**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

# Estabilidad para una clase de sistemas fraccionarios

TESIS

Que presenta el

**M. en C. Allan Fiel Espinosa**

Para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS**

En la especialidad de

**Control Automático**

Director de Tesis:

*Dr. Jorge Alberto León Vázquez*

Ciudad de México Marzo, 2016

# Agradecimientos

Principalmente y de primera instancia, agradezco a mi asesor, el Dr. Jorge A. León, por brindarme la oportunidad de trabajar en el desarrollo de esta disertación y por haber dirigido mis tesis desde la licenciatura. Sus regaños, consejos y observaciones fueron indispensables para la culminación de estos trabajos. A pesar de haber caído en tantas ocasiones, me sigo levantando y aprendiendo
de mis errores, usted ha sabido guiarme por un mejor camino.

Al Dr. David Márquez Carreras por trabajar conjuntamente con nosotros.

Al Departamento de Control Automático del Cinvestav-IPN y al proyecto CONACyT 220303.

A mis padres, por haberme apoyado de manera continua, de ustedes comprendí cómo ser cada día más fuerte y a seguir desarrollándome intelectualmente.

A Joshua y Brian, mis hermanos queridos, gracias a ustedes he aprendido a no darme por vencido y a luchar por mis sueños.

A Vitus, por seguir mis pasos durante mis estudios profesionales y de posgrado, me has mostrado como continuar con mi sendero a pesar del distanciamiento que he mostrado hacia tu persona por continuar con mi especialización.

A mis amigos de dentro y fuera del Cinvestav-IPN, su apoyo fue indispensable para poder seguir con mis estudios, valoro sus consejos y aprecio su compañía.

A todos los profesores con los que tuve la oportunidad de tomar cursos de posgrado.

**Resumen**

Obtenemos la forma cerrada de la solución de una ecuación integra lineal de Volterra gobernada por un ruido aditivo Hölder continuo, que es una integral fraccionaria en el sentido de Young, y con una función como condición inicial. Esta solución es dada en términos de funciones de Mittag-Leffler y a continuación estudiamos su estabilidad via el cálculo fraccionario. Como una aplicación analizamos la estabilidad en media de algunas ecuaciones integrales fraccionarias con un funcional del movimiento browniano fraccionario como un ruido aditivo. Adicionalmente, extendemos estos resultados al caso en que la ecuación involucrada es semilineal.

# Índice general

# Introducción

Hay una gran gama de aplicaciones del cálculo fraccionario a diferentes áreas del conocimiento humano, como ingeniería, física, química, etc. (ver, por ejemplo [14], [33] y [7]). Entre estas podemos mencionar aplicaciones a viscoelasticidad [4], análisis de procesos de electrodos [15] y sistemas de Lorenz [13]. Actualmente, los sistemas fraccionarios (i.e., ecuaciones que tienen derivadas y/o integrales fraccionarias) han sido estudiados por diversos autores, entre ellos podemos mencionar Hilfer [14], Kilbas et al. [17], Miller y Ross [26], Podlubny [33], Samko et al. [37], Martínez-Guerra et al. [24], etc. En particular, la estabilidad para sistemas fraccionarios con condición inicial constante ha sido considerada. En el caso determinista, la estabilidad de sistemas lineales ha sido analizada por Matignon [23] y la estabilidad de sistemas fraccionarios no lineales ha sido estudiada por varios autores vía el método de Lyapunov (ver, por ejemplo Li et al. [20] y sus referencias). Particularmente, sistemas fraccionarios no lineales con una función como condición inicial haciendo uso también de las técnicas de Lyapunov han sido analizados en la tesis doctoral de Martínez-Martínez [25]. Más aún, Junsheng et al. [16] dan la forma de la solución para una ecuación lineal fraccionaria (en dimensión uno) con condición inicial constante usando el método de descomposición de Adomian (ver también [26]). Observemos que el Lema 1.3.2 abajo es una extensión de los resultados establecidos en [16].

La estabilidad de sistemas estocásticos gobernados por el movimiento browniano ha sido también examinada. Por ejemplo, Applebay y Freeman [2] dan la equivalencia entre convergencia exponencial casi segura y convergencia exponencial en el $p$-ésimo momento a cero de ecuaciones integro diferenciales con un ruido integral de Itô y núcleo continuo. Para hacer esto, la solución es dada en términos de la matriz principal o solución fundamental del sistema. Este método es similar al de Adomian. Las técnicas de la función de Lyapunov se han utilizado para tratar la estabilidad en probabilidad de ecuaciones integrales de Itô-Volterra (ver Li et al. [21]), con cierto criterio de estabilidad estocástico para ecuaciones integro diferenciales estocásticas con retraso infinito (ver Zhang y Li [43]) y con estabilidad condicional de ecuaciones del tipo Skorohod Volterra con núcleo anticipante (ver Zhang y Zhang

[44]). La estabilidad en media cuadrática para ecuaciones de Itô-Volterra con una función como condición iniclal y núcleos acotados ha sido establecida por Bao [5] haciendo uso del lema de Gronwall.

Por otro lado, el movimiento browniano fraccionario (mbf) $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso gaussiano con incrementos estacionarios y es el único que es autosimilar (con índice $H \in (0,1)$). Como $B$ no es una semimartingala para $H \neq 1/2$, no podemos aplicar el cálculo clásico de Itô. Esto es, necesitamos otro enfoque para trabajar con él, como integración de Young (ver, por ejemplo Gubinelli [12], Young [40], Friz y Hairer [11], Zähle [41], Dudley y Norvaiša [9] y Lyons [22]). El movimiento browniano fraccionario tiene muchas aplicaciones debido a sus propiedades; por ejemplo tiene memoria larga para $H > 1/2$ e intermitencia para $H < 1/2$ (ver Nualart [29]). Por lo tanto, el análisis de ecuaciones diferenciales estocásticas gobernadas por un mbf es considerado estos días por diversos autores (ver, e.g. Lyons [22], Quer-Sardanyons y Tindel [34], León y Tindel [19], Nualart [29], y Nualart y Răşcanu [31]). En este trabajo usamos las integrales de Young y de Skorohod (ver Young [40] y Nualart [30]).

Zeng et al. [45] probaron la estabilidad en probabilidad y la estabilidad exponencial en media para ecuaciones diferenciales estocásticas gobernadas por el movimiento browniano fraccionario con parámetro $H > 1/2$ utilizando las técnicas de la función de Lyapunov. También, Nguyen [28] estableció la estabilidad exponencial para ecuaciones diferenciales estocásticas lineales con retrasos que varían en el tiempo y con un ruido aditivo de la forma $\int_0^{\cdot} \sigma(s) dW_s^H$. Aquí $H > 1/2$,

$$W_t^H = \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW(s),$$

$W$ es el movimiento browniano ordinario y $\sigma$ es una función determinista tal que $\int_0^\infty \sigma^2(s) e^{2\lambda s} ds < \infty$, para algún $\lambda > 0$. Para este fin, el autor usa que la solución puede ser representada en términos de la solución fundamental.

Hay que recalcar que la herramienta básica utilizada en este trabajo fue construida en [10], donde se analizó la estabilidad de sistemas fraccionarios estocásticos gobernados por una integral de Young, y se probaron resultados con respecto a tal integral.

En esta tesis aplicamos el método de descomposición de Adomian para obtener una expresión en términos de las funciones de Mittag-Leffler, de sistemas fraccionarios con un ruido aditivo que podría ser un funcional del mbf y con una función como la condición inicial. Entonces, la estabilidad de estos sistemas (que podrían ser aleatorios) se analiza aplicando las técnicas de la integración estocástica basadas en las integrales de Young y de Skorohod. Es decir, estudiamos la estabilidad de alguna soluciones continuas de ecuaciones de la forma

$$X(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}[AX(s) + h(X(s))]ds + Z_t, \quad t \geq 0, \qquad (1)$$

donde $\beta \in (0,1)$, $A < 0$, $\xi$ es la condición inicial, $h$ es una función y $Z$ es la integral de Young

$$Z_t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d\theta_s,$$

con $\Gamma$ la función Gamma, $\alpha \in (1,2)$ y $\theta$ es un proceso Hölder continuo que podría representar las trayectorias de un funcional del mbf (inclusive $\xi$ puede ser aleatoria), como lo hacemos en la Proposición 4.3.5 abajo.

A diferencia de otros trabajos, donde la condición inicial es una constante, pensamos que es importante tener a un proceso como condición inicial debido a la memoria del sistema. Consecuentemente, podemos considerar a $Z$ en (1) como una corrección del desconocimiento que podríamos tener.

La tesis está organizada como sigue. La herramienta que necesitamos para probar nuestros resultados se encuentra en el Capítulo 1. En particular, probamos ciertas propiedades de la integral de Young que necesitamos para algunos de nuestros teoremas y obtenemos la forma de la solución de la ecuación lineal (i.e. $h(x) \equiv 0$ en (1)). En el Capítulo 2 analizamos la estabilidad de tal forma cerrada cuando el ruido es nulo. En el Capítulo 3 también consideramos la estabilidad de sistemas de orden fraccionario con una función que puede ser un proceso como condición inicial y con un ruido que podría ser una integral fraccionaria en el sentido de Young con respecto al movimiento browniano fraccionario. Finalmente, en el Capítulo 4 extendemos los resultados vistos en los capítulos anteriores para una ecuación integral fraccionaria con representación (1) (i.e. $h \neq 0$). Por otro lado, con el propósito de hacer más sencilla la lectura, en los resultados de otros investigadores están incluidas las referencias pertinentes en cada enunciado y los resultados propios no tienen tal anotación.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo damos la herramienta que necesitamos para poder trabajar con algunos sistemas fraccionarios a lo largo de este trabajo.

## 1.1. La función de Mittag-Leffler

Una herramienta importante del cálculo fraccionario es la función de Mittag-Leffler. Puede consultarse el libro de Podlubny [33] para ver una descripción más detallada sobre este mapeo. En este apartado enunciamos las propiedades que usamos. La definimos como

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ka+b)}, \quad a,b>0, \text{ y } z \in \mathbb{R},$$

donde $\Gamma$ es la función Gamma.

Una función $f$ definida en $(0,\infty)$ se dice ser completamente monotóna si posee derivadas $f^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y si

$$(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0$$

para todo $t > 0$ (ver [27] y [38]). Una propiedad útil de la función de Mittag-Leffler es que, para $z \geq 0$ y $a, b > 0$, $E_{a,b}(-z)$ es completamente monotóna si y sólo si $a \in (0,1]$ y $b \geq a$ (ver Schneider [38]). En Podlubny [33] (Teorema 1.6), se prueba que si $a < 2$ existe una constante positiva $C_{a,b}$ tal que

$$\Big|E_{a,b}(z)\Big| \leq \frac{C_{a,b}}{1+|z|}, \quad z \leq 0. \tag{1.1}$$

Utilizaremos también el siguiente hecho sobre diferenciabilidad para esta función (ver (1.83) en [33]):

$$\frac{d}{dt}\left(t^{b-1}E_{a,b}(\lambda t^a)\right) = t^{b-2}E_{a,b-1}(\lambda t^a), \quad a, b > 0, \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

También, para $b > 0$ (ver igualdad (1.99) en [33]), tenemos

$$\int_0^z s^{b-1}E_{a,b}(\lambda s^a)ds = z^b E_{a,b+1}(\lambda z^a). \tag{1.3}$$

## 1.2. La integral de Young

En este apartado usaremos las definiciones y resultados desarrollados en Gubinelli [12]. Estos han sido utilizados, por ejemplo, en León y Tindel [19] y Quer-Sardanyons y Tindel [34], y tratan sobre la integral de Young construida con un método algebraico.

Para un número real arbitrario $T > 0$, y $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ denotamos por $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones continuas $g : [0,T]^k \to \mathbb{R}$ tales que $g_{t_1 \cdots t_k} = 0$ siempre que $t_i = t_{i+1}$ para algún $i \leq k-1$. Dicha función se llamará un $(k-1)$-incremento (o simplemente incremento). Note que $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ es la familia de todas las funciones continuas de $[0,T]$ en $\mathbb{R}$. Escribimos $\mathcal{C}_*(\mathbb{R}) = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$.

**Definición 1.2.1.** *Sea $\delta : \mathcal{C}_k(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{k+1}(\mathbb{R})$ el operador que satisface*

$$(\delta g)_{t_1 \cdots t_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k-i} g_{t_1 \cdots \hat{t}_i \cdots t_{k+1}},$$

*el símbolo $\hat{t}_i$ significa que este argumento en particular es omitido.*

Por ejemplo, sean $g \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ y $h \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$. Para cualesquiera $s, u, t \in [0,T]$ tenemos

$$(\delta g)_{st} = g_t - g_s \quad y \quad (\delta h)_{sut} = h_{st} - h_{su} - h_{ut}.$$

Además

$$(\delta(\delta g))_{sut} = g_t - g_s - (g_u - g_s) - (g_t - g_u) = 0.$$

Denotamos por $\mathcal{ZC}_k(\mathbb{R}) := \mathcal{C}_k(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}\delta = \{g \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R}) : \delta g = 0\}$, para cualquier $k \geq 1$ y $\mathcal{BC}_k(\mathbb{R}) := \mathcal{C}_k(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Im}\delta = \{g \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R}) : g = \delta f \text{ con } f \in \mathcal{C}_{k-1}(\mathbb{R})\}$, y $k \geq 2$.

**Lema 1.2.2** ([19])**.** *Sea $k \geq 1$ y $h \in \mathcal{ZC}_{k+1}(\mathbb{R})$. Entonces existe una $f \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ (no necesariamente única) tal que $h = \delta f$.*

Esto implica, en particular, que todos los elementos $h \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ tales que $\delta h = 0$ se pueden escribir como $h = \delta f$ para alguna $f \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ (no necesariamente única).

Introducimos ahora un nexo importante entre esta estructura algebraica y la teoría de integración: sean $f$ y $g$ dos funciones suaves y real valuadas en $[0, T]$. Definimos entonces $I \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ por

$$I_{st} = \int_s^t df_u \int_s^u dg_w, \text{ para } s, t \in [0, T]. \tag{1.4}$$

Usando que

$$\int_u^t df_r = f_t - f_u = (\delta f)_{ut} \quad \text{y} \quad \int_s^u dg_w = g_u - g_s = (\delta g)_{su},$$

obtenemos

$$(\delta I)_{sut} = [f_t - f_u][g_u - g_s] = (\delta f)_{ut}(\delta g)_{su}. \tag{1.5}$$

Esta propiedad es útil: $\delta$ transforma integrales iteradas en productos de incrementos, de este modo podemos aprovechar las regularidades de $f$ y $g$ a partir de productos de la forma $\delta f \delta g$.

Para el propósito de nuestro estudio necesitamos discutir propiedades sobre los $k$-incrementos, incluyendo la noción de acotamiento para estas clases de funciones. Para $k \leq 2$, medimos la longitud de estos incrementos gracias a normas del tipo Hölder, es decir, si $0 < a_1 \leq a_2 \leq T$ y $f \in \mathcal{C}_2([a_1, a_2]; \mathbb{R})$, sean

$$||f||_{\mu,[a_1,a_2]} := \sup_{r,t \in [a_1,a_2], r \neq t} \frac{|f_{rt}|}{|t-r|^{\mu}}$$

y

$$\mathcal{C}_2^{\mu}([a_1, a_2]; \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) : ||f||_{\mu,[a_1,a_2]} < \infty\}.$$

Aquí los espacios de Hölder $\mathcal{C}_1^{\mu}([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ se determinarán para funciones $g \in \mathcal{C}_1([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ con norma

$$||g||_{\mu,[a_1,a_2]} := ||\delta g||_{\mu,[a_1,a_2]},$$

y equivalentemente decimos que $g \in \mathcal{C}_1^{\mu}([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ si y sólo si $||g||_{\mu,[a_1,a_2]}$ es finita. Observemos que $|| \cdot ||_{\mu,[a_1,a_2]}$ es solamente una seminorma en el espacio $\mathcal{C}_1^{\mu}([a_1, a_2]; \mathbb{R})$.

Análogamente, para una función $h \in \mathcal{C}_3([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ tenemos que

$$||h||_{\gamma,\rho,[a_1,a_2]} = \sup_{s,u,t \in [a_1,a_2]} \frac{|h_{sut}|}{|u-s|^{\gamma}|t-u|^{\rho}}, \tag{1.6}$$

y

$$||h||_{\mu,[a_1,a_2]} = \text{ínf}\left\{ \sum_i ||h_i||_{\rho_i,\mu-\rho_i} : h = \sum_i h_i, 0 < \rho_i < \mu \right\}, \tag{1.7}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones $\{h_i \in \mathcal{C}_3(\mathbb{R})\}$ tales que $h = \sum_i h_i$ y para todas las elecciones de los números $\rho_i \in (0, \mu)$. Por lo anterior $|| \cdot ||_{\mu,[a_1,a_2]}$ es una norma en $\mathcal{C}_3([a_1, a_2]; \mathbb{R})$, y escribimos

$$\mathcal{C}_3^{\mu}([a_1, a_2]; \mathbb{R}) := \{h \in \mathcal{C}_3([a_1, a_2]; \mathbb{R}) : ||h||_{\mu,[a_1,a_2]} < \infty\}.$$

Introducimos ahora los espacios $\mathcal{C}_3^{1+}([a_1, a_2]; \mathbb{R}) := \bigcup_{\mu>1} \mathcal{C}_3^{\mu}([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ y $\mathcal{ZC}_3^{1+}\ ([a_1, a_2]; \mathbb{R}) = \mathcal{C}_3^{1+} \cap \mathrm{Ker}\delta$.

Suponga que $f$ y $g$ son suaves, en tal caso la integral de $f$ con respecto a $g$ puede ser definida en el sentido de Lebesgue-Stieltjes y luego se expresará en términos del operador inverso de $\delta$, denotado por $\Lambda$ que se define como sigue.

