

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

UMI-LAFMIA

**Plataforma autónoma de 3 grados de libertad utilizada para  
el traslado y posicionamiento de aparatos de rehabilitación  
de miembro inferior.**

TESIS

Que presenta

**Ing. López Valencia Rodrigo**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias**

**EN SISTEMAS AUTONOMOS EN NAVEGACIÓN AÉREA Y SUBMARINA**

Directores de Tesis:  
Dr. Jesús Ricardo López Gutierrez  
Dr. Antonio Osorio Cordero



# Agradecimientos

---

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a mis asesores el Dr. Jesús Ricardo López Gutiérrez y el Dr. Antonio Osorio Cordero por brindarme las facilidades y los conocimientos para poder llevar a cabo este proyecto, así como, al laboratorio UMI-LAFMIA, lugar donde se me proporcionaron los medios y el espacio para desarrollar este proyecto de manera óptima.

Por otra parte, quiero agradecer a CONACYT, CINVESTAV y al Instituto Nacional para la Rehabilitación, las instituciones que me brindaron apoyo en el uso de sus espacios y equipos.

Por último no me puedo ir sin agradecer a mi padre, madre, hermano y abuela los cuales me han enseñado que el trabajo duro y bien hecho nos van a permitir vivir de manera honesta y cómoda. También a mis amigos y compañeros que me apoyaron durante estos 2 años en los que se realizaron mis estudios de maestría, gracias.



# Resumen

---

Este proyecto de investigación surge de la necesidad que tienen los especialistas del Instituto Nacional de Rehabilitación, de desarrollar un prototipo para la rehabilitación de miembro inferior derecho para pacientes que se encuentren convalecientes en una cama hospitalaria ya sea por una patología traumática, degenerativa o congénita que presenten poca movilidad debido a su convalecencia.

El prototipo diseñado está enfocado para realizar rutinas de rehabilitación que involucren al pie, tobillo, rodilla y cadera, el cual siempre deberá ser manejado por un fisioterapeuta capaz y con cierto grado de experiencia en el uso de este tipo de elementos tecnológicos.

La justificación científica y tecnológica por la que se llevó a cabo este proyecto fue el agregar la cadera como un grado extra de libertad y poder modelar el sistema como un robot con 3 grados libertad, ya que en proyectos previos realizados en el laboratorio solo se había tomado en cuenta el modelo humano que involucraba al pie, tobillo y rodilla. Por otro lado, se desea implementar a futuro un control adaptable el cual permitirá estimar parámetros, en este caso se desea conocer la masa total del miembro inferior y que el exoesqueleto se adapte a cualquier tipo de paciente. Se agrega un control de posición, velocidad y aceleración de los eslabones contenidos en el miembro inferior, usando un control PD con compensación de gravedad, gracias a que se modificarán los actuadores lineales agregándoles un resorte con el que se pueda medir el grado de intención humana que el paciente va logrando a través del tiempo que dure su rehabilitación y con esto mismo poder validar el grado de eficiencia con la que cuenta el prototipo.

Parte importante del proyecto consiste en desarrollar una base móvil que sostenga el exoesqueleto y sea capaz de posicionarlo de manera mas cómoda para el paciente y de forma fácil e intuitiva de manipular para el personal que maneje el equipo, éste a su vez contará con una interfaz práctica de utilizar.

# Abstract

---

This research project arises from the need of specialists from the National Institute of Rehabilitation to develop a prototype for the rehabilitation of the right lower limb for patients who in the convalescent phase in a hospital bed due to traumatic, degenerative or congenital pathology and have little mobility.

The prototype designed is focused on performing rehabilitation routines that involve the foot, ankle, knee and hip, which should always be handled by a capable physical therapist with a certain degree of experience in the use of this type of technological elements.

The scientific and technological justification for this project was to add the hip as an extra degree of freedom and to be able to model the system as a robot with 3 degrees of freedom, since in previous projects carried out in the laboratory only The human model involving the foot, ankle and knee had been taken into account. On the other hand, it is desired to implement an adaptive control in the future which would allow us to estimate parameters, in this case we want to know the total mass of the lower limb so that the exoskeleton adapts to any type of patient. A control of position, speed and acceleration of the links contained in the lower limb is added, using a PD control with gravity compensation, thanks to the fact that the linear actuators will be modified by adding a spring with which the degree of human intention can be measured that the patient is achieving through the duration of his rehabilitation and with this we can validate the degree of efficiency that our prototype has.

An important part of the project is to develop a mobile base that supports the exoskeleton and is able to position it in a more comfortable way for the patient and in an easy and intuitive way to manipulate for the personnel who handle the equipment, which in turn will have a practical interface to use.

# Índice general

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Índice General</b>	<b>v</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>VIII</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Glosario</b>	<b>XIII</b>
<b>Siglas y acrónimos</b>	<b>XVI</b>
<b>1. Capítulo I: Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Hipótesis . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	1
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	2
1.4. Justificación . . . . .	2
1.5. Objetivo general . . . . .	4
1.6. Objetivos específicos y metas . . . . .	4
1.7. Alcance del proyecto . . . . .	7
1.8. Proyectos para la rehabilitación de miembro inferior en México. . . . .	8
1.9. Proyectos para la rehabilitación de miembro inferior a nivel mundial . . . . .	12
1.10. Mecanismos de rehabilitación en el mercado para miembro inferior . . . . .	16

1.11. Definición de miembro inferior . . . . .	18
1.12. Anatomía del miembro inferior . . . . .	19
1.13. Biomecánica del miembro inferior . . . . .	20
1.13.1. Planos y ejes de movimiento en el cuerpo humano . . . . .	20
1.13.2. Movimientos que puede realizar el miembro inferior . . . . .	21
1.13.3. Biomecánica de la cadera . . . . .	23
1.13.4. Biomecánica de la rodilla . . . . .	23
1.13.5. Biomecánica del tobillo . . . . .	24
1.14. Clasificación de las órtesis de miembro inferior . . . . .	25
1.15. Rutinas de rehabilitación para miembro inferior . . . . .	25
<b>2. Capítulo II: Desarrollo de la plataforma</b>	<b>27</b>
2.1. Análisis del problema y clarificación de la tarea . . . . .	29
2.2. Diseño conceptual . . . . .	30
2.2.1. Brainstorming subfunción 1: Estructura de posicionamiento XYZ . . . . .	30
2.2.2. Brainstorming subfunción 2: Desarrollo de los actuadores seriales elásticos . . . . .	31
2.2.3. Brainstorming subfunción 3: Implementación y adaptación de una órtesis comercial. . . . .	32
2.2.4. Elección de la idea candidato para cada subfunción . . . . .	32
2.3. Realización del diseño conceptual . . . . .	34
<b>3. Capítulo III: Diseño detallado y construcción</b>	<b>38</b>
3.1. Diseño detallado de subfunción 1 . . . . .	38
3.2. Diseño detallado de subfunción 2 . . . . .	46
3.2.1. Modelado dinámico del actuador elástico en serie . . . . .	47
3.3. Diseño detallado de subfunción 3 . . . . .	50
3.4. Unión de los diseños . . . . .	52
<b>4. Capítulo IV: Modelo Matemático del Sistema</b>	<b>53</b>
<b>5. Capítulo V: Modelo cinemático y control implementado al sistema</b>	<b>71</b>
5.1. Cinemática directa de un robot de tres grados de libertad . . . . .	73
5.2. Control implementado al sistema . . . . .	76

5.3. Equilibrio de los torques . . . . .	78
<b>6. Capítulo VI: Implementación y pruebas</b>	<b>80</b>
6.1. Elevación del miembro inferior en flexión y extensión. . . . .	80
6.2. Flexión y extensión de rodilla . . . . .	84
6.3. Dorsiflexión y plantarflexión de tobillo . . . . .	87
6.4. Análisis de esfuerzos . . . . .	91
6.5. Estudio estático de esfuerzos: Distancia mínima . . . . .	92
6.6. Estudio estático de esfuerzos: Distancia máxima . . . . .	94
6.7. Estudio estático de esfuerzos agregando elementos estructurales : Distancia mínima . . . . .	96
6.8. Estudio estático de esfuerzos agregando elementos estructurales : Distancia máxima . . . . .	97
<b>7. Análisis de Resultados y Conclusiones</b>	<b>100</b>
7.1. Trabajo futuro . . . . .	102
<b>8. Anexos</b>	<b>103</b>
8.1. Anexo A- Anatomía de miembro inferior . . . . .	103
8.1.1. Estructura ósea del miembro inferior . . . . .	103
8.1.2. Estructura muscular miembro inferior . . . . .	104
8.1.3. Ligamentos . . . . .	106
8.1.4. Articulaciones . . . . .	106
8.2. Anexo B- Anatomía miembro inferior . . . . .	108
8.2.1. Nomenclatura en el uso de órtesis de miembro inferior . . . . .	108
8.3. Anexo C- Piezas mecánicas utilizadas . . . . .	109
8.3.1. Piezas maquinadas subsección 1 . . . . .	109
8.3.2. Piezas maquinadas subsección 2 . . . . .	111
8.3.3. Piezas maquinadas subsección 3 . . . . .	112
8.3.4. Piezas mecánicas adquiridas . . . . .	113
<b>Bibliografía</b>	<b>114</b>

# Índice de tablas

---

1.1.	Regiones en las que se divide el miembro inferior . . . . .	19
1.2.	Rutinas de rehabilitación que involucran al miembro inferior. . . . .	26
2.1.	Tormenta de ideas para la primer subfunción . . . . .	31
2.2.	Tormenta de ideas para la segunda subfunción . . . . .	31
2.3.	Tormenta de ideas para la tercer subfunción . . . . .	32
2.4.	Factores ponderados para la primer subfunción . . . . .	33
2.5.	Factores ponderados para la segunda subfunción . . . . .	33
2.6.	Factores Ponderados para la tercer subfunción . . . . .	33
2.7.	Elección final para cada subfunción . . . . .	34
3.1.	Parámetros inerciales determinados por Dempster y Clauser. . . . .	39
5.1.	Descripción para definir los parámetros DH . . . . .	72
5.2.	Parámetros DH del sistema . . . . .	73
6.1.	Condiciones iniciales correspondientes para cada rutina . . . . .	80
8.1.	Principales componentes óseos del miembro inferior . . . . .	104
8.2.	Clasificación de los músculos por su función . . . . .	105
8.3.	Clasificación de los músculos por su acción . . . . .	106
8.4.	Tipos de articulaciones . . . . .	106
8.5.	Clasificación de las articulaciones sinoviales. . . . .	107
8.6.	Clasificación ISO para órtesis de miembro inferior . . . . .	108

# Índice de figuras

---

1.1. Distribución porcentual de la población con discapacidad según causa,INEGI.	2
1.2. Diseño final de la órtesis fabricada principalmente de aluminio . . . . .	8
1.3. Mecanismo de cremallera y engranaje para flexión y extensión de la rodilla	8
1.4. Diagrama de la instrumentación del exoesqueleto . . . . .	10
1.5. Exoesqueleto de dos Grados de libertad para asistir a la pierna derecha . . .	10
1.6. Exoesqueleto de extremidades inferiores con actuador híbrido . . . . .	11
1.7. Modo en que funcionan los sensores EMG. . . . .	11
1.8. a) Vista Lateral b) Vista en isométrico c) Vista frontal, diseño Final Sistema exoesquelético para rehabilitación . . . . .	12
1.9. Jack Grundmann ingeniero de la universidad de Wisconsin-Madison . . . . .	13
1.10. Exoesqueleto neumático diseñado por Pierre Rabischong, 1976 . . . . .	13
1.11. Exoesqueleto LokomatPro. . . . .	14
1.12. Configuración básica del dispositivo ReWalk . . . . .	15
1.13. Power Assist Suit,2002 . . . . .	16
1.14. Hybrid Assistive Leg,2005 . . . . .	16
1.15. Diseño CAD del Motomed Letto 2 . . . . .	17
1.16. Uso del Motomed Letto 2 en paciente . . . . .	17
1.17. BTL-CPMotion K Elite . . . . .	18
1.18. Uso del BTL-CPMotion K Elite . . . . .	18
1.19. Planos corporales . . . . .	20
1.20. Movimiento de flexión . . . . .	21
1.21. Movimiento de extensión . . . . .	21
1.22. Movimiento de abducción . . . . .	21

1.23. Movimiento de aducción . . . . .	21
1.24. Movimiento de rotación externa . . . . .	22
1.25. Movimiento de cadera neutro . . . . .	22
1.26. Movimiento de rotación interna . . . . .	22
1.27. Movimiento de inversión . . . . .	22
1.28. Movimiento de eversión . . . . .	22
1.29. Movimiento de dorsiflexión y plantarflexión . . . . .	23
2.1. Metodología de diseño propuesta por Michael French . . . . .	28
2.2. Elementos clave para el diseño conceptual de la subfunción 1 . . . . .	34
2.3. Diseño conceptual para la subfunción 1 . . . . .	35
2.4. Elementos clave para el diseño conceptual de la subfunción 2 . . . . .	35
2.5. Diseño conceptual para la subfunción 2 . . . . .	36
2.6. Elementos clave para el diseño conceptual de la subfunción 3 . . . . .	36
2.7. Diseño conceptual para la subfunción 3 . . . . .	37
2.8. Diseño conceptual generalizado . . . . .	37
3.1. Parámetros que influyen en la estructura . . . . .	40
3.2. Diagrama de cuerpo libre del sistema . . . . .	41
3.3. Tornillo sinfin de cuerda ACME . . . . .	43
3.4. PTR de 2 pulgadas . . . . .	43
3.5. Oruga plástica para introducir cable . . . . .	45
3.6. Modelo CAM Final de la estructura . . . . .	45
3.7. Diagrama secuencial del funcionamiento de la electrónica y mecánica de los ejes principales desde la perspectiva del usuario . . . . .	46
3.8. Principio de funcionamiento de un actuador elástico en serie. . . . .	47
3.9. Prototipo de actuador elástico serial . . . . .	47
3.10. Diagrama esquemático del modelo dinámico del actuador elástico en serie propuesto . . . . .	48
3.11. Diagrama esquemático del modelo dinámico del actuador elástico en serie propuesto . . . . .	49
3.12. Órtesis KAFO utilizada. . . . .	50
3.13. Modelo CAM órtesis KAFO . . . . .	50

3.14. Bisagra colocada en la columna . . . . .	51
3.15. Modelo CAM de pieza colocada en el abdomen . . . . .	51
3.16. Órtesis HKAFO modificada . . . . .	51
3.17. Órtesis HKAFO con actuadores . . . . .	52
3.18. Órtesis HKAFO montada en el mecanismo XYZ . . . . .	52
4.1. Esquema del sistema con 3GDL. . . . .	53
4.2. Diagrama de cuerpo libre . . . . .	53
5.1. Las 6 posibles articulaciones de par menor . . . . .	72
5.2. Esquema cinemático de un robot de 3GDL . . . . .	73
5.3. Esquemático simplificado de un robot de 3GDL . . . . .	73
5.4. Diagrama total del exoesqueleto . . . . .	77
5.5. Esquema de uno de los eslabones del exoesqueleto . . . . .	79
5.6. Esquema de eslabones completo del exoesqueleto . . . . .	79
6.1. Posición inicial, extensión del miembro inferior . . . . .	81
6.2. Posición final, flexión del miembro inferior . . . . .	81
6.3. Posiciones deseadas de los eslabones para la primer rutina . . . . .	81
6.4. Posición deseada y posición actual del eslabón 1 . . . . .	81
6.5. Posición deseada y posición actual del eslabón 2 . . . . .	82
6.6. Posición deseada y posición actual del eslabón 3 . . . . .	82
6.7. Errores de Posición de los tres eslabones . . . . .	83
6.8. Velocidad actual de los tres eslabones . . . . .	83
6.9. Posición inicial, extensión de rodilla . . . . .	84
6.10. Posición final, flexión de rodilla . . . . .	84
6.11. Posición deseada de los eslabones para la segunda rutina . . . . .	84
6.12. Posición deseada y posición actual del eslabón 1 . . . . .	85
6.13. Posición deseada y posición actual del eslabón 2 . . . . .	85
6.14. Posición deseada y posición actual del eslabón 3 . . . . .	86
6.15. Error de posición de los tres eslabones . . . . .	86
6.16. Velocidad actual de los tres eslabones . . . . .	87
6.17. Posición inicial, dorsiflexión de tobillo . . . . .	87
6.18. Posición final, plantarflexión de tobillo . . . . .	87

6.19. Posición deseada de los eslabones para la tercer rutina . . . . .	88
6.20. Posición deseada y posición actual del eslabón 1 . . . . .	88
6.21. Posición deseada y posición actual del eslabón 2 . . . . .	89
6.22. Posición deseada y posición actual del eslabón 3 . . . . .	89
6.23. Errores de posición de los tres eslabones . . . . .	90
6.24. Velocidad actual de los tres eslabones . . . . .	90
6.25. Condiciones para realizar el estudio estático de esfuerzos . . . . .	92
6.26. Análisis de Von Mises para la distancia mínima . . . . .	92
6.27. Desplazamiento en el eje Z al aplicar la carga en la distancia mínima . . . .	93
6.28. Factor de seguridad al aplicar la carga en la distancia mínima . . . . .	93
6.29. Análisis de Von Mises para la distancia máxima . . . . .	94
6.30. Desplazamiento en el eje Z al aplicar la carga en la distancia máxima . . . .	94
6.31. Factor de seguridad al aplicar la carga en la distancia máxima . . . . .	95
6.32. Análisis de Von Mises para la distancia mínima con elementos estructurales	96
6.33. Desplazamiento en el eje Z al aplicar la carga en la distancia mínima con elementos estructurales . . . . .	96
6.34. Factor de seguridad al aplicar la carga en la distancia mínima con elementos estructurales . . . . .	97
6.35. Análisis de Von Mises para la distancia máxima con elementos estructurales	97
6.36. Desplazamiento en el eje Z al aplicar la carga en la distancia máxima con elementos estructurales . . . . .	98
6.37. Factor de seguridad al aplicar la carga en la distancia máxima con elementos estructurales . . . . .	98
8.1. Huesos de extremidad inferior . . . . .	103
8.2. Músculos principales de extremidad inferior . . . . .	104

# Glosario

---

<b>Término</b>	<b>Definición</b>
<b>Actuador</b>	Es un dispositivo inherentemente mecánico cuya función es proporcionar fuerza para mover o “actuar” otro dispositivo mecánico. La fuerza que provoca el actuador proviene de tres fuentes posibles: Presión neumática, presión hidráulica, y fuerza motriz eléctrica.
<b>Antropomórfico</b>	La atribución de características y cualidades humanas a los animales de otras especies, objetos o fenómenos naturales.
<b>Anatómico</b>	Que está construido para que se adapte o se ajuste perfectamente a la forma del cuerpo humano o a alguna de sus partes.
<b>Arnés</b>	Correa resistente que se ajusta a un miembro del cuerpo de una persona.
<b>Biomecánica</b>	Ciencia que estudia las fuerzas y las aceleraciones que actúan sobre los organismos vivos.
<b>Cadena cinemática</b>	Es un ensamble de eslabones y juntas interconectadas de modo que proporcionen un movimiento de salida controlado en respuesta a un movimiento de entrada proporcionado.
<b>Cartílago</b>	Tejido conjuntivo blanquecino, sólido, resistente y elástico que forma el esqueleto de algunos vertebrados inferiores y en los superiores, se añade a ciertos huesos para prolongarlos.
<b>Colágeno</b>	Sustancia proteínica que se encuentra en el tejido conjuntivo, óseo y cartilaginoso y que por la acción del calor se convierte en gelatina.

---

<b>Condrocitos</b>	Son un tipo de célula que se encuentra en el cartílago. Se encargan de mantener la matriz cartilaginosa, a través de la producción de sus principales compuestos: colágeno y proteoglicanos.
<b>Derrame</b>	Salida de un líquido orgánico o acumulación anormal del mismo en tejidos o en una cavidad orgánica.
<b>Dermatitis</b>	Inflamación de la piel.
<b>Discapacidad</b>	Falta o limitación de alguna facultad física o mental que imposibilita o dificulta el desarrollo normal de la actividad de una persona.
<b>Encoder</b>	Dispositivo electromecánico que permite codificar el movimiento mecánico en distintos tipos de impulsos eléctricos: digitales binarios, analógicos en función de una onda o pulsos.
<b>Ergonomía</b>	Es la disciplina que se encarga del diseño de lugares de trabajo, herramientas y tareas, de modo que coincidan con las características fisiológicas, anatómicas, psicológicas y las capacidades de los trabajadores que se verán involucrados.
<b>Exoesqueleto</b>	Máquina móvil, consistente primariamente en un armazón externo que lleva puesto una persona y un sistema de motores que proporciona al menos parte de la energía para realizar el movimiento de los miembros.
<b>Fisioterapia</b>	Es un tipo de tratamiento o terapia del área de la salud compuesta por un conjunto de métodos, técnicas y actuaciones aplicadas a través de agentes físicos para el tratamiento y prevención de enfermedades.
<b>Giroscopio</b>	Dispositivo mecánico que sirve para medir, mantener o cambiar la orientación en el espacio de algún aparato o vehículo.
<b>Grado de Libertad</b>	Número mínimo de parámetros que se necesitan especificar para determinar completamente la velocidad de un mecanismo o el número de reacciones de una estructura.
<b>Locomoción</b>	Desplazamiento físico de un punto A a un punto B
<b>Luxación</b>	Dislocación completa que se produce cuando un hueso se sale de su articulación.

---

---

<b>Metabolismo</b>	Conjunto de los cambios químicos y biológicos que se producen continuamente en las células vivas de un organismo.
<b>Mortaja</b>	Entalladura para recibir una espiga de otra pieza que debe ensamblarse con ella.
<b>Órtesis</b>	Aparatos externos que sirven como ayuda, soporte y se utilizan en el campo de la ortopedia.
<b>Postrado</b>	Debilitado por una enfermedad .
<b>Patología</b>	Enfermedad física o mental que padece una persona.
<b>Patrón</b>	Un tipo de tema de sucesos u objetos recurrentes.
<b>Tejidos Blandos</b>	Todos los tejidos corporales no óseos, como los músculos, la grasa, el tejido fibroso, los vasos sanguíneos o cualquier otro tejido conjuntivo del cuerpo.
<b>Traumatismo</b>	Lesión o daño de los tejidos orgánicos o de los huesos producido por algún tipo de violencia externa, como un golpe, una torcedura u otra circunstancia.
<b>Tronco</b>	Cuerpo de una persona o de un animal, considerado sin la cabeza y sin las extremidades.
<b>Tetrapléjico</b>	Signo clínico por el que se produce parálisis total o parcial de brazos y piernas causada por un daño en la médula espinal, específicamente en alguna de las vértebras cervicales o bien por alguna enfermedad que afecte las neuronas motoras.
<b>Trombosis</b>	Formación de un coágulo de sangre en el interior de un vaso sanguíneo o en el corazón.
<b>Tromboflebitis</b>	Inflamación de una vena que va acompañada de la formación de un trombo sanguíneo en su interior.
<b>Tromboembolismos</b>	Se refiere a un coágulo de sangre anormal que se forma en las venas. Se produce una trombosis venosa profunda (TVP) cuando se forma un coágulo sanguíneo en una vena profunda, generalmente en la parte inferior de la pierna, el muslo o la pelvis.

---

# Siglas y acrónimos

---

<b>Siglas y Acrónimos</b>	<b>Significado</b>
<b>CNC</b>	Control Numérico Computarizado
<b>SEA</b>	Series Elastic Actuator
<b>ELLTIO</b>	Exoskeleton for Lower Limb Training with Instrumented Orthoses
<b>SCI</b>	Spinal Cord Injury
<b>CPM</b>	Continuos Passive Movement
<b>EMG</b>	Electromiografía
<b>PD</b>	Proporcional-Derivativo
<b>ISO</b>	International Organization for Standardization
<b>INR</b>	Instituto Nacional de Rehabilitación.
<b>INEGI</b>	Instituto Nacional de Estadística y Geografía

---

# Capítulo I: Introducción

---

## 1.1. Hipótesis

Se propone como proyecto general el desarrollo de un exoesqueleto para rehabilitación que abarque un área específica de la fisioterapia para el fortalecimiento muscular. Se aportara al proyecto general con el desarrollo de una plataforma móvil de 3 grados de libertad que tenga la capacidad de colocar de manera adecuada y sencilla el exoesqueleto, con el fin de que el exoesqueleto pueda ser utilizado para rehabilitación de miembros inferiores.

## 1.2. Motivación

Los terapeutas que realizan rehabilitación, en pacientes que no pueden moverse, en muchas ocasiones deber cargar al paciente para llevarlo hasta los aparatos de rehabilitación, que pueden o no estar en la misma sala, esto conlleva demasiado esfuerzo y hasta lesiones. Una manera de mejorar este proceso es llevar el aparato de rehabilitación hasta el lugar donde se encuentra el paciente con falta de movilidad, sin embargo, estos aparatos también pueden ser pesados lo cual se refleja en un esfuerzo excesivo del fisioterapeuta.

Una solución es trasladar estos aparatos en plataformas móviles que permitan mover estos equipos a diferentes usuarios en diferentes habitaciones, esto para reducir el esfuerzo del fisioterapeuta y posibles lesiones.

Por tal motivo se desea desarrollar una plataforma que facilite el traslado y el posicionamiento de un exoesqueleto diseñado para realizar rehabilitación pasiva y activa en pacientes que por alguna razón están en situación de cama.

Este trabajo contribuirá a un proyecto mayor que consiste en un sistema de rehabilitación de pierna para fisioterapia. El cual, permite al fisioterapeuta aplicar en un paciente, rutinas de rehabilitación programadas en un exoesqueleto de 3 grados de libertad de tipo instrumentada.

### 1.3. Planteamiento del problema

Un exoesqueleto para pierna tipo órtesis instrumentada pesa alrededor de 10Kg, se debe colocar en pacientes con poca o nula movilidad lo cual es cansado para el manejador.

Además se debe colocar al paciente en cierta posición que permita al exoesqueleto desplazarse para realizar las rutinas de rehabilitación de forma eficiente. Una plataforma móvil que se mueva en tres grados de libertad puede posicionar al exoesqueleto de manera correcta para ajustarlo al paciente además trasladar el equipo sin mayor esfuerzo del terapeuta.

### 1.4. Justificación

Se estima que el 15 % de la población mundial tiene algún tipo de discapacidad[1]. En México se declaró que en el año 2000 el 58.3 % del total de la población tenía algún tipo de discapacidad motriz [2]; que pueden ser causadas por enfermedad (39 %), vejez (23 %), accidentes (16 %), congénita (14 %) y otras razones (8 %)[Figura 1.1].

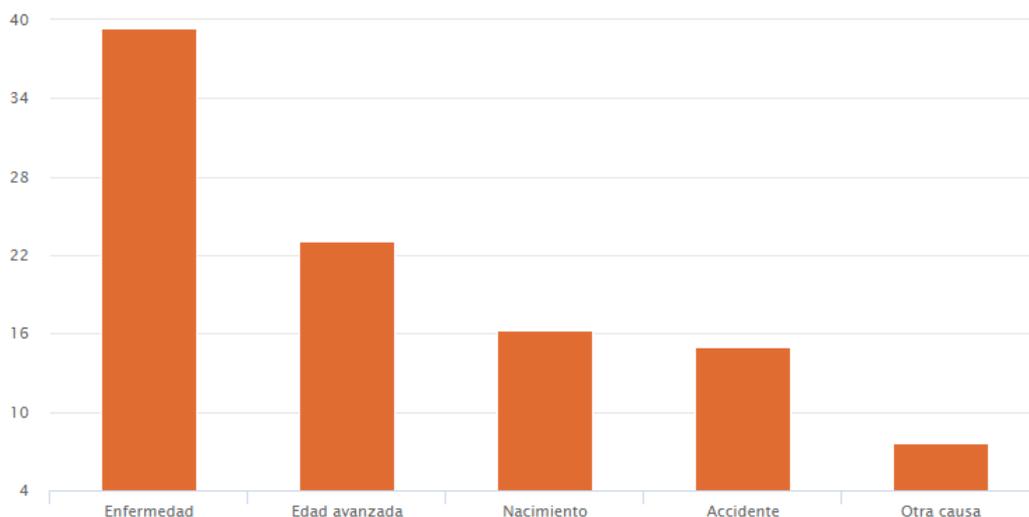


Figura 1.1: Distribución porcentual de la población con discapacidad según causa, INEGI.

Un exoesqueleto para miembro inferior permitiría en algunos casos devolver la movilidad a pacientes mejorando su calidad de vida. Este proyecto se pensó en base a requerimientos de especialistas del INR y contempla una participación con investigadores del instituto para validación del prototipo.

El Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), declaró en el último censo realizado en el año 2010 que las discapacidades en la población mexicana se pueden clasificar en cuatro grandes grupos los cuales son:

- Grupo 1: Discapacidades sensoriales y de la comunicación
- Grupo 2: Discapacidades motrices
- Grupo 3: Discapacidades mentales
- Grupo 4: Discapacidades múltiples y otras

Nosotros en este caso nos concentraremos en el segundo grupo, el cual el INEGI especifica que comprende a las personas que presentan discapacidades para caminar, manipular objetos y de coordinación de movimientos para realizar actividades de la vida cotidiana.

En este grupo se incluyen la pérdida total o parcial de uno o más dedos de las manos o pies. Excluye las discapacidades que tienen que ver con deformaciones del cuerpo y que no implican la carencia o dificultad de movimiento; éstas se clasifican en el grupo cuatro.

Se excluyen también las combinaciones de las discapacidades de este grupo con las de los grupos 1 Sensoriales y de la comunicación y 3 mentales, y con las del subgrupo 430 Otro tipo de discapacidades, ya que estas combinaciones se clasifican en el subgrupo 401-422 discapacidades múltiples.

Las discapacidades motrices, las cuales se dividen en 3 grupos:

- Subgrupo 210: Discapacidades de la extremidades inferiores, tronco, cuello y cabeza
- Subgrupo 220: Discapacidades de las extremidades superiores
- Subgrupo 299: Insuficientemente especificadas del Grupo discapacidades motrices

La investigación presentada se presenta en el subgrupo 210, que comprende a las personas que tienen limitaciones para moverse o caminar debido a la falta total o parcial de sus piernas. Comprende también a aquellas que aún teniendo sus piernas no tienen movimiento

---

en éstas, o sus movimientos tienen restricciones que provocan que no puedan desplazarse por sí mismas, de tal forma que necesitan la ayuda de otra persona o de algún instrumento como silla de ruedas, andadera o una pierna artificial (prótesis). Incluye a las personas que tienen limitaciones para desplazarse y que no cuentan con ningún tipo de ayuda, así como a las personas que cojean para caminar.

Este subgrupo también incluye a las personas que tienen limitaciones para doblarse, estirarse, agacharse para recoger objetos y todas aquellas discapacidades de movimiento de tronco, cuello, y cabeza (excepto parálisis facial); así mismo incluye a las deficiencias músculo-esqueléticas que afectan la postura y el equilibrio del cuerpo. Quedan comprendidas también en este subgrupo las personas que tienen carencia o dificultades de movimiento en tronco, cuello y cabeza combinada con la falta de movimiento en las piernas.[3]

## **1.5. Objetivo general**

Desarrollar un robot de 3 grados de libertad mecánicamente capaz de sostener un prototipo de exoesqueleto, trasladarlo y posicionarlo de manera autónoma a la altura de pacientes en situación de cama, enfocándose en el miembro inferior derecho .

## **1.6. Objetivos específicos y metas**

**Objetivo 1:** Realizar una búsqueda del estado del arte sobre prototipos actuales mediante el uso de fuentes bibliográficas o digitales para el entendimiento amplio del proyecto.

**Meta:** Lograr comprender los antecedentes científicos y matemáticos mediante el uso del estado del arte para poder elaborar el capítulo 1 y 2 de la tesis escrita.

- 1.- Investigación sobre plataformas de investigación y comerciales similares.
- 2.- Analizar sobre la anatomía y biomecánica de los elementos del miembro inferior.

**Objetivo 2:** Obtener, analizar y simular el modelo dinámico mediante el enfoque de Euler-Lagrange del robot; contemplando los elementos anatómicos humanos para lograr trayectorias deseadas. Verificar la posición de los eslabones en el plano X-Y obteniendo la cinemática directa del sistema.

---

**Meta:** Crear trayectorias que involucren la flexión-extensión de la pierna, flexión-extensión de todo el miembro inferior que involucre cadera así como la dorsiflexión y plantarflexión del tobillo para crear rutinas de rehabilitación del miembro inferior.

- 1.- Obtener el modelo dinámico de un robot de 3 grados de libertad.
- 2.- Obtener los parámetros Danavit Hartenberg para obtener la posición en el espacio.
- 3.- Simular el modelo en Matlab.
- 4.- Obtener y simular el modelo del actuador serial elástico.

**Objetivo 3:** Diseñar y construir una estructura mecánica ligera, capaz de sujetarse al exoesqueleto previamente diseñado, con la facilidad de adaptarse a un rango de pacientes que contenga los actuadores y sensores.

**Meta:** Desarrollar una estructura mecánica de posicionamiento en los ejes X, Y y Z que nos brinde la ventaja de que el exoesqueleto de rehabilitación se coloque con mayor facilidad y menos movimiento al paciente.

- 1.- Realizar un diseño conceptual y detallado de la plataforma.
- 2.- Analizar los esfuerzos necesarios que debe soportar el mecanismo.
- 3.- Realizar un diseño detallado en CAD.

**Objetivo 4:** Seleccionar los actuadores y sensores adecuados para llevar a cabo el estudio cinemático mediante la ayuda de simulaciones con el fin de realizar la instrumentación del exoesqueleto.

**Meta:** Crear 1 actuador serial elástico mediante el maquinado de materiales livianos y eficientes para cada eslabón involucrado en el modelo para poder obtener datos del mismo.

- 1.- Diseñar y construir el actuador serial elástico de la plataforma.
  - 2.- Elegir un encoder y acelerómetro para calcular la posición y velocidad angular de las articulaciones del miembro inferior respectivamente.
  - 3.- Elegir un potenciómetro lineal para calcular la fuerza que ejerce cada actuador lineal.
-

4.- Elegir un microcontrolador para llevar acabo el procesamiento de los datos.

**Objetivo 5:** Diseñar un control de posición y velocidad mediante la lectura de los datos obtenidos en cada eslabón para el seguimiento de rutinas de rehabilitación.

**Meta:** Obtener una ley de control de posición y velocidad con ayuda de los datos obtenidos de los sensores para poder crear una interfaz que muestre el comportamiento de las trayectorias de rehabilitación

1.- Obtener la lectura de los datos de los sensores para el procesamiento con el microcontrolador previamente elegido.

2.- Implementar un control PD con compensación de gravedad para el control de los actuadores seriales elásticos.

3.- Crear trayectorias asociadas con rutinas de rehabilitación.

**Objetivo 6:** Construir el prototipo y realizar pruebas experimentales.

**Meta:** Realizar diversas pruebas ejerciendo distintos tipos de fuerzas para poder validar el prototipo.

1.- Adaptar los actuadores a una ortesis HKAFO.

2.- Implementar la plataforma en la base previamente diseñada y construida.

3.- Realizar pruebas con diferentes trayectorias de rehabilitación y ejerciendo diferentes fuerzas

---

## **1.7. Alcance del proyecto**

Se toma en cuenta que el proyecto se centra en la construcción del móvil de 3 grados de libertad para la colocación de un exoesqueleto para el tratamiento de rehabilitación de miembro inferior, ya que desarrollarlo trae mayor beneficio al paciente y al fisioterapeuta.

Una persona que como consecuencia de una enfermedad, un traumatismo o una situación de alta dependencia pasa la mayor parte del tiempo encamada, por tanto, en situación de inmovilidad, está expuesta a una gran variedad de complicaciones que pueden afectar a diferentes partes del organismo y alguna de las cuales pueden ser graves, especialmente si se trata de pacientes ancianos. Por tanto si no existe movimiento continuo en el paciente esto puede afectar la circulación sanguínea que se hace más lenta y como consecuencia aumenta el riesgo de sufrir tromboflebitis, trombosis venosa profunda y tromboembolismos. Además de esto, puede afectar el sistema respiratorio, urogenital, sistema muscoesquelético, digestivo, nervioso y en la piel. Este alto nivel de dependencia, induce el agotamiento del cuidador, por tanto este aparato de rehabilitación tiene el objetivo de simplificar el trabajo del personal que se encarga del cuidado y rehabilitación del paciente, ya sean médicos, enfermeras, fisioterapeutas, etc.

Cabe recalcar que el proyecto toma en cuenta que se aplicarán rutinas de rehabilitación como pueden ser isométricos de glúteos y cuádriceps, potenciación de cuádriceps con rodillo, elevación de miembro, activos de Cadera, deslizamientos, estiramiento de cadera, las cuales son rutinas que involucran movimientos de flexión y extensión, adicionalmente gracias al diseño del exoesqueleto se puede realizar la rutina de bombeo del tobillo, la cual involucra los movimientos de dorsiflexión y plantarflexión.

El prototipo está enfocado a hacer pruebas con diferentes personas que se encuentran sanas, ejerciendo diferentes fuerzas y presiones para poder validar las diferentes trayectorias de posición y velocidad, esto debido a que por el corto tiempo que implica la realización de este proyecto y debido a las limitaciones en cuanto a validar las diferentes normas de salubridad, es improbable realizar pruebas con pacientes reales, pero estas pruebas de validación se pueden realizar en trabajos futuros.

