



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**" Contribución al estudio
de la Matriz de Lyapunov "**

TESIS

Que presenta

CARLOS CUVAS CASTILLO

Para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

En la especialidad de
CONTROL AUTOMÁTICO

Directora de la Tesis:
Dra. Sabine Marie Sylvie Mondié Cuzange

Agradecimientos

A Dios, por permitirme realizar una meta más en mi carrera profesional.

A mi nueva familia, gracias Arlette y gracias bebé por ser una gran motivación.

A mi mamá, a mis hermanas y sus familias, gracias por su apoyo incondicional.

A mi padre, por acompañarme en cada paso de mi camino, aún ahora, que lo hace desde un lugar especial.

A toda mi familia, gracias por ser un gran soporte en tiempos difíciles.

A la Doctora Sabine Mondié, por todas sus enseñanzas, por su paciencia y por su fé en mí, pero sobre todo, gracias por ser un ejemplo a seguir.

A mis sinodales, los Doctores Fernando Castaños, Alexander Poznyak, Gilberto Ochoa y Omar Jacobo Santos, gracias por sus comentarios para mejorar este trabajo.

A todos mis amigos en Pachuca, gracias por los grandes momentos de convivencia.

A todos mis amigos del DCA, gracias por brindarme su amistad y hacerme sentir como en casa.

A mis colegas en sistemas con retardos, Adrián Ramírez, Alexey Egorov y Liliam Rodríguez, gracias por los conocimientos que compartieron conmigo.

Al CONACyT, por el apoyo económico.

Índice

Notación	v
Resumen	vii
Abstract	ix
1 Introducción	1
1.1 Sistemas con retardo.....	1
1.2 Planteamiento del problema.....	2
1.3 Estado del arte.....	2
1.4 Objetivos	4
1.5 Estructura de la tesis.....	5
1.6 Publicaciones resultado de la tesis.....	5
1.6.1 Revista internacional	6
1.6.2 Capítulo de libro	6
1.6.3 Congresos internacionales	6
2 Estabilidad de sistemas con retardos concentrados y matriz de Lyapunov	7
2.1 Conceptos básicos.....	7
2.1.1 Sistemas con retardos	7
2.1.2 Concepto de Estado	8
2.1.3 Estabilidad exponencial	8
2.1.4 Condición de Lyapunov	8
2.1.5 Matriz fundamental	9
2.1.6 Funcional con derivada preescrita	9
2.1.7 Matriz de Lyapunov	9

2.2	Ecuación escalar con un retardo	10
2.2.1	Antecedentes	10
2.2.2	Nueva propuesta de condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para el caso escalar	11
2.2.2.1	Criterio de estabilidad para el caso escalar	11
2.2.2.2	Prueba del Criterio de estabilidad	13
2.3	Sistema lineal con un retardo	17
2.4	Sistema con múltiples retardos concentrados	19
2.5	Conclusiones	20
3	Sistemas con varios retardos distribuidos	21
3.1	Sistema	21
3.2	Matriz fundamental	21
3.3	Fórmula de Cauchy	22
3.4	Funcional de Lyapunov-Krasovskii con derivada prescrita.....	22
3.5	Matriz de Lyapunov.....	23
3.6	Funcionales de tipo completo.....	23
3.7	Conclusiones	25
4	Condiciones necesarias para la estabilidad de sistemas con varios retardos distribuidos	27
4.1	Nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov	27
4.1.1	Propiedad algebraica generalizada	28
4.1.2	Fórmulas de Cauchy generalizadas	30
4.2	Funcional Bilineal.....	35
4.3	Condiciones necesarias de estabilidad	39
4.3.1	Condiciones necesarias positivas semidefinidas	40
4.3.2	Condiciones necesarias positivas definidas	41
4.4	Conclusiones	41
5	Condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas con varios retardos distribuidos	43
5.1	Propiedad algebraica generalizada independiente de la estabilidad del sistema.....	43
5.1.1	Lema técnico	44

5.1.2	Propiedad algebraica generalizada	45
5.2	Resultados adicionales independientes de la estabilidad del sistema	51
5.3	Condiciones necesarias y suficientes	52
5.3.1	Teorema del criterio de estabilidad	53
5.3.2	Prueba del Teorema del criterio de estabilidad	53
5.3.2.1	Necesidad	53
5.3.2.2	Suficiencia	53
5.4	Conclusiones	54
6	Ejemplos	57
6.1	D-particiones	57
6.2	Propuesta alterna para el cómputo de la matriz de Lyapunov, Kernel polinomial.....	59
6.2.1	Ecuación con retardo distribuido, Kernel polinomial	59
6.2.2	Obtención del sistema libre de retardos	59
6.2.3	Obtención de las condiciones iniciales	61
6.3	Sistema con dos retardos concentrados y retardo distribuido.....	62
6.4	Sistema multivariable autónomo	68
6.5	Sistema multivariable con retroalimentación	70
6.6	Sistema con retardo distribuido, Kernel polinomial.....	72
6.7	Ejemplo con retardo distribuido y distribución Gamma.....	74
6.8	Sistema con retardo distribuido y lapso	77
6.9	Ejemplos suplementarios: sistemas con retardos concentrados	81
6.9.1	Sistema con dos retardos concentrados	81
6.9.2	Sistema con dos retardos concentrados adicionados	83
6.10	Conclusiones	85
7	Conclusiones y perspectivas	87
7.1	Principales contribuciones de la tesis	87
7.2	Trabajo futuro.....	88
	Bibliografía	91

A	Resultados técnicos de la sección 2.2.2.1	97
A.1	Prueba del Lema 2.3.....	97
A.2	Prueba del Lema 2.4.....	99
A.3	Prueba del Lema 2.5.....	99
B	Código de programa en Matlab para los Ejemplos	
	6.8 y 6.9.1	101
B.1	Código de programa para el Ejemplo 6.8.....	101
B.2	Código de programa para el Ejemplo 6.9.1.....	106

Notación

\mathbb{R}	El conjunto de números reales
\mathbb{R}^n	Vectores con coeficientes reales de dimensión n
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Matrices con coeficientes reales de dimensión n por n
$\mathcal{PC}([a, b])$	Conjunto de funciones continuas a pedazos en el intervalo $[a, b]$
$\ \cdot\ $	Norma Euclideana de una matriz o vector
$\ \varphi\ _h$	El supremo de la norma Euclideana de $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$
$\ \varphi\ _{\mathcal{H}}$	Seminorma de funciones continuas a pedazos definida por $\sqrt{\ \varphi(0)\ ^2 + \int_{-h}^0 \ \varphi(\theta)\ ^2 d\theta}$
$Q > 0$ ($Q \geq 0$)	Matriz Q positiva definida (positiva semi-definida)
$[A_{i,j}]_{i,j=1}^r$	Elemento a bloques en la fila i y columna j de la matriz a bloques A
A^T	Matriz transpuesta de la matriz A
A^{-1}	Matriz inversa de la matriz A
$\det(A)$	Determinante de la matriz A
$\text{vec}(A)$	Función vec de la matriz A , en la que las columnas son apiladas
$\text{Re}(s)$	Parte real del número complejo s
$\text{Im}(s)$	Parte imaginaria del número complejo s
I	Matriz identidad de dimensión n por n

Resumen

El enfoque de Lyapunov-Krasovskii es utilizado para analizar, entre otras aplicaciones, la estabilidad de sistemas con retardos. Este enfoque provee condiciones suficientes de estabilidad en forma de desigualdades matriciales, basadas en la negatividad de la derivada de la funcional.

Por otro lado, entre las funcionales con derivada preescrita se encuentran las funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo, que satisfacen una cota cuadrática inferior si el sistema es estable. El elemento clave para esta tipo de funcionales es la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos.

La importancia de la matriz de Lyapunov ha llevado a los investigadores a obtener diferentes métodos para su cálculo. Entre estos métodos se encuentra el denominado método semi-analítico, en el que la matriz de Lyapunov satisface un sistema de variables auxiliares libre de retardos, sujeto a condiciones especiales de frontera.

El conocimiento de la matriz de Lyapunov, asociado a funcionales que satisfacen una cota cuadrática inferior si el sistema es estable, ha llevado a desarrollar condiciones de estabilidad, que, al igual que en el caso de sistemas lineales sin retardo, dependen exclusivamente de la matriz de Lyapunov.

Este trabajo de tesis está dedicado a la obtención de condiciones de estabilidad para sistemas con retardo, en particular, se presenta un criterio para la estabilidad de la ecuación escalar con un retardo concentrado y, se obtienen condiciones de estabilidad para sistemas con retardo distribuido. Para el caso de sistemas con retardo distribuido, la obtención de nuevas propiedades que relacionan la matriz fundamental del sistema con la matriz de Lyapunov, aunado a la presentación de una funcional especial, son la base que permite obtener condiciones necesarias de estabilidad, más aún, se obtiene un criterio de estabilidad. Estas condiciones de estabilidad constituyen una extensión de aquellas presentadas recientemente para sistemas con múltiples retardos concentrados.

La verificación de las condiciones se lleva a cabo a través de algunos ejemplos, en los que, además se obtiene la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo distribuido, kernels particulares, superando el problema de dependencia lineal en la obtención de las condiciones iniciales del sistema libre de retardos, del cual se obtiene la matriz de Lyapunov.

Abstract

The Lyapunov-Krasovskii approach is employed in analyzing, among other applications, the stability of systems with delays. This approach provides sufficient stability conditions in the form of matrix inequalities, based on the negativity of the derivative of the functional.

On the other hand, the Lyapunov-Krasovskii functionals of complete type stand out among the functionals with prescribed derivative. The complete type functionals satisfy a quadratic lower bound if the system is stable. The key component in this type of functionals is the Lyapunov matrix for systems with delays.

The significance of the Lyapunov matrix has led researchers to obtain different methods for its computation. One of these methods is the so-called semi-analytic method. In this method, the Lyapunov matrix satisfies a delay free system of auxiliary variables, subject to a two-point boundary value problem.

This thesis is devoted to obtain stability conditions for systems with delay, in particular, a criterion for the stability of the scalar equation with one pointwise delay is presented, and, stability conditions for systems with distributed delay are obtained. In the case of systems with distributed delay, the presentation of new properties that relate the fundamental matrix of the system with the Lyapunov matrix, along with the introduction of a special functional, are the base for obtaining necessary stability conditions, even more, in this work an stability criterion is obtained for this class of systems. These stability conditions are an extension of those recently presented for systems with multiple pointwise delays.

The effectiveness of the obtained conditions is shown in some examples. For the examples with distributed delays, the Lyapunov matrix is obtained, overcoming the problem of linear dependence in obtaining the initial conditions of the delay free system.

1

Introducción

En este capítulo se hace una breve introducción a los sistemas con retardo, el desarrollo que ha tenido el enfoque temporal para el análisis de estabilidad de sistemas con retardo y los objetivos de este trabajo de tesis. Se finaliza con las publicaciones producto de esta investigación.

1.1 Sistemas con retardo

Un sistema con retardo es aquel en el que la evolución del sistema depende tanto de la dinámica en el tiempo presente como de las dinámicas en un lapso de tiempo anterior. Los retardos aparecen de forma natural en sistemas interconectados en los que se presentan fenómenos de transporte, propagación, comunicación o toma de decisión, ya sea de señales, energía o masa.

Matemáticamente hablando, estos fenómenos son representados mediante ecuaciones diferenciales en diferencias o ecuaciones diferenciales funcionales, que han sido estudiadas en los trabajos clásicos de Krasovskii [32], Bellman y Cooke [2], Hale [21], Kolmanovskii [31], entre otros.

Al igual que los sistemas dinámicos en general, se puede afirmar que el tema principal del estudio de los sistemas con retardos, es el de su estabilidad, o de la del sistema en lazo cerrado obtenido al retroalimentar alguna ley de control. En efecto, esta propiedad es crucial para el buen desempeño de un sistema.

Existen dos grandes direcciones de investigación para el estudio de la estabilidad de los sistemas con retardos:

- *Los enfoques frecuenciales:* estos métodos son limitados a los sistemas lineales pero permiten tener un conocimiento muy preciso de los problemas investigados. Se cuenta entre ellos, el

análisis de las raíces de los cuasipolinomios, métodos gráficos tal como el criterio de Mikhailov [25], generalizaciones del teorema de Nyquist [38] y las D-particiones de Neimark [39].

- *Los enfoques temporales:* éstos permiten abordar el estudio de sistemas no lineales y con incertidumbre. Los métodos de Lyapunov-Razumikhin [47] y de Lyapunov-Krasovskii [32] son los más empleados. Estos resultados generalizan los Teoremas de Lyapunov al caso de sistemas con retardos por medio del empleo de funciones y de funcionales, respectivamente. Entre las funcionales de Lyapunov-Krasovskii, se destacan las llamadas de tipo completo [29], que constituyen el marco teórico de este trabajo de investigación.

1.2 Planteamiento del problema

En el marco del enfoque temporal, las funcionales con derivada prescrita que conducen a condiciones suficientes de estabilidad han tenido un auge sobresaliente en las décadas pasadas, debido a que conducen a la resolución de desigualdades lineales matriciales, lo que las hace una herramienta muy eficaz para el diseño de controladores. Sin embargo, estos resultados no garantizan que, para cualquier sistema con retardos estable, exista una funcional de la forma propuesta que satisfaga las condiciones suficientes de estabilidad.

En cambio, los resultados de funcionales completas proveen teoremas de estabilidad conversos constructivos, los cuales garantizan, bajo la suposición de que el sistema sea estable, la existencia de una funcional que satisface una cota cuadrática inferior. En este enfoque, al igual que en el caso de sistemas libres de retardos, la funcional aparece en función del análogo de la matriz de Lyapunov, la cual es solución de tres ecuaciones que, en su conjunto, juegan el papel de la ecuación de Lyapunov.

Estos hechos y el paralelo con el conocido resultado de sistemas lineales, donde la positividad de la matriz de Lyapunov permite decidir si el sistema es estable o no, conduce a plantear el siguiente problema.

¿Es posible determinar las propiedades de estabilidad de los sistemas con retardo de forma directa a través de la matriz de Lyapunov correspondiente al sistema y no a través de las cotas de la funcional de Lyapunov-Krasovskii y su derivada?

1.3 Estado del arte

Enfoque de funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo

El análisis de estabilidad para sistemas con retardos mediante el uso de la teoría de Lyapunov inicia con los trabajos de Krasovskii [32] y Razumikhin [47]. Krasovskii propuso utilizar funcionales que dependieran de todo un segmento de la solución del sistema, es decir,

del estado del sistema con retardo. Estas funcionales son llamadas de Lyapunov-Krasovskii. Algunas funcionales cuadráticas para sistemas con un retardo se propusieron en Repin [48], Datko [4], así como en Infante y Castelan [24]. Estas funcionales sólo admiten una cota inferior cúbica [23]. En Kharitonov y Zhabko [29] se proponen funcionales cuya derivada incluye términos que dependen de todo el estado de un sistema con retardo, que además presentan la característica de admitir una cota cuadrática inferior. Tales funcionales, denominadas de tipo completo, están definidas a partir de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos.

Las funcionales de tipo completo se emplean para el análisis de robustez [29], [50], estimados exponenciales [29], [37], etc.

En estas funcionales, la matriz de Lyapunov juega un papel muy importante. Esta matriz satisface un conjunto de propiedades [29], que resultan esenciales para su construcción, la cual se logra mediante el planteamiento de un sistema auxiliar de variables libre de retardos [42], [26], o bien mediante una aproximación lineal a pedazos [14]. En [28] se han estudiado los temas de existencia y unicidad de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos.

El sistema libre de retardos mencionado ha mostrado su utilidad en la obtención de valores de los llamados parámetros ó retardos críticos de sistemas con retardos de tipo concentrado, distribuido y neutral [43]. Se puede decir que este sistema es el enlace entre los enfoques frecuencial y temporal para sistemas con retardos.

Cabe observar que estos resultados están recopilados en la reciente monografía de Kharitonov [30], donde se estudian detalladamente los casos de sistemas lineales con retardos concentrados, distribuidos y los de tipo neutral.

Condiciones de estabilidad para sistemas con retardos

La obtención de condiciones suficientes de estabilidad en forma de desigualdades lineales matriciales ha concentrado los esfuerzos de investigadores del área de sistemas con retardos. El motivo del éxito de este tema de investigación se debe a que la sinergia con el empleo de desigualdades lineales matriciales permite obtener herramientas de gran eficacia numérica para el análisis, así como para el diseño de controladores. Las ideas principales fueron introducidas en los trabajos iniciales de [12], [40], [54], donde se obtuvieron condiciones suficientes de gran conservatismo, que ha sido reducido de manera dramática en trabajos recientes, gracias al uso de ideas como la del método descriptor [13], la partición del retardo [17] y el uso de desigualdades novedosas en las mayorizaciones [51]. Mas aún, en las propuestas de aproximación lineal a pedazos de la funcional de Datko [18] y la de suma de cuadrados [46] se muestra que los límites de estabilidad encontrados tienden a las verdaderas fronteras de estabilidad.

Los resultados sobre condiciones necesarias de estabilidad (en ocasiones denominadas condiciones de inestabilidad) han recibido en general, menos atención. Una razón probable es de que no proveen, en forma directa, resultados relacionados con los parámetros de

controladores estabilizantes. No por ello son menos importantes, ya que permiten descartar sistemas inestables. Más aún, son el camino a seguir para la obtención de condiciones necesarias y suficientes de estabilidad, es decir criterios de estabilidad, como el obtenido en el caso de sistemas lineales libres de retardos. En la literatura se encuentran algunos trabajos que, para casos muy específicos, conducen a condiciones de inestabilidad, como los que explotan la condición de violación de la negatividad de la derivada de la funcional [1], [20]. Por otra parte, se han obtenido condiciones similares en el dominio de la frecuencia en [3] a partir del teorema de Pontryagin.

Condiciones de estabilidad que dependen de la matriz de Lyapunov

En [44] se introduce la estrategia que permite explotar las funcionales de tipo completo con el fin de obtener condiciones necesarias de estabilidad en términos de la matriz de Lyapunov de sistemas con retardo. La metodología se basa en el hecho de que si el sistema es inestable, al sustituir las condiciones iniciales, la cota inferior de la funcional con derivada prescrita es necesariamente violada. En este trabajo, se emplean condiciones iniciales constantes que dan lugar a resultados burdos, mostrando que el reto consiste en determinar condiciones iniciales que revelen la esencia del sistema estudiado.

En el artículo de Mondié y Egorov [36] se presentan condiciones necesarias de estabilidad para el sistema con un retardo, y se mejoran en Egorov y Mondié [6], [8], [9], donde se extiende el resultado al caso de múltiples retardos concentrados, y donde se presenta una familia de condiciones necesarias.

Las condiciones necesarias y suficientes para el caso de sistemas escalares con un retardo, obtenidos mediante un análisis exhaustivo, en [7] y [34], dependen exclusivamente de la matriz de Lyapunov, más aún, en el trabajo reciente [5], se presentan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para sistemas con múltiples retardos concentrados, mostrando que en algunos casos se tiene un resultado similar al que existe para sistemas libres de retardos.

1.4 Objetivos

El objetivo general de esta tesis es contribuir al estudio de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos, con un enfoque particular al análisis de su papel en la estabilidad de los mismos.

Los objetivos particulares de este trabajo son:

- Determinar condiciones de estabilidad para el caso escalar de sistemas con un retardo concentrado
- Extender resultados de condiciones necesarias para la estabilidad exponencial al caso de sistemas con retardo distribuido

-
- Extender resultados de criterio de estabilidad exponencial al caso de sistemas con retardo distribuido

1.5 Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 se sintetizan resultados acerca de la estabilidad de sistemas con retardos concentrados. Se presentan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para el caso de sistemas lineales escalares con un retardo. Para el caso multivariable con un retardo, se muestran condiciones necesarias de estabilidad que dependen únicamente de la matriz de Lyapunov.

En el Capítulo 3 se presentan conceptos fundamentales de los sistemas con retardos distribuidos en los que se basa este trabajo de tesis. Entre estos conceptos se encuentran, la matriz fundamental y la matriz de Lyapunov, así como las funcionales de tipo completo para sistemas con retardos distribuidos.

En los Capítulos 4 y 5 se presenta el resultado principal de este trabajo de tesis, la obtención de condiciones de estabilidad basadas exclusivamente en la matriz de Lyapunov del sistema.

El Capítulo 4 se obtienen nuevas propiedades para la matriz de Lyapunov, que la relacionan con la matriz fundamental del sistema. Con base en dichas propiedades se presentan condiciones necesarias de estabilidad en función de la matriz de Lyapunov.

En el Capítulo 5 se presentan condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas con retardos distribuidos, para lo cual, las nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov obtenidas en el Capítulo 4 requieren una nueva forma de obtención, en la cual no se suponga que el sistema es estable.

Se ponen a prueba las condiciones con algunos ejemplos en el Capítulo 6.

Para terminar el trabajo, se hace un resumen de las principales contribuciones de este trabajo y se presentan conclusiones, así como trabajo futuro.

1.6 Publicaciones resultado de la tesis

El trabajo de investigación que se presenta en esta memoria de tesis dió lugar a publicaciones en capítulos de libros y en conferencias internacionales. Asimismo, un artículo de revista aceptado, los cuales se enlistan a continuación.

1.6.1 Revista internacional

1. C. Cuvas, S. Mondié. "Necessary stability conditions for delay systems with multiple pointwise and distributed delays". Transactions on Automatic Control. Aceptado

1.6.2 Capítulo de libro

2. C. Cuvas, A. Ramírez, A. Egorov, S. Mondié. "Necessary conditions for the stability of one delay systems: a Lyapunov matrix approach". In Delay Systems: from Theory to Numerics and Applications, Springer.

1.6.3 Congresos internacionales

3. S. Mondié, C. Cuvas, A. Ramírez, A. Egorov. "Necessary conditions for the stability of one delay systems: a Lyapunov matrix approach". 10th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Boston, USA, June 22-24, 2012.
4. C. Cuvas, S. Mondié. "Stability Criteria for the Single Delay Equation". 11th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Grenoble, France, February 4-6, 2013.
5. L. Rodriguez-Guerrero, A. Ramírez, C Cuvas. "Predictive control and truncated predictor: A comparative study on numerical benchmark problems". 11th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), Cd. del Carmen, México, 2014.
6. C. Cuvas, S. Mondié. "Decaimiento exponencial de sistemas lineales con retardo distribuido y matriz de Lyapunov". XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, Cancún, México, 2014.
7. C. Cuvas, S. Mondié. "Necessary conditions for the exponential stability of a class of distributed delay-systems". 53rd Annual Conference on Decision and Control, Los Angeles, USA, 2014.
8. C. Cuvas, S. Mondié, G. Ochoa. "Distributed delay systems with truncated Gamma distribution: instability regions". 12th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Ann Arbor, USA, 2015.

2

Estabilidad de sistemas con retardos concentrados y matriz de Lyapunov

En este capítulo se sintetizan conceptos fundamentales acerca de la matriz de Lyapunov y su papel en la estabilidad de sistemas con retardos concentrados. En la primera parte se abordan algunas definiciones, posteriormente se introduce un criterio de estabilidad de la ecuación escalar con un retardo. Finalmente se presentan condiciones de estabilidad para sistemas multivariable que dependen exclusivamente de la matriz de Lyapunov.

2.1 Conceptos básicos

Se presentan aquí algunas definiciones que son útiles a lo largo del trabajo de tesis.

2.1.1 Sistemas con retardos

En esta sección se considera una clase de sistemas con retardo de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h) \tag{2.1}$$

en donde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $h \geq 0$ es el retardo. Ecuaciones de este tipo, en donde el lado derecho depende no solo de la solución en el tiempo presente, sino de todo un segmento de la solución, son llamadas ecuaciones diferenciales funcionales.

2.1.2 Concepto de Estado

En la teoría de control clásico, el estado es la información mínima que debe conocerse para conocer la solución o evolución del sistema. En los sistemas con retardo, la información mínima para poder conocer las dinámicas del sistema implica que se debe conocer la trayectoria de las dinámicas en todo un segmento previo al punto presente, esto es, es necesario conocer $x(t + \theta)$ para $\theta \in [-h, 0]$. En este trabajo se utiliza la siguiente notación para describir el estado de los sistemas con retardos

$$x_t : \theta \rightarrow x(t + \theta, \varphi), \quad \theta \in [-h, 0].$$

En sistemas libres de retardos, el estado en el tiempo inicial, el cual suponemos igual a cero ($t_0 = 0$), es conocido como condición inicial. En el caso de los sistemas con retardo, la condición inicial está definida en el intervalo $[-h, 0]$ y denotada por φ en la expresión anterior. Aquí la condición inicial pertenece al espacio de funciones continuas a pedazos, $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Cuando la condición inicial no es crucial, se omite el argumento φ .

2.1.3 Estabilidad exponencial

Definición 2.1 *El sistema (2.1) es exponencialmente estable si existen constantes $\gamma \geq 1$ y $\beta > 0$ de modo que para cada condición inicial $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, la solución $x(t, \varphi)$ satisface la siguiente desigualdad:*

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\beta t} \|\varphi\|_h.$$

Comentario 2.1 *En el caso de sistemas lineales con y sin retardos, la estabilidad asintótica es equivalente a la exponencial.*

Los siguientes conceptos y resultados pueden consultarse en [30], Capítulo 2.

2.1.4 Condición de Lyapunov

Definición 2.2 *Se dice que el sistema (2.1) satisface la condición de Lyapunov si el espectro del sistema*

$$\Lambda = \{s : \det(sI - A_0 - e^{-sh}A_1) = 0\},$$

no contiene un punto s_0 tal que $-s_0$ también pertenece al espectro, en otras palabras, no hay eigenvalores del sistema ubicados de forma simétrica con respecto al origen del plano complejo.

2.1.5 Matriz fundamental

La matriz de dimensión $n \times n$, $K(t)$, conocida como matriz fundamental del sistema (2.1), satisface la ecuación

$$\dot{K}(t) = A_0 K(t) + A_1 K(t-h), \quad (2.2)$$

con condiciones iniciales

$$K(0) = I, \quad K(t) = 0, \quad t < 0. \quad (2.3)$$

$K(t)$ también satisface (ver [2]) la ecuación

$$\dot{K}(t) = K(t)A_0 + K(t-h)A_1. \quad (2.4)$$

La fórmula de Cauchy para la solución del sistema (2.1) está dada por la expresión

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(t-\theta-h)A_1\varphi(\theta)d\theta, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

2.1.6 Funcional con derivada prescrita

De acuerdo con [29], dada una matriz $W > 0$, la funcional con derivada prescrita

$$\frac{dv_0(x_t(\varphi))}{dt} = -x^T(t, \varphi)Wx(t, \varphi),$$

evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema (2.1), tiene la forma

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) &= \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U(-h-\theta)A_1\varphi(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)A_1^T \int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)A_1\varphi(\theta_2)d\theta_2d\theta_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

en donde

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t+\tau)dt. \quad (2.7)$$

2.1.7 Matriz de Lyapunov

La matriz $U(\tau)$ es conocida como matriz de Lyapunov para sistemas con retardo, asociada a W .

La matriz de Lyapunov satisface (ver por ejemplo [30], sección 2.6)

-
- la propiedad dinámica

$$U'(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1, \quad \tau \geq 0, \quad (2.8)$$

- la propiedad simétrica

$$U(\tau) = U^T(-\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (2.9)$$

- la propiedad algebraica

$$A_0^T U(0) + A_1^T U^T(-h) + U(0)A_0 + U(-h)A_1 = -W. \quad (2.10)$$

2.2 Ecuación escalar con un retardo

En esta sección se analiza la estabilidad, a través de la matriz de Lyapunov, de sistemas escalares con retardo concentrado ($n = 1$) descritos por la expresión

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - h). \quad (2.11)$$

En el caso de la ecuación (2.11), la matriz de Lyapunov es la función escalar denotada por $u(\tau)$, $\tau \in [0, h]$.

2.2.1 Antecedentes

Uno de los trabajos en los que se basa esta tesis, en donde se desarrollan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad basadas únicamente en la matriz de Lyapunov, se lleva a cabo en [34]. El resultado principal se presenta en el siguiente Teorema.

Teorema 2.1 [34] *Considere la ecuación diferencial en diferencias (2.11). Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *La ecuación diferencial en diferencias (2.11) es exponencialmente estable.*
- (ii) *La función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h]$, satisface*

$$\begin{aligned} u(0) - u(h) &> 0, & h > 0, \\ u(\tau) + u(h - \tau) &> 0, & \tau \in [0, h]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En [7], se presentan condiciones similares como criterio de estabilidad para el sistema

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - 1), \quad t \geq 0. \quad (2.13)$$

Teorema 2.2 [7] *La ecuación (2.13) es exponencialmente estable si y sólo si la matriz de Lyapunov para (2.13) está definida en $[0, 1]$ y*

$$u(0) \geq |u(\tau)|, \quad \tau \in [0, 1],$$

o de manera equivalente

$$u(0) > |u(\tau)|, \quad \tau \in (0, 1]. \quad (2.14)$$

La prueba de estos resultados se basa en el conocimiento del dominio de estabilidad en el espacio de parámetros (a, b) de estos sistemas, el cual se recuerda a continuación.

