



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco
Departamento de Control Automático

Diseño y construcción de un prototipo de planeador sumergible
y el control PD del ángulo de cabeceo.

Tesis que presenta
Carlos Honorio de la Cruz Alemán

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

en la Especialidad de
Control Automático

Director de Tesis
Dr. Jorge Antonio Torres Muñoz

México, D.F.

Noviembre de 2015

Agradecimientos

A las personas que con su afecto, carácter y cercanía me han obsequiado las experiencias que dan materia y espíritu a mi existencia; mis padres, mis hermanas y mi pareja.

A mi director de tesis por la claridad de su visión, la calidez de su confianza y la eficacia de sus consejos.

A mis compañeros del laboratorio UMI-LAFMIA por su amabilidad y animo de colaboración.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, en especial al departamento de Control Automático, por proporcionarme las condiciones necesarias para el desarrollo del presente trabajo.

A la Universidad del Valle de México por la coherencia hacia su lema institucional.

A la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico que me otorgo.

Resumen

Las características Intrínsecas de los vehículos sumergibles autónomos, los hacen un tema de gran interés para el área de Control Automático. El presente trabajo presenta el proceso de diseño y construcción de un vehículo sumergible autónomo de tipo planeador. Se exponen consideraciones básicas para la manufactura de un equipo asequible y útil para la experimentación con algoritmos de control. Aborda también el tema de modelado y simulación con base en el modelo de cuerpo rígido propuesto por Fossen. Se hace un análisis del desempeño del prototipo construido en el que se ha implementado un control PD en el ángulo de cabeceo. En el apartado experimental se muestra el proceso de estimación de parámetros y su impacto en el desempeño del algoritmo de control.

Abstract

Intrinsic properties of autonomous underwater vehicles, make them an area of interest for Automatic Control research. This thesis presents design and construction of a glider autonomous underwater vehicle.

Basic considerations for low cost manufacturing of a prototype useful for control algorithm experimentation are presented . This work approaches a modeling and simulation method based on Fossen's Rigid Body Model. An analysis of the prototype performance with a PD control for pitch control is presented. In the experimental section it is shown the approach taken for parameter estimation and the impact it has on the control algorithm.

Índice

1. Introducción	1
1.1. AUVs	1
1.2. Historia del desarrollo de AUVs	1
1.3. Planeadores AUV	2
1.3.1. Slocum Glider	3
1.4. Spray Glider	3
1.5. Seaglider	5
1.6. Motivación de Estudio	5
1.6.1. Objetivo General	6
1.6.2. Objetivos específicos	6
2. Modelado de AUVs	7
2.1. Cinemática	8
2.1.1. Marcos de referencia	8
2.1.2. transformaciones entre $\{n\}$ y $\{b\}$	10
2.2. Dinámica de cuerpo rígido	14
2.2.1. Ecuaciones de movimiento de Newton-Euler, con respecto a CG	14
2.2.2. Ecuaciones de movimiento de Newton-Euler con respecto a CO	18
2.3. Fuerzas de restauración	22
2.4. Matriz de Masa Agregada y de Coriolis, debido a la rotación de $\{b\}$ con respecto a $\{n\}$	24
2.5. Modelo vectorial de Fossen para vehículos marinos	25
3. Control	27
3.1. Ley de control Proporcional derivativa.	28
3.1.1. Análisis de estabilidad	29

- 4. Simulación** **31**
- 4.1. Estimación de parámetros 31
- 4.2. Implementacion se la simulación en Simulink de Matlab 33
- 4.2.1. Control en el ángulo de cabeceo 34
- 4.2.2. Control en D 38
- 4.2.3. Perturbaciones y dinámicas no modeladas. 42
- 5. Construcción del prototipo.** **45**
- 5.1. Características principales del diseño 45
- 5.2. Componentes 48
- 5.2.1. Estructura 48
- 5.2.2. Actuadores 52
- 5.3. Electrónica y sensores. 55
- 6. Resultados experimentales.** **60**
- 7. Conclusión** **68**
- 7.1. Conclusión 68
- 7.2. Trabajo Futuro 68

1. Introducción

Vehículo sumergible "Vehículo de tamaño pequeño capaz de propulsarse a sí mismo debajo de la superficie, así como en la superficie del agua. Incluye vehículos sumergibles no tripulados, vehículos de operación remota, vehículos sumergibles autónomos (AUV por sus siglas en ingles) y vehículos robóticos sumergibles. Los vehículos sumergibles son empleados con fines comerciales y militares." [1]

Por simplicidad, en lo sucesivo AUV se empleara para designar a un Vehículo Sumergible Autónomo y AUVs para referirse al prural del mismo. Por otra parte se utilizarán los términos cabeceo para referirse al ángulo de Euler correspondiente a pitch (θ), alabeo para roll (ϕ) y guiñada para yaw (ψ).

1.1. AUVs

Un AUV es un vehículo no tripulado que opera sin intervención humana, tiene la capacidad de propulsarse a sí mismo y cuenta con una computadora a bordo que controla sus movimientos, tomando decisiones en base a la información recabada por los sensores incorporados con el objetivo de llevar a cabo una misión predefinida y regresar al punto de extracción para la descarga y procesamiento de la información recopilada. Los retos relacionados con la operación autónoma en ambientes impredecibles como el océano son fuente de numerosas líneas de investigación en diversas áreas de conocimiento.

Los AUVs han revolucionado el proceso de recopilación de información oceanográfica, algunos de sus atractivos son: un rango de operación en profundidad que supera al de los vehículos tele operados, son inmunes al mal clima, una construcción modular hace posible acondicionar el vehículo para una misión determinada. En el área de investigación científica los AUVs son una herramienta eficiente y asequible para tareas como la creación de mapas del suelo marino, monitoreo ambiental, exploración geológica y arqueológica, entre otras. En el sector comercial, los AUVs han sido utilizados por la industria del petróleo para la inspección y exploración del suelo marino, así como el seguimiento de tuberías . En el área militar se han implementado dispositivos para la detección de minas.

1.2. Historia del desarrollo de AUVs

El inicio del desarrollo de los AUVs, se remonta a mediados de los años 50, cuando la necesidad de tener una mejor comprensión de la dinámica del océano y la consecuente utilidad de muestrear información a diferentes profundidades, impulso de desarrollo de los primeros sistemas para el rastreo de las corrientes oceánicas, siendo

los pioneros en esta tarea, Henry Stommel en Estados Unidos y John Swallow en el Reino Unido. El flotador Swallow, consistía en un dispositivo de flotabilidad neutra desplegado a una profundidad preestablecida, el flotador era rastreado por un bote de seguimiento.

Más tarde, a mediados de los años 60, se construyeron innovadores flotadores como el SOFAR y el RAFOS, que aprovechaban la capa de alcance y fijación de sonido (SOFAR), descubierta por Maurice Ewing en 1943, para enviar ondas sonoras a través de miles de kilómetros en dirección horizontal, además el dispositivo RAFOS fue el primero en utilizar tecnología GPS para su localización. En la década de los años 80, se crearon sistemas que podían controlar su profundidad por medio de una vejiga externa. Después de múltiples mejoras en capacidad de sensado, comunicación y alcance, materializadas en vehículos como ALACE y PALACE, estos flotadores comenzaron a utilizarse extensivamente en oceanografía, por ejemplo, en el Experimento de Circulación Oceánica Mundial (WOCE).

A finales de la década de 1980, la sofisticación de la tecnología en flotadores dio origen a los primeros prototipos de AUV; estos tuvieron limitaciones importantes generadas por la aún precaria capacidad de procesamiento, de almacenamiento de energía y de sensado disponible. A pesar de las dificultades, se construyeron dispositivos como el Odissey II en el MIT, un prototipo que realizó misiones de despliegue y retorno bajo el hielo en el mar de Beaufort, el Odissey II dio nacimiento a la empresa Bluefin Robotics que es en la actualidad uno de los líderes en tecnología AUV a nivel mundial. Del mismo modo se dio un impulso importante a los planeadores, un tipo específico de AUV que transforma parte del movimiento vertical del vehículo en desplazamiento horizontal con ayuda de alas con un coeficiente de planeo determinado. Se crearon los tres programas que actualmente son un punto de referencia para la construcción de planeadores, el Slocum en Webb Research Corporation (WRC), el Seaglider en la universidad de Washington y el Spray en Scripps Institution of Oceanography (SIO).

Durante los primeros años del siglo XXI, con los impresionantes avances en la capacidad de procesamiento de las computadoras y en la tecnología de baterías, los AUVs se posicionaron como una herramienta asequible para las áreas relacionadas con el muestreo oceanográfico. El diseño de los AUVs requiere un complejo equilibrio regido por las necesidades y características de la misión que se realizará y las limitaciones tecnológicas, de manufactura y logística operacional. En la actualidad existe la tendencia a la construcción modular, que permite preparar en poco tiempo un vehículo con capacidades específicas para realizar una misión definida.

1.3. Planeadores AUV

Los planeadores son un tipo especial de AUV que posee ventajas notables como un largo periodo de autonomía, bajos niveles de ruido y una excelente relación entre consumo de energía y alcance. Un planeador tiene la capacidad de cambiar periódicamente su flotabilidad y por medio de los perfiles de sus alas puede generar un

desplazamiento horizontal. Las características inherentes de esta clase de dispositivos puede resumirse en una propulsión generada por cambios de flotabilidad, trayectorias en forma de dientes de sierra, largo tiempo de operación y baja velocidad. Existen tres modelos de referencia; el Sea Glider, el Spray y el Slocum.

A pesar de las ventajas descritas, este tipo de dispositivos tienen debilidades, como una precaria maniobrabilidad y la incapacidad de operar a una profundidad fija. Combinando las ventajas de un planeador y un AUV con sistema de propulsión externo (propela), un sistema híbrido puede desplazarse grandes distancias con un bajo consumo de energía mediante la propulsión generada por cambios en su flotabilidad, y al ser requerido, realizar maniobras con mayor exactitud o mantener un nivel de operación, con ayuda del propulsor externo. [3]

Algunas características comunes de los diseños actuales son un tamaño relativamente pequeño (alrededor de 2m de largo), alas y cola fija; el control de alabeo, cabeceo y guiñada recae en el desplazamiento de masas ubicadas en el interior del vehículo; emplean sistemas eléctricos para el cambio de flotabilidad (bombas de aceite o tanques de lastre); están diseñados para un periodo extenso de operación para sensado oceanográfico, que va de pocas semanas a varios meses, con un alcance estimado en miles de kilómetros (6000km para el Sea Glider). La velocidad de desplazamiento de los modelos actuales oscila alrededor de los 0.25 m/s.

1.3.1. Slocum Glider

Es un planeador de 52 Kg de peso y 1.8m de largo, con un cuerpo principal de 1.5m y 24 cm de diámetro y una cola de 0.3m, puede sumergirse a profundidades de hasta 1000 m a una velocidad de aproximadamente 0.5m/s, el Slocum emplea un tanque de lastre de 500 cc ubicado inmediatamente detrás de la nariz. El ángulo de cabeceo es controlado por el movimiento del banco de baterías (alcalinas), el ángulo de alabeo es calibrado de manera estática, las secciones de las alas son planas, cuenta con una cola vertical y un timón (rudder), la cola también contiene una antena para GPS y comunicación (radio frecuencia, comunicación satelital Iridium, transmisor Argos y Módem Acústico). Tiene un tiempo de autonomía de hasta 15 días o 1,500 km. Su sistema de navegación se compone principalmente por un sistema GPS, compás magnético, altímetro y un algoritmo de navegación por estima (dead reckoning).

1.4. Spray Glider

Desarrollado en SIO, posee dos metros de largo y una masa de 50 kg, tiene un alcance de miles de kilómetros, dependiendo de la velocidad, sensado, comunicaciones y otras tareas que requieren energía. Emplea baterías de litio, que tienen mayor densidad energética que las baterías alcalinas. Su estructura está compuesta por una

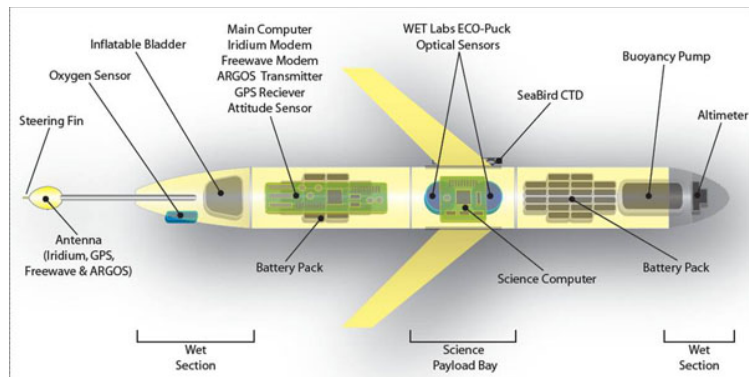


Figura 1.1: Esquema básico del Glider Slocum. AUVAC., Slocum Design. 2015. Web. 8 Nov. 2015.

cámara hermética cilíndrica, dos alas y una cola vertical, en el extremo posterior se encuentra una vejiga externa que se llena con aceite para generar cambios en su flotabilidad. Este dispositivo cuenta con dos masas móviles internas, una para regular el ángulo de cabeceo, capaz de desplazar el centro de gravedad del vehículo 17 cm, y la otra para el control en alabeo. Para control en cabeceo, Spray emplea un control proporcional con una ganancia pequeña. La antena del Spray se encuentra dentro de una de las alas, el vehículo rota hacia un costado para extender la antena fuera del agua y establecer comunicación, el centro aerodinámico de las alas se encuentra 10 cm detrás del centro de gravedad y de flotabilidad para una mayor estabilidad. [2]

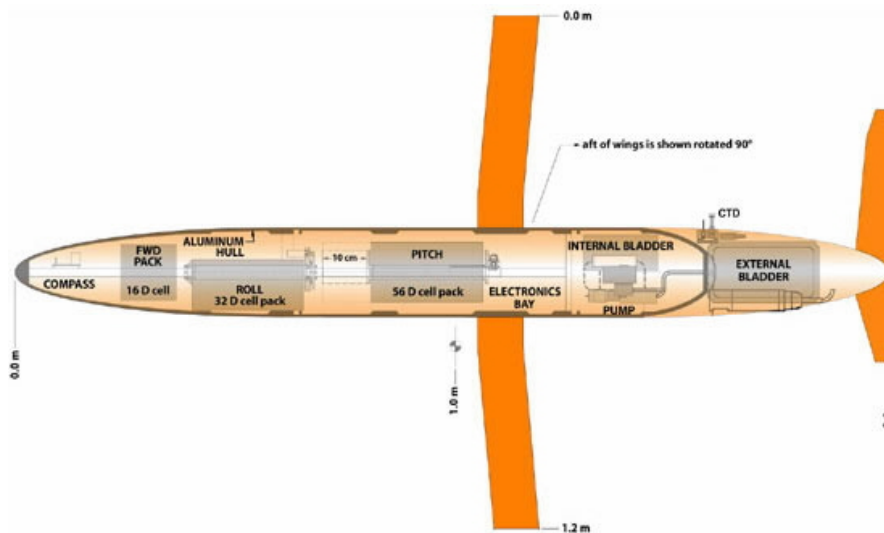


Figura 1.2: Estructura básica del Spray. WHOI., Spray Glider. 2015. Web. 8 Nov. 2015.

1.5. Seaglider

Construido en la Universidad de Washington, esta diseñado para largas misiones de muestreo océanográfico. Tiene un alcance de alrededor de 6000 km y puede descender hasta una profundidad de 1000 m. Tiene un peso de 52 kg y un lardo de 1.8 metros, por 30 cm de diámetro. Una característica única de este glider, es que su casco esta hecho para tener la misma compresibilidad del agua de mar, reduciendo el requerimiento de bombeo hasta en un 50 por ciento La forma de la coraza externa esta diseñada para reducir el arrastre, generando un gradiente de presión favorable en el extremo posterior del vehículo. cabeceo y alabeo son controlados por el movimiento del banco de baterías al interior del vehículo. Seaplaneadoremplea un control proporcional para la regulación de cabeceo y un control proporcional integral derivativo para guiñada. Las corrientes externas son estimadas por medio de un filtro de Kalman y para conservar energía, los sistemas embarcados son apagados durante planeos estables, en este modo, los controladores de cabeceo y guiñada son encendidos cada 500 segundos.



Figura 1.3: Seaglider. SFC,. Seaglider. 2015. Web. 8 Nov. 2015.

1.6. Motivación de Estudio

Como ha sido mencionado con anterioridad, el desafío tecnológico que representa la exploración subacuática por medio de vehículos sumergibles autónomos, genera una amplia variedad de temas a investigar en diversas áreas del conocimiento, el Control Automático es una de ellas. Desde una perspectiva de control, los retos provienen de muchas fuentes, entre las que podemos mencionar que los AUVs poseen una dinámica no lineal, son sistemas subactuados difíciles de caracterizar, que operan en un medio con perturbaciones difíciles de medir o estimar, como corrientes, coeficientes hidrodinámicos, cambios de densidad o compresibilidad a diferentes profundidades. Por esta razón, el desarrollo de un prototipo AUV no solo es compatible con la línea de trabajo del departamento de Control Automático, sino que además representa la oportunidad de contar con una plataforma

para analizar, discutir y proponer soluciones desde el enfoque de Control Automático, que contribuyan a mitigar las limitaciones tecnológicas y de manufactura, en un problema de relevancia internacional.

1.6.1. Objetivo General

La presente Tesis, contempla el diseño y construcción de un AUV de tipo planeador Híbrido, así como el diseño de una ley de control que permita regular el ángulo de cabeceo. Es necesario mencionar que la implementación de alas y cola se ha excluido temporalmente del desarrollo. Por otra parte se ha prestado especial atención en que el prototipo tenga principios de operación y una dinámica similar a los dispositivos disponibles de forma comercial, lo que le permite brindar las características necesarias para la consecución del objetivo descrito en el párrafo anterior.

1.6.2. Objetivos específicos

Diseño y construcción de un compartimento hermético, que soporte la profundidad necesaria para las pruebas experimentales. Este compartimento debe tener espacio suficiente para la introducción de actuadores y electrónica de potencia y de procesamiento. Por otra parte, es necesario seleccionar materiales que generen la mínima interferencia con sensores de alta sensibilidad.

Diseño y construcción de una estructura que de soporte y rigidez al compartimento hermético, además de proporcionar áreas para la inclusión de sensores y actuadores externos.

Implementación de un sistema de procesamiento apto para la experimentación, que permita al usuario desplegar de forma rápida y eficaz algoritmos de control, recuperar información experimental y analizarla.

Selección de un modelo matemático que equilibre una buena descripción con una razonable facilidad de análisis.

Diseño de una ley de control que sea capaz de regular el ángulo de cabeceo del vehículo.

Ejecución de una simulación numérica del modelo matemático y el control propuesto con el objetivo de obtener información que sea útil para comparación y análisis durante la tarea experimental.

Llevar a cabo la implementación del control propuesto en el vehículo construido, corregir los errores en estimación de parámetros, analizar y presentar la información recopilada durante los experimentos.

2. Modelado de AUVs

Para poder explotar las propiedades físicas de los modelos, las ecuaciones de movimiento son representadas en forma vectorial. Aprovechar las propiedades físicas de los sistemas, frecuentemente reduce el numero de coeficientes necesarios para el control. Esta es la principal motivación para desarrollar una representación vectorial de las ecuaciones de movimiento. En Fossen(1991), el modelo para robots de Craig(1989) y Sciavicco y Siciliano (1996).

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \tau \quad (1)$$

Fue utilizado para derivar un modelo compacto para vehículos marinos con 6 grados de libertad, escrito en forma vectorial. En el modelo de robots, q , es el vector de los ángulos en las articulaciones, τ es el par, mientras M y C denotan las matrices de inercia y coriolis del sistema. Cantidades similares pueden ser identificadas para vehículos marinos y aéreos. Se considera el siguiente modelo. [1]

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J_{\Theta}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} \quad (2)$$

$$M\dot{\mathbf{v}} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} + D(\mathbf{v})\mathbf{v} + g(\boldsymbol{\eta}) = \tau + \tau_{wave} + \tau_{wind} \quad (3)$$

en donde

$$\boldsymbol{\eta} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T \quad (5)$$

Son vectores de velocidad y posición/ángulos de Euler, respectivamente. De manera similar τ es un vector de fuerzas y momentos, o fuerzas generalizadas en 6 grados de libertad. Las matrices M , $C(\mathbf{v})$ y $D(\mathbf{v})$ denotan, inercia, Coriolis y Amortiguamiento, respectivamente y $g(\boldsymbol{\eta})$ es el vector generalizado de fuerzas, de flotabilidad y gravitacional.

A continuación se presenta el análisis (disponible en [1]) que sustenta este modelo.

2.1. Cinemática

2.1.1. Marcos de referencia

ECI : Marco Inercial Centrado en la Tierra $\{i\} = (x_i, y_i, z_i)$, ECI por sus siglas en ingles, es

un marco de referencia no acelerado, en el que son validas las leyes de Newton. El origen de $\{i\}$ se encuentra en el centro o_i de la Tierra.

