



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Multi-sincronización generalizada de sistemas  
caóticos vía múltiples controladores dinámicos: Un  
enfoque algebraico diferencial**

T E S I S

Que presenta

Christopher Diego Cruz Ancona

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE

CONTROL AUTOMÁTICO

Director de Tesis

Dr. Rafael Martínez Guerra

Ciudad de México

Diciembre, 2018



# Agradecimientos

AL CONACYT por el apoyo económico brindado a lo largo del programa de Doctorado y por continuar confiando en nosotros.

A MIS PADRES por el apoyo incondicional que siempre me han brindado, porque siempre hacen lo imposible por mí y mis hermanos. Les debo todo lo que soy. Los amo.

A MIS HERMANOS por ser mi ejemplo y por todo lo que hemos pasado juntos, porque sé que puedo contar con ustedes en todo momento. Los quiero mucho.

A MI ESPOSA ALEJANDRA gracias por compartir tu vida conmigo, por tu apoyo incondicional y paciencia, eres el amor de mi vida. Te amo.

A LOS MARAVILLOSOS Y TRAVIESOS QUICO Y MAX por acompañarnos en tantas desveladas con mordidas y lamidas.

A LOS PROFESORES Y. NISHIO Y Y. UWATE por su gran apoyo, consejos y discusiones sobre mi trabajo de investigación y la vida en la academia.

A MI ASESOR por la excelente dirección en este trabajo de investigación e introducirme en el álgebra diferencial. Muchas gracias.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>xv</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>1</b>
2.1. Álgebra diferencial en teoría de control . . . . .	1
2.1.1. Anillos y campos. . . . .	2
2.2. Grafos y consenso en el SMA . . . . .	8
<b>3. MSG como un problema de consenso siguiendo al líder</b>	<b>13</b>
3.1. Observabilidad algebraica y formas canónicas de observabilidad generalizadas para el SMA . . . . .	15
3.1.1. Comportamiento interno, linearización exacta y formas canónicas . . . . .	17
3.1.2. Multi-sincronización generalizada y consenso . . . . .	20
3.2. Condiciones para lograr el consenso siguiendo al líder del SMA en MSG . . . . .	21
3.2.1. Resultado 1 . . . . .	22
3.3. Un problema más general de consenso siguiendo al líder en redes heterogéneas . . . . .	27
3.3.1. Resultado 2 . . . . .	31
3.4. Aplicación a una red de sistemas caóticos . . . . .	33
3.4.1. Ejemplo 1 . . . . .	34
3.4.2. Ejemplo 2 . . . . .	44
<b>4. Extensiones para sistemas de orden fraccionario conmensurado</b>	<b>47</b>
4.1. Multi-sincronización de sistemas caóticos de orden fraccionario . . . . .	48
4.2. Observabilidad algebraica y formas canónicas de observabilidad generalizadas para sistemas de orden fraccionario . . . . .	50
4.3. Multi-sincronización generalizada de sistemas de orden fraccionario . . . . .	55
4.4. Extensión de los resultados a interacciones complejas entre esclavos . . . . .	61
4.5. Algunos ejemplos numéricos . . . . .	67
4.5.1. Ejemplo 3 . . . . .	67
4.5.2. Ejemplo 4 . . . . .	73
4.5.3. Ejemplo 5 . . . . .	79
4.5.4. Ejemplo 6 . . . . .	89

<b>5. Conclusiones</b>	<b>95</b>
5.1. Contribuciones y discusiones . . . . .	96
5.2. Direcciones futuras . . . . .	97
<b>A. Estabilidad de conjuntos y sistemas convergentes</b>	<b>99</b>
A.1. Funciones de comparación . . . . .	99
A.2. Estabilidad de conjuntos . . . . .	99
A.3. Sistemas convergentes . . . . .	103
<b>B. Propiedades sobre sistemas de orden fraccionario</b>	<b>109</b>
B.1. Estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo . . . . .	110
<b>Publicaciones</b>	<b>113</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>

# Índice de figuras

1.1.	Sensibilidad dependiente de condiciones iniciales . . . . .	XVIII
1.2.	Esquema de sincronización unidireccional maestro-esclavo . . . . .	XIX
1.3.	Sincronización de sistemas caóticos idénticos de Lorenz acoplados ( <i>reemplazamiento parcial</i> ) . . . . .	XX
1.4.	Atractores de sistemas caóticos de Rössler y Lorenz desacoplados . . . . .	XXIV
1.5.	Sistemas caóticos de Rössler y Lorenz acoplados ( <i>acoplamiento difusivo</i> ) . . . . .	XXV
1.6.	Panorama general en la sincronización del caos . . . . .	XXVII
1.7.	MAS con un único líder sin interacción entre seguidores . . . . .	XXXI
1.8.	MAS y MSG mediante un enfoque de álgebra diferencial . . . . .	XXXII
2.1.	La extensión de campo $K/k$ , $k \subset K$ . . . . .	3
2.2.	Diferenciación en un anillo conmutativo con unidad $A$ . . . . .	4
2.3.	Variedad de sincronización de cada seguidor en el problema de consenso siguiendo al líder . . . . .	11
3.1.	MSG como un problema de consenso siguiendo al líder . . . . .	14
3.2.	Árbol dirigido de cobertura con un nodo como raíz $\mathcal{G}_{N+1} = (\mathcal{V}_{N+1}, \mathcal{E}_{N+1}, \mathcal{A}_{N+1})$ . No existen interacciones entre los seguidores. . . . .	21
3.3.	Grafo de comunicación de un árbol dirigido de cobertura $\mathcal{G}_{N+1} = (\mathcal{V}_{N+1}, \mathcal{E}_{N+1}, \mathcal{A}_{N+1})$ en el problema general de consenso siguiendo al líder. Existe una interacción arbitraria entre seguidores. . . . .	28
3.4.	Árbol dirigido de cobertura en Ejemplo 1 sin interacción entre seguidores. . . . .	34
3.5.	Atractor caótico del sistema de Colpitts . . . . .	35
3.6.	Atractor caótico del sistema de Rössler . . . . .	36
3.7.	Atractor caótico del sistema de Chua . . . . .	37
3.8.	Acuerdo en coordenadas transformadas. . . . .	42
3.9.	Consenso siguiendo al líder. . . . .	43
3.10.	Árbol dirigido de cobertura $\mathcal{G}_3$ con interacción entre esclavos. . . . .	44
3.11.	Sincronización de la red $\mathcal{G}_3$ del Ejemplo 2 con el protocolo dinámico de consenso (3.30), acoplamiento constante $c = 50$ ; $e_\eta := e$ y $e_x := \mathbf{1}_2 \otimes x_3 - (H_1(x_1) \ H_2(x_2))^T$ . . . . .	46
3.12.	Señales acotadas de los protocolos dinámicos de consenso con acoplamiento $c = 50$ para el Ejemplo 2. . . . .	46
4.1.	Configuración de la multi-sincronización generalizada para sistemas de orden fraccionario . . . . .	56

4.2. Interacción entre esclavos en una red compleja. . . . .	61
4.3. Ejemplo 3: SG de sistemas de orden fraccionario . . . . .	67
4.4. Ejemplo 3. SGF entre sistema Arneodo y Chua-Harley. . . . .	72
4.5. Ejemplo 4: SG y SC de sistemas de orden fraccionario . . . . .	73
4.6. Ejemplo 4. MSGF en una red de sistemas de Arneodo y Chua-Harley. . . . .	78
4.7. Ejemplo 5: MSG de sistemas de orden fraccionario. Configuración de los sistemas maestros $x_{m_1}$ , $x_{m_2}$ y los sistemas esclavos $x_{s_1}$ , $x_{s_2}$ , $x_{s_3}$ , $x_{s_4}$ y $x_{s_5}$ . . . . .	79
4.8. Ejemplo 5: Errores de sincronización . . . . .	86
4.9. Ejemplo 5. MSGF de trayectorias de sistemas Arneodo, Chua-Harley y Rössler. . . . .	87
4.10. Ejemplo 5. MSGF atractores de Arneodo, Chua-Harley y Rössler . . . . .	88
4.11. Ejemplo 6: MSG de sistemas de orden fraccionario con interacciones complejas entre esclavos. Configuración de los sistemas maestros $x_{m_1}$ , $x_{m_2}$ y los sistemas esclavos $x_{s_1}$ , $x_{s_2}$ , $x_{s_3}$ , $x_{s_4}$ y $x_{s_5}$ . . . . .	89
4.12. Ejemplo 6: Errores de sincronización (interacción compleja) . . . . .	92
4.13. Ejemplo 6. MSGF de trayectorias de sistemas Arneodo, Chua-Harley y Rössler (interacción compleja). . . . .	93
4.14. Ejemplo 6. MSGF atractores de Arneodo, Chua-Harley y Rössler (interacción compleja). . . . .	94



# Resumen

Dentro de un contexto algebraico-diferencial, en este trabajo se estudia el fenómeno de sincronización para redes de sistemas caóticos estrictamente diferentes, *i.e.*, la multi-sincronización generalizada. En una topología maestro multi-esclavo, es posible sincronizar la red completa, permitiendo interacciones entre los esclavos, mediante el diseño de controladores dinámicos para cada sistema esclavo. Finalmente, con la premisa de que las técnicas del álgebra diferencial permiten caracterizar de manera completa la variedad algebraica de sincronización, presentamos algunos resultados preliminares para la estabilidad de estas variedades.

## Abstract

Within a differential algebraic framework, this work studies the synchronization phenomena for networks of strictly different nonlinear chaotic systems, *i.e.*, generalized multi-synchronization (GMS). Here, a dynamical control law is designed for each slave system to synchronize the whole network, by allowing any type of interplay between slave systems in a master multi-slave topology. Finally, under the premise that differential algebraic techniques allow us to completely characterize the algebraic synchronization manifold, we present some preliminary results on stability of these manifolds.



# Notación y Acrónimos

$:=$  se define como

$\neq$  diferente de

$<$  ( $>$ ) menor (mayor) que

$\leq$  ( $\geq$ ) menor (mayor) o igual que

$\forall$  para todo

$\in$  pertenece a

$\subset$  subconjunto de

$\{\cdot\}$  conjunto

$\rightarrow$  tiende a

$\sum$  suma

$\infty$  infinito

$\square$  designación de final de prueba

$\mathbb{R}$  conjunto de los números reales

$\mathbb{R}^+$  números reales positivos

$\mathbb{R}^{m \times n}$  conjunto de todas las matrices de tamaño  $m \times n$  con entradas en  $\mathbb{R}$

$A_{m \times n}$  matriz con  $m$  renglones y  $n$  columnas

$0_{\mu \times \nu}$  matriz con entradas cero de tamaño  $\mu \times \nu$

$I_\nu$  matriz identidad de tamaño  $\nu \times \nu$

$\|x\|$  cualquier norma  $p$  del vector  $x$

$\|x\|_2$  norma euclidiana del vector  $x$

$\|x\|_{\mathcal{M}}$  distancia del punto  $x$  al conjunto  $\mathcal{M}$ , i.e.,  $\inf_{\hat{x} \in \mathcal{M}} \{\|x - \hat{x}\|_2\}$

$\|A\|$  norma inducida de la matriz  $A$

$\det A$  determinante de la matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A^T$  transpuesta de una matriz  $A$

$(\cdot, \cdot)^T$  transpuesta de un vector

$A^{-1}$  inversa de la matriz  $A$

$\otimes$  producto de Kronecker entre dos matrices, para  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $A \otimes B = [a_{ij}B] \in \mathbb{R}^{np \times mq}$

$\lambda_{\max}(P)$  ( $\lambda_{\min}(P)$ ) el máximo (mínimo) valor propio de una matriz simétrica  $P$

$P > 0$  matriz positiva definida

$\mathcal{V}_\nu$  conjunto de  $\nu$  nodos  $\{1, \dots, \nu\}$

$\mathcal{E}_\nu$  conjunto de aristas  $\mathcal{V}_\nu \times \mathcal{V}_\nu$

$\mathcal{A}_\nu$  matrix de adyacencia  $[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$  donde  $a_{ij} = 1$  si  $(j, i) \in \mathcal{E}_\nu$  y  $a_{ij} = 0$  si no

$\mathcal{G}_\nu$  grafo dirigido compuesto por la triada  $(\mathcal{V}_\nu, \mathcal{E}_\nu, \mathcal{A}_\nu)$

$\deg_{\text{in}}(v_i)$  grado de entrada del nodo  $v_i$

$\mathcal{L}_\nu$  matriz laplaciana  $= [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$  asociada al grafo  $\mathcal{G}_\nu$  donde  $l_{ij} = \sum_{j=1, i \neq j}^\nu a_{ij}$  si  $i, j \in \{1, \dots, \nu\}$  y  $l_{ij} = -a_{ij}$  si no

máx máximo

mín mínimo

sup supremo, mínima cota superior

inf ínfimo, máxima cota inferior

lím límite

$B_r$  la bola  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$

$\dot{y}$  primera derivada de  $y$  respecto del tiempo

$\ddot{y}$  segunda derivada de  $y$  respecto del tiempo

$\dddot{y}$  tercera derivada de  $y$  respecto del tiempo

$y^{(i)}$   $i$ -ésima derivada de  $y$  respecto al tiempo

$\frac{\partial}{\partial x} f$  derivada parcial de la función  $f$  respecto a la variable  $x$

$\nabla J$  vector gradiente de la función escalar  $J$

$[\partial/\partial x] f$  jacobiano de la función vectorial  $f$

$\mathcal{D}^{(\alpha)}x(t) = x^{(\alpha)}(t)$  derivada de orden fraccionario de Caputo de la función  $x(t)$

diff tr d° grado de trascendencia diferencial

$K\langle u \rangle$  campo diferencial generado por el campo  $K$ , la entrada  $u(t)$  y las derivadas respecto al tiempo de  $u(t)$

$K/k$  extensión de campos diferenciales ( $k \subset K$ )

**OA** observabilidad algebraica

**OAF** observabilidad algebraica para sistemas de orden fraccionario

**OALF** observabilidad algebraica para sistemas de liouville de orden fraccionario

**PV** Picard-Vessiot

**GOCF** forma canónica de observabilidad generalizada

**GOCFM** forma canónica de observabilidad generalizada multi-salida

**FCOGF** forma canónica de observabilidad generalizada para sistemas de orden fraccionario

**FCOGMF** forma canónica de observabilidad generalizada multi-salida para sistemas de orden fraccionario

**SC** sincronización completa

**(M)SG** (multi)-sincronización generalizada

**(M)SGF** (multi)-sincronización generalizada para sistemas de orden fraccionario

**SMA** sistema multi-agente

**FME** función maestra de estabilidad



# Capítulo 1

## Introducción

*“La naturaleza utiliza cualquier canal disponible que permita a sus osciladores comunicarse entre ellos. Frecuentemente el resultado de sus conversaciones es sincronía, en donde todos los osciladores se comportan como solo uno.”*  
— Steven H. Strogatz [125].

La forma más simple de *sincronización* entre dos sistemas dinámicos sucede cuando la trayectoria de uno de ellos sigue la trayectoria del otro debido a la aplicación de una entrada externa o por la existencia de un acoplamiento entre ellos. Es decir, ambos sistemas comparten una trayectoria en común debido a la influencia que tiene un sistema sobre el otro o por una fuerza externa que obliga a los sistemas a comportarse del mismo modo. Desde hace mucho tiempo, esta simple idea, presente en la naturaleza, ha sido un área de investigación de gran interés en distintas disciplinas (biología, química, física, matemáticas, astronomía, sociología, ingeniería y tecnología, entre otras). En matemáticas aplicadas y específicamente en el área interdisciplinaria de control automático, los problemas de esta índole son objeto de creciente estudio.

La peculiaridad más importante en la teoría de control consiste en aminorar y explotar algunas de las propiedades intrínsecas de los sistemas dinámicos. Para comprender esta postura desde el punto de vista de la teoría de control es necesario considerar que los sistemas dinámicos son ecuaciones diferenciales con la adición de propiedades que le dan sentido al fenómeno que se requiere estudiar (*e.g.* ruido externo, perturbaciones en la entrada, dinámicas no modeladas, incertidumbre paramétrica, etc.). En general, esto último

restringe todos los problemas a la teoría de control adaptable, robusto y estocástico. Sin embargo, como punto de partida es necesario atacar los problemas “más simples”, realizar algunas simplificaciones aquí y allá, que conllevan al estudio de ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias de aparente “fácil” manejo (*cf.* [78]). En el ámbito del estudio de osciladores acoplados esto se refleja en el estudio de dinámicas simples con interacciones complejas entre los sistemas o en su contraparte, el estudio de dinámicas complejas con interacciones simples entre los sistemas. Esto no es casualidad, de hecho corresponde a un balance entre los avances matemáticos [125] y tecnológicos al ser la limitante en el estudio de la sincronización y de cualquier ciencia en general.

## Sincronización del caos

Los problemas sobre sincronización de sistemas dinámicos se centran en el estudio de *osciladores acoplados*, aquellos sistemas de comportamiento periódico y cuasi-periódico cuya influencia de un sistema sobre el otro permite que exista un movimiento en común. También, dentro de esta área y de particular interés en este trabajo, se encuentra el estudio de la sincronización entre *sistemas caóticos*. Es decir, aquellos sistemas no lineales que a pesar de su modelo determinístico sencillo (e.g. sistemas de Lorenz, Rössler, Chua y Colpitts) tienen un comportamiento acotado, aleatorio y altamente sensible ante condiciones iniciales, que además no corresponde a un movimiento periódico, cuasi-periódico ni oscilatorio [51, 124]. De ahí, es inmediato formular la siguiente pregunta, ¿es posible forzar dos sistemas determinísticos de comportamiento aperiódico impredecible, con trayectorias acotadas que divergen exponencialmente rápido, a seguir una misma trayectoria? Por increíble que parezca, la afirmación a esta pregunta mantiene fascinada y ocupada a la comunidad científica desde su introducción por Pecora y Carroll [92] en 1990<sup>1</sup>. Su importancia se debe, en gran parte, a sus aplicaciones en áreas muy activas como lo son: comunicaciones seguras [23, 24, 140], encriptación de datos [70], etc.

### El estado síncrono

Los problemas asociados a la *sincronización de sistemas caóticos* están íntimamente ligados con la estabilidad de dos conjuntos, estos definen la geometría de este comporta-

---

<sup>1</sup>Antes de 1990, la relación entre el comportamiento caótico y la sincronización se encontraba como un fenómeno indeseable. En este contexto, el caos se estudiaba como producto de la pérdida de sincronización en circuitos excitados con señales periódicas [127]. A pesar de que el comportamiento caótico era un fenómeno popular, bastante estudiado en física, no existían aplicaciones ingenieriles útiles del mismo hasta entonces [125].



miento [95], a saber:<sup>2</sup>

- La *variedad de sincronización*. Es el conjunto de coordenadas o trayectorias que definen al *estado síncrono* (hiperplano), en él se encuentran restringidas las trayectorias de los sistemas acoplados cuando existe la sincronización.
- La *variedad transversal*. Es el espacio ortogonal a la variedad de sincronización. Contiene el conjunto de coordenadas o trayectorias cero cuando el movimiento de los sistemas se restringe a la variedad de sincronización.

El estado síncrono, resultado del acoplamiento entre sistemas caóticos, corresponde a trayectorias idénticas que mantienen su naturaleza caótica. Es decir, el estado síncrono corresponde a un *atractor caótico* dentro de la variedad de sincronización. Un *atractor* [124] es un conjunto cerrado  $\mathcal{C}$  tal que satisface las siguientes condiciones<sup>3</sup>,

1. El conjunto  $\mathcal{C}$  es invariante, cualquier trayectoria  $x(t)$  que inicia en  $\mathcal{C}$  se mantiene en  $\mathcal{C}$ ;
2.  $\mathcal{C}$  atrae a un conjunto abierto  $U$  de condiciones iniciales con  $\mathcal{C} \subset U$  tal que si  $x(0) \in U$  entonces  $d(x, \mathcal{C}) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (el conjunto más grande  $U$  se conoce como *cuenca de atracción* de  $\mathcal{C}$ );
3.  $\mathcal{C}$  es mínimo, no existe subconjunto propio de  $\mathcal{C}$  que satisfaga las condiciones 1 y 2;
4. Si  $\mathcal{C}$  es un atractor que exhibe *sensibilidad dependiente de condiciones iniciales* se denomina *atractor caótico*. Esto es, dadas dos trayectorias que inician en condiciones iniciales cercanas, divergen y se alejan rápidamente una de la otra desarrollándose en un mismo atractor.

Es importante destacar que, sin pérdida de generalidad, tanto la variedad transversal como la de sincronización pueden asociarse a conceptos más simples como el error de sincronización (o seguimiento) y el origen del error de sincronización, respectivamente. En consecuencia, se entiende que el punto cero dentro de la variedad transversal de sincronización es un punto fijo dentro de dicha variedad, o equivalentemente, el origen es un punto de equilibrio de la ecuación dinámica del error de sincronización (*cf.* Ejemplo A.2.1). Mediante el siguiente ejemplo, se intentarán aterrizar las ideas descritas anteriormente.

---

<sup>2</sup>Estos problemas son equivalentes a los formulados en la sincronización de osciladores periódicos, cuasi-periódicos, ciclos límites, etc. Posteriormente, su extensión ha sido caso de estudio para sistemas que aparentan desafiar la sincronización [92], *i.e.*, sistemas caóticos.

<sup>3</sup>Para mayor detalle consulte [113], donde se describen las propiedades que caracterizan al caos mediante un compendio de distintas definiciones en la literatura.

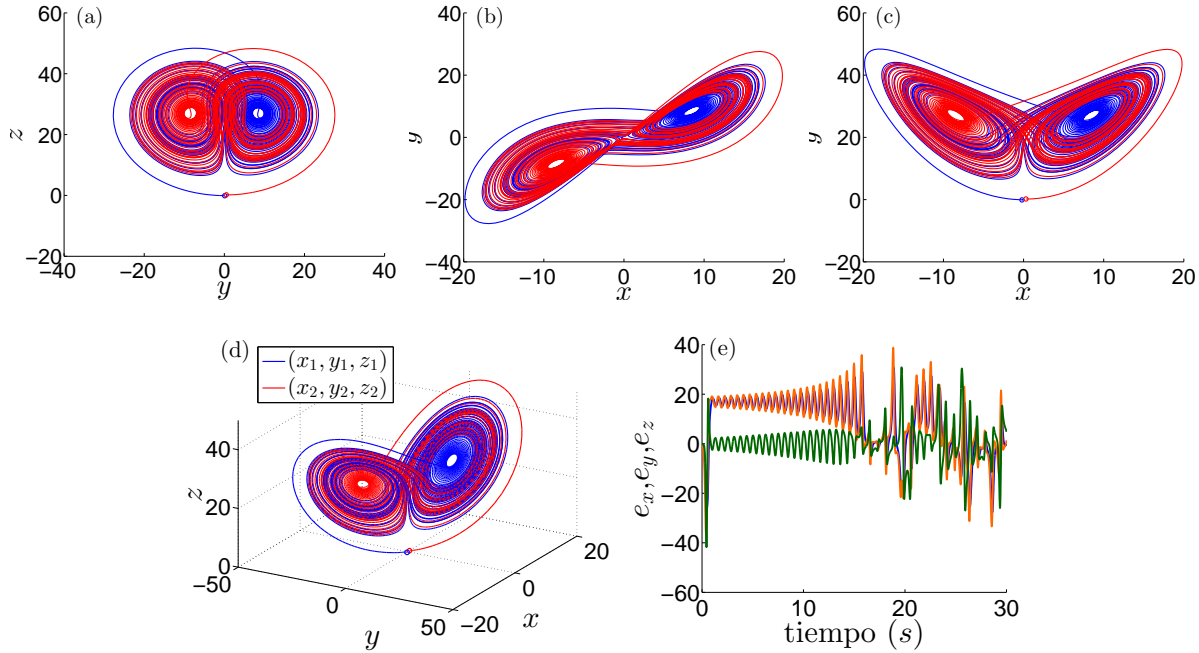


Figura 1.1: Los sistemas caóticos muestran sensibilidad dependiente de condiciones iniciales. Considere dos sistemas caóticos de Lorenz idénticos desacoplados con parámetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 8/3$ ,  $b = 28$ , para un par de condiciones iniciales “cercanas” distintas  $x_m(0) = (x_1(0), y_1(0), z_1(0))^T = (-0.2, 0.1, -0.1)^T$  y  $x_s(0) = (x_2(0), y_2(0), z_2(0))^T = (0.3, 0.5, 0.2)^T$ , las trayectorias inicialmente vecinas se separan exponencialmente rápido desarrollándose, eventualmente, en proyecciones sobre planos diferentes (a), (b), (c) del atractor caótico de Lorenz. Los sistemas se desenvuelven en atractores distintos (d), claramente las diferencias entre las trayectorias (e) de ambos sistemas  $e_x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ ,  $e_y(t) = y_1(t) - y_2(t)$  y  $e_z(t) = z_1(t) - z_2(t)$  no convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Los planos mostrados en (a), (b), (c) y los atractores en (d) están sobrepuestos.

## Ejemplo simple

Considérense dos sistemas caóticos de Lorenz, idénticos e identificados como sistemas maestro y sistema esclavo,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), & \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2), \\
 \dot{y}_1 &= -x_1z_1 + rx_1 - y_1, & \dot{y}_2 &= -x_2z_2 + rx_2 - y_2, \\
 \dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1, & \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2,
 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales distintas, respectivamente, y parámetros idénticos  $\sigma, r, b > 0$ . Es claro que las trayectorias de los dos sistemas a lo largo del tiempo serán distintas debido a la sensibilidad dependiente de condiciones iniciales (véase Figura 1.1). Ahora, considere

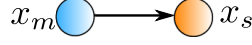


Figura 1.2: Esquema de sincronización unidireccional maestro-esclavo. Los nodos representan las dinámicas  $\dot{x}_m = f_m(x_m)$  y  $\dot{x}_s = f_s(x_s, u(x_m))$  asociadas a los sistemas maestro y esclavo respectivamente, la flecha indica que la información se transmite en un sentido donde la trayectoria del esclavo  $x_s$  está influenciada por una entrada  $u$  que depende de la trayectoria del maestro  $x_m$ .

un esquema de sincronización unidireccional maestro-esclavo. En teoría del control esto significa que el esclavo recibe únicamente información del maestro a través de la entrada del esclavo, donde esta depende de las trayectorias del maestro. Por otra parte, el maestro no se ve afectado por las trayectorias del esclavo. En este esquema (mostrado en la Figura 1.2.) y particular, los sistemas maestro y esclavo están acoplados por el primer estado, se sustituye el estado  $x_2$  del esclavo por el estado  $x_1$  del maestro en las ecuaciones dinámicas correspondientes a  $y_2$  y  $z_2$  como sigue<sup>4</sup>,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), & \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1, & \dot{y}_2 &= -x_1 z_2 + r x_1 - y_2, \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b z_1, & \dot{z}_2 &= x_1 y_2 - b z_2, \end{aligned}$$

De manera intuitiva se entiende del acoplamiento entre los sistemas que, dada una señal caótica que se comporta de manera similar a la que sustituyó; esta tendrá un efecto similar en la dinámica completa del sistema esclavo. Eventualmente, este *reemplazamiento parcial* obligará al sistema esclavo a comportarse del mismo modo que el sistema maestro<sup>5</sup>. Utilizando condiciones iniciales distintas, tanto en el esclavo como en el maestro se observa que las trayectorias del esclavo  $x_2$ ,  $y_2$  y  $z_2$  convergen a las trayectorias del maestro  $x_1$ ,  $y_1$  y  $z_1$  después de un largo tiempo, es decir,  $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$ ,  $|y_1 - y_2| \rightarrow 0$  y  $|z_1 - z_2| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (véase Figura 1.3). Sean  $x = (x_1 \ x_2)$ ,  $y = (y_1 \ y_2)$  y  $z = (z_1 \ z_2)$ . De este comportamiento suponemos que la variedad (trivial) de sincronización y la transversal están descritas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{(x, y, z) \mid x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2\}, \text{ y} \\ \mathcal{M}_\perp &= \{(e_x, e_y, e_z) \mid e_x = x_1 - x_2, e_y = y_1 - y_2, e_z = z_1 - z_2\}, \end{aligned}$$

respectivamente.

<sup>4</sup>Configuración de Kevin Cuomo [23] en su circuito emisor-receptor.

<sup>5</sup>Controlar caos con caos es la “piedra angular” del descubrimiento de la sincronización del caos, antes de Lou Pecora esta simple idea no había sido concebida [125]: “*Necesito forzar al caos con caos —Necesito forzar al receptor con una señal que provenga del mismo tipo de sistema*”.

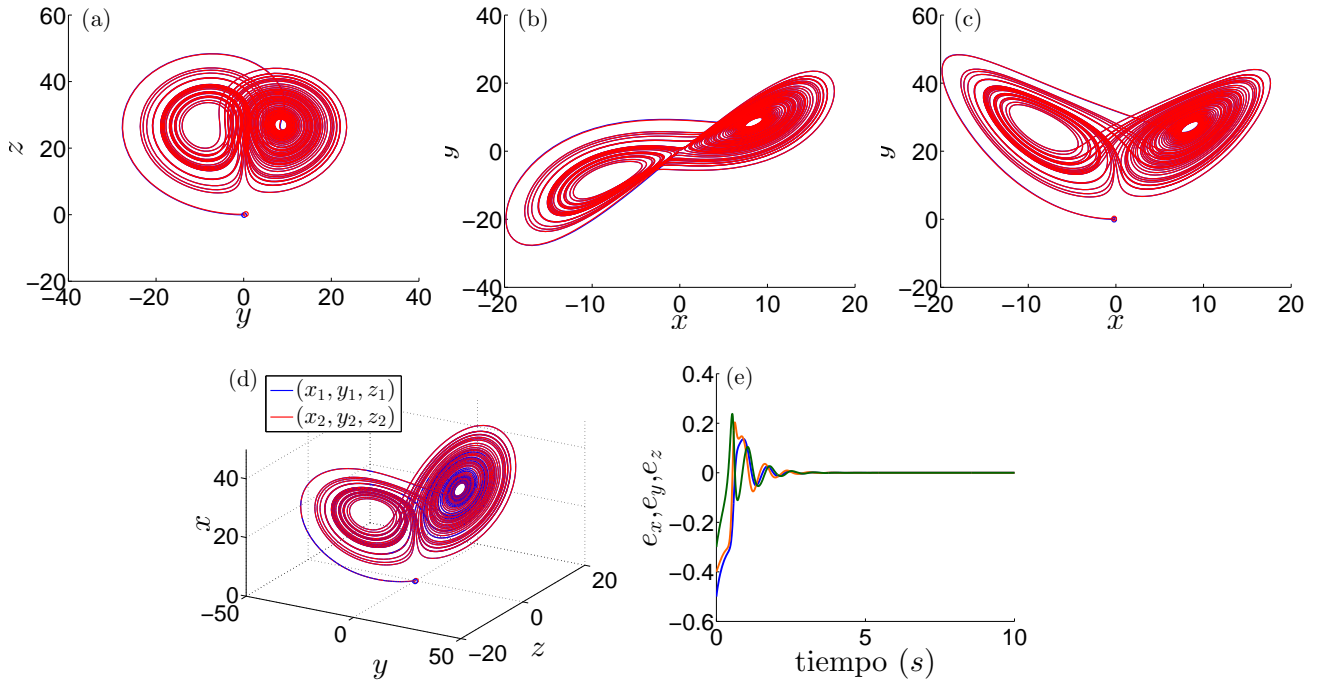


Figura 1.3: Sincronización de sistemas caóticos idénticos de Lorenz acoplados (*reemplazamiento parcial*) con parámetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 8/3$ ,  $b = 28$ , para un par de condiciones iniciales distintas  $x_m(0) = (x_1(0), y_1(0), z_1(0))^T = (-0.2, 0.1, -0.1)^T$  y  $x_s(0) = (x_2(0), y_2(0), z_2(0))^T = (0.3, 0.5, 0.2)^T$ . Debido al reemplazamiento de  $x_2$  por  $x_1$ , las trayectorias eventualmente se restringen a la variedad de sincronización (hiperplano de sincronización), los planos mostrados en (a), (b), (c) son proyecciones de la variedad de sincronización  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$  y  $z_1 = z_2$ . Cuando los sistemas se desenvuelven en un mismo atractor caótico (d), la diferencia entre las trayectorias  $e_x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ ,  $e_y(t) = y_1(t) - y_2(t)$  y  $e_z(t) = z_1(t) - z_2(t)$  es cero (e) cuando  $t \rightarrow \infty$ . Los planos mostrados en (a), (b), (c) y los atractores en (d) están sobrepuestos.

## Estabilidad y sincronización

Desde la perspectiva de control automático, el estudio de la sincronización radica en probar la estabilidad de la variedad de sincronización (si esta existe) o en su defecto de la variedad transversal. No es difícil notar que el estudio de la estabilidad de ambas variedades es equivalente en el sentido de que una implica la otra y viceversa. En el ejemplo anterior, cuando los sistemas están acoplados, la sincronización ocurre porque la variedad de sincronización es estable. Para observar esto, definamos los errores de sincronización  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$  como en  $\mathcal{M}_\perp$ . Entonces el punto cero de la variedad transversal debe ser un punto fijo dentro de esa variedad. Esto nos lleva a que el origen sea un punto de equilibrio asintóticamente estable de la dinámica asociada a  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$ . Obteniendo la dinámica del error de sincronización, tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= \sigma(e_y - e_x), \\ \dot{e}_y &= -e_y - x_1 e_z, \\ \dot{e}_z &= x_1 e_y - b e_z.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Lo que necesitamos es que  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$  tiendan a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto es claro si analizamos la estabilidad del equilibrio del sistema (1.1). Esta dinámica claramente depende de  $x_1$ , sin embargo, es posible obtener una función de Lyapunov y concluir sobre la estabilidad del error de sincronización  $e = (e_x \ e_y \ e_z)^T$ . Sea  $V(e) = \frac{1}{2\sigma}e_x^2 + \frac{1}{2}(e_y^2 + e_z^2)$ , calculando la derivada de  $V(e)$  en las trayectorias de  $e$  tenemos que  $\dot{V}(e) = -(e_x^2 - e_x e_y) - e_y^2 - e_z^2 = -(e_x - \frac{1}{2}e_y)^2 - \frac{3}{4}e_y^2 - b e_z^2 \leq 0$  con  $\dot{V}(e) = 0$  cuando  $e = 0$ , entonces  $e = 0$  es global y asintóticamente estable<sup>6</sup>. Note que los términos que dependen de  $x_1$  desaparecen en la derivada de  $V(e)$ . En consecuencia, de la negatividad semidefinida de la derivada de  $V(e)$ , es inmediato que la variedad de sincronización es asintóticamente estable.

Salvo en casos muy especiales como el presentado en el párrafo anterior, cuando es posible proponer una función de Lyapunov, la aplicación del método directo de Lyapunov es concluyente [23, 24]. No obstante, es importante destacar que aun cuando los sistemas son idénticos, la dinámica del error de sincronización depende de estados de los sistemas maestro y esclavo (*cf.* (1.1)), esto empeora si la forma de acoplar los sistemas es más compleja. Entonces, proponer una función de Lyapunov parece una tarea complicada. Una solución más general consiste en el estudio de estabilidad de la ecuación variacional asociada a la variedad transversal (expansión de Taylor del campo vectorial del error de

---

<sup>6</sup>Este argumento sigue del principio de invariancia de LaSalle y del hecho que  $V(e)$  es radialmente no acotada, véase el Teorema 4.4 en [51].

sincronización, i.e., el jacobiano de la dinámica del error de sincronización). Para (1.1), esta ecuación es,

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & -1 & -x_1 \\ 0 & x_1 & -b \end{pmatrix} e,$$

donde la mínima condición necesaria de estabilidad [95] del error de sincronización radica en la negatividad de los exponentes (condicionales) de Lyapunov de esta ecuación variacional. Es así como, debido a la estructura en la ecuación dinámica del error de sincronización, las formas de analizar la estabilidad de las variedades de sincronización o transversal radican principalmente en: enfoques varacionales (numéricos) o, en el mejor de los casos, mediante el enfoque de estabilidad de Lyapunov.

## Problemas del estado síncrono

En la práctica, la negatividad de los exponentes de Lyapunov no es una condición suficiente para la estabilidad del estado síncrono, el máximo exponente condicional de Lyapunov es casi independiente de la cuenca de atracción del atractor [95]. Existen conjuntos invariantes (e.g., puntos de equilibrio, órbitas periódicas, variedades invariantes, etc.) dentro del atractor caótico (en la variedad de sincronización) cuyo máximo exponente condicional de Lyapunov es positivo, aun cuando el máximo exponente Lyapunov del atractor es negativo. Así, trayectorias que se acercan a la variedad de sincronización son repelidas de forma abrupta y/o intermitente por estos conjuntos invariantes [11, 17, 38, 39, 87, 95, 99]. Estos problemas son bien entendidos y pueden analizarse de manera adecuada utilizando una herramienta poderosa como la “*Función Maestra de Estabilidad*” (FME) en el caso de sincronización de sistemas (casi) idénticos [15, 39, 96, 126].

## Sincronización generalizada (SG) y problemas asociados

La existencia de una variedad trivial e invariante es un hecho bien conocido en los problemas de osciladores idénticos acoplados [95]. En ese caso particular, métodos varacionales como la FME describen muy bien este fenómeno [15, 43, 81, 96, 112, 126, 153]. Sin embargo en sistemas físicos reales, la estructura de los grupos de sistemas acoplados es diferente (en el mejor de los casos solo existen diferencias en los parámetros entre sistemas

“idénticos”). Entonces, es claro que las diferencias entre las estructuras dinámicas de los sistemas juegan un papel importante en la sincronización [32, 106, 123]. Así, el estudio de estabilidad del error de sincronización o variedad de sincronización es importante y claramente más desafiante que en el caso de los sistemas estrictamente idénticos.

Considere al sistema de Rössler y Lorenz en la configuración maestro-esclavo con *acoplamiento difusivo* en la primer componente, i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(y_1 + z_1), & \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) - g(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + 0.2y_1, & \dot{y}_2 &= -x_2z_2 + rx_2 - y_2, \\ \dot{z}_1 &= 0.2 + z_1(x_1 - \mu), & \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2, \end{aligned}$$

con parámetros  $\sigma, r, b, \mu > 0$ , con *fuerza de acoplamiento*<sup>7</sup>  $g \geq 0$ .

Podemos pensar en las siguientes dos situaciones: cuando los sistemas están desacoplados (*i.e.*  $g = 0$ ), es claro que las trayectorias de ambos sistemas se desenvuelven en atractores diferentes (véase Figura 1.4); Por otra parte, cuando los sistemas se encuentran acoplados (*i.e.*  $g > 0$ ), note que las trayectorias del esclavo  $x_2, y_2$  y  $z_2$  no siguen a las trayectorias del maestro  $x_1, y_1$  y  $z_1$ , es decir, se pierde el comportamiento asintótico del error de sincronización (como se aprecia en la Figura 1.5). Podría parecer lógico que incrementando el valor de  $g$  implicaría que los sistemas lleguen a un estado de síncrono, sin embargo, esto no es así de simple.

En este punto es inmediato realizar las siguientes observaciones, dado que obtener una ecuación dinámica del error de sincronización y analizar su estabilidad no es trivial (*cf.* (1.1)), ¿existe alguna correlación entre las trayectorias que indique que estos sistemas se encuentran sincronizados?, aún más esencial, ¿es posible determinar un estado síncrono para estos sistemas?. Desde el descubrimiento hecho por Pecora y Carroll [92], es evidente que las respuestas a estas preguntas son fundamentales para las posibles aplicaciones potenciales de este fenómeno.

En la sincronización de sistemas caóticos distintos, es decir, cuando el tipo de atractores en los cuales originalmente se desenvuelven son de naturaleza distinta (la ecuación diferencial asociada a cada sistema es completamente diferente). Se dice que estos sistemas acoplados se pueden sincronizar en un sentido generalizado<sup>8</sup>; a saber, las proyecciones de las trayectorias sincronizadas sobre el espacio de soluciones de los sistemas acoplados

<sup>7</sup>En este ejemplo en particular, el objetivo no es encontrar el valor apropiado de  $g$  tal que dé lugar a la SG de los sistemas en cuestión. Para mayor detalle consulte [53].

<sup>8</sup>Existen otros tipos de sincronización del caos, los más encontrados en la literatura son los siguientes: Sincronización completa (SC), Sincronización de fase, Sincronización proyectiva y, Sincronización retardada. Para mayor detalle del panorama general de la sincronización del caos véase la Figura 1.6. En este trabajo es de particular interés estudiar el caso de SG.

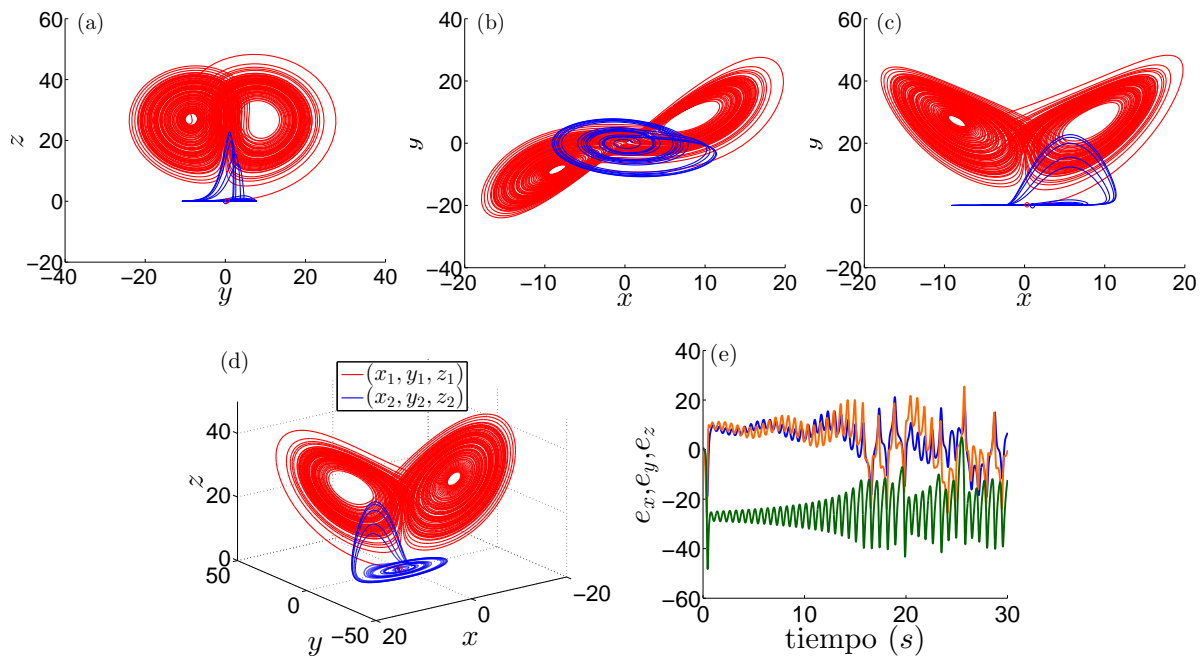


Figura 1.4: Atractores de sistemas caóticos de Rössler y Lorenz desacoplados con parámetros  $\mu = 5.7$ ,  $\sigma = 10$ ,  $r = 8/3$ ,  $b = 28$ , para un par de condiciones iniciales  $x_m(0) = (x_1(0), y_1(0), z_1(0))^T = (1, 0.1, -0.1)^T$  y  $x_s(0) = (x_2(0), y_2(0), z_2(0))^T = (0.3, 0.5, 0.2)^T$ . En las proyecciones sobre planos (a), (b), (c) de los atractores caóticos de Rössler y Lorenz se aprecia que los atractores son de naturaleza distinta. Por lo tanto, los sistemas se desenvuelven en atractores distintos (d), claramente las diferencias entre las trayectorias (e) de ambos sistemas  $e_x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ ,  $e_y(t) = y_1(t) - y_2(t)$  y  $e_z(t) = z_1(t) - z_2(t)$  no convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Los planos mostrados en (a), (b), (c) y los atractores en (d) están sobrepuestos.



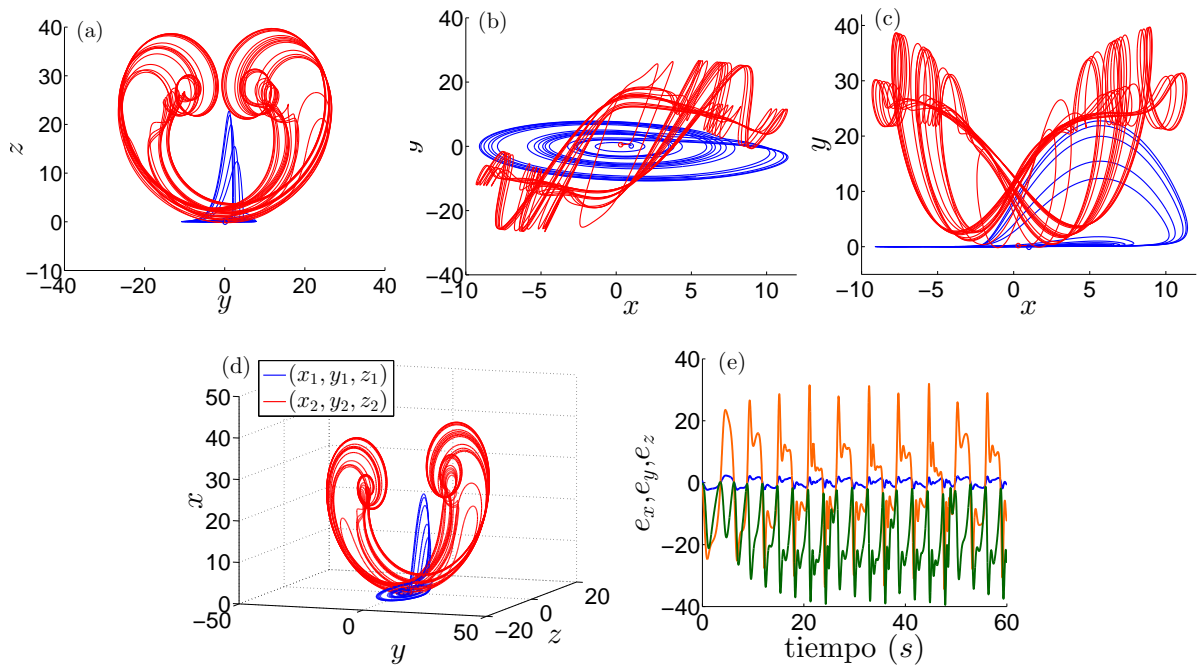


Figura 1.5: Sistemas caóticos de Rössler y Lorenz acoplados con parámetros  $\mu = 5.7$ ,  $\sigma = 10$ ,  $r = 8/3$ ,  $b = 28$  y  $g = 100$ , para un par de condiciones iniciales  $x_m(0) = (x_1(0), y_1(0), z_1(0))^T = (1, 0.1, -0.1)^T$  y  $x_s(0) = (x_2(0), y_2(0), z_2(0))^T = (0.3, 0.5, 0.2)^T$ . Los sistemas se desenvuelven en atractores distintos (d), las trayectorías de los sistemas no están en sincronía a pesar del acoplamiento. Sin embargo, cada par de proyecciones sobrepuestas de los atractores (a), (b), (c) aparentan ser una imagen distorsionada (no lineal) una de la otra [53]. Note que las diferencias entre las trayectorias (e) de ambos sistemas  $e_x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ ,  $e_y(t) = y_1(t) - y_2(t)$  y  $e_z(t) = z_1(t) - z_2(t)$  no convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , y tampoco existe un estado síncrono que satisfaga las relaciones  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$  y  $z_1 = z_2$ . Los planos mostrados en (a), (b), (c) y los atractores en (d) están sobrepuestos.

están conectados por un mapeo diferencialmente continuo<sup>9</sup>. Claramente este mapeo define la variedad de sincronización, e.g., para los sistemas de Rössler y Lorenz acoplados con trayectorias  $x = (x_1 \ x_2)$ ,  $y = (y_1 \ y_2)$  y  $z = (z_1 \ z_2)$

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \mid x_1 = \varphi_x(x_2), y_1 = \varphi_y(y_2), z_1 = \varphi_z(z_2)\}.$$

Entonces, la definición de  $\mathcal{M}$  está comprometida con la existencia del mapeo  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot) = (\varphi_x(\cdot), \varphi_y(\cdot), \varphi_z(\cdot))$ . No obstante, encontrar y definir  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$  no es trivial.

