



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL

**Unidad Zacatenco**

**Departamento de Control Automático**

**Estabilidad en la ecuación Matricial de Hill:  
Enfoque de Sturm-Liouville**

**T E S I S**

que presenta

**Jorge Tlacaelel Cruz García**

para obtener el Grado de

**Maestro en Ciencias**

en la Especialidad de

**Control Automático**

Director de la Tesis

**Dr. Joaquín Collado Moctezuma**

Ciudad de México

Septiembre 2018



# Resumen

La ecuación de Hill es un ejemplo representativo de los sistemas Lineales Variantes en el Tiempo, que resulta relevante en muchos campos debido a que la ecuación de Hill como conjunto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en general no tiene solución analítica; es por eso que se usan métodos semi-analíticos para encontrar soluciones y regiones de estabilidad. Un caso más general (la ecuación matricial de Hill) es tratada y como el enfoque de la estabilidad de Sturm-Liouville puede ayudar a computar las regiones de estabilidad de ésta. Se usa por primera vez el enfoque de Sturm-Liouville Vectorial para encontrar dichas regiones.



# Abstract

The Hill Equation is a representative example of Linear Invariant Systems, relevant in many fields; as a general set of ODE's it does not have analytic solution; that's why many of the times, semi-analytical methods are used in order to find its solutions and regions of stability. A more general case (the Matricial Hill equation) is discussed and it is shown how the Sturm-Liouville approach may give some advantages for the computation of the Arnold Tongues. The vectorial Sturm-Liouville approach for the computation of these regions is used by the first time ever.



# Agradecimientos

Al CONACyT por la beca brindada para realizar mis estudios.

A mi «agresor»:  
Dr. Joaquín Collado

Por la paciencia, la ayuda suministrada  
por el consejo preciso y lo más importante.

A mi madre:  
María Cristina García Torres

Por el apoyo brindado, los extenuantes viajes,  
las interminables esperas, la gentil caricia  
y el regaño ganado.

A mi Hermana:  
Cristina Yolotzin Cruz García

Por llenarme de dicha y alegría, con una bella sonrisa.

A mis amigos:  
Los viejos y los nuevos,

Cada uno tal cual es, ya sea  
apoyando en la medida de sus capacidades,  
incitándome a ser la mejor versión de mi  
que puedo ser; escuchando o platicando,  
alentando o regañando, compartiendo o exigiendo.

A los pokeamigos:

En particular a la pokébanda, por los ratos de ocio,  
diversión y sano entretenimiento; durante las incursiones  
que parecían excursiones, en la caza de legendarios y perfectos.

VIII

A mi compañerito Saúl:

Por presentarme los inventos del hombre blanco.

“He ofendido a Dios y a la humanidad porque mi trabajo no tuvo la calidad que debía haber tenido.” Leonardo Da Vinci



# Índice general

Índice de Figuras	x
Índice de Tablas	xii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Resonancia y Resonancia Paramétrica . . . . .	1
1.1.1. ¿Cómo se modela la resonancia paramétrica? . . . . .	1
1.2. Perspectivas de Control . . . . .	2
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo . . . . .	5
2.1.1. Teoría de Floquet . . . . .	6
2.2. Sistemas Hamiltonianos . . . . .	7
2.3. Teoría de Sturm-Liouville . . . . .	9
2.3.1. Condiciones de Frontera periódicas, anti-periódicas y twisted .	10
2.3.2. Espacio vectorial del problema de Sturm-Liouville . . . . .	11
2.3.3. Operador de Sturm-Liouville . . . . .	11
2.4. Ecuación de Hill . . . . .	11
2.4.1. Casos Particulares . . . . .	12
2.4.2. Lenguas de Arnold . . . . .	13
<b>3. Antecedentes</b>	<b>15</b>
3.1. Propiedades de la Ecuación de Hill . . . . .	15
3.2. Estabilidad de la Ecuación de Hill . . . . .	15
3.2.1. Mallado . . . . .	16
3.2.2. Integradores Simpléticos . . . . .	18
<b>4. Ecuación Matricial de Hill de 2 grados de libertad</b>	<b>21</b>
4.0.1. Mallado . . . . .	22
4.0.2. Sturm-Liouville . . . . .	22
<b>5. Resultados</b>	<b>27</b>
5.1. Validación . . . . .	27
5.2. Pruebas de Desempeño . . . . .	31

<b>6. Ejemplo de Aplicación</b>	<b>35</b>
<b>Referencias</b>	<b>38</b>

# Índice de Figuras

1.1.	Gráfica de soluciones típicas que presentan resonancia(azul) y resonancia paramétrica (rojo). . . . .	2
1.2.	Niño columpiándose, la variación de la extensión de sus piernas es equivalente a la variación de la longitud de un péndulo y por tanto es una excitación paramétrica. . . . .	3
1.3.	Esta grúa es un ejemplo de un sistema real modelable mediante la ecuación de Hill con oportunidad de aplicaciones al control. . . . .	4
2.1.	Ejemplo de condiciones de frontera periódica (a) y de anti-periódicas o $2T$ -periódicas (b). . . . .	10
2.2.	Diagrama de Ince-Strutt de la ecuación de Meissner, sombreando regiones inestables. . . . .	13
2.3.	Diagrama de Ince-Strutt de la ecuación de Mathieu, sombreando regiones inestables. . . . .	14
3.1.	Representación gráfica de la estrategia de mallado para la construcción del dagrama de Ince-Strutt. Para cada $\alpha, \beta$ en la malla (habitualmente rectangular) se encuentra si es estable o inestable. . . . .	17
3.2.	Representación gráfica del engrosamiento de las superficies límites, en (a) del eje imaginario y en (b) de la circunferencia unitaria. Las marcas rojas no son consideradas como estables en ningún esquema; las azules, originalmente inestables, son estables una vez engrosados los límites; mientras que las verdes siempre son tomadas como estables. . . . .	18
3.3.	En (a) se muestra el diagrama de Ince-Strutt con el mallado, añadiendo los contornos de las lenguas obtenido por S-L (en magenta e interlineado T-periódicas y en cian continuo con $2T$ -periódicas), en (b) Amplificación (a) en el que se presenta un problema que tiene el mallado (se corrige con el engrosamiento) y en (c) otra ampliación de (a) con el problema de mallado que se resuelve (parcialmente) con el uso de la teoría de Sturm-Liouville. . . . .	20

4.1.	Regiones de estabilidad en Blanco; Rojo para algún $\mu < -1$ ; Verde para algún $\mu > 1$ ; Amarillo para un $\mu < -1$ con otro $\mu > 1$ ; Magenta para 2 eigenvalores $< 1$ ; para 2 eigenvalores $> 1$ y Azul para 2 eigen valores complejos conjugados fuera de la circunferencia unitaria.(Presentada con permiso del Autor). . . . .	23
4.2.	Diagramas de Ince-Strutt para la ecuación de Meissner en (a) usando Diferencias Finitas Centradas de segundo orden y en (b) Runge-Kutta de segundo orden. . . . .	24
5.1.	Diagramas de Ince-Strutt para la ecuación de Meissner en (a) y la de Mathieu en (b), soluciones T-periódicas en azul y 2T-periódicas rojo. . . . .	28
5.2.	Diagramas de Ince-Strutt para $A = \text{diag}([1 \ 2])$ , $B = I_2$ y $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ , se usa el código de color de la Figura 4.1. En (a) se superponen las fronteras encontradas por S-L con el mallado, mientras que en (b) se colorea dentro de las fronteras. . . . .	29
5.3.	Diagramas de Ince-Strutt para $A = \text{diag}([1 \ 2])$ , $B = A + \eta$ y $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ , se usa el código de color de la Figura 4.1. En (a) se superponen las fronteras encontradas por S-L con el mallado, mientras que en (b) se colorea dentro de las fronteras. . . . .	30
5.4.	Diagramas de Ince-Strutt para $A = \text{diag}([1 \ 2])$ , $B = A + \eta$ y $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ , se usa el código de color de la Figura 4.1 con mallado para lenguas de combinación y SL para las demás. . . . .	31
5.5.	Fronteras de las lenguas de Arnold para distintos valores de $N$ y $\mathbf{p}$ . En negro $\mathbf{p} = 8$ , en rojo $\mathbf{p} = 4$ y en azul $\mathbf{p} = 2$ . . . . .	32
5.6.	Error porcentual relativo a $N = 1000$ para $\mathbf{p} = 2$ en verde, $\mathbf{p} = 4$ en azul y $\mathbf{p} = 8$ en rojo . . . . .	33
5.7.	Tiempo de cómputo en segundos para $\mathbf{p} = 2$ en verde, $\mathbf{p} = 4$ en azul y $\mathbf{p} = 8$ en rojo . . . . .	34
6.1.	Sistema de masas y resortes con 2 grados de libertad. . . . .	35
6.2.	Diagrama de Ince-Strutt de (6.1) para $m = 1$ y $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ . . . . .	36

# Índice de Tablas

4.1. Tabla con los coeficientes en diferencias finitas centradas $(c(h, \mathfrak{p}))$ para $y^{(n)}_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c(h, \mathfrak{p}) y_{k+h}$ con precisión $\mathfrak{p}$ . . . . .	25
5.1. Primeros 8 valores de $\alpha$ para $\beta = 5h$ y distintos $N$ con $\mathfrak{p} = 2$ . . . . .	32
5.2. Primeros 8 valores de $\alpha$ para $\beta = 5h$ y distintos $N$ con $\mathfrak{p} = 4$ . . . . .	33
5.3. Primeros 8 valores de $\alpha$ para $\beta = 5h$ y distintos $N$ con $\mathfrak{p} = 8$ . . . . .	34



# Capítulo 1

## Introducción

Los modelos permiten abstraer las propiedades y características de objetos reales, extender la visión que se tiene de algún ente, así como desarrollar intuición sobre el comportamiento del mismo, sobre todo, permiten predecir el comportamiento de los sistemas reales. Por lo que resulta importante estudiar modelos que nos den información de comportamientos interesantes, uno de éstos es la *Resonancia Paramétrica*, que al igual que su prima, la *Resonancia*, inestabilizan al sistema. Motivo por el cual se estudian éstos fenómenos con el fin de evitarlos o potenciarlos, según sea el caso. En las siguientes secciones se describirán dichos comportamientos.

### 1.1. Resonancia y Resonancia Paramétrica

La principal diferencia entre estas dos, y la causante de las demás distinciones es que, mientras que la Resonancia es producida por el forzamiento del sistema en cuestión (normalmente entendido como una entrada), la resonancia paramétrica es producida por la *Excitación Paramétrica*, una variación periódica de uno de los parámetros del sistema, lo cual conduce a comportamientos completamente distintos.

Por un lado la envolvente de la resonancia es una recta, o en general un polinomio; en tanto que la de la resonancia paramétrica es una exponencial como ilustra la Figura 1.1; es decir, aunque ambas tienden a infinito una lo hace mucho más lento que la otra y por ende es más peligrosa. La resonancia ocurre para un conjunto de valores determinados que la exciten (sus condiciones son igualdades en los parámetros), en tanto que la resonancia paramétrica presenta condiciones de desigualdades; por tanto es también mucho más complicado librarse de esta. Por último y quizá más importante, la resonancia paramétrica es propia del sistema, por lo que si no entendemos las causas de ésta no podremos impedirla o aprovecharla, según convenga.

#### 1.1.1. ¿Cómo se modela la resonancia paramétrica?

Champneys en [1] ofrece un interesante artículo en el que trata este tema con mucha más elocuencia, en el que nos prueba que hasta en el simple columpiar de un

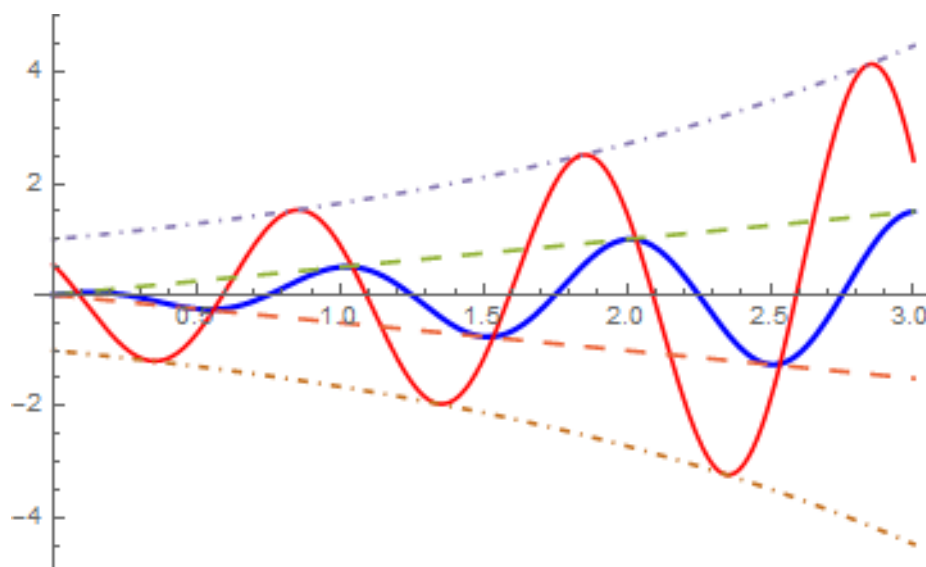


Figura 1.1: Gráfica de soluciones típicas que presentan resonancia (azul) y resonancia paramétrica (rojo).

niño (ver Figura 1.2) hay excitación paramétrica y que lo que lo impulsa es de hecho la resonancia paramétrica producida por el infante; para ángulos pequeños el modelo que describe el comportamiento es la ecuación de Mathieu (que es un caso particular de la ecuación de Hill, como se verá más adelante).