ECEF: Marco de referencia centrado y fijo en la Tierra $\{e\} = (x_e, y_e, z_e)$ tiene su origen o_e fijo en el centro de la Tierra, pero sus ejes rotan en relación al marco inercial Eci, que esta fijo en el espacio. La velocidad angular de ECEF es $w_e = 7,2921 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$. Para vehículos marinos que se desplazan a baja velocidad, la rotación de la Tierra puede ser despreciada y por lo tanto $\{e\}$ puede considerarse como inercial.

NED: Sistema de coordenadas Norte-Este-Abajo, NED por sus siglas en ingles, $\{n\} = (x_n, y_n, z_n)$ con origen o_n . Usualmente definido como el plano tangente a la superficie de la tierra, se mueve con el vehículo, pero sus ejes apuntan en direcciones distintas a los ejes fijos en el cuerpo del vehículo. Para este sistema el eje x apunta hacia el norte, el eje y apunta hacia el este y la dirección del z es hacia abajo, normal a la superficie de la Tierra. La posición de $\{n\}$ con respecto a $\{e\}$ esta determinada por dos ángulos, l y μ que denotan longitud y latitud, respectivamente.

Para vehículos marinos operando en un área local, de longitud y latitud aproximadamente constante, un plano fijo a la tierra y tangente a la superficie es utilizado para navegación, a este plano, se le denotara por simplicidad $\{n\}$. Para la navegación llevada a cabo en este plano, se puede considerar que $\{n\}$ es inercial y en el son validas las leyes de Newton . Nótese que para la operación de un AUV, z_n denotara la profundidad.

BODY: Marco de referencia fijo en el cuerpo $\{b\} = (x_b, y_b, z_b)$ con origen o_b es un sistema coordenado de referencia, es móvil y se encuentra fijo al vehículo. La posición y orientacion del vehículo se describe en relación al marco inercial de referencia(aproximado por $\{n\}$) . Por otra parte, las velocidades angulares y lineales del vehículo, se expresan en $\{b\}$. Para el modelado de este AUV, se elige el origen de $\{b\}$, o_b , para que coincida con el centro de flotabilidad (CB) del vehículo y x_b, y_b, z_b se elegirán para que coincidan con los principales ejes de inercia de modo que x_b sera el eje longitudinal, y_b sera el eje transversal y z_b sera el eje normal. Otro punto de referencia en el marco $\{b\}$ es el centro de gravedad (CG) .

Se consideran también la siguiente notación.

$\mathbf{v}_{b/n}^e$ = velocidad lineal del punto o_b con respecto a $\{n\}$ expresada en $\{e\}$

$\omega_{n/e}^b$ = velocidad angular de $\{n\}$ con respecto a $\{e\}$ expresada en $\{b\}$

f_b^n = fuerza con línea de acción a través del punto o_b expresada en $\{n\}$

m_b^n = momento alrededor del punto o_b expresado en $\{n\}$

Θ_{nb} = ángulos de Euler entre $\{n\}$ y $\{b\}$

Con la notación anterior, y la siguiente tabla.

DOF	Fuerzas y momentos	Velocidades lineales y angulares	Posiciones y Angulos de Euler
movimiento en la dirección x (surge)	X	u	x
movimiento en la dirección y (sway)	Y	v	y
movimiento en la dirección z (heave)	Z	w	z
rotación alrededor del eje x (alabeo)	K	p	ϕ
rotación alrededor del eje y (cabeceo)	M	q	θ
rotación alrededor del eje z (guiñada)	N	r	ψ

Cuadro 1: Notación de SNAME para vehículos marinos

Podemos expresar la siguiente notación vectorial.

$$\text{Posición en ECEF} \quad p_{b/e}^e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{Longitud y latitud} \quad \Theta_{en} = \begin{bmatrix} l \\ \mu \end{bmatrix} \in S^2$$

$$\text{Posición en NED} \quad p_{b/n}^n = \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \tilde{\text{Ángulos de Euler}} \quad \Theta_{nb} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \in S^3$$

$$\text{Velocidad lineal en } \{b\} \quad \mathbf{v}_{b/n}^b = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{Velocidad angular en } \{b\} \quad \omega_{b/n}^b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Fuerza expresada en } \{b\} \quad f_b^b = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{Momento expresado en } \{b\} \quad m_b^b = \begin{bmatrix} l \\ \mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

en donde \mathbb{R}^3 es el espacio Euclidiano de dimensión tres y S^2 denota un toroide de dimensión 2. S^3 denota una esfera.

2.1.2. transformaciones entre $\{n\}$ y $\{b\}$

La matriz de rotación R entre dos marcos a y b , se denota como R_b^a y es un elemento de $SO(3)$, que es el grupo especial ortogonal de orden 3:

$$SO(3) = \{R | R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, R \text{ es ortogonal y } \det R = 1\} \quad (6)$$

El grupo $SO(3)$ es un subconjunto de todas las matrices ortogonales de orden 3, esto es $SO(3) \subset O(3)$, en donde $O(3)$ se define:

$$O(3) = \{R | R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, RR^T = R^T R = I\} \quad (7)$$

Por lo que.

$$\textit{Propiedad 1} \quad RR^T = R^T R = I, \quad \det R = 1$$

Esto implica que R es ortogonal. Consecuentemente, la matriz inversa de rotación es dada por $R^{-1} = R^T$. Por el teorema de rotación de Euler, sea $\mathbf{v}_{b/n}^b$ un vector fijo en $\{b\}$ y $\mathbf{v}_{b/n}^n$ un vector fijo en $\{n\}$. El vector $\mathbf{v}_{b/n}^n$ puede ser expresado en términos del vector $\mathbf{v}_{b/n}^b$, sea el vector unitario $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$, $\|\lambda\| = 1$, paralelo al eje de rotación y sea β el ángulo que $\{n\}$ es rotado. Esta rotación se describe por.

$$\mathbf{v}_{b/n}^n = R_b^n \mathbf{v}_{b/n}^b, \quad R_b^n := R_{\lambda, \beta} \quad (8)$$

Aquí, $R_{\lambda, \beta}$ es la rotación correspondiente a una rotación β alrededor del eje λ :

$$R_{\lambda, \beta} = I_{3 \times 3} + \sin(\beta)S(\lambda) + [1 - \cos(\beta)]S^2(\lambda) \quad (9)$$

En donde $I_{3 \times 3}$ es la matriz identidad y $S(\lambda)$ es la matriz antisimétrica

$$S(\lambda) = -S^T(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Por lo que, $S^2(\lambda) = \lambda\lambda^T - I$, ya que λ es un vector unitario. Expandiendo (9) se obtienen las siguientes expresiones para cada elemento de la matriz.

$$\begin{aligned} R_{11} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_1^2 + \cos(\beta) \\ R_{22} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_2^2 + \cos(\beta) \\ R_{33} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_3^2 + \cos(\beta) \\ R_{12} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3 \sin(\beta) \\ R_{21} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3 \sin(\beta) \\ R_{23} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 \sin(\beta) \\ R_{32} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_3\lambda_2 + \lambda_1 \sin(\beta) \\ R_{31} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_3\lambda_1 - \lambda_2 \sin(\beta) \\ R_{13} &= [1 - \cos(\beta)]\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2 \sin(\beta) \end{aligned} \quad (11)$$

Transformación de ángulos de Euler Los ángulos de Euler, alabeo (ϕ), cabeceo (θ) y guiñada (ψ) pueden

ser empleados para descomponer el vector de velocidad $\mathbf{v}_{b/n}^b$ fijo en $\{b\}$, al marco de referencia $\{n\}$. Sea $R_b^n(\Theta_{nb}) : S^3 \rightarrow SO(3)$ la matriz de rotación con argumento $\Theta_{nb} = [\phi, \theta, \psi]^T$. Entonces,

$$\mathbf{v}_{b/n}^n = R_b^n(\Theta_{nb})\mathbf{v}_{b/n}^b \quad (12)$$

Las matrices de rotación alrededor de los ejes principales, pueden ser obtenidas fijando $\lambda = [1, 0, 0]^T$,

$\lambda = [0, 1, 0]^T$, $\lambda = [0, 0, 1]^T$, correspondiendo a los ejes x,y,z, además $\beta = \phi$, $\beta = \theta$ y $\beta = \psi$ respectivamente, en la formula dada por (9). Como resultado, se obtiene lo siguiente.

$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix}, \quad R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, \quad R_{z\psi} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

En donde $s = \sin(\cdot)$ y $c = \cos(\cdot)$.

Transformación de la Velocidad Lineal

Por convención, se describe $R_b^n(\Theta_{nb})$ mediante las tres rotaciones principales, con respecto a los ejes z , y y x . En navegación y sistemas de orientación es común utilizar esta convención, zyx de $\{n\}$ a $\{b\}$ dada en términos de los ángulos de Euler ϕ , θ , ψ . Esta matriz se denota $R_b^n(\Theta_{nb}) = R_b^n(\Theta_{nb})^T$. El mismo resultado es obtenido transformando un vector de $\{b\}$ a $\{n\}$, que invertir el orden de la transformación. La equivalencia matemática de esta secuencia de rotación es.

$$R_b^n(\Theta_{nb}) := R_{z,\psi} R_{y,\theta} R_{x,\phi} \quad (14)$$

y la transformación inversa se escribe.

$$R_b^n(\Theta_{nb})^{-1} := R_{x,\phi}^T R_{y,\theta}^T R_{z,\psi}^T \quad (15)$$

Esto se ha realizado empleando el resultado de la propiedad 1.

Sea $x_3y_3z_3$ el sistema coordenado obtenido por la traslación del sistema coordenado $\{n\}$ ($x_ny_nz_n$), paralelo a si mismo, hasta que su origen coincida con el origen de $\{b\}$. El sistema coordenado $x_3y_3z_3$ es rotado un angulo guiñada (ψ) alrededor del eje z_3 . Esto da como resultado el sistema coordenado $x_2y_2z_2$. Ahora, el sistema $x_2y_2z_2$ es rotado un angulo cabeceo (θ) alrededor del eje y_2 . Esto produce al sistema coordenado $x_1y_1z_1$. Finalmente el sistema coordenado $x_1y_1z_1$ es rotado un angulo alabeo (ϕ) alrededor del eje x_1 . El resultado, es el sistema $\{b\}$ $x_by_bz_b$. Para mayor detalle, ver figura 2.4 de [1]

Expandiendo (2.16) se obtiene.

$$R_b^n(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\theta \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para ángulos pequeños $\delta\phi$, $\delta\theta$, y $\delta\psi$, la expresión anterior, se simplifica a.

$$R_b^n(\delta\Theta_{nb} \approx I_{3 \times 3} + S(\delta\Theta_{nb})) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta\psi & \theta \\ \delta\psi & 1 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

El vector de velocidad fijo en $\{b\}$ $\mathbf{v}_{b/n}^b$ puede ser expresado en $\{n\}$ mediante la siguiente expresión.

$$\dot{p}_{b/n}^n = R_b^n(\Theta_{nb}) \quad (18)$$

en donde $\dot{p}_{b/n}^n$ es el vector de velocidad en $\{n\}$. La expansión del termino anterior da como resultado.

$$\dot{N} = u \cos(\psi) \cos(\theta) + v[\cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\psi) \cos(\phi)] + w[\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) \sin(\theta)] \quad (19)$$

$$\dot{E} = u \sin(\psi) \cos(\theta) + v[\cos(\psi) \cos(\phi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi)] + w[\sin(\theta) \sin(\psi) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi)] \quad (20)$$

$$\dot{D} = -u \sin(\theta) + v \cos(\theta) \sin(\phi) + w \cos(\theta) \cos(\phi) \quad (21)$$

La transformación inversa de velocidad, se define:

$$\mathbf{v}_{b/n}^b = R_b^n(\Theta_{nb})^{-1} \dot{p}_{b/n}^n = R_b^n(\Theta_{nb})^T \dot{p}_{b/n}^n \quad (22)$$

Transformación de la Velocidad Angular

El vector de velocidad angular fijo en $\{b\}$, $\omega_{b/n}^b = [p, q, r]^T$ y el vector de velocidad de los ángulos de Euler $\dot{\Theta} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]$, están relacionados por la matriz de transformación $T_{\Theta}(\Theta_{nb})$ de acuerdo a.

$$\dot{\Theta}_{nb} = T_{\Theta}(\Theta_{nb}) \omega_{b/n}^b \quad (23)$$

La matriz de transformación $T_{\Theta}(\Theta_{nb})$ puede reescribirse de la siguiente forma.

$$\omega_{b/n}^b = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi}^T R_{y,\theta}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = T_{\Theta}^{-1}(\Theta_{nb}) \dot{\Theta}_{nb} \quad (24)$$

La expansión de (24) da como resultado.

$$T_{\Theta}^{-1}(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \implies T_{\Theta}(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

En donde $s = \sin(\cdot)$, $c = \cos(\cdot)$ y $t = \tan(\cdot)$. De la expansión de (23) se obtiene.

$$\dot{\phi} = p + q \sin(\phi) \tan(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta) \quad (26)$$

$$\dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \sin(\phi) \quad (27)$$

$$\dot{\psi} = q \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} + r \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}, \quad \theta \neq \mp 90^\circ \quad (28)$$

Para ángulos pequeños $\delta\phi$, $\delta\theta$ y $\delta\psi$, la matriz de transformación $T_{\Theta}(\delta\Theta_{nb}) \approx$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta\theta \\ 0 & 1 & -\delta\phi \\ 0 & \delta\phi & 1 \end{bmatrix}$$

Resumiendo los resultados de esta sección. las ecuaciones cinemáticas en 6 grados de libertad, pueden expresarse en forma vectorial de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= J_{\Theta}(\eta) \mathbf{v} \\ &\Downarrow \\ \begin{bmatrix} \dot{p}_{b/n}^n \\ \dot{\Theta}_{nb} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_b^n(\Theta_{nb}) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & T_{\Theta}(\Theta_{nb}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{b/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

en donde $\eta \in \mathbb{R}^3 \times S^3$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^6$.

2.2. Dinámica de cuerpo rígido

2.2.1. Ecuaciones de movimiento de Newton-Euler, con respecto a CG

Esta formulación se basa en la segunda ley de Newton, que relaciona masa, aceleración y fuerza de la siguiente forma.

$$m \dot{\vec{v}}_{g/i} = \vec{f}_g \quad (30)$$

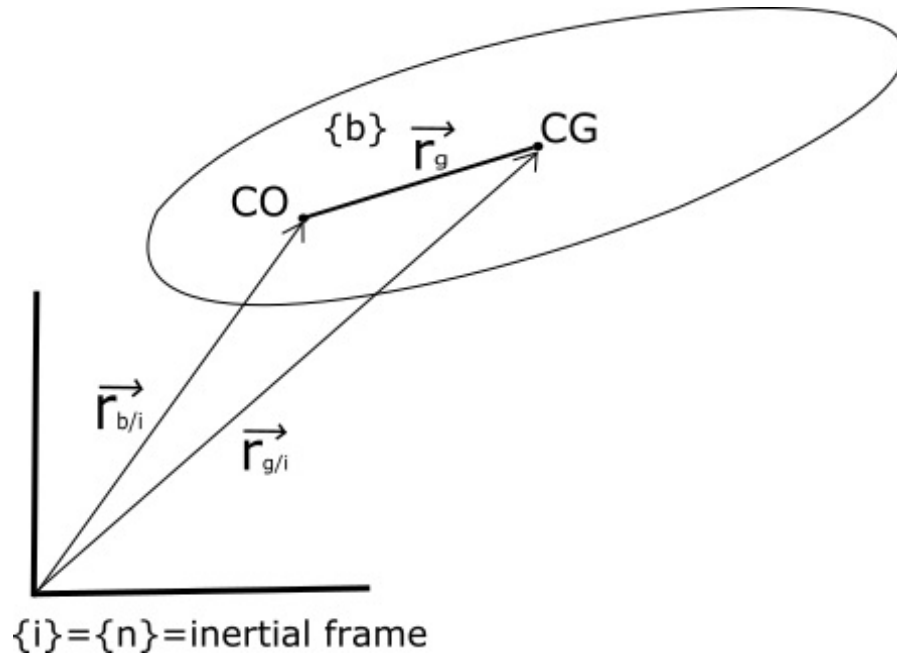


Figura 2.1: Ubicación de los puntos CO y CG en $\{b\}$ y con respecto a $\{n\}$.

En donde $\vec{v}_{g/i}$ es la velocidad de CG con respecto al marco inercial. Si no hay fuerza actuando ($\vec{f}_g = \vec{0}$), entonces el cuerpo rígido se mueve a una velocidad constante ($\vec{v}_{g/i} = \text{constante}$) o el cuerpo se encuentra en reposo ($\vec{v}_{g/i} = \vec{0}$).

Leonhard Euler demostró que la segunda ley de Newton puede expresarse en términos de conservación de momento lineal (\vec{p}_g) y angular (\vec{h}_g). Esto es conocido como el primer y segundo axioma de Euler, respectivamente.

$$\frac{{}^i d}{dt} \vec{p}_g = \vec{f}_g \quad \vec{p}_g = m \vec{v}_{g/i} \quad (31)$$

$$\frac{{}^i d}{dt} \vec{h}_g = \vec{m}_g \quad \vec{h}_g = I_g \vec{\omega}_{b/i} \quad (32)$$

En donde \vec{f}_g y \vec{m}_g son las fuerzas y momentos actuando sobre CG, $\vec{\omega}_{b/i}$ es la velocidad angular de $\{b\}$ con respecto a $\{i\}$. La derivación con respecto al tiempo en el marco inercial $\{i\}$ se denota como ${}^i d/dt$. Considerando que el vehículo es rígido, y que el marco $\{n\}$ es inercial, se obtiene.

$$\vec{v}_{g/i} \approx \vec{v}_{g/n} \quad (33)$$

$$\vec{\omega}_{b/i} \approx \vec{\omega}_{b/n} \quad (34)$$

La derivación con respecto al tiempo del vector \vec{a} en un marco de referencia móvil $\{b\}$ satisface.

$$\frac{{}^i d}{dt} \vec{a} = \frac{{}^b d}{dt} \vec{a} + \vec{\omega}_{b/i} \times \vec{a} \quad (35)$$

en donde la derivación con respecto al tiempo en $\{b\}$ es.

$$\dot{\vec{a}} := \frac{{}^b d}{dt} \vec{a} \quad (36)$$

Movimiento traslacional con respecto a CG De la figura 2.1 se tiene que.

$$\vec{r}_{g/i} = \vec{r}_{b/i} + \vec{r}_g \quad (37)$$

En donde \vec{r}_g es el vector de distancia de CO (origen o_b) a CG. Considerar que el marco $\{n\}$ es inercial, implica que (37) puede reescribirse de la siguiente forma.

$$\vec{r}_{g/n} = \vec{r}_{b/n} + \vec{r}_g \quad (38)$$

La derivación con respecto al tiempo de $\vec{r}_{g/n}$ en el marco de referencia móvil $\{b\}$, empleando (35) da como resultado.

$$\vec{v}_{g/n} = \vec{v}_{b/n} + \left(\frac{{}^b d}{dt} \vec{r}_g + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{r}_g \right) \quad (39)$$

Considerando un vehículo de cuerpo rígido, CG satisface.

$$\frac{{}^b d}{dt} \vec{r}_g = \vec{0} \quad (40)$$

de modo que

$$\vec{v}_{g/n} = \vec{v}_{b/n} + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{r}_g \quad (41)$$

Del primer axioma de Euler se obtiene que.

$$\begin{aligned}
\vec{f}_g &= \frac{i}{dt} (m\vec{v}_{g/i}) \\
&= \frac{i}{dt} (m\vec{v}_{g/n}) \\
&= \frac{b}{dt} (m\vec{v}_{g/n}) + m\vec{\omega}_{b/n} \times \vec{v}_{g/n} \\
&= m(\vec{v}_{g/n} + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{v}_{g/n})
\end{aligned} \tag{42}$$

Finalmente, los vectores pueden expresarse en el marco $\{b\}$ de modo que el movimiento traslacional con respecto a CG se escribe.

$$m[\dot{\mathbf{v}}_{g/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)\mathbf{v}_{g/n}^b] = f_g^b \tag{43}$$

En donde el producto cruz se escribe en forma matricial, empleando la matriz antisimétrica (10) , esto es $S(\omega_{b/n}^b)\mathbf{v}_{g/n}^b = \omega_{b/n}^b \times \mathbf{v}_{g/n}^b$.

Movimiento rotacional con respecto a CG La obtención de la dinámica rotacional, sigue un enfoque similar. Con base en el segundo axioma de Euler, se puede escribir que.

$$\begin{aligned}
\vec{m}_g &= \frac{i}{dt} (I_g\vec{\omega}_{b/i}) \\
&= \frac{i}{dt} (I_g\vec{\omega}_{b/n}) \\
&= \frac{b}{dt} (I_g\vec{\omega}_{b/n}) + \vec{\omega}_{b/n} \times (I_g\vec{\omega}_{b/n}) \\
&= I_g\dot{\vec{\omega}}_{b/n} - (I_g\dot{\vec{\omega}}_{b/n}) \times \vec{\omega}_{b/n}
\end{aligned} \tag{44}$$

Por lo tanto.

$$I_g\dot{\omega}_{b/n}^b - S(I_g\omega_{b/n}^b)\omega_{b/n}^b = m_g^b \tag{45}$$

ya que $S(I_g\omega_{b/n}^b)\omega_{b/n}^b = (I_g\omega_{b/n}^b) \times \omega_{b/n}^b$. Esta expresión es conocida como ecuaciones de Euler.