Lema 2.1 [10], [31], [41] *La ecuación escalar (2.11) es exponencialmente estable si y sólo si a y b pertenecen al conjunto*

$$\begin{aligned} S_s = & \{(a, b)/|a| > |b|, a < 0\} \cup \{(a, b)/b = a, a < 0\} \\ & \cup \{(a, b)/|b| > |a|, b < 0, yh < \pi, a + b \cos(yh) < 0\} \\ & \text{con } y = \sqrt{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Asímismo, la expresión explícita de la función de Lyapunov, dada a continuación, juega un papel crucial en la demostración.

Lema 2.2 [23],[34] *La función de Lyapunov de (2.11), $u(\tau)$, $\tau \in [0, h]$, asociada al escalar positivo w , está dada por :*

si $|a| \neq |b|$, con

$$z = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} & \text{para } |a| > |b| \\ jy, \quad y = \sqrt{b^2 - a^2} & \text{para } |a| < |b| \end{cases}$$

entonces,

$$u(\tau) = \frac{w}{2z} \frac{be^{-zh}e^{z\tau} + (z-a)e^{-z\tau}}{z-a-be^{-zh}}, \quad (2.16)$$

y si $|a| = |b|$, para $a = b$

$$u(\tau) = \frac{w}{2} \frac{ah - 1 - 2a\tau}{2a} \quad (2.17)$$

y para $a = -b$ la función de Lyapunov o no existe o no está determinada de forma única.

2.2.2 Nueva propuesta de condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para el caso escalar

2.2.2.1 Criterio de estabilidad para el caso escalar

El resultado principal de esta sección se resume en el siguiente Teorema.

Teorema 2.3 *Considere la ecuación con retardo (2.11). Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *La ecuación en diferencias (2.11) es exponencialmente estable.*
- (ii) *La función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h]$, definida en el Lema 2.2, existe, es única y satisface la condición*

$$\mathcal{K}_3(0, \tau, h) > 0, \quad \tau \in (0, h/2], \quad (2.18)$$

en donde

$$\mathcal{K}_3(0, \tau, h) = \begin{pmatrix} u(0) & u(h) & u(\tau) \\ u(h) & u(0) & u(h - \tau) \\ u(\tau) & u(h - \tau) & u(0) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Comentario 2.2 *El interés principal de esta condición es de que, contrariamente a las condiciones (2.12) presentadas en [34], puede extenderse al caso multivariable.*

La condición (2.18) se satisface si y sólo si los tres menores principales, $M_1\mathcal{K}$, $M_2\mathcal{K}$ y $M_3\mathcal{K}(\tau)$, $\tau \in (0, h/2]$, son estrictamente positivos. La prueba del resultado principal se basa en manipulaciones algebraicas concernientes a estos valores. Con el fin de dar fluidez a la argumentación, se prueban los siguientes Lemas técnicos en el Apéndice A.

Lema 2.3 *Para $|a| \neq |b|$, los menores principales de la matriz $\mathcal{K}_3(0, \tau, h)$, $\tau \in (0, h/2]$, son:*

$$M_1\mathcal{K} = w \frac{1}{Q} [z(e^{zh} + e^{-zh}) - a(e^{zh} - e^{-zh})], \quad (2.20)$$

$$M_2\mathcal{K} = w^2 \frac{1}{Q} (e^{zh} - e^{-zh}), \quad (2.21)$$

$$M_3\mathcal{K}(\tau) = \frac{w^3}{2z} \frac{(e^{z\tau} - e^{-z\tau})}{Q} (e^{z(h-\tau)} - e^{-z(h-\tau)}), \quad (2.22)$$

donde

$$Q = \begin{pmatrix} z(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh}) - (a - b)(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh}) \\ z(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh}) - (a + b)(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh}) \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Prueba 2.1 *El resultado se demuestra en el Apéndice A.1.*

También se provee una útil reescritura de los menores principales $M_1\mathcal{K}$ y $M_2\mathcal{K}$, para $|a| \neq |b|$.

Lema 2.4 *Para $|a| \neq |b|$, el primer menor principal de $\mathcal{K}_3(0, \tau, h)$, $\tau \in (0, h/2]$, puede ser reescrito como*

$$M_1\mathcal{K} = \frac{w}{2z} \frac{b \left(\frac{e^{zh} - e^{-zh}}{2} \right) - z}{b \left(\frac{e^{zh} + e^{-zh}}{2} \right) + a} \quad (2.24)$$

o bien

$$M_1\mathcal{K} = \frac{w b \left(\frac{e^{zh} + e^{-zh}}{2} \right) - a}{2z b \left(\frac{e^{zh} - e^{-zh}}{2} \right) + z}. \quad (2.25)$$

Prueba 2.2 *El resultado se demuestra en el Apéndice A.2.*

Lema 2.5 *Para $|a| \neq |b|$, el segundo menor principal de $\mathcal{K}_3(0, \tau, h)$, $\tau \in (0, h/2]$, satisface*

$$\frac{1}{M_2\mathcal{K}} = (b - a) \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})} \frac{1}{zw^2} \left(z \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})} - (a + b) \right)^2. \quad (2.26)$$

Prueba 2.3 *El resultado se demuestra en el Apéndice A.3.*

2.2.2.2 Prueba del Criterio de estabilidad

La prueba del Teorema 2.3 es como sigue, el espacio de parámetros $S = \{(a, b), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ se puede dividir en 9 regiones

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(a, b) : b = -a\} \\ S_2 &= \{(a, b) : a = b, a > 0\} \\ S_3 &= \{(a, b) : a = b, a < 0\} \\ S_4 &= \{(a, b) : |a| > |b|, a > 0\} \\ S_5 &= \{(a, b) : |a| > |b|, a < 0\} \\ S_6 &= \{(a, b) : |b| > |a|, yh \geq \pi\} \\ S_7 &= \{(a, b) : |b| > |a|, yh < \pi, b > 0\} \\ S_8 &= \{(a, b) : |b| > |a|, yh < \pi, b < 0, a + b \cos(yh) \geq 0\} \\ S_9 &= \{(a, b) : |b| > |a|, yh < \pi, b < 0, a + b \cos(yh) < 0\}. \end{aligned}$$

con $y = \sqrt{b^2 - a^2}$. Estas regiones forman una partición del espacio de parámetros, es decir

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^9 S_i &= S, \quad (0, 0) \in S, \\ S_i \cap S_j &= \emptyset, \quad i, j = 1, 9, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

En la Figura 2.1 se muestra la partición del espacio de parámetros S . La región S_6 incluye un número infinito de fronteras de cruce denotadas con líneas punteadas. De acuerdo al Lema 2.1, las regiones en donde las condiciones de estabilidad se cumplen son S_3 , S_5 y S_9 , entonces, el problema se reduce a investigar en cada región si se cumple o no la condición de positividad estricta de $M_1\mathcal{K}$, $M_2\mathcal{K}$ y $M_3\mathcal{K}(\tau)$, $\tau \in (0, h/2]$.

Se procede entonces al análisis sistemático de cada región S_i , $i = 1, 9$.

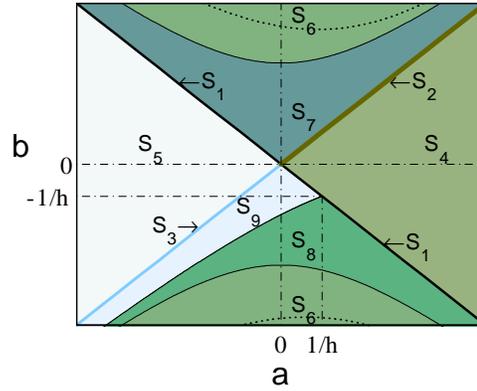


Figura 2.1: Partición del espacio de parámetros S .

- $\underline{S_1 = \{(a, b) : b = -a\}}$

Del Lema 2.2 se tiene que la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo o no existe o no está determinada de forma única, de aquí que las condiciones no se satisfacen.

- $\underline{S_2 = \{(a, b) : a = b, a > 0\}}$

De la ecuación (2.17) y de (2.19) resulta que

$$M_2\mathcal{K} = \frac{w^2}{16a^2} \det \begin{pmatrix} ah - 1 & -ah - 1 \\ -ah - 1 & ah - 1 \end{pmatrix} = -\frac{w^2h}{4a} \quad (2.27)$$

por lo que $M_2\mathcal{K} < 0$.

- $\underline{S_3 = \{(a, b) : a = b, a < 0\}}$

Utilizando la ecuación (2.17) se tiene

$$M_1\mathcal{K} = u(0) = \frac{w}{2} \frac{ah - 1}{2a} > 0.$$

Mas aún

$$M_2\mathcal{K} = -\frac{w^2h}{4a} > 0,$$

y de (2.19) se tiene que

$$M_3\mathcal{K}(\tau) = \frac{w}{4a} \det \begin{pmatrix} ah - 1 & -1 - ah & a(h - 2\tau) - 1 \\ -1 - ah & ah - 1 & a(2\tau - h) - 1 \\ a(h - 2\tau) - 1 & a(2\tau - h) - 1 & ah - 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_3\mathcal{K}(\tau) = \frac{w^3}{4a}\tau(\tau - h),$$

dado que $\tau \in (0, h/2]$, $M_3\mathcal{K}(\tau) > 0$. Por lo tanto, esta región satisface la condición (2.18).

- $\underline{S_4} = \{(a, b) : |a| > |b|, a > 0\}$

En esta región (2.26) se reduce a

$$\frac{1}{M_2\mathcal{K}} = (b - a) \coth\left(\frac{1}{2}zh\right) \frac{\left(z \tanh\left(\frac{1}{2}zh\right) - (a + b)\right)^2}{zw^2}. \quad (2.28)$$

Debido a que $\coth(zh) > 0$ para $zh > 0$, $M_2\mathcal{K} < 0$.

- $\underline{S_5} = \{(a, b) : |a| > |b|, a < 0\}$

De (2.28) se sabe que $M_2\mathcal{K} > 0$. Además, de (2.20), (2.21) y (2.22) se llega a,

$$\frac{M_1\mathcal{K}}{M_2\mathcal{K}} = \frac{1}{w}(z \coth(zh) - a) > 0,$$

y

$$\frac{M_3\mathcal{K}(\tau)}{M_2\mathcal{K}} = \frac{w \sinh(z\tau) \sinh(z(h - \tau))}{z \sinh(zh)}.$$

Del primer cociente se deduce que $M_1\mathcal{K} > 0$. Puesto que la función \sinh es estrictamente positiva para argumentos estrictamente positivos, $M_3\mathcal{K}(\tau)/M_2\mathcal{K} > 0$ y $M_3\mathcal{K}(\tau) > 0$, $\tau \in (0, h/2]$. De aquí que la condición (2.18) se satisface.

- $\underline{S_6} = \{(a, b) : |b| > |a|, yh \geq \pi\}$

De las ecuaciones (2.20) y (2.22) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{M_3\mathcal{K}(\tau)}{M_1\mathcal{K}} &= \frac{w^2 \left(\frac{e^{jy\tau} - e^{-jy\tau}}{2j}\right) \left(\frac{e^{jy(h-\tau)} - e^{-jy(h-\tau)}}{2j}\right)}{y \left(\frac{e^{jyh} + e^{-jyh}}{2}\right) - a \left(\frac{e^{jyh} - e^{-jyh}}{2j}\right)} \\ &= \frac{w^2 \sin(y\tau) \sin(y(h - \tau))}{y \cos(yh) - a \sin(yh)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Primero se va a analizar esta región excluyendo las fronteras $yh = k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Si el denominador $y \cos(yh) - a \sin(yh)$ es cero, entonces, en vista de (2.20), la condición necesaria $M_1\mathcal{K} > 0$ no se satisface. Por otro lado, si es negativo, para $\tau = \frac{h}{2} \in (0, h/2]$, (2.29) se reduce a

$$\frac{M_3\mathcal{K}(\frac{h}{2})}{M_1\mathcal{K}} = \frac{w^2 \sin^2(\frac{1}{2}yh)}{y \cos(yh) - a \sin(yh)} < 0,$$

y si es positivo, como $yh > \pi$, para $\tau = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\pi}{yh}\right) \in (0, h/2]$, $\sin(\frac{1}{2}yh - \frac{\pi}{2}) \sin(\frac{1}{2}yh + \frac{\pi}{2}) = -\cos^2(\frac{1}{2}yh)$, con lo que

$$\frac{M_3\mathcal{K}\left(\frac{h}{2}\left(1 - \frac{\pi}{yh}\right)\right)}{M_1\mathcal{K}} = \frac{w^2}{y} \frac{-\cos^2(\frac{1}{2}yh)}{y \cos(yh) - a \sin(yh)} < 0.$$

Ahora, en las fronteras $yh = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, de (2.29) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{M_3\mathcal{K}(\tau)}{M_1\mathcal{K}} &= \frac{w^2 \sin(y\tau) \sin(k\pi - y\tau)}{y [y \cos(k\pi) - a \sin(k\pi)]} \\ &= -\frac{w^2 \sin^2(y\tau)}{y^2} < 0. \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que existe algún $\tau \in (0, h/2]$ de modo que (2.29) es negativo, por lo tanto, para esta región la condición (2.18) no se satisface.

- $S_7 = \{(a, b) : |b| > |a|, yh < \pi, b > 0\}$

En esta región (2.28) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_2\mathcal{K}} &= \frac{(b-a) \left(\frac{e^{\frac{1}{2}jyh} + e^{-\frac{1}{2}jyh}}{2}\right)}{jyw^2 \left(\frac{e^{\frac{1}{2}jyh} - e^{-\frac{1}{2}jyh}}{2}\right)} \left(jy \frac{(e^{\frac{1}{2}jyh} - e^{-\frac{1}{2}jyh})}{(e^{\frac{1}{2}jyh} + e^{-\frac{1}{2}jyh})} - (a+b) \right)^2 \\ &= -\frac{(b-a) \left(\frac{e^{\frac{1}{2}jyh} + e^{-\frac{1}{2}jyh}}{2}\right)}{yw^2 \left(\frac{e^{\frac{1}{2}jyh} - e^{-\frac{1}{2}jyh}}{2}\right)} \left(-y \frac{(e^{\frac{1}{2}jyh} - e^{-\frac{1}{2}jyh})}{2j} - (a+b) \right)^2 \end{aligned}$$

y

$$M_2\mathcal{K} = \frac{1}{(a-b)} \tan\left(\frac{1}{2}yh\right) \frac{yw^2}{\left(y \tan\left(\frac{1}{2}yh\right) + (a+b)\right)^2}, \quad (2.30)$$

dado que $0 < yh < \pi$, $\tan(\frac{1}{2}yh) > 0$, por lo que $M_2\mathcal{K} < 0$.

- $S_8 = \{(a, b) : |b| > |a|, yh < \pi, b < 0, a + b \cos(yh) \geq 0\}$

En este caso, de (2.24) el menor principal puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} M_1\mathcal{K} &= \frac{w}{2y} \frac{\left(b \left(\frac{e^{jyh} - e^{-jyh}}{2j}\right) - y\right)}{\left(b \left(\frac{e^{jyh} + e^{-jyh}}{2}\right) + a\right)} \\ &= \frac{w}{2y} \frac{(b \sin(yh) - y)}{(a + b \cos(yh))}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

el factor $\sin(yh)$ es positivo, con lo que $M_1\mathcal{K} < 0$.

-
- $S_9 = \{(a, b) : |b| > |a|, yh < \pi, b < 0, a + b \cos(yh) < 0\}$

De (2.31) se tiene que $M_1\mathcal{K} > 0$ y de (2.30) que $M_2\mathcal{K} > 0$. Finalmente, con (2.21) y (2.22), la relación $M_3\mathcal{K}(\tau)/M_2\mathcal{K}$, $\tau \in (0, h/2]$, se puede reducir a

$$\frac{M_3\mathcal{K}(\tau)}{M_2\mathcal{K}} = \frac{w \sin(y\tau) \sin(y(h - \tau))}{y \sin(yh)}.$$

Como $\sin(yh) > 0$, $\sin(y\tau) > 0$ y $\sin(y(h - \tau)) > 0$ para $\tau \in (0, h/2]$, se deduce que $M_3\mathcal{K}(\tau)$ y $M_2\mathcal{K}$ tiene el mismo signo, es por ello que $M_3\mathcal{K}(\tau) > 0$, $\tau \in (0, h/2]$, y se satisface la condición (2.18).

La unión de las regiones S_3, S_5, S_9 en donde la condición (2.18) se satisface, coincide con la zona de estabilidad S_s descrita en (2.15), en tanto que en las regiones $S_1, S_2, S_4, S_6, S_7, S_8$, al menos una condición de positividad de los menores principales, no se satisface.

2.3 Sistema lineal con un retardo

En esta sección se recuerdan resultados de condiciones de estabilidad para sistemas lineales con un retardo así como la mejora de las mismas.

Las condiciones necesarias de estabilidad obtenidas en [36], enunciadas a continuación, son el punto de partida de esta sección. Estas condiciones dependen de la matriz de Lyapunov, pero también de la matriz A_1 , salvo en el caso en que ésta es invertible.

Teorema 2.4 [36] *Si el sistema con retardo (2.1) es exponencialmente estable, entonces dada una matriz $W > 0$, la única solución $U(\tau)$, $\tau \in [0, h]$ de (2.8), (2.9) y (2.10) satisface las siguientes condiciones*

$$U(0) > 0$$

y

$$\mathcal{N}^T(A_1)\mathcal{K}_3(0, \tau, h)\mathcal{N}(A_1) \geq 0, \quad \tau \in [0, h], \quad (2.32)$$

con

$$\mathcal{K}_3(0, \tau, h) = \begin{bmatrix} U(0) & U^T(\tau) & U^T(h) \\ U(\tau) & U(0) & U^T(h - \tau) \\ U(h) & U(h - \tau) & U(0) \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{N}(A_1) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix},$$

en donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

Corolario 2.1 *Si en el sistema (2.1) la matriz A_1 es no singular, las condiciones del teorema anterior se reducen a*

$$U(0) > 0$$

y

$$\mathcal{K}_3(0, \tau, h) \geq 0, \quad \tau \in [0, h].$$

Una contribución de este trabajo, presentada en [35], es la mejora de las condiciones del Teorema 2.4, en el sentido de que se elimina la dependencia que presentan las condiciones necesarias con respecto a la invertibilidad de la matriz A_1 .

Lema 2.6 *Si el sistema con retardo (2.1) es exponencialmente estable, entonces la matriz*

$$\mathcal{K}_3(0, \tau, h) = \begin{pmatrix} U(0) & U(\tau) & U(h) \\ U^T(\tau) & U(0) & U(h - \tau) \\ U^T(h) & U^T(h - \tau) & U(0) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

es tal que

$$\mathcal{K}_3(0, \tau, h) \geq 0, \quad \tau \in [0, h], \quad (2.34)$$

y

$$U(0) > 0. \quad (2.35)$$

con $U(\tau)$ la solución única de (2.8) que satisface (2.9) y (2.10).

Prueba 2.4 *La prueba de este resultado se puede consultar en [35].*

El análisis desarrollado en [35] dió pauta para proponer condiciones iniciales de tipo exponencial mas complejas que resulten en condiciones necesarias similares a las allí presentadas. Al proponer una aproximación de la condición inicial continua a pedazos, compuesta por r tramos en función de la matriz exponencial, se incrementa la dimensión de la matriz \mathcal{K} , por lo que se denomina \mathcal{K}_r .

Entonces, la familia de condiciones necesarias de estabilidad a las que se llega, tiene la forma

$$U(0) > 0$$

y

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = [U(-\tau_i + \tau_j)]_{i,j=1}^r \geq 0,$$

donde $\tau_k \in [0, h]$, $k = 1, 2, \dots, r$.

2.4 Sistema con múltiples retardos concentrados

En esta sección se recuerdan resultados de condiciones de estabilidad para sistemas lineales con múltiples retardos de la forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^m A_j x(t - h_j), \quad (2.36)$$

en donde las matrices A_j , $j = 0, \dots, m$, son reales de $n \times n$, los retardos son tal que $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = h$.

En el trabajo desarrollado en [8] se presentan condiciones necesarias de estabilidad para este tipo de sistemas, resultado que se enuncia a continuación.

Teorema 2.5 *Si el sistema (2.36) es exponencialmente estable y la matriz A_m es no singular, entonces para cualquier $W > 0$, la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ satisface*

$$U(0) > 0$$

y

$$\mathcal{K}_3(0, \tau, h) = \begin{pmatrix} U(0) & U^T(\tau) & U^T(h) \\ U(\tau) & U(0) & U^T(h - \tau) \\ U(h) & U(h - \tau) & U(0) \end{pmatrix} \geq 0, \quad \tau \in [0, h].$$

En [9] se establece una familia de condiciones necesarias de estabilidad para esta clase de sistemas.

Teorema 2.6 *Si el sistema (2.36) es exponencialmente estable, entonces*

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = [U(-\tau_i + \tau_j)]_{i,j=1}^r > 0,$$

donde $\tau_k \in [0, h]$, $k = 1, 2, \dots, r$ y $\tau_i \neq \tau_j$, si $i \neq j$.

Siguiendo esta línea de investigación, en [5] se presentan condiciones necesarias y suficientes para sistemas con múltiples retardos concentrados.

Teorema 2.7 *El sistema (2.36) es estable, si y sólo si se cumple la condición de Lyapunov y para cada número natural $r \geq 2$*

$$\left[U \left(\frac{j-i}{r-1} h \right) \right]_{i,j=1}^r > 0.$$

Más aún, si se satisface la condición de Lyapunov y el sistema (3.1) es inestable, entonces existe un número natural r tal que

$$\left[U \left(\frac{j-i}{r-1} h \right) \right]_{i,j=1}^r \not\geq 0.$$

Comentario 2.3 *Una contribución de esta tesis en relación al caso multivariable es el desarrollo de una metodología y de los algoritmos correspondientes para verificar la estabilidad en el espacio de dos parámetros, siendo éstos, retardos que varían en intervalos dados. Este es un problema que ha sido el objeto de varias contribuciones como lo pueden ser [53], [19]. En la sección 6.9 se presentan dos ejemplos con dos retardos variantes.*

2.5 Conclusiones

En esta sección se presentaron nuevas condiciones necesarias y suficientes para el caso escalar de sistemas con un retardo. Este criterio se reduce a una condición de positividad en términos de la función de Lyapunov.

Para sistemas multivariables se recuerdan condiciones necesarias que dependen exclusivamente de la matriz de Lyapunov. También se recuerdan condiciones necesarias y suficientes para sistemas con múltiples retardos concentrados.

3

Sistemas con varios retardos distribuidos

Este capítulo está dedicado a la recapitulación de conceptos generales sobre sistemas con varios retardos distribuidos, tales como matriz fundamental, matriz de Lyapunov y sus propiedades, entre otros. Se presenta además, una introducción al tema de las funcionales de tipo completo para sistemas con varios retardos distribuidos. Esta sección fué desarrollada con base en [30], Capítulo 4.

3.1 Sistema

El resultado principal de este trabajo se enfoca en el análisis de la estabilidad de sistemas con retardo distribuido de la forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^m A_j x(t - h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j(\theta) x(t + \theta) d\theta. \quad (3.1)$$

en donde las matrices A_j , $j = 0, \dots, m$, son reales de $n \times n$, los retardos son tal que $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = h$ y $G_j(\theta)$, $j = 1, \dots, m$, son matrices de funciones reales continuas definidas para $\theta \in [-h_j, 0]$.

3.2 Matriz fundamental

La matriz $K(t)$ es conocida como matriz fundamental del sistema (3.1) y satisface

$$\dot{K}(t) = \sum_{j=0}^m A_j K(t - h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j(\theta) K(t + \theta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

tambi3n satisface la ecuaci3n

$$\dot{K}(t) = \sum_{j=0}^m K(t - h_j)A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t + \theta)G_j(\theta)d\theta, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

con condiciones iniciales

$$K(0) = I, \quad K(t) = 0, \quad t < 0. \quad (3.4)$$

3.3 F3rmula de Cauchy

La f3rmula de Cauchy para la soluci3n del sistema (3.1) expresada en t3rminos de la matriz fundamental, $t \geq 0$, tiene la forma

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t - \theta - h_j)A_j\varphi(\theta)d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} K(t - \theta + \xi)G_j(\xi)d\xi\varphi(\theta)d\theta.$$

3.4 Funcional de Lyapunov-Krasovskii con derivada prescrita

Para el sistema (3.1), dada una matriz $W > 0$, la funcional con derivada prescrita a lo largo de las trayectorias del sistema, 3sto es

$$\frac{dv_0(x_t(\varphi))}{dt} = -x^T(t, \varphi)Wx(t, \varphi),$$

fu3 presentada en [23], y tiene la forma

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) &= \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(-\theta - h_j)A_j\varphi(\theta)d\theta \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{-h_k}^0 \varphi^T(\theta_1)A_k^T \int_{-h_j}^0 U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j)A_j\varphi(\theta_2)d\theta_2d\theta_1 \\ &+ 2\varphi^T(0) \sum_{j=1}^m \int_{-h}^0 \int_{-h}^{\theta} U(\xi - \theta)G_j(\xi)d\xi\varphi(\theta)d\theta \\ &+ 2 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \int_{-h_k}^{\theta_2} \varphi^T(\theta_1)A_j^T U(h_j + \theta_1 - \theta_2 + \xi)G_k(\xi)\varphi(\theta_2)d\xi d\theta_2 d\theta_1 \\ &+ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_k}^0 \int_{-h_j}^{\theta_1} \varphi^T(\theta_1) \end{aligned}$$

$$\times \int_{-h_k}^{\theta_2} G_j^T(\xi_1)U(\theta_1 - \theta_2 - \xi_1 + \xi_2)G_k(\xi_2)d\xi_2\varphi(\theta_2)d\xi_1d\theta_2d\theta_1. \quad (3.5)$$

en donde

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t + \tau)dt. \quad (3.6)$$

La matriz $U(\tau)$, asociada a la matriz W , es conocida como la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo descritos por (3.1).

3.5 Matriz de Lyapunov

La matriz $U(\tau)$ satisface las siguientes tres propiedades que son el equivalente de la ecuación de Lyapunov para sistemas libres de retardo,

- la propiedad dinámica

$$U'(\tau) = \sum_{j=0}^m U(\tau - h_j)A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta)G_j(\theta)d\theta, \quad \tau \geq 0, \quad (3.7)$$

- la propiedad simétrica

$$U(\tau) = U^T(-\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (3.8)$$

- la propiedad algebraica

$$-W = \sum_{j=0}^m A_j^T U^T(-h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta)U^T(\theta)d\theta + \sum_{j=0}^m U(-h_j)A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\theta)G_j(\theta)d\theta. \quad (3.9)$$

3.6 Funcionales de tipo completo

Las funcionales de tipo completo introducidas en [29] juegan un papel fundamental en este trabajo. Tienen la característica de admitir una cota inferior de tipo cuadrático cuando el sistema es exponencialmente estable, lo cual se expone en el siguiente Teorema.

Teorema 3.1 [29] *Si el sistema (3.1) es exponencialmente estable, entonces dadas matrices $W_j > 0$, $j = 0, 1, \dots, 2m$ y $W > 0$, tales que $W_0 = W - \sum_{j=1}^m (W_j + h_j W_{m+j})$, existe una constante $\beta > 0$, tal que, para toda condición inicial $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$*

$$v_0(\varphi) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \varphi^T(\theta)[W_j + (h_j + \theta)W_{m+j}]\varphi(\theta)d\theta \geq \beta \|\varphi(0)\|^2.$$

A consecuencia del Teorema anterior, en el siguiente resultado (ver [9]) se presenta una funcional que, de igual forma, satisface una cota cuadrática inferior cuando el sistema es exponencialmente estable.

Teorema 3.2 [29] *Si el sistema (3.1) es exponencialmente estable, entonces dadas matrices $W_j > 0$, $j = 0, 1, \dots, m$ y $W > 0$, tales que $W_0 = W - \sum_{j=1}^m W_j$, existe una constante $\beta_1 > 0$, tal que, para toda condición inicial $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$*

$$v_0(\varphi) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \varphi^T(\theta) W_j \varphi(\theta) d\theta \geq \beta_1 \|\varphi(0)\|^2. \quad (3.10)$$

En este trabajo de tesis se utiliza la funcional

$$v_1(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) W \varphi(\theta) d\theta, \quad (3.11)$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1) está dada por

$$\frac{dv_1(x_t(\varphi))}{dt} = -x^T(t-h, \varphi) W x(t-h, \varphi).$$

Con base en el Teorema 3.2 podemos enunciar el siguiente resultado de gran importancia en el desarrollo de las pruebas de este trabajo. Cabe observar que este resultado fué demostrado en [8] para el caso de sistemas con retardos concentrados.