Este fenómeno fue primeramente observado por Afraimovich *et. al.* [3] en 1983 del acoplamiento de dos sistemas idénticos con parámetros distintos. Posteriormente fue introducido como *sincronización generalizada* (SG) en 1995 por Nikolai F. Rulkov *et. al.* [111] como un fenómeno que surge del estudio del acoplamiento unidireccional en la configuración maestro-esclavo de sistemas caóticos distintos. Es importante destacar que la restricción de la configuración maestro-esclavo permite que este problema sea tratable, para esquemas mas generales de *acoplamiento mutuo*<sup>10</sup> el mapeo que define la variedad de sincronización puede no existir. Un caso particular sucede cuando el mapeo es la identidad, consecuencia de que los sistemas acoplados sean idénticos, este se conoce como *sincronización completa* (SC). En términos generales, el problema de SG se divide en dos partes: primero, encontrar el explícitamente el mapeo que relaciona las trayectorias del sistema esclavo con las del sistema maestro y; segundo, verificar la estabilidad de la variedad de sincronización.

De lo anterior, la existencia de dicha transformación en la sincronización entre sistemas caóticos distintos es primordial. Es claro que invertibilidad y suavidad son problemas inherentes a la transformación, puesto que debe ser un difeomorfismo. Pero que exista, garantiza que las trayectorias se encuentren confinadas en una variedad de sincronización cuando esta es atractiva. En la literatura existen herramientas que permiten detectar la existencia del fenómeno de SG (*método del sistema auxiliar* [2, 53, 103], *falsos vecinos mutuos más cercanos* [111], *mezcla de atractores caóticos* [1], *método del sistema modificado* [45], etc.). El análisis de estabilidad en estas herramientas se basa en el estudio de la ecuación variacional asociada a la variedad transversal (expansión de Taylor del campo

---

<sup>9</sup>Existen muchos tipos de definiciones acerca de la SG, todas ellas difieren en el tipo de mapeo que se utiliza [17]: continuo [2, 111], homeomorfismo [3], diferenciable continuo [47], difeomorfismo [53, 65, 68, 94], no suave [103]. Es de nuestro particular interés el mapeo diferencialmente continuo como consecuencia del uso de herramientas basadas en álgebra diferencial [19, 20, 68] en la multi-sincronización.

<sup>10</sup>Existen muchas formas de acoplar los sistemas caóticos, la complejidad del problema depende del tipo de acoplamiento que se utilice (la ley de control que lleva a los sistemas a la variedad de sincronización). Entre los más comunes en la literatura se encuentran el *reemplazamiento completo* [92], *reemplazamiento parcial* [23, 24], *acoplamiento difusivo* o control por realimentación negativa [3, 37, 110], ver [95] para otras variantes, observadores de estado [80, 119], *“control” activo* [4, 13], también controladores diseñados con técnicas de *álgebra-diferencial* [68], *geometría-diferencial* [14, 49] basadas en la linealización por realimentación o el regulador robusto de salida, etc.

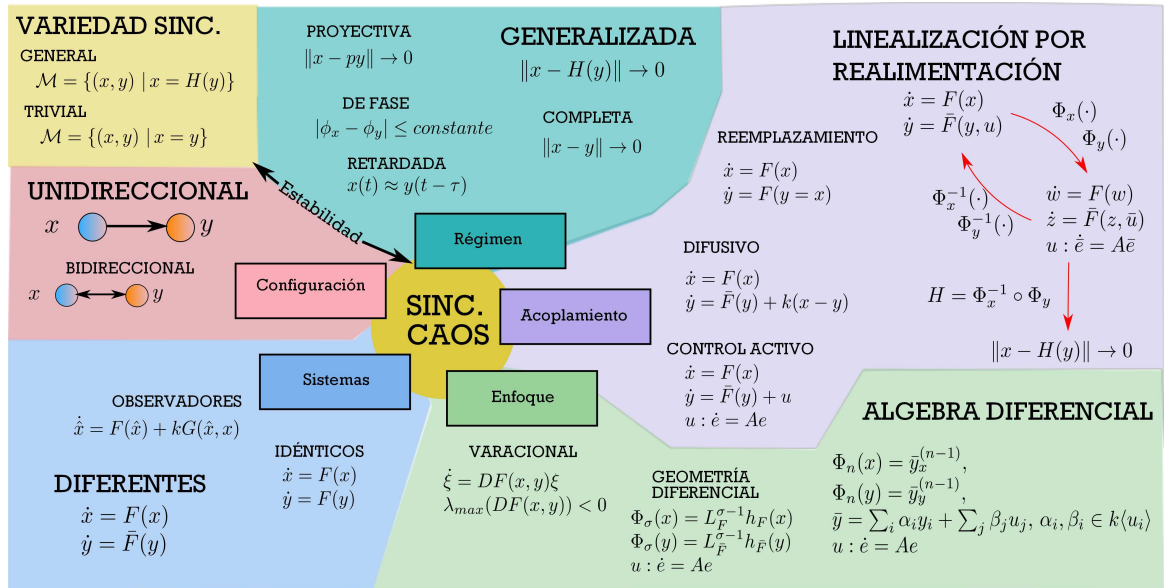


Figura 1.6: Panorama general en la sincronización del caos

vectorial del error de sincronización). No es difícil notar que los problemas inherentes al análisis de estabilidad de la variedad transversal son la limitante de estas herramientas *e.g.* el cálculo del máximo exponente de Lyapunov [33, 93].

Sin embargo, los trabajos enfocados para encontrar el mapeo son realmente escasos y restrictivos [3, 14, 50, 135, 152], además cuando se propone este mapeo, se desconoce si la variedad de sincronización efectivamente es atractiva [53]. Las herramientas mencionadas en el párrafo anterior evitan encontrar el mapeo explícitamente, es decir, no se sabe como se encuentran relacionadas las trayectorias del sistema maestro y esclavo, solo determinan la existencia dicho mapeo (en general, estos métodos transforman el problema de detección de SG a un problema detección de SC). En consecuencia no se obtiene la forma de la variedad de sincronización. Esto no es crítico, pero sin duda alguna limita su utilidad práctica.

De una manera simple y sin ser exhaustivo, en la Figura 1.6 se presenta el panorama general en la sincronización del caos que resume en gran parte lo que se ha expuesto hasta el momento. Es importante resaltar el objetivo fundamental en el estudio de la sincronización del caos es en general, independientemente del tipo de sistemas, configuración, régimen, acoplamiento y enfoque, la verificación de la estabilidad de la variedad de sincronización.

## Álgebra diferencial como solución

Las herramientas basadas en el álgebra diferencial y en especial la existencia del elemento primitivo diferencial permiten resolver distintos problemas asociados a la construcción

de observadores de estado, el diseño de leyes de control para resolver problemas como seguimiento y estabilización local, diseño de leyes de control tolerantes a fallas, estimación del estado y parámetros de manera simultánea para una clase amplia de sistemas no lineales [66, 68, 71, 72]. Tomando en consideración que el problema de sincronización es similar al problema de seguimiento, el problema atacado en este trabajo puede ser resuelto utilizando dichas herramientas.

En el enfoque algebraico diferencial utilizado en este trabajo, la clave para atacar el problema de sincronización en general es indiscutiblemente el elemento primitivo diferencial de cada sistema acoplado (*e.g.* la salida disponible de cada sistema). A partir de esta familia de elementos podemos obtener de manera natural la transformación que conecta a los sistemas acoplados con las trayectorias en sincronía (el difeomorfismo que relaciona la trayectorias del sistema esclavo con las del maestro), como consecuencia podemos describir exactamente la variedad de sincronización. Lo que indica que, partiendo de la premisa sobre la existencia de este elemento, el problema de SG está parcialmente resuelto. Trabajos preliminares en esta dirección se pueden encontrar en [64, 65, 68]. Una de las consecuencias del uso de estas técnicas, en la solución de este problema, radica en la pérdida de la identidad en el mapeo difeomorfo cuando los sistemas son idénticos.

## Multi-sincronización

Motivado por los fenómenos en la naturaleza, donde se observa la sincronización entre múltiples osciladores [32, 106, 123], los problemas asociados a la sincronización de un par de sistemas acoplados se han extendido al estudio de escenarios cada vez mas complejos. Como resultado, numerosas aplicaciones de estos problemas son tópicos de gran interés entre la comunidad científica: “*rendezvous*”, *control de formación*, “*congregación*” y “*instrucción*”, “*alineamiento de posición*”, *redes de sensores*, *computación distribuida*, *consenso*, *redes complejas en general*, *sincronización del caos* [15, 32, 37, 38, 55, 56, 63, 69, 76, 81, 85, 100, 106, 112, 123, 141]. En un contexto actual, la sincronización de múltiples sistemas acoplados (*multi-sincronización*) pueden entenderse de la siguiente manera. En una red de sistemas denominada sistema multi-agente (SMA), formado por individuos (agentes) que comparten información total o parcial de su estado con sus sistemas vecinos, los sistemas son capaces de encontrar una trayectoria en particular a seguir de acuerdo a las interacciones descritas por un *protocolo* individual (acoplamiento) que depende de la información compartida en la red (*e.g.* la salida o el estado de cada sistema). La forma de modelar las interacciones de los agentes está dada por un *grafo* que indica la topología de la interacción de los

sistemas en el SMA<sup>11</sup>. Sin pérdida de generalidad podemos hablar de topología con *líder* o sin líder. La primera se entiende como la configuración unidireccional de un maestro y varios esclavos, de este modo las trayectorias de todos los sistemas esclavos (*i.e.* seguidores) siguen a un único sistema maestro (*i.e.* un *grafo dirigido* acíclico y conexo donde existe un camino del nodo raíz o líder a todo y cada uno de los nodos en el grafo). En la literatura, a este problema se le conoce como *consenso siguiendo al líder*. En la segunda, no hay un maestro (no hay líder ni seguidores) y puede existir cualquier tipo de conexión entre los agentes en la red (*e.g.* grafos de *redes de mundo pequeño* [143], *grafos no dirigidos* en general, etc.); las trayectorias de todos los sistemas (nodos) siguen una trayectoria en común que no pertenece necesariamente a alguna de los agentes en la red.

El consenso y la sincronización son problemas íntimamente relacionados de sistemas multiagentes, como lo describe [146], en una relación compleja entre las características de la red: tipos de sistemas, acoplamientos y topología involucrada (grafo de comunicación). Aunado a esto todavía puede darse otra descripción general en términos de la variedad de sincronización. Como se dijo anteriormente, si esta existe, el comportamiento de toda la red puede describirse en términos de esta variedad. Claramente, los elementos de esta última son las variables de interés restringidas a las características de la red.

El objeto de estudio en los problemas de multi-sincronización se enfoca en aumentar la complejidad de las interacciones entre los sistemas en la red. Trabajos en esta dirección para sistemas no lineales se pueden encontrar en [9, 26, 29, 37, 49, 58, 59, 61, 88, 89, 97, 104, 118, 134, 151], todos ellos fuertemente motivados por los descubrimientos en sistemas lineales [63, 76, 85, 106]. Los problemas más cercanos a la realidad son aquellos en donde los sistemas que componen al SMA son de naturaleza distinta (*i.e.* redes de *sistemas heterogéneos*). En este ámbito podemos mencionar los siguientes trabajos [37, 49, 88, 89, 104, 134, 151]<sup>12</sup>. Comparado con los problemas de redes con unidades (casi-)idénticas [32, 122, 153], la comunidad de la teoría de control ha intentado resolver los problemas sobre la sincronización de redes heterogéneas mediante el diseño apropiado de protocolos (controladores) dinámicos de consenso [20, 49, 89, 146]. Recientemente, estos problemas se han llevado la mayor parte de la atención de la comunidad científica. Algunos de estos resultados se han dado en términos de estabilidad práctica de conjuntos (atractores) que se asemeja en cierto modo al análisis de estabilidad de la variedad de sincronización [89], en donde se ha propuesto que el comportamiento de unidades con acoplamiento difusivo se sincroniza a una

---

<sup>11</sup>Cada nodo en el grafo representa la dinámica asociada a cada uno de los sistemas en la red, para mayor detalle sobre la Teoría de Grafos consulte [36].

<sup>12</sup>También, de acuerdo a la naturaleza del problema, cabe la posibilidad de tener conexiones intermitentes entre los sistemas que son inevitables [59, 134, 146]. Esta posibilidad queda fuera del alcance en el trabajo presente.

*dinámica emergente* (variedad de sincronización) que solo depende de la estructura de la red. Otros esfuerzos revelan la existencia de un comportamiento dinámico virtual en común para toda la red, que puede ser impuesto como en el caso del *exosistema* en [49] o como en el caso del *sistema interno*, resultado de las características de la red y el tipo de controlador dinámico [146] para todas las unidades en la red. En ambos casos, el diseño apropiado de un controlador dinámico es capaz de forzar a todos los agentes de la red a comportarse de la misma manera que el sistema virtual. La solución síncrona (variedad de sincronización) en este sentido se da en la forma de un principio del modelo interno [144] o como un regulador no lineal de salida [49]. Nuevamente, se puede observar que la manera de estudiar este tipo de problemas depende de la caracterización del comportamiento colectivo entre los sistemas acoplados, *i.e.*, la estabilidad de la variedad de sincronización. De esta manera, los problemas brevemente descritos con anterioridad son similares a aquellos en la literatura de consenso. Específicamente, se puede decir que en el caso del *sistema interno* o *dinámica emergente* corresponde a la generalización de los problemas clásicos de consenso; por otra parte, el caso del *exosistema* corresponde al problema de consenso siguiendo al líder. Hasta donde sabemos, no existen trabajos en este contexto en donde obtenga una variedad de sincronización estable y que se verifique su estabilidad de manera explícita.

En este trabajo, el objetivo es estudiar el problema de redes de sistemas caóticos heterogéneos, es decir, el problema de Multi-sincronización en un sentido generalizado a lo que llamamos *Multi-sincronización generalizada* (MSG). Ahora, la definición del problema radica principalmente en la existencia de *mapeos diferencialmente continuos* que relacionen las trayectorias del sistema maestro con cada uno de los sistemas esclavos; lo que nos restringe a modelar la interacción entre los sistemas con un grafo dirigido invariante en el tiempo (*i.e.* en el esquema unidireccional) no fuertemente conexo (*i.e.* no existe una secuencia de ejes de un nodo a cualquier otro nodo), conocido comúnmente en la literatura como, un árbol dirigido de cobertura con un único líder como raíz. Además de que se ha demostrado este tipo de grafos son muy útiles en la sincronización de redes de osciladores lineales acoplados [107], en este trabajo explotamos las propiedades de estos para verificar y extender las condiciones de estabilidad de la variedad de sincronización para redes de sistemas no lineales heterogéneas. De lo anterior, el hecho de que el grafo sea un tanto trivial, no implica que el problema de MSG lo sea. Esto es bastante claro, es necesario encontrar los mapeos y verificar la estabilidad de la variedad de sincronización, que ahora, es de orden mucho mayor dimensión que en SG. Es por ello que se dice que para sistemas estrictamente diferentes (redes heterogéneas) la variedad de sincronización no es

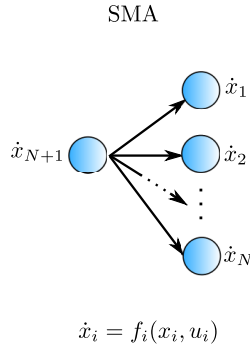


Figura 1.7: MAS con un único líder sin interacción entre seguidores. El grafo asociado a esta configuración es un árbol de cobertura dirigido con un líder único como raíz. Cada nodo representa la dinámica individual asociada a cada uno de los  $N + 1$  sistemas interconectados.

trivial y puede ser que no exista. Además, poco se sabe sobre la estabilidad de dicha variedad y como consecuencia sobre la sincronización de dichos sistemas [19,20,49,64,88,144].

## MSG y el enfoque algebraico-diferencial

En este trabajo atacamos el problema de MSG en la configuración maestro y esclavo. Hasta el momento es claro que este problema se puede reinterpretar como un problema de consenso siguiendo al líder de SMA. A lo largo del trabajo, consideraremos al SMA como una red de sistemas caóticos interconectados, heterogéneo, de la misma dimensión, cuyas interacciones se encuentran modeladas por un grafo dirigido fijo y no fuertemente conexo como se muestra en la Figura 1.7 en el que además sea posible agregar interacciones arbitrarias entre los seguidores.

Desde un punto de vista algebraico diferencial, bajo la premisa de la existencia del elemento primitivo diferencial para cada sistema, es posible dar una solución a este problema como sigue: mediante una familia de transformaciones (difeomorfias)  $\Phi_i$  obtenida mediante el elemento primitivo diferencia para cada sistema, el SMA puede llevarse a una Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Multi-salida (FCOGM), véase Figura 1.8. La adecuada selección del elemento primitivo diferencial es clave para resolver este problema, este se elige como una combinación lineal de los estados disponibles y entradas de control (estos elementos permiten obtener explícitamente la variedad de sincronización). En este espacio transformado es posible diseñar un protocolo dinámico de consenso, con la salida del líder, tal que las trayectorias de los seguidores eventualmente se acerquen a las trayectorias del líder en el espacio transformado; y mediante la obtención del mapeo

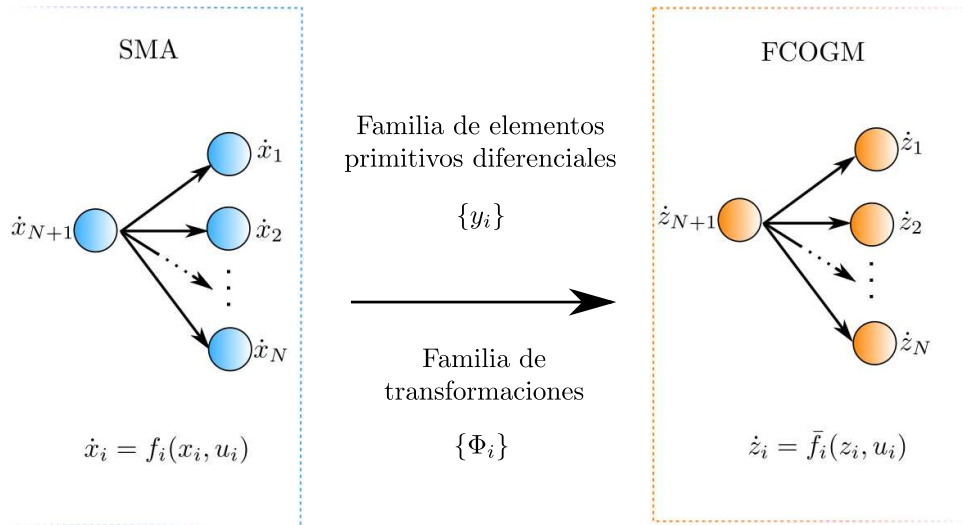


Figura 1.8: MAS y MSG mediante un enfoque de álgebra diferencial

diferencialmente continuo que define a la variedad de sincronización (en función de las transformaciones difeomorfas  $\Phi_i$ ), se logra el consenso siguiendo al líder del SMA cuando dicha variedad es atractiva. Es decir, todos los nodos en la red se acercan a una trayectoria en común descrita por el líder cuando  $t \rightarrow \infty$ . Finalmente, como consecuencia, equivale a alcanzar el estado de MSG del SMA.

La diferencia con las metodologías existentes radica en que el protocolo de consenso para cada sistema seguidor es dinámico en el sentido de que este depende de los estados del controlador asociado con el sistema dinámico y los estados asociados a la FCOGM. Esto es crucial en la definición de la variedad de sincronización estable.

## Objetivos

El **objetivo general** de esta tesis es el diseño de controladores dinámicos para el problema de multi-sincronización generalizada de sistemas caóticos. Los **objetivos particulares** son:

1. Dar un método de multi-sincronización generalizada;
2. Describir la variedad algebraica de sincronización de redes de sistemas heterogéneos;
3. Estudiar la estabilidad de la variedad algebraica de sincronización;
4. Explorar leyes de control dinámicas que permitan la interacción entre sistemas esclavos;



5. Extensión de estos problemas a sistemas de orden fraccionario conmensurados;
6. Obtener resultados numéricos mediante la aplicación de dichos métodos.

## **Contribución principal**

La contribución principal de esta tesis es: la propuesta de una metodología de análisis de estabilidad de la variedad algebraica de sincronización para redes de sistemas multi-agentes heterogéneos, en el proceso unidireccional de multi-sincronización generalizada, mediante un enfoque algebraico diferencial.

## **Estructura y organización**

El contenido principal de este trabajo se organiza en tres capítulos, que incluyen parte del trabajo de investigación realizado durante el programa de Doctorado. Finalmente, se concluye con una pequeña discusión acerca del trabajo restante y posibles direcciones futuras.

### **Capítulo 2 - Preliminares**

En el capítulo 1 se darán definiciones y preliminares básicos sobre álgebra diferencial y formas canónicas [71]; y coordinación de agentes y teoría algebraica de grafos [36]. Estas herramientas nos permiten describir propiedades interesantes de los SMA que nos serán de gran utilidad, a saber: el estado síncrono de sistemas caóticos de una manera sencilla, la interacción entre nodos en una red y el estudio de estabilidad de la variedad algebraica de sincronización. También, se presentan algunos resultados y análisis preliminares sobre el problema de multi-sincronización de SMA, mismos que muestran la conexión directa con la MSG.

### **Capítulo 3 - MSG como un problema de consenso siguiendo al líder**

En el capítulo 2 se propone una metodología para resolver el problema de MSG en la topología unidireccional maestro-esclavo. Dentro de un enfoque algebraico diferencial este problema se interpreta como un problema de consenso siguiendo al líder. Introduciendo al SMA como una red de sistemas con una dinámica estrictamente diferente, de la misma dimensión e interconectados mediante un árbol dirigido de cobertura fijo. También,

se propone un controlador dinámico para cada seguidor que permite sincronizar la red completa [20–22, 67, 69]. Además, bajo la premisa de que el elemento primitivo diferencial permite completamente caracterizar la variedad de algebraica de sincronización del SMA, mostramos algunos resultados preliminares sobre la estabilidad de este tipo de variedades de sincronización [20]. Por último, de manera ilustrativa, presentamos un ejemplo numérico sobre una red de sistemas caóticos heterogéneos.

## **Capítulo 4 - Extensiones para sistemas de orden fraccionario conmensurado**

En el capítulo 3, se estudia el problema de MSG para una clase de sistemas de orden fraccionario conmensurado (MSGF). Se presenta una metodología para sincronizar múltiples familias de sistemas Liouvillianos en la configuración maestro-esclavo. También, se obtiene una construcción explícita del mapeo que relaciona las trayectorias de los sistemas maestros con sus correspondientes sistemas esclavos. Se diseña una ley de control dinámica de orden fraccionario que permite alcanzar la MSGF para todas las familias de sistemas en la red. Además, añadiendo términos de acoplamiento difusivo en la ley dinámica de control, se resuelve el problema de MSGF para cualquier tipo de interconexión entre esclavos de cada familia de sistemas [19]. Finalmente, se muestran algunas simulaciones numéricas para ilustrar la metodología propuesta.

## **Discusión y direcciones futuras**

Como cierre de este manuscrito, en base a los resultados obtenidos, se presentan las conclusiones sobre los resultados obtenidos durante el programa de Doctorado. También se comenta sobre las soluciones obtenidas de otros problemas relacionados y las posibles direcciones futuras de este trabajo de investigación.

# Capítulo 2

## Preliminares

En las secciones posteriores se darán definiciones y preliminares básicos sobre álgebra diferencial y formas canónicas [71]; y coordinación de agentes y teoría algebraica de grafos [36]. Estas herramientas nos permiten describir propiedades interesantes de los SMA que nos serán de gran utilidad, a saber: el estado síncrono de los sistemas caóticos de una manera sencilla, la interacción entre los nodos en una red y el estudio de estabilidad de la variedad algebraica de sincronización. También, se presentan algunos resultados y análisis preliminares sobre el problema de multi-sincronización de SMA.

### 2.1. Álgebra diferencial en teoría de control

En general en teoría de control estamos interesados en estudiar problemas relacionados con el diseño de sistemas control para sistemas dinámicos representados principalmente por ecuaciones diferenciales. El álgebra diferencial [54, 108] puede entenderse como una generalización de las estructuras básicas algebraicas construidas a partir de operaciones como la suma y multiplicación [40, 75, 109] para el estudio de problemas afines en ecuaciones diferenciales. Es decir, la generalización de estructuras como: anillos, campos, extensiones de campos, vectoriales, etc., dotadas además de un operador derivada sirven como un lenguaje descriptivo de los problemas asociados con sistemas dinámicos. La idea principal del álgebra diferencial en teoría de control es describir a los sistemas dinámicos a través de estructuras algebraicas diferenciales y resolver sus problemas asociados mediante el uso de técnicas basadas en álgebra diferencial [71]. En particular en este trabajo, atacamos el problema de sincronización de sistemas dinámicos utilizando técnicas basadas en esta área.

Es por ello que en esta sección se presentan los conceptos básicos y resultados preliminares sobre estructuras algebraicas y en especial del álgebra diferencial, mismos que son la base

de este trabajo.

### 2.1.1. Anillos y campos.

**Definición 1.** Sea  $R$  un conjunto no vacío, decimos que  $R$  es un **anillo** si existen dos operaciones binarias cerradas en  $R$  llamadas suma ( $+$  :  $R \times R \rightarrow R$ ) y multiplicación ( $\cdot$  :  $R \times R \rightarrow R$ ) tales que:

- 1) Cerradura en la suma:  $\forall a, b \in R, a + b \in R$ .
- 2) Conmutatividad de la suma:  $\forall a, b \in R, a + b = b + a$ .
- 3) Asociatividad de la suma:  $\forall a, b, c \in R, a + (b + c) = (a + b) + c$ .
- 4) Elemento neutro aditivo:  $\forall a \in R \exists 0 \in R$  tal que  $a + 0 = 0 + a = a$ .
- 5) Elemento inverso aditivo:  $\forall a \in R \exists -a \in R$  tal que  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
- 6) Cerradura en la multiplicación:  $\forall a, b \in R, a \cdot b \in R$ .
- 7) Asociatividad de la multiplicación:  $\forall a, b, c \in R, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .
- 8) Leyes de distributividad:  $\forall a, b, c \in R, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  y  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Los conjuntos de los números enteros  $\mathbb{Z}$  y los números reales  $\mathbb{R}$  son anillos.

**Ejemplo 2.1.2.** Sea  $k = \mathbb{R}$ . El **anillo de polinomios en una indeterminada  $x$**  (una sola variable) sobre  $k$  es:

$$k[x] := \{f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_i \in k\}.$$

Además,  $k[x]$  es un dominio entero.

**Observación 1.** Un **polinomio nulo** es aquel polinomio con todos sus coeficientes iguales a cero, i.e.,  $a_i = 0, \forall i$ . Se dice que es un **polinomio no nulo** si al menos uno de sus coeficientes es distinto de cero.

**Observación 2.** Es claro que existen estructuras subyacentes a los anillos, es decir, aquellas estructuras donde solo se permite una operación (**semigrupos, grupos**). Dado

que esta sección no es compendio exhaustivo sobre estructuras algebraicas, este y otros detalles omitidos sobre estructuras básicas pueden consultarse en [40, 75, 109].

Si se añaden propiedades en las operaciones en los anillos se obtienen estructuras más complejas. Este proceso de agregar reglas complementarias en las operaciones de los conjuntos permite construir estructuras más ricas y complejas. En la siguiente definición se muestran otras estructuras comúnmente usadas y cuya estructura base es un anillo.

**Definición 2.** Sea  $R$  un **anillo**, además se dice que es:

- 1) Un **anillo con elemento unitario** si  $\exists 1 \in R$  tal que  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in R$ .
- 2) Un **anillo conmutativo** si  $\forall a, b \in R, a \cdot b = b \cdot a$ .
- 3) Un **dominio entero** si es un anillo conmutativo y si no tiene divisores de cero.
- 4) Un **anillo con división** si  $\exists 1 \in R \setminus 0$  tal que  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \forall a \in R \setminus 0$  y  $\forall a \in R \setminus 0 \exists a^{-1} \in R \setminus 0$  tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$  (sus elementos distintos de cero forman un grupo bajo la multiplicación).
- 5) Un **campo** si es un anillo conmutativo con división.

**Observación 3.** Sea  $R$  es un anillo conmutativo y  $a \in R, a \neq 0$ , se dice que  $a$  es un divisor de cero si existe un  $b \in R, b \neq 0$ , tal que  $a \cdot b = 0$ .

**Lema 1.** Un dominio entero finito es un campo.

**Definición 3.** Sea  $K$  un campo y  $k$  un subcampo de  $K$ , entonces  $K$  es una **extensión del campo  $k$** . Se denota como  $K/k$  (véase Figura 2.1).

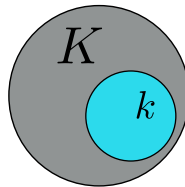


Figura 2.1: La extensión de campo  $K/k, k \subset K$

**Definición 4.** Un **anillo diferencial** es un  $A$  es un anillo conmutativo tal que la **derivada**  $\partial$  de  $A$  es una función cerrada  $\partial : A \rightarrow A$  tal que para todo par  $(a, b), a, b \in A$  se

satisface que:

$$\begin{aligned} + & : A \times A \rightarrow A \\ & (a, b) \mapsto a + b \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cdot & : A \times A \rightarrow A \\ & (a, b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

También se satisface:

$$\partial(a + b) = \partial a + \partial b$$

y

$$\partial(a \cdot b) = (\partial a) b + a (\partial b).$$

Esta definición se ilustra en la Figura 2.2, note que  $a \cdot b, a + b \in A$  dado que  $A$  es un anillo.

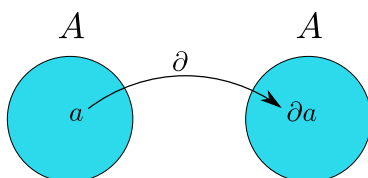


Figura 2.2: Diferenciación en un anillo conmutativo con unidad  $A$

**Definición 5.** Un *campo diferencial* es un *anillo diferencial* que a su vez es un *campo*.

**Definición 6.** Un *campo diferencial*  $k$  es un conjunto con las propiedades de un campo, dotado con una *operador de derivada* que satisface las reglas usuales:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in k \quad \frac{d}{dt}(a + b) &= \dot{a} + \dot{b}, \\ \forall a, b \in k \quad \frac{d}{dt}(a \cdot b) &= \dot{a} \cdot b + a \cdot \dot{b}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.1.3.** Los conjuntos triviales  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son campos diferenciales.

**Ejemplo 2.1.4.** Sea  $R[x]$  el *anillo de polinomios en una variable  $x$  sobre el campo*

$R$  con operador derivada tal que:

$$\begin{aligned} \partial : R[x] &\rightarrow R[x] \\ \sum_{i=0}^m a_i x^i &\mapsto \sum_{i=1}^m i a_i x^{i-1} \end{aligned}$$

entonces  $\mathbb{R}[x]$  es un **anillo diferencial**.

**Definición 7.** Una **extensión de campo diferencial**  $L/k$  está compuesta de dos **campos diferenciales**  $k, L$  tal que:

- a)  $k \subset L$ ;
- b) la derivación de  $k$  es la derivación de  $L$  restringida a  $k$ .

**Ejemplo 2.1.5.** Sea  $L = \mathbb{R}\langle e^t \rangle$ ,  $k = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}\langle e^t \rangle/\mathbb{R}$  es una extensión de campo diferencial.

**Definición 8.** Un elemento  $a \in L$  se dice que es **algebraico diferencialmente sobre**  $k$  si y solo si satisface una ecuación algebraica diferencial  $P(a, \dot{a}, \dots, a^{(\gamma)}) = 0$ , con  $P$  un polinomio sobre  $k$  en  $a$  y sus derivadas temporales,  $\gamma \in \mathbb{Z}_+$ . Por otra parte, si  $a$  no satisface una ecuación algebraica diferencial decimos que  $a$  es **trascendental diferencialmente sobre**  $k$ .

**Ejemplo 2.1.6.** Sean  $L = \mathbb{R}$  y  $k = \mathbb{Q}$ , el elemento  $a = e^{\frac{1}{2}t} \in L$  satisface la ecuación diferencial algebraica  $\dot{x} - \frac{1}{2}x = 0$ . Por lo tanto,  $a = e^{\frac{1}{2}t}$  es diferencialmente algebraico sobre  $k$ .

Un elemento  $\delta \in L$  tal que  $L = k\langle \delta \rangle$  se llama **elemento primitivo diferencial**, donde  $k$  es un campo diferencial y  $L$  es generado diferencialmente por  $k$  y  $\delta$ .

**Definición 9.** Una **dinámica** se define como una extensión diferencial algebraica finitamente generada  $L/k\langle u \rangle$  del campo diferencial  $k\langle u \rangle$ , i.e.,  $\text{diff tr } d^\circ L/k\langle u \rangle = 0$ , donde  $k\langle u \rangle$  es el campo diferencial generado por  $k$  y un conjunto finito de cantidades diferenciales  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ .

**Observación 4.** El **grado de trascendencia diferencial** cero ( $\text{diff tr } d^\circ L/k\langle u \rangle = 0$ ) significa que para todo elemento de  $L$  se satisface una ecuación algebraica diferencial con coeficientes que son funciones racionales sobre  $k$  en las componentes de  $u$  y un número finito de sus derivadas respecto al tiempo.

**Teorema 1.** [34] Una extensión diferencial finitamente generada es diferencialmente algebraica si y solo si su grado de trascendencia (no-diferencial) es finito.  $\square$

**Observación 5.** *Un grado de trascendencia no-diferencial finito (e.g.,  $\text{tr } d^\circ L/k\langle u \rangle = n$ ) está relacionado con el número de condiciones iniciales que se necesitan para resolver la ecuación diferencial algebraica de la dinámica (este es el análogo a una base en espacios vectoriales). En el problema de condiciones iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias este es finito.*

**Ejemplo 2.1.7.** *Considere el siguiente sistema no lineal:*

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = ux_2 + x_1, \quad (2.2)$$

con  $x = (x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , condiciones iniciales  $x_i(t_0) = x_{i0}$ ,  $i = 1, 2$ , note que (2.1) y (2.2) pueden reescribirse como polinomios algebraicos diferenciales de la forma:

$$\dot{x}_1 - x_2 + x_1^3 = 0, \quad (2.3)$$

$$\dot{x}_2 - ux_2 - x_1 = 0, \quad (2.4)$$

luego (2.3) y (2.4) pueden verse como dinámicas (extensiones diferenciales algebraicas finitamente generadas)  $\mathbb{R}\langle x, u \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle$  donde  $\text{tr } d^\circ \mathbb{R}\langle x, u \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle = 2$  (véase el Teorema 1).

**Ejemplo 2.1.8.** *Considere el siguiente polinomio diferencial algebraico:*

$$\ddot{y} + a\dot{y} + uy = 0, \quad (2.5)$$

con condiciones iniciales  $y^{(i)}(t_0) = y_{0i}$ ,  $i = 1, 2$ . Observe que (2.5) puede verse como una dinámica de la forma  $\mathbb{R}\langle u, y \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle$ , donde  $u, \dot{u}, a \in \mathbb{R}\langle u \rangle$

**Ejemplo 2.1.9.** *Considere la siguiente ecuación diferencial:*

$$\ddot{y} + \dot{y} + \text{sen } y + u = 0, \quad (2.6)$$

con condiciones iniciales  $y^{(i)}(t_0) = y_{0i}$ ,  $i = 1, 2$ . Esta ecuación corresponde a sistema de péndulo simple y no es una ecuación diferencial algebraica en  $y$ . En este caso, dado que  $x = \text{sen } y$  satisface un polinomio algebraico diferencial de la forma:

$$\dot{y}^2 x^2 + \dot{x}^2 = \dot{y}^2$$

Entonces  $y$  es algebraico sobre  $\mathbb{R}\langle u \rangle$ , donde (2.11) puede verse como una dinámica de la



forma  $\mathbb{R}\langle u, y \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle$ :

$$\dot{y}^2 (-\ddot{y} - \dot{y} - u)^2 + (-y^{(3)} - \ddot{y} - \dot{u})^2 - \dot{y}^2 = 0$$

**Ejemplo 2.1.10.** *Considere el siguiente sistema en su representación en variables de estado:*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - \text{sen}x_1 + u, \quad (2.8)$$

$$y = x_1. \quad (2.9)$$

*Se puede verificar fácilmente que (2.7) y (2.9) se pueden representar como los siguientes polinomios algebraicos diferenciales:*

$$P_1(x_1, x_2) = \dot{y} - x_2 = 0,$$

$$P_3(y, x_1) = y - x_1 = 0.$$

*Sin embargo, de (2.8):*

$$\dot{x}_2 + x_2 + \text{sen}x_1 - u = 0, \quad (2.10)$$

*no es un polinomio diferencial algebraico en las indeterminadas  $x_2$  y  $x_1$  dado que  $x_1$  no es algebraico sobre  $\mathbb{R}\langle x_2, u \rangle$ ,  $\text{sen}x_1$  puede representarse como una serie infinita de potencias de  $x_1$  (expansión en serie de Taylor). Para resolver esto, de (2.10) proponemos el siguiente cambio de variable  $\theta = \sin x_1$  que verifica la siguiente ecuación auxiliar:*

$$\dot{x}_2^2 \theta^2 + \dot{\theta}^2 = \dot{x}_2^2. \quad (2.11)$$

*También de (2.10) se tiene que*

$$\theta = u - \dot{x}_2 - x_2,$$

$$\dot{\theta} = \dot{u} - \ddot{x}_2 - \dot{x}_2,$$

*finalmente, sustituyendo en (2.11), tenemos que:*

$$\dot{x}_2^2 (u - \dot{x}_2 - x_2)^2 + (\dot{u} - \ddot{x}_2 - \dot{x}_2)^2 = \dot{x}_2^2,$$

o equivalentemente

$$P_2(x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, u, \dot{u}) = \dot{x}_2^2 (u - \dot{x}_2 - x_2)^2 + (\dot{u} - \ddot{x}_2 - \dot{x}_2)^2 - \dot{x}_2^2 = 0.$$

△

**Definición 10.** [34] Sea  $k$  cualquier campo diferencial. Un **espacio  $k$ -vectorial diferencial**  $\mathcal{V}$  es un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  dotado de una sola derivada sujeto a las siguientes condiciones:

$$\forall a, b \in k, \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \frac{d}{dt}(ax + by) = \dot{a}x + a\dot{x} + \dot{b}y + by.$$

**Definición 11.** Un sistema es **Picard-Vessiot (PV)** si y solo si el espacio  $k\langle u \rangle$ -vectorial  $\mathcal{V}$  generado por las derivadas del conjunto  $\{\bar{y}^{(n)}, n \geq 0\}$  tiene dimensión finita, con  $\bar{y}$  como el elemento primitivo diferencial.

Hemos cambiado de forma deliberada la notación del elemento primitivo diferencial  $\delta$  para relacionarlo con la salida de un sistema dinámico  $\bar{y}$ . La utilidad de esta notación se verá en el capítulo siguiente al utilizar este elemento como un generador.

## 2.2. Grafos y consenso en el SMA

En esta sección se introducen algunas definiciones sobre la teoría algebraica de grafos [20, 85] para la red de SMA en el problema de MSG.

Considere un grafo dirigido<sup>1</sup>  $\mathcal{G}_\nu = (\mathcal{V}_\nu, \mathcal{E}_\nu, \mathcal{A}_\nu)$  para modelar la interacción entre  $\nu \in \mathbb{Z}$  agentes con un conjunto de nodos  $\mathcal{V}_\nu = \{1, 2, \dots, \nu\}$ <sup>2</sup>, un conjunto de aristas  $\mathcal{E}_\nu \subseteq \mathcal{V}_\nu \times \mathcal{V}_\nu$ , y la matriz de adyacencia definida como  $\mathcal{A}_\nu = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$  con elementos positivos  $a_{ij}$  definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j, i) \in \mathcal{E}_\nu, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea  $\mathcal{L}_\nu = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$  la matriz laplaciana no simétrica inducida por  $\mathcal{G}_\nu$  definida como

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^{\nu} a_{ik} & \text{si } i = j, \\ -a_{ij} & \text{si no.} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Para mayor detalle consulte [84, 106, 107].

<sup>2</sup>En el problema de consenso siguiendo al líder, sin pérdida de generalidad, podemos tomar este conjunto como  $\mathcal{V}_\nu = \{1, 2, \dots, \nu\}$  o  $\mathcal{V}_\nu = \{0, 1, \dots, \nu - 1\}$ , donde el nodo 0 ó  $\nu$  representa al líder

**Teorema 2.** (Localización espectral [84]) Sea  $\mathcal{G}_\nu = (\mathcal{V}_\nu, \mathcal{E}_\nu, \mathcal{A}_\nu)$  un grafo dirigido con matriz laplaciana (no simétrica)  $\mathcal{L}_\nu$ . Denote al máximo grado de entrada a un nodo de  $\mathcal{G}_\nu$  como  $\delta(\mathcal{G}_\nu) = \max_i \deg_{in}(v_i)$ . Entonces todos los valores propios de la matriz  $\mathcal{L}_\nu$  se encuentran en el siguiente disco

$$D(\mathcal{G}_\nu) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \delta(\mathcal{G}_\nu)| \leq \delta(\mathcal{G}_\nu)\} \quad (2.12)$$

con centro  $z = \delta(\mathcal{G}_\nu) + j0$  en el plano complejo. Además la parte real de los valores propios de la matriz  $-\mathcal{L}_\nu$  son negativos o cero.  $\square$

Consulte [84] para una prueba de este argumento, esta se sigue directamente del Teorema del disco de Greshgorin (véase el Teorema 6.1.1 en [44]). El teorema anterior es un resultado auxiliar para probar la siguiente proposición.

**Proposición 1.** Sea  $\mathcal{G}_\nu = (\mathcal{V}_\nu, \mathcal{E}_\nu, \mathcal{A}_\nu)$  un grafo dirigido. Suponga que  $\mathcal{G}_\nu$  es un árbol dirigido de cobertura con el  $\nu$ -ésimo nodo como raíz, i.e., la matriz laplaciana es

$$\mathcal{L}_\nu = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\nu-1 \times \nu} \\ 0_{1 \times \nu} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

donde  $\mathcal{L}_{\nu-1 \times \nu} = (M \mid b)$ ,  $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$  y  $b \in \mathbb{R}^{\nu-1}$  con  $m_{ij} = -a_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $m_{ii} = \sum_{j=1, i \neq j}^\nu a_{ij}$  y  $b = \left(-a_{1(\nu)} \quad \cdots \quad -a_{(\nu-1)(\nu)}\right)^T$ , respectivamente. Entonces la matriz  $M$  tiene todos sus valores propios estrictamente en el semi-plano derecho del plano complejo.

**Prueba 1.** Dado que  $\mathcal{G}_\nu$  es un árbol dirigido de cobertura con el  $\nu$ -ésimo nodo como raíz, todas las entradas de la matriz laplaciana  $\mathcal{L}_\nu$  son idénticamente cero en el último renglón, entonces  $\text{rank}(\mathcal{L}_\nu) = \text{rank}(\mathcal{L}_{\nu-1 \times \nu}) = \nu - 1$ . Además, note que todas las sumas de los elementos de cada renglón de  $\mathcal{L}_{\nu-1 \times \nu}$  son cero, por lo tanto la última columna de  $\mathcal{L}_{\nu-1 \times \nu}$  depende de las primeras  $\nu - 1$  columnas, i.e.,  $b = -M\mathbf{1}_{\nu-1}$ . Así  $\text{rank}(M) = \text{rank}(M \mid b) = \nu - 1$ <sup>3</sup>. Lo anterior implica que  $M$  es una matriz no singular (i.e.,  $\det(M) = \prod_{i=1}^{\nu-1} \lambda_i(M) \neq 0$ ) o equivalentemente  $M$  no tiene valores propios de valor cero. Luego, como una consecuencia directa del teorema de localización espectral (véase el Teorema 2), sabemos que todos los discos de la matriz  $M$  se encuentran en el semi-plano derecho del plano complejo y como ningún valor propio de  $M$  es cero entonces  $\text{Re}(\lambda_i(M)) > 0$ ,  $\forall i$ .  $\square$

Considere a un grafo  $\mathcal{G}_\nu$  y denote a cada nodo como un agente con dinámica no lineal (agente dinámico) dado por

<sup>3</sup>los argumentos anteriores siguen ideas de [107]

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i1} &= f_{i1}^T(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}), \\
\dot{x}_{i2} &= f_{i2}^T(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}), \\
&\vdots \\
\dot{x}_{in} &= f_{in}^T(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$\forall i \in V$ , donde  $x_{i1} = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{\nu 1})$ ,  $x_{i2} = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{\nu 2})$ ,  $\dots$ ,  $x_{in} = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{\nu n}) \in \mathbb{R}^\nu$ ,  $u_{i1} = (u_{11}, \dots, u_{\nu 1})$ ,  $\dots$ ,  $u_{in} = (u_{1n}, \dots, u_{\nu n}) \in \mathbb{R}^\nu$  (e.g. el grafo en la Figura 1.7). Se dice que la red es heterogénea si al menos existe alguna dinámica del agente distinta a los demás agentes, el peor de los casos se da cuando  $f_{ij} \neq f_{kj}$  para  $i \neq k$ . De otro modo se dice que la red está compuesta por sistemas idénticos, i.e.,  $f_{1j} = f_{2j} = \dots = f_{\nu j}$ . A la totalidad de la red en (2.14) se denomina **Sistema Multi-Agente** (SMA) o *grafo dinámico*. De manera compacta el SMA heterogéneo compuesto por sistemas no lineales también puede ser descrito por sus dinámicas individuales de la forma,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= f_i(x_i, u_i), \\
y_i &= h_i(x_i, u_i),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

donde  $f_i : \Omega_i \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz en  $x_i$  y  $u_i$ ;  $h : \Omega_i \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continuamente diferenciable en sus argumentos;  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u_i \in \mathbb{R}$  y  $y_i \in \mathbb{R}$  denotan al estado, entrada y salida del  $i$ -ésimo agente,  $i = 1, \dots, \nu$ , respectivamente. De la misma forma se dice que es un SMA heterogéneo considerando que  $f_i \neq f_j$ ,  $h_i \neq h_j$ ,  $\forall i, j$ .