Definition 1 (Matriz de inercia) La matriz de inercia $I_g \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con respecto a CG, se define:

$$I_g = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \quad I_g = I_g^T > 0 \tag{46}$$

En donde I_x, I_y, I_z son los momentos de inercia con respecto a los ejes x_b, y_b y z_b , e $I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$, son los productos de inercia definidos mediante la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_v (y^2 + z^2) \rho_m dV; & I_{xy} &= \int_v xy \rho_m dV = \int_v yx \rho_m dV = I_{yx} \\
I_y &= \int_v (x^2 + z^2) \rho_m dV; & I_{xz} &= \int_v xz \rho_m dV = \int_v zx \rho_m dV = I_{zx} \\
I_z &= \int_v (x^2 + y^2) \rho_m dV; & I_{yz} &= \int_v yz \rho_m dV = \int_v zy \rho_m dV = I_{zy}
\end{aligned} \tag{47}$$

Las ecuaciones 43 y 45 pueden escribirse en forma matricial, de la siguiente forma.

$$M_{RB}^{CG} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{g/n}^b \\ \dot{\omega}_{b/n}^b \end{bmatrix} + C_{RB}^{CG} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{g/n}^b \\ \dot{\omega}_{b/n}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_g^b \\ m_g^b \end{bmatrix} \tag{48}$$

o

$$\begin{bmatrix} mI_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{g/n}^b \\ \dot{\omega}_{b/n}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mS(\omega_{b/n}^b) & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & -S(I_g \omega_{b/n}^b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{g/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_g^b \\ m_g^b \end{bmatrix} \tag{49}$$

2.2.2. Ecuaciones de movimiento de Newton-Euler con respecto a CO

Para vehículos marinos, es deseable proponer ecuaciones de movimiento para un origen arbitrario CO, para tomar ventaja de las propiedades geométricas del vehículo. A partir de (41) se tiene que.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{g/n}^b &= \mathbf{v}_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times r_g^b \\
&= \mathbf{v}_{b/n}^b - r_g^b \times \omega_{b/n}^b \\
&= \mathbf{v}_{b/n}^b + S^T(r_g^b) \omega_{b/n}^b
\end{aligned} \tag{50}$$

De esto, sigue que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{g/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} = H(r_g^b) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{b/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} \tag{51}$$

En donde $r_g^b = [x_g, y_g, z_g]^T$ y $H(r_g^b) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de transformación:

$$H(r_g^b) := \begin{bmatrix} I_{3x3} & S^T(r_g^b) \\ 0_{3x3} & I_{3x3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^T(r_g^b) = \begin{bmatrix} I_{3x3} & 0_{3x3} \\ S(r_g^b) & I_{3x3} \end{bmatrix} \tag{52}$$

Ahora empleando (51) para transformar (48) de CG a CO, se obtiene.

$$H^T(r_g^b)M_{RB}^{CC}H(r_g^b)\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{b/n}^b \\ \dot{\omega}_{b/n}^b \end{bmatrix} + H^T(r_g^b)C_{RB}^{CG}H(r_g^b)\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{b/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} = H^T(r_g^b)\begin{bmatrix} f_g^b \\ m_g^b \end{bmatrix} \quad (53)$$

Se definen las nuevas matrices en CO.

$$M_{RB}^{CO} : = H^T(r_g^b)M_{RB}^{CC}H(r_g^b) \quad (54)$$

$$C_{RB}^{CO} : = H^T(r_g^b)C_{RB}^{CG}H(r_g^b) \quad (55)$$

Expandir las ecuaciones anteriores da como resultado.

$$M_{RB}^{CO} = \begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & -mS(r_g^b) \\ mS(r_g^b) & I_g - mS^2(r_g^b) \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$C_{RB}^{CO} = \begin{bmatrix} mS(\omega_{b/n}^b) & -mS(\omega_{b/n}^b)S(r_g^b) \\ mS(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b) & -S((I_g - mS^2(r_g^b))\omega_{b/n}^b) \end{bmatrix} \quad (57)$$

En la anterior expansión se empleo el hecho de que:

$$mS(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b)S^T(r_g^b)\omega_{b/n}^b - S(I_g\omega_{b/n}^b)\omega_{b/n}^b \equiv S((I_g - mS^2(r_g^b))\omega_{b/n}^b)\omega_{b/n}^b \quad (58)$$

Movimiento traslacional con respecto a CO

De (53), (56) y (57), sabemos que el movimiento traslacional con respecto a CO, satisface

$$m[\dot{\mathbf{v}}_{b/n}^b + S^T(r_g^b)\dot{\omega}_{b/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)\mathbf{v}_{b/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)S^T(r_g^b)\omega_{b/n}^b] = f_b^b \quad (59)$$

Ya que es movimiento traslacional es independiente del punto de aplicación de la fuerza externa $f_g^b = f_b^b$, se tiene que.

$$m[\dot{\mathbf{v}}_{b/n}^b + S(\dot{\omega}_{b/n}^b)r_g^b + S(\omega_{b/n}^b)\mathbf{v}_{b/n}^b + S^2(\omega_{b/n}^b)r_g^b] = f_b^b \quad (60)$$

En donde se ha explotado el hecho de que $S^T(a)b = -S(a)b = S(b)a$. Una representación alternativa de (60) es.

$$m[\dot{\mathbf{v}}_{b/n}^b + \dot{\omega}_{b/n}^b \times r_g^b + \omega_{b/n}^b \times \mathbf{v}_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times (\omega_{b/n}^b \times r_g^b)] = f_g^b \quad (61)$$

Movimiento rotacional con respecto a CO

Empleando el teorema de ejes paralelos, que establece que la matriz de inercia $I_b = I_b^T$, con respecto a un origen arbitrario o_b esta dada por.

$$I_b = I_g - mS^2(r_g^b) = I_g - m(r_g^b(r_g^b)^T - (r_g^b)^T r_g^b I_{3 \times 3}) \quad (62)$$

En donde $I_g = I_g^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de inercia con respecto al centro de gravedad.

replanteando los términos en el extremo inferior derecho de (56) y (57) con ayuda del teorema de ejes paralelos.

$$\begin{aligned} I_g + mS(r_g^b)S^T(r_g^b) &= I_g - mS^2(r_g^b) \\ &= I_b \end{aligned} \quad (63)$$

Mientras que el termino cuadrático en (57) satisface (por la identidad de Jacobi).

$$S(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b)S^T(r_g^b)\omega_{b/n}^b = -S(\omega_{b/n}^b)S^2(r_g^b)\omega_{b/n}^b \quad (64)$$

De modo que

$$mS(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b)S^T(r_g^b)\omega_{b/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)I_g\omega_{b/n}^b = S(\omega_{b/n}^b)I_b\omega_{b/n}^b \quad (65)$$

Consecuentemente, el movimiento rotacional con respecto a CO, esta dado por la ultima fila de (53).

$$I_b\dot{\omega}_{b/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)I_b\omega_{b/n}^b + mS(r_g^b)\dot{\mathbf{v}}_{b/n}^b + mS(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b)\mathbf{v}_{b/n}^b = m_b^b \quad (66)$$

En donde el momento con respecto a CO es.

$$\begin{aligned} m_b^b &= m_g^b + r_g^b \times f_g^b \\ &= m_g^b + S(r_g^b)f_g^b \end{aligned} \quad (67)$$

La ecuación (66), puede escribirse en la siguiente forma.

$$I_b \dot{\omega}_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times I_b \omega_{b/n}^b + m r_g^b \times (\dot{\mathbf{v}}_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times \mathbf{v}_{b/n}^b) = \mathbf{m}_b^b \quad (68)$$

Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido, en 6 grados de libertad

Definiendo, de acuerdo al SNAME (1950).

$$\begin{aligned} f_b^b &= [X, Y, Z]^T && \text{-fuerza a través de } o_b \text{ expresada en el marco } \{b\} \\ m_b^b &= [K, M, N]^T && \text{-momento con respecto a } o_b \text{ expresado en el marco } \{b\} \\ \mathbf{v}_{b/n}^b &= [u, v, w]^T && \text{-velocidad lineal de } o_b \text{ relativa a } o_n \text{ expresada en el marco } \{b\} \\ \omega_{b/n}^b &= [p, q, r]^T && \text{-velocidad angular de } \{b\} \text{ relativa al marco inercial } \{n\} \text{ expresada en el marco } \{b\} \\ r_g^b &= [x_g, y_g, z_g]^T && \text{-vector de } o_b \text{ a CG expresado en el marco } \{b\} \end{aligned}$$

Entonces (68) y (61) se reescriben de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} m[\dot{u} - vr + wq - x_g(q^2 + r^2) + y_g(pq - \dot{r}) + z_g(pr + \dot{q})] &= X \\ m[\dot{v} - wp + ur - y_g(r^2 + p^2) + z_g(qr - \dot{p}) + x_g(qp + \dot{r})] &= Y \\ m[\dot{w} - uq + vp - z_g(p^2 + q^2) + x_g(rp - \dot{q}) + y_g(rq + \dot{p})] &= Z \\ I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr - (\dot{r} + pq)I_{zx} + (r^2 - q^2)I_{yz} + (pr - \dot{q})I_{xy} + m[y_g(\dot{w} - uq + vp) - z_g(\dot{v} - wp + ur)] &= K \\ I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp - (\dot{p} + qr)I_{xy} + (p^2 - r^2)I_{zx} + (qp - \dot{r})I_{yz} + m[z_g(\dot{u} - vr + wq) - x_g(\dot{w} - uq + vp)] &= M \\ I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq - (\dot{q} + rp)I_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + (rq - \dot{p})I_{zx} + m[x_g(\dot{v} - wp + ur) - y_g(\dot{u} - vr + wq)] &= N \end{aligned} \quad (69)$$

Las primeras tres ecuaciones representan movimiento traslacional, mientras las ultimas tres ecuaciones corresponden al movimiento rotacional. La representación vectorial de (69), es.

$$M_{RB} \dot{\mathbf{v}} + C_{RB}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \tau_{RB} \quad (70)$$

En donde $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T$ es el vector generalizado de velocidad expresado en $\{b\}$ y $\tau_{RB} = [X, Y, Z, K, M, N]^T$ es el vector generalizado de fuerzas externas y momentos. M_{RB} es la matriz de inercia de cuerpo rígido y satisface.

$$M_{RB} = M_{RB}^T > 0, \quad M_{RB} = \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad (71)$$

En donde.

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & -mS(r_g^b) \\ mS(r_g^b) & I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ 0 & m & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m & my_g & -mx_g & 0 \\ 0 & -mz_g & my_g & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_g & 0 & -mx_g & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_g & mx_g & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (72)$$

Por otra parte, la matriz de Coriolis de cuerpo rígido, corresponde al siguiente termino.

$$C_{RB}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m(y_g q + z_g r) \\ 0 & 0 & 0 & -m(y_g p + w) \\ 0 & 0 & 0 & -m(z_g p - v) \\ -m(y_g q + z_g r) & m(y_g p + w) & m(z_g p - v) & 0 \\ m(x_g q - w) & -m(z_g r + x_g p) & m(z_g q + u) & I_{yz} q + I_{xz} p - I_z r \\ m(x_g r + v) & m(y_g r - u) & -m(x_g p + y_g q) & -I_{yz} r - I_{xy} p + I_y q \\ -m(x_g q - w) & -m(x_g r + v) \\ m(z_g r + x_g p) & -m(y_g r - u) \\ -m(z_g q + u) & m(x_g p + y_g q) \\ -I_{yz} q - I_{xz} p + I_z r & I_{yz} r + I_{xy} p - I_y q \\ 0 & -I_{xz} r - I_{xy} q + I_x p \\ I_{xz} r + I_{xy} q - I_x p & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

2.3. Fuerzas de restauración

Consideremos la figura 2.2, en donde la fuerza gravitacional f_g^b actuó a través de CG, definido por el vector $r_g^b := [x_g, y_g, z_g]^T$ con respecto a CO. De manera similar, la fuerza de flotabilidad f_b^b actuó a través de CB, definido por el vector $r_b^b := [x_b, y_b, z_b]^T$. Ambos vectores son descritos con respecto a CO en $\{b\}$.

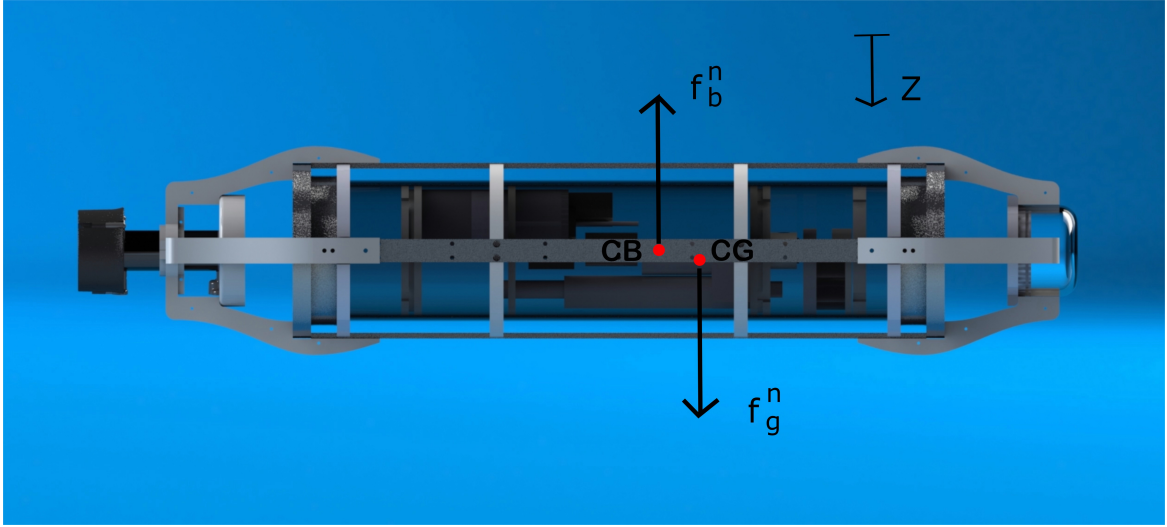


Figura 2.2: Fuerzas de restauración.

Sea m , la masa del vehículo, \square el volumen del fluido desplazado por el vehículo, g la aceleración de la gravedad (positiva hacia abajo), y ρ la densidad del agua. Entonces el peso del cuerpo sumergido, y la fuerza de flotabilidad se escriben de la siguiente forma.

$$W = mg, \quad B = \rho g \square \quad (74)$$

Estas fuerzas actúan en el plano vertical de $\{n\}$ por lo tanto.

$$f_g^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} \quad y \quad f_b^n = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \quad (75)$$

El eje z , es positivo hacia abajo, por lo que la gravedad es positiva y la flotabilidad es negativa. La fuerza debida al peso y a la flotabilidad pueden expresarse en $\{b\}$ de la siguiente forma.

$$f_g^b = R_b^n(\Theta_{nb})^{-1} f_g^n \quad (76)$$

$$f_b^b = R_b^n(\Theta_{nb})^{-1} f_b^n \quad (77)$$

En donde $R_b^n(\Theta_{nb})$ es la matriz de transformación de coordenadas de ángulos de Euler. El vector de fuerza y momento expresado en $\{b\}$ es.

$$\begin{aligned}
g(\eta) &= - \begin{bmatrix} f_g^b + f_b^b \\ r_g^b \times f_g^b + r_b^b \times f_b^b \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} R_b^n (\Theta_{nb})^{-1} (f_g^n + f_b^n) \\ r_g^b \times R_b^n (\Theta_{nb})^{-1} f_g^n + r_b^b \times R_b^n (\Theta_{nb})^{-1} f_b^n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{78}$$

La expansión de esta expresión da como resultado.

$$g(\eta) = \begin{bmatrix} (W - B) \sin(\theta) \\ -(W - B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -(W - B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -(y_g W - y_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) + (z_g W - z_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ (z_g W - z_b B) \sin(\theta) + (x_g W - x_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -(x_g W - x_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) - (y_g W - y_b B) \sin(\theta) \end{bmatrix} \tag{79}$$

2.4. Matriz de Masa Agregada y de Coriolis, debido a la rotación de $\{b\}$ con respecto a $\{n\}$.

Retomando (3), definimos.

$$M = M_{RB} + M_A \tag{80}$$

$$C(\mathbf{v}) = C_{RB}(\mathbf{v}) + CA(\mathbf{v}) \tag{81}$$

En donde $M_a = M_a^T \geq 0$ es la matriz de inercia de masa hidrodinámica agregada, este termino puede entenderse como la masa virtual, agregada al sistema, debido a que un cuerpo en aceleración o desaceleración debe mover un volumen del liquido a través del cual se mueve. CA , representa fuerzas linealizadas, producidas por la rotación de $\{b\}$ con respecto a $\{n\}$.

$$M_A = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \tag{82}$$

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

En donde se emplea la notación de SNAME (1950) para las derivadas hidrodinámicas, por ejemplo.

$$Y_{\dot{u}} := \frac{\partial Y}{\partial \dot{u}} \quad (84)$$

Y

$$\begin{aligned} a_1 &= X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r \\ a_2 &= Y_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r \\ a_3 &= Z_{\dot{u}}u + Z_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r \\ a_4 &= K_{\dot{u}}u + K_{\dot{v}}v + K_{\dot{w}}w + K_{\dot{p}}p + K_{\dot{q}}q + K_{\dot{r}}r \\ a_5 &= M_{\dot{u}}u + M_{\dot{v}}v + M_{\dot{w}}w + M_{\dot{p}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r \\ a_6 &= N_{\dot{u}}u + N_{\dot{v}}v + N_{\dot{w}}w + N_{\dot{p}}p + N_{\dot{q}}q + N_{\dot{r}}r \end{aligned} \quad (85)$$

2.5. Modelo vectorial de Fossen para vehículos marinos

Para resumir las conclusiones de las secciones anteriores, retomamos las ecuaciones (2) y (3), considerando que para vehículos operando debajo del agua $\tau_{wave} = \tau_{wind} = 0$, las reescribimos del siguiente modo.

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J_{\Theta}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} \quad (86)$$

$$M\dot{\mathbf{v}} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} + D(\mathbf{v})\mathbf{v} + g(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} \quad (87)$$

Con.

$$M = M_{RB} + M_A \quad (88)$$

$$C(\mathbf{v}) = C_{RB}(\mathbf{v}) + C_A(\mathbf{v}) \quad (89)$$

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} (W - B) \sin(\theta) \\ -(W - B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -(W - B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -(y_g W - y_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) + (z_g W - z_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ (z_g W - z_b B) \sin(\theta) + (x_g W - x_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -(x_g W - x_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) - (y_g W - y_b B) \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (90)$$

Y la matriz de amortiguamiento hidrodinámico.

$$D = \begin{bmatrix} X_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_r \end{bmatrix} \quad (91)$$

Para vehículos con movimiento debajo del agua, a baja velocidad y con tres planos de simetría, es posible despreciar la contribucion de los términos fuera de la diagonal principal de M_A , por lo que se obtienen las siguientes expresiones simplificadas de M_A y C_A .

$$M_A = M_A^T = -diag\{X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}\} \quad (92)$$

$$C_A(\mathbf{v}) = -C_A^T(\mathbf{v}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v & 0 & -N_{\dot{r}}r & M_{\dot{q}}q \\ Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u & N_{\dot{r}} & 0 & -K_{\dot{p}}p \\ -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 & -M_{\dot{q}}q & K_{\dot{p}}p & 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

3. Control

A continuación se tomaran en cuenta las consideraciones necesarias para emplear el modelo representado por las ecuaciones (86) y (87), en el vehículo sumergible del presente desarrollo. Para este vehículo en concreto, es ventajoso considerar una simetría de tipo estribor-babor[1], esto significa que $y_g = Iy_x = Iyz = 0$. Por otra parte, la velocidad del vehículo sera relativamente baja y cuenta con tres ejes de simetría, de acuerdo a [1], estas condiciones nos permiten ignorar los términos fuera de la diagonal de M_A , por lo que la matriz $M = M_{RB} + M_A$ de (87) es.

$$M = \begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & mz_g & 0 \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m - Z_{\dot{w}} & 0 & -mx_g & 0 \\ 0 & -mz_g & 0 & I_x - K_{\dot{p}} & 0 & -I_{xz} \\ mz_g & 0 & -mx_g & 0 & I_y - M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & mx_g & 0 & -I_{zx} & 0 & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (94)$$

nótese que M sigue siendo una matriz simétrica. Ahora $C = C_{RB} + C_A$ es.

$$C(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mz_g r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}} w - mw \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m(v - z_g p) - Y_{\dot{v}} v \\ -mz_g r & mw - Z_{\dot{w}} w & Y_{\dot{v}} v - m(v - z_g p) & 0 & \\ Z_{\dot{w}} w - m(w - qx_g) & -m(z_g r + x_g p) & m(z_g q + u) - X_{\dot{u}} u & I_{xz} p - I_z r + N_{\dot{r}} r \\ m(x_g r + v) - Y_{\dot{v}} v & X_{\dot{u}} u - mu & -mx_g p & I_y q - M_{\dot{q}} q \\ m(w - x_g q) - Z_{\dot{w}} w & Y_{\dot{v}} v - m(x_g r + v) & & & \\ m(z_g r + x_g p) & mu - X_{\dot{u}} u & & & \\ X_{\dot{u}} u - m(z_g q + u) & mx_g p & & & \\ I_z r - I_{xz} p - N_{\dot{r}} r & M_{\dot{q}} q - I_y q & & & \\ 0 & -K_{\dot{p}} p - I_{xz} r + I_x p & & & \\ I_{xz} r + -I_x p + K_{\dot{p}} p & 0 & & & \end{bmatrix} \quad (95)$$

C es antisimétrica por lo que $C^T = -C$. Además, considerando que el punto $B = CO$, y que $y_g = 0$, $g(\boldsymbol{\eta})$ es.