Teorema 3.3 *Si el sistema (3.1) es exponencialmente estable, entonces existe $\alpha > 0$, tal que*

$$v_1(\varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n). \quad (3.12)$$

Prueba 3.1 *La desigualdad (3.10) se puede expresar como*

$$v_1(\varphi) \geq \beta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) W \varphi(\theta) d\theta - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \varphi^T(\theta) W_j \varphi(\theta) d\theta,$$

dado que las matrices W_j , $j = 0, 1, \dots, m$ son positivas definidas, y debido a que $W_0 = W - \sum_{j=1}^m W_j$, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} v_1(\varphi) &\geq \beta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) W \varphi(\theta) d\theta - \sum_{j=1}^m \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) W_j \varphi(\theta) d\theta \\ &\geq \beta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) W_0 \varphi(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

$$v_1(\varphi) \geq \min \{ \beta_1, \lambda_{\min}(W_0) \} \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2,$$

definiendo $\alpha = \min \{ \beta_1, \lambda_{\min}(W_0) \}$, se llega al resultado.

3.7 Conclusiones

Lo conceptos introducidos en este capítulo proveen la base teórica de este trabajo. Una de las ventajas de las funcionales que satisfacen una cota cuadrática inferior cuando el sistema es exponencialmente estable, es la de proveer condiciones de inestabilidad en términos de la matriz de Lyapunov, o en otras palabras, condiciones necesarias para la estabilidad, ver por ejemplo [44]. Por otro lado, las propiedades de la matriz de Lyapunov son parte esencial en la construcción de la misma.

4

Condiciones necesarias para la estabilidad de sistemas con varios retardos distribuidos

En este capítulo se presentan nuevas propiedades del enfoque de funcionales de Lyapunov-Krasovskii para sistemas con retardos distribuidos, asimismo se introduce una funcional bilineal especial, todos éstos, elementos clave en la obtención de las condiciones necesarias de estabilidad para la clase de sistemas estudiado. Estas condiciones constituyen una extensión de aquellas obtenidas en [6] para el caso de sistemas con retardos concentrados.

4.1 Nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov

La obtención de familias de condiciones necesarias para sistemas con múltiples retardos concentrados presentada en [6], [8] ó [9] toma como punto de partida el sustituir en la funcional una función inicial que depende de la matriz fundamental del sistema. Para la clase de sistemas en cuestión, es necesario mostrar que la matriz fundamental y la matriz de Lyapunov satisfacen ciertas relaciones antes de obtener las condiciones necesarias de estabilidad.

Primero se introduce el análogo de la fórmula de Cauchy para la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos distribuidos. Para $\tau \geq 0$

$$U(\tau) = U(0)K(\tau) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\theta)A_j K(\tau - \theta - h_j) d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(\theta)G_j(\xi)K(\tau - \theta + \xi) d\xi d\theta. \quad (4.1)$$

El siguiente Lema presenta una expresión de la propiedad dinámica en el caso en que

el argumento de ésta es negativo. El resultado presentado es útil en el desarrollo de varias pruebas a lo largo del trabajo de tesis.

Lema 4.1 *Para cualquier $\tau < 0$, la propiedad dinámica se expresa mediante*

$$U'(\tau) = - \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + h_j) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - \theta) d\theta, \quad \tau < 0. \quad (4.2)$$

Prueba 4.1 *De (3.8) se tiene que*

$$U'(-\xi) = - [U'(\xi)]^T,$$

sustituyendo (3.7) en esta expresión, la derivada puede expresarse como

$$U'(-\xi) = - \left[\sum_{j=0}^m U(\xi - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta \right]^T$$

ó

$$U'(-\xi) = - \sum_{j=0}^m A_j^T U(-\xi + h_j) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(-\xi - \theta) d\theta.$$

El resultado se obtiene con el cambio de variable $\tau = -\xi$.

A continuación se obtienen las nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov.

4.1.1 Propiedad algebraica generalizada

El siguiente resultado es una generalización de la propiedad algebraica (3.9), la generalización deja en evidencia la relación directa entre la matriz fundamental y la matriz de Lyapunov del sistema.

Lema 4.2 *Si el sistema es exponencialmente estable, entonces la llamada propiedad algebraica generalizada se expresa, para $\tau \geq 0$*

$$\begin{aligned} -WK(\tau) &= \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - \theta) d\theta \\ &\quad + \sum_{j=0}^m U(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Prueba 4.2 *La derivada en el tiempo de la función $K^T(t)WK(t + \tau)$ es*

$$\frac{d}{dt} [K^T(t)WK(t + \tau)] = \dot{K}^T(t)WK(t + \tau) + K^T(t)\dot{W}K(t + \tau),$$

al utilizar la ecuación (3.3) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[K^T(t)WK(t+\tau)] &= \left[\sum_{j=0}^m K(t-h_j)A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t+\theta)G_j(\theta)d\theta \right]^T WK(t+\tau) \\
&\quad + K(t)^T W \left[\sum_{j=0}^m K(t+\tau-h_j)A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t+\tau+\theta)G_j(\theta)d\theta \right] \\
&= \sum_{j=0}^m A_j^T K^T(t-h_j)WK(t+\tau) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta)K^T(t+\theta)d\theta WK(t+\tau) \\
&\quad + \sum_{j=0}^m K(t)^T WK(t+\tau-h_j)A_j \\
&\quad + K(t)^T W \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t+\tau+\theta)G_j(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Integrando la expresión anterior de cero a infinito, es decir $\int_0^\infty \frac{d}{dt}[K^T(t)WK(t+\tau)]dt$, y bajo la suposición de que el sistema es exponencialmente estable, se tiene

$$\begin{aligned}
-K^T(0)WK(\tau) &= \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau+h_j) + \underbrace{\int_0^\infty \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta)K^T(t+\theta)d\theta WK(t+\tau)dt}_{\text{simple underline}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^m U(\tau-h_j)A_j + \underbrace{\int_0^\infty K(t)^T W \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t+\tau+\theta)G_j(\theta)d\theta dt}_{\text{double underline}}. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Note que el término con subrayado simple, se puede reescribir en función de la matriz de Lyapunov (3.6), llevando a cabo un cambio en el orden de integración y un cambio de variable dado por $\bar{t} = t + \theta$, es decir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta)K^T(t+\theta)d\theta WK(t+\tau)dt &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) \int_0^\infty K^T(t+\theta)WK(t+\tau)dt d\theta \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) \int_\theta^\infty K^T(\bar{t})WK(\bar{t}+\tau-\theta)d\bar{t}d\theta \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta)U(\tau-\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Ahora el término con doble subrayado también puede ser representado en función de la

matriz de Lyapunov con un cambio de orden de integración,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K(t)^T W \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t+\tau+\theta) G_j(\theta) d\theta dt &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^\infty K(t)^T W K(t+\tau+\theta) dt G_j(\theta) d\theta \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau+\theta) G_j(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Se llega al resultado sustituyendo estas expresiones en (4.4).

Comentario 4.1 Para $\tau = 0$ la propiedad algebraica generalizada (4.3) se reduce a la propiedad algebraica (3.9).

La siguiente expresión se utiliza en las pruebas de las Fórmulas de Cauchy generalizadas, motivo por el cual es importante su obtención.

Lema 4.3 La propiedad algebraica generalizada se puede reescribir como

$$U'(\tau) = - \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + h_j) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - \theta) d\theta - WK(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (4.5)$$

Prueba 4.3 De (4.3) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m U(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta &= - \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + h_j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - \theta) d\theta - WK(\tau). \end{aligned}$$

Al sustituir (3.7) en la última expresión se llega a (4.5).

Comentario 4.2 La suposición de que el sistema es exponencialmente estable implica que la propiedad algebraica generalizada se cumple, es decir, el que se cumpla dicha propiedad es una condición necesaria para que el sistema sea exponencialmente estable. Por otro lado, la propiedad algebraica generalizada se utiliza en el resto de las propiedades para la obtención de las condiciones necesarias de estabilidad mostradas en este capítulo. Estos dos hechos indican que no pueden presentarse condiciones necesarias y suficientes de estabilidad con base en la propiedad algebraica generalizada obtenida de esta manera.

4.1.2 Fórmulas de Cauchy generalizadas

Las siguiente fórmula generaliza la fórmula de Cauchy para la matriz de Lyapunov (4.1). La nueva expresión tiene como característica el estar definida tanto para valores positivos como

negativos del argumento, además, el argumento de la matriz de Lyapunov en (4.1) se puede ver como la suma algebraica de dos argumentos cualesquiera, que relacionan a la matriz de Lyapunov con la matriz fundamental del sistema.

Lema 4.4 *Si el sistema es exponencialmente estable, la llamada fórmula de Cauchy generalizada se expresa, para cualquier $\tau_1, \tau_2 \geq 0$*

$$\begin{aligned}
U(\tau_2 - \tau_1) &= \int_{-\tau_1}^0 K^T(s + \tau_1) W K(s + \tau_2) ds + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(s + \tau_1) A_j^T U(\tau_2 + s + h_j) ds \\
&+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^s K^T(s + \tau_1) G_j^T(\theta) U(\tau_2 + s - \theta) d\theta ds + K^T(\tau_1) U(\tau_2). \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Prueba 4.4 *La expresión*

$$-\int_0^{\tau_1} \frac{\partial}{\partial s} [K^T(s) U(s + \tau)] ds = U(\tau) - K^T(\tau_1) U(\tau + \tau_1)$$

también puede escribirse como

$$-\int_0^{\tau_1} \frac{\partial}{\partial s} [K^T(s) U(s + \tau)] ds = -\int_0^{\tau_1} \left[\dot{K}^T(s) U(s + \tau) + K^T(s) U'(s + \tau) \right] ds. \quad (4.7)$$

De la ecuación (4.5), se tiene que

$$U'(\tau + s) = -\sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + s + h_j) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau + s - \theta) d\theta - W K(\tau + s). \quad (4.8)$$

La sustitución de (3.2) y (4.8) en (4.7) resulta en

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\tau_1} \frac{\partial}{\partial s} [K^T(s) U(s + \tau)] ds &= -\int_0^{\tau_1} \left[\sum_{j=0}^m A_j K(s - h_j) \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j(\theta) K(s + \theta) d\theta \right]^T U(\tau + s) ds \\
&+ \int_0^{\tau_1} K^T(s) \left[\sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + s + h_j) \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau + s - \theta) d\theta + W K(\tau + s) \right] ds \\
&= -\sum_{j=0}^m \int_0^{\tau_1} K^T(s - h_j) A_j^T U(\tau + s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\tau_1} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(s+\theta) G_j^T(\theta) d\theta U(\tau+s) ds \\
& + \sum_{j=1}^m \int_0^{\tau_1} K^T(s) A_j^T U(\tau+s+h_j) ds \\
& \hline
& + \int_0^{\tau_1} K^T(s) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau+s-\theta) d\theta ds \\
& + \int_0^{\tau_1} K^T(s) W K(\tau+s) ds.
\end{aligned}$$

Eliminando los términos subrayados e intercambiando el orden de integración en los términos con integrales dobles, se tiene

$$\begin{aligned}
- \int_0^{\tau_1} \frac{\partial}{\partial s} [K^T(s) U(s+\tau)] ds &= - \sum_{j=0}^m \int_0^{\tau_1} K^T(s-h_j) A_j^T U(\tau+s) ds \\
& \longleftarrow \\
& - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^{\tau_1} K^T(s+\theta) G_j^T(\theta) U(\tau+s) ds d\theta \\
& \longrightarrow \\
& + \sum_{j=0}^m \int_0^{\tau_1} K^T(s) A_j^T U(\tau+s+h_j) ds \\
& \longleftarrow \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^{\tau_1} K^T(s) G_j^T(\theta) U(\tau+s-\theta) ds d\theta \\
& \longrightarrow \\
& + \int_0^{\tau_1} K^T(s) W K(\tau+s) ds. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

En las siguientes líneas se sumarán los términos con subrayado semejante.

Con el cambio de variable $\bar{s} = s - h_j$, y debido a las condiciones iniciales de $K(t)$, la suma de los términos con subrayado de flecha izquierda se expresa

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=0}^m \int_{-h_j}^{\tau_1-h_j} K^T(\bar{s}) A_j^T U(\tau+\bar{s}+h_j) d\bar{s} + \sum_{j=0}^m \int_0^{\tau_1} K^T(\bar{s}-h_j) A_j^T U(\tau+\bar{s}) d\bar{s} \\
& = \sum_{j=0}^m \int_{\tau_1-h_j}^{-h_j} K^T(\bar{s}) A_j^T U(\tau+\bar{s}+h_j) d\bar{s} + \sum_{j=0}^m \int_{h_j}^{\tau_1+h_j} K^T(s) A_j^T U(\tau+s+h_j) ds \\
& = \sum_{j=0}^m \int_{\tau_1-h_j}^0 K^T(\bar{s}) A_j^T U(\tau+\bar{s}+h_j) d\bar{s} + \sum_{j=0}^m \int_0^{-h_j} K^T(\bar{s}) A_j^T U(\tau+\bar{s}+h_j) d\bar{s} \\
& \quad + \sum_{j=0}^m \int_0^{\tau_1} K^T(s) A_j^T U(\tau+s+h_j) ds
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^m \int_{\tau_1-h_j}^{\tau_1} K^T(s)A_j^T U(\tau + s + h_j)ds. \quad (4.10)$$

La suma de los términos con subrayado de flecha derecha, con el cambio de variable $\tilde{s} = s + \theta$, y debido a que $\theta \in [-h_j, 0]$, $j = 1, \dots, m$, se reescribe como

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^{\tau_1+\theta} K^T(\tilde{s})G_j^T(\theta)U(\tau + \tilde{s} - \theta)d\tilde{s}d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^{\tau_1} K^T(s)G_j^T(\theta)U(\tau + s - \theta)dsd\theta \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\tau_1+\theta}^0 K^T(\tilde{s})G_j^T(\theta)U(\tau + \tilde{s} - \theta)d\tilde{s}d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^{\tau_1} K^T(s)G_j^T(\theta)U(\tau + s - \theta)dsd\theta \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\tau_1+\theta}^{\tau_1} K^T(s)G_j^T(\theta)U(\tau + s - \theta)dsd\theta. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La sustitución de (4.10) y (4.11) en (4.9), conduce a

$$\begin{aligned} - \int_0^{\tau_1} \frac{\partial}{\partial s} [K^T(s)U(s + \tau)]ds &= \sum_{j=0}^m \int_{\tau_1-h_j}^{\tau_1} K^T(s)A_j^T U(\tau + s + h_j)ds \\ &+ \int_0^{\tau_1} K^T(s)WK(\tau + s)ds \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\tau_1+\theta}^{\tau_1} K^T(s)G_j^T(\theta)U(\tau + s - \theta)dsd\theta. \end{aligned}$$

Integrando el lado izquierdo de la ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned} U(\tau) - K^T(\tau_1)U(\tau + \tau_1) &= \int_0^{\tau_1} K^T(s)WK(s + \tau)ds + \sum_{j=1}^m \int_{\tau_1-h_j}^{\tau_1} K^T(s)A_j^T U(\tau + s + h_j)ds \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\tau_1+\theta}^{\tau_1} K^T(s)G_j^T(\theta)U(\tau + s - \theta)dsd\theta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ahora definiendo $\tau = \tau_2 - \tau_1$

$$\begin{aligned} U(\tau_2 - \tau_1) - K^T(\tau_1)U(\tau_2) &= \int_0^{\tau_1} K^T(s)WK(s + \tau_2 - \tau_1)ds \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{\tau_1-h_j}^{\tau_1} K^T(s)A_j^T U(\tau_2 - \tau_1 + s + h_j)ds \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\tau_1+\theta}^{\tau_1} K^T(s)G_j^T(\theta)U(\tau_2 - \tau_1 + s - \theta)dsd\theta, \end{aligned}$$

utilizando el cambio de variable dado por $\widehat{s} = s - \tau_1$, la expresión anterior se reescribe como

$$\begin{aligned}
U(\tau_2 - \tau_1) &= \int_{-\tau_1}^0 K^T(\widehat{s} + \tau_1)W K(\widehat{s} + \tau_2)d\widehat{s} + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\widehat{s} + \tau_1)A_j^T U(\tau_2 + \widehat{s} + h_j)d\widehat{s} \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 K^T(\widehat{s} + \tau_1)G_j^T(\theta)U(\tau_2 + \widehat{s} - \theta)d\widehat{s}d\theta + K^T(\tau_1)U(\tau_2).
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado se obtiene intercambiando el orden de integración en la doble integral.

Comentario 4.3 Para $\tau_2 = 0$, la ecuación (4.12) se reduce a (4.1).

La siguiente propiedad se obtiene a partir de la fórmula de Cauchy generalizada. En [8] se obtiene la propiedad equivalente para sistemas con retardo concentrado. Es importante mencionar que el procedimiento aquí empleado es novedoso con respecto al utilizado en [8].

Lema 4.5 Si el sistema es exponencialmente estable, para $\tau, \alpha \geq 0$, la fórmula de Cauchy generalizada se expresa

$$\begin{aligned}
U(\tau + \alpha) &= U(\alpha)K(\tau) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\alpha - \theta - h_j)A_j K(\tau + \theta)d\theta \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(\alpha - \theta + \xi)G_j(\xi)K(\tau + \theta)d\xi d\theta. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Prueba 4.5 La transpuesta de (4.6) es

$$\begin{aligned}
U^T(\tau_2 - \tau_1) &= \int_{-\tau_1}^0 K^T(s + \tau_2)W K(s + \tau_1)ds + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U^T(s + \tau_2 + h_j)A_j K(s + \tau_1)ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^s U^T(\tau_2 + s - \theta)G_j(\theta)K(s + \tau_1)d\theta ds + U^T(\tau_2)K(\tau_1).
\end{aligned}$$

Por la propiedad simétrica de la matriz de Lyapunov la expresión se reescribe como

$$\begin{aligned}
U(\tau_1 - \tau_2) &= U(-\tau_2)K(\tau_1) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(-s - \tau_2 - h_j)A_j K(s + \tau_1)ds \\
&\quad + \sum_{j=0}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^s U(\theta - \tau_2 - s)G_j(\theta)K(s + \tau_1)d\theta ds + \int_{-\tau_1}^0 K^T(s + \tau_2)W K(s + \tau_1)ds.
\end{aligned}$$

El cambio de variable $-\tau_2 = \alpha$, $\tau_1 = \tau$ conduce a

$$\begin{aligned}
U(\tau + \alpha) &= U(\alpha)K(\tau) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\alpha - s - h_j)A_j K(\tau + s)ds \\
&+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^s U(\theta + \alpha - s)G_j(\theta)K(s + \tau)d\theta ds + \int_{-\tau}^0 K^T(s - \alpha)WK(s + \tau)ds
\end{aligned}$$

Se tiene que para $\tau \geq 0$, el argumento de $K^T(s - \alpha)$ en el último término varía de $-\tau - \alpha$, a $-\alpha$, por lo tanto, para $\alpha \geq 0$ el último término se elimina y se llega al resultado.

4.2 Funcional Bilineal

Esta sección se presenta una funcional bilineal que generaliza a la funcional v_1 dada por (3.11), en el sentido de que la nueva funcional admite dos condiciones iniciales distintas y no solo una como lo hace la funcional v_1 . Esta funcional se construyó con base en una funcional semejante presentada en [30], Capítulo 2, en la sección de prueba de existencia y unicidad de la matriz de Lyapunov para sistemas con un retardo concentrado.

El interés en esta funcional radica en que mediante la sustitución de condiciones iniciales en función de la matriz de Lyapunov, se revela la relación existente entre la matriz de Lyapunov y la matriz fundamental.

$$\begin{aligned}
&z(\varphi, \psi) \\
&= \varphi^T(0)U(0)\psi(0) + \varphi^T(0) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U^T(\theta + h_j)A_j\psi(\theta)d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \varphi^T(\theta)A_j^T U(\theta + h_j)d\theta\psi(0) \\
&+ \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{-h_k}^0 \varphi^T(\theta_1)A_k^T \int_{-h_j}^0 U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j)A_j\psi(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1 \\
&+ \varphi^T(0) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(\xi - \theta)G_j(\xi)d\xi\psi(\theta)d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \varphi^T(\theta) \int_{-h_j}^{\theta} G_j^T(\xi)U^T(\xi - \theta)d\xi d\theta\psi(0) \\
&+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \varphi^T(\theta_1)A_j^T \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \int_{-h_k}^{\theta_2} U(h_j + \theta_1 - \theta_2 + \xi)G_k(\xi)d\xi\psi(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1 \\
&+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \int_{-h_k}^{\theta_2} \varphi^T(\theta_2)G_k^T(\xi)U^T(h_j + \theta_1 - \theta_2 + \xi)A_j d\xi d\theta_2\psi(\theta_1)d\theta_1 \\
&+ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_k}^0 \int_{-h_j}^{\theta_1} \varphi^T(\theta_1) \int_{-h_k}^{\theta_2} G_j^T(\xi_1)U(\theta_1 - \theta_2 - \xi_1 + \xi_2)G_k(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\psi(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1
\end{aligned}$$

$$+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) W \psi(\theta) d\theta. \quad (4.14)$$

Comentario 4.4 *Note que $z(\varphi, \varphi)$ es igual a $v_1(\varphi)$ dada en (3.11).*

El siguiente resultado relaciona a la matriz fundamental con la matriz de Lyapunov del sistema, mediante la funcional bilineal (4.14).

La clave en la obtención del resultado consiste en la adecuada elección de las condiciones iniciales, las propiedades obtenidas que relacionan a la matriz fundamental del sistema con la matriz de Lyapunov sugieren condiciones iniciales en función de la matriz fundamental.

Lema 4.6 *Si el sistema es exponencialmente estable, para todo $\tau_1, \tau_2 \in [0, h]$ se tiene que*

$$z(K(\tau_1 + \theta)\mu, K(\tau_2 + \theta)\eta) = \mu^T [U(\tau_2 - \tau_1)] \eta. \quad (4.15)$$

Prueba 4.6 *La sustitución de las condiciones iniciales $K(\tau_1 + \theta)\mu, K(\tau_2 + \theta)\eta$ en (4.14), conduce a*

$$\begin{aligned} & z(K(\tau_1 + \theta)\mu, K(\tau_2 + \theta)\eta) \\ = & \mu^T [K^T(\tau_1)U(0)K(\tau_2) + K^T(\tau_1) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U^T(\theta + h_j) A_j K(\tau_2 + \theta) d\theta \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\tau_1 + \theta) A_j^T U(\theta + h_j) d\theta K(\tau_2) \\ & + \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 K^T(\tau_1 + \theta_1) A_k^T \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j) A_j K(\tau_2 + \theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \\ & + K^T(\tau_1) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(\xi - \theta) G_j(\xi) d\xi K(\tau_2 + \theta) d\theta \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\tau_1 + \theta) \int_{-h_j}^{\theta} G_j^T(\xi) U^T(\xi - \theta) d\xi d\theta K(\tau_2) \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\tau_1 + \theta_1) A_j^T \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \int_{-h_k}^{\theta_2} U(h_j + \theta_1 - \theta_2 + \xi) G_k(\xi) d\xi K(\tau_2 + \theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \int_{-h_k}^{\theta_2} K^T(\tau_1 + \theta_2) G_k^T(\xi) U^T(h_j + \theta_1 - \theta_2 + \xi) A_j d\xi d\theta_2 K(\tau_2 + \theta_1) d\theta_1 \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_k}^0 \int_{-h_j}^{\theta_1} K^T(\tau_1 + \theta_1) \\ & \times \int_{-h_k}^{\theta_2} G_j^T(\xi_1) U(\theta_1 - \theta_2 - \xi_1 + \xi_2) G_k(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 K(\tau_2 + \theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \end{aligned}$$

$$+ \int_{-h}^0 K^T(\tau_1 + \theta)W K(\tau_2 + \theta)d\theta]\eta. \quad (4.16)$$

Considerando $\alpha = 0$, y $\tau = \tau_2$ en (4.13) resulta

$$U(\tau_2) = U(0)K(\tau_2) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(-\theta - h_j)A_j K(\tau_2 + \theta)d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(-\theta + \xi)G_j(\xi)K(\tau_2 + \theta)d\xi d\theta$$

y despejando

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U^T(\theta + h_j)A_j K(\tau_2 + \theta)d\theta = U(\tau_2) - U(0)K(\tau_2) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(-\theta + \xi)G_j(\xi)K(\tau_2 + \theta)d\xi d\theta. \quad (4.17)$$

Utilizando nuevamente (4.13), con $\alpha = \theta_1 + h_k$, $\tau = \tau_2$, $\theta = \theta_2$, se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j)A_j K(\tau_2 + \theta_2)d\theta_2 = U(\tau_2 + \theta_1 + h_k) \\ & - U(\theta_1 + h_k)K(\tau_2) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta_2} U(\theta_1 + h_k - \theta_2 + \xi)G_j(\xi)K(\tau_2 + \theta_2)d\xi d\theta_2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ahora con $\alpha = \theta_1 - \xi_1$, $\xi = \xi_2$, $\tau = \tau_2$, $\theta = \theta_2$ en (4.13), se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \int_{-h_k}^{\theta_2} U(\theta_1 - \xi_1 - \theta_2 + \xi_2)G_k(\xi_2)K(\tau_2 + \theta_2)d\xi_2 d\theta_2 = U(\tau_2 + \theta_1 - \xi_1) \\ & - U(\theta_1 - \xi_1)K(\tau_2) - \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 U(\theta_1 - \xi_1 - \theta_2 - h_k)A_k K(\tau_2 + \theta_2)d\theta_2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Se reacomoda el término de la integral cuádruple y se sustituye (4.17), (4.18) y (4.19) en (4.16), con lo que

$$\begin{aligned} & z(K(\tau_1 + \theta)\mu, K(\tau_2 + \theta)\eta) \\ & = \mu^T \left[\underbrace{K^T(\tau_1)U(0)K(\tau_2)}_{\leftarrow} + K^T(\tau_1) \left[U(\tau_2) - \underbrace{U(0)K(\tau_2)}_{\leftarrow} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(-\theta + \xi)G_j(\xi)K(\tau_2 + \theta)d\xi d\theta \right] \right] \\ & \quad + \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\tau_1 + \theta)A_j^T U(\theta + h_j)d\theta K(\tau_2)}_{\rightarrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 K^T(\tau_1 + \theta_1) A_k^T \left[U(\tau_2 + \theta_1 + h_k) - \underbrace{U(\theta_1 + h_k)K(\tau_2)} \right] \\
& - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta_2} U(\theta_1 + h_k - \theta_2 + \xi) G_j(\xi) K(\tau_2 + \theta_2) d\xi d\theta_2 \Big] d\theta_1 \\
& + K^T(\tau_1) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(\xi - \theta) G_j(\xi) d\xi K(\tau_2 + \theta) d\theta \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\tau_1 + \theta) \int_{-h_j}^{\theta} G_j^T(\xi) U^T(\xi - \theta) d\xi d\theta K(\tau_2) \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\tau_1 + \theta_1) A_j^T \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \int_{-h_k}^{\theta_2} U(h_j + \theta_1 - \theta_2 + \xi) G_k(\xi) d\xi K(\tau_2 + \theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \int_{-h_k}^{\theta_2} K^T(\tau_1 + \theta_2) G_k^T(\xi) U^T(h_j + \theta_1 - \theta_2 + \xi) A_j d\xi d\theta_2 K(\tau_2 + \theta_1) d\theta_1 \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\tau_1 + \theta_1) \int_{-h_j}^{\theta_1} G_j^T(\xi_1) \left[U(\tau_2 + \theta_1 - \xi_1) - \underbrace{U(\theta_1 - \xi_1)K(\tau_2)} \right] \\
& - \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 U(\theta_1 - \xi_1 - \theta_2 - h_k) A_k K(\tau_2 + \theta_2) d\theta_2 \Big] d\xi_1 d\theta_1 \\
& + \int_{-h}^0 K^T(\tau_1 + \theta) W K(\tau_2 + \theta) d\theta \eta.
\end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en reducir los términos semejantes, primero desarrollando las multiplicaciones indicadas y luego, en algunos casos, utilizando la propiedad simétrica de la matriz de Lyapunov, lo cual conduce a

$$\begin{aligned}
& z(K(\tau_1 + \theta)\mu, K(\tau_2 + \theta)\eta) \\
& = \mu^T [K^T(\tau_1)U(\tau_2) \\
& + \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 K^T(\tau_1 + \theta_1) A_k^T U(\tau_2 + \theta_1 + h_k) d\theta_1 \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(\tau_1 + \theta_1) \int_{-h_j}^{\theta_1} G_j^T(\xi_1) U(\tau_2 + \theta_1 - \xi_1) d\xi_1 d\theta_1 \\
& + \int_{-h}^0 K^T(\tau_1 + \theta) W K(\tau_2 + \theta) d\theta] \eta.
\end{aligned}$$

Finalmente con (4.6) y debido a que $\tau_1 \in [0, h]$, se llega al resultado.