**Proposición 1.2.3** ([12]). *Sea $0 \le a_1 < a_2 \le T$. Entonces tenemos:*

1. *Existe un único mapeo lineal $\Lambda : \mathcal{ZC}_3^{1+}([a_1, a_2]; \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_2^{1+}([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ tal que $\delta\Lambda = \quad Id_{\mathcal{ZC}_3^{1+}([a_1,a_2];\mathbb{R})}$. Adicionalmente, para cualquier $\mu > 1$ y*

$h \in \mathcal{Z}\mathcal{C}_3^{\mu}([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ *obtenemos*

$$||\Lambda h||_{\mu,[a_1,a_2]} \leq \frac{1}{2^{\mu} - 2}||h||_{\mu,[a_1,a_2]}.$$

2. *Para* $g \in \mathcal{C}_2([a_1, a_2], \mathbb{R})$ *tal que* $\delta g \in \mathcal{C}_3^{1+}$, *sea* $h = (Id - \Lambda\delta)g$. *Entonces, existe* $f \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ *tal que* $h = \delta f$. *Más aún*

$$h_{st} = (\delta f)_{st} = \lim_{|\Pi_{st}| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i t_{i+1}},$$

*donde el límite es sobre cualquier partición* $\Pi_{st} = \{t_0 = s, \ldots, t_n = t\}$ *de* $[s, t]$, *cuya norma tiende a cero.*

La interpretación del Enunciado *1* es que, para cualquier $h \in \mathcal{C}_3^{1+}([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ tal que $\delta h = 0$ existe un único $\psi = \Lambda(h) \in \mathcal{C}_2^{1+}([a_1, a_2]; \mathbb{R})$ que satisface $\delta\psi = h$.

Una propiedad del operador $\delta$ se da a continuación.

**Lema 1.2.4** ([19])**.** *Para el mapeo* $\delta\delta : \mathcal{C}_k(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{k+2}(\mathbb{R})$, *se tiene*

$$\delta\delta = 0.$$

*Demostración* Es inmediata de la definición de $\delta$.

□

La notación y las definiciones dadas antes son con la intención de poder introducir una integral generalizada $\int_s^t f_u dg_u$, con $f \in \mathcal{C}_1^{\kappa}([0, T]; \mathbb{R})$,

$g \in \mathcal{C}_1^{\gamma}([0,T];\mathbb{R})$ y $\kappa + \gamma > 1$ por medio de la herramienta algebraica que se presentó en esta sección. Planteamos la metodología que seguiremos de esta manera: supondremos de primera instancia que $f$ y $g$ son funciones suaves, por lo que se puede definir su integral en el sentido de Lebesgue-Stieltjes, luego procederemos a escribirla en términos del operador $\Lambda$. Con este procedimiento llegaremos a una extensión de la noción de integral que coincidirá con la de Young dada en [40].

Para identificar más fácilmente que estamos trabajando con integrales que representaremos a partir de la nomenclatura de este apartado, escribiremos $\mathcal{J}_{st}(fdg)$ en vez de $\int_s^t f_u dg_u$. Procedamos entonces como se dijo anteriormente. Sean $f$ y $g$ dos funciones suaves definidas en un intervalo $[0,T]$, en este caso, la integral sería

$$\int_s^t f(u)g'(u)du.$$

Podemos escribir esto como

$$\mathcal{J}_{st}(fdg) \equiv \int_s^t f_u dg_u = f_s(\delta g)_{st} + \int_s^t (\delta f)_{su} dg_u = f_s(\delta g)_{st} + \mathcal{J}_{st}(\delta f dg). \quad (1.8)$$

Analizando el término $\mathcal{J}(\delta f dg) \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ que aparece en (1.8), en vista de

(1.4) y (1.5), vemos que, para $s, u, t \in [0, T]$,

$$h_{sut} \equiv [\delta(\mathcal{J}(\delta f dg))]_{sut} = (\delta f)_{su}(\delta g)_{ut}.$$

Por lo que $h$ es un elemento de $\mathcal{C}_3(\mathbb{R})$ con $\delta h = 0$ (debido al Lema 1.2.4). Nótese que, si $f \in \mathcal{C}_1^{\kappa}([0,T];\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{C}_1^{\gamma}([0,T];\mathbb{R})$, en vista de (1.6) y (1.7), se sabe que $h \in \mathcal{C}_3^{\gamma+\kappa}(\mathbb{R})$, por lo que se ha comprobado la regularidad de $h$. Por lo tanto $h \in \mathcal{ZC}_3^{\kappa+\gamma}(\mathbb{R})$, si $\kappa + \gamma > 1$, que es el caso cuando las funciones $f$ y $g$ son regulares. Por lo anterior (Proposición 1.2.3), la expresión $\mathcal{J}(\delta f dg)$ se puede reescribir como

$$\mathcal{J}(\delta f dg) = \Lambda(h) = \Lambda(\delta f \delta g),$$

relacionando esto con (1.8), se obtiene

$$\mathcal{J}_{st}(f dg) = f_s(\delta g)_{st} + \Lambda_{st}(\delta f \delta g). \tag{1.9}$$

Observemos que el lado derecho de (1.9) está rigurosamente definido siempre que el incremento $f$ sea un elemento de $\mathcal{C}_1^{\kappa}([0,T];\mathbb{R})$ y el incremento $g$ de $\mathcal{C}_1^{\gamma}([0,T];\mathbb{R})$, con $\gamma + \kappa > 1$. Usaremos el siguente resultado para establecer nuestra noción de integral.

**Teorema 1.2.5** ([19]). *Sean $f \in \mathcal{C}_1^{\kappa}([0,T];\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{C}_1^{\gamma}([0,T];\mathbb{R})$, donde $\kappa + \gamma > 1$, y definamos*

$$\mathcal{J}_{st}(fdg) := f_s(\delta g)_{st} + \Lambda_{st}(\delta f \delta g).$$

*Entonces*

*(1) Siempre que $f$ y $g$ son suaves, $\mathcal{J}_{st}(fdg)$ coincide con la integral clásica de Riemann-Stieltjes.*

*(2) La integral generalizada $\mathcal{J}(fdg)$ satisface*

$$|\mathcal{J}_{st}(fdg)| \leq ||f||_{\infty,[s,t]}||g||_{\gamma,[s,t]}|t-s|^{\gamma} + c_{\gamma,\kappa}||f||_{k,[s,t]}||g||_{\gamma,[s,t]}|t-s|^{\gamma+\kappa},$$

*con $c_{\gamma,k} = (2^{\gamma+\kappa} - 2)^{-1}$.*

*(3) Tenemos*

$$\mathcal{J}_{st}(fdg) = \lim_{|\Pi_{st}|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i}\delta g_{t_i t_{i+1}},$$

*donde el límite es sobre cualquier partición $\Pi_{st} = \{t_0 = s, \ldots, t_n = t\}$ de $[s,t]$, cuya norma tiende a cero. En particular, $\mathcal{J}_{st}(fdg)$ coincide con la integral de Young.*

Note que el resultado anterior se sigue directamente de la Proposición 1.2.3. Este teorema es importante porque da una relación entre las sumas de

Riemann-Stieltjes y la integral de Young, además provee una estimación para $\mathcal{J}$, por lo que podemos controlar las convergencias de las integrales definidas de esta manera, como lo hacemos en algunas pruebas en esta sección. Es importante recalcar que esta integral ha sido extendida en diferentes direcciones por Zähle [41], Gubinelli [12], Lyons [22], Friz y Hairer [11], etc.

El siguiente resultado es una versión del teorema de Fubini para la integral de Young.

**Lema 1.2.6.** *(Teorema del tipo Fubini) Sea $\{\theta_s, s \leq t\}$ una función $\gamma$-Hölder continua y $\beta > 0$. Entonces, para $\varrho > 1$ tal que $\varrho + \gamma - 2 > 0$, obtenemos*

$$\frac{1}{\Gamma(\varrho+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\varrho+\beta-1} d\theta_s = \frac{1}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-r)^{\beta-1} \int_0^r (r-s)^{\varrho-1} d\theta_s dr. \tag{1.10}$$

*Observación* Note que las integrales en (1.10) están bien definidas debido a que $\varrho - 1 + \gamma > 1$.

**Demostración** Sea $\Pi_{0t} = \{s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = t\}$ una partición finita del intervalo $[0,t]$ tal que $|\Pi_{0t}| \to 0$. Entonces del Teorema 1.2.5 se tiene que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\varrho+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\varrho+\beta-1} d\theta_s \\ &\quad = \lim_{|\Pi_{0t}|\to 0} \left( \frac{1}{\Gamma(\varrho+\beta)} \sum_{i=0}^{n-1} (t-s_i)^{\varrho+\beta-1} (\theta_{s_{i+1}} - \theta_{s_i}) \right).\end{aligned}$$

Recuerde que

$$\int_{\tau}^{t}(t-u)^{a-1}(u-\tau)^{b-1}du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}(t-\tau)^{a+b-1}, \quad a,b>0. \tag{1.11}$$

Por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\varrho+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\varrho+\beta-1}d\theta_s \\
&\quad= \lim_{|\Pi_{0t}|\to 0}\left(\frac{1}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\beta)}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{s_i}^{t}(t-r)^{\beta-1}(r-s_i)^{\varrho-1}dr(\theta_{s_{i+1}}-\theta_{s_i})\right)\\
&\quad= \lim_{|\Pi_{0t}|\to 0}\left(\frac{1}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-r)^{\beta-1}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\left(\sum_{i=0}^{n-1}1_{[s_i,t]}(r)(r-s_i)^{\varrho-1}(\theta_{s_{i+1}}-\theta_{s_i})\right)dr\right)\\
&\quad= \lim_{|\Pi_{0t}|\to 0}\left(\frac{1}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-r)^{\beta-1}\sum_{s_i\le r}(r-s_i)^{\varrho-1}(\theta_{s_{i+1}}-\theta_{s_i})dr\right).
\end{aligned}$$

Del Teorema 1.2.5 tenemos que, para algún $i_0\in\{0,\dots,n-1\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{s_i\le r}(r-s_i)^{\varrho-1}(\theta_{s_{i+1}}-\theta_{s_i}) &= \mathcal{J}_{0r}((r-\cdot)^{\varrho-1}d\theta)\\
&\quad-\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Lambda(\delta(r-\cdot)^{\varrho-1}\delta\theta)_{s_i\wedge r,s_{i+1}\wedge r}\right)\\
&\quad+(r-s_{i_0})^{\varrho-1}(\theta_{s_{i_0+1}}-\theta_r)1_{(s_{i_0},s_{i_0+1}]}(r).
\end{aligned}$$

Analicemos los últimos dos sumandos de la igualdad anterior. Usando que $\varrho-1>0$ y las condiciones sobre $\theta$ se tiene

$$|(r-s_{i_0})^{\varrho-1}(\theta_{s_{i_0+1}}-\theta_r)1_{(s_{i_0},s_{i_0+1}]}(r)|\longrightarrow 0$$

si $|\Pi_{0t}| \to 0$. Note que las propiedades de los operadores $\Lambda$ y $\delta$ (ver Proposición 1.2.3) nos permiten escribir, para algún $C > 0$,

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \Big( \Lambda(\delta(r-\cdot)^{\varrho-1}\delta\theta)_{s_i\wedge r, s_{i+1}\wedge r} \Big) \right| \le C||\theta||_{\gamma,[0,t]} \sum_{k=0}^{n} |s_{i+1}-s_i|^{\varrho-1+\gamma},$$

en vista de que $\varrho - 1 + \gamma > 1$ esta cantidad es acotada y converge a cero si $|\Pi_{0t}| \to 0$. Entonces, el teorema de convergencia dominada implica que la igualdad (1.10) es cierta.

□

Necesitamos el siguiente lema.

**Lema 1.2.7.** *Sean $f \in \mathcal{C}_1^\tau([0,t])$, $g \in \mathcal{C}_1^\lambda([0,t])$ y $\theta \in \mathcal{C}_1^\gamma([0,t])$, donde $\tau, \lambda, \gamma \in (0,1)$ y $\tau + \gamma, \lambda + \gamma \in (1,2)$. También sea $\tilde{\theta} = \int_0^\cdot g(s)d\theta_s$ en $[0,t]$. Entonces*

$$\int_0^t f(s)d\tilde{\theta}_s = \int_0^t f(s)g(s)d\theta_s.$$

**Demostración** Sea $\Pi_{0t} = \{s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = t\}$ una partición finita del intervalo $[0,t]$. Entonces, por la Proposición 1.2.3 (Enunciado 2) existe una constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)(\tilde{\theta}_{s_{k+1}} - \tilde{\theta}_{s_k}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)g(s_k)(\theta_{s_{k+1}} - \theta_{s_k})\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\int_{s_k-1}^{s_{k+1}} g(s)d\theta_s - \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\int_{s_k-1}^{s_{k+1}} g(s_k)d\theta_s\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\int_{s_k}^{s_{k+1}} (g(s)-g(s_k))d\theta_s\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\Lambda_{s_k,s_{k+1}}(\delta g\delta\theta)\right| \\
&\leq C||f||_\infty \sum_{k=0}^{n-1} |s_{k+1}-s_k|^{\lambda+\gamma} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

si $|\Pi_{0t}| \to 0$. El resultado se sigue de esto y del Teorema 1.2.5 (Inciso 3).

□

Ahora damos un criterio de convergencia de la integral de Young.

**Lema 1.2.8.** *Sean $\theta$ una función $\gamma$-Hölder continua en $[0,t]$, $A \in \mathbb{R}$, $\varrho \in (1,2)$ y $\beta > 0$ de manera que $\varrho + \gamma - 2 > 0$. Entonces tenemos*

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\varrho)} \int_0^t (t-s)^{k\beta+\varrho-1} d\theta_s = \int_0^t (t-s)^{\varrho-1} E_{\beta,\varrho}(A(t-s)^\beta) d\theta_s. \tag{1.12}
$$

*Observación* 1.2.9. Note que la última integral en el lado derecho de (1.12) está bien definida. En efecto, sea $k_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $k\beta+\varrho-1 \leq 1$ para $k \leq k_0$, y $k\beta+\varrho-1 > 1$ para $k > k_0$. Entonces, para $s, \tilde{s} \in [0,t]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&|(t-s)^{\varrho-1}E_{\beta,\varrho}(A(t-s)^{\beta})-(t-\tilde{s})^{\varrho-1}E_{\beta,\varrho}(A(t-\tilde{s})^{\beta})| \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0}\frac{|A|^k|s-\tilde{s}|^{k\beta+\varrho-1}}{\Gamma(k\beta+\varrho)}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{|A|^k|(t-s)^{k\beta+\varrho-1}-(t-\tilde{s})^{k\beta+\varrho-1}|}{\Gamma(k\beta+\varrho)} \\
&= I_1+I_2. \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

Note que

$$
I_1 \leq |s-\tilde{s}|^{\varrho-1}\sum_{k=0}^{k_0}\frac{(|A|t^{\beta})^k}{\Gamma(k\beta+\varrho)} \leq |s-\tilde{s}|^{\varrho-1}E_{\beta,\varrho}(|A|t^{\beta}). \qquad (1.14)
$$

Ahora, del teorema del valor medio tenemos

$$
I_2 \leq |s-\tilde{s}|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{|A|^k(k\beta+\varrho-1)t^{k\beta+\varrho-2}}{\Gamma(k\beta+\varrho)} \leq |s-\tilde{s}|t^{\varrho-2}E_{\beta,\varrho-1}(|A|t^{\beta}).
$$

Por lo tanto (1.13) y (1.14) implican nuestra afirmación debido a que $\gamma+\varrho-1>1$.

**Demostración del Lema 1.2.8** Escribimos, para $m\in\mathbb{N}$, la función

$$
f_m(s)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\varrho)}(t-s)^{k\beta+\varrho-1}, \quad s\in[0,t].
$$

Para probar nuestro resultado, solamente necesitamos observar que, para $m$ suficientemente grande

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\leq t}|f_m(s)| &= \sup_{s\leq t}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\varrho)}(t-s)^{k\beta+\varrho-1}\right| \\
&\leq t^{\varrho-1}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|A|^k t^{k\beta}}{\Gamma(k\beta+\varrho)} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

si $m \to \infty$, y análogamente

$$\sup_{s\le t}|f'_m(s)| = \sup_{s\le t}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{A^k(k\beta+\varrho-1)}{\Gamma(k\beta+\varrho)}(t-s)^{k\beta+\varrho-2}\right|$$
$$\le t^{\varrho-2}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|A|^k t^{k\beta}}{\Gamma(k\beta+\varrho-1)} \longrightarrow 0$$

si $m \to \infty$. Este procedimiento, la definición de la función de Mittag-Leffler y el Teorema 1.2.5 implican el resultado.

□

Necesitamos el siguiente lema para poder probar estabilidad de algunas ecuaciones gobernadas por el mbf (ver Teorema 3.2.6 abajo).

Sea $I$ un intervalo. Sea $C^1(I)$ la clase de funciones diferenciables en $I$.

**Lema 1.2.10.** *Sean $\tau, \gamma \in (0,1)$ tal que $\tau+\gamma > 1$. Suponga que $\theta \in C_1^{\gamma}([0,t])$ y $h \in C^1((0,t)) \cap C_1^{\tau}([0,t])$ es tal que $\dot{h} \in L^1([0,t])$ y $h(0) = 0$. Entonces,*

$$\int_0^t h(t-s)d\theta_s = \int_0^t \dot{h}(s)(\theta_{t-s}-\theta_0)ds.$$

**Demostración** Sea $\Pi_{0t} = \{s_0 = 0, \ldots, s_n = t\}$ una partición finita del intervalo $[0,t]$. Usando las hipótesis de $\theta$ y $h$, y el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^t h(t-s)d\theta_s &= \lim_{|\Pi_{0t}|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} h(t-s_k)(\theta_{s_{k+1}}-\theta_{s_k})\\ &= \lim_{|\Pi_{0t}|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{t-s_k}\dot{h}(s)ds\right)(\theta_{s_{k+1}}-\theta_{s_k})\\ &= \lim_{|\Pi_{0t}|\to 0}\int_0^t \dot{h}(s)\sum_{k=0}^{n-1} 1_{[0,t-s]}(s_k)(\theta_{s_{k+1}}-\theta_{s_k})ds.\end{aligned}$$

Observemos que la suma en la última igualdad es telescópica, de este modo

$$\int_0^t h(t-s)d\theta_s = \int_0^t \dot{h}(s)(\theta_{t-s}-\theta_0)ds.$$

Aquí, en lado derecho de la expresión anterior hemos usado el teorema de convergencia dominada.

□

En lo que sigue de este apartado introducimos algunos conceptos adicionales que necesitamos para definir la *integral hacia adelante* como lo hicieron Russo y Vallois [36], y veremos el caso cuando ésta coincide con la integral de Young. En el siguiente resultado suponemos que todos los procesos están definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

**Definición 1.2.11.** *Una familia de procesos estocásticos medibles* $\{M_t^{(\epsilon)}\}_{t\in[0,T]}$ *converge uniformemente a un proceso límite* $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ *en probabilidad en*

$[0, T]$ *si*

$$P\Big(\sup_{t\in[0,T]} |M_t^{(\epsilon)} - M_t| > \epsilon\Big) \to 0,$$

*si* $\epsilon \to 0$.