---

## 1.8. Proyectos para la rehabilitación de miembro inferior en México.

En el año 2012 el área de posgrado del Instituto Politécnico Nacional a través de la ESIME unidad zacatenco elaboró la tesis «Optimización del Mecanismo de una órtesis para miembro inferior»[4] este proyecto surge de la necesidad de optimizar los mecanismos que componen a las ortesis que tienen que ver con patologías que afecten principalmente a la rodilla, se propusieron varios mecanismo mediante técnicas de optimización de mecanismos y de análisis estructurales; se escogió el óptimo para mejorar la órtesis. Al finalizar la tesis se llegó a la conclusión de usar un mecanismo de cremallera para la flexión y extensión[Figura.1.3], así como fabricar en aluminio debido a que es un material muy ligero y fácil de maquinar. La órtesis se diseñó con cuatro características importantes desde el punto de vista de un paciente : rigidez, buena apariencia, comodidad y uso intuitivo. [Figura1.2]

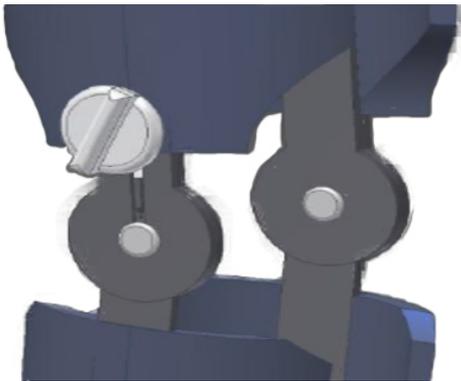


Figura 1.2: Diseño final de la órtesis fabricada principalmente de aluminio

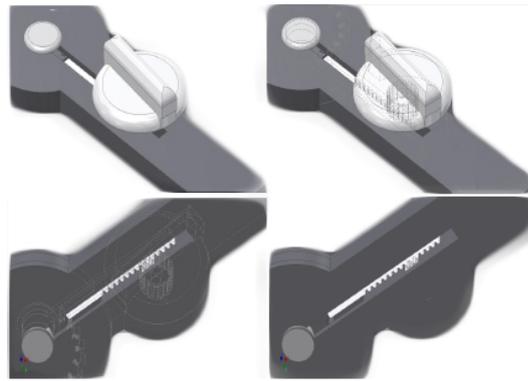


Figura 1.3: Mecanismo de cremallera y engranaje para flexión y extensión de la rodilla

El laboratorio UMI-LAFMIA perteneciente al CINVESTAV, presenta en el trabajo de investigación del 2014 titulado “Modelado y Control de un Exoesqueleto para la rehabilitación de Extremidad inferior con dos grados de libertad”[5], una órtesis de miembro inferior derecho de dos grados de libertad para realizar ejercicios de rehabilitación para el tobillo y la rodilla.

Para el diseño del exoesqueleto se utilizó un actuador elástico serial (SEA), cuya ventaja en comparación con el uso directo de un motor DC en la articulación es el tamaño, peso y costo. Se utiliza la deformación del resorte colocado en serie con la transmisión y a la salida del actuador como parte de un control de fuerza.

---

Los autores diseñaron un exoesqueleto capaz de soportar el peso de una persona de 75 kg. El material de la carcasa es polipropileno con barras de duraluminio lateral y medial. El robot completo mide 83 cm de largo: 47 cm de largo en el muslo y 36 cm de largo en la pantorrilla. Como se mencionó, el sistema está instrumentado con actuadores tipo SEA, los cuales amplifican la fuerza de la pierna. También está instrumentado con dos encoders ópticos que detectan la posición angular de las articulaciones y dos giroscopios que detectan la velocidad angular en las articulaciones. Se acoplan, además, dos sensores que estiman las fuerzas producidas por el humano, los cuales se utilizan en el algoritmo de control para generar el vector de posición deseada. El sentido en que se aplique la fuerza indica si el usuario desea extender o comprimir la articulación. En la parte superior de cada actuador se acopló un motor de 12 voltios con un toque máximo de 5 N-m (para el actuador de la rodilla) y 1.8 N-m (para el actuador del tobillo)[Figura.1.5].

El exoesqueleto [Figura.1.4] posee un microprocesador rabbit 3400, el cual procesa las señales de entrada provenientes del sensor lineal, el encoder óptico y el giroscopio. Cada articulación utiliza estos tres sensores. A través del algoritmo de control y las señales de los sensores, el microcontrolador genera una señal PWM de salida, la cual es amplificada por medio de un Driver MD03 para operar a los motores de los actuadores.

El proyecto elaborado anteriormente por el laboratorio UMI-LAFMIA realizó una mejora a su investigación en un artículo titulado «Adaptive Control in Passive Rehabilitation Routines Using ELLTIO» publicado en Agosto de 2017 en la revista Mexicana de Ingeniería Biomédica[6], la innovación de este artículo se basa en mejorar el control PD con compensación de gravedad ya aplicado anteriormente añadiendo un algoritmo con compensación adaptativa. Los parámetros no conocidos se identifican en tiempo real, por tanto las posiciones angulares de los eslabones pueden seguir la trayectoria deseada .

---

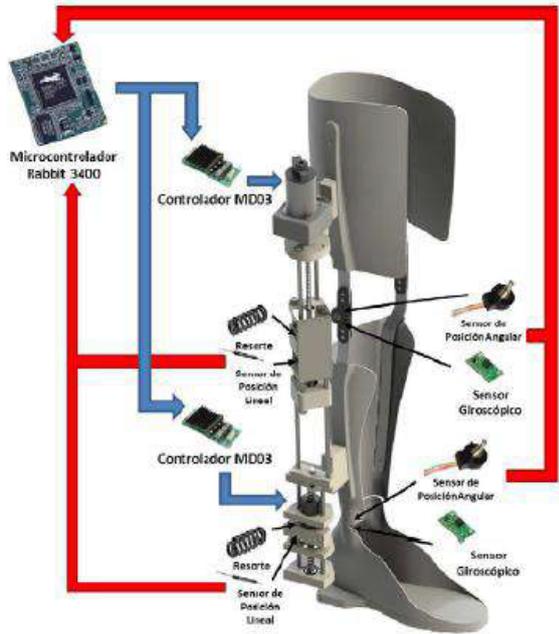


Figura 1.4: Diagrama de la instrumentación del exoesqueleto

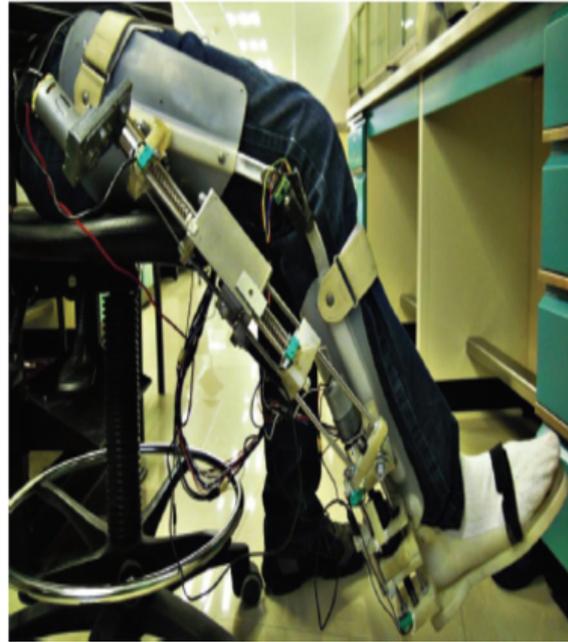


Figura 1.5: Exoesqueleto de dos Grados de libertad para asistir a la pierna derecha

De la misma manera el laboratorio UMI-LAFMIA, en su trabajo de investigación titulado “Design and control of hybrid actuation lower limb exoskeleton”[7] presenta un exoesqueleto de extremidades inferiores, con el fin de incrementar la fuerza en las piernas, el cual está accionado a través de dos tipos de actuadores: motores DC con accionamiento armónico y músculos neumáticos artificiales. Dicha combinación aprovecha las ventajas de ambos accionamientos para compensar las desventajas de cada uno de ellos por separado. El motor proporciona un control de posición de alta precisión mientras que el músculo entrega una alta relación de fuerza y peso. La principal desventaja de combinar dos distintos tipos de actuadores es que el esquema de control se vuelve más complejo.

Los eslabones del exoesqueleto están contruidos a base de barras de aluminio y tubos a través de una máquina de control numérico computacional. El diseño del exoesqueleto presenta siete grados de libertad: La articulación del tobillo presenta dos grados de libertad pasivos (eversión/inversión y dorsiflexión/plantarflexión); la articulación de la rodilla presenta dos grados de libertad un activo (flexión) y un pasivo (abducción/aducción) y la articulación de la cadera presenta tres grados de libertad dos pasivos (rotación interna/externa y abducción/aducción) y uno activo (flexión/extensión). La estructura presenta dos músculos neumáticos artificiales en cada eslabón y un motor DC en cada articulación.[Figura 1.6]

El exoesqueleto utiliza dieciséis sensores electromiográficos (EMG) inalámbricos [Figura 1.7], los cuales son ubicados en distintas zonas de las extremidades inferiores para capturar el movimiento y generar una base de un patrón de caminata. A través de dichos patrones, el controlador envía una señal a los actuadores para mover el robot. También presenta sensores LVTD, los cuales miden el desplazamiento lineal de los músculos artificiales.

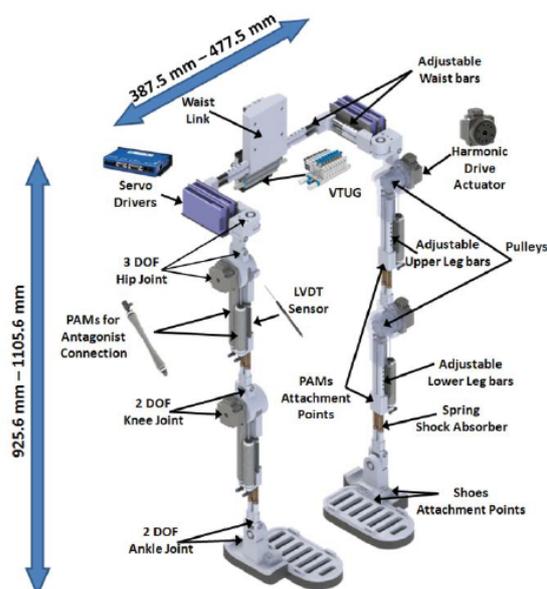


Figura 1.6: Exoesqueleto de extremidades inferiores con actuador híbrido

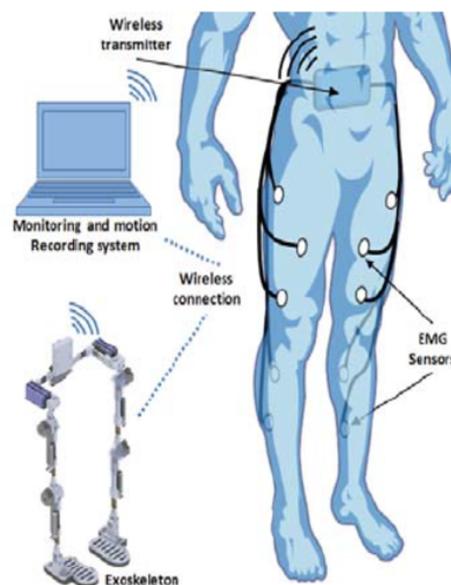


Figura 1.7: Modo en que funcionan los sensores EMG.

El exoesqueleto de miembros inferiores diseñado en la tesis “Diseño mecánico de un exoesqueleto de cadera y rodilla”[8] por alumnos de la facultad de ingeniería de la UNAM, es un sistema mecánico no invasivo que tiene como objetivo final, asistir los movimientos de los miembros inferiores y proporcionar un aumento en las capacidades de la cadera y rodilla, orientado a personas con lesión medular torácica nivel 5. El diseño final del exoesqueleto [Figura 1.8] tiene como propósito cumplir con ciertos requerimientos, tales como: fácil mantenimiento, ergonómico, seguro, compacto, de fácil colocación y la utilización de piezas comerciales. El exoesqueleto en total cuenta con ocho grados de libertad, cuatro para cada pierna:

- Cadera: Flexión/Extensión (FEC) - Aducción/Abducción (AAC)
- Rodilla: Flexión/Extensión (FER)
- Tobillo: Flexión/Extensión (FET)

Las dimensiones y cálculos fueron tomados a partir de medidas antropométricas directamente de un usuario con estatura de 1.84 m y peso aprox. de 78 kg. De acuerdo a sus resultados tiene un peso total de 13.97 kg, construido en su totalidad de aluminio 6061 T6 y algunas piezas de fibra de carbono .

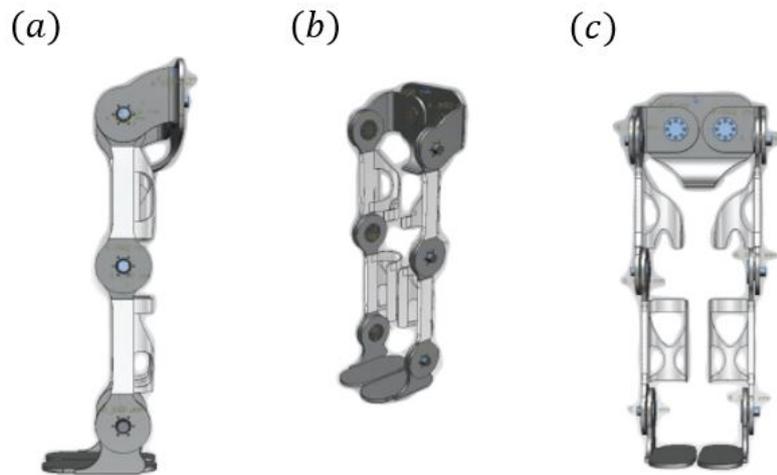


Figura 1.8: a) Vista Lateral b) Vista en isométrico c) Vista frontal, diseño Final Sistema exoesquelético para rehabilitación

## 1.9. Proyectos para la rehabilitación de miembro inferior a nivel mundial

Durante los años 70 en el departamento de ingeniería mecánica de la universidad de Wisconsin-Madison [Figura 1.9] trabajaron para desarrollar un modelo matemático del sistema musculoesquelético (predecir las fuerzas de los músculos dada la entrada de un movimiento), esto con el objetivo de desarrollar sistemas para ayudar a gente discapacitada y hacer que vuelvan a caminar.

AMOLL-Rabischong [Figura 1.10] fue desarrollado en 1976 en Francia por Institut National de la Sante et de la Recherche Medicale. El dispositivo permitía a los pacientes en rehabilitación mantenerse en balance mientras incitaba a los músculos a moverse, de manera similar al concepto maestro-esclavo. [9]

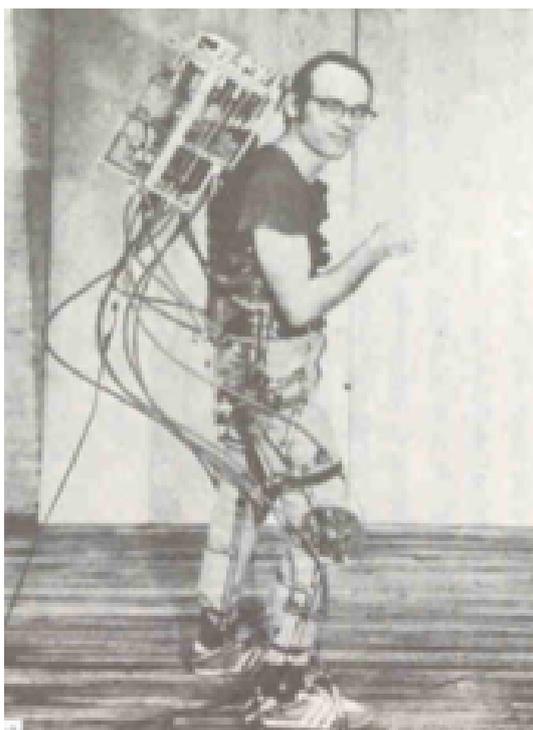


Figura 1.9: Jack Grundmann ingeniero de la universidad de Wisconsin-Madison

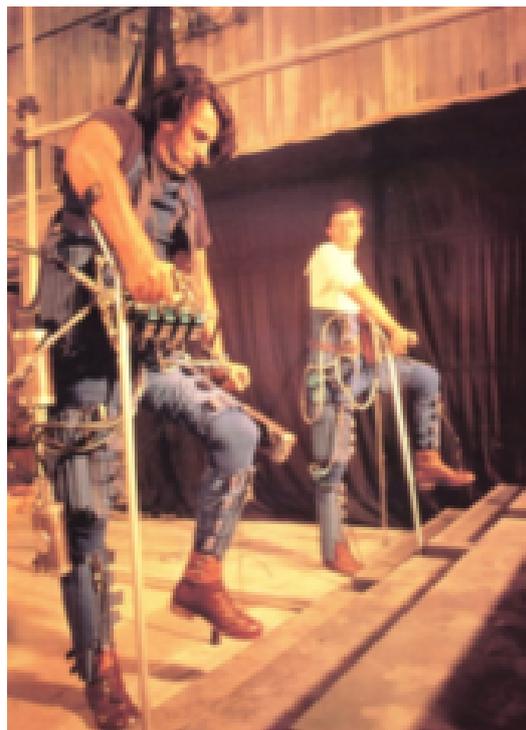


Figura 1.10: Exoesqueleto neumático diseñado por Pierre Rabichong, 1976

Hocoma[10] es una empresa con mercado a nivel mundial para el desarrollo, fabricación y comercialización de dispositivos robóticos y sensores para la terapia del movimiento funcional. La empresa de tecnología médica con sede en Suiza fue fundada en el año 1996 por los ingenieros eléctricos y biomédicos Gery Colombo y Matthias Jörg respectivamente y el economista Peter Hostettler. Cuenta con varios productos para la rehabilitación, pero el más sobresaliente y sobre el cual se detallará, es el exoesqueleto denominado Lokomat.

El Lokomat[11] es un dispositivo ortótico robótico que proporciona soporte variable de peso corporal y auxilio a los miembros inferiores de los pacientes mientras caminan sobre una trotadora. Consta de cuatro componentes principales: el soporte de peso corporal, las órtesis de extremidades inferiores, la trotadora y el entorno de realidad virtual. Por encima del paciente se instala un sistema de soporte de peso corporal, a través de un arnés, que permite a los pacientes caminar a pesar del grado de debilidad que presenten en la parte superior. Para la orientación y el accionamiento del movimiento de las piernas, se utilizan órtesis alrededor de las piernas. A través de sus dos articulaciones accionadas por cada pierna, una para la cadera y otra para la flexión de la rodilla, permite realizar movimientos en el plano sagital. La nueva versión del exoesqueleto, LokomatPro [Figura 1.11], presenta un módulo denominado FreeD, el cual permite la traslación lateral y la rotación transversal de la pelvis

de hasta 4 grados para una marcha más natural. La abducción y la aducción de la cadera guiada de forma pasiva y la traslación lateral impulsada por el soporte de peso corporal están sincronizadas con los movimientos de la pelvis y el movimiento de las órtesis [12].

El principio de funcionamiento del exoesqueleto puede resumirse en tres pasos. Primero, se utiliza el control cooperativo del paciente para que el robot adapte su comportamiento a las necesidades del paciente, por ejemplo, el sistema de soporte de peso corporal permite liberar un determinado porcentaje del propio peso del sujeto. En segundo lugar, a través de los grados adicionales de libertad para la órtesis robótica, se permite un patrón de caminata más natural y de forma homogénea. También permite programar la velocidad y las trayectorias articulares que movilizan las órtesis. Y finalmente, el entorno virtual que proporciona sirve de apoyo para maximizar la motivación del paciente, así como también la supervisión continua durante las sesiones.



Figura 1.11: Exoesqueleto LokomatPro.

ReWalk[13], nace en Israel a raíz de quedar tetraplégico por un accidente de tráfico el ingeniero mecánico Dr. Amit Goffer en el año de 1998. En el año 2001 el Dr. Goffer funda la empresa ReWalk para ayudar a personas con paraplejía. Lamentablemente no pudo usar su exoesqueleto debido a que su enfermedad le hacía carecer de la fuerza requerida del cuerpo superior para colocarse el traje. Diseñó ReWalk [Figura 1.12], un exoesqueleto de extremidades inferiores que proporciona potencia a la cadera y a la rodilla para generar movimiento a personas con lesión de la médula espinal (SCI, por sus siglas en inglés). El

dispositivo permite que el usuario se mantenga erguido, camine, gire, suba y baje escaleras. La última versión del robot portátil proporciona un caminar independiente y controlado mientras imita el patrón de la marcha natural de las piernas. ReWalk [11] ofrece dos sistemas: ReWalk Personal 6.0 para su uso personal y ReWalk Rehabilitation para su uso en las clínicas propias de la empresa.

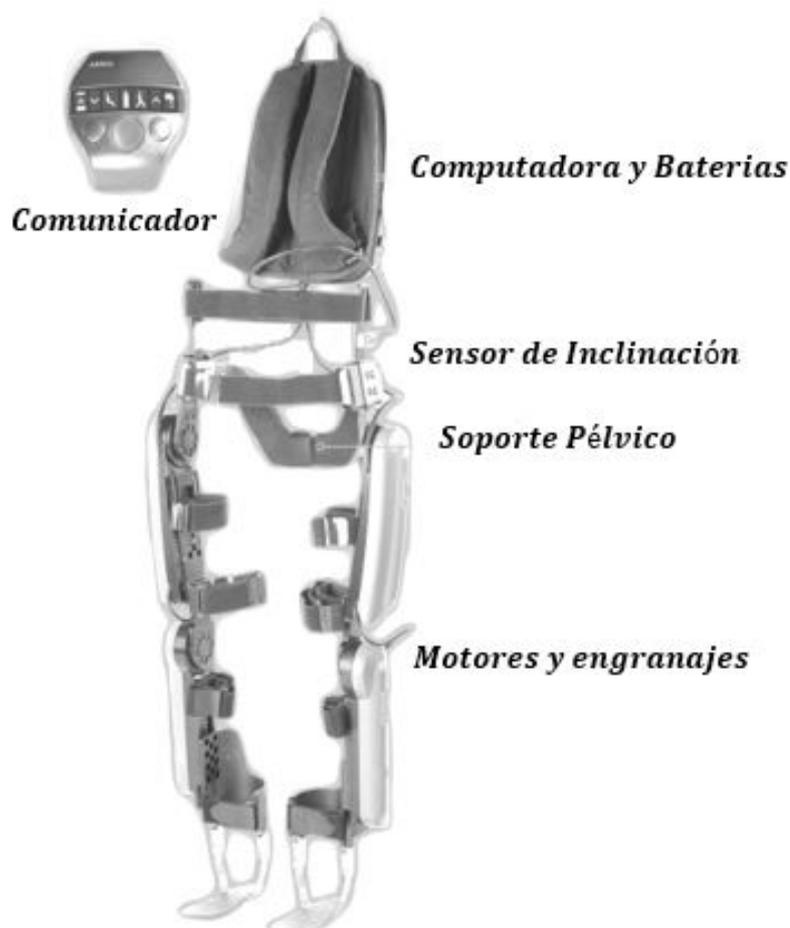


Figura 1.12: Configuración básica del dispositivo ReWalk

El principio de funcionamiento del sistema ReWalk [12] es a través de un sensor de inclinación. Esto sirve para detectar cambios en el equilibrio del usuario y, de esta forma, controlar el movimiento a través de los cambios sutiles en su centro de gravedad. Por ejemplo, si el sistema detecta una inclinación hacia delante del cuerpo superior, éste inicia su primer paso hacia adelante. El desplazamiento repetido del cuerpo genera una secuencia de pasos que imita una marcha natural funcional de las piernas. Una característica clave del sistema es la larga duración de las baterías recargables; está diseñado para funcionar durante todo el día. El sistema de baterías es liviano para alimentar a los motores que se posicionan

en las articulaciones de la cadera y la rodilla.

Power assist suit desarrollado en Kanagawa Institute of technology, Japón por Yamamoto Keijiro en año 2002, es un exoesqueleto con el propósito de asistir a enfermeras para trasladar pacientes de manera sencilla.[Figura 1.13]

Hybrid Assistive Leg [HAL – (3,5)] fue desarrollado entre los años 2003 a 2005 en la Universidad de Tsukuba por Yoshiyuki Sankai con el objetivo de de multiplicar la fuerza del usuario de 2 a 10 veces y rehabilitar[Figura 1.14].

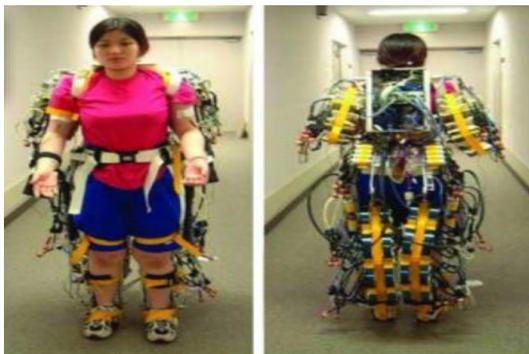


Figura 1.13: Power Assist Suit,2002

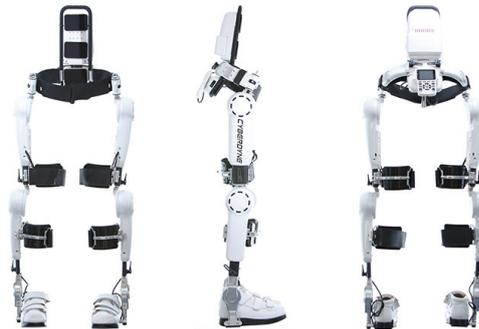


Figura 1.14: Hybrid Assistive Leg,2005

## 1.10. Mecanismos de rehabilitación en el mercado para miembro inferior

Motomed Letto 2 [Figura 1.15] Ayuda a equilibrar la falta de movimiento en los pacientes que se encuentran postrados en la cama [16]. Los pacientes pueden utilizarlo para entrenar piernas o brazos en un modo pasivo, asistido por el motor o en modo activo, desde una cama. A través del movimiento se estimula el riego sanguíneo, la circulación y el metabolismo [Figura 1.16]. De esta forma se evita la reducción de la musculatura (atrofia), así como la rigidez de las articulaciones (profilaxis de contracturas). El dispositivo cuenta con grandes rodillos que lo hacen flexible al transporte y su chasis variable con un ajuste de altura con resorte de gas facilita la adaptación a camas y camillas. La fijación de suelo cómoda posibilita un posicionamiento agradable y rápido. Con el ajuste de flexión de rodilla se puede ajustar óptimamente el grado de flexión de rodilla del usuario .



Figura 1.15: Diseño CAD del Motomed Letto 2



Figura 1.16: Uso del Motomed Letto 2 en paciente

CPMotion [17] es una empresa con sede en más de 55 países que se dedica al diseño de máquinas de fisioterapia y cardiología. Se especializan en máquinas para movimiento pasivo continuo (CPM) son usados durante las primeras fases de la rehabilitación posterior a una cirugía articular o de un trauma de las extremidades inferiores. Los dispositivos para CPM movilizan las articulaciones, continua y repetidamente a través de un controlado rango de movimiento.

El tratamiento diario, incrementa el limitado grado de movimiento articular, previniendo la rigidez, el derrame articular, favoreciendo la nutrición del cartílago articular, evitando la pérdida de colágeno y la aparición de trastornos tromboembólicos.

La terapia a través de este ejercicio pasivo de movimiento controlado otorga seguridad a los procesos de recuperación y reparación de los tejidos, reduciendo el dolor post operatorio y minimizando la posibilidad de inflamación. CPM también ayuda a incrementar el rango de movimiento y tiene un efecto favorable sobre la fuerza muscular. CPM estimula el metabolismo de los condrocitos, los que son de vital importancia para los procesos de regeneración articular. El uso de CPM disminuye el uso de fármacos, favorece alta hospitalaria precoz, reduce los cuidados del paciente y disminuye los costos a nivel de sistemas de salud.

Dentro de los productos que Ofrece esta empresa para la rehabilitación de miembro inferior mediante movimiento pasivo continuo se encuentran:

- BTL-CPMotion K Elite

Contiene en un solo dispositivo para las tres articulaciones de la extremidad inferior, Control remoto con pantalla táctil y Ajustes avanzados.

- BTL-CPMotion K Pro

Modelo profesional para las articulaciones de la cadera y rodilla, Control remoto con pantalla táctil y Ajustes avanzados.

- BTL-CPMotion K Easy

Modelo económico para las articulaciones de la cadera y rodilla con Interfaz LED amigable para el usuario y Control remoto ENCENDIDO/APAGADO.



Figura 1.17: BTL-CPMotion K Elite



Figura 1.18: Uso del BTL-CPMotion K Elite

## 1.11. Definición de miembro inferior

El miembro inferior es un sistema biomecánico que se modela a través de una cadena cinemática abierta cuyos eslabones principales son el muslo, la pierna y el pie (aunque éste es un subsistema complejo por sí mismo), y cuyas articulaciones principales son la coxofemoral (cadera), la femorotibial (rodilla), la tibiotalariana (tobillo) y las que en conjunto permiten el movimiento en el pie. Estas articulaciones definen el eje anatómico cadera-rodilla-tobillo que representa a grandes rasgos al miembro inferior.[18]

---

## 1.12. Anatomía del miembro inferior

Los miembros (extremidades) inferiores son extensiones del tronco que están especializadas en el sostén del peso corporal, en la locomoción (capacidad de desplazarse de un sitio a otro) y en el mantenimiento del equilibrio. La extremidad inferior tiene seis partes o regiones importantes [19]. Las regiones se detallan en la tabla 1.1.

<b>Región Glútea</b>	Es la región de transición entre el tronco y el miembro inferior libre; comprende dos partes: la región posterior, prominente y redondeada, la nalga, y la región lateral, habitualmente menos prominente, o región de la cadera que se encuentre alrededor de la articulación de la cadera y el trocánter mayor del fémur.
<b>Región Femoral (Muslo)</b>	Es la región del miembro inferior situada entre las regiones glútea, abdominal y perineal proximalmente, y la región de la rodilla, distalmente. Contiene el fémur.
<b>Región de la Rodilla</b>	Contiene los cóndilos de la porción distal del fémur y la porción proximal de la tibia, la cabeza del peroné y la rótula (que se encuentra anterior al extremo distal del fémur), así como las articulaciones entre estas estructuras óseas.
<b>Región de la Pierna</b>	Se encuentra entre la rodilla y la porción distal, estrecha, de la pierna, y contiene la mayor parte de la tibia (hueso de la espinilla) y el peroné. La pierna conecta la rodilla y el pie. Es frecuente la alusión incorrecta a todo el miembro inferior como “la pierna”.
<b>Tobillo o Región Talocrural</b>	Incluye los salientes o prominencias medial y lateral (maléolos) que flanquean la articulación talocrural (del tobillo).
<b>Región del Pie</b>	Es la porción distal del miembro inferior y contiene el tarso, el metatarso y las falanges (huesos de los dedos del pie).

Tabla 1.1: Regiones en las que se divide el miembro inferior

## 1.13. Biomecánica del miembro inferior

### 1.13.1. Planos y ejes de movimiento en el cuerpo humano

**Plano Sagital:** Es aquel plano perpendicular al suelo localizado a 90 grados con respecto al plano frontal, divide al cuerpo en mitad Izquierda y derecha. En este plano se visualizan movimientos de flexión-extensión, dorsiflexión-plantarflexión [Figura 1.19].

**Plano transversal:** Es el plano perpendicular al eje longitudinal, divide al cuerpo en dos partes principales, que son miembro superior o miembro torácico y miembro inferior o miembro pélvico. Se visualizan movimientos de rotación externa-interna, pronación-supinación, eversión-inversión [Figura 1.19].

**Plano Frontal o Coronal:** Es aquel plano perpendicular al eje transversal localizado a 90 grados con respecto al eje sagital, divide al cuerpo verticalmente en dos secciones anterior-posterior. Se Visualizan movimientos de abducción-aducción, inclinación (derecha o izquierda), si se habla de la muñeca los movimientos dejan de ser abducción-aducción, para ser desviación radial-desviación cubital [Figura 1.19].

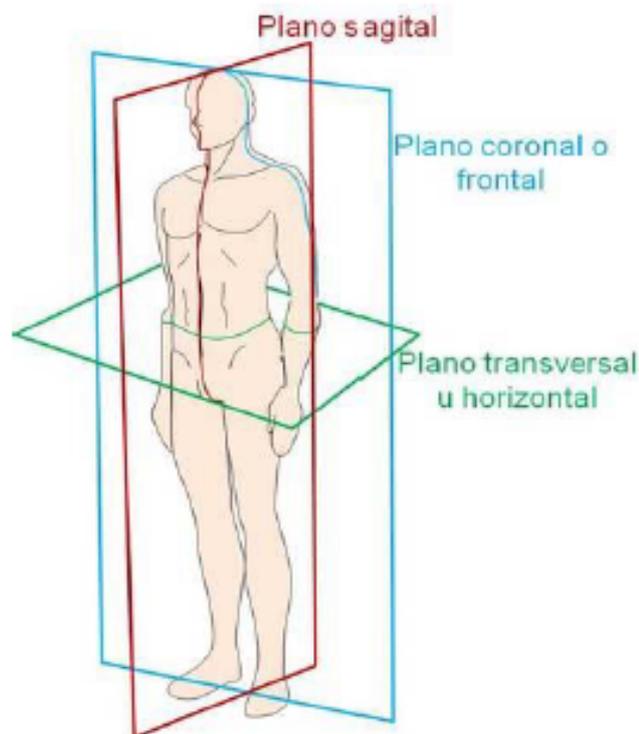


Figura 1.19: Planos corporales

### 1.13.2. Movimientos que puede realizar el miembro inferior

**Flexión:** Movimiento en el cual las extremidades del cuerpo se aproximan al tronco, quedando en forma paralela al plano sagital. En dirección antero-posterior [Figura 1.20].

**Extensión:** Es el movimiento opuesto a la flexión, por lo tanto aleja las extremidades del tronco, en una dirección posterior-anterior [Figura 1.21].

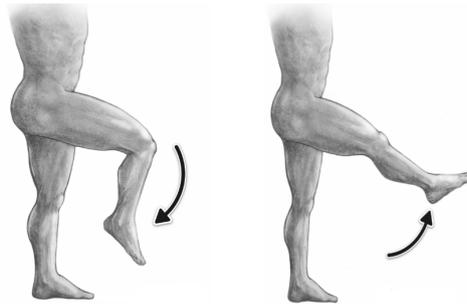


Figura 1.20:  
Movimiento de  
flexión

Figura 1.21:  
Movimiento de  
extensión

**Aducción:** Al igual que la flexión es un movimiento que se utiliza para acercar un miembro al tronco, pero éste se realiza sobre el plano frontal cercano a la extremidad del eje medio sobre cuerpo. Terminando el movimiento de forma paralela al eje sagital [Figura 1.22].

**Abducción:** Movimiento opuesto al de aducción, se encarga de alejar las extremidades del tronco, realizando el movimiento en el plano frontal, separándolo del eje frontal [Figura 1.23].

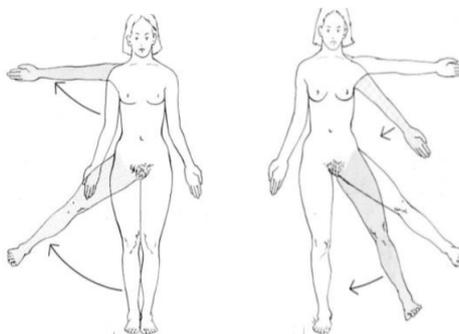


Figura 1.22:  
Movimiento de  
abducción

Figura 1.23:  
Movimiento de  
aducción

**Rotación Externa:** Permite girar una extremidad sobre su eje longitudinal, terminando la extremidad hacia afuera del eje medio.[Figura 1.24]

**Rotación Interna:** Al igual que la rotación interna, permite girar una extremidad sobre su eje longitudinal, terminando la extremidad mirando hacia dentro del eje medio[Figura 1.26].

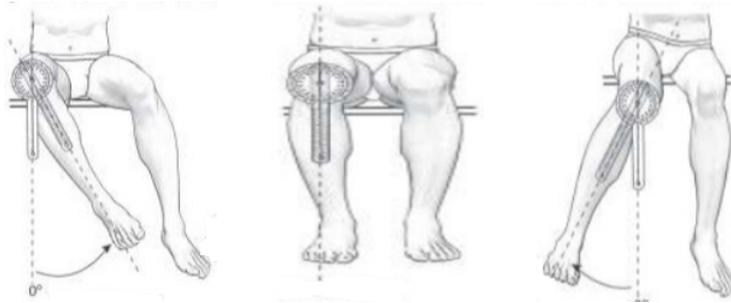


Figura 1.24:  
Movimiento de  
rotación externa

Figura 1.25:  
Movimiento de  
cadera neutro

Figura 1.26:  
Movimiento de  
rotación interna

**Inversión:** Movimiento en el cual la planta del pie se dirige hacia dentro del eje medio[Figura 1.27].

**Eversión:** Movimiento en el cual la planta del pie se dirige hacia afuera del eje medio[Figura 1.28].



Figura 1.27:  
Movimiento de  
inversión

Figura 1.28:  
Movimiento de  
eversión

**Dorsiflexión:** Movimiento que se genera a partir de que el pie está en posición neutral(0 grados en el plano horizontal). Se acerca la punta del pie a la espinilla[Figura 1.29].

**Plantarflexión:** Al igual que en dorsiflexión el movimiento surge a partir de posición neutral, y es lo opuesto al movimiento de dorsiflexión, aleja las puntas del pie de la espinilla (comúnmente se conoce como pararse de puntas) [Figura 1.29].



Figura 1.29: Movimiento de dorsiflexión y plantarflexión

### 1.13.3. Biomecánica de la cadera

La articulación de la cadera es una enartrosis, es decir, tiene movilidad en los tres ejes del espacio [20]. Estos tres grados de libertad de la cadera, permiten movimientos de flexo-extensión, abducción-aducción y rotaciones. Como en todas las articulaciones, existen movimientos activos y movimientos pasivos. La amplitud de movimientos es siempre mayor en la movilidad pasiva. La flexión es el movimiento que acerca la cara anterior del muslo hacia el tronco. La amplitud depende, aparte de que el movimiento sea activo o pasivo, de la posición en que se encuentre la rodilla, ya que la flexión relaja los músculos isquiotibiales, y del grado de lordosis lumbar, que favorece el movimiento al disminuir la lordosis. La amplitud máxima se obtiene con la rodilla en flexión y la columna lumbar enderezada. Oscila entre los 120 grados y los 140 grados y se transforma aproximadamente en 90 grados con la rodilla en extensión.

### 1.13.4. Biomecánica de la rodilla

La rodilla transmite cargas, participa en el movimiento, ayuda en la conservación del momento, y proporciona un par de fuerzas para las actividades en las que interviene la

pierna [21]. La rodilla humana es la articulación más amplia y quizá la más compleja del cuerpo, es una estructura biarticular compuesta por la articulación tibiofemoral y la articulación femorrotuliana. La cinemática define el rango de movimiento y describe el movimiento de superficie de una articulación en tres planos: frontal (coronal o longitudinal), sagital y transversal (horizontal). En la articulación tibiofemoral, el movimiento se produce en los tres planos [Figura 1.19].