A continuación se presenta un Lema que es utilizado directamente en la obtención de las condiciones necesarias de estabilidad.

Lema 4.7 *Sea la condición inicial en función de la matriz fundamental del sistema,*

$$\bar{\varphi}(\theta) = \sum_{i=1}^r K(\tau_i + \theta)\gamma_i, \quad \theta \in [-h, 0], \quad i = 1, \dots, r,$$

en donde γ_i son vectores arbitrarios constantes y se considera $r \geq 1$, entonces, si el sistema es exponencialmente estable, se satisface

$$v_1(\bar{\varphi}(\theta)) = \gamma^T \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r)\gamma. \quad (4.20)$$

con

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = [U(-\tau_i + \tau_j)]_{i,j=1}^r, \quad \gamma = (\gamma_1^T, \gamma_2^T, \dots, \gamma_r^T)^T. \quad (4.21)$$

Prueba 4.7 *Con base en el Lema 4.6, la observación 4.4 y debido a la propiedad de linealidad de la funcional z , se tiene que*

$$\begin{aligned} v_1(\bar{\varphi}(\theta)) &= z(\bar{\varphi}(\theta), \bar{\varphi}(\theta)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r z(K(\tau_i + \theta)\gamma_i, K(\tau_j + \theta)\gamma_j) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \gamma_i^T U(-\tau_i + \tau_j)\gamma_j = \gamma^T \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r)\gamma. \end{aligned}$$

Comentario 4.5 *Es importante hacer énfasis nuevamente en que la expresión (4.21), al ser obtenida con el uso de la propiedad algebraica generalizada presentada en el Lema 4.2, depende de la estabilidad del sistema, por lo que, hasta este punto del trabajo presentado, no se puede utilizar para obtener un criterio de estabilidad.*

4.3 Condiciones necesarias de estabilidad

En esta sección se obtienen dos familia de condiciones necesarias de estabilidad exponencial para sistemas del tipo (3.1). La característica de las condiciones necesarias en general, es que se satisfacen aún para valores de parámetros para los que el sistema es inestable (ver capítulo de Ejemplos).

Los pasos para llegar a este punto se resumen de la siguiente manera:

- Se obtuvieron nuevas propiedades que relacionan a la matriz de Lyapunov con la matriz fundamental del sistema, en específico, la propiedad algebraica generalizada en sus dos expresiones, (4.3) y (4.5), y las fórmulas de Cauchy generalizadas, (4.6) y (4.13).

-
- Se presentó una funcional bilineal que, mediante condiciones iniciales adecuadas y la ayuda de las expresiones comentadas en el punto anterior, revela en la ecuación (4.20), la relación existente entre la matriz de Lyapunov y la funcional v_1 .

Ahora bien, el paso consiguiente para obtener las condiciones necesarias de estabilidad se describe a continuación.

- El Lema 4.7 y el Teorema 3.3 permiten formular dos Teoremas para condiciones necesarias de estabilidad del sistema (3.1) que dependen exclusivamente de la matriz de Lyapunov.

Los siguientes dos resultados constituyen parte del resultado principal de esta tesis, condiciones necesarias de estabilidad. En la primer familia de condiciones necesarias se requiere una condición de positividad, en tanto que en la segunda, una condición de positividad estricta.

4.3.1 Condiciones necesarias positivas semidefinidas

Teorema 4.1 *Si el sistema (3.1) es exponencialmente estable, entonces*

$$U(0) > 0 \tag{4.22}$$

y

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = [U(-\tau_i + \tau_j)]_{i,j=1}^r \geq 0, \tag{4.23}$$

en donde $r \geq 1$, $\tau_k \in [0, h]$, $k = 1, \dots, r$.

Prueba 4.8 *En vista del Lema 4.7, con $\bar{\varphi}(\theta) = K(\theta)\eta$, η un vector arbitrario constante, y tomando en cuenta (3.12) del Teorema 3.3, se tiene que*

$$v_1(\bar{\varphi}(\theta)) = \eta^T [U(0)]\eta \geq \alpha \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \theta \in [-h, 0].$$

Note que por las condiciones iniciales de la matriz fundamental $\bar{\varphi}(\theta) = K(\theta)\eta = K(0)\eta = \eta$, por lo que $\|\bar{\varphi}(\theta)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi(0)\|^2 = \|\eta\|^2$. Entonces $\eta^T [U(0)]\eta \geq \alpha \|\eta\|^2$, lo que implica que $U(0) \geq \alpha$, y debido al Teorema 3.3, $\alpha > 0$, con lo que la condición (4.22) queda probada.

Para la condición (4.23) se considera nuevamente el Lema 4.7. Debido a la suposición de estabilidad del sistema (3.1), una condición necesaria para que la desigualdad (3.12) se cumpla, es que $v_1(\bar{\varphi}) = \gamma^T \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r)\gamma \geq 0$. Dado que γ está compuesto por vectores arbitrarios, $\gamma^T \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r)\gamma \geq 0$ implica que $\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) \geq 0$ y la condición queda probada.

4.3.2 Condiciones necesarias positivas definidas

Teorema 4.2 *Si el sistema (3.1) es exponencialmente estable, entonces*

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = [U(-\tau_i + \tau_j)]_{i,j=1}^r > 0, \quad (4.24)$$

en donde $r \geq 1$, $\tau_k \in [0, h]$, $k = 1, \dots, r$, y $\tau_i \neq \tau_j$, si $i \neq j$.

Prueba 4.9 *Debido a que el sistema (3.1) se supone exponencialmente estable, el Lema 4.7 y el Teorema 3.3 conducen a*

$$v_1(\bar{\varphi}(\theta)) = \gamma^T \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) \gamma \geq \alpha \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2$$

Resta probar que $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} > 0$ si $\gamma \neq 0$. Suponga que $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_r \leq h$. Se analizan entonces los siguientes casos.

Si $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = \dots = \gamma_r = 0$ y $\tau_1 = 0$, la función $\bar{\varphi}(\theta) = K(\theta)\gamma_1 = \gamma_1$ cuando $\theta = 0$, por lo que $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} > 0$.

Si $\tau_r \in (0, h]$, debido a que $\theta \in [-h, 0]$, y que $\tau_r > \tau_{r-1}$, existe \tilde{t} de tal modo que $\bar{\varphi}(\theta) = K(t)\gamma_r$, $t \in [0, \tilde{t}]$, es más, por propiedades de $K(t)$, existe $\bar{t} \leq \tilde{t}$ de modo que $K(t)$ es no singular para $t \in [0, \bar{t}]$, por lo tanto $\bar{\varphi}(\theta) \neq 0$ y $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} > 0$. De aquí que la condición (4.24) queda probada.

Con este tipo de condiciones, a medida que aumenta el parámetro r , las condiciones se hacen mas estrictas en el sentido de que se tienen que satisfacer mas desigualdades matriciales implícitas, ésto se ilustra en el siguiente Lema.

Lema 4.8 *Para cualesquiera $\tau_k \in [0, h]$, $k = 1, \dots, r+1$, $r \geq 1$, $\tau_i \neq \tau_j$, si $i \neq j$,*

$$\mathcal{K}_{r+1}(\tau_1, \dots, \tau_{r+1}) > 0 \implies \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) > 0$$

con \mathcal{K}_r definida por (4.21).

Prueba 4.10 *Suponga que $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{r+1} \leq h$. Si $\mathcal{K}_{r+1}(\tau_1, \dots, \tau_{r+1}) > 0$, todos los menores principales son positivos, incluyendo aquellos cuya positividad conducen a que $\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) > 0$, con lo que el Lema queda demostrado.*

4.4 Conclusiones

En este capítulo se probaron nuevas propiedades de los sistemas con retardos distribuidos que permitieron obtener condiciones necesarias de estabilidad. Las condiciones necesarias de

estabilidad para sistemas con retardo distribuido tienen la misma forma que las correspondientes a los sistemas con múltiples retardos concentrados obtenidas en [6]. Cabe mencionar que las matrices de Lyapunov subyacentes son claramente diferentes. Este hecho muestra el papel esencial de la matriz de Lyapunov.

5

Condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas con varios retardos distribuidos

En este capítulo se obtiene un criterio de estabilidad para sistemas con retardos distribuidos de la forma (3.1). Como ya se vió en el Capítulo 4, la propiedad algebraica generalizada es la base para obtener resultados cruciales en la determinación las condiciones necesarias de estabilidad. Con el fin de obtener un criterio de estabilidad, es necesario obtener la propiedad algebraica generalizada independiente de la estabilidad del sistema, tema en el que se centra la primera parte de este capítulo, para después presentar resultados adicionales y así obtener el criterio de estabilidad.

5.1 Propiedad algebraica generalizada independiente de la estabilidad del sistema

El Lema 4.2 del Capítulo 4 establece que la propiedad algebraica generalizada se obtiene a partir de la suposición de que el sistema es exponencialmente estable, las fórmulas de Cauchy generalizadas, dadas por (4.6) y (4.13), y los Lemas 4.6 y 4.7, al tomar como base a la propiedad algebraica generalizada, también dependen de que el sistema sea exponencialmente estable.

Puesto que en este capítulo se desea obtener un criterio de estabilidad para sistemas del tipo (3.1), es necesario que la expresión dada por (4.20) del Lema 4.7, se obtenga sin la suposición de estabilidad del sistema, ya que dicha expresión conforma una parte esencial en

la prueba del criterio.

5.1.1 Lema técnico

Antes de continuar con la obtención de la propiedad algebraica generalizada, se presenta el siguiente resultado basado en un Lema expuesto en [30], subsección 4.4.

Lema 5.1 *Dada un sistema integro-diferencial de la forma*

$$F'(\tau) = \sum_{j=0}^p F(\tau - h_j)A_j + \sum_{j=1}^p \int_{-h_j}^0 F(\tau + \theta)G_j(\theta)d\theta + \sum_{j=p+1}^m \int_{-\tau}^0 F(\tau + \theta)G_j(\theta)d\theta \quad (5.1)$$

donde las matrices A_j son constantes, $h_{p+1} > h_p \geq 0$, $p = 0, 1, \dots, m - 1$ y las funciones $G_j(\theta)$ son continuas, la única solución del sistema en el intervalo $\tau \in [h_p, h_{p+1})$ que satisface la condición $F(\delta) = 0$, $\delta \in [0, h_p]$, es la trivial.

Prueba 5.1 *Se calculan los valores*

$$a = \sum_{j=0}^p \|A_j\|, \quad b_j = \max_{\theta \in [-h_j, 0]} \|G_j(\theta)\|.$$

Con el cambio de variable $s = \tau + \theta$, la ecuación (5.1) se reescribe

$$F'(\tau) = \sum_{j=0}^p F(\tau - h_j)A_j + \sum_{j=1}^p \int_{\tau-h_j}^{\tau} F(s)G_j(s - \tau)ds + \sum_{j=p+1}^m \int_0^{\tau} F(s)G_j(s - \tau)ds.$$

Se integra la ecuación de h_p a τ y se utiliza el cambio de variable $\xi = \beta - h_j$

$$\begin{aligned} F(\tau) &= F(h_p) + \sum_{j=0}^p \int_{h_p}^{\tau} F(\beta - h_j)A_j d\beta + \sum_{j=1}^p \int_{h_p}^{\tau} \int_{\xi-h_j}^{\xi} F(s)G_j(s - \xi)ds d\xi \\ &\quad + \sum_{j=p+1}^m \int_{h_p}^{\tau} \int_0^{\xi} F(s)G_j(s - \xi)ds d\xi \\ &= F(h_p) + \sum_{j=0}^p \int_{h_p-h_j}^{\tau-h_j} F(\xi)A_j d\xi + \sum_{j=1}^p \int_{h_p}^{\tau} \int_{\xi-h_j}^{\xi} F(s)G_j(s - \xi)ds d\xi \\ &\quad + \sum_{j=p+1}^m \int_{h_p}^{\tau} \int_0^{\xi} F(s)G_j(s - \xi)ds d\xi. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \|F(\tau)\| &\leq \|F(h_p)\| + \sum_{j=0}^p \|A_j\| \int_{h_p-h_j}^{\tau-h_j} \|F(\xi)\| d\xi + \sum_{j=1}^p b_j \int_{h_p}^{\tau} \int_{\xi-h_j}^{\xi} \|F(s)\| ds d\xi \\ &\quad + \sum_{j=p+1}^m b_j \int_{h_p}^{\tau} \int_0^{\xi} \|F(s)\| ds d\xi. \end{aligned}$$

Debido a que $F(\delta) = 0$, $\delta \in [0, h_p]$, la expresión se reescribe

$$\begin{aligned} \|F(\tau)\| &\leq \|F(h_p)\| + \sum_{j=0}^p \|A_j\| \int_{h_p}^{\tau} \|F(\xi)\| d\xi + \sum_{j=1}^p b_j \int_{h_p}^{\tau} \int_{h_p}^{\xi} \|F(s)\| ds d\xi \\ &\quad + \sum_{j=p+1}^m b_j \int_{h_p}^{\tau} \int_{h_p}^{\xi} \|F(s)\| ds d\xi \\ &\leq \|F(h_p)\| + a \int_{h_p}^{\tau} \|F(\xi)\| d\xi + \sum_{j=1}^m b_j \int_{h_p}^{\tau} \int_s^{\tau} \|F(s)\| d\xi ds \\ &\leq \|F(h_p)\| + \left[a + \sum_{j=1}^m b_j (h_{p+1} - h_p) \right] \int_{h_p}^{\tau} \|F(s)\| ds. \end{aligned}$$

Ahora, al aplicar el Lema de Gronwall se tiene

$$\|F(\tau)\| \leq \|F(h_p)\| e^{\left[a + \sum_{j=1}^m b_j (h_{p+1} - h_p) \right] (\tau - h_p)}, \quad \tau \in [h_p, h_{p+1}).$$

Dado que $F(h_p) = 0$, se llega a la conclusión de que

$$F(\tau) = 0, \quad \tau \in [h_p, h_{p+1}).$$

5.1.2 Propiedad algebraica generalizada

A continuación se demuestra que la propiedad algebraica generalizada se cumple independientemente de la estabilidad del sistema.

Lema 5.2 La llamada propiedad algebraica generalizada se expresa, para $\tau \geq 0$

$$-WK(\tau) = \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau+h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau-\theta) d\theta + \sum_{j=0}^m U(\tau-h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau+\theta) G_j(\theta) d\theta.$$

Comentario 5.1 Para $\tau = 0$ la ecuación anterior se reduce a la propiedad algebraica.

Prueba 5.2 Considere la función $F(\tau)$, que es continua en $[0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
F(\tau) &= WK(\tau) + \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - \theta) d\theta \\
&\quad + \sum_{j=0}^m U(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

La idea de la prueba es obtener una ecuación diferencial para $F(\tau)$ en cada intervalo $\tau \in [h_p, h_{p+1})$, $p = 0, \dots, m-1$, y comprobar, a través de ésta, que $F(\tau) = 0$ para cualquier $\tau \geq 0$. Con esto, la propiedad algebraica quedará demostrada debido a la forma que tiene $F(\tau)$ expresada por (5.2).

La derivada de $F(\tau)$ es

$$\begin{aligned}
F'(\tau) &= WK'(\tau) + \sum_{j=0}^m A_j^T U'(\tau + h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U'(\tau - \theta) d\theta \\
&\quad + \sum_{j=0}^m U'(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U'(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Debido a que la expresión de la derivada de la matriz de Lyapunov cambia dependiendo del signo de su argumento, para el intervalo $\tau \in [h_p, h_{p+1})$, $p = 0, \dots, m-1$, la derivada de $F(\tau)$ se expresa como

$$\begin{aligned}
F'(\tau) &= WK'(\tau) + \sum_{j=0}^m A_j^T U'(\tau + h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U'(\tau - \theta) d\theta \\
&\quad + \sum_{j=0}^p U'(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=p+1}^m U'(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^p \int_{-h_j}^0 U'(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta \\
&\quad + \sum_{j=p+1}^m \int_{-h_j}^{-\tau} U'(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta + \sum_{j=p+1}^m \int_{-\tau}^0 U'(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Se utilizan ahora las ecuaciones (3.7) ó (4.2), por lo que

$$\begin{aligned}
F'(\tau) &= W \left(\sum_{j=0}^p K(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^m A_j^T \left(\underbrace{\sum_{k=0}^m U(\tau + h_j - h_k) A_k}_{\text{}} + \underbrace{\sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta}_{\text{}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) \left(\underbrace{\sum_{k=0}^m U(\tau - \theta_1 - h_k) A_k}_{\leftarrow} + \underbrace{\sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 U(\tau - \theta_1 + \theta) G_k(\theta) d\theta}_{\leftarrow} \right) d\theta_1 \\
& + \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=0}^m U(\tau - h_k - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau - h_k + \theta) G_j(\theta) d\theta \right) A_k \\
& - \sum_{k=p+1}^m \left(\underbrace{\sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau - h_k + h_j)}_{\leftarrow} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - h_k - \theta) d\theta}_{\leftarrow} \right) A_k \\
& + \sum_{k=1}^p \int_{-h_k}^0 \left(\sum_{j=0}^m U(\tau + \theta_1 - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta_1 + \theta) G_j(\theta) d\theta \right) G_k(\theta_1) d\theta_1. \\
& - \sum_{k=p+1}^m \int_{-h_k}^{-\tau} \left(\underbrace{\sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + \theta + h_j)}_{\leftarrow} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1}_{\leftarrow} \right) G_k(\theta) d\theta \\
& + \sum_{k=p+1}^m \int_{-\tau}^0 \left(\sum_{j=0}^m U(\tau + \theta_1 - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta_1 + \theta) G_j(\theta) d\theta \right) G_k(\theta_1) d\theta_1. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

A continuación se suman los elementos con subrayado semejante utilizando propiedades de sumatorias.

Al intercambiar las sumatorias, la suma de los términos con subrayado simple se expresa

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m A_j^T \sum_{k=0}^m U(\tau + h_j - h_k) A_k - \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau - h_k + h_j) A_k \\
& = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau - h_k + h_j) A_k - \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau - h_k + h_j) A_k \\
& = \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau - h_k + h_j) A_k.
\end{aligned}$$

Los elementos subrayados con flechas derechas se pueden sumar directamente al intercambiar las sumatorias y dividir los intervalos de integración, es decir

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m A_j^T \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta - \sum_{k=p+1}^m \int_{-h_k}^{-\tau} \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + \theta + h_j) G_k(\theta) d\theta \\
& = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^m A_j^T \int_{-h_k}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta - \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=0}^m \int_{-h_k}^{-\tau} A_j^T U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta \\
& = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^m A_j^T \int_{-h_k}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta + \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=0}^m A_j^T \int_{-h_k}^{-\tau} U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=0}^m A_j^T \int_{-\tau}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta - \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=0}^m \int_{-h_k}^{-\tau} A_j^T U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta \\
= & \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^m A_j^T \int_{-h_k}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta + \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=0}^m A_j^T \int_{-\tau}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

De forma semejante, los elementos subrayados con flechas izquierdas se pueden expresar como

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) \sum_{k=0}^m U(\tau - \theta_1 - h_k) A_k d\theta_1 - \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - h_k - \theta) d\theta A_k \\
= & \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - h_k - \theta) d\theta A_k - \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - h_k - \theta) d\theta A_k \\
= & \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - h_k - \theta) d\theta A_k.
\end{aligned}$$

Además la suma de los elementos con doble subrayado está dada por

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 U(\tau - \theta_1 + \theta) G_k(\theta) d\theta d\theta_1 \\
& - \sum_{k=p+1}^m \int_{-h_k}^{-\tau} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
= & \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
& - \sum_{k=p+1}^m \int_{-h_k}^{-\tau} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
= & \sum_{k=1}^p \int_{-h_k}^0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
& + \sum_{k=p+1}^m \int_{-h_k}^{-\tau} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
& + \sum_{k=p+1}^m \int_{-\tau}^0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
& - \sum_{k=p+1}^m \int_{-h_k}^{-\tau} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{=1}^p \int_{-h_k}^0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
&+ \sum_{k=p+1}^m \int_{-\tau}^0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Con estos resultados, la ecuación (5.3) se puede expresar como

$$\begin{aligned}
F'(\tau) &= W \left(\sum_{j=0}^p K(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^p \int_{-h_j}^0 K(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta + \sum_{j=p+1}^m \int_{-\tau}^0 K(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta \right) \\
&+ \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau - h_k + h_j) A_k + \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^m A_j^T \int_{-h_k}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta \\
&+ \sum_{k=p+1}^m \sum_{j=0}^m A_j^T \int_{-\tau}^0 U(\tau + h_j + \theta) G_k(\theta) d\theta + \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - h_k - \theta) d\theta A_k \\
&+ \sum_{k=1}^p \int_{-h_k}^0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
&+ \sum_{k=p+1}^m \int_{-\tau}^0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta_1) U(\tau + \theta - \theta_1) d\theta_1 G_k(\theta) d\theta \\
&+ \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=0}^m U(\tau - h_k - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau - h_k + \theta) G_j(\theta) d\theta \right) A_k \\
&+ \sum_{k=1}^p \int_{-h_k}^0 \left(\sum_{j=0}^m U(\tau + \theta_1 - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta_1 + \theta) G_j(\theta) d\theta \right) G_k(\theta_1) d\theta_1 \\
&+ \sum_{k=p+1}^m \int_{-\tau}^0 \left(\sum_{j=0}^m U(\tau + \theta_1 - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta_1 + \theta) G_j(\theta) d\theta \right) G_k(\theta_1) d\theta_1.
\end{aligned}$$

Desarrollando y agrupando se tiene

$$\begin{aligned}
F'(\tau) &= \sum_{k=0}^p \left[W K(\tau - h_k) + \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau - h_k + h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau - h_k - \theta) d\theta \right. \\
&+ \left. \sum_{j=0}^m U(\tau - h_k - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau - h_k + \theta) G_j(\theta) d\theta \right] A_k \\
&+ \sum_{k=1}^p \int_{-h_k}^0 \left[W K(\tau + \theta_1) + \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + h_j + \theta_1) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau + \theta_1 - \theta) d\theta \right. \\
&+ \left. \sum_{j=0}^m U(\tau + \theta_1 - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta_1 + \theta) G_j(\theta) d\theta \right] G_k(\theta_1) d\theta_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=p+1}^m \int_{-\tau}^0 \left[WK(\tau + \theta_1) + \sum_{j=0}^m A_j^T U(\tau + \theta_1 + h_j) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 G_j^T(\theta) U(\tau + \theta_1 - \theta) d\theta \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^m U(\tau + \theta_1 - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau + \theta_1 + \theta) G_j(\theta) d\theta \right] G_k(\theta_1) d\theta_1,
\end{aligned}$$

o bien, de acuerdo a la ecuación (5.2), en el intervalo $\tau \in [h_p, h_{p+1})$, $p = 0, \dots, m-1$, la ecuación de la derivada se expresa

$$F'(\tau) = \sum_{j=0}^p F(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^p \int_{-h_j}^0 F(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta + \sum_{j=p+1}^m \int_{-\tau}^0 F(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta. \quad (5.4)$$

Con base en este resultado, en el intervalo $\tau \in [0, h_1)$

$$F'(\tau) = F(\tau) A_0 + \sum_{j=1}^m \int_{-\tau}^0 F(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta, \quad (5.5)$$

mientras que para $\tau \in [h, +\infty)$, la derivada está dada por

$$F'(\tau) = \sum_{j=0}^m F(\tau - h_j) A_j + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F(\tau + \theta) G_j(\theta) d\theta. \quad (5.6)$$

Note que en cada una de las ecuaciones anteriores solo se requiere el valor de $F(\tau)$ para $\tau \geq 0$.

Con base en las expresiones (5.5), (5.4) y (5.6), se obtendrá ahora que $F(\tau) = 0$ para cualquier $\tau \geq 0$.

La propiedad algebraica indica que $F(0) = 0$. Para $\tau \in [0, h_1)$, la ecuación (5.5) y el Lema 5.1 de la sección 5.1.1 de este capítulo, conducen a que $F(\tau) = 0$. Por la propiedad de continuidad se tiene que $F(h_1) = 0$.

De manera recursiva, utilizando el Lema 5.1 y la ecuación (5.4), se tiene que $F(\tau) = 0$ en el intervalo $\tau \in [h_p, h_{p+1})$, $p = 1, \dots, m-1$. Además, por continuidad $F(h_{p+1}) = 0$.

Dedido a este análisis, $F(\tau) = 0$, $\tau \in [0, h]$.

Ahora bien para el intervalo $\tau \in [h, 2h)$, aplicando el Lema 5.1 con la ecuación (5.6), se concluye que $F(\tau) = 0$, $\tau \in [h, 2h)$, y por continuidad $F(2h) = 0$.

Con este procedimiento paso a paso se establece que $F(\tau) = 0$, $\tau \in [h, \infty)$ y la propiedad algebraica generalizada queda demostrada.

5.2 Resultados adicionales independientes de la estabilidad del sistema

Una vez que se ha presentado la propiedad algebraica generalizada independiente de la estabilidad del sistema, los resultados que dependen de esta propiedad, tal como las fórmulas de Cauchy generalizadas, dadas por (4.6) y (4.13), y los Lemas 4.6 y 4.7, pueden volver a enunciarse, solo que ahora no se requiere la suposición de estabilidad del sistema.

Lema 5.3 *La llamada fórmula de Cauchy generalizada se expresa, para cualquier $\tau_1, \tau_2 \geq 0$*

$$\begin{aligned} U(\tau_2 - \tau_1) &= \int_{-\tau_1}^0 K^T(s + \tau_1)W K(s + \tau_2)ds + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K^T(s + \tau_1)A_j^T U(\tau_2 + s + h_j)ds \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^s K^T(s + \tau_1)G_j^T(\theta)U(\tau_2 + s - \theta)d\theta ds + K^T(\tau_1)U(\tau_2). \end{aligned}$$

Lema 5.4 *Para $\tau, \alpha \geq 0$, la fórmula de Cauchy generalizada se expresa*

$$\begin{aligned} U(\tau + \alpha) &= U(\alpha)K(\tau) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\alpha - \theta - h_j)A_j K(\tau + \theta)d\theta \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_j}^{\theta} U(\alpha - \theta + \xi)G_j(\xi)K(\tau + \theta)d\xi d\theta. \end{aligned}$$

Lema 5.5 *Para todo $\tau_1, \tau_2 \in [0, h]$ se tiene que*

$$z(K(\tau_1 + \theta)\mu, K(\tau_2 + \theta)\eta) = \mu^T [U(\tau_2 - \tau_1)]\eta.$$

Lema 5.6 *Sea la función particular*

$$\bar{\varphi}(\theta) = \sum_{i=1}^r K(\tau_i + \theta)\gamma_i, \quad \theta \in [-h, 0], \quad i = 1, \dots, r,$$

en donde $r \geq 1$ y γ_i son vectores arbitrarios constantes, entonces

$$v_1(\bar{\varphi}(\theta)) = \gamma^T \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r)\gamma. \quad (5.7)$$

con

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = [U(-\tau_i + \tau_j)]_{i,j=1}^r \quad (5.8)$$

y

$$\gamma = (\gamma_1^T, \gamma_2^T, \dots, \gamma_r^T)^T.$$

5.3 Condiciones necesarias y suficientes

La idea del criterio de estabilidad consiste en los siguientes dos puntos.

- Si el sistema es exponencialmente estable, entonces $\mathcal{K}_r > 0$. Este punto se logró en el Capítulo 4 eligiendo a la matriz fundamental como condición inicial para v_1 .
- Si el sistema es inestable, no se satisface la condición $\mathcal{K}_r > 0$. Note que la expresión que relaciona a v_1 con \mathcal{K}_r no depende de la estabilidad del sistema, por lo que puede utilizarse en esta parte. La adecuada aproximación de cualquier condición inicial φ mediante la suma de términos que dependen de la matriz de Lyapunov, aunado al hecho de que cuando el sistema es inestable la funcional v_1 es negativa para alguna condición inicial, se emplean para demostrar este punto.

Antes de continuar, se considera la matriz a bloques \mathcal{K}_r dada por (5.8). Si se toman puntos equidistantes

$$\tau_i = \frac{i-1}{r-1}h, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

la matriz es de la forma

$$\mathcal{K}_r \left(0, \frac{1}{r-1}h, \dots, \frac{r-2}{r-1}h, h \right) = \left[U \left(\frac{j-i}{r-1}h \right) \right]_{i,j=1}^r.$$

En seguida se muestran dos resultados presentados en [5], auxiliares para el resultado principal de este capítulo.