## 1.2. Perspectivas de Control

Más allá del interés académico que el estudio de la estabilidad de la ecuación de Hill pueda tener, ésta posee algunas interesantes aplicaciones, sobre todo porque es común encontrar sistemas que presenten alguna excitación paramétrica, que se suele despreciar o linealizar en el valor medio de esta variación, tales como: la maquinaria que opera sobre el mar (por los altibajos de la marea. Ver Figura 1.3), un espectrógrafo de masas de cuadrupolos (en su relación carga-masa) o los potenciales periódicos en la ecuación de Schrödinger propios de cristales, etc.

Todos estos sistemas, y en general cualquiera donde alguno de sus parámetros varíe de forma periódica puede ser expresado con una ecuación de Hill. Si se deseara controlar alguno, es fundamental poder analizar su estabilidad primeramente (independientemente de los controles a lazo abierto que este enfoque puede proporcionar). Y es que, la clase de sistemas lineales variantes en el tiempo contiene a los lineales invariantes en el tiempo y por ende cualquier optimización que se haga en los segundos contiene necesariamente a los primeros; dicho de otro modo, en la medida en que aprendamos a diseñar controladores para sistemas variantes en el tiempo, podremos diseñar controladores que, a lo menos, sean tan buenos como los invariantes en el tiempo. Por supuesto que para llegar a este punto falta aún bastante, sin embargo es



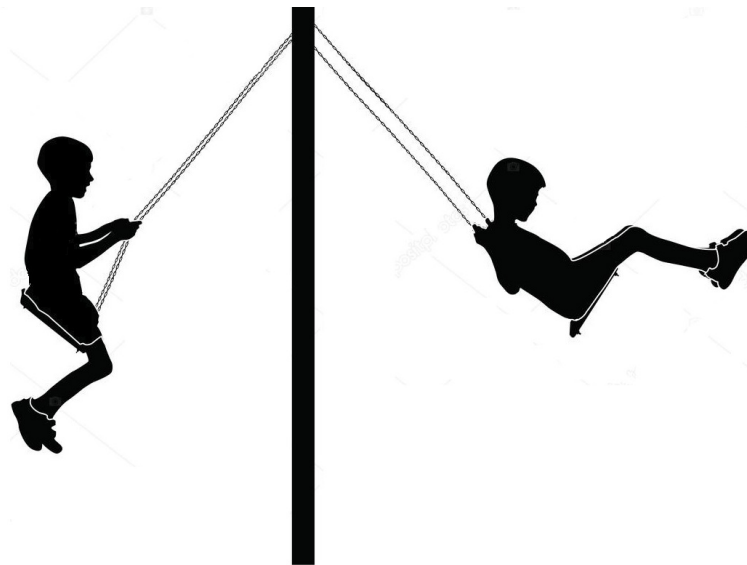


Figura 1.2: Niño columpiándose, la variación de la extensión de sus piernas es equivalente a la variación de la longitud de un péndulo y por tanto es una excitación paramétrica.

importante dar los primeros pasos y la ecuación de Hill es uno de los caminos más prometedores.

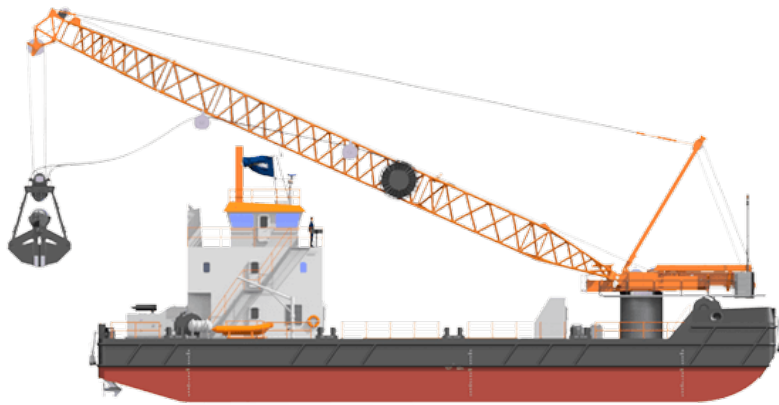


Figura 1.3: Esta grúa es un ejemplo de un sistema real modelable mediante la ecuación de Hill con oportunidad de aplicaciones al control.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se introducirán algunos conceptos claves y frecuentes para explicar qué es y cómo se determina la estabilidad de la ecuación de Hill.

### 2.1. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo

En general un *Sistema Lineal Variante en el Tiempo Autónimo* puede describirse por (2.1), donde  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ .

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

En [2, p. 108]<sup>1</sup> se definen las siguientes propiedades de la matriz de transición de estados ( $\Phi(t, t_0)$ ) asociada a (2.1):

- a)  $\Phi(t, t_0) = I_m \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$ .
- c)  $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$ .
- d)  $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$ .
- e)  $\forall \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^m$ , la solución de (2.1) es  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)$ .

**Observación.** Aunque se describen como propiedades básicas, en [3, pp. 3-7] se define mediante la Serie de Peano-Baker obtenida mediante el método de aproximaciones sucesivas de Picard y estas propiedades son deducidas. Por otra parte (a) puede ser probada usando (c) con  $t_2 = t_0 = t$  y (b), mientras que (d) puede deducirse de usar (e)  $m$  veces con  $\mathbf{x}(t_0) = \text{col}_i(I_m)$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

---

<sup>1</sup>Si bien en [2] (d) está descrita como definición y solo se enlistan (a), (b) y (c), se añade (e) debido a su uso frecuente.

Un sistema como (2.1) puede transformarse en otro de la misma clase (2.2) eligiendo un cambio de coordenadas  $\mathbf{z}(t) = P(t)\mathbf{x}(t)$ , sin embargo, es debido a la cantidad de posibilidades que de hecho puede transformarse a cualquier otro tipo de sistema, en particular  $\bar{A}(t) = 0_{m \times m}$ , así que con el fin de preservar propiedades de estabilidad, se es más restrictivo con  $P(t)$ .

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\dot{P}(t)P^{-1}(t) + P(t)A(t)P^{-1}(t)}_{\bar{A}(t)} \mathbf{z}. \quad (2.2)$$

**Definición 2.1.1.** Una transformación como la de (2.2) se dice **Transformación de Lyapunov** si  $P(t)$  satisface que:

- $P(t)$  es no singular  $\forall t \in \mathbb{R}$ .
- $P(t) \in C^1$ .
- $P(t)$  y  $\dot{P}(t)$  están acotadas en  $\mathbb{R}$ .

**Observación.** Los cambios de coordenadas efectuados en los sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo son una transformación de Lyapunov.

**Definición 2.1.2.** Dos sistemas (2.1) y (2.2) se dicen **Equivalentes en el sentido de Lyapunov** si la transformación de coordenadas entre ambos es una **Transformación de Lyapunov**.

**Teorema 2.1.1.** De [4, p. 107] sean (2.1) y (2.2) equivalentes en el sentido de Lyapunov por la transformación  $P(t)$ , entonces (2.1) es exponencialmente estable si y solo si (2.2) es exponencialmente estable.

*Demostración.* Por la transformación  $P$  y por (e) se tiene que  $\mathbf{z} = \Phi_z(t, t_0)\mathbf{z}_0 = P(t)\Phi_x(t, t_0)P^{-1}(t_0)\mathbf{z}_0$  y al existir y estar acotadas tanto  $P(t)$  como  $P^{-1}(t)$ , (2.1) es estable si y solo si (2.2) lo es también; lo exponencialmente estable se debe a que ambos son sistemas lineales y, por ende de orden exponencial.  $\square$

**Definición 2.1.3.** Un sistema (2.1) se dice **Reducible en el sentido de Lyapunov** si es equivalente en el sentido de Lyapunov a un sistema (2.2) con  $\bar{A}(t) = \text{constante}$ .

### 2.1.1. Teoría de Floquet

Si además  $A(t) = A(t + T)$  de (2.1), se dice que el sistema es *Lineal T-Periódico* y es posible usar el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.2. (Floquet)** Sea un Sistema Lineal T-Periódico con matriz de transición de estados  $\Phi(t, t_0)$ , entonces

$$\Phi(t, t_0) = P^{-1}(t) e^{R(t-t_0)} P(t_0), \quad (2.3)$$

donde  $P(t) = P(t + T)$ ,  $R \in \mathbb{C}^{m \times m}$  siendo  $R$  constante no necesariamente real, aún cuando  $A(t)$  lo sea.

**Corolario 2.1.2.1.** En particular, si  $t_0 = 0$ , a causa de (a) que  $P(0) = I_m$ .

$$\Phi(t, 0) = P^{-1}(t) e^{Rt}. \quad (2.4)$$

**Definición 2.1.4.** La **Matriz de Monodromía**  $M$  para un sistema lineal periódico se define como la matriz de transición de estados evaluada entre un periodo y cero, es decir:

$$M = \Phi(T, 0). \quad (2.5)$$

Ahora se puede enunciar el siguiente teorema para Sistemas Lineales T-Periódicos:

**Teorema 2.1.3.** El sistema (2.1) con  $A(t) = A(t + T)$  es reducible en el sentido de Lyapunov.

*Demostración.* Siendo  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$  el sistema que se reduce mediante  $P(t)$  de (2.4) se encuentra que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix} \underbrace{\dot{P}(t)}_{Re^{Rt}\Phi^{-1}(t,0)+e^{Rt}\dot{\Phi}^{-1}(t,0)} & +P^{-1}(t) + P(t)A(t)P^{-1}(t) \end{pmatrix} \mathbf{z} \\ &= \begin{pmatrix} \cancel{RP(t)P^{-1}(t)} \xrightarrow{I_m} & \cancel{-P(t)A(t)P^{-1}(t) + P(t)A(t)P^{-1}(t)} \end{pmatrix} \mathbf{z}. \\ \dot{\mathbf{z}} &= R\mathbf{z}. \end{aligned}$$

□

## 2.2. Sistemas Hamiltonianos

En general se le denomina *Sistema Hamiltoniano* a un sistema de ecuaciones diferenciales de orden par descrito por (2.6), donde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  se le denomina el *Hamiltoniano*, siendo una función suave y real en el abierto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ; con  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\dot{\mathbf{q}}^T = \frac{\partial \mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}; \quad \dot{\mathbf{p}}^T = -\frac{\partial \mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.6)$$

Siendo  $\mathbf{q}$  el vector de posiciones generalizadas,  $\mathbf{p}$  el vector de momentos generalizados y  $n$  el numero de grados de libertad del sistema, como se explica en [5, p. 2]. Cuando  $\mathcal{H}$  no depende del tiempo, se dice que el sistema es *conservativo* y  $\mathcal{H}$  es un invariante a lo largo de todas las trayectorias del sistema.

En particular, nos interesan los sistemas Hamiltonianos (lineales) que pueden ser expresados de forma cuadrática (2.7), pues permiten reescribir (2.6) como (2.8) con

$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -I_n & 0_{n \times n} \end{pmatrix}$ . De donde es claro que si un sistema lineal variante en el tiempo ( $\dot{x} = A(t)x(t)$ ) satisface que  $A(t) = J_n H(t)$  con  $H(t) = H^T(t)$

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \mathbf{p}^T \end{bmatrix} H(t) \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = JH(t) \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

A continuación se presentan algunos teoremas y definiciones útiles que se encuentran en [5] y [6, pp. 49-50].

**Definición 2.2.1.** Una matriz  $A(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  se dice **Matriz Hamiltoniana**, si  $A(t) = J_n H(t)$  con  $H(t)$  Hermítica, o equivalentemente  $A^T J_n + J_n A = 0_{2n \times 2n}$ . Un sistema como (2.1) se dice **Sistema Lineal Hamiltoniano** si su matriz  $A(t)$  es **Matriz Hamiltoniana**.

**Observación.** Note que los sistemas Hamiltonianos necesariamente son de dimensión par no nula y que  $J$  satisface que  $J^{-1} = J^T = -J$  y  $J_n^2 = -I_{2n}$ .

**Teorema 2.2.1.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  una **Matriz Hamiltoniana** y  $\lambda \in \sigma(A) \implies -\lambda \in \sigma(A)$ . Dicho de otro modo los eigenvalores de una **Matriz Hamiltoniana** son simétricos respecto al eje imaginario.

*Demostración.*  $A = J_n^{-1} - A^T J_n \implies \sigma(A) = \sigma(-A^T) = -\sigma(A^T) = -\sigma(A)$   $\square$

**Definición 2.2.2.** Una matriz  $M(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  se dice **Matriz Simpléctica** si  $M^T J_n M = J_n$ . Notése que  $\det(M) = \pm 1$  y por tanto no singular, pues  $\det(J_n) = 1$ .

**Teorema 2.2.2.** Sea  $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  una **Matriz Simpléctica** y  $\lambda \in \sigma(A) \implies \lambda^{-1} \in \sigma(A)$ .

**Observación.** De este hecho se deriva que el espectro de esta matriz es simétrico respecto a la circunferencia unitaria y de ahí que el polinomio característico de esta sea **palíndromo**.

*Demostración.*  $M^T J_n M = J_n \xrightarrow{J_n^{-1}(\cdot)M^{-1}} J_n^{-1} M^T J_n = M^{-1} \implies \sigma(M) = \sigma(M^{-1}) = \sigma^{-1}(M)$   $\square$

**Teorema 2.2.3.** La matriz de transición de estados es una **Matriz Simpléctica** si y solo si el sistema es **Lineal Hamiltoniano**.

