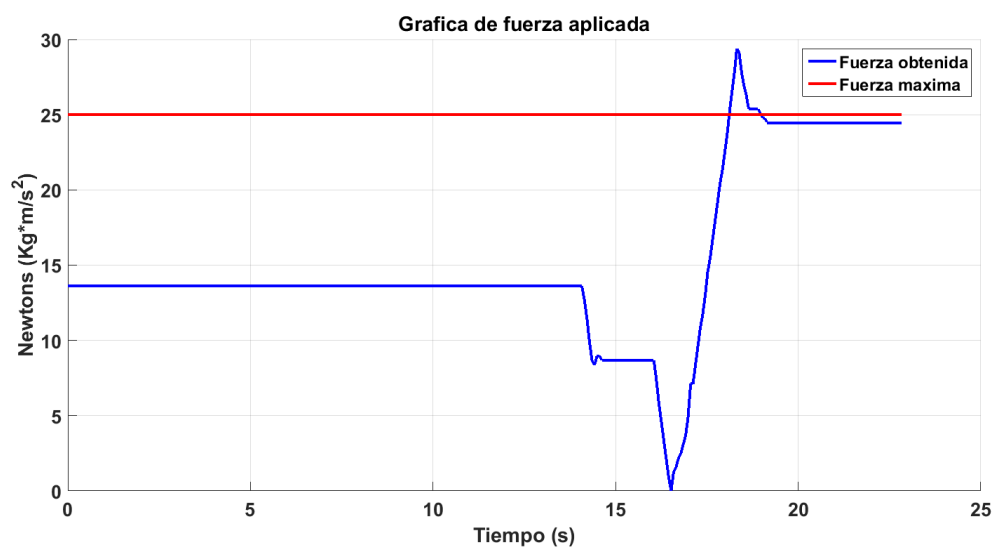


Figura 6.21: Gráfico de la fuerza aplicada sobre el objeto

---

## Conclusiones

---

El desarrollo de exoesqueletos es una rama de investigación que a pesar de generar avances constantes aún es muy joven. Se ha logrado involucrar a los exoesqueletos en diversas tareas con buenos resultados, desde es el sector industrial hasta el médico.

El actuador rotacional serie elástico es un mecanismo de control para exoesqueletos. Este beneficia al simplificar los métodos de control y motorización de exoesqueletos. Como resultado se mejora el control y beneficia a la interacción entre el usuario y el exoesqueleto.

Las investigaciones de nuevos métodos de control tienen el objetivo de mejorar la interacción humano máquina, así como permitir un movimiento más fluido. El control por retroalimentación de fuerza es ideal para el control de los motores de un exoesqueleto cuando se quiere imitar la forma con la que el cuerpo humano controla la fuerza con la que se desplaza y la fuerza con la que manipula objetos.

El diseño de los actuadores rotacionales serie elástico (ARSE) permite su implementación en exoesqueletos de previa construcción. Esta investigación permitirá aplicar el ARSE en múltiples tipos de exoesqueletos. Al conocer el funcionamiento de los ARSE se puede aplicar sus diferentes variantes dependiendo de las necesidades y características del exoesqueleto y de la tarea a realizar con este.

Se presentó el diseño de un actuador rotacional serie elástico pensado para trabajar con un motor Harmonic drive. El diseño logra cumplir tareas para el apoyo al movimiento y el aumento de fuerza. Esto se demostro por medio de las pruebas para alcanzar una posición deseada y donde el usuario solo necesita aplicar una pequeña fuerza para que el exoesqueleto levante la carga.

El control PD por retroalimentación de fuerza cumplió adecuadamente con el objetivo del control. Esto es un primer paso para el uso de algoritmos de control de fuerza, lo que en posteriores trabajos servirá como bases para aplicar controles más complejos que permitan ampliar las aptitudes de los exoesqueletos.

El análisis del modelo dinámico del ARSE nos demuestra la estabilidad, controlabilidad y observabilidad del sistema y esto nos permitió alcanzar una posición deseada dentro del espacio

de estado a partir de una entrada acotada en tiempo y fuerza. Esto facilita la implementación de algoritmos de control más complejos a futuro.