En el plano sagital, el movimiento desde la extensión completa a la flexión completa de la rodilla va de 0 grados a los 140 grados aproximadamente. El movimiento en el plano transversal, rotación interna y externa, está influido por la posición de la articulación en el plano sagital. Con la rodilla en extensión completa, la rotación está restringida casi completamente por el choque de los cóndilos femorales y tibiales, lo cual ocurre principalmente porque el cóndilo femoral medial es más largo que el cóndilo lateral. El rango de rotación se incrementa conforme la rodilla es flexionada, alcanzando el máximo a los 90 grados de flexión; con la rodilla en esta posición, la rotación externa varía de 0 grados a aproximadamente a los 45 grados y la rotación interna varía de 0 grados a aproximadamente 30 grados. Más allá de los 90 grados de flexión, el rango de rotación interna y externa disminuye, básicamente porque los tejidos blandos limitan la rotación. El movimiento en el plano frontal, abducción y aducción, se afecta de forma semejante por la cantidad de flexión articular. La extensión completa de la rodilla impide casi todo el movimiento en el plano frontal. La abducción y la aducción pasiva aumentan con la flexión de rodilla hasta los 30 grados, pero cada uno alcanza un máximo de solo unos pocos grados. Con la rodilla flexionada más allá de 30 grados, el movimiento en el plano frontal disminuye de nuevo por la función limitante de los tejidos blandos.

### **1.13.5. Biomecánica del tobillo**

El tobillo transfiere la carga de la extremidad inferior al pie e influye íntimamente en la orientación del pie con el suelo [20]. El tobillo está compuesto por tres huesos que forman la mortaja del tobillo. Este complejo articular se constituye por las articulaciones tibioastragalina, peroneo-astragalina y tibioperonea. El tobillo es una articulación de bisagra cuya estabilidad depende de la congruencia articular y de los ligamentos externos, internos y los de la sindesmosis. El movimiento global del pie es complejo y tiene lugar en torno a tres ejes y sobre tres planos [Figura 1.19]. La dorsiflexión-flexión plantar tiene lugar en el plano sagital, la abducción-aducción en el plano horizontal o transversal, y la inversión-eversión

---

---

en el plano coronal o frontal. El movimiento del dedo incluye dorsiflexión, flexión plantar, aducción y abducción.

La articulación del tobillo realiza esencialmente un movimiento de flexoextensión de unos 40 grados de flexión plantar y 30 grados de flexión dorsal [21]. La articulación subastragalina tiene un arco de movimiento normal entre 30 grados de eversión y 20 grados de inversión. La aducción y la abducción consisten en aproximar la punta del pie hacia el eje medio del cuerpo o alejarla de él, respectivamente, sin modificar el plano horizontal de apoyo. Este movimiento se realiza de manera básica a expensas de la articulación subastragalina, aunque intervienen también las restantes articulaciones de las que forma parte el astrágalo.

## 1.14. Clasificación de las órtesis de miembro inferior

Las Órtesis tienen dos tipos de clasificación

Según el tiempo a utilizar:

- Temporales: Que son utilizadas para trastornos limitados en el tiempo.
- Definitivas: Que son utilizadas en déficit o discapacidades definitivas.

Según las funciones:

1. **Activas:** Las cuales sustituyen de forma mecánica una función muscular o ligamentosa y que a su vez se dividen en:

- Activas dinámicas: Las cuales se van a encargar de sustituir una función muscular.
- Activas estabilizadoras: Las cuales se van a encargar de sustituir la función de músculos y/o ligamentos.

2. **Pasivas:** Las cuales van a pretender mantener un segmento del aparato locomotor en determinada posición, cuando no puede mantenerse por sí mismo y se dividen en:

- Pasivas correctoras: Las cuales se encargan de corregir alguna deformidad
- Pasivas posturales: Su función va a ser mantener un ángulo articular obtenido por otros medios (quirúrgicos, kinésicos, etc).[22]

## 1.15. Rutinas de rehabilitación para miembro inferior

---

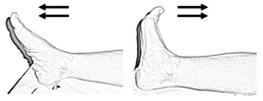
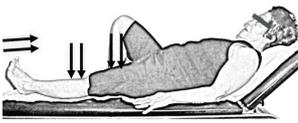
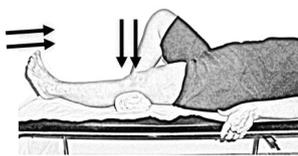
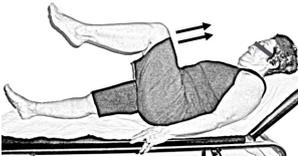
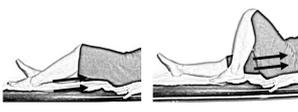
Nombre de la Rutina	Instrucciones	Repeticiones	Esquema
<b>Bombeos de tobillos</b>	Tumbado boca arriba, mover el pie hacia arriba y hacia debajo de forma continua.	<b>Inicialmente:</b> 1 minuto cada hora. <b>Posteriormente:</b> 5 minutos cada 8 horas	
<b>Isométrico de glúteos y cuádriceps</b>	Tumbado boca arriba, apretar contra la camilla con toda la pierna extendida, mientras se levanta la punta del pie hacia la cabeza.	10 repeticiones (mantener 5 seg en cada repetición).	
<b>Potenciación de cuádriceps con rodillo</b>	Tumbado boca arriba. Colocar una toalla bajo de la rodilla. Extender la rodilla presionando contra la toalla, mientras se levanta la punta del pie hacia la cabeza.	10 repeticiones (mantener 5 seg en cada repetición).	
<b>Elevación de miembro inferior en extensión.</b>	Tumbado boca arriba, elevación de miembro inferior en extensión.	10 repeticiones (mantener 5 seg en cada repetición).	
<b>Activos de flexión de cadera</b>	Tumbado boca arriba, levantar la rodilla dirección al pecho con la rodilla flexionada.	10 repeticiones (mantener 5 seg en cada repetición).	
<b>Deslizamientos (talones a nalgas)</b>	Tumbado boca arriba, deslizar el talón acercándolo a la nalgua, mediante la flexión de la rodilla.	10 repeticiones (mantener 5 seg la posición final).	
<b>Estiramiento de flexores de caderas</b>	Tumbado boca arriba, llevar la rodilla no operada hacia el pecho, evitando que la rodilla operada se flexione.	10 repeticiones (mantener 5 seg la posición final).	

Tabla 1.2: Rutinas de rehabilitación que involucran al miembro inferior.

---

## Capítulo II: Desarrollo de la plataforma

---

A través de este capítulo se realiza la descripción detallada de cómo se llevó a cabo el diseño y construcción de los elementos mecánicos necesarios para poder desarrollar nuestra plataforma mecánica. Para poder llevar a cabo el proyecto de un manera eficiente y con el objetivo de que los errores se presenten de manera mínima al momento de realizar la fase de construcción, se planeó investigar sobre las diversas metodologías de diseño que existen.

Ninguna metodología en especial puede manejar a la perfección todas las situaciones que se presentan en un momento dado. Para ser de utilidad, una metodología debe usarse flexiblemente como guía y no dogmáticamente como ritual. Se tiene que tener claro que cada proyecto es un caso metodológico particular. Se constituye en una guía para ordenar y reflexionar sobre el proceso. Determina la secuencia de las acciones (cuándo), el contenido (qué), y los procedimientos específicos (cómo). Es decir, la metodología abarca todo: la estrategia, el proceso, el método.

Por otra parte, la revisión de muchas definiciones formuladas por varios autores que se encuentran involucrados en el estudio de las metodologías de diseño en ingeniería, llevó a formular el concepto de que el diseño es la generación y evaluación sistemática e inteligente de especificaciones para artefactos cuya forma y función alcanzan los objetivos establecidos y satisfacen las restricciones especificadas.

En cuanto a la metodología de diseño existen varias formuladas por varios autores y enfocadas a diversos proyectos, pero todas concurren en identificar la necesidad, la cual consiste en hacerse la pregunta ¿para qué se realiza el diseño?, después de eso, se realizan 3 pasos fundamentales para obtener un diseño eficiente, los cuales son el diseño conceptual, diseño preliminar y el diseño detallado, con esta serie de pasos se obtiene el diseño final, esto cumple con todos los requerimientos y restricciones que satisfagan nuestra necesidad. La metodología de diseño que se escoge para el diseño de este proyecto fue la propuesta por Michael

French en el año de 1985, la razón por la que se escoge es debido a que es una metodología que se basa en 4 etapas fundamentales, las cuales tienen un objetivo específico que va encaminando a obtener la meta que se requiere en forma de dibujos y planos en los que se puede trabajar en la fase de construcción, además que esta metodología de diseño permite la retroalimentación durante las etapas importantes del proceso de diseño. A continuación se detallan los pasos para la metodología de diseño propuesta por French.

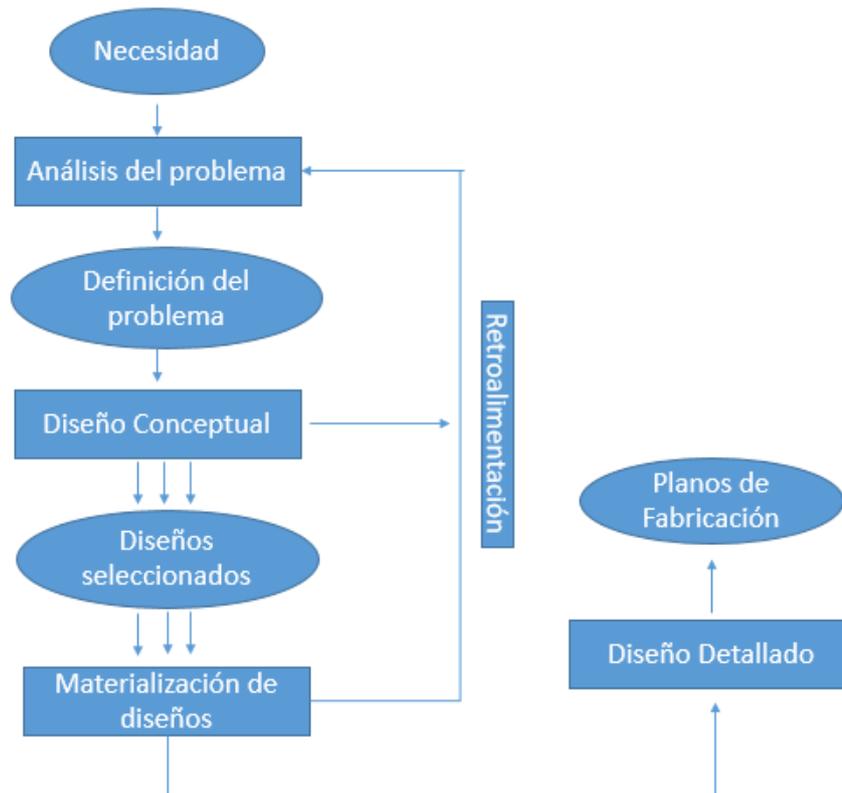


Figura 2.1: Metodología de diseño propuesta por Michael French

**Análisis del Problema:** Llamada como clarificación de la tarea es aquí donde la necesidad que motivó el trabajo de diseño se analiza en consulta con el cliente; en seguida, se formula la necesidad en términos de funciones y de subfunciones. Se incluyen en esta etapa condiciones más precisas, que constituyen las especificaciones de diseño. Una vez que se ha analizado el problema de diseño, se llega a una formulación del problema que satisfaga al cliente.

**Diseño Conceptual:** Aquí se produce una gran variedad de soluciones potenciales al problema de diseño mediante métodos de dinámica de grupos, tales como tormentas de ideas, sinéctica, TRIZ (Siglas en ruso de Teoría Para la Solución Creativa de Problemas), etc. Finalmente, esta variedad se analiza en detalle hasta llegar a un conjunto reducido de

---

alternativas candidato, que tengan la más alta probabilidad de satisfacer todas las especificaciones de diseño, respetando siempre las restricciones de presupuesto y los plazos de entrega.

**Realización:** Las alternativas identificadas en la primera etapa se concretizan en forma de bocetos y dibujos preliminares de diseño. A continuación se introducen varios criterios para evaluar estas alternativas y decidir cuál de ellas es la que se llevará a la etapa siguiente. En trabajos complejos, como puede ser el diseño aeronáutico, se produce un modelo paramétrico de la alternativa seleccionada, con propósitos de análisis, muy probablemente mediante elementos finitos y, finalmente, se utilizan estos modelos para fines de optimización.

**Diseño de Detalle:** Una vez que el equipo de diseño ha producido una realización aceptable del objeto diseñado, todas las piezas que constituyen el objeto se diseñan en todo detalle, o bien se seleccionan de catálogo, como es el caso en componentes estándar, rodamientos, tornillos, motores, etc. El producto final es una memoria de diseño, que contiene: un resumen de la necesidad que motivó el trabajo; todas las soluciones alternativas consideradas, con la lógica que llevó a seleccionar aquella que se realizó; planos de fabricación; lista de materiales; gráficos de curvas de operación obtenidas mediante simulación; presupuesto estimado para la producción del objeto diseñado; y toda clase de información necesaria para fabricar el objeto. En las secciones siguientes se detalla la metodología propuesta por French aplicada a nuestro proyecto.

## 2.1. Análisis del problema y clarificación de la tarea

La principal función que se asigna a este proyecto es construir un exoesqueleto de rehabilitación de miembro inferior derecho con 3 grados de libertad que involucren a la cadera, rodilla y tobillo para poder realizar rutinas de rehabilitación mediante el uso de sensores que permitan controlar la posición y velocidad.

El proyecto se separa en tres subfunciones principales, lo cual nos ayudará a separar el producto final en partes más pequeñas y al final unirlo, esto con el objetivo de simplificar el trabajo. Estas subfunciones son:

- SF1** Desarrollar una estructura mecánica de posicionamiento en los ejes X, Y y Z que brinde la ventaja de que el exoesqueleto de rehabilitación se coloque con más facilidad y menos movimiento al paciente.

---

- SF2** Diseñar y construir los actuadores seriales elásticos de la plataforma.
- SF3** Adaptar una órtesis comercial HKAFO, para implementar un robot de 3 grados de libertad constituido por actuadores seriales elásticos.

## 2.2. Diseño conceptual

Para el diseño conceptual se propondrán una gran variedad de ideas a través de "Brainstorming". La base de esta técnica, consistente en entrenar el cerebro humano para desencadenar una variedad de ideas diferentes para resolver el problema y plasmarlas en papel sin censura, fue formulada por primera vez en 1939 por el autor estadounidense Alex F. Osborn y desarrollada por el teórico de la gestión Charles Hutchison Clark. El brainstorming es un método que tiene como objetivo la recopilación rápida y no filtrada de ideas, pidiendo a los participantes que simplemente lancen opiniones al aire. A continuación se presenta el brainstorming para cada subfunción propuesta en la primera parte del método.

### 2.2.1. Brainstorming subfunción 1: Estructura de posicionamiento XYZ

En la tabla 2.1 se muestran cuatro ideas para realizar la subfunción 1.

Numero de opción	Tipo de estructura	Descripción	Esquema
Opción 1	Hidráulica	Elevar una plataforma mediante fuerza hidráulica y con una manivela controlar descenso y ascenso	
Opción 2	Neumática	Elevar una plataforma mediante la fuerza de aire comprimido	

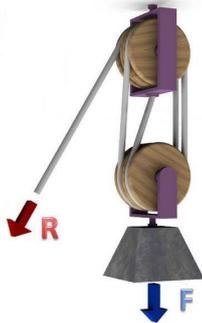
Opción 3	Mecánica	Elevar una plataforma mediante el uso de contrapesos y cadenas como un elevador convencional.	
Opción 4	Electromecánica	Elevar una plataforma mediante un motor y un mecanismo de tornillo de potencia	

Tabla 2.1: Tormenta de ideas para la primer subfunción

## 2.2.2. Brainstorming subfunción 2: Desarrollo de los actuadores seriales elásticos

En la tabla 2.2 se muestran tres ideas para realizar la subfunción 2

Numero de opción	Tipo de estructura	Descripción	Esquema
Opción 1	Hume SEA	Actuador ideal para espacios reducidos, la transmisión de energía del motor al mecanismo la realiza mediante una banda elástica.	
Opción 2	UT SEA	Actuador de pequeñas dimensiones, con resortes descentrados y husillos de bolas para reducir la fricción del tornillo sin fin	
Opción 3	IHMC SEA	En este tipo de actuador serial el motor está acoplado directamente al tornillo sin fin, por lo que aumenta sus dimensiones	

Tabla 2.2: Tormenta de ideas para la segunda subfunción

### 2.2.3. Brainstorming subfunción 3: Implementación y adaptación de una órtesis comercial.

En la tabla 2.3 se muestran tres ideas para realizar la subfunción 3.

Numero de opción	Tipo de estructura	Descripción	Esquema
Opción 1	Órtesis HKAFO	Adquirir una Órtesis HKAFO	
Opción 2	Órtesis KAFO mas cinturón abdominal	Adaptar un cinturón abdominal a una órtesis KAFO con la que ya se cuenta	

Tabla 2.3: Tormenta de ideas para la tercer subfunción

### 2.2.4. Elección de la idea candidato para cada subfunción

La manera que se escogió para elegir la idea que satisfaga las necesidades de diseño, fue mediante una técnica llamada de factores ponderados, la cual nos permite mediante la sabiduría de una persona calificada o la necesidad de un grupo de personas proponer varios factores importantes, a su vez se les asigna un valor cuantitativo y finalmente llevará a una calificación compuesta que permitirá comparar numéricamente cual es la mejor, y por tanto se lleve a una idea final. Los pasos para realizar esta técnica son:

1. Determinar una relación de los factores relevantes.
2. Asignar un peso a cada factor que refleje su importancia relativa.
3. Fijar una escala a cada factor. Ejm: 1-10 ó 1-100 puntos.
4. Hacer que los directivos evalúen cada localización para cada factor.
5. Multiplicar la puntuación por los pesos para cada factor y obtener el total para cada

localización.

6. Hacer una recomendación basada en la localización que haya obtenido la mayor puntuación, sin dejar de tener en cuenta los resultados obtenidos a través de métodos cuantitativos.

La puntuación para cada opción fue asignada del 1 al 10, donde 1 es algo muy complicado y 10 algo muy simple, en cuanto a factores estamos hablando. En las tabla 2.4,2.5,2.6 se muestran los factores ponderados para la SF1, SF2 y la SF3, respectivamente. Al último se muestra en la tabla 2.7 la elección de la idea candidato y así obtener un diseño conceptual y detallado.

Factores	Peso Relativo (%)	Alternativas/ Opciones			
		1	2	3	4
Maquinado	35	5	6	7	7
Facilidad para adquirir materiales	20	3	3	7	9
Ensamblaje	20	4	4	5	8
Mantenimiento	10	3	4	5	7
Facilidad para manejarse por el usuario	15	3	5	8	9
<b>Puntuación Total</b>		3.9	4.65	6.55	7.9

Tabla 2.4: Factores ponderados para la primer subfunción

Factores	Peso Relativo (%)	Alternativas/Opciones		
		1	2	3
Maquinado	35	6	6	8
Facilidad para adquirir materiales	20	7	5	8
Ensamblaje	20	6	5	9
Mantenimiento	10	7	6	8
Colocación de Sensores	15	4	6	7
<b>Puntuación Total</b>		6	5.6	8.05

Tabla 2.5: Factores ponderados para la segunda subfunción

Factores	Peso Relativo(%)	Alternativas/Opciones	
		1	2
Facilidad de Adquisición	20	2	7
Comodidad para el Paciente	20	8	8
Adaptación al paciente	25	8	8
Adaptación al Mecanismo de Posicionamiento	15	6	8
Adaptación a los actuadores seriales elásticos	20	5	8
<b>Puntuación Total</b>		5.9	7.8

Tabla 2.6: Factores Ponderados para la tercer subfunción

Por tanto la elección candidata para cada subfunción queda de la siguiente manera.

<b>Subfunción</b>	<b>Opción elegida</b>
<b>Subfunción 1</b>	Estructura Electromecánica
<b>Subfunción 2</b>	Actuador Serial Elástico IHMC
<b>Subfunción 3</b>	Órtesis KAFO mas cinturón abdominal

Tabla 2.7: Elección final para cada subfunción

## 2.3. Realización del diseño conceptual

En esta sección se muestran unos bocetos de cada opción elegida para tener en claro una idea que lleve al diseño detallado. En las imágenes se muestra una serie de nomenclatura por colores para posicionar ciertos elementos del diseño conceptual de manera un poco mas clara para la subfunciones 1,2 y 3 respectivamente.

<b>Elementos</b>	<b>Color</b>
Eje Y	Orange
Eje X(Carrito)	Dark Red
Robot 3gdl para rehabilitación	Yellow
Estructura	Blue
Husillo de Potencia	Grey
Barras de posicionamiento	Green
Cojinetes	Red
Soporte Barras	White
Motores	Orange
Llantas	Light Blue
Barrenos	Light Green

Figura 2.2: Elementos clave para el diseño conceptual de la subfunción 1

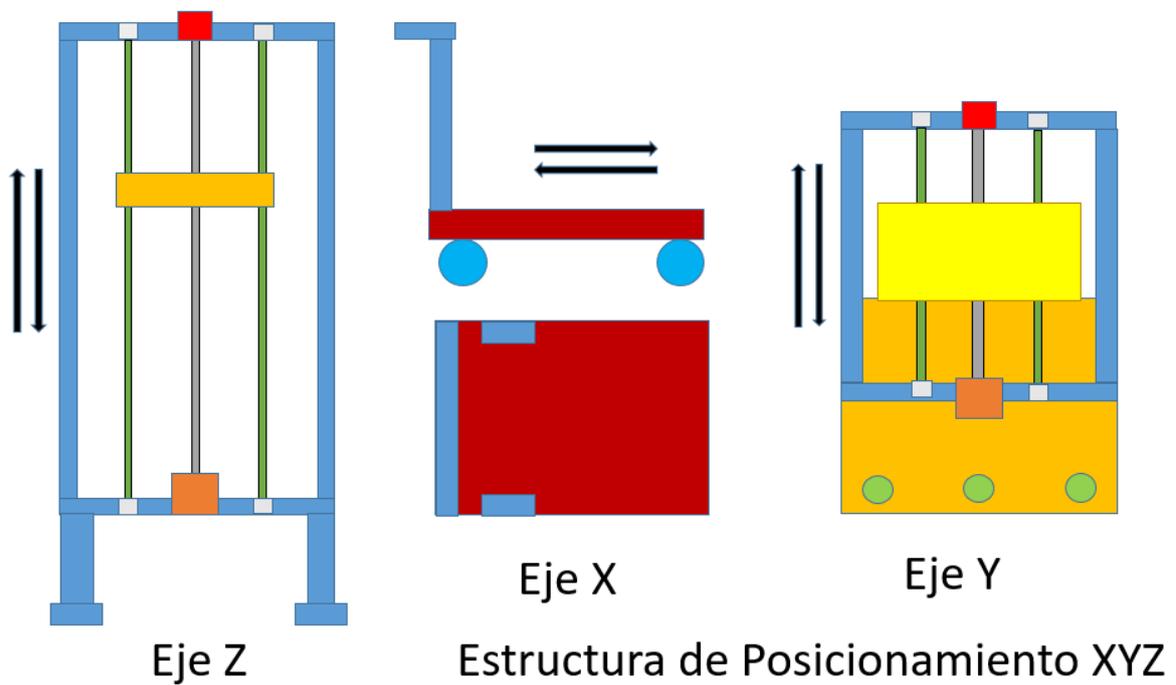


Figura 2.3: Diseño conceptual para la subfunción 1

Elementos	Color
Elementos Base de Plástico	Azul
Cojinetes	Rojo
Resortes	Verde claro
Barras de soporte	Gris
Tuerca para husillo de potencia	Naranja claro
Motor	Naranja
Potenciómetro	Púrpura
Rod eye	Verde
Interruptores de limite	Amarillo
Husillo de Potencia	Negro
Soporte de Aluminio	Verde
Acoplamiento Husillo-Motor	Amarillo

Figura 2.4: Elementos clave para el diseño conceptual de la subfunción 2

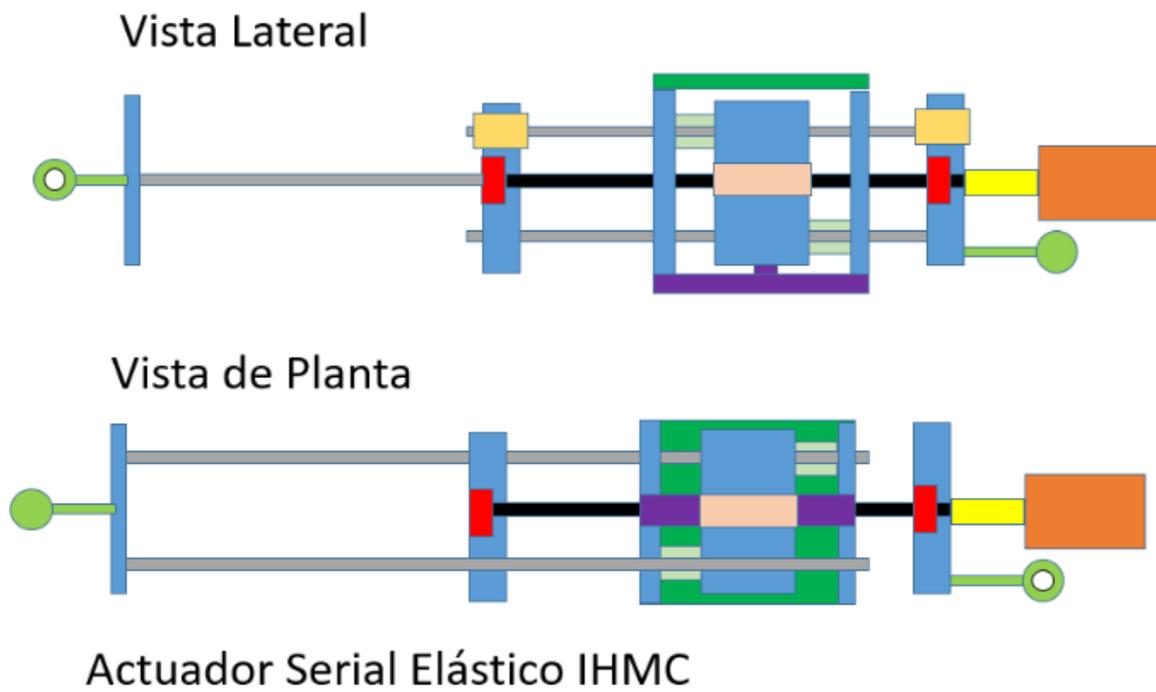


Figura 2.5: Diseño conceptual para la subfunción 2

<i>Elementos</i>	<i>Color</i>
Eje de posicionamiento Y	Amarelo
Cama Hospitalaria	Verde oscuro
Órtesis KAFO	Azul
Cinturón abdominal	Púrpura
Sensores	Verde claro
Actuador Serial Elástico 1	Naranja
Actuador Serial Elástico 2	Naranja claro
Actuador Serial Elástico 3	Naranja claro
Ganchos para colación	Gris
Cadenas	Rojo

Figura 2.6: Elementos clave para el diseño conceptual de la subfunción 3

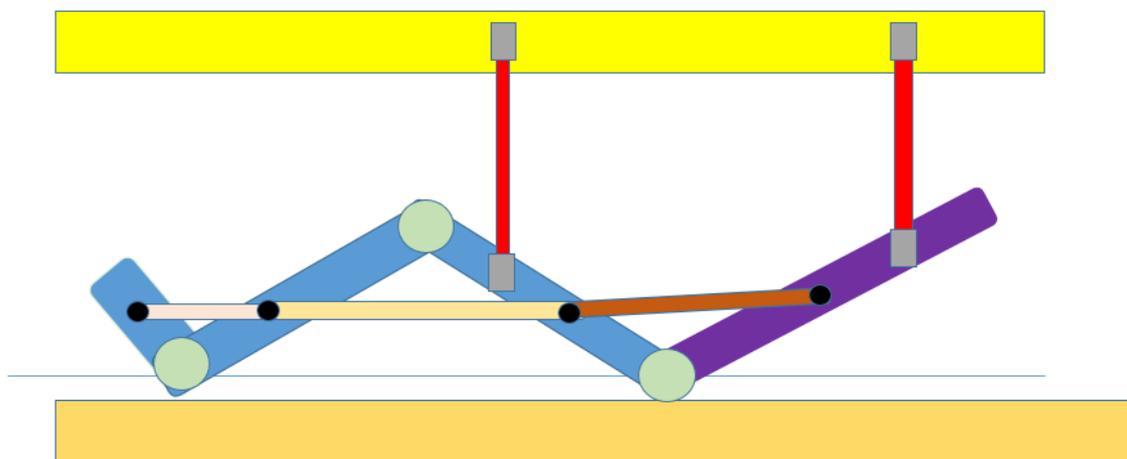


Figura 2.7: Diseño conceptual para la subfunción 3

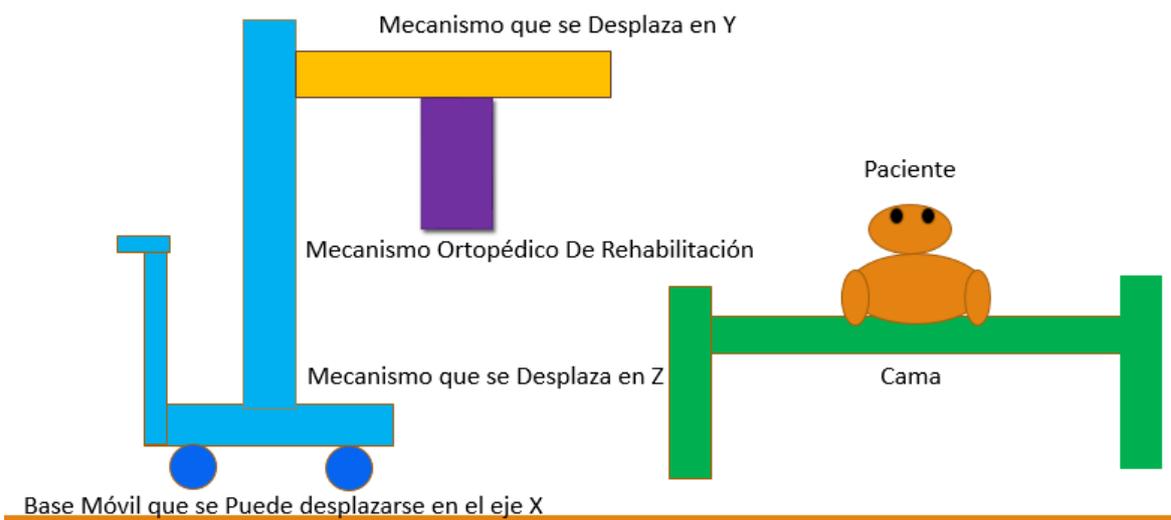


Figura 2.8: Diseño conceptual generalizado

---

## Capítulo III: Diseño detallado y construcción

---

En el presente capítulo se muestra de una manera más específica cómo se realizó a detalle cada subfunción definida en el capítulo anterior, partimos de las necesidades principales que se requieren cumplir, así también, se trata de resolver la pregunta ¿Como se resolvió el problema?. La respuesta a esta pregunta se trata de contestar de una manera lógica y con fundamentos matemáticos y físicos simples, para que posteriormente en el capítulo VI se pueda comprobar realizando simulaciones de análisis de esfuerzos mediante software especializado en el análisis estructural de elementos finitos, todo esto con el objetivo de llegar a un diseño efectivo que ayude a resolver los problemas iniciales planteados en cada subfunción y en los objetivos planteados en el capítulo I. En este capítulo también se muestra como ha sido el avance del armado de las estructuras físicas que harán al proyecto funcional en cada función propuesta previamente, así cómo se realizó la unificación de los subsistemas principales.

### 3.1. Diseño detallado de subfunción 1

Recordando los objetivos principales plantados en el capítulo I, los más ligados a esta subfunción son los siguientes.

- A) El mecanismo tiene que ser capaz de cargar el peso de un miembro inferior humano, el peso de la órtesis, y de los actuadores elásticos con su instrumentación.
- B) Elegir los motores que se adapten correctamente a las cargas que moverán los ejes.
- C) Una estructura que pueda moverse en los ejes espaciales X, Y y Z de forma dinámica.
- D) Los cables del motor del eje Z y Y deben estar acomodados de cierta manera que no obstruyan el movimiento del mecanismo planteado en el punto C.

Para solucionar el punto A, primero se debe saber cuánto pesa cada parte de la carga total, según los principales estudios hechos acerca del peso y la posición del centro de gravedad de cada uno de los segmentos corporales se han abordado mediante técnicas experimentales, ya que dependen de la cantidad de materia que tienen los segmentos y de su distribución espacial, algo que es característico en cada persona.

Aunque algunos autores han tratado de obtener parámetros inerciales individualizados para cada persona (Whitsett, 1963; Hanavan, 1964; Jensen, 1978; Hatze, 1980 y Yeadon, 1990), los procedimientos para obtenerlos resultan poco precisos y costosos.

Por ello, lo habitual es expresar el peso de cada segmento como un porcentaje del peso total del individuo. Existen diversos modelos de este estilo. El más empleado es el procedente de los estudios de Dempster [26] y Clauser [27], que obtuvieron los datos del desmembramiento de cadáveres.

<b>SEGMENTO</b>	<b>MASA</b>	<b>CG</b>	<b>INERCIA</b>	<b>PUNTO PROXIMAL</b>	<b>PUNTO DISTAL</b>
Cabeza y Cuello	7.3 %	46.40 %	0.029	Vertex	Gonion medio
Tronco	50.7 %	38.03 %	-	Huevo supraesternal	Cadera media
Brazo	2.6 %	51.30 %	0.040	Acromion	Radiale
Antebrazo	1.6 %	38.96 %	0.018	Radiale	Art.muñeca
Mano	0.7 %	82.00 %	0.002	Art.muñeca	Estiloides 3er dedo
Muslo	10.3 %	37.19 %	0.298	Art.cadera	Tibiale
Pantorrilla	4.3 %	37.05 %	0.143	Tibiale	Art. tobillo
Pie	1.5 %	44.90 %	0.007	Talón	Primer dedo

Tabla 3.1: Parámetros inerciales determinados por Dempster y Clauser.

En la tabla 3.1 la columna MASA indica la masa del segmento en porcentaje respecto a la masa total del sujeto. La columna CG indica el porcentaje, respecto a la longitud total del segmento correspondiente, al que se encuentra el centro de gravedad del segmento medido desde el punto proximal.

Otros estudios, como los de Drillis y Contini [28] permiten realizar una estimación de la longitud de los diferentes segmentos corporales en función de la estatura del individuo.

Con base en los datos obtenidos de la tabla 3.1, observando las cuatro últimas casillas sabemos que el peso del miembro inferior está conformado por el muslo, la pantorrilla

y el Pie; lo cual suma 16.1 % del peso total de un individuo, según la cámara nacional de industria del vestido(CONAIVE)[29] el mexicano promedio a partir de los 18 años mide 1.64 m y pesa 74.8 kg para hombre y para mujeres la medida promedio es 1.58m y pesa 68.7 Kg, por tanto si partimos del promedio de una persona y agregamos el 20 % de factor de seguridad para diseño mecánico más de ese promedio, lo cual sería una persona de aproximadamente 90 Kg, podemos diseñar nuestra estructura para que aguante el peso de un miembro inferior de aproximadamente el 16.1 % de ese peso, lo cual sería 14.49 Kg.

Ahora para saber el peso aproximado del actuador serial elástico, nos basamos en actuadores previamente diseñados del tipo IHMC, del tipo de actuadores realizados en [5], los cuales se pudieron pesar experimentalmente y tienen un peso de entre 1.5-2 Kg, si se planean usar 3, hablamos de un peso de entre 4.5-6 Kg.

Por último, el peso de la órtesis se obtiene gracias al fabricante, el cual nos indica que es de aproximadamente de 3 a 4Kg.

Por tanto el peso total que debe cargar la estructura es de aproximadamente 25 Kg, adicionando 5 kg más debido al peso de la estructura que debe mover a lo largo del eje Y, en total puede llegar a los 30 Kg. Para llegar a un diseño en donde se pueda aplicar el uso de la física y las matemáticas nos basamos en 2 mecanismos que se usan en la maquinaria industrial, el primero es una grúa de torre y el montacargas.

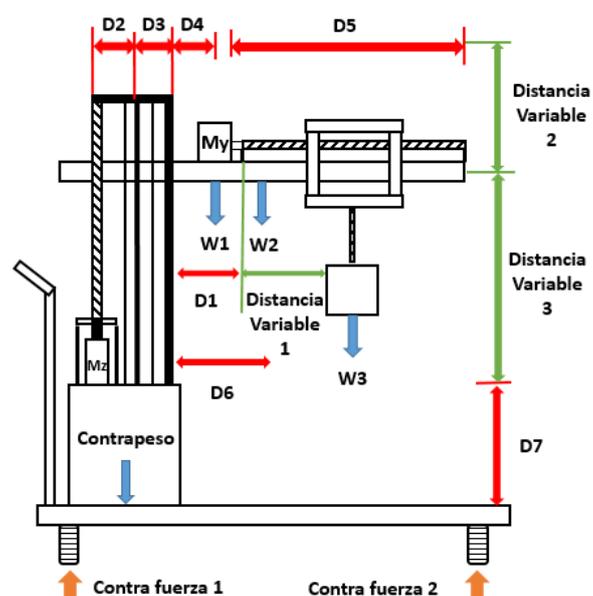


Figura 3.1: Parámetros que influyen en la estructura

En la figura 3.1 se realiza un esquema mas detallado sobre el mecanismo con las principales distancias y pesos que influyen en la estructura, mientras tanto en la figura se realiza el análisis estático para encontrar el contrapeso necesario que contrarreste el peso de la carga a elevar, en este caso dado que la estructura donde está colocado el mecanismo es un cuerpo rígido completo, este contrapeso va a coincidir con el peso total de la estructura.