*Demostración.*

$\implies$ )

Sea  $\Phi(t, t_0)$  la matriz de transición de estados asociada a  $\dot{x} = A(t)x$ , si es simpléctica  $\implies \Phi^T(t, t_0) J \Phi(t, t_0) = J$ . Derivando ambos términos respecto a  $t$ :

$$\frac{d}{dt} (\Phi^T(t, t_0) J \Phi(t, t_0)) = \Phi^T(t, t_0) (A^T J + J A) \Phi(t, t_0) = 0_{2n \times 2n}.$$

$\therefore A$  es Hamiltoniana.

$\impliedby$ )

$A = \dot{\Phi}^T(t, t_0) \Phi^{-1}(t, t_0)$  es Hamiltoniana  $\implies A^T J + J A = 0 \xrightarrow{\Phi^T(t, t_0)(\cdot)\Phi(t, t_0)}$

$$\Phi^T(t, t_0) J \dot{\Phi}(t, t_0) + \dot{\Phi}^T(t, t_0) J \Phi(t, t_0) = \frac{d}{dt} (\Phi^T(t, t_0) J \Phi(t, t_0)) \implies$$

$\Phi^T(t, t_0) J \Phi(t, t_0) = \text{constante}$ . En particular para  $t = t_0 \implies$

$$\Phi^T(t, t_0) J \Phi(t, t_0) = \cancel{\Phi^T(t_0, t_0)} \xrightarrow{I_{2n}} J \cancel{\Phi(t_0, t_0)} \xrightarrow{I_{2n}} = J.$$

$\therefore \Phi(t, t_0)$  es Simpléctica.

□

## 2.3. Teoría de Sturm-Liouville

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma (2.9) sobre el soporte  $[a, b]$  se denomina *Ecuación de Sturm-Liouville* si  $p(t) > 0$ ,  $\dot{p}(t)$ ,  $q(t)$  y  $w(t) > 0$  son reales y continuas sobre el ya mencionado soporte.

$$\frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dy}{dt} \right) + q(t) y = \lambda w(t) y. \quad (2.9)$$

Si se definen unas condiciones de contorno o frontera que pueden escribirse como en (2.10)[7, pp. 8-9] y se encuentran los valores de  $\lambda$  para los cuales (2.9) tiene solución no trivial, se está resolviendo el problema de Sturm-Liouville, en adelante denominado PSL.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \end{pmatrix}}_{\text{De rango completo (2)}} \begin{pmatrix} y(a) \\ \dot{y}(a) \\ y(b) \\ \dot{y}(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

### 2.3.1. Condiciones de Frontera periódicas, anti-periódicas y twisted

Las condiciones de frontera torcidas se definen como [8, p. 21] en (2.11). Note que éstas tienen sentido solo si la función periódica es de promedio cero ( $\int_a^b y(t) dt = 0$ ) como ratifica la Figura 2.1 si el sistema tiene 2 o más grados de libertad.

$$\begin{aligned} y(a) &= \mu y(b). \\ \dot{y}(a) &= \mu \dot{y}(b). \\ p(a) &= p(b). \\ \mu \in \mathbb{C}, |\mu| &= 1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

En particular para  $\mu = 1$  éstas se denominan periódicas y para  $\mu = -1$  anti-periódicas, como ilustra la Figura 2.1; las condiciones de frontera twisted son una generalización de (2.10).

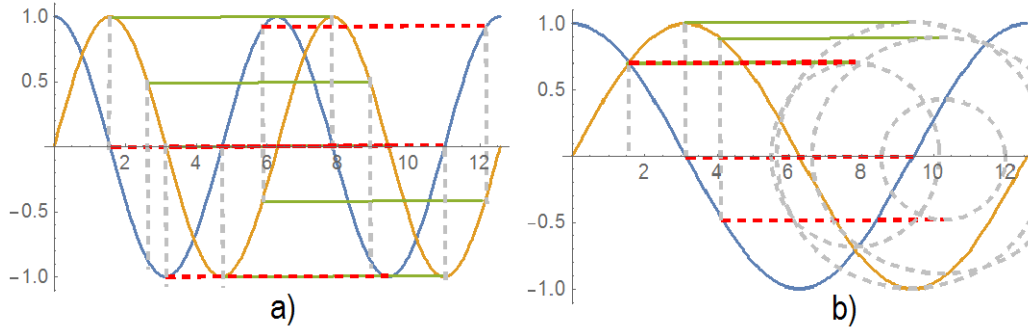


Figura 2.1: Ejemplo de condiciones de frontera periódica (a) y de anti-periódicas o 2T-periódicas (b).

La solución periódica o anti-periódica al PSL está dada por un teorema en [9, pp. 238-240], en donde se hace uso de la matriz de monodromía, en particular de su traza, que suele recibir el nombre de función discriminante del polinomio característico, debiendo ésta ser  $\pm 2$  con el fin de dar solución al PSL.

**Teorema 2.3.1.** *Si la función  $f(\alpha, \beta)$  para cualquier constante  $\beta$  es entera de orden  $\frac{1}{2}$ , la ecuación  $f(\alpha, \beta) = \pm 2$  tiene una infinidad de soluciones. Debido a que para  $\alpha_0, \beta_0$  suficientemente negativos  $\Phi(\alpha_0, \beta_0) > 0$ , con el eventual aumento de  $\alpha$  se soluciona  $f(\alpha, \beta_0) = 2$  y así se encuentra otro con uno o dos de multiplicidad.*

Es decir, existen dos secuencias:

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad \text{para } f(\alpha, \beta_0) = 2,$$

y



$$\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 \leq \bar{\lambda}_4 < \dots \quad \text{para } f(\alpha, \beta_0) = -2.$$

O más compactamente en (2.12):

$$\lambda_0 < \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \bar{\lambda}_3 \leq \bar{\lambda}_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (2.12)$$

### 2.3.2. Espacio vectorial del problema de Sturm-Liouville

Es importante señalar que el conjunto de soluciones al PSL forman un espacio vectorial con producto interior denotado como  $L_{SL}^2 \subset L^2$ , siendo este último el espacio de todas las funciones cuadráticamente integrables en el soporte  $[a, b]$ , es decir  $f(t) : \int_a^b w(t)|f(t)|^2 dt < \infty$ . El producto interior con peso  $w(\cdot)$ ,  $w(t) > 0 \forall t \in [a, b]$  se define en (2.13), mientras que la norma que éste induce se expresa en (2.14).

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_a^b f^*(t)w(t)g(t) dt. \quad (2.13)$$

$$\|f\|^2 \triangleq \int_a^b f^*(t)w(t)f(t) dt. \quad (2.14)$$

### 2.3.3. Operador de Sturm-Liouville

Si las funciones que solucionan el PSL son vectores (son elementos de un espacio vectorial), entonces tiene sentido reescribir (2.9) como (2.15), tornándose en un problema de eigenvalores y eigenfunciones.

$$\underbrace{\frac{1}{w(t)} \left[ \frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{d}{dt} \right) + q(t) \right]}_{\mathcal{L}(y)} y = \lambda y. \quad (2.15)$$

En esta notación resulta evidente el porqué a los  $\lambda$  para los que existe la solución se denominan *eigenvalores* y las  $y(t)$  asociadas a cada  $\lambda$  reciben el nombre de *eigenfunciones*.

## 2.4. Ecuación de Hill

La ecuación de Hill, en adelante denominada EH, descrita por primera vez en [10, p. 5] como se expresa en (2.16) es una ecuación diferencial lineal de coeficientes periódicos en el tiempo de segundo orden usada para expresar el movimiento de la órbita lunar, donde  $\theta$  es un parámetro que varía periódicamente en el tiempo.

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \theta w = 0, \quad (2.16)$$

$\theta$  suele escribirse como  $\alpha + \vartheta(t)$ , donde  $\alpha = \int_0^T \theta(t) dt$  cuando se varía  $\alpha$  se dice que tiene un parámetro, para añadir otro puede optarse por hacer  $\beta = \frac{\int_0^T \theta(t) - \alpha dt}{\|\theta(t) - \alpha\|} =$

$\frac{\int_0^T \vartheta(t) dt}{\|\vartheta(t)\|}$ , que conduce a la habitual  $\theta(t) = \alpha + \beta q(t)$ . Notése que ahora  $q(t)$  tiene promedio cero y norma 1. Con estos 2 parámetros puede dibujarse un diagrama  $\alpha, \beta$  en el que se indique para cada par  $(\alpha, \beta)$  si el sistema es estable, al que se le denomina *Diagrama de Ince-Strutt*.

### 2.4.1. Casos Particulares

Existen varios casos con  $q(t)$  definidos que pueden han sido estudiados ampliamente, los 2 ejemplos prototípicos son la ecuación de Meissner y la de Mathieu.

#### Ecuación de Meissner

Esta es una ecuación de Hill para  $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ , que junto con un tren de impulsos, una función elíptica (ecuación de Lamé), o cuando es piezo lineal; constituyen los único 4 caso excepcionales en los que hay solución analítica. Por lo que en caso que  $q(t)$  no sea alguna de estas se debe calcular **numericamente** la matriz de monodromía, y después usar los resultados analíticos de estabilidad.

En [6, p. 55] se menciona que la solución detallada se encuentra en [11, pp. 276-278]. La matriz de monodromía queda como:

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \cos(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) - \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}} \sin(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \sin(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) & \\ -\sqrt{\alpha+\beta} \sin(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \cos(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) - \sqrt{\alpha-\beta} \cos(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \sin(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) & \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} \sin(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \cos(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) + \frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} \cos(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \sin(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) & \\ \cos(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \cos(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) - \frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}} \sin(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \sin(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) & \end{pmatrix}.$$

Al ser un sistema Hamiltoniano, su polinomio característico es palíndromo y por ende lo que determinará la estabilidad es el coeficiente del término lineal, es decir, la traza de  $M$  siendo ésta el discriminante al que hace referencia el teorema en [9], como se expresa a continuación:

$$|\text{tr}(M)| = \left| 2 \cos(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \cos(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) - \left[ \frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}} \right] \sin(\pi\sqrt{\alpha+\beta}) \sin(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) \right| = 2.$$

#### Ecuación de Mathieu

Ésta es una EH para  $q(t) = \cos(t)$ , es particularmente útil en el campo de la Física para expresar problemas con simetría elíptica como muestra [12]. Su solución ésta dada por una combinación lineal de las funciones especiales  $w_I$  y  $w_{II}$  que se definen en [13].

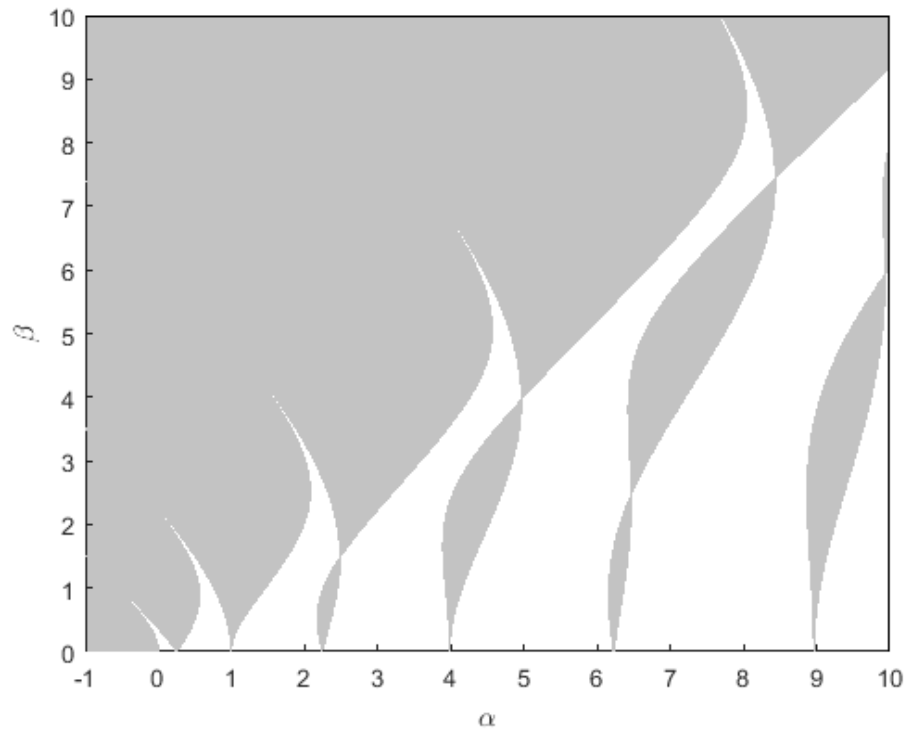


Figura 2.2: Diagrama de Ince-Strutt de la ecuación de Meissner, sombreado regiones inestables.

### 2.4.2. Lenguas de Arnold

Usando esta información es posible graficar las regiones de estabilidad e inestabilidad en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . A estas gráficas se les denominan diagramas de Ince-Strutt, se muestra el de Meissner en la Figura 2.2 y el de Mathieu en la Figura 2.3.

