



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**Unidad Zacatenco**

**Departamento de Control Automático**

**Sincronización Generalizada de sistemas no  
diferencialmente planos y de Liouville**

**TESIS**

Que presenta

**Juan Pablo Flores Flores**

Para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias**  
en la Especialidad de  
**Control Automático**

**Director de la Tesis:**

**Dr. Rafael Martínez Guerra**

Ciudad de México

Agosto, 2018



*Para mi familia,  
porque todo lo bueno que hay en mí se lo debo a ustedes.*



# Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar los estudios de la Maestría en Ciencias en la Especialidad de Control Automático.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), así como al Departamento de Control Automático, por aportar los recursos y las instalaciones necesarias para el desarrollo de este trabajo.

A mi asesor Dr. Rafael Martínez Guerra por su tiempo, esfuerzo y constante supervisión durante el desarrollo de este trabajo de tesis.

A mis sinodales Dr. Moises Bonilla Estrada y Dr. Carlos Fernando Aguilar Ibañez por sus observaciones y comentarios.



# Índice general

Lista de figuras	VII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Caos, sincronización y teoría de control. . . . .	3
<b>2. Sistemas no diferencialmente planos y de Liouville.</b>	<b>5</b>
2.1. Sistemas no diferencialmente planos. . . . .	5
2.2. Sistemas de Liouville. . . . .	7
2.3. Algunos sistemas caóticos. . . . .	8
2.3.1. Sistema de Lorenz. . . . .	8
2.3.2. Sistema de Rössler. . . . .	9
2.3.3. Sistema de Chua. . . . .	10
<b>3. Sincronización idéntica de sistemas caóticos vía un elemento generador diferenciable.</b>	<b>13</b>
3.1. Planteamiento del problema de sincronización idéntica. . . . .	14
3.2. Ejemplos numéricos de sincronización idéntica. . . . .	16
3.2.1. Sincronización idéntica de dos sistemas de Lorenz diferencialmente planos. . . . .	16
3.2.2. Sincronización idéntica de dos sistemas de Rössler no diferencialmente planos. . . . .	21
3.2.3. Sincronización de un sistema de Chua no diferencialmente plano con un sistema de Chua diferencialmente plano. . . . .	25
<b>4. Sincronización generalizada de sistemas caóticos vía un elemento generador diferenciable.</b>	<b>31</b>
4.1. Planteamiento del problema de sincronización generalizada. . . . .	31
4.2. Ejemplos numéricos de sincronización generalizada. . . . .	33
4.2.1. Sincronización generalizada de un sistema de Lorenz con un sistema de Rössler. . . . .	33
4.2.2. Sincronización generalizada de un sistema de Chua con un sistema de Rössler. . . . .	39

4.2.3. Sincronización generalizada de un sistema de Chua con un sistema de Lorenz. . . . .	44
<b>5. Observadores de estado para sistemas caóticos.</b>	<b>49</b>
5.1. Condición algebraica de observabilidad. . . . .	49
5.2. Propuesta de observador. . . . .	50
5.3. Ejemplo. . . . .	52
5.4. Simulación numérica. . . . .	54
<b>6. Estudio comparativo.</b>	<b>57</b>
6.1. Sincronización de sistemas empleando un control activo. . . . .	57
6.2. Resultados numéricos empleando un control activo. . . . .	58
6.3. Control dinámico contra control activo. . . . .	69
<b>7. Conclusiones y Perspectivas.</b>	<b>75</b>
Referencias . . . . .	78



# Índice de figuras

2.1. Evolución del sistema de Lorenz con condiciones iniciales distintas. . .	9
2.2. Espacio fase del sistema de Rössler con condiciones iniciales distintas.	10
2.3. Evolución del sistema de Chua con condiciones iniciales distintas. . .	11
3.1. Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas de Lorenz. . . . .	18
3.2. Evolución de los sistemas de Lorenz en las coordenadas transformadas.	19
3.3. Evolución de los sistemas de Lorenz en las coordenadas originales. . .	20
3.4. Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas de Rössler. . . . .	22
3.5. Evolución de los sistemas Rössler en las coordenadas transformadas. .	23
3.6. Evolución de los sistemas Rössler en las coordenadas originales. . . .	24
3.7. Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas de Chua. . . . .	26
3.8. Evolución de los sistemas de Chua en las coordenadas transformadas.	27
3.9. Evolución de los sistemas de Chua en las coordenadas originales. . . .	28
4.1. Sistemas caóticos (Lorenz y Rössler) en sus respectivas coordenadas originales . . . . .	35
4.2. Señales del controlador dinámico para la sincronización Lorenz-Rössler	35
4.3. Sincronización de los sistemas Lorenz-Rössler en las coordenadas transformadas. . . . .	36
4.4. Sincronización generalizada de los sistemas Lorenz-Rössler. . . . .	37
4.5. Sistemas caóticos (Chua y Rössler) en sus respectivas coordenadas originales. . . . .	40
4.6. Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas Chua-Rössler. . . . .	41
4.7. Sincronización de los sistemas Chua-Rössler en las coordenadas transformadas. . . . .	42
4.8. Sincronización generalizada de los sistemas Chua-Rössler. . . . .	43
4.9. Sistemas caóticos (Chua y Lorenz) en sus respectivas coordenadas originales. . . . .	45