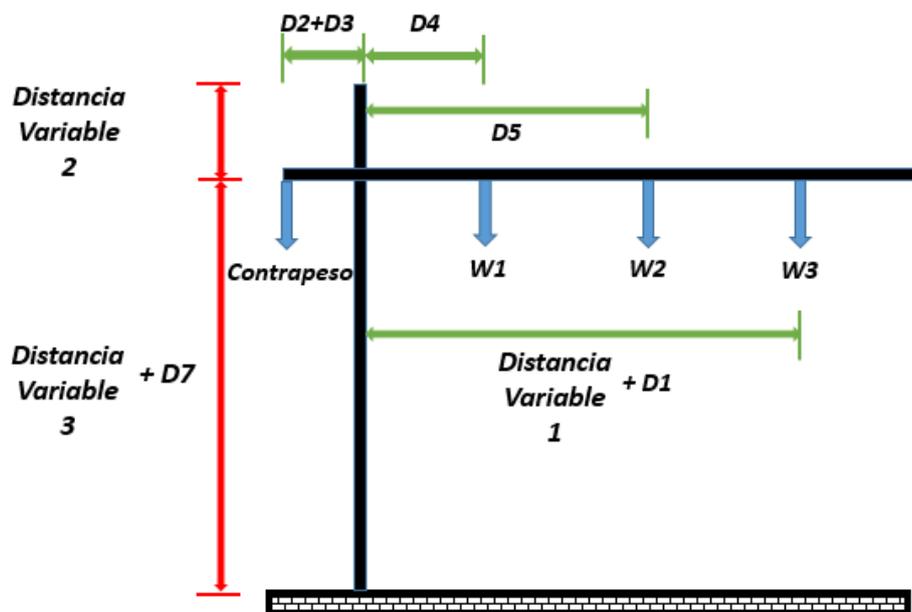


Figura 3.2: Diagrama de cuerpo libre del sistema

Realizando los cálculos para encontrar el contrapeso necesario que debe contener la estructura, para esto sabemos que:

$$D_1 = 100mm; D_2 = 71mm; D_3 = 45mm; D_4 = 58mm; D_6 = 96mm;$$

La distancia Variable 1, puede oscilar entre 146 mm a 500 mm. Mientras tanto los pesos son:

$$W_1 = 1.05Kg; W_2 = 0.863kg; W_3 = 25Kg;$$

Por tanto de acuerdo al equilibrio de fuerzas y torque tenemos que el contrapeso mínimo y máximo requerido es :

$$\begin{aligned} \text{contrapeso}_{min} * (D_2 + D_3) &= W_1 * D_4 + W_2 * D_4 + W_3 * [D_1 + \text{DistanciaVariable1}] \\ \text{contrapeso}_{min} &= \frac{W_1 * D_4 + W_2 * D_6 + W_3 * [D_1 + \text{DistanciaVariable1}]}{D_2 + D_3} \\ \text{contrapeso}_{min} &= \frac{1.05Kg * 58mm + 0.863kg * 96mm + 25Kg * [100mm + 146mm]}{71mm + 45mm} \\ \text{contrapeso}_{min} &= 54.2564Kg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{contrapeso}_{max} * (D_2 + D_3) &= W_1 * D_4 + W_2 * D_4 + W_3 * [D_1 + \text{DistanciaVariable1}] \\ \text{contrapeso}_{min} &= \frac{W_1 * D_4 + W_2 * D_6 + W_3 * [D_1 + \text{DistanciaVariable1}]}{D_2 + D_3} \\ \text{contrapeso}_{min} &= \frac{1.05Kg * 58mm + 0.863kg * 96mm + 25Kg * [100mm + 500mm]}{71mm + 45mm} \\ \text{contrapeso}_{min} &= 130.54Kg \end{aligned}$$

Por tanto la estructura donde va montado el mecanismo debe pesar entre 55 Kg y 131 Kg, esto con el fin de que no se produzcan torques que hagan que la estructura se venza por el peso de la carga a elevar. Por otra parte las distancias verticales producen también un torque, pero éstas nos ayudarán ya que las cuatro llantas distribuyen el peso total del mecanismo en 4, lo cual otorga una estabilidad superior a la estructura, estas fuerzas están marcadas con flechas naranjas en la figura 3.1

Para resolver el punto B, se utiliza un dato que se obtuvo en el punto A, este es el peso total que elevará el mecanismo, en nuestro caso se planea elevar el eje Y, el cual cuenta con un peso aproximado de 30 Kg. Se tuvieron que elegir 2 motores a pasos, debido a su fácil uso, producen poco ruido y suministran precisión. Se eligió un motor nema 23 con un torque de 23.54kg cm, con una corriente máxima de 4.4 Amp el cual se ocupará para el eje Y, mientras tanto para el eje z igualmente se utilizará un motor nema 23 con un torque 36 kg-cm con una corriente máxima de 5 Amp. Ambos motores tienen 200 pasos con la capacidad de micropasos entre paso.

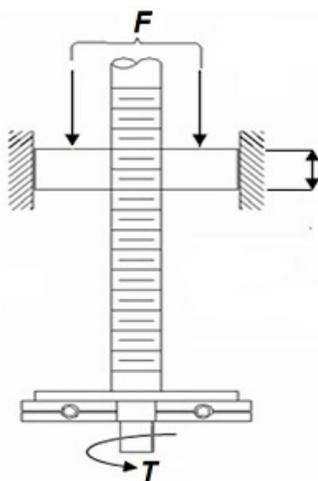
---

Enfocándonos en el punto C, sabemos que la estructura se podrá mover de manera dinámica a lo largo del eje X a voluntad del manejador, ya que el mecanismo cuenta con cuatro ruedas, mientras tanto para el eje Y se eligió un mecanismo de tornillo sin fin que transmitiera la misma fuerza que el motor del eje Y le aplique, en el caso del eje Z se moverá igualmente con un eje sin fin, pero en este caso influye la gravedad y la fricción ya que juega un papel importante, por tanto se procede a calcular cuál es el peso real que carga de manera óptima este mecanismo. Se seleccionó un tornillo sin fin con un diámetro exterior de 1 pulgada y con 2 hilos por pulgada como el que se muestra en la figura 3.3



Figura 3.3: Tornillo sin fin de cuerda ACME

Realizando el cálculo para saber la fuerza total que aguanta el tornillo sin fin cuando se le introduce un torque en un extremo y debe soportar una fuerza por el otro extremo que involucre a la gravedad tal como se observa en la figura



$$\begin{aligned}
 \text{Diámetro exterior} &= 1'' \\
 \text{Número de hilos por Pulgada} &= 2 \\
 \text{Paso} &= 0.5'' \\
 \text{Torque del Motor} &= 36\text{kg} - \text{cm} \\
 &= 31.24\text{Lb} - \text{in} \\
 \text{Profundidad de la rosca} &= 0.26'' \\
 \mu &= 0.15 \\
 \alpha &= 14.5\text{grados}
 \end{aligned}$$

Figura 3.4: PTR de 2 pulgadas

En lo que se refiere a  $\mu$ , es el coeficiente de fricción que maneja nuestro collarín donde va montado el tornillo sin fin y se fija al eje Y, es el que define el desplazamiento en el eje Z, mientras tanto  $\alpha$ , es el ángulo al que se realiza el corte para hacer la hélice de los hilos para un tornillo tipo ACME.

Se obtienen valores como el radio exterior, radio medio y diámetro medio como se muestran a continuación:

$$R_e = 0.5''$$

$$\begin{aligned} R_m &= R_e - \text{Profundidad de la rosca} \\ &= 0.5'' - 0.26'' = 0.24'' \end{aligned}$$

$$D_m = 2 * R_m = 2 * (0.24'') = 0.48''$$

El tornillo se encuentra apoyado y sujeto en su extremo inferior por un cojinete de bolas, cuyo rozamiento se puede considerar despreciable a efectos de cálculos en este caso.

La siguiente expresión se obtiene del libro "Máquinas y Mecanismos"[30], la cual proporciona el par torsional (T) necesario para elevar una carga de valor (F) para un tornillo de rosca ACME, y sin collarín.

$$T = \left( \frac{F * d_m}{2} \right) \left( \frac{P + \pi * \mu * d_m * \sec(\alpha)}{\pi * d_m - \mu * P * \sec(\alpha)} \right)$$

Despejando la fuerza a levantar

$$\begin{aligned} F &= \frac{T * 2(\pi * d_m - \mu * P * \sec(\alpha))}{d_m(P + \pi * \mu * d_m * \sec(\alpha))} \\ &= \frac{(31.24lb * in) * 2(\pi * (0.48'') - (0.15) * (0.5'') * \sec(14.5))}{(0.48'')(0.5'' + \pi * (0.15) * (0.48'') * \sec(14.5))} \\ &= 253.80Lb \\ &= 115.121Kg \end{aligned}$$

Por tanto el peso real que puede elevar este mecanismo de tornillo sin fin aplicándole el torque máximo que produce nuestro motor a pasos seleccionado en el eje Z es de 115 Kg, para lo cual nuestro propósito es levantar 30 Kg a lo máximo, esto significa que el mecanismo seleccionado carga 3.84 veces lo requerido.

---

Se tiene un único problema, el cual consiste en acomodar los cables del eje Z y el eje Y para que no interfieran con el movimiento en estas trayectorias, lo que puede dañar el alambrado y afectar al funcionamiento del mecanismo. Por tanto se hace uso de las orugas de plástico mostradas en la figura 3.5, las cuales son montadas en los extremos estructurales del mecanismo, de manera que asciendan y desciendan de forma correcta.



Figura 3.5: Oruga plástica para introducir cable

Ahora solo queda armar la estructura, la cual será ensamblada con cuadrado PTR de 2 pulgadas, debido a que es fácil de manufacturar en cuanto a cortar y unir, éste se unirá con soldadura de arco eléctrico y electrodos 6013. Se realizarán cortes en CNC en aluminio 6063 T5, Nylimid e impresiones 3D en Nylon y PLA, también se eligió aluminio estructural de 2cm en forma cuadricular para el eje Y. Las piezas que se realizaron se colocan en la tabla 8.3.1 correspondientes a los anexos .



Figura 3.6: Modelo CAM Final de la estructura

En la figura 3.6 se muestra el modelo CAM finalizado de nuestra estructura XYZ.

Para terminar esta primer subfunción, en la figura 3.7 se muestra un diagrama de cómo es que funcionan los eje X,Y y Z, esto desde la perspectiva del usuario.

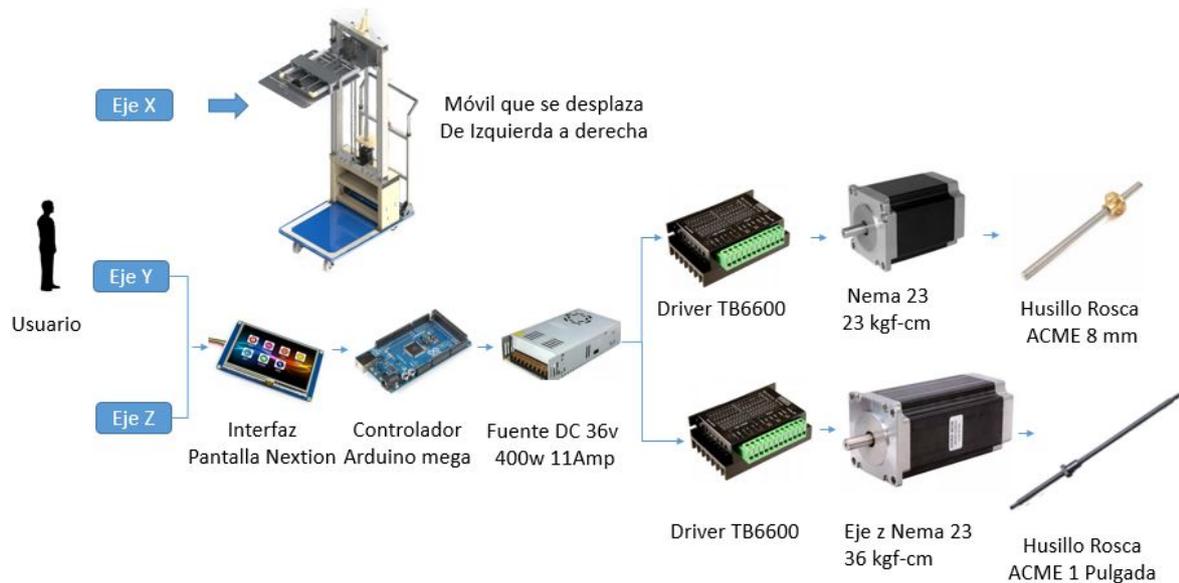


Figura 3.7: Diagrama secuencial del funcionamiento de la electrónica y mecánica de los ejes principales desde la perspectiva del usuario

## 3.2. Diseño detallado de subfunción 2

A mediados de la década de 1990, Pratt y Williamson propusieron el concepto de Actuador Elástico en Serie (AES, de Series Elastic Actuator en inglés) en [31] con el objetivo de ofrecer un sistema de accionamiento con características adecuadas para la transmisión de fuerzas y movimiento en aplicaciones de robótica humanoide y vehículos de exploración, como lo son la tolerancia a cargas de impacto, el control estable de la fuerza y la capacidad de almacenar energía potencial, principalmente. El principio de funcionamiento estaba basado en un ensamble motorreductor conectado en serie con un elemento elástico pasivo (representado por un resorte) que a su vez se acopla con la carga a accionar. Esta configuración básica se presenta en la Figura 3.8.

Este tipo de actuadores tiene un control preciso de la fuerza a la salida en función de la deformación del resorte en serie a partir de la ley de Hooke; evitando así el uso de sensores costosos como celdas de carga que además no son tolerantes ante determinadas fuerzas de

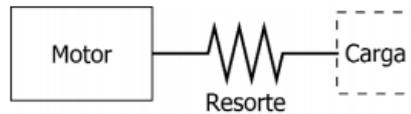


Figura 3.8: Principio de funcionamiento de un actuador elástico en serie.

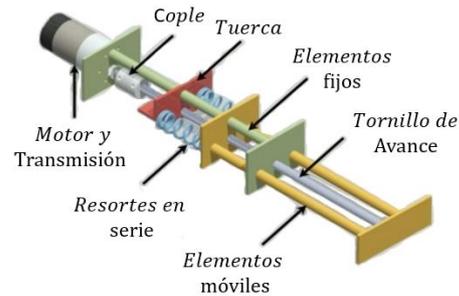


Figura 3.9: Prototipo de actuador elástico serial

impacto. En términos generales, un ensamble de AES tiene propiedades características de su diseño como lo son: baja impedancia mecánica, baja fricción, ancho de banda mejorado y alta sensibilidad a la fuerza [32].

El control para AES tuvo sus primeros acercamientos a través de controladores anticipativos y retroalimentados empleando lazos PID y sus variaciones. Los desarrollos más recientes en este ámbito han empleado también otras estrategias como el control de impedancia, seguimiento de trayectorias o control adaptativo, principalmente para aplicaciones en el desarrollo de prótesis robóticas de miembro inferior.

### 3.2.1. Modelado dinámico del actuador elástico en serie

Partiendo del modelo planteado originalmente en [32], se propone el modelado del prototipo virtual de AES lineal mostrado en la Figura 3.9. El prototipo virtual contempla el ensamble de un servomotor con una transmisión de engranes acoplada a la salida con un tornillo de avance rápido. Una tuerca se desplaza en dirección longitudinal sobre el tornillo en función del giro del motor. A su vez, la tuerca está acoplada a través de resortes a un ensamble que representa el extremo móvil del actuador que estaría en contacto con la carga a accionar.

El modelo matemático de la dinámica del sistema parte del arreglo de masas mostrado en la Figura 3.10, donde  $\tau_{mot}$  representa el torque que produce el motor,  $K$  es una ganancia debida a la estructura mecánica del actuador que amplifica el torque del motor y lo transforma en una fuerza  $f_m$  a la salida del actuador  $m_m$  es una pequeña masa que desliza a lo largo del tornillo sin fin por medio de un husillo a bolas,  $m_1$  es la masa total a la que se le aplica la fuerza resultante del actuador  $f_a$ ,  $k_s$  es la constante del resorte colocado entre las masas  $m_m$  y la masa  $m_1$  y existe un pequeño coeficiente de fricción  $b_m$  que resulta del rozamiento del tornillo sin fin con el husillo de bolas.

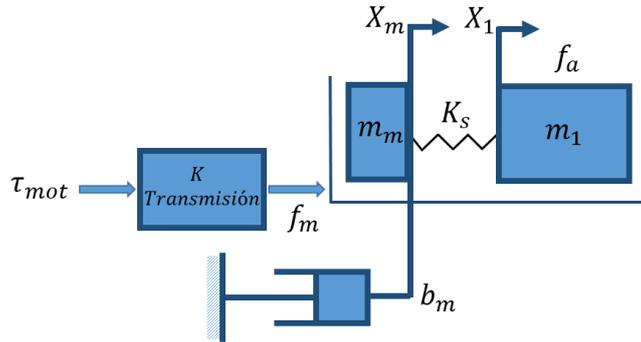


Figura 3.10: Diagrama esquemático del modelo dinámico del actuador elástico en serie propuesto

Analizando las fuerzas que influyen en el sistema obtenemos la siguiente ecuación:

$$f_m - f_a - f_h - f_1 = 0$$

$$f_h = f_m - f_a - f_1$$

Partiendo de la segunda ley de Newton, se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$f_h = m_m \ddot{x}_m$$

$$f_1 = b \dot{x}_m$$

Recordando que  $f_a$  proviene de la ley de Hooke.

$$f_a = K_s \Delta x_a$$

$$f_a = K_s [x_m - x_1]$$

Obtenemos el modelo, despejando  $K_s$  y derivando la ecuación anteriormente dos veces respecto al tiempo.

$$\frac{f_a}{K_s} = x_m - x_1$$

$$\frac{\dot{f}_a}{K_s} = \dot{x}_m - \dot{x}_1 \longrightarrow \dot{x}_m = \frac{\dot{f}_a}{K_s} + \dot{x}_1$$

$$\frac{\ddot{f}_a}{K_s} = \ddot{x}_m - \ddot{x}_1 \longrightarrow \ddot{x}_m = \frac{\ddot{f}_a}{K_s} + \ddot{x}_1$$

Sustituyendo y despejando se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ddot{f}_a}{K_s} + \ddot{x}_1\right)m_m &= f_m - f_a - b_m\left(\frac{\dot{f}_a}{K_s} + \dot{x}_1\right) \\ \frac{\ddot{f}_a}{K_s}m_m + \ddot{x}_1m_m &= f_m - f_a - \frac{b_m}{K_s}\dot{f}_a - b_m\dot{x}_1 \\ f_m - b_m\dot{x}_1 &= \frac{m_m}{K_s}\ddot{f}_a + \frac{b_m}{K_s}\dot{f}_a + f_a + \ddot{x}_1m_m \\ f_m - b_m\dot{x}_1 &= \frac{m_m}{K_s}\ddot{f}_a + \frac{b_m}{K_s}\dot{f}_a + \frac{f_a}{m_1}m_m \\ f_m - b_m\dot{x}_1 &= \frac{m_m}{K_s}\ddot{f}_a + \frac{b_m}{K_s}\dot{f}_a + f_a\left(1 + \frac{m_m}{m_1}\right) \end{aligned}$$

Si  $b_m \ll 1$  se considera a la fricción muy pequeña por lo tanto, se pueden eliminar los términos que la contienen, quedando la ecuación de la siguiente forma:

$$f_m = \frac{m_m}{K_s}\ddot{f}_a + f_a\left(1 + \frac{m_m}{m_1}\right)$$

Para el actuador serial se eligió un moto reductor de DC con una caja de engranajes de 50:1 con un torque de 21Kg- a 200 RPM de 12. Se maquinaron diversas piezas en nylimid y aluminio 6063 T5, así como la adquisición y adaptación de diversos mecanismos ya fabricados, los cuales se pueden Observar en la tabla 8.3.3 y tabla 8.3.2. En la figura se observa el CAM terminado y en la figura se observa el actuador final.

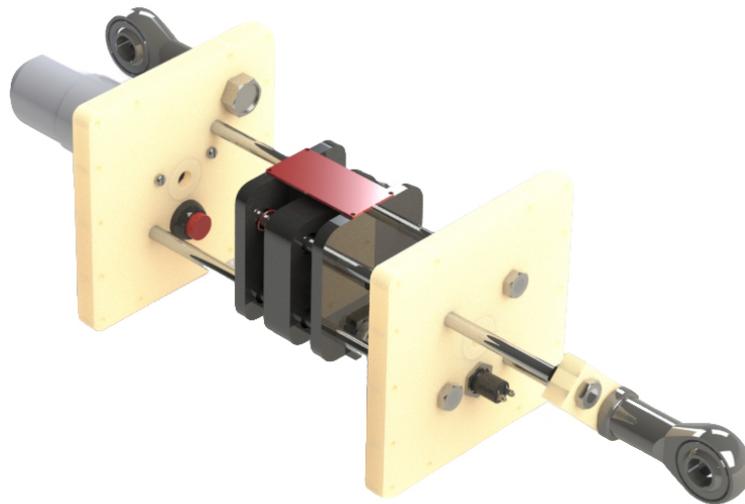


Figura 3.11: Diagrama esquemático del modelo dinámico del actuador elástico en serie propuesto

### 3.3. Diseño detallado de subfunción 3

Para el desarrollo de la siguiente subfunción, se usó una órtesis KAFO tabla 8.6 con la que ya se contaba, de cual previamente el laboratorio había realizado diferente prototipos como los mostrados en los artículos [5], [6], [7] mencionados en la primer sección de este documento. Lo que se pensaba originalmente era adquirir una órtesis HKAFO como la que se muestra en la tabla 2.3 para adaptarles los sensores y montarla a la estructura XYZ de la subfunción 1, pero debido a diversas situaciones que tenían que ver con el tiempo de adquisición e implementación, se optó por acondicionar la órtesis con la que se contaba. En la figura 3.12 se puede observar la órtesis, así como en la imagen 3.13 un modelo CAM que se realizó para poder diseñar de forma correcta los cambios necesarios a realizar.



Figura 3.12: Órtesis KAFO utilizada.



Figura 3.13: Modelo CAM órtesis KAFO

En este caso se requiere agregar la unión que fija al aparato con la parte de la cintura (la parte donde inicia la órtesis KAFO) y la columna del paciente, además se agrega una bisagra como la mostrada en la figura 3.14 que permita el libre movimiento de todo el miembro inferior. La parte que interactúa con el abdomen del usuario se diseñó en base a las órtesis que se encuentran en el mercado en cuanto a geometría y ergonomía, por lo tanto se tomaron varias medidas de algunas personas entre hombres y mujeres, para poder obtener una media, llegando a la conclusión que la circunferencia de la cintura y dorso de una persona promedio oscila entre los 70 y 85 cm, por tanto se diseñó un modelo CAM que se muestra en la figura 3.15, en el cual se aumentaron en un 20% de las medidas máximas tomadas, para que el usuario promedio logre entrar y colocarse de manera óptima el aparato. Esta parte de la órtesis se imprimirá en material PLA para dar la idea de cómo colocársela al paciente, para posteriormente realizarlo en un material más amigable a la piel y con flexibilidad mecánica.



Figura 3.14: Bisagra colocada en la columna

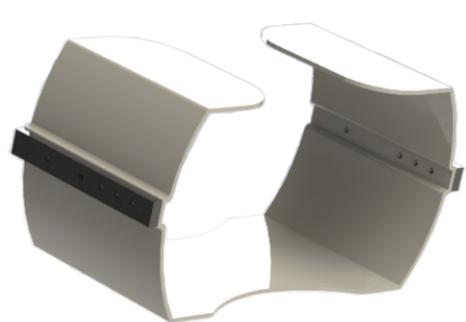


Figura 3.15: Modelo CAM de pieza colocada en el abdomen

Ensamblando las piezas diseñadas previamente en la órtesis KAFO, se obtiene finalmente un modelo CAM de la órtesis HKAFO, el cual se muestra en la figura 3.3.

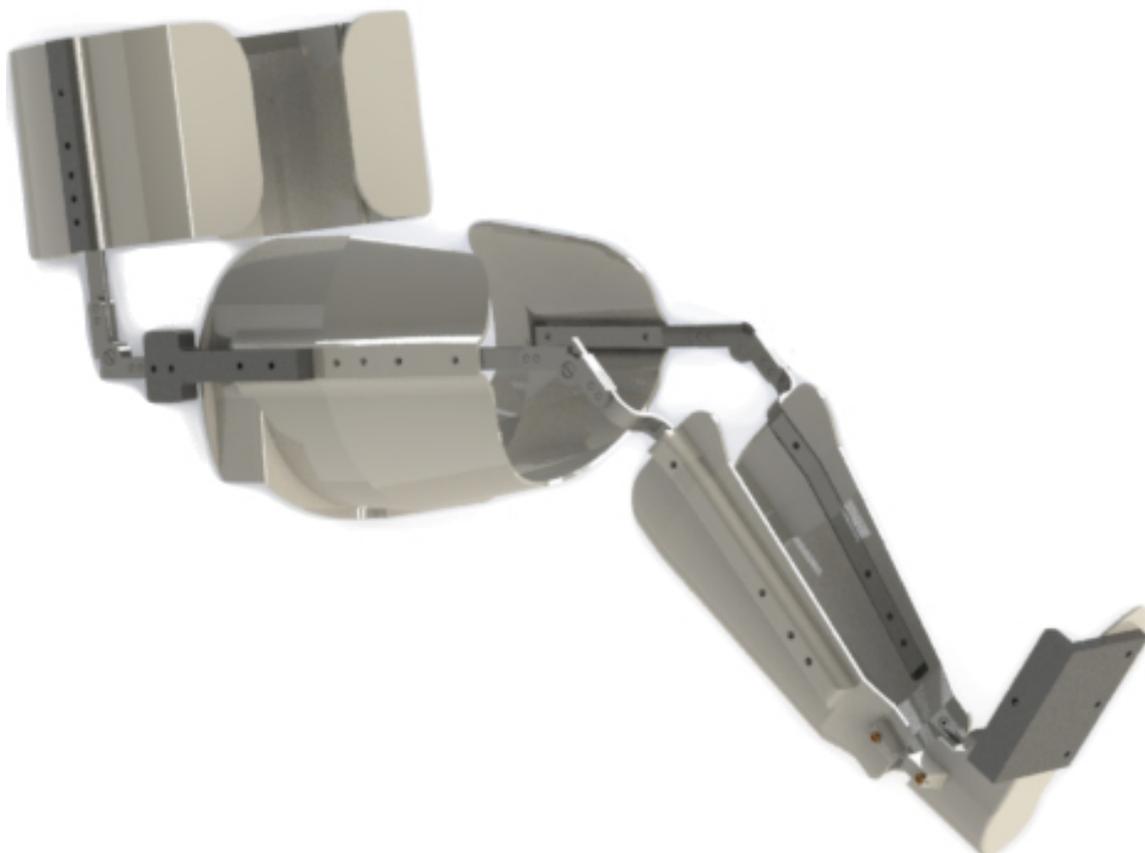


Figura 3.16: Órtesis HKAFO modificada

### 3.4. Unión de los diseños

En la figura 3.4 se observa cómo al diseño se le montan los actuadores lineales de la subfunción 2, así como las cadenas tensoras que se colocan para sujetar en el mecanismo, así mismo en la figura 3.4 se observa como se monta la órtesis con los actuadores en la plataforma XYZ.



Figura 3.17: Órtesis HKAFO con actuadores



Figura 3.18: Órtesis HKAFO montada en el mecanismo XYZ

# Capítulo IV: Modelo Matemático del Sistema

En este capítulo se implementa el modelo matemático de 3 eslabones rígidos unidos por tres articulaciones con movimiento en el plano sagital. En este caso se destacan los movimientos ofrecidos por el miembro inferior derecho de un ser humano, que incluye un grado de libertad para la cadera, rodilla y tobillo respectivamente.

Para encontrar las ecuaciones dinámicas que describen al sistema se utilizó el método de Euler-Lagrange. A continuación se introduce la nomenclatura que se usará para poder nombrar cada elemento del modelo matemático, así mismo en la figura 4.1 se muestra un esquema del sistema que se desea modelar y en la figura 4.2 se muestra el diagrama de cuerpo libre con los principales distancias y vectores que contiene el sistema .

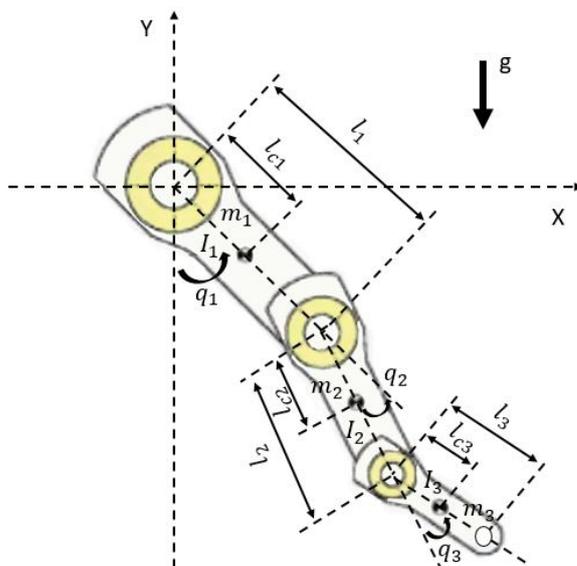


Figura 4.1: Esquema del sistema con 3GDL.

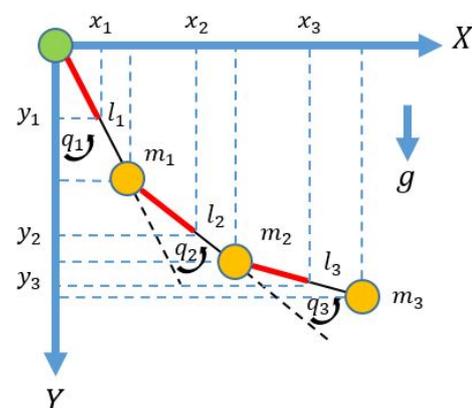


Figura 4.2: Diagrama de cuerpo libre

$x_1$  y  $y_1$  → Componentes en el eje X y Y respectivamente, perteneciente al eslabón del muslo, unión entre la cadera y la rodilla.

$x_2$  y  $y_2$  → Componentes en el eje X y Y respectivamente, perteneciente al eslabón de la pierna, unión entre la rodilla y tobillo.

$x_3$  y  $y_3$  → Componentes en el eje X y Y respectivamente, perteneciente al eslabón del pie, unión entre el tobillo y la punta del pie.

$l_1$  → Eslabón constituido por los elementos rígidos del muslo.

$l_2$  → Eslabón constituido por los elementos rígidos de la pierna.

$l_3$  → Eslabón constituido por los elementos rígidos del pie.

$l_{c1}$  → Distancia al centro de masa del eslabón constituido por los elementos rígidos del muslo.

$l_{c2}$  → Distancia al centro de masa del eslabón constituido por los elementos rígidos de la pierna.

$l_{c3}$  → Distancia al centro de masa del eslabón constituido por los elementos rígidos del pie.

$q_1, q_2, q_3$  → Posicionamiento angular de las articulaciones con respecto a sus respectivos eslabones sobre plano sagital

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_1$  → Velocidad angular de las articulaciones con respecto a sus respectivos eslabones sobre el plano sagital

$\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_1$  → Aceleración angular de las articulaciones con respecto a sus respectivos eslabones sobre el plano sagital

A continuación se muestran las identidades trigonométricas que se utilizaron para simplificar algunos cálculos.

$$\sin^2(q_1) + \cos^2(q_2) = 1$$

$$\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2) = 1$$

$$\sin^2(q_1 + q_2 + q_3) + \cos^2(q_1 + q_2 + q_3) = 1$$

---

$$\begin{aligned} \cos(q_1) * (\cos(q_1 + q_2)) + \sin(q_1) * (\sin(q_1 + q_2)) &= \cos(q_2) \\ \cos(q_1) * (\cos(q_1 + q_2 + q_3)) + \sin(q_1) * (\sin(q_1 + q_2 + q_3)) &= \cos(q_2 + q_3) \\ \cos(q_1 + q_2) * (\cos(q_1 + q_2 + q_3)) + \sin(q_1 + q_2) * (\sin(q_1 + q_2 + q_3)) &= \cos(q_3) \end{aligned}$$

Se obtienen las componentes en los ejes X y Y al centro de masas de cada eslabón.

Para el eslabón 1 al origen.

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c1} \sin(q_1) \\ y_1 &= -l_{c1} \cos(q_1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para el eslabón 2 al origen.

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ y_2 &= -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para el eslabón 3 al origen.

$$\begin{aligned} x_3 &= l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ y_3 &= -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) - l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (3.1), (3.2) y (3.3) obtenemos la velocidad de cada eslabón.