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} (W - B) \sin(\theta) \\ -(W - B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ 0 \\ (z_g W - z_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ (z_g W) \sin(\theta) \\ -(x_g W) \cos(\theta) \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (96)$$

por ultimo definimos a τ de la siguiente forma.

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(W - B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \\ (x_g W) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

3.1. Ley de control Proporcional derivativa.

Se propone la siguiente ley de control proporcional derivativa con compensación de gravedad.

$$\tau = k_p e - k_d \dot{e} + \tilde{g} \quad (98)$$

Se propone la variable q , de forma que $\dot{q} = \mathbf{v}$. Por otra parte, $e = q^d - q$ y $\tilde{g} \approx g(\boldsymbol{\eta})$. En el problema de regulación, q^d es constante, por lo que.

$$\tau = k_p e - k_d \dot{q} + \tilde{g} \quad (99)$$

Sustituyendo τ en (87) y considerando que los términos de amortiguamiento pueden despreciarse, se obtiene la siguiente ecuación en lazo cerrado.

$$k_p e - k_d \dot{q} = M\ddot{q} + C\dot{q} \quad (100)$$

3.1.1. Análisis de estabilidad

La ecuación (100) se puede escribir como.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ -M[k_p e - k_d \dot{e} - C\dot{e} - g(\eta)] \end{bmatrix} \quad (100a)$$

Los puntos de equilibrio estan dados por.

$$k_p S - g(\eta - S) = 0 \quad (100b)$$

Si $g(\eta) = cte$ entonces.

$$S = k_p^{-1} g = 0 \quad (100c)$$

Es el unico punto de equilibrio. El siguiente análisis esta disponible en [4]. Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} e^T K_p e \quad (101)$$

Derivando la función anterior con respecto al tiempo da como resultado.

$$\dot{L} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T A \dot{q} - e^T K_p \dot{q} \quad (102)$$

Sustituyendo $M\ddot{q}$ de (101) se obtiene.

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T (k_p e - k_d \dot{q} - C\dot{q}) - e^T k_p \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} + \dot{q}^T k_p e - \dot{q}^T k_d \dot{q} - e^T k \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} - \dot{q}^T k_d \dot{q} \end{aligned} \quad (103)$$

Ya que los cambios en x_g y m , son muy pequeños, es posible considerar que $M \approx \text{constante}$, por lo que.

$$\dot{L} = \frac{1}{2} \dot{q}^T (-2C) \dot{q} - \dot{q}^T k_d \dot{q} \quad (104)$$

Recordemos que C es antisimétrica, por lo que

$$\dot{q}^T (-2C) \dot{q} = 0 \quad (105)$$

Por lo tanto

$$\dot{L} = -\dot{q}^T k_d \dot{q} \leq 0 \quad (106)$$

Este resultado muestra que \dot{L} es negativa semidefinida. Ahora para demostrar que el punto de equilibrio ($e = 0, \dot{q} = 0$) es asintóticamente estable, debe probarse que cuando $\dot{q} = 0, q = q^d$. Esto es posible empleando el Teorema de Invariancia de La Salle. El conjunto \mathfrak{R} de puntos en la vecindad del equilibrio que satisface $\dot{\mathbf{v}} = 0$, es tal que, $\dot{q} = 0$, y por lo tanto $\ddot{q} = 0$. De (100), se concluye que necesariamente $e = 0$. Consecuentemente el punto de equilibrio ($e = 0, \dot{q} = 0$) es el único punto de equilibrio del sistema y también el conjunto invariante mas grande en \mathfrak{R} . Por lo tanto el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

De (86), para ángulos pequeños de ϕ, θ y ψ , se considerara que $q = [N, E, D, \phi, \theta, \psi]$.

$$\begin{bmatrix} \dot{N} \\ \dot{E} \\ \dot{D} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (107)$$

En esta etapa del desarrollo se implementara un control en cabeceo (θ) como meta principal; adicionalmente se muestra que es posible controlar la profundidad con la acción del lastre, esto es solo para demostrar la utilidad del prototipo en el aspecto didáctico, ya que controlar de manera continua la profundidad por medio del lastre es sumamente ineficiente. Entonces, retomando (97) y (98).

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(W - B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \\ (x_g W) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} = K_p e + K_d \dot{q} + \tilde{g} \quad (108)$$

4. Simulación

4.1. Estimación de parámetros

Antes de llevar a cabo la simulación, fue necesario obtener una aproximación de los coeficientes y parámetros específicos para el vehículo Desarrollado. Gracias a que se realizó un modelo tridimensional del prototipo con ayuda de un software CAD, fue posible tener una estimación razonable de la matriz de inercia, que a continuación se escribe junto con otros parámetros obtenidos por dicho software.

$$I = \begin{bmatrix} 0,0674 & -0,00004 \approx 0 & -0,0101 \\ -0,00004 \approx 0 & 1,0050 & 0,000066 \approx 0 \\ -0,0101 & 0,00006 \approx 0 & 1,0039 \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$m = 17,2kg \quad (110)$$

$$\square = 0,0172m^3 \quad (111)$$

$$z_g = 0,003 \quad (112)$$

$$y_g = 0 \quad (113)$$

Conocer los coeficientes hidrodinámicos del vehículo, permite reducir la incertidumbre del modelo; para la estimación de estos parámetros necesarios para calcular M_A y D , se empleó un programa CFD (computational fluid dynamics), que divide la superficie del vehículo y el agua a su alrededor en elementos discretos, haciendo posible la solución del problema de flujo potencial en 3 dimensiones y dando como resultado la masa agregada con respecto a la frecuencia, como se menciona en [1]; para el caso de vehículos sumergibles, es suficiente hacer el cálculo para una sola frecuencia. Se obtuvieron las siguientes expresiones.

$$M_A = \begin{bmatrix} 3,8625 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & 15,724 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 15,724 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 0,00019 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 0,877 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 0,877 \end{bmatrix} \quad (114)$$

$$D = \begin{bmatrix} -4,5 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & -0,16 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & -3,5 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & -0,36 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & -0,016 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & -0,115 \end{bmatrix} \quad (115)$$

Como se estableció en la sección 3, solo se tomaron los términos de la diagonal principal en M y D , el calculo de C_A se hace en base a estos coeficientes. En la implementación de la simulación del modelo se toman en cuenta las pequeñas variaciones en x_g y m para el calculo de $M = M_{RB} + M_A$, y aun cuando se considera (107) para la implementación de la ley de control, para la simulación del modelo se emplea (86), logrando así un comportamiento mas aproximado al sistema fisico.

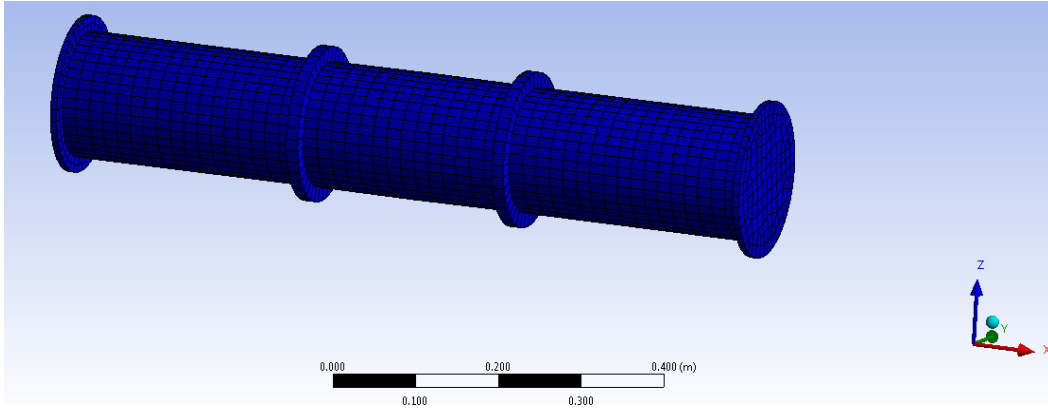


Figura 4.1: Malla generada por el software cfd para el calculo de M_A y D .

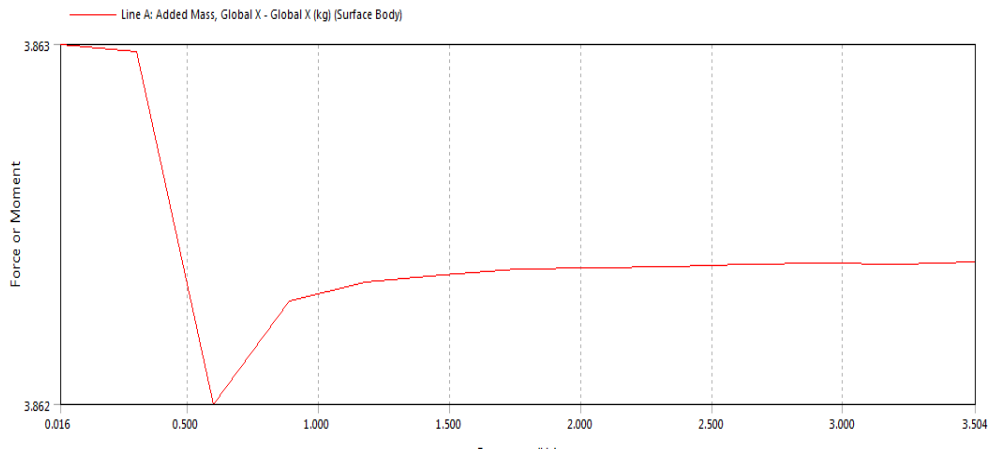


Figura 4.2: Gráfica $X_{\ddot{u}}$ con respecto a la frecuencia, proporcionada por el software CFD.

En la figura anterior, los bloques de saturación representan la saturación de los actuadores. En este prototipo, con una masa móvil de 2.5 kg, el centro de masa puede desplazarse hasta 8 mm (cuatro milímetros en sentido positivo y cuatro en sentido negativo), por otra parte, el tanque de lastre puede cambiar la masa del vehículo hasta 500 gramos (de 16.95kg a 17.45kg).

4.2.1. Control en el ángulo de cabeceo

A continuación se presentan las gráficas obtenidas de la simulación para el control en cabeceo, el ángulo está en radianes y el tiempo en segundos.

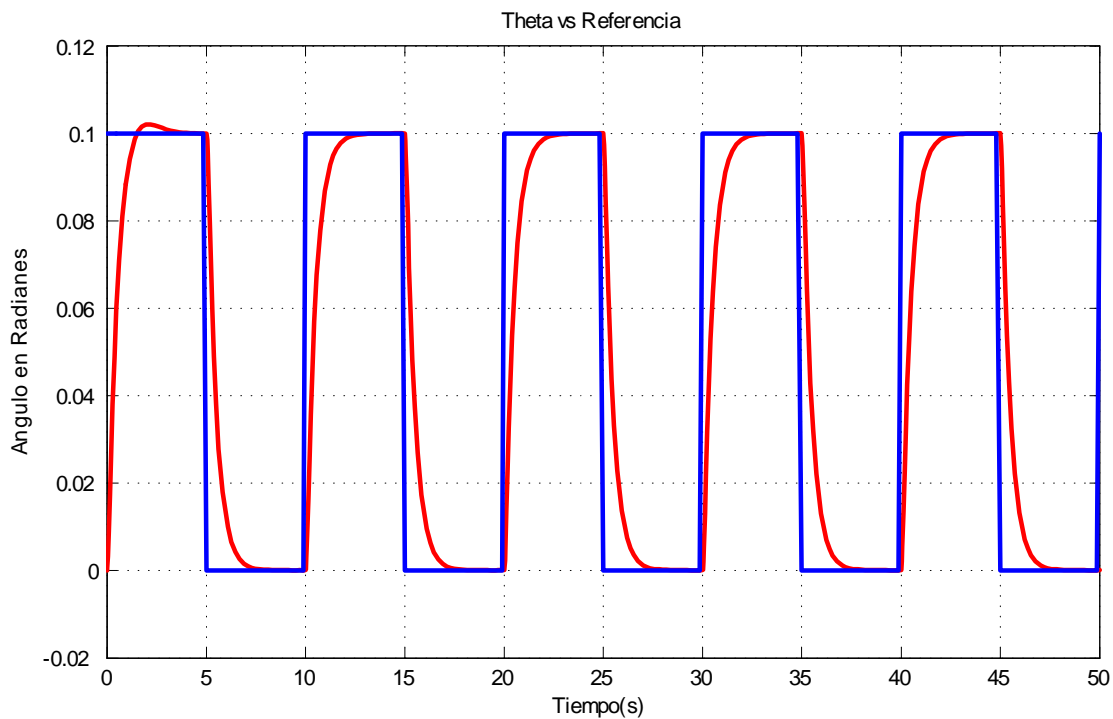


Figura 4.4: Ángulo de Cabeceo (rojo) contra Referencia (azul).

En la gráfica anterior es posible observar que el ángulo de cabeceo converge a la referencia y que esta convergencia no es instantánea, a continuación se muestra la gráfica de error y la derivada del error.

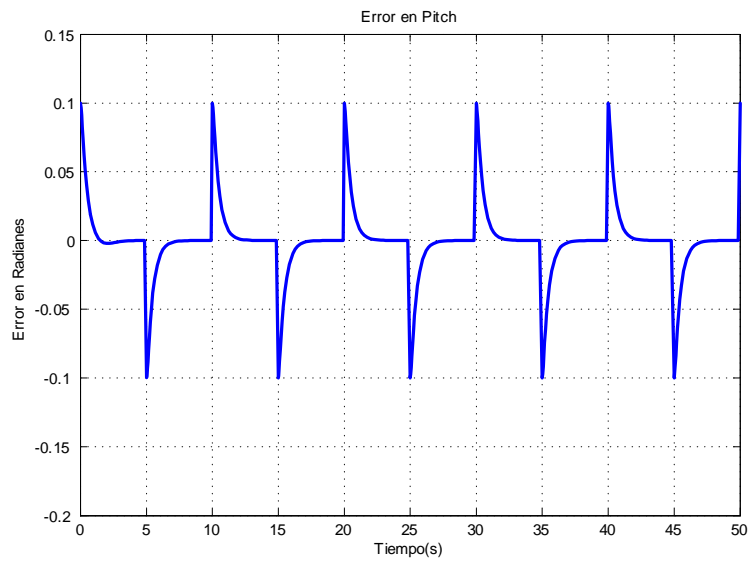


Figura 4.5: Error en el ángulo de Cabeceo.

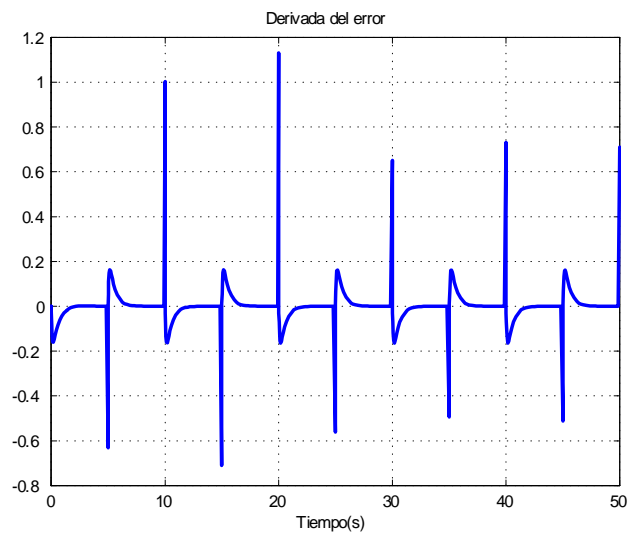


Figura 4.6: Derivada del error.

Nótese que el error converge a cero antes del cambio de referencia, con respecto a la señal de control, la gráfica es la siguiente.

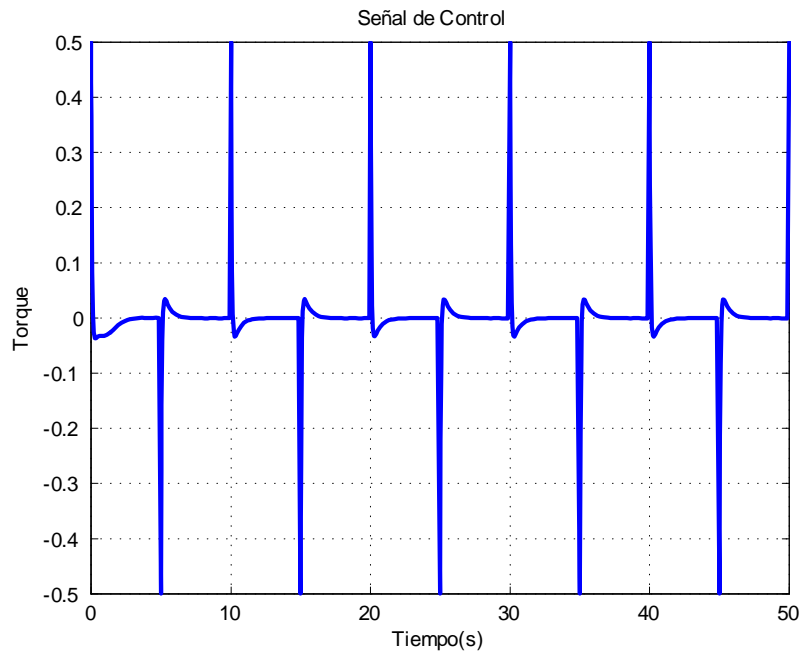


Figura 4.7: Señal de Control.

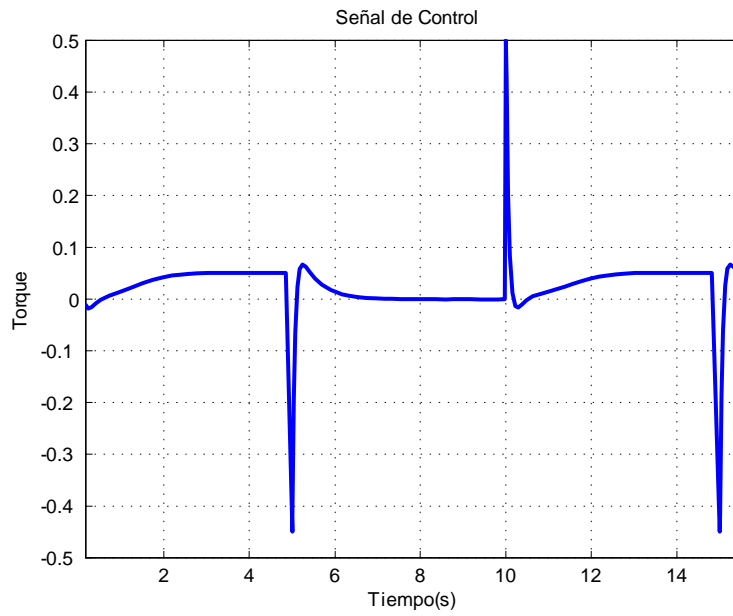


Figura 4.8: Detalle de la señal de control.

Retomando (97) y considerando que para el control del prototipo Desarrollado en este trabajo, la variable relacionada directamente con el actuador es x_g se obtiene la siguiente expresión.

$$x_g = \frac{\tau_5}{W \cos(\theta) \cos(\phi)} \quad (116)$$

En donde $\tau_5 = K_p e_\theta - K_d \dot{\theta} + \ddot{\theta}$. A continuación se muestra la gráfica del desplazamiento de x_g .