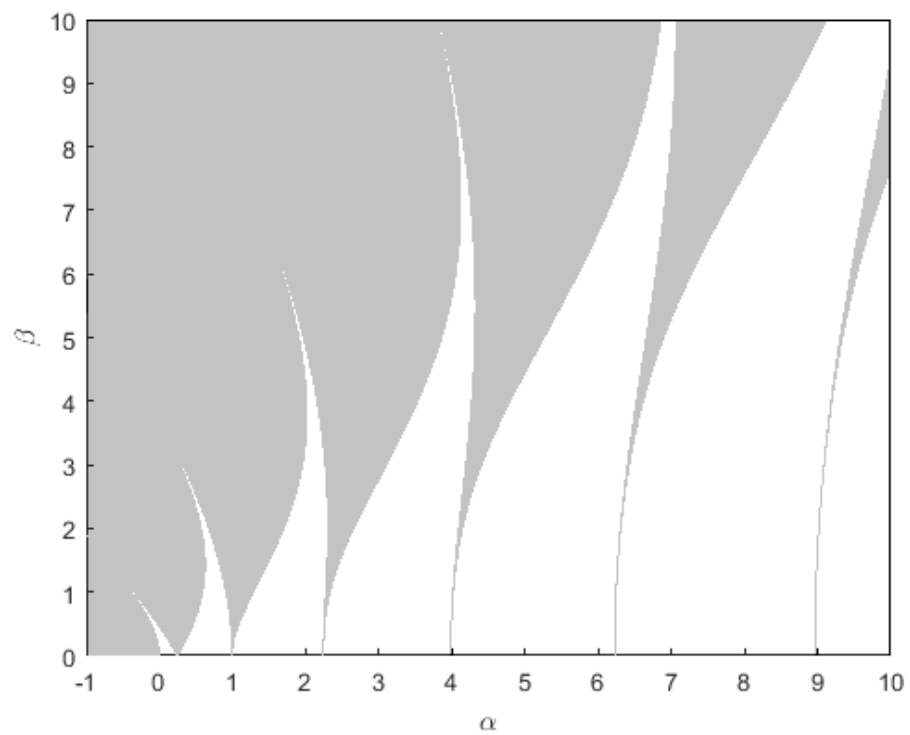


Figura 2.3: Diagrama de Ince-Strutt de la ecuación de Mathieu, sombreado regiones inestables.

# Capítulo 3

## Antecedentes

En este capítulo se procurará explicar brevemente que esfuerzos se han realizado en pos de estudiar la estabilidad de la EH. Si bien la EH fue introducida desde 1886 en [10], su estudio había sido intermitente hasta hace 3 décadas, de hecho el motor de búsqueda del Cinvestav (que incluye trabajos desde 1958 hasta 2018) solo reporta 415 para estabilidad de la ecuación de Hill (9,629 si solo se busca Ecuación de Hill, que puede confundirse con su homónima de bioquímica) resultados comparados con 75,221 de control adaptable, fuzzy con 169,665 o incluso estocástico con 90,016 resultados.

### 3.1. Propiedades de la Ecuación de Hill

La particularidad de no poder establecer soluciones analíticas en términos de funciones elementales representa un reto para el estudio de esta ecuación diferencial, por lo que en muchas publicaciones se tratan de encontrar propiedades de ésta que sean relativamente fáciles de calcular.

**Definición 3.1.1.** *En un Diagrama de Ince-Strutt si una línea separa una región predominantemente estable de otra predominantemente inestable, recibe el nombre de **Línea Crítica**.*

**Definición 3.1.2.** *Se dice que un par  $(\alpha, \beta)$ , es un **Punto de Coexistencia** si los eigenvalores de la matriz de monodromía son ambos 1 ó  $-1$ , resultando en 2 soluciones  $T$ -periódicas ó  $2T$ -periódicas linealmente independientes, respectivamente.*

### 3.2. Estabilidad de la Ecuación de Hill

Primeramente hay que recalcar que la ecuación de Hill representa a un sistema Hamiltoniano, cuyo Hamiltoniano está expresado en (3.1), lo cual garantiza la simetría de sus eigenvalores respecto al eje Imaginario, impidiendo así la estabilidad asintótica y obligándonos a usar el concepto de señales acotadas como definición de estabilidad.

$$H(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta q(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

**Definición 3.2.1.** Se dice que las soluciones de una EH son **estables** si están **acotadas**, es decir, si los eigenvalores de la matriz de monodromía están contenidos en la circunferencia unitaria.

Se sabe que para  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  su polinomio característico es  $\mu^2 - \text{tr}(M)\mu + \det(M)$ , pero como se sabe, al ser Hamiltoniano este polinomio debe ser palíndromo ( $\det(M) = 1 = \mu_1\mu_2$ ) resultando la ecuación característica en (3.2) cuyas raíces se escriben en (3.3).

$$\mu^2 - \text{tr}(M)\mu + 1 = 0 \quad (3.2)$$

$$\mu_{1,2} = \frac{\text{tr}(M) \pm \sqrt{\text{tr}(M)^2 - 4}}{2} \quad (3.3)$$

Notése que el término  $\sqrt{\text{tr}(M)^2 - 4}$  determina el tipo de eigenvalores que tendrá la matriz de monodromía, por lo que se le denomina *discriminante*. Como el número 4 es una constante, lo que determina las características de los eigenvalores (y por consiguiente el tipo de estabilidad) es la  $\text{tr}(M)$  como se indica a continuación:

- $|\text{tr}(M)| > 2$   
Los eigenvalores son reales y distintos, y como el polinomio es palíndromo la norma de uno es mayor a uno, en tanto que el de la otra es menor a uno. Por lo que las soluciones son inestables.
- $|\text{tr}(M)| = 2$   
Los eigenvalores son 1 ó  $-1$ , por lo que las soluciones son inestables (pero muy cercanas a la estabilidad, a menos que corresponda aun punto de coexistencia).
- $|\text{tr}(M)| < 2$   
Los eigenvalores son complejos conjugados sobre la circunferencia unitaria, por lo que las soluciones son estables.

Ya que existen diversas formas de verificar estas condiciones, a continuación se expresan algunas de las estrategias computacionales empleadas para resolverlo.

### 3.2.1. Mallado

Si se quiere realizar un diagrama que indique las regiones de estabilidad, lo más intuitivo es probar punto a punto y colorear en virtud de las características de dicho punto, ya sea mediante la matriz de monodromía (en cuyo caso solo hay que calcular  $m$  soluciones de condiciones iniciales linealmente independientes a lo largo de un

periodo) o con el acotamiento de las soluciones (en tal caso hay que resolver las mismas  $m$  veces pero no hay un tiempo necesario). La representación gráfica de esta estrategia se muestra en la Figura 3.1.

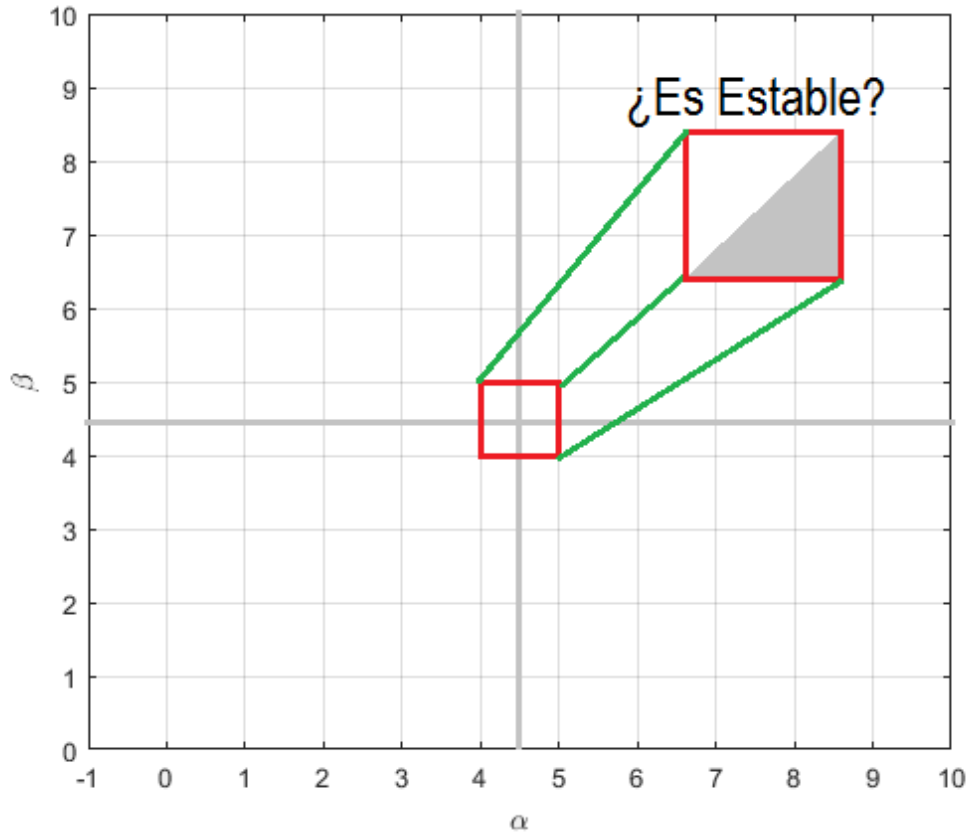


Figura 3.1: Representación gráfica de la estrategia de mallado para la construcción del diagrama de Ince-Strutt. Para cada  $\alpha, \beta$  en la malla (habitualmente rectangular) se encuentra si es estable o inestable.

Este enfoque es conceptualmente simple y transparente, sin embargo, presenta algunos inconvenientes que a continuación se enlistan:

- 1.- Dependiendo de la envolvente de la señal, se resolverá en la suficiente cantidad de periodos para notar un aumento notorio de la amplitud (de aquí que se opte por siempre usar la matriz de monodromía). Mientras que si los eigenvalores de la matriz de monodromía están muy cerca de la circunferencia unitaria puede entenderse como que están sobre ésta.
- 2.- En ambos casos se acercan de un área (dimensión 2) a una sola línea (dimensión 1), lo cual puede o no coincidir exactamente debido a un error de redondeo. Esto conlleva a que las fronteras no estén bien definidas.
- 3.- Como no hay solución analítica general es imprescindible usar un método numérico.

- 4.- El duplicar la resolución de la imagen cuadruplica el número de operaciones a realizar, aumentando significativamente el tiempo de ejecución.

Para solucionar el primer problema se opta por elegir el enfoque de la matriz de monodromía, a fin de limitarse a un periodo y eligiendo el método numérico adecuado se reduce este inconveniente a la precisión del método en cuestión.

En cuanto al segundo, suele optarse por «engrosar» las fronteras introduciendo un error adicional, como se muestra en la Figura 3.2.

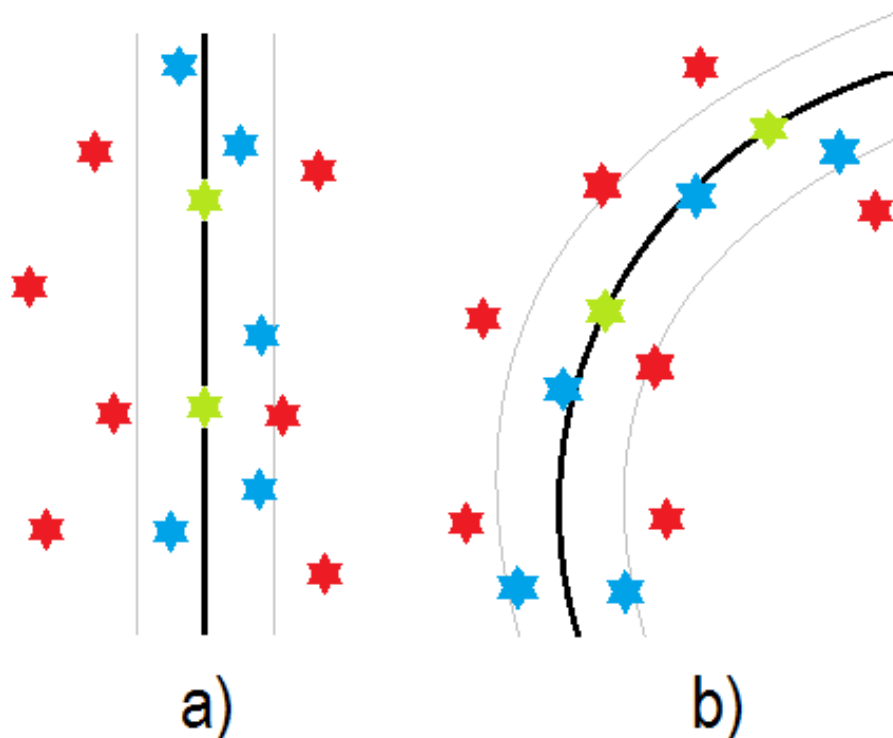


Figura 3.2: Representación gráfica del engrosamiento de las superficies límites, en (a) del eje imaginario y en (b) de la circunferencia unitaria. Las marcas rojas no son consideradas como estables en ningún esquema; las azules, originalmente inestables, son estables una vez engrosados los límites; mientras que las verdes siempre son tomadas como estables.

### 3.2.2. Integradores Simplécticos

Para resolver el tercero hay que recordar que la matriz de transición de estados, y por consiguiente la de monodromía, es una matriz simpléctica; de donde surge la necesidad de usar un método numérico que preserve esta simplecticidad.

**Definición 3.2.2.** *Un Integrador Simpléctico es un método de integración numérica para sistemas Hamiltonianos, tales que mantienen la hamiltoniedad del sistema con la evolución del tiempo, lo que implica reversibilidad.*



Existen muchos integradores Simpléticos, en [14] se incluyen varios ejemplos y se prueba cómo mantienen la simplecticidad. Si no se elige uno de éstos, las señales del sistema aproximado (por el método numérico) evoluciona de una forma muy distinta, por ejemplo en simulaciones celestes las órbitas no se mantienen (ya sea perdiendo o ganando energía).