El vector velocidad del primer eslabón.

$$V_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) * \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) * \dot{q}_1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

El vector velocidad del segundo eslabón.

$$V_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

El vector velocidad del tercer eslabón.

$$V_3 = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Para simplificar los cálculos, se obtiene el cuadrado de la norma Euclídeana de los vectores  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  dado por las ecuaciones (4.7), (4.6) y (4.7).

$$\begin{aligned} V_1^T V_1 &= \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 & l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\ &= l_{c1}^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_{c1}^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 \\ &= l_{c1}^2 \dot{q}_1 [\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1)] \\ &= l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} V_2^T V_2 &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} \\ &\quad * \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} \\ &= [l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] * [l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \\ &\quad + [l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] * [l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [l_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_1 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
&l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2] + [l_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_1 l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
&+ l_1 l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c2}^2 \sin^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2] \\
&= l_1^2 \dot{q}_1^2 (\sin^2(q_1) + \cos^2(q_1)) + l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 (\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2)) \\
&+ 2l_1 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + 2l_1 l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
&= l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) + \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2)] + l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
&= l_1^2 \dot{q}_2^2 + 2l_1 l_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
&= l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_{c2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2) + l_{c2}^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$V_3^T V_3 = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} * [C]$$

$$A = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$B = l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$C = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix}$$

$$= [(l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)) *$$

$$l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)] +$$

$$l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) *$$

$$[l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)]$$

$$= [l_1 l_2 \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_1 l_{c3} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) +$$

$$l_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_1 l_2 \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_2^2 \cos^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 +$$

$$l_2 l_{c3} \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_1 l_{c3} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3) *$$

$$\dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_2 l_{c3} \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) +$$

$$l_{c3}^2 \cos^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2] + [l_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_1 l_2 \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) +$$

$$l_1 l_{c3} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_1 l_2 \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) +$$

$$l_2^2 \sin^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^2 + l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) +$$

$$l_1 l_{c3} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_{c3}^2 \sin^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& = l_1^2 \dot{q}_1^2 (\sin^2(q_1) + \cos^2(q_1)) + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 (\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2)) + \\
& l_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 (\sin^2(q_1 + q_2 + q_3) + \cos^2(q_1 + q_2 + q_3)) + \\
& 2l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) + \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2)) + \\
& 2l_1 l_{c3} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [\cos(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3) + \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3)] + \\
& 2l_2 l_{c3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [\cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) + \sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3)] \quad (4.9) \\
& = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + \\
& 2l_1 l_{c3} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_{c3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_3) \\
& = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + l_{c3}^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2\dot{q}_2 \dot{q}_3) + \\
& 2l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2) + 2l_1 l_{c3} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) + \\
& 2l_2 l_{c3} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_2 \dot{q}_3) \cos(q_3)
\end{aligned}$$

Obtenemos la energía cinética del primer eslabón.

$$\begin{aligned}
K_1(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_1 V_1^T V_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Obtenemos la energía cinética del segundo eslabón.

$$\begin{aligned}
K_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_2 V_2^T V_2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 (\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2)] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) + \\
&\frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\
&= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1^2 \cos(q_2) + \\
& m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_1^2 + I_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Obtenemos la energía cinética del tercer eslabón.

$$\begin{aligned}
K_3(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_3V_3^TV_3 + \frac{1}{2}I_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_3l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_3l_2^2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}m_3l_{c3}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \\
&2\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3) + m_3l_1l_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)\cos(q_2) + m_3l_1l_{c3}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_1\dot{q}_3)\cos(q_2 + q_3) + \\
&m_3l_2l_{c3}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_1\dot{q}_3 + \dot{q}_2\dot{q}_3)\cos(q_3) + \frac{1}{2}I_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \\
&2\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3) \\
&= \frac{1}{2}m_3l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_3l_2^2\dot{q}_1^2 + m_3l_2^2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}m_3l_2^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3l_{c3}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_3l_{c3}\dot{q}_2^2 \\
&+ \frac{1}{2}m_3l_{c3}\dot{q}_3^2 + m_3l_{c3}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_3l_{c3}\dot{q}_1\dot{q}_3 + m_3l_{c3}\dot{q}_2\dot{q}_3 + m_3l_1l_2\dot{q}_1^2\cos(q_2) + m_3l_1l_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\cos(q_2) + m_3l_1l_{c3}\dot{q}_1^2\cos(q_2 + q_3) + m_3l_1l_{c3}\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_2 + q_3) + m_3l_1l_{c3}\dot{q}_1\dot{q}_3\cos(q_2 + q_3) \\
&+ m_3l_2l_{c3}\dot{q}_1^2\cos(q_3) + m_3l_2l_{c3}\dot{q}_2^2\cos(q_3) + 2m_3l_2l_{c3}\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_3) + m_3l_2l_{c3}\dot{q}_1\dot{q}_3\cos(q_3) + \\
&m_3l_2l_{c3}\dot{q}_2\dot{q}_3\cos(q_3) + \frac{1}{2}I_3\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{q}_3^2 + I_3\dot{q}_1\dot{q}_2 + I_3\dot{q}_1\dot{q}_3 + I_3\dot{q}_2\dot{q}_3
\end{aligned}$$

Obteniendo la energía potencial del primer eslabón.

$$\begin{aligned}
U_1 &= m_1gh_1 \\
&= -m_1gl_{c1}\cos(q_1)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Obteniendo la energía potencial del segundo eslabón.

$$\begin{aligned}
U_2 &= m_2gh_2 \\
&= m_2g[-l_1\cos(q_1) - l_{c2}\cos(q_1 + q_2)] \\
&= -m_2gl_1\cos(q_1) - m_2gl_{c2}\cos(q_1 + q_2)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Obteniendo la energía potencial del tercer eslabón.

$$\begin{aligned}
U_3 &= m_3gh_3 \\
&= m_3[-l_1\cos(q_1) - l_2\cos(q_1 + q_2) - l_{c3}\cos(q_1 + q_2 + q_3)] \\
&= -m_3gl_1\cos(q_1) - m_3gl_2\cos(q_1 + q_2) - m_3gl_{c3}\cos(q_1 + q_2 + q_3)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Con estos datos se puede obtener el Lagrangiano.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(q, \dot{q}) &= K(q, \dot{q}) - U(q) \\
&= K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) + K_3(q, \dot{q}) - U_1(q) - U_2(q) - U_3(q) \\
&= m_3 \left[ \frac{l_1^2 \dot{q}_1^2 \sin^2(q_1)}{2} + \frac{l_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{2} + \frac{l_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)}{2} + \right. \\
&\quad \frac{l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_1 \dot{q}_1 \sin(q_1)}{2} + \frac{l_2^2 \sin^2(q_2 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2}{2} + \\
&\quad \frac{l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)}{2} + \\
&\quad \frac{l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) l_1 \dot{q}_1 \sin(q_1)}{2} + \frac{l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) l_1 \dot{q}_1 \sin(q_1)}{2} + \\
&\quad \frac{l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{2} + \frac{l_{c3}^2 \sin^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2}{2} + \\
&\quad \frac{l_2^2 \cos^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2}{2} + \frac{l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)}{2} + \\
&\quad + \frac{l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_1 \dot{q}_1 \cos(q_1)}{2} + \frac{l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{2} + \\
&\quad \frac{l_{c3}^2 \cos^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2}{2} + \frac{l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) l_1 \dot{q}_1 \cos(q_1)}{2} + \\
&\quad \frac{l_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{2} + \frac{l_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)}{2} + \left. \frac{l_1^2 \dot{q}_1^2 \cos^2(q_1)}{2} \right] + \\
&\quad \frac{I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2}{2} + \frac{\dot{q}_1^2 (m_1 l_{c1}^2 + I_2)}{2} + m_2 \left[ \frac{l_1^2 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{\cos(q_2) l_1 l_{c2} \dot{q}_1^2}{2} + \frac{\cos(q_2) l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2}{2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{l_{c2}^2 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2}{2} + \frac{l_{c2}^2 \dot{q}_2^2}{2} + \frac{I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2}{2} \right] + gm_3 [l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1) + \\
&\quad l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)] + gm_2 [l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1)] + gl_{c1} m_1 \cos(q_1)
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

A continuación se obtienen la derivadas parciales necesarias para obtener los torques de los eslabones.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= \dot{q}_1 [m_1 l_{c1}^2 + I_1] + m_3 [l_2 \sin(q_1 + q_2) l_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) + l_2^2 \sin^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \\
&\quad l_2 \sin(q_1 + q_2) l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1 + l_1 \sin(q_1) l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \\
&\quad + l_1 \sin(q_1) l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) l_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) + \\
&\quad l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3}^2 \sin^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \\
&\quad l_2^2 \cos^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_2 \cos(q_1 + q_2) l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l_2 \cos(q_1 + q_2) l_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) + l_1 \cos(q_1) l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& + l_1 \cos(q_1) l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1 + \\
& l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3}^2 \cos^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \\
& l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) l_1 \dot{q}_1 \cos(q_1)] + I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + m_2 [l_1^2 \dot{q}_1 + l_{c2}^2 \dot{q}_1 + l_{c2}^2 \dot{q}_2 + 2l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \cos(q_2) + \\
& l_1 l_{c2} \dot{q}_2 \cos(q_2)] + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= m_3 [l_1 \cos^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_1 l_{c3} \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_2 l_1 \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1) + \\
& l_2 l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3}^2 \cos^2(q_1 + q_2 + q_3) + l_1 l_{c3} \dot{q}_1 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \cos(q_1) + \\
& l_1 l_2 \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) + l_2^2 \sin^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \\
& l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_1 l_{c3} \dot{q}_1 \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \\
& l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3}^2 \sin^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)] + \\
& I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 (l_{c2}^2 \dot{q}_1 + l_{c2}^2 \dot{q}_2 + l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \cos(q_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} &= m_3 [l_2 l_{c3} \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3}^2 \cos^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \\
& l_1 l_{c3} \dot{q}_1 \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_1 l_{c3} \dot{q}_1 \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \\
& l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3}^2 \sin^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)] + \\
& I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= -gm_3 [l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin(q_1) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3)] - gm_2 [l_{c2} \sin(q_1 + q_2) + \\
& l_1 \sin(q_1)] - gl_{c1} m_1 \sin(q_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= m_3 [-l_2^2 \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \\
& l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - l_1 l_2 \cos(q_1) \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - \\
& l_2 l_{c3} \cos(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - l_{c3}^2 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 - l_1 l_{c3} \dot{q}_1 \cos(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_1 l_2 \dot{q}_1 \sin(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_2^2 \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + l_1 l_{c3} \dot{q}_1 \sin(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \\
& l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \\
& l_{c3}^2 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_2 [l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + l_1 l_{c2} \dot{q}_2 \sin(q_2) \dot{q}_1] - \\
& g m_3 [l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3)] - g l_{c2} m_2 \sin(q_1 + q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} &= m_3 [-l_2 l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \sin(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - l_{c3}^2 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
& \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 - l_1 l_{c3} \dot{q}_1 \cos(q_1) \sin(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \\
& l_1 l_{c3} \sin(q_1) \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_2 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
& (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_{c3}^2 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2] - g l_{c3} m_3 \\
& \sin(q_1 + q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

El modelo de Euler-Lagrange presentado en la ecuación 3.4 del capítulo III de la referencia [25] la cual se representa en la siguiente ecuación.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau \longrightarrow i = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

El lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ , dado por la ecuación(4.15), es en este caso:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - U(q) \quad (4.17)$$

Sustituyendo (4.17) en la ecuación (4.16) se expresa el modelo Euler-Lagrange como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = \tau$$

Por otro lado puede verificarse que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] &= M(q) \dot{q} \\
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right] &= M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q}
\end{aligned}$$

Considerando las expresiones anteriores, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = \tau$$

de modo compacto se obtiene.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (4.18)$$

Donde los elementos  $M(q)$  y  $C(q, \dot{q})$  están dados por:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \\ g_3(q) \end{bmatrix} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Se obtienen los elementos de la matriz M de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \begin{cases} M_{11} & \text{si } \dot{q}_1 \text{ existe en la ecuación} \\ M_{12} & \text{si } \dot{q}_2 \text{ existe en la ecuación} \\ M_{13} & \text{si } \dot{q}_3 \text{ existe en la ecuación} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \begin{cases} M_{21} & \text{si } \dot{q}_1 \text{ existe en la ecuación} \\ M_{22} & \text{si } \dot{q}_2 \text{ existe en la ecuación} \\ M_{23} & \text{si } \dot{q}_3 \text{ existe en la ecuación} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} = \begin{cases} M_{31} & \text{si } \dot{q}_1 \text{ existe en la ecuación} \\ M_{32} & \text{si } \dot{q}_2 \text{ existe en la ecuación} \\ M_{33} & \text{si } \dot{q}_3 \text{ existe en la ecuación} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= I_1 + I_2 + I_3 + m_2l_1^2 + m_3l_1^2 + m_3l_2^2 + m_1l_{c1}^2 + m_2l_{c2}^2 + m_3l_{c3}^2 + \\
&\quad 2m_3l_1l_{c3}\cos(q_2 + q_3) + 2m_3l_1l_2\cos(q_2) + 2m_2l_1l_{c2}\cos(q_2) + 2m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) \\
M_{12} &= I_2 + I_3 + m_3l_2^2 + 2m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) + m_3l_1l_2\cos(q_2) + m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2) + \\
&\quad m_3l_{c3}^2 + m_3l_1l_{c3}\cos(q_1 + q_2) \\
M_{13} &= I_3 + m_3l_{c3}^2 + m_3l_1l_{c3}\cos(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) \\
M_{21} &= I_2 + I_3 + m_3l_2^2 + 2m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) + m_3l_1l_2\cos(q_2) + m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2) \\
&\quad + m_3l_{c3}^2 + m_3l_1l_{c3}\cos(q_2 + q_3) \\
M_{22} &= I_2 + I_3 + m_2l_{c2}^2 + m_3l_2^2 + m_3l_{c3}^2 + 2m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) \\
M_{23} &= I_3 + m_3l_{c3}^2 + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) \\
M_{31} &= I_3 + m_3l_{c3}^2 + m_3l_1l_{c3}\cos(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) \\
M_{32} &= I_3 + m_3l_{c3}^2 + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) \\
M_{33} &= m_3l_{c3}^2 + I_3
\end{aligned}$$

Para obtener la matriz  $C(q, \dot{q})$  llamada matriz centrífuga de coriolis, se pueden obtener los coeficientes ó símbolos de Christoffel  $c_{ijk}(q)$  definidos como:

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right]$$

Para un Robot de 3 grados de libertad los símbolos de Christoffel quedan como:

$$\begin{aligned}
c_{111} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} \right] = 0 \\
c_{211} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} \right] = -m_2l_1l_{c2}\sin(q_2) - m_3l_1l_2\sin(q_2) - m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) \\
c_{311} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{31}}{\partial q_1} \right] = -m_3l_2l_{c3}\sin(q_3) - m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) \\
c_{121} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} \right] = -m_2l_1l_{c2}\sin(q_2) - m_3l_1l_2\sin(q_2) - m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) \\
c_{221} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} \right] = -m_2l_1l_{c2}\sin(q_2) - m_3l_1l_2\sin(q_2) - m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) \\
c_{321} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{12}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{32}}{\partial q_1} \right] = -m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) - m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{131} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{13}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_1} \right] = -m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{231} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{13}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_1} \right] = -m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{331} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{13}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_1} \right] = -m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) - \frac{1}{2} (m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_2)) \\
c_{112} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} \right] = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) + m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\
c_{212} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} \right] = 0 \\
c_{312} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{21}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{31}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_2) \\
c_{122} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} \right] = 0 \\
c_{222} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} \right] = -\frac{1}{2} (m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3)) - \frac{1}{2} (m_3 l_1 l_2 \sin(q_2)) - \frac{1}{2} (m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)) \\
c_{322} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{22}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{32}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{132} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{23}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{232} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{23}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{332} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_2} \right] = -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{113} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{31}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{31}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} \right] = m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) + m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\
c_{213} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{31}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} \right] = \frac{1}{2} m_3 l_{c3} l_1 \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{313} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{31}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{31}}{\partial q_3} \right] = 0 \\
c_{123} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{32}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{31}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_3} \right] = m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{223} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_3} \right] = m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\
c_{323} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{32}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{32}}{\partial q_3} \right] = 0 \\
c_{133} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{33}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_3} \right] = 0 \\
c_{233} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{33}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} \right] = 0 \\
c_{333} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} \right] = 0
\end{aligned}$$

El  $kj$ -ésimo elemento  $C_{kj}(q, \dot{q})$  de la matriz  $C(q, \dot{q})$  puede obtenerse de la siguiente manera:

$$C_{kj}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{1jk}(q) \\ C_{2jk}(q) \\ \vdots \\ C_{njk}(q) \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

Para un robot de 3 grados de libertad tenemos 9 casos donde  $jk$  varían de valor respectivamente de la siguiente manera  $j = 1k = 1, j = 2k = 1, j = 3k = 1, j = 1k = 2, j = 2k = 2, j = 3k = 2, j = 1k = 3, j = 2k = 3, j = 3k = 3$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{111} \\ C_{211} \\ C_{311} \end{bmatrix}^T \dot{q}; C_{12}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{121} \\ C_{221} \\ C_{321} \end{bmatrix}^T \dot{q}; C_{13}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{131} \\ C_{231} \\ C_{331} \end{bmatrix}^T \dot{q};$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{112} \\ C_{212} \\ C_{312} \end{bmatrix}^T \dot{q}; C_{22}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{122} \\ C_{222} \\ C_{322} \end{bmatrix}^T \dot{q}; C_{23}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{132} \\ C_{232} \\ C_{332} \end{bmatrix}^T \dot{q};$$

$$C_{31}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{113} \\ C_{213} \\ C_{313} \end{bmatrix}^T \dot{q}; C_{32}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{123} \\ C_{223} \\ C_{323} \end{bmatrix}^T \dot{q}; C_{33}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{133} \\ C_{233} \\ C_{333} \end{bmatrix}^T \dot{q};$$

Sustituyendo los valores previamente encontrados se tiene:

$$C_{11}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) - m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\ -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) - m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) - m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\ -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) - m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\ -m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \end{bmatrix}^T \dot{q}$$

$$\begin{aligned}
C_{13}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\ -m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\ -m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}(m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_2)) \end{bmatrix}^T \dot{q} \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) + m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\ 0 \\ -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_2) \end{bmatrix}^T \dot{q} \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3)) - \frac{1}{2}(m_3 l_1 l_2 \sin(q_2)) - \frac{1}{2}(m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)) \\ -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \end{bmatrix}^T \dot{q} \\
C_{23}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\ -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\ -m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \end{bmatrix}^T \dot{q} \\
C_{31}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) + m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\ \frac{1}{2} m_3 l_{c3} l_1 \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\ 0 \end{bmatrix}^T \dot{q} \\
C_{32}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\ m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \\ 0 \end{bmatrix}^T \dot{q} \\
C_{33}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \dot{q}
\end{aligned}$$

Al realizar la operación finalmente se tiene:

$$\begin{aligned}
C_{11}(q, \dot{q}) &= -\dot{q}_2 [m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)] - \\
&\quad \dot{q}_3 [m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3)] \\
C_{12}(q, \dot{q}) &= -l_1 \dot{q}_1 [m_2 l_{c2} \sin(q_2) + m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 \sin(q_2)] - \\
&\quad l_1 \dot{q}_2 [m_2 l_{c2} \sin(q_2) + m_3 l_{c3} \sin(q_1 + q_2) + m_3 l_2 \sin(q_2)] - \\
&\quad m_3 l_{c3} \dot{q}_3 [l_1 \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13}(q, \dot{q}) &= -\dot{q}_1[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] \\
&\quad - \dot{q}_2[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] \\
&\quad - \dot{q}_3[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + \frac{1}{2}(m_3l_2l_{c3}\sin(q_2))] \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= \dot{q}_1[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_1l_2\sin(q_2) + m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)] - \\
&\quad \dot{q}_3[m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= -\dot{q}_2[\frac{1}{2}m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + \frac{1}{2}m_3l_1l_2\sin(q_2) + \frac{1}{2}m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)] \\
&\quad - \dot{q}_3m_3l_2l_{c3}\sin(q_3) \\
C_{23}(q, \dot{q}) &= -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)m_3l_2l_{c3}\sin(q_3) \\
C_{31}(q, \dot{q}) &= \dot{q}_1[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] + \\
&\quad \dot{q}_2[\frac{1}{2}m_2l_1l_{c2}\sin(q_2) - \dot{q}_3m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] \\
C_{32}(q, \dot{q}) &= (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)m_3l_2l_{c3}\sin(q_3) \\
C_{33}(q, \dot{q}) &= 0
\end{aligned}$$

Por último para obtener la matriz  $g(q)$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= \begin{cases} g_1(q) & \text{si } g \text{ existe en la ecuación} \end{cases} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= \begin{cases} g_2(q) & \text{si } g \text{ existe en la ecuación} \end{cases} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} &= \begin{cases} g_3(q) & \text{si } g \text{ existe en la ecuación} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por tanto la matriz  $g(q)$  queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
g(1)(q) &= g[m_1l_{c1}\sin(q_1) + m_3l_{c3}\sin(q_1 + q_2 + q_3) + m_3l_2\sin(q_1 + q_2) + \\
&\quad m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2) + m_2l_1\sin(q_1) + m_3l_1\sin(q_1)] \\
g(2)(q) &= g[m_3l_{c3}\sin(q_1 + q_2 + q_3) + m_3l_2\sin(q_1 + q_2) + m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2)] \\
g(3)(q) &= gm_3l_{c3}\sin(q_1 + q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación(4.18) y realizando la operaciones matriciales tenemos que:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + M_{13}\ddot{q}_3 + C_{11}\dot{q}_1 + C_{12}\dot{q}_2 + C_{13}\dot{q}_3 + g_1 \\ \tau_2 &= M_{21}\ddot{q}_1 + M_{22}\ddot{q}_2 + M_{23}\ddot{q}_3 + C_{21}\dot{q}_1 + C_{22}\dot{q}_2 + C_{23}\dot{q}_3 + g_2 \\ \tau_3 &= M_{31}\ddot{q}_1 + M_{32}\ddot{q}_2 + M_{33}\ddot{q}_3 + C_{31}\dot{q}_1 + C_{32}\dot{q}_2 + C_{33}\dot{q}_3 + g_3\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + M_{13}\ddot{q}_3 &= \tau_1 - C_{11}\dot{q}_1 - C_{12}\dot{q}_2 - C_{13}\dot{q}_3 - g_1 \\ M_{21}\ddot{q}_1 + M_{22}\ddot{q}_2 + M_{23}\ddot{q}_3 &= \tau_2 - C_{21}\dot{q}_1 - C_{22}\dot{q}_2 - C_{23}\dot{q}_3 - g_2 \\ M_{31}\ddot{q}_1 + M_{32}\ddot{q}_2 + M_{33}\ddot{q}_3 &= \tau_3 - C_{31}\dot{q}_1 - C_{32}\dot{q}_2 - C_{33}\dot{q}_3 - g_3\end{aligned}\quad (4.20)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior por el método de regla de Crammer. Del lado derecho de la ecuación (4.20) se obtiene el siguiente vector.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 - C_{11}\dot{q}_1 - C_{12}\dot{q}_2 - C_{13}\dot{q}_3 - g_1 \\ \tau_2 - C_{21}\dot{q}_1 - C_{22}\dot{q}_2 - C_{23}\dot{q}_3 - g_2 \\ \tau_3 - C_{31}\dot{q}_1 - C_{32}\dot{q}_2 - C_{33}\dot{q}_3 - g_3 \end{bmatrix}$$

Obteniendo las matrices  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$

$$A_1 = \begin{bmatrix} R_1 & M_{12} & M_{13} \\ R_2 & M_{22} & M_{23} \\ R_3 & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} M_{11} & R_1 & M_{13} \\ M_{21} & R_2 & M_{23} \\ M_{31} & R_3 & M_{33} \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & R_1 \\ M_{21} & M_{22} & R_2 \\ M_{31} & M_{32} & R_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente obteniendo a  $\ddot{q}_1$ ,  $\ddot{q}_2$  y  $\ddot{q}_3$

$$\ddot{q}_1 = \frac{|A_1|}{|M(q)|} \ddot{q}_2 = \frac{|A_2|}{|M(q)|} \ddot{q}_3 = \frac{|A_3|}{|M(q)|} \quad (4.21)$$

Las ecuaciones de (4.21) se pueden obtener como la salida del sistema asegurando que se tiene como entrada el vector posición angular y torque. Para obtener el vector torque se sustituyen los elementos obtenidos en la ecuación (4.19).

$$\begin{aligned}\tau_1 = & \ddot{q}_1[I_1 + I_2 + I_3 + m_2l_1^2 + m_3l_1^2 + m_3l_2^2 + m_1l_{c1}^2 + m_2l_{c2}^2 + m_3l_{c3}^2 + 2m_3l_1l_{c3}\cos(q_2 + q_3) + \\ & 2m_3l_1l_2\cos(q_2) + 2m_2l_1l_{c2}\cos(q_2) + 2m_3l_2l_{c3}\cos(q_3)] + \ddot{q}_2[I_2 + I_3 + m_3l_2^2 + 2m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) + \\ & m_3l_1l_2\cos(q_2) + m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2) + m_3l_{c3}^2 + m_3l_1l_{c3}\cos(q_1 + q_2)] + \ddot{q}_3[I_3 + m_3l_{c3}^2 + \\ & m_3l_1l_{c3}\cos(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3)] + \dot{q}_1[-\dot{q}_2[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_1l_2\sin(q_2) + \\ & m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)] - \dot{q}_3[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)]] + \dot{q}_2[-l_1\dot{q}_1[m_2l_{c2}\sin(q_2) + \\ & m_3l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_2\sin(q_2)] - l_1\dot{q}_2[m_2l_{c2}\sin(q_2) + m_3l_{c3}\sin(q_1 + q_2) + m_3l_2\sin(q_2)] \\ & - m_3l_{c3}\dot{q}_3[l_1\sin(q_2 + q_3 + l_2\sin(q_3))]] + \dot{q}_3[-\dot{q}_1[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] - \\ & \dot{q}_2[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] - \dot{q}_3[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + \frac{1}{2}(m_3l_2l_{c3}\sin(q_2))]] \\ & + g[m_1l_{c1}\sin(q_1) + m_3l_{c3}\sin(q_1 + q_2 + q_3) + m_3l_2\sin(q_1 + q_2) + m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2) + \\ & m_2l_1\sin(q_1) + m_3l_1\sin(q_1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 = & \ddot{q}_1[I_2 + I_3 + m_3l_2^2 + 2m_3l_2l_{c3}\cos(q_3) + m_3l_1l_2\cos(q_2) + m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2) + \\ & m_3l_{c3}^2 + m_3l_1l_{c3}\cos(q_2 + q_3)] + \ddot{q}_2[I_2 + I_3 + m_2l_{c2}^2 + m_3l_2^2 + m_3l_{c3}^2 + 2m_3l_2l_{c3}\cos(q_3)] + \\ & \ddot{q}_3[I_3 + m_3l_{c3}^2 + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3)] + \dot{q}_1[\dot{q}_1[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_1l_2\sin(q_2) + m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)] - \\ & \dot{q}_3[m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)]] + \dot{q}_2[-\dot{q}_2[\frac{1}{2}m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + \frac{1}{2}m_3l_1l_2\sin(q_2) + \frac{1}{2}m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)] \\ & - \dot{q}_3m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] + \dot{q}_3[-(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] + g[m_3l_{c3}\sin(q_1 + q_2 + q_3) + \\ & m_3l_2\sin(q_1 + q_2) + m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 = & \ddot{q}_1[I_3 + m_3l_{c3}^2 + m_3l_1l_{c3}\cos(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3)] + \ddot{q}_2[I_3 + m_3l_{c3}^2 + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3)] + \\ & \ddot{q}_3[m_3l_{c3}^2 + I_3] + \dot{q}_1[\dot{q}_1[m_3l_1l_{c3}\sin(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] + \dot{q}_2[\frac{1}{2}m_2l_1l_{c2}\sin(q_2) - \\ & \dot{q}_3m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)]] + \dot{q}_3[(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)] + gm_3l_{c3}\sin(q_1 + q_2 + q_3)\end{aligned}$$

---

---

# Capítulo V: Modelo cinemático y control implementado al sistema

---

En el capítulo anterior se obtuvo el modelo de la planta de nuestro sistema, con el cuál se pueden monitorear las posiciones y velocidades angulares. Se introducen como entradas del sistema los torques producidos en cada eslabón y como salidas la aceleraciones angulares, después mediante dos integradores se pueden obtener la posición y velocidad angular. El modelo cinemático ayuda al estudio del movimiento de un robot en el espacio sin tomar en cuenta las fuerzas que originan al mismo.

La cinemática directa se refiere al uso de ecuaciones cinemáticas para calcular la posición de su actuador final a partir de valores específicos denominados parámetros. Las ecuaciones cinemáticas se usan en robots, juegos de computadoras y animación. El proceso inverso que calcula el conjunto de parámetros a partir de una posición específica del actuador final es la cinemática inversa. En la ingeniería mecánica, los parámetros de Denavit-Hartenberg (también llamados parámetros DH ) son los cuatro parámetros asociados a una convención en particular para la fijación de marcos de referencia a los eslabones de una cadena espacial cinemática, o manipulador de robot. En la tabla 5.1 se puede observar cómo obtener estos parámetros en relación a las distancias y ángulos dependiendo del plano de referencia que se analice de la cadena cinemática.

Otro aspecto a considerar, es el tipo de unión que hay entre cada eslabón, a este tipo de uniones se le denomina **par menor**, en la figura 5.1 se pueden observar los tipos más comunes de par común que existen en las cadenas cinemáticas. En pocas palabras, este término se utiliza para describir la conexión entre un par de cuerpos, cuando el movimiento relativo se caracteriza por dos superficies que se deslizan una sobre otra.

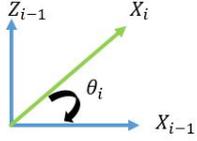
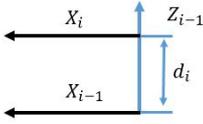
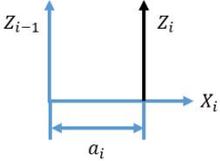
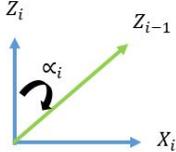
Parámetro DH	Descripción	Descripción gráfica
$\theta_i$	$\theta_i$ es el ángulo que debe girarse el eje $x_{i-1}$ alrededor de $z_{i-1}$ , para quedarse paralelo con $x_i$ .	
$d_i$	$d_i$ es la distancia que deberá desplazarse a $X_{i-1}$ en la dirección de $z_{i-1}$ para quedar alineado con $x_i$ .	
$a_i$	$a_i$ es el ángulo en que debe girarse a $z_{i-1}$ , alrededor de $x_i$ , para quedar alineado con $z_i$ .	
$\alpha_i$	$\alpha_i$ es el ángulo que debe girarse a $z_{i-1}$ , alrededor de $x_i$ , para quedar alineado con $z_i$ .	

Tabla 5.1: Descripción para definir los parámetros DH

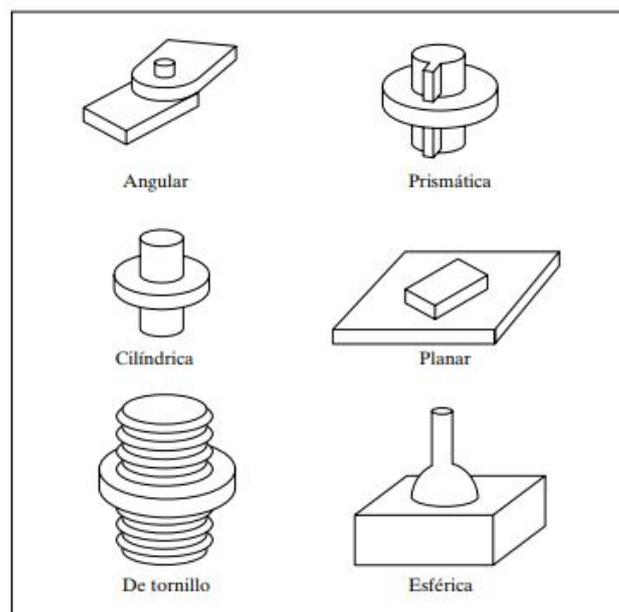


Figura 5.1: Las 6 posibles articulaciones de par menor

## 5.1. Cinemática directa de un robot de tres grados de libertad

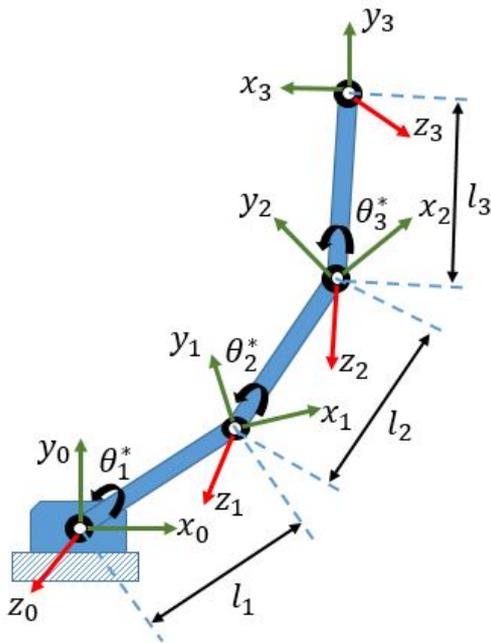


Figura 5.2: Esquema cinemático de un robot de 3GDL

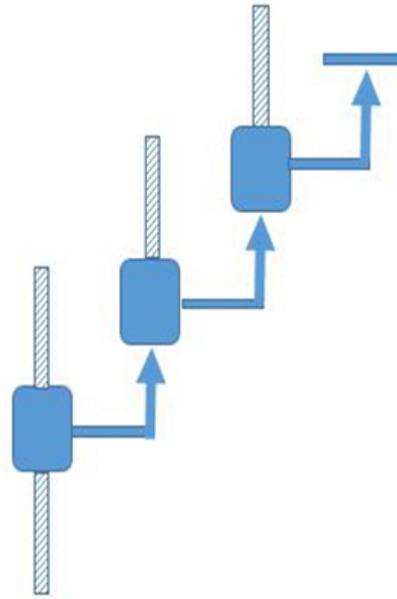


Figura 5.3: Esquemático simplificado de un robot de 3GDL

En la figura 5.2 podemos observar el esquema de un robot de tres grados de libertad, mientras en la figura 5.3 podemos observar el mismo manipulador por medio de una notación esquemática mas simple. En la tabla 5.2 podemos ver la obtención de los parámetros DH para el esquema presentado en los esquemas anteriores.

Definiendo la matriz de transformación homogénea queda como:

Articulaciones	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
Eslabón 1	$\theta_1^*$	0	$l_1$	0
Eslabón 2	$\theta_2^*$	0	$l_2$	0
Eslabón 3	$\theta_3^*$	0	$l_3$	0

Tabla 5.2: Parámetros DH del sistema

$$T_i = \begin{bmatrix} C(\theta_i) & -S(\theta_i)C(\alpha_i) & S(\theta_i)S(\alpha_i) & a_iC(\theta_i) \\ S(\theta_i) & C(\theta_i)C(\alpha_i) & -C(\theta_i)S(\alpha_i) & a_iS(\theta_i) \\ 0 & S(\alpha_i) & C(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo todas las matrices homogéneas.

$$T_1 = \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 & l_1 C(\theta_1) \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 & l_1 S(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} C(\theta_2) & -S(\theta_2) & 0 & l_2 C(\theta_2) \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 & l_2 S(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} C(\theta_3) & -S(\theta_3) & 0 & l_3 C(\theta_3) \\ S(\theta_3) & C(\theta_3) & 0 & l_3 S(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos la matriz homogénea total  $T_T = T_1 * T_2 * T_3$

$$T_1 * T_2 = \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 & l_1 C(\theta_1) \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 & l_1 S(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C(\theta_2) & -S(\theta_2) & 0 & l_2 C(\theta_2) \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 & l_2 S(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$T_1 * T_2 = \begin{bmatrix} C(\theta_1)C(\theta_2) - S(\theta_1)S(\theta_2) & -C(\theta_1)S(\theta_2) - S(\theta_1)C(\theta_2) & 0 & l_2 C(\theta_1)C(\theta_2) - S(\theta_1)S(\theta_2) + l_1 C(\theta_1) \\ S(\theta_1)C(\theta_2) + C(\theta_1)S(\theta_2) & -S(\theta_1)S(\theta_2) + C(\theta_1)C(\theta_2) & 0 & l_2 S(\theta_1)C(\theta_2) + l_2 C(\theta_1)S(\theta_2) + l_1 C(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_T = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 & Z_3 \\ Z_4 & Z_5 & 0 & Z_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde los elementos de  $T_T$  equivalen a :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= C(\theta_3)[C(\theta_1)C(\theta_2) - S(\theta_1)S(\theta_2)] + S(\theta_3)[-C(\theta_1)S(\theta_2) - S(\theta_1)C(\theta_2)] \\
 Z_2 &= -S(\theta_3)[C(\theta_1)C(\theta_2) - S(\theta_1)S(\theta_2)] + C(\theta_3)[-C(\theta_1)S(\theta_2) - S(\theta_1)C(\theta_2)] \\
 Z_3 &= l_3C(\theta_3)[C(\theta_1)C(\theta_2) - S(\theta_1)S(\theta_2)] + l_3S(\theta_3)[-C(\theta_1)S(\theta_2) - S(\theta_1)C(\theta_2)] \\
 &\quad + C(\theta_1)l_2C(\theta_2) - S(\theta_1)l_2S(\theta_2) + l_1C(\theta_1) \\
 Z_4 &= C(\theta_3)[S(\theta_1)C(\theta_2) - S(\theta_1)S(\theta_2)] + S(\theta_3)[-C(\theta_1)S(\theta_2) - S(\theta_1)C(\theta_2)] \\
 Z_5 &= -S(\theta_3)[S(\theta_1)C(\theta_2) - S(\theta_1)S(\theta_2)] + C(\theta_3)[-C(\theta_1)S(\theta_2) - S(\theta_1)C(\theta_2)] \\
 Z_6 &= l_3C(\theta_3)[S(\theta_1)C(\theta_2) + C(\theta_1)S(\theta_2)] + l_3S(\theta_3)[-S(\theta_1)S(\theta_2) + C(\theta_1)C(\theta_2)] \\
 &\quad S(\theta_1)l_2C(\theta_2) + C(\theta_1)l_2S(\theta_2) + l_1C(\theta_1)
 \end{aligned}$$

Reduciendo los términos  $Z_3$  y  $Z_6$  mediante identidades trigonométricas. Estos términos son muy importantes ya que es la posición en el plano XY del final de la cadena cinemática de 3 eslabones, por tanto queda como:

$$\begin{aligned}
 P_{xeslabon3} &= l_1Cos(\theta_1) + l_2Cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3Cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 P_{yeslabon3} &= l_1Sin(\theta_1) + l_2Sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3Sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)
 \end{aligned}$$

Dado que los elementos de la cadena cinemática, en este caso las matrices homogéneas, se puede deducir que para una cadena cinemática de dos eslabones la posición de las coordenadas en el plano XY queda como:

$$\begin{aligned}
 P_{xeslabon2} &= l_1Cos(\theta_1) + l_2Cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 P_{yeslabon2} &= l_1Sin(\theta_1) + l_2Sin(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned}$$

Similarmente para una cadena cinemática de un eslabón se tiene que:

$$\begin{aligned}
 P_{xeslabon1} &= l_1Cos(\theta_1) \\
 P_{yeslabon1} &= l_1Sin(\theta_1)
 \end{aligned}$$

## 5.2. Control implementado al sistema

El control de posición de robots manipuladores puede realizarse potencialmente mediante la técnica de control PD. Sin embargo, dicho esquema de control posee ciertas restricciones que pueden limitar su uso. Efectivamente, el controlador PD cuya sencilla ley de control viene dada por la ecuación (5.1), garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición global para robots cuyos modelos dinámicos no poseen el vector de pares gravitacionales  $G(q)$ .

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \quad (5.1)$$

En este caso, la sintonía de este controlador es trivial ya que es suficiente con seleccionar las matrices de diseño  $K_p$  y  $K_v$  como simétricas y definidas positivas, No obstante, el control PD no garantiza el cumplimiento de control de posición pura de manipuladores cuyos modelos dinámicos contienen el término de pares gravitacionales  $G(q)$ , a menos que la posición deseada  $q_d$  sea tal que  $G(q_d) = 0$ .

En esta sección se describirá el funcionamiento del controlador PD con compensación de gravedad descrito en [25], que es capaz de satisfacer el objetivo de control de posición en forma global para robots de n g.d.l. En la ley de control se requiere el conocimiento previo de una parte del modelo dinámico del robot a ser controlado, puesto que usa el vector de pares gravitacionales  $G(q)$ . La ley de control PD con compensación de gravedad está representada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + G(q) \quad (5.2)$$

donde  $K_p, K_v \in R^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas positivas y  $\tilde{q} = q_d - q$ . Nótese que la única diferencia respecto al control (5.1) es el término aditivo  $G(q)$ . A diferencia del control PD, que no requiere conocimiento alguno sobre la estructura del modelo del robot, el controlador (5.2) hace uso explícito del conocimiento parcial del modelo.

La ley de control (5.2) requiere información sobre la posición  $q_d(t)$  y la velocidad deseada  $\dot{q}_d(t)$ , así como medición de la posición  $q(t)$  y la velocidad  $\dot{q}(t)$  a cada instante. Como se

---

demostrará, este controlador verifica el objetivo de posición pura, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q(t)) = q_d$$

Donde  $q_d \in R^n$  es un vector constante cualquiera. Este controlador también presenta estabilidad asintótica global del origen  $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{q}^T \end{bmatrix} = 0 \in R^{2n}$ . Como resultado, se afirma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0$$

Con esto se deduce, que se verifica el objetivo de control de posición pura. Para presentar los resultados, se implementará dicho controlador en el robot de 3 g.d.l. En el diagrama de la figura 5.4 se implementa el control (5.2) al sistema dinámico, en cuanto a las condiciones iniciales del sistema están dadas por lo que exige cada rutina de rehabilitación que se propuso en los objetivos iniciales, en este caso son 3 rutinas. La posiciones deseadas están dadas por el encoder colocado en donde se desea ejercer los tres torques, mientras que las velocidades deseadas están dadas por los giroscopios colocados en cada eslabón del sistema.