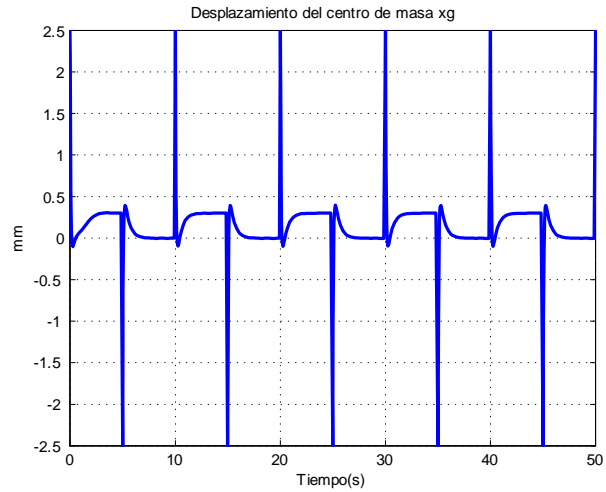


Figura 4.9: Desplazamiento del centro de masa

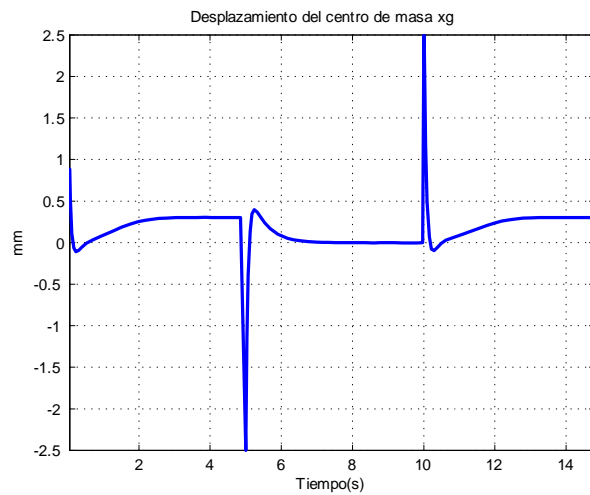


Figura 4.10: Detalle del movimiento de x_g

4.2.2. Control en D

Con respecto a la implementación de la simulación del control en profundidad, se obtuvieron los siguientes resultados.

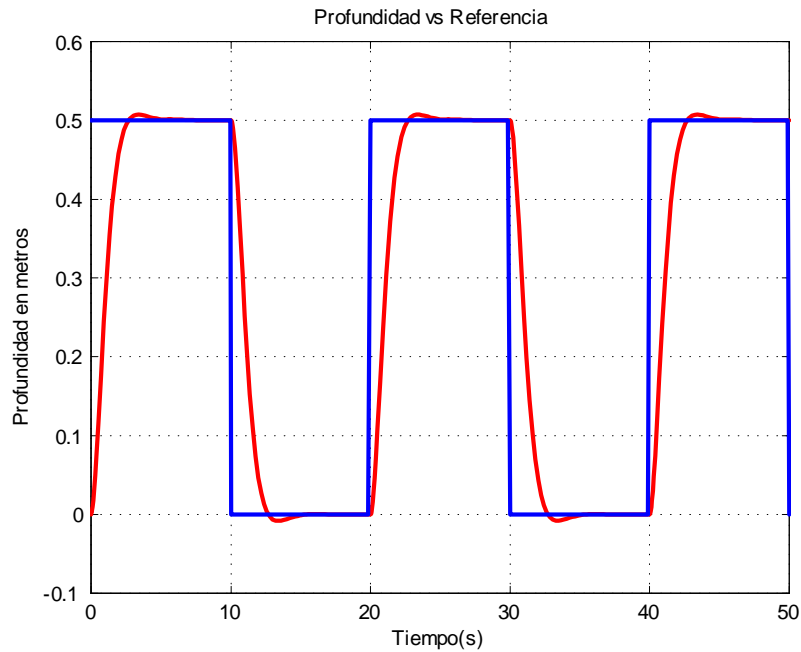


Figura 4.11: Profundidad del vehículo(D) vs Referencia

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, en la simulación, la profundidad del vehículo, converge a la referencia, al igual que en el caso de cabeceo, esta convergencia no es instantánea. Las siguientes gráficas muestran el comportamiento del error y su derivada.

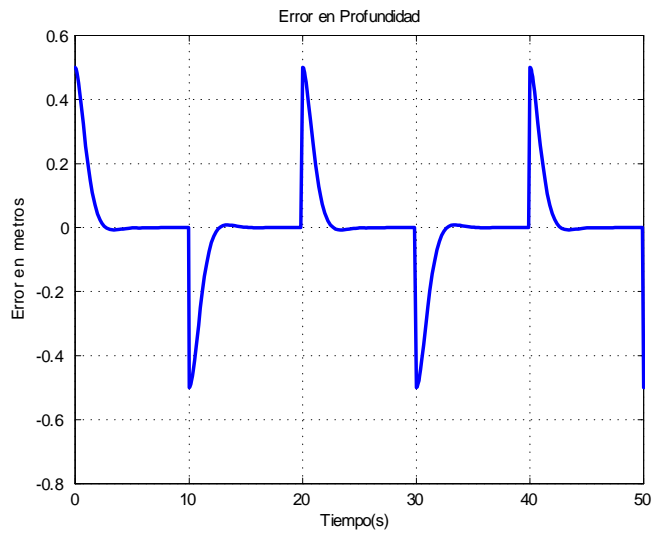


Figura 4.12: Error en profundidad (D).

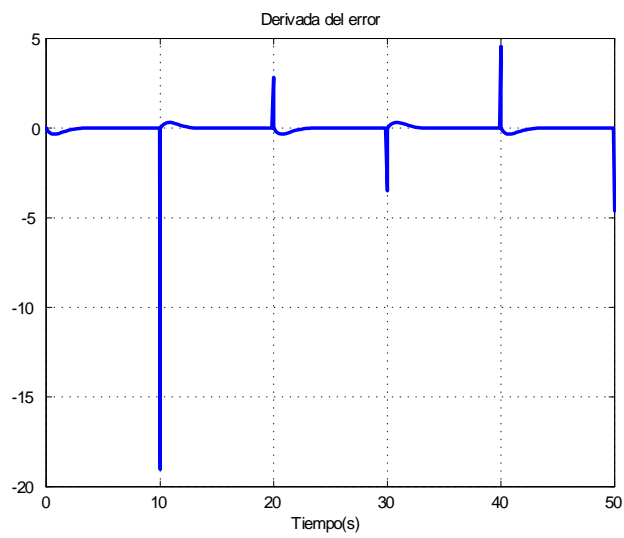


Figura 4.13: Derivada del error en profundidad

Como se puede apreciar en las figuras anteriores, el error converge a cero, a continuación se muestran las gráficas de la señal de control.

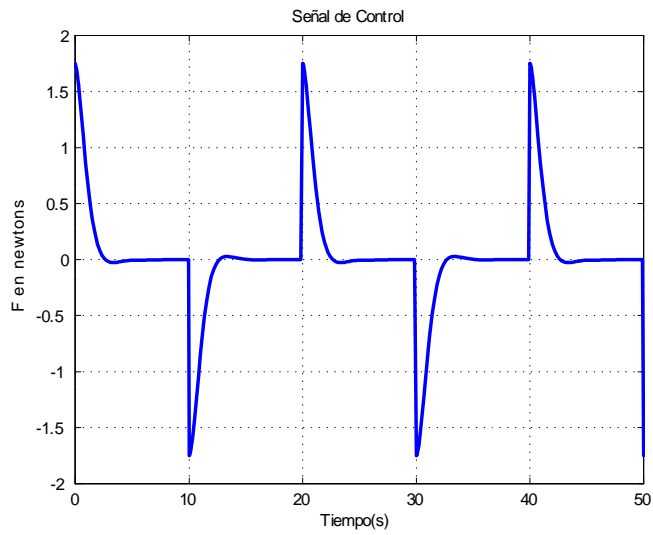


Figura 4.14: Señal de control para profundidad (D).

Es posible apreciar que la acción de control se mantiene dentro de los límites del actuador de este prototipo.

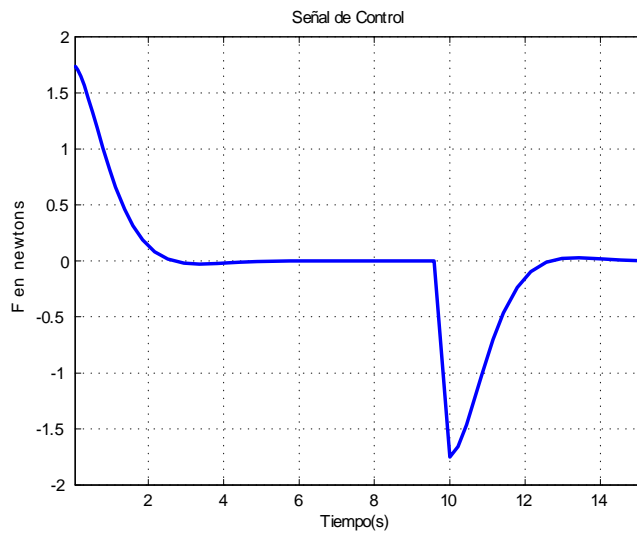


Figura 4.15: Detalle de la señal de control para profundidad.

Retomando (97) y considerando que para el control de profundidad del prototipo desarrollado en este trabajo la variable relacionada directamente con el actuador es m , se obtiene la siguiente expresión.

$$m = \left(\frac{17,2 * gr - \tau_3}{\cos(\theta) \cos(\phi)} \right) / gr \quad (117)$$

En donde $\tau_3 = K_p e_D - K_d \dot{D} + \ddot{g}_D$. y $gr = 9,81$. En la siguiente figura se puede observar el comportamiento de m , correspondiente a la señal de control expuesta con anterioridad.

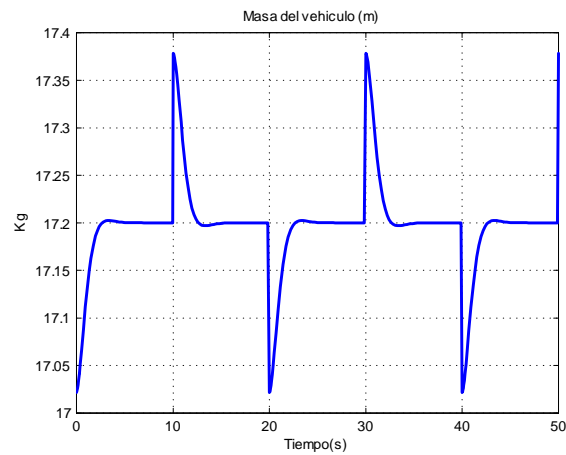


Figura 4.16: Gráfica del peso del vehiculo (m).

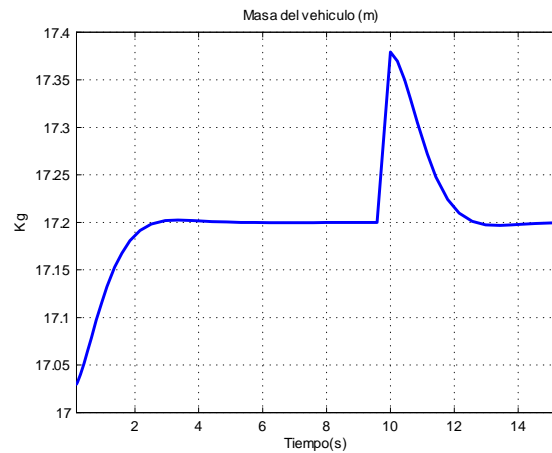


Figura 4.17: Detalle de m.

4.2.3. Perturbaciones y dinámicas no modeladas.

Si se analiza la expresión (97), es posible concluir que τ_3 y τ_5 están acoplados, ya que m se emplea para el control de profundidad, pero también está presente en τ_5 que controla θ la siguiente gráfica muestra esta interacción.

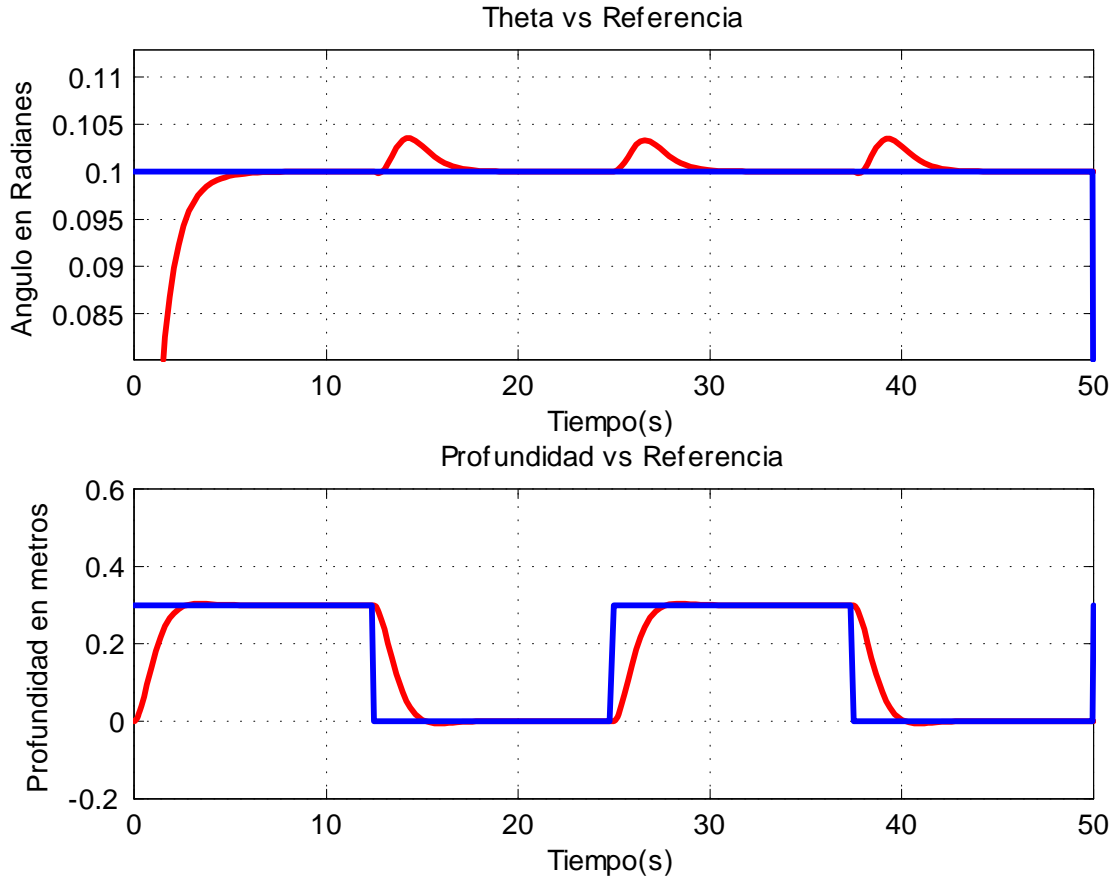


Figura 4.18: Perturbación en θ provocada por el cambio en m .

Para la implementación experimental, es necesario conocer que punto de la masa corresponde a x_g , esta no es una tarea fácil, la siguiente figura muestra que sucede si se emplea la variable de control $\tilde{x}_g = x_g + \varepsilon$.

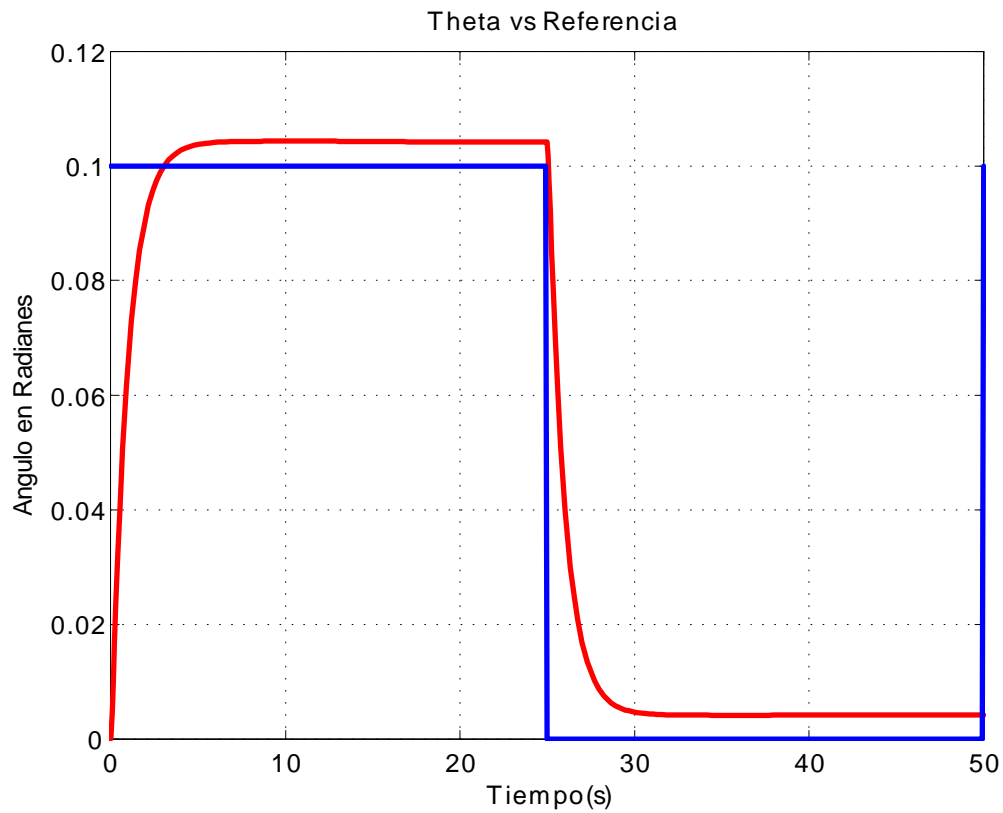


Figura 4.19: θ vs Referencia, con un error $\varepsilon = 0,00005m$ ($50 \mu m$)

La figura anterior muestra que aun con un error tan pequeño como $50\mu m$, incrementa notablemente el error en estado estacionario, esto representa una seria complicación para la estimación experimental de parámetros , ya que debe hallarse el punto en el que la masa produce un centro de masa $x_g = 0$, con una resolución de micrómetros. Por otra parte, este modelo y ley de control, no toman en cuenta el retardo introducido por el tiempo que le toma al actuador de la masa llegar a la posición requerida, a continuación se presenta una gráfica que incluye este retardo en un bloque disponible en Simulink para este fin.

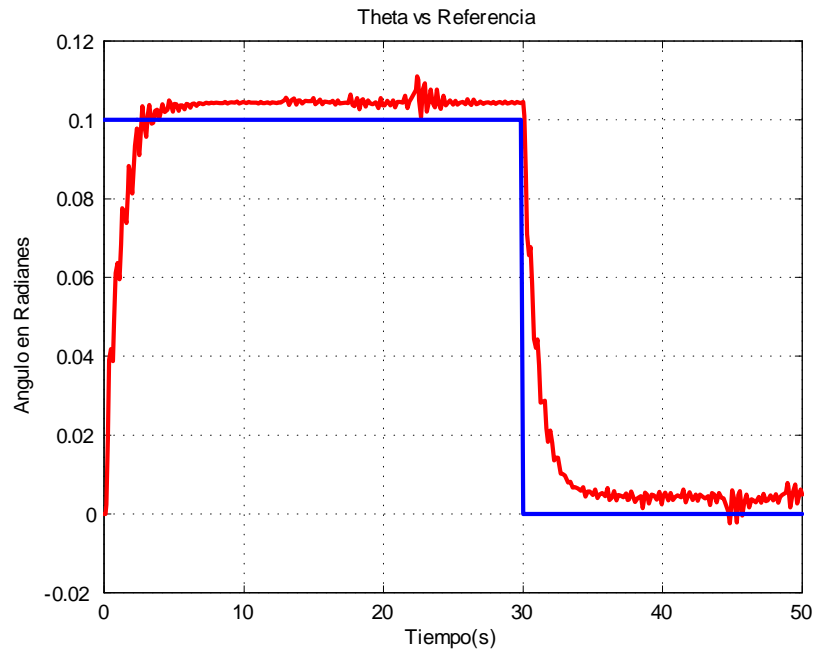


Figura 4.20: θ vs referencia, considerando un error $\varepsilon = 50\mu m$ y un retardo de 0.11s.

De la figura anterior se concluye que es de vital importancia una buena estimación experimental de parámetros del prototipo, también es posible decir que la ley de control corrige el error razonablemente bien, aun ante pequeñas perturbaciones y deficiencias del modelo empleado.

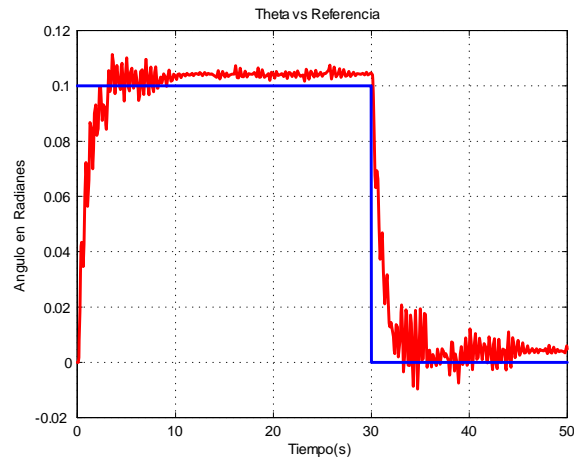


Figura 4.21: θ vs referencia, considerando un error $\varepsilon = 50\mu m$ y un retardo de 0.114s.

5. Construcción del prototipo.

El diseño del vehículo desarrollado tiene como punto de partida, el análisis de los requerimientos técnicos que exigen las tareas que llevara a cabo. El principal objetivo del AUV tratado aquí, será ser una plataforma para implementar algoritmos de control y verificar su viabilidad como solución a diversos problemas presentes en el control de UAVs, tomando esto como base, el objetivo es construir un prototipo con una dinámica similar a la que poseen los AUV comerciales, con imitaciones en alcance de distancia y profundidad regidas principalmente por los recursos disponibles para la tarea.