## Procesamiento en GPU

El cuarto problema no tiene forma de sortearse, sin embargo existe una solución tecnológica para disminuir significativamente el tiempo de procesamiento, ésta es el uso de aceleración mediante GPU (Graphics Processing Unit), como se describe detalladamente en [15], el uso de los GPU's puede reducir el tiempo de cómputo por factores mayores a 500.

Desafortunadamente el uso de esta tecnología implica la pérdida de arreglos y matrices manipulables a voluntad, permitiendo el uso de determinadas operaciones; aunque el uso de bucles está permitido, se pierde toda la ganancia de tiempo (comúnmente aumentando el tiempo de ejecución aún más que el original), lo mismo que el uso de funciones que no operen término a término o funcionen gracias a recursividad. Forzando así el cambio en el paradigma de programación.

## Sturm-Liouville

El estudio de las regiones de estabilidad con Sturm-Liouville es otro enfoque usado para determinar las regiones de estabilidad e inestabilidad de una EH, para empezar se reescribe (2.15) como (3.4) con  $w(t) \equiv 1$ ,  $p(t) \equiv 1$  y  $q(t) = q(t)$ . Este tema ha sido ampliamente estudiado en [16].

$$\mathfrak{L} = \frac{d^2}{dt^2} + \beta q(t), \quad (3.4)$$

de donde se obtienen los  $\lambda = -\alpha$  que tienen solución periódica o anti-periódica, estos  $\alpha$  representan justamente las fronteras de estabilidad y por tanto aportan información invaluable de la frontera de las lenguas de Arnold. El problema ahora radica en resolver un problema de dimensión infinita (recordando (2.12)), que como ya fue mencionado, dependiendo de  $q(t)$  tiene o no solución analítica; para ello se emplea la aproximación de discretización (3.5), transformando el problema de dimensión infinita en uno de dimensión finita. Los alcances y resultados de este enfoque se encuentran descritos en [17].

$$y_k = y(k\tau), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \text{ y } \frac{\tau}{T} \ll 1. \quad (3.5)$$

Puede ahora cuestionarse si vale la pena, pues esta discretización se realiza términos más o términos menos en todo método numérico por mallado; pero hay que destacar que solo hay que encontrar los eigenvalores de una matriz de dimensión

$N = \frac{T}{\tau}$  y se encuentran  $N$  fronteras de lenguas para un solo  $\beta$ , es decir, solo se necesita efectuar el barrido en  $\beta$ , ahorrando así tiempo de calculo y reduciendo el error en las fronteras (problema 1) como muestra la Figura 3.3.

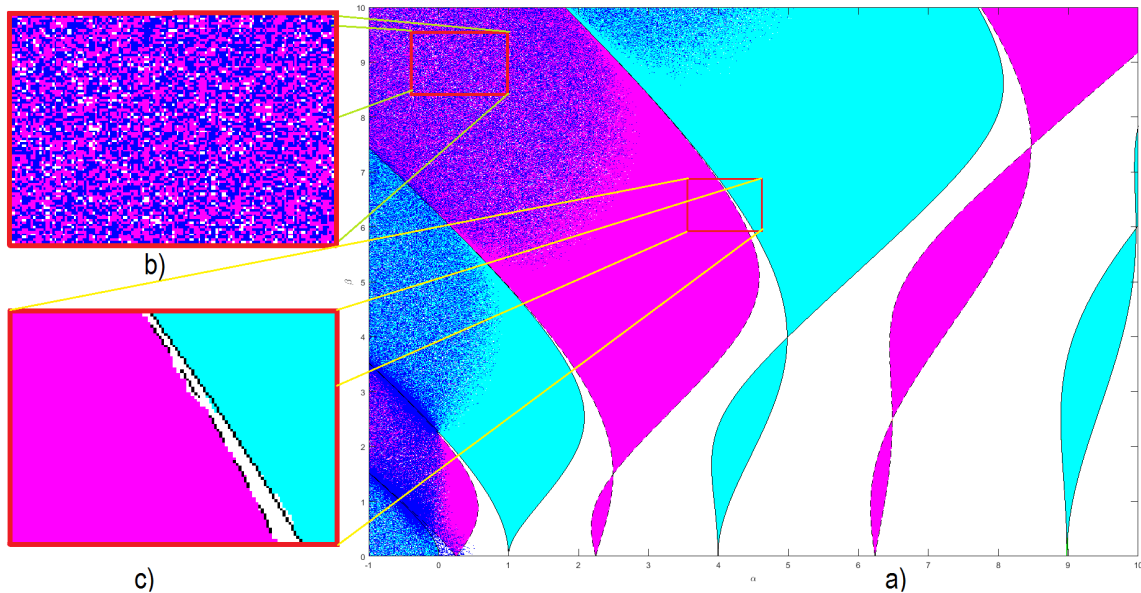


Figura 3.3: En (a) se muestra el diagrama de Ince-Strutt con el mallado, añadiendo los contornos de las lenguas obtenido por S-L (en magenta e interlineado T-periódicas y en cian continuo con 2T-periódicas), en (b) Amplificación (a) en el que se presenta un problema que tiene el mallado (se corrige con el engrosamiento) y en (c) otra ampliación de (a) con el problema de mallado que se resuelve (parcialmente) con el uso de la teoría de Sturm-Liouville.

## Capítulo 4

# Ecuación Matricial de Hill de 2 grados de libertad

Esta es una generalización de la ecuación de Hill de 2 grados de libertad que se empleará en este escrito de ahora en adelante como (4.1). Siendo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $A = A^T > 0$ ,  $B = B^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\int_0^T q(t)dt = 0$ .

$$\ddot{\mathbf{y}} + [\alpha A + \beta Bq(t)]\mathbf{y} = \mathbf{0}_2. \quad (4.1)$$

Se estudia su representación en variables de estados usando  $\mathbf{x} = (y_1 \ y_2 \ \dot{y}_1 \ \dot{y}_2)^T$  y por ende se obtiene (4.2). Cabe destacar que las condiciones de simetría de  $A$  y  $B$  son las que permiten que el sistema sea Hamiltoniano ( $H(t) = H^T(t)$ ) y herede todas las propiedades descritas en el capítulo 2.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ -\alpha A - \beta Bq(t) & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ -I_2 & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}}_{J_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha A + \beta Bq(t) & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_2 \end{pmatrix}}_{H(t)} \mathbf{x}. \quad (4.2)$$

En este punto es conveniente mostrar cómo se ve afectada la ecuación de Hill con una transformación un poco más general  $T = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} = T(t)$ , que bajo  $\mathbf{z} = T\mathbf{y}$  y usando (4.1) y (2.2), se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{T} & 0_{2 \times 2} \\ \ddot{T} & \dot{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ -T^{-1}\dot{T}T^{-1} & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} T & 0_{2 \times 2} \\ \dot{T} & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ -\alpha A - \beta Bq(t) & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ -T^{-1}\dot{T}T^{-1} & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ (\ddot{T} - 2\dot{T}T^{-1}\dot{T} - \alpha TA - \beta TBq(t))T^{-1} & 2\dot{T}T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

↓ con  $\dot{T} = 0_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ -\alpha T A T^{-1} - \beta T B T^{-1} q(t) & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Como se puede observar ningún cambio de coordenadas estático  $\dot{T} = 0_{2 \times 2}$  modifica el tipo de ecuación, es decir, la ecuación diferencial resultante vuelve a ser una Ecuación de Hill matricial de 2 grados de libertad (con otras  $\bar{A} = T A T^{-1}$  y  $\bar{B} = \frac{T B T^{-1} + (T B T^{-1})^T}{2}$ ). De aquí que siempre se puede diagonalizar (o por lo menos triangularizar) una de las 2 matrices.

Por otro lado la variabilidad  $T$  no permite hacer más cosas, por ejemplo, resolviendo  $\ddot{T} = 2\dot{T}T^{-1}\dot{T} + \alpha T A + \beta T B q(t)$  si  $T \in C^1$  y está acotada, entonces puede identificarse la estabilidad de las soluciones considerando el  $\dot{T}T^{-1}$ , pues la ecuación diferencial se reduce a  $\ddot{\mathbf{z}} = 2\dot{T}T^{-1}\dot{\mathbf{z}}$ .

#### 4.0.1. Mallado

Como se observó en el capítulo anterior, el mallado permite colorear las regiones de estabilidad, en el caso de la EH escalar (cuando basta con 2 colores), sin embargo, la cantidad de casos aumenta significativamente cuando corresponden más dimensiones (en nuestro caso 2), este análisis se puede ver con detenimiento en [6, pp. 60-63], estableciéndose la Figura 4.1 con un código de colores y la posición de los eigenvalores de la matriz de monodromía.

Para identificar qué color debe asignarse a cada pixel se emplea un mapeo ( $\rho = \lambda + \lambda^{-1}$ ) usado en [18, p. 1041], que transforma el polinomio original  $\lambda^4 - \mathcal{A}\lambda^3 + \mathcal{B}\lambda^2 - \mathcal{A}\lambda + 1$  en un polinomio reducido  $\rho^2 - \mathcal{A}\rho + \mathcal{B} - 2$  con los valores de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  dados por (4.4), obteniéndose así las regiones descritas la Figura 4.1, siendo  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente.

$$\mathcal{A} = \text{tr}(M) \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \frac{\text{tr}(M)^2 - \text{tr}(M^2)}{2}. \quad (4.4)$$

#### 4.0.2. Sturm-Liouville

Para extender el trabajo de [16] a 2 grados de libertad, hay que definir (2.15) para este caso, sujeta a la misma discretización (3.5). Para lo cual hay que comenzar reescribiendo (2.9) en virtud de algún método numérico. Esta elección es particularmente importante, pues de ésta depende bastante el resultado final. Para ilustrar esto, en la Figura 4.2 se comparan los diagramas de Ince-Strutt para la ecuación de Meissner con 2 métodos numéricos (la diferencia radica en que mientras que Diferencias Finitas Centradas preserva la forma Hamiltoniana del sistema, Runge-Kutta no lo hace).

¿Porqué elegir este Integrador Simpléctico y no cualquier otro? Simplemente porque usar otros como Verlet o Leapfrog implica usar puntos intermedios de la dis-

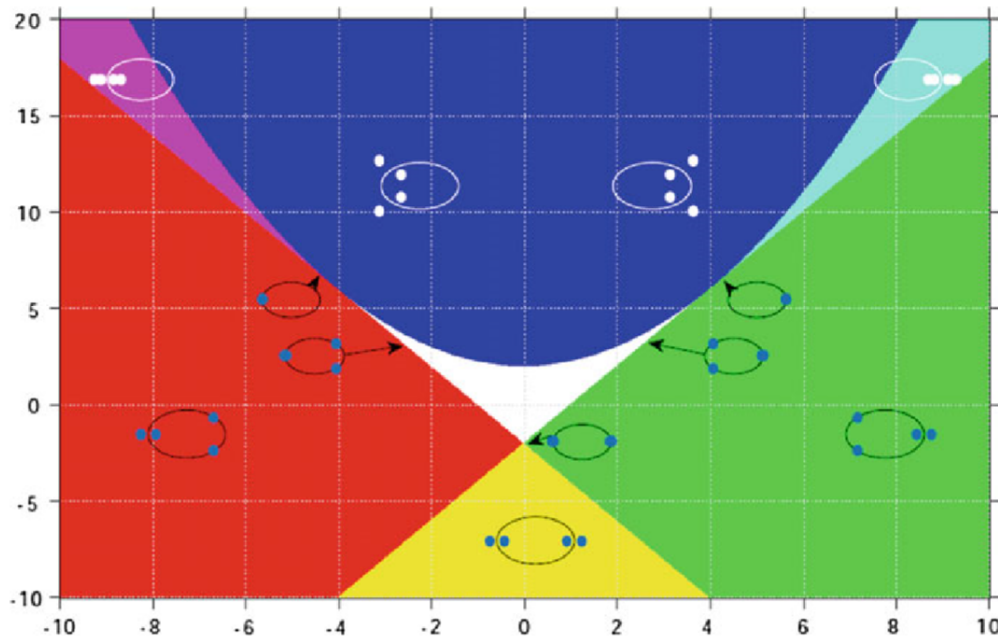


Figura 4.1: Regiones de estabilidad en Blanco; Rojo para algún  $\mu < -1$ ; Verde para algún  $\mu > 1$ ; Amarillo para un  $\mu < -1$  con otro  $\mu > 1$ ; Magenta para 2 eigenvalores  $< 1$ ; para 2 eigenvalores  $> 1$  y Azul para 2 eigen valores complejos conjugados fuera de la circunferencia unitaria. (Presentada con permiso del Autor).

cretización, tales como  $(k \pm \frac{1}{2}) \tau$  además que su implemetación ha generado buenos resultados como en [17].

### Diferencias Finitas Centradas

Las diferencias finitas son expresiones de la forma  $y(t + b) - y(t + a)$  que se usan para aproximar funciones. Cuando  $|a| = |b|$  se dicen centradas, pues no se «carga» hacia algún lado, sino que permanece centrada, esto da sentido de reversibilidad y de ahí que se preste para calcular la estabilidad de la EH. En [19, p. 702] se encuentra el desarrollo de estas aproximaciones para distintos tipos de discretización, para la nuestra los resultados se encuentran en la Tabla 4.1, siendo  $n$  el orden de la derivada y  $p$  la precisión de la aproximación.