En la literatura abrevian este tipo de convergencia diciendo que la familia de procesos converge en el sentido **ucp**.

**Definición 1.2.12.** *Un proceso* $Y$ *tal que satisface que, para cualquier* $a > 0$,

$$\int_0^a |Y_t| dt < \infty, \quad \text{c.s.},$$

*se dice pertenecer a la clase* $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Sean $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso continuo y $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ un proceso con trayectorias en $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Escribimos

$$I^-(\epsilon, Y, dX)(t) := \int_0^t Y_s \frac{X_{s+\epsilon} - X_s}{\epsilon} ds, \quad t \geq 0 \text{ y } \varepsilon > 0.$$

**Definición 1.2.13.** *Suponiendo que el siguiente límite en el sentido* **ucp** *existe, definimos a la integral hacia adelante como*

$$\int_0^t Y d^- X := \lim_{\epsilon\to 0^+} I^-(\epsilon, Y, dX)(t)$$

El siguiente resultado da la relación entre la integral de Young y la integral hacia adelante.

**Proposición 1.2.14** ([36]). *Sean $X$ y $Y$ dos procesos con trayectorias en $\mathcal{C}_1^{\alpha}([0,t])$ y $\mathcal{C}_1^{\beta}([0,t])$ casi seguramente, respectivamente, con $\alpha+\beta>1$ y $\alpha,\beta>0$. Entonces, la integral hacia adelante $\int_0^{\cdot} Y d^- X$ coincide con la de Young.*

## 1.3. Forma cerrada de la solución de ecuaciones lineales del tipo Volterra

Consideremos la ecuación lineal de Volterra

$$X(t)=\xi_t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}AX(s)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}d\theta_s, \quad t\geq 0. \tag{1.15}$$

Aquí, la condición inicial $\xi=\{\xi_t, t\geq 0\}$ es acotada en conjuntos compactos y es una función medible, $\beta\in(0,1)$, $A\in\mathbb{R}$ es una constante arbitraria, $\alpha\in(1,2)$ y $\theta=\{\theta_s, s\geq 0\}$ es una función $\gamma$-Hölder continua con $\gamma\in(0,1)$.

En esta sección obtenemos la representación de la solución de nuestra ecuación (1.15) en términos de funciones de Mittag-Leffler. Es decir, usamos un procedimiento iterativo, el llamado *método de Adomian* para este fin (ver, e.g. Junsheng et al. [16] y Miller y Ross [26]).

Analicemos el siguiente resultado para ver que la ecuación (1.15) tiene una única solución.

**Lema 1.3.1.** *Sean* $\alpha \in (1,2)$ *y* $\theta \in C^{\gamma}([0,T])$, *donde* $\alpha - 1 + \gamma > 1$. *Entonces, la integral*

$$Z_t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d\theta_s, \quad t \geq 0,$$

*es continua en* $[0,T]$.

**Demostración** Sean $t_1, t_2 \in [0,T]$. Sin pérdida de generalidad supongamos $t_1 \leq t_2$. Entonces, el Lemma 1.2.10 implica

$$\begin{aligned}
|Z_{t_2} - Z_{t_1}| &= C_\alpha \left| \int_0^{t_2} s^{\alpha-2}(\theta_{t_2-s} - \theta_0) ds - \int_0^{t_1} s^{\alpha-2}(\theta_{t_1-s} - \theta_0) ds \right| \\
&\leq C_\alpha \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-2} |\theta_{t_2-s} - \theta_0| ds + C_\alpha \int_0^{t_1} s^{\alpha-2} |\theta_{t_2-s} - \theta_{t_1-s}| ds \\
&\leq C_\alpha ||\theta||_{\gamma,[0,T]} \left( T^\gamma \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-2} ds + |t_2 - t_1|^\gamma \int_0^{t_1} s^{\alpha-2} ds \right) \\
&= C(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} + |t_2 - t_1|^\gamma), \quad C_\alpha, C > 0,
\end{aligned}$$

lo que da que el resultado es cierto.

□

Como $\xi$ es acotada y medible en conjuntos compactos, la existencia y unicidad para la solución de la ecuación (1.15) es una consecuencia inmediata de las iteraciones de Picard, de las propiedades de la función de Mittag-Leffler y del Lema 1.3.1, esto es, definimos inductivamente para $n \in \mathbb{N}$

$$X^{(0)} = \xi^Z, \text{ con } \xi_t^Z \equiv \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d\theta_s$$

y

$$X^{(n)}(t) = \xi_t^Z + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} A X^{(n-1)}(s) ds, \quad t \in [0,T].$$

Entonces, como $\xi^Z$ es acotada en $[0,T]$ ($|\xi_s^Z| \leq M$, para todo $t \in [0,T]$, $M > 0$) se tiene que, para $t \in [0,T]$,

$$|X^{(n)}(t) - X^{(m)}(t)| \leq M \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|A|^k t^{k\beta}}{\Gamma(k\beta+1)} \leq M \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|A|^k t^{k\beta}}{\Gamma(k\beta+1)} \longrightarrow 0$$

si $m \to \infty$ (ver también el libro de Podlubny [33]). En particular, si $X(t) = \lim_{m\to\infty} X^{(m)}(t)$, entonces $X$ es una solución de (1.15) y

$$|X(t)| \leq M + M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A|^k t^{k\beta}}{\Gamma(k\beta+1)} = M E_{\beta,1}(|A| t^{\beta}).$$

Así, $X$ es también acotada sobre compactos. Observe que, para probar la unicidad, el procedimiento es análogo a lo hecho anteriormente. Además, si $\xi$ es continua, entonces $X$ también lo es debido al Lema 1.3.1. En efecto, sólo hay que probar $t \mapsto \int_0^t (t-s)^{\beta-1} X(s) ds$ es continua. Supongamos que $t_2 > t_1$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}X(s)ds-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}X(s)ds\Big|\\
&\qquad\le M\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}ds+M\int_0^{t_1}|(t_2-s)^{\beta-1}-(t_1-s)^{\beta-1}|ds\\
&\qquad\le C(t_2-t_1)^{\beta}+C[t_1^{\beta}+(t_2-t_1)^{\beta}-t_2^{\beta}],\quad C>0,
\end{aligned}
$$

lo cual demuestra nuestra afirmación.

Ahora deducimos la forma cerrada de la solución de (1.15).

**Lema 1.3.2.** *Sea $\beta\in(0,1)$, $A\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(1,2)$, $\{\theta_s, s\in[0,T]\}$ una función $\gamma$-Hölder continua con $\gamma\in(0,1)$ y $\gamma+\alpha-1>1$, la condición inicial $\{\xi_s, s\in[0,T]\}$ es una función acotada. Entonces, la ecuación (1.15) tiene la solución*

$$
\begin{aligned}
X(t)=\xi_t+A&\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^{\beta})\xi_s ds\\
&+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^{\beta})d\theta_s,\quad 0\le t\le T.
\end{aligned}
$$

**Demostración** Recuerde que (ver (1))

$$Z_t=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}d\theta_s.$$

Iterando la ecuación (1.15), usando el Lema 1.2.6, la igualdad (1.11), y el teorema de Fubini podemos escribir

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \xi_t + \frac{A}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\xi_s ds + Z_t + \frac{A}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} Z_s ds \\
&\quad + \frac{A^2}{\Gamma(\beta)^2}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{\beta-1}(s-s_1)^{\beta-1}X(s_1)ds_1 ds \\
&= \xi_t + \frac{A}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\xi_s ds + Z_t + \frac{A}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} d\theta_s \\
&\quad + \frac{A^2}{\Gamma(2\beta)}\int_0^t (t-s)^{2\beta-1}X(s)ds. \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

Ahora usamos inducción en $n$. Por lo que podemos suponer que la igualdad

$$
\begin{aligned}
X(t) = \xi_t &+ \sum_{k=1}^n \frac{A^k}{\Gamma(k\beta)}\int_0^t (t-s)^{k\beta-1}\xi_s ds + \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{k\beta+\alpha-1} d\theta_s \\
&+ \frac{A^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)}\int_0^t (t-s)^{(n+1)\beta-1}X(s)ds
\end{aligned}
$$

es cierta. Así, una iteración adicional da

$$
\begin{aligned}
X(t) = \xi_t &+ \sum_{k=1}^n \frac{A^k}{\Gamma(k\beta)}\int_0^t (t-s)^{k\beta-1}\xi_s ds + \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{k\beta+\alpha-1} d\theta_s \\
&+ \frac{A^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)}\int_0^t (t-s)^{(n+1)\beta-1}\xi_s ds \\
&+ \frac{A^{n+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma((n+1)\beta)}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{(n+1)\beta-1}(s-s_1)^{\alpha-1} d\theta_{s_1} ds \\
&+ \frac{A^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)}\frac{A}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{(n+1)\beta-1}(s-s_1)^{\beta-1}X(s_1)ds_1 ds.
\end{aligned}
$$

Procedemos como en (1.16) (i.e., aplicamos el Lema 1.2.6 y usamos el teorema de Fubini), obtenemos

$$X(t) = \xi_t + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A^k}{\Gamma(k\beta)} \int_0^t (t-s)^{k\beta-1} \xi_s ds + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\beta+\alpha-1} d\theta_s$$
$$+ \frac{A^{n+2}}{\Gamma((n+2)\beta)} \int_0^t (t-s)^{(n+2)\beta-1} X(s) ds, \quad t \in [0,T].$$

Así, en la primera suma hacemos el cambio $k-1 = j$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Finalmente, del hecho de que $X$ es una función acotada en $[0,T]$ se deduce que el último sumando converge a cero cuando $n \to \infty$. Entonces, el resultado es una consecuencia inmediata del Lema 1.2.8.

□

*Observación* Note que en vista del procedimiento iterativo de la prueba de este lema podemos tener una ligera generalización del lema de Gronwall en este contexto. Por ejemplo, suponga adicionalmente que $A > 0$, y que

$$X(t) \leq \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} A X(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d\theta_s.$$

Consecuentemente, en este caso, también podemos aplicar la metodología de esta prueba.

## 1.4. Teoremas de existencia y de comparación de ecuaciones integrales

A continuación consideramos ecuaciones integrales de la forma

$$X(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} k(s, X(s)) ds, \quad t \in [0, T], \tag{1.17}$$

donde $\beta \in (0,1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ es la condición inicial y el núcleo $k$ es una función continua. Esto es, damos resultados que garantizan, bajo ciertas condiciones, la existencia de al menos una solución continua de ecuaciones como (1.17).

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Denotamos por $C(\mathcal{A})$ a la familia de funciones continuas en $\mathcal{A}$. Además, escribimos $R_0 := \{(t,x) : t \in [0,a] \text{ y } |x - x_0| \leq b\}$, con $a, b > 0$ finitos. El siguiente resultado es un teorema del tipo Peano, es decir, un teorema de existencia para ecuaciones con representación (1.17).

**Teorema 1.4.1.** *([18]) Suponga que $k \in C(R_0, \mathbb{R})$ es acotada en conjuntos compactos de $[0,T] \times \mathbb{R}$ (i.e., si $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto, entonces existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que $|k(t,x)| \leq M$, para $(t,x) \in [0,T] \times \mathcal{M}$). Entonces la ecuación integral (1.17) posee al menos una solución en $0 \leq t \leq \tau$, donde $\tau = \text{mín}(a, [\frac{b}{M}\Gamma(\beta+1)]^{1/\beta})$.*

Podemos enunciar el siguiente resultado de existencia global.

**Teorema 1.4.2.** *([18]) Suponga que $k \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ con $g(t,u)$ una función no decreciente en $u$ para cada $t$ y*

$$|k(t,x)| \leq g(t,|x|).$$

*Además, existen las soluciones locales de (1.17) y la solución maximal del problema*

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s,u(s))ds, \quad t \in [0,T], u_0 \geq 0,$$

*también existe en $\mathbb{R}_+$. Entonces el intervalo más grande de existencia de cualquier solución de (1.17) con $|x_0| \leq u_0$ es $[0,\infty)$.*

En este trabajo usamos métodos de comparación para obtener la estabilidad de algunos sistemas fraccionarios. Es posible encontrar teoremas de comparación en la literatura para ecuaciones fraccionarias de evolución (ejemplos de estos son los Teoremas 2.1 y 2.2 de [18]), pero, desafortunadamente estos resultados no son útiles para nuestros propósitos. Por lo tanto, damos el siguiente lema, que es una versión del Teorema 2.2.5 en Pachpatte [32] y nos permite probar la estabilidad de algunas ecuaciones semilineales que estudiamos (ver Capítulo 4 abajo). De este modo, este resultado es fundamental en el desarrollo de esta tesis.

**Lema 1.4.3.** *Sea $k : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:*

*i)* $k(\cdot, x)$ *es medible en* $[0,T]$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$.

*ii)* *Existe una constante* $M > 0$ *tal que* $|k(s,x) - k(s,y)| \leq M|x-y|$ *para cualquier* $s \in [0,T]$ *y* $x, y \in \mathbb{R}$.

*iii)* $k$ *es acotada en conjuntos acotados de* $[0,T] \times \mathbb{R}$.

*iv)* $k(s, \cdot)$ *es no decreciente para cualquier* $s \in [0,T]$.

*También, sea* $B \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0,1)$, *con* $x$ *e* $y$ *dos funciones continuas en* $[0,T]$ *tales que*

$$x(t) \leq y(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^{\beta}) k(s, x(s)) ds, \quad t \in [0,T]. \quad (1.18)$$

*Entonces* $x \leq u$ *en* $[0,T]$, *donde* $u$ *es la solución de la ecuación*

$$u(t) = y(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^{\beta}) k(s, u(s)) ds, \quad t \in [0,T]. \quad (1.19)$$

*Observación* Las suposiciones sobre $k$ implican que (1.19) tiene una única solución continua. Esto es, sean $t_1, t_2 \in [0,T]$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $t_2 > t_1$, de este modo, usando que $y$ es una función continua solamente tenemos que analizar la cantidad

$$\begin{aligned} I^k := \bigg| & \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t_2-s)^{\beta}) k(s,u(s)) ds \\ & - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t_1-s)^{\beta}) k(s,u(s)) ds \bigg|, \end{aligned}$$

Primero supongamos que (1.19) tiene una solución acotada. Note que debido a la Hipótesis iii) existe $M > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
I^k &\leq M \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t_2 - s)^\beta) ds \\
&\quad + M \int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t_1 - s)^\beta) - (t_2 - s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t_2 - s)^\beta)| ds \\
&= I_1^k + I_2^k, \quad t_1, t_2 \in [0, T], t_2 > t_1.
\end{aligned}
$$

Para la primera integral, en vista de (1.3)

$$
I_1^k = M \int_0^{t_2 - t_1} s^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(Bs^\beta) ds = M(t_2 - t_1)^\beta E_{\beta,\beta+1}(B(t_2 - t_1)^\beta),
$$

y esta expresión tiende a cero si $t_1 \uparrow t_2$ debido a la continuidad de la función de Mittag-Leffler y que $\beta \in (0, 1)$.

El segundo sumando puede tratarse como sigue.

$$
\begin{aligned}
I_2^k &\leq M \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} |E_{\beta,\beta}(B(t_1 - s)^\beta) - E_{\beta,\beta}(B(t_2 - s)^\beta)| ds \\
&\quad + M \int_0^{t_1} \big((t_1 - s)^{\beta-1} - (t_2 - s)^{\beta-1}\big) E_{\beta,\beta}(B(t_2 - s)^\beta) ds \\
&= I_{2,1}^k + I_{2,2}^k
\end{aligned}
$$

Como $E_{\beta,\beta}$ es una función continua en $[0, T]$, dado $\varepsilon > 0$ tenemos

$$
I_{2,1}^k \leq M\varepsilon \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} ds,
$$

para $t_2 - t_1$ suficientemente pequeño. Para $I^k_{2,2}$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$I^k_{2,2} \leq C \left( \int_0^{t_1} s^{\beta-1} ds - \int_{t_2-t_1}^{t_2} s^{\beta-1} ds \right) = \frac{C}{\beta} \left( t_1^\beta - t_2^\beta + (t_2 - t_1)^\beta \right),$$

y esta cantidad tiende a cero si $t_1 \uparrow t_2$. Finalmente, las Hipótesis i)-iii) implican que (1.19) tiene una única solución continua tomando en cuenta la metodología anterior. En efecto, solo hay que aplicar el método de Picard (ver el análisis realizado para demostrar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (1.15)).

**Demostración** Sea $\mathcal{G} : C([0,T]) \to C([0,T])$ dado por

$$(\mathcal{G}z)(t) = y(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^\beta) k(s, z(s)) ds, \quad t \in [0,T].$$

La observación anterior implica que $\mathcal{G}$ está bien definida. Esto es, $\mathcal{G}(z)$ es una función continua para cada $z \in C([0,T])$. Recuerde que para cualquier función $z \in C([a,b])$, la notación $||z||_{\infty,[a,b]}$ significa $\sup_{t\in[a,b]} |z(t)|$. Entonces, de la continuidad de $E_{\beta,\beta}$ y la hipótesis ii), existe una constante $\bar{M} > 0$ tal que, para cada $z, \tilde{z} \in C([0,T])$, tenemos

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{G}z)(t) - (\mathcal{G}\tilde{z})(t)| &\leq \bar{M} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |k(s,z(s)) - k(s,\tilde{z}(s))| ds \\
&\leq M\bar{M} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |z(s) - \tilde{z}(s)| ds \\
&\leq \frac{M\bar{M}}{\beta} T^\beta ||z - \tilde{z}||_{\infty,[0,T]}, \quad \text{para } t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Similarmente, para $\bar{T} \leq T$, podemos ver que

$$||\mathcal{G}z - \mathcal{G}\tilde{z}||_{\infty,[0,\bar{T}]} \leq \frac{M\bar{M}}{\beta} ||z - \tilde{z}||_{\infty,[0,\bar{T}]} \bar{T}^\beta.$$

Consecuentemente, si $\bar{T}^\beta \frac{M\bar{M}}{\beta} < 1$, $\mathcal{G}$ es una contracción en $C([0,\bar{T}])$. Así, la sucesión $v_{n+1} = \mathcal{G}v_n$, con $v_0 = x$, es tal que $v_n(t) \to u(t)$ y $v_n(t) \leq v_{n+1}(t)$ para $t \in [0,\bar{T}]$, debido a la Hipótesis iv), (1.18), y que $E_{\beta,\beta}$ es una función completamente monótona. Tenemos que el resultado es cierto si escribimos $\bar{T}$ en vez de $T$.