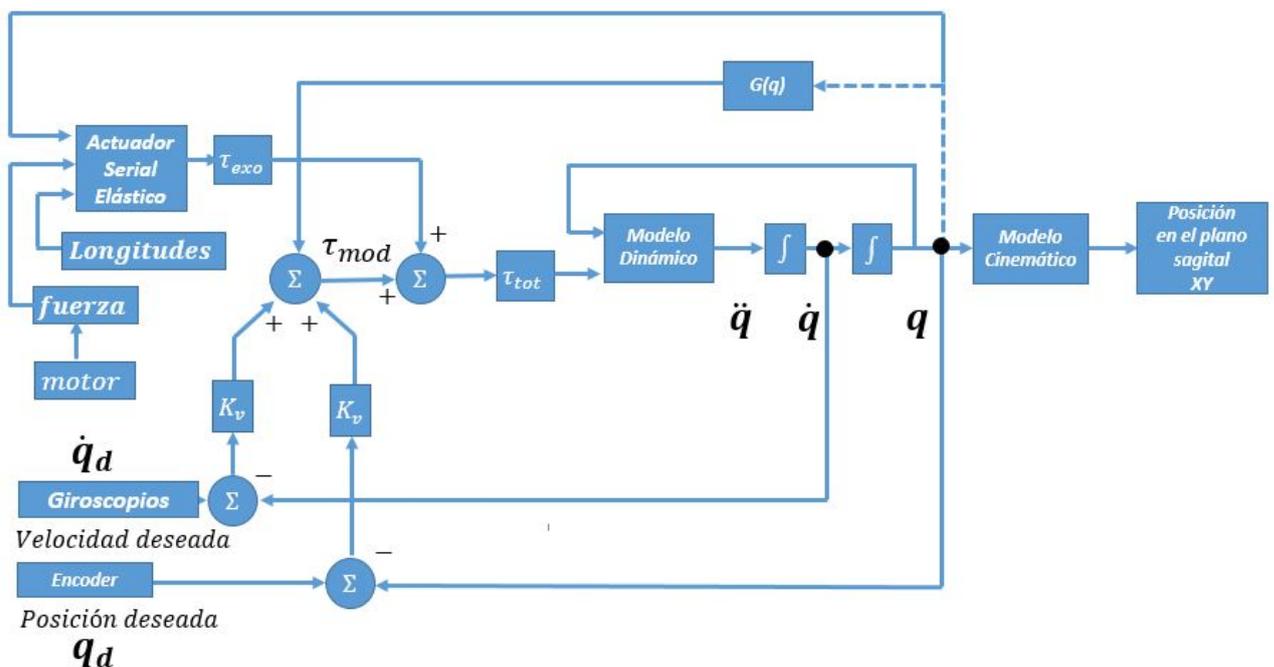


Figura 5.4: Diagrama total del exoesqueleto

### 5.3. Equilibrio de los torques

Una parte importante del proyecto es analizar cómo funcionan los torques que interactúan en el sistema. En el diagrama de la figura 5.4, se puede ver que existe un torque total, este torque se compone por un torque del modelo y un torque del exoesqueleto, el primero se refiere al torque que producen los elementos de la ecuación (5.2), por otro lado se requiere una manera de introducir fuerza para contrarrestar el torque del modelo y poder controlar el sistema en la posición y velocidad que se requiere. El torque del exoesqueleto es producido por el actuador serial elástico, el cual gracias a la resistencia lineal, los resortes que contiene este sistema y la ley de Hooke mostrada a continuación.

$$F = \Delta X * K \quad (5.3)$$

Analizando la ecuación anterior, el cambio de posición dado en función de la resistencia, se coloca una referencia inicial y en dado caso que la resistencia sea positiva, la diferencia de posiciones es positiva por ende la fuerza también es positiva, esto implica que el exoesqueleto se mueve en una dirección positiva, ocurre el caso contrario si la resistencia es negativa a la referencia. Para conocer esta fuerza mediante esta ecuación es posible cuando se conoce la constante K del resorte. En la figura 5.5 podemos ver la representación simple de uno de los eslabones del sistema, de esta representación analizamos que existe un producto cruz ecuación (5.4), el cuál ayudará a encontrar el torque del exoesqueleto, para esto se deben conocer las magnitudes de los elementos del esquema por lo que falta analizar las distancias entre los puntos AB, BC y CA. Las distancias BC y CA, son posiciones fijas conocidas, mientras tanto la distancia AB puede variar, esta distancia se pueden obtener mediante la ley de senos ecuación (5.5) y la ley de cosenos ecuación(5.6).

$$\begin{aligned} |\vec{F}|X|\vec{r}| &= |\vec{\tau}_{exo}| \\ |\vec{F}||\vec{r}|Sin(\alpha) &= |\vec{\tau}_{exo}| \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\frac{CA}{sin(\alpha)} = \frac{BC}{sin(\beta)} = \frac{AB}{sin(\gamma)} \quad (5.5)$$

$$AB^2 = CA^2 + BC^2 - 2CA * BC * cos(\alpha) \quad (5.6)$$

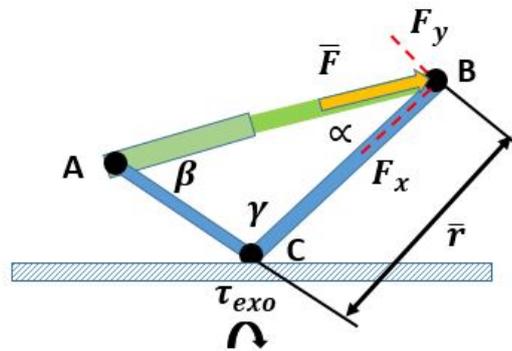


Figura 5.5: Esquema de uno de los eslabones del exoesqueleto

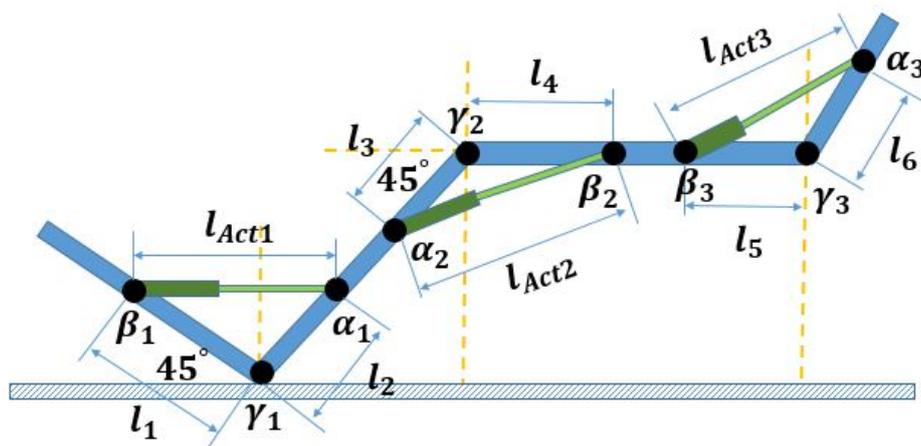


Figura 5.6: Esquema de eslabones completo del exoesqueleto

Como se puede ver en la figura 5.6, los torques prácticamente están dados por las siguientes ecuaciones:

$$|\vec{\tau}_{exo1}| = |\vec{F}_{act1}| |\vec{l}_1| \sin(\alpha_1)$$

$$|\vec{\tau}_{exo2}| = |\vec{F}_{act2}| |\vec{l}_4| \sin(\beta_2)$$

$$|\vec{\tau}_{exo3}| = |\vec{F}_{act3}| |\vec{l}_6| \sin(\alpha_3)$$

En conclusión, sabiendo la fuerza necesaria y las longitudes fijas, lo que controla los torques que necesitamos son los ángulos de producto cruz, que a su vez controlan la longitud variable del actuador lineal.

## Capítulo VI: Implementación y pruebas

En esta sección se explicará como se realizó el control sobre cada rutina propuesta en los objetivos principales del capítulo II y esquematizadas en el capítulo I. En la tabla 6.1 se puede observar las condiciones iniciales que se utilizaran para colocar los eslabones en el espacio sagital.

	<i>Rutina 1</i>	<i>Rutina 2</i>	<i>Rutina 3</i>
<i>Eslabón 1</i>	$-3/4 \pi$	$-3/4 \pi$	$-3/4 \pi$
<i>Eslabón 2</i>	$-3/4 \pi$	$-1/2 \pi$	$-1/2 \pi$
<i>Eslabón 3</i>	$-7/8 \pi$	$-\pi$	$-3/4 \pi$

Tabla 6.1: Condiciones iniciales correspondientes para cada rutina

### 6.1. Elevación del miembro inferior en flexión y extensión.

Para que el exoesqueleto conformado por la órtesis y los actuadores seriales lineales simule el movimiento que se desea generar se tiene que declarar que las posiciones en las que se encuentra ese movimiento, por ende la posición inicial de cada referencia, en este caso se encuentran en  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  los cuales se pueden observar en la pimer columna de la tabla 6.1. Para el caso de esta rutina, las coordenadas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  oscilan respecto a un eje. Cabe destacar que se analiza que los movimientos deben tener ciertas restricciones ya que se puede lastimar al paciente, pues doblar una articulación más de lo que permite nuestra biomecánica puede ser peligroso. En la figura 6.3 se muestra la trayectoria que realiza la posición deseada de cada uno de los eslabones. En la figura 6.1 se puede observar la posición inicial de la rutina mientras que en la figura 6.2 se puede observar el movimiento final de la trayectoria, el punto negro de la figuras anteriores, indica el eje de rotación, se puede ver que los 3 eslabones rotan respecto al punto negro de la cadera paralelos entre si de forma oscilatoria entre  $-\frac{1}{2}\pi$  y  $-\frac{3}{4}\pi$ . El punto de referencia inicial dentro del plano cartesiano conocido está a 270 grado.

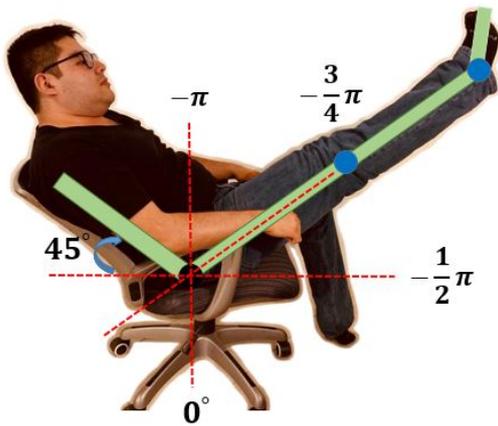


Figura 6.1: Posición inicial, extensión del miembro inferior

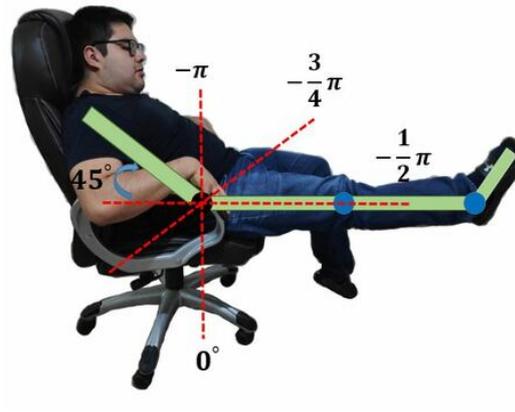


Figura 6.2: Posición final, flexión del miembro inferior

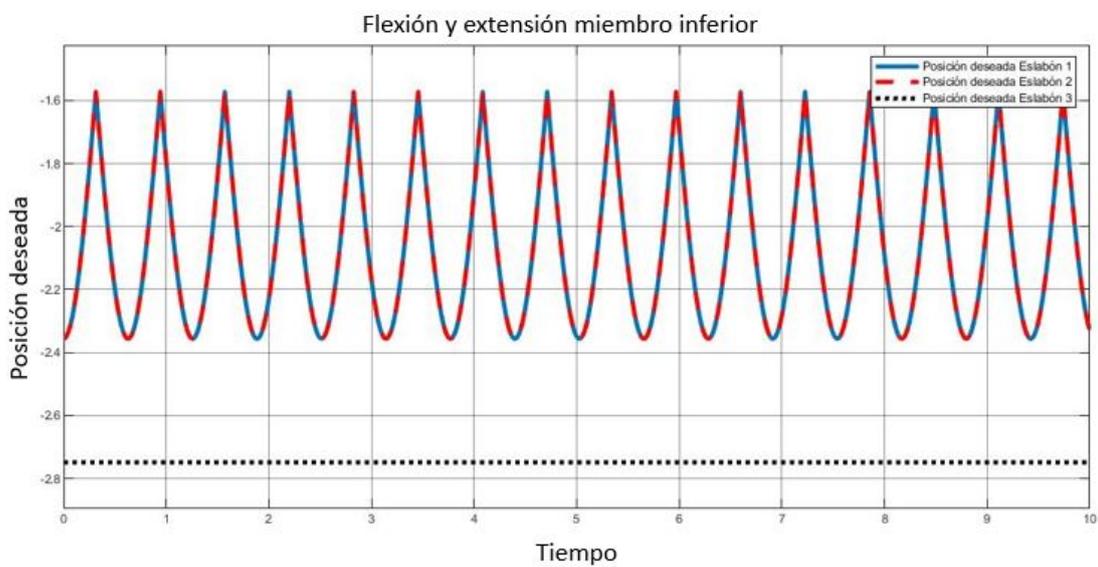


Figura 6.3: Posiciones deseadas de los eslabones para la primera rutina

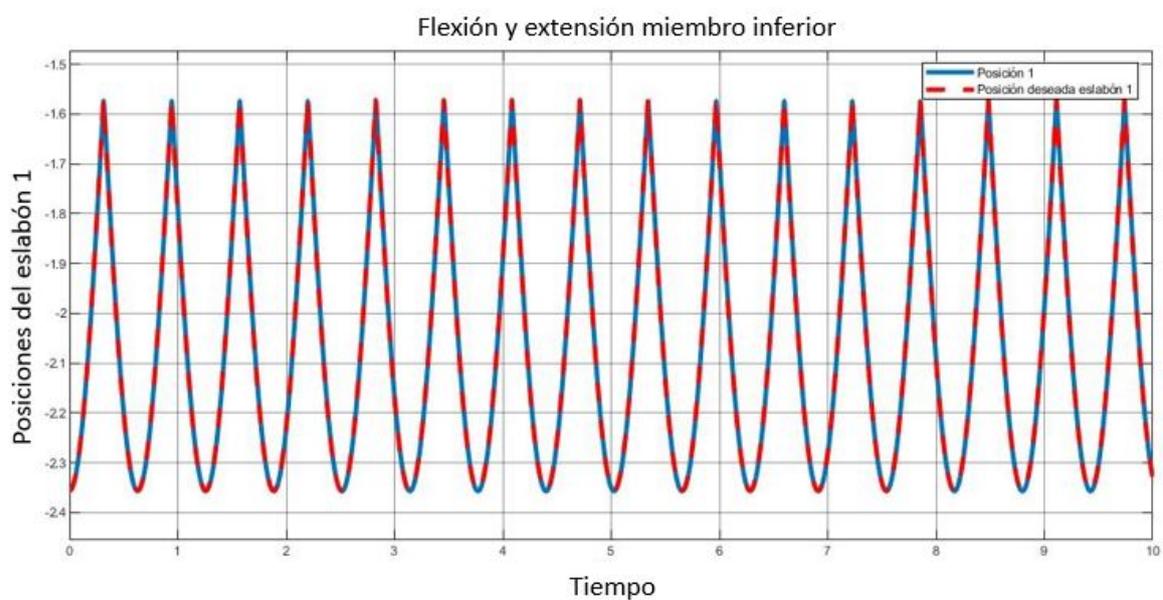


Figura 6.4: Posición deseada y posición actual del eslabón 1

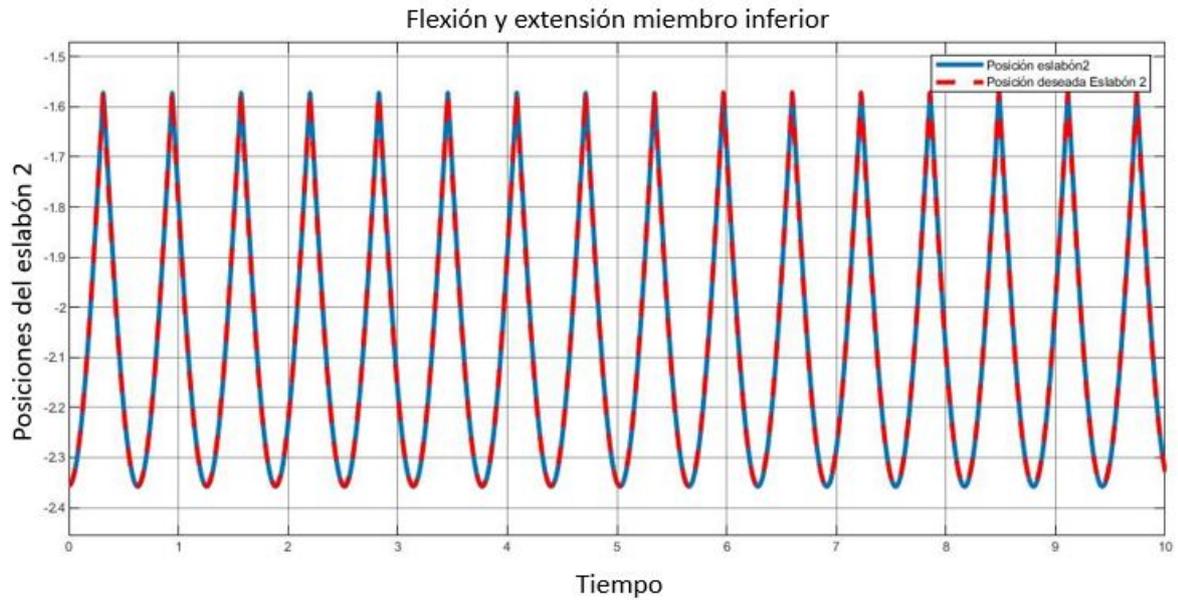


Figura 6.5: Posición deseada y posición actual del eslabón 2

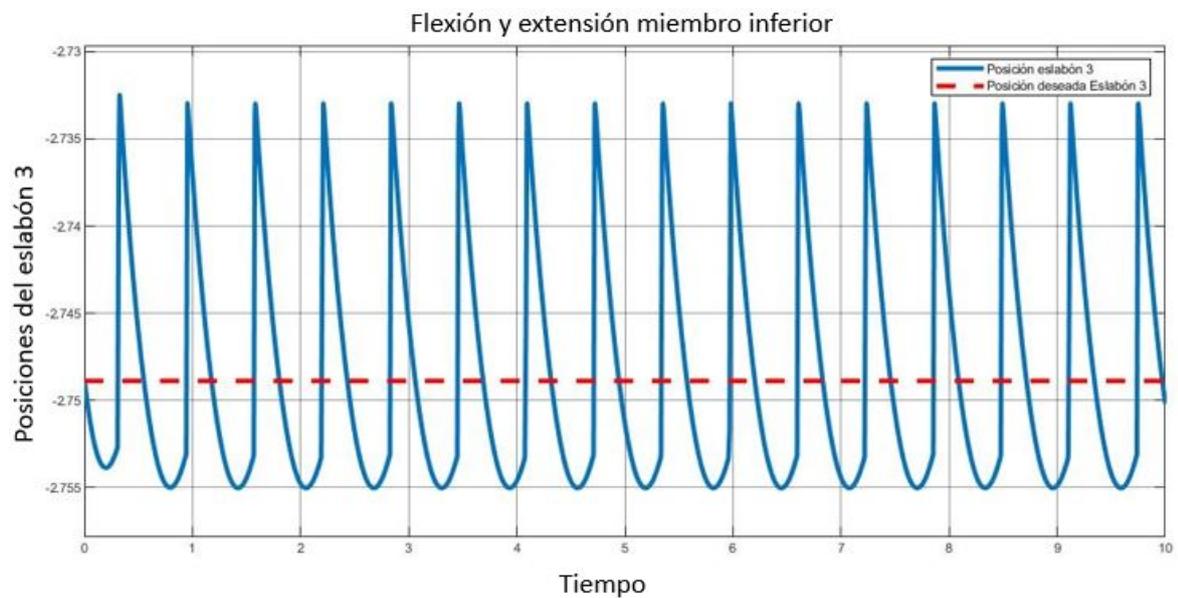


Figura 6.6: Posición deseada y posición actual del eslabón 3

En la figuras 6.4, 6.5 y 6.6 se puede observar la comparación entre las trayectorias deseadas y las trayectorias actuales, a simple vista la diferencia entre las señales es mínima, pero en la figura 6.7 se pueden observar los errores que existen entre cada una, las matrices de la ecuación (6.1), corresponde a los valores con los que se sintonizó el control PD. Por último la figura 6.8 muestra la velocidad actual de los tres eslabones, la velocidad deseada se omite, ya que se infiere que es la derivada con respecto al tiempo de la posición deseada de la figura

6.3.

$$K_v = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad K_p = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

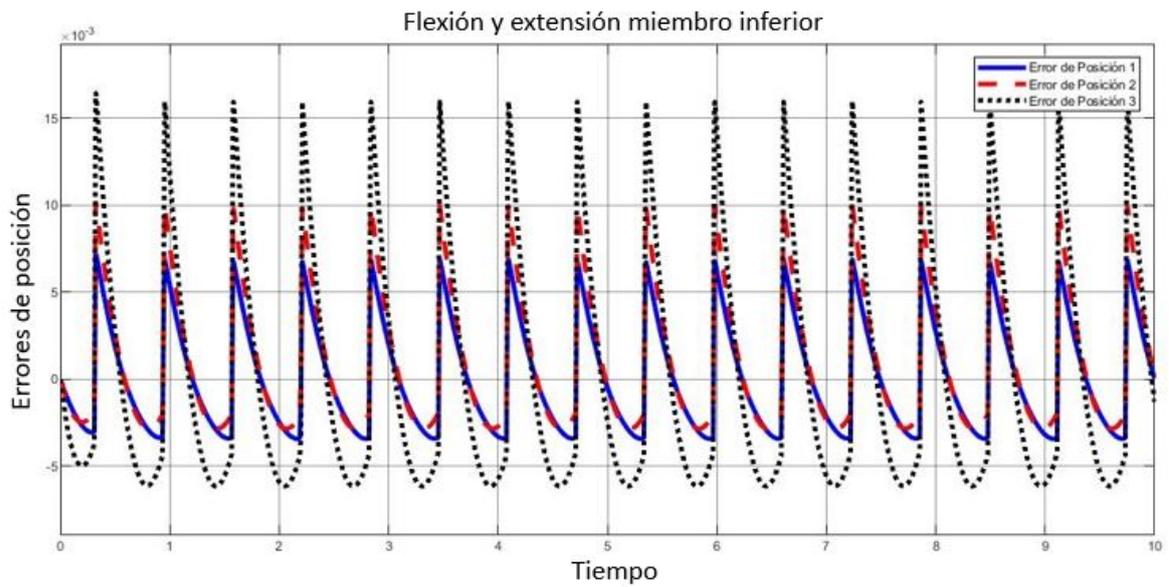


Figura 6.7: Errores de Posición de los tres eslabones

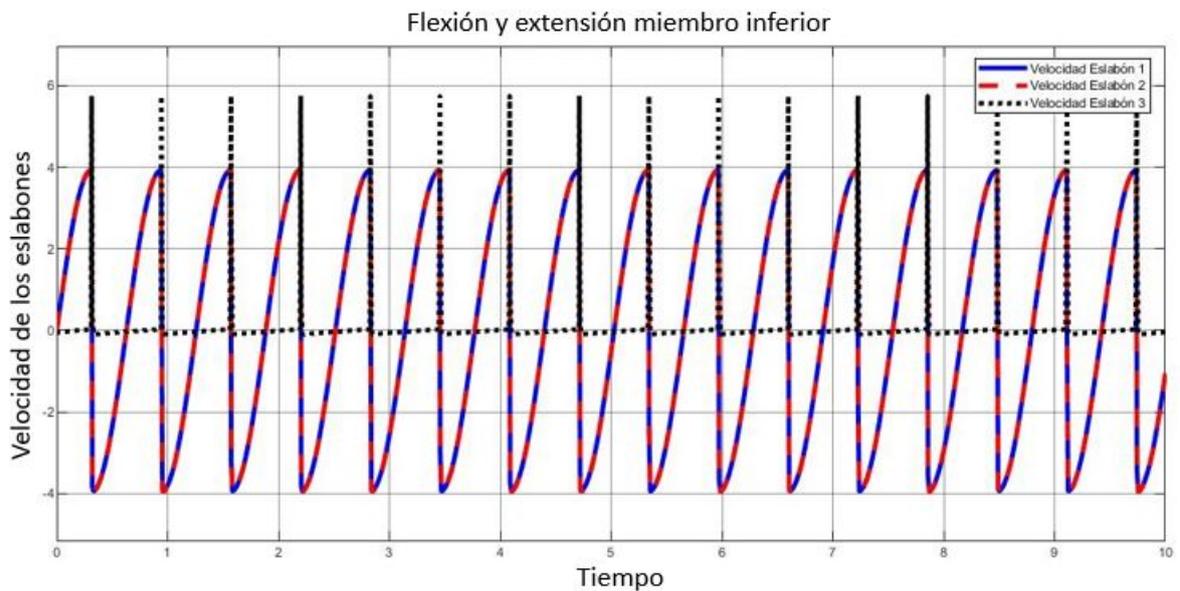


Figura 6.8: Velocidad actual de los tres eslabones

## 6.2. Flexión y extensión de rodilla

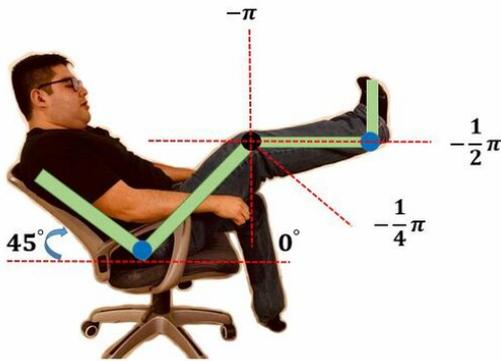


Figura 6.9: Posición inicial, extensión de rodilla

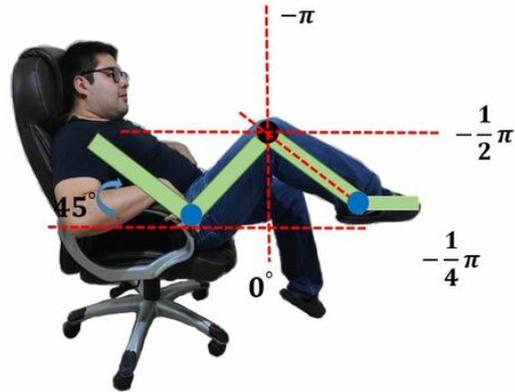


Figura 6.10: Posición final, flexión de rodilla

En la figura (6.9) y (6.10) se observa el movimiento inicial y final de esta segunda rutina de rehabilitación. Se establece la posición inicial del primer eslabón  $q_1 = -\frac{3}{4}\pi$  con respecto al primer punto azul que se encuentra en la cadera, la segunda posición es el punto negro que se encuentra en la rodilla, donde el segundo y tercer eslabón oscilan de  $-\frac{1}{2}\pi$  a  $-\frac{1}{4}\pi$ , por último la posición del eslabón 3 con respecto al último punto azul colocado sobre el talón es  $q_3 = -\pi$ . Como se puede analizar con respecto a la rutina anterior, en esta rutina solo oscilan 2 eslabones y uno permanece en posición constante, el tercer eslabón también permanece en posición constante pero es afectado por la oscilación de entrada de la rodilla. En la figura 6.11 se puede ver el perfil de posición deseado que se le introdujo como referencia de entrada a cada eslabón.

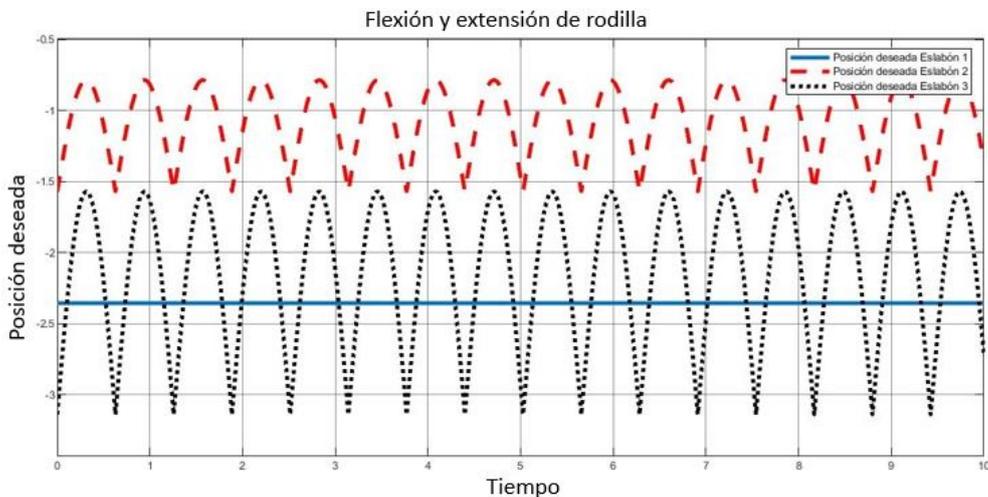


Figura 6.11: Posición deseada de los eslabones para la segunda rutina

En las figuras 6.12, 6.13 y 6.14 se puede observar la comparación entre las trayectorias deseadas y las trayectorias actuales, a simple vista la segunda posición no se alcanza a diferenciar, mientras que en la primer y tercer posición se ve un poco marcada la diferencia, en la figura 6.15 se obtienen los errores entre estas posiciones. En la figura 6.16 se observa la velocidad real de los tres eslabones.

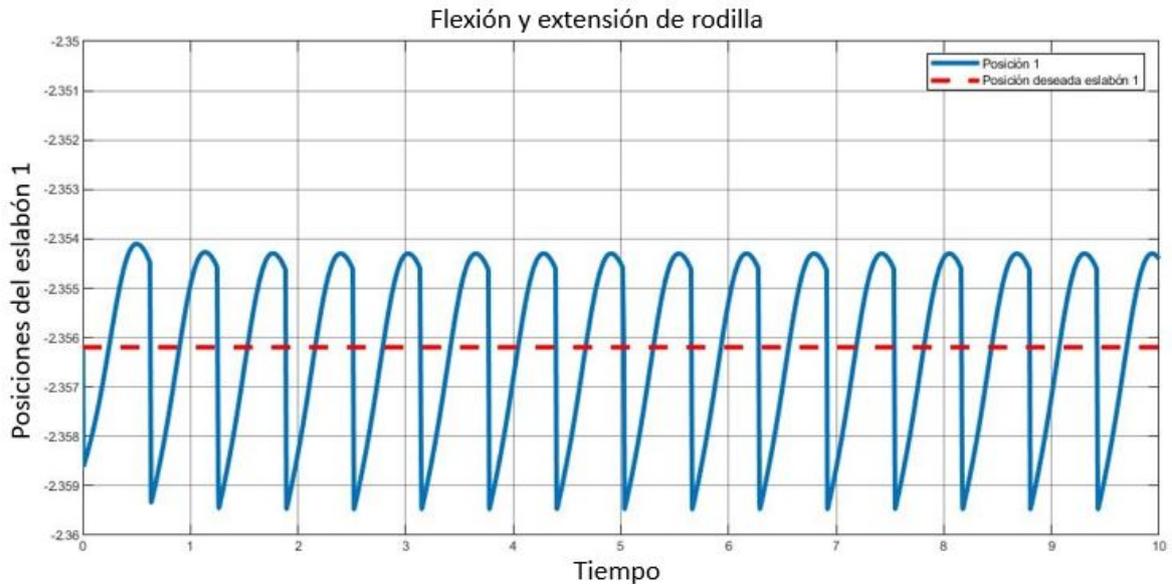


Figura 6.12: Posición deseada y posición actual del eslabón 1

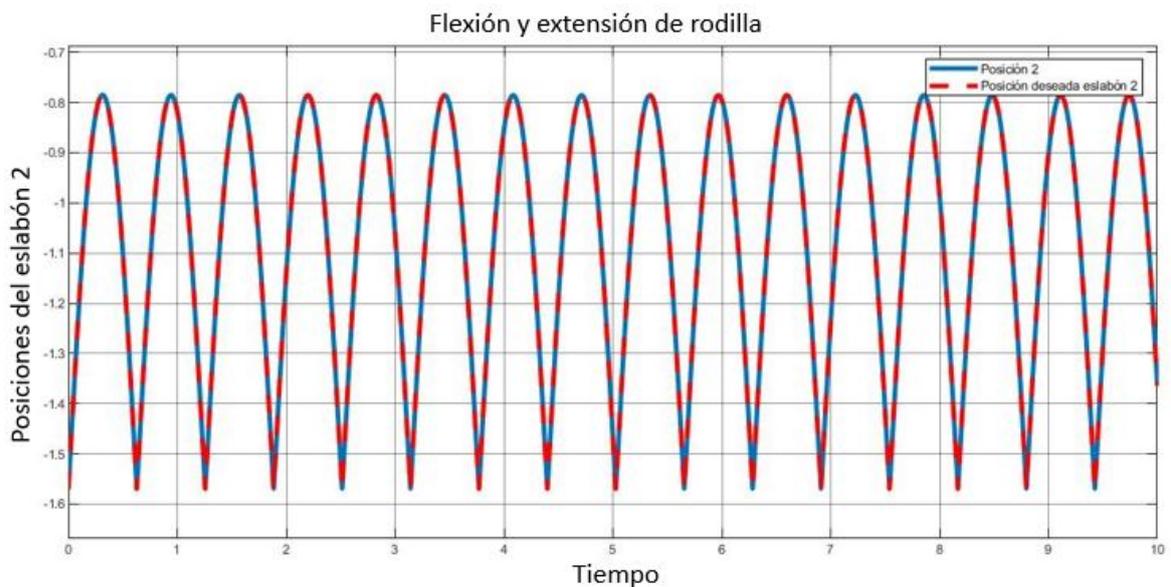


Figura 6.13: Posición deseada y posición actual del eslabón 2

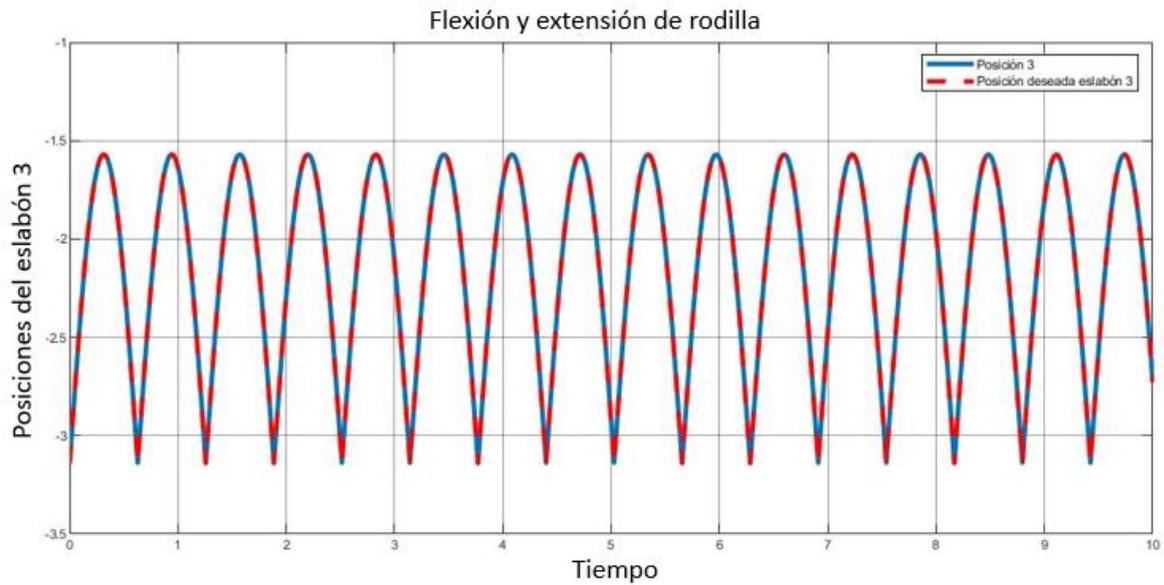


Figura 6.14: Posición deseada y posición actual del eslabón 3

Para sintonizar el control PD, se modificaron los elementos de la matriz  $K_v$ , eso con el objetivo de hacer que el error de posición  $q_1$  y  $q_3$  se redujera, dejando los elementos de  $K_p$  como en la rutina anterior, en la ecuación (6.2) se observan los valores de esta matriz.

$$K_v = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad K_p = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

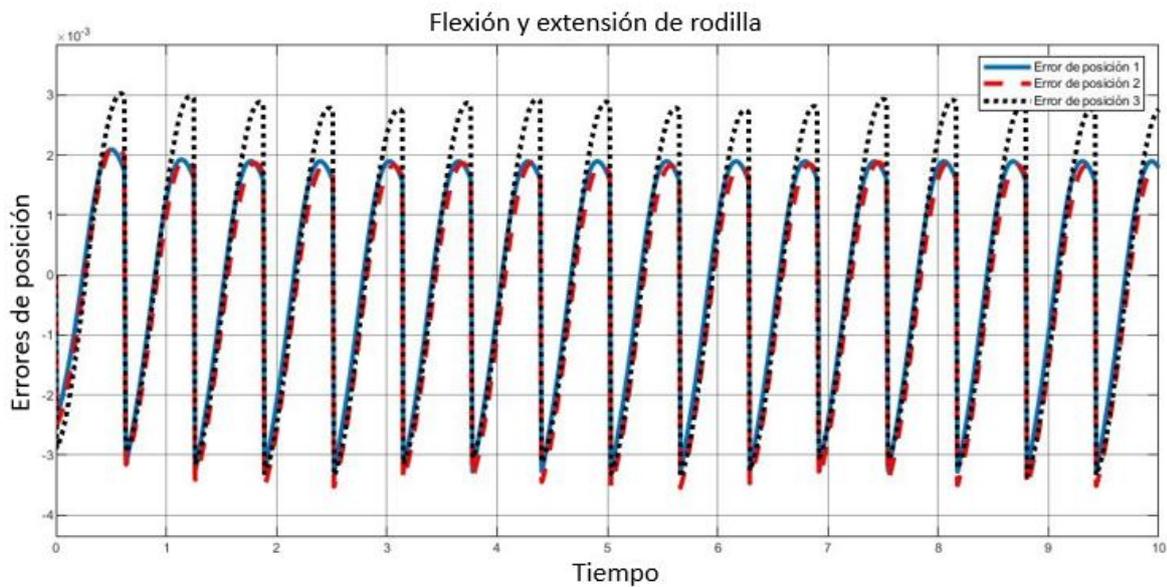


Figura 6.15: Error de posición de los tres eslabones

El error de posición logró reducirse al mínimo, esto nos ayuda a que los motores de cada actuador vibren menos al momento mandar la fuerza para generar el torque deseado.