Sea  $x_{ij}$  el valor del nodo  $j$  correspondiente al  $i$ -ésimo agente  $\forall i, j$  fijo. En este caso particular, todas las interacciones de los nodos  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$  tiene asociado el mismo grafo  $\mathcal{G}_\nu$  (i.e. tienen la misma matriz laplaciana asociada). Entonces, se dice que  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$  denota al valor del nodo  $i \in \mathcal{V}$ . Se define  $\mathcal{G}_\nu^x = (\mathcal{G}_\nu, x)$  como el estado del SMA (grafo dinámico) con valor  $x = (x_{i1}^T, \dots, x_{in}^T)^T \in \mathbb{R}^{\nu n}$ .

**Definición 12.** *Sea  $x_i$  el valor del nodo  $i \in \mathcal{V}$ . Se dice que los nodos  $i$  y  $j$  están en acuerdo si y solo si  $x_i = x_j$ . De la misma manera, ellos están en desacuerdo si y solo si  $x_i \neq x_j$ . Entonces, los nodos en la red de sistemas multi-agente llegan al consenso si y solo si todos los nodos están de acuerdo, equivalentemente,  $x_i = x_j$  para todo  $i, j \in \mathcal{V}$ ,  $i \neq j$  [83].*

Considere el problema de consenso siguiendo al líder con las interacciones modeladas entre  $N + 1$  nodos mediante un árbol de cobertura dirigido  $\mathcal{G}_{N+1}$  con el nodo  $N + 1$  como

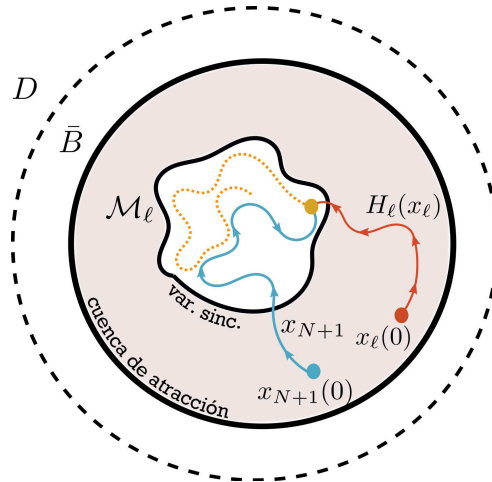


Figura 2.3: Variedad de sincronización de cada seguidor en el problema de consenso siguiendo al líder

raíz grafo. Considere al nodo  $N + 1$  como el líder y denote a los seguidores como los nodos  $\ell = 1, \dots, N$ . Note que el consenso siguiendo al líder para los sistemas multi-agente se alcanza cuando todos los nodos están de acuerdo con el líder. Sin embargo, de acuerdo a lo discutido en el capítulo anterior, la definición de la variedad de sincronización no es tan simple en el caso de SMA heterogéneos. En este caso recurrimos a una definición más general sobre el consenso siguiendo al líder [20–22].

**Definición 13.** *El consenso siguiendo al líder se alcanza para todos los agentes (2.14) ó (2.15) si existe una familia de elementos primitivos diferenciales tales que generen las transformaciones  $H_\ell(\cdot) \triangleq (\phi_{u_{N+1}}^{-1} \circ \phi_{u_\ell})(\cdot)$ ,  $H_\ell : \Omega_\ell \times \mathcal{U}_\ell \rightarrow \Omega_{N+1}$ ; una familia de variedades algebraicas de sincronización  $\mathcal{M}_\ell = \{(x_{N+1}, x_\ell) \mid x_{N+1} = H_\ell(x_\ell)\}$ , los conjuntos compactos  $\bar{B}_\ell$  tales que  $\mathcal{M}_\ell \subset B_\ell \subset \Omega_\ell \times \Omega_{N+1} = D_\ell$  y los protocolos dinámicos de consenso  $U_\ell \in \mathcal{U}_\ell$  que hacen a cada una de estas variedades los atractores estables del  $\ell$ -ésimo seguidor, tal que,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{N+1} - H_\ell(x_\ell)\|_2 \rightarrow 0 \forall (x_{N+1}(t_0), x_\ell(t_0)) \in B_\ell, \forall \ell = 1, \dots, N$ .*

**Observación 6.** *La variedad  $\mathcal{M}_\ell$  se dice algebraica en el sentido que las transformaciones  $H_\ell(\cdot)$  están compuestas por funciones racionales que dependen del estado y la entrada de los sistemas líder y seguidor, específicamente las funciones racionales son polinomios diferenciales en el estado del  $\ell$ -ésimo sistema con coeficientes en  $\mathbb{R} \langle u_\ell \rangle$ . La variedad algebraica de sincronización para los agentes (2.14) está dada por el siguiente conjunto:*

$$\mathcal{M} = \{(x_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, x_\ell) \mid x_{N+1} = H_1(x_1) = \dots = H_N(x_N)\},$$

donde  $\mathbf{1}_N = (1 \ \dots \ 1)^T \in \mathbb{R}^N$ ,  $H_\ell : \Omega_\ell \times \mathcal{U}_\ell \rightarrow \Omega_\ell$  y  $H_\ell = \Phi_{N+1}^{-1} \circ \Phi_\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq N$ . Se dice

que el consenso siguiendo al líder se alcanza si  $\mathcal{M}$  es un atractor estable.

**Observación 7.** En una red de agentes dinámicos idénticos la variedad de sincronización está dada por la igualdad de los estados, i.e.,

$$\mathcal{M} = \{(x_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, x_\ell) | x_{N+1} = x_1 = \dots = x_N\}.$$

## Capítulo 3

# MSG como un problema de consenso siguiendo al líder

*“El tipo de sincronía que es impresionante, es aquel que es persistente. Cuando dos cosas siguen sucediendo simultáneamente por un extenso periodo de tiempo, dicha sincronía no es un accidente.”*

— Steven H. Strogatz [125].

Desde un enfoque algebraico-diferencial y bajo la premisa de que el elemento primitivo diferencial permite caracterizar completamente la variedad algebraica de sincronización, la MSG se interpreta como un problema de consenso siguiendo al líder de sistemas multi-agentes. En este contexto, entendemos por sistema multi-agente (SMA) a la red de sistemas caóticos de naturaleza distinta, de la misma dimensión, interconectados mediante un árbol dirigido de cobertura fijo con un único líder como raíz. Cada nodo en el grafo representa la dinámica asociada a cada sistema en la red (véase Figura 1.7). Es claro que la configuración maestro-esclavo es natural en la MSG, entonces es razonable que no existan conexiones entre los seguidores del SMA porque el acoplamiento es unidireccional y la información en la red se transmite de maestro a esclavo únicamente.

Mediante una transformación obtenida de la adecuada elección del elemento primitivo diferencial, el SMA puede llevarse a una forma canónica de observabilidad generalizada multi-salida (FCOGM). Esto permite el diseño de protocolos dinámicos de consenso tales que para todas las trayectorias distintas de los sistemas de los seguidores sea posible

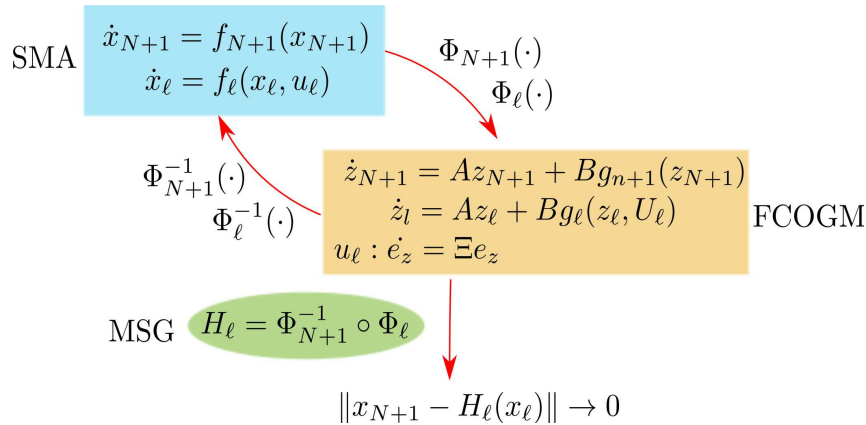


Figura 3.1: MSG como un problema de consenso siguiendo al líder con  $\ell = 1, \dots, N$ . Mediante el uso de herramientas del álgebra diferencial es posible llevar al SMA a su FCOGM, el cambio de coordenadas permite diseñar una ley de control dinámica (protocolo de consenso) que fuerza a los sistemas a comportarse de la misma manera, es decir, el error de sincronización en coordenadas transformadas  $e_z$  es lineal y asintóticamente estable. Finalmente a partir de las transformaciones  $\Phi_{N+1}(\cdot)$  y  $\Phi_\ell(\cdot)$  generadas mediante la salida de los sistemas (elementos primitivos diferenciales) es posible construir una variedad de sincronización estable para toda la red a partir de las transformaciones  $H_\ell(\cdot)$  para cada sistema seguidor. De tal manera que el consenso siguiendo al líder se alcanza debido a que las trayectorias son atraídas por esta variedad.

acercarse a la variedad algebraica de sincronización. En este caso, decimos que todos los agentes del SMA llegan al consenso, esto es, todos los nodos en la red se aproximan a la trayectoria del líder cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces si la variedad de sincronización es atractiva, implica que se alcanza el consenso siguiendo al líder, y por lo tanto el líder como los sus seguidores se encuentran en un estado de MSG (véase la Figura 3.1).

La organización de este capítulo se presenta de la siguiente manera: En la sección 3.1 se presenta una condición necesaria y suficiente para transformar el SMA (2.14) a su FCOGM; en la sección 3.2, se presentan los resultados principales de la metodología de MSG, el diseño de un protocolo dinámico de consenso y el estudio de estabilidad de la variedad de sincronización; en la sección 3.3 se extiende este resultado al introducir interacciones arbitrarias entre los seguidores; en la sección 3.4 se muestra un ejemplo numérico de una red de sistemas caóticos con un líder (sistema de Colpitts) y dos seguidores (sistemas de Rösler y Chua).



### 3.1. Observabilidad algebraica y formas canónicas de observabilidad generalizadas para el SMA

Sea  $K$  un campo diferencial base. Si los coeficientes de cualquier ecuación diferencial algebraica son constantes, sin pérdida de generalidad tomemos  $K = \mathbb{R}$ . Considere una dinámica de la forma  $D/K \langle y_i, u_i \rangle$ , de acuerdo a la Definición 9, todo elemento de  $D$  satisface una ecuación diferencial algebraica con coeficientes que son funciones racionales sobre  $K$ . Esto significa que el estado generalizado [71] que modela al SMA (2.14) debe satisfacer la siguiente condición de observabilidad algebraica en la siguiente manera:

**Definición 14.** *El conjunto de variables  $x_{ij} \in D/K \langle y_i, u_i \rangle$  del sistema (2.14) satisface la condición de observabilidad algebraica (OA) si  $x_{ij}$  es una función de las primeras  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  derivadas secuenciales de la salida  $y_i$  y la entrada  $u_i$ , respectivamente, i.e.,*

$$x_{ij} = \phi_{ij} \left( y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i, \dots, y_i^{(r_1)}, u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i, \dots, u_i^{(r_2)} \right),$$

donde  $\phi_{ij} : \mathbb{R}^{(r_1+1)} \times \mathbb{R}^{(r_2+1)} \rightarrow \mathbb{R}$  son polinomios algebraicos diferenciales sobre  $K \langle u_i, y_i \rangle$ .

Ahora, del Teorema del elemento primitivo diferencial [71] existe una familia de elementos  $\bar{y}_i = (y_1, \dots, y_{N+1})^T \in \mathbb{R}^{N+1}$  para (2.14), y un mínimo entero  $n \geq 0$  tal que  $\bar{y}_i^{(n)}$  es analíticamente dependiente de  $\bar{y}_i, \bar{y}_i^{(1)}, \dots, \bar{y}_i^{(n-1)}$  (esta familia de elementos existe porque la extensión  $D/K \langle y_i, u_i \rangle$  es diferencialmente algebraica, bajo estas condiciones esto es inmediato del Teorema 1):

$$\bar{H}_i \left( \bar{y}_i^{(n)}, \bar{y}_i^{(n-1)}, \dots, \bar{y}_i, u_i, u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(n-1)}, u_i^{(n)} \right) = 0. \quad (3.1)$$

Entonces la familia de sistemas (3.1) se puede resolver localmente como sigue

$$\bar{y}_i^{(n)} = -\bar{g}_i \left( \bar{y}_i^{(n-1)}, \dots, \bar{y}_i, u_i, u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(n-1)} \right) + u_i^{(n)}.$$

Y definiendo  $z_{ik} = \bar{y}_i^{(k-1)}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , se obtiene una forma local que puede verse como un forma canónica de observabilidad generalizada multi-salida (FCOGM):

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{i1} &= z_{i2}, \\
\dot{z}_{i2} &= z_{i3}, \\
&\vdots \\
\dot{z}_{in-1} &= z_n, \\
\dot{z}_{in} &= -\bar{g}_i(z_{i1}, \dots, z_{in}, u_i, u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(n-1)}) + u_i^{(n)}, \\
\bar{y}_i &= z_{i1},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

con  $\bar{g}_i(\cdot) = (g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_{N+1}(\cdot))^T \in \mathbb{R}^{r+1}$ ,  $u_i = (u_0, u_1, \dots, u_r)^T \in \mathbb{R}^{r+1}$ ,  $z_{i1} = (z_{01}, \dots, z_{r1})^T, \dots, z_{in} = (z_{0n}, \dots, z_{rn})^T \in \mathbb{R}^{r+1}$ . Ahora, estamos en posición de enunciar el siguiente resultado:

**Lema 2.** *El SMA (2.14) que satisface la condición OA es transformable a una FCOGM si y sólo si es una familia PV.*

**Prueba 2.** (Suficiencia) *Sea el conjunto  $\{\xi_i, \xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(n-1)}\}$  una base de trascendencia diferencial con  $\xi_i^{(k-1)} = y_i^{(k-1)}$ ,  $1 \leq i \leq N+1$ ,  $1 \leq k \leq n$ , y  $n \geq 0$  el mínimo entero tal que  $y_i^{(n)}$  es dependiente de  $y_i, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(n-1)}, u_i, \dots$ . Redefiniendo  $\xi_{ik} = \xi_i^{(k-1)}$ ,  $i \leq k \leq n$ , obtenemos:*

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{ij} &= \xi_{ij+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\
\dot{\xi}_{in} &= -\bar{g}_i(\xi_{i1}, \dots, \xi_{in}, u_i, u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(n-1)}) + u_i^{(n)}, \\
y_i &= \xi_{i1}.
\end{aligned}$$

(Necesidad) *Es inmediata.* □

El siguiente corolario indica la forma de elegir el elemento primitivo diferencial y la forma del mapeo que transforma los estados de los sistemas (2.15) a los estados en su FCOG.

**Corolario 1.** *Considere que el sistema (2.15) es Picard-Vessiot y cuyos estados son algebraicamente observables para cada  $i$  fijo y elijase el elemento primitivo diferencial como:*

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{ij} + \sum_{k=1}^m \beta_k u_{ik}, \quad \alpha_j, \beta_k \in k\langle u_i \rangle \tag{3.3}$$

donde  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{im})^T$ . Entonces el sistema (2.15) se puede transformar a su FCOG:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_i &= A_n \eta_i + B_n (g_i(\eta_i, U_i) + \bar{u}_i) \\ \dot{U}_i &= A_\gamma U_i + B_\gamma \bar{u}_i\end{aligned}\tag{3.4}$$

con  $\eta_i := \Phi_{u_i}(x_i) = (y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(n-1)})^T \in \mathbb{R}^n$  como una transformación no lineal dependiente de la ley de control  $u_i$  y sus derivadas; con  $U_i = (u_i, \dot{u}_i, \dots, u_i^{(\gamma-1)})^T \in \mathbb{R}^\gamma$ ,  $\bar{u}_i \in \mathbb{R}$  es la ley de control dinámica obtenida como una cadena de integradores de la entrada  $u_i$  mediante el elemento primitivo diferencial y sus  $n - 1$  derivadas respecto al tiempo.  $\square$

**Lema 3** (Función inversa global [147]). Sea  $\Phi(x_0) \in \mathcal{C}^k$  un mapeo de  $\Omega_0$  a  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $\Phi^{-1}$  existe y además  $\Phi^{-1} \in \mathcal{C}^k$  si y sólo si:

- el jacobiano de  $\Phi$  es no singular en  $\Omega_0$ , i.e.,  $\det \left[ \partial/\partial x_0 \right] \Phi \neq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  y,
- la norma del mapeo  $\Phi$  es radialmente no acotada, i.e.,

$$\lim_{\|x_0\| \rightarrow \infty} \|\Phi(x_0)\| = \infty.$$

para cualquier norma.  $\square$

Note que la segunda condición del Lema 3 implica que el resultado sea global (cf. [48, 114]).

**Observación 8.** Suponga que las condiciones del Corolario 1 se cumplen y tome el elemento primitivo diferencial como  $y_i = x_{ij} + u_{ij}$ . El sistema (2.15) es algebraicamente observable si y solo si  $\Phi_{u_i}^{-1}$  existe. Lo anterior es un consecuencia directa de la propiedad de observabilidad algebraica [71]. Además note que si  $u_{ij} = 0$ , por el Lema 3,  $\Phi_{u_i}^{-1} \in \mathcal{C}^k$ .

**Observación 9.** En el contexto de SMA, la condición de heterogeneidad de los sistemas no lineales (2.15) implica que el campo vectorial asociado a cada sistema es distinto, i.e.,  $f_i(x_i, u_i) \neq f_j(x_j, u_j)$ . Como una consecuencia directa de esto,  $g_i(\eta_i, U_i) \neq g_j(\eta_j, U_j)$  en los sistemas de la forma (3.4),  $\forall i \neq j$ . Esto describe la configuración general sobre los sistemas involucrados en la redes heterogéneas, además de las restricciones dadas por el Lema 2.

### 3.1.1. Comportamiento interno, linearización exacta y formas canónicas

En este apartado se dan algunas nociones introductorias del comportamiento interno de los sistemas en consideración, y cómo estas se encuentran ligadas con su FCOG. Primero,

suponga que el sistema (2.15) se puede transformar en su FCOG (3.4). Del Corolario 1, si el elemento primitivo diferencial se restringe a  $y_i(t) \equiv 0$ , luego  $\eta_i(t) = 0$ . Es inmediato de (3.4) que

$$\begin{aligned} 0 &= B_n (g_i(0, U_i) + \bar{u}_i) \\ \dot{U}_i &= A_\gamma U_i + B_\gamma \bar{u}_i \end{aligned}$$

Desde luego, la entrada  $\bar{u}_i$  toma la siguiente forma

$$\bar{u}_i = -g_i(0, U_i)$$

**Definición 15.** *El comportamiento interno o dinámica cero del sistema (3.4) (respectivamente del sistema (2.15)) consiste en la ecuación dinámica*

$$\dot{U}_i = A_\gamma U_i - B_\gamma g_i(0, U_i) \quad (3.5)$$

tal que el elemento primitivo diferencial se restringe a  $y_i(t) \equiv 0$  durante el máximo intervalo de existencia de la solución  $\eta_i$  y el controlador dinámico  $U_i$ .

Por otra parte, es inmediato del Corolario 1 que la linearización exacta de los sistemas no lineales puede realizarse mediante una transformación dependiente del control, esta última es consecuencia de la existencia del elemento primitivo diferencial. Sin embargo, este no será el caso como se verá en las siguientes secciones.

**Ejemplo 3.1.1.** *Considere el sistema de Rössler como un agente que pertenece al SMA. Cuya dinámica es la siguiente*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= -(x_{12} + x_{13}), \\ \dot{x}_{12} &= x_{11} + a_1 x_{12}, \\ \dot{x}_{13} &= b_1 + x_{13}(x_{11} - c_1), \\ y_1 &= x_{12} + u_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $x_1(0) = (1 \ 2 \ -5)^T$ ,  $a_1 = b_1 = 0.2$ ,  $c_1 = 5$ . Tomando la salida  $y_1$  como su elemento primitivo diferencial se obtiene la siguiente transformación

$$\Phi_{u_1}(x_1) := \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \eta_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} + u_{11} \\ x_{11} + a_1 x_{12} + u_{12} \\ a_1 x_{11} + (a_1^2 - 1)x_{12} - x_{13} + u_{13} \end{pmatrix},$$

y su imagen inversa correspondiente:

$$\Phi_{u_1}^{-1}(\eta_1) := \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1(\eta_{11} - u_{11}) + \eta_{12} - u_{12} \\ \eta_{11} - u_{11} \\ -(z_{11} - u_{11}) + a_1(\eta_{12} - u_{12}) - (\eta_{13} - u_{13}) \end{pmatrix},$$

La FCOG para el sistema de Rössler está dada por (3.4), tomando  $\gamma = n$  y

$$\begin{aligned} g_1(\eta_1, U_1) &= -b_1 - c_1(\eta_{11} - u_{11}) + (a_1 c_1 - 1)(\eta_{12} - u_{12}) \\ &\quad + (a_1 - c_1)(\eta_{13} - u_{13}) - a_1(\eta_{11} - u_{11})^2 \\ &\quad - a_1(\eta_{12} - u_{12})^2 + (a_1^2 + 1)(\eta_{11} - u_{11})(\eta_{12} - u_{12}) \\ &\quad - a_1(\eta_{11} - u_{11})(\eta_{13} - u_{13}) + (\eta_{12} - u_{12})(\eta_{13} - u_{13}) \end{aligned}$$

En este caso la dinámica cero (3.5) se obtiene al restringir la salida  $y_1 = x_{12} + u_{11} = 0$  tal que  $u_{11} = -x_{12}$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_n U_1 - B_n g_1(0, U_1) \\ g_1(0, U_1) &= c_1 u_{11} - (a_1 c_1 - 1)u_{12} - (a_1 - c_1)u_{13} \\ &\quad - a_1 u_{11}^2 - a_1 u_{12}^2 + (a_1^2 + 1)u_{11}u_{12} \\ &\quad - a_1 u_{11}u_{13} + u_{12}u_{13} - b_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Cabe mencionar que tomando otro elemento primitivo diferencial como  $u_{11} = -x_{12}$  permite obtener el comportamiento interno (3.7) como otra FCOG para el sistema (3.6) cuando  $y_1 = 0$ .

**Observación 10.** De acuerdo a la última definición para el tipo de FCOGs en el Corolario 1, la dinámica cero de los sistemas no se encuentra relacionada con el problema de sincronización comparado con el caso reportado en [89] ya que se pretende forzar a los sistemas desde su FCOG. También note que la dinámica zero se toma en el sentido usual [48] cuando el sistema no contiene entrada externa, i.e.,  $u_i = 0$  (cf. con la Observación 9.3 en [71]). En lo que resta del trabajo, suponga que la dinámica cero es estable, tanto en el sentido usual como en este, para todos los agentes en la red y que existe una propiedad para el controlador dinámico que permite que las señales de este último sean acotadas (propiedad de entrada-estado convergente, véase Apéndice A).

### 3.1.2. Multi-sincronización generalizada y consenso

**Problema 1.** *Dados  $N + 1$  sistemas no idénticos descritos por (2.15) y transformables a (3.4), con una topología fija  $\mathcal{G}_{N+1}$  como un árbol dirigido de cobertura con el  $N + 1$ -ésimo sistema como raíz. Suponiendo que la información completa del estado de los sistemas está disponible, encuentre un protocolo dinámico de consenso tal que la variedad algebraica de sincronización*

$$\mathcal{M} = \{(x_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, x_\ell) | x_{N+1} = H_1(x_1) = \dots = H_N(x_N)\},$$

*es estable, i.e., el consenso siguiendo al líder se alcanza (véase la Definición 13).*

El siguiente resultado señala la relación entre el consenso siguiendo al líder y la sincronización generalizada. La hipótesis clave en este resultado radica en la propiedad de observabilidad algebraica del líder.

**Lema 4.** *Suponga que se cumplen las condiciones del Lema 1, además sea  $\Phi_{u_{N+1}}^{-1}$  una función continuamente diferenciable (y uniformemente acotada). Si existe un protocolo dinámico de consenso  $U_\ell$  tal que el estado  $\eta_\ell$  converge asintóticamente al estado  $\eta_{N+1}$ ,  $\forall \ell = 1, \dots, N$ , entonces se alcanza el consenso siguiendo a líder.*

**Prueba 3.** *De acuerdo a la Definición 13, tome la diferencia  $x_{N+1} - H_\ell(x_\ell)$ ,*

$$\|x_{N+1} - H_\ell(x_\ell)\| = \|\Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\Phi_{u_{N+1}}(x_{N+1})) - \Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\Phi_\ell(x_\ell))\|, \quad (3.8)$$

$$= \|\Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\eta_\ell) - \Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\eta_{N+1})\|, \quad (3.9)$$

*suponiendo que  $\Phi_{u_{N+1}}^{-1}$  es una función continuamente diferenciable (y uniformemente acotada), entonces existe un constante de Lipschitz  $L > 0$  tal que  $\|\Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\eta_\ell) - \Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\eta_{N+1})\| \leq L\|\eta_\ell - \eta_{N+1}\|$ .*

*Por otra parte, debido a que se cumple el acuerdo en coordenadas transformadas, i.e.,  $\|\eta_{N+1} - \eta_\ell\| \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe un tiempo  $T > 0$  tal que  $\|\eta_\ell - \eta_{N+1}\| < \frac{\epsilon}{L}$  siempre que  $t \geq T$ ,  $\forall \ell = 1, \dots, N$ . Entonces,*

$$\|H_\ell(x_\ell) - x_{N+1}\| \leq L\|\eta_\ell - \eta_{N+1}\| < \epsilon \quad (3.10)$$

*siempre que  $t \geq T$ ,  $\forall \ell = 1, \dots, N$  como se deseaba<sup>1</sup>. □*

---

<sup>1</sup>Sin pérdida de generalidad podemos tomar que  $T$  es independiente de  $\ell$ , dado que este último toma un número finito de valores

### 3.2. Condiciones para lograr el consenso siguiendo al líder del SMA en MSG

Sea  $\mathcal{G}_{N+1} = (\mathcal{V}_{N+1}, \mathcal{E}_{N+1}, \mathcal{A}_{N+1})$  un grafo dirigido asociado a los  $N + 1$  sistemas en la red (2.14) en la configuración de consenso siguiendo al líder. El líder y sus seguidores se denotan por los nodos  $N + 1$  y  $\ell$  para  $1 \leq \ell \leq N$  tal como se muestra en la Figura 3.2.

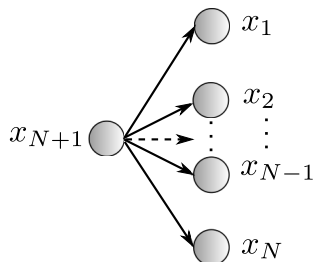


Figura 3.2: Árbol dirigido de cobertura con un nodo como raíz  $\mathcal{G}_{N+1} = (\mathcal{V}_{N+1}, \mathcal{E}_{N+1}, \mathcal{A}_{N+1})$ . No existen interacciones entre los seguidores.

La interacción de los  $N + 1$  agentes en el SMA tienen asignado un grafo dirigido fijo, *i.e.* cada componente del vector de estado  $x_i$  en (2.14) está asociado con el mismo grafo dirigido dinámico  $\mathcal{G}_{N+1}$  (véase Figura 1.7). Es claro, que la interacción entre los nodos no es fuertemente conexa (*i.e.* no existe una secuencia de aristas en el grafo de un nodo a cualquier otro nodo) y además es invariante en el tiempo. Así, la información que se transmite entre los  $N + 1$  agentes no se interrumpe en ningún momento. Es inmediato que, de la Figura 3.2, la matriz de adyacencia y la matriz laplaciana asociadas con  $\mathcal{G}_{N+1}$  están dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{1}_N \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.11)$$

y

$$L = \begin{bmatrix} I_N & -\mathbf{1}_N \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}, \quad (3.12)$$

respectivamente.

### 3.2.1. Resultado 1

Hasta ahora es claro que, de acuerdo al Lema 2, podemos llevar al SMA (2.14) a su correspondiente FCOGM a través de transformaciones  $\Phi_{u_i}$  obtenidas a partir del elemento primitivo diferencial y sus derivadas. Esta parte del proceso de MSG desde un punto de vista algebraico diferencial se muestra en la Figura 1.8. El siguiente resultado es clave para lograr la MSG en la red SMA, en él se diseña el protocolo dinámico que impone una dinámica similar a la del líder en cada seguidor.

**Teorema 3.** *Considere  $N + 1$  sistemas en el SMA (2.14) con un grafo dirigido asociado  $G$ , suponiendo que el SMA puede llevarse a una FCOGM, defínase  $z_i := \Phi_i(x_i) = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in})^T \in \mathbb{R}^n$  como las trayectorias del líder y los  $N$  seguidores en coordenadas transformadas, respectivamente, con  $z_{ij} = y_i^{(j-1)}$  para  $1 \leq i \leq N+1$  y  $1 \leq j \leq n$ . Elijiendo el protocolo dinámico para el  $\ell$ -ésimo seguidor como:*

$$u_\ell^{(n)} = -g_{N+1}(z_{N+1}) + g_\ell(z_\ell, U_\ell) - a_{\ell,1} \sum_{q=1}^n k_{\ell,q} (z_{N+1,q} - z_{\ell,q}), \quad (3.13)$$

donde  $k_{lj}$  ganancias positivas y  $a_{lj}$  son los elementos de la matriz de adyacencia (3.11). Entonces, el problema del consenso siguiendo al líder se resuelve si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_{N+1} - z_\ell\| = 0, \quad (3.14)$$

lo que nos lleva a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_\ell(x_\ell) - x_{N+1}\| = 0, \quad (3.15)$$

para todo  $1 \leq \ell \leq N$ , con  $y_i$  como la familia de elementos primitivos diferenciales para los  $N + 1$  agentes dinámicos en el SMA.

**Prueba 4.** *Sin pérdida de generalidad elijamos  $u_{N+1} = 0 \in \mathbb{R}$  y considérense los elementos primitivos diferenciales para  $i \in V$  como las salidas disponibles de los sistemas en el SMA (2.14):*

$$y_i = \sum_j \alpha_{ij} x_{ij} + \sum_k \beta_{ik} u_{ik} = z_{i1}, \quad \alpha_{ij}, \beta_{ik} \in \mathbb{R} \langle u_i \rangle. \quad (3.16)$$



Del Lema 2 y de (3.16) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{ij} &= z_{ij+1} \quad 1 \leq i \leq N+1, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \dot{z}_{in} &= -\bar{g}_i \left( z_{i1}, \dots, z_{in}, u_i, u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(n-1)} \right) + u_i^{(n)}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Donde podemos diseñar señales de control como una cadena de integradores, i.e  $u_{i1} = u_i$ ,  $u_{i2} = \dot{u}_i, \dots, u_{in} = u_i^{(n-1)}$ , usando (3.13) el sistema (3.17) puede escribirse en lazo cerrado como:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0_{N+1} & I_{N+1} & \cdots & 0_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{N+1} & 0_{N+1} & \cdots & I_{N+1} \\ -K_1 \mathcal{L}_{N+1} & -K_2 \mathcal{L}_{N+1} & \cdots & -K_n \mathcal{L}_{N+1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0_{(N+1) \times 1} \\ \vdots \\ 0_{(N+1) \times 1} \\ -g_{N+1} \cdot \mathbf{1}_{N+1} \end{pmatrix},$$

donde  $z = (z_{11}, \dots, z_{1n}, \dots, z_{N+1,1}, \dots, z_{N+1,n})^T \in \mathbb{R}^{(N+1)n}$ ,  $g_{N+1} = g_{N+1}(z_{N+1}^T)$ , con la matriz laplaciana  $L$  definida en (3.12), y

$$K_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{1j} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{(r-1)j} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{rj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1) \times (r+1)}, \quad (3.18)$$

para  $1 \leq j \leq n$ . Utilizando la matriz laplaciana  $\mathcal{L}_{N+1}$  se puede reescribir este sistema como

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0_{N+1} & I_{N+1} & \cdots & 0_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{N+1} & 0_{N+1} & \cdots & I_{N+1} \\ 0_{N+1} & 0_{N+1} & \cdots & 0_{N+1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0_{(N+1) \times 1} \\ \vdots \\ 0_{(N+1) \times 1} \\ -g_{N+1} \cdot \mathbf{1}_{N+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e_{z_{\ell,1}} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ K_n \begin{pmatrix} 0 \\ e_{z_{\ell,n}} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

donde  $e_z = z_0 \otimes \mathbf{1}_{r \times 1} - z_1$  representa al error de sincronización,  $e_{z_{\ell,j}} = (e_{z_{1j}}, \dots, e_{z_{Nj}})^T \in \mathbb{R}^N$ . Note que si el último vector que involucra al error de sincronización converge a cero

como  $t \rightarrow \infty$  entonces el problema queda resuelto. Con este proposito, defina la dinámica del error de sincronización que se representa por el siguiente sistema aumentado,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{z_{\ell j}} &= e_{z_{ij+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad 1 \leq \ell \leq N, \\
\dot{e}_{z_{\ell n}} &= -g_{N+1}(z_{N+1,1}, \dots, z_{N+1,n}) \cdot \mathbf{1}_N + \bar{g}_\ell(z_{\ell,1}, \dots, z_{\ell,n}, u_{\ell,1}, u_{\ell,2}, \dots, u_{\ell,n}) - \dot{u}_{\ell,n}, \\
\dot{u}_{\ell k} &= u_{\ell k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \\
\dot{u}_{\ell n} &= -g_{N+1}(z_{N+1,1}, \dots, z_{N+1,n}) \cdot \mathbf{1}_N + \bar{g}_\ell(z_{\ell,1}, \dots, z_{\ell,n}, u_{\ell,1}, u_{\ell,2}, \dots, u_{\ell,n}) + \bar{M}e_z,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

con  $\bar{L}_l(\cdot) = (\bar{L}_1(\cdot), \dots, \bar{L}_r(\cdot))^T \in \mathbb{R}^r$ ,  $e_z = (e_{z_{11}}, \dots, e_{z_{1n}}, \dots, e_{z_{r1}}, \dots, e_{z_{rn}})^T \in \mathbb{R}^{rn}$ ,  $\bar{M} = (M_1, \dots, M_n) \in \mathbb{R}^{N \times Nn}$ .

De (3.19) finalmente llegamos a

$$\dot{e}_z = \Xi e_z, \tag{3.20}$$

con

$$\Xi = \begin{pmatrix} 0_N & I_N & 0_N & \dots & 0_N & 0_N \\ 0_N & 0_N & I_N & \dots & 0_N & 0_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_N & 0_N & 0_N & \dots & I_N & 0_N \\ 0_N & 0_N & 0_N & \dots & 0_N & I_N \\ -M_1 & -M_2 & -M_3 & \dots & -M_{n-1} & -M_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}, \tag{3.21}$$

y matrices de ganancias de control  $M_j$  dadas por:

$$M_j = \begin{pmatrix} k_{1j} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_{2j} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{(N-1)j} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{Nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \tag{3.22}$$

donde  $k_{\ell j}$  son constantes positivas que se eligen de manera que la matriz  $\Xi \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$  sea Hurwitz estable. El resultado sigue del Lema 4.  $\square$

**Teorema 4.** Considere el protocolo dinámico dado en la ecuación (3.13). Sea  $T^*$  el tiem-

po en el que las trayectorias en coordenadas transformadas se sincronizan. Entonces la variedad algebraica de sincronización para el SMA (2.14):

$$\mathcal{M} = \{(x_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, x_\ell) | x_{N+1} = H_1(x_1) = \dots = H_N(x_N)\}, \quad \forall t \geq T^*$$

es EEGU, donde  $H_\ell : \Omega_\ell \times \mathcal{U}_\ell \rightarrow \Omega_{N+1}$  con  $H_\ell = \Phi_{N+1}^{-1} \circ \Phi_\ell$ , para  $1 \leq \ell \leq N$ , donde  $\Phi_{N+1}^{-1}$  es una función diferenciablemente continua con  $\Omega_{N+1}$ ,  $\Omega_\ell$  como los espacios del líder y los seguidores, respectivamente.

**Prueba 5.** Suponga que  $z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N$ ,  $z_\ell = (z_{\ell 1}, \dots, z_{\ell N})^T \in \mathbb{R}^{Nn \times 1}$ ,  $\mathbf{1}_N := (1 \dots 1)^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ . Y defina la variedad algebraica de sincronización en coordenadas transformadas como sigue:

$$\mathcal{M}_z := \{(z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell) | z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N = z_\ell\}.$$

Primero, invocando el Lema 7, la siguiente relación se mantiene:

$$\|z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N - z_\ell\| = \sqrt{2} \| (z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell) \|_{\mathcal{M}_z}. \quad (3.23)$$

Ahora, dado que  $\Xi$  es una matriz Hurwitz estable, la ecuación dinámica del error (3.20) tiene una única solución en el intervalo  $[0, t_1]$ , donde  $t_1$  puede tomarse arbitrariamente grande (e.g.  $t_1 = T^*$ ), esto implica que el sistema (3.20) detectable en tiempo finito<sup>2</sup> por  $\|(z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell)\|_{\mathcal{M}_z}$  (de hecho, la solución  $e_z$  no tiene un tiempo de escape finito, no existe  $t$  en el intervalo  $[0, T^*]$  tal que  $\|e_z\| \rightarrow \infty$ ). Además, el error de sincronización  $e_z = z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N - z_\ell$  es asintóticamente estable, entonces es posible encontrar  $P > 0$  y  $Q > 0$  tal que

$$P\Xi + \Xi^T P = -Q,$$

se satisface. Proponiendo una función candidata de Lyapunov  $V = e_z^T P e_z$  y de la desigualdad de Rayleigh-Ritz y la desigualdad en (3.23),  $V$  satisface las siguientes desigualdades:

$$2\lambda_{\min}(P) \|(z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell)\|_{\mathcal{M}_z}^2 \leq V \leq 2\lambda_{\max}(P) \|(z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell)\|_{\mathcal{M}_z}^2. \quad (3.24)$$

Obteniendo la derivada de  $V$  sobre las trayectorias del error de sincronización (3.20) obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_z^T (P\Xi + \Xi^T P) e_z = -e_z^T Q e_z \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|e_z\|^2, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>véase Apéndice A para mayor los conceptos de estabilidad de conjuntos.

en consecuencia

$$\dot{V} \leq -2\lambda_{\min}(Q) \|(z_{N+1} \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell)\|_{\mathcal{M}_z}^2. \quad (3.25)$$

De las desigualdades en (3.24) y (3.25), y del Teorema 8. Entonces  $\mathcal{M}_z$  es EEGU. No es difícil verificar de (3.24) y (3.25) que la siguiente relación se cumple

$$\dot{V}(z_{N+1}(t) \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell(t)) \leq -\beta V(z_{N+1}(t) \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell(t)), \quad (3.26)$$

donde  $\beta := \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ . Utilizando el Lema de comparación [51], la solución de la desigualdad diferencial (3.26) se encuentra acotada, a saber

$$V(z_{N+1}(t) \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell(t)) \leq e^{-\beta t} V(z_{N+1}(t) \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell(t)). \quad (3.27)$$

De las desigualdades (3.24) y (3.27) podemos obtener el siguiente estimado:

$$\|(z_{N+1}(t) \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell(t))\|_{\mathcal{M}_z} \leq \alpha e^{-\frac{\beta}{2}t} \|(z_{N+1}(0) \otimes \mathbf{1}_N, z_\ell(0))\|_{\mathcal{M}_z} \quad (3.28)$$

$$\text{con } \alpha := \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}.$$

Por otra parte, observe que para  $t \geq T^*$ ,  $z_{N+1}(T^*) \otimes \mathbf{1}_N = z_\ell(T^*)$ , fijando  $\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq N$  y de la continuidad de las funciones  $\Phi_i(\cdot)$ ,  $1 \leq i \leq N+1$  y sus inversas (véase Observación 8)

$$\Phi_{N+1}(x_{N+1}(T^*)) = z_{N+1}(T^*) = z_\ell(T^*) = \Phi_\ell(x_\ell(T^*))$$

entonces

$$\begin{aligned} \Phi_{N+1}^{-1} \circ \Phi_\ell(x_\ell(T^*)) &= \Phi_{N+1}^{-1}(z_\ell(T^*)), \\ &= \Phi_{N+1}^{-1}(z_{N+1}(T^*)), \\ &= \Phi_{N+1}^{-1} \circ \Phi_{N+1}(x_{N+1}(T^*)), \\ &= x_{N+1}(T^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H_\ell(x_\ell(t)) = \Phi_{N+1}^{-1}(z_\ell(t)) = \Phi_{N+1}^{-1}(z_{N+1}(t)) = x_{N+1}(t), \quad \forall t \geq T^*,$$

esto inmediatamente implica que las trayectorias llegan a  $\mathcal{M}$  para todo  $t \geq T^*$ . Y por último, del Lema 4, (3.28) y de la Observación 24, se obtiene el estimado exponencial de

$\mathcal{M}$  para todo  $t \geq T^*$ . □

**Observación 11.** *Es claro que desde esta perspectiva, evitamos lidiar con un enfoque varacional donde sea necesario calcular los exponentes condicionales de Lyapunov. En cambio, en nuestra metodología, este análisis equivale a la obtención de los valores propios de la matriz  $\Xi$ . Sin embargo esto está de más bajo el supuesto que  $\Xi$  es una matriz Hurwitz estable. Una desventaja de la metodología propuesta es, para SMA de alto orden, necesitamos calcular los valores propios de  $\Xi$  lo cual es una tarea muy complicada.*

En la siguiente sección podemos mejorar la forma de atacar este problema al permitir que exista sola una ganancia de acoplamiento. Como consecuencia, determinar que la matriz  $\Xi$  sea Hurwitz se convierte en una tarea simple al utilizar las propiedades del grafo en cuestión.

### 3.3. Un problema más general de consenso siguiendo al líder en redes heterogéneas

En esta sección se estudia un problema más general de sistemas multi-agentes para lograr el consenso siguiendo al líder. En este caso se permite cualquier tipo de interacción entre los seguidores. La manera de describir este problema procede de la misma manera que en la sección anterior, encontrar la variedad de sincronización y verificar su estabilidad. El resultado principal en esta sección consiste en el estudio detallado de la red completa en lazo cerrado, donde se revela que el sistema completo en lazo cerrado (dinámica de los sistemas acoplados y las leyes de control dinámicas) se puede interpretar como un sistema entrada-estado convergente<sup>3</sup>.

Considere el SMA heterogéneo compuesto por sistemas en (2.15). De la misma manera como en la sección anterior, considere como restricción adicional que los sistemas (2.15) pueden ser reescritos en su FCOG de acuerdo al Corolario 1.

Suponga que se satisfacen las condiciones del Lema 1. Además, considere al grafo de árbol de cobertura  $\mathcal{G}_{N+1}$  en la Figura 3.3, este modela las interacciones entre los sistemas (2.15) y (3.4), con los nodos  $N + 1$  y  $\ell = 1, \dots, N$  representan al líder y a los sistemas seguidores, respectivamente (*cf.* consenso por modelo de referencia para sistemas lineales [107]). Ahora, considerando que todos los sistemas (2.15) alcanzan el consenso siguiendo al líder en el sentido de la Definición 13.

---

<sup>3</sup>véase Apéndice A para mayor detalle y resultados preliminares sobre sistemas convergentes con entradas.

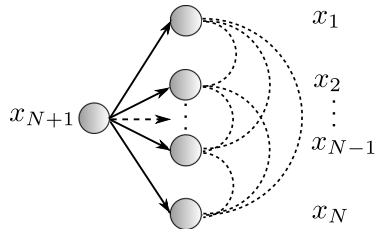


Figura 3.3: Grafo de comunicación de un árbol dirigido de cobertura  $\mathcal{G}_{N+1} = (\mathcal{V}_{N+1}, \mathcal{E}_{N+1}, \mathcal{A}_{N+1})$  en el problema general de consenso siguiendo al líder. Existe una interacción arbitraria entre seguidores.

De acuerdo con la Definición 13, la variedad algebraica de sincronización para toda la red puede reescribirse de la siguiente manera (cf. Observación 6)

$$\mathcal{M}_x = \{(\mathbf{1}_N \otimes x_{N+1}, \bar{x}_\ell) \mid H_1(x_1) = \dots = H_N(x_N) = x_{N+1}\}, \quad (3.29)$$

donde  $\bar{x}_\ell = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T \in \mathbb{R}^{Nn}$ .