Ahora, suponga que el lema es cierto para el intervalo $[0, n\bar{T}]$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, de (1.18) podemos escribir

$$\begin{aligned}
x(t) \leq y(t) &+ \int_0^{n\bar{T}} (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^\beta) k(s,x(s)) ds \\
&+ \int_{n\bar{T}}^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^\beta) k(s,x(s)) ds \\
&\leq \bar{y}(t) + \int_{n\bar{T}}^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^\beta) k(s,x(s)) ds, \quad t \in [n\bar{T}, (n+1)\bar{T}],
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{y}(t) = y(t) + \int_0^{n\bar{T}} (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^\beta) k(s,u(s)) ds.$$

Finalmente, definiendo $\mathcal{G}^{(n)} : C([n\bar{T},(n+1)\bar{T}]) \to C([n\bar{T},(n+1)\bar{T}])$ como

$$(\mathcal{G}^{(n)}z)(t) = \bar{y}(t) + \int_{n\bar{T}}^{t} (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^{\beta}) k(s, z(s)) ds,$$

y usando el hecho de que la ecuación (1.19) tiene una única solución continua debido a las Hipótesis ii) y iii), podemos proceder como en la primera parte de esta prueba para ver que $x \leq u$ en $[0,(n+1)\bar{T}]$. Por lo tanto, el resultado se sigue usando inducción en $n$.

$\square$

## 1.5. El movimiento browniano fraccionario

En esta sección damos un breviario acerca del movimiento browniano fraccionario (mbf) por las propiedades que tiene, y porque será utilizado para perturbar ecuaciones integrales estocásticas. Aquí suponemos que trabajamos en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

**Definición 1.5.1.** *El mbf es un proceso centrado (i.e., $EB_t = 0$), gaussiano $\{B_t\}_{t\geq 0}$, con $B_0 = 0$, y que satisface*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_H(s,t) &:= \mathrm{Cov}(B_t, B_s) \\ &= E(B_t B_s) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Var}(B_1)(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad t, s \geq 0. \end{aligned}$$

Normalizamos al mbf tomando $\mathrm{Var}(B_1) = 1$.

Nótese que, si $H = 1/2$, el proceso correspondiente sería un mb ordinario. Sin embargo, hay que recalcar que, para $H \neq 1/2$, los incrementos no son independientes. El parámetro de Hurst, $H \in (0, 1)$, determina el signo de la covarianza de incrementos futuros y pasados. Es decir, la covarianza entre dos incrementos $B_{t+h} - B_t$ y $B_{s+h} - B_s$ con $s + h \leq t$ y $t - s = nh$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_H(n) &= \frac{1}{2} h^{2H}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}] \\ &\approx h^{2H} H(2H-1) n^{2H-2} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

si $n$ tiende a infinito (ver Nualart [30]). Entonces, se tiene que:

i) Si $H > 1/2$, $\mathcal{R}_H(n) > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_H(n) = \infty$.

ii) Si $H < 1/2$, $\mathcal{R}_H(n) < 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{R}_H(n)| < \infty$.

*Observación* En i) tenemos que dos incrementos de la forma $B_{t+h} - B_t$ y $B_{t+2h} - B_{t+h}$ están correlacionados positivamente y se dice que el proceso tiene la propiedad de memoria larga. En ii) los incrementos están correlacionados negativamente y decimos que hay intermitencia.

Al mbf de parámetro $H$ frecuentemente se le denota por $B^H$ (y así lo haremos aquí).

En vista de la definición del mbf se afirma que es un proceso con trayectorias continuas debido al teorema de continuidad de Kolmogorov (ver [8]). Más aún, para todo $\epsilon > 0$ y $T > 0$, existe una variable aleatoria no negativa $G_{\epsilon,T}$ tal que $E(|G_{\epsilon,T}|^p) < \infty$ para todo $p > 1$, y

$$|B_t^H - B_s^H| \leq G_{\epsilon,T}|t-s|^{H-\epsilon},$$

para todo $s, t \in [0, T]$. Esto significa que el parámetro $H$ controla la regularidad de las trayectorias, que son Hölder continuas de orden $H - \epsilon$ para cualquier $\epsilon < H$.

Ahora, veremos que el mbf tiene una representación integral en términos del movimiento browniano $W$. En uno de nuestros resultados trabajaremos con el caso $H > 1/2$, por lo que, en lo que sigue de este capítulo damos algunas propiedades de $B^H$ satisfaciendo $H \in (0, 1/2)$. Defina el núcleo cuadrado integrable

$$K_H(t,s) = c_H s^{1/2-H} \int_s^t (u-s)^{H-3/2} u^{H-1/2} du, \quad s \leq t,$$

donde $c_H$ es una constante que depende de $H$. Este núcleo es diferenciable, esto es

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s) = c_H \left(\frac{t}{s}\right)^{H-1/2} (t-s)^{H-3/2} \quad s \leq t.$$

Así, el mbf de parámetro $H$ puede ser escrito como (ver [1])

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)dW_s, \quad t \geq 0,$$

donde $W$ es el movimiento browniano ordinario.

## 1.6. La integral de Skorohod

En lo que sigue damos algunas definiciones básicas del llamado Cálculo de Malliavin con el propósito de definir la conocida integral de Skorohod u operador de divergencia $\boldsymbol{\delta}$. Recordemos que tenemos que $H > 1/2$.

Sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert definido como la cerradura de las funciones simples $\mathtt{E} \subset \mathcal{H}$ en $[0,T]$ con respecto al producto escalar

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = \mathcal{R}_H(s,t).$$

El mapeo $1_{[0,t]} \mapsto B_t^H$ se extiende a una isometría de $\mathcal{H}$ a $L^2(\Omega)$, denotada $\phi \mapsto B^H(\phi)$.

Necesitamos introducir un subespacio de funciones de $\mathcal{H}$. Sea $|\mathcal{H}|$ el espacio lineal de funciones medibles $\varphi$ definidas en el intervalo $[0,T]$ tales que

$$||\varphi||_{|\mathcal{H}|}^2 := \int_0^T \left( \int_s^T |\varphi_r| \frac{\partial K_H}{\partial r}(s,r)dr \right)^2 ds < \infty.$$

Además, se tiene que para $\varphi \in |\mathcal{H}|$, la desigualdad (ver Nualart [30])

$$||\varphi||_{|\mathcal{H}|} \leq b_H ||\varphi||_{L^{1/H}((0,T))}, \quad b_H > 0. \tag{1.20}$$

Note que, de esta estimación se sigue la contención $L^{1/H}((0,T)) \subset |\mathcal{H}|$. Además $b_H$ es independiente de $T$.

Por otro lado, fijemos $H \in (1/2, 1)$. Sea $f \in C_b^\infty$ (es decir, $f$ y sus derivadas parciales son acotadas) y $\mathcal{S}$ el conjunto de las variables aleatorias de la forma

$$F = f(B^H(\phi_1), \ldots, B^H(\phi_n)), \quad n \geq 1, \tag{1.21}$$

con $\phi_i \in \mathcal{H}$. Definimos a $DF$ como la variable aleatoria con valores en $\mathcal{H}$ tal que

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(B^H(\phi_1), \ldots, B^H(\phi_n))\phi_i,$$

esto es, $D : \mathcal{S} \to L^p(\Omega; \mathcal{H})$ es el operador derivada de una variable aleatoria con representación (1.21). Más aún, $D$ es un operador cerrable de $L^P(\Omega)$ en $L^P(\Omega; \mathcal{H})$ (ver [30]) para cualquier $p \geq 1$. Denotamos por $D^k$ a la $k$-ésima iteración de $D$ para cualquier $k \geq 1$. El espacio de Sovolev $\mathbb{D}^{1,2}$ es la cerradura de $\mathcal{S}$ con respecto a la norma

$$||F||_{1,2}^2 := \mathbf{E}|F|^2 + \mathbf{E}||DF||_{\mathcal{H}}^2.$$

El operador de divergencia o integral de Skorohod es el operador adjunto de $D$, y está definido en términos de la relación de dualidad

$$\mathbf{E}(F\boldsymbol{\delta}u) = \langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{1.22}$$

donde $u \in L^2(\Omega; \mathcal{H})$. Si existe $\boldsymbol{\delta}(u) \in L^2(\Omega)$ tal que (1.22) se cumple, decimos que $u$ pertenece al dominio del operador $\boldsymbol{\delta}$ y lo denotamos como $u \in \mathrm{Dom}\boldsymbol{\delta}$. En este caso $\boldsymbol{\delta}(u)$ es la integral de Skorohod de $u$.

La siguiente proposición nos dice el caso cuando la integral de Skorohod de un proceso coincide con la integral hacia adelante.

**Proposición 1.6.1.** *([1]) Sea $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ una función que yace en el espacio $|\mathcal{H}|$. Entonces la integral hacia adelante existe y además*

$$\int_0^T u_t d^- B_t^H = \boldsymbol{\delta}(u), \quad \alpha_H > 0.$$

*El lado izquierdo es la integral hacia adelante de $u$ con respecto a $B^H$ dada en la Definición 1.2.13.*

43

# Capítulo 2

# Ecuación lineal del tipo Volterra

En este apartado trabajamos con la ecuación lineal fraccionaria

$$X(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} AX(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

Como antes, la condición inicial $\xi = \{\xi_t, t \geq 0\}$ es una función acotada en conjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$ y medible, $\beta \in (0,1)$ y $A \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Lo que hacemos es utilizar el Lema 1.3.2 para analizar la estabilidad de la solución de (2.1) cuando $A < 0$.

## 2.1. Estabilidad de ecuaciones integrales lineales de Volterra para diferentes condiciones iniciales

Tratamos la estabilidad de la solución de (2.1) considerando diferentes tipos de condiciones iniciales. Los resultados estudiados aquí son la herramienta básica para establecer la estabilidad de ecuaciones integrales fraccionarias de la forma (1.15).

Por otro lado, en este trabajo estudiamos varios criterios de estabilidad para diferentes clases $\mathcal{E}$ de condiciones iniciales. Algunas veces $\mathcal{E}$ es un subconjunto de un espacio lineal normado $\mathcal{X}$ de funciones continuas equipado con la norma $||\cdot||_{\mathcal{X}}$. En otras palabras, consideramos espacios lineales normados $(\mathcal{X}, ||\cdot||_{\mathcal{X}})$. Principalmente, a lo largo de esta tesis, tratamos con las siguientes clases de condiciones iniciales.

**Definición 2.1.1.** *Tenemos las siguientes definiciones de espacios lineales:*

1. *Si la condición inicial $\xi$ es continua en $[0, \infty)$ y existe $\xi_\infty \in \mathbb{R}$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ talque $|\xi_s - \xi_\infty| \leq \varepsilon$ para cualquier $s \geq t_0$, decimos que $\xi$ pertenece a la familia $\mathcal{E}^1$.*

2. $\mathcal{E}^2$ *es el conjunto de todas las funciones* $\xi$ *de clase* $C^1(\mathbb{R}_+)$ *(i.e.* $\xi$ *tiene una derivada continua en* $\mathbb{R}_+$*) tal que*

$$\lim_{t\mapsto\infty} |\xi_t|/t^\beta = 0 \quad y \quad |\xi_t'| \leq \frac{\tilde{C}}{t^{1-\upsilon}}, \quad \textit{para algún } \upsilon \in (0,\beta) \textit{ y } \tilde{C} \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

3. $\mathcal{E}^3$ *es la familia de funciones continuas de la forma*

$$\xi_t = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-s)^{\eta-1} g(s) ds, \tag{2.3}$$

*con* $g \in L^1([0,\infty)) \cap L^p([0,\infty))$, $\eta \in (0, \beta+1)$ *y* $p > \frac{1}{\eta} \vee 1$.

Los conceptos de estabilidad que analizamos son los siguientes.

**Definición 2.1.2.** *Sea* $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$. *La solución* $X$ *de (2.1) se dice ser:*

*i)* globalmente estable a lo largo para la clase $\mathcal{E}$ *(o* globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo*) si* $X(t)$ *tiende a cero cuando* $t \to \infty$, *para cada* $\xi \in \mathcal{E}$.

*ii)* $\mathcal{E}$-estable *si dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $||X||_{\infty,[0,\infty)} < \varepsilon$ *para cada* $\xi \in \mathcal{E}$ *satisfaciendo* $||\xi||_{\mathcal{X}} < \delta$.

*iii)* asintóticamente $\mathcal{E}$-estable *si ésta es* $\mathcal{E}$*-estable y existe* $\delta > 0$ *tal que* $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$ *para cualquier* $\xi \in \mathcal{E}$ *tal que* $||\xi||_{\mathcal{X}} < \delta$.

Observe que, si la condición inicial $\xi$ de la ecuación (2.1) es un proceso estocástico en vez de una función determinista, tal ecuación integral sería aleatoria que se resuelve trayectorialmente (i.e., $\omega$ por $\omega$). Por lo tanto, en lo que sigue de este trabajo, suponemos que todos los procesos están definidos en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, aunque no se vuelva a mencionar.

**Proposición 2.1.3.** *Suponga que la constante $A$ es negativa, $\beta \in (0,1)$. Entonces, la solución de* (2.1) *es globalmente $\mathcal{E}^{(i)}$-estable a lo largo, para $i = 1, 2, 3$.*

*Observación* Sean $A$ y $\xi$ aleatorias. Note que si $A(\omega)$ y $\xi(\omega)$ satisfacen las condiciones de la Proposición 2.1.3 trayectorialmente, entonces la solución de (2.1) es globalmente $\mathcal{E}^{(i)}$-estable a lo largo $\omega$ por $\omega$ (i.e., $X(\omega, \cdot)$ es globalmente $\mathcal{E}^{(i)}$-estable a lo largo para cualquier $\omega \in \Omega$), para $i = 1, 2, 3$.

**Demostración** Dividimos la prueba en tres partes.

**Paso 1**. Primero suponemos que $\xi \in \mathcal{E}^{(1)}$. Del Lema 1.3.2 podemos escribir

$$\begin{aligned}
|X(t)| &= \left|\xi_t + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)\xi_s ds\right| \\
&= \left|\xi_t + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi_s - \xi_t) ds \right.\\
&\quad \left. + A\xi_t \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) ds\right|.
\end{aligned}$$

Ahora, usando (4.8) en [16], obtenemos

$$1 + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)ds = E_{\beta,1}(At^\beta).$$

Así

$$|X(t)| \le \left|\xi_t E_{\beta,1}(At^\beta)\right| + \left|A\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi_s - \xi_t)ds\right|.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y fijemos $t_0 > 0$ tal que $|\xi_s - \xi_t| < \varepsilon$, para $s, t > t_0$.

Entonces, para $t > t_0$,

$$|X(t)| \le I_1(t) + I_2(t) + I_3(t),$$

con

$$I_1(t) = \left|\xi_t E_{\beta,1}(At^\beta)\right|, \quad I_2(t) = \left|A\int_0^{t_0} (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi_s - \xi_t)ds\right|,$$

e

$$I_3(t) = \left|A\int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi_s - \xi_t)ds\right|.$$

Usando que $\xi$ es acotada por hipótesis y (1.1), tenemos

$$I_1(t) = \left|\xi_t E_{\beta,1}(At^\beta)\right| \le C_{\beta,1}\frac{|\xi_t|}{1+|A|t^\beta}, \text{ para algún } C_{\beta,1} > 0, \tag{2.4}$$

y esta cantidad converge a cero cuando $t$ tiende a $+\infty$.

Sea $M > 0$ tal que $|\xi_s| \le M/2$, para cualquier $s > 0$. Se tiene que

$$I_2(t) \le M|A|\int_0^{t_0} (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)ds \le C_{\beta,\beta} M\int_0^{t_0} \frac{(t-s)^{\beta-1}}{1+|A|(t-s)^\beta}ds,$$

entonces $I_2(t)$ converge a cero cuando $t$ tiende a $+\infty$, debido al teorema de convergencia dominada.

Finalmente, usando la propiedad del límite de $\xi$ y de la igualdad (1.3) obtenemos

$$\begin{aligned} I_3(t) &\leq \varepsilon|A| \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) ds \leq \varepsilon|A| \int_{0}^{t} (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) ds \\ &= \varepsilon|A| t^\beta E_{\beta,\beta+1}(At^\beta) < \varepsilon C. \end{aligned}$$

Esto termina la prueba del paso 1.

**Paso 2**. Ahora, $\xi$ pertenece a $\mathcal{E}^{(2)}$. Usando el procedimiento del Paso 1 obtenemos

$$\begin{aligned} |X(t)| &\leq \left|\xi_t E_{\beta,1}(At^\beta)\right| + \left| A \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi_s - \xi_t) ds \right| \\ &\leq \left|\xi_t E_{\beta,1}(At^\beta)\right| + C|A| \int_0^t (t-s)^{\beta} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) s^{\upsilon-1} ds = I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

El primer término va a cero cuando $t \to \infty$ debido a (2.4) y (2.2). Para el segundo término usamos la definición de la función de Mittag-Leffler:

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= C|A| \int_0^t (t-s)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-s)^{k\beta}}{\Gamma(k\beta+\beta)}\ s^{\upsilon-1} ds \\
&= C|A| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\beta)} \int_0^t (t-s)^{(k+1)\beta} s^{\upsilon-1} ds \\
&= C|A| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma((k+1)\beta)} \frac{\Gamma((k+1)\beta+1)\Gamma(\upsilon)}{\Gamma((k+1)\beta+1+\upsilon)}\ t^{(k+1)\beta+\upsilon} \\
&= C|A| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (k+1)\beta\Gamma(\upsilon)}{\Gamma((k+1)\beta+1+\upsilon)}\ t^{(k+1)\beta+\upsilon} \\
&= C|A|\Gamma(\upsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k[(k+1)\beta+\upsilon-\upsilon]}{((k+1)\beta+\upsilon)\Gamma((k+1)\beta+\upsilon)}\ t^{(k+1)\beta+\upsilon} \\
&= C|A|\Gamma(\upsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\beta+\upsilon}}{\Gamma((k+1)\beta+\upsilon)} \\
&\quad - C|A|\upsilon\Gamma(\upsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\beta+\upsilon}}{\Gamma((k+1)\beta+\upsilon+1)} \\
&= -C\Gamma(\upsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^{(k+1)\beta+\upsilon}}{\Gamma((k+1)\beta+\upsilon)} \\
&\quad + C\Gamma(\upsilon+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^{(k+1)\beta+\upsilon}}{\Gamma((k+1)\beta+\upsilon+1)} \\
&= -C\Gamma(\upsilon) t^\upsilon E_{\beta,\upsilon}(At^\beta) + \frac{C\Gamma(\upsilon)t^\upsilon}{\Gamma(\upsilon)} \\
&\quad + C\Gamma(\upsilon+1) t^\upsilon E_{\beta,\upsilon+1}(At^\beta) - \frac{C\Gamma(\upsilon+1)t^\upsilon}{\Gamma(\upsilon+1)} \\
&= t^\upsilon C\Gamma(\upsilon)\left[\upsilon E_{\beta,\upsilon+1}(At^\beta) - E_{\beta,\upsilon}(At^\beta)\right], \quad t \geq 0,
\end{aligned}
$$

y esta cantidad converge a cero si $\upsilon < \beta$.