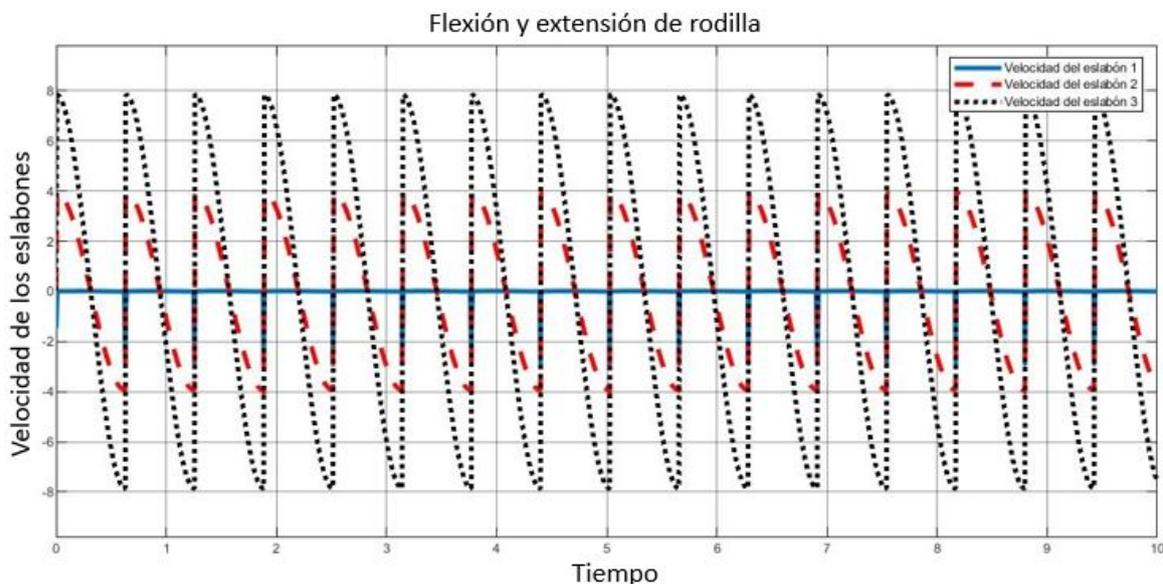


Figura 6.16: Velocidad actual de los tres eslabones

### 6.3. Dorsiflexión y plantarflexión de tobillo

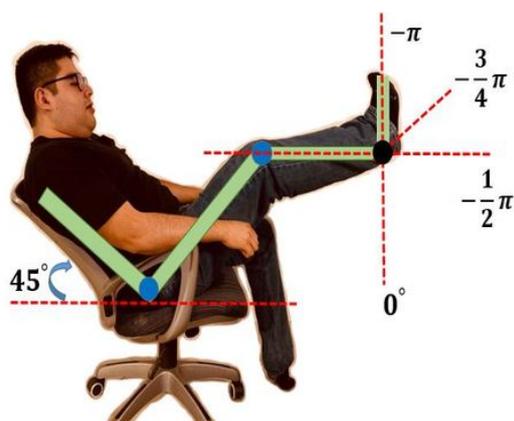


Figura 6.17: Posición inicial, dorsiflexión de tobillo

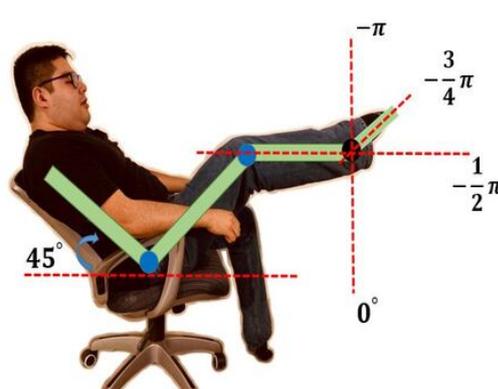


Figura 6.18: Posición final, plantarflexión de tobillo

Por último, en las figuras 6.17 y 6.18 esquematizan el movimiento comúnmente conocido como "Bombeo de tobillos". En este caso la posición inicial de  $q_1$  es  $-\frac{3}{4}\pi$  que permanece constante y estático, se refiere al eslabón de la pierna, mientras que el segundo eslabón referente a la espinilla su posición inicial en  $q_2$  es  $-\frac{1}{2}\pi$  y permanece estática. En esta rutina de rehabilitación la posición  $q_3$  oscila entre los valores de  $-\frac{3}{4}\pi$  y  $-\pi$  alrededor del punto negro

que se encuentra en el tobillo. La figura 6.19 muestra el tipo de posición deseada que se le introdujo como referencia de entrada a cada eslabón en esta rutina.

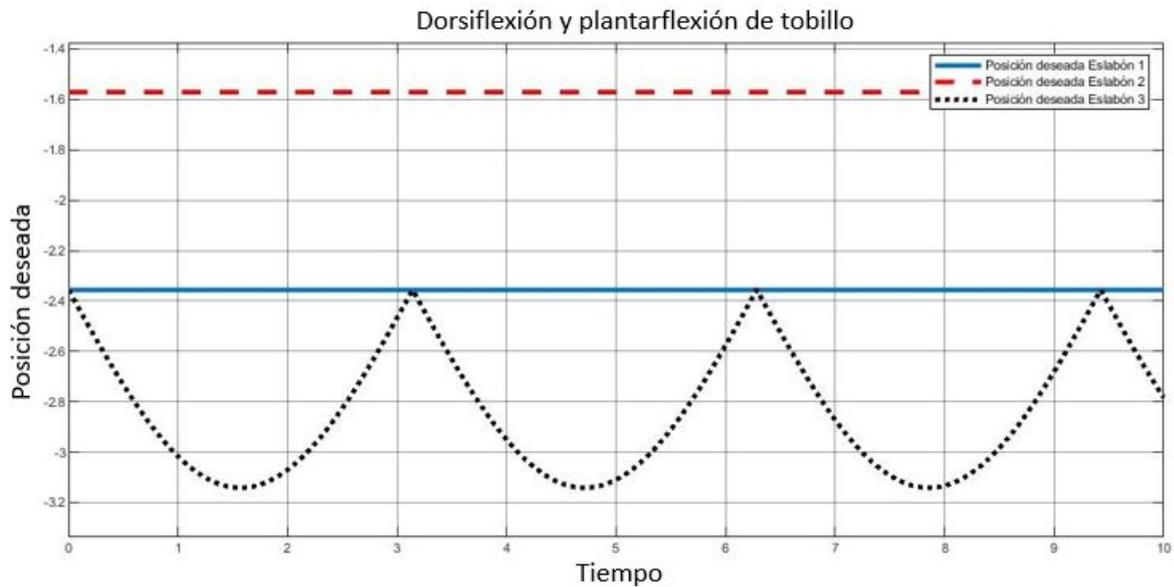


Figura 6.19: Posición deseada de los eslabones para la tercer rutina

En las figuras 6.20, 6.21 y 6.22 se puede observar la comparación entre las trayectorias deseadas y las trayectorias actuales, a simple vista la tercer posición no se alcanza a diferenciar, mientras que en la primera y segunda posiciones se ve un poco marcada la diferencia, en la figura 6.23 obtenemos los errores entre estas posiciones. En la figura 6.24 se obtienen la velocidad actual de los tres eslabones.

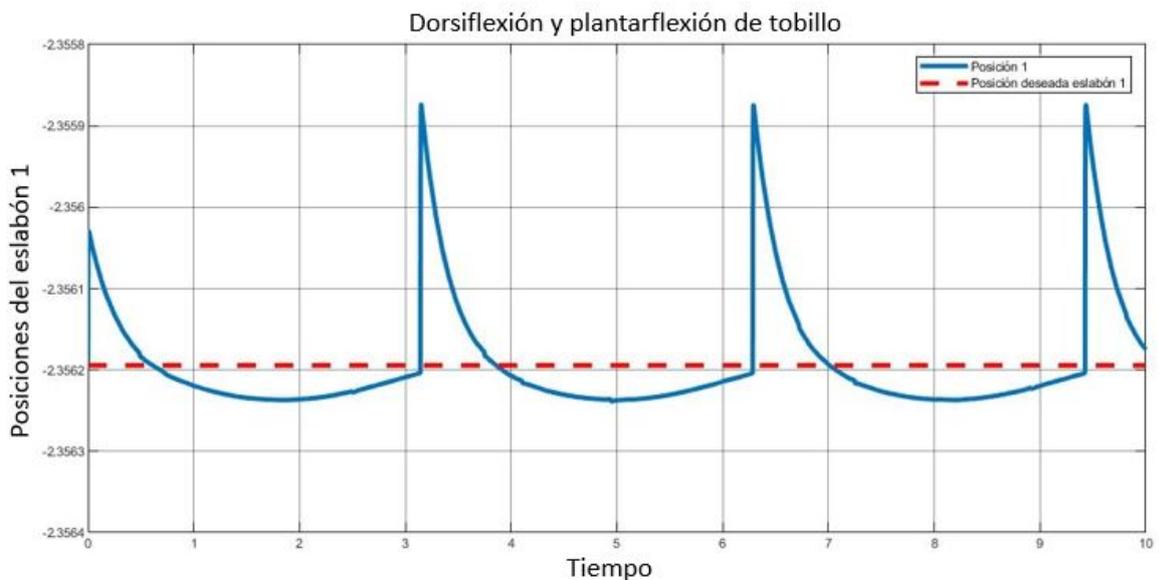


Figura 6.20: Posición deseada y posición actual del eslabón 1

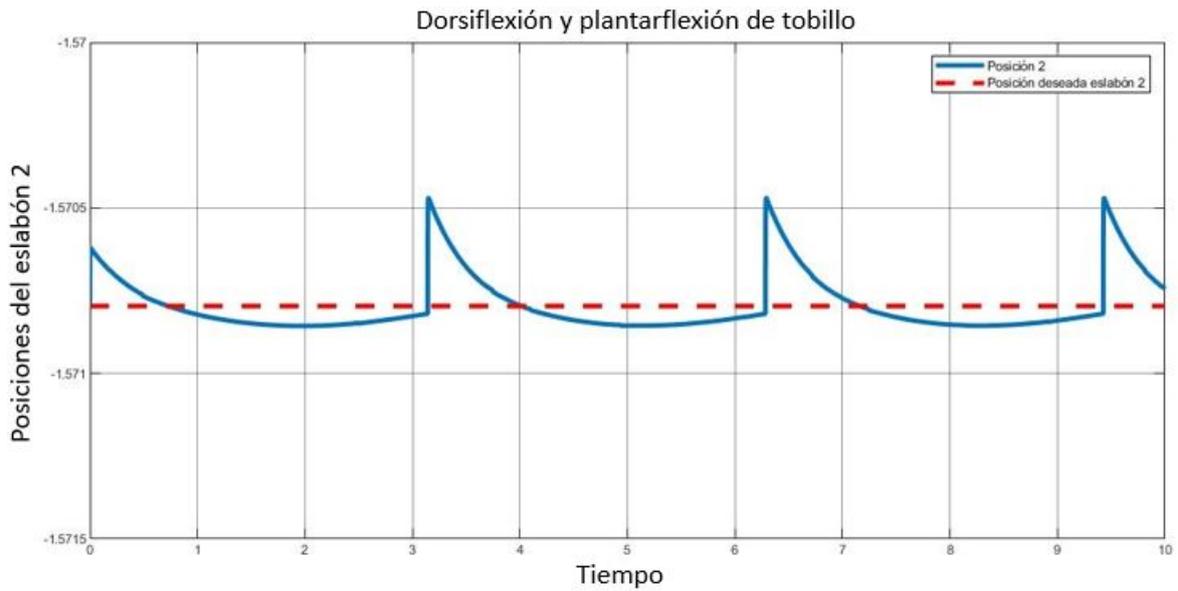


Figura 6.21: Posición deseada y posición actual del eslabón 2

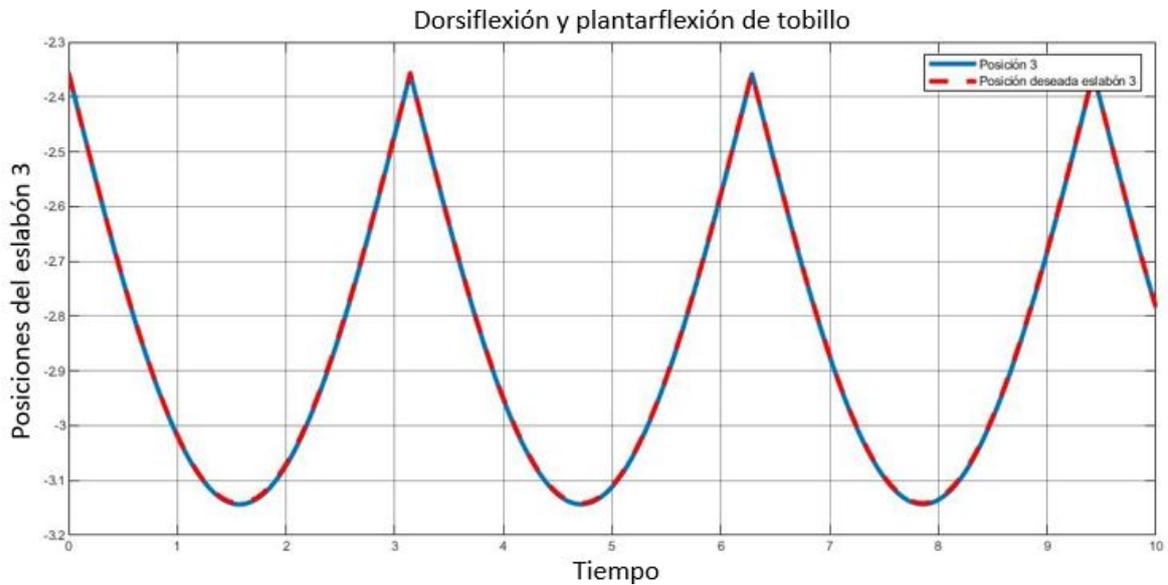


Figura 6.22: Posición deseada y posición actual del eslabón 3

Para sintonizar el control PD, se modificaron los elementos de la matriz  $K_v$ , eso con el objetivo de hacer que el error de posición  $q_1$  y  $q_2$  se redujera, dejando los elementos de  $K_p$  como en la rutina anterior, en la ecuación (6.3) se observan los valores de esta matriz.

$$K_v = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad K_p = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

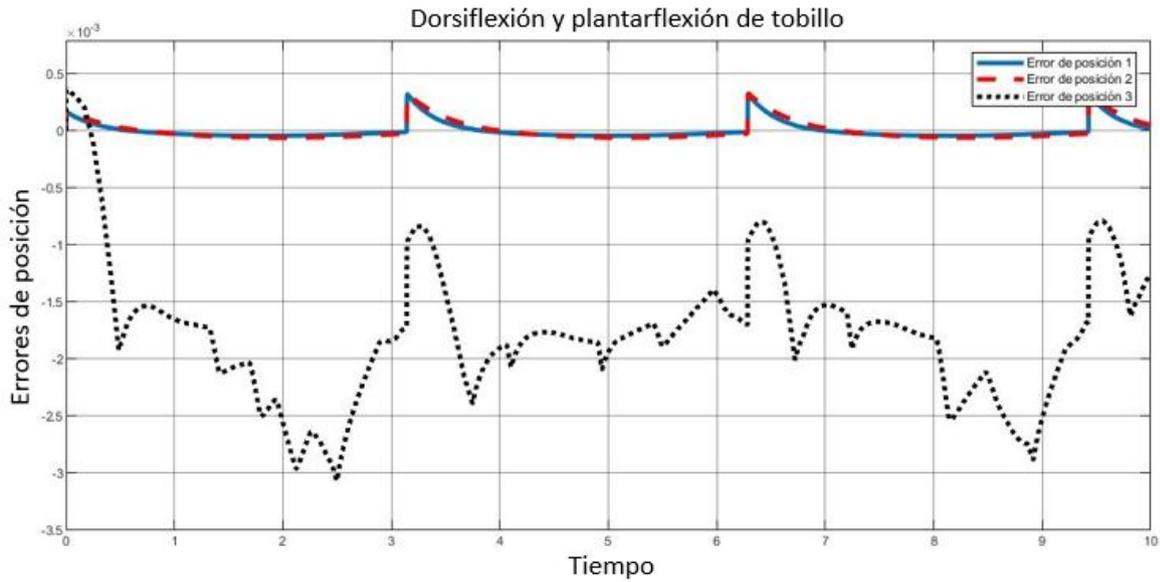


Figura 6.23: Errores de posición de los tres eslabones

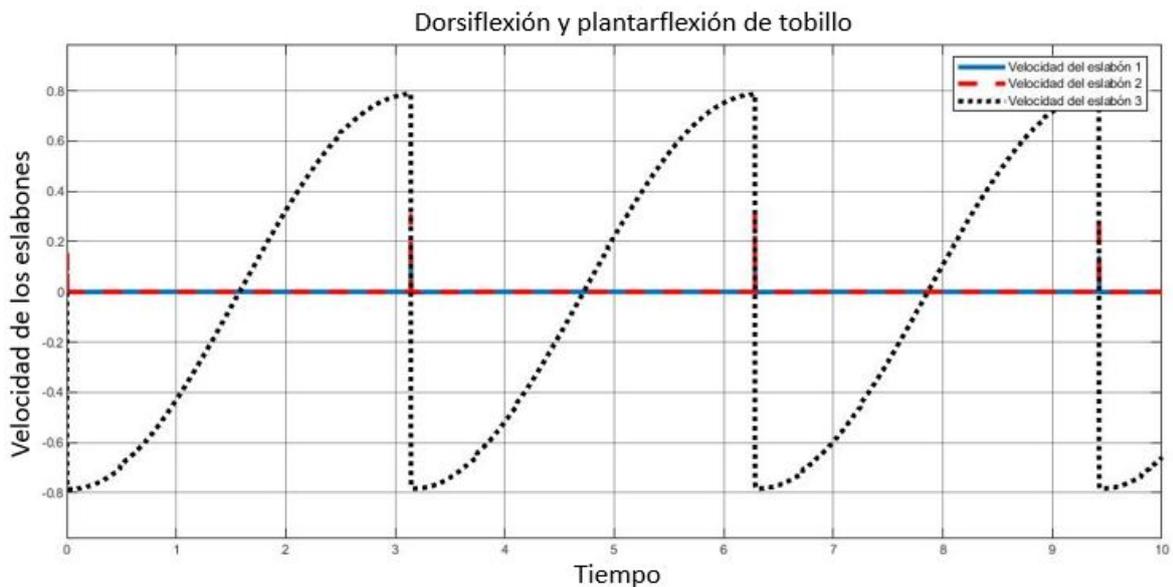


Figura 6.24: Velocidad actual de los tres eslabones

Los errores de  $q_1$  y  $q_2$  se reducen al mínimo como se puede ver en la figura 6.23, el error  $q_3$  es mas rápido, debido a que la oscilación es mucho más corta que en las dos rutinas anteriores, por ende el cambio de posición es menos amortiguado, por eso se logran visualizar esos pequeños picos.

## 6.4. Análisis de esfuerzos

En el capítulo III se desarrollaron los cálculos para el diseño detallado de la subfunción 1, en esta parte se analizaron las fuerzas que ejercen los pesos que se le agregan a la estructura XYZ. Analizaremos en específico la pieza que recibe todos estos esfuerzos, esta parte de la estructura tiene que soportar los 5 Kg del mecanismo que permite el movimiento en Y, los 25 Kg del exoesqueleto combinado con el miembro inferior, el motor a pasos que permite el movimiento del mecanismo del eje Y y el propio peso de la misma pieza. Cabe mencionar que esta pieza también debe moverse sobre el eje Z, permitiendo la elevación y descenso del exoesqueleto.

Esta pieza debe ser resistente y fácil de maquinar, así mismo debe ser de un material que no sea muy pesado, por lo tanto se optó por usar la aleación de aluminio comercial 6061-T6.

Para realizar el estudio de análisis estático por medio de análisis de elementos finitos con SOLIDWORKS, se establecen las siguientes condiciones.

- Se intuye que el contrapeso calculado en la sección III, es suficiente o superior para equilibrar los torques producidos por las fuerzas implicadas en esta pieza. Al aceptar esta condición implica que la estructura no rotará, por tanto se encontrará estática. En la figura 6.25 se muestran con flechas verdes la sujeción fija necesaria para que se cumpla dicha condición de equilibrio colocada sobre donde están colocadas las barras metálicas de acero rectificado de 10mm y 12mm, así mismo donde se coloca el tornillo ACME de 1 pulgada de diámetro las cuales permiten el movimiento libre en Z.

- Se dan como datos la magnitud y dirección del vector gravedad, el cual se indica con una flecha roja en la figura 6.25.

- Se dan como datos la magnitud de las fuerzas y las coordenadas para localizar donde se ejercen dichos esfuerzos, éstas se pueden observar en la figura 6.25 con flechas moradas.

- Se realiza un mallado de toda la pieza para realizar el análisis en cada punto finito.

- Se debe realizar la simulación con un factor de seguridad de 1.5, esto quiere decir que el mecanismo se simulara con la capacidad de soportar una carga de 45 Kg, que es la que puede desplazarse sobre el eje Y.

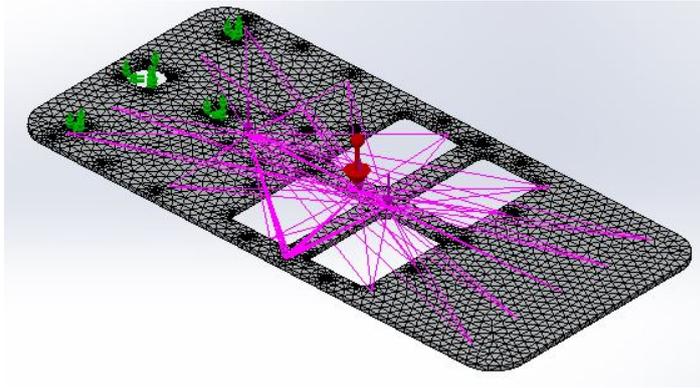


Figura 6.25: Condiciones para realizar el estudio estático de esfuerzos

El objetivo de realizar este estudio estático sobre esta pieza es:

- Conocer las tensiones de Von Mises, esto nos indicará las partes en las que falla la pieza debido a las tensiones que se le aplican.
- Saber la distancia que se desplaza sobre el eje z al aplicarle la carga que debe soportar.
- Conocer las partes más seguras e inseguras de la pieza.

Se realizan dos estudios de análisis estático, ya que en la sección III se explica que existe una distancia variable en el eje Y, por tanto se realizará el estudio cuando esta distancia es mínima y máxima.

## 6.5. Estudio estático de esfuerzos: Distancia mínima

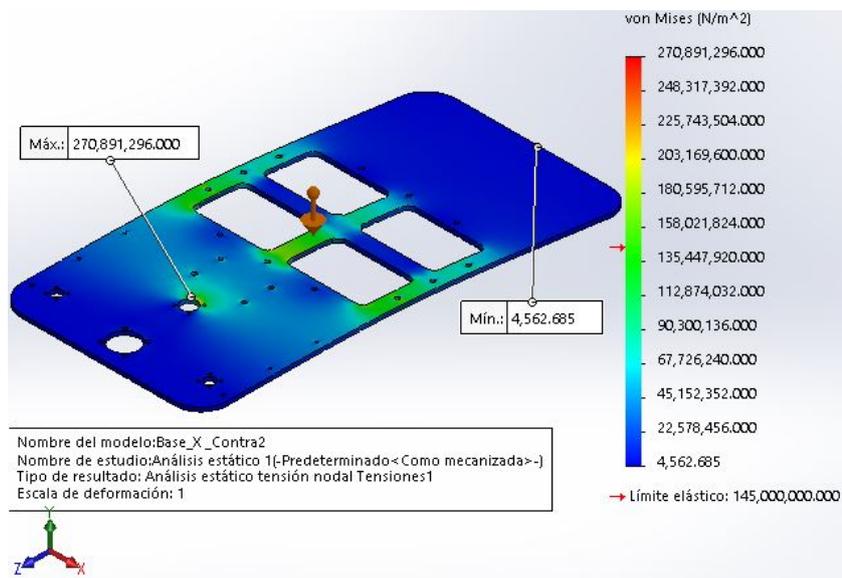


Figura 6.26: Análisis de Von Mises para la distancia mínima

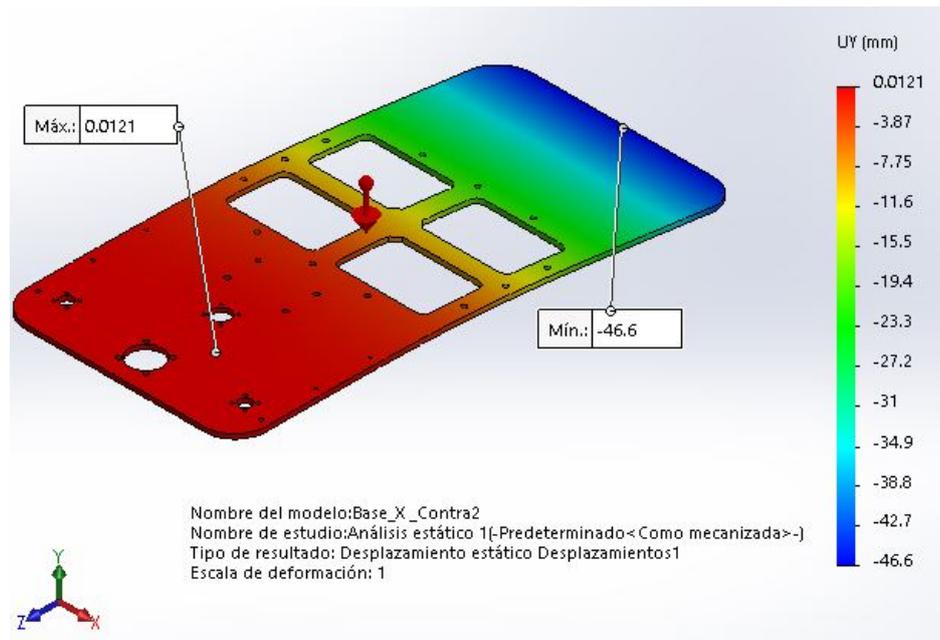


Figura 6.27: Desplazamiento en el eje Z al aplicar la carga en la distancia mínima

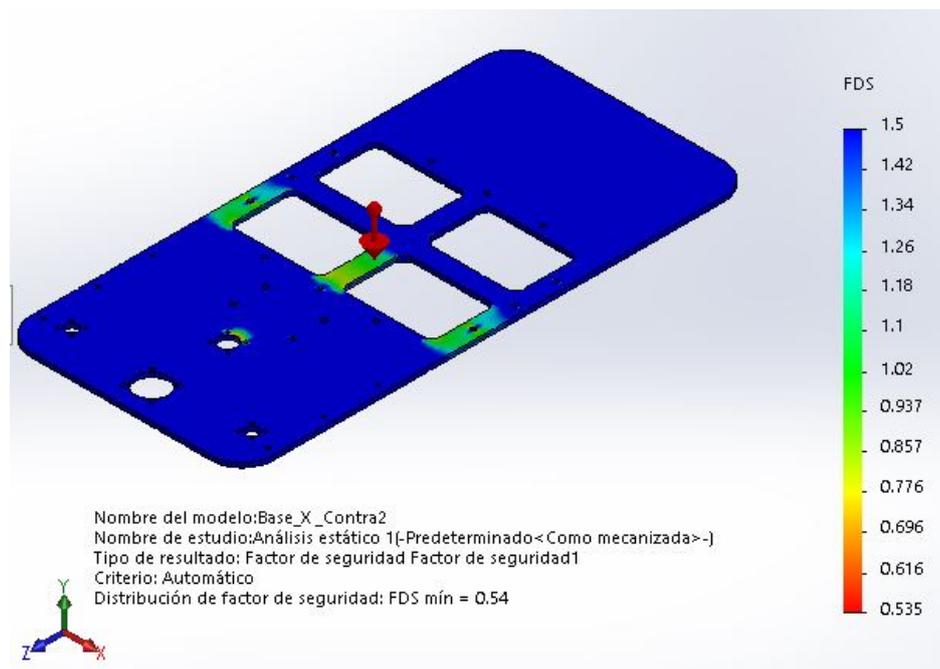


Figura 6.28: Factor de seguridad al aplicar la carga en la distancia mínima

## 6.6. Estudio estático de esfuerzos: Distancia máxima

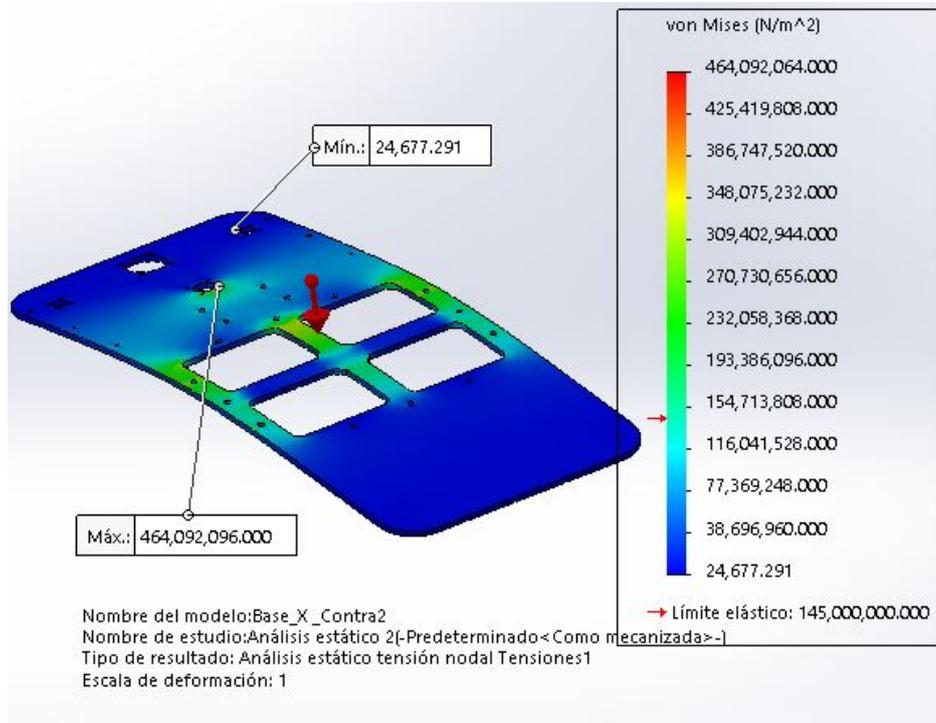


Figura 6.29: Análisis de Von Mises para la distancia máxima

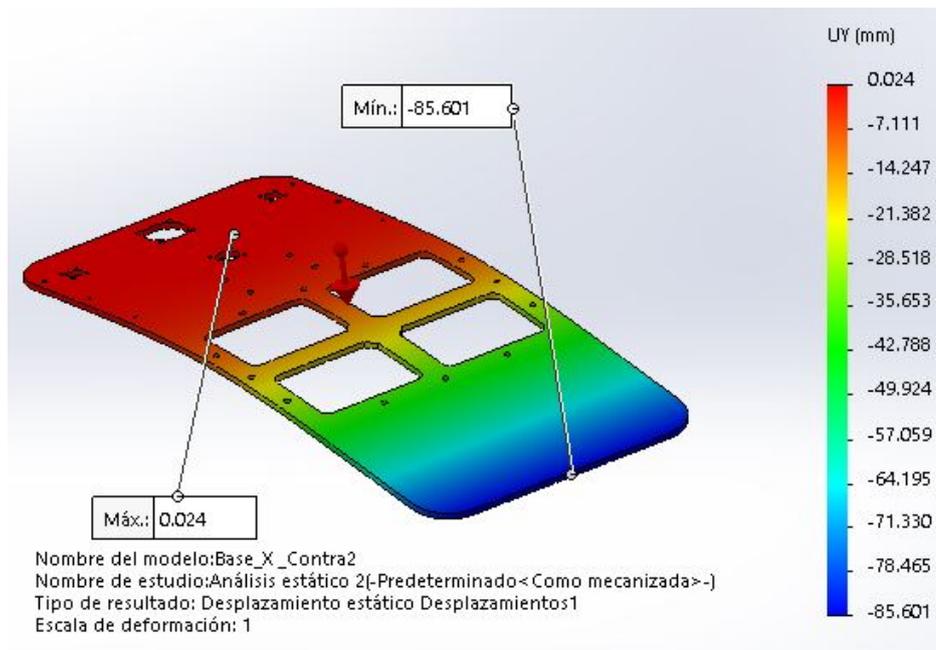


Figura 6.30: Desplazamiento en el eje Z al aplicar la carga en la distancia máxima

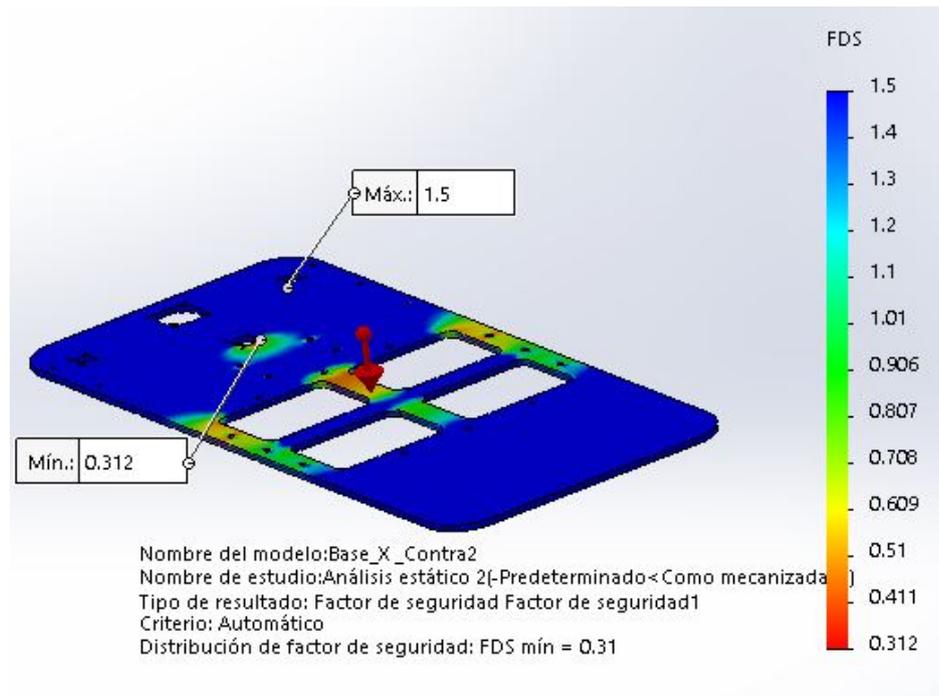


Figura 6.31: Factor de seguridad al aplicar la carga en la distancia máxima

De los análisis de la Von Mises de las figuras 6.26 y 6.29, se puede concluir que las zonas más frágiles son el centro que se marca entre el motor que mueve al mecanismo en Y y el tornillo de potencia que mueve el eje Z, dada esta observación se optó por colocar una guía de acero rectificado de 12 mm para evitar que la estructura ceda a la fatiga con el tiempo.

De los análisis de desplazamiento de las figuras 6.27 y 6.30 se puede observar que la distancia mínima que se mueve la carga en el eje Y, esta carga provoca un desplazamiento en el eje Z equivalente a 46.6mm, en cambio cuando el eje Y se mueve a su distancia máxima el desplazamiento que provoca esta carga es de 85.501 mm.

De los análisis de factor de seguridad las figuras 6.28 y 6.31 se puede observar que las partes más seguras (color azul) se encuentra mas alejadas del centro de la pieza para ambas direcciones, en cambio las partes más inseguras(color verde y rojo) se encuentran en el centro de la pieza. De estos análisis se puede concluir que se necesitan agregar elementos estructurales para reducir el desplazamiento que provoca la carga en el eje Z, así mismo debe colocarse también un elemento estructural en el centro de la pieza que evite que las tensiones se concentren en ese punto y se distribuyan hacia los lados de la estructura. Por tanto se agregan barras de aluminio estructural de 2cm para obtener mejores resultados y se repiten los mismos estudios estáticos.