Teorema 5.1 *Si el sistema (3.1) es inestable y satisface la condición de Lyapunov, entonces para cada $\alpha_1 > 0$ existe una función $\hat{\varphi}$ tal que*

$$v_1(\hat{\varphi}) \leq -\alpha_1$$

Lema 5.7 *Para cualquier $\varphi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función $\psi \in F_1([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ de modo que*

$$\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

A continuación se presenta el Teorema que establece el criterio de estabilidad para sistemas con varios retardos distribuidos, es importante mencionar que este resultado fué obtenido en [5] para sistemas con múltiples retardos concentrados.

5.3.1 Teorema del criterio de estabilidad

Teorema 5.2 *El sistema (3.1) es exponencialmente estable si y sólo si satisface la condición de Lyapunov y para cada número natural $r \geq 2$ se cumple que*

$$\left[U \left(\frac{j-i}{r-1} h \right) \right]_{i,j=1}^r > 0. \quad (5.9)$$

Más aún, si se satisface la condición de Lyapunov y el sistema (3.1) es inestable, entonces existe un número natural r tal que

$$\left[U \left(\frac{j-i}{r-1} h \right) \right]_{i,j=1}^r \not\geq 0.$$

5.3.2 Prueba del Teorema del criterio de estabilidad

5.3.2.1 Necesidad

Esta parte de la prueba ya ha sido obtenida en el Capítulo 4, para mejor comprensión, se recuerda el resultado.

Teorema 5.3 *Si el sistema (3.1) es exponencialmente estable, entonces*

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = [U(-\tau_i + \tau_j)]_{i,j=1}^r > 0,$$

en donde $\tau_k \in [0, h]$, $k = 1, \dots, r$, y $\tau_i \neq \tau_j$, si $i \neq j$.

En este caso $\tau_i = \frac{i-1}{r-1}h$ pertenecen al segmento $[0, h]$ y $\tau_i \neq \tau_j$, si $i \neq j$. Por lo tanto, la desigualdad (5.9) es un caso particular de este Teorema.

5.3.2.2 Suficiencia

Suponga que se cumple la condición de Lyapunov, por lo que la matriz de Lyapunov existe. Para probar la suficiencia, basta mostrar que para el caso en que el sistema es inestable, existe un número natural r tal que

$$\left[U \left(\frac{j-i}{r-1} h \right) \right]_{i,j=1}^r \not\geq 0, \quad (5.10)$$

esta desigualdad es equivalente a la existencia de un vector γ tal que

$$\gamma^T \mathcal{K}_r \left(0, \frac{1}{r-1}h, \dots, \frac{r-2}{r-1}h, h \right) \gamma < 0. \quad (5.11)$$

Se introduce la clase de funciones utilizadas en la prueba de necesidad

$$F_1([-h, 0], \mathbb{R}^n) = \left\{ \psi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \mid \psi(\theta) = \sum_{i=1}^r K(\tau_i + \theta)\gamma_i, \quad \tau_i = \frac{i-1}{r-1}h, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Al aplicar el Teorema 5.1 y el Lema 5.7 se completará la prueba de suficiencia del Teorema. Se fija un número arbitrario $\alpha_1 > 0$. Con base en el Teorema 5.1, existe una función $\widehat{\varphi}$ tal que $v_1(\widehat{\varphi}) \leq -\alpha_1$. Puesto que la funcional v_1 es continua en cada punto, es decir, para cualquier $\alpha_1 > 0$ existe un número $\Delta > 0$ tal que

$$\|\widehat{\varphi} - \varphi\|_{\mathcal{H}} < \Delta \implies |v_1(\widehat{\varphi}) - v_1(\varphi)| < \alpha_1.$$

Debido al Lema 5.7, existe $\psi \in F_1([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ de manera que

$$\|\widehat{\varphi} - \psi\|_{\mathcal{H}} < \Delta.$$

Por la propiedad de continuidad mencionada, $|v_1(\widehat{\varphi}) - v_1(\psi)| < \alpha_1$, por lo tanto

$$v_1(\psi) < v_1(\widehat{\varphi}) + \alpha_1 \leq 0.$$

La función ψ tiene la forma

$$\psi(\theta) = \sum_{i=1}^r K(\tau_i + \theta)\gamma_i,$$

entonces la igualdad (5.7) implica que

$$v_1(\psi) = \gamma^T \mathcal{K}_r \left(0, \frac{1}{r-1}h, \dots, \frac{r-2}{r-1}h, h \right) \gamma < 0.$$

Con este análisis, se demuestra la desigualdad (5.10), que es equivalente a (5.11). De aquí que la suficiencia queda probada. ■

5.4 Conclusiones

En este capítulo se probó la propiedad algebraica generalizada independiente de la estabilidad del sistema, importante resultado que permite formular condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para esta clase de sistemas. Si bien es cierto que el Teorema 5.2 ofrece un criterio de estabilidad, sigue pendiente el tema de establecer para que valor mínimo del parámetro r de $\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r)$ las condiciones alcanzan la suficiencia, es decir, con que valor mínimo de r se logra aproximar adecuadamente la condición inicial que descubre a todas las regiones de

inestabilidad. Este interesante tema se plantea como trabajo futuro en la parte final de esta tesis.

6

Ejemplos

En esta sección se ponen a prueba las condiciones de estabilidad mediante los ejemplos mostrados. Para cada ejemplo, primero se obtienen las D-particiones como elemento de comparación, después se calcula la matriz de Lyapunov (función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h]$, para los ejemplos escalares) para posteriormente obtener las zonas en donde se satisfacen las condiciones de estabilidad. Además se comparan los resultados con los obtenidos por otros métodos de la literatura.

6.1 D-particiones

En esta sección se recuerda el método de D-particiones y la metodología utilizada para los ejemplos desarrollados.

El método de D-particiones o D-subdivisiones, introducido en [39], llevado a cabo en el dominio de la frecuencia, permite obtener las fronteras de estabilidad en el plano de parámetros. Con base en la propiedad de continuidad de las raíces con respecto a los parámetros, el método detecta los cruces de las raíces de un cuasipolinomio a través del eje imaginario y así se generan dichas fronteras.

En cada punto dentro de una región específica, el número de raíces inestables del sistema permanece constante, en otras palabras, si un punto dentro de una región es de estabilidad/inestabilidad, todos los puntos dentro de la región son de estabilidad/inestabilidad. Los valores de los parámetros correspondientes a las fronteras de D-particiones son conocidos como valores críticos, es decir, los valores críticos son los valores de los parámetros para los cuales se sabe que se encuentra por lo menos una raíz sobre el eje imaginario.

La metodología utilizada para obtener las de D-particiones en el plano de parámetros consiste en:

-
1. Obtener el cuasipolinomio característico $p(s, p_1, p_2, \dots)$, que depende de p_1, p_2, \dots parámetros del sistema.
 2. Establecer un par de parámetros (p_i, p_k) , $i, k = 1, 2, \dots, i \neq k$, para los cuales se analiza la estabilidad del sistema, fijando los valores de los otros parámetros.
 3. Evaluar el cuasipolinomio en $s = 0$, $p(0, p_i, p_k)$.
 4. De $p(0, p_i, p_k)$, graficar explícita o implícitamente en el plano de parámetros la curva correspondiente a $s = 0$. Este resultado implica que el sistema tiene raíces en el origen para estos valores infinitos de los parámetros p_i y p_k .
 5. Evaluar el cuasipolinomio en $s = j\omega$, $p(j\omega, p_i, p_k)$.
 6. Obtener las partes real e imaginaria de $p(j\omega, p_i, p_k)$.
 7. Si es posible, expresar estas dos ecuaciones en forma paramétrica, con ω como parámetro, y obtener p_i y p_k barriendo ω para valores positivos. Dibujar los resultados en el plano.
 8. Si el paso anterior falla, se lleva a cabo el siguiente procedimiento.
 - Fijar ω , graficar implícitamente ambas ecuaciones y localizar un punto de intersección.
 - Utilizar un software para resolver ecuaciones simultáneas no lineales, con el valor de ω y el punto de intersección del paso anterior.
 - En un bucle, para valores positivos de ω , incrementar ligeramente el valor de ω , la solución que obtenga el software será utilizada como condición inicial para la siguiente iteración.
 - Analizar y graficar los resultados.
 - Llevar a cabo este procedimiento para cada punto de intersección detectado en el plano de parámetros en donde la estabilidad del sistema es analizada.

Cabe mencionar que la metodología para la determinación de valores críticos introducida en [33], [43], también puede ser utilizada.

En las figuras asociadas a los ejemplos se muestran la zonas en donde se satisfacen las condiciones de estabilidad con puntos negros, mientras que las D-particiones se denotan con líneas continuas. Se muestran, en su caso, las ecuaciones paramétricas para dibujar las D-particiones, en otros casos se muestran las ecuaciones simultáneas cuya solución permite obtener las D-particiones.

La matriz de Lyapunov se calcula con el método semianalítico introducido en [26], [43].

6.2 Propuesta alterna para el cómputo de la matriz de Lyapunov, Kernel polinomial

Para los ejemplos mostrados en las secciones subsecuentes, el planteamiento de las condiciones de frontera para solucionar las ecuaciones libres de retardo, introducidas en [26], no permiten conocer de forma única a la matriz de Lyapunov al presentarse un problema de dependencia lineal. Por tal razón, a continuación se expone una forma alterna para calcularla.

6.2.1 Ecuación con retardo distribuido, Kernel polinomial

Se utilizará en esta subsección un sistema con Kernel polinomial para ilustrar la forma alternativa de obtención de la matriz de Lyapunov.

Primero se recuerda el procedimiento presentado en [26] para la obtención de la matriz U . Uno de los sistemas considerados en el trabajo mencionado tiene la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + \int_{-h}^0 G(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0,$$

donde $G(\theta)$ está dado por

$$G(\theta) = \sum_{j=0}^m \theta^j B_j.$$

con B_0, \dots, B_j matrices dadas de $n \times n$.

6.2.2 Obtención del sistema libre de retardos

Para este caso, el sistema de ecuaciones libre de retardos mediante el cual se puede obtener la matriz de Lyapunov, es de la forma

$$\begin{aligned} Z'(\tau) &= Z(\tau)A_0 + V(\tau)A_1 + \sum_{j=0}^m X_j(\tau)B_j, \\ V'(\tau) &= -A_1^T Z(\tau) - A_0^T V(\tau) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} B^{(k)}(h) X_k(\tau), \\ X'_0(\tau) &= Z(\tau) - V(\tau), \\ X'_j(\tau) &= -(-h)^j V(\tau) - j X_{j-1}(\tau), \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \tag{6.1}$$

en donde

$$\begin{aligned}
Z(\tau) &= U(\tau), \\
V(\tau) &= U(\tau - h), \\
X_j(\tau) &= \int_{-h}^0 \theta^j U(\tau + \theta) d\theta, \quad j = 1, 2, \dots, m,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

y

$$B(h) = \sum_{j=0}^m (-h)^j B_j^T, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales son

$$\begin{aligned}
Z(0) &= V(h), \\
X_k(0) &= (-1)^k \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} h^j X_{k-j}^T(h), \quad k = 0, 1, \dots, m, \\
Z(0)A_0 + A_0^T Z(0) + V(0)A_1 + A_1^T V^T(0) \\
&+ \sum_{j=0}^m [X_j(0)B_j + B_j^T X_j^T(0)] = -W.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

El siguiente paso es vectorizar (representado por $vec(\cdot)$, ver por ejemplo [22]) y reacomodar (6.1) y (6.3) en forma matricial, con lo que

$$X_e'(\tau) = LX_e(\tau), \tag{6.4}$$

$$MX_e(0) + NX_e(h) = W_e, \tag{6.5}$$

donde $X_e(\tau)$ es un vector de n^2m elementos dado por

$$X_e(\tau) = \begin{bmatrix} vec(Z(\tau)) \\ vec(V(\tau)) \\ vec(X_0(\tau)) \\ vec(X_1(\tau)) \\ \vdots \\ vec(X_m(\tau)) \end{bmatrix}$$

y L , M , N y W_e resultan del reacomodo de variables después de vectorizar.

6.2.3 Obtención de las condiciones iniciales

La solución de (6.4) está dada por

$$X_e(\tau) = e^{L\tau} X_e(0) \quad (6.6)$$

y la obtención de las condiciones iniciales de acuerdo a (6.5) y (6.6) se lleva a cabo mediante

$$X_e(0) = [M + Ne^{Lh}]^{-1} W_e.$$

Aquí se presenta el problema para la obtención de condiciones iniciales únicas para la matriz de Lyapunov, ya que $M + Ne^{Lh}$ es singular para todo caso, incluso para aquellas regiones que se sabe que son de estabilidad.

La propuesta alterna para la obtención de las condiciones iniciales, [49], consiste en obtenerlas con base en las definiciones de las variables expresadas en (6.2). Note que

$$X_j(0) = \int_{-h}^0 \theta^j U(\theta) d\theta,$$

con el cambio de variable $\beta = -\theta$ y por la propiedad simétrica se tiene que

$$X_j(0) = (-1)^j \int_0^h \beta^j U^T(\beta) d\beta,$$

transponiendo esta expresión se tiene

$$X_j^T(0) = (-1)^j \int_0^h \beta^j U(\beta) d\beta,$$

o bien, al vectorizar

$$\text{vec}(X_j^T(0)) = (-1)^j \int_0^h \beta^j \text{vec}(U(\beta)) d\beta.$$

Cabe resaltar que para relacionar las vectorizaciones de variables y las de sus transpuestas, se utiliza la matriz de permutación E de dimensiones $n^2 \times n^2$ (ver por ejemplo [22]), de modo que $\text{vec}(X^T) = E \text{vec}(X)$, por lo que

$$E \text{vec}(X_j(0)) = (-1)^j \int_0^h \beta^j \text{vec}(U(\beta)) d\beta. \quad (6.7)$$

Por otro lado, de (6.6) note que

$$\text{vec}(Z(\tau)) = \text{vec}(U(\tau)) = \begin{bmatrix} I_{n^2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} e^{L\tau} X_e(0). \quad (6.8)$$

Entonces, la sustitución de (6.8) en (6.7) conduce a

$$\begin{aligned}
Evec(X_j(0)) &= (-1)^j \int_0^h \beta^j \begin{bmatrix} I_{n^2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} e^{L\beta} X_e(0) d\beta \\
&= (-1)^j \int_0^h \beta^j \begin{bmatrix} I_{n^2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} e^{L\beta} \begin{bmatrix} I_{n^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} d\beta vec(Z(0)) \\
&\quad + (-1)^j \int_0^h \beta^j \begin{bmatrix} I_{n^2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} e^{L\beta} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n^2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} d\beta vec(V(0)) + \dots \\
&\quad + (-1)^j \int_0^h \beta^j \begin{bmatrix} I_{n^2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} e^{L\beta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_{n^2} \end{bmatrix} d\beta vec(X_m(0)). \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Esta ecuación tiene como incógnitas las condiciones iniciales de las variables dadas por (6.2), de forma que se cuenta con $m + 1$ condiciones de frontera adicionales que se utilizan en lugar de las $X_k(0)$, $k = 0, 1, \dots, m$ dadas en (6.3).

Con las ecuaciones adicionales, de (6.5) se encuentran las condiciones iniciales, y con éstas, empleando (6.8) se obtiene de forma única la matriz de Lyapunov en su forma vectorizada. El proceso final consiste en llevar cabo la operación inversa de la vectorización.

Comentario 6.1 *El principal inconveniente de esta propuesta es el cálculo numérico de las integrales dadas por (6.9). Los métodos utilizados para tal propósito fueron el método del trapecio y el método de Simpson 1/3, sin notar cambios en el resultado.*

Comentario 6.2 *Para otra clase de Kernel, se puede también usar este enfoque, ver [26].*

6.3 Sistema con dos retardos concentrados y retardo distribuido

Considere la ecuación escalar propuesta con dos retardos

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t - h_1) + a_2 x(t - h_2) + b \int_{-h_2}^0 x(t + \theta) d\theta$$

en donde $h_1 \geq 0$ y a_2 son considerados como parámetros, $0 \leq h_1 \leq h_2$, y $h_2 = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0.5$, $b = 0.1$.

D-partición

Para las D-particiones, el cuasipolinomio característico se expresa como

$$p(s, h_1, a_2) = s - a_0 - a_1 e^{-sh_1} - a_2 e^{-sh_2} - b \frac{1 - e^{-sh_2}}{s}.$$

Cuando $s = 0$ la D-partición se dibuja mediante

$$a_2 = -(a_0 + a_1 + bh_2).$$

La sustitución $s = j\omega$ en el cuasipolinomio genera la parte real

$$Re(j\omega, h_1, a_2) = \omega^2 + a_1 \omega \sin \omega h_1 + a_2 \omega \sin \omega h_2 + b(1 - \cos \omega h_2) = 0$$

y la parte imaginaria

$$Im(j\omega, h_1, a_2) = \omega^2 + a_1 \omega \sin \omega h_1 + a_2 \omega \sin \omega h_2 + b(1 - \cos \omega h_2) = 0.$$

La solución a este sistema de ecuaciones implícitas se llevó a cabo utilizando el comando *fsolve* de Matlab siguiendo el procedimiento presentado en la sección 6.1.

Cómputo de la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h_2]$

Puesto que el sistema de este ejemplo es escalar, la matriz de Lyapunov es expresada mediante la función escalar $u(\tau)$, $\tau \in [0, h_2]$, su obtención requiere un análisis mas detallado ya que que el retardo h_1 varía en el intervalo $[0, h_2]$. Para cada valor en este intervalo se analiza un sistema particular libre de retardos de diferentes dimensiones. Cabe mencionar que los valores puntuales que se tomaron en el intervalo de h_1 son submúltiplos racionales del retardo h_2 , de modo que el método semianalítico se pueda llevar a cabo.

A continuación se analizan los casos mas simples para entender la mecánica empleada en la programación en Matlab para la obtención de la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h_2]$ mediante el método semianalítico [26].

El caso mas simple para analizar, además de aquellos en los que el valor de $h_1 = 0$ o $h_1 = h_2$, es en el que el retardo base, denotado h_b , es tal que $h_b = h_1 = h_2/2$, es decir

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t - 1) + a_2 x(t - 2) + b \int_{-2}^0 x(t + \theta) d\theta.$$

El planteamiento del sistema libre de retardos, considerando la reducción de variables pre-

sentada en [26], está dado por las 6 ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} X_j(\tau) &= u(\tau + jh_b)d\theta, \quad j = -2, -1, 0, 1, \\ Y_j(\tau) &= \int_{-h_2}^0 X_j(\tau + \theta)d\theta, \quad j = 0, 1, \quad \tau \in [0, h_b], \end{aligned}$$

con derivadas

$$\begin{aligned} X'_j(\tau) &= a_0X_j(\tau) + a_1X_{j-1}(\tau) + a_2X_{j-2}(\tau) + bY_j(\tau), \quad j = 0, 1, \\ X'_j(\tau) &= -a_0X_j(\tau) - a_1X_{j+1}(\tau) - a_2X_{j+2}(\tau) - bY_{j+2}(\tau), \quad j = -1, -2, \\ Y'_j(\tau) &= X_j(\tau) - X'_{j-2}(\tau) \quad j = 0, 1, \quad \tau \in [0, h_b]. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer están dadas por

$$\begin{aligned} X_{j+1}(0) &= X_j(h_b), \quad j = -2, -1, 0. \\ Y_1(0) &= Y_0(h_b), \\ Y_0(0) &= Y_1(h_b), \\ a_0X_0(0) + a_1X_{-1}(0) + a_2X_{-2}(0) + bY_0(0) &= -\frac{w}{2}. \end{aligned}$$

De este planteamiento de ecuaciones se obtiene la función $u(\tau)$ $\tau \in [0, h_2]$.

Ahora se toma como retardo base el valor $h_b = 0.5$. Con esta elección, no varía la dimensión del sistema libre de retardos para valores de $h_1 = h_b = 0.5$, $h_1 = 3h_b = 1.5$, aún para el caso $h = 1$, que ya se abordó la elección anterior del retardo base.

Para el caso $h_1 = 0.5$ el sistema analizado es

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t - 0.5) + a_2x(t - 2) + b \int_{-2}^0 x(t + \theta)d\theta.$$

Note que es cero el valor del coeficiente del elemento $x(t - 1.5)$. El planteamiento del sistema reducido libre de retardos está dado por las 12 ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} X_j(\tau) &= u(\tau + jh_b)d\theta, \quad j = -4, -3, \dots, 2, 3 \\ Y_j(\tau) &= \int_{-h_2}^0 X_j(\tau + \theta)d\theta, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad \tau \in [0, h_b], \end{aligned}$$

con derivadas

$$\begin{aligned} X'_j(\tau) &= a_0 X_j(\tau) + a_1 X_{j-1}(\tau) + a_2 X_{j-4}(\tau) + b Y_j(\tau), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ X'_j(\tau) &= -a_0 X_j(\tau) - a_1 X_{j+1}(\tau) - a_2 X_{j+4}(\tau) - b Y_{j+4}(\tau), \quad j = -1, -2, -3, -4, \\ Y'_j(\tau) &= X_j(\tau) - X'_{j-4}(\tau) \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad \tau \in [0, h_b]. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer están dadas por

$$\begin{aligned} X_{j+1}(0) &= X_j(h_b), \quad j = -4, -3, \dots, 1, 2, \\ Y_{j+1}(0) &= Y_j(h_b), \quad j = 0, 1, 2, \\ Y_0(0) &= Y_1(h_b), \\ a_0 X_0(0) + a_1 X_{-1}(0) + a_2 X_{-4}(0) + b Y_0(0) &= -\frac{w}{2}. \end{aligned}$$

Si $h_1 = 3h_b = 1.5$, el sistema analizado es

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t - 1.5) + a_2 x(t - 2) + b \int_{-2}^0 x(t + \theta) d\theta.$$

Note que es cero el valor del coeficiente del elemento $x(t - 0.5)$. El planteamiento del sistema reducido libre de retardos no cambia de dimensión con respecto al caso de $h_1 = h_b = 0.5$, está dado por las 12 ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} X_j(\tau) &= u(\tau + j h_b) d\theta, \quad j = -4, -3, \dots, 2, 3 \\ Y_j(\tau) &= \int_{-h_2}^0 X_j(\tau + \theta) d\theta, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad \tau \in [0, h_b], \end{aligned}$$

con derivadas

$$\begin{aligned} X'_j(\tau) &= a_0 X_j(\tau) + a_1 X_{j-3}(\tau) + a_2 X_{j-4}(\tau) + b Y_j(\tau), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ X'_j(\tau) &= -a_0 X_j(\tau) - a_1 X_{j+3}(\tau) - a_2 X_{j+4}(\tau) - b Y_{j+4}(\tau), \quad j = -1, -2, -3, -4, \\ Y'_j(\tau) &= X_j(\tau) - X'_{j-4}(\tau) \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad \tau \in [0, h_b]. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer están dadas por

$$\begin{aligned} X_{j+1}(0) &= X_j(h_b), \quad j = -4, -3, \dots, 1, 2, \\ Y_{j+1}(0) &= Y_j(h_b), \quad j = 0, 1, 2, \\ Y_0(0) &= Y_1(h_b), \\ a_0 X_0(0) + a_1 X_{-3}(0) + a_2 X_{-4}(0) + b Y_0(0) &= -\frac{w}{2}. \end{aligned}$$

El análisis anterior conduce a las siguientes observaciones para este ejemplo en particular.

1. La dimensión del sistema libre de retardos es $3h_2/h_b$.
2. Sea $h_{1b} = h_1/h_b$ y $h_{2b} = h_2/h_b$, entonces el sistema libre de retardos es de la forma

$$\begin{aligned} X_j(\tau) &= u(\tau + jh_b)d\theta, \quad j = -h_{2b}, -h_{2b} + 1, \dots, 0, 1, \dots, h_{2b} - 1, \\ Y_j(\tau) &= \int_{-h_2}^0 X_j(\tau + \theta)d\theta, \quad j = 0, 1, \dots, h_{2b} - 1, \quad \tau \in [0, h_b], \end{aligned}$$

con derivadas

$$\begin{aligned} X'_j(\tau) &= a_0X_j(\tau) + a_1X_{j-h_{1b}}(\tau) + a_2X_{j-h_{2b}}(\tau) + bY_j(\tau), \quad j = 0, 1, \dots, h_{2b} - 1, \\ X'_j(\tau) &= -a_0X_j(\tau) - a_1X_{j+h_{1b}}(\tau) - a_2X_{j+h_{2b}}(\tau) - bY_{j+4}(\tau), \quad j = -1, -2, \dots, -h_{2b} \\ Y'_j(\tau) &= X_j(\tau) - X'_{j-h_{2b}}(\tau), \quad j = 0, 1, \dots, h_{2b} - 1, \quad \tau \in [0, h_b]. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer están dadas por

$$\begin{aligned} X_{j+1}(0) &= X_j(h_b), \quad j = -h_{2b}, -h_{2b} + 1, \dots, 0, \dots, h_{2b} - 2, \\ Y_{j+1}(0) &= Y_j(h_b), \quad j = 0, 1, \dots, h_{2b} - 2, \\ Y_0(0) &= Y_1(h_b), \\ -\frac{w}{2} &= a_0X_0(0) + a_1X_{-h_{1b}}(0) + a_2X_{-h_{2b}}(0) + bY_0(0). \end{aligned}$$

3. Para el caso de un mismo retardo base h_b , la dimensión del sistema libre de retardos es el mismo, solo difiere el sistema debido al valor de h_1 , es decir, la posición que ocupa el término $a_1x(t - h_1)$.
4. Para estos sistemas, las condiciones iniciales del sistema libre de retardos no se obtienen de forma única, por lo que es necesario utilizar $Y_0(0) = \int_{-2}^0 X_0(\theta)d\theta$ en un desarrollo similar al de la sección 6.2, el cual conduce a una condición de frontera que se utiliza en lugar de $Y_0(0) = Y_1(h_b)$.

Atendiendo las observaciones anteriores, en este punto se plantea la metodología para obtener la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h_2]$.

- Primero se toma como $h_b = h_2/2$, y $h_1 = h_b$, con el sistema correspondiente libre de retardos se barre a_2 para analizar la estabilidad mediante las condiciones obtenidas en esta tesis.
- Se toma ahora $h_b = h_2/4$, y $h_1 = h_b$, $h_1 = 3h_b$, y se barre a_2 para cada caso. Note que el caso $h_1 = 2h_b$ ya se cubrió en el punto anterior.

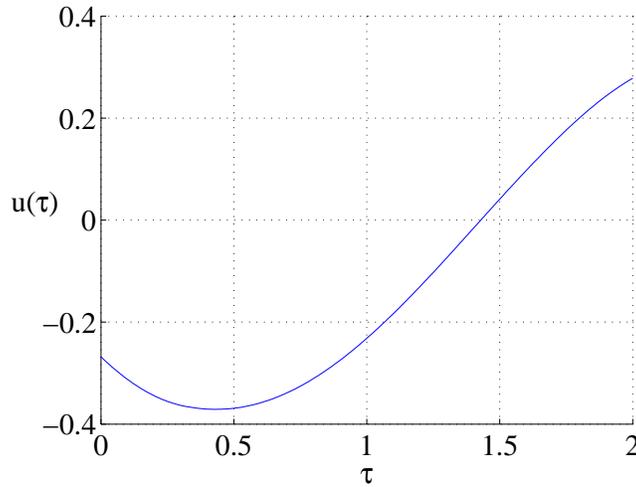


Figura 6.1: Función $u(\tau)$ para $h_1 = 0.3125$, $a_2 = -2$, ejemplo 6.3

- El retardo base se toma $h_b = h_2/8$, y se toma $h_1 = h_b$, $h_1 = 3h_b$, $h_1 = 5h_b$, $h_1 = 7h_b$, y se barre a_2 para cada caso. Note que los casos en que $h_1 = 2h_b$, $h_1 = 4h_b$, $h_1 = 6h_b$ se cubrieron en los puntos anteriores.
- Se repite esta división de h_2 hasta tener los valores deseados a evaluar de h_1 .

Comentario 6.3 *Si bien es cierto que se podría tomar como retardo base, por mencionar un valor, $h_b = h_2/128$ y de esta división tomar valores $h_1 = kh_b$, $k = 0, 1, \dots, 128$, la metodología presentada evita costo computacional, al no obtener para todo caso la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h_2]$ de un sistema libre de retardos de dimensión $3h_2/h_b = 384$, sino que incrementa gradualmente la dimensión del sistema libre de retardos.*

En la Figura 6.1 se presenta la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h_2]$ para valores de $h_1 = 0.3125$ y $a_2 = -2$.

Verificación de las condiciones de estabilidad

Se utiliza la condición (4.24) con $r = 2$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = h_2$, de modo que

$$\mathcal{K}_2(0, h_2) = \begin{bmatrix} U(0) & U(h_2) \\ U^T(h_2) & U(0) \end{bmatrix}.$$

El resultado se muestra en la Figura 6.2 en donde la línea descrita por $a_2 = 0$ corresponde a sistemas estables, por lo que la región que incluye esta línea, es de estabilidad. Es importante observar que la condición (4.24), $r = 2$ se satisface en puntos inestables.