**Paso 3**. Finalmente consideramos $\xi \in \mathcal{E}^{(3)}$. Sea $t > t_0$. Procediendo como en el Lema 1.3.2, la solución es

$$X(t) = \int_0^t (t-s)^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(A(t-s)^\beta) g(s) ds$$
$$= \int_0^t s^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(As^\beta) g(t-s) ds = I_1(t) + I_2(t), \quad t \geq 0,$$

donde

$$I_1(t) = \int_0^{t_0} s^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(As^\beta) g(t-s) ds \quad \text{e} \quad I_2(t) = \int_{t_0}^{t} s^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(As^\beta) g(t-s) ds.$$

Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $t_0 > 0$ tal que

$$|s^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(As^\beta)| \leq C_{\beta,\eta} s^{\eta-1-\beta} < \varepsilon, \quad \forall s \geq t_0,$$

debido a (1.1) . Así

$$|I_2(t)| \leq \varepsilon \int_0^\infty |g(s)| ds,$$

y $g \in L^1([0,\infty))$.

La desigualdad de Hölder implica que

$$|I_1(t)| \leq C \left[ \int_0^{t_0} |g(t-s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^{t_0} s^{q(\eta-1)} ds \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Si $\eta \geq 1$ la demostración es inmediata por el teorema de convergencia dominada, ya que $q(\eta-1)+1 > 0$. Suponemos que $\eta < 1$. Si $p = \frac{1}{\eta} + \rho$ para algún $\rho > 0$, entonces $q < \frac{1}{1-\eta}$, debido a que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Usando el teorema de convergencia dominada de nuevo, como $g \in L^p([t_0, \infty[)$, tenemos

$$|I_1(t)| \leq C \left[ \int_0^{t_0} |g(t-s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}} = C \left[ \int_{t-t_0}^{t} |g(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0,$$

cuando $t$ tiende a infinito.

$\square$

*Observaciones*

i) En el Paso 3, si $g$ es continua y $\lim_{t\mapsto\infty} g(t) = 0$, como $g$ es acotada, por el teorema de convergencia dominada $I_1$ converge a cero. Entonces, en este caso, podemos omitir la hipótesis $g \in L^p([t_0,\infty))$.

ii) Suponga que $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^{(i)}$, donde $\xi^{(i)} \in \hat{\mathcal{E}}^{(i)} \subset \mathcal{X}^{(i)}$ y la solución de (2.1) es globalmente $\hat{\mathcal{E}}^{(i)}$-estable a lo largo para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Entonces, la solución de (2.1) también es globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo, donde $\mathcal{E}$ es la familia de funciones de la forma $\sum_{i=1}^n \xi^{(i)}$. En efecto, el Lema 1.3.2 nos permite escribir la solución $X$ de (2.1) como

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \left( \xi_t^{(i)} + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)\xi_s^{(i)} ds \right), \quad t \geq 0.$$

Incluso podemos sumar dos elementos de la misma familia pero con parámetros diferentes.

Ahora, gracias a los resultados anteriores podemos estudiar la estabilidad de la solución de (2.1) para condiciones iniciales que son "pequeñas en norma", por lo que necesitamos trabajar con espacios de funciones equipadas con normas convenientes. De este modo equipamos nuestros espacios $\mathcal{E}^{(i)}, i = 1, 2, 3$, introducidos en la Definición 2.1.1 con

$$||\cdot||_{\mathcal{X}^{(1)}} = ||\cdot||_{\infty,[0,\infty)},$$

$$||\xi^{(2)}||_{\mathcal{X}^{(2)}} = ||\xi^{(2)}_{\cdot} E_{\beta,1}(A\cdot^{\beta})||_{\infty,[0,\infty)} + ||\cdot^{1-v}\, \xi^{(2)\prime}_{\cdot}||_{\infty,[0,\infty)}$$

y

$$||\cdot||_{\mathcal{X}^{(3)}} = ||\cdot||_{L^1([0,\infty))} + ||\cdot||_{L^p([0,\infty))}$$

respectivamente.

En vista de la Definición 2.1.1 damos un resultado de estabilidad para combinaciones lineales de funciones. Esto es posible por el Lema 1.3.2 y la Proposición 2.1.3.

**Proposición 2.1.4.** *Suponga que $\xi = \sum_{i=1}^{3} \xi^{(i)}$, donde $\xi^{(i)} \in \mathcal{E}^{(i)}$, y que los coeficientes $A$ y $\beta$ son como en la Proposición 2.1.3. Aquí, la norma involucrada es $||\xi||_{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{3} ||\xi^{(i)}||_{\mathcal{X}^{(i)}}$. Entonces la solución $X$ de (2.1) es asintóticamente $\mathcal{E}$-estable.*

*Observación* Note que la representación de $\xi$ no es única, por lo que $||\xi||_{\mathcal{X}}$ puede no estar bien definida. Sin embargo, $||\cdot||_{\mathcal{X}}$ permite interpretar lo que una condición inicial pequeña significa.

**Demostración** Debido a la Proposición 2.1.3 solamente tenemos que ver que (2.1) es $\mathcal{E}^{(i)}$-estable para cada $i = 1, 2, 3$. Para ver esto, sea $X$ la solución de (2.1) dada por

$$X(t) = \sum_{i=1}^{3} X^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^{3} \left( \xi_t^{(i)} + A \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) \xi_s^{(i)} ds \right), \quad t \geq 0.$$

Así, dividimos la prueba en tres pasos.

**Paso 1**. Consideremos primero el caso $i = 1$. Entonces (1.3) da que, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
|X^{(1)}(t)| &\leq |\xi_t^{(1)}| + |A| \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) |\xi_s^{(1)}| ds \\
&\leq ||\xi^{(1)}||_{\infty,[0,\infty)} \left( 1 + |A| \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) ds \right) \\
&= ||\xi^{(1)}||_{\infty,[0,\infty)} \left( 1 + |A| t^\beta E_{\beta,\beta+1}(At^\beta) \right) \\
&\leq ||\xi^{(1)}||_{\infty,[0,\infty)} (1 + C_{\beta,\beta+1}),
\end{aligned}$$

lo que implica que la solución de (2.1) es $\xi^{(1)}$-estable.

**Paso 2**. Para $i = 2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|X^{(2)}(t)| &\leq |\xi_t^{(2)} E_{\beta,1}(At^\beta)| + \left| A \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi_s^{(2)} - \xi_t^{(2)}) ds \right| \\
&\leq ||\xi^{(2)}||_{\mathcal{X}^{(2)}} \left( 1 + |A| \int_0^t (t-s)^\beta E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) s^{\upsilon-1} ds \right), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, la prueba de la Proposición 2.1.3 nos lleva a que

$$\begin{aligned}
|X^{(2)}(t)| &\leq ||\xi^{(2)}||_{\mathcal{X}^{(2)}} \left( 1 + t^\upsilon \Gamma(\upsilon) [\upsilon E_{\beta,\upsilon+1}(At^\beta) - E_{\beta,\upsilon}(At^\beta)] \right) \\
&\leq C ||\xi^{(2)}||_{\mathcal{X}^{(2)}}, \quad t \geq 0,
\end{aligned}$$

donde $C > 0$ es una constante y hemos usado la hipótesis $\upsilon < \beta$.

**Paso 3**. Finalmente consideramos el caso $i = 3$. En este escenario, del Lema 1.3.2, obtenemos

$$\begin{aligned}
|X^{(3)}(t)| &= \Big| \int_0^t (t-s)^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(A(t-s)^\beta) g(s) ds \Big| \\
&= \Big| \int_0^t s^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(As^\beta) g(t-s) ds \Big| \\
&\leq \Big| \int_0^{t\wedge 1} s^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(As^\beta) g(t-s) ds \Big| + \Big| \int_{t\wedge 1}^t s^{\eta-1} E_{\beta,\eta}(As^\beta) g(t-s) ds \Big| \\
&= I_1^{(3)}(t) + I_2^{(3)}(t), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Para $I_1^{(3)}$ podemos aplicar la desigualdad de Hölder y escribir, para $q^{-1} = 1 - p^{-1}$ y $C > 0$

$$\begin{aligned}
I_1^{(3)}(t) &\leq C \left[ \int_0^1 s^{q(\eta-1)} ds \right]^{1/q} \left[ \int_0^{t\wedge 1} |g(t-s)|^p ds \right]^{1/p} \\
&\leq C ||g||_{L^p([0,\infty))}, \quad t \geq 0,
\end{aligned}$$

y para $I_2^{(3)}$ usamos el hecho de que $\eta - 1 - \beta < 0$. Por lo tanto,

$$|I_2^{(3)}(t)| \leq \frac{C_{\beta,\eta}}{|A|} ||g||_{L^1([0,\infty))}.$$

$\square$

# Capítulo 3

# Estabilidad de ecuaciones integrales lineales con ruido aditivo

En este capítulo consideramos la ecuación

$$X(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} AX(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)d\theta_s, \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

En lo que sigue suponemos que $\xi$ es una función medible y acotada sobre compactos, $\beta \in (0,1)$, $A$ es una constante negativa, $\alpha \in (1,2)$, y $\{\theta_s, s \geq 0\}$ es una función Hölder continua de exponente $\gamma \in (0,1)$ y $\theta_0 = 0$. También suponemos que $\beta + 1 > \alpha$ y $\alpha + \gamma > 2$ y que $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ es localmente $\tau$-Hölder continua (i.e., $f$ pertenece a la familia de todas las funciones que son $\tau$-Hölder continuas en cualquier intervalo compacto de $\mathbb{R}_+$) con $\tau + \gamma > 1$. Lo que hacemos es analizar la estabilidad de la solución de (3.1) usando los resultados del Capítulo 2 con respecto a la estabilidad de tal ecuación en el caso cuando $\theta \equiv 0$.

## 3.1. Estabilidad de ecuaciones integrales deterministas

Aquí estudiamos un criterio de estabilidad para la solución $X$ de (3.1) considerando el caso cuando el ruido $\theta$ es una función determinista.

Necesitamos introducir la definición de estabilidad que trataremos en esta sección.

**Definición 3.1.1.** *Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ una familia de funciones continuas. Decimos que una solución $X$ de (3.1) es*

*i)* $(\mathcal{E}, p)$-estable *si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $||X||_{\infty,[0,\infty)} < \varepsilon$ para cualquier $(\xi, f, \theta)$ tal que*

$$||\xi||_{\mathcal{X}} + ||f\theta||_{L^1([0,\infty))} + ||f\theta||_{L^p([0,\infty))} + ||\dot{f}\theta||_{L^1([0,\infty))} < \delta. \qquad (3.2)$$

*ii)* asintóticamente $(\mathcal{E}, p)$-estable *si es $(\mathcal{E}, p)$-estable y existe $\delta > 0$ tal que* $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$ *para cualquier $(\xi, f, \theta)$ satisfaciendo (3.2).*

**Proposición 3.1.2.** *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ una función localmente $\tau$-Hölder continua con $\tau + \gamma > 1$ tal que $f\theta \in L^1([0,\infty)) \cap L^p([t_0,\infty))$ para algún $t_0 > 0$ y $p > \frac{1}{\alpha-1}$, $\dot{f}\theta \in L^1([0,\infty))$. También suponga que las hipótesis de la Proposición 2.1.3 se satisfacen. Entonces la solución de la ecuación (3.1) es globalmente $\mathcal{E}^{(i)}$-estable a lo largo para cada $i = 1, 2, 3$.*

*Observación* Del Lema 1.2.7 estamos tratando con

$$X(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} AX(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d\tilde{\theta}_s, \quad t \geq 0,$$

donde $\tilde{\theta}_\cdot = \int_0^\cdot f(s)d\theta_s$.

**Demostración** En primera instancia, en vista de los Lemas 1.3.2 y 1.2.7, la solución de la ecuación (3.1) es

$$\begin{aligned} X(t) = \xi_t &+ A \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)\xi_s ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^\beta) f(s) d\theta_s, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

debido a que $f$ es $\tau$-Hölder continua en $[0, t]$. Ahora, de la Proposición 2.1.3, solamente necesitamos estudiar la convergencia del término

$$I(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^\beta) f(s) d\theta_s.$$

Entonces, (1.2) y la Proposición 1.2.10 implican que

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t),$$

con

$$I_1(t) = \int_0^t \theta_s (t-s)^{\alpha-2} E_{\beta,\alpha-1}(A(t-s)^\beta) f(s) ds$$

e

$$I_2(t) = -\int_0^t \theta_s (t-s)^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^\beta) \dot{f}(s) ds,$$

donde hemos usado que $\theta_0 = 0$.

De este modo, para la primera integral tenemos que

$$\begin{aligned}
|I_1(t)| &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \left| E_{\beta,\alpha-1}(A(t-s)^\beta) \right| |\theta_s f(s)| ds \\
&= \int_0^{t_0} s^{\alpha-2} \left| E_{\beta,\alpha-1}(As^\beta) \right| |\theta_{t-s} f(t-s)| ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t s^{\alpha-2} \left| E_{\beta,\alpha-1}(As^\beta) \right| |\theta_{t-s} f(t-s)| ds \\
&= \tilde{I}_{1,1}(t) + \tilde{I}_{1,2}(t).
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ fijamos $t_0$ tal que para cualquier $s > t_0$

$$s^{\alpha-2} \left| E_{\beta,\alpha-1}(As^\beta) \right| \leq \varepsilon.$$

Por lo que tenemos que

$$\tilde{I}_{1,2}(t) \leq \varepsilon \int_{t_0}^t |\theta_{t-s} f(t-s)| ds \leq \varepsilon \int_0^\infty |\theta_s f(s)| ds.$$

Ahora, $q < \frac{1}{2-\alpha}$ porque $p > \frac{1}{\alpha-1}$. Así, usando la estimación $|E_{\beta,\alpha-1}(As^{\beta})| \leq C$, escribimos

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{1,1}(t) &\leq C\int_0^{t_0} s^{\alpha-2}|\theta_{t-s}f(t-s)|ds \\
&\leq C\left(\int_0^{t_0} s^{q(\alpha-2)}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{t_0} |\theta_{t-s}f(t-s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\left(\int_{t-t_0}^{t} |\theta_s f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

que converge a cero cuando $t \to \infty$ haciendo uso de nuestras hipótesis sobre $\theta$ y $f$.

Estudiemos $I_2$. Para $t > t_0$,

$$|I_2(t)| \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^{\beta})|\theta_s\dot{f}(s)|ds = \tilde{I}_{2,1}(t) + \tilde{I}_{2,2}(t),$$

con

$$\tilde{I}_{2,1}(t) = \int_0^{t_0} s^{\alpha-1}E_{\beta,\alpha}(As^{\beta})|\theta_{t-s}\dot{f}(t-s)|ds$$

e

$$\tilde{I}_{2,2}(t) = \int_{t_0}^{t} s^{\alpha-1}E_{\beta,\alpha}(As^{\beta})|\theta_{t-s}\dot{f}(t-s)|ds.$$

Como $\alpha - 1 > 0$,

$$\tilde{I}_{2,1}(t) \leq C\int_0^{t_0} |\theta_{t-s}\dot{f}(t-s)|ds = \int_{t-t_0}^{t} |\theta_s\dot{f}(s)|ds \longrightarrow 0,$$

cuando $t$ tiende a infinito debido a que $\dot{f}\theta \in L^1([0,\infty))$.

Finalmente, el hecho de que $\beta > \alpha - 1$, nos lleva a escoger $t_0 > 0$ tal que

$$\tilde{I}_{2,2}(t) \leq \varepsilon \int_{t_0}^{t} |\theta_{t-s}\dot{f}(t-s)|ds \leq \varepsilon \int_{0}^{\infty} |\theta_s \dot{f}(s)|ds < \varepsilon C. \tag{3.3}$$

Por lo tanto, se sigue la prueba.

$\square$

*Observaciones*

i) Note que, en el caso cuando $\beta \leq \alpha - 1$, obtenemos

$$\frac{d}{ds}\left(s^{\alpha-1}E_{\beta,\alpha}(As^{\beta})\right) = s^{\alpha-2}E_{\beta,\alpha-1}(As^{\beta}) > 0, \quad s \geq 0,$$

por lo que (3.3) podría ser falsa, y la solución de (3.1) podría ser inestable.

ii) En particular, si suponemos que $\theta$ es una función acotada ( $\sup_{t\geq 0}|\theta_t| < \infty$) en lugar de las hipótesis de la Proposición 3.1.2 tendríamos un resultado análogo ya que, en este caso

$$|I_1(t)| \leq C\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\left|E_{\beta,\alpha-1}(A(t-s)^{\beta})\right||f(s)|ds$$

e

$$|I_2(t)| \leq C\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^{\beta})|\dot{f}(s)|ds.$$

Más aún, si $\theta$ es un proceso acotado con probabilidad uno, entonces la solución de la ecuación (3.1) es globalmente $\mathcal{E}^{(i)}$-estable a lo largo para casi todo $\omega \in \Omega$ e $i = 1, 2, 3$.

Ahora, damos una extensión de la Proposición 3.1.2 para el caso cuando el ruido es "suficientemente pequeño" análogamente a la Definición 3.1.1 (Enunciados i) y iii)).