### Operador

Para construir el operador se debe llevar (4.1) a una ecuación con la forma de (2.15) multiplicando por un factor  $(A^{-1})$  por la izquierda), resultando así (4.5).

$$\underbrace{A^{-1}\ddot{\mathbf{y}} + \beta A^{-1}Bq(t)\mathbf{y}}_{\mathcal{L}(\mathbf{y})} = \underbrace{-\alpha}_{\lambda} \mathbf{y}. \tag{4.5}$$

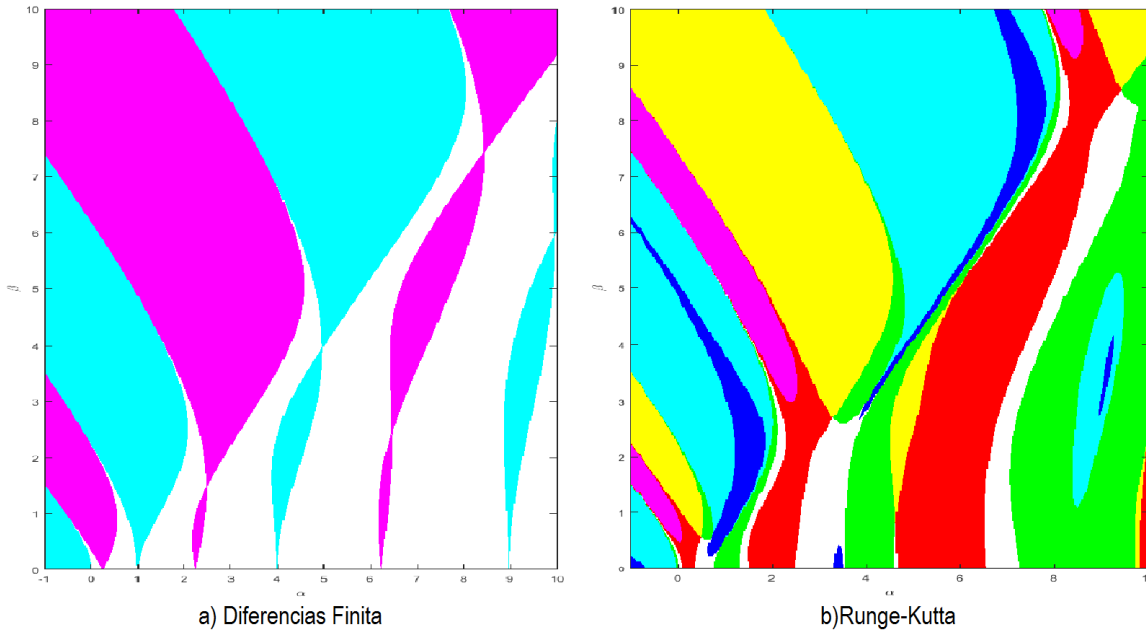


Figura 4.2: Diagramas de Ince-Strutt para la ecuación de Meissner en (a) usando Diferencias Finitas Centradas de segundo orden y en (b) Runge-Kutta de segundo orden.

**Observación.** Note que se puede usar  $A = \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 \\ 0 & w_2^2 \end{pmatrix}$  diagonal sin pérdida de generalidad por(4.3), en tanto que  $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix}$  quedando finalmente (4.6).

$$\underbrace{(w_1^{-2} \quad w_1^{-2}) \ddot{\mathbf{y}} + \beta (A^{-1}B) \mathbf{y}}_{\mathfrak{L}(\mathbf{y})} = \underbrace{-\alpha}_{\lambda} \mathbf{y} \quad (4.6)$$

Con esta relación y los coeficientes de la Tabla 4.1 puede ahora construirse el operador (notése que ahora son 2 señales las que deben ser aproximadas,  $x_1$  y  $x_2$ , junto con sus respectivas derivadas), como no se requiere la primera derivada, la precisión dependerá de que precisión queramos usar.

Para esto se considera a  $C_h = c(h, \mathbf{p})$ , el vector renglón de los coeficientes  $c$  de las diferencias finitas centradas con  $\mathbf{p}$  como la precisión, obteniéndose el Operador de Sturm-Liouville aproximado en notación compacta (usando el producto Kronecker) en (4.7).

$$\mathfrak{L} \approx \underbrace{A^{-1} \otimes C/h^2}_{L_0} + \beta \underbrace{A^{-1}Bq_k}_{L_1}. \quad (4.7)$$

**Definición 4.0.1.** Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ , entonces el **producto Kronecker**

n	p	h								
		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	∞	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	4	0	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	0	0
	6	0	$-\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$	0
	8	$\frac{1}{280}$	$-\frac{4}{105}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{105}$	$-\frac{1}{280}$
2	2	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
	4	0	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$	0	0
	6	0	$\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{49}{18}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$	0
	8	$-\frac{1}{560}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$

Tabla 4.1: Tabla con los coeficientes en diferencias finitas centradas ( $c(h, p)$ ) para  $y^{(n)}_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c(h, p) y_{k+h}$  con precisión  $p$ .

$A \otimes B \in \mathbb{C}^{mp \times nq}$  está dado por:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Ahora se debe escribir para todas las  $k$  de la discretización en un periodo, es aquí cuando se usan las condiciones de frontera torcidas (2.11) para simplificar la notación se usa la matriz de Toeplitz.

**Definición 4.0.2.** Sea  $T \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , se dice **Matriz de Toeplitz** si  $\forall t_{ij} = [T]_{ij}$ ,  $t_{i,j} = t_{i+1,j+1}$ , es decir  $T$  es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{pmatrix}.$$

Para compactar notación suele decirse que  $T = \text{Toeplitz}([a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i])$

$$\mathfrak{L} \approx \underbrace{A^{-1} \otimes D}_{L_0} + \underbrace{A^{-1}B \otimes \text{diag}(q_k)}_{L_1} \tag{4.8}$$

$$h^2D = \text{Toeplitz} (C_0 \ C_1 \cdots C_{p/2} \ 0 \cdots 0 \ \mu^*C_{-p/2} \ \mu^*C_{1-p/2} \cdots \mu^*C_{-2} \ \mu^*C_{-1})$$

**Observación.** Note que en (4.5) no se hace uso de las dimensiones de  $A$  ó  $B$  por lo que en principio dicha expresión funciona para grados de libertad superiores

Ahora por (4.5) podemos determinar los valores de  $\alpha$  para los cuales hay fronteras T-periódicas para  $\mu = 1$  y 2T-periódicas para  $\mu = -1$ , lo que delimita las lenguas de Arnold en todas las regiones en las que los eigenvalores que salgan de la circunferencia unitaria, lo hagan por  $\pm 1$ . Un problema adicional radica en que cuando aumentamos un grado de libertad los eigenvalores pueden salir de la circunferencia unitaria no solo en  $\pm 1$  a lo que se le conoce como *colisión de Krein* y es en estos casos donde no se pueden encontrar las fronteras de las lenguas de Arnold.

El problema con estas colisiones es que al abandonar en un eigenvalor real, las soluciones no tienen una frecuencia definida y, por tanto, el método de Sturm-Liouville no determina las lenguas de Arnold de este tipo, a no ser que se conozcan las  $\mu_k$  para la que escapan, y aun así, si la solución no es *KT*-periódica ( $K$  es irracional), entonces no hay forma de que se puedan obtener estas lenguas.



# Capítulo 5

## Resultados

Los métodos descritos en el capítulo anterior fueron programados en MATLAB y ejecutados con Windows 7 en Intel Xeon E5607 @2.27GHz, en este capítulo se muestran los resultados obtenidos y algunos comentarios al respecto.

### 5.1. Validación

Con el objetivo de validar los programas, éstos fueron probados para reproducir los resultados de un grado de libertad con lo reportado en [20] y [17]. Eligiendo  $A = B = 1$  se obtiene la EH de un grado de libertad y, por ende, eligiendo la función periódica respectiva, se obtienen los diagramas de Ince-Strutt para las ecuaciones de Meissner y Mathieu en la Figura 5.1. Se produce el mismo resultado para  $A = B = I_2$ , solo que el tiempo de cómputo se multiplica por un factor de 9.

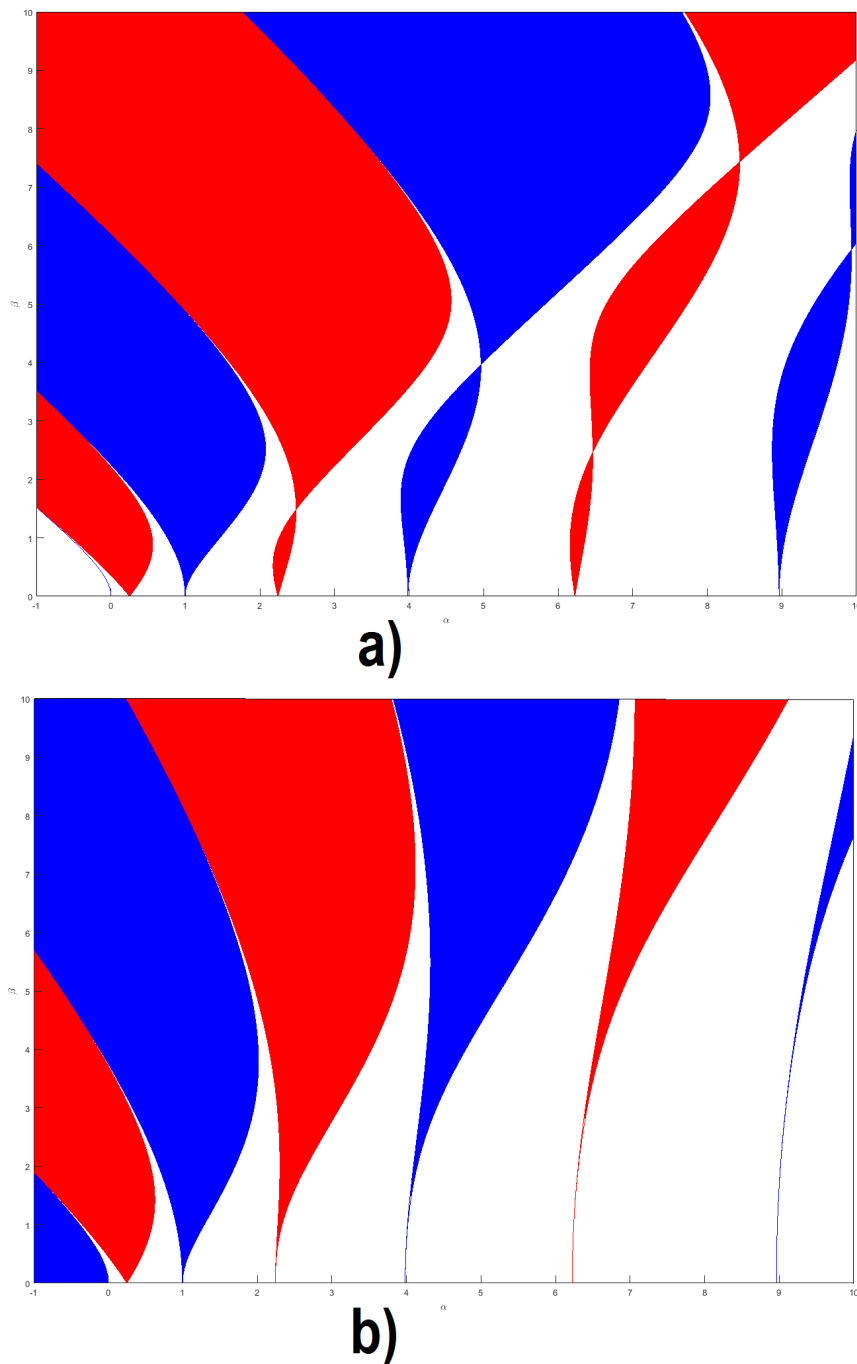


Figura 5.1: Diagramas de Ince-Strutt para la ecuación de Meissner en (a) y la de Mathieu en (b), soluciones T-periódicas en azul y 2T-periódicas rojo.

Para continuar con la validación se procedió a elegir una  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  diagonal, con el fin de observar ahora dos pares de lenguas de la misma forma pero trasladados unos respecto a los otros, el resultado se muestra en la Figura 5.2.