Se obtiene una mejora en la zona candidata de estabilidad (Figura 6.3) empleando la

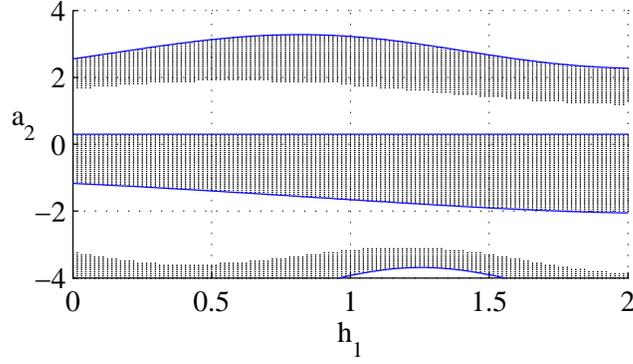


Figura 6.2: Regiones en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_2 para el ejemplo 6.3

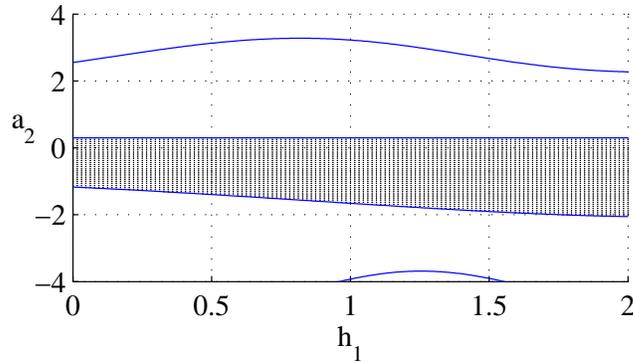


Figura 6.3: Región en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_4 para el ejemplo 6.3

condición (4.24) con $r = 4$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = h_2/3$, $\tau_3 = 2h_2/3$, $\tau_4 = h_2$, es decir

$$\mathcal{K}_4(0, h_2/3, 2h_2/3, h_2) = \begin{bmatrix} U(0) & U(h_2/3) & U(2h_2/3) & U(h_2) \\ U^T(h_2/3) & U(0) & U(h_2/3) & U(2h_2/3) \\ U^T(2h_2/3) & U^T(h_2/3) & U(0) & U(h_2/3) \\ U^T(h_2) & U^T(2h_2/3) & U^T(h_2/3) & U(0) \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

La Figura 6.3 muestra que con la condición (4.24), \mathcal{K}_4 definida por (6.10), la región estimada parece coincidir exactamente con la región de estabilidad en este plano de parámetros.

6.4 Sistema multivariable autónomo

Este ejemplo es tomado de [11]. Sea el sistema distribuido de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h \int_{t-h}^t x(s) ds.$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0.1 & -1.9 \end{bmatrix}, \quad A_h = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se consideran como parámetros h y a .

D-particiones

Las D-particiones se obtienen a partir de

$$p(s, h, a) = \det \left(sI - A - A_h \frac{1 - e^{-sh}}{s} \right).$$

En el caso en que $s = 0$ se tiene la curva

$$a = \frac{10h^2 + 19h}{10h + 19},$$

mientras que la parte real e imaginaria de la sustitución $s = j\omega$ están dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(p(j\omega, h, a)) &= 10\omega^4 - 20\omega^2 + 19a\omega^2 + (20\omega^2 - 20) \cos \omega h \\ &+ (-19\omega + 10a\omega) \sin \omega h + 10 \cos 2\omega h + 10 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(p(j\omega, h, a)) &= -19\omega^3 + 10a\omega^3 + 19\omega - 10a\omega + (-19\omega + 10a\omega) \cos \omega h \\ &- (20\omega^2 - 20) \sin \omega h - 10 \sin 2\omega h. \end{aligned}$$

Las D-particiones se obtienen con el método descrito en la sección 6.1.

Cómputo de la matriz de Lyapunov

La matriz de Lyapunov para este ejemplo se obtiene con base en el procedimiento descrito en la sección 6.2.

Verificación de las condiciones de estabilidad

El resultado de aplicar la condición $U(0) > 0$ se muestra en la Figura 6.4. De [11] se tiene que para un valor de $a = -1.2$ el máximo retardo obtenido para el cual el sistema aún es estable, con las condiciones suficientes allí presentadas, es de $h = 4.0932$, por lo que toda la región que contiene ese punto es de estabilidad. Se obtiene una mejor aproximación de la zona de estabilidad mediante la condición

$$\mathcal{K}_2(0, h) = \begin{bmatrix} U(0) & U(h) \\ U^T(h) & U(0) \end{bmatrix} > 0. \quad (6.11)$$

El resultado se ilustra en la Figura 6.5. Como se puede observar, la región estimada coincide

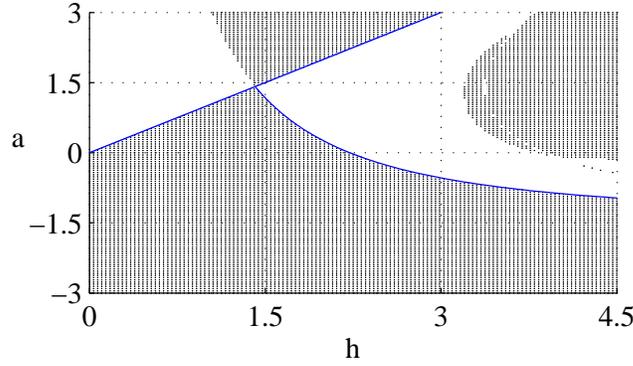


Figura 6.4: Regiones en donde se satisface la condición $U(0) > 0$ para el ejemplo 6.4

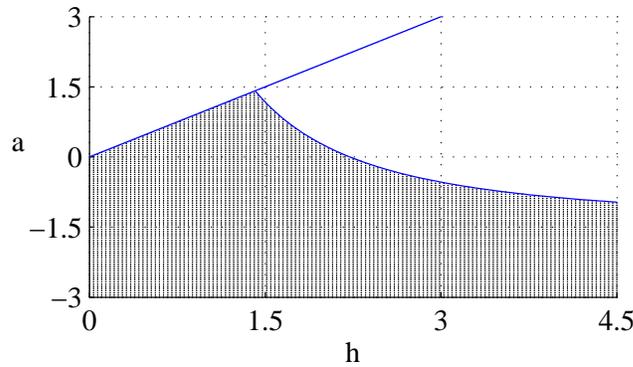


Figura 6.5: Región en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_2 para el ejemplo 6.4

exactamente con la región de estabilidad en este plano de parámetros.

6.5 Sistema multivariable con retroalimentación

En [11] se presentan condiciones tipo LMI para obtener las ganancias de controladores $u(t) = Kx(t)$ para sistemas distribuidos de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h \int_{t-h}^t x(s)ds + Bu(t).$$

Al cerrar el lazo y con un cambio de variable en la integral se tiene

$$\dot{x}(t) = (A + BK) x(t) + A_h \int_{-h}^0 x(t + \theta)d\theta.$$

Se analiza ahora el sistema con control y se obtienen las ganancias del controlador $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$.

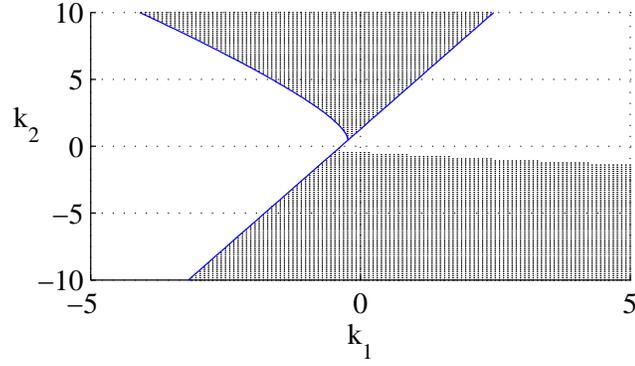


Figura 6.6: Regiones en donde se satisface la condición $U(0) > 0$ para el ejemplo 6.5

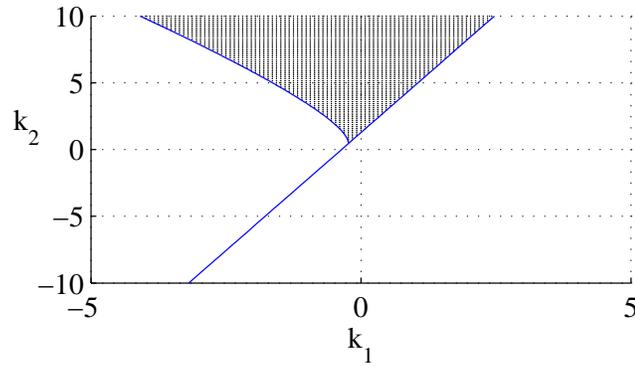


Figura 6.7: Región en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_2 para el ejemplo 6.5

Los valores de las matrices del sistema y el retardo son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_h = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1.5 \end{bmatrix}, \quad h = 1.$$

D-particiones

Las D-particiones en este caso se obtiene mediante

$$p(s, k_1, k_2) = \det \left(sI - (A + BK) - A_h \frac{1 - e^{-sh}}{s} \right).$$

La sustitución $s = 0$ conduce a

$$k_2 = \left(\frac{4}{3h} + \frac{11}{5} \right) k_1 + \frac{3h}{5} + \frac{2}{3},$$

Mientras que para $s = j\omega$ se tienen las ecuaciones paramétricas lineales dadas por

$$\begin{aligned} & k_1 (20\omega^3 + 33\omega - 33\omega \cos \omega h) + 15k_2\omega (\omega^2 - 1 + \cos \omega h) \\ = & 10\omega^3 - 10\omega + 10\omega \cos \omega h - (\omega^2 + 18) \sin \omega h + 9 \sin 2\omega h \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & -k_1 (20\omega^2 + 33\omega \sin \omega h) + 15k_2\omega \sin \omega h \\ = & 10\omega^4 - \omega^2 - 9 + (\omega^2 + 18) \cos \omega h + 10\omega \sin \omega h - 9 \cos 2\omega h. \end{aligned}$$

Se sigue el procedimiento presentado en la sección 6.1 para dibujar las D-particiones.

Cómputo de la matriz de Lyapunov

La matriz de Lyapunov para este ejemplo se obtiene con base en el procedimiento descrito en la sección 6.2.

Verificación de las condiciones de estabilidad

Se aplican las condiciones $U(0) > 0$ y $\mathcal{K}_2(0, h) > 0$ como en el ejemplo 6.4.

Los resultados se muestran en las Figuras 6.6 y 6.7. De [11] se sabe que la región de estabilidad es la que se encuentra en la parte superior en las figuras. Al igual que en el caso anterior, con la condición $\mathcal{K}_2(0, h) > 0$ parece alcanzarse la suficiencia.

6.6 Sistema con retardo distribuido, Kernel polinomial

Se considera un sistema escalar con retardo distribuido y kernel polinomial, tomado del trabajo desarrollado en [16], en donde se presentan condiciones suficientes de estabilidad tipo LMI. El sistema está dado por la ecuación

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \int_{-h}^0 (1 + \theta + \theta^3)x(t + \theta)d\theta$$

en donde $h \geq 0$ y a son los parámetros del sistema.

D-particiones

El cuasipolinomio para este ejemplo es

$$p(s, h, a) = s - a - \left(\frac{1 - e^{-sh}}{s} + \frac{e^{-sh} - 1 + e^{-sh}sh}{s^2} + \frac{-6 + e^{-sh}(s^3h^3 + 3h^2s^2 + 6hs + 6)}{s^4} \right).$$

Para $s = 0$, se tiene la ecuación

$$a = -h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4}.$$

El siguiente paso es sustituir $s = j\omega$ en el cuasipolinomio y separar la parte real e imaginaria.

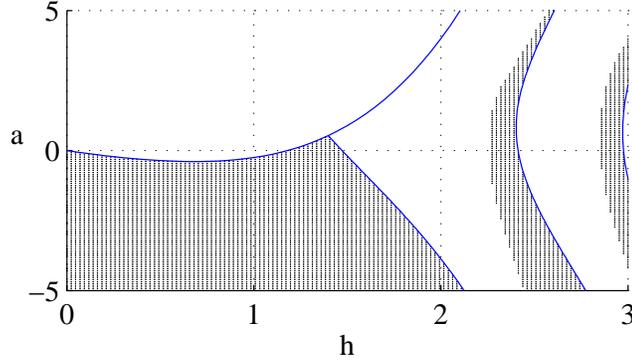


Figura 6.8: Regiones en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_4 para el ejemplo 6.6

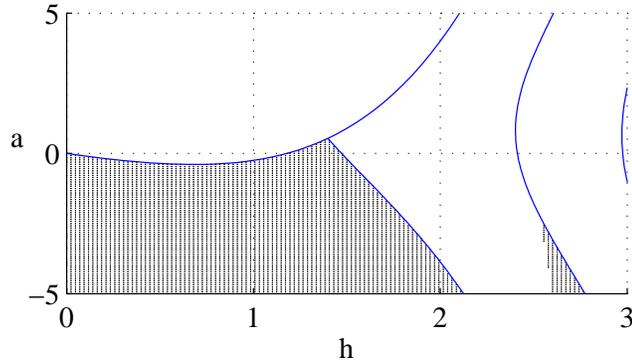


Figura 6.9: Regiones en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_6 para el ejemplo 6.6

La parte real está dada por

$$Re(p(s, h, a)) = -a\omega^4 - \omega^2 + 6 + (\omega^2(1 + 3h^2) - 6) \cos \omega h + (\omega^3(h^3 + h - 1) - 6\omega h) \sin \omega h = 0.$$

Por otro lado, la parte imaginaria es

$$Im(p(s, h, a)) = \omega^5 + \omega^3 + (\omega^3(h^3 + h - 1) - 6\omega h) \cos \omega h - (\omega^2(1 + 3h^2) - 6) \sin \omega h = 0.$$

Para resolver este par de ecuaciones implícitas se utilizó el comando *fsolve* de Matlab y el procedimiento dado en la sección 6.1.

Cómputo de la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h]$

La función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h]$ para este ejemplo se obtiene con base en el procedimiento descrito en la sección 6.2.

Verificación de las condiciones de estabilidad

Primero se analiza la estabilidad del sistema mediante la condición (4.24) con $r = 4$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$, $\tau_3 = h/2$, $\tau_4 = \tau + h/2$ en donde $\tau \in (0, h/2)$, con lo cual

$$\mathcal{K}_4(\tau) = \begin{bmatrix} U(0) & U(\tau) & U(h/2) & U(\tau + h/2) \\ U^T(\tau) & U(0) & U(h/2 - \tau) & U(h/2) \\ U^T(h/2) & U^T(h/2 - \tau) & U(0) & U(\tau) \\ U^T(\tau + h/2) & U^T(h/2) & U^T(\tau) & U(0) \end{bmatrix}.$$

En la Figura 6.8 se muestra la región en donde se satisface esta condición. Para este ejemplo, en [16], se obtiene que para $a = -2$, el sistema es estable para $h < 1.759$, entonces, toda la región de la esquina inferior izquierda (Figuras 6.8 y 6.9), es de estabilidad.

Una mejora de la zona candidata de estabilidad se logra con $r = 6$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$, $\tau_3 = h/3$, $\tau_4 = \tau + h/3$, $\tau_5 = 2h/3$, $\tau_6 = \tau + 2h/3$, con $\tau \in (0, h/3)$, ecuación (6.12) introducido en [6]. Los resultados se muestran en la Figura 6.9.

$$\mathcal{K}_6(\tau) = \begin{bmatrix} U(0) & U(\tau) & U(\frac{h}{3}) & U(\tau + \frac{h}{3}) & U(\frac{2h}{3}) & U(\tau + \frac{2h}{3}) \\ U^T(\tau) & U(0) & U(\frac{h}{3} - \tau) & U(\frac{h}{3}) & U(\frac{2h}{3} - \tau) & U(\frac{2h}{3}) \\ U^T(\frac{h}{3}) & U^T(\frac{h}{3} - \tau) & U(0) & U(\tau) & U(\frac{h}{3}) & U(\tau + \frac{h}{3}) \\ U^T(\tau + \frac{h}{3}) & U^T(\frac{2h}{3}) & U^T(\tau) & U(0) & U(\frac{h}{3} - \tau) & U(\frac{h}{3}) \\ U^T(\frac{2h}{3}) & U^T(\frac{2h}{3} - \tau) & U^T(\frac{h}{3}) & U^T(\frac{h}{3} - \tau) & U(0) & U(\tau) \\ U^T(\tau + \frac{2h}{3}) & U^T(\frac{2h}{3}) & U^T(\tau + \frac{h}{3}) & U^T(\frac{h}{3}) & U^T(\tau) & U(0) \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

6.7 Ejemplo con retardo distribuido y distribución Gamma

En este ejemplo se analiza la estabilidad de un sistema con retardo distribuido con una función Gamma tomado de [15]. Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \int_{-h}^0 \gamma(\theta)x(t + \theta)d\theta,$$

con a y h como parámetros. La función Gamma está dada por

$$\gamma(\theta) = -\theta e^\theta.$$

D-particiones

Para las D-particiones, se tiene

$$p(s, h, a) = s - a - \frac{1}{(s + 1)^2} + e^{-(s+1)h} \left[\frac{h}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2} \right].$$

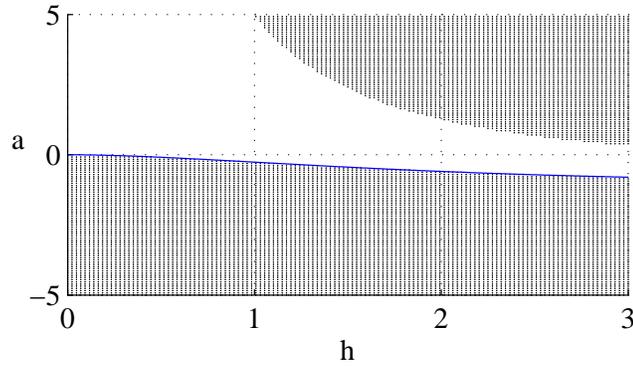


Figura 6.10: Regiones en donde se satisface la condición $u(0) > 0$ para el ejemplo 6.7

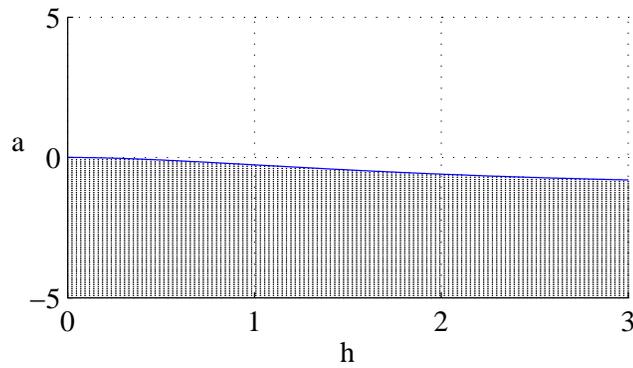


Figura 6.11: Región en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_2 para el ejemplo 6.7

Cuando $s = 0$, la D-partición está dada por

$$a = e^{-h}(h + 1) - 1.$$

Si $s = j\omega$, de la parte real se tiene la ecuación

$$a(\omega^2 - 1) + he^{-h}(\omega \sin \omega h + \cos \omega h) + e^{-h} \cos \omega h = 2\omega^2 + 1,$$

mientras que de la parte imaginaria se tiene

$$2a\omega + he^{-h}(\sin \omega h - \omega \cos \omega h) + e^{-h} \sin \omega h = -\omega^3 + \omega.$$

Las curvas generadas por estas dos ecuaciones se obtienen con base en el procedimiento dado en la sección 6.1.

Cómo de la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, h]$

Las variables auxiliares para el sistema libre de retardos [26] están dadas por

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= u(\tau), \\ V(\tau) &= u(\tau - h), \\ X_0(\tau) &= \int_{-h}^0 -\theta e^\theta Z(\tau + \theta) d\theta, & X_1(\tau) &= \int_{-h}^0 e^\theta Z(\tau + \theta) d\theta, \\ Y_0(\tau) &= \int_{-h}^0 -\theta e^\theta V(\tau - \theta) d\theta, & Y_1(\tau) &= \int_{-h}^0 e^\theta V(\tau - \theta) d\theta, \end{aligned}$$

y las derivadas son

$$\begin{aligned} Z'(\tau) &= aZ(\tau) + X_0(\tau), \\ V'(\tau) &= -aV(\tau) - Y_0(\tau), \\ X_0'(\tau) &= -he^{-h}V(\tau) - X_0(\tau) + X_1(\tau), \\ X_1'(\tau) &= Z(\tau) - e^{-h}V(\tau) - X_1(\tau), \\ Y_0'(\tau) &= he^{-h}Z(\tau) + Y_0(\tau) - Y_1(\tau), \\ Y_1'(\tau) &= e^{-h}Z(\tau) - V(\tau) + Y_1(\tau). \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera que se deben satisfacer son

$$\begin{aligned} Z(0) &= V(h), \\ X_0(0) &= Y_0(h), & Y_0(0) &= X_0(h), \\ X_1(0) &= Y_1(h), & Y_1(0) &= X_1(h), \\ aZ(0) + X_0(0) &= -\frac{W}{2}. \end{aligned}$$

Al igual que en los otros ejemplos con retardo distribuido mostrados en esta tesis, se tiene un problema de invertibilidad que impide encontrar los valores de las condiciones iniciales del sistema libre de retardos. Se supera esa limitante de forma similar a la explicada en la sección 6.2.

Verificación de las condiciones de estabilidad

Se utiliza la condición $u(0) > 0$ para determinar las zonas candidatas a estabilidad (Figura 6.10). De [15] se sabe que la zona de estabilidad es la que se encuentra en la parte baja de la gráfica. También se utiliza la condición (4.24), $\mathcal{K}_2(0, h)$ dada por (6.11), con la cual, en este espacio de parámetros, la zona estimada coincide con la zona de estabilidad (Figura 6.11).

6.8 Sistema con retardo distribuido y lapso

El trabajo reportado en [52] está dedicado al análisis de la estabilidad de un vehículo en un flujo de tráfico, en el caso en que la reacción del conductor tiene retardos y el vehículo está equipado con controladores de tipo proporcional derivativo que asisten al conductor. El retardo en la reacción del conductor envuelve funciones distribuidas para describir una pequeña memoria de corto plazo. La función de distribución considerada es la distribución uniforme, dada por

$$f(\theta) = \begin{cases} 1/\delta, & -h - \delta \leq \theta \leq -h \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

donde h es el retardo (o lapso muerto) de la memoria y δ es la ventana de tiempo de memoria del conductor. El flujo de tráfico modelado es una configuración espacial lineal de vehículos, en que se analiza la estabilidad de cada vehículo por separado.

La función de transferencia entre dos vehículos consecutivos se puede expresar mediante

$$G(s) = \frac{k_p + k_d s + \alpha F(s)}{s^2 + (k_d + b)s + k_p + \alpha F(s)}$$

donde k_p y k_d son las ganancias del controlador proporcional derivativo, α es la agresividad del conductor, b es el término de arrastre en equilibrio y $F(s)$ es la transformada de Laplace del kernel $f(\theta)$, dada por

$$F(s) = e^{-sh} \frac{1 - e^{-s\delta}}{s\delta}.$$

El denominador de la función de transferencia es el cuasipolinomio característico, dado por

$$p(s) = s^2 + (k_d + b)s + k_p + \alpha F(s), \quad (6.13)$$

de la cual se puede analizar la estabilidad entrada-salida del sistema. En el tiempo, la ecuación característica corresponde a

$$\ddot{x}(t) = -(k_d + b)\dot{x}(t) - k_p x(t) - \alpha \frac{1}{\delta} \int_{-\delta-h}^{-h} x(t + \theta) d\theta.$$

o bien, en ecuaciones de estado

$$\dot{X}(t) = A_0 X(t) + \int_{-\delta-h}^{-h} G(\theta) X(t + \theta) d\theta, \quad (6.14)$$

con

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_p & -(k_d + b) \end{bmatrix}, \quad B = G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha \frac{1}{\delta} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para poder analizar la estabilidad de este sistema con las condiciones de estabilidad obtenidas en este trabajo de tesis, es necesario expresar el sistema como un sistema con varios retardos distribuidos, es decir

$$\dot{X}(t) = A_0X(t) - \int_{-h}^0 G(\theta)X(t+\theta)d\theta + \int_{-\delta-h}^0 G(\theta)X(t+\theta)d\theta.$$

Se toman como parámetros h y δ .

D-particiones

Para las D-particiones, en el caso $s = j\omega$, la parte real está dada por

$$Re(p(j\omega, h, \delta)) = -k\delta\omega^2 + \alpha(\cos \omega h - \cos \omega(h + \delta)) = 0$$

mientras que la parte imaginaria es

$$Im(p(j\omega, h, \delta)) = -\delta\omega^3 + \omega\delta k_p + \alpha(-\sin \omega h + \sin \omega(h + \delta)) = 0.$$

Las D-particiones se obtienen con base en el procedimiento descrito en la sección 6.1.

Cómputo de la matriz de Lyapunov

La construcción de la matriz de Lyapunov para este ejemplo también requiere un análisis detallado. Note que con un cambio de variable la ecuación (6.14) se puede reescribir como

$$\dot{X}(t) = A_0X(t) + \int_{-\delta}^0 BX(t+\theta-h)d\theta,$$

con base en esta ecuación se realiza el análisis para la obtención de la matriz de Lyapunov.

La metodología consiste en

a) Para valores cualesquiera de h y δ se obtiene el máximo común divisor, el cual será tomado como retardo base h_b .

b) El siguiente paso es normalizar los valores de h y δ , esto es $h_n = h/h_b$ y $\delta_n = \delta/h_b$, con el fin de utilizar solo las variables auxiliares libres de retardos necesarias.

c) Después de un análisis similar al del ejemplo 6.3, se detectó que la dimensión del sistema libre de retardos es $n^2(4h_n + 3\delta_n)$, en donde n es la dimensión del sistema, en este caso es 2. El sistema libre de retardos está dado por

$$\begin{aligned} X_j(\tau) &= U(\tau + jh_b)d\theta, \quad j = -\delta_n - h_n, -\delta_n - h_n + 1, \dots, 0, 1, \dots, \delta_n + h_n - 1, \\ Y_j(\tau) &= \int_{-\delta}^0 X_j(\tau + \theta)d\theta, \quad j = -h_n, -h_n + 1, \dots, 0, 1, \delta_n - 1, \\ Z_j(\tau) &= \int_{-\delta}^0 X_j(\tau - \theta)d\theta, \quad j = 0, 1, \dots, h_n - 1, \quad \tau \in [0, h_b], \end{aligned}$$

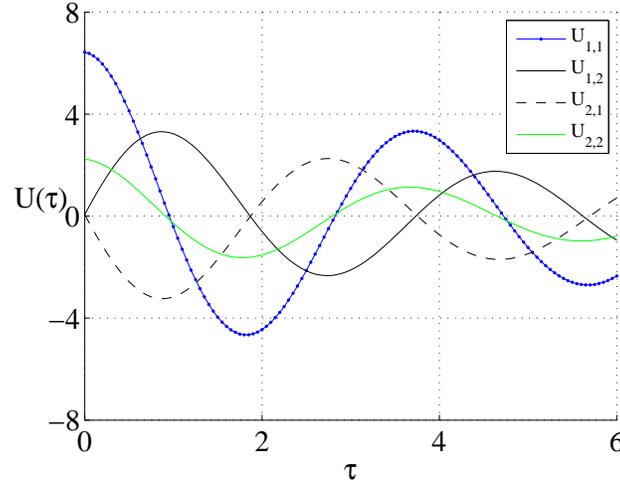


Figura 6.12: Matriz de Lyapunov para $h = 1.75$ y $\delta = 4.25$, ejemplo 6.8

con derivadas

$$\begin{aligned}
 X'_j(\tau) &= X_j(\tau)A_0 + Y_{j-h_n}(\tau)B, \quad j = 0, 1, \dots, \delta_n + h_n - 1, \\
 X'_j(\tau) &= -A_0^T X_{-j}(\tau) - B^T Z_{j+h_n}(\tau), \quad j = -\delta_n - h_n, -\delta_n - h_n + 1, \dots, -1, \\
 Y'_j(\tau) &= X_j(\tau) - X'_{j-\delta_n}(\tau), \quad j = -h_n, -h_n + 1, \dots, 0, 1, \delta_n - 1, \\
 Z'_j(\tau) &= -X_j(\tau) + X'_{j+\delta_n}(\tau), \quad j = 0, 1, \dots, h_n - 1, \quad \tau \in [0, h_b].
 \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer están dadas por

$$\begin{aligned}
 X_{j+1}(0) &= X_j(h_b), \quad j = -\delta_n - h_n, -\delta_n - h_n + 1, \dots, 0, 1, \dots, \delta_n + h_n - 2, \\
 Y_{j+1}(0) &= Y_j(h_b), \quad j = -h_n, -h_n + 1, \dots, 0, 1, \delta_n - 2, \\
 Y_0(0) &= Y_1(h_b), \\
 Z_{j+1}(0) &= Z_j(h_b), \quad j = 0, 1, \dots, h_n - 2, \\
 Z_0(0) &= Z_1(h_b), \\
 -W &= A_0^T X_0(0) + X_0(0)A_0 + B^T Z_{h_n-2}(h_b) + Z_{h_n-2}^T(h_b)B
 \end{aligned}$$

d) Para este caso, nuevamente se libra el problema de invertibilidad mediante un desarrollo similar al descrito en la sección 6.2 con $Y_0(0) = \int_{-\delta}^0 X_0(\theta)d\theta$ y $Z_0(0) = \int_{-\delta}^0 X_0(-\theta)d\theta$, para obtener condiciones de frontera adicionales que se utilizan en lugar de $Y_0(0) = Y_1(h_b)$ y $Z_0(0) = Z_1(h_b)$.