**Teorema 3.1.3.** *Suponga que las afirmaciones de la Proposición 3.1.2 son ciertas con $t_0 = 0$. Entonces, la solución $X$ de (3.1) es asintóticamente $(\mathcal{E}^{(i)}, p)$-estable para cada $i = 1, 2, 3$.*

**Demostración** Por la Proposición 3.1.2 solamente tenemos que probar que la solución de (3.1) es $(\mathcal{E}^{(i)}, p)$-estable. Con este fin, invocamos el Lema 1.3.2 para establecer que

$$\begin{aligned} X(t) &= \xi_t + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)\xi_s ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^\beta) f(s) d\theta_s \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, debido a la Proposición 2.1.4, sólo debemos probar que, dado $\varepsilon > 0$, $||I_3||_{\infty,[0,\infty)} < \varepsilon$ si $||\xi||_{\mathcal{X}} + ||f\theta||_{L^1([0,\infty))} + ||f\theta||_{L^p([0,\infty))} + ||\dot{f}\theta||_{L^1([0,\infty))}$

es suficientemente pequeña. Así, observemos que, el Lema 1.2.10 implica que

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \int_0^t s^{\alpha-2} E_{\beta,\alpha-1}(As^\beta)\theta_{t-s} f(t-s)ds \\ &\quad - \int_0^t s^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(As^\beta)\theta_{t-s} \dot{f}(t-s)ds \\ &= I_{3,1}(t) + I_{3,2}(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para $I_{3,1}$ tenemos, de (1.1) y $q^{-1} = 1 - p^{-1}$,

$$\begin{aligned} |I_{3,1}(t)| &\leq \int_0^{1\wedge t} s^{\alpha-2} |E_{\beta,\alpha-1}(As^\beta)||\theta_{t-s} f(t-s)|ds \\ &\quad + \int_{1\wedge t}^t s^{\alpha-2} |E_{\beta,\alpha-1}(As^\beta)||\theta_{t-s} f(t-s)|ds \\ &\leq C_{\beta,\alpha-1} \left( \int_0^1 s^{q(\alpha-2)} ds \right)^{1/q} \left( \int_0^{1\wedge t} |\theta_{t-s} f(t-s)|^p ds \right)^{1/p} \\ &\quad + C_{\beta,\alpha-1} \int_0^t |\theta_{t-s} f(t-s)|ds \\ &\leq C \left( ||\theta f||_{L^p([0,\infty)} + ||\theta f||_{L^1([0,\infty))} \right), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Finalmente, usando (1.1) de nuevo y que $\beta + 1 > \alpha$,

$$\begin{aligned} I_{3,2}(t) &\leq \int_0^{1\wedge t} s^{\alpha-1} |E_{\beta,\alpha}(As^\beta)||\theta_{t-s} \dot{f}(t-s)|ds \\ &\quad + \int_{1\wedge t}^t s^{\alpha-1} |E_{\beta,\alpha}(As^\beta)||\theta_{t-s} \dot{f}(t-s)|ds \\ &\leq C_{\beta,\alpha} \int_0^t |\theta_{t-s} \dot{f}(t-s)|ds + \frac{C_{\beta,\alpha}}{|A|} \int_0^t |\theta_{t-s} \dot{f}(t-s)|ds \\ &\leq C \int_0^\infty |\theta_s \dot{f}(s)|ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto (3.4) y (3.5) implican que la prueba está completa.

$\square$

## 3.2. Estabilidad de ecuaciones integrales lineales estocásticas gobernadas por el movimiento browniano fraccionario

Aquí estudiamos estabilidad de ciertas ecuaciones integrales gobernadas por el movimiento browniano fraccionario $B^H$.

Particularmente, recuerde que $B^H$ tiene trayectorias Hölder continuas para cualquier exponente $\gamma < H$ en conjuntos compactos (ver Sección 1.5).

Un tipo de estabilidad que estudiamos en este trabajo es la llamada *estabilidad en la media* (ver el libro de Arnold [3], Definición (11.3.1)).

**Definición 3.2.1.** *Una solución continua $X$ de la ecuación (3.1) se dice ser* globalmente $\mathcal{E}$-estable en la media *(o* $\mathcal{E}$-estable en la media *por simplicidad) si $\mathbf{E}(|X(t)|) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier proceso $\xi \in \mathcal{E}$.*

Como consecuencia, en lo que sigue de esta sección $\xi = \{\xi_t, t \geq 0\}$ es un proceso estocástico medible y acotado sobre compactos. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 3.2.2.** *Sea $\mathcal{E}$ una familia de funciones continuas. Decimos que un proceso continuo* $\xi$ pertenece a $\mathcal{E}$ en la media *(o bien, $\xi \in \mathcal{E}_m$) si* $\mathbf{E}(|\xi|) \in \mathcal{E}$.

De la Proposición 2.1.3 se sigue lo siguiente.

**Corolario 3.2.3.** *Suponga que $A$ es una constante negativa y $\beta \in (0,1)$. La condición inicial $\xi$ es un proceso estocástico que es medible y acotado en conjuntos compactos, tal que $\xi \in \mathcal{E}_m^{(i)}$ para cada $i = 1,2,3$. Entonces, la solución de (2.1) es $\mathcal{E}^{(i)}$-estable en la media para cada $i = 1,2,3$.*

*Observación* En el caso $i = 1$, hay que suponer $\mathbf{E}|\xi_t - \xi_\infty| \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Sea $C_{loc}^{\gamma'}(\mathbb{R}_+)$ el conjunto de las funciones localmente $\gamma'$-Hölder continuas. El siguiente resultado es una consecuencia de la Proposición 3.1.2.

**Corolario 3.2.4.** *Suponga que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.1.2, con $\xi$ como en el Corolario 3.2.3, $f \in L^1([0,\infty)) \cap L^p([t_0,\infty))$ y $\dot{f} \in L^1([0,\infty))$. Sea*

$$\theta_t = \int_0^t z(s)dB_s^\gamma,$$

*con $\gamma > \frac{1}{2}$, $z \in L^{1/\gamma}([0,\infty)) \cap C_{loc}^{\gamma'}([0,\infty))$, $\gamma' + \gamma > 1$. Entonces, la solución $X$ de la ecuación (3.1) es $\mathcal{E}^{(i)}$-estable en la media.*

*Observación* Note que, para $t > 0$ fijo, $\theta_t$ está bien definida. En efecto, podemos escoger $\tilde{\gamma} \in (1/2, \gamma)$ tal que $\tilde{\gamma} + \gamma' > 1$, y recordemos que $B^\gamma$ es $\tilde{\gamma}$-Hölder continuo en $[0, t]$. Así, $\theta$ está definida trayectorialmente.

**Demostración** Solamente necesitamos notar que las Proposiciones 1.6.1 y 1.2.14 nos permiten afirmar que la última integral de Young también es de Skorohod debido a que $z$ es una función determinista. Como consecuencia, la desigualdad (1.20) implica

$$\sup_{t\geq 0} \mathbf{E}(|\theta_t|) \leq C \left( \int_0^\infty |z(r)|^{\frac{1}{\gamma}} dr \right)^\gamma, \quad C > 0.$$

Por lo tanto, el resultado se sigue de la Proposición 3.1.2, teniendo en cuenta que el ruido involucrado es acotado.

$\square$

Por otro lado, considere la ecuación

$$X(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} AX(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) dB_s^\gamma, \quad t \geq 0. \tag{3.6}$$

Aquí, $\gamma \in (0, 1)$. Motivados por la Definición 3.1.1, damos el siguiente criterio de estabilidad.

**Definición 3.2.5.** *Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ una familia de funciones continuas. Decimos que una solución de la ecuación (3.6) es $(\mathcal{E}, p)$-estable en la media si para un $\varepsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que $||\mathbf{E}|X|||_{\infty,[0,\infty)} < \varepsilon$ para cualquier $\xi \in \mathcal{E}_m$ tal que*

$$\left|\left|\mathbf{E}|\xi|\right|\right|_{\mathcal{X}} + \left|\left|f(\cdot) \cdot^{\gamma}\right|\right|_{L^1([0,\infty))} + \left|\left|f(\cdot) \cdot^{\gamma}\right|\right|_{L^p([t_0,\infty))} + \left|\left|\dot{f}(\cdot) \cdot^{\gamma}\right|\right|_{L^1([0,\infty)} < \delta.$$

*Observación.* En esta definición, si $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^{(i)}$, con $\xi^{(i)} \in \mathcal{E}_m$, entonces escribimos $||\xi||_{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{n} ||\xi^{(i)}||_{\mathcal{X}}$.

**Teorema 3.2.6.** *Para todo $\omega \in \Omega$, sea $f(\omega, \cdot) \in C^1([0,\infty))$ una función localmente $\tau$-Hölder continua, con $\gamma + \tau > 1$, tal que $\left(r \mapsto r^{\gamma}\left[\mathbf{E}|f(r)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) \in L^1([0,\infty)) \cap L^p([0,\infty))$ para algún $p > \frac{1}{\alpha-1}$ y $\left(r \mapsto r^{\gamma}[\mathbf{E}|\dot{f}(r)|^2]^{\frac{1}{2}}\right) \in L^1([0,\infty))$. Entonces, las hipótesis de la Proposición 3.1.2 para el caso cuando $\xi$ es como en el Corolario 3.2.3 implican que la solución de la ecuación (3.6) es $(\mathcal{E}^{(i)}, p)$-estable en la media y $\mathcal{E}^{(i)}$-estable en la media para cada $i = 1, 2, 3$.*

**Demostración** Debido al Corolario 3.2.3 solamente necesitamos analizar

$$I(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^{\beta}) f(s) dB_s^{\gamma}.$$

Usando la propiedad de diferenciabilidad de la función de Mittag-Leffler (1.2), el Lema 1.2.10 y la Observación 1.2.9 obtenemos

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^t \partial_r \left[ r^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(Ar^\beta) f(t-r) \right] B_{t-r}^\gamma dr \\
&= \int_0^t r^{\alpha-2} E_{\beta,\alpha-1}(Ar^\beta) f(t-r) B_{t-r}^\gamma dr \\
&\quad - \int_0^t r^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(Ar^\beta) \dot{f}(t-r) B_{t-r}^\gamma dr \\
&:= I_1(t) + I_2(t).
\end{aligned}
$$

Veamos primero que la solución $X$ es $\mathcal{E}^{(i)}$-estable. Dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que $\left| t_0^{\alpha-2} E_{\beta,\alpha-1}(At_0^\beta) \right| \leq \varepsilon$. Tomemos

$$I_1(t) = I_{1,1}(t) + I_{1,2}(t), \quad t \geq t_0,$$

con

$$I_{1,1}(t) = \int_{t_0}^t r^{\alpha-2} E_{\beta,\alpha-1}(Ar^\beta) f(t-r) B_{t-r}^\gamma dr$$

e

$$I_{1,2}(t) = \int_0^{t_0} r^{\alpha-2} E_{\beta,\alpha-1}(Ar^\beta) f(t-r) B_{t-r}^\gamma dr.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} \left| I_{1,1}(t) \right| &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \mathbf{E} \left| f(t-r) B_{t-r}^\gamma \right| dr \leq \varepsilon \int_0^\infty \mathbf{E} \left| f(r) B_r^\gamma \right| dr \\
&\leq \varepsilon \int_0^\infty \left[ \mathbf{E} \left| f(r) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \mathbf{E} \left| B_r^\gamma \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr = \varepsilon \int_0^\infty r^\gamma \left[ \mathbf{E} \left| f(r) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr.
\end{aligned}
$$

Usando que $p > \frac{1}{\alpha-1}$ (que implica $q < \frac{1}{2-\alpha}$) y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\mathbf{E}\left|I_{1,2}(t)\right| \leq C\left(\int_0^{t_0} r^{q(\alpha-2)}dr\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{t_0}\left(\left[\mathbf{E}\left|f(t-r)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\mathbf{E}\left|B^{\gamma}_{t-r}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\left(\int_{t-t_0}^{t}\left[\mathbf{E}\left|f(r)\right|^2\right]^{\frac{p}{2}} r^{p\gamma}dr\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0.$$

Por otro lado, observemos que

$$|I_2(t)| \leq I_{2,1}(t) + I_{2,2}(t), \quad t > t_0,$$

donde

$$I_{2,1}(t) = \int_{t_0}^{t} r^{\alpha-1}E_{\beta,\alpha}(Ar^{\beta})\left|\dot{f}(t-r)B^{\gamma}_{t-r}\right| dr$$

e

$$I_{2,2}(t) = \int_0^{t_0} r^{\alpha-1}E_{\beta,\alpha}(Ar^{\beta})\left|\dot{f}(t-r)B^{\gamma}_{t-r}\right| dr.$$

Usando el hecho de que $\alpha - 1 - \beta < 0$ y procediendo como antes obtenemos, para algún $t_0 > 0$,

$$I_{2,1}(t) \leq \varepsilon\int_0^{\infty}\mathbf{E}\left|\dot{f}(r)B^{\gamma}_{r}\right| dr$$

e

$$I_{2,2}(t) \leq C\int_0^{t_0}\mathbf{E}\left|\dot{f}(t-r)B^{\gamma}_{t-r}\right| dr = C\int_{t-t_0}^{t}\mathbf{E}\left|\dot{f}(r)B^{\gamma}_{r}\right| dr.$$

En el primer caso la elección de $\varepsilon$ es arbitraria, y en el otro caso la integral va a cero.

Finalmente, procedemos como en la prueba del Teorema 3.1.3 para terminar la demostración.

$\square$

**Ejemplo 3.2.7.** Una clase de funciones (deterministas) $f$ que satisface las condiciones del Teorema 3.2.6 es la familia de todas las *funciones de Schwartz*, ya que tienen la propiedad de decrecer rápidamente a cero cuando $t$ tiende a infinito (ver Rudin [35] para una exposición más amplia).

*Observación* Podemos tratar otro tipo de integral estocástica para estudiar la estabilidad de (3.6) usando diferentes condiciones sobre $f$ en el Teorema 3.2.6. Por ejemplo, sea $f \in L^{1/\gamma}([0,\infty))$ una función Lipschitz. Ahora, considere la integral de Wiener (ver [6] o [29])

$$I(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^\beta) f(s) dB_s^\gamma, \quad t \geq 0.$$

Usando la desigualdad (1.20) de nuevo, y procediendo análogamente como en los resultados de esta sección

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|I(t)| &\leq C_{\gamma,1}\left[\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{\gamma}} \left(E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^\beta)\right)^{\frac{1}{\gamma}} |f(s)|^{\frac{1}{\gamma}} ds\right]^\gamma \\
&\leq C_{\gamma,1}\left[\int_0^{t_0} s^{\frac{\alpha-1}{\gamma}} \left(E_{\beta,\alpha}(As^\beta)\right)^{\frac{1}{\gamma}} |f(t-s)|^{\frac{1}{\gamma}} ds\right]^\gamma \\
&\quad + C_{\gamma,1}\left[\int_{t_0}^{t} s^{\frac{\alpha-1}{\gamma}} \left(E_{\beta,\alpha}(As^\beta)\right)^{\frac{1}{\gamma}} |f(t-s)|^{\frac{1}{\gamma}} ds\right]^\gamma \\
&= C_{\gamma,1}\left[I_1^\gamma(t) + I_2^\gamma(t)\right],
\end{aligned}$$

donde $C_{\gamma,1} > 0$ es una constante. Tenemos

$$I_1(t) \leq Ct_0^{\frac{\alpha-1}{\gamma}} \int_0^{t_0} |f(t-s)|^{\frac{1}{\gamma}} ds = Ct_0^{\frac{\alpha-1}{\gamma}} \int_{t-t_0}^{t} |f(s)|^{\frac{1}{\gamma}} ds \longrightarrow 0, \quad \text{si } t \to \infty.$$

Como $\alpha - 1 - \beta < 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0$ tal que

$$I_2(t) \leq \varepsilon C \int_0^{\infty} |f(s)|^{\frac{1}{\gamma}} ds \leq \varepsilon C.$$

Entonces, en este caso, para cada $i = 1, 2, 3$ también hay $(\mathcal{E}^{(i)}, 1/\gamma)$-estabilidad en la media.

**Ejemplo 3.2.8.** Procediendo como en la prueba de la Proposición 2.1.3 (inciso 1), podemos ver que la solución de (3.6) con

$$\xi_t = \begin{cases} -1 & si \quad t < 1, \\ 1 & si \quad t \geq 1, \end{cases}$$

es $\mathcal{E}^{(1)}$-estable en la media. En efecto, sólo necesitamos observar que, para $t > 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} & 1 - A \int_0^1 (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) ds \\ & \quad + A \int_1^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) ds \\ = \; & 1 - 2A \int_0^1 (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) ds \\ & \quad + A \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta) ds. \end{aligned}$$

# Capítulo 4

# Una clase de sistemas no lineales de orden fraccionario

En este capítulo establecemos condiciones suficientes para la estabilidad de ecuaciones integrales semilineales del tipo Volterra. De este modo, extendemos los resultados dados en el capítulo anterior. Es decir, tratamos la estabilidad de cualquier solución de

$$X(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [AX(s) + h(X(s))] ds + Z_t, \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

donde $Z$ es la integral de Young

$$Z_t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) d\theta_s.$$

De primera instancia lo que hacemos es dar resultados de estabilidad para esta clase de ecuaciones cuando el ruido $Z$ es nulo y la condición inicial es una constante, luego la condición inicial será una función conveniente y al final analizamos el caso general.

## 4.1. Una constante como la condición inicial

Esta parte está dedicada a mejorar el Teorema 1 de [39] en el caso unidimensional. Con este fin, en esta sección, suponemos que la condición inicial es una constante. Esto es, primero consideramos la ecuación integral fraccionaria

$$X(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} AX(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(X(s))ds, \quad t \geq 0, \tag{4.2}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0,1)$, $A < 0$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible.

En lo que sigue de esta tesis tratamos con las siguientes hipótesis.

(H1) Existe una constante $C > 0$ tal que $A + C < 0$ y $|h(x)| \leq C|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(H2) Existen $\delta_0 > 0$ y $C > 0$ tales que $A + C < 0$ y $|h(x)| \leq C|x|$, para $|x| < \delta_0$.

Ahora, consideramos varias definiciones de estabilidad.

**Definición 4.1.1.** *Cualquier solución de la ecuación (4.2) se dice ser:*

*i)* globalmente estable a lo largo *si $X(t)$ va a cero cuando $t$ tiende a infinito, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ .*

*ii)* Mittag-Leffler estable *si existe $\delta > 0$ tal que $|x_0| < \delta$ implica*

$$|X(t)| \leq \left[m(x_0)E_{\beta,1}(At^{\beta})\right]^{b}, \quad t \geq 0,$$

*donde $\beta \in (0,1)$, $A < 0$, $b > 0$ y $m$ es una función positiva y localmente Lipschitz con $m(0) = 0$.*

*iii)* estable *si para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x_0| < \delta$ implica $|X(t)| < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$.*

*iv)* estable a lo largo *si existe $\delta > 0$ tal que $|x_0| < \delta$ implica* $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$.