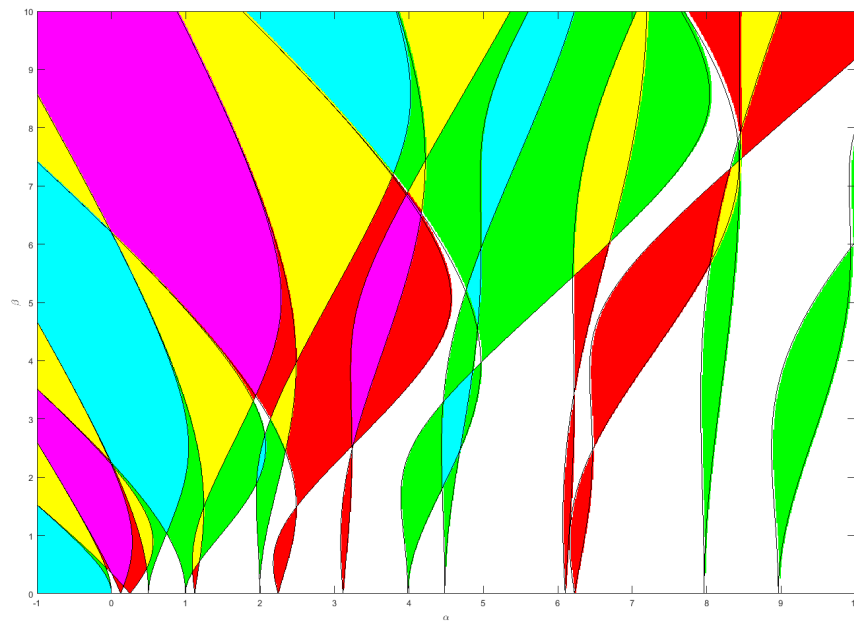
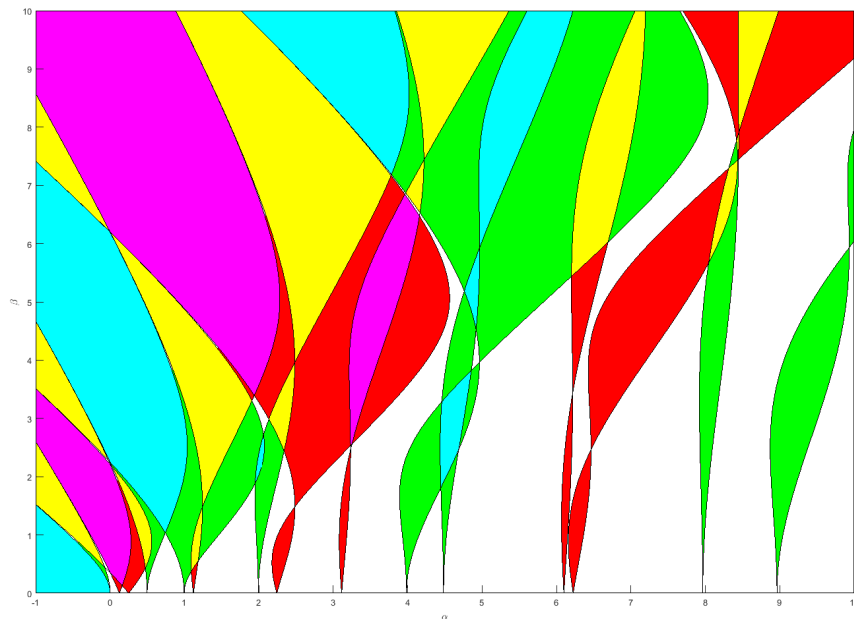
**a)****b)**

Figura 5.2: Diagramas de Ince-Strutt para  $A = \text{diag}([1 \ 2])$ ,  $B = I_2$  y  $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ , se usa el código de color de la Figura 4.1. En (a) se superponen las fronteras encontradas por S-L con el mallado, mientras que en (b) se colorea dentro de las fronteras.

Finalmente se prueba con un caso en el que los sistemas están acoplados

$$\left(\eta = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right),$$

y se compara de nuevo con el mallado, estos resultados se muestran en la Figura 5.3.

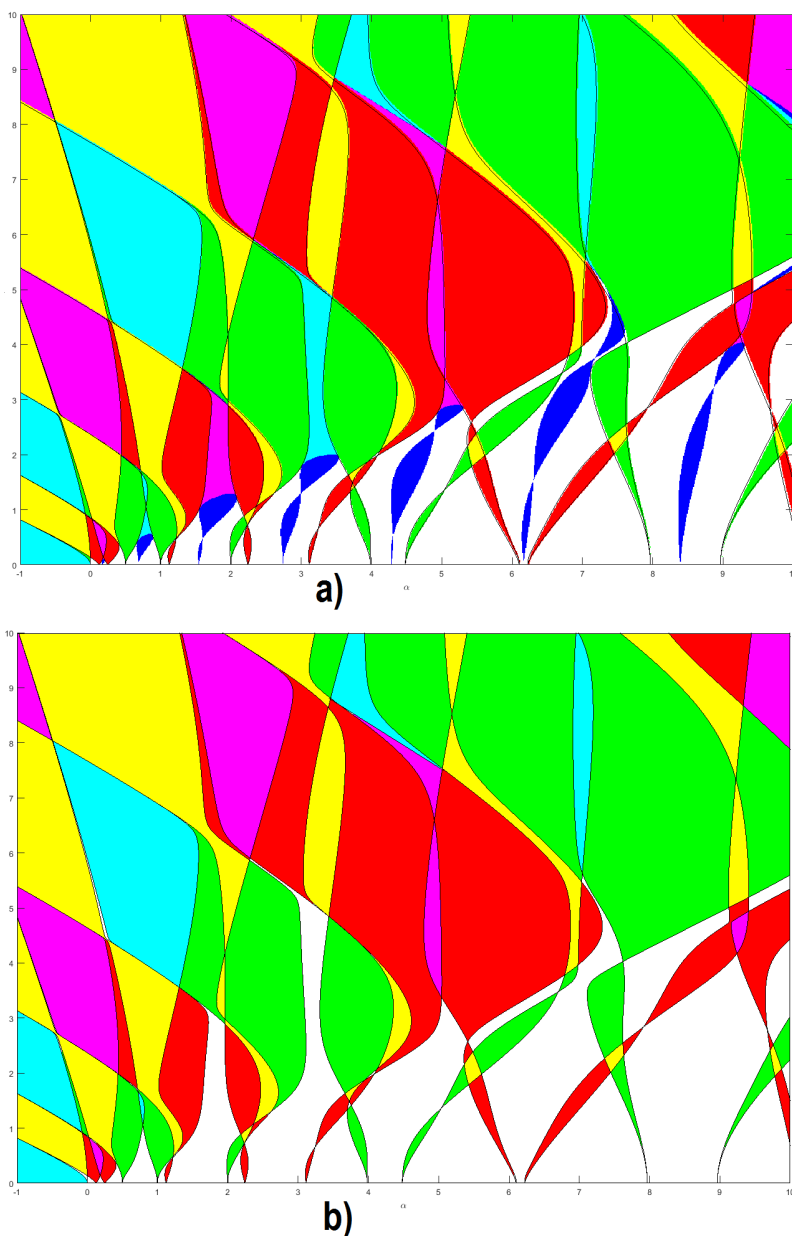


Figura 5.3: Diagramas de Ince-Strutt para  $A = \text{diag}([1 \ 2])$ ,  $B = A + \eta$  y  $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ , se usa el código de color de la Figura 4.1. En (a) se superponen las fronteras encontradas por S-L con el mallado, mientras que en (b) se colorea dentro de las fronteras.

**Observación.** Note que las partes azules no se observan en el realizado por S-L, esto se debe, a como ya se había mencionado por la posible inconmensurabilidad del periodo de la función  $q(t)$  y las soluciones y que se desconoce el punto exacto en el que se da la colisión de Krein. Para obtener las lenguas de Arnold completas simplemente se modifica el algoritmo de mallado, con el fin de solo mostrar las lenguas de combinación como muestra la Figura 5.4

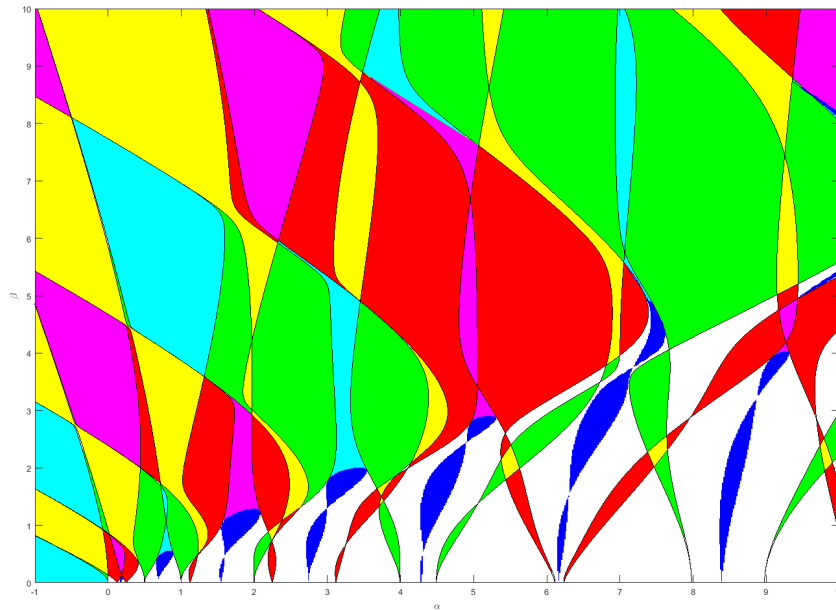


Figura 5.4: Diagramas de Ince-Strutt para  $A = \text{diag}([1 \ 2])$ ,  $B = A + \eta$  y  $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ , se usa el código de color de la Figura 4.1 con mallado para lenguas de combinación y SL para las demás.

## 5.2. Pruebas de Desempeño

Como se puede observar las lenguas de Arnold corresponden bastante bien (excluyendo el caso de la colisión de Krein) con los resultados del mallado y la solución analítica (cuando esta existe), salvo por regiones donde parecen estar defasadas. Para evaluar que tan adecuada es la aproximación de este método se efectuó el cálculo con un grado de libertad de la ecuación de Mathieu (por ser más rápido y no poseer entrelazamientos entre las lenguas). Dichos resultados gráficamente se aprecian en la Figura 5.5.

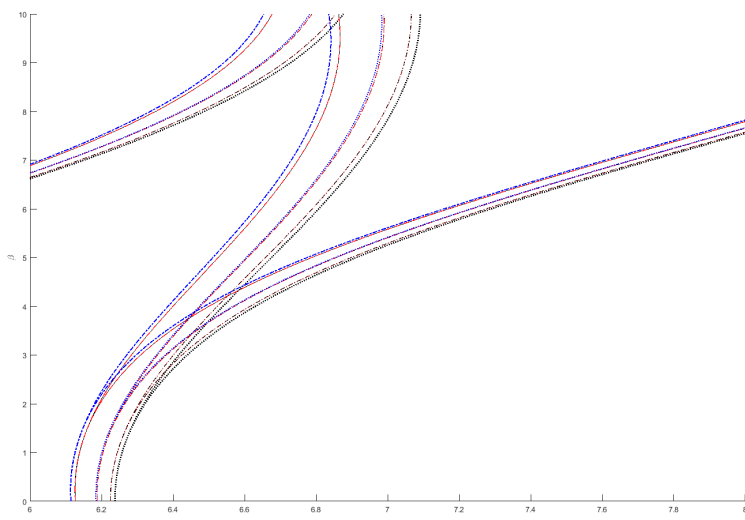


Figura 5.5: Fronteras de las lenguas de Arnold para distintos valores de  $N$  y  $\mathbf{p}$ . En negro  $\mathbf{p} = 8$ , en rojo  $\mathbf{p} = 4$  y en azul  $\mathbf{p} = 2$

Para poder extraer más información se elige la quinta fila y se obtienen la Tabla 5.1 para  $\mathbf{p} = 2$ , la Tabla 5.2 para  $\mathbf{p} = 4$  y la Tabla 5.3 para  $\mathbf{p} = 8$ . Con esta información se puede calcular el error porcentual con relación a  $N = 1000$ , el valor con mayor precisión que se calculó, y con estos datos se obtiene la Figura 5.6, de donde se verifica que aumentar el grado de precisión no mejora la misma, por lo que el valor óptimo es  $\mathbf{p} = 4$  (que coincide con el usado en [17]); en tanto que para  $N$  pequeños la tasa de crecimiento del tiempo de computo es la misma, como muestra la Figura 5.7.

$\mathbf{p} = 2$	1000	500	200	100	100
$\alpha_1$	0.114626146	0.104008083	0.070741237	0.010899767	-0.143586277
$\alpha_2$	0.134633828	0.144029448	0.141482475	0.021799535	-0.123064899
$\alpha_3$	0.229252291	0.208016167	0.170695852	0.209491607	0.261384148
$\alpha_4$	0.269267657	0.288058896	0.341391703	0.418983214	0.441079360
$\alpha_5$	0.498906303	0.497624346	0.492636289	0.480444898	0.522768296
$\alpha_6$	0.499320631	0.499283263	0.502947260	0.520307003	0.581813800
$\alpha_7$	0.997812606	0.995248692	0.985272578	0.960889796	0.882158721
$\alpha_8$	0.998641262	0.998566526	1.005894521	1.040614006	1.083542294
<b>Tiempo [s]</b>	301.4655	16.8102	0.8440	0.2412	0.1376

Tabla 5.1: Primeros 8 valores de  $\alpha$  para  $\beta = 5h$  y distintos  $N$  con  $\mathbf{p} = 2$ .