4.10. Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas Chua-Lorenz. . . . .	45
4.11. Sincronización de los sistemas Chua-Lorenz en las coordenadas transformadas. . . . .	46
4.12. Sincronización generalizada de los sistemas Chua-Lorenz. . . . .	47
5.1. Estado real $x_1$ y estimado $\hat{x}_1$ . . . . .	54
5.2. Estado real $x_3$ y estimado $\hat{x}_3$ . . . . .	55
5.3. Error de estimación del PIO. . . . .	56
6.1. Señales del control activo para la sincronización de los sistemas de Lorenz	59
6.2. Señales del control activo para la sincronización de los sistemas de Rössler	59
6.3. Señales del control activo para la sincronización de los sistemas de Chua	60
6.4. Sincronización de dos sistemas de Lorenz idénticos con $K = [15, 15, 15]$	61
6.5. Sincronización de dos sistemas de Rössler idénticos con $K = [15, 15, 15]$	62
6.6. Sincronización de dos sistemas de Chua idénticos con $K = [20, 20, 20]$	63
6.7. Señales del control activo para la sincronización de los sistemas Lorenz-Rössler . . . . .	64
6.8. Señales del control activo para la sincronización de los sistemas Chua-Rössler . . . . .	65
6.9. Señales del control activo para la sincronización de los sistemas Chua-Lorenz . . . . .	65
6.10. Sincronización de sistemas Lorenz-Rössler con $K = [25, 25, 25]$ . . . . .	66
6.11. Sincronización de sistemas Chua-Rössler con $K = [15, 15, 15]$ . . . . .	67
6.12. Sincronización de sistemas Chua-Lorenz con $K = [20, 20, 20]$ . . . . .	68
6.13. Error de sincronización para los sistemas de Lorenz . . . . .	69
6.14. Error de sincronización para los sistemas de Rössler . . . . .	70
6.15. Error de sincronización para los sistemas de Chua . . . . .	70
6.16. Error de sincronización para los sistemas Lorenz-Rössler . . . . .	71
6.17. Error de sincronización para los sistemas Chua-Rössler . . . . .	71
6.18. Error de sincronización para los sistemas Chua-Lorenz . . . . .	72

# Resumen

En esta tesis se aborda el problema de sincronización generalizada para sistemas caóticos, poniendo especial interés en los sistemas no diferencialmente planos y de Liouville. La metodología empleada aquí está basada en la existencia de un elemento generador diferenciable. En el capítulo 1 se expone un breve recuento histórico del trabajo más sobresaliente en materia de sincronización de sistemas caóticos, haciendo hincapié en aquel que ha conducido a la conformación del problema que compete a este material. Posteriormente, el capítulo 2 presenta lo que es un sistema no diferencialmente plano, así como un sistema de Liouville. Se incluyen ejemplos de este tipo de sistemas para un mayor entendimiento. A continuación, el capítulo 3 introduce la metodología para resolver el problema de sincronización idéntica o completa de sistemas caóticos vía un elemento generador diferenciable, esto es, se ataca el problema de sincronización de sistemas estructuralmente equivalentes. A su vez, para validar la metodología mencionada, se presentan algunos ejemplos resueltos. Posteriormente, el capítulo 4 muestra como emplear la metodología del elemento generador diferenciable para resolver la sincronización de sistemas caóticos estructuralmente diferentes, es decir, se presenta como resolver el problema de sincronización generalizada. Se resuelven algunos ejemplos para ilustrar este proceso. En el capítulo 5 se expone el diseño de un observador de estado, necesario para resolver el problema de sincronización. Se verá que el diseño del observador guarda una cercana relación con el concepto de platitud diferencial. Posteriormente, el capítulo 6 presenta la metodología de sincronización vía control activo, la cual es bien conocida y ampliamente utilizada en la literatura. Con esta se resuelven los ejemplos expuestos en los capítulos 3 y 4, con la finalidad de realizar a continuación una comparación entre la metodología del elemento generador diferenciable (control dinámico) y la del control activo. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan conclusiones generales y se discuten posibles trabajos posteriores.