**Observación 12.** *Este tipo de problema de consenso se asemeja a aquellos de dinámicas lineales idénticas como en [116] con un controlador dinámico sin observadores. Que en nuestro caso es para sistemas estrictamente no lineales y diferentes con una variedad de sincronización no trivial. Note que en [116] no existe un líder explícito, sin embargo todos los sistemas deben sincronizarse con un sistema en lazo abierto (i.e. exosistema [145]) de la forma  $\dot{x}_{N+1} = f(t, x_{N+1}, 0) = Ax_{N+1}$ , donde los valores propios de la matriz  $A$  se encuentran en el semi-plano cerrado izquierdo del plano complejo. De esta manera, la variedad de sincronización es exponencialmente estable y trivial  $\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \mid x_1 = x_2 = \dots = x_{N+1}\}$ . En nuestro caso, la convergencia exponencial se pierde a cambio de permitir que los sistemas sean no lineales y estrictamente diferentes. Otra metodología similar se da en términos de un regulador no lineal de salida [49], en donde los sistemas controlados siguen la salida de los exosistemas sincronizados (osciladores no lineales como referencia local), donde solo los exosistemas se encuentran acoplados. Cabe resaltar que en nuestro trabajo, el estado completo de los seguidores siguen a las trayectorias del líder en una variedad de sincronización estable muy general, y también los sistemas acoplados pueden considerarse como sistemas caóticos.*

En lo siguiente se estudia la estabilidad de la variedad de sincronización. El objetivo es imponer la dinámica del líder en todos los seguidores en la red de tal manera que  $\mathcal{M}_x$  sea un atractor estable, sin pérdida de generalidad suponga que  $u_{N+1} = 0$  y que todos los

seguidores (3.4) se encuentran acoplados por

$$\bar{u}_\ell = -g_\ell(\eta_\ell, U_\ell) + g_{N+1}(\eta_{N+1}) + c \mathbf{1}_n^T (\eta_{N+1} - \eta_\ell) - c \sum_{j=1}^N a_{\ell j} \mathbf{1}_n^T (\eta_\ell - \eta_j), \quad (3.30)$$

donde  $c$  es la fuerza de acoplamiento y  $a_{\ell,j}$  son las entradas de la matriz de adyacencia

$$\mathcal{A}_{N+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_N & \mathbf{1}_N \\ 0_{1 \times N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Defínase la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 0_{(n-1) \times n} \\ \mathbf{1}_n^T \end{pmatrix},$$

luego el sistema en lazo cerrado es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F_1(\eta, g_{N+1}(\eta_{N+1})) - c(\mathcal{L}_{N+1} \otimes E)\eta, \\ \dot{\mathcal{U}} &= (I_N \otimes A_\gamma)\mathcal{U} - c(\mathcal{L}_{N \times N+1} \otimes B_r \mathbf{1}_n^T)\eta \\ &\quad + \mathbf{1}_N \otimes B_r g_{N+1}(\eta_{N+1}) - \begin{pmatrix} B_r g_1(\eta_1, U_1) \\ \vdots \\ B_r g_N(\eta_N, U_N) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

con  $\eta = (\eta_1^T, \dots, \eta_{N+1}^T)^T \in \mathbb{R}^{(N+1)n}$ ,  $F_1(\eta, g_{N+1}(\eta_{N+1})) = (I_{N+1} \otimes A_n)\eta + \mathbf{1}_{N+1} \otimes B_n g_{N+1}(\eta_{N+1})$ ,  $\mathcal{L}_{N+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_N \times N+1 \\ 0_{1 \times N+1} \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{L}_{N \times N+1} = (\mathcal{L}_N + I_N \quad - \mathbf{1}_N)$ , donde la matriz de adyacencia  $\mathcal{A}_N$  y la matriz laplaciana  $\mathcal{L}_N$  están asociadas con el grafo  $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N, \mathcal{A}_N)$  que modela las interacciones entre los seguidores únicamente. Ahora, defínase el vector  $\bar{\eta}_\ell \triangleq (\eta_1^T, \dots, \eta_N^T)^T \in \mathbb{R}^{Nn}$  y el error de sincronización  $e \triangleq \mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1} - \bar{\eta}_\ell = (e_1, \dots, e_N)^T \in \mathbb{R}^{Nn}$ , tomando la derivada respecto al tiempo de  $e_\ell$ , para  $1 \leq \ell \leq N$  obtenemos:

$$\dot{e}_\ell = A_n e_\ell + c \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} E(\eta_\ell - \eta_j) \quad (3.32)$$

utilizando (3.31), (3.32) y después de algunas manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \Xi e, \\ \dot{\mathcal{U}} &= F_2(t, \mathcal{U}, e, \bar{\eta}_\ell), \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde

$$\begin{aligned} \Xi &= (I_N \otimes (A_n - cE) - c\mathcal{L}_N \otimes E) \\ F_2(t, \mathcal{U}, e, \bar{\eta}_\ell) &= (I_N \otimes A_n) \mathcal{U} + c((\mathcal{L}_N + I_N) \otimes B_r \mathbf{1}_n^T) e \\ &\quad + \mathbf{1}_N \otimes B_r g_{N+1}(\eta_{N+1}) - \begin{pmatrix} B_r g_1(\eta_1, U_1) \\ \vdots \\ B_r g_N(\eta_N, U_N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Observación 13.** De (3.33), note que subsistema de  $e$  se encuentra desacoplado del subsistema  $\mathcal{U}$ . También podemos ver de las propiedades del grafo  $\mathcal{G}_{N+1}$ , que ser un árbol de cobertura dirigido con el  $N + 1$ -ésimo sistema como raíz es una condición suficiente para que la matriz  $\Xi$  sea estable. Primero, note de la Proposición 1 que todos los valores propios de la matriz  $M = \mathcal{L}_N + I_N$  tienen estrictamente parte real positiva. Después de algunas manipulaciones algebraicas, es claro que  $\Xi = (I_N \otimes A_n - cM \otimes E)$ . Mediante el Teorema de la forma de Schur (véase el Teorema 2.3.1 en [44]), existe una matriz unitaria  $\hat{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  tal que la matriz  $T = \hat{P}^* M \hat{P}$  es una matriz triangular superior con sus entradas en la diagonal  $T_{ii} = \lambda_i(M)$ , eligiendo el cambio de variable  $\xi = (\hat{P} \otimes I_n)^{-1} e$  y tomando su derivada respecto al tiempo obtenemos que<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \left( \hat{P} \otimes I_n \right)^{-1} (I_N \otimes A_n - cM \otimes E) \left( \hat{P} \otimes I_n \right) \xi(t) \\ &= (I_N \otimes A_n - cT \otimes E) \xi(t) \end{aligned} \tag{3.34}$$

con

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1(M) & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_2(M) & \cdots & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1}(M) & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_N(M) \end{pmatrix}.$$

Finalmente y sin pérdida de generalidad, suponga valores propios reales<sup>5</sup> para  $M$ , así la dinámica de (3.34) está desacoplada en el sentido en que la estabilidad del subsistema  $e$  (3.33) es equivalente a la estabilidad de los subsistemas  $\dot{\xi}_i = (A_n - c\lambda_i(M)E)\xi_i$  para  $1 \leq i \leq N$ . Considere  $n = 3$ , luego la matriz  $\Xi$  es estable cuando  $c = \max_{1 \leq i \leq N} c_i$ ,  $c_i > 1/\lambda_i(M)$ .

<sup>4</sup>para cualquier matriz  $A, B, C, D$  de dimensiones apropiadas y cualquier constante  $k$ :  $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ ,  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$  y  $k(A \otimes B) = (kA) \otimes B = A \otimes (kB)$ .

<sup>5</sup>los valores propios de la matriz  $M$  pueden ser complejos, sin embargo se puede dar una conclusión similar bajo las condiciones de estabilidad de polinomios con coeficientes complejos [150].



**Observación 14.** *La idea de la descomposición modal la dinámica del error de sincronización no es nueva, de hecho es la base para encontrar las mínimas condiciones necesarias que se conocen con el nombre del método de la Función Maestra de Estabilidad (FME) [10, 92, 121], sin embargo, para aplicar directamente el método de la FME se necesita que los sistemas sean (casi-)idénticos [126] y que se sepa de antemano la variedad de sincronización estable para los sistemas acoplados [96]. La metodología anterior puede aplicarse a los subsistemas acoplados  $\eta$  en (3.31) pero preferimos dar condiciones suficientes para analizar la estabilidad de una variedad de sincronización general.*

### 3.3.1. Resultado 2

Ahora estamos en posición para establecer el resultado principal de esta sección, esta es una condición suficiente para resilver el Problema 1:

**Teorema 5.** *Considere que una red de  $N + 1$  sistemas heterogéneos (2.15), como los nodos de un árbol de cobertura dirigido  $\mathcal{G}_{N+1}$  con el nodo  $N + 1$  como raíz, suponga que los sistemas pueden transformarse en una red de sistemas en su FCOG (3.4) acoplados por (3.30). Si las siguientes condiciones se cumplen*

- i) elija  $c$  tal que  $\Xi$  es una matriz Hurwitz, i.e., el subsistema  $e$  en (3.33) es asintóticamente estable;*
- ii) el subsistema  $\mathcal{U}$  en (3.33) es entrada-estado convergente respecto a  $\eta$  y  $e$ . Además, suponga a la entrada de control  $\mathcal{U}_R = (\mathcal{U}_{R_1}, \mathcal{U}_{R_2}, \dots, \mathcal{U}_{R_N}) \in \mathbb{R}^{Nn}$ , donde  $\mathcal{U}_{R_\ell} = (u_{R_\ell}, \dot{u}_{R_\ell}, \dots, \dot{u}_{R_\ell}^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$  como la señal en estado permanente.*
- iii) sea  $\phi_{u_{N+1}}^{-1}(\cdot)$  una función es continuamente diferenciable (y uniformemente acotada) con constante de Lipschitz  $L > 0$ .*

*Entonces, el sistema en lazo cerrado (3.33) es entrada-estado convergente y se alcanza el consenso siguiendo al líder, i.e., la variedad algebraica de sincronización  $\mathcal{M}_x$  en (3.29) es asintóticamente estable.*

**Prueba 6.** *Primero, mostramos que (3.33) es entrada-estado convergente, luego mostraremos que la variedad de sincronización es atractiva. Para probar lo primero suponga las condiciones (i)-(ii), luego el primer resultado sigue del Teorema 10. Por otra parte, es inmediato que el segundo término del subsistema  $\eta$  en (3.33) es asintóticamente cero, entonces  $\eta_\ell \rightarrow \eta_0$  as  $t \rightarrow \infty$ ,  $\forall \ell = 1, \dots, N$ . Para lograr esto, suponga que (i)  $\exists c$  tal que la matriz  $\Xi$  es Hurwitz.*

Ahora, dado que todos los nodos se comportan asintóticamente de la misma manera (en coordenadas transformadas), la variedad algebraica de sincronización para el lazo cerrado (3.31) es

$$\mathcal{M}_\eta = \{(\mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1}, \bar{\eta}_\ell) \mid \eta_1 = \dots = \eta_N = \eta_{N+1}\}. \quad (3.35)$$

Invocando el Lema 7 se cumple la siguiente relación  $\|(\mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1} - \bar{\eta}_\ell)\|_2 = \sqrt{2}\|(\mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1}, \bar{\eta}_\ell)\|_{\mathcal{M}_\eta}$ . Dado que  $\Xi$  es una matriz Hurwitz estable, podemos encontrar matrices  $P, Q > 0$  tal que  $P\Xi + \Xi^T P = -Q$ . Sea  $V = e^T P e$ , utilizando la desigualdad de Rayleigh-Ritz, entonces

$$\begin{aligned} 2\lambda_{\min}(P)\|(\mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1}, \bar{\eta}_\ell)\|_{\mathcal{M}_\eta}^2 &\leq V \leq 2\lambda_{\max}(P)\|(\mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1}, \bar{\eta}_\ell)\|_{\mathcal{M}_\eta}^2, \\ \dot{V} = e^T (P\Xi + \Xi^T P) e &= -e^T Q e \leq -\lambda_{\min}(Q)\|e\|_2^2. \end{aligned}$$

No es difícil ver de las desigualdades anteriores y el Lema de comparación [51] que

$$\|(\mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1}(t), \bar{\eta}_\ell(t))\|_{\mathcal{M}_\eta} \leq \alpha e^{-\frac{\beta}{2}t} \|(\mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1}(0), \bar{\eta}_\ell(0))\|_{\mathcal{M}_\eta} \quad (3.36)$$

con  $\alpha \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$  y  $\beta \triangleq \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$ .

Por otro lado, del Lema 1 note que  $\eta_{N+1} = \Phi_{N+1}(x_{N+1})$  y  $\bar{\eta}_\ell = (\Phi_{u_1}(x_1)^T, \dots, \Phi_{u_N}(x_N)^T)^T$ , suponiendo que (iii)  $\Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\cdot)$  es una función continuamente diferenciable (y uniformemente acotada), existe una constante de Lipschitz  $L > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{1}_N \otimes x_{N+1} - \begin{pmatrix} H_1(x_1) \\ \vdots \\ H_N(x_N) \end{pmatrix} \right\|_2^2 &= \sum_{\ell=1}^N \|\Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\eta_{N+1}) - \Phi_{u_{N+1}}^{-1}(\eta_\ell)\|_2^2 \\ &\leq L^2 \sum_{\ell=1}^N \|\eta_{N+1} - \eta_\ell\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Es inmediato de (3.35), (3.36) y la desigualdad anterior que

$$\left\| \mathbf{1}_N \otimes x_{N+1} - \begin{pmatrix} H_1(x_1) \\ \vdots \\ H_N(x_N) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \bar{\alpha} e^{-\frac{\beta}{2}t} \|(\mathbf{1}_N \otimes \eta_{N+1}(0), \bar{\eta}_\ell(0))\|_{\mathcal{M}_\eta}$$

con  $\bar{\alpha} = \alpha L \sqrt{2}$ . Por lo tanto, se alcanza el consenso siguiendo al líder para el problema de sistemas multi-agentes (2.15), i.e.,  $H_\ell(x_\ell) \rightarrow x_{N+1}$  como  $t \rightarrow \infty$ ,  $\forall \ell = 1, \dots, N$ .  $\square$

A continuación se dan algunos comentarios pertinentes sobre las hipótesis del Teorema

5.

**Observación 15.** *Primero, la hipótesis i) sigue del hecho que  $\mathcal{G}_{N+1}$  es un árbol de cobertura dirigido con el nodo  $N+1$  como raíz (véase la Observación 13). La segunda hipótesis ii) se encuentra comunmente en la literatura de sincronización, se puede ver como la condición de estabilización del par  $(A, B)$  en osciladores lineales en [116] o en nuestro caso como parte de un principio de separación dado en el Teorema 10. Note que no hay pérdida de generalidad al suponer esto ya que si cada protocolo de consenso dinámico  $U_\ell$  satisface la propiedad de entrada-estado convergente el subsistema  $\mathcal{U}$  es entrada estado-convergente (cf. Teorema 9). La tercer hipótesis iii) sigue de la existencia de un mapeo inverso debido a la propiedad de observabilidad algebraica, esta función relaciona las coordenadas originales a partir de la coordenadas transformadas (véase Observación 8).*

**Observación 16.** *Las hipótesis del teorema anterior son válidas para sistema caóticos con  $n = 3$  y una sola ganancia de acoplamiento  $c$  en la red (véase Observación 13), sin embargo este resultado se puede extender para dimensión  $n \gg 3$  permitiendo que la matriz  $E$  contenga ganancias diferentes en sus entradas, e.g.,  $E = (0_{n \times (n-1)} \mid \kappa^T)^T$ ,  $\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  for  $n \geq 3$ . Con lo anterior, la hipótesis (i) en el Teorema 5 implica un gran problema computacional para asegurar que la matriz  $\Xi$  sea Hurwitz para valores de  $n$  considerablemente grandes, e.g.,  $n > 3$  (cf. [20] y el Teorema 3).*

**Observación 17.** *La simplicidad de esta metodología se debe en gran parte al uso de técnicas del álgebra diferencial. Estas permiten transformar a los sistemas no lineales (2.15) en su FCOG (3.4) a partir de sus transformaciones dependientes de la entrada (elementos primitivos diferenciales), cuyas derivadas naturalmente nos dan los protocolos dinámicos de consenso. Entre otras detalles, las técnicas basadas en álgebra diferencial nos dejan caracterizar la variedad de sincronización y obtener condiciones complementarias a las metodologías basadas en las funciones maestras de estabilidad [92].*

### 3.4. Aplicación a una red de sistemas caóticos

Esta metodología es aplicable a una gran variedad de sistemas caóticos: Lorenz, Rössler, Chua, Colpitts, entre otros [68]. Además de la posible sincronización de modelos de neuronas, e.g. el modelo de neurona de Hindmarsh-Rose [42].

En esta sección se presentan dos ejemplos concretos para ilustrar la metodología propuesta para una red heterogénea compuesta por tres sistemas caóticos con un líder. Estos ejemplifican el problema más simple de MSG sin interacción entre los seguidores y el pro-

blema más general de consenso siguiendo el líder para redes de sistemas heterogéneos, respectivamente.

### 3.4.1. Ejemplo 1

Considere los tres sistemas caóticos diferentes [67] como los nodos en un grafo dirigido  $\mathcal{G}_3$  como se muestra en la Figura 3.4.

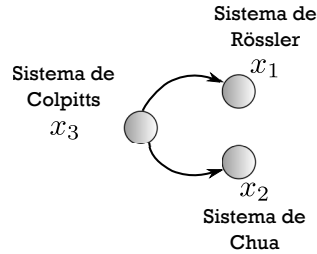


Figura 3.4: Árbol dirigido de cobertura en Ejemplo 1 sin interacción entre seguidores.

Considere como el nodo  $N + 1$  o líder al sistema de Colpitts:

$$\Sigma_{colpitts} = \begin{cases} \dot{x}_{31} = -a_3 \exp(-x_{32}) + a_3 x_{33} + a_3, \\ \dot{x}_{32} = b_3 x_{33}, \\ \dot{x}_{33} = -c_3 x_{31} - c_3 x_{32} - d_3 x_{33}, \end{cases} \quad (3.38)$$

donde  $x_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33})^T \in \mathbb{R}^{n_3}$  con parámetros y condiciones iniciales tales que (3.38) se comporta de manera caótica como se observa en la Figura 3.5.

Sea  $y_3 = x_{32}$  la salida disponible, entonces el sistema (3.38) satisface la condición OA. Es decir, las siguientes relaciones se cumplen:

$$\Phi_3^{-1} := \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_3 c_3} (-z_{33} - d_3 z_{32} - b_3 c_3 z_{31}) \\ z_{31} \\ \frac{1}{b_3} z_{32} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

con  $z_{31} = y_3$ ,  $z_{32} = \dot{y}_3$  y  $z_{33} = \ddot{y}_3$ .

Considere el primer seguidor o nodo 1 como el sistema de Rössler descrito por las siguientes ecuaciones:

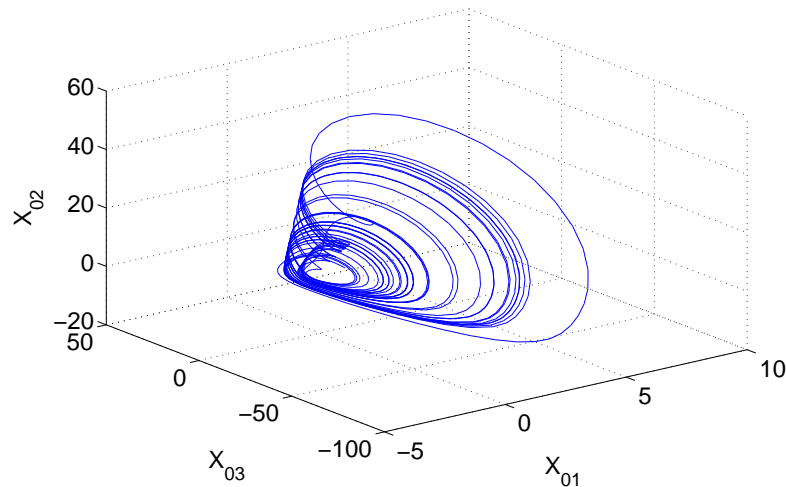


Figura 3.5: Diagrama de fase del atractor caótico del sistema de Colpitts con parámetros  $a_3 = b_3 = 6.2723$ ,  $c_3 = 0.0797$ ,  $d_3 = 0.6898$  y condiciones iniciales  $x_3(0) = (0.6 \ 0.1 \ -0.6)^T$

$$\Sigma_{Rossler} = \begin{cases} \dot{x}_{11} = & -(x_{12} + x_{13}), \\ \dot{x}_{12} = & x_{11} + a_1 x_{12}, \\ \dot{x}_{13} = & b_1 + x_{13}(x_{11} - c_1), \end{cases} \quad (3.40)$$

donde  $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T \in \mathbb{R}^{n_1}$ , con parámetros y condiciones iniciales tales que el sistema (3.40) presenta un comportamiento caótico (véase Figura 3.6). Eligiendo  $y_1 = x_{12} + u_{11}$  como su salida disponible la condición de OA se cumple. La función  $\Phi_1$  que transforma al sistema de coordenadas originales (3.40) a su forma canónica de observabilidad generalizada se obtiene derivando el elemento primitivo diferencial  $y_1$  tal que:

$$\Phi_1 := \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} + u_{11} \\ x_{11} + a_1 x_{12} + u_{12} \\ a_1 x_{11} + (a_1^2 - 1)x_{12} - x_{13} + u_{13} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

con  $z_{11} = y_1$ ,  $z_{12} = \dot{z}_{11}$  y  $z_{13} = \dot{z}_{12}$ .

Y por último considere al segundo sistema seguidor o nodo 2 como el sistema de Chua:

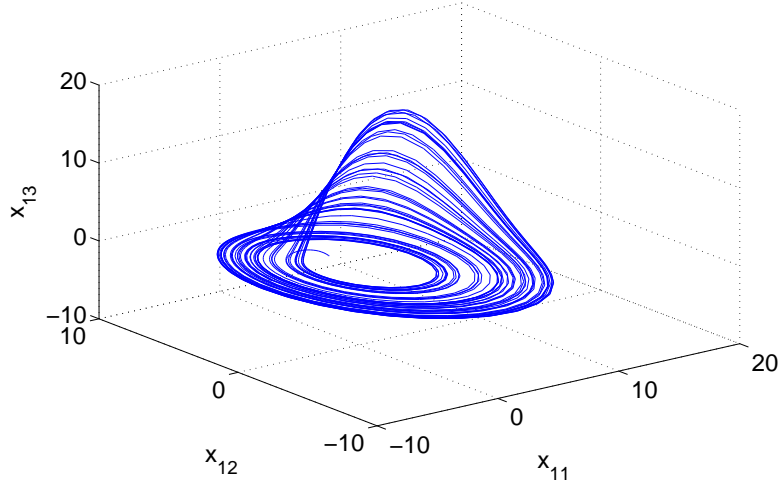


Figura 3.6: Diagrama de fase del atractor caótico del sistema de Rössler con parámetros  $a_1 = b_1 = 0.2$ ,  $c_1 = 5$  y condiciones iniciales  $x_1(0) = (1 \ 2 \ -5)^T$

$$\Sigma_{Chua} = \begin{cases} \dot{x}_{21} = a_2(x_{22} - x_{21} - v_{x_2}), \\ \dot{x}_{22} = x_{21} - x_{22} + x_{23}, \\ \dot{x}_{23} = -b_2 x_{22}, \end{cases} \quad (3.42)$$

con

$$v_{x_2} = m_1 x_{21} + \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(|x_{21} + 1| - |x_{21} - 1|), \quad (3.43)$$

donde  $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T \in \mathbb{R}^{n_2}$ , con parámetros constantes y condiciones iniciales tales que (3.42) presenta un comportamiento caótico como se aprecia en la Figura 3.7. Tomando como salida disponible  $y_2 = x_{23} + u_{21}$  este sistema cumple la condición de OA. La función  $\Phi_2$  que transforma al sistema en coordenadas originales (3.40) en coordenadas transformadas es:

$$\Phi_2 := \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ z_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{23} + u_{21} \\ -b_2 x_{22} + u_{22} \\ -b_2(x_{21} - x_{22} + x_{23}) + u_{23} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

con  $z_{11} = y_2$ ,  $z_{22} = \dot{z}_{21}$  y  $z_{23} = \dot{z}_{22}$ . Suponga que los parámetros toman valores constantes positivos y condiciones iniciales tales que aseguran un comportamiento caótico. En el Cuadro 3.1 y el Cuadro 3.2 se condensan las condiciones iniciales y parámetros utilizados en la simulación numérica, respectivamente.

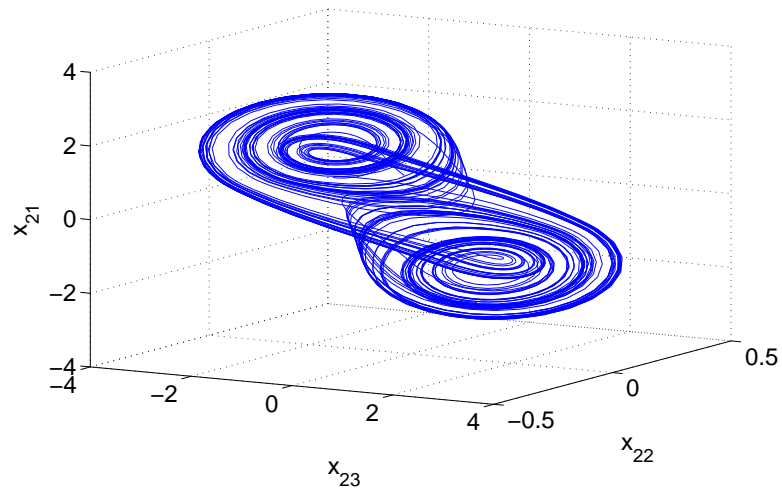


Figura 3.7: Diagrama de fase del atractor caótico del sistema de Chua con parámetros  $a_2 = 15$ ,  $b_2 = 25.58$ ,  $m_1 = -5/7$ ,  $m_2 = 8/7$  y condiciones iniciales  $x_2(0) = (0.6 \ 0.1 \ 0.6)^T$

Cuadro 3.1: Parámetros constantes para la red  $\mathcal{G}_3$

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$m_i$
1	0.2	0.2	5	-	$-5/7$
2	15	25.58	-	-	$8/7$
3	6.2723	6.2723	0.0797	0.6898	-

De acuerdo al Teorema 3, podemos construir el siguiente sistema aumentado,

Cuadro 3.2: Condiciones iniciales para la red  $\mathcal{G}_3$

$i$	$x_i(0)$
1	$(1.0 \ 2.0 \ -5.0)^T$
2	$(0.6 \ 0.1 \ 0.6)^T$
3	$(0.6 \ 0.1 \ -0.6)^T$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{11} &= -(x_{12} + x_{13}), \\
\dot{x}_{21} &= a_2(x_{22} - x_{21} - v_{x_2}), \\
\dot{x}_{31} &= -a_3 \exp(-x_{32}) + a_3 x_{33} + a_3, \\
\dot{x}_{12} &= x_{11} + a_1 x_{12}, \\
\dot{x}_{22} &= x_{21} - x_{22} + x_{23}, \\
\dot{x}_{32} &= b_3 x_{33}, \\
\dot{x}_{13} &= b_1 + x_{13}(x_{11} - c_1), \\
\dot{x}_{23} &= -b_2 x_{22}, \\
\dot{x}_{33} &= -c_3 x_{31} - c_3 x_{32} - d_3 x_{33},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

y eligiendo los elementos primitivos diferenciales como  $y_3 = x_{32}$ ,  $y_1 = x_{12} + u_{11}$  y  $y_2 = x_{23} + u_{21}$ ; con el SMA (3.45), se obtiene la siguiente FCOGM:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{11} &= z_{12}, \\
\dot{z}_{21} &= z_{22}, \\
\dot{z}_{31} &= z_{32}, \\
\dot{z}_{12} &= z_{13}, \\
\dot{z}_{22} &= z_{23}, \\
\dot{z}_{32} &= z_{33}, \\
\dot{z}_{13} &= -c_1(z_{11} - u_{11}) + (a_1 c_1 - 1)(z_{12} - u_{12}) \\
&\quad + (a_1 - c_1)(z_{13} - u_{13}) - (-(z_{11} - u_{11}) + a_1(z_{12} - u_{12}) - (z_{13} - u_{13})) \\
&\quad \times (z_{12} - u_{12} - a(z_{11} - u_{11})) - b + \dot{u}_{13} = \varphi_1(z_{ij}, u_{ij}) + \dot{u}_{13}, \\
\dot{z}_{23} &= a_2 b_2 (u_{21} - z_{21}) + b_2 (u_{22} - z_{22}) + (a_2 + 1)(u_{23} - z_{23}) \\
&\quad + a_2 b_2 v_{z_2} + \dot{u}_{23} = \varphi_2(z_{2j}, u_{2j}) + \dot{u}_{23}, \\
\dot{z}_{33} &= a_3 b_3 c_3 \exp(-z_{31}) + (-a_3 c_3 - b_3 c_3 + d_3^2 - d_3) z_{32} \\
&\quad - d_3 z_{33} - a_3 b_3 c_3 = \varphi_3(z_{3j}),
\end{aligned} \tag{3.46}$$



con

$$\begin{aligned}
 v_{z_2} &= m_1(u_{21} - z_{21} + \frac{1}{b}(u_{22} - z_{22} + u_{23} - z_{23})) + \frac{1}{2}(m_2 - m_1) \\
 &\times \left( \left| u_{21} - z_{21} + \frac{1}{b}(u_{22} - z_{22} + u_{23} - z_{23}) + 1 \right| \right. \\
 &\quad \left. - \left| u_{21} - z_{21} + \frac{1}{b}(u_{22} - z_{22} + u_{23} - z_{23}) - 1 \right| \right),
 \end{aligned}$$

no es difícil ver que el controlar dinámico se da de manera natural como una cadena de integradores de la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_{11} &= u_{12}, \\
 \dot{u}_{21} &= u_{22}, \\
 \dot{u}_{12} &= u_{13}, \\
 \dot{u}_{22} &= u_{23}, \\
 \dot{u}_{13} &= \bar{u}_1, \\
 \dot{u}_{23} &= \bar{u}_2.
 \end{aligned}$$

Es claro que el objetivo es  $|z_{31} - z_{11}| \rightarrow 0$ ,  $|z_{31} - z_{21}| \rightarrow 0, \dots, |z_{33} - z_{13}| \rightarrow 0$ ,  $|z_{33} - z_{23}| \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ . Para lograr dicho objetivo, definamos el error de sincronización en coordenadas transformadas como

$$\begin{aligned}
 e_{z_{11}} &= z_{31} - z_{11}, \\
 e_{z_{21}} &= z_{31} - z_{21}, \\
 e_{z_{12}} &= z_{32} - z_{12}, \\
 e_{z_{22}} &= z_{32} - z_{22}, \\
 e_{z_{13}} &= z_{33} - z_{13}, \\
 e_{z_{23}} &= z_{33} - z_{23},
 \end{aligned}$$

cuya dinámica se representa por:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{z_{11}} &= e_{z_{12}}, \\
\dot{e}_{z_{21}} &= e_{z_{22}}, \\
\dot{e}_{z_{12}} &= e_{z_{13}}, \\
\dot{e}_{z_{22}} &= e_{z_{23}}, \\
\dot{e}_{z_{13}} &= \varphi_3(z_{3j}) - \varphi_1(z_{1j}, u_{1j}) - \bar{u}_1, \\
\dot{e}_{z_{23}} &= \varphi_3(z_{3j}) - \varphi_2(z_{2j}, u_{2j}) - \bar{u}_2,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

es claro que eligiendo  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$  en 3.47 como:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= \varphi_3 - \varphi_1 + \sum_{q=1}^n a_{21} k_{1q} (z_{3q} - z_{1q}), \\
\bar{u}_2 &= \varphi_3 - \varphi_2 + \sum_{q=1}^n a_{31} k_{2q} (z_{3q} - z_{2q}),
\end{aligned}$$

donde  $a_{ij}$  son los elementos de la matriz de adyacencia  $A$  en (3.11) y  $k_{ij}$  son ganancias (constantes) positivas. Entonces la dinámica del error de sincronización (3.47) se reescribe como:

$$\dot{e}_z = \Xi e_z \tag{3.48}$$

con

$$\Xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{11} & 0 & -k_{12} & 0 & -k_{13} & 0 \\ 0 & -k_{21} & 0 & -k_{22} & 0 & -k_{23} \end{pmatrix},$$

y matrices de ganancia

$$K_j = \begin{pmatrix} k_{1j} & 0 \\ 0 & k_{2j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

para  $j = 1, 2, 3$ .

Debido al árbol dirigido de cubrimiento  $\mathcal{G}_3$ , la elección de los controladores dinámicos en (3.48) y la FCOGM (3.46), el sistema en lazo cerrado está dado de la forma:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -M_1 L & -M_2 L & -M_3 L \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} \\ \varphi_0 \cdot 1_{3 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

donde  $L$  es la matriz laplaciana en (3.12) y  $M_j$  representan matrices de ganancias:

$$M_j = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 1} & K_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Es claro que se llega al acuerdo entre los agentes de la red (3.49) cuando las matrices de ganancia  $K_i$  se eligen tal que la matriz  $\Xi$  en (3.48) sea Hurwitz estable. Como caso particular, propónganse las siguientes matrices de ganancia  $K_1 = 500I_{2 \times 2}$ ,  $K_2 = 600I_{2 \times 2}$  y  $K_3 = 700I_{2 \times 2}$ , en la Figura 3.8 muestra que todas las trayectorias de los seguidores convergen a las del líder en coordenadas transformadas i.e. la condición (3.14) se cumple.

Por otra parte, obténganse los mapeos  $\Phi_3^{-1} \circ \Phi_1$  y  $\Phi_3^{-1} \circ \Phi_2$  de las transformaciones definidas en (3.39), (3.50) y (3.44), como resultado obtenemos:

$$\begin{aligned} H_1(x_1(t)) &: = \Phi_3^{-1} \circ \Phi_1(x_1(t)), \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{b_3 c_3} (-a_1 x_{11} - (a_1^2 - 1)x_{12} + x_{13} - u_{13} - d_3(x_{11} + a_1 x_{12} + u_{12})) - (x_{12} + u_{11}) \\ x_{12} + u_{11} \\ \frac{x_{11} + a_1 x_{12} + u_{12}}{b_3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

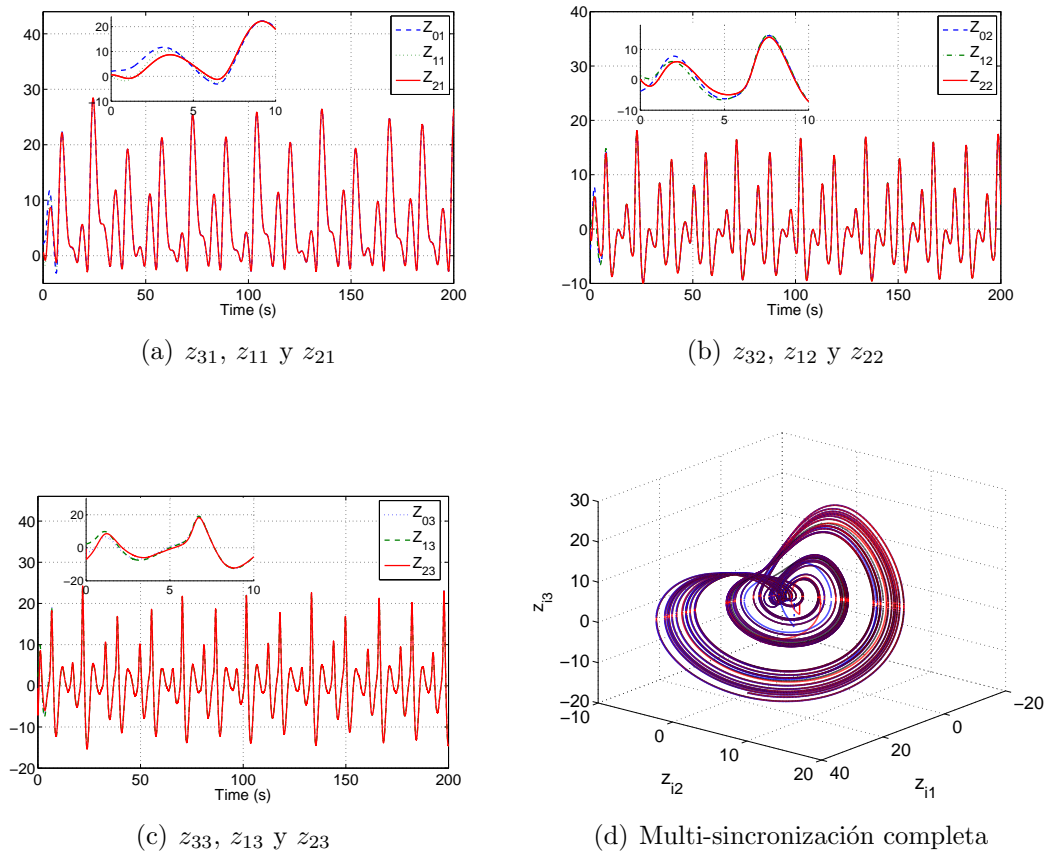


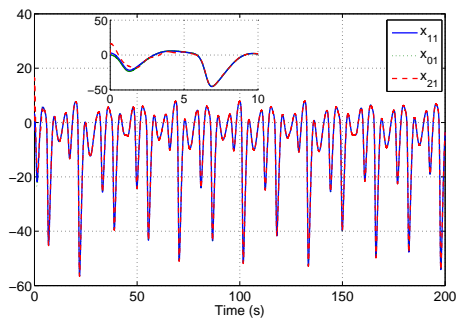
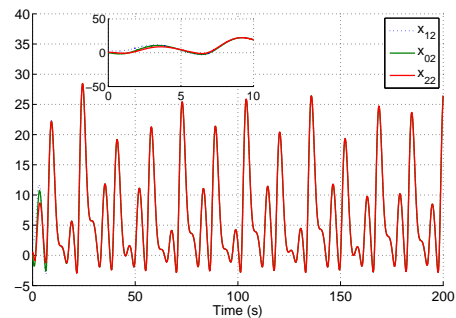
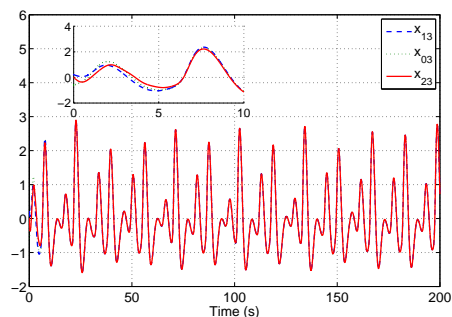
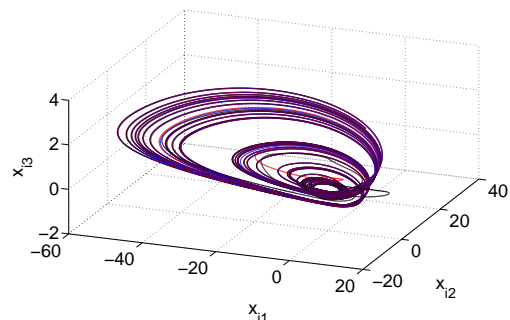
Figura 3.8: Acuerdo en coordenadas transformadas.

$$\begin{aligned}
H_2(x_2(t)) &:= \Phi_3^{-1} \circ \Phi_2(x_2(t)), \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{b_3 c_3} (-b_2(x_{21} - x_{22} + x_{23}) + u_{23} - d_3(-b_2 x_{22} + u_{22})) - (x_{23} - u_{21}) \\ x_{23} + u_{21} \\ \frac{-b_2 x_{22} + u_{22}}{b_3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De esta manera se define la variedad de sincronización en coordenadas originales, a saber:

$$\mathcal{M} = \{(x_3 \otimes \mathbf{1}_3, x_\ell \mid x_3 = H(x_1) = H(x_2))\}$$

con  $x_\ell = (x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, x_{13}, x_{23})^T$ . Y como consecuencia directa del Teorema 4, el consenso siguiendo al líder se alcanza en coordenadas originales (*i.e.* se cumple (3.15)). De manera que el estado de MSG para todos los sistemas en la red se cumple, esto se muestra en la Figura 3.8.

(a)  $x_{31}$ ,  $x_{11}$  y  $x_{21}$ (b)  $x_{32}$ ,  $x_{12}$  y  $x_{22}$ (c)  $x_{33}$ ,  $x_{13}$  y  $x_{23}$ 

(d) Multi-sincronización generalizada

Figura 3.9: Consenso siguiendo al líder.

### 3.4.2. Ejemplo 2

De manera similar y para ilustrar el Teorema 5, considere el Ejemplo 1 con  $\mathcal{G}_3$ , cuyos nodos son los sistemas de Rössler, Chua y Colpitts como se muestran en la Figura 3.10), donde

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{L}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, las dinámicas individuales para los nodos  $i = 1, 2$  son

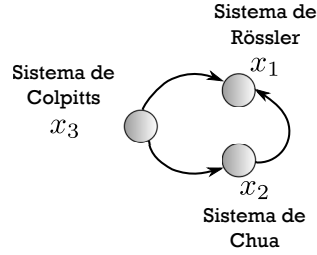


Figura 3.10: Árbol dirigido de cobertura  $\mathcal{G}_3$  con interacción entre esclavos.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= -(x_{12} + x_{13}), \\ \dot{x}_{12} &= x_{11} + a_1 x_{12}, \\ \dot{x}_{13} &= b_1 + x_{13}(x_{11} - c_1), \\ y_1 &= x_{12} + u_1. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{x}_{21} &= a_2(x_{22} - x_{21} - v_{x_2}), \\ \dot{x}_{22} &= x_{21} - x_{22} + x_{23}, \\ \dot{x}_{23} &= -b_2 x_{22}, \\ v_{x_2} &= m_1 x_{21} + 0.5(m_2 - m_1)(|x_{21} + 1| - |x_{21} - 1|), \\ y_2 &= x_{23} + u_2 \end{aligned}$$

con transformaciones de coordenadas dadas por

$$\phi_{u_1}(x_1) := \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \eta_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} + u_{11} \\ x_{11} + a_1 x_{12} + u_{12} \\ a_1 x_{11} + (a_1^2 - 1)x_{12} - x_{13} + u_{13} \end{pmatrix},$$

y

$$\phi_{u_2}(x_2) := \begin{pmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \\ \eta_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{23} + u_{21} \\ -b_2 x_{22} + u_{22} \\ -b_2(x_{21} - x_{22} + x_{23}) + u_{23} \end{pmatrix},$$

respectivamente. Y el nodo  $i = 3$  o líder

$$\begin{aligned} \dot{x}_{31} &= -a_3 \exp(-x_{32}) + a_3 x_{33} + a_3, \\ \dot{x}_{32} &= b_3 x_{33}, \\ \dot{x}_{33} &= -c_3 x_{31} - c_3 x_{32} - d_3 x_{33}, \\ y_3 &= x_{32}, \end{aligned}$$

note que  $u_3 = 0$  y la transformación inversa  $\phi_{u_3}^{-1} \in \mathcal{C}^1$  es la siguiente

$$\phi_{u_3}^{-1}(\eta_3) := \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\eta_{33} - d_3 \eta_{32} - b_3 c_3 \eta_{31}) / b_3 c_3 \\ \eta_{31} \\ \eta_{32} / b_3 \end{pmatrix},$$

donde  $\|[\partial/\partial\eta_3]\phi_{u_3}^{-1}(\eta_3)\|_\infty = (b_3 c_3 + d_3 + 1)/b_3 c_3 =: \bar{L}$ ,  $L \leq \sqrt{3}\bar{L}$ . Con los parámetros constantes y condiciones iniciales que aseguran comportamiento caótico (véase Cuadro 3.1 y Cuadro 3.2). Tomando en cuenta las leyes de control dinámicas (3.30) con acoplamiento  $c > 1$ , tal que las condiciones del Teorema 5 se cumplen.

Con  $c = 50$ , se alcanza el consenso siguiendo al líder en coordenadas transformadas y originales (véase Figura 3.11) donde  $H_1(x_1(t)) := \Phi_{u_3}^{-1} \circ \Phi_{u_1}(x_1(t))$  y  $H_2(x_2(t)) := \Phi_{u_3}^{-1} \circ \Phi_{u_2}(x_2(t))$ . Note que las señales de los protocolos dinámicos de consenso (3.30) están acotadas, esto se muestra en la Figura 3.12. Finalmente la variedad algebraica de sincronización es asintóticamente estable y está dada para toda la red  $\mathcal{G}_3$  como:

$$\mathcal{M}_x = \{(\mathbf{1}_2 \otimes x_3, \bar{x}_\ell) \mid x_3 = H_1(x_1) = H_2(x_2)\}$$

con  $\bar{x}_\ell = (x_1^T, x_2^T)^T$ .

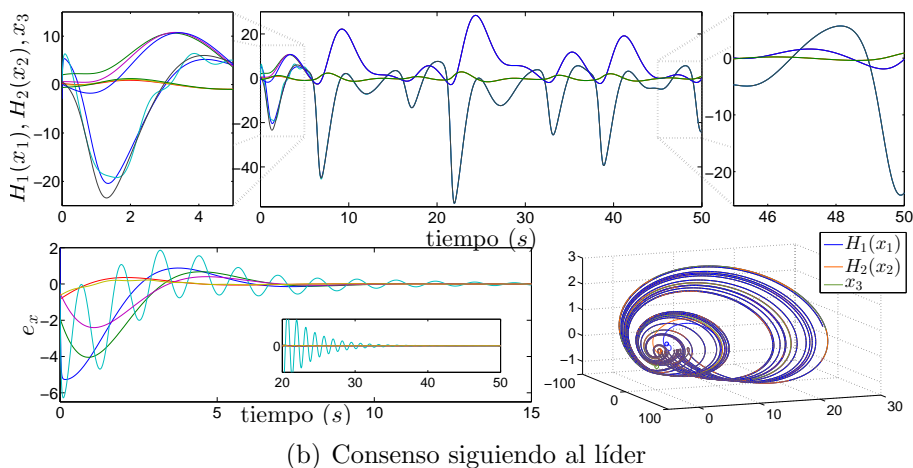
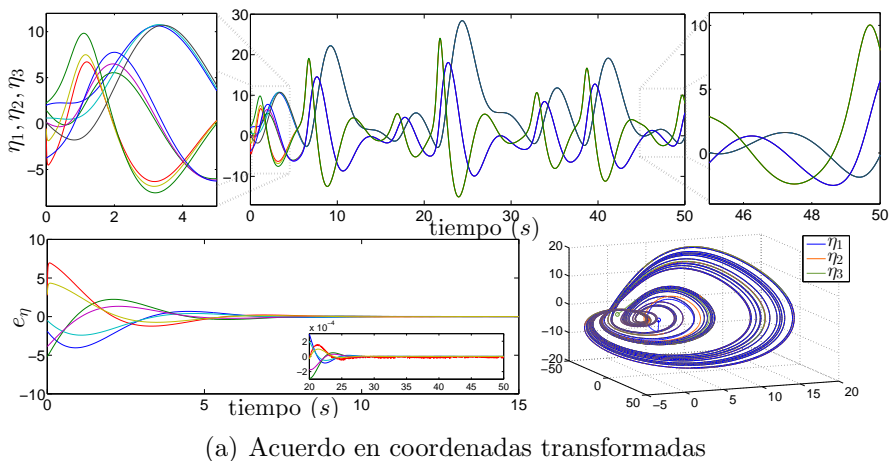


Figura 3.11: Sincronización de la red  $\mathcal{G}_3$  del Ejemplo 2 con el protocolo dinámico de consenso (3.30), acoplamiento constante  $c = 50$ ;  $e_\eta := e$  y  $e_x := \mathbf{1}_2 \otimes x_3 - (H_1(x_1) \ H_2(x_2))^T$ .

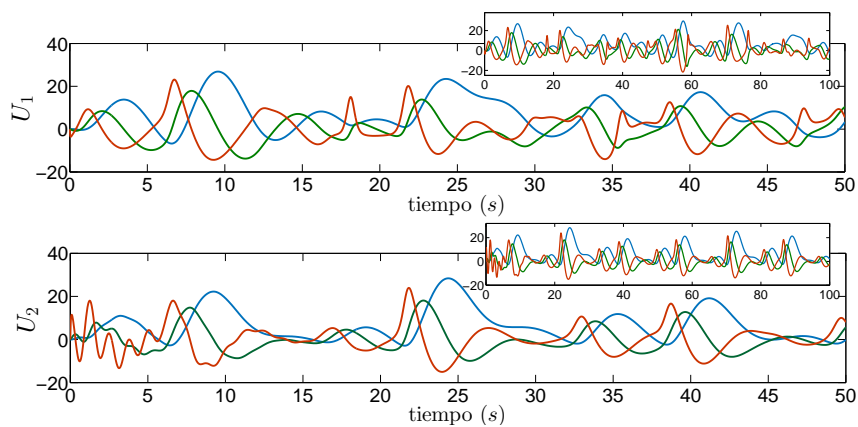


Figura 3.12: Señales acotadas de los protocolos dinámicos de consenso con acoplamiento  $c = 50$  para el Ejemplo 2.



# Capítulo 4

## Extensiones para sistemas de orden fraccionario conmensurado

*“...Un meteorólogo comentó que si la teoría fuese correcta, el aleteo de una gaviota sería suficiente para alterar el curso del clima para siempre. La controversia no se ha arreglado, pero la evidencia más reciente parece estar a favor de las gaviotas”*

— Edward N. Lorenz [62].

En este capítulo se presenta el problema de MSG para sistemas de orden fraccionario conmensurado (MSGF). En una red heterogénea en la configuración maestro-esclavo, se presenta la sincronización de múltiples familias desacopladas de sistemas caóticos. El ingrediente principal de esta metodología es encontrar formas canónicas para los sistemas originales, a través de una familia de elementos primitivos diferenciales fraccionarios (la salida de cada sistema). Para resolver el problema de MSG se diseñan leyes de control dinámicas de orden fraccionario. Además se muestra que añadiendo términos difusivos a estas leyes de control, el estado de MSG se satisface permitiendo cualquier tipo de interacción entre los sistemas esclavos de cada familia.

La organización de este capítulo se presenta de la siguiente manera: En la sección 4.1 se presenta un panorama actual sobre la sincronización de sistemas de orden fraccionario; en la sección 4.2 se presenta una condición necesaria y suficiente para obtener una forma canónica de observabilidad generalizada multi-salida para sistemas de orden fraccionario conmensurado FCOGMF, además se introducen nuevas definiciones como: la condición de

observabilidad algebraica para sistemas de Liouville, y familia de sistemas Picard-Vessiot para sistemas de orden fraccionario; en la sección 4.3, se presentan los resultados principales de la metodología de MSGF, y el diseño de controladores dinámicos de orden fraccionario; en la sección 4.4 se resuelve el problema de MSGF para cualquier tipo de interconexión entre sistemas esclavos. Finalmente, en la sección 4.4 se muestran algunos ejemplos para ilustrar la metodología propuesta.