*v)* asintóticamente estable *si es estable y estable a lo largo.*

*Observación* 4.1.2. Observe que, bajo las suposiciones de que $h$ es continua y satisface (H1), la ecuación (4.2) tiene al menos una solución en $[0, \infty)$

debido a los Teoremas 1.4.1 y 1.4.2. En efecto, en el Teorema 1.4.2 podemos considerar

$$g(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ (|A|+C)x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Similarmente, para una función continua $h$ que satisface (H2), introducimos la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq \delta_0/2, \\ \delta_0 & \text{si } x > \delta_0/2, \\ -\delta_0 & \text{si } x < -\delta_0/2. \end{cases}$$

Entonces, usando los Teoremas 1.4.1 y 1.4.2 de nuevo, la ecuación

$$X(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (AX(s) + h(\varphi(X(s)))ds \tag{4.3}$$

tiene al menos una solución definida en $[0, \infty)$ debido a $|Ax + h(\varphi(x))| \leq |Ax| + C|\varphi(x)| \leq (|A|+C)|x|$. Por lo tanto, la ecuación (4.2) tiene al menos una solución continua en $[0, \infty)$ si (4.3) es estable y $x_0$ es suficientemente pequeña porque, en este caso, la solución de (4.3) también es una solución de la ecuación (4.2) y $h \circ \varphi$ es acotada. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que (4.2) tiene al menos una solución continua, ya que el objetivo principal de esta sección es tratar con la estabilidad de cualquier solución de (4.1).

Necesitamos el siguiente lema para probar algunos resultados. La idea principal de su prueba está en el artículo de Martínez-Martínez et al. [25]. Damos un bosquejo de su demostración para que su lectura sea más sencilla.

**Lema 4.1.3.** *([25]) Sea $h$ como en (H2) (resp. (H1)). Entonces, para $0 < x_0 < \delta_0$ (resp. $x_0 > 0$), cualquier solución continua $X$ de (4.2) satisface $X(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.*

**Demostración** (Una idea). Sea (H2) (resp. (H1)) cierta y $x_0 \in (0, \delta_0)$ (resp. $x_0 > 0$). Entonces la continuidad de $X$ implica que existe $\tau > 0$ tal que $X(t) \in (0, \delta_0)$ (resp. $X(t) > 0$) para $t \in [0, \tau]$. Consecuentemente, de que $A + C < 0$

$$0 < X(t) \leq x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [A + C] X(s) ds < x_0. \tag{4.4}$$

En otras palabras, hemos probado que $X(t)$ es menor que $x_0$ si $X > 0$ en $[0, t]$. Ahora suponga que $\tau_0 = \text{ínf}\{t > 0 : X(t) = 0\}$ es finito. Por lo tanto, de (4.2) deducimos

$$x_0 = -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\tau_0} (\tau_0 - s)^{\beta-1} [AX(s) + h(X(s))] ds.$$

Entonces, usando (4.2) de nuevo, tenemos

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\int_0^t (t-s)^{\beta-1}[AX(s)+h(X(s))]ds \right. \\ &\quad \left. -\int_0^{\tau_0} (\tau_0-s)^{\beta-1}[AX(s)+h(X(s))]ds\right), \quad t \leq \tau_0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $AX(s)+h(X(s)) \leq [A+C]X(s) \leq 0$ en $[0,\tau_0]$ debido a las hipótesis de este resultado, podemos escribir

$$X(t) \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}(|A|+C)\int_t^{\tau_0}(\tau_0-s)^{\beta-1}X(s)ds, \quad t \in [0,\tau_0]. \tag{4.6}$$

Así, iterando esta desigualdad podemos encontrar una constante positiva $\tilde{C}$ tal que

$$X(t) \leq \tilde{C}\left(\frac{(|A|+C)(\tau_0-t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)^{n-1}.$$

Por lo tanto, tomando $t \in (0,\tau_0)$ tal que $\frac{(|A|+C)(\tau_0-t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} < 1$ deducimos que $X(t) = 0$, lo cual es una contradicción.

□

*Observación* Como se dijo en [25], si la condición inicial en la ecuación (4.2) es una función no decreciente, continua y no negativa en vez de una constante, podemos repetir el procedimiento de esta prueba y obtener el mismo resultado. En efecto, suponga que $0 < \xi_t < \delta_0$ (resp. $\xi_t > 0$) para todo $t \geq 0$, primero que nada (4.4) se convierte en

$$0 < X(t) \leq \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}[A+C]X(s)ds < \xi_t.$$

Segundo, en vez de la desigualdad (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} X(t) = \xi_t - \xi_{\tau_0} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \bigg( \int_0^t (t-s)^{\beta-1}[AX(s) + h(X(s))]ds \\ - \int_0^{\tau_0} (\tau_0 - s)^{\beta-1}[AX(s) + h(X(s))]ds \bigg) \\ \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \bigg( \int_0^t (t-s)^{\beta-1}[AX(s) + h(X(s))]ds \\ - \int_0^{\tau_0} (\tau_0 - s)^{\beta-1}[AX(s) + h(X(s))]ds \bigg), \quad t \leq \tau_0, \end{aligned}$$

debido a que $\xi$ es no decreciente. Por lo tanto, no es difícil ver que (4.6) es cierta en este caso.

Como una consecuencia inmediata de la primera parte del Lema 4.1.3 tenemos lo siguiente.

**Corolario 4.1.4.** *Suponga que (H2) o (H1) son ciertas. Entonces, cualquier solución continua de la ecuación (4.2) es estable.*

**Demostración**. Si $x_0 > 0$, el resultado se sigue de (4.4).

Para $x_0 < 0$ y $X$ una solución de (4.2), tenemos que $-X$ es una solución de

$$Y(t) = -x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}[AY(s)ds + \hat{h}(Y(s))]ds, \quad t \geq 0,$$

con $\hat{h}(x) = -h(-x)$. □

Ahora damos el resultado principal de esta sección.

**Proposición 4.1.5.** *Sea $h$ una función que satisfafce (H2) (resp. (H1)). Entonces cualquier solución continua de la ecuación (4.2) es Mittag-Leffler estable y por lo tanto también es asintóticamente estable (resp. globalmente estable a lo largo).*

**Demostración**. Sea (H2) (resp. (H1)) cierta y $0 < x_0 < \delta_0$ (resp. $x_0 > 0$). Entonces $0 < X(t) < \delta_0$ (resp. $X(t) > 0$) debido al Lema 4.1.3 y su prueba.

Por otro lado, considere la solución $Z$ de la siguiente ecuación lineal fraccionaria

$$Z(t) = 2x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}[A+C]Z(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Entonces, por la continuidad de las soluciones $X$ y $Z$, existe $\tau > 0$ tal que, para todo $t \in (0, \tau)$, tenemos $0 < X(t) < Z(t)$. Si esta desigualdad es cierta para cualquier $t > 0$, podemos asegurar que $X$ es asintóticamente estable (resp. globalmente estable a lo largo), y que esta solución también es Mittag-Leffler estable porque la solución de $Z$ de la última ecuación está dada por (ver [16] o el Lema 1.3.2)

$$Z(t) = 2x_0 E_{\beta,1}([A+C]t^\beta), \quad t \geq 0.$$

Ahora suponemos que existe $t_0 > 0$ tal que $X(t_0) = Z(t_0)$ y $X(t) < Z(t)$, para $t < t_0$. Sea $Y = X - Z$, entonces

$$\begin{aligned}Y(t) &= -x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} AY(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}[h(X(s)) - CZ(s)]ds, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Del Lema 1.3.2 (ver también [16]) observamos que $Y$ también satisface la igualdad

$$Y(t) = -x_0 E_{\beta,1}(At^\beta) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)[h(X(s)) - CZ(s)]ds, \quad t \geq 0.$$

Para $s \in (0, t_0)$, tenemos $|h(X(s))| \leq CX(s) < CZ(s)$. Entonces $h(X(s)) - CZ(s) < 0$. Consecuentemente, usando la propiedad de que $E_{\beta,\beta}$ es completamente monótona deducimos que $Y(t_0) < 0$, y esto es una contradicción porque se supuso que $Y(t_0) = 0$. Ahora podemos concluir que $X$ es Mittag-Leffler estable.

Finalmente consideramos el caso $-\delta_0 < x_0 < 0$ (resp. $x_0 < 0$). Note que $\hat{X} = -X$ es tal que

$$\hat{X}(t) = -x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} A\hat{X}(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\tilde{h}(\hat{X}(s))ds, \quad t \geq 0,$$

con $\tilde{h}(x) = -h(-x)$. Por lo tanto, por la primera parte de esta prueba y el hecho de que $\tilde{h}$ satisface (H2) (resp. (H1)), tenemos que la demostración está completa.

□

*Observación* Sea $X$ una solución de la ecuación (4.2). Wen et al. [39] (Teorema 1) probaron que la solución de la ecuación (4.2) es estable si $\lim_{|x|\to 0} \frac{|h(x)|}{|x|} \to 0$. También, Zhang y Li [42] usaron un resultado similar al Lema 1.3.2 para probar que $X$ es asintóticamente estable en el caso en que $\lim_{x\to 0} \frac{|h(x)|}{|x|} = 0, \beta \in (1,2)$ y $\beta + \frac{1}{|A|} < 2$. La Proposición 4.1.5 establece que $X$ es asintóticamente estable bajo una condición más débil. Es decir (H2). Esto es posible porque usamos un resultado de comparación y el hecho de que esta solución no cambia de signo.

## 4.2. Una función como la condición inicial

En esta parte tratamos el caso en que la condición inicial es una función que satisface algunas hipótesis convenientes.

Considere la siguiente ecuación integral determinista de Volterra

$$X(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} AX(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(X(s))ds, \quad t \geq 0. \tag{4.7}$$

Aquí $\beta \in (0,1)$, $A < 0$, y $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $\xi : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ son dos funciones medibles.

Con respecto a la existencia de una solución continua de la ecuación (4.7) observamos lo siguiente. Para una función continua $h$ como en (H1) y $\xi$ continua, podemos considerar la ecuación

$$Z(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s, Z(s)) ds,$$

donde $f(s,x) = A(x+\xi_s) + h(x+\xi_s)$, que tiene una solución $Z$ debido al Teorema 1.4.2 (con $g(s,x) = (|A|+C)(x+|\xi_s|)$) y el Lema 1.3.2. Por lo tanto $Z+\xi$ es una solución de (4.7). Similarmente si $\xi$ es "suficientemente pequeña" y $h$ es una función Lipschitz en una vecindad del cero, o como en (H2), podemos proceder como en la Observación 4.1.2 para ver que (4.7) tiene al menos una solución en este caso. Así, como en la Observación 4.1.2, podemos suponer que (4.7) tiene al menos una solución continua.

Por otro lado, recordemos que en este trabajo $\mathcal{E}$ podría representar un subconjunto de un espacio lineal normado equipado con $||\cdot||_{\mathcal{X}}$.

En el siguiente resultado auxiliar, $\mathcal{E}^4$ es la familia de funciones $\xi$ que tienen la representación (2.3) con $\eta = \beta$ y $g$ es una función continua tal que $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$. En este caso, la norma involucrada es $||\xi||_{\mathcal{X}} = ||g||_{\infty,[0,\infty)}$. Recuerde que una solución $X$ de (4.7) que es $\mathcal{E}$-estable y globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo (ver Definición 2.1.2) también es asintóticamente $\mathcal{E}$-estable.

**Lema 4.2.1.** *Sea $B < 0$ y $\xi \in \mathcal{E}^4$. Entonces la solución de la ecuación*

$$Y(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} BY(s)ds, \quad t \geq 0,$$

*es $\mathcal{E}^4$-estable y globalmente $\mathcal{E}^4$-estable a lo largo.*

**Demostración**. Solamente tenemos que observar que, por el Lema 1.3.2 tenemos

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^\beta) g(s)ds \\ &= \int_0^t s^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(Bs^\beta) g(t-s)ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Así, como $E_{\beta,\beta}$ es completamente monótona, (1.1) y (1.3) nos permiten establecer que

$$\begin{aligned} |Y(t)| &\leq \left(\sup_{s\geq 0} |g(s)|\right) \int_0^t s^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(Bs^\beta)ds = \left(\sup_{s\geq 0} |g(s)|\right) t^\beta E_{\beta,\beta+1}(Bt^\beta) \\ &\leq \frac{C_{\beta,\beta+1}}{|B|} ||g||_{\infty,[0,\infty)}. \end{aligned}$$

De este modo, $Y$ es $\mathcal{E}^4$-estable.

También, de (1.3) podemos escribir

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^\beta) g(s)ds \\ &= g(t) t^\beta E_{\beta,\beta+1}(Bt^\beta) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-s)^\beta)[g(s) - g(t)]ds, t \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (1.1) y la prueba de la Proposición 2.1.3 de nuevo, junto con los hechos de que $B < 0$ y $g$ es una función continua tal que $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, obtenemos $Y(t) \to 0$ si $t \to \infty$.

$\square$

Ahora damos un resultado general.

**Teorema 4.2.2.** *Sea (H2) (resp. (H1)) cierta, y $\mathcal{E}$ una familia de funciones continuas de un espacio lineal normado $\mathcal{X}$ tal que la solución de la ecuación*

$$Y(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} AY(s)ds, \quad t \geq 0, \tag{4.8}$$

*es asintóticamente $\mathcal{E}$-estable (resp. globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo). Entonces cualquier solución continua de la ecuación (4.7) es también asintóticamente $\mathcal{E}$-estable (resp. globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo).*

**Demostración**. Suponga que (H1) (resp. (H2)) es cierta. Sea $X$ una solución continua de la ecuación (4.7). Tome $Z = X - Y$, entonces tenemos

$$Z(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [AZ(s) + h(X(s))]ds, \quad t \geq 0.$$

Por lo tanto, el Lema 1.3.2 nos permite escribir

$$Z(t) = \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^{\beta}) h(X(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Entonces, para $\xi \in \mathcal{E}$ tenemos (resp. para $\xi \in \mathcal{E}$ tal que $||Y||_{\infty,[0,\infty)} < \delta_0$, lo que da $|\xi_0| = |Y(0)| < \delta_0$, la continuidad de $X$ implica que existe $t_0 > 0$ tal que $||X||_{\infty,[0,t_0)} < \delta_0$ y)

$$\begin{aligned} |Z(t)| &\leq C \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)|X(s)|ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)|Z(s)|ds \\ &\quad + C \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)|Y(s)|ds,\ t \geq 0 \text{ (resp. } t \leq t_0), \end{aligned}$$

donde hacemos uso de la propiedad de monotonicidad completa de $E_{\beta,\beta}$. Invocando el Lema 1.4.3 y la unicidad de las soluciones de las ecuaciones involucradas, $|Z(t)| \leq u(t)$ para todo $t \geq 0$ (resp. $t \leq t_0$), donde $u$ es la solución de

$$u(t) = \frac{C}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}|Y(s)|ds + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}[A+C]u(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Finalmente observe que $|X(t)| \leq u(t) + |Y(t)|$ para $t \geq 0$ (resp. para $t \leq t_0$ tal que $||X||_{\infty,[0,t_0)} < \delta_0$). Aplicando el Lema 4.2.1 a la única solución de $u$ y del hecho de que la solución de $Y$ es globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo (resp. asintóticamente $\mathcal{E}$-estable) la prueba está completa.

$\square$

*Observaciones*

i) Análogamente a la Proposición 2.1.4, sea $\xi \in \mathcal{E}$ con $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^{(i)}$, donde $\xi^{(i)} \in \hat{\mathcal{E}}^{(i)} \subset \mathcal{X}^{(i)}$ y (4.8) es $\hat{\mathcal{E}}^{(i)}$-estable para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, (4.8) también es $\mathcal{E}$-estable.

ii) Observe que $\mathcal{E}^1$ contiene a las funciones de variación acotada en conjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$ con representación $\xi = \xi^{(1)} - \xi^{(2)}$, donde $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$ son dos funciones no decrecientes y acotadas en $\mathbb{R}_+$.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 4.2.2 y de la Proposición 2.1.4.

**Teorema 4.2.3.** *Suponga que (H2) (resp. (H1)) se satisface. Sea $\xi$ como en la Proposición 2.1.4. Entonces, cualquier solución de (4.7) es asintóticamente $\mathcal{E}$-estable (resp. globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo).*

**Demostración** Aquí consideramos la ecuación (4.8) con $\xi = \sum_{i=1}^{3} \xi^{(i)}$, donde $\xi^{(i)} \in \mathcal{E}^{(i)}$ (ver Definición 2.1.1). Así, por la Observación i) anterior solamente tenemos que ver que la solución de (4.8) es $\mathcal{E}^{(i)}$-estable y globalmente $\mathcal{E}^{(i)}$-estable a lo largo, para $i = 1, 2, 3$, para afirmar que (4.8) también es $\mathcal{E}$-estable y globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo. Sea $Y$ la solución de (4.8). Para terminar la prueba, solamente resta aplicar la Proposición 2.1.4 a la solución de $Y$.

$\square$

## 4.3. Ecuaciones integrales semilineales con ruido aditivo

En esta sección consideramos la ecuación

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [AX(s) + h(X(s))] ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) d\theta_s, \quad t \geq 0. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Aquí $\xi, \beta, A$ y $h$ son como en la ecuación (4.7). De aquí en adelante suponemos que $\alpha \in (1,2)$, $\theta = \{\theta_s, s \geq 0\}$ es una función $\gamma$-Hölder continua con $\gamma \in (0,1)$ tal que $\theta_0 = 0$ y $\gamma + \alpha > 2$, y $f$ es una función $\tau$-Hölder continua en $C^1(\mathbb{R}_+)$, con $\tau + \gamma > 1$. Note que, en este caso, la integral de Young en el lado derecho de (4.9) es igual a

$$
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d\tilde{\theta}_s,
$$

donde

$$
\tilde{\theta}_s = \int_0^s f(r) d\theta_r
$$

debido al Lema 1.2.7. Entonces, el Lema 1.3.2 sigue siendo válido para (4.9) y el Lema 1.2.10 implica

$$
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) d\theta_s = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \tilde{\theta}_s ds.
$$

Por lo tanto, la existencia de una solución continua de (4.9) puede ser considerada como en la Sección 4.2.

Daremos algunos criterios de estabilidad en el sentido de la Definición 3.1.1. De primera instancia probamos una extensión del Teorema 4.2.2.

**Teorema 4.3.1.** *Sea (H2) (resp. (H1)) cierta y $\mathcal{E}$ una clase de funciones continuas tal que la solución de la ecuación*

$$Y(t) = \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} AY(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)d\theta_s, \quad t \geq 0, \tag{4.10}$$

*es asintóticamente $(\mathcal{E}, p)$-estable (resp. globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo). Entonces, cualquier solución continua de (4.9) también es asintóticamente $(\mathcal{E}, p)$-estable (resp. globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo).*

**Demostración**. Observe que $X(0) = \xi_0$. Consecuentemente la prueba es similar a la del Teorema 4.2.2.

□

Ahora enunciamos una consecuencia del Teorema 4.3.1.