# Abstract

In this thesis, generalized synchronization problem for chaotic systems is addressed, with special interest in the non differentially flat and Liouvillian systems. The methodology used here is based on the existence of a differentiable generating element. In Chapter 1, a brief historical account of the most outstanding research on chaotic systems synchronization is presented, emphasizing the one that has led to the conformation of the problem which is addressed here. Subsequently, chapter 2 explains what a non differentially flat system is, as well as a Liouvillian system. In order to have a better understanding, some examples are presented. Next, chapter 3 introduces the methodology used to solve the complete or identical synchronization problem using a differentiable generating element, this is, the synchronization of structurally equivalent chaotic systems problem is solved. To validate the aforementioned methodology, some solved examples are presented. Then, chapter 4 shows how to use the differentiable generating element methodology in order to solve the generalized synchronization problem, which is the synchronization problem of structurally different systems. Some examples are solved to illustrate this methodology. Chapter 5 presents the design of a state observer, needed in order to solve the synchronization problem. It will be shown that the observer design methodology is closely related to the concept of differential flatness. Subsequently, chapter 6 briefly explains the active control methodology, which is well known and widely used in literature. Then, examples from chapters 3 and 4 are solved with this methodology in order to make a comparison between the differentiable generating element methodology (dynamic control) and the active control methodology. Finally, chapter 7 presents general conclusions and possible future works are discussed.



# Capítulo 1

## Introducción

Desde un punto de vista académico, la sincronización es un fenómeno que consiste en una total correspondencia entre el comportamiento de dos o más sistemas acoplados. Así, el fenómeno de sincronización resulta ser particularmente complicado para sistemas caóticos, por un lado debido a la aparente aleatoriedad de sus trayectorias y por otro a que presentan una rápida pérdida de relación en su evolución temporal con el mínimo cambio de condiciones iniciales. En 1990, Pecora y Carroll demostraron que es posible sincronizar sistemas caóticos idénticos con condiciones iniciales distintas (Pecora y Carroll, 1990), renovando así el interés de la comunidad científica. Pronto se demostró que la sincronización de sistemas caóticos posee aplicación práctica, por ejemplo en campos tales como comunicaciones seguras, biología, química, ciencias sociales, etc. (Mosekilde, Maistrenko, y Postnov, 2002). Así, los resultados teóricos y experimentales llevaron al descubrimiento de diferentes tipos de sincronización, tales como sincronización completa (CS) (Mahmoud y Mahmoud, 2010), sincronización de fase (PS) (Rosenblum, Pikovsky, y Kurths, 1996), sincronización con retardo (LS) (Rosenblum, Pikovsky, y Kurths, 1997), sincronización anticipada (AS) (Kostur, Hänggi, Talkner, y Mateos, 2005) y sincronización generalizada (GS) (Rulkov, Sushchik, Tsimring, y Abarbanel, 1995).

En su gran mayoría, los estudios realizados respecto a sincronización, se han enfocado en analizar casos donde intervienen sistemas estructuralmente equivalentes (sistemas idénticos o sistemas similares pero con parámetros distintos). No obstante, las observaciones indican que en la práctica la sincronización de sistemas caóticos diferentes es un fenómeno muy común, por ejemplo, es un hecho que el sistema respiratorio y el sistema circulatorio están en un perfecto estado de sincronización, pese a que sus modelos son esencialmente diferentes (Lotrič y Stefanovska, 2000). Adicionalmente, situaciones como las que se presentan en el campo de comunicaciones seguras, donde se obtienen mejores resultados al emplear sistemas diferentes que aquellos que son estructuralmente equivalentes (Moskalenko, Koronovskii, y Hramov, 2010; Abarbanel, Rulkov, y Sushchik, 1996), hacen que el estudio de la sincronización de sistemas distintos tome mayor importancia.

Al abordar el problema de sincronización de sistemas caóticos estrictamente diferentes se habla de sincronización generalizada. Este tipo de sincronización básicamente sucede cuando dos sistemas caóticos distintos presentan un comportamiento idéntico en un espacio transformado. La acción de llevar los sistemas en cuestión a un espacio transformado es en realidad un proceso de linealización, la cual facilita el diseño de un controlador para alcanzar el estado de sincronización deseado. Este proceso se puede realizar para sistemas idénticos, con la diferencia de que la transformación empleada resulta ser una identidad.