## 4.1. Multi-sincronización de sistemas caóticos de orden fraccionario

En la actualidad, los problemas asociados con ecuaciones diferenciales de orden fraccionario son un tópico de interés entre la comunidad de control. La importancia de estas ecuaciones radica en el orden de los operadores que generalizan a aquellos del cálculo convencional, este parámetro extra que los hace tan atractivos complica sobremanera el análisis de estabilidad de estos sistemas. Los resultados son sólidos en su mayoría para sistemas lineales de orden fraccionario, pero sumamente escasos e inexactos para sistemas no lineales.

Debido al atractivo en las aplicaciones de la sincronización del caos y de la obtención de comportamientos caóticos en ecuaciones diferenciales de orden fraccionario [129, 131]. Los esfuerzos para entender este problema en el caso fraccionario ha sido objeto de creciente estudio. En la mayoría de los casos, los resultados se presentan como extensiones directas de los problemas de orden entero. Sin embargo, no es así de simple. De aquí en adelante, refiérase como sistemas a los de orden fraccionario conmensurado (en donde existan excepciones se realizarán los comentarios pertinentes).

Recientemente, numerosas aportaciones se encuentran en la literatura sobre la sincronización en la configuración maestro-esclavo de estos sistemas: En [149] y [136], respectivamente, se presentan el *acoplamiento difusivo* y el esquema de *sincronización proyectiva* para el sistema unificado. En [139] se analiza el comportamiento dinámico del *acoplamiento difusivo* para sistemas de Liu. Mediante la técnica de control activo, la sincronización del sistema hipercaótico de Lorenz se estudia en [138]. En [82] se presenta una técnica de *control activo* modificada para sistemas idénticos, esto en la configuración maestro-esclavo, con orden conmensurado e inconmensurado. Extensiones de técnicas basadas en *control activo por modos deslizantes* se presentan en [105, 130]; en [142] se presenta una ligera modificación de [130] en términos del problema de *sincronización proyectiva*. Este último se explora en [6] mediante técnicas de *control activo adaptable*, con un número reducido

de entradas, para sistemas de Lorenz con incertidumbre paramétrica. En [16] se presenta una técnica de *control activo optimal* y una *función de costo fraccionaria*. Particularmente en [28, 64], se considera el problema de SG para sistemas completamente distintos. Estos dos últimos trabajos son extensiones del *auxiliary system approach* de Abarbanel *et. al.* [2], y el enfoque algebraico-diferencial de Martínez-Guerra *et. al.* [65], respectivamente.

Motivados por la multi-sincronización de sistemas de orden entero, los esfuerzos para entender la sincronización de un par de sistemas se han extendido al estudio de escenarios más complejos que involucran múltiples sistemas interconectados. En este ámbito, los siguientes trabajos se presentan desde una perspectiva de la teoría de control: En [27] se estudia un esquema para sistemas idénticos en una topología de anillo con acoplamiento unidireccional y bidireccional. Un problema conocido como “*pinning synchronization*” se muestra en [133] para redes de sistemas Lipschitz con *acoplamiento difusivo*. En términos de SG, se presenta una modificación del *control activo* con interacciones entre los esclavos en [148].

En general y como en todas las contribuciones mencionadas, el objetivo principal de los problemas de sincronización radica en probar la estabilidad del error de sincronización, o la variedad de sincronización si es posible. Los retos más importantes consisten en explicar la sincronización de sistemas heterogéneos, donde la variedad de sincronización puede no existir. En este contexto, los siguientes trabajos intentan explicar este fenómeno [16, 64, 130, 142, 148]. En años recientes, la técnica de *control activo* está presente en la mayoría de los problemas de sincronización del caos (también en orden entero). Esta hace uso de señales de control por cada estado en la ecuación diferencial [4, 13, 137] y sugiere una búsqueda desesperada de señales apropiadas para estabilizar la dinámica del error de sincronización. En todas sus versiones para el caso de sistemas heterogéneos, los resultados sobre la SG no están del todo claros. Principalmente, porque no se encuentra el mapeo que relaciona a las trayectorias del esclavo con las del maestro, y en consecuencia no se sabe nada sobre la variedad de sincronización y su atractividad.

En las siguientes secciones se presenta una metodología para sincronizar una clase de múltiples familias de sistemas caóticos desacoplados (no necesariamente idénticos). Mediante la elección del elemento primitivo diferencial fraccionario, como la salida de cada sistema, es posible encontrar una familia de transformaciones que llevan a todos los sistemas a una forma canónica de observabilidad generalizada multi-salida para sistemas de orden fraccionario (FCOGMF). Es importante notar que los elementos primitivos diferenciales se toman como una combinación lineal de los estados conocidos, las entradas del sistema y sus derivadas de orden fraccionario. Posteriormente, de la transformación de coordenadas, es posible diseñar una familia de leyes de control dinámicas que sincroni-

zan en un sentido generalizado cada familia desacoplada de sistemas en la configuración maestro-esclavo. Estas familias de leyes de control están dadas de manera natural como una cadena de integradores de orden fraccionario. Este tipo de sincronización se introduce como Multi-sincronización generalizada de sistemas de orden fraccionario (MSGF). Para enriquecer la cantidad de sistemas que pueden sincronizarse con esta metodología, se hace uso de la característica de una clase de sistemas denominada de Liouville, en este caso, la primera componente de las transformaciones es una integral fraccionaria del elemento primitivo diferencial fraccionario.

## 4.2. Observabilidad algebraica y formas canónicas de observabilidad generalizadas para sistemas de orden fraccionario

Considere la siguiente ecuación diferencial de orden fraccionario conmensurado<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha x &= F(x, u) \\ y &= h(x, u), \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $\mathcal{D}^\alpha$  denota al operador de derivada de Caputo (B.1) de orden  $\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_\gamma) \in \mathbb{R}^\gamma$ ,  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ ,  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\gamma \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continuamente diferenciable en sus argumentos.

**Definición 16.** [64] *Una variable de estado  $x_i \in \mathbb{R}$  del sistema (4.1) satisface la condición de observabilidad algebraica para sistemas de orden fraccionario (OAF) si  $x_i$  es una función de las primeras  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  derivadas secuenciales de orden fraccionario, respectivamente, de la salida disponible  $y$  y la entrada  $u$ , i.e.,*

$$x_i = \phi_i(y, y^{(\alpha)}, \mathcal{D}^{2\alpha}y, \dots, \mathcal{D}^{r_1\alpha}y, u, u^{(\alpha)}, \mathcal{D}^{2\alpha}u, \dots, \mathcal{D}^{r_2\alpha}u),$$

donde  $\phi_i : \mathbb{R}^{(r_1+1)p} \times \mathbb{R}^{(r_2+1)m} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Es claro que existen sistemas que no cumplen con la condición OAF<sup>2</sup> del todo. Para algunos de estos sistemas se introducen la siguientes definiciones:

<sup>1</sup>Para mayor detalle, sobre las definiciones de los operadores de orden fraccionario utilizados en este capítulo, véase Apéndice B.

<sup>2</sup>Véase [73] para una versión de esta propiedad para sistemas fraccionarios sin entradas.

**Definición 17.** *Considere que  $\bar{n}$  estados del sistema (4.1) satisfacen la condición OAF para  $\bar{n} < n$ , entonces se dice que el sistema de orden fraccionario (4.1) es de Liouville si los  $n - \bar{n}$  estados restantes pueden obtenerse añadiendo integrales de orden fraccionario (B.2) de los  $\bar{n}$  estados.*

Como resultado de la definición anterior, podemos reescribir la Definición 16 de la manera siguiente:

**Definición 18.** *Una variable de estado  $x_i \in \mathbb{R}$  satisface la condición de observabilidad algebraica de Liouville para sistemas de orden fraccionario (OALF) si  $x_i$  es una función de las primeras  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  derivadas secuenciales de orden fraccionario, respectivamente, de la salida disponible  $\bar{y} = I^\alpha y$  y la entrada  $u$ , i.e.,*

$$x_i = \phi_i \left( I^\alpha y, y, \mathcal{D}^\alpha y, \dots, \mathcal{D}^{(r_1-1)\alpha} y, \dots, u, u^{(\alpha)}, \mathcal{D}^{2\alpha} u, \dots, \mathcal{D}^{r_2\alpha} u \right)$$

donde  $\phi_i : \mathbb{R}^{(r_1+1)p} \times \mathbb{R}^{(r_2+1)m} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 19.** *Una familia de sistemas es Picard-Vessiot (PV) si y solo si el espacio vectorial generado por las derivadas de orden fraccional de la familia*

$$\{\mathcal{D}^{n_j\alpha} \bar{y}_j, n_j \geq 0, 1 \leq j \leq q, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

*tiene dimension finita, donde  $\bar{y}_j$  es la  $j$ -ésima salida (elemento primitivo diferencial fraccionario).*

En lo que sigue, conocer la salida de cada sistema es suficiente para generar una familia de transformaciones para sincronizar múltiples sistemas caóticos. Estas transformaciones se obtienen de la familia de salidas dada por  $\bar{y}_j = I^\alpha y_j$  con  $1 \leq j \leq p$  ( $p$  salidas). Suponiendo que  $n_j \geq 0$  es el mínimo entero tal que  $\mathcal{D}^{n_j\alpha} \bar{y}_j$  son analíticamente dependientes de  $(\bar{y}_j, \bar{y}_j^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[n_j-1]\alpha} \bar{y}_j)$ , donde  $\bar{y}_j = I^\alpha y_j$ , tal que

$$\bar{H}_j(\bar{y}_j, \bar{y}_j^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[n_j-1]\alpha} \bar{y}_j, \mathcal{D}^{n_j\alpha} \bar{y}_j, u_j, u_j^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{\gamma_j\alpha} u_j) = 0. \quad (4.2)$$

Entonces, el sistema (4.2) puede resolverse localmente como:

$$\mathcal{D}^{n_j\alpha} \bar{y}_j = -\mathcal{L}_j(\bar{y}_j, \bar{y}_j^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[n_j-1]\alpha} \bar{y}_j, u_j, u_j^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_j-1]\alpha} u_j) + \mathcal{D}^{\gamma_j\alpha} u_j$$

Defínase  $\xi_i^{n_j} = \mathcal{D}^{[i-l]\alpha} \bar{y}_j$ ,  $l = 1, n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} + 1$ ;  $1 \leq i \leq \sum_{1 \leq j \leq p} n_j = n$ , donde el subíndice  $j$  representa al  $j$ -ésimo sistema y las constantes  $n_j$  denotan a los índices de observabilidad algebraica (cada índice  $n_j$  coincide con la dimensión de su sistema). Entonces, es posible obtener una representación local para el conjunto de los  $p$  sistemas desacoplados, esta representación puede verse como una forma canónica de observabilidad generalizada multi-salida para sistemas de orden fraccionario (FCOGMF):

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_1^{n_1} &= \xi_2^{n_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_2^{n_1} &= \xi_3^{n_1} \\
&\vdots \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1-1}^{n_1} &= \xi_{n_1}^{n_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1}^{n_1} &= -\mathcal{L}_1(\xi_1^{n_1}, \xi_2^{n_1}, \dots, \xi_{n_1}^{n_1}, u_1, u_1^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_1-1]\alpha} u_1) + \mathcal{D}^{\gamma_1 \alpha} u_1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+1}^{n_2} &= \xi_{n_1+2}^{n_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+2}^{n_2} &= \xi_{n_1+3}^{n_2} \\
&\vdots \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+n_2-1}^{n_2} &= \xi_{n_1+n_2}^{n_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+n_2}^{n_2} &= -\mathcal{L}_2(\xi_{n_1+1}^{n_2}, \xi_{n_1+2}^{n_2}, \dots, \xi_{n_1+n_2}^{n_2}, u_2, u_2^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_2-1]\alpha} u_2) + \mathcal{D}^{\gamma_2 \alpha} u_2 \\
&\vdots \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+1}^{n_p} &= \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+2}^{n_p} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+2}^{n_p} &= \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+3}^{n_p} \\
&\vdots \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+n_p-1}^{n_p} &= \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+n_p}^{n_p} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+n_p}^{n_p} &= -\mathcal{L}_p(\xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+1}^{n_p}, \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+2}^{n_p}, \dots, \\
&\quad \xi_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+n_p}^{n_p}, u_p, u_p^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_p-1]\alpha} u_p) + \mathcal{D}^{\gamma_p \alpha} u_p \\
y_j &= \xi_l^{n_j}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

En forma compacta este nuevo sistema (4.3) se presenta como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi &= \mathcal{A} \xi - \Phi(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p) + \bar{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^{\gamma_1 \alpha} u_1, \dots, \mathcal{D}^{\gamma_p \alpha} u_p) \\
\mathcal{Y} &= \mathcal{C} \xi,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde  $\xi, \Phi, \bar{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$  y las matrices en (4.4) se definen de la siguiente manera:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{bmatrix};$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1 \leq j \leq p;$$

$$\Phi(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathcal{L}_1) \\ \phi_2(\mathcal{L}_2) \\ \vdots \\ \phi_p(\mathcal{L}_p) \end{bmatrix};$$

$$\phi_j(\mathcal{L}_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\mathcal{L}_j(\xi_{n_1+n_2+\dots+n_{j-1}+1}^{n_j}, \dots, \xi_{n_1+n_2+\dots+n_j}^{n_p}, u_j, u_j^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_j-1]\alpha}u_j) \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^{\gamma_1\alpha}u_1, \dots, \mathcal{D}^{\gamma_p\alpha}u_p) = \begin{bmatrix} \square_1(\mathcal{D}^{\gamma_1\alpha}u_1) \\ \square_2(\mathcal{D}^{\gamma_2\alpha}u_2) \\ \vdots \\ \square_p(\mathcal{D}^{\gamma_p\alpha}u_p) \end{bmatrix}; \quad \square_j(\mathcal{D}^{\gamma_j\alpha}u_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{D}^{\gamma_j\alpha}u_j \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_p \end{bmatrix}; \quad C_j = [1 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

Ahora consideremos la siguiente familia de sistemas caóticos de orden fraccionario:

$$\begin{aligned} x_j^{(\alpha)} &= F_j(x_j, u_j) \\ y_j &= C_j x_j + D_j u_j \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $1 \leq j \leq p$  denota al  $j$ -ésimo sistema,  $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$  es el vector de estado,  $F_j(\cdot)$  es una función no lineal,  $u_j$  es la entrada,  $y_j$  es la salida y  $C_j, D_j$  son matrices de tamaño apropiado. El siguiente resultado es importante, este nos indica bajo qué condiciones es posible obtener una FCOGMF para familias desacopladas de sistemas de Liouville.

**Lema 5.** *Considere una familia de sistemas no lineales (4.5). Si la salida se elige como*

$$y_j = \sum_{i=n-n_j+1}^n \gamma_i x_i + \sum_k^m \beta_k u_k,$$

donde  $\gamma_i, \beta_k$  son cantidades diferenciales de  $u$  y sus derivadas respecto al tiempo, tal que la primera componente de la transformación de coordenadas se denota por  $\bar{y}_j = I^\alpha y_j$ , entonces el sistema no lineal (4.5) se lleva a la FCOGMF si y solo si la familia de sistemas (4.5) es PV.

**Prueba 7.** (Suficiencia) Defina  $\{\zeta_j, \zeta_j^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[n_j-1]\alpha} \zeta_j, \}$ ,  $1 \leq j \leq p$  con  $\zeta_j = I^{(\alpha)} y_j = \bar{y}_j$ ,  $\mathcal{D}^{[i-l]\alpha} \zeta_j = \mathcal{D}^{[i-l-1]\alpha} y_j$ ,  $1 \leq i \leq \sum_{j=1}^p n_j$ , donde  $n_j \geq 0$  es el mínimo entero tal que  $\mathcal{D}^{[n_j-1]\alpha} y_j$  es dependiente de  $I^{(\alpha)} y_j, y, y_j^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[n_j-l-1]\alpha} y_j, u_j, \dots$ . Ahora, redefiniendo  $\xi_i = \zeta_j = I^{(\alpha)} y_j$ ,  $\xi_i^{n_j} = \mathcal{D}^{[i-l]\alpha} \zeta_j = \mathcal{D}^{[i-l-1]\alpha} y_j$ ,  $1 \leq i \leq \sum_{j=1}^p n_j$  inmediatamente se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_1} &= \xi_{i+1}^{n_1}, \quad 1 \leq i \leq n_1 - 1 \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1}^{n_1} &= -\mathcal{L}_1(\xi_1^{n_1}, \dots, \xi_{n_1}^{n_1}, u_1, u_1^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_1-1]\alpha} u_1) + \mathcal{D}^{\gamma_1 \alpha} u_1 \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_2} &= \xi_{i+1}^{n_2}, \quad n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 - 1 \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+n_2}^{n_2} &= -\mathcal{L}_2(\xi_{n_1+1}^{n_2}, \dots, \xi_{n_1+n_2}^{n_2}, u_2, u_2^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_2-1]\alpha} u_2) + \mathcal{D}^{\gamma_2 \alpha} u_2 \\ &\vdots \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_p} &= \xi_{i+1}^{n_p}, \quad n_1 + \dots + n_{p-1} + 1 \leq i \leq n_1 + \dots + n_p - 1 \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_{n_1+\dots+n_p}^{n_p} &= -\mathcal{L}_p(\xi_{n_1+\dots+n_{p-1}+1}^{n_p}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_p}^{n_p}, u_p, u_p^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_p-1]\alpha} u_p) + \mathcal{D}^{\gamma_p \alpha} u_p \\ \xi_i^{n_j} &= I^\alpha y_j, \quad 1 \leq j \leq p, \quad l = 1 + \sum_{\hat{j}=1}^{j-1} n_{\hat{j}}. \end{aligned}$$

(Necesidad) Es inmediata. □



### 4.3. Multi-sincronización generalizada de sistemas de orden fraccionario

Considere una configuración maestro-esclavo en la familia de sistemas (4.5). Denote como la familia de sistemas maestros al sistema

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}x_{m_\mu} &= F_{m_\mu}(x_{m_\mu}, u_{m_\mu}) \\ y_{m_\mu} &= h_{m_\mu}(x_{m_\mu}, u_{m_\mu})\end{aligned}\tag{4.6}$$

y a la familia de sistemas esclavos como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}x_{s_\nu} &= F_{s_\nu}(x_{s_\nu}, u_{s_\nu}) \\ y_{s_\nu} &= h_{s_\nu}(x_{s_\nu}, u_{s_\nu}),\end{aligned}\tag{4.7}$$

donde  $x_{s_\nu} = (x_{1,s_\nu}, \dots, x_{n_{s_\nu},s_\nu}) \in \mathbb{R}^{n_{s_\nu}}$ ,  $x_{m_\mu} = (x_{1,m_\mu}, \dots, x_{n_{m_\mu},m_\mu}) \in \mathbb{R}^{n_{m_\mu}}$ ,  $h_{s_\nu} : \mathbb{R}^{n_{s_\nu}} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_{m_\mu} : \mathbb{R}^{n_{m_\mu}} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_{m_\mu} = (u_{1,m_\mu}, \dots, u_{\gamma_{m_\mu},m_\mu}) \in \mathbb{R}^{\gamma_{m_\mu}}$ ,  $u_{s_\nu} = (u_{1,s_\nu}, \dots, u_{\gamma_{s_\nu},s_\nu}) \in \mathbb{R}^{\gamma_{s_\nu}}$ ,  $1 \leq \nu \leq p-1$ ,  $1 \leq \mu \leq p-\nu$ , estas condiciones nos dicen que podemos considerar uno o mas esclavos asociados con un solo maestro, pero no podemos tener a un esclavo asociado más de un sistema maestro. Existe la posibilidad de tener un esclavo asociado con un maestro cuando el número de maestros sea igual al número de esclavos. Por otra parte, cuando el número de esclavos es mayor al de maestros significa que cada maestro interactúan con uno o más de un esclavo. Esta configuración se muestra en la Figura 4.1, los nodos (círculos) representan a los sistemas involucrados. Los nodos encerrados en la Figura 4.1b representan al mismo sistema maestro. Los círculos punteados representan a sistemas virtuales, estos poseen la misma ecuación diferencial de orden fraccionaria y condiciones iniciales idénticos al sistema maestro (círculos cerrados), estos se representan como un solo nodo.

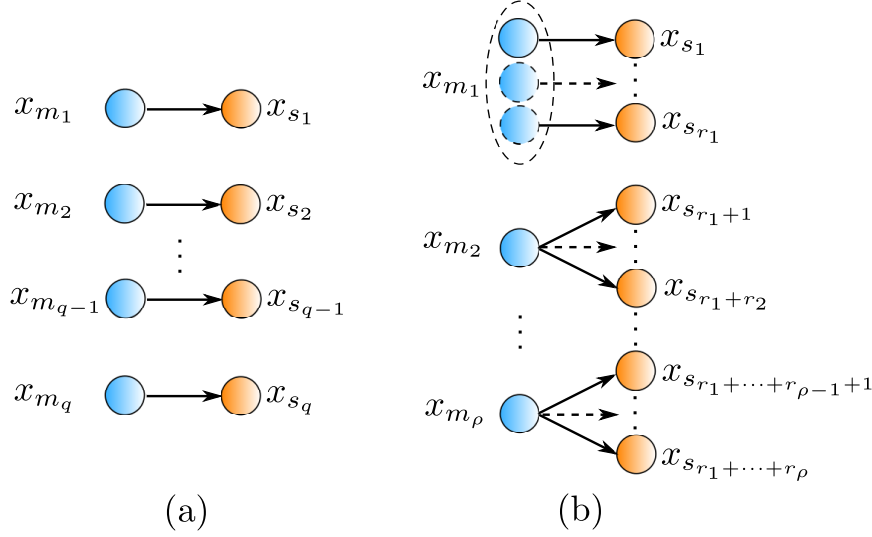


Figura 4.1: Configuración de la multi-sincronización generalizada para sistemas de orden fraccionario: a) Mismo número de esclavos y maestros, b) Mayor número de esclavos que maestros.

En la siguiente definición se describe la MSGF (*cf.* Definición 13):

**Definición 20.** Sean  $X_m = (x_{m_1}, \dots, x_{m_n}) \in \mathbb{R}^{n_m}$  y  $X_s = (x_{s_1}, \dots, x_{s_n}) \in \mathbb{R}^{n_s}$ , respectivamente, los vectores de estado de las familias de sistemas maestro y esclavo. Entonces la familia de sistemas esclavo se encuentra en el estado de Multi-sincronización generalizada de sistemas de orden fraccionario (MSGF) con sus respectivos maestros si existe una familia de salidas que genera la transformación  $H_{ms} : \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{\gamma_{s\nu}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$  con  $H_{ms} = \Psi_m^{-1} \circ \Psi_s$ ; y existe una variedad algebraica  $M = \{(X_s, X_m) \mid X_m = H_{ms}(X_s)\}$  y un conjunto compacto  $B \subset \mathbb{R}^{n_m} \times \mathbb{R}^{n_s}$  con  $M \subset B$  tal que las trayectorias con condiciones iniciales en  $B$  tienden a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

De la Definición 20 es claro que cuando  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(X_s) - X_m\| = 0$ , el estado de FGMS se alcanza.

El siguiente teorema presenta la metodología para sincronizar múltiples familias desacopladas de sistemas de Liouville no idénticos (véase Figura 4.1). El diseño de los controladores dinámicos de orden fraccionario se da dentro de la prueba. La idea detrás de la prueba es imponer una dinámica similar a la de los maestros en sus respectivas familias de sistemas esclavos.

**Teorema 6.** Considere que las familias de sistemas (4.6) y (4.7) pueden llevarse a su FCOGMF. Entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_m - \xi_s\| = 0$  donde  $\xi_m = \Psi_m(X_m)$  y  $\xi_s = \Psi_m(X_s)$ , respectivamente, corresponden a las trayectorias de las familias de sistemas maestros y esclavos.

**Prueba 8.** Sin pérdida de generalidad considere  $u_{m_\mu} = 0$ . Suponga que los sistemas maestros tienen asociados la siguiente familia de salidas:

$$y_{m_j} = \sum_{i=n-n_j+1}^n \gamma_i x_{i,m_j} = \xi_i^{n_{m_j}},$$

donde  $\gamma_i$ , ( $i = l$ ) son cantidades diferenciales de  $u$  y de un número finito de sus derivadas, también suponga que la familia de salidas para los sistemas esclavos es:

$$y_{s_j} = \sum_{i=n-n_j+1}^n \gamma_i x_{i,s_j} + \sum_k \beta_k u_{k,m_j} = \xi_i^{n_{s_j}},$$

donde  $\gamma_i$ , ( $i = l$ ),  $\beta_k$  son cantidades diferenciales de  $u$  y de un número finito de sus derivadas. Entonces se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{m_1}} &= \xi_{i+1}^{n_{m_1}}, \quad 1 \leq i \leq n_{m_1} - 1 \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{m_1}}^{n_{m_1}} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{n_{m_1}}, \dots, \xi_{n_{m_1}}^{n_{m_1}}) \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{m_2}} &= \xi_{i+1}^{n_{m_2}}, \quad n_{m_1} + 1 \leq i \leq n_{m_1} + n_{m_2} - 1 \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{m_1}+n_{m_2}}^{n_{m_2}} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_{n_{m_1}+1}^{n_{m_2}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+n_{m_2}}^{n_{m_2}}) \\ &\vdots \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{m_p}} &= \xi_{i+1}^{n_{m_p}}, \quad n_{m_1} + \dots + n_{m_{p-1}} + 1 \leq i \leq n_{m_1} + \dots + n_{m_p} - 1 \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_p}}^{n_{m_p}} &= -\mathcal{L}_{m_p}(\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{p-1}}+1}^{n_{m_p}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_p}}^{n_{m_p}}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

en forma compacta (4.8) se expresa como:

$$\mathcal{D}^\alpha \xi_m = \mathcal{A} \xi_m - \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_p}) \tag{4.9}$$

Ahora, defínase el siguiente sistema extendido que representa a la familia de sistemas esclavos con una cadena de integradores de orden fraccionario dada por una familia de realimentaciones dinámicas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{s_1}} &= \xi_{i+1}^{n_{s_1}}, \quad 1 \leq i \leq n_{s_1} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{s_1}}^{n_{s_1}} &= -\mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{n_{s_1}}, \dots, \xi_{n_{s_1}}^{n_{s_1}}, u_{s_1}, u_{s_1}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_1}-1]\alpha} u_{s_1}) + \mathcal{D}^{\gamma_{s_1}\alpha} u_{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_i^{n_{s_1}} &= u_{i+1}^{n_{s_1}}, \quad 1 \leq i \leq \gamma_{s_1} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha u_{\gamma_{s_1}}^{n_{s_1}} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{n_{m_1}}, \dots, \xi_{n_{m_1}}^{n_{m_1}}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{n_{s_1}}, \dots, \xi_{n_{s_1}}^{n_{s_1}}, u_{s_1}, u_{s_1}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_1}-1]\alpha} u_{s_1}) \\
&\quad + K_1(\xi^{n_{m_1}} - \xi^{n_{s_1}}) \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{s_2}} &= \xi_{i+1}^{n_{s_2}}, \quad n_{s_1} + 1 \leq i \leq n_{s_1} + n_{s_2} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}} &= -\mathcal{L}_{s_2}(\xi_{n_{s_1}+1}^{n_{s_2}}, \dots, \xi_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}}, u_{s_2}, u_{s_2}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_2}-1]\alpha} u_{s_2}) + \mathcal{D}^{\gamma_{s_2}\alpha} u_{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_i^{n_{s_2}} &= u_{i+1}^{n_{s_2}}, \quad \gamma_{s_1} + 1 \leq i \leq \gamma_{s_1} + \gamma_{s_2} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha u_{\gamma_{s_1}+\gamma_{s_2}}^{n_{s_2}} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_{n_{m_1}+1}^{n_{m_2}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+n_{m_2}}^{n_{m_2}}) + \mathcal{L}_{s_2}(\xi_{n_{s_1}+1}^{n_{s_2}}, \dots, \xi_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}}, u_{s_2}, u_{s_2}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_2}-1]\alpha} u_{s_2}) \\
&\quad + K_2(\xi^{n_{m_2}} - \xi^{n_{s_2}}) \\
&\quad \vdots \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{s_p}} &= \xi_{i+1}^{n_{s_p}}, \quad n_{s_1} + \dots + n_{s_{p-1}} + 1 \leq i \leq n_{s_1} + \dots + n_{s_p} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_p}}^{n_{s_p}} &= -\mathcal{L}_{s_p}(\xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{p-1}}+1}^{n_{s_p}}, \dots, \xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_p}}^{n_{s_p}}, u_{s_p}, u_{s_p}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_p}-1]\alpha} u_{s_p}) + \mathcal{D}^{\gamma_{s_p}\alpha} u_{s_p} \\
\mathcal{D}^\alpha u_i^{n_{s_p}} &= u_{i+1}^{n_{s_p}}, \quad \gamma_{s_1} + \dots + \gamma_{s_{p-1}} + 1 \leq i \leq \gamma_{s_1} + \dots + \gamma_{s_p} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha u_{\gamma_{s_1}+\dots+\gamma_{s_p}}^{n_{s_p}} &= -\mathcal{L}_{m_p}(\xi^{n_{m_p}}) + \mathcal{L}_{s_p}(\xi^{n_{s_p}}, u_{s_p}, u_{s_p}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_p}-1]\alpha} u_{s_p}) + K_p(\xi^{n_{m_p}} - \xi^{n_{s_p}})
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Reescribiendo (4.10) en una forma compacta, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_s &= \mathcal{A} \xi_s - \Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_p}) + \bar{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^{\gamma_{s_1}\alpha} u_{s_1}, \dots, \mathcal{D}^{\gamma_{s_p}\alpha} u_{s_p}) \\
\mathcal{D}^\alpha \mathcal{U} &= \mathcal{M} \mathcal{U} + \bar{\mathcal{U}} \\
\bar{\mathcal{U}} &= \mathcal{K}(\xi_m - \xi_s) - \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_p}) + \Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_p}),
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u_{n_{s_1}} \\ \vdots \\ u_{n_{s_p}} \end{bmatrix}, \quad u_{n_{s_j}} = \begin{bmatrix} u_1^{n_{s_j}} \\ u_2^{n_{s_j}} \\ \vdots \\ u_{\sum_{j=1}^{s_j} \gamma_{s_j}}^{n_{s_j}} \end{bmatrix}.$$

Defina las señales de control como  $u_1^{n_{s_j}} = u_{s_j}$ ,  $u_2^{n_{s_j}} = \mathcal{D}^\alpha u_{s_j}, \dots, u_{\alpha_{s_j}}^{n_{s_j}} = \mathcal{D}^{[\gamma_{s_j}-1]\alpha} u_{s_j}$ ,  $\xi^{n_{s_j}} = [\xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{j-1}}+1}^{n_{s_j}}, \dots, \xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_j}}^{n_{s_j}}]^T$ ,  $\xi^{n_{m_j}} = [\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{j-1}}+1}^{n_{m_j}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_j}}^{n_{m_j}}]^T$  y  $K_j = [k_{1,j}, \dots, k_{n_{s_j},j}]$ . Las matrices  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{K}$ , respectivamente, se definen de la siguiente manera:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{M}}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\mathcal{M}}_p \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{M}}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{K}}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\mathcal{K}}_p \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{K}}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{1,j} & k_{2,j} & k_{3,j} & k_{4,j} & \cdots & k_{n_j,j} \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, considere al error de sincronización como  $e_\xi = \xi_m - \xi_s$ , cuya dinámica de orden fraccionaria asociada es:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha e_\xi &= \mathcal{A}\xi_m - \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_p}) - \mathcal{A}\xi_s + \Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_p}) - \bar{\mathcal{U}} \\ \mathcal{D}^\alpha \mathcal{U} &= \mathcal{M}\mathcal{U} + \bar{\mathcal{U}} \\ \bar{\mathcal{U}} &= \mathcal{K}(\xi_m - \xi_s) - \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_p}) + \Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_p}) \end{aligned}$$

después de algunas manipulaciones algebraicas no es difícil ver que:

$$\mathcal{D}^{(\alpha)} e_\xi = (\mathcal{A} - \mathcal{K})e_\xi \tag{4.11}$$

por el Teorema 11, el sistema (4.11) es asintóticamente estable si todos los valores propios de la matriz  $\mathcal{A} - \mathcal{K} = \text{diag}(\bar{\mathcal{A}}_1, \dots, \bar{\mathcal{A}}_p)$  con ganancias de control  $(k_{1,j}, k_{2,j}, \dots, k_{n_j,j})$  se eligen tal que:

$$|\arg(\lambda_i(\bar{\mathcal{A}}_j))| > \frac{\pi}{2} > \alpha \frac{\pi}{2}$$

donde

$$\bar{\mathcal{A}}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{1,j} & -k_{2,j} & -k_{3,j} & -k_{4,j} & \cdots & -k_{n_j,j} \end{bmatrix}$$

□

**Corolario 2.** *Considere que la familia de sistemas (4.6) y (4.7) pueden llevarse a su FCOGMF. Suponga que  $\xi_m$  y  $\xi_s$ , respectivamente, están relacionadas con  $X_m$  y  $X_s$  por las transformaciones difeomorfas  $\Psi_m$  y  $\Psi_s$  de la siguiente forma:*

$$\xi_m = \Psi_m(X_m) \quad (4.12)$$

$$\xi_s = \Psi_s(X_s) \quad (4.13)$$

defínase  $H_{ms} = \Psi_m^{-1} \circ \Psi_s$ . Si  $\Psi_m^{-1}(\cdot)$  es continuamente diferenciable (y uniformemente acotada), entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(X_s) - X_m\| = 0$ .

**Prueba 9.** *Aplique la transformación inversa  $\Psi_m^{-1}(\cdot)$  a (4.12), por definición*

$$\Psi_m^{-1}(\xi_m) = (\Psi_m^{-1} \circ \Psi_m)(X_m) = X_m$$

$$\Psi_m^{-1}(\xi_s) = (\Psi_m^{-1} \circ \Psi_s)(X_s) = H_{ms}(X_s)$$

Defínase la norma del error de sincronización en coordenadas originales  $\|X_m - H_{ms}(X_s)\|$ , dado que  $\Psi_m^{-1}(\cdot)$  es continuamente diferenciable entonces existe  $\psi > 0$  tal que:

$$\begin{aligned} \|X_m - H_{ms}(X_s)\| &= \|\Psi_m^{-1}(\xi_m) - \Psi_m^{-1}(\xi_s)\|, \\ &\leq \psi \|\xi_m - \xi_s\|. \end{aligned}$$

El resultado sigue del Teorema 6. □

**Lema 6.** *Si una familia de sistemas de Liouville de orden fraccionario es una familia de sistemas PV, entonces se encuentra en estado de MSGF.*

**Prueba 10.** *La prueba es trivial y se omite (transitividad). □*

## 4.4. Extensión de los resultados a interacciones complejas entre esclavos

En esta sección, los resultados previos se extienden al caso de interacción compleja entre esclavos. En este caso, la interacción se considera invariante, y entre esclavos de la misma familia. Considere que la dinámica del sistema maestro está disponible para todos los esclavos de una misma familia como se describe en el Teorema 6. Suponga que el número de maestros es menor que el número de esclavos. Y tome como  $q$  como el número de familias diferentes de sistemas esclavos. Esta nueva interacción se ilustra en la Figura 4.2.

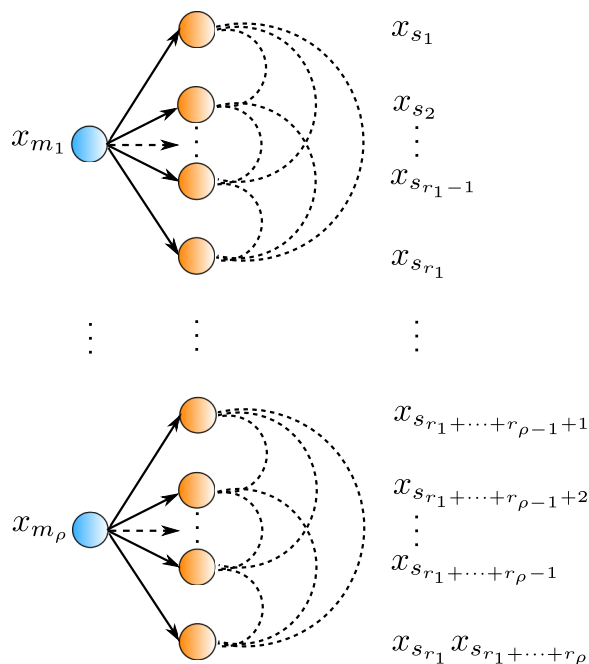


Figura 4.2: Interacción entre esclavos en una red compleja.

Cada interacción en la Figura 4.2 se representa por una curva punteada, dependiendo de si el esclavo conoce el estado de sus vecinos (otros esclavos de la misma familia), la interacción puede ser unidireccional o bidireccional. La restricción es que no existan interacciones entre esclavos de diferentes familias. Así una red compleja se entiende como la población de sistemas que interactúan de la forma descrita anteriormente.

La interacción entre los “ $r_\rho$ ” sistemas esclavos de la misma familia, se modela por el grafo  $\mathcal{G}_{r_\rho} = (\mathcal{V}_{r_\rho}, \mathcal{E}_{r_\rho}, \mathcal{A}_{r_\rho})$  con  $1 \leq \rho \leq q$ , donde  $\mathcal{V}_{r_\rho} = \{1, \dots, r_\rho\}$  es el conjunto de nodos (todos los sistemas esclavos de la misma familia),  $\mathcal{E}_{r_\rho} \subseteq \mathcal{V}_{r_\rho} \times \mathcal{V}_{r_\rho}$  es el conjunto de aristas, y  $\mathcal{A}_{r_\rho} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{r_\rho \times r_\rho}$  es la matriz de adyacencia con elementos no negativos  $a_{ij}^\rho$  que se restringe a:

$$a_{ij}^\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } (j, i) \in \mathcal{E}_{r_\rho}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea  $L_{r_\rho} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{r_\rho \times r_\rho}$  la matriz laplaciana inducida por el grafo  $\mathcal{G}_{r_\rho}$  que se define como

$$l_{ij}^\rho = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^{r_\rho+1} a_{ik} & \text{si } i = j, \\ -a_{ij} & \text{si no.} \end{cases}$$

Ahora, considere una cadena de integradores de orden fraccionario dada en el Teorema 6, a continuación los términos difusivos de acoplamiento  $\Theta_\sigma$  en el controlar dinámico para  $\sigma$ -ésimo sistema esclavo:

$$\Theta_\sigma = \sum_{j=1}^{r_\rho} a_{\zeta(\sigma, \rho), j}^\rho \left[ \kappa_1 \left( \xi_{\ell_n(\sigma)+1}^{n_{s\sigma}} - \xi_{\ell(\rho, j)+1}^{n_{s\vartheta(\rho, j)}} \right) + \dots + \kappa_{n_{m_\rho}} \left( \xi_{\ell_n(\sigma)+n_{s\sigma}}^{n_{s\sigma}} - \xi_{\ell(\rho, j)+n_{s\vartheta(\rho, j)}}^{n_{s\vartheta(\rho, j)}} \right) \right]$$

con  $\ell_n(\sigma) = \sum_{l=1}^\sigma n_{s_{l-1}}$ ,  $\ell(\rho, j) = \sum_{l=1}^{\vartheta(\rho, j)} n_{s_{l-1}}$ ,  $\vartheta(\rho, j) = j + r_{\rho-1}$ ,  $\zeta(\sigma, \rho) = \sigma - \sum_{l=1}^\rho r_{l-1}$ ,  $1 \leq \zeta(\sigma, \rho) \leq r_\rho$ ,  $n_{s_0} = r_0 = 0$  y ponderaciones escalares  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n_{m_\rho}} > 0$ .

La interacción  $\mathcal{G}_{r_\rho}$  se considera invariante y fija en el tiempo. De la incorporación de estos elementos, se obtiene a continuación el siguiente resultado:

**Teorema 7.** *Considere que los sistemas (4.6) y (4.7) pueden llevarse a su FCOGMF con interacción compleja  $\Theta_\sigma$  para el  $\sigma$ -ésimo sistema esclavo, entonces el  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_m - \xi_s\| = 0$ , donde  $\xi_m$  y  $\xi_s$ , respectivamente, son las trayectorias en el espacios transformado de las familias de sistemas maestro y esclavo.*

**Prueba 11.** *Sin pérdida de generalidad considere  $u_{m_\mu} = 0$ . Entonces, el conjunto de maestros tiene la siguiente familia de salidas:*

$$y_{m_j} = \sum_{i=n-n_j+1}^n \gamma_i x_{i, m_j} = \xi_i^{n_{m_j}},$$

donde  $\gamma_i$ , ( $i = l$ ) son cantidades diferenciales de  $u$  y un número finito de sus derivadas. Las salidas para la familia de sistemas esclavos son:

$$y_{s_j} = \sum_{i=n-n_j+1}^n \gamma_i x_{i, s_j} + \sum_k \beta_k u_{k, m_j} = \xi_i^{n_{s_j}},$$



donde  $\gamma_i$ , ( $i = l$ ),  $\beta_k$  son cantidades diferenciales de  $u$  y un número finito de sus derivadas. Y en consecuencia se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{m_1}} &= \xi_{i+1}^{n_{m_1}}, \quad 1 \leq i \leq n_{m_1} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{m_1}}^{n_{m_1}} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{n_{m_1}}, \dots, \xi_{n_{m_1}}^{n_{m_1}}) \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{m_2}} &= \xi_{i+1}^{n_{m_2}}, \quad n_{m_1} + 1 \leq i \leq n_{m_1} + n_{m_2} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{m_1}+n_{m_2}}^{n_{m_2}} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_{n_{m_1}+1}^{n_{m_2}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+n_{m_2}}^{n_{m_2}}) \\
&\vdots \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{m_\rho}} &= \xi_{i+1}^{n_{m_\rho}}, \quad n_{m_1} + \dots + n_{m_{\rho-1}} + 1 \leq i \leq n_{m_1} + \dots + n_{m_\rho} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_\rho}}^{n_{m_\rho}} &= -\mathcal{L}_{m_\rho}(\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{\rho-1}}+1}^{n_{m_\rho}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_\rho}}^{n_{m_\rho}}),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

con  $1 \leq \rho \leq q \leq p$ . Ahora, defínase el siguiente sistema extendido que representa a una familia de  $r_\rho$  sistemas esclavos, y una cadena de integradores de orden fraccionario dada con una familia de realimentaciones dinámicas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{s_1}} &= \xi_{i+1}^{n_{s_1}}, \quad 1 \leq i \leq n_{s_1} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{s_1}}^{n_{s_1}} &= -\mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{n_{s_1}}, \dots, \xi_{n_{s_1}}^{n_{s_1}}, u_{s_1}, u_{s_1}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_1}-1]\alpha} u_{s_1}) + \mathcal{D}^{\gamma_{s_1}\alpha} u_{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_i^{n_{s_1}} &= u_{i+1}^{n_{s_1}}, \quad 1 \leq i \leq \gamma_{s_1} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha u_{\gamma_{s_1}}^{n_{s_1}} &= -\mathcal{L}_{m_\rho}(\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{\rho-1}}+1}^{n_{m_\rho}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_\rho}}^{n_{m_\rho}}) + \\
&\quad + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{n_{s_1}}, \dots, \xi_{n_{s_1}}^{n_{s_1}}, u_{s_1}, u_{s_1}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_1}-1]\alpha} u_{s_1}) + K_1(\xi^{n_{m_\rho}} - \xi^{n_{s_1}}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r_\rho} a_{1j}^\rho \left[ \kappa_1 \left( \xi_1^{n_{s_1}} - \xi_{\ell(\rho,j)+1}^{n_{s_\vartheta(\rho,j)}} \right) + \dots + \kappa_{n_{m_\rho}} \left( \xi_{n_{s_1}}^{n_{s_1}} - \xi_{\ell(\rho,j)+n_{s_\vartheta(\rho,j)}}^{n_{s_\vartheta(\rho,j)}} \right) \right] \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{s_2}} &= \xi_{i+1}^{n_{s_2}}, \quad n_{s_1} + 1 \leq i \leq n_{s_1} + n_{s_2} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}} &= -\mathcal{L}_{s_2}(\xi_{n_{s_1}+1}^{n_{s_2}}, \dots, \xi_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}}, u_{s_2}, u_{s_2}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_2}-1]\alpha} u_{s_2}) + \mathcal{D}^{\gamma_{s_2}\alpha} u_{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_i^{n_{s_2}} &= u_{i+1}^{n_{s_2}}, \quad \gamma_{s_1} + 1 \leq i \leq \gamma_{s_1} + \gamma_{s_2} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha u_{\gamma_{s_1}+\gamma_{s_2}}^{n_{s_2}} &= -\mathcal{L}_{m_\rho}(\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{\rho-1}}+1}^{n_{m_\rho}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_\rho}}^{n_{m_\rho}}) + \\
&\quad + \mathcal{L}_{s_2}(\xi_{n_{s_1}+1}^{n_{s_2}}, \dots, \xi_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}}, u_{s_2}, u_{s_2}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_2}-1]\alpha} u_{s_2}) + K_2(\xi^{n_{m_\rho}} - \xi^{n_{s_2}}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r_\rho} a_{2j}^\rho \left[ \kappa_1 \left( \xi_{n_{s_1}+1}^{n_{s_2}} - \xi_{\ell(\rho,j)+1}^{n_{s_\vartheta(\rho,j)}} \right) + \dots + \kappa_{n_{m_\rho}} \left( \xi_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}} - \xi_{\ell(\rho,j)+n_{s_\vartheta(\rho,j)}}^{n_{s_\vartheta(\rho,j)}} \right) \right] \\
&\quad \vdots \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{s_{r_\rho}}} &= \xi_{i+1}^{n_{s_{r_\rho}}}, \quad n_{s_1} + \dots + n_{s_{r_\rho-1}} + 1 \leq i \leq n_{s_1} + \dots + n_{s_{r_\rho}} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{r_\rho}}}^{n_{s_{r_\rho}}} &= -\mathcal{L}_{s_{r_\rho}}(\xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{r_\rho-1}}+1}^{n_{s_{r_\rho}}}, \dots, \xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{r_\rho}}}^{n_{s_{r_\rho}}}, u_{s_{r_\rho}}, u_{s_{r_\rho}}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_{r_\rho}}-1]\alpha} u_{s_{r_\rho}}) + \mathcal{D}^{\gamma_{s_{r_\rho}}\alpha} u_{s_{r_\rho}} \\
\mathcal{D}^\alpha u_i^{n_{s_{r_\rho}}} &= u_{i+1}^{n_{s_{r_\rho}}}, \quad \gamma_{s_1} + \dots + \gamma_{s_{r_\rho-1}} + 1 \leq i \leq \gamma_{s_1} + \dots + \gamma_{s_{r_\rho}} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha u_{\gamma_{s_1}+\dots+\gamma_{s_{r_\rho}}}^{n_{s_{r_\rho}}} &= -\mathcal{L}_{m_\rho}(\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{\rho-1}}+1}^{n_{m_\rho}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_\rho}}^{n_{m_\rho}}) + \\
&\quad + \mathcal{L}_{s_{r_\rho}}(\xi^{n_{s_{r_\rho}}}, u_{s_{r_\rho}}, u_{s_{r_\rho}}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s_{r_\rho}}-1]\alpha} u_{s_{r_\rho}}) + K_{r_\rho}(\xi^{n_{m_\rho}} - \xi^{n_{s_{r_\rho}}}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r_\rho} a_{r_\rho j}^\rho \left[ \kappa_1 \left( \xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{r_\rho-1}}+1}^{n_{s_{r_\rho}}} - \xi_{\ell(\rho,j)+1}^{n_{s_\vartheta(\rho,j)}} \right) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{n_{m_\rho}} \left( \xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{r_\rho}}}^{n_{s_{r_\rho}}} - \xi_{\ell(\rho,j)+n_{s_\vartheta(\rho,j)}}^{n_{s_\vartheta(\rho,j)}} \right) \right]
\end{aligned}$$

O en una forma compacta general tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_i^{n_{s\sigma}} &= \xi_{i+1}^{n_{s\sigma}}, \quad \ell_n(\sigma) + 1 \leq i \leq \ell_n(\sigma) + n_{s\sigma} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{\ell_n(\sigma)+n_{s\sigma}}^{n_{s\sigma}} &= -\mathcal{L}_{s\sigma}(\xi_{\ell_n(\sigma)+1}^{n_{s\sigma}}, \dots, \xi_{\ell_n(\sigma)+n_{s\sigma}}^{n_{s\sigma}}, u_{s\sigma}, u_{s\sigma}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s\sigma}-1]\alpha} u_{s\sigma}) + \mathcal{D}^{\gamma_{s\sigma}\alpha} u_{s\sigma} \\
\mathcal{D}^\alpha u_i^{n_{s\sigma}} &= u_{i+1}^{n_{s\sigma}}, \quad \ell_\gamma(\sigma) + 1 \leq i \leq \ell_\gamma(\sigma) + \gamma_{s\sigma} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha u_{\ell_\gamma(\sigma)+\gamma_{s\sigma}}^{n_{s\sigma}} &= -\mathcal{L}_{m\rho}(\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{\rho-1}}+1}^{n_{m\rho}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_\rho}}^{n_{m\rho}}) + \\
&\quad + \mathcal{L}_{s\sigma}(\xi^{n_{s\sigma}}, u_{s\sigma}, u_{s\sigma}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s\sigma}-1]\alpha} u_{s\sigma}) + K_\sigma(\xi^{n_{m\rho}} - \xi^{n_{s\sigma}}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r_\rho} a_{\varsigma(\sigma,\rho),j}^\rho \left[ \kappa_1 \left( \xi_{\ell_n(\sigma)+1}^{n_{s\sigma}} - \xi_{\ell(\rho,j)+1}^{n_{s\vartheta(\rho,j)}} \right) + \dots + \kappa_{n_{m\rho}} \left( \xi_{\ell_n(\sigma)+n_{s\sigma}}^{n_{s\sigma}} - \xi_{\ell(\rho,j)+n_{s\vartheta(\rho,j)}}^{n_{s\vartheta(\rho,j)}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

con  $\ell_n(\sigma) = \sum_{l=1}^\sigma n_{s_{l-1}}$ ,  $\ell_\gamma(\sigma) = \sum_{l=1}^\sigma \gamma_{s_{l-1}}$ ,  $\ell(\rho, j) = \sum_{l=1}^{\vartheta(\rho, j)} n_{s_{l-1}}$ ,  $\vartheta(\rho, j) = j + r_{\rho-1}$ ,  $\varsigma(\sigma, \rho) = \sigma - \sum_{l=1}^\rho r_{l-1}$ ,  $1 \leq \varsigma(\sigma, \rho) \leq r_\rho$ ,  $n_{s_0} = r_0 = 0$ . Defínase las siguientes señales de control como las cadenas de integradores  $u_1^{n_{s\sigma}} = u_{s\sigma}$ ,  $u_2^{n_{s\sigma}} = \mathcal{D}^\alpha u_{s\sigma}$ , ...,  $u_{\alpha s\sigma}^{n_{s\sigma}} = \mathcal{D}^{[\gamma_{s\sigma}-1]\alpha} u_{s\sigma}$ , sean  $\xi^{n_{s\sigma}} = [\xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{\sigma-1}}+1}^{n_{s\sigma}}, \dots, \xi_{n_{s_1}+\dots+n_{s_\sigma}}^{n_{s\sigma}}]^T$  y  $\xi^{n_{m\rho}} = [\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{\rho-1}}+1}^{n_{m\rho}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_\rho}}^{n_{m\rho}}]^T$ , respectivamente, los estados de los sistemas maestros y esclavos. Y denote por  $K_\sigma = [k_{1,\sigma}, \dots, k_{n_\sigma,\sigma}]$  al vector de ganancias con entradas escalares  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n_{m\rho}} > 0$ .