**Teorema 4.3.2.** *Suponga que (H2) (resp. (H1)) se cumple. Sea $\xi$ como en la Proposición 2.1.4, $f \in C^1((0,\infty))$ es tal que $\dot{f}\theta \in L^1([0,\infty))$ y $f\theta \in L^1([0,\infty)) \cap L^p([0,\infty))$ para algún $p > \frac{1}{\alpha-1}$, y $\beta+1 > \alpha$. Entonces, cualquier* *solución continua de (4.9) es asintóticamente $(\mathcal{E}, p)$-estable (resp. globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo).*

**Demostración**. Suponga que (H2) (resp. (H1)) se satisface. En vista del Teorema 4.3.1 solamente necesitamos ver que la solución $Y$ de la ecuación (4.10) es asintóticamente $(\mathcal{E}, p)$-estable (resp. globalmente $\mathcal{E}$-estable a lo largo). Con este fin, invocamos el Lema 1.3.2 y el Lema 1.2.7 para establecer

$$\begin{aligned} Y(t) = \xi_t + A \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)\xi_s ds \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(A(t-s)^\beta) f(s) d\theta_s, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

De lo anterior, usamos la Proposición 2.1.4 y la prueba del Teorema 3.1.3 para terminar la demostración.

□

Recuerde que todos nuestros procesos y variables aleatorias se encuentran definidas en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

*Observación* 4.3.3. Note que, en la ecuación (4.9), podemos considerar la variable aleatoria $A : \Omega \to (-\infty, 0)$, procesos estocásticos $\xi$, $\theta$ y $f$, y un campo aleatorio $h$ tal que para casi todo $\omega$, $A(\omega)$, $\xi_\cdot(\omega), \theta_\cdot(\omega), f(\omega, \cdot)$ y $h(\omega, \cdot)$ satisfacen las hipótesis del Teorema 4.3.2 (o del Teorema 4.3.1), entonces podemos analizar la estabilidad de la ecuación (4.9) $\omega$ por $\omega$ (i.e., con probabilidad uno). Un ejemplo para el proceso $\theta$ es el movimiento browniano fraccionario $B^H$ con parámetro de Hurst $H \in (0,1)$.

Como una consecuencia inmediata de la prueba del Teorema 4.2.2, enunciamos la siguiente extensión del Teorema 4.3.1. Recuerde que cualquier solución de (4.10) es $\mathcal{E}$-estable en la media si $\mathbf{E}|X(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier proceso $\xi \in \mathcal{E}$ (ver Definición 3.2.1).

**Teorema 4.3.4.** *Sea $h$ satisfaciendo (H1), $A < 0$, $\mathcal{E}$ es una familia de procesos continuos y $f, \theta$ son como en la Observación 4.3.3 tales que la solución de la ecuación (4.10) es estable en la media. Entonces, cualquier solución continua de la ecuación (4.9) también es $\mathcal{E}$-estable en la media.*

*Observación* En la Sección 3.1 podemos encontrar ejemplos de procesos para los cuales la solución de (4.10) es $\mathcal{E}$-estable en la media.

Recordemos que un proceso continuo $\xi$ pertenece a $\mathcal{E}$ en la media ($\xi \in \mathcal{E}_m$) si $\mathbf{E}(|\xi|) \in \mathcal{E}$.

Ahora consideramos la ecuación integral estocástica

$$\begin{aligned} X(t) &= \xi_t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}[AX(s) + h(X(s))]ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^t (t-s)^{\beta} f(s) dB_s^{\gamma}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Aquí, con el propósito de terminar la tesis, $A, h, \beta, \gamma$ y $f$ son como en la ecuación (4.9) con $\beta+\gamma>1$, y $\xi$ es un proceso estocástico continuo. Recordamos que interpretamos la ecuación (4.11) trayectorialmente (i.e. $\omega$ por $\omega$).

La noción de estabilidad que estudiamos para la ecuación (4.11) es la $(\mathcal{E},p)$-estabilidad en la media (ver Definición 3.2.5).

**Proposición 4.3.5.** *Sea (H2) cierta, $\xi$ es como en la Proposición 2.1.4, $p>\frac{1}{\beta}$ y $f\in C^1((0,\infty))$ es una función positiva con derivada negativa tal que $\Big(r\mapsto r^\gamma|\dot{f}(r)|\Big)\in L^1([0,\infty))$ y $(r\mapsto r^\gamma f(r))\in L^1([0,\infty))\cap L^p([0,\infty))$. Más aún, sea $h$ una función no decreciente y localmente Lipschitz, la cual es cóncava en $\mathbb{R}_+$ y convexa en $\mathbb{R}_-\cup\{0\}$. Entonces, la solución de la ecuación (4.11) es $(\tilde{\mathcal{E}},p)$-estable en la media, donde $\xi\in\tilde{\mathcal{E}}$ si y sólo si $\xi=\xi^{(1)}-\xi^{(2)}$ con $\xi^1,\xi^2$ dos procesos no negativos y continuos en $\mathcal{E}_m$.*

**Demostración** Sea $X$ una solución continua de la ecuación (4.11). Entonces el Lema 1.3.2 implica que

$$
\begin{aligned}
X(t) = {} & \xi_t E_{\beta,1}(At^\beta) + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi_s-\xi_t)ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)h(X(s))ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{\beta}E_{\beta,\beta+1}(A(t-s)^\beta)f(s)dB^\gamma_s \\
\le {} & \xi^{(1)}_t E_{\beta,1}(At^\beta) + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi^{(1)}_s-\xi^{(1)}_t)ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)h(X(s))ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)|B^\gamma_s|f(s)ds \\
& - \int_0^t (t-s)^{\beta}E_{\beta,\beta+1}(A(t-s)^\beta)\dot{f}(s)|B^\gamma_s|ds, \quad t\ge 0,
\end{aligned}
$$

donde la desigualdad anterior se sigue de los hechos de que $0 \le \xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ son dos procesos no decrecientes, $f, (-\dot{f}) \ge 0$ y del Lema 1.2.10. Entonces, afirmamos, debido al Lema 1.4.3, que $X \le X^{(1)}$ donde $X^{(1)}$ es la solución de

$$
\begin{aligned}
X^{(1)}(t) = {} & \xi^{(1)}_t E_{\beta,1}(At^\beta) + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)(\xi^{(1)}_s-\xi^{(1)}_t)ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)h(X^{(1)}(s))ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)|B^\gamma_s|f(s)ds \\
& - \int_0^t (t-s)^{\beta}E_{\beta,\beta+1}(A(t-s)^\beta)\dot{f}(s)|B^\gamma_s|ds, \quad t\ge 0. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Observe que también tenemos que $X^{(1)}(t) \ge 0$ debido a $h(0)=0$, el Lema

1.4.3 y

$$-X^{(1)}(t) \leq \int_0^t (t-s)^{\beta-1}(A(t-s)^{\beta})\hat{h}(-X^{(1)}(s))ds, \quad t \geq 0,$$

con $\hat{h}(x) = -h(-x), x \in \mathbb{R}$. Procediendo de manera similar tenemos $-X(t) \leq X^{(2)}(t)$, con $X^{(2)}(t) > 0$ y

$$\begin{aligned} X^{(2)}(t) \;\; &= \;\; \xi_t^{(2)} E_{\beta,1}(At^{\beta}) + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^{\beta})(\xi_s^{(2)} - \xi_t^{(2)})ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^{\beta})\hat{h}(X^{(2)}(s))ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^{\beta})|B_s^{\gamma}|f(s)ds \\ &\quad - \int_0^t (t-s)^{\beta} E_{\beta,\beta+1}(A(t-s)^{\beta})\dot{f}(s)|B_s^{\gamma}|ds, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

En otras palabras,

$$\mathbf{E}\left(|X(t)|\right) \leq \mathbf{E}\left(X^{(1)}(t)\right) + \mathbf{E}\left(X^{(2)}(t)\right), \quad t \geq 0. \tag{4.14}$$

Finalmente, en vista del Lema 1.4.3, observe que (4.12), (4.13) y la desigualdad de Jensen dan, para $\theta_s = s^{\gamma}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(X^{(1)}(t)\right) \leq \mathbf{E}(\xi_t^{(1)}) & E_{\beta,1}(At^{\beta}) \\ & + A\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^{\beta})\mathbf{E}(\xi_s^{(1)} - \xi_t^{(1)})ds \\ & + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(t-s)^{\beta})h(\mathbf{E}[X^{(1)}(s)])ds \\ & + \int_0^t (t-s)^{\beta} E_{\beta,\beta+1}(A(t-s)^{\beta})f(s)d\theta_s \leq u^{(1)}(t) \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X^{(2)}(t)\right) \leq \mathbf{E}(\xi_t^{(2)})E_{\beta,1}(At^\beta)\\
&+ A\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)\mathbf{E}(\xi_s^{(2)}-\xi_t^{(2)})ds\\
&+ \int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(t-s)^\beta)\hat{h}(\mathbf{E}[X^{(2)}(s)])ds\\
&+ \int_0^t (t-s)^{\beta}E_{\beta,\beta+1}(A(t-s)^\beta)f(s)d\theta_s \leq u^{(2)}(t), \quad t\geq 0,\end{aligned}$$

donde $u^{(i)}, i = 1, 2$ es la única solución de la ecuación

$$\begin{aligned}u^{(i)}(t) = \mathbf{E}(\xi_t^{(i)}) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}[A+C]u^{(i)}(s)ds\\
+ \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^t (t-s)^{\beta}f(s)d\theta_s, \quad t\geq 0.\end{aligned}$$

Por lo que, de (4.14) deducimos

$$\mathbf{E}(|X(t)|) \leq u^{(1)}(t) + u^{(2)}(t), \quad t \geq 0. \tag{4.15}$$

Así, de (4.15), junto con las pruebas de la Proposición 2.1.4 y del Teorema 3.1.3, implica que el resultado es válido.

□

**Ejemplo 4.3.6.** Una función $h$ que satisface las condiciones de la Proposición 4.3.5 es

$$h(x) = \begin{cases} 1 - e^{-Cx}, & si\ x \geq 0 \\ e^{Cx} - 1, & si\ x < 0, \end{cases}$$

donde $C > 0$. En efecto, tenemos que

$$h'(x) = \begin{cases} Ce^{-Cx}, & si\ x \geq 0 \\ \\ Ce^{Cx}, & si\ x < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|h(x)| \leq (C + \varepsilon)|x| \quad \text{para} \quad |x| \leq \delta.$$

**Ejemplo 4.3.7.** Damos una función que satisface la Suposición 2 de la Definición 2.1.1. Sea $\xi_t = g(t) \sin \frac{1}{t}$, $t \geq 0$. La función $g$ es acotada y satisface $g(t) = \psi(t) c_0 t^{3-v} + \varphi(t) \frac{c_1}{1+t}$, donde $\psi, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ son tales que

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1]; \\ \\ 0 & \text{si } t \geq 2, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1]; \\ \\ 1 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

De este modo

$$\xi_t' = g'(t) \text{sen} \frac{1}{t} - g(t) t^{-2} \cos \frac{1}{t}, \quad t \geq 0.$$

Por lo tanto es inmediato verificar nuestra afirmación usando cálculos directos.

# Bibliografía


[1] E.Alòs and D.Nualart: *Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion.* Stoch. Stoch. Rep. **75** no. 3, (2003) 129-152.

[2] J.A.D.Appleby and A.Freeman: *Exponential asymptotic stability of linear Itô-Volterra equations with damped stochastic perturbations.* Electronic Journal of Probability **8**, paper 22, (2003) 1-22.

[3] L.Arnold: *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications.* John Wiley & Sons, Inc. (1974).

[4] R.L.Bagley and R.A.Calico: *Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures.* J. Guid. Control Dyn., **14**, (1991) 304-311.

[5] T.Q.Bao: *On the existence, uniqueness and stability of solutions of stochastic Volterra-Ito equation.* Vietnam Journal of Mathematics **32**, no.

4, (2004) 389-397.

[6] C.Bender and R.J.Elliot: *On the Clark-Ocone theorem for fractional Brownian motion with Hurst parameter bigger than a half.* Stochastics and Stochastics Rep. **75** 6, (2003) 391-405.

[7] S.Das: *Functional Fractional Calculus for Systems Identication and Controls.* Springer Berlin Heidelberg New York (2008).

[8] L.Decreusefond and A. S.Üstünel: *Stochastic analysis of the fractional Brownian motion.* Potential Analysis **10**, (1999) 177-214.

[9] R.M.Dudley and R.Norvaiša, *An introduction to p-variation and Young Integrals.* Tech. Rep. 1, Maphysto, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, University of Aarhus. Concentrated advanced course (1998).

[10] A.Fiel, J.A.León and D.Márquez-Carreras: Stability for some linear stochastic fractional systems. Communications on Stochastic Analysis, Serials Publications, Vol. 8, No. 2, 205-225 (2014) .

[11] P.K.Friz and M.Hairer: A Course on Rough Paths: With an Introduction to Regularity Structures. Springer International Publishing Switzerland (2014).

[12] M.Gubinelli: *Controlling rough paths.* J. Funct. Anal. **216**, (2004) 86-140.

[13] I.Grigorenko and E.Grigorenko: *Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system.* Physical Review Letters **91** (2003).

[14] R.Hilfer: *Applications of Fractional Calculus in Physics.* World Scientic, River Edge, New Jersey (2000).

[15] M.Ichise, Y.Nagayanagi, T.Kojima: *An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes.* J. Electroanal. Chem. **33**, (1971) 253-265.

[16] D.Junsheng, A.Jianye and X.Mingyu: *Solution of system of fractional differential equations by Adomian decomposition method.* Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B **22** no. 1, (2007) 7-12.

[17] A.A.Kilbas, H.M.Srivastava and J.J.Trujillo: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations: Theory and Applications*, North-Holland and Mathematic Studies **204** (2006).

[18] V.Lakshmikantham and A.S.Vatsala: *Basic theory of fractional differential equations*. Nonlinear Analysis 69 (2008) 2677-2682.

[19] J.A.León and S.Tindel: *Malliavin calculus for fractional delay equations.* J. Theoret. Probab. **25**, no. 3, (2012) 854-889.

[20] Y.Li, Y.Q.Chen and I.Podlubny: *Stability of fractional-order systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability.* Computer and Mathematics with Applications **59**, (2010) 1810-1821.

[21] W.Li, M.Liu and K.Wang: *A generalization of Itô's formula and the stability of stochastic Volterra integral equations.* Journal of Applied Mathematics, Article ID 292740, (2012) 16 pages.

[22] T.Lyons: *Differential equations driven by rough signals I: An extension of an inequality of L. C. Young*, Mathematical Research Letters **1**, (1994) 451-464.

[23] D.Matignon: Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In Proc IMACS, IEEE-SMC, (1996) 963-968.

[24] R.Martínez-Guerra, C.A.Pérez-Pinacho and G.C.Gómez-Cortés: *Synchronization of Integral and Fractional Order Chaotic Systems: A Differential Algebraic and Differential Geometric Approach With Selected*

*Applications in Real-Time*, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London (2015).

[25] R.Martínez-Martínez, J.A.León and G.Fernández-Anaya: *Asymptotc stability of fractional order nonlinear systems via Lyapunov like conditions*. Preprint (2013).

[26] K.S.Miller and B.Ross: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* John Wiley & Sons, Inc, New York (1993).

[27] K.S.Miller and S.G.Samko: *Completely monotonic functions.* Integral Transform. and Spec. Funct. **12**, no. 4, (2001) 389-402.

[28] D.Nguyen: *Asymptotic behavior of linear fractional stochastic differential equations with time-varying delays.* Communications on Nonlinear Science and Numerical Simulation **19**, no. 1, (2014) 1-7.

[29] D.Nualart: *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications*, In Stochastic Models, Contemporary Mathematics, **336**, (2003) 3-39 .

[30] D.Nualart: The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer-Verlag, Berlin (2006).

[31] D.Nualart and A.Răşcanu: *Differential equations driven by fractional Brownian motion*, *Collect Math.* **53**, no. 1, (2002) 55-81.

[32] B.G.Pachpatte: *Inequalities for Differential and Integral Equations.* ACADEMIC PRESS LIMITED, Volume 197, Marathwada University, Aurangabad, India 1998.

[33] I.Podlubny: *Fractional Differential Equations*. 9th Edition, Academic Press (1999).

[34] L.Quer-Sardanyons and S.Tindel: *Pathwise definition of second-order SDES*. Stochastic Processes and their Applications **122**, no. 2, (2012) 466-497.

[35] W.Rudin: *Functional Analysis.* McGraw-Hill (1973).

[36] F.Russo and P.Vallois: *Elements of stochastic calculus via regularisation.* Séminaire de Probabilités XL, Lecture Notes in Math. **1899**, (2007) 147-185.

[37] S.G.Samko, A.A.Kilbas and O.I.Marichev: *Fractionl Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers (1993).

[38] W.R.Schneider: *Completely monotone generalized Mittag-Leffler functions*. Expo. Math **14**, (1996) 3-16.

[39] X.-J.Wen, Z.-M.Wu and J.-G-Lu: *Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems.* IEEE Transactions on circuits and systems - II: Express Briefs. **55 (11)** (2008), 1178-1182.

[40] L.C.Young: *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration.* Acta Math. **67**, (1936) 251-282 .

[41] M.Zähle: *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I.* Probab. Theory Relat. Fields **111**, (1998) 333-374.

[42] F.Zhang and C.Li: Stability Analysis of Fractional Differential Systems with Order Lying in $(1, 2)$, Advances in Difference Equations, (2011).

[43] C.Zhang, W.Li and K.Wang: *Stability and boundedness of stochastic Volterra integrodifferential equations with infinite delay.* Journal of Applied Mathematics, Article ID 320832, (2013) 9 pages.

[44] B.Zhang and J.Zhang: *Conditional stability of stochastic Volterra equations with anticipating kernel.* Journal of Mathematical Research & Exposition **22**, no. 2, (2002) 167-176.

[45] C.Zeng, Q.Yang and Y.Q.Chen: *Lyapunov techniques for stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion.* Abstract and Applied Analysis, Article ID 292653, (2014) 9 pages.

## Artículos publicados

- A.Fiel, J.A.León and D.Márquez-Carreras: *Stability for some linear stochastic fractional systems.* Communications on Stochastic Analysis, Serials Publications, Vol. 8, No. 2, 205-225 (2014).

- A.Fiel y J.A.León: *Diferentes definiciones de integral con respecto a una función.* Modelos en Estadística y Probabilidad III. Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 47, 89-122, 2014.