5.1. Características principales del diseño

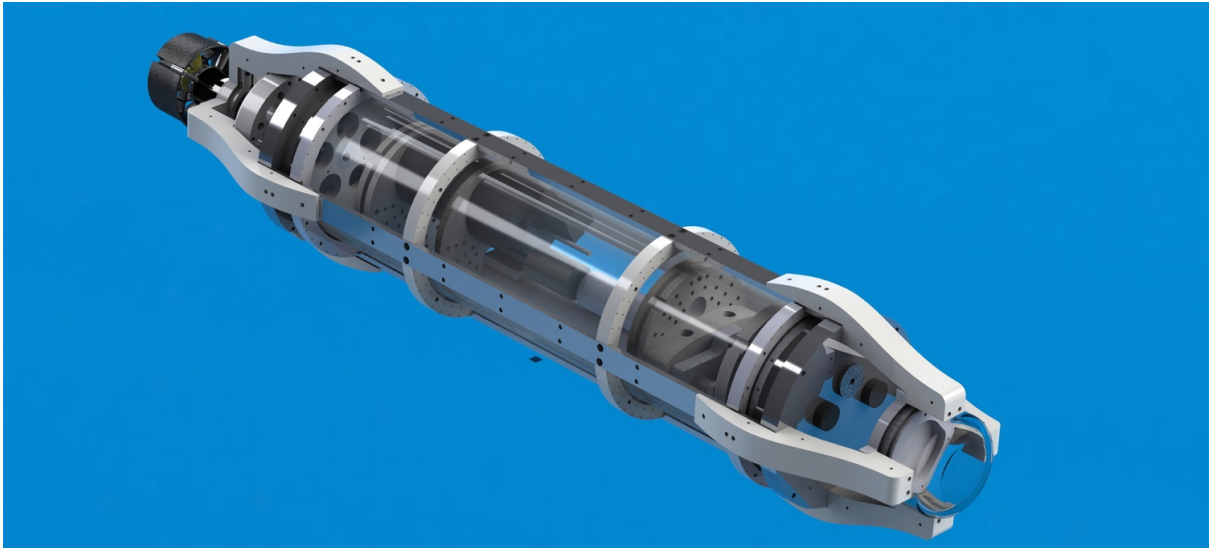


Figura 5.1: Dibujo en CAD del prototipo

Facilidad de maniobrabilidad y transporte Para la manipulación del equipo en un ambiente con poco espacio, y considerando que el equipo de trabajo es reducido, se opto por un vehículo ligero, sus 17.2 kg son poco peso en comparación con los mas de 50kg de los equipos comerciales.

Comunicación inalámbrica. Esta característica permite modificar fácilmente parámetros, algoritmos de control o recuperar información recabada sobre la trayectoria del equipo, esto acelera el proceso experimental de manera notable. Es necesario aclarar que al momento de sumergirse esta capacidad se pierde ya que el medio subacuático no es propicio para la comunicación inalámbrica por radiofrecuencia y la tecnología necesaria para la comunicación acústica es costosa.

Construcción modular Poder hacer cambios de forma rápida y eficaz, es de vital importancia para el trabajo experimental, la construcción modular permite modificar parametros, actuadores, sensores, permitiendo adaptar al prototipo para mejorar su desempeño para un ambiente o tarea específicos. Por otra parte, el poder desensamblar el prototipo hasta los componentes esenciales, permite reemplazar fácilmente partes que no cumplan con los requerimientos de los experimentos o que han sido dañadas, esto reduce los tiempos muertos por fallas en los mecanismos.

Cuerpo construido en acrílico transparente. Esto permite observar el comportamiento de los actuadores, ayudando en la detección de fallas en las primeras etapas de programación. Por otra parte, el frecuente desensamblado y apertura debidos al trabajo experimental, vulneran la hermeticidad del vehículo, un cuerpo transparente permite corregir posibles filtraciones antes de que causen daño al equipo electrónico.

Flotabilidad positiva Con una flotabilidad positiva de 2kg hace posible implementar sensores, actuadores, computadoras, mayor numero de baterías o dispositivos que faciliten las tareas de investigación, esto incrementa la versatilidad del prototipo.

Estructura robusta. Las simulaciones CAD, permiten estimar que la estructura soporta al menos 50 metros de profundidad, por otra parte, el limite impuesto por los conectores y el tanque de lastre es de 10 metros, este limite es suficiente para permitir al vehículo cumplir los objetivos descritos con anterioridad. Ya que se emplean sellos de nitrilo del tipo O-ring, la profundidad soportada por el sello hermético se ve afectada por la irregularidad y elasticidad del tubo de acrílico(a diez metros sufre una compresión de 0.06mm), sin embargo, con solo reemplazar esta parte por una versión apropiada de acero inoxidable es posible incrementar la capacidad de hermeticidad mas alla de la capacidad estructural del vehículo. El prototipo es totalmente escalable, por supuesto aumentar sus capacidades y alcance requiere una mayor inversión.

La siguiente figura muestra que sometido a una presión equivalente a 50 metros de agua, el tubo de acrílico tiene un factor de seguridad mínimo de 3, con base al criterio de tensión de Von Misses. Sin embargo, a esta profundidad el análisis computacional muestra una compresión esperada de 0.3mm, por lo que a 50 metros en la configuración actual, se espera una falla en hermeticidad.

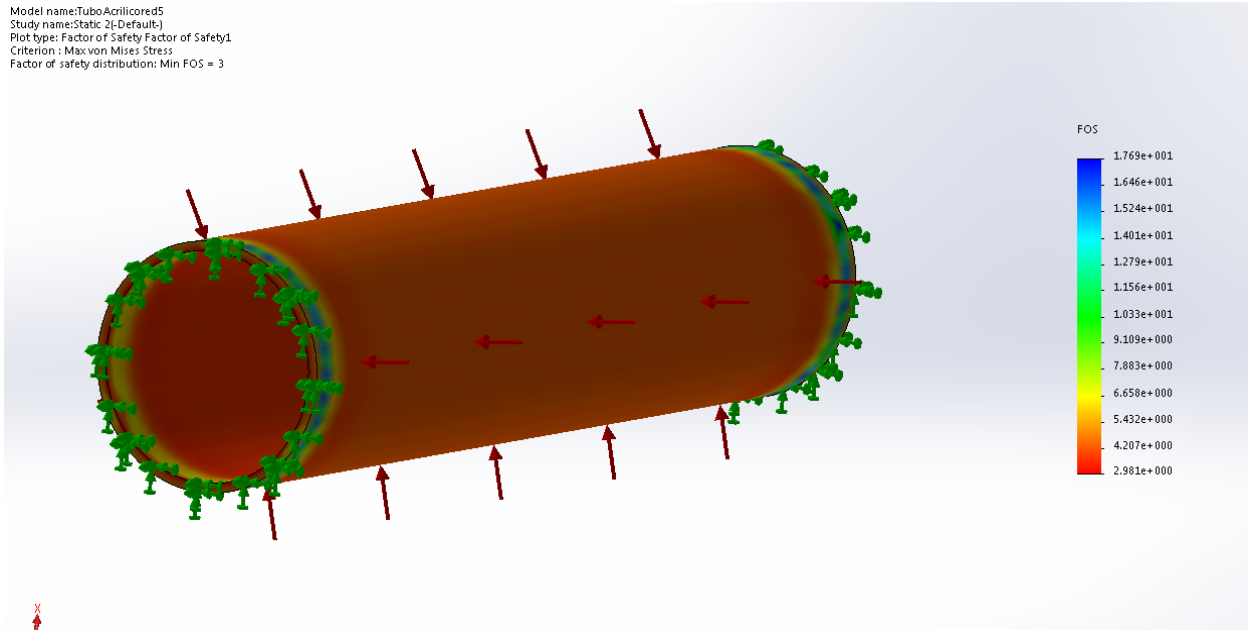


Figura 5.2: Análisis de la parte mas frágil de la estructura, el tubo de acrílico.

Bajo costo de desarrollo El costo de construcción del presente prototipo se estima en 50,000.00 M.N(aproximadamente 3,000 USD); un costo asequible en comparación con los equipos comerciales que son alrededor de 34 veces mas costosos.Es importante mencionar que para la construcción de este vehículo en específico, el costo estimado es notablemente menor debido a que la manufactura se llevo a cabo en un equipo por el cual no se pago renta ni gastos de operación y el trabajo de maquinado fue realizado por el sustentante de este trabajo.

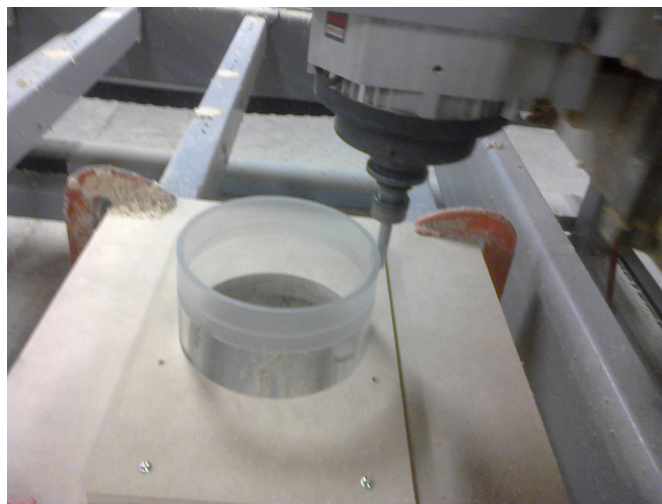


Figura 5.3: Rectificación de un extremo del tubo de acrilico.

5.2. Componentes

5.2.1. Estructura

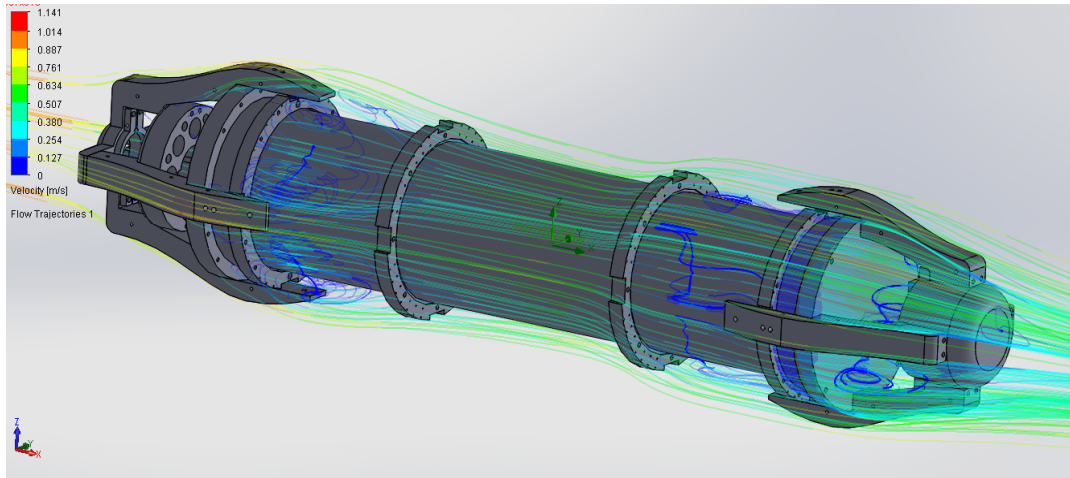


Figura 5.4: Análisis hidrodinámico de la estructura.

El cuerpo principal del prototipo está compuesto por un tubo de acrílico de seis pulgadas de diámetro externo por seis milímetros de espesor, herméticamente sellado en los extremos. El acrílico transparente permite observar el estado de los actuadores y equipos electrónicos sin abrir el prototipo, esto acelera el trabajo de desarrollo y detección de fallas, sin embargo, la hermeticidad del vehículo depende en gran medida de la compresibilidad del tubo, para mayor profundidad es necesario, entre otras cosas, reemplazar esta parte por la correspondiente de un material con mayor rigidez.

En una primera aproximación se optó por la construcción de un prototipo que controlara cabeceo y profundidad por medio de dos lastres, sin embargo, las simulaciones numéricas mostraron que este esquema presentaba serias complicaciones, además de ser ineficiente, por lo que se dio preferencia a un solo tanque de lastre y un actuador de desplazamiento lineal. Otras características presentes en el primer prototipo y no cumplieron con los requerimientos necesarios fueron el sellado por medio de un adhesivo de elastómeros que mostró un alto grado de desgaste en un periodo de aproximadamente un mes; y una mayor flotabilidad, que elevaba el peso del vehículo a 22Kg.



Figura 5.5: Primer ensamble del prototipo.

La brida que se ensambla para sellar el tubo de acrílico esta hecha de aluminio y posee dos ranuras para la implementación de los sellos, estos sufren una compresión del 18 % de su diámetro para lograr un sello adecuado, sin embargo, debido a la irregularidad del acrílico este sistema esta expuesto a falla por extrusion. [5]

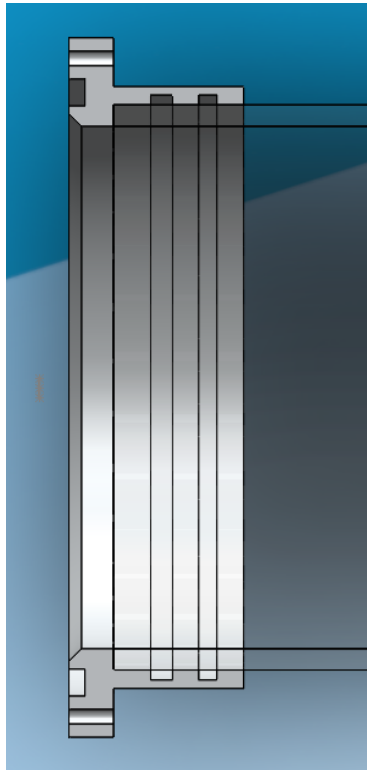


Figura 5.6: Corte transversal del ensamble constituido por la brida y el tubo de acrílico

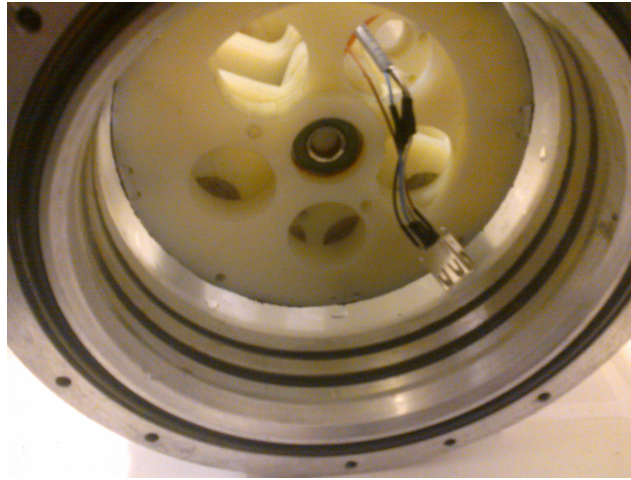


Figura 5.7: Detalle del ensamble de la Brida y el tubo de acrilico, con los sellos de nitrilo en su lugar

La siguiente figura muestra el corte transversal de unión de la brida con la tapa, esta ultima pieza produce un sello hermético gracias al empleo de sellos de tipo O-ring. Sobre esta pieza se ensamblan los conectores secos y la salida de agua del lastre.

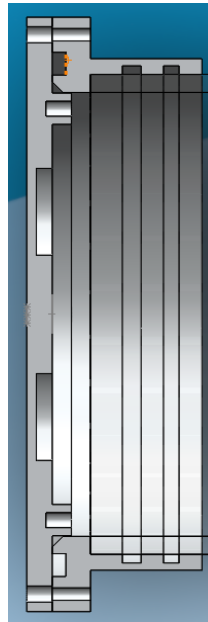


Figura 5.8: Corte transversal del ensamble de la tapa y la brida, se aprecian las ranuras para el mecanismo de sellado



Figura 5.9: Tapa y brida manufacturados en aluminio, se pueden notar los sellos de nitrilo.

A continuación se observa el ensamble externo completo, con los aros y barras de soporte que contribuyen a la rigidez y resistencia de la estructura.

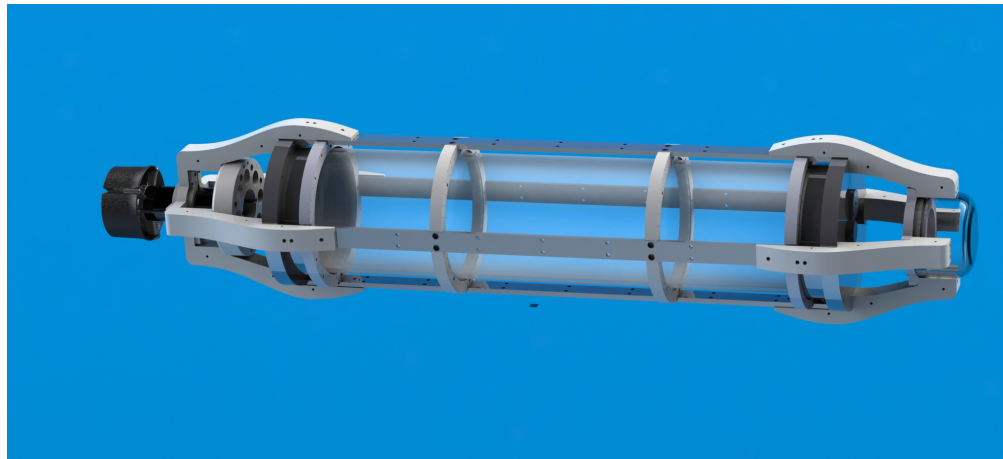


Figura 5.10: Ensamble externo del prototipo, las barras proporcionan un área propicia para sujetar alas, sensores o una cubierta exterior que mejore la hidrodinámica del vehículo.

nótese en la figura anterior los soportes del propela y el compartimento frontal, diseñado para la implementación de una cámara, esto permitirá incursionar en el control del vehículo empleando visión artificial. Por otra parte, la posición del propela y la cámara frontal es tal, que el centro de flotabilidad ($B = [0, 0, 0]$) del vehículo se encuentra en el centro del tubo de acrílico.

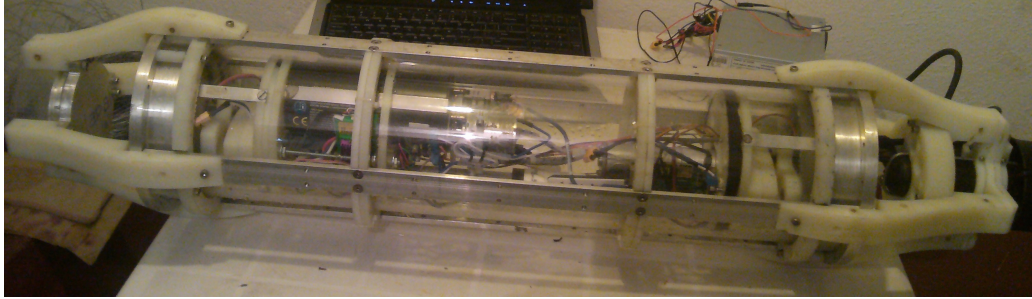


Figura 5.11: Prototipo manufacturado.

La precisión con la que fue fabricado, permite emplear la información del dibujo asistido por computadora como punto de partida para el trabajo de estimación de parámetros.

5.2.2. Actuadores

Tanque de lastre Este prototipo cuenta con un tanque de lastre de 500cc que permite aumentar la masa del vehículo para ascender o descender en profundidad, este tanque fue modificado para proporcionar la posición del vástago en todo momento. El límite de profundidad de este actuador es de 10 metros. El vástago es impulsado por un motor de corriente directa de 12v a con un consumo de corriente máximo de 2A, este actuador es la principal fuente de calor al interior del vehículo.



Figura 5.12: Tanque de lastre que se utilizó, con capacidad para diez metros de profundidad.

Actuador de desplazamiento lineal Para el control de x_g se tiene un actuador de desplazamiento lineal capaz de desplazar 8mm el centro de masa con una resolución de aproximadamente $10 \mu\text{m}$ mas errores de medición, y una velocidad de 10mm/s. Ha sido acoplado al actuador un potenciómetro de desplazamiento lineal para la realimentación de posición. Este actuador emplea 12 v y un máximo de 2A.

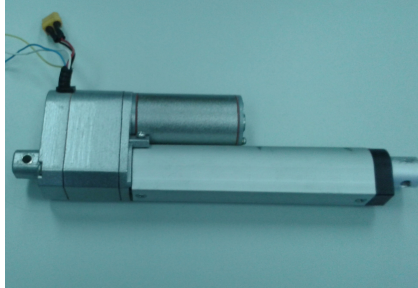


Figura 5.13: Actuador de desplazamiento lineal con una velocidad de 10 mm/s.

Servo con péndulo Se ha incluido en el diseño un péndulo con una masa de 1 kg, acoplado a un servo motor, con esto es posible desplazar y_g . Este actuador se empleara en trabajo futuro para el control de alabeo.