Defínase el error de sincronización para cada estado de cada sistema esclavo como:

$$e_{\xi_i}^{n_{s\sigma}} := \xi_{\hat{\ell}_n(\rho)+i-\ell_n(\sigma)}^{n_{m\rho}} - \xi_i^{n_{s\sigma}} \tag{4.16}$$

con  $\ell_n(\sigma) + 1 \leq i \leq \ell_n(\sigma) + n_{s\sigma}$ ,  $\hat{\ell}_n = \sum_{l=1}^\rho n_{m_{l-1}}$ ,  $n_{m_0} = 0$ . De las ecuaciones (4.14) y (4.15) no es difícil ver que la dinámica de orden fraccionario del error de sincronización (4.16) es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_i}^{n_{s\sigma}} &= e_{\xi_{i+1}}^{n_{s\sigma}}, \quad \ell_n(\sigma) + 1 \leq i \leq \ell(\sigma) + n_{s\sigma} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{\ell_n(\sigma)+n_{s\sigma}}}^{n_{s\sigma}} &= -K_\sigma e_\xi^{n_{s\sigma}} + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r_\rho} a_{\varsigma(\sigma,\rho),j}^\rho \left[ \kappa_1 \left( e_{\xi_{\ell_n(\sigma)+1}}^{n_{s\sigma}} - e_{\xi_{\ell(\rho,j)+1}}^{n_{s\vartheta(\rho,j)}} \right) + \dots + \kappa_{n_{m\rho}} \left( e_{\xi_{\ell_n(\sigma)+n_{s\sigma}}}^{n_{s\sigma}} - e_{\xi_{\ell(\rho,j)+n_{s\vartheta(\rho,j)}}}^{n_{s\vartheta(\rho,j)}} \right) \right] \\
\mathcal{D}^\alpha u_i^{n_{s\sigma}} &= u_{i+1}^{n_{s\sigma}}, \quad \ell_\gamma(\sigma) + 1 \leq i \leq \ell_\gamma(\sigma) + \gamma_{s\sigma} - 1 \\
\mathcal{D}^\alpha u_{\ell_\gamma(\sigma)+\gamma_{s\sigma}}^{n_{s\sigma}} &= -\mathcal{L}_{m\rho}(\xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{\rho-1}}+1}^{n_{m\rho}}, \dots, \xi_{n_{m_1}+\dots+n_{m_\rho}}^{n_{m\rho}}) + \\
&\quad + \mathcal{L}_{s\sigma}(\xi^{n_{s\sigma}}, u_{s\sigma}, u_{s\sigma}^{(\alpha)}, \dots, \mathcal{D}^{[\gamma_{s\sigma}-1]\alpha} u_{s\sigma}) + K_\sigma(\xi^{n_{m\rho}} - \xi^{n_{s\sigma}}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r_\rho} a_{\varsigma(\sigma,\rho),j}^\rho \left[ \kappa_1 \left( \xi_{\ell_n(\sigma)+1}^{n_{s\sigma}} - \xi_{\ell(\rho,j)+1}^{n_{s\vartheta(\rho,j)}} \right) + \dots + \kappa_{n_{m\rho}} \left( \xi_{\ell_n(\sigma)+n_{s\sigma}}^{n_{s\sigma}} - \xi_{\ell(\rho,j)+n_{s\vartheta(\rho,j)}}^{n_{s\vartheta(\rho,j)}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.17}$$

donde  $e_\xi^{n_{s\sigma}} = [e_{\xi_{\ell_n(\sigma)+1}}^{n_{s\sigma}}, \dots, e_{\xi_{\ell_n(\sigma)+n_{s\sigma}}}^{n_{s\sigma}}]^T$ . Por otra parte, defínase la matriz  $B_\rho$ :

$$B_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \dots & \kappa_{n_{m\rho}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{m\rho} \times n_{m\rho}}$$

y considere la matriz laplaciana  $L_{r_\rho}$ . Entonces para el grupo de  $r_\rho$  sistemas esclavos, el error de sincronización en lazo cerrado es:

$$\mathcal{D}^\alpha e_\xi^{r_\rho} = \underbrace{(-L_{r_\rho} \otimes B_\rho + \text{diag}(\bar{\mathcal{A}}_{\vartheta(\rho,1)}, \dots, \bar{\mathcal{A}}_{\vartheta(\rho,r_\rho)}))}_{\Xi_\rho} e_\xi^{r_\rho}$$

con  $e_\xi^{r_\rho} = [e_\xi^{n_{s\vartheta(\rho,1)}}, \dots, e_\xi^{n_{s\vartheta(\rho,r_\rho)}}]^T$ . Luego para el sistema completo (los  $q$  grupos de esclavos en la red) tenemos que:

$$\mathcal{D}^\alpha e_\xi = (-\mathfrak{L} + \Xi) e_\xi, \quad (4.18)$$

donde  $\mathfrak{L} = \text{diag}(L_{r_1} \otimes B_1, \dots, L_{r_q} \otimes B_q)$  y  $\Xi = \text{diag}(\Xi_1, \dots, \Xi_q)$ .

Del Teorema 11, el sistema (4.18) es asintóticamente estable si los valores propios de la matriz  $(-\mathfrak{L} + \Xi)$  con ganancia de control  $(k_{1,\sigma}, \dots, k_{n_\sigma,\sigma})$  y escalares  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n_{m\rho}} > 0$  se eligen de tal manera que

$$|\arg(\lambda_i(\Xi_\rho))| > \frac{\pi}{2} > \alpha \frac{\pi}{2}$$

Es inmediato del Corolario 2 que  $\|X_m - H_{ms}(X_s)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Observación 18.** Observe que no existe ninguna restricción en la interacción compleja entre los sistemas esclavo. Esto significa que la sincronización generalizada se cumple para cualquier grafo  $\mathcal{G}_{r_\rho}$  dirigido o no dirigido, para cualquier matriz de adyacencia  $\mathcal{A}_{r_\rho}$  y sistemas no necesariamente idénticos. También cuando  $\mathcal{A}_{r_\rho} = 0_{r_\rho \times r_\rho}$  se recupera el Teorema 6.

**Observación 19.** La interacción compleja dada en [148] está contenida en el teorema anterior. Otra diferencia importante radica en el uso de controladores dinámicos para sincronizar los múltiples grupos de sistemas esclavos con su respectivo sistema maestro.

**Observación 20.** La metodología propuesta no se restringe a solo sistemas liouwillianos, también puede ser el caso de sistemas que satisfacen la Definición 16.

## 4.5. Algunos ejemplos numéricos

En esta sección se presentan simulaciones numéricas<sup>3</sup> de la metodología propuesta. Específicamente se muestran cuatro configuraciones distintas para combinaciones de los sistemas caóticos de orden fraccionario de Rössler, Arneodo y Chua-Harley. La aplicación de la metodología también se realiza para sistemas no necesariamente Liouvillianos como se muestra en los dos últimos ejemplos que involucran al sistema de Rössler. El primer ejemplo considera el caso simple de SG para sistemas de orden fraccionario. El segundo ejemplo considera el caso de un maestro con dos esclavos donde se aprecia la SC y SG. El tercer ejemplo consiste en el caso de dos familias diferentes de sistemas esclavos con dos sistemas maestros. Y el ejemplo final muestra el caso interesante de interacción compleja entre sistemas esclavos con dos maestros.

### 4.5.1. Ejemplo 3

Considérese la configuración unidireccional conformada por los sistemas de Arneodo y Chua-Hartley, respectivamente, como maestro y esclavo (véase Figura 4.3. El objetivo es mostrar la SG de sistemas de orden fraccionario conmensurado; y la propiedad de observabilidad algebraica para sistemas de Liouville (OALF).

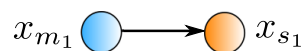


Figura 4.3: Ejemplo 3: SG de sistemas de orden fraccionario: Los  $x_{m_1}$  y  $x_{s_1}$ , respectivamente, denotan a los sistemas maestro y esclavo.

Primero, sea el sistema maestro (Sistema Arneodo):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha x_1^{m_1} &= x_2^{m_1}, \\ \mathcal{D}^\alpha x_2^{m_1} &= x_3^{m_1}, \\ \mathcal{D}^\alpha x_3^{m_1} &= -\beta_1 x_1^{m_1} - \beta_2 x_2^{m_1} - \beta_3 x_3^{m_1} + \beta_4 x_1^{m_1 3}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Suponga  $y_{m_1} = x_2^{m_1}$  como la salida, entonces los estados del sistema (4.19) satisfacen las

---

<sup>3</sup>La solución numérica se obtiene mediante el algoritmo de Adams-Bashford-Moulton modificado de un solo paso [30, 31].

siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha x_1^{m_1} &= y_{m_1}, \\ x_2^{m_1} &= y_{m_1} \\ x_3 &= y_{m_1}^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

Note que el estado  $x_1^{m_1}$  satisface la condición OALF. De modo que  $x_1^{m_1}$  puede escribirse en función de las integrales de orden fraccionario de  $x_2^{m_1}$ :

$$\begin{aligned}x_1^{m_1} &= I^\alpha y_{m_1}, \\ x_2^{m_1} &= y_{m_1}, \\ x_3^{m_1} &= y_{m_1}^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema (4.19) es un sistema de Liouville de orden fraccionario. Por otra parte, el sistema esclavo:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha x_1^{s_1} &= \rho \left( x_2^{s_1} + \frac{x_1^{s_1} - 2x_1^{s_1^3}}{7} \right), \\ \mathcal{D}^\alpha x_2^{s_1} &= x_1^{s_1} - x_2^{s_1} + x_3^{s_1}, \\ \mathcal{D}^\alpha x_3^{s_1} &= -\beta x_2^{s_1},\end{aligned}\tag{4.20}$$

con  $y_{s_1} = x_2^{s_1}$  como salida, no todo el estado cumple la condición de observabilidad algebraica. A saber, solo el estado  $x_2^{s_1}$  del sistema (4.20) está en función de la salida:

$$\begin{aligned}x_1^{s_1} &= y_{s_1} + y_{s_1}^{(\alpha)} - x_3^{s_1} \\ x_2^{s_1} &= y_{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha x_3^{s_1} &= -\beta y_{s_1}\end{aligned}$$

Entonces, los estados  $x_1^{s_1}$  y  $x_3^{s_1}$  satisfacen la condición OALF. Elíjase  $\bar{y}_{s_1} = I^\alpha y_{s_1} + u_1^{s_1}$  tal que  $x_1^{s_1}$  y  $x_3^{s_1}$  puedan obtenerse en función de integrales de  $x_2^{s_1}$ , esto es:

$$\begin{aligned}x_1^{s_1} &= y_{s_1} + y_{s_1}^{(\alpha)} + \beta I^\alpha y_{s_1} - u_1^{s_1} \\ x_2^{s_1} &= y_{s_1} \\ x_3^{s_1} &= -\beta I^\alpha y_{s_1} + u_1^{s_1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema (4.20) es un sistema de Liouville de orden fraccionario. Ahora, considere los sistemas (4.19) y (4.20), respectivamente, con la familia de salidas dada por

las expresiones:

$$\bar{y}_{m_1} = I^\alpha y_{m_1} = x_1^{m_1}$$

y

$$\bar{y}_{s_1} = I^\alpha y_{s_1} + u_1^{s_1} = -\frac{1}{\beta}x_3^{s_1} + u_1^{s_1}$$

De esta familia de salidas, las siguientes transformaciones se cumplen para el sistema maestro:

$$\xi_m = \begin{pmatrix} \xi_1^{m_1} \\ \xi_2^{m_1} \\ \xi_3^{m_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^\alpha y_{m_1} \\ y_{m_1} \\ \mathcal{D}^\alpha y_{m_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{m_1} \\ x_2^{m_1} \\ x_3^{m_1} \end{pmatrix} = \Psi_m(X_m)$$

con su inversa:

$$X_m = \begin{pmatrix} x_1^{m_1} \\ x_2^{m_1} \\ x_3^{m_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^{m_1} \\ \xi_2^{m_1} \\ \xi_3^{m_1} \end{pmatrix} = \Psi_m^{-1}(\xi_m)$$

**Observación 21.** De acuerdo al Corolario 2, esta última transformación debe cumplir con lo siguiente:  $\Psi_m^{-1}$  es continuamente diferenciable  $[\partial/\partial\xi_m]\Psi_m^{-1}(\xi_m) = I_{3 \times 3}$ , además

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\xi_m} \Psi_m^{-1}(\xi_m) \right\|_\infty = 1,$$

es decir, 1 es la constante de Lipschitz de  $\Psi_m^{-1}$ .

Y para el sistema esclavo corresponden:

$$\xi_s = \begin{pmatrix} \xi_1^{s_1} \\ \xi_2^{s_1} \\ \xi_3^{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^\alpha y_{s_1} + u_1^{s_1} \\ y_{s_1} + u_2^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha y_{s_1} + u_3^{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta}x_3^{s_1} + u_1^{s_1} \\ x_2^{s_1} + u_2^{s_1} \\ x_1^{s_1} - x_2^{s_1} + x_3^{s_1} + u_3^{s_1} \end{pmatrix} = \Phi_s(X_s)$$

con su inversa:

$$X_s = \begin{pmatrix} x_1^{s_1} \\ x_2^{s_1} \\ x_3^{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1}) + \xi_2^{s_1} - u_2^{s_1} + \xi_3^{s_1} - u_3^{s_1} \\ \xi_2^{s_1} - u_2^{s_1} \\ -\beta(\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1}) \end{pmatrix} = \Phi_s^{-1}(\xi_s)$$

Entonces, el maestro en coordenadas transformadas está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha \xi_1^{m_1} &= \xi_2^{m_1} \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_2^{m_1} &= \xi_3^{m_1} \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_3^{m_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}), \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{L}_{m_1}(\cdot) = \beta_1 (\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1}) + \beta_2 (\xi_2^{s_1} - u_2^{s_1}) + \beta_3 (\xi_3^{s_1} - u_3^{s_1}) - \beta_4 (\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1})^3$$

y el sistema maestro en coordenadas transformadas está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha \xi_1^{s_1} &= \xi_2^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_2^{s_1} &= \xi_3^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha \xi_3^{s_1} &= -\mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) + \bar{u}_{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_1^{s_1} &= u_2^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_2^{s_1} &= u_3^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} &= \bar{u}_{s_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{s_1}(\cdot) &= -\frac{\rho\beta}{7} (\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1}) - \left(\frac{8\rho - 7\beta}{7}\right) (\xi_2^{s_1} - u_2^{s_1}) - \left(\frac{\rho - 7}{7}\right) (\xi_3^{s_1} - u_3^{s_1}) \\ &\quad + \frac{2\rho}{7} (\beta(\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1}) + (\xi_2^{s_1} - u_2^{s_1}) + (\xi_3^{s_1} - u_3^{s_1}))^3 \end{aligned}$$

Por otra parte, la dinámica en lazo cerrado del error de sincronización  $e_\xi = \xi_m - \xi_s$  corresponde al siguiente sistema aumentado:



$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_1}^{s_1} &= e_{\xi_2}^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_2}^{s_1} &= e_{\xi_3}^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_3}^{s_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) - \mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_1^{s_1} &= u_2^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_2^{s_1} &= u_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) + k_{s_1} e_\xi^{s_1}
\end{aligned}$$

luego se tiene que  $\mathcal{D}^\alpha e_\xi = (\mathcal{A} - \mathcal{K}) e_\xi$ . Entonces el error de sincronización converge asintóticamente a cero si la matriz  $\mathcal{A} - \mathcal{K} = \bar{\mathcal{A}}_1$  es Hurwitz con

$$\bar{\mathcal{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{1,1} & -k_{2,1} & -k_{3,1} \end{bmatrix}$$

y eligiendo  $k_{1,1}, k_{1,3} > 0$  y  $k_{1,2} > k_{1,1}/k_{1,3}$ . Los parámetros del maestro y esclavo son, respectivamente,  $\rho = 12.75$ ,  $\beta = 100/7$ ,  $\beta_1 = -5.5$ ,  $\beta_2 = 3.5$ ,  $\beta_3 = 0.8$ ,  $\beta_4 = -1$ , con orden conmensurado  $\alpha = 0.92$  [98], condiciones iniciales  $x_{m_1}(0) = [-0.20 \ 0.35 \ 0.20]^T$ ,  $x_{s_1}(0) = [-0.58 \ -0.01 \ 0.30]^T$  que garantizan el comportamiento caótico y  $k_{s,1} = [10 \ 10 \ 10]$ .

En la Figura 4.4 se muestran los resultados de la SGF de los sistemas Arneodo y Chua-Hartley en la configuración maestro-esclavo. Los pares de figuras son los mismos dado que el sistema maestro está en forma canónica (*i.e.* la transformación  $\Phi_m(\cdot)$  es la identidad). Esto simplifica mucho la obtención del mapeo que define la variedad de sincronización, a saber

$$H_{ms}(X_s) = \Psi_m^{-1} \circ \Psi_s(X_s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta} x_3^{s_1} + u_1^{s_1} \\ x_2^{s_1} + u_2^{s_2} \\ x_1^{s_1} - x_2^{s_1} + x_3^{s_1} + u_3^{s_3} \end{pmatrix} = \Psi_s(X_s). \quad (4.21)$$

Note que la estructura de este mapeo se obtiene directamente de  $\Phi_s(\cdot)$ , esto significa que las trayectorias en coordenadas transformadas y originales son las mismas. Es claro que los errores de sincronización tienen un comportamiento asintótico al cero (véase Observación 21).

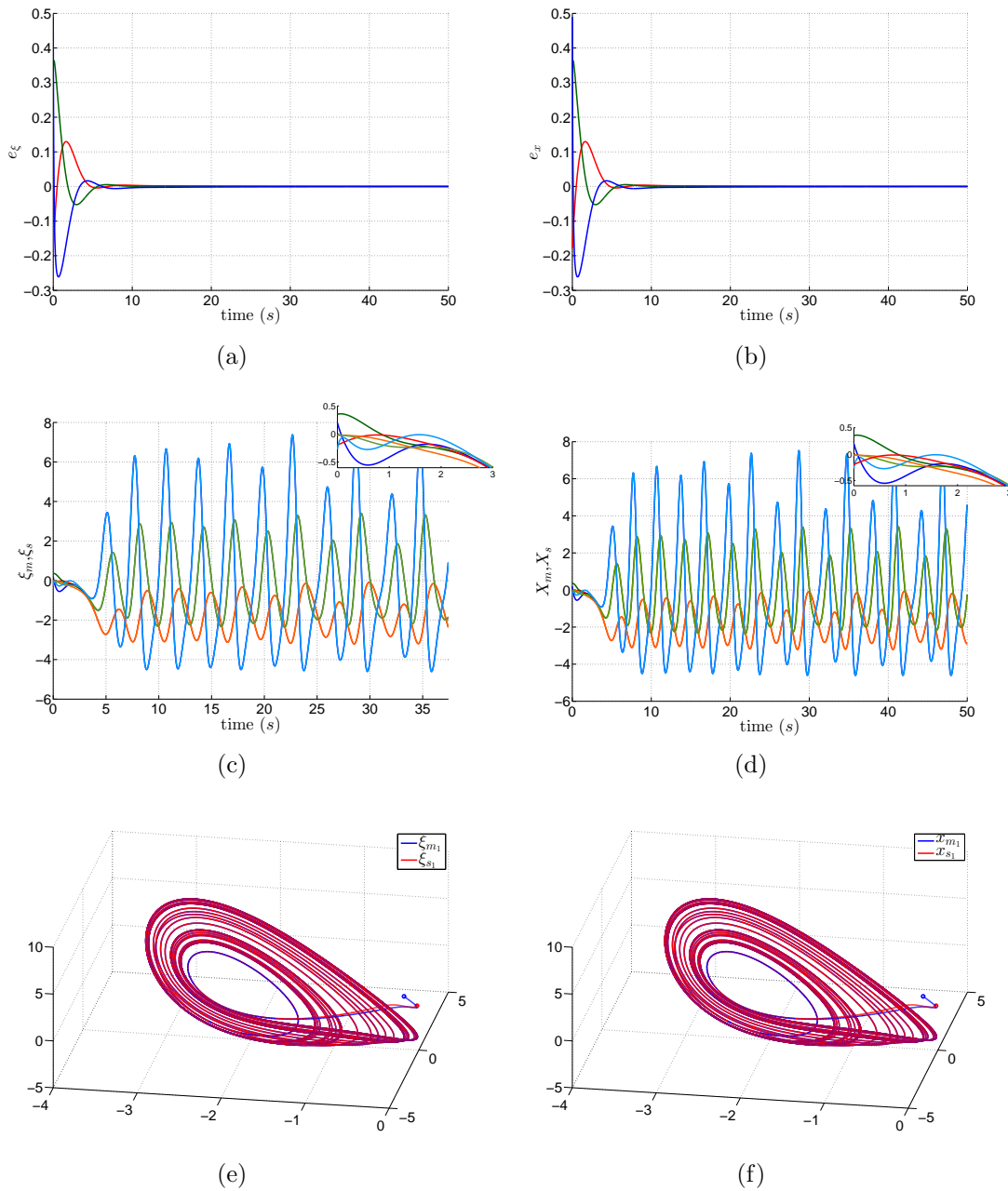


Figura 4.4: Ejemplo 3. SGF entre sistema Arneodo y Chua-Harley. En coordenadas transformadas y originales, respectivamente, se muestra: el error de sincronización (a)  $\xi_m - \xi_s$  y (b)  $X_m - H_{ms}(X_s)$ ; las trayectorias sincronizadas (c)  $\xi_m = \xi_s$  y (d)  $X_m = H_{ms}(X_s)$ ; y la sincronización de los atractores (sobrepuestos) (e)  $\xi_m, \xi_s$  y (f)  $X_m, H_{ms}(X_s)$ .

### 4.5.2. Ejemplo 4

Considere los sistemas Chua-Harley y Arneodo en la configuración ilustrada en la Figura 4.5. Los sistemas esclavos (Arneodo y Chua-Harley) están conectados a un solo sistema maestro (Chua-Harley). El objetivo es alcanzar el estado de SG y SC para estos sistemas de Liouville, y en consecuencia la MSGF.

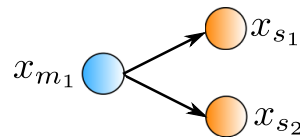


Figura 4.5: Ejemplo 4: SG y SC de sistemas de orden fraccionario. Configuración con un solo maestro  $x_{m_1}$  y dos esclavos  $x_{s_1}, x_{s_2}$ .

Considere al sistema maestro (Chua-Harley) como:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha x_1^{m_1} &= \rho \left( x_2^{m_1} + \frac{x_1^{m_1} - 2x_1^{m_1^3}}{7} \right) \\ \mathcal{D}^\alpha x_2^{m_1} &= x_1^{m_1} - x_2^{m_1} + x_3^{m_1} \\ \mathcal{D}^\alpha x_3^{m_1} &= -\beta x_2^{m_1}\end{aligned}\tag{4.22}$$

con  $y_{m_1} = x_2^{m_1}$  como salida. No es difícil ver que los estados del sistema (4.22) satisfacen las siguiente expresiones:

$$\begin{aligned}x_1^{m_1} &= y_{m_1} + y_{m_1}^{(\alpha)} - x_3^{m_1} \\ x_2^{m_1} &= y_{m_1} \\ \mathcal{D}^\alpha x_3^{m_1} &= -\beta y_{m_1}\end{aligned}$$

Ahora, los estados  $x_1^{m_1}$  y  $x_3^{m_1}$  satisfacen la condición de OALF. Entonces, es posible reescribir  $x_1^{m_1}$  y  $x_3^{m_1}$ , respectivamente en función de integrales fraccionarias de  $x_2^{m_1}$ :

$$\begin{aligned}x_1^{m_1} &= y_{m_1} + y_{m_1}^{(\alpha)} + \beta I^\alpha y_{m_1} \\ x_2^{m_1} &= y_{m_1} \\ x_3^{m_1} &= -\beta I^\alpha y_{m_1}\end{aligned}$$

por lo tanto el sistema (4.22) es un sistema de Liouville de orden fraccionario.

Por otra parte, considere al sistema maestro (4.22) y asuma las dinámicas correspon-

dientes a los sistemas esclavos como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha x_1^{s_1} &= x_2^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha x_2^{s_1} &= x_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha x_3^{s_1} &= -\beta_1 x_1^{s_1} - \beta_2 x_2^{s_1} - \beta_3 x_3^{s_1} + \beta_4 x_1^{s_1^3} \\
\mathcal{D}^\alpha x_4^{s_2} &= \rho \left( x_5^{s_2} + \frac{x_4^{s_2} - 2x_4^{s_2^3}}{7} \right) \\
\mathcal{D}^\alpha x_5^{s_2} &= x_4^{s_2} - x_5^{s_2} + x_6^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha x_6^{s_2} &= -\beta x_5^{s_2}
\end{aligned}$$

Considere la familia de salidas para el sistemas maestro y esclavos, respectivamente como sigue:

$$\bar{y}_{m_1} = I^\alpha y_{m_1} = -\frac{1}{\beta} x_3^{m_1}$$

y

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{s_1} &= I^\alpha y_{s_1} + u_1^{s_1} = x_1^{s_1} + u_1^{s_1} \\
\bar{y}_{s_2} &= I^\alpha y_{s_2} + u_4^{s_2} = -\frac{1}{\beta} x_6^{s_2} + u_4^{s_2}
\end{aligned}$$

A partir de esta familia podemos obtener la dinámica del sistema maestro en coordenadas transformadas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_1^{m_1} &= \xi_2^{m_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_2^{m_1} &= \xi_3^{m_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_3^{m_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}),
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{L}_{m_1}(\cdot) = -\frac{\rho\beta}{7}\xi_1^{m_1} - \left(\frac{8\rho-7\beta}{7}\right)\xi_2^{m_1} - \left(\frac{\rho-7}{7}\right)\xi_3^{m_1} + \frac{2\rho}{7}(\xi_1^{m_1} + \xi_2^{m_1} + \xi_3^{m_1})^3$$

Y la familia de sistemas esclavos en coordenadas transformadas está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_1^{s_1} &= \xi_2^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_2^{s_1} &= \xi_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_3^{s_1} &= -\mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) + \bar{u}_{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_1^{s_1} &= u_2^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_2^{s_1} &= u_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} &= \bar{u}_{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_4^{s_2} &= \xi_5^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_5^{s_2} &= \xi_6^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_6^{s_2} &= -\mathcal{L}_{s_2}(\xi_4^{s_2}, \xi_5^{s_2}, \xi_6^{s_2}, u_4^{s_2}, u_5^{s_2}, u_6^{s_2}) + \bar{u}_{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_4^{s_2} &= u_5^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_5^{s_2} &= u_6^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_6^{s_2} &= \bar{u}_{s_2},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{s_1}(\cdot) &= \beta_1(\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1}) + \beta_2(\xi_2^{s_1} - u_2^{s_1}) + \beta_3(\xi_3^{s_1} - u_3^{s_1}) - \beta_4(\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1})^3 \\
\mathcal{L}_{s_2}(\cdot) &= -\frac{\rho\beta}{7}(\xi_4^{s_2} - u_4^{s_2}) - \left(\frac{8\rho - 7\beta}{7}\right)(\xi_5^{s_2} - u_5^{s_2}) - \left(\frac{\rho - 7}{7}\right)(\xi_6^{s_2} - u_6^{s_2}) \\
&\quad + \frac{2\rho}{7}(\beta(\xi_4^{s_2} - u_4^{s_2}) + (\xi_5^{s_2} - u_5^{s_2}) + (\xi_6^{s_2} - u_6^{s_2}))^3
\end{aligned}$$

**Observación 22.** Para tratar el problema, la cantidad de sistemas maestros se extiende mediante maestros virtuales que tienen la misma dinámica y condiciones iniciales del sistema maestro asociado con sus sistemas esclavos correspondientes (véase Figura 4.1).

Note que las transformaciones  $\Psi_m$  y  $\Psi_s$ , respectivamente, son

$$\xi_m = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta}x_3^{m_1} \\ x_2^{m_1} \\ x_1^{m_1} - x_2^{m_1} + x_3^{m_1} \\ -\frac{1}{\beta}x_6^{m_2} \\ x_5^{m_2} \\ x_4^{m_2} - x_5^{m_2} + x_6^{m_2} \end{pmatrix} =: \Psi_m(X_m), \quad \xi_s = \begin{pmatrix} x_1^{s_1} + u_1^{s_1} \\ x_2^{s_1} + u_2^{s_1} \\ x_3^{s_1} + u_3^{s_1} \\ -\frac{1}{\beta}x_6^{s_2} + u_1^{s_2} \\ x_5^{s_2} + u_2^{s_2} \\ x_4^{s_2} - x_5^{s_2} + x_6^{s_2} + u_3^{s_2} \end{pmatrix} =: \Psi_s(X_s).$$

De lo anterior es fácil obtener  $\Psi_m^{-1}$  como sigue,

$$X_m = \begin{pmatrix} \xi_3^{m_1} + \xi_2^{m_1} + \beta\xi_1^{m_1} \\ \xi_2^{m_1} \\ -\beta\xi_1^{m_1} \\ \xi_6^{m_2} + \xi_5^{m_2} + \beta\xi_4^{m_2} \\ \xi_5^{m_2} \\ -\beta\xi_4^{m_2} \end{pmatrix} =: \Psi_m^{-1}(\xi_m)$$

**Observación 23.** De acuerdo al Corolario 2, note que  $\Psi_m^{-1}$  es diferenciablemente continua y además  $\|[\partial/\partial\xi_m]\Psi_m^{-1}(\xi_m)\|_\infty = \beta + 2$ , es decir,  $\beta + 2$  es la constante de Lipschitz de  $\Psi_m^{-1}$ .

Luego, la dinámica asociada al error de sincronización  $e_\xi = \xi_m - \xi_s$  es:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_1}^{s_1} &= e_{\xi_2}^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_2}^{s_1} &= e_{\xi_3}^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_3}^{s_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) - \mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_1^{s_1} &= u_2^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_2^{s_1} &= u_3^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) + k_{s_1} e_\xi^{s_1} \\ \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_4}^{s_2} &= e_{\xi_5}^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_5}^{s_2} &= e_{\xi_6}^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_6}^{s_2} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_2}(\xi_4^{s_2}, \xi_5^{s_2}, \xi_6^{s_2}, u_4^{s_2}, u_5^{s_2}, u_6^{s_2}) - \mathcal{D}^\alpha u_6^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha u_4^{s_2} &= u_5^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha u_5^{s_2} &= u_6^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha u_6^{s_2} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_2}(\xi_4^{s_2}, \xi_5^{s_2}, \xi_6^{s_2}, u_4^{s_2}, u_5^{s_2}, u_6^{s_2}) + k_{s_2} e_\xi^{s_2} \end{aligned}$$

No es difícil ver, después de algunas operaciones algebraicas, que  $\mathcal{D}^\alpha e_\xi = (\mathcal{A} - \mathcal{K})e_\xi$ . Entonces el error de sincronización converge asintóticamente a cero si la matriz  $\mathcal{A} - \mathcal{K} =$

$\text{diag}(\bar{\mathcal{A}}_1, \bar{\mathcal{A}}_2)$  es Hurwitz, donde

$$\bar{\mathcal{A}}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{1,j} & -k_{2,j} & -k_{3,j} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 2.$$

Tome los parámetros del Ejemplo 3, con condiciones iniciales  $x_{m_1}(0) = [-0.50 \ -0.07 \ 0.65]^T$ ,  $x_{s_1}(0) = [-0.20 \ 0.35 \ 0.20]^T$ ,  $x_{s_2}(0) = [-0.58 \ -0.01 \ 0.30]^T$  que aseguran el comportamiento caótico de los sistemas y  $k_{s,j} = [200 \ 200 \ 200]$  para  $1 \leq j \leq 2$ .

En la Figura 4.6 se observan los resultados de la MSGF de los sistemas Arneodo y Chua-Hartley en la configuración mostrada en la Figura 4.5. Es claro que los errores de sincronización tienen un comportamiento asintótico al cero (véase Observación 23). Por último, el mapeo que define la variedad de sincronización es:

$$H_{ms}(X_s) = \begin{pmatrix} \beta(x_1^{s_1} + u_1^{s_1}) + x_2^{s_1} + u_2^{s_1} + x_3^{s_1} + u_3^{s_1} \\ x_2^{s_1} + u_2^{s_1} \\ -\beta(x_1^{s_1} + u_1^{s_1}) \\ x_4^{s_2} + \beta u_4^{s_2} + u_5^{s_2} + u_6^{s_2} \\ x_5^{s_2} + u_5^{s_2} \\ -\beta(x_4^{s_2} - x_5^{s_2} + x_6^{s_2} + u_6^{s_2}) \end{pmatrix}$$

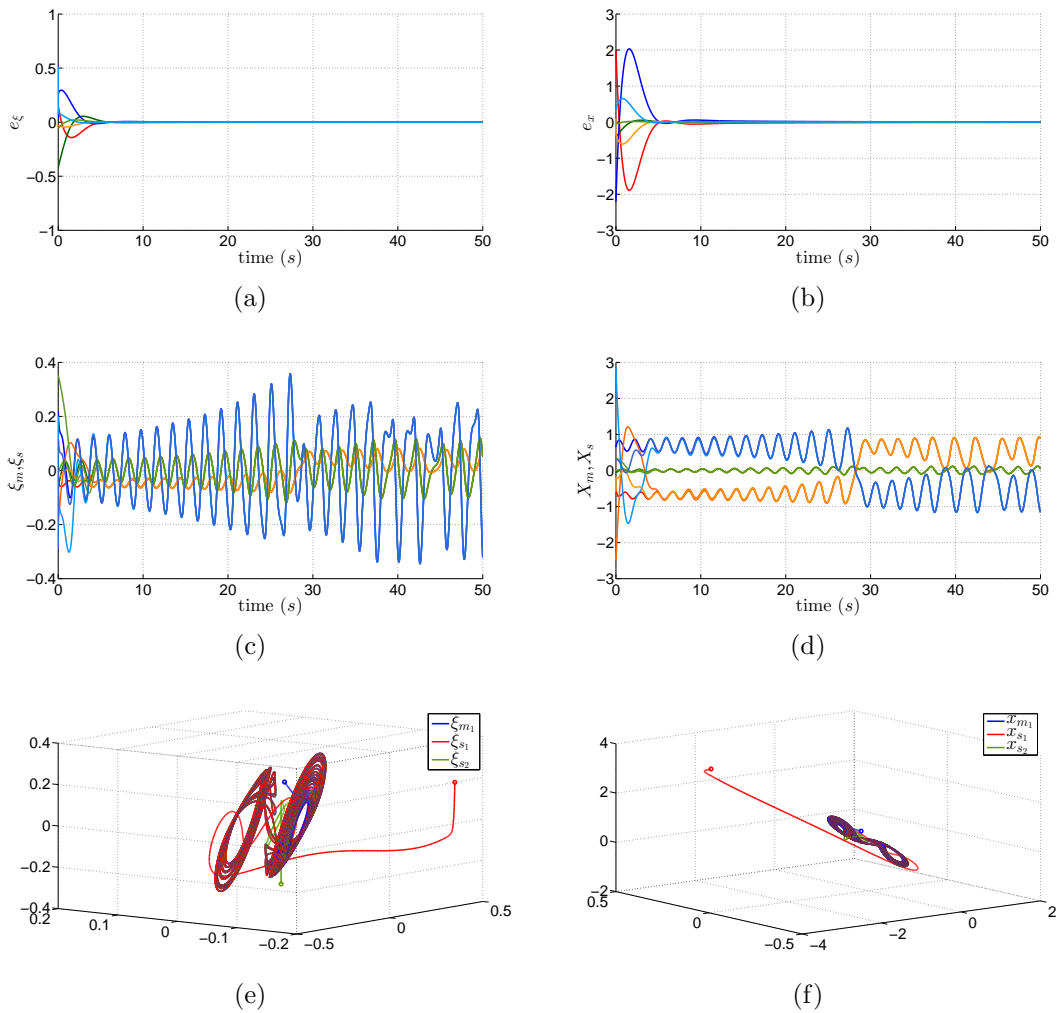


Figura 4.6: Ejemplo 4. MSGF en una red de sistemas de Arneodo y Chua-Harley. En coordenadas transformadas y originales, respectivamente, se muestra: el error de sincronización (a)  $\xi_m - \xi_s$  y (b)  $X_m - H_{ms}(X_s)$ ; las trayectorias sincronizadas (c)  $\xi_m = \xi_s$  y (d)  $X_m = H_{ms}(X_s)$ ; y la sincronización de los atractores (sobrepuestos) (e)  $\xi_m, \xi_s$  y (f)  $X_m, H_{ms}(X_s)$ .



### 4.5.3. Ejemplo 5

Asuma la configuración de dos sistemas maestros dada en la Figura 4.7. El objetivo es sincronizar las dos familias de sistemas esclavos con su respectivo sistema maestro.

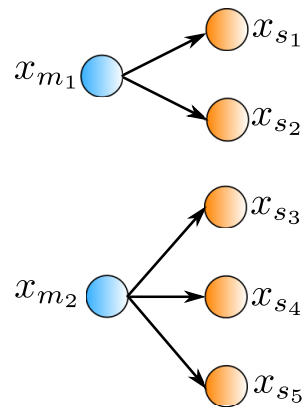


Figura 4.7: Ejemplo 5: MSG de sistemas de orden fraccionario. Configuración de los sistemas maestros  $x_{m_1}$ ,  $x_{m_2}$  y los sistemas esclavos  $x_{s_1}$ ,  $x_{s_2}$ ,  $x_{s_3}$ ,  $x_{s_4}$  y  $x_{s_5}$ .