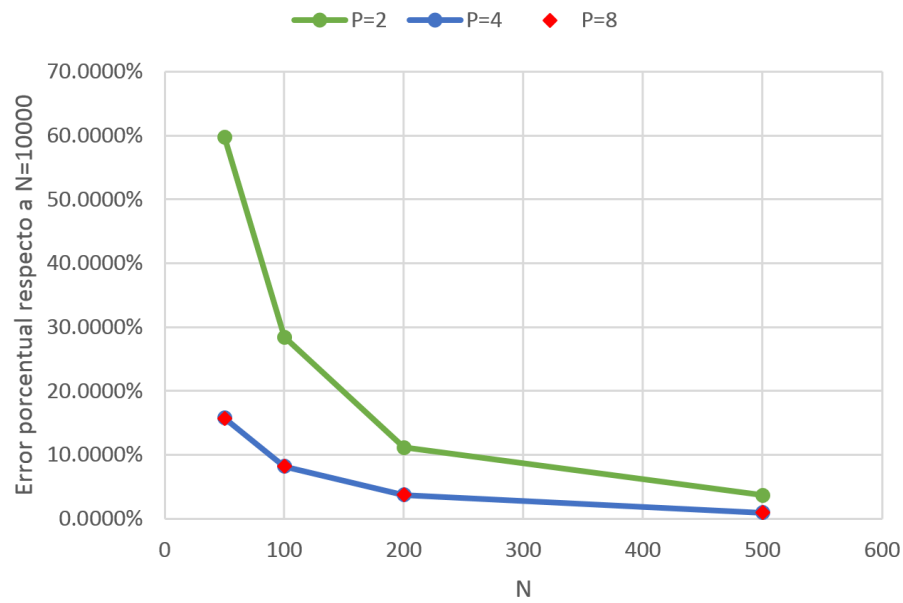
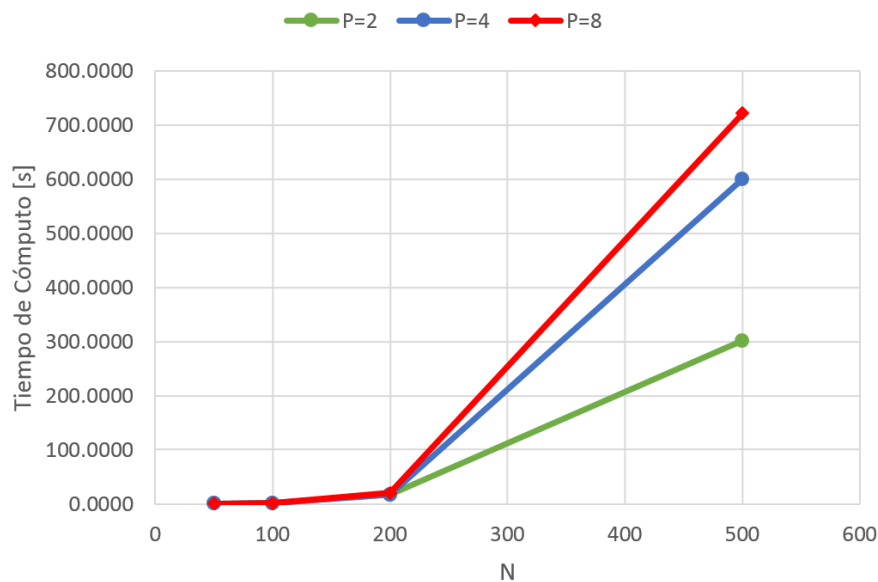


Figura 5.6: Error porcentual relativo a  $N = 1000$  para  $p = 2$  en verde,  $p = 4$  en azul y  $p = 8$  en rojo

$p = 4$	1000	500	200	100	100
$\alpha_1$	0.269267863	0.288059740	0.341397890	0.419023407	0.523234776
$\alpha_2$	0.997815885	0.995261781	0.985354565	0.961227783	0.883718387
$\alpha_3$	0.998644538	0.998579573	1.005974930	1.040929867	1.164959397
$\alpha_4$	2.245564336	2.241267848	2.229053625	2.210249929	2.173485828
$\alpha_5$	2.245569842	2.241271705	2.229376767	2.213921385	2.207265873
$\alpha_6$	3.992022895	3.984092452	3.960592407	3.922442520	3.849956553
$\alpha_7$	3.992028139	3.984113157	3.960720241	3.922993077	3.853306017
$\alpha_8$	6.237510545	6.225042661	6.187774530	6.126136884	6.004682892
<b>Tiempo [s]</b>	601.070436	17.405702	0.776365	0.228272	0.15919

Tabla 5.2: Primeros 8 valores de  $\alpha$  para  $\beta = 5h$  y distintos  $N$  con  $p = 4$ .

$p = 8$	1000	500	200	100	100
$\alpha_1$	0.269267863	0.288059704	0.341397891	0.419023434	0.523236720
$\alpha_2$	0.997815885	0.995261781	0.985354576	0.961227994	0.883723796
$\alpha_3$	0.998644538	0.998579574	1.005974941	1.040930066	1.164964327
$\alpha_4$	2.245564336	2.241267851	2.229053746	2.210251869	2.173518975
$\alpha_5$	2.245569843	2.241271708	2.229376888	2.213923317	2.207298006
$\alpha_6$	3.992022897	3.984092470	3.960593081	3.922453080	3.850119893
$\alpha_7$	3.992028140	3.984113175	3.960720915	3.923003637	3.853469067
$\alpha_7$	6.237510549	6.225042728	6.187777096	6.126176828	6.005281587
<b>Tiempo [s]</b>	722.045486	20.629557	0.840962	0.238867	0.185801

Tabla 5.3: Primeros 8 valores de  $\alpha$  para  $\beta = 5h$  y distintos  $N$  con  $p = 8$ .Figura 5.7: Tiempo de cómputo en segundos para  $p = 2$  en verde,  $p = 4$  en azul y  $p = 8$  en rojo



# Capítulo 6

## Ejemplo de Aplicación

Con el fin de ilustrar una de las posibles aplicaciones se emplea el sistema ilustrado en la Figura 6.1.

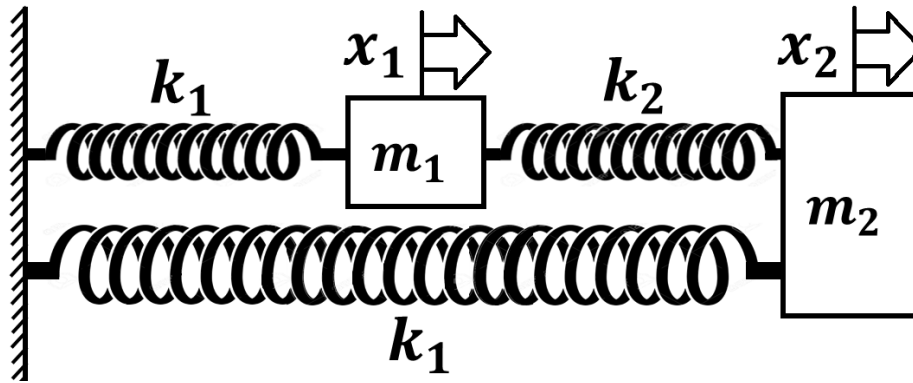


Figura 6.1: Sistema de masas y resortes con 2 grados de libertad.

Puede usarse la metodología Hamiltoniana para calcular las ecuaciones de movimiento, sin embargo para este caso es mas sencillo aplicar las leyes de Newton simplificadas ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) y la ley de Hooke ( $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ ), de donde se obtiene (6.1).

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \quad m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_1x_2$$

Ahora haciendo  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\mathbf{x} = (x_1x_2)^T$  y reacomodando términos se obtiene (6.1).

$$\ddot{\mathbf{x}} + \left[ \underbrace{k_1}_{\alpha} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}}_A + \underbrace{k_2}_{\beta q(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}}_B \right] \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

Ahora se repite el procedimiento de los capítulos previamente descritos para este nuevo sistema con  $m = 1$ . El resultado se muestra en la Figura (6.2).

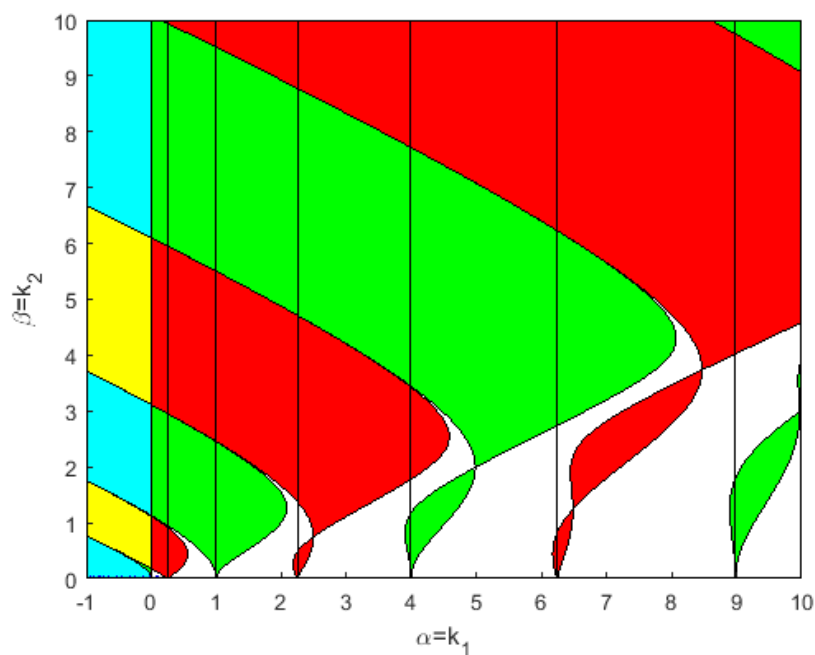


Figura 6.2: Diagrama de Ince-Strutt de (6.1) para  $m = 1$  y  $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ .

Puede observarse que para  $\bar{k}_2 < (k_1 - 1)/2$  el sistema es predominantemente estable con excepción de lenguas que nacen en  $l^2$  y aproximadamente  $l^2 + l + 1/2 \forall l \in \mathbb{Z}^+$ . Por lo que de buscar extender el intervalo de estabilidad, es recomendable elegir  $k_1 = l^2 + 3l/2 + 3/4$  con  $l \in \mathbb{Z}^+$ , entre  $l$  sea mayor este intervalo será mucho mayor y una  $k_2$  pequeña.

# Conclusiones

De lo previamente discutido pueden extraerse algunas conclusiones que a continuación son enlistadas:

- Se realizó un programa en MATLAB capaz de encontrar las fronteras de las lenguas de Arnold de la ecuación de Hill de  $n$  grados de libertad, usando el enfoque de Sturm-Liouville, siempre que no sean producto de una colisión de Krein, mediante discretización y diferencia finitas centradas; para obtener las lenguas de combinación se emplea el método de mallado con aceleración en GPU. Obteniéndose el diagrama completo de Ince-Strutt.
- El aumento de la precisión del método de diferencias finitas centradas no es computacionalmente viable (pues tarda mucho más que la precisión que se consigue), resultando el valor óptimo  $p = 4$ .
- Si bien el método de Sturm-Liouville reduce la cantidad de cálculos a efectuar, se requiere una buena discretización ( $N \gg 1$ , como en todos los otros métodos) para obtener resultados confiables; obteniéndose muchos datos adicionales (lenguas que no graficamos) y no se tiene control sobre la región en la que aparecerán.
- Se recomienda usar un mallado en conjunto con S-L para tener punto de comparación e incluir todas los tipos de lenguas presentes. Aunque para grados de libertad mayores a 2, el código de colores presentado en [6] es insuficiente y la separación esta dada por hipersuperficies dadas en [18].

Se puede mejorar el tiempo de ejecución cargando el programa en GPU's, y modificando la discretización para poder incluir las fronteras incommensurables con el periodo o añadir forzamiento.

Como trabajo futuro se prevee el método de SL para sistemas periódicos tipo EH vectorial con  $n$ -grados de libertad.



# Referencias

- [1] A. Champneys. *Dynamics of Parametric Excitation*, pages 183–204. Enciclopedia Springer New York, New York, NY, 2011.
- [2] C. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press Inc., New York, NY, USA, 3rd edition, 1998.
- [3] L. Y. Adrianova. *Introduction to linear systems of differential equations*. American Mathematical Soc., 1995.
- [4] W. J. Rugh. *Linear system theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 1996.
- [5] Hall Meyer and Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer, 2009.
- [6] J. Collado. *Hill Equation: From 1 to 2 Degrees of Freedom in New Perspectives and Applications of Modern Control Theory*, chapter 3. Springer International Publishing, 2018.
- [7] R. S. Johnson. *An Introduction to Sturm-Liouville Theory*. Upon Tyne Publishing, Newcastle upon Tyne, 2006.
- [8] B.M. Brown, M.S.P. Eastham, and K.M. Schmidt. *Periodic Differential Operators*. Operator Theory: Advances and Applications. Springer Basel, 2012.
- [9] H. Hochstadt. Functiontheoretic properties of the discriminant of Hill’s equation. *Mathematische Zeitschrift*, 82(3):237–242, Jun 1963.
- [10] G. W. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Math.*, 8:1–36, 1886.
- [11] A. P. Seyranian and A. A. Mailybaev. *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications*. World Scientific, 2003.
- [12] F. M. Arscott. *Periodic Differential Equations*. The MacMillan Company, 1964.
- [13] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. <http://dlmf.nist.gov/28.2>, Release 1.0.19 of 2018-06-22. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller and B. V. Saunders, eds.

- [14] H. Yoshida. Recent progress in the theory and application of symplectic integrators. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1993.
- [15] M. Ramírez and J. Collado. Calculation of the stability zones of Hill's equation with a GPU on matlab. In I. Gitler and J. Klapp, editors, *High Performance Computer Applications*, pages 225–239, Cham, 2016. Springer International Publishing.
- [16] N. A. Aguillón. Estabilidad de la ecuación de Hill. un enfoque de Sturm-Liouville. Master's thesis, CINVESTAV-IPN, DCA, 2017.
- [17] N. A. Aguillón and J. Collado. Stability chart of Hill's equation by a sturm-liouville approach. In *International Conference on Electrical Engineering, Computer Science and Automatic Control (CCE)*.
- [18] J. E. Howard and R. S. MacKay. Linear stability of symplectic maps. *Journal of Mathematical Physics*, 1987.
- [19] B. Fornberg. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Mathematics of Computation*, 1988.
- [20] C. A. Franco. Nuevas propiedades de la ecuación de Hill. Master's thesis, CINVESTAV-IPN, DCA, 2013.