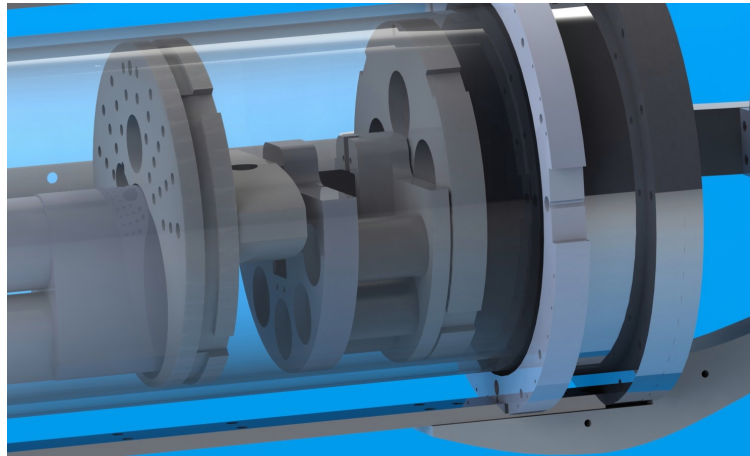


Figura 5.14: Péndulo que permitira el control en el ángulo de alabeo.

Propela Para generar movimiento longitudinal sin necesidad de alas, el prototipo tiene un trhuster en la parte posterior, esto permitirá en el futuro hacer pruebas en el modo de planeadorhíbrido.

Ensamble interno Se diseñó y manufacturó un sistema de soporte para los actuadores y electrónica que permite el deslizamiento de la masa móvil, la siguiente figura muestra el ensamble interno. Se prestó especial cuidado en disponer de un buen sitio para la electrónica sensible al ruido, y de vías para colocar los cables de datos alejados de los cables de potencia.

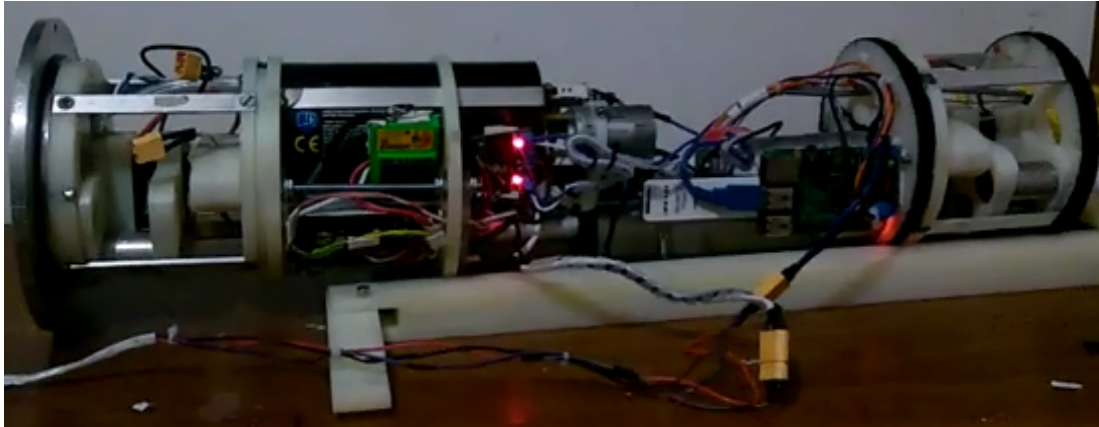


Figura 5.15: Ensamble interno del prototipo.

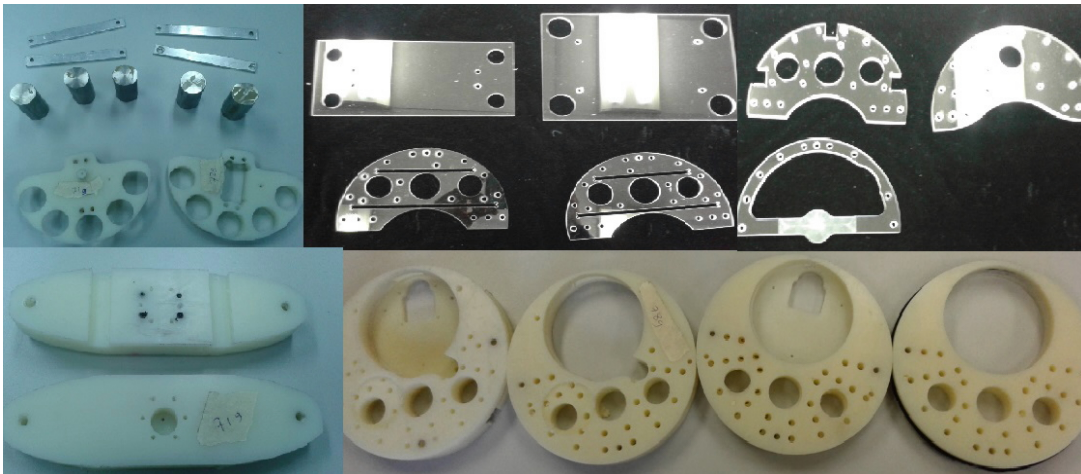


Figura 5.16: Partes manufacturadas para el ensamble interno

En la figura anterior se observan las piezas manufacturadas, los soportes para la electrónica fueron maquinados en acrílico, y las bases para los actuadores están fabricadas en nailon, nótese que las partes tienen múltiples barrenos, que son utilizados como vías para separar cables con diversas señales.

5.3. Electrónica y sensores.

El trabajo de adquisición de información y procesamiento de la misma es llevado a cabo por dos microcontroladores Atmega 328 operando a 16MHz, implementados en la plataforma de desarrollo Arduino, un dispositivo de código abierto que permite una rápida implementación de sensores y actuadores, además ofrece la posibilidad de optimización a través de ATMEL Studio. Se emplean dos microcontroladores debido a que los sensores del vehículo requieren de tres interrupciones externas operando a más de 100 Hz, esto es una carga adicional al algoritmo necesario para implementar la ley de control y enviar los datos para su almacenamiento, cuyo tiempo de ciclo se ubica alrededor de los 10ms.

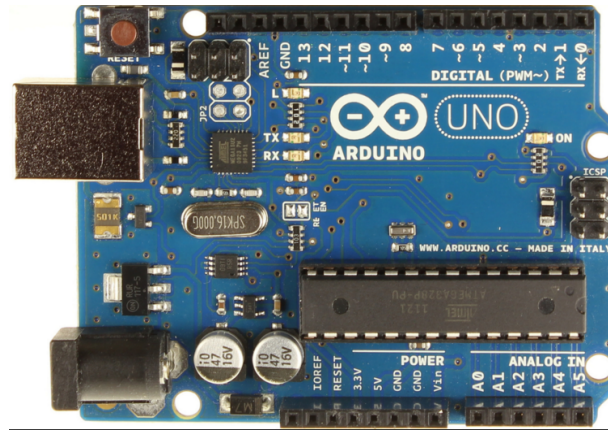


Figura 5.17: Arduino Uno.

La figura anterior muestra la plataforma de desarrollo Arduino que ofrece ventajas notables, entre las que destaca una amplia disponibilidad de recursos de licencia libre, esto facilita la implementación de algoritmos y dispositivos, cuenta con 14 entradas/salidas digitales de las cuales 6 pueden generar una salida de modulación de ancho de pulso, 6 entradas analógicas y comunicación serial a través de USB, cuenta además con un puerto ISP, que entre otras cosas, sirve para programar el microcontrolador con Atmel Studio, la herramienta que ofrece el fabricante del atmega 328, esto permite optimizar el código cuando el tiempo de desarrollo no es un problema.

El almacenamiento de datos para su análisis y la comunicación inalámbrica son dos tareas indispensables para acelerar el análisis de desempeño de los algoritmos de control que puedan implementarse, y se llevan a cabo gracias a la inclusión de una computadora embebida. La Raspberry Pi 2, es una plataforma de desarrollo libre, cuenta con un procesador ARM de cuatro núcleos a 900 MHz, cuatro puertos USB, 40 entradas/salidas de uso general, puerto ethernet, ranura para memoria micro SD, interfaz para cámara y pantalla, entre otras características. La conexión inalámbrica se lleva a cabo mediante el servidor de desarrollo libre xRDP para linux, que hace posible la conexión remota desde windows, esta conexión permite descargar tan pronto como

emerge el AUV, la información recabada por la computadora embebida durante la experimentación, y hacer las correcciones necesarias en el programa sin necesidad de abrir el dispositivo, actividad que toma a una persona alrededor de 30 minutos.

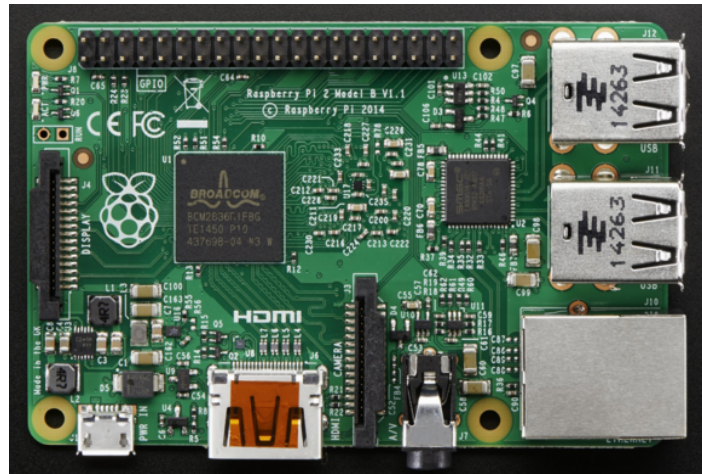


Figura 5.18: Raspberry Pi 2.

Para poder llevar a cabo un control en la orientación del vehículo, es necesario conocer la posición del mismo, para esta tarea se utiliza una unidad de medición inercial, IMU por sus siglas en inglés, el sensor utilizado en el presente prototipo es el MPU-6050, una central inercial que cuenta con un acelerómetro y un giroscopio de tres ejes, además, esta IMU tiene incorporada una unidad digital de procesamiento de movimiento (DMP), que implementa un algoritmo que fusiona la información del giroscopio y el acelerómetro y tiene la capacidad de proporcionar la posición del dispositivo en ángulos de Euler, o cuaterniones, con una frecuencia de hasta 100 Hz. La comunicación que emplea este sensor es I2C, el consumo de energía es de 11mW. Para el algoritmo implementado en el microcontrolador de control, se empleó el vector de ángulos de Euler proporcionado por el DMP, en específico el ángulo de cabeceo, ya que la operación del vehículo requiere ángulos pequeños, la singularidad en $\pm \frac{\pi}{2}$.



Figura 5.19: Central inercial con DMP incorporado.

El prototipo cuenta con un sensor de presión, que le permite calcular la profundidad a la que se encuentra, el sensor implementado es el BMP-180, este sensor fusiona la información de presión y temperatura para proporcionar una lectura estable a través de su interfaz I2C, con una resolución de 0.03hPa, y un rango de medición de 300-1100hPa, por lo que es útil para proporcionar mediciones hasta 11 metros, este rango y un bajo costo, lo hace ideal para aplicaciones en poca profundidad.

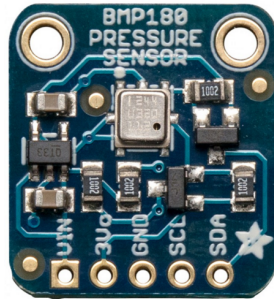


Figura 5.20: Sensor de presión BMP180.

Conocer la cantidad de agua en el tanque de lastre es indispensable para la implementación de la ley de control tratada en la sección tres, ya que nos permite conocer con precisión el valor de m , y estimar la variación en x_g debido al cambio de distribución de la masa provocado por el lastre. Con esta necesidad en mente, se diseñó un acople para implementar un codificador al tanque de lastre, esto nos permite conocer la posición del vástago con una resolución de $5 \mu m$ o $20mg$. El codificador rotatorio genera 24800 pulsos por los 125 milímetros de desplazamiento del vástago, se emplean interrupciones externas en el microcontrolador para crear una rutina que calcule la posición.



Figura 5.21: Codificador rotatorio de 200 ppr.

Una de las principales fuentes de calor dentro del vehículo son los motores de corriente directa y los puentes H, esto es importante al considerar el ambiente hermético dentro del vehículo. Los puentes H permiten el control de los actuadores por parte de los sistemas embebidos. En este trabajo se emplearon puentes VNH5019, que tienen un voltaje de operación de 5V a 24V y una capacidad de operación continua a 12A.

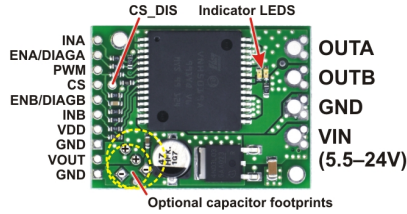


Figura 5.22: Puente H VNH5019.

Con respecto a la fuente de energía, la flotabilidad positiva de este AUV, combinado con baterías con alta densidad energética como las de polímero de litio, hace posible que en la configuración actual el vehículo pueda transportar hasta 28 Ah, en tiempo de operación esta cantidad de energía se traduce en 50 horas de autonomía, para las pruebas experimentales se emplearon dos baterías de polímero de litio de 2.8Ah. La tabla 2.1 en [6] muestra una interesante comparación del desempeño de diversas tecnologías de almacenamiento de energía, en la que se muestra a las baterías de polímero de litio como una de las de mayor eficiencia.



Figura 5.23: Batería de polímero de litio de 2.8Ah.

El siguiente diagrama muestra de manera básica, la configuración en la que se encuentran conectados los diversos componentes electrónicos, la conexión inalámbrica entre la computadora embebida y la computadora de control emplea un protocolo wifi. Es importante recordar que cuando el vehículo se sumerge, la conectividad al exterior se pierde, la información del experimento se guarda en la computadora embebida para su recuperación al restablecer la conexión.

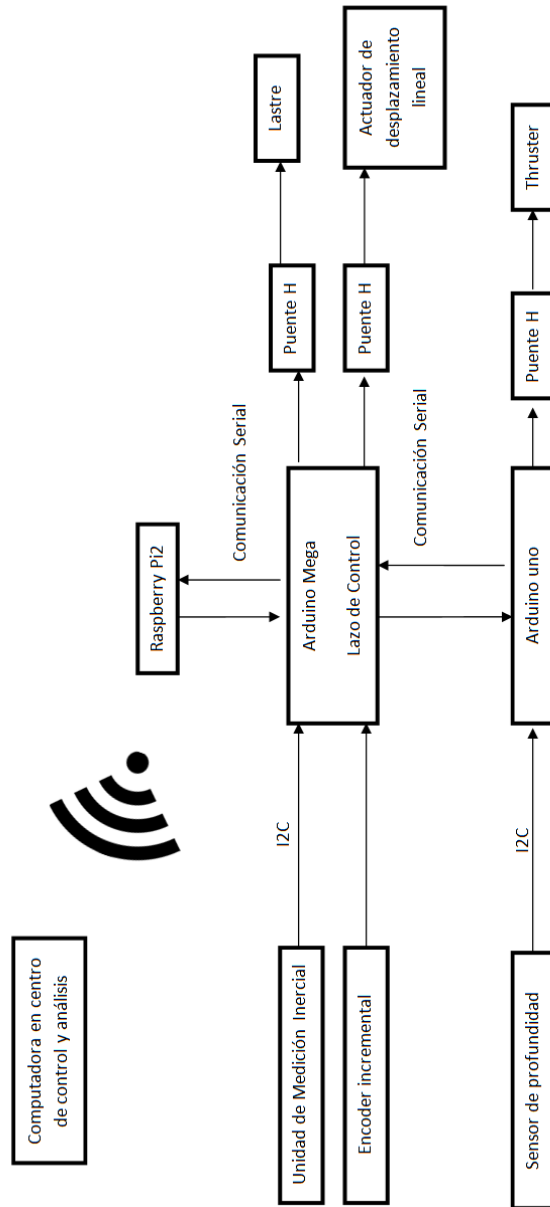


Figura 5.24: Diagrama de las conexiones básicas de los circuitos electrónicos.

6. Resultados experimentales.

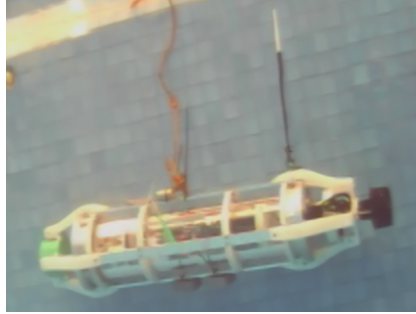


Figura 6.1: Primera prueba de operación de los actuadores y sensores del dispositivo.

En esta sección se mostrara el resultado de implementar la ley de control descrita por la ecuación (98) en el prototipo. Se le ha dado prioridad al control del ángulo de cabeceo, ya que es indispensable para el trabajo futuro, sin embargo también se analizaran resultados del control en profundidad empleando el tanque de lastre. En una primera aproximación se empleo la caracterización proporcionada por el software cad, sin embargo, como se mostrara mas adelante, errores en el orden de decenas de μm en el posicionamiento de x_g tienen un impacto notorio en el desempeño de la ley de control. La siguiente figura muestra una prueba experimental antes de la estimación de parámetros, empleando el conocimiento que se tiene con antelación. Por otra parte para la primera prueba la resolución para el posicionamiento de x_g era de $217 \mu m$.

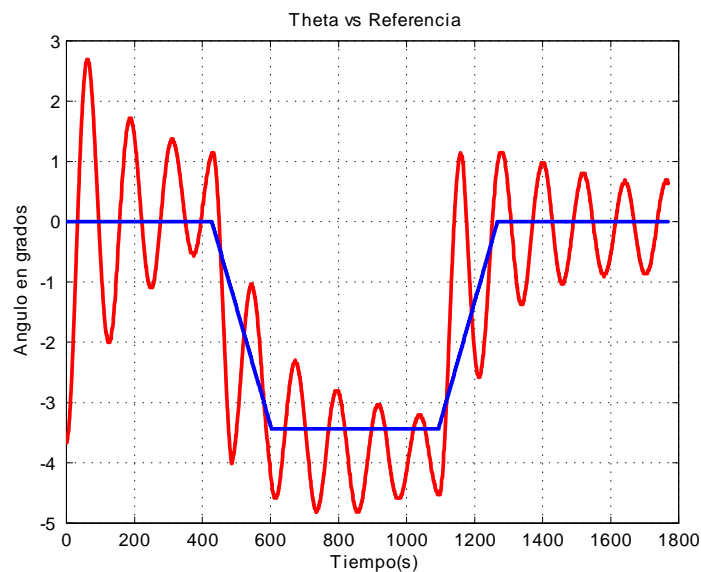


Figura 6.2: Theta vs Referencia, Sin estimación experimental de parámetros y con una resolución de $217 \mu m$ para el posicionamiento de x_g .

Como es posible apreciar en la gráfica anterior, el algoritmo de control muestra un mal desempeño, entre las posibles causas que se consideraron se encuentran una resolución insuficiente y falta de estimación experimental de parámetros, fueron hechas las modificaciones y el trabajo experimental necesario para resolver estos problemas. A continuación se muestra la gráfica con una resolución de $10\mu u$ para el posicionamiento de x_g . Este aumento en la resolución se logro implementando un potenciómetro lineal, adicional al sistema de realimentación con el que contaba el actuador de desplazamiento lineal, además se redujo la masa desplazable, estas modificaciones ya han sido consideradas para la descripción del prototipo en las secciones anteriores.

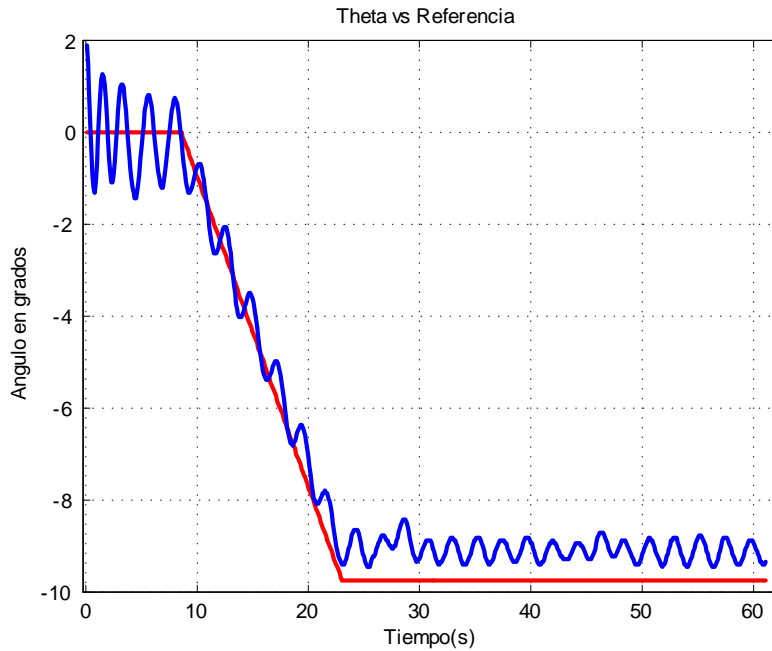


Figura 6.3: Desempeño de la ley de control sin estimación experimental de parámetros pero con una resolución de $10\mu m$ para el posicionamiento de x_g

En la figura anterior se aprecia una notable mejora con respecto a la primera gráfica, por lo que es posible decir que la resolución necesaria para el posicionamiento de x_g se encuentra en el orden de micrómetros. La siguiente actividad experimental fue realizar una estimación de parámetros para el valor z_g y para localizar el punto del actuador de desplazamiento lineal correspondiente a $x_g = 0$. Esta tarea es relativamente simple, ya que, como se pudo observar en la figura 4.19, en la sección de simulación, cuando $x_g = x_g + \varepsilon$ se genera un error en estado estacionario cuyo signo depende del signo de ε , por lo que, manteniendo las ganancias k_p y k_d del controlador, se hicieron múltiples pruebas para corregir el error ε , esto se llevo a cabo tomando como objetivo la regulación para $\theta = 0$, de esta forma se consigue anular el efecto del error en z_g .