El primer grupo se considera como el sistema dado en el Ejemplo 4. Para el segundo grupo, considere al sistema de Rössler como maestro y a los sistemas de Arneodo, Chua-Harley y Rössler como sus esclavos. La dinámica del segundo sistema maestros es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}^\alpha x_4^{m_2} &= -(x_5^{m_2} + x_6^{m_2}) \\
 \mathcal{D}^\alpha x_5^{m_2} &= x_4^{m_2} + ax_5^{m_2} \\
 \mathcal{D}^\alpha x_6^{m_2} &= b + x_6^{m_2}(x_4^{m_2} - c)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

con  $y_{m_2} = x_5^{m_2}$  como salida, el sistema (4.23) satisface las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 x_4^{m_2} &= \mathcal{D}^\alpha y_{m_2} + ay_{m_2} \\
 x_5^{m_2} &= y_{m_2} \\
 x_6^{m_2} &= -\mathcal{D}^{2\alpha} y_{m_1} - \mathcal{D}^\alpha y_{m_1} + y_{m_1}
 \end{aligned}$$

Es decir, el sistema (4.23) satisface la condición de OAF. Por otra parte, considere la familia de salidas para los maestro y esclavos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_{m_1} &= I^\alpha y_{m_1} = -\frac{1}{\beta} x_3^{m_1} \\
 \bar{y}_{m_2} &= y_{m_2} = x_5^{m_2}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{s_1} &= I^\alpha y_{s_1} + u_1^{s_1} = x_1^{s_1} + u_1^{s_1} \\
\bar{y}_{s_2} &= I^\alpha y_{s_2} + u_4^{s_2} = -\frac{1}{\beta} x_6^{s_2} + u_1^{s_2} \\
\bar{y}_{s_3} &= I^\alpha y_{s_3} + u_7^{s_3} = x_7^{s_3} + u_7^{s_3} \\
\bar{y}_{s_4} &= I^\alpha y_{s_4} + u_{10}^{s_4} = -\frac{1}{\beta} x_{12}^{s_4} + u_{10}^{s_4} \\
\bar{y}_{s_5} &= y_{s_5} + u_{13}^{s_5} = x_{14}^{s_5} + u_{13}^{s_5}
\end{aligned}$$

Entonces, la familia de sistemas maestros en coordenadas transformadas se expresa como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_1^{m_1} &= \xi_2^{m_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_2^{m_1} &= \xi_3^{m_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_3^{m_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_4^{m_2} &= \xi_5^{m_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_5^{m_2} &= \xi_6^{m_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_6^{m_2} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{m_1}(\cdot) &= -\frac{\rho\beta}{7}\xi_1^{m_1} - \left(\frac{8\rho-7\beta}{7}\right)\xi_2^{m_1} - \left(\frac{\rho-7}{7}\right)\xi_3^{m_1} + \frac{2\rho}{7}(\xi_1^{m_1} + \xi_2^{m_1} + \xi_3^{m_1})^3 \\
\mathcal{L}_{m_2}(\cdot) &= -(ac-1)\xi_5^{m_2} + c\xi_4^{m_2} + (c-a)\xi_6^{m_2} - (\xi_4^{m_2} - a\xi_5^{m_2} + \xi_6^{m_2})(\xi_5^{m_2} - a\xi_4^{m_2}) + b
\end{aligned}$$

y la familia de sistemas esclavos en coordenadas transformadas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_1^{s_1} &= \xi_2^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_2^{s_1} &= \xi_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_3^{s_1} &= -\mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) + \bar{u}_{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_1^{s_1} &= u_2^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_2^{s_1} &= u_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} &= \bar{u}_{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_4^{s_2} &= \xi_5^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_5^{s_2} &= \xi_6^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_6^{s_2} &= -\mathcal{L}_{s_2}(\xi_4^{s_2}, \xi_5^{s_2}, \xi_6^{s_2}, u_4^{s_2}, u_5^{s_2}, u_6^{s_2}) + \bar{u}_{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_4^{s_2} &= u_5^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_5^{s_2} &= u_6^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_6^{s_2} &= \bar{u}_{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_7^{s_3} &= \xi_8^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_8^{s_3} &= \xi_9^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_9^{s_3} &= -\mathcal{L}_{s_3}(\xi_7^{s_3}, \xi_8^{s_3}, \xi_9^{s_3}, u_7^{s_3}, u_8^{s_3}, u_9^{s_3}) + \bar{u}_{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha u_7^{s_3} &= u_8^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha u_8^{s_3} &= u_9^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha u_9^{s_3} &= \bar{u}_{s_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \xi_{10}^{s_4} &= \xi_{11}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{11}^{s_4} &= \xi_{12}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{12}^{s_4} &= -\mathcal{L}_{s_4}(\xi_{10}^{s_4}, \xi_{11}^{s_4}, \xi_{12}^{s_4}, u_{10}^{s_4}, u_{11}^{s_4}, u_{12}^{s_4}) + \bar{u}_{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{10}^{s_4} &= u_{11}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{11}^{s_4} &= u_{12}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{12}^{s_4} &= \bar{u}_{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{13}^{s_5} &= \xi_{14}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{14}^{s_5} &= \xi_{15}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha \xi_{15}^{s_5} &= -\mathcal{L}_{s_5}(\xi_{13}^{s_5}, \xi_{14}^{s_5}, \xi_{15}^{s_5}, u_{13}^{s_5}, u_{14}^{s_5}, u_{15}^{s_5}) + \bar{u}_{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{13}^{s_5} &= u_{14}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{14}^{s_5} &= u_{15}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{15}^{s_5} &= \bar{u}_{s_5},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{s_1}(\cdot) &= \beta_1 (\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1}) + \beta_2 (\xi_2^{s_1} - u_2^{s_1}) + \beta_3 (\xi_3^{s_1} - u_3^{s_1}) - \beta_4 (\xi_1^{s_1} - u_1^{s_1})^3 \\
\mathcal{L}_{s_2}(\cdot) &= -\frac{\rho\beta}{7} (\xi_4^{s_2} - u_4^{s_2}) - \left(\frac{8\rho - 7\beta}{7}\right) (\xi_5^{s_2} - u_5^{s_2}) - \left(\frac{\rho - 7}{7}\right) (\xi_6^{s_2} - u_6^{s_2}) \\
&\quad + \frac{2\rho}{7} (\beta(\xi_4^{s_2} - u_4^{s_2}) + (\xi_5^{s_2} - u_5^{s_2}) + (\xi_6^{s_2} - u_6^{s_2}))^3 \\
\mathcal{L}_{s_3}(\cdot) &= \beta_1 (\xi_7^{s_3} - u_7^{s_3}) + \beta_2 (\xi_8^{s_3} - u_8^{s_3}) + \beta_3 (\xi_9^{s_3} - u_9^{s_3}) - \beta_4 (\xi_7^{s_3} - u_7^{s_3})^3 \\
\mathcal{L}_{s_4}(\cdot) &= -\frac{\rho\beta}{7} (\xi_{10}^{s_4} - u_{10}^{s_4}) - \left(\frac{8\rho - 7\beta}{7}\right) (\xi_{11}^{s_4} - u_{11}^{s_4}) - \left(\frac{\rho - 7}{7}\right) (\xi_{12}^{s_4} - u_{12}^{s_4}) \\
&\quad + \frac{2\rho}{7} (\beta(\xi_{10}^{s_4} - u_{10}^{s_4}) + (\xi_{11}^{s_4} - u_{11}^{s_4}) + (\xi_{12}^{s_4} - u_{12}^{s_4}))^3 \\
\mathcal{L}_{s_5}(\cdot) &= -(ac - 1)(\xi_{14}^{s_5} - u_{14}^{s_5}) + c(\xi_{13}^{s_5} - u_{13}^{s_5}) + (c - a)(\xi_{15}^{s_5} - u_{15}^{s_5}) \\
&\quad - (\xi_{13}^{s_5} - u_{13}^{s_5} - a(\xi_{14}^{s_5} - u_{14}^{s_5}) + \xi_{15}^{s_5} - u_{15}^{s_5}) (\xi_{14}^{s_5} - u_{14}^{s_5} - a(\xi_{13}^{s_5} - u_{13}^{s_5})) + b
\end{aligned}$$

Considere el error de sincronización como  $e_\xi = \xi_m - \xi_s$  tal que su dinámica se representa

como el siguiente sistema aumentado:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_1}^{s_1} &= e_{\xi_2}^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_2}^{s_1} &= e_{\xi_3}^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_3}^{s_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) - \mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_1^{s_1} &= u_2^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_2^{s_1} &= u_3^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) + k_{s_1} e_{\xi}^{s_1} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_4}^{s_2} &= e_{\xi_5}^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_5}^{s_2} &= e_{\xi_6}^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_6}^{s_2} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_2}(\xi_4^{s_2}, \xi_5^{s_2}, \xi_6^{s_2}, u_4^{s_2}, u_5^{s_2}, u_6^{s_2}) - \mathcal{D}^\alpha u_6^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_4^{s_2} &= u_5^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_5^{s_2} &= u_6^{s_2} \\
\mathcal{D}^\alpha u_6^{s_2} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_2}(\xi_4^{s_2}, \xi_5^{s_2}, \xi_6^{s_2}, u_4^{s_2}, u_5^{s_2}, u_6^{s_2}) + k_{s_2} e_{\xi}^{s_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_7}^{s_3} &= e_{\xi_8}^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_8}^{s_3} &= e_{\xi_9}^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_9}^{s_3} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_3}(\xi_7^{s_3}, \xi_8^{s_3}, \xi_9^{s_3}, u_7^{s_3}, u_8^{s_3}, u_9^{s_3}) - \mathcal{D}^\alpha u_9^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha u_7^{s_3} &= u_8^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha u_8^{s_3} &= u_9^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha u_9^{s_3} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_3}(\xi_7^{s_3}, \xi_8^{s_3}, \xi_9^{s_3}, u_7^{s_3}, u_8^{s_3}, u_9^{s_3}) + k_{s_3} e_{\xi_9}^{s_3} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{10}}^{s_4} &= e_{\xi_{11}}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{11}}^{s_4} &= e_{\xi_{12}}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{12}}^{s_4} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_4}(\xi_{10}^{s_4}, \xi_{11}^{s_4}, \xi_{12}^{s_4}, u_{10}^{s_4}, u_{11}^{s_4}, u_{12}^{s_4}) - \mathcal{D}^\alpha u_{12}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{10}^{s_4} &= u_{11}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{11}^{s_4} &= u_{12}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{12}^{s_4} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_4}(\xi_{10}^{s_4}, \xi_{11}^{s_4}, \xi_{12}^{s_4}, u_{10}^{s_4}, u_{11}^{s_4}, u_{12}^{s_4}) + k_{s_4} e_{\xi_{12}}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{13}}^{s_5} &= e_{\xi_{14}}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{14}}^{s_5} &= e_{\xi_{15}}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{15}}^{s_5} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_5}(\xi_{13}^{s_5}, \xi_{14}^{s_5}, \xi_{15}^{s_5}, u_{13}^{s_5}, u_{14}^{s_5}, u_{15}^{s_5}) - \mathcal{D}^\alpha u_{15}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{13}^{s_5} &= u_{14}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{14}^{s_5} &= u_{15}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{15}^{s_5} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_5}(\xi_{13}^{s_5}, \xi_{14}^{s_5}, \xi_{15}^{s_5}, u_{13}^{s_5}, u_{14}^{s_5}, u_{15}^{s_5}) + k_{s_5} e_{\xi_{15}}^{s_5}
\end{aligned}$$

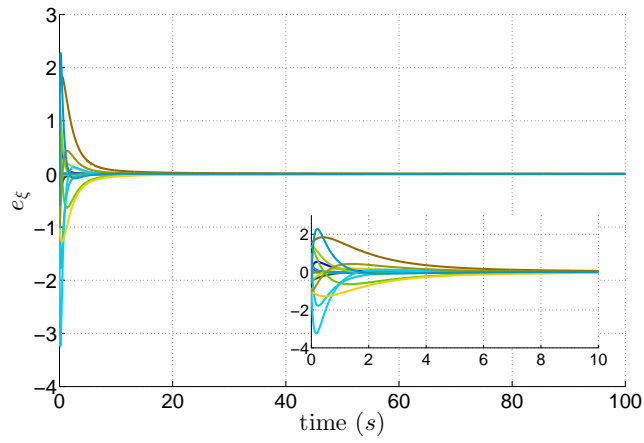
Luego de algunas manipulaciones algebraicas, no es difícil ver que  $\mathcal{D}^\alpha e_\xi = (\mathcal{A} - \mathcal{K}) e_\xi$ . Entonces, el error de sincronización converge asintóticamente al cero si la matriz  $\mathcal{A} - \mathcal{K} = \text{diag}(\bar{\mathcal{A}}_1, \bar{\mathcal{A}}_2, \bar{\mathcal{A}}_3, \bar{\mathcal{A}}_4, \bar{\mathcal{A}}_5)$  es Hurwitz, donde

$$\bar{\mathcal{A}}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{1,j} & -k_{2,j} & -k_{3,j} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 5.$$

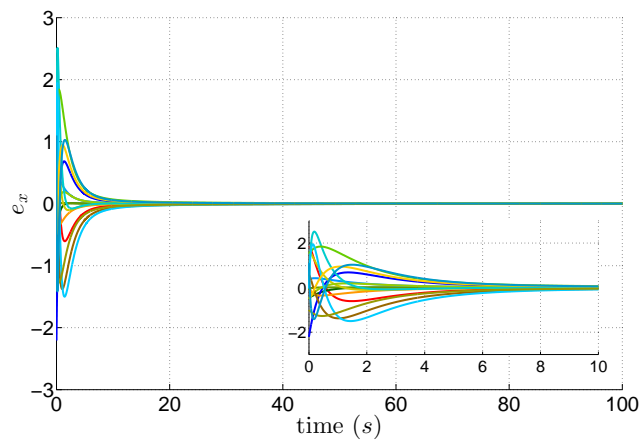
Considere los parámetros del Ejemplo 3, con  $a = 0.5$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10$  [98]. Y condiciones iniciales  $x_{m_1}(0) = [-0.50 \quad -0.07 \quad 0.65]^T$ ,  $x_{m_2}(0) = [0.50 \quad 1.5 \quad 0.1]^T$ ,  $x_{s_1}(0) = [-0.20 \quad 0.35 \quad 0.20]^T$ ,  $x_{s_2}(0) = [-0.58 \quad -0.01 \quad 0.30]^T$ ,  $x_{s_3}(0) = [2 \quad -0.1 \quad -2]^T$ ,  $x_{s_4}(0) = [-0.71 \quad -0.1 \quad 0.45]^T$ ,  $x_{s_5}(0) = [1 \quad 2.5 \quad -1]^T$  que aseguran el comportamiento caótico. Elija las ganancias  $k_{s,j} = [10 \quad 20 \quad 10]^T$  para  $1 \leq j \leq 5$ .

En las Figura 4.8 se ilustra la convergencia del error al cero de sincronización en coordenadas transformadas y orginales. Tomando el mapeo (4.24), la MSGF se muestra en las Figuras 4.9 y 4.10. El primer grupo de la Figura 4.7, la convergencia de los sistemas es más lenta que en el ejemplo 4 (véase Figura 4.6), esto se debe a que las ganancias  $k_{s,1}, k_{s,2}$  son más pequeñas que las ganancias en el ejemplo 4 (los valores propios asociados con esas ganancias están más cerca del cero). Es importante mencionar que esta metodología se puede aplicar a sistemas no solo de Liouville, es decir, también aplica a sistemas que satisfacen la condición de OAF (*e.g.*, el sistema de Rössler).

$$H_{ms}(X_s) = \begin{pmatrix} \beta(x_1^{s1} + u_1^{s1}) + x_2^{s1} + u_2^{s1} + x_3^{s1} + u_3^{s1} \\ x_2^{s1} + u_2^{s1} \\ -\beta(x_1^{s1} + u_1^{s1}) \\ x_4^{s2} + \beta u_4^{s2} + u_5^{s2} + u_6^{s2} \\ x_5^{s2} + u_5^{s2} \\ -\beta(x_4^{s2} - x_5^{s2} + x_6^{s2} + u_6^{s2}) \\ x_8^{s3} + u_8^{s3} - a(x_7^{s3} + u_7^{s3}) \\ x_7^{s3} + u_7^{s3} \\ -(x_7^{s3} - u_7^{s3}) + a(x_8^{s3} - u_8^{s3}) - (x_9^{s3} - u_9^{s3}) \\ x_{11}^{s4} + \frac{a}{\beta}x_{12}^{s4} + u_{11}^{s4} - au_{10}^{s4} \\ -\frac{1}{\beta}x_{12}^{s4} + u_{10}^{s4} \\ -x_{10}^{s4} + (a+1)x_{11}^{s4} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)x_{12}^{s4} - u_{10}^{s4} + au_{11}^{s4} - u_{12}^{s4} \\ x_{13}^{s5} - au_{13}^{s5} + u_{14}^{s5} \\ x_{14}^{s5} + u_{14}^{s5} \\ x_{15}^{s5} - u_{13}^{s5} + au_{14}^{s5} - u_{15}^{s5} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$



(a)



(b)

Figura 4.8: Ejemplo 5: Errores de sincronización (a)  $e_z = \xi_m - \xi_s$  y (b)  $e_x = X_m - H_{ms}(X_s)$ .



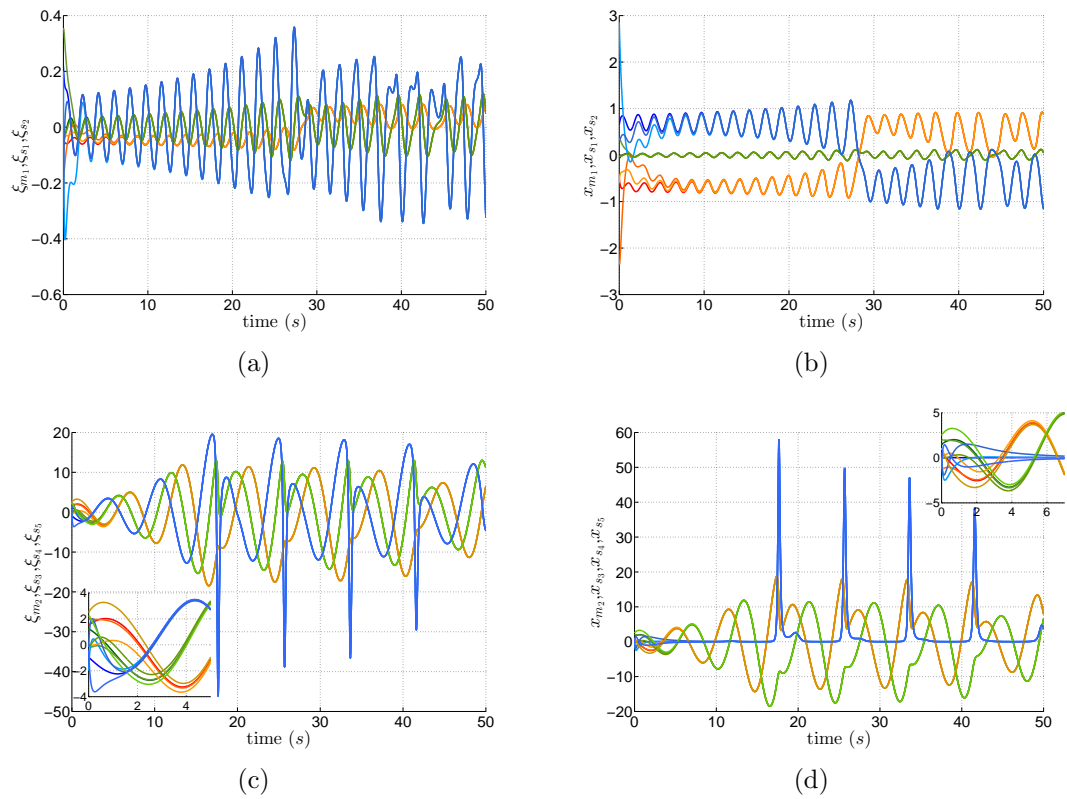
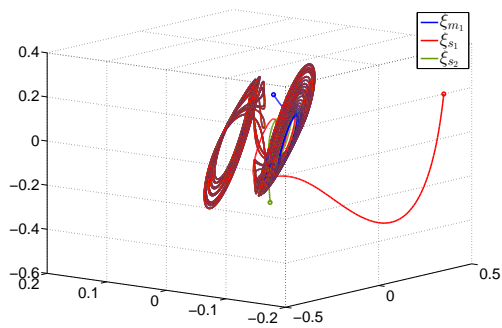
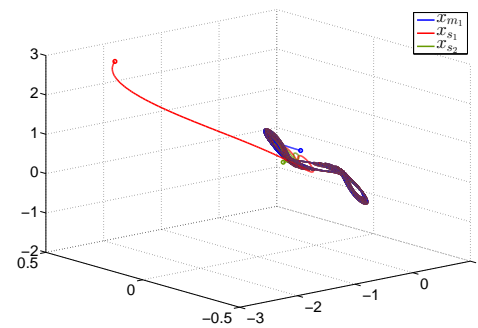


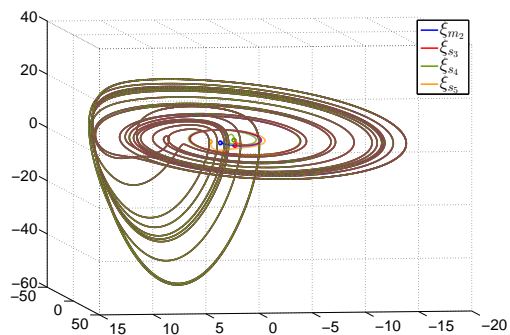
Figura 4.9: Ejemplo 5. MSGF de trayectorias de sistemas Arneodo, Chua-Harley y Rössler. Las trayectorias sincronizadas (a),(c)  $\xi_m = \xi_s$  y (b),(d)  $X_m = H_{ms}(X_s)$ .



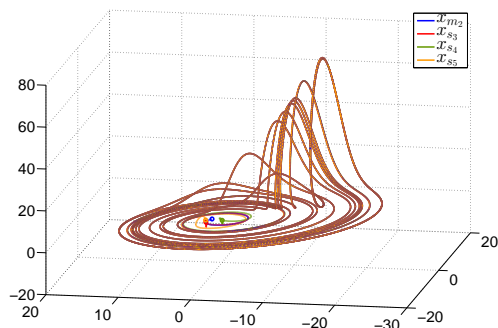
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.10: Ejemplo 5. MSGF atractores de Arneodo, Chua-Harley y Rössler. La sincronización de los atractores (sobrepuestos) (a),(c)  $\xi_m, \xi_s$  y (b),(d)  $X_m, H_{ms}(X_s)$ .

#### 4.5.4. Ejemplo 6

Considere la configuración compuesta por dos maestros con interacción compleja entre los sistemas esclavos de la misma familia en la Figura 4.11.

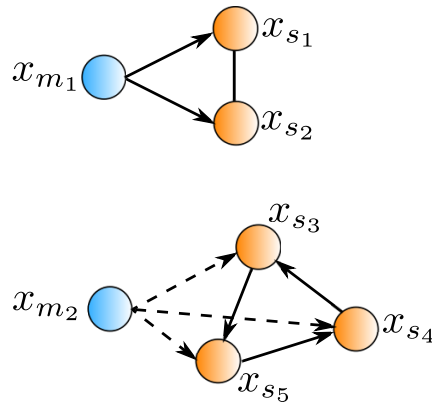


Figura 4.11: Ejemplo 6: MSG de sistemas de orden fraccionario con interacciones complejas entre esclavos. Configuración de los sistemas maestros  $x_{m_1}$ ,  $x_{m_2}$  y los sistemas esclavos  $x_{s_1}$ ,  $x_{s_2}$ ,  $x_{s_3}$ ,  $x_{s_4}$  y  $x_{s_5}$ .

El objetivo es mostrar que el estado de MSGF en presencia de interacción entre los sistemas esclavos. Considere todos los sistemas como en el ejemplo anterior. Por otra parte, note que la primera interacción entre los sistemas esclavos es bidireccional (*e.g.* asociada al grafo no dirigido  $\mathcal{G}_{r_1}$ ). La segunda interacción entre los esclavos de la segunda familia es unidireccional (*e.g.* asociada al grafo dirigido  $\mathcal{G}_{r_2}$ ) como se muestra en la Figura 4.11. Sean los grafos asociados, respectivamente,

$$\mathcal{G}_{r_1} = \{\mathcal{V}_{r_1}, \mathcal{E}_{r_1}, \mathcal{A}_{r_1}\}, \quad \mathcal{G}_{r_2} = \{\mathcal{V}_{r_2}, \mathcal{E}_{r_2}, \mathcal{A}_{r_2}\},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{r_1} &= \{1, 2\} \\ \mathcal{E}_{r_1} &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ \mathcal{V}_{r_2} &= \{1, 2, 3\} \\ \mathcal{E}_{r_2} &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{A}_{r_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{r_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No es difícil ver que

$$L_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{r_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

con  $r_1 = 2$  y  $r_2 = 3$ . Note que  $L_{r_1}$  es una matriz simétrica porque  $\mathcal{G}_{r_1}$  es un grafo no dirigido. La dinámica del error de sincronización  $e_\xi = \xi_m - \xi_s$  en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_1}^{s_1} &= e_{\xi_2}^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_2}^{s_1} &= e_{\xi_3}^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_3}^{s_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) - \mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_1^{s_1} &= u_2^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_2^{s_1} &= u_3^{s_1} \\ \mathcal{D}^\alpha u_3^{s_1} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_1}(\xi_1^{s_1}, \xi_2^{s_1}, \xi_3^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}, u_3^{s_1}) + k_{s_1} e_\xi^{s_1} + \Theta_1 \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_4}^{s_2} &= e_{\xi_5}^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_5}^{s_2} &= e_{\xi_6}^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_6}^{s_2} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_2}(\xi_4^{s_2}, \xi_5^{s_2}, \xi_6^{s_2}, u_4^{s_2}, u_5^{s_2}, u_6^{s_2}) - \mathcal{D}^\alpha u_6^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha u_4^{s_2} &= u_5^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha u_5^{s_2} &= u_6^{s_2} \\ \mathcal{D}^\alpha u_6^{s_2} &= -\mathcal{L}_{m_1}(\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_1}, \xi_3^{m_1}) + \mathcal{L}_{s_2}(\xi_4^{s_2}, \xi_5^{s_2}, \xi_6^{s_2}, u_4^{s_2}, u_5^{s_2}, u_6^{s_2}) + k_{s_2} e_\xi^{s_2} + \Theta_2 \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_7}^{s_3} &= e_{\xi_8}^{s_3} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_8}^{s_3} &= e_{\xi_9}^{s_3} \\ \mathcal{D}^\alpha e_{\xi_9}^{s_3} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_3}(\xi_7^{s_3}, \xi_8^{s_3}, \xi_9^{s_3}, u_7^{s_3}, u_8^{s_3}, u_9^{s_3}) - \mathcal{D}^\alpha u_9^{s_3} \\ \mathcal{D}^\alpha u_7^{s_3} &= u_8^{s_3} \\ \mathcal{D}^\alpha u_8^{s_3} &= u_9^{s_3} \\ \mathcal{D}^\alpha u_9^{s_3} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_3}(\xi_7^{s_3}, \xi_8^{s_3}, \xi_9^{s_3}, u_7^{s_3}, u_8^{s_3}, u_9^{s_3}) + k_{s_3} e_\xi^{s_3} + \Theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{10}}^{s_4} &= e_{\xi_{11}}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{11}}^{s_4} &= e_{\xi_{12}}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{12}}^{s_4} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_4}(\xi_{10}^{s_4}, \xi_{11}^{s_4}, \xi_{12}^{s_4}, u_{10}^{s_4}, u_{11}^{s_4}, u_{12}^{s_4}) - \mathcal{D}^\alpha u_{12}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{10}^{s_4} &= u_{11}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{11}^{s_4} &= u_{12}^{s_4} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{12}^{s_4} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_4}(\xi_{10}^{s_4}, \xi_{11}^{s_4}, \xi_{12}^{s_4}, u_{10}^{s_4}, u_{11}^{s_4}, u_{12}^{s_4}) + k_{s_4} e_\xi^{s_4} + \Theta_4 \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{13}}^{s_5} &= e_{\xi_{14}}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{14}}^{s_5} &= e_{\xi_{15}}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha e_{\xi_{15}}^{s_5} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_5}(\xi_{13}^{s_5}, \xi_{14}^{s_5}, \xi_{15}^{s_5}, u_{13}^{s_5}, u_{14}^{s_5}, u_{15}^{s_5}) - \mathcal{D}^\alpha u_{15}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{13}^{s_5} &= u_{14}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{14}^{s_5} &= u_{15}^{s_5} \\
\mathcal{D}^\alpha u_{15}^{s_5} &= -\mathcal{L}_{m_2}(\xi_4^{m_2}, \xi_5^{m_2}, \xi_6^{m_2}) + \mathcal{L}_{s_5}(\xi_{13}^{s_5}, \xi_{14}^{s_5}, \xi_{15}^{s_5}, u_{13}^{s_5}, u_{14}^{s_5}, u_{15}^{s_5}) + k_{s_5} e_\xi^{s_5} + \Theta_5,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \kappa_1 (\xi_1^{s_1} - \xi_4^{s_2}) + \kappa_2 (\xi_2^{s_1} - \xi_5^{s_2}) + \kappa_3 (\xi_3^{s_1} - \xi_6^{s_2}) \\
\Theta_2 &= -\Theta_1 \\
\Theta_3 &= \kappa_1 (\xi_7^{s_3} - \xi_{10}^{s_4}) + \kappa_2 (\xi_8^{s_3} - \xi_{11}^{s_4}) + \kappa_3 (\xi_9^{s_3} - \xi_{12}^{s_4}) \\
\Theta_4 &= \kappa_1 (\xi_{10}^{s_4} - \xi_{13}^{s_5}) + \kappa_2 (\xi_{11}^{s_4} - \xi_{14}^{s_5}) + \kappa_3 (\xi_{12}^{s_4} - \xi_{15}^{s_5}) \\
\Theta_5 &= \kappa_1 (\xi_{13}^{s_5} - \xi_7^{s_3}) + \kappa_2 (\xi_{14}^{s_5} - \xi_8^{s_3}) + \kappa_3 (\xi_{15}^{s_5} - \xi_9^{s_3})
\end{aligned}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas tenemos que  $\mathcal{D}^\alpha e_\xi = (-\mathfrak{L} + \Xi) e_\xi$ . Entonces el error de sincronización converge asintóticamente a cero si la matriz  $(-\mathfrak{L} + \Xi)$  es Hurwitz, donde

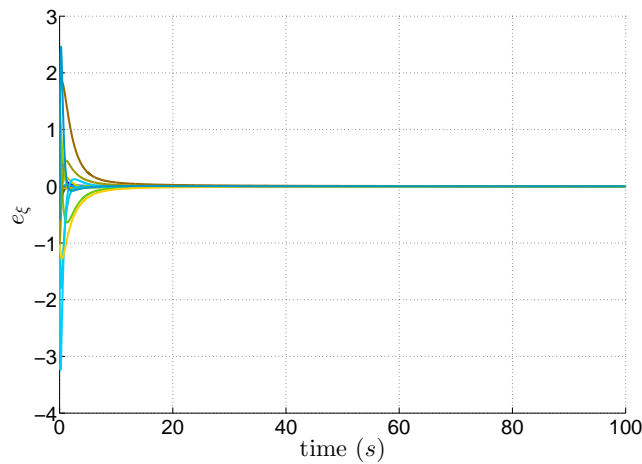
$$\Xi = \text{diag}(\Xi_1, \Xi_2), \quad \mathfrak{L} = \text{diag}(L_{r_1} \otimes B_1, L_{r_2} \otimes B_2),$$

$$\Xi_1 = -L_{r_1} \otimes B_1 + \text{diag}(\bar{\mathcal{A}}_1, \bar{\mathcal{A}}_2), \quad \Xi_2 = -L_{r_2} \otimes B_1 + \text{diag}(\bar{\mathcal{A}}_3, \bar{\mathcal{A}}_4, \bar{\mathcal{A}}_5),$$

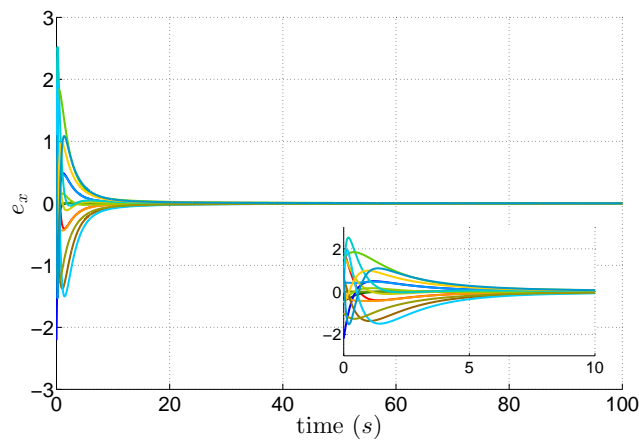
$$B_1 = B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{A}}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{1,j} & -k_{2,j} & -k_{3,j} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 5,$$

Considere los parámetros y condiciones iniciales del ejemplo 4. Con  $k_{s,j} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 \end{bmatrix}$  para  $1 \leq j \leq 5$  y ganancias de acoplamiento difusivo  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = 2$  y  $\kappa_3 = 2$ .

En las Figura 4.12 se ilustra la convergencia del error al cero de sincronización en coordenadas transformadas y originales. Tomando el mapeo (4.24), la MSGF se muestra en las Figuras 4.13 y 4.14. La convergencia de las trayectorias no se ve afectada por la interacción entre sistemas esclavos, esto se debe a que todos los valores propios de  $(-\mathfrak{L} + \Xi)$  tienen parte real negativa. Aquí se muestra que pueden existir dos tipos diferentes de interacciones, sin embargo, podrían ser cualquiera.



(a)



(b)

Figura 4.12: Ejemplo 4: Errores de sincronización (a)  $e_z = \xi_m - \xi_s$  y (b)  $e_x = X_m - H_{ms}(X_s)$ .

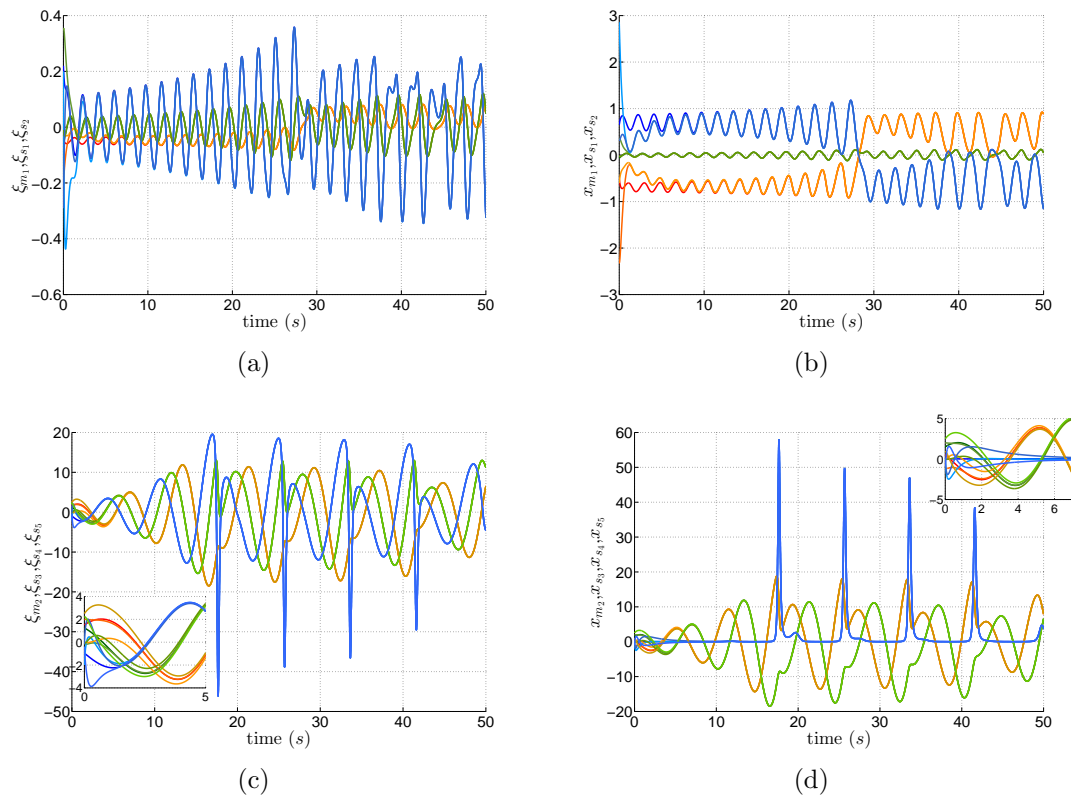
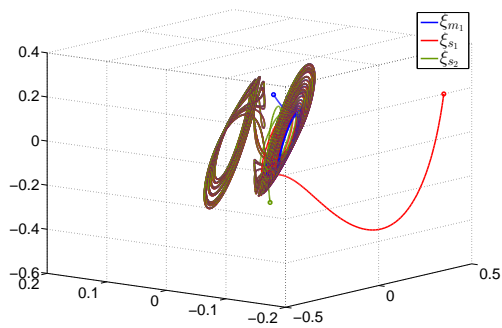
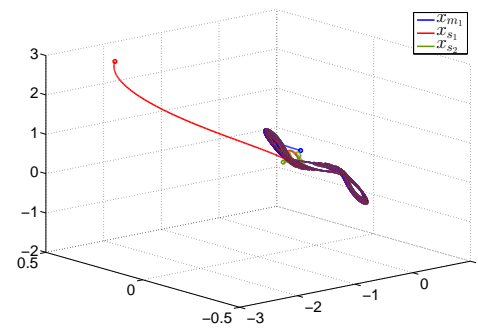


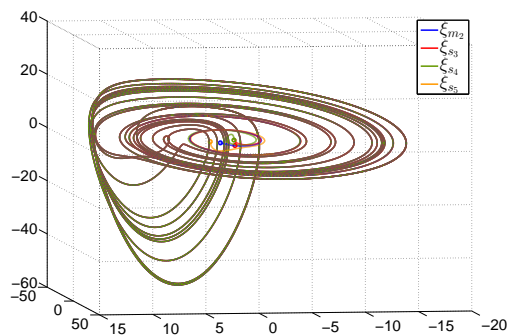
Figura 4.13: Ejemplo 6. MSGF de trayectorias de sistemas Arneodo, Chua-Harley y Rössler. Las trayectorias sincronizadas (a),(c)  $\xi_m = \xi_s$  y (b),(d)  $X_m = H_{ms}(X_s)$ .



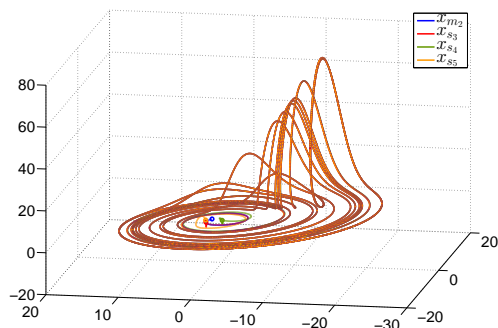
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.14: Ejemplo 6. MSGF atractores de Arneodo, Chua-Harley y Rössler. La sincronización de los atractores (sobrepuestos) (a),(c)  $\xi_m, \xi_s$  y (b),(d)  $X_m, H_{ms}(X_s)$ .



# Capítulo 5

## Conclusiones

En una red de sistemas no lineales acoplados, debido a las diferencias en las estructuras dinámicas de los sistemas involucrados, encontrar una variedad de sincronización es un tarea complicada. En el problema de multi-sincronización unidireccional maestro-esclavo, su importancia es tal que obtenerla implica alcanzar el estado de MSG para el SMA. Desde una perspectiva algebraico-diferencial, la contribución de este trabajo es directa, se dan condiciones suficientes en términos de una variedad algebraica de sincronización estable para el problema de MSG en la configuración maestro-esclavo. La facilidad para atacar el problema radica en considerar a este mismo como un problema de consenso siguiendo al líder para una clase de sistemas en redes heterogéneas. La ventaja principal de la metodología es que podemos obtener de manera exacta una variedad de sincronización estable bajo las hipótesis que permiten llevar a los sistemas a su FCOG, *i.e.*, a través de las transformaciones relacionadas con los elementos primitivos diferenciales de cada sistema y mediante el diseño de controladores dinámicos que introducen una dinámica similar a la del líder (además de incluir la interacción entre esclavos). Es importante mencionar que bajo estas hipótesis, la atractividad de la variedad de sincronización es una consecuencia directa del grafo que modela la interacción entre los sistemas.

## 5.1. Contribuciones y discusiones

En esta sección se resumen las contribuciones teóricas, ventajas y desventajas sobre las metodologías propuestas en esta tesis.

**Variedad de sincronización estable.** Se presentó una variedad algebraica de sincronización asintóticamente estable en el problema de consenso siguiendo al líder para una red heterogénea de “ $N + 1$ ” sistemas multi-agentes; mediante el uso de propiedades algebraicas de los sistemas no lineales se obtuvieron resultados preliminares sobre la estabilidad de dicha variedad. Es importante mencionar que se logró el consenso siguiendo al líder para cualquier tipo de interacción  $\mathcal{G}_N$  entre los seguidores mientras estos reciban información completa de su líder en todo momento, *i.e.*,  $\mathcal{G}_{N+1}$  cuenta con un árbol de cobertura con el líder como raíz (*e.g.* como se muestra en la Figura 3.3). En particular se logró la obtención de un comportamiento síncrono y estable mediante el diseño y aplicación de protocolos dinámicos de consenso en todos los seguidores, a partir del conocimiento de los elementos primitivos diferenciales de los agentes en la red. Dentro de las metodologías propuestas, es importante mencionar que el uso de una sola ganancia de acoplamiento simplifica el análisis del problema al considerar la interacción de una gran cantidad sistemas aunque estos se encuentran limitados en dimensión (*e.g.* sistemas no lineales de tercer orden). Por otra parte al considerar múltiples ganancias de acoplamiento, el orden de los sistemas ya no es un problema, sin embargo al aumentar la cantidad de sistemas acoplados, asegurar la estabilidad se convierte en un problema computacional grave.

**Sistemas entrada-estado convergentes.** Un comportamiento síncrono estable (un error de sincronización asintóticamente estable), permite suponer algunas propiedades sobre la naturaleza de los controladores dinámicos involucrados. En este caso, fue posible considerar que la dinámica del error de sincronización y la dinámica controlador en lazo cerrado (3.33) forman un sistema en cascada del tipo entrada-estado convergente (véase Teorema 10). En el caso de los sistemas caóticos, esto puede entenderse como un principio de separación en donde el comportamiento del controlador dinámico solamente depende de las trayectorias acotadas del sistema líder y de las mismas trayectorias del controlador (*cf.* Capítulo 9 en [71]). La verificación sobre el tipo de controladores que satisfacen esta condición merece un estudio cuidadoso que está fuera del alcance de este trabajo, una posible solución puede encontrarse en las condiciones de Demidovich [90] propuestas en [91] para sistemas convergentes con entradas.

**FCOGM e inyección de dinámicas.** La obtención de las transformaciones  $\Phi_{u_i}$  mediante los elementos primitivos diferenciales parte del caso ideal en donde no existen perturbaciones en las salidas y entradas de los sistemas, además de no considerar incertidumbre paramétrica en los modelos de los sistemas. Como consecuencia, es posible realizar la cancelación de las dinámicas de los seguidores para imponer la dinámica del líder en toda la red, *e.g.*, (3.30). En este sentido, los procesos de cancelación e inyección se deben a que toda la información sobre la dinámica (algebraico-diferencial [71]) de los sistemas se encuentra contenida en las funciones  $g_i(\eta_i, U_i)$  de la FCOGM (véase Corolario 1). La aplicación de esta metodología a situaciones reales necesita de un estudio más profundo [35, 115], porque las señales de salida de los sistemas reales (mediciones realizadas a través de un sensor) se encuentran mezcladas con ruido (perturbaciones no deseadas) y/o porque la existencia de errores en el modelado de los sistemas complica el análisis del problema. En tales situaciones, no es posible llevar a los sistemas a su FCOG de manera directa. Sin embargo, las aplicaciones potenciales de los resultados obtenidos en esta tesis pueden ser de gran utilidad en los problemas de encriptación de datos y comunicaciones seguras basados en sistemas caóticos [5, 70, 77].

**Extensión a sistemas de orden fraccionario.** Se propuso una metodología para sistemas caóticos de orden fraccionario conmensurado de Liouville con  $0 < \alpha < 1$ . Donde se considera a  $\alpha$  como un parámetro extra que, junto a las condiciones usuales, propicia un comportamiento caótico. De esta manera se extiende la clase de sistemas para los cuales es posible aplicar la metodología al introducir la propiedad de observabilidad algebraica fraccionaria para sistemas de Liouville y las FCOGMF para esta clase de sistemas. Cabe mencionar que es posible, bajo ciertas propiedades de equivalencia entre operadores [102], extender algunos de los resultados para la derivada de Riemann-Liouville. Una de las principales dificultades del uso de operadores de derivada de orden fraccionario es que estos no satisfacen las reglas usuales de derivación, *e.g.*, la regla del Leibniz. Esto restringe a los tipos de sistemas para los cuales es posible obtener una FCOGF comparado con el caso entero, este problema sugiere explorar y estudiar otros tipos de operadores de derivada de orden fraccionario [12, 18, 46, 79].

## 5.2. Direcciones futuras

Las direcciones futuras de esta investigación, además de las sugeridas en la sección anterior, pueden contemplar los siguientes problemas:

**Intermitencia y pérdida de conexión entre nodos.** Es posible encontrar las condiciones para las cuales las interacciones pueden ser intermitentes. Es claro que esto se relaciona con la existencia de un grafo dirigido de cobertura con el líder como raíz tal como en el caso de sistemas lineales (*cf.* [107]) y que su solución sigue los resultados de estabilidad ya conocidos sobre sistemas híbridos [60]. En esta misma dirección, otro caso de estudio, es la elección de una noción débil del grafo variante en el tiempo conocida como la condición de conexión uniforme o colectividad conexa. Esto permite que el grafo pueda ser no conexo en cualquier tiempo [59, 145], sin embargo, la unión de todos los grafos distintos está relacionada con el grafo dirigido de cobertura mencionado anteriormente.

**Observación e identificación.** La metodología presentada en esta tesis pueden extenderse fácilmente al caso de protocolos de consenso basados en observación en donde el estado de los sistemas no lineales se conoce parcialmente [71] tal como en el caso lineal [116]. También, la metodología propuesta puede tomarse como base para la extensión al caso de incertidumbre paramétrica de los sistemas no lineales en el sentido de parámetros identificables [7, 71] en el problema de multi-agentes.

# Apéndice A

## Estabilidad de conjuntos y sistemas convergentes

En esta sección se muestran los conceptos y resultados sobre la estabilidad de conjuntos [9, 57, 117, 132] y sistemas convergentes [22, 91], dichos conceptos serán de utilidad para tratar la estabilidad de la variedad algebraica de sincronización en la multi-sincronización de sistemas caóticos.

### A.1. Funciones de comparación

Es común encontrarse con este tipo de funciones en los resultados de estabilidad de Lyapunov para sistemas variantes en el tiempo [51]:

Una función continua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  es de clase:

- $\mathcal{K}$  si la función  $\alpha$  es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ ,
- $\mathcal{K}_\infty$  si es una función de clase  $\mathcal{K}$ ,  $a = \infty$  y  $\alpha(s_1) \rightarrow \infty$  cuando  $s_1 \rightarrow \infty$ .

Una función continua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es una función de clase  $\mathcal{KL}$  si:

- para cada valor fijo de  $s_2$ , la función  $\beta(s_1, s_2)$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  respecto a  $s_1$  y,
- para cada valor fijo de  $s_1$ , la función  $\beta(s_1, s_2)$  es decreciente respecto a  $s_2$  y  $\beta(s_1, s_2) \rightarrow 0$  cuando  $s_2 \rightarrow \infty$ .

### A.2. Estabilidad de conjuntos

Considere el siguiente sistema no lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{x} = f(x), \quad (\text{A.1})$$

con condición inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $f(x)$  es una función continua en  $x$ . Para asegurar la existencia y unicidad [51] de la solución de (A.1),  $f(x)$  debe ser Lipschitz en  $x$ ,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1]$ .

La función distancia de un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  a un subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  se define como:

$$\|x\|_{\mathcal{A}} := d(x, \mathcal{A}) = \inf \{d(x, \hat{x}) \mid \hat{x} \in \mathcal{A}\},$$

donde  $d(x, \hat{x}) = \|x - \hat{x}\|$  es la norma euclidiana.

**Ejemplo A.2.1.** *El punto de equilibrio  $x_e \in \mathbb{R}^n$  del sistema (A.1) (i.e.  $f(x_e) = 0$ ) se puede representar como el siguiente conjunto compacto invariante  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_e\}$ , donde*

$$\|x\|_{\mathcal{A}} = \inf \{\|x - y\| \mid y := x_e\} = \|x - x_e\| \quad (\text{A.2})$$

El siguiente lema muestra que la distancia de un punto arbitrario a un conjunto es proporcional a la distancia euclidiana de entre dicho punto y un punto en el conjunto dado.

**Lema 7.** *Sean  $z, \hat{z} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  vectores en un conjunto compacto  $\Omega$  en el espacio euclidiano y asuma la siguiente variedad trivial:*

$$\mathcal{M} = \{(z, \hat{z}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid z = \hat{z}\}. \quad (\text{A.3})$$

Entonces

$$\|(z, \hat{z})\|_{\mathcal{M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|z - \hat{z}\|_2 \quad (\text{A.4})$$

**Prueba 12.** *De la definición de la distancia de un punto a un conjunto se tiene que:*

$$\begin{aligned} \|(z^T, \hat{z}^T)^T\|_{\mathcal{M}} &= \inf_{(\xi^T, \hat{\xi}^T)^T \in \mathcal{M}} \left\| \begin{pmatrix} z - \xi \\ \hat{z} - \hat{\xi} \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} z - \xi \\ \hat{z} - \xi \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &= J(\xi) \end{aligned}$$

con  $J(\xi) = \sqrt{\|z - \xi\|_2^2 + \|\hat{z} - \xi\|_2^2}$ . Note que  $J(\xi)$  es una función continua en el conjunto

compacto  $\Omega$ , entonces  $J(\xi)$  alcanza su ínfimo en su mínimo, por lo tanto  $\|(z^T, \hat{z}^T)^T\|_{\mathcal{M}} = \min_{\xi \in \Omega} J(\xi)$ . Cualquier norma de vectores  $\|\cdot\|_p$  es convexa así que podemos tomar su  $\arg \min J(\xi)$  de las condiciones suficientes de primer orden para valores extremos  $\nabla J(\xi) = 0$ . Note que  $\nabla J(\xi) = \frac{1}{J(\xi)} ((z - \xi)^T + (\hat{z} - \xi)^T)$ . Así,  $\arg \min J(\xi) = \xi^* = \frac{1}{2}(z + \hat{z})$ . Finalmente  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \|(z^T, \hat{z}^T)^T\|_{\mathcal{M}} &= \left\| \begin{pmatrix} z - \xi^* \\ \hat{z} - \xi^* \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{2} \inf_{\xi \in \Omega} \left\| \begin{pmatrix} z - \hat{z} \\ -(z - \hat{z}) \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|z - \hat{z}\|_2 \end{aligned}$$

como se deseaba. □

**Observación 24.** Es posible relajar las condiciones acerca del conjunto compacto al considerar conjuntos o variedades en donde los vectores que componen a estos conjuntos son combinaciones lineales de los vectores unitarios como se muestra en el Lema 2.3 en [8].

**Definición 21.** Sea  $x(t, x(0))$  la solución de (A.1) en el tiempo  $t$ . Esta solución se define en el máximo intervalo de existencia  $(t_0, t_1)$ . Se dice que el sistema (A.1) **íntegro hacia adelante** si  $t_1 = +\infty, \forall x(0)$ ; **íntegro hacia atrás** si  $t_0 = -\infty, \forall x(0)$ ; e **íntegro** si es tanto íntegro hacia adelante como atrás.

**Ejemplo A.2.2.** Considere el sistema  $\dot{x} = Ax$ , con matriz  $A$  Hurwitz y un conjunto compacto e invariante  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = 0\}$ , dado que

$$\|A(x - y)\| \leq a \|x - y\|,$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $t \in [t_0, t_1]$ , con cualquier norma inducida  $\|A\| \leq a$ . Entonces  $t_1$  puede ser arbitrariamente grande y la solución es única  $\forall t \geq t_0 = 0$ . Por lo tanto el sistema  $\dot{x} = Ax$  es íntegro hacia adelante.