En la Figura 6.12 se presenta la matriz de Lyapunov para valores de $h = 1.75$ y $\delta = 4.25$.

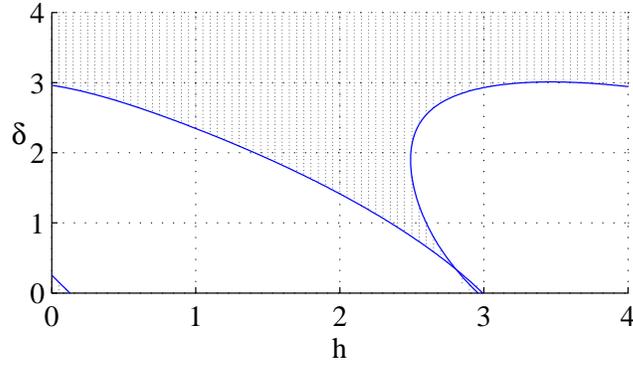


Figura 6.13: Regiones en donde se satisface la condición $U(0) > 0$, ejemplo 6.8

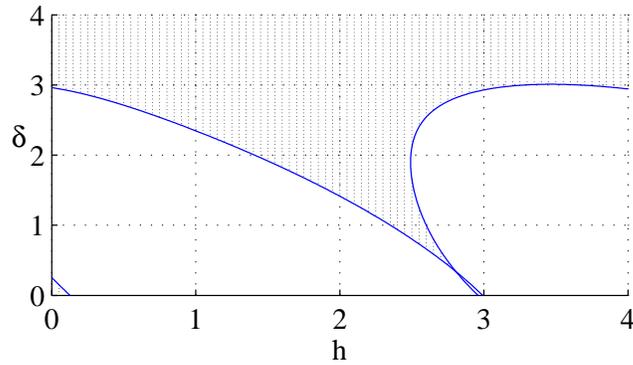


Figura 6.14: Región en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_2 ejemplo 6.8

Verificación de las condiciones de estabilidad

Se utiliza nuevamente la condición $U(0) > 0$, los resultados se muestran en la Figura 6.13. Con base en [52], la zona de estabilidad es aquella que se encuentra en la parte superior y además la pequeña zona localizada en la esquina inferior izquierda. También se utiliza la condición (4.24), $r = 2$ de modo que

$$\mathcal{K}_2(0, h + \delta) = \begin{bmatrix} U(0) & U(h + \delta) \\ U^T(h + \delta) & U(0) \end{bmatrix} > 0. \quad (6.15)$$

El resultado se ilustra en la Figura 6.14,. Con esta elección la zona estimada de estabilidad parece coincidir con la zona exacta de estabilidad. El código en Matlab para la obtención de la matriz de Lyapunov, así como la evaluación de las condiciones de estabilidad, se muestra en el Apéndice B.1.

6.9 Ejemplos suplementarios: sistemas con retardos concentrados

Se anexan a continuación ejemplos que ilustran una contribución adicional de este trabajo de tesis: la verificación de las condiciones en el espacio de 2 parámetros consistentes en dos retardos para el caso de retardos concentrados (ver sección 2.4).

6.9.1 Sistema con dos retardos concentrados

Considere el sistema con dos retardos concentrados presentado en [53]

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - x(t - h_1) - \frac{1}{2}x(t - h_2),$$

en donde $h_1 \geq 0$ y $h_2 \geq 0$ son los parámetros y $a = 1.3$.

D-particiones

Para las D-particiones, el cuasipolinomio característico se expresa

$$p(s, h_1, h_2) = s + a + e^{-sh_1} + \frac{1}{2}e^{-sh_2}.$$

La sustitución $s = j\omega$ en el cuasipolinomio genera la parte real

$$Re(p(j\omega, h_1, h_2)) = a + \cos \omega h_1 + \frac{1}{2} \cos \omega h_2 = 0$$

y la parte imaginaria

$$Im(p(j\omega, h_1, h_2)) = \omega - a \sin \omega h_1 - \frac{1}{2} \sin \omega h_2 = 0.$$

Las D-particiones se obtienen con base en el procedimiento descrito en la sección 6.1.

Cómputo de la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, \max(h_1, h_2)]$

La obtención de la función $u(\tau)$, $\tau \in [0, \max(h_1, h_2)]$ se basa en la siguiente metodología.

a) Para valores conmensurables cualesquiera de h_1 y h_2 se obtiene el máximo común divisor, el cual será tomado como retardo base h_b .

b) El siguiente paso es normalizar los valores de h_1 y h_2 , esto es $h_{1n} = h_1/h_b$ y $h_{2n} = h_2/h_b$, con el fin de utilizar solo las variables auxiliares libres de retardos necesarias. Además se obtiene $h_{max} = \max(h_1, h_2)$ y $h_{maxn} = h_{max}/h_b$.

c) La dimensión del sistema libre de retardos es $2n^2h_n$, en donde n es la dimensión del

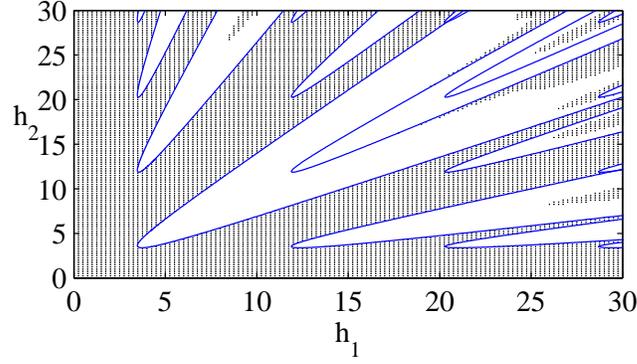


Figura 6.15: Regiones en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_4 ejemplo 6.9.1

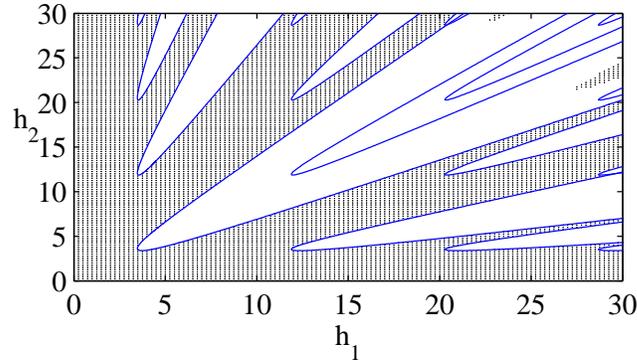


Figura 6.16: Regiones en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_6 ejemplo 6.9.1

sistema con retardos. El sistema libre de retardos está dado por

$$X_j(\tau) = u(\tau + jh_b)d\theta, \quad j = -h_n, -h_n + 1, \dots, 0, 1, \dots, h_n - 1, \quad \tau \in [0, h_b].$$

con derivadas

$$X'_j(\tau) = X_j(\tau)A_0 + X_{j-h_{1n}}A_1 + X_{j-h_{2n}}A_2, \quad j = 0, 1, \dots, h_n - 1,$$

$$X'_j(\tau) = -A_0^T X_{-j}(\tau) - A_1^T X_{j+h_{1n}}(\tau) - A_2^T X_{j+h_{2n}}(\tau), \quad j = -h_n, -h_n + 1, \dots, -1, \quad \tau \in [0, h_b].$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer están dadas por

$$\begin{aligned} X_{j+1}(0) &= X_j(h_b), \quad j = -h_n, -h_n + 1, \dots, 0, 1, \dots, h_n - 2, \\ -W &= A_0^T X_0(0) + A_1^T X_{h_{1n}-1}(h_b) + A_2^T X_{h_{2n}-1}(h_b) \\ &\quad + X_0(0)A_0 + X_{h_{1n}-1}^T(h_b)A_1 + X_{h_{2n}-1}^T(h_b)A_2. \end{aligned}$$

Verificación de las condiciones de estabilidad

Se utiliza nuevamente la condición (4.24), de modo que dado r , se tiene $\tau_i = (i-1)/(r-1)$, $i = 1, 2, \dots, r$. Para $r = 4$ se muestran los resultados en la Figura 6.15. Con base en [53], la zona de estabilidad es aquella que contiene al origen. También se utiliza $r = 6$, con lo cual se logra una mejora en la zona estimada de estabilidad (Figura 6.16). El código en Matlab para la obtención de la matriz de Lyapunov, así como la evaluación de las condiciones de estabilidad, se muestra en el Apéndice B.2.

6.9.2 Sistema con dos retardos concentrados adicionados

Considere el cuasipolinomio característico presentado en [53]

$$p(s, h_1, h_2) = s^2 + s + 20 + (2s + 3)e^{-h_1s} + (s + 4)e^{-h_2s} + e^{-(h_1+h_2)s}. \quad (6.16)$$

Las ecuaciones de estado tienen la forma

$$\dot{X}(t) = A_0X(t) + A_1X(t - h_1) + A_2X(t - h_2) + A_3X(t - h_1 - h_2),$$

con

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

en donde $h_1 \geq 0$ y $h_2 \geq 0$ son los parámetros.

D-particiones

La sustitución $s = j\omega$ en (6.16) genera la parte real

$$Re(p(j\omega, h_1, h_2)) = -\omega^2 + 20 + 2\omega \sin \omega h_1 + 3 \cos \omega h_1 + \omega \sin \omega h_2 + 4 \cos \omega h_2 + \cos \omega(h_1 + h_2) = 0$$

y la parte imaginaria

$$Im(p(j\omega, h_1, h_2)) = \omega + 2\omega \cos \omega h_1 - 3 \sin \omega h_1 + \omega \cos \omega h_2 - 4 \sin \omega h_2 - \sin \omega(h_1 + h_2) = 0.$$

Cómputo de la matriz de Lyapunov

La metodología para la obtención de la matriz de Lyapunov consiste en

a) Para valores conmensurables cualesquiera de h_1 y h_2 se obtiene el máximo común divisor, el cual será tomado como retardo base h_b .

b) El siguiente paso es normalizar los valores de h_1 y h_2 , esto es $h_{1n} = h_1/h_b$ y $h_{2n} = h_2/h_b$, con el fin de utilizar solo las variables auxiliares libres de retardos necesarias. Además sea $h_n = h_{1n} + h_{2n}$.

c) La dimensión del sistema libre de retardos es $2n^2(h_{1n} + h_{2n})$, en donde n es la dimensión del sistema con retardos. El sistema libre de retardos está dado por

$$X_j(\tau) = U(\tau + jh_b)d\theta, \quad j = -h_n, -h_n + 1, \dots, 0, 1, \dots, h_n - 1, \quad \tau \in [0, h_b],$$

con derivadas

$$\begin{aligned} X'_j(\tau) &= X_j(\tau)A_0 + X_{j-h_{1n}}A_1 + X_{j-h_{2n}}A_2 + X_{j-h_n}A_3, \quad j = 0, 1, \dots, h_n - 1, \\ X'_j(\tau) &= -A_0^T X_{-j}(\tau) - A_1^T X_{j+h_{1n}}(\tau) - A_2^T X_{j+h_{2n}}(\tau) - A_3^T X_{j+h_n}(\tau), \\ j &= -h_n, -h_n + 1, \dots, -1, \quad \tau \in [0, h_b]. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer están dadas por

$$\begin{aligned} X_{j+1}(0) &= X_j(h_b), \quad j = -h_n, -h_n + 1, \dots, 0, 1, \dots, h_n - 2, \\ -W &= A_0^T X_0(0) + A_1^T X_{h_{1n}-1}(h_b) + A_2^T X_{h_{2n}-1}(h_b) + A_3^T X_{h_n-1}(h_b) \\ &\quad + X_0(0)A_0 + X_{h_{1n}-1}^T(h_b)A_1 + X_{h_{2n}-1}^T(h_b)A_2 + X_{h_n-1}^T(h_b)A_3. \end{aligned}$$

Verificación de las condiciones de estabilidad

Se utiliza nuevamente la condición (4.24), de modo que dado r , se tiene $\tau_i = (i-1)/(r-1)$, $i = 1, 2, \dots, r$. Para $r = 2$ se muestran los resultados en la Figura 6.17. Con base en [53], la zona de estabilidad es aquella que contiene al origen. También se utiliza $r = 4$, con lo cual se logra una mejora en la zona estimada de estabilidad (Figura 6.18).

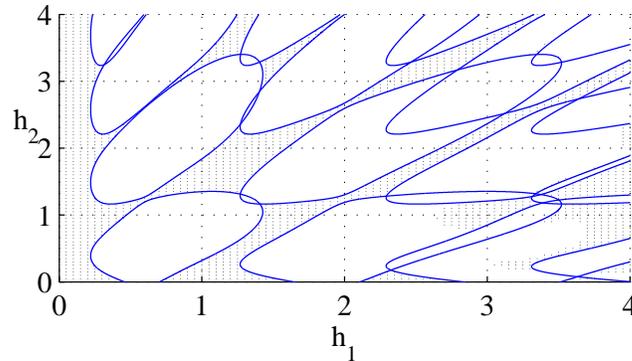


Figura 6.17: Regiones en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_2 ejemplo 6.9.2

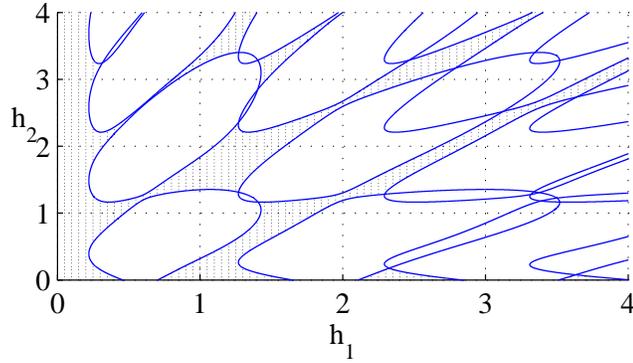


Figura 6.18: Regiones en donde se satisface la condición (4.24), \mathcal{K}_4 ejemplo 6.9.2

6.10 Conclusiones

Los ejemplos presentados muestran que para un valor determinado del parámetro r , las condiciones parecen ser también suficientes, pero en realidad, si bien las condiciones son necesarias y suficientes de acuerdo al Teorema 5.2, no se cuenta con un valor exacto de dicho parámetro para cada caso en particular para el cual se alcance la suficiencia. Además la construcción de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos distribuidos requiere el cálculo numérico de una integral que permite obtener las condiciones iniciales de U . Para el caso en que se tienen dos retardos como parámetros o sistemas con retardo y lapso como parámetros, se requiere replantear el sistema libre de retardos para cada valor de los retardos.

7

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se ha estudiado el papel de la matriz de Lyapunov en la estabilidad de sistemas con retardos, en específico el caso de retardo concentrado y retardo distribuido.

A continuación se resumen las principales contribuciones y se discute el trabajo a llevar a cabo.

7.1 Principales contribuciones de la tesis

Los principales resultados de este trabajo en torno a la estabilidad de sistemas con retardos, son

- **Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para la ecuación escalar con un retardo**

Para el caso escalar de sistemas lineales con un retardo concentrado, se validaron, mediante manipulaciones algebraicas de la matriz de Lyapunov, las condiciones de estabilidad y se demostró que son necesarias y suficientes.

- **Familias de condiciones necesarias de estabilidad para los sistemas con retardos distribuidos**

Se obtuvieron nuevas propiedades para la clase de sistemas lineales con retardo distribuido presentada, que permitieron presentar toda una familia de condiciones necesarias que dependen exclusivamente de la matriz de Lyapunov.

- **Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para los sistemas con retardos distribuidos**

Las nuevas propiedades presentadas para el punto anterior fueron obtenidas de forma

independiente de la estabilidad del sistema, con lo que fué posible la enunciación de condiciones necesarias y suficientes.

Se presentaron ejemplos propuestos y de la literatura para los cuales se obtuvieron regiones en el espacio de parámetros en las que se cumplen las condiciones obtenidas. Para un valor adecuado de r , las condiciones parecen alcanzar la suficiencia. Además los ejemplos con retardo distribuido ilustran la forma en que se obtienen las condiciones iniciales para el sistema libre de retardo asociado a la matriz de Lyapunov.

7.2 Trabajo futuro

En la continuación de este trabajo, se tiene el propósito de completar los resultados presentados de acuerdo a los siguientes ejes de investigación.

- **Obtener criterios de estabilidad para la ecuación escalar con retardo distribuido y kernel constante.**

Se tiene planeado encontrar para que valor del parámetro r las condiciones aquí presentadas alcanzan la suficiencia. Este será el punto de partida para el análisis de la estabilidad de la ecuación con kernel polinomial.

- **Analizar la relación entre el parámetro r y la dimensión del sistema libre de retardo**

Los ejemplos desarrollados parecen indicar que, para las condiciones obtenidas, la región de estabilidad se alcanza para valores reducidos del parámetro r . De manera mas precisa, para el caso de sistemas con retardos concentrados conmensurables y ciertas clases de retardos distribuidos, la relación entre el parámetro r y la dimensión del sistema libre de retardo asociado al cálculo de la matriz de Lyapunov merece un análisis a profundidad.

- **Aplicar los resultados obtenidos a problemas con modelos biológicos**

Los sistemas con retardo distribuido son utilizados principalmente en el modelado de sistemas biológicos, razón por la cual, las condiciones aquí obtenidas tienen aplicación.

- **Análisis de la obtención de las condiciones iniciales del sistema libre de retardo**

El problema de invertibilidad para obtener las condiciones iniciales del sistema libre de retardos asociado a la matriz de Lyapunov merece un estudio detallado. Se buscarán formas alternativas para evitar el cálculo de la integral de forma numérica presentada en los ejemplos.

-
- **Presentar algoritmos para el cálculo de la matriz de Lyapunov que minimicen el costo computacional**

En el caso de múltiples retardos conmensurables o de sistemas con retardo y lapso conmensurables, se requiere de algoritmos que minimicen el tiempo máquina para poder aplicar el método semianalítico en la obtención de la matriz de Lyapunov.

Bibliografía

- [1] Barnea D. I., A Method and New Results for Stability and Instability of Autonomous Functional Differential Equations, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17, 681–697, 1969.
- [2] Bellman R. and Cooke K. L., *Differential difference equations*, New York: Academic Press, 1963.
- [3] Buslowicz M., Sufficient Conditions for Instability of Delay Differential Systems, *International Journal of Control*, 37, 1311-1321, 1983.
- [4] Datko R., An algorithm for computing Liapunov functionals for some differential difference equations, *Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York, 387-398, 1972.
- [5] Egorov A., A new necessary and sufficient stability condition for time-delay dystems, *19th World Congress The International Federation of Automatic Control*, Cape Town, South Africa, 11018-11023, 2014.
- [6] Egorov A. and Mondié S., Necessary conditions for the stability of multiple time-delay systems via the delay Lyapunov matrix, *11th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Grenoble, France, 12-17, 2013.
- [7] Egorov A. V. and Mondié S., A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix, *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 1, 106-115, 2013.
- [8] Egorov A. V. and Mondié S., "Necessary conditions for the exponential stability of time-delay systems via the Lyapunov delay matrix", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24:12, 1760-1771, 2014.
- [9] Egorov A. V. and Mondié S., "Necessary stability conditions for linear delay systems", *Automatica*, 50:12, 3204-3208, 2014.

-
- [10] Elgoltz L. E., *Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1966.
- [11] Feng Z. and Lam J., Integral partitioning approach to stability analysis and stabilization of distributed time delay systems, *18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, 5094-5099, 2011.
- [12] Feron E., Balakrishnan V. and Boyd S., Design of stabilizing state feedback for delay systems via convex optimization, *IEEE Conf. on Decision and Control*, Tucson, USA, 4, 2195-2196, 1992.
- [13] Fridman E. and Shaked U., A descriptor approach to H infinity control of linear time-delay systems, *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, 47:2, 253-270, 2002.
- [14] García-Lozano H. and Kharitonov V., Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays, *2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, 102-106, 2004.
- [15] Gouaisbaoua F. and Ariba Y., Delay range stability of a class of distributed time delay systems, *Systems & Control Letters*, 211-217, 2011.
- [16] Gouaisbaoua F. and Ariba Y., Delay range stability of distributed time delay systems, *6th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Haifa, Israel, 2008.
- [17] Gouaisbaoua F. and Peaucelle D., Delay-dependent stability of time delay systems, in: *Proc. of ROCOND06*, Toulouse, 2006.
- [18] Gu, K. Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems. *Int. J. Control*, 68, 923-934, 1997.
- [19] Gu, K., Niculescu S. I., and Chen, J., On stability crossing curves for general systems with two delays, *J. Math. Anal. Appl.*, 311, 231-253, 2005.
- [20] Hale J. K., Sufficient Conditions for Stability and Instability of Autonomous Functional-differential Equations, *Journal of Differential Equations*, 1, 452-485, 1965.
- [21] Hale, J. K., *Theory of functional differential equations*, springer-Verlag, New-York, 1977.
- [22] Horn R. A. and Johnson C. R., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [23] Huang W., Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system, *J. of math. anal. and appl.*, 142, 83-94, 1989.
-

-
- [24] Infante E. F. and Castelan W. B., A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation, *J. of Dif. Equ.*, 29, 439-451, 1978.
- [25] Kharitonov V. L. and Zhabko A.P., Robust stability of time-delay systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 39, 2388-2397, 1994.
- [26] Kharitonov V. L., Lyapunov matrices for a class of time delay systems, *Syst. & Contr. Lett.*, 55, 610-617, 2006.
- [27] Kharitonov V., Mondié S., Santos J., Matrix Convex directions for time delay systems, *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.*, 13:14, 1259-1335, 2003.
- [28] Kharitonov V. L. and Plischke. E., Lyapunov matrices for time delay systems. *Syst. & Contr. Lett.*, 55:697-706, 2006.
- [29] Kharitonov V. L. and Zhabko A. P., Lyapunov-Krasovskii approach for robust stability of time delay systems, *Automatica*, 39, 15-20, 2003.
- [30] Kharitonov V. L. *Time delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Birkhäuser, 2013.
- [31] Kolmanovskii V. and Myshkis A., *Introduction to the theory and Applications of functional differential equations*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1999.
- [32] Krasovskii N. N., On the application of the second method of Lyapunov for equations with time delays, *Prikl. Mat. Mekh.*, 20, 315-327, 1956.
- [33] Louisell J., A matrix method for determining the imaginary axis eigenvalues of a delay system. *IEEE Trans. Automat. Control*, 46:12, 2008-2012, 2001.
- [34] Mondié S., Assessing the exact stability region of the single-delay scalar equation via its Lyapunov function, *IMA J. of Math Contr. and Inf.*, 2012.
- [35] Mondié S., Cuvas C., Ramirez A. and Egorov A., Necessary conditions for the stability of one delay systems: a Lyapunov matrix approach, *10th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Boston, USA, 13-18, 2012.
- [36] Mondié S. and Egorov A., Some necessary conditions for the exponential stability of one delay systems, *8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Mérida, Mexico, 103-108, 2011.
- [37] Mondié S. and Kharitonov V.L., Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* 50:2, 268-273, 135, 2005.
-

-
- [38] Mondié S., Santos J. and Kharitonov V.L., Robust Stability of Quasipolynomials and the Finite Inclusions Theorem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50, 1826-1831, 2005.
- [39] Neimark J., D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials , *Prikl. Mat. Meh.*, 13, 349-380, 1949.
- [40] Niculescu, S., Systèmes à Retards, Ph. D. Disertation, INPG, Grenoble, France (in French), 1996.
- [41] Niculescu S., *Delay effect on Stability: a robust control approach*, Springer, London, England, 2001.
- [42] Ochoa G. and Kharitonov V. L., Lyapunov matrices for neutral type time delay systems, *2nd int. conf. on electrical & electronics engineering and 11th conf. on electrical engineering*, México, 2005.
- [43] Ochoa G., Kharitonov V. L. and Mondié S., Critical frequencies and parameters for linear delay systems: A Lyapunov matrix approach. *Syst. & Contr. Lett.*, 62:9, 781-790, 2013.
- [44] Mondie S., Ochoa G. and Ochoa B., Instability conditions for linear time delay systems: a Lyapunov matrix function approach, *Int. J. of Contr.*, 84:10, 1601-1611, 2011.
- [45] Özbay H., Bonnet C. and Clairambault J., Stability analysis of systems with distributed delays and application to hematopoietic cell maturation dynamics. *Proc. of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancún, México, 2050-2055, 2008.
- [46] Peet M. M., Papachristodoulou A. and Lall S., Positive Forms and Stability of Linear Time-Delay Systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47:6, 3237-3258, 2009.
- [47] Razumikhin B. S., An application of Liapunov's method to a problem on the stability of systems with lag. *Automation and Remote Control*, 21, 740-748, 1960.
- [48] Repin M. Y., Quadratic Lyapunov functionals for systems with delay, *Prikl. Mat. Meh.*, 29, 564-566, 1965.
- [49] Santos O., Control subóptimo para sistemas con retardos: un enfoque iterativo, Ph. D. Disertation, CINVESTAV, México, 2006.
- [50] Santos O., Mondié S. and Kharitonov V. L., Robust stability conditions for systems with distributed delays, in: *Proc IEEE Conf Decision and Control*, San Diego, USA, 217-222, 2006.

-
- [51] Seuret A. and Gouaisbaut F., Hierarchy of LMI analysis of time-delay systems, *Syst. & Contr. Lett.*,81,1-7, 2015.
- [52] Sipahi R. and Niculescu S. I., Stability of Car Following with Human Memory Effects and Automatic Headway Compensation, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 4563-4583, 2010.
- [53] Sipahi R., Niculescu S. I., Abdallah C.T., Michiels W., Gu K., Stability and Stabilization of Systems with Time Delay, Limitations and opportunities, *Control Systems, IEEE*, 31:1, 38-65, 2011.
- [54] Verriest E. and Ivanov A., Robust stabilization of systems with delayed feedback, *2-nd International Symposium on Implicit and Robust Systems*, Warsaw, Poland, 190-193, 1991.

A

Resultados técnicos de la sección 2.2.2.1

En esta sección se lleva a cabo la prueba de los Lemas técnicos que permitieron reescribir los menores principales de $\mathcal{K}_3(0, \tau, h)$.

A.1 Prueba del Lema 2.3

Prueba A.1 *Se sustituye (2.16) en (2.18) con lo que*

$$\mathcal{K}(\delta) = \frac{w}{2z(z_1 - be^{-zh})} \begin{pmatrix} z_1 + be^{-zh} & b + z_1e^{-zh} & be^{z(\delta-h)} + z_1e^{-z\delta} \\ b + z_1e^{-zh} & z_1 + be^{-zh} & be^{-z\delta} + z_1e^{z(\delta-h)} \\ be^{z(\delta-h)} + z_1e^{-z\delta} & be^{-z\delta} + z_1e^{z(\delta-h)} & z_1 + be^{-zh} \end{pmatrix}$$

en donde $z_1 = z - a$.