Las pruebas demostraron un comportamiento acorde a lo esperado del actuador. Tanto en simulación como en las pruebas reales se obtuvieron resultados favorables.

## Trabajo a futuro

Se va a instalar el ARSE en un exoesqueleto de pierna para probar el comportamiento con este exoesqueleto.

Se implementaran diferentes materiales para el ARSE y se buscara fabricar el resorte para mejorar su funcionamiento.

Se escribirá un articulo que recopile la información necesaria para el diseño del ARSE, así como de las pruebas realizadas.

Se ha planteado el aplicar el ARSE en cada una de las articulaciones de el exoesqueleto de pierna para realizar pruebas de movilidad.

Se va a rediseñar el ARSE para optar por una versión mas compacta que aplique los mismos principios la cual se trabajara en conjunto de un motor para exoesqueletos que se está desarrollando en el laboratorio.

Se extenderá el modelo matemático del ARSE para trabajar todas las fuerzas involucradas por cada resorte para complementar el articulo a escribir.





# Bibliografía

---

- [1] David W. (David William) Robinson. Design and analysis of series elasticity in closed-loop actuator force control. *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, page 123, 05 2010.
- [2] Kyoungchul Kong, Joonbum Bae, and Masayoshi Tomizuka. Control of rotary series elastic actuator for ideal force-mode actuation in human–robot interaction applications. *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, 14(1):105–118, 2009.
- [3] Giorgio Carpino, Dino Accoto, Fabrizio Sergi, Nevio Luigi Tagliamonte, and Eugenio Guglielmelli. A novel compact torsional spring for series elastic actuators for assistive wearable robots. *Journal of Mechanical Design*, 134(12):121002, 2012.
- [4] Kyoungchul Kong, Joonbum Bae, and Masayoshi Tomizuka. A compact rotary series elastic actuator for human assistive systems. *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, 17(2):288–297, 2012.
- [5] Ricardo Lopez, Hipolito Aguilar, Sergio Salazar, Rogelio Lozano, and Jorge A. Torres. Modelado y control de un exoesqueleto para la rehabilitacion de extremidad inferior con dos grados de libertad. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 11(3):304 – 314, 2014.
- [6] S. K. Banala, S. H. Kim, S. K. Agrawal, and J. P. Scholz. Robot assisted gait training with active leg exoskeleton (alex). *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 17(1):2–8, Feb 2009.
- [7] S. Arumugom, S. Muthuraman, and V. Ponselvan. Modeling and application of series elastic actuators for force control multi legged robots. *CoRR*, abs/0912.3956, 2009.
- [8] Wilian M. dos Santos and Adriano A.G. Siqueira. Impedance control of a rotary series elastic actuator for knee rehabilitation. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):4801 – 4806, 2014. 19th IFAC World Congress.
- [9] Juan .M. Grosso and Diego Alexander Tibaduiza Burgos. Diseno conceptual de un exoesqueleto para asistir la rehabilitacion de miembro inferior. *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, 1:5–6, October 2009.
- [10] M. Wang, L. Sun, W. Yin, S. Dong, and J. Liu. Continuous finite-time control approach for series elastic actuator. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 843–848, Dec 2016.

- [11] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [12] Sergio Dominguez, Pascual Campoy, and José María Sebastián. *Control en el espacio de estado*. Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, 2000.
- [13] E. Guizzo and H. Goldstein. The rise of the body bots [robotic exoskeletons]. *IEEE Spectrum*, 42(10):50–56, Oct 2005.
- [14] Jan F Veneman, Ralf Ekkelenkamp, Rik Kruidhof, Frans CT van der Helm, and Herman van der Kooij. A series elastic-and bowden-cable-based actuation system for use as torque actuator in exoskeleton-type robots. *The international journal of robotics research*, 25(3):261–281, 2006.
- [15] Dingguo Zhang. A hybrid fes-exoeskeleton rehabilitation system using synergetic control and adaptation. *Transactions on Biomedical engineering*, 11 2015.