**Definición 22.** Para el sistema (A.1), un conjunto no vacío y cerrado  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  es un **conjunto invariante hacia adelante** si el sistema es íntegro hacia adelante y  $\forall x(0) \in \mathcal{A}$  la solución  $x(t, x(0)) \in \mathcal{A}, \forall t \geq 0$ .

**Definición 23.** El sistema (A.1) se dice **detectable en tiempo finito** por  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  si el máximo intervalo de existencia de la solución está acotado, esto es  $x(t, x(0))$  está definido solo en  $[0, T)$  con  $T$  finito. Entonces  $\lim_{t \rightarrow T} \|x(t, x(0))\|_{\mathcal{A}} = \infty$ .

**Ejemplo A.2.3.** Para el sistema  $\dot{x} = Ax$ , el equilibrio  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = 0\}$  es un conjunto invariante hacia adelante. Además, el sistema es detectable en tiempo finito por  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ .

**Definición 24.** Sea (A.1) un sistema íntegro hacia adelante, se dice que el conjunto invariante hacia adelante y cerrado  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$  de (A.1) es:

- **Estable Global y Uniforme (EGU)** si existe una función  $\varphi$  de clase  $\mathcal{K}_{\infty}$  tal que,  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ , la solución  $x(t, x(0))$  satisface,

$$\|x(t, x(0))\|_{\mathcal{A}} \leq \varphi(\|x(0)\|_{\mathcal{A}}), \quad \forall t \geq 0.$$

- **Asintóticamente Estable, Global y Uniforme (AEGU)** si existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$  tal que,  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ , la solución  $x(t, x(0))$  satisface,

$$\|x(t, x(0))\|_{\mathcal{A}} \leq \beta(\|x(0)\|_{\mathcal{A}}, t), \quad \forall t \geq 0.$$

- **Exponencialmente Estable, Global y Uniforme (EEGU)** si existen constantes  $k > 0$  y  $\lambda > 0$  tal que  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ , la solución  $x(t, x(0))$  satisface,

$$\|x(t, x(0))\|_{\mathcal{A}} \leq k \|x(0)\|_{\mathcal{A}} e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Cuando  $\mathcal{A}$  es compacto, la condición de integridad hacia adelante es redundante. Por ejemplo un punto de equilibrio asintóticamente estable es un conjunto no vacío, invariante, compacto (véase el Lema 4.1 en [51]), lo que cumple que el sistema sea detectable en tiempo finito a través de  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ . Entonces las cotas en la Definición 24 implican que las soluciones están acotadas en el intervalo máximo de existencia. A continuación mostramos un ejemplo claro de esta situación:

**Ejemplo A.2.4.** Considere el sistema  $\dot{x} = Ax$ , con una matriz  $A$  Hurwitz estable. Entonces, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable y global. Por lo tanto, el conjunto  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = 0\}$  es EEGU.

**Definición 25.** Una función suave de Lyapunov para el sistema (A.1) respecto a un conjunto no vacío, cerrado, invariante hacia adelante  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$  es una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  que satisface:

- existen dos funciones  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de clase  $\mathcal{K}_{\infty}$  tal que para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha_1(\|x\|_{\mathcal{A}}) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|_{\mathcal{A}})$$



- existe una función  $\alpha_3$  continua, positiva definida (al menos) tal que para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}$ ,

$$\dot{V}(x) \leq \alpha_3(\|x\|_{\mathcal{A}}).$$

**Teorema 8.** [117] Considere al sistema (A.1) detectable en tiempo finito por  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ . Si existe una función suave de Lyapunov para el sistema (A.1) respecto a un conjunto no vacío, cerrado e invariante hacia adelante  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces,  $\mathcal{A}$  es EGU respecto a (A.1). Además si se restringe a  $\alpha_3$  como una función positiva definida, entonces es AEGU respecto a (A.1), y si  $\alpha_i(\|x\|_{\mathcal{A}}) = c_i \|x\|_{\mathcal{A}}^c$  para  $1 \leq i \leq 3$ , donde  $c_1, c_2, c_3, c$  son constantes reales positivas  $c \geq 1$ , entonces  $\mathcal{A}$  es EEGU respecto a (A.1).  $\square$

### A.3. Sistemas convergentes

Considere el siguiente sistema

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{A.5}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $F(t, x)$  es localmente Lipschitz en  $x$  y continua a pedazos en  $t$ .

**Definición 26.** (Sistema convergente [91]) El sistema (A.5) es

- **convergente** si existe una solución  $\bar{x}(t)$  que satisface las siguientes condiciones
  - $\bar{x}(t)$  está definida y acotada para todo  $t \in \mathbb{R}$
  - $\bar{x}(t)$  es globalmente asintóticamente estable.
- **convergente uniforme** si es convergente y  $\bar{x}(t)$  AEGU.
- **exponencialmente convergente** si es convergente y  $\bar{x}(t)$  es EEG.

Ahora, considere el sistema variante en el tiempo de la forma

$$\dot{x} = F(t, x, \omega) \tag{A.6}$$

donde  $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua a pedazos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $\omega$ , la función de entrada  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  pertenece a la clase de funciones continuas a pedazos con  $\|\omega(t)\|_{[t_0, t]} := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\omega(\tau)\|$  y es una función acotada dependiente del tiempo  $t$  para toda  $t \geq 0$ .

**Definición 27.** (propiedad de convergencia con entradas [91]) El sistema (A.6) es (uniforme, exponencialmente) convergente si para cada entrada continua a pedazos  $\omega$ , el sistema

$\dot{x} = F(t, x, \omega(t))$  es (uniforme, exponencialmente) convergente con una solución en estado permanente  $\bar{x}_\omega(t)$ .

**Definición 28.** (Propiedad de sistemas entrada-estado convergentes [91]) El sistema (A.6) es entrada-estado convergente si es convergente uniforme y para cada entrada  $\omega$  existe una función  $\beta(r, s) \in \mathcal{KL}$  y una función  $\gamma(r) \in \mathcal{K}$  tal que para cualquier solución  $x(t)$  del sistema (A.6) que corresponde a alguna entrada continua a pedazos y acotada  $\hat{\omega} := \omega + \Delta\omega(t)$  se satisface la siguiente desigualdad:

$$\|x(t) - \bar{x}_\omega(t)\| \leq \beta(\|x(t_0) - \bar{x}_\omega(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\|\Delta\omega\|_{[t_0, t]}).$$

Es importante mencionar que esta propiedad no se pierde al conectar de forma paralela a sistemas entrada-estado convergente, no es difícil ver que esto es una consecuencia de la definición anterior. Esto se demuestra en el siguiente resultado.

**Teorema 9.** Considere el sistema en paralelo

$$\dot{x}_1(t) = F_1(t, x_1, \omega, s) \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2(t, x_2, \omega, s) \quad (\text{A.8})$$

con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^{n_3}$  and  $s \in \mathbb{R}^{n_4}$ . Sean los subsistemas (A.7) y (A.8) entrada-estado convergentes respecto a las entradas  $\hat{\omega} = \omega(t) + \Delta\omega(t)$  y  $\hat{s} = s(t) + \Delta s(t)$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1\| &\leq \beta_1(\|\hat{x}_1(t_0)\|, t - t_0) + \rho_1 \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta\omega(\tau)\| \right) + \gamma_1 \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta s(\tau)\| \right) \\ \|\hat{x}_2\| &\leq \beta_2(\|\hat{x}_2(t_0)\|, t - t_0) + \rho_2 \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta\omega(\tau)\| \right) + \gamma_2 \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta s(\tau)\| \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

respectivamente, con  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{KL}$  y  $\rho_i, \gamma_i \in \mathcal{K}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\|\Delta\omega\| \leq c_1$ ,  $\|\Delta s\| \leq c_2$ ,  $c_1, c_2 > 0$ , donde  $\hat{x}_1 = x_1 - x_{1, \omega, s}$  y  $\hat{x}_2 = x_2 - x_{2, \omega, s}$ , donde  $x_{1, \omega, s}$  y  $x_{2, \omega, s}$  son las soluciones en estado permanente de los subsistemas (A.7) y (A.8), respectivamente. Entonces la conexión en paralelo de los subsistemas (A.7) y (A.8) es un sistema entrada-estado convergente con  $\omega$  y  $s$  como entradas.

**Prueba 13.** Defínase  $\mathcal{X} = (\hat{x}_1^T, \hat{x}_2^T)^T \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ , para un  $\mathcal{X}$  arbitrario es inmediato que

$\|X\| \leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\|$ , luego de (A.9) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}\| &\leq \beta_1(\|\hat{x}_1(t_0)\|, t - t_0) + \rho_1\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta\omega(\tau)\|\right) + \gamma_1\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta s(\tau)\|\right) \\ &\quad + \beta_1(\|\hat{x}_2(t_0)\|, t - t_0) + \rho_2\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta\omega(\tau)\|\right) + \gamma_2\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta s(\tau)\|\right) \\ &\leq \beta_1(\|\hat{x}_1(t_0)\|, t - t_0) + \beta_2(\|\hat{x}_2(t_0)\|, t - t_0) \\ &\quad + \max_i \left\{ 2\rho_i\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta\omega(\tau)\|\right) \right\} + \max_i \left\{ 2\gamma_i\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta s(\tau)\|\right) \right\} \end{aligned}$$

como se deseaba.  $\square$

El siguiente resultado puede considerarse como un corolario de la Propiedad 7 en [91], sin embargo aquí se presenta una prueba más directa. Este resultado es el elemento clave para estudiar las propiedades de convergencia para el protocolo dinámico de consenso en el Capítulo 3.

**Teorema 10.** *Considere el siguiente sistema en cascada*

$$\dot{x}_1(t) = F_1(t, x_1, x_2, \omega) \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2(t, x_2) \quad (\text{A.11})$$

con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^{n_3}$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  and  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ . Sea  $x_2 = 0$  un punto de equilibrio AEGU del subsistema  $x_2$ . Además, sea el subsistema (A.10) entrada-estado convergente respecto a la señales de entrada  $x_2$  y  $\hat{\omega} = \omega(t) + \Delta\omega(t)$ :

$$\|\hat{x}_1\| \leq \beta_1(\|\hat{x}_1(t_0)\|, t - t_0) + \rho\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\|\right) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\Delta\omega(\tau)\|\right) \quad (\text{A.12})$$

con funciones  $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ ,  $\rho, \gamma \in \mathcal{K}$ ,  $\|\Delta\omega\| \leq c$ ,  $\hat{x}_1 = x_1 - x_{1\omega}$ , donde  $x_{1\omega}$  es la solución en estado permanente del sistema convergente (A.10). Entonces el sistema en cascada conformado por (A.10) y (A.11) es entrada-estado convergente con  $\omega$  como señal de entrada.

**Prueba 14.** *Sea  $t_0 \geq 0$  el tiempo inicial y suponga que las siguientes desigualdades se satisfacen globalmente:*

$$\|\hat{x}_1(t) \quad \| \leq \beta_1(\|\hat{x}_1(s)\|, t - s) + \rho(\|x_2(\tau)\|_{[s,t]}) + \gamma(\|\Delta\omega(\tau)\|_{[s,t]}) \quad (\text{A.13})$$

$$\|x_2(t) \quad \| \leq \beta_2(\|x_2(s)\|, t - s), \quad (\text{A.14})$$

donde  $t \geq s \geq t_0$ ,  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{KL}$  y  $\gamma, \rho \in \mathcal{K}$ . Fije  $s = (t + t_0)/2$ ,

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1(t)\| &\leq \beta_1 (\|\hat{x}_1((t + t_0)/2)\|, (t - t_0)/2) \\ &\quad + \rho(\|x_2(\tau)\|_{[(t+t_0)/2, t]}) + \gamma(\|\Delta\omega(\tau)\|_{[(t+t_0)/2, t]}) \\ &\leq \beta_1 (\|\hat{x}_1((t + t_0)/2)\|, (t - t_0)/2) \\ &\quad + \rho(\|x_2(\tau)\|_{[(t+t_0)/2], t}) + \gamma(\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0, t]}). \end{aligned} \tag{A.15}$$

Note que podemos estimar algunos de los términos en (A.15) de las desigualdades (A.13) y (A.14). En primer lugar, fije  $t = (t + t_0)/2$  y  $s = t_0$ , luego estime  $\hat{x}_1((t + t_0)/2)$  de (A.13):

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1((t + t_0)/2)\| &\leq \beta_1 (\|\hat{x}_1(t_0)\|, (t - t_0)/2) \\ &\quad + \rho(\|x_2(\tau)\|_{[t_0, (t+t_0)/2]}) + \gamma(\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0, (t+t_0)/2]}) \\ &\leq \beta_1 (\|\hat{x}_1(t_0)\|, (t - t_0)/2) \\ &\quad + \rho(\|x_2(\tau)\|_{[t_0, (t+t_0)/2]}) + \gamma(\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0, t]}) \end{aligned} \tag{A.16}$$

utilizando (A.14), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|x_2(\tau)\|_{[(t+t_0)/2, t]} &\leq \beta_2 (\|x_2((t + t_0)/2)\|, (t - t_0)/2) \\ &\leq \beta_2 (\|x_2(t_0)\|, (t - t_0)/2) \\ \|x_2(\tau)\|_{[t_0, (t+t_0)/2]} &\leq \beta_2 (\|x_2(t_0)\|, (t - t_0)/2) \\ &\leq \beta_2 (\|x_2(t_0)\|, 0), \end{aligned} \tag{A.17}$$

donde hemos utilizado el hecho que  $x_2$  es AEGU. Así la desigualdad en (A.16) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1((t + t_0)/2)\| &\leq \beta_1 (\|\hat{x}_1(t_0)\|, (t - t_0)/2) \\ &\quad + \rho(\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, 0)) + \gamma(\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0, t]}) \end{aligned} \tag{A.18}$$

De las desigualdades (A.15), (A.17) y (A.18), se obtiene el estimado de  $\hat{x}_1(t)$  como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1(t)\| &\leq \beta_1 (\beta_1 (\|\hat{x}_1(t_0)\|, (t - t_0)/2) \\ &\quad + \rho(\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, 0)) + \gamma(\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0, t]}), (t - t_0)/2) \\ &\quad + \rho(\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, (t - t_0)/2)) + \gamma(\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0, t]}) \end{aligned}$$

Por otra parte, defínase  $\mathcal{X} = (\hat{x}_1^T, x_2^T)^T \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  y fije  $s = t_0$  en (A.14), utilizando el

hecho que  $\|\mathcal{X}\| \leq \|\hat{x}_1(t)\| + \|x_2(t)\|$  y el estimado previo para  $x_1$  entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}\| &\leq \beta_1 (\beta_1 (\|\hat{x}_1(t_0)\|, (t - t_0)/2) + \rho (\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, 0)) \\ &\quad + \gamma (\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0,t]}, (t - t_0)/2) + \rho (\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, (t - t_0)/2)) \\ &\quad + \gamma (\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0,t]}) + \beta_2 (\|x_2(t_0)\|, (t - t_0)). \end{aligned}$$

Posteriormente, utilizando la versión débil de la desigualdad del triángulo<sup>1</sup> [120] podemos verificar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}\| &\leq \beta_1 (3\beta_1 (\|\hat{x}_1(t_0)\|, (t - t_0)/2), (t - t_0)/2) \\ &\quad + \beta_1 (3\rho (\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, 0)), (t - t_0)/2) \\ &\quad + \beta_1 (3\gamma (\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0,t]}, (t - t_0)/2) \\ &\quad + \rho (\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, (t - t_0)/2)) + \gamma (\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0,t]}) \\ &\quad + \beta_2 (\|x_2(t_0)\|, t - t_0) \\ &\leq \beta_1 (3\beta_1 (\|\hat{x}_1(t_0)\|, (t - t_0)/2), (t - t_0)/2) \\ &\quad + \beta_1 (3\rho (\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, 0)), (t - t_0)/2) \\ &\quad + \beta_1 (3\gamma (\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0,t]}, 0) \\ &\quad + \rho (\beta_2 (\|x_2(t_0)\|, (t - t_0)/2)) + \gamma (\|\Delta\omega(\tau)\|_{[t_0,t]}) \\ &\quad + \beta_2 (\|x_2(t_0)\|, t - t_0), \end{aligned} \tag{A.19}$$

donde la última desigualdad en (A.19) se obtiene del hecho que para  $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ , fijando  $s_1$  y asumiendo  $s_3 \leq s_2$ , se tiene que  $\beta_1(s_1, s_2) \leq \beta_1(s_1, s_3)$ . Finalmente la siguiente desigualdad se cumple

$$\|\mathcal{X}\| \leq \beta_{\hat{x}_1} (\|\hat{x}_1(t_0)\|, t - t_0) + \beta_{x_2} (\|x_2(t_0)\|, t - t_0) + \gamma_{\Delta\omega} (\|\Delta\omega\|_{[t_0,t]}) \tag{A.20}$$

con las funciones  $\beta_{\hat{x}_1}, \beta_{x_2} \in \mathcal{KL}$  y  $\gamma_{\Delta\omega} \in \mathcal{K}$  dadas por

$$\begin{aligned} \beta_{\hat{x}_1}(r, q) &= \beta_1 (3\beta_1 (r, q/2), q/2) \\ \beta_{x_2}(r, q) &= \beta_1 (3\rho (\beta_2 (r, 0)), q/2) + \rho (\beta_2 (r, q/2)) + \beta_2 (r, q) \\ \gamma_{\Delta\omega}(r) &= \gamma(r) + \beta_1 (3\gamma(r), 0). \end{aligned} \tag{A.21}$$

<sup>1</sup>Como consecuencia de la propiedad no decreciente de un función  $\zeta \in \mathcal{K}$  cualesquiera y para todo  $a, b \in \mathbb{R}^+$ :

$$\zeta(a + b) \leq \gamma(2a) + \gamma(2b).$$

Es inmediato que la generalización para una función  $\beta \in \mathcal{KL}$  sigue del hecho que al fijar su segundo argumento, esta función es de tipo clase  $\mathcal{K}$  respecto a su segundo argumento.

□

**Observación 25.** *La desigualdad (A.12) utiliza el hecho que el segundo subsistema es (A.11) es asintóticamente estable y donde el origen es su punto de equilibrio.*

# Apéndice B

## Propiedades sobre sistemas de orden fraccionario

En la literatura se puede encontrar una gran cantidad de definiciones sobre operadores de diferenciación e integración de orden fraccionaria [86,102]. En este trabajo utilizaremos el operador de derivada de Caputo. Porque en el problema de condiciones iniciales de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con operador de Caputo, las condiciones iniciales tienen el sentido usual y además la derivada de Caputo una constante es cero como en el caso entero.

**Definición 29.** La derivada de Caputo de orden  $\alpha \in \mathbb{R}$  de una función  $x$  se define como

$$x^{(\alpha)} =_{t_0} D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t x^{(n)}(\tau)(t - \tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad (\text{B.1})$$

donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n - 1 < \alpha < n$  y  $x^{(n)}(\tau)$  es la  $n$ -ésima derivada de  $x(\tau)$  en el sentido usual, donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler.

Existe una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo [128], para intervalos finitos. Este es el caso cuando la integral y la derivada son, respectivamente, la integral de Riemann-Liouville y la derivada de Caputo.

**Definición 30.** La integral de Riemann-Liouville de orden  $\alpha \in \mathbb{R}$  de una función  $x$  se define como

$$x^{(-\alpha)} =_{t_0} I_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t x(\tau)(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad (\text{B.2})$$

donde  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler.

Para simplificar la notación omítase la dependencia del tiempo de  $x$  y en adelante considere  $t_0 = 0$ . El operador secuencial de derivada se define como:

$$\mathcal{D}^{r\alpha}x(t) = \underbrace{{}_t D_t^\alpha \underbrace{{}_t D_t^\alpha \dots}_r \underbrace{{}_t D_t^\alpha}_\alpha x(t)}_{r\text{-times}}$$

esta es la aplicación de la derivada de Caputo  $r \in \mathbb{N}$  veces a  $x$ , note que  $\mathcal{D}^0x(t) = x(t)$ , y con  $r = 1$  entonces  $\mathcal{D}^\alpha x(t) = x^{(\alpha)}$ .

Un sistema no lineal fraccionario invariante en el tiempo se puede representar de la siguiente manera en un modelo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha x(t) &= f(t, x) \\ y(t) &= h(x), \end{aligned} \tag{B.3}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$  y  $y \in \mathbb{R}^p$  son estados, vectores de entrada y salida del sistema, respectivamente, con  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T \in \mathbb{R}^n$ . Las condiciones que aseguran la existencia y unicidad de la solución [31, 52, 72] de (B.3) radican en tomar a  $f \in \mathcal{C}^1$ , lo que implícitamente implica que  $f$  sea Lipschitz<sup>1</sup>. Si  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ , el sistema (B.3) es un sistema de orden fraccionario conmensurado, en caso contrario es de orden inconmensurado.

## B.1. Estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo

**Teorema 11.** (Matignon [74]) Sean  $\alpha < 2$  y  $\bar{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . El sistema autónomo

$$x^{(\alpha)} = \bar{A}x \quad \text{with} \quad x(0) = x_0$$

es asintóticamente estable si y solo si  $|\arg(\lambda_i(\bar{A}))| > \alpha\pi/2$ , donde  $\lambda_i(\bar{A})$  es el  $i$ -ésimo valor propio de la matriz  $\bar{A}$ .  $\square$

**Observación 26.** Un caso particular del Teorema anterior sucede para  $0 < \alpha < 1$ , cuando

<sup>1</sup>En su defecto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  puede considerarse localmente Lipschitz en el conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}$  [25].



la matriz  $\bar{A}$  es Hurwitz matrix, i.e.,

$$|\arg(\lambda_i(A))| > \frac{\pi}{2} > \frac{\alpha\pi}{2}.$$



# Lista de Publicaciones

- Libro:

[B1] Rafael Martínez-Guerra & *Christopher D. Cruz-Ancona*, “**Algorithms of Estimation for Nonlinear Systems: A Differential and Algebraic Viewpoint**”, Springer, 2017.

- Artículos en revista:

[R1] Rafael Martínez-Guerra, *Christopher D. Cruz-Ancona* & Claudia A. Pérez-Pinacho, “**Generalized multi-synchronization viewed as a multi-agent leader-following consensus problem**”, *Applied Mathematics and Computation*, 282: 226-236, 2016.

[R2] *Christopher D. Cruz-Ancona*, Rafael Martínez-Guerra & Claudia A. Pérez-Pinacho, “**Generalized multi-synchronization: A leader-following consensus problem of multi-agent systems**”, *Neurocomputing*, 233: 52-60, 2017.

[R3] *Christopher D. Cruz-Ancona* & Rafael Martínez-Guerra, “**Fractional Dynamical Controllers for Generalized Multi-synchronization of Commensurate Fractional Order Liouvillian Chaotic Systems**”, *Journal of the Franklin Institute*, 354(7): 3054-3096, 2017.

[R4] *Christopher D. Cruz-Ancona*, Rafael Martínez-Guerra & Claudia A. Pérez-Pinacho. “**A leader-following consensus problem of multi-agent systems in heterogeneous networks**”. Sometido para su publicación en Agosto del 2018.

- Artículos de congreso:

[C1] Rafael Martínez-Guerra, Claudia A. Pérez-Pinacho & *Christopher D. Cruz-Ancona*, “**Sincronización Generalizada Mediante Control Dinámico de Sistemas Caóticos de Orden Fraccionario Inconmensurado**”, Conferencia: Congreso Nacional de Control Automático AMCA 2015, Cuernavaca,

- Morelos, Mexico, 2015.
- [C2] Rafael Martínez-Guerra, *Christopher D. Cruz-Ancona* & Claudia A. Pérez-Pinacho, “**Generalized synchronization via multi-agent systems**”, in: Proceedings of the 12th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), Mexico City, October 28–30, 2015.
- [C3] Rafael Martínez-Guerra, *Christopher D. Cruz-Ancona* & Claudia A. Pérez-Pinacho, “**Fractional Observers for a Class of Fractional Commensurate Systems**”, Conferencia: Third Mexican Workshop in Fractional Calculus, at Zacatecas, Zacatecas México, September 11-16, 2016.
- [C4] Rafael Martínez-Guerra, *Christopher D. Cruz-Ancona* & Claudia A. Pérez-Pinacho, “**Estimators for a class of commensurate fractional order systems with Caputo derivative**”, in: Proceedings of the 14th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), October 20–22, 2017.
- [C5] *Christopher D. Cruz-Ancona*, Rafael Martínez-Guerra & Claudia A. Pérez-Pinacho, “**Generalized multi-synchronization of chaotic systems via dynamical control laws: stability of synchronization manifold**”, The 2017 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications, Cancún, México, December 4-7, 2017.
- [C6] Claudia A. Pérez-Pinacho, Rafael Martínez-Guerra & *Christopher D. Cruz-Ancona*, “**Fractional generalized quasi-synchronization of incommensurate fractional order oscillators**”, The 2017 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications, Cancún, México, December 4-7, 2017.

# Bibliografía

- [1] Abarbanel, H. D. I., Rulkov, N. F., & Sushchik, M. M. (1995). Blending chaotic attractors using the synchronization of chaos. *Phys. Rev. E*, 52(1), 214–217.
- [2] Abarbanel, H.+D. I., Rulkov, N. F., & Sushchik, M. M. (1996). Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Phys. Rev. E*, 53(5):4528–4535.
- [3] Afraimovich, V. S., Verichev, N. N., & Rabinovich, M. I. (1986). Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems. *Radiophys. Quantum Electron*, 29(9), 795–803.
- [4] Agiza, H. N., & Yassen, M. T. (2001). Synchronization of Rössler and Chen chaotic dynamical systems using active control. *Phys. Lett. A.*, 278: 191–197.
- [5] Aguilar-López, R., Martínez-Guerra, R., & Perez-Pinacho, C. A. (2014). Nonlinear observer for synchronization of chaotic systems with application to secure data transmission. *The European Physical Journal Special Topics*, 223(8), 1541–1548.
- [6] Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M. A., & Delgado-Aguilera, E. (2016). Adaptive synchronization of fractional Lorenz systems using a reduced number of control signals and parameters. *Chaos, Solitons and Fractals*, 87, 1–11.
- [7] Aguilar-Ibañez, C., Martínez-Guerra, R., Aguilar-López, R. & Mata-Machuca, J. L. (2010). Synchronization and parameter estimations of an uncertain Rikitake system, *Physics Letters A*, 374(35), 3625–3628.
- [8] Angeli, D. (2002). A Lyapunov Approach to Incremental Stability Properties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3), 410–421.
- [9] Arcaç, M. (2007). Passivity as a design tool for group coordination, *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(8), 1380–1390.
- [10] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., & Zhoug, Changsong. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 269, 99–153.

- [11] Ashwin, P., Jorge Buescu, J., & Stewart, I. (1994). Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators, *Phys. Lett. A*, 193, 126–139.
- [12] Atangana, A., & Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2), 763-769.
- [13] Bai, E.-W., & Lonngren, K. E. (1997). Synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(1), 51–58.
- [14] Barajas Ramírez, J. G., Cuéllar Galarza, K. P., & Femat, R. (2012). Generalized synchronization of strictly different systems: Partial-state synchrony, *Chaos, Solitons & Fractals*, 45, 193-204.
- [15] Barahona, M., & Pecora, L. M. (2002). Synchronization in small-world systems. *Phys. Rev. E. Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Top.*, 89(5), 054101.
- [16] Behinfaraz, R., & Badamchizadeh, M. (2016). Optimal synchronization of two different incommensurate fractional-order chaotic systems with fractional cost function. *Complexity*, 21(S1), 401–416.
- [17] Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. L., & Zhou, C. S. (2002). The synchronization of chaotic systems, *Phys. Reports*, 336, 1–101.
- [18] Caputo, M., & Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2), 1–13.
- [19] Cruz-Ancona, C. D., & Martínez-Guerra, R. (2017). Fractional dynamical controllers for generalized multi-synchronization of commensurate fractional order liouvilian chaotic systems. *Journal of the Franklin Institute*, 354(7), 3054–3096.
- [20] Cruz-Ancona, C. D., Martínez-Guerra, R. & Pérez-Pinacho, C. A. (2017). Generalized multi-synchronization: A leader-following consensus problem of multi-agent systems. *Neurocomputing*, 233, 52–60.
- [21] Cruz-Ancona, C. D., Martínez-Guerra, R., & Pérez-Pinacho, C. A. (2017). Generalized multi-synchronization of chaotic systems via dynamical control laws: stability of synchronization manifold. *The 2017 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications*, Cancún, México, December 4-7.

- [22] Cruz-Ancona, C. D., Martínez-Guerra, R. & Pérez-Pinacho, C. A. (2018). A leader-following consensus problem of multi-agent systems in heterogeneous networks. (Sommetido)
- [23] Cuomo, K., & Oppenheim, A. V. (1993). Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.*, 71(1), 65–68.
- [24] Cuomo, K., Oppenheim, A. V., & Strogatz, S. H. (1993). Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Trans. Circuits Sys.*, 40, 626–633.
- [25] Daftardar-Gejji, V., & Jafari, H. (2007). Analysis of a system of nonautonomous fractional differential equations involving Caputo derivatives. *J. Math. Anal. Appl.*, 328, 1026–1033.
- [26] DeLellis, P., di Bernardo, M., & Liuzza, D. (2015). Convergence and synchronization in heterogeneous networks of smooth and piecewise smooth systems. *Automatica*, 56, 1–11.
- [27] Delshad, S. S., Asheghan, M. M., & Beheshti, M. H. (2011). Synchronization of N-coupled incommensurate fractional-order chaotic systems with ring connection. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(9), 3815–3824.
- [28] Deng, W. (2007). Generalized synchronization in fractional order systems, *Physical review E*. 75(5), 056201.
- [29] Denga, C., & Yanga, G. H. (2016). Cooperative adaptive output feedback control for nonlinear multi-agent systems with actuator failures. *Neurocomputing*, 199, 50–57.
- [30] Diethelm, K., Ford, N. J., & Freed, A. D. (2002). A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29(1), 3–22.
- [31] Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer.
- [32] Dörfler, F., & Bullo, F. (2014). Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey. *Automatica*, 50(6), 1539–1564.
- [33] Eckmann, J. P., & Ruelle, D. (1985). Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Reviews Mod. Phys.*, 57(3), 617–656.

- [34] Fliess, M. (1990). Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 35(9), 994–1001.
- [35] Fliess, M., Join, C., & Sira-Ramírez, H. (2005). Closed-loop fault-tolerant control for uncertain nonlinear systems. In *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems* (pp. 217–233). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [36] Godsil, C. D., & Royle, G. (2001). *Algebraic graph theory*. New York: Springer.
- [37] Hale, J. K. (1997). Diffusive coupling, dissipation, and synchronization, *J. Dyn. Diff. Eqns.*, 9(1), 1–52.
- [38] Heagy, J. F., Carroll, T. L., & Pecora L. M. (1995). Desynchronization by periodic orbits. *Phys. Rev. E.*, 52(2), R1253-R1256.
- [39] Heagy, J. F., Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1995). Short wavelength bifurcations and size instabilities in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. Lett.*, 74(21), 4185–4188.
- [40] Herstein, *Álgebra Moderna*, Trillas, 2008.
- [41] Hespanha, J. P., & Morse, A. S. (1999). Stability of switched systems with average dwell-time [Technical report]. Electrical Eng. Dept., Univ. of Southern California.
- [42] Hindmarsh, J. L., & Rose, R. M. (1984). A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 221, 87–102.
- [43] Huang, L., Chen, Q., Lai, Y. C., & Pecora, L. M. (2009). Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 80(3), 036204.
- [44] Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2013). *Matrix Analysis*, 2nd ed., Cambridge University Press.
- [45] Hramov A. E., & Koronovskii, A. A. (2005). Generalized synchronization: A modified system approach. *Phys. Rev. E*, 71, 067201.
- [46] Hristov, J. (2017). Derivatives with non-singular kernels from the Caputo–Fabrizio definition and beyond: appraising analysis with emphasis on diffusion models. *Frontiers in fractional calculus*, 1, 270-342.
- [47] Hunt, B.R., Ott E., & Yorke, J.A. (1997). Differentiable generalized synchronization of chaos, *Phys. Rev. E.*, 55(4), 4029–4034.



- [48] Isidori, A. (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd edition. Springer-Verlag.
- [49] Isidori, A., Marconi, L., & Casadei, G. (2014). Robust output synchronization of a network of heterogeneous nonlinear agents via nonlinear regulation theory. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 59(10), 2680–2691.
- [50] Juan, M., & Xingyuan, W. (2008). Generalized synchronization via nonlinear control, *Chaos* 18: 023108.
- [51] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*, 3rd ed., New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [52] Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). Elsevier.
- [53] Kocarev, L., & Parlitz, U. (1996). Generalized synchronization, Predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11), 1816–1819.
- [54] Kolchin, E. R. (1973). *Differential algebra & algebraic groups*. Vol. 54. Academic press.
- [55] Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer.
- [56] Lin, D., & Wang, X. (2010). Observer-based decentralized fuzzy neural sliding mode control for interconnected unknown chaotic systems via network structure adaptation. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(15), 2066–2080.
- [57] Lin, Y., Sontag, E. D., & Wang, Y. (1996). A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(1), 124–160.
- [58] Lin, Z., Francis, B., & Maggiore, M. (2007). State agreement for continuous time coupled nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 46(1), 288–307.
- [59] Liu, W., & Huang, J. (2017). Adaptive leader-follower consensus for a class of high-order nonlinear multi-agent systems with directed switching networks. *Automatica*, 79, 81–92.
- [60] Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*, Birkhäuser.
- [61] Liuzza, D., Dimarogonas, D. V., di Bernardo, M., & Johansson, K. H. (2016). Distributed model based event-triggered control for synchronization of multi-agent systems, 73, 1–7.

- [62] Lorenz, E. N. (1963). Section of planetary sciences: The predictability of hydrodynamic flow. *Transactions of the New York Academy of Sciences*, 25(4 Series II), 409–432.
- [63] Lynch, N. A. (1997). *Distributed Algorithms*, San Francisco, CA: Morgan Kaufmann.
- [64] Martínez-Guerra, R., & Mata-Machuca, J. L. (2014). Fractional generalized synchronization in a class of nonlinear fractional order systems. *Nonlinear Dynamics*. 77(4), 1237–1244.
- [65] Martínez-Guerra, R. & Mata-Machuca, J. L. (2014). Generalized synchronization via the differential primitive element. *Applied Mathematics and Computation*, 232, 848—857.
- [66] Martínez-Guerra, R., & Mata-Machuca, J. L. (2014). *Fault detection and diagnosis in nonlinear systems: A differential and algebraic viewpoint*. Springer.
- [67] Martínez-Guerra, R., Cruz-Ancona, C. D., & Pérez-Pinacho, C. A. (2015). Generalized synchronization via multi-agent systems. In *proceedings of 12th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, Mexico City, October 28-30, 1–6.
- [68] Martínez-Guerra, R., Pérez-Pinacho, C. A., & Gómez-Cortés, G. C. (2015). *Synchronization of integral and fractional order chaotic systems: A differential algebraic and differential geometric approach with selected applications in Real-time*, Springer.
- [69] Martínez-Guerra, R., Cruz-Ancona, C. D., & Pérez-Pinacho, C. A. (2016). Generalized multi-synchronization viewed as a multi-agent leader-following consensus problem. *Applied Mathematics and Computation*, 282, 226–236.
- [70] Martínez-Guerra, R., Montesinos García, J. J., & Delfin Prieto, S. M. (2016). Secure communications via synchronization of liouvillian chaotic systems. *Journal of the Franklin Institute*, 353(17), 4384–4399.
- [71] Martínez-Guerra, R., & Cruz-Ancona, C. D. (2017). *Algorithms of estimation for nonlinear systems: A differential and algebraic viewpoint*, Switzerland, Cham: Springer, 2017.
- [72] Martínez-Guerra, R., & Pérez-Pinacho, C. A. (2018). *Advances in synchronization of fractional order systems: fundamentals and methods*. Springer.

- [73] Martínez-Martínez, R., Mata-Machuca, J. L., Martínez-Guerra, R., León, J. A., & Fernández-Anaya, G. (2011). Synchronization of nonlinear fractional order systems. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 3338–3347.
- [74] Matignon, D. (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *Proc. of IMACS-SMC, Lille*, 963–968.
- [75] Matos, T., & Wiederhold, P. (2017). *Principios matemáticos para ciencias exactas*, primera edición, Colofón.
- [76] Mesbahi, M., & Egerstedt, M. (2010). *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*, Princenton University Press.
- [77] Montesinos-García, J. J., & Martínez-Guerra, R. (2018). Colour image encryption via fractional chaotic state estimation. *IET Image Processing*, 12(10), 1913–1920.
- [78] Motter, A. E. (2015). Networkcontology. *Chaos*, 25, 097621.
- [79] Nava-Antonio, G., Fernández-Anaya, G., Hernández-Martínez, E. G., Jamous-Galante, J., Ferreira-Vazquez, E. D., & Flores-Godoy, J. J. (2017). Consensus of multi-agent systems with distributed fractional order dynamics. In *IEEE 2017 International Workshop on Complex Systems and Networks (IWCSN)*, 190–197.
- [80] Nijmeijer, H., & Mareels, I. M. Y. (1997). An observer looks at synchronization, *IEEE Trans. Circ. Sys. I: Fundamental Theory and Applications*, 44(10), 882-890.
- [81] Nishikawa, T., & Motter, A. E. (2016). Symmetric states requiring system asymmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 117: 114101.
- [82] Odibat, Z. M., Corson, N., Aziz-Alaoui, M. A., & Bertelle, C. (2010). Synchronization of chaotic fractional-order systems via linear control. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(1), 81–97.
- [83] Olfati-Saber, R., & Murray, R. M. (2003). Consensus protocols for networks of dynamic agents. *Proceedings of American Control Conference*, 951-956.
- [84] Olfati-Saber, R., & Murray, R. M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9), 1520–1533.
- [85] Olfati-Saber, R., Fax, J. A., & Murray, R. M. (2007). Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 215–233.

- [86] Oldham, K. B., & Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Dover Publications.
- [87] Ott, E., & Sommerer, J.C. (1994). Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency, *Phys. Lett. A*, 188, 39–47.
- [88] Panteley, E., & Loria, A. (2015). On practical synchronisation and collective behaviour of networked heterogeneous oscillators, *IFAC-PapersOnLine*, 48(18), 25–30.
- [89] Panteley, E., & Loria, A. (2017). Synchronization and dynamic consensus of heterogeneous networked systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 62(8), 3758–3773.
- [90] Pavlov, A., Pogromsky, A., van de Wouw, N., & Nijmeijer, H. (2004). Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich, *Systems & Control Letters*, 52, 257–261.
- [91] Pavlov, A., van de Wouw, N., & Nijmeijer, H. (2005). *Convergent Systems: Analysis and Synthesis*. In: Meurer T., Graichen K., Gilles E.D. (eds) *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*. Lecture Notes in Control and Information Science, vol 322. Berlin, Heidelberg:Springer.
- [92] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8), 821–825.
- [93] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1991). Driving systems with chaotic signals, *Phys. Rev. A*, 44(4), 2374–2383.
- [94] Pecora, L. M., Carroll, T. L., & Heagy, J. F. (1995). Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings, *Phys. Rev. E*, 52(4), 3420–3441.
- [95] Pecora, L. M., Carroll, T. L., Johnson, G. A., & Mar, D. J. (1997). *Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications*. *Chaos* 7(4), 520–543.
- [96] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1998). Master stability function for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10), 2109–2112.
- [97] Peng, Z., Wang, D., Zhang, H., & Lin, Y. (2015). Cooperative output feedback adaptive control of uncertain nonlinear multi-agent systems with a dynamic leader. *Neurocomputing*, 149, 132–141.
- [98] Petráš, I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, first ed., Springer.

- [99] Pikovsky, A. S., & Grassberger, P. (1991). Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24, 4587–4597.
- [100] Pikovsky, A. S., Rosenblum, M. G., & Kurths, J. (1996). Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, 34(3): 165–170.
- [101] Pikovsky, A. S., Rosenblum M., & Kurths, J. (2001). *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. New York, NY: Cambridge University Press.
- [102] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, first ed., Academic Press, 1999.
- [103] Pyragas, K. (1996). Weak and strong synchronization of chaos. *Phys. Rev. E.*, 54(5), R4508–R4511.
- [104] Qu, Z., Chunyu, J., & Wang, J. (2007). Nonlinear cooperative control for consensus of nonlinear and heterogeneous systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, 2301–2308.
- [105] Razminia, A., & Baleanu, D. (2013). Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control. *Mechatronics*, 23(7), 873–879.
- [106] Ren, W., Beard, R. W., & Atkins, M. (2007). Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control Systems Magazine*, 72–81.
- [107] Ren, W., & Beard, R. W. (2008). *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*. Springer.
- [108] Ritt, J. F. (1950). *Differential algebra*. Vol. 33. American Mathematical Soc.
- [109] Roman, S. (1995). *Field Theory*, Second Edition, Springer.
- [110] Rulkov, N. F., Volkoskii, A. R., Rodriguez-Lozano, A., Del Rio, E., & Velarde, M. G. (1992). Mutual synchronization of chaotic self-oscillators with dissipative coupling. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2(3), 669–676.
- [111] Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S., & Abarbanel, H D. I. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 51(2), 980–994.

- [112] Russo, G., & Di Bernardo, M. (2009). Contraction theory and master stability function: Linking two approaches to study synchronization of complex networks. *IEEE Trans. circ. sys. II: express briefs*, 56(2): 177–181.
- [113] Robinson, C. (2008). What is a chaotic attractor?. *Qual. Th. Dyn. Syst.* 7, 227–236.
- [114] Sandberg, W. I. (1980). Global inverse function theorems. *IEEE Transactions on circuits and systems.* 27(11), 998–1004.
- [115] Sastry, S. S., & Kokotovic, P. V. (1988). Feedback linearization in the presence of uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2(4), 327–346.
- [116] Scardovi, L. & Sepulchre, R. (2009). Synchronization in networks of identical linear systems. *Automatica*, 45, 2557–2562.
- [117] Skjetne, R. (2005). The maneuvering problem [dissertation]. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology.
- [118] Stan, G.-B., & Sepulchre, R. Analysis of interconnected oscillators by dissipativity theory, *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(2), 2561–7270.
- [119] So, P., Ott, E., & Dayawansa, W. P. (1994). Observing chaos: Deducing and tracking the state of a chaotic system from limited observation, *Phys. Rev. E*, 49(4), 2650–2660.
- [120] Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(4), 435–443.
- [121] Stilwell, D. J., Bolt, E. M., & Roberson, D. G. (2006). Sufficient conditions for fast switching synchronization in time-varying network topologies. *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems*, 5(1), 140–156.
- [122] Strogatz, S. H. (2000). From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4), 1-20.
- [123] Strogatz, S. H. (2001). Exploring complex networks. *Nature*, 410(6825), 268–276.
- [124] Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*, 2nd ed., Westview press.
- [125] Strogatz, S. H. (2015). *Sync: How order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life*, 1st ed., Hachette Books.

- [126] Sun, J., Bollt, E. M., & Nishikawa, T. (2009). Master stability functions for coupled nearly identical dynamical systems. *Europhysics Letters*, 85(6), 60011.
- [127] Tang, Y. S., Mees, A. I., & Chua, L. O. (1983). Synchronization and chaos. *IEEE Trans. Circuits and Sys*, 30(9), 620–626.
- [128] Tarasov, V. E. (2010). *Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Berlin Heidelberg: Springer.
- [129] Tavazoei, M. S., & Haeri, M. (2007). A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems. *Phys. Lett. A*, 367, 102–113.
- [130] Tavazoei, M. S., & Haeri, M. (2008). Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(1), 57–70.
- [131] Tavazoei, M. S., & Haeri, M. (2008). Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems. *Phys. D*, 237: 2628–2637.
- [132] Teel, A. R., & Praly, L. (2000). A smooth Lyapunov function from a class-estimate involving two positive semidefinite functions. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 5, 313–367.
- [133] Wang, J., Ma, Q., Chen, A., & Liang, Z. (2015). Pinning synchronization of fractional-order complex networks with Lipschitz-type nonlinear dynamics. *ISA transactions*, 57, 111–116.
- [134] Wang, L., Chen, M. Z. Q., & Wang, Q.-G. (2015). Bounded synchronization of a heterogeneous complex switched network. *Automatica*, 56: 19-24, 2015.
- [135] Wang, Y.-W., & Guan, Z.-H.. (2006). Generalized synchronization of continuous chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27, 97–101.
- [136] Wang, X. Y., & He, Y. (2008). Projective synchronization of fractional order chaotic system based on linear separation. *Physics Letters A*, 372(4), 435–441.
- [137] Wang, X. Y., He, Y. J., Wang, M. J. (2009). Chaos control of a fractional order modified coupled dynamo system. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12), 6126–6134.
- [138] Wang, X. Y., Song, J. M. (2009). Synchronization of the fractional order hyper-chaos Lorenz systems with activation feedback control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(8), 3351–3357.

- [139] Wang, X. Y., & Wang, M. J. (2007). Dynamic analysis of the fractional-order Liu system and its synchronization. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 17(3), 033106.
- [140] Wang, X. Y., & Wang, M. J. (2009). A chaotic secure communication scheme based on observer. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4), 1502–1508.
- [141] Wang, Y., Zhang, H., Wang, X., & Yang, D. (2010). Networked synchronization control of coupled dynamic networks with time-varying delay. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 40(6), 1468–1479.
- [142] Wang, X. Y., Zhang, X., & Ma, C. (2012). Modified projective synchronization of fractional-order chaotic systems via active sliding mode control. *Nonlinear Dynamics*, 69(1), 511–517.
- [143] Watts, D. J. & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks, *Nature*, 393, 440–442.
- [144] Wieland, P., & Allgöwer, F. (2009). An internal model principle for synchronization, 2009 IEEE International Conference In Control and Automation, 285–290.
- [145] Wieland, P. (2010). From static to dynamic couplings in consensus and synchronization among identical and non-identical systems [dissertation], Stuttgart University, Stuttgart.
- [146] Wieland, R., Sepulchre, R. & Allgöwer, F. (2011). An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization. *Automatica*, 47, 1068–1074.
- [147] Wu, F. F., & Desoer, C. A. (1972). Global inverse function theorem. *IEEE Transactions on Circuit Theory*. 19(2), 199–201.
- [148] Wu, X., Lai, D., & Lu, H. (2012). Generalized synchronization of the fractional-order chaos in weighted complex dynamical networks with nonidentical nodes. *Nonlinear Dynamics*, 69(1), 667–683.
- [149] Wu, X., Li, J., & Chen, G. (2008). Chaos in the fractional order unified system and its synchronization. *Journal of the Franklin Institute*, 345(4), 392–401.
- [150] Xie, X. K. (1985). Stable polynomials with complex coefficients. In proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control, 324–325.



- [151] Xu, D., Wang, X., Hong, Y., & Jiang, Z. P. (2016). Global robust distributed output consensus of multi-agent nonlinear systems: An internal model approach. *Systems and Control Letters*, 87, 64-69.
- [152] Yang, S. S., & Duan, C. K. (1998). Generalized synchronization in chaotic systems, *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(10), 1703–1707.
- [153] Zhang, Y., Nishikawa, T., & Motter, A. E. (2017). Asymmetry-induced synchronization in oscillator networks. *Physical Review E*, 95(6): 062215.