El primer menor principal, $M_1\mathcal{K}$ es

$$\begin{aligned} M_1\mathcal{K} &= \frac{w}{2z} \frac{z - a + be^{-zh}}{z - a - be^{-zh}} \\ &= \frac{w}{2z} \frac{((z - a)^2 - b^2e^{-2zh})}{(z - a - be^{-zh})^2}. \end{aligned}$$

Con $z^2 = a^2 - b^2$, se tiene

$$M_1\mathcal{K} = \frac{w}{2z} \frac{(z - a) \left(z(e^{zh} + e^{-zh}) - a(e^{zh} - e^{-zh}) \right)}{e^{hz} (z - a - be^{-zh})^2}. \quad (\text{A.1})$$

Ahora, el segundo menor principal es

$$M_2\mathcal{K} = \frac{w^2 (e^{zh} - e^{-zh}) (z^2 - 2az + a^2 - b^2)}{4z^2 e^{zh} (z - a - be^{-zh})^2}.$$

Dado que $z^2 = a^2 - b^2$, lo anterior se puede reescribir como

$$M_2\mathcal{K} = \frac{w^2 (e^{zh} - e^{-zh}) 2z(z - a)}{4z^2 e^{zh} (z - a - be^{-zh})^2}. \quad (\text{A.2})$$

El tercer menor principal se expresa

$$\begin{aligned} M_3\mathcal{K}(\delta) &= \frac{w^3 (e^{2z\delta} - 1) (e^{2z\delta} e^{-2zh} - 1)}{8z^3 e^{2z\delta}} \\ &\quad \times \frac{(-z + a + be^{-zh}) (z^2 - 2az + a^2 - b^2)}{(z - a - be^{-zh})^3}. \end{aligned}$$

Con $z^2 = a^2 - b^2$ y reacomodando términos

$$M_3\mathcal{K}(\delta) = \frac{w^3 (z - a) (e^{z\delta} - e^{-z\delta}) (e^{z(h-\delta)} - e^{-z(h-\delta)})}{4z^2 e^{zh} (z - a - be^{-zh})^2}. \quad (\text{A.3})$$

El resultado se obtiene por inspección, con (A.1), (A.2), (A.3) y definiendo

$$Q = 2ze^{zh} \frac{(z - a - be^{-zh})^2}{z - a}.$$

Adicionalmente, note que

$$Q = \frac{2ze^{zh} ((z - a)^2 + b^2 e^{-2zh} - 2(z - a)be^{-zh})}{(z - a)}.$$

Reacomodando y reduciendo

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2ze^{zh} ((z - a)^2 - (z^2 - a^2)e^{-2zh} - 2(z - a)be^{-zh})}{(z - a)} \\ &= 2ze^{zh} ((z - a) - (z + a)e^{-2zh} - 2be^{-zh}) \\ &= 2z (z(e^{zh} - e^{-zh}) - a(e^{zh} + e^{-zh}) - 2b). \end{aligned}$$

Lo anterior se puede reescribir como

$$Q = \left(z(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh}) - (a-b)(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh}) \right) \\ \times \left(z(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh}) - (a+b)(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh}) \right).$$

A.2 Prueba del Lema 2.4

Prueba A.2 Se tiene de (2.16) que

$$M_1\mathcal{K} = \frac{w}{2z} \frac{z - a + be^{-zh}}{z - a - be^{-zh}} \\ = \frac{w}{2z} \frac{(z - a + be^{-zh})(-z - a - be^{-zh})}{(z - a - be^{-zh})(-z - a - be^{-zh})} \\ = \frac{w}{2z} \frac{be^{-zh}(b(e^{zh} - e^{-zh}) - 2z)}{be^{-zh}(b(e^{zh} + e^{-zh}) + 2a)}.$$

De forma similar se puede escribir

$$M_1\mathcal{K} = \frac{w}{2z} \frac{(z - a + be^{-zh})(-z - a + be^{-zh})}{(z - a - be^{-zh})(-z - a + be^{-zh})} \\ = \frac{b^2e^{-2zh} + a^2 - z^2 - 2abe^{-zh}}{a^2 - b^2e^{-2zh} - z^2 + 2bze^{-zh}} \\ = \frac{be^{-zh}(b(e^{zh} + e^{-zh}) - 2a)}{be^{-zh}(b(e^{zh} - e^{-zh}) + 2z)}$$

de donde se obtiene el resultado.

A.3 Prueba del Lema 2.5

Prueba A.3 Note que

$$M_2\mathcal{K} = w^2 \frac{1}{Q} (e^{zh} - e^{-zh})$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M_2\mathcal{K}} &= \frac{\left(z(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh}) - (a-b)(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})\right)}{w^2(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})} \\
&\quad \times \left(z(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh}) - (a+b)(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})\right) \\
&= \frac{1}{w^2} \left(z \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})} - (a-b) \right) \\
&\quad \times \left(z \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})} - (a+b) \right) \\
&= \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})} \left(z^2 - (a-b)z \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{zw^2} \left(z \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})} - (a+b) \right).
\end{aligned}$$

Con $z^2 = a^2 - b^2$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M_2\mathcal{K}} &= (b-a) \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})} \\
&\quad \times \frac{1}{zw^2} \left(z \frac{(e^{\frac{1}{2}zh} - e^{-\frac{1}{2}zh})}{(e^{\frac{1}{2}zh} + e^{-\frac{1}{2}zh})} - (a+b) \right)^2.
\end{aligned}$$

B

Código de programa en Matlab para los Ejemplos 6.8 y 6.9.1

Se presentan a continuación los programas con comentarios llevados a cabo en Matlab.

B.1 Código de programa para el Ejemplo 6.8

```
clc
clear all
format long
hold on

%valores particulares del ejemplo
alfa=2;
k=0.25;
kp=3;
A0=[0 1;-kp -k];

%valores auxiliares
n=length(A0);
In=eye(n);
In2=eye(n*n);
W=In;

%número de divisiones en la rejilla
puntos=80;
%valor máximo de las retardos
maxhs=4;
%incremento entre puntos consecutivos
paso=maxhs/puntos;

con1=1;
```

```

%se construye la matriz de permutación
g=1;
for i=1:n*n
    ME(:,i)=In2(:,g);
    g=g+n;
    if g>n*n
        g=g-n*n+1;
    end
end

%h=c1*paso, delta=c2*paso, c1 y c2 enteros para la conmensurabilidad
for c1=1:puntos
    for c2=1:puntos
        rbp=gcd(c1,c2);          %cálculo del MCD para el retardo base
        rb=rbp*paso;            %retardo base
        h1=round(c1/rbp);        %relación entre h y rb
        delta1=round(c2/rbp);    %relación entre delta y rb
        h=c1*paso;              %h
        delta=c2*paso;          %delta

        dimL=delta1+h1;         %máximo retardo con respecto al rb

        B=[0 0;-alfa/delta 0];

        %se construye la matriz L mediante vectores auxiliares
        vec1=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
        vec1(1:n^2,1:n^2)=kron(A0',In);
        vec1(1:n^2,2*(h1+delta1)*n^2+1:(2*(h1+delta1)+1)*n^2)=kron(B',In);
        L=vec1;
        %se llenan los renglones de L de acuerdo a las variables del
        %sistema libre de retardos
        for i=1:h1+delta1-1
            vec1=circshift(vec1,[0 n^2]);
            L((i*n^2+1):(i+1)*n^2,:)=vec1;
        end

        vec2=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
        vec2(1:n^2,(h1+delta1)*n^2+1:(h1+delta1+1)*n^2)=-kron(In,A0');
        vec2(1:n^2,3*(h1+delta1)*n^2+1:(3*(h1+delta1)+1)*n^2)=-kron(In,B');
        L((h1+delta1)*n^2+1:(h1+delta1+1)*n^2,:)=vec2;
        %se llenan los renglones de L de acuerdo a las variables del
        %sistema libre de retardos
        for i=1:h1-1
            vec2=circshift(vec2,[0 n^2]);
            L((h1+delta1+i)*n^2+1:(h1+delta1+i+1)*n^2,:)=vec2;
        end

        vec3=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
        vec3(1:n^2,(2*h1+delta1)*n^2+1:(2*h1+delta1+1)*n^2)=-kron(In,A0');
        vec3(1:n^2,2*(h1+delta1)*n^2+1:(2*(h1+delta1)+1)*n^2)=-kron(In,B');
        L((2*h1+delta1)*n^2+1:(2*h1+delta1+1)*n^2,:)=vec3;
        %se llenan los renglones de L de acuerdo a las variables del
        %sistema libre de retardos
        for i=1:delta1-1
            vec3=circshift(vec3,[0 n^2]);
            L((2*h1+delta1+i)*n^2+1:(2*h1+delta1+i+1)*n^2,:)=vec3;
        end

```

```

vec4=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
vec4(1:n^2,(h1*n^2)+1:(h1+1)*n^2)=In2;
vec4(1:n^2,(h1+delta1)*n^2+1:(h1+delta1+1)*n^2)=-In2;
L(2*(h1+delta1)*n^2+1:(2*(h1+delta1)+1)*n^2,:)=vec4;
%se llenan los renglones de L de acuerdo a las variables del
%sistema libre de retardos
for i=1:h1+delta1-1
    vec4=circshift(vec4,[0 n^2]);
    L((2*(h1+delta1)+i)*n^2+1:(2*(h1+delta1)+i+1)*n^2,:)=vec4;
end
vec5=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
vec5(1:n^2,1:n^2)=In2;
vec5(1:n^2,delta1*n^2+1:(delta1+1)*n^2)=-In2;
L(3*(h1+delta1)*n^2+1:(3*(h1+delta1)+1)*n^2,:)=vec5;
%se llenan los renglones de L de acuerdo a las variables del
%sistema libre de retardos
for i=1:h1-1
    vec5=circshift(vec5,[0 n^2]);
    L((3*(h1+delta1)+i)*n^2+1:(3*(h1+delta1)+i+1)*n^2,:)=vec5;
end
%se obtiene la integral (con el método del trapecio) que proporciona
%condiciones de frontera adicionales.

%se calcula el valor del paso de integración de modo que se minimice el
%número de veces que se calcula e^(Lt)
incretl=rb/floor(180/delta1);
res=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
Et1=eye(n^2*(4*h1+3*delta1));

ban3=1;
for i=dimL:-1:h1+1
    %en res se guarda el valor de la integral
    if ban3
        res=Et1((i-1)*n^2+1:i*n^2,:)/2;
        ban3=0;
    else
        res=Et1((i-1)*n^2+1:i*n^2,:)+res;
    end
end

ban4=1; %bandera auxiliar para el cálculo de e^(Lhb)
%si es la primera vez, se calcula e^(Lt), si no, se utiliza el
%valor que ya se tiene de e^(Lt)
for ia=1:floor(180/delta1)-1
    if ban4
        %incretl está calculado de forma que es un submúltiplo del retardo
        %base, esto con en fin de con un solo valor de e^(Lt) se aprovechen
        %los valores de xj, j=0,1,...,m-1 para ese incretl
        ErLb=expm(L*incretl);
        Et1=ErLb;
        ban4=0;
    else
        Et1=Et1*ErLb;
    end
    for i=dimL:-1:h1+1
        res=Et1((i-1)*n^2+1:i*n^2,:)+res;
    end
end

```

```

    end
end
%esta condición es para cubrir el caso en que incre1=rb
if ban4
Et1=expm(L*rb);
else
Et1=Et1*ErLb;
end
res=Et1(h1*n^2+1:(h1+1)*n^2,:)/2+res;
%en res1 se encuentran el valor de la integral
res1=res*incre1;

%construcción de las matrices M y N
vec1(1:n^2,1:n^2)=In2;
M=vec1;

vec2=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
vec2(1:n^2,n^2+1:2*n^2)=-In2;
N=vec2;
%se recorren los vectores auxiliares y se construye M y N
for i=1:2*(h1+delta1-1)
    vec1=circshift(vec1,[0 n^2]);
    M(i*n^2+1:(i+1)*n^2,:)=vec1;
    vec2=circshift(vec2,[0 n^2]);
    N(i*n^2+1:(i+1)*n^2,:)=vec2;
end

vec1=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
vec1(1:n^2,2*(h1+delta1)*n^2+1:(2*(h1+delta1)+1)*n^2)=In2;
M((2*(h1+delta1)-1)*n^2+1:(2*(h1+delta1))*n^2,:)=vec1;

vec2=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
vec2(1:n^2,(2*(h1+delta1)+1)*n^2+1:(2*(h1+delta1)+2)*n^2)=-In2;
N((2*(h1+delta1)-1)*n^2+1:(2*(h1+delta1))*n^2,:)=vec2;
%se recorren los vectores auxiliares y se construye M y N
for i=1:h1+delta1-2
    vec1=circshift(vec1,[0 n^2]);
    M((2*(h1+delta1)-1+i)*n^2+1:(2*(h1+delta1)+i)*n^2,:)=vec1;
    vec2=circshift(vec2,[0 n^2]);
    N((2*(h1+delta1)-1+i)*n^2+1:(2*(h1+delta1)+i)*n^2,:)=vec2;
end

%condicionante para llenar adecuadamente la matriz M y N, esto debido a
%la CI que causa dependencia lineal si h1=1
if h1-1>0
    vec1=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
    vec1(1:n^2,(3*(h1+delta1))*n^2+1:(3*(h1+delta1)+1)*n^2)=In2;
    M((3*(h1+delta1)-2)*n^2+1:(3*(h1+delta1)-1)*n^2,:)=vec1;

    vec2=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta1));
    vec2(1:n^2,(3*(h1+delta1)+1)*n^2+1:(3*(h1+delta1)+2)*n^2)=-In2;
    N((3*(h1+delta1)-2)*n^2+1:(3*(h1+delta1)-1)*n^2,:)=vec2;
    %se recorren los vectores auxiliares y se construye M y N
    for i=1:h1-2
        vec1=circshift(vec1,[0 n^2]);
        M((3*(h1+delta1)-2+i)*n^2+1:(3*(h1+delta1)-1+i)*n^2,:)=vec1;
        vec2=circshift(vec2,[0 n^2]);

```

```

    N((3*(h1+delta a1)-2+i)*n^2+1:(3*(h1+delta a1)-1+i)*n^2,:)=vec2;
end
end

%se asignan los valores de la integral , para superar el problema de
%dependencia lineal de las CI del sistema libre de retardos
M((4*h1+3*delta a1-3)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1-2)*n^2,:)=res1;
aux1=M((4*h1+3*delta a1-3)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1-2)*n^2,...
    (2*h1+3*delta a1-1)*n^2+1:(2*h1+3*delta a1)*n^2);
aux1=aux1-ME;
M((4*h1+3*delta a1-3)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1-2)*n^2,...
    (2*h1+3*delta a1-1)*n^2+1:(2*h1+3*delta a1)*n^2)=aux1;

M((4*h1+3*delta a1-2)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1-1)*n^2,:)=res1;
aux1=M((4*h1+3*delta a1-2)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1-1)*n^2,...
    n^2*(4*h1+3*delta a1-1)+1:n^2*(4*h1+3*delta a1));
aux1=aux1-In2;

M((4*h1+3*delta a1-2)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1-1)*n^2,...
    n^2*(4*h1+3*delta a1-1)+1:n^2*(4*h1+3*delta a1))=aux1;

vec1=zeros(n^2,n^2*(4*h1+3*delta a1));
N((4*h1+3*delta a1-3)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1-2)*n^2,:)=vec1;
N((4*h1+3*delta a1-2)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1-1)*n^2,:)=vec1;

%se asigna el último renglon de M y N correspondiente a la propiedad
%algebraica
M((4*h1+3*delta a1-1)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1)*n^2,:)=vec1;
M((4*h1+3*delta a1-1)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1)*n^2,...
    (h1+delta a1-1)*n^2+1:(h1+delta a1)*n^2)=kron(A0',In)+kron(In,A0');
N((4*h1+3*delta a1-1)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1)*n^2,:)=vec1;
N((4*h1+3*delta a1-1)*n^2+1:(4*h1+3*delta a1)*n^2,...
    3*(h1+delta a1)*n^2+1:(3*(h1+delta a1)+1)*n^2)=kron(In,B')+kron(B',In)*ME;

%se construye el vector resultante de la vectorización de W
vec0w=[zeros(1,n^2*(4*h1+3*delta a1-1))';-vec(W)];
%se detecta si se pueden obtener las CI del sistema libre de retardos
if rank(M+N*expm(L*rb))<n^2*(4*h1+3*delta a1)
    plot(h,delta,'g')
else
    %se obtienen las CI del sistema libre de retardos
    D=(M+N*expm(L*rb))\vec0w;

    %se construye el vector de taus para la evaluación de las condiciones
    %necesarias de estabilidad
    r=2; %número de taus
; %numero de puntos a evaluar entre cero y h
    for i=1:r
        if r==1
            rs(r)=0;
        else
            rs(i)=(i-1)/(r-1);
        end
    end

    %aquí se calcula en que xj, j=0,1,...,m-1 y que argumento se tiene que utilizar
    %para obtener la matriz de Lyapunov, debido a los múltiples retardos

```

```

for i=1:r
    for j=i:r
        loc=floor((rs(j)-rs(i))*(h1+delta1));
        ar1=((rs(j)-rs(i))*(h1+delta1)-loc)*rb;
        if loc==h1+delta1&&ar1==0
            loc=(h1+delta1)-1;
            ar1=rb;
        end
    end

    %se construye la matriz kr
    ytz=expm(L*ar1)*D;
    y1=ytz*((delta1+h1-1-loc)*n^2+1:(delta1+h1-loc)*n^2);
    y=mat(y1);
    for il=1:n
        for jl=1:n
            M1((i-1)*n+il,(j-1)*n+jl)=y(il,jl);
        end
    end
end

%se rellena la simétrica de kr
for i=2:r*n
    for j=1:i-1
        M1(i,j)=M1(j,i);
    end
end

%evaluación de la positividad de kr, si el par (h,delta) satisface
%las CN, se guarda ese par para futura graficación
eig1=eig(M1);
if min(eig1)>0
    hv(con1)=h;
    deltav(con1)=delta;
    con1=con1+1;
end
end
end

%se guardan los valores de pares (h,delta) que satisficieron las CN
savefile = 'sip_lapso_r2.mat';
save(savefile,'hv','deltav')

```

B.2 Código de programa para el Ejemplo 6.9.1

```

clc
clear all
format long
hold on

%datos del ejemplo
A0=-1.3;
A1=-1;
A2=-0.5;

```

```

%valores auxiliares
n=length(A0);
In=eye(n);
In2=eye(n*n);
W=In;
con1=1;

%puntos en la rejilla
puntos=80;
%máximo valor de los retardos
maxhs=30;

%separación entre cada valores consecutivos de los retardos
paso=maxhs/puntos;

%se construye la matriz de permutación
g=1;
for i=1:n*n
    ME(:,i)=In2(:,g);
    g=g+n;
    if g>n*n
        g=g-n*n+1;
    end
end

%matriz de banderas que indican para que puntos ya se obtuvo
%la matriz de Lyapunov

MP=zeros(puntos+1,puntos+1);

%h1=c1*paso, h2=c2*paso, c1 y c2 enteros para la conmensurabilidad
for c1=0:puntos
    for c2=0:puntos
        if c1==0&& c2==0 %caso en que no hay retardos
            %si el sistema libre de retardos es estable, se guarda un punto para
            %graficación posterior
            if max(real(eig(A0+A1+A2)))<0
                h1v(con1)=0;
                h2v(con1)=0;
                con1=con1+1;
            end
            %se indica en la matriz de banderas que ese punto ya ha sido analizado
            MP(c1+1,c2+1)=1;
        else
            %si ya ha sido analizado este punto, se sigue al siguiente punto
            if MP(c1+1,c2+1)
                else
                    %se analizan los caso en que h1=0, partiendo el retardo pues existen
                    %problemas numéricos
                    if c1==0
%se contruyen las matrices L, M, N
L=[kron((A0+A1)',In) zeros(n*n) kron(A2',In) zeros(n*n);...
    zeros(n*n) kron((A0+A1)',In) zeros(n*n) kron(A2',In);...
    -kron(In,A2') zeros(n*n) -kron(In,(A0+A1)') zeros(n*n);...
    zeros(n*n) -kron(In,A2') zeros(n*n) -kron(In,(A0+A1)')];
M=[In2 zeros(n*n) zeros(n*n) zeros(n*n);...
    zeros(n*n) In2 zeros(n*n) zeros(n*n)];

```

```

    zeros(n*n) zeros(n*n) In2 zeros(n*n);...
    zeros(n*n) kron((A0+A1)',In)+kron(In,(A0+A1)') zeros(n*n) zeros(n*n)];
N=[zeros(n*n) -In2 zeros(n*n) zeros(n*n);...
    zeros(n*n) zeros(n*n) -In2 zeros(n*n);...
    zeros(n*n) zeros(n*n) zeros(n*n) -In2;...
    kron(In,A2')+kron(A2',In)*ME zeros(n*n) zeros(n*n) zeros(n*n)];
%se asignan directamente los valores para los cálculos
dimL=2;
rb=paso/2; %retardo base
tau1=c1*paso; %h1
tau2=c2*paso; %h2
else
    if c2==0 %caso en que h2=0
L=[kron((A0+A2)',In) zeros(n*n) kron(A1',In) zeros(n*n);...
    zeros(n*n) kron((A0+A2)',In) zeros(n*n) kron(A1',In);...
    -kron(In,A1') zeros(n*n) -kron(In,(A0+A2)') zeros(n*n);...
    zeros(n*n) -kron(In,A1') zeros(n*n) -kron(In,(A0+A2)')];
M=[In2 zeros(n*n) zeros(n*n) zeros(n*n);...
    zeros(n*n) In2 zeros(n*n) zeros(n*n);...
    zeros(n*n) zeros(n*n) In2 zeros(n*n);...
    zeros(n*n) kron((A0+A2)',In)+kron(In,(A0+A2)') zeros(n*n) zeros(n*n)];
N=[zeros(n*n) -In2 zeros(n*n) zeros(n*n);...
    zeros(n*n) zeros(n*n) -In2 zeros(n*n);...
    zeros(n*n) zeros(n*n) zeros(n*n) -In2;...
    kron(In,A1')+kron(A1',In)*ME zeros(n*n) zeros(n*n) zeros(n*n)];
dimL=2;
rb=paso/2;
tau1=c1*paso;
tau2=c2*paso;
else
    rbp=gcd(c1,c2); %cálculo del MCD para el retardo base
    tau1a=round(c1/rbp); %relación entre h1 y rb
    tau2a=round(c2/rbp); %relación entre h2 y rb
    rb=rbp*paso; %retardo base
    tau1=c1*paso; %h1
    tau2=c2*paso; %h2
    dimL=max(tau1a,tau2a); %máximo retardo con respecto al rb

%se construye L mediante vectores que se van recorriendo
clear L
L=zeros(2*n^2*dimL,2*n^2*dimL);

vec1=zeros(n^2,2*n^2*dimL);
vec2=zeros(n^2,2*n^2*dimL);
%se llenan los vectores auxiliares en las posiciones adecuadas de
%acuerdo a tau1a y tau2a
vec1(1:n^2,1:n^2)=kron(A0',In);
vec1(1:n^2,tau1a*n^2+1:(tau1a+1)*n^2)=...
    vec1(1:n^2,tau1a*n^2+1:(tau1a+1)*n^2)+kron(A1',In);
vec1(1:n^2,tau2a*n^2+1:(tau2a+1)*n^2)=...
    vec1(1:n^2,tau2a*n^2+1:(tau2a+1)*n^2)+kron(A2',In);
vec2(1:n^2,dimL*n^2+1:(dimL+1)*n^2)=...
    vec2(1:n^2,dimL*n^2+1:(dimL+1)*n^2)-kron(In,A0');
vec2(1:n^2,(dimL-tau1a)*n^2+1:(dimL-tau1a+1)*n^2)=...
    vec2(1:n^2,(dimL-tau1a)*n^2+1:(dimL-tau1a+1)*n^2)-kron(In,A1');
vec2(1:n^2,(dimL-tau2a)*n^2+1:(dimL-tau2a+1)*n^2)=...
    vec2(1:n^2,(dimL-tau2a)*n^2+1:(dimL-tau2a+1)*n^2)-kron(In,A2');

```

```

%se asignan los vectores a L
L(1:n^2,:)=vec1;
L(dimL*n^2+1:(dimL+1)*n^2,:)=vec2;

%se construye la matriz L recorriendo los vectores auxiliares
for i=1:dimL-1
    vec1=circshift(vec1,[0 n^2]);
    L(i*n^2+1:(i+1)*n^2,:)=vec1;
    vec2=circshift(vec2,[0 n^2]);
    L((dimL+i)*n^2+1:(dimL+i+1)*n^2,:)=vec2;
end

%construcción de las matrices M y N
clear M N
M=zeros(2*n^2*dimL,2*n^2*dimL);
N=zeros(2*n^2*dimL,2*n^2*dimL);

%se utilizan vectores auxiliares para construir M y N en la parte que
%depende de solo matrices identidad
vec1=zeros(n^2,2*n^2*dimL);
vec1(1:n^2,1:n^2)=In2;
M(1:n^2,:)=vec1;

vec2=zeros(n^2,2*n^2*dimL);
vec2(1:n^2,n^2+1:2*n^2)=-In2;
N(1:n^2,:)=vec2;

%se recorren los vectores auxiliares y se construye M y N
for i=1:2*(dimL-1)
    vec1=circshift(vec1,[0 n^2]);
    M(i*n^2+1:(i+1)*n^2,:)=vec1;
    vec2=circshift(vec2,[0 n^2]);
    N(i*n^2+1:(i+1)*n^2,:)=vec2;
end

%se asigna el último renglon de M y N correspondiente a la propiedad
%algebraica
M((2*dimL-1)*n^2+1:2*dimL*n^2,(dimL-1)*n^2+1:dimL*n^2)=...
    kron(A0',In)+kron(In,A0');
N((2*dimL-1)*n^2+1:2*dimL*n^2,(dimL-tau1a)*n^2+1:(dimL-tau1a+1)*n^2)=...
    kron(In,A1')+kron(A1',In)*ME;
N((2*dimL-1)*n^2+1:2*dimL*n^2,(dimL-tau2a)*n^2+1:(dimL-tau2a+1)*n^2)=...
    N((2*dimL-1)*n^2+1:2*dimL*n^2,(dimL-tau2a)*n^2+1:(dimL-tau2a+1)*n^2)...
    +kron(In,A2')+kron(A2',In)*ME;
end
end

%se construye el vector resultante de la vectorización de W
vec0w=[zeros(1,n^2*(2*dimL-1))';-vec(W)];
%c3 es un contador auxiliar para evitar el cálculo de e^(Lhb) cuando
%taula y tau2a tienen el mismo valor para un rb diferente
c3=1;
%c4 y c5 son auxiliares para cubrir los casos en que taula y tau2a
%tienen el mismo valor para un rb diferente
c4=c3*c1;
c5=c3*c2;

```

```

%bandera auxiliar para el cálculo de e^(Lhb)
ban3=1;

%se lleva a cabo el proceso siempre y cuando se siga en el plano de
%parámetros
while max(c4,c5)<=puntos
    %si es la primera vez que se entra a un caso de taula y tau2a, se
    %calcula e^(Lhb), si no, se utiliza el valor que ya se tiene de e^(Lhb)
    if ban3
        eL=expm(L*rb);
        erLb=eL;
        ban3=0;
    else
        erLb=erLb*eL;
    end
%se detecta si se pueden obtener las CI del sistema libre de retardos
if rank(M+N*erLb)<2*n^2*dimL
    plot(tau1*c3,tau2*c3,'*g')
else
%se obtienen las CI del sistema libre de retardos
    D=(M+N*erLb)\vec0w;

%se construye el vector de taus para la evaluación de las condiciones
%necesarias de estabilidad
    r=8; %número de taus
; %numero de puntos a evaluar entre cero y h
    for i=2:r
        rs(i)=(i-1)/(r-1);
    end

%se construye la matriz kr
    M1=zeros(n*r,n*r);
    M1(1:n,1:n)=mat(D((dimL-1)*n^2+1:dimL*n^2));

%aquí se calcula en que xj, j=0,1,...,m-1 y que argumento se tiene que utilizar
%para obtener la matriz de Lyapunov, debido a los múltiples retardos
    for i=2:r
        loc=floor(rs(i)*dimL);
        ar1=(rs(i)*dimL-loc)*c3*rb;
        if loc==dimL&&ar1==0
            loc=dimL-1;
            ar1=c3*rb;
        end

        ytz=expm(L*ar1)*D;
        y1=ytz((dimL-1-loc)*n^2+1:(dimL-loc)*n^2);
        M1(1:n,(i-1)*n+1:i*n)=mat(y1);
    end
% se construye el resto de kr recorriendo el primer renglón de esta
% debido a la forma del vector de taus
    for i=2:r
        M1((i-1)*n+1:i*n,:)=circshift(M1((i-2)*n+1:(i-1)*n,:),[0 n]);
    end

%se rellena la simétrica de kr
    for i=2:r*n

```

```

    for j=1:i-1
        M1(i,j)=M1(j,i);
    end
end

%evaluación de la positividad de kr, si el par (h1,h2) satisface las
%CN, se guarda ese par para futura graficación
eig1=eig(M1);
if min(eig1)>0
    h1v(con1)=tau1*c3;
    h2v(con1)=tau2*c3;
    con1=con1+1;
end
end
%se indica en la matriz de banderas, que ese par (h1,h2) ya ha sido
%analizado
MP(c4+1,c5+1)=1;
%se modifican los contadores c3,c4,c5 para evitar cálculos reiterados
%de  $e^{(Lhb)}$ 
c3=c3+1;
c4=c3*c1;
c5=c3*c2;
end
end
end
end
end
%se guardan los valores de pares (h1,h2) que satisficieron las CN
savefile = 'sipa_2ret_r8_v1.mat';
save(savefile, 'h1v', 'h2v')

```