La sincronización generalizada, para su realización, plantea dos cuestionamientos fundamentales:

- i) ¿Cuándo existe una transformación tal que sea posible alcanzar un estado de sincronización?
- ii) De existir, ¿cómo es la transformación en cuestión?

En 1996, Kocarev y Parlitz dieron las condiciones necesarias y suficientes para que sea posible alcanzar un estado de sincronización generalizada y por ende para que exista la transformación requerida (Kocarev y Parlitz, 1996). Así, se han propuesto diversas metodologías para hallar dicha transformación, algunas de estas metodologías generan transformaciones lineales (T. Yang y Chua, 1999; Pal, Sahoo, y Poria, 2013) mientras que con otras se consiguen unas del tipo no lineal (Wang y Guan, 2006). En su gran mayoría, estas metodologías emplean herramientas geométricas tales como exponentes de Lyapunov, matrices Jacobianas, derivadas de Lie, etc.

Una alternativa para abordar el problema de sincronización consiste en emplear polinomios diferenciales (álgebra diferencial). Así, en primera instancia, es posible resolver el problema de sincronización generalizada si los estados desconocidos de los sistemas involucrados pueden estimarse a partir de su respectiva salida y las derivadas temporales de esta. Lo anterior, conforma una definición alterna de la condición de observabilidad, y de satisfacerse permite construir una transformación de coordenadas tal que es posible diseñar un controlador dinámico para alcanzar un estado de sincronización (Martínez-Guerra, Gómez-Cortés, y Pérez-Pinacho, 2015). No obstante, existen sistemas que en función de su salida presentan estados que no satisfacen un polinomio diferencial, sin embargo empleando adicionalmente integrales o exponenciales de integrales es posible resolver el problema de sincronización para este tipo de sistemas conocidos como sistemas de Liouville.

Al utilizar polinomios diferenciales se tienen ciertas ventajas y particularidades. Por ejemplo, resulta ser suficiente conocer la salida del sistema para construir la transformación requerida; el diseño de observadores de estado de orden reducido es relativamente sencillo; se logra la sincronización gracias a un control dinámico (Martínez-Guerra y cols., 2015; Martínez-Guerra y Pasaye, 2009; Martínez-Guerra, Cruz-Victoria, Gonzalez-Galan, y Aguilar-Lopez, 2006).

Los sistemas no diferencialmente planos y su contraparte, los diferencialmente planos,



son ampliamente utilizados en tareas como la generación de trayectorias en tiempo real (Nguyen, Prodan, Stoican, y Lefevre, 2017; Van Nieuwstadt y Murray, 1997). Sin embargo, pocos trabajos se han realizado respecto a sistemas no diferencialmente planos y la sincronización de los mismos. Por ejemplo, Martínez-Guerra y Camargo propusieron una metodología para el diseño de observadores de estado para sistemas de este tipo (Martínez-Guerra y Mendoza-Camargo, 2004). Posteriormente, Martínez-Guerra, Pinacho y Cortés publicaron una metodología para la sincronización generalizada de estos sistemas (Martínez-Guerra y cols., 2015).

Así, resulta evidente la necesidad de estudiar la sincronización generalizada de sistemas no diferencialmente planos y de Liouville, tal que se plantean los temas de interés de este material.

- 1) Sistemas caóticos no diferencialmente planos y de Liouville.
- 2) Sincronización de sistemas no diferencialmente planos y de Liouville.
- 3) Sincronización generalizada empleando polinomios diferenciales.

Estos tópicos son abordados a lo largo de los subsecuentes capítulos.

## 1.1. Caos, sincronización y teoría de control.

Se define sincronización como un fenómeno de perfecta correspondencia temporal entre dos o más eventos, acciones, mecanismos, etc. Existen sistemas que se sincronizan debido a sus propiedades naturales y la forma en que interactúan entre sí, este tipo de sincronización se conoce como sincronización natural, por otro lado es posible alcanzar un estado de sincronización introduciendo acciones o restricciones, tal que se habla de sincronización forzada o controlada (Machuca, 2013).

Se considera que Christian Huygens realizó en 1650 el primer estudio sobre sincronización al estudiar el movimiento coordinado de dos relojes de péndulo. Huygens notó que aún cuando los péndulos iniciaban en posiciones diferentes, después de cierto tiempo el movimiento de estos era el mismo, es decir, se terminaban por sincronizar (Oliveira y Melo, 2015). El siguiente estudio relevante en el tema ocurrió a principios del siglo XX, cuando B. Van der