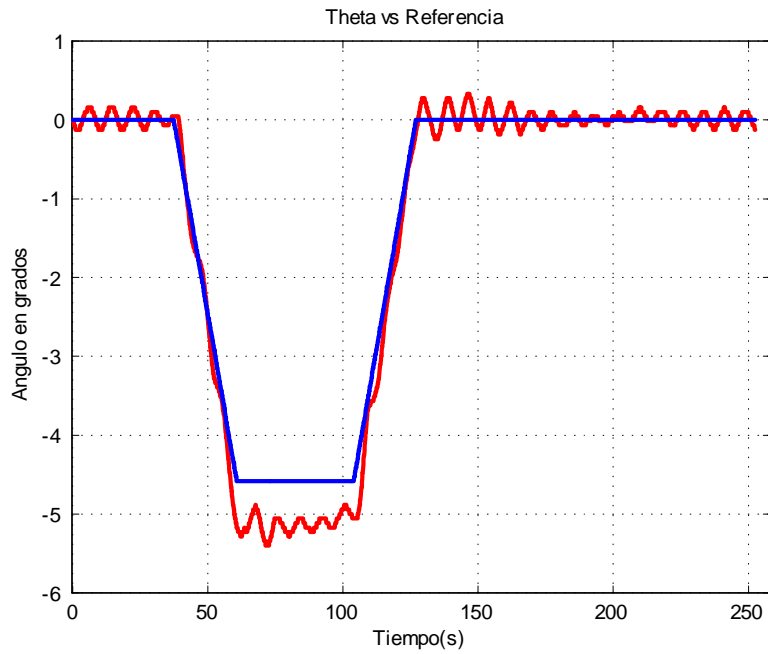


Figura 6.4: Theta vs referencia del sistema, tras la estimación experimental de de x_g .

nótese en la gráfica anterior que el trabajo de estimación de parámetros tiene un importante impacto en el desempeño de la regulación, cuando la referencia $\theta_{deseada} = 0$. Una vez calculado el valor de $\varepsilon = -0,0007$, se estimó el error en z_g repitiendo el procedimiento descrito con anterioridad, pero ahora con una referencia para $\theta_{deseada} = -5$. Después de algunos ajustes en la distribución del peso, se calculó $z_g = 0,0015$. A continuación se muestran los resultados experimentales obtenidos una vez hechas las correcciones descritas en los párrafos anteriores.

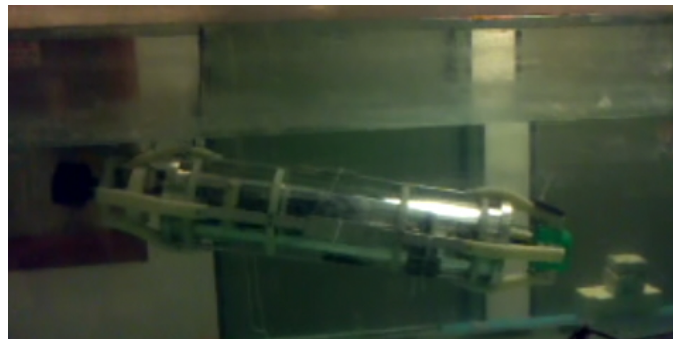


Figura 6.5: Prototipo construido efectuando una regulación de θ en -10 grados.

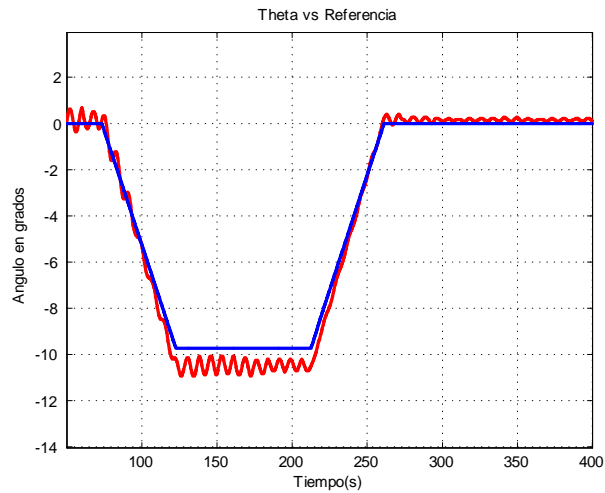


Figura 6.6: θ vs referencia, después de la estimación experimental de parámetros y con una resolución de $10\mu m$ para el posicionamiento de x_g

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, el desempeño del controlador es razonable para la tarea de regulación, sin embargo, es posible que la estimación de z_g requiera ajustes, a continuación se presenta la gráfica de error.

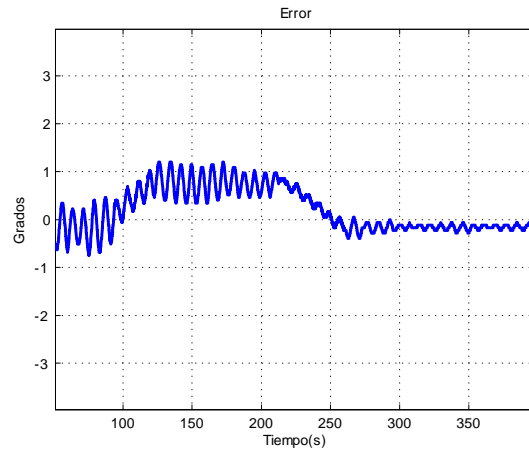


Figura 6.7: Error en la regulación del ángulo θ

A continuación se presenta la gráfica de la señal de control, a pesar de que las gráficas de regulación y error se presentan el grados es necesario aclarar que el algoritmo de control se ejecuta con el ángulo en radianes, las ganancias utilizadas son $k_p = 0,8$ y $k_d = 0,001$.

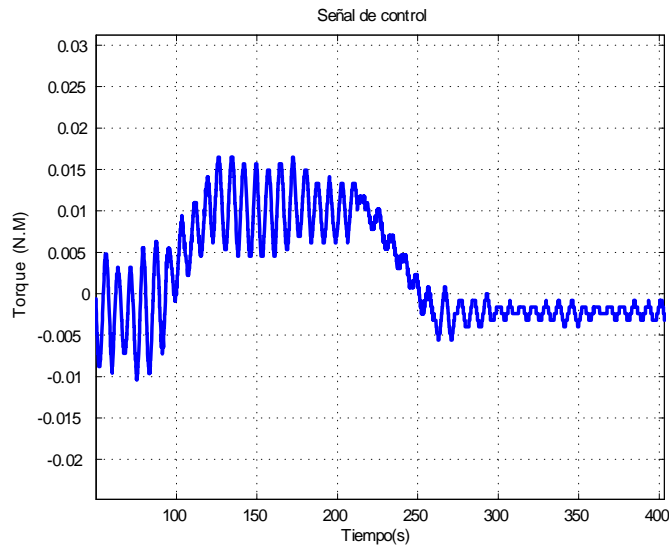


Figura 6.8: Señal de control .

Retomando la ecuación (116) se calcula el valor de x_g correspondiente al par que se quiere ejercer en el sistema.

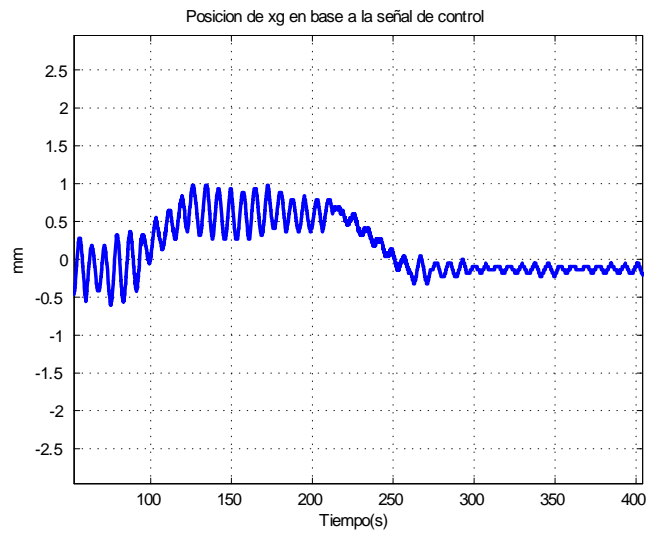


Figura 6.9: Centro de gravedad x_g .

El valor de x_g esta relacionado con un valor para la masa desplazable, esta relación esta dada por.

$$d_M = ((x_g - p_1 d_L^4 - p_2 d_L^3 - p_3 d_L^2 - p_4 d_L - p_5)/0,271485) + C_p \quad (118)$$

En donde d_m es la distancia de la masa, $p_1 - p_5$ son coeficientes de una interpolacion de 4 orden que se realizo con la información del modelo tridimensional, d_L es la distancia del vástago del tanque de lastre, y C_p es el coeficiente de corrección que fue calculado durante los experimentos. A continuación se muestra una gráfica con el seguimiento de la masa.

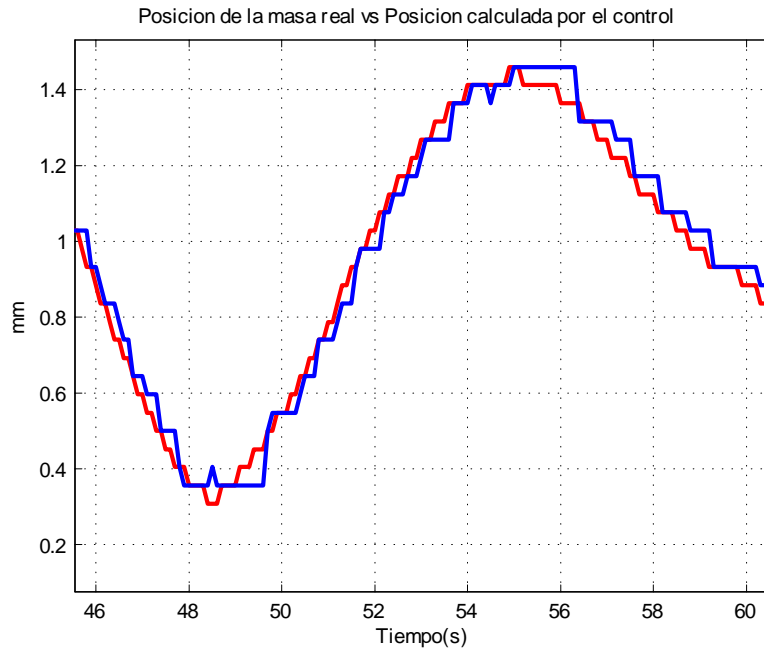


Figura 6.10: Posición real de la masa vs posicion calculada por el algoritmo de control.

La gráfica anterior muestra que al sistema del actuador de desplazamiento lineal le toma hasta 300ms corregir errores de hasta $100\mu m$, esto muestra una posible dirección de trabajo para eliminar las oscilaciones con amplitud promedio de 0.5 grados, que muestra el sistema. Por otra parte se implemento también el control de profundidad, si bien es necesario mejorar la estimación de parametros para el lastre se obtuvieron los siguientes resultados.

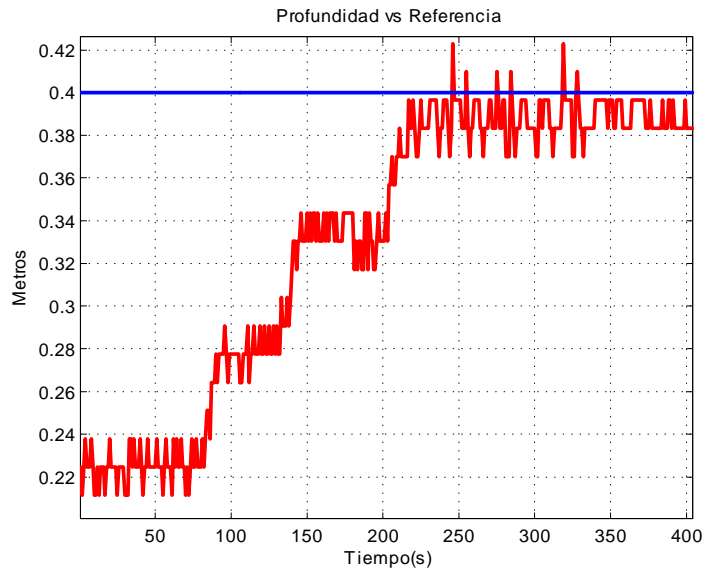


Figura 6.11: Regulación en profundidad

Como es posible apreciar en la figura anterior, la medición de profundidad es demasiado ruidosa, esto afecta el desempeño de la ley de control, es necesario recordar que, a diferencia del control de cabeceo, un control continuo en profundidad por medio del lastre no es útil para el trabajo futuro a continuación se muestra la gráfica de d_m .

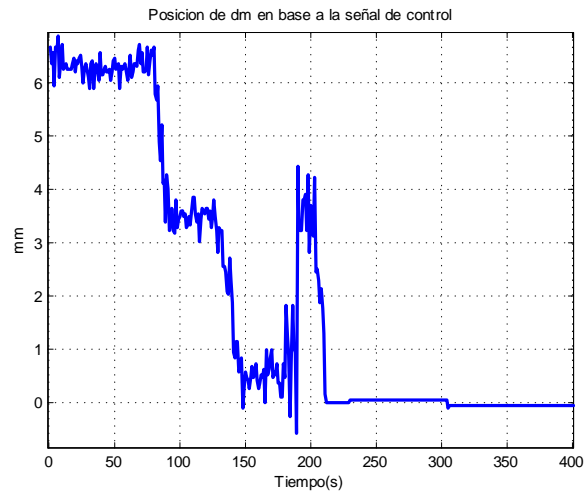


Figura 6.12: Posición del vástago del tanque de lastre.

La siguiente figura muestra el desempeño de regulación den cabeceo durante, durante esta prueba se agregan perturbaciones producidas por el movimiento del lastre y el cambio de masa del vehículo.

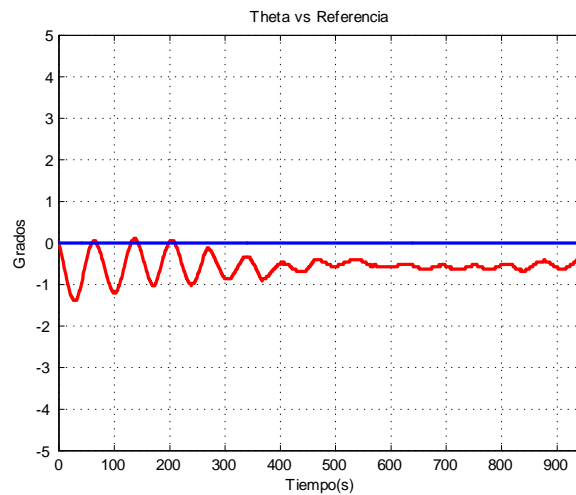


Figura 6.13: Regulación de θ ante perturbacion producida por el tanque de lastre.

Como se muestra en la gráfica anterior el control puede regular el ángulo cabeceo aun ante la pertutbación producida por el tanque de lastre, empleando la estimación de parámetros proporcionada por el software cad.

7. Conclusión

7.1. Conclusión

El modelo considerado ha representado el compartimiento del vehículo con la precisión suficiente para tomar a la simulación numérica como referencia para la identificación y solución de problemas en la implementación experimental.

El control PD implementado en cabeceo demostró hacer el trabajo de regulación a pesar del notable retardo introducido por el actuador lineal y la perturbación generada por el tanque de lastre.

Se ha presentado el proceso de diseño, manufactura, y operación de un AUV de bajo costo, confiable y propicio para la actividad experimental e implementación de algoritmos de control.

El modelo tridimensional creado en el software CAD ha proporcionado parametros con los cuales comenzar los experimentos físicos, sin embargo ha sido necesario trabajo adicional para estimar el valor de los parametros indispensables para un buen desempeño de control.

El AUV Desarrollado en este trabajo tuvo un adecuado desempeño durante el trabajo experimental, no presento filtraciones y la comunicacion inalámbrica permitió un rápido análisis e implementación de correcciones y ajustes.

7.2. Trabajo Futuro

Se tiene como principal trabajo futuro el desarrollo de una ley de control que permita el seguimiento de trayectorias en tres dimensiones por parte del vehículo. Se retomara el modelo completo de Fossen. para incluir el desplazamiento en y_g inducido por el movimiento del péndulo y se agregara al modelo para los efectos derivados del movimiento del actuador de desplazamiento lineal, el cambio en la masa del vehículo producido por el tanque de lastre y las fuerzas hidrodinámicas de empuje y arrastre generadas por las alas y cola que serán implementados.

Como se ha mencionado anteriormente, el control se vehículos AUV ofrecen una amplia variedad de temas susceptibles de investigación, entre ellas se encuentran la navegación empleando la técnica de análisis de intervalos, la implementación de algoritmos de visión artificial o dispositivos de comunicacion y sensado acústico, y, como se observo en la sección experimental, la estimación de parametros. Con respecto a esto se pueden mencionar soluciones desde el ámbito de control, como la propuesta por Kachroo en [7], que contempla una aproximación robusta mediante un modelo con incertidumbres en la entrada de control, considerando para el diseño de la ley de control robusta, un error entre el comando de control computado y la entrada de control real.

En el area de desarrollo del prototipo pueden definirse las siguientes acciones a realizar (ordenadas de mayor a menor prioridad).

Mejora del actuador lineal, como se vio en las pruebas experimentales, la velocidad del actuador (10mm/s) es insuficiente para el control del vehículo, se proyecta la introducción de un actuador de desplazamiento lineal con una velocidad de hasta 100mm/s. Por otra parte se incrementara la resolución de posicionamiento para x_g pasando de $10\mu m$ a $2.5\mu m$. A la par de esta implementación se pondrá en operación al actuador del péndulo permitiendo el control de alabeo y (en combinación con alas y cola) el de guiñada.

Se evaluarán los beneficios de implementar una computadora embebida y microcontroladores de mayor potencia, que aceleraría el proceso experimental al permitir un procesamiento y una comunicación de mayor velocidad, pero que generaría nuevos retos como la regulación de la temperatura dentro del compartimento hermético y un mayor requerimiento de energía.

Implementación de alas, cola y alerones para dotar al vehículo de la capacidad de planeo y proporcionar estabilidad, para este trabajo se empleara tecnología de software CFD y CFX para realizar el análisis que permitirá seleccionar un tamaño y forma óptimos para el vehículo. Así mismo se diseñara una cubierta externa que permita al vehículo tener un flujo laminar al desplazarse.

Revisión del alcance del prototipo, se diseñara un compartimento hermético compatible con el desarrollo hecho hasta ahora para pruebas a mayor profundidad, se buscaran alternativas a los conectores secos, que permitan una operación confiable. Una incursión a mayores profundidades requerirá adecuar la capacidad del tanque del lastre.

Referencias

- [1] T. Fossen. Guidance. Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control. John Wiley & Sons, West Sussex, United Kingdom, 2011.
- [2] J.G. Graver y N.E. Leonard: Underwater planeadordynamics and control. In Proc. 12th Int. Symposium on Unmanned Untethered Submersible Tech. Durham, NH, 2001.
- [3] N. Cruz. Autonomous Underwater Vehicles. Intech, Rijeka, Croatia, 2011.
- [4] W. Khalil. Modeling Identification and Control of Robots. Kogan Page Science. Sterling VA, USA, 2004.
- [5] Parker Hannifin Corporation. O-ring Handbook. Parker Hannifin Corporation. Cleveland, OH, USA, 2007.
- [6] Gwyn Griffiths. Technology and Applications of Autonomous Underwater Vehicles. Taylor and Francis Inc. New York USA, 2003.
- [7] Kachroo Pushkin. Autonomous Underwater Vehicles Modeling, Control Design and Simulation. Taylor and Francis Group. New York USA, 2011
- [8] Moss Dennis. Pressure Vessel Design Manual. Elsevier. Waltham, MA, USA 2013
- [9] Duc Do Khac. Control of Ships and Underwater Vehicles, Design for Underactuated and Nonlinear Marine Systems. Springer. Londres, 2009.
- [10] Elba Dolores Antonio Yanez , "Pilotaaje Autonomo de un Mini-submarino con Vision Artificial", Tesis de maestria,2012.
- [11] Yang Rui, Benoit Clement y Ali Mansour. Modeling of a Complex-Shaped Underwater Vehicle for Robust Control Scheme. Springer Science+Business Media Dordrecht, 2015.
- [12] Chorin Alexandre. A mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [13] J.G. Graver y N.E. Leonard:Model-Based Feedback Control of Autonomous Underwater planeadores. IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol 26, No.4, 2001.
- [14] Brown Frank. Engineering Mechanics. John Wiley and Sons, INC. Ka, USA,1949.