## 6.7. Estudio estático de esfuerzos agregando elementos estructurales : Distancia mínima

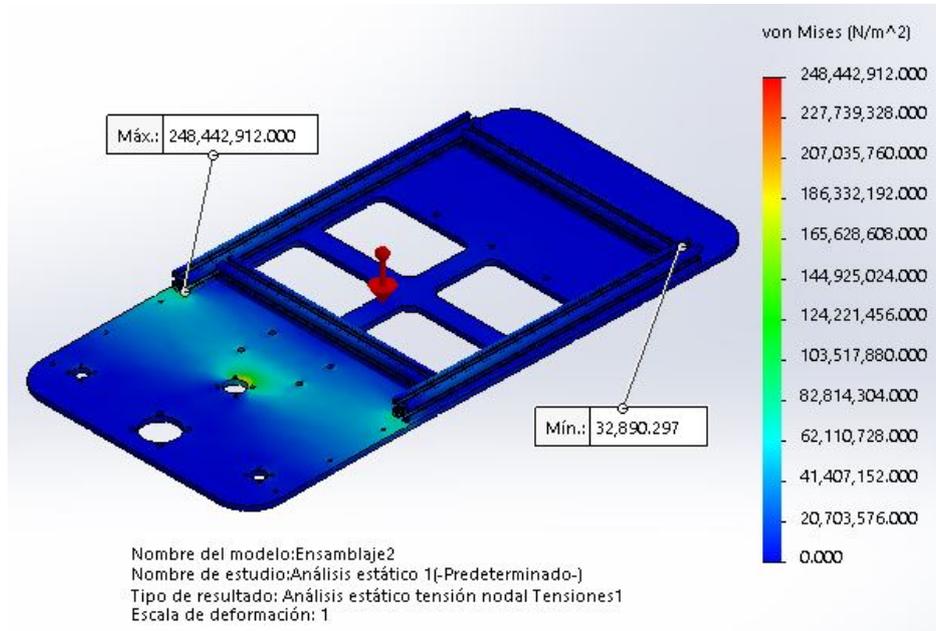


Figura 6.32: Análisis de Von Mises para la distancia mínima con elementos estructurales

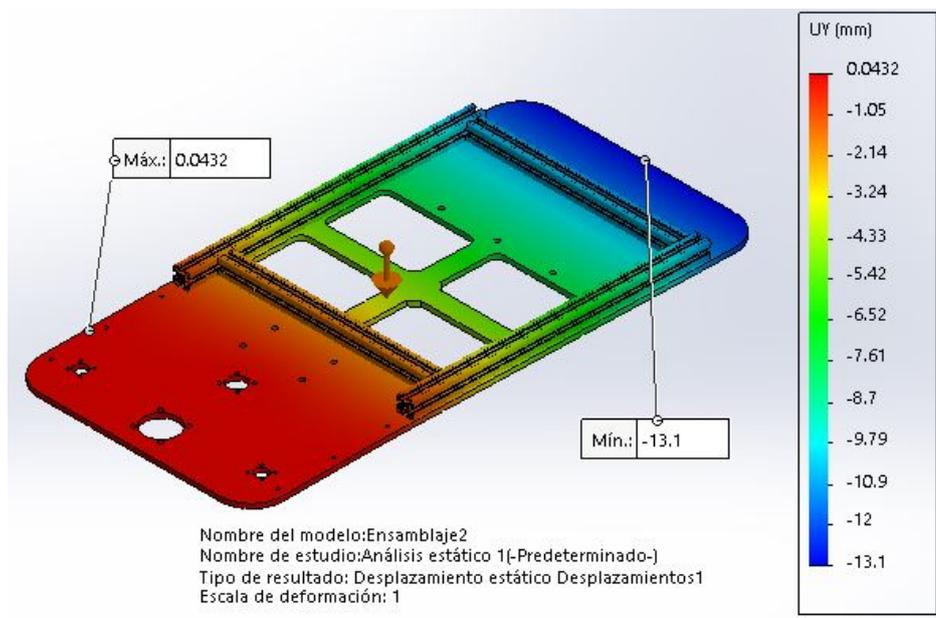


Figura 6.33: Desplazamiento en el eje Z al aplicar la carga en la distancia mínima con elementos estructurales

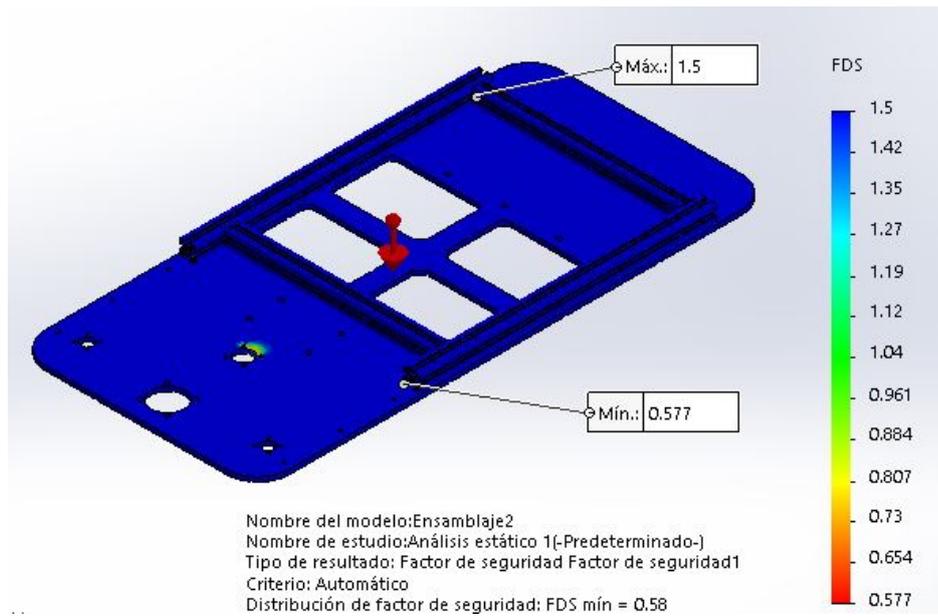


Figura 6.34: Factor de seguridad al aplicar la carga en la distancia mínima con elementos estructurales

## 6.8. Estudio estático de esfuerzos agregando elementos estructurales : Distancia máxima

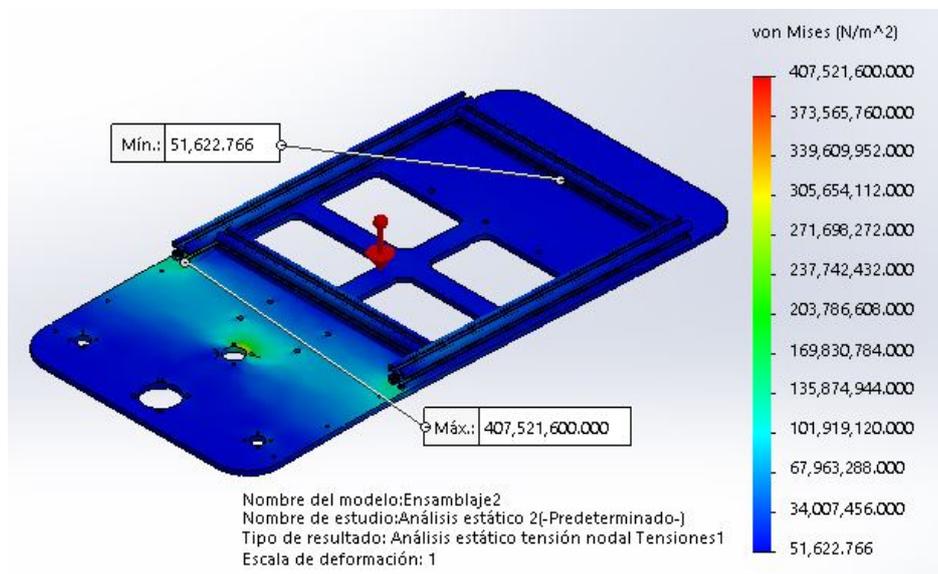


Figura 6.35: Análisis de Von Mises para la distancia máxima con elementos estructurales

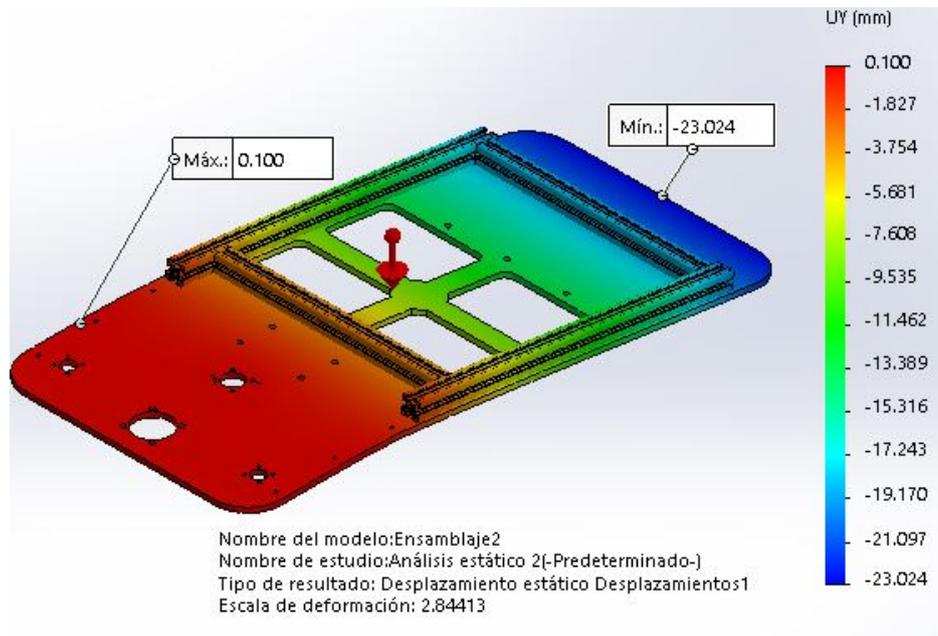


Figura 6.36: Desplazamiento en el eje Z al aplicar la carga en la distancia máxima con elementos estructurales

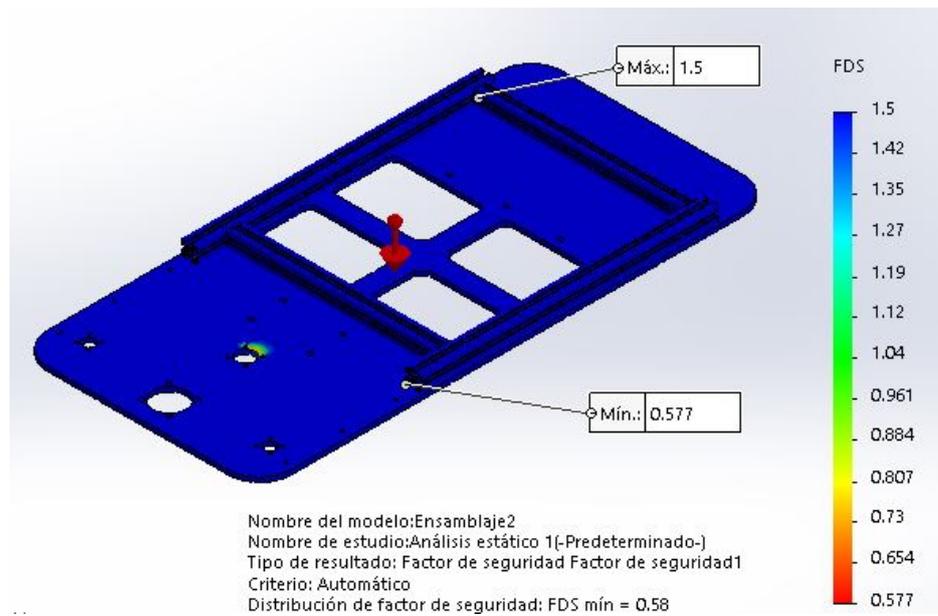


Figura 6.37: Factor de seguridad al aplicar la carga en la distancia máxima con elementos estructurales

De los análisis de la Von Mises de las figuras 6.32 y 6.35, se puede concluir que las zonas más frágiles que existían en las figuras 6.26 y 6.29 han sido reducidas considerablemente. En cambio en el análisis de desplazamiento en el eje Z, se obtuvo en la carga del movimiento eje Y mínima se desplazó 13.1 mm y para la carga del eje Y máxima se desplazó 23.024mm, por lo tanto se puede concluir que los elementos estructurales que se agregaron reducen el desplazamiento en el eje Z en una relación de 4 a 1. Por otro lado, el factor de seguridad se mejora considerablemente haciendo más seguras la mayor parte de la pieza principal, como se puede comparar en las figuras 6.34 y 6.37 con relación a las figuras 6.28 y 6.31.

Por último, se puede concluir que agregar elementos estructurales extras a la pieza tendrán el mismo efecto que se puede observar con los cables tensores de un puente, ya que distribuyen mediante las tensiones las fuerzas que soportan de las cargas que ejercen el peso del mismo. Entonces la pieza es resistente al paso del tiempo sin importar que se ejerzan estas fuerzas, los torques que se producen por las cargas son menores y la estructura tiene mayor seguridad.

---

---

## Análisis de Resultados y Conclusiones

---

Los resultados obtenidos durante el tiempo que se invirtió en realizar el trabajo escrito, así como parte de las simulaciones en computadora y trabajo de laboratorio. En primera instancia y mi punto de vista es un trabajo que debe llevarse con mucha precaución, ya que se orienta a que el usuario final sea un humano e involucra el estudio del movimiento de una parte importante del cuerpo, lo que implica a todo el miembro inferior derecho, por tanto la biomecánica que ésta conlleva debe respetarse para no causar algún daño parcial o permanente al usuario. Por otro lado, implementar pruebas en personas reales se considera no viable, debido al corto tiempo con el que se contó, pero el objetivo a largo plazo es realizar tres tipos de pruebas, las cuales consisten en:

- El uso de maniquís que reemplacen la morfología humana y simular el movimiento del miembro inferior de forma externa.
- Un estudio amplio con personas voluntarias con condiciones normales de movimiento en su miembro inferior derecho que simulen la rutinas que se desean implementar.
- Tener un acercamiento más estrecho con el INR, para poder probar el prototipo en las personas a la que está orientado el proyecto.

De estas pruebas la meta es recabar información importante para poder mejorar el prototipo, así mismo, saber la opinión de fisioterapeutas y médicos del INR especialistas en este campo para optimizar y mejorar la implementación de este tipo de sistemas.

En cuanto a las simulaciones elaboradas en computadora, están basadas en la realización de simulaciones en SOLIDWORKS para esquematizar como es que iban a construirse las tres subsecciones planteadas en el capítulo II y III, de estas simulaciones se obtuvieron detalles de cómo ensamblar cada elemento del exoesqueleto, así como las restricciones de movimiento para poder simularlo de manera más acorde a la realidad. La importan-

cia de simular el exoesqueleto virtualmente se extiende también a que brinda ayuda al momento de manufacturar las piezas, con el objetivo de elegir el mejor método para realizarlo de acuerdo a la complejidad de la pieza. Las simulaciones en un software CAM también brinda información estructural y análisis de esfuerzos como es el caso del capítulo III, en el diseño detallado, en donde se calculan el peso que soporta la plataforma móvil XYZ de la subsección 1, de esta manera se pueden verificar los cálculos previamente hechos.

Las simulaciones del modelo dinámico y cinemático del sistema fueron realizados en MATLAB, mediante el diseño de programas realizados en archivos m y Simulink. En este software se buscó unificar el modelo dinámico y el uso de una ley de control para simular tres rutinas funcionales de rehabilitación. La simulación de estos sistemas ayudaron a sintonizar nuestro controlador propuesto de una manera más sencilla, para después aplicarlo a los elementos físicos del exoesqueleto. La simulación se pudo visibilizar en el plano XY, gracias al modelo cinemático previamente obtenido. Por último, se obtiene en la sección final del capítulo V, cómo es que funciona el modelo del actuador serial elástico con el objetivo de obtener los torques que se necesitan para poder controlar la posición y velocidad deseada de la máquina, el sistema depende de una fuerza de entrada proporcionada por el motor, el cual se basa en la relación de gravedad que existe, lo que comúnmente se conoce como la intención humana.

La parte experimental del proyecto, consistió en maquinar las diferentes partes del exoesqueleto usando diversos métodos de manufactura en el que se incluyen el corte CNC, impresión 3D y moldeado. Cabe recalcar que se realizó una amplia búsqueda de elementos mecánicos y eléctricos en el mercado para reducir el maquinado de nuevos elementos con el objetivo de mejorar tiempos de construcción. Entrando al tema de tiempos, se tuvieron que aplazar debido a que no se pudo utilizar el laboratorio de maquinaria pesada por causas de fuerza mayor, también sufrimos de tiempos de entrega inconclusos, ya que se planeaba en un inicio comprar y adaptar los sensores a una órtesis HKAF0, pero dado este contratiempo se optó por diseñar nuevos elementos mecánicos y adaptarlos a una órtesis KAFO con la que ya se contaba. Dentro de la parte experimental se puede decir que se concluyó el 60 % de la manufactura de todas las piezas diseñadas, donde se obtuvo mas avance fue en la construcción del móvil XYZ, ya que se manufacturaron casi la totalidad de sus piezas, solo es cuestión de ensamblarlas, en cambio las otras dos subsecciones permanecieron inconclusas por falta de algunas piezas para manufacturar.

---

Para finalizar, se obtuvieron resultados positivos en cuanto al calculo y simulación de las diversas secciones de este proyecto, pero queda claro que lo único que faltó fue tiempo necesario para poder finalizar de manera optima su construcción.

## **7.1. Trabajo futuro**

A continuación se muestran algunos puntos que se consideran necesarios e importantes para mejorar el proyecto a futuro:

- Terminar la construcción de las subsecciones.
  - Implementar diversos tipos de pruebas en el exoesqueleto como las mencionadas anteriormente.
  - Añadir mas rutinas de rehabilitación al exoesqueleto.
  - Implementar otros tipos de control, como podría ser el control adaptativo con el fin de rastrear las trayectorias y adaptar los parámetros del usuario.
  - Reducir el peso del exoesqueleto con la ayuda de materiales más livianos y resistentes.
  - Mejorar las técnicas de manufactura para obtener mejores resultados en la calidad de las piezas.
-

## 8.1. Anexo A- Anatomía de miembro inferior

### 8.1.1. Estructura ósea del miembro inferior

El miembro inferior derecho del ser humano contiene 31 huesos en total. En la tabla 8.1 se muestran los principales elementos óseos del miembro inferior.

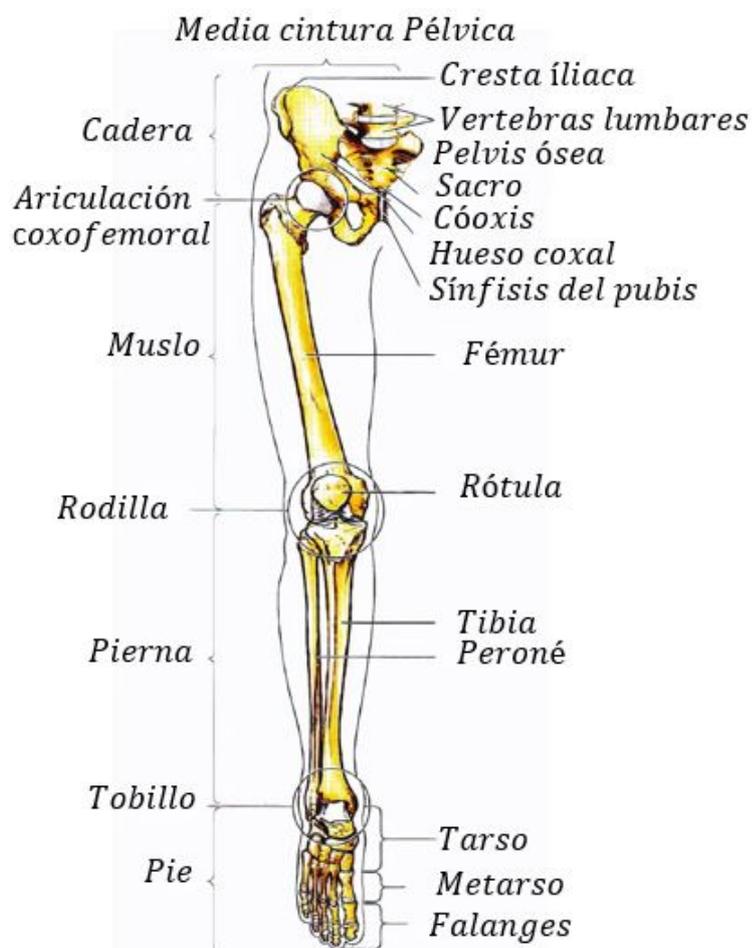


Figura 8.1: Huesos de extremidad inferior

Muslo	Pierna	Pie
<ul style="list-style-type: none"> <li>●Coxal</li> <li>●Fémur</li> <li>●Rótula o Patella</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>●Tibia</li> <li>●Peroné o "Fíbula"</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>●Astrágalo</li> <li>●Calcáneo</li> <li>●Escafoides (tarso)</li> <li>●Cuboides</li> <li>●Primer cuneiforme</li> <li>●Segundo cuneiforme</li> <li>●Tercer cuneiforme</li> <li>●Metatarsianos</li> <li>●Falanges</li> </ul>

Tabla 8.1: Principales componentes óseos del miembro inferior

### 8.1.2. Estructura muscular miembro inferior

Los músculos del cuerpo humano se pueden clasificar de dos maneras por su función y por su acciones. En la tabla 8.2 y 8.3 se muestra la descripción de cada clasificación.

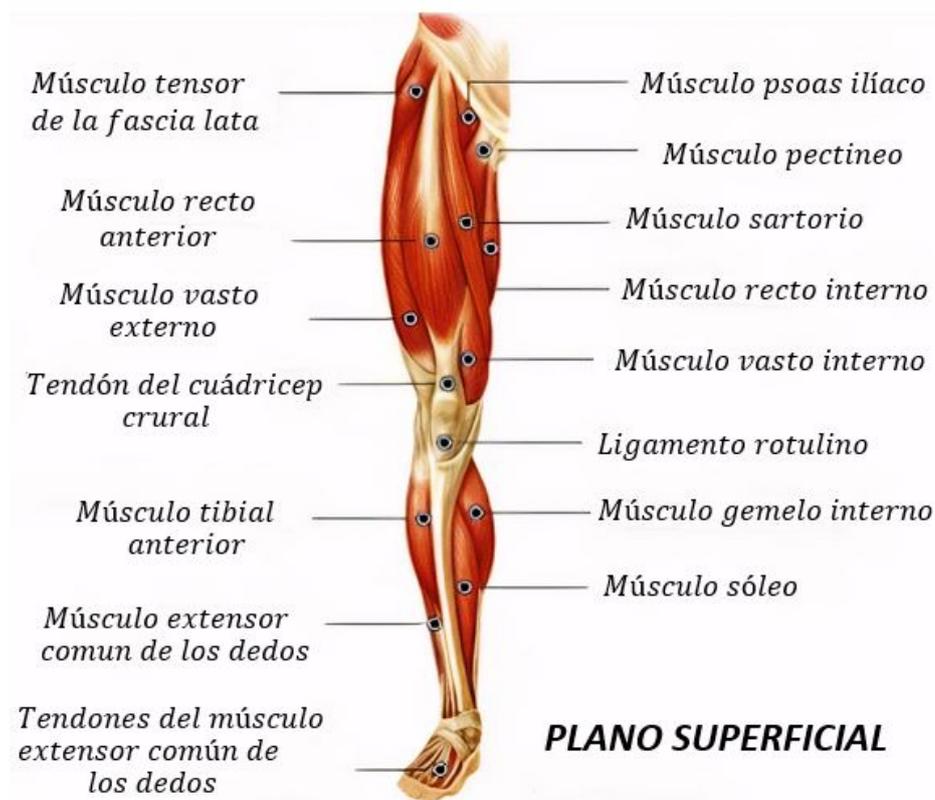


Figura 8.2: Músculos principales de extremidad inferior

<b>Agonistas</b>	<b>Antagonistas</b>	<b>Fijadoras</b>	<b>Sinérgicos</b>
Realizan un movimiento determinado.	Se oponen directamente a un movimiento determinado realizado por los músculos agonistas.	Estabilizadores de articulaciones o partes del cuerpo, para mantener la postura o posición mientras actúan los músculos agonistas.	Controlan la posición de articulaciones intermedias para que los músculos agonistas puedan ejercer su acción.

Tabla 8.2: Clasificación de los músculos por su función

<b>Músculos</b>	<b>Acción</b>
<b>Flexores</b>	Disminuye el ángulo de una articulación al acercar el apéndice al tronco.
<b>Extensores</b>	Aumenta el ángulo de una articulación al alejar el apéndice del tronco.
<b>Elevadores</b>	Elevan una parte del cuerpo
<b>Depresores</b>	Descienden una parte del cuerpo
<b>Rotadores</b>	Hacen girar un hueso sobre su eje longitudinal.
<b>Supinadores</b>	Clasificación dada a los músculos ubicados en las extremidades superiores, logran que la palma de la mano mire hacia adelante.
<b>Pronadores</b>	Ubicado en las extremidades superiores, logran que la palma de la mano mire hacia atrás.
<b>Inversores</b>	Ubicado en las extremidades inferiores, dirigen la planta del pie hacia adentro del eje medio.
<b>Eversores</b>	Ubicado en las extremidades inferiores, dirigen la planta del pie hacia afuera del eje medio.

<b>Abductores (Separadores)</b>	Mueven un apéndice lejos de la línea media o eje medio.
<b>Aductores (Aproximadores)</b>	Mueven un apéndice hacia la línea media o eje medio.

Tabla 8.3: Clasificación de los músculos por su acción

### 8.1.3. Ligamentos

Los ligamentos son estructuras resistentes prácticamente inelásticos, cuya misión es mantener unidos los huesos e impedir que se produzcan una luxación, es decir, un esfuerzo que limita la amplitud de movimientos que podrían lesionar una articulación (limita el rango del movimiento).

### 8.1.4. Articulaciones

Las articulaciones son uniones existentes entre dos o más componentes rígidos ya sean huesos o cartílagos. La clasificación más común de las articulaciones es la siguiente:

Tipo de Articulación	Movimiento	Ejemplo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Sinartrosis (Fibrosas)</li> <li>● Anfiartrosis (cartilagosas)</li> <li>● Diartrosis (sinoviales)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Sin Movimiento</li> <li>● Poco Movimiento (Amortiguación)</li> <li>● Muy móviles</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Sutures del cráneo</li> <li>● Sífnfis del Pubis</li> <li>● Cadera Rodilla</li> </ul>

Tabla 8.4: Tipos de articulaciones

Las articulaciones del tipo diartrosis poseen su propia clasificación la que está dada por el tipo de movimiento que es capaz de recrear y se clasifican como se muestra en la tabla 8.5.

Tipos	Configuración	Movimientos Posibles	Esquema
<b>Artrodia (Planar)</b>	Articulación plana o ligeramente curva.	Deslizamiento	

<b>Troclear (Bisagra)</b>	Una superficie cóncava de un hueso se articula con la convexa de otro.	Flexión-Extensión	
<b>Trocoide (Pivote)</b>	Una superficie cónica de un hueso se articula con la depresión de otro.	Rotación	
<b>Condilea (Elipsoidal)</b>	Cóndilo ovalado de un hueso que encaja en una cavidad elipsoidal de otro.	Biaxiales	
<b>Encaje recíproco (Silla de Montar)</b>	Dos superficies cóncavo convexas de ambos huesos.	Realiza la mayoría de movimientos excepto Rotación.	
<b>Enartrosis (Esferosoidal)</b>	Superficie convexa de un hueso con la cavidad de otro.	Todos los planos y las rotaciones.	

Tabla 8.5: Clasificación de las articulaciones sinoviales.

## 8.2. Anexo B- Anatomía miembro inferior

### 8.2.1. Nomenclatura en el uso de órtesis de miembro inferior

Las órtesis del miembro inferior tradicionalmente se han denominado «férulas», y como apellido o denominación específica se empleaba la función terapéutica o el nombre de su creador. Actualmente existen tendencias diferentes de nomenclatura, unas enfocadas a los segmentos corporales que abarcan (nomenclatura ISO), otras en cuanto a su función biomecánica.

Desde 1972 se desarrolló y puso en vigencia una nomenclatura estandarizada en la cual a todos los dispositivos exoesqueléticos se los denomina de la siguiente forma:

- Por la articulación que circundan.
- Abreviando el nombre de cada articulación en una letra.
- Utilizando combinaciones de símbolos para indicar el control deseado de la función designada.

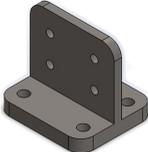
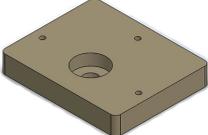
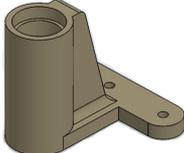
Atendiendo a la clasificación de la ISO estos dispositivos se denominan en función del segmento corporal que abarcan. En la tabla 8.6 se ejemplifica esa clasificación. [23]

Cadera (HIP)	Rodilla (KNEE)	Tobillo (ANKLE)	Pie (FOOT)	Órtesis ORTHOSIS	Sigla	Nombre
—	—	—	F	O	FO	Órtesis Pie
—	—	A	F	O	AFO	Órtesis Tobillo-Pie
—	K	A	F	O	KAFO	Órtesis Rodilla -Tobillo-Pie
H	K	A	F	O	HKAFO	Órtesis Rodilla -Tobillo-Pie-Cadera

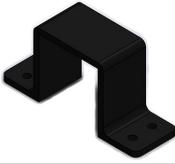
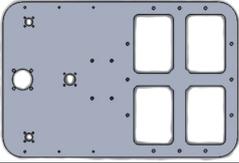
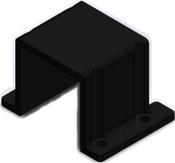
Tabla 8.6: Clasificación ISO para órtesis de miembro inferior

### 8.3. Anexo C- Piezas mecánicas utilizadas

#### 8.3.1. Piezas maquinadas subsección 1

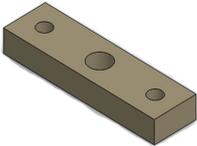
Pieza	Función	Material	Proceso de manufactura
	Sujetar el riel Z con el eje soporte Y	Aluminio 6060	Corte CNC
	Acoplamiento riel Z	Nylimyd	Corte CNC
	Soporte Motor Z	Nylimyd	Corte CNC
	Soporte Balero de 1 pulgada Cuerda ACME	Nylon	Impresión 3D
	Soporte inferior varilla de 12mm	PLA	Impresión 3D
	Soporte superior varilla de 12mm	PLA	Impresión 3D

---

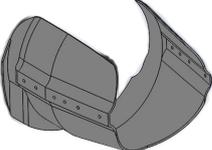
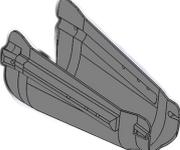
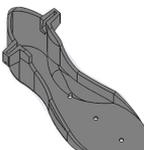
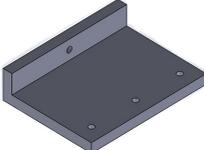
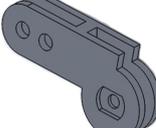
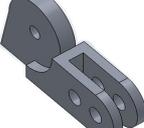
	Fija al motor z a la estructura de forma inferior	PLA	Impresión 3D
	Fija al motor z a la estructura de forma superior	PLA	Impresión 3D
	Plataforma de elevación eje Y	Aluminio 6063 T5	Corte CNC
	Buje que une a Motor Z y Tornillo sin fin	Aluminio 6063 T5	Torneado
	Barras que soportan el eje Z	Aluminio 6063 T5	Torneado
	Fija al motor Y a la estructura de la plataforma Y de forma inferior	PLA	Impresión 3D
	Porta rodamientos 8mm para el eje Y	PLA	Impresión 3D
	Porta tuerca 8mm eje Y	PLA	Impresión 3D

---

### 8.3.2. Piezas maquinadas subsección 2

Pieza	Función	Material	Proceso de manufactura
	Pieza Inferior Actuator	Nylimid	Corte CNC
	Pieza Superior Actuator	Nylimid	Corte CNC
	Piezas inferiores y superiores para acomodar resorte	Nylimid	Impresión 3D
	Pieza Central para acomodar resorte	PLA	Impresión 3D
	Pieza que une una pieza inferior y superior	PLA	Impresión 3D
	Eje final	PLA	Corte CNC

### 8.3.3. Piezas maquinadas subsección 3

Pieza	Función	Material	Proceso de manufactura
	Molde cadera	Silicona	Moldeado
	Molde Pierna	Silicona	Moldeado
	Molde espinilla	Silicona	Moldeado
	Molde pie	Silicona	Moldeado
	Acoplamiento pie Actuador	PLA	Impresión 3D
	Bisagra inferior	Acero	Moldeado
	Bisagra superior	Acero	Moldeado

### 8.3.4. Piezas mecánicas adquiridas

Pieza	Descripción	Pieza	Descripción
	Balero lineal eje Z 12mm y 10mm		Soporte para varillas de 8mm, 10mm, 12mm
	Balero lineal eje Z 8mm y 10mm		Soporte para tornillo sin fin 8mm y 1"
	Balero Rod eye 10 mm		Collarín para Tornillo ACME 1"
	Interruptor de Límite		Cople de 8mm para tornillo ACME
	Tornillo ACME 8 mm		Tornillo ACME 1"
	Barras de acero de 8mm, 10mm, 12mm		Collarín para tornillo ACME 8mm

# Bibliografía

---

- [1] "10 datos sobre la discapacidad", Organización Mundial de la Salud, Fecha de Publicación: Noviembre 2017, Fecha de Consulta: Septiembre 2019, <https://www.who.int/features/factfiles/disability/es/>
- [2] INEGI. Datos-Discapacidad, Censo Nacional 2010, Fecha de Consulta: Septiembre 2019, <https://www.inegi.org.mx/temas/discapacidad/>.
- [3] INEGI. Clasificación de tipo de Discapacidad-Histórica, Censo Nacional 2010, Fecha de Consulta: Septiembre 2019, pp.9-29, [https://www.inegi.org.mx/contenidos/clasificadoresycatalogos/doc/clasificacion\\_de\\_tipo\\_de\\_discapacidad.pdf](https://www.inegi.org.mx/contenidos/clasificadoresycatalogos/doc/clasificacion_de_tipo_de_discapacidad.pdf).
- [4] Elyatxani Acevedo Salgado, «Optimización del Mecanismo de una Órtesis para miembro inferior», Tesis Sección de Posgrado del Instituto Politécnico Nacional, Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, Diciembre 2012.
- [5] R.López, H.Aguilar, S.Salazar, R.Lozano y J.A.torres, "Modelado y Control de un Exoesqueleto para Rehabilitación de Extremidad Inferior con dos grados de Libertad", Revista Iberoamericana de Automática e informática industrial, vol.11, Numero 3, pp.304-314, 2014.
- [6] R.López, H.Aguilar, S.Salazar, R.Lozano y J.A.torres, "Modelado y Control de un Exoesqueleto para Rehabilitación de Extremidad Inferior con dos grados de Libertad", Revista Mexicana de ingeniería Biomédica, vol.38, Numero 2, pp.458-478, Mayo-Agosto 2017.
- [7] H. Aguilar-Sierra, W. Yu, S. Salazar y R. Lopez, «Design and control of hybrid actuation lower limb exoskeleton,» Advances in Mechanical Engineering, pp. 1-13, 2015.
- [8] Luna Jurado Martín Miguel, Rodríguez López Carlos Andrés, «Diseño mecánico de un exoesqueleto de cadera y rodill», Tesis Facultad de Ingeniería de la UNAM, Ingeniería en Mecatrónica, Marzo 2015.

- 
- [9] cyberneticzoo.com a history of cybernetic animals and early robots, «Posts Tagged ‘Exoskeleton’» [En línea]. Disponible: <http://cyberneticzoo.com/tag/exoskeleton/>. [Último acceso: 16 Octubre 2019]
- [10] Hocoma, «ABOUT US,» [En línea]. Disponible: <https://www.hocoma.com/usa/us/aboutus/company/>. [Último acceso: 17 Octubre 2019].
- [11] Hocoma, «Lokomat Pro: Functional Robotic Gait Therapy» [En línea]. Disponible: [https://www.hocoma.com/fileadmin/user/Dokumente/Lokomat/bro\\_LokomatPro\\_141008\\_en.pdf](https://www.hocoma.com/fileadmin/user/Dokumente/Lokomat/bro_LokomatPro_141008_en.pdf). [Último acceso: 17 Octubre 2019]
- [12] N. Neckel, W. Wisman y J. Hidler, «Limb Alignment and Kinematics Inside a Lokomat Robotic Orthosis» IEEE Xplore, pp. 2698-2701, 2006.
- [13] P. Fanning, «Eureka!,» Bionic exoskeleton could transform lives of paraplegics, 11 Octubre 2012. [En línea]. Disponible: <http://www.eurekamagazine.co.uk/design-engineering/features/technology/bionic-exoskeleton-could-transform-lives-of-paraplegics/45464/>. [Último acceso: 16 Octubre 2019].
- [14] ReWalk: More Than Walking, «About ReWalk Robotics,» [En línea]. Disponible: <http://rewalk.com/about-us/>. [Último acceso: 16 Octubre 2019].
- [15] M. Talaty, A. Esquenazi y J. E. Briceno, «Differentiating ability in users of the ReWalk powered exoskeleton: an analysis of walking kinematics» IEEE Xplore, 2013.
- [16] MOTomed, «MOTomed letto2,» [En línea]. Disponible: <http://www.motomed.com/es/modelos/motomed-letto2.html>. [Último acceso: 17 Octubre 2019]
- [17] CPMotion, «ABOUT US,» [En línea]. Disponible: <https://www.btlnet.es/productos-fisioterapia/cpmotion>. [Último acceso: 17 Octubre 2019].
- [18] A.I.Kapandji, «Fisiología Articular-Tomo II Miembro Inferior», Quinta Edición, Editorial Medica Panamericana.
- [19] Keith L. Moore, Arthur E. Dalley, «Anatomía con Orientación Clínica», Cuarta Edición, Editorial Medica Panamericana, pp. 514-528.
- [20] R. C. Miralles Marrero, Biomecánica clínica del aparato locomotor, España: MASSON, 2000.
-

- [21] M. Nordin y V. Frankel, *BIOMECÁNICA BÁSICA DEL SISTEMA MUSCULOESQUELÉTICO*, España: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA DE ESPAÑA, 2004.
- [22] Zambudio, R. *Prótesis, ortesis y ayudas técnicas*. Editorial Elsevier España, 2009. ISBN 84-458-1969-0, 9788445819692
- [23] Levy, Ana Esther y Cortés Barragán, José Manuel. *Ortopodología y aparato locomotor: ortopedia de pie y tobillo*. Elsevier España, pp.59-69, 2003. ISBN 84-458-1299-8, 9788445812990
- [24] Sociedad Valenciana de Medicina Física y Rehabilitación, «Ejercicios para pacientes intervenidos de Prótesis Total de Rodilla». Disponible: <http://svmefr.com/wp-content/uploads/2018/03/Sociedadvalencianamedicinafisicayrehabilitacionejerciciospacientes-intervenidosprotesistotalrodilla.pdf>. [Último acceso: 24 Octubre 2019]
- [25] Rafael Kelly, Víctor Santibañez. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Capítulo III: Modelo dinámico de manipuladores roboticos, pp. 76-80, 2003.
- [26] W.T. Dempster, "Space requirements of the seated operator". WADC-55-159, AD-087-892. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1955.
- [27] C.E. Clauser, J.T. Mconville, J.W. Young, "Weight, Volume and center of mass of segments of the human body". AMRL-TR-69-70. Aerospace Medical Research Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1969.
- [28] R.J. Drillis, R. Contini, "Body segment parameters". BP174-945, Tech. Rep. No 11666.03, School of engineering and science, New York University, New York, 1966
- [29] El Universal, "La cámara nacional de la industria del vestido da a conocer la estatura y peso promedio para hombres y mujeres", Febrero 2012, Fecha Consulta: Abril 2020, <https://archivo.eluniversal.com.mx/notas/828544>.
- [30] David H. Myszka "Maquinas y Mecanismos". Cuarta edición Pearson, pp.316-330, 2012. ISBN 978-607-32-1215-1.
- [31] G.A. Pratt, M.M. Williamson, Series elastic actuators, in: Proc. 1995 IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. Hum. Robot Interact. Coop. Robot., IEEE Comput. Soc. Press, 1995: pp. 399–406. doi:10.1109/IROS.1995.525827
- [32] J. Pratt, B. Krupp, C. Morse, Series elastic actuators for high fidelity force control, *Ind. Robot An Int. J.* 29 (2002) 234–241. doi:10.1108/01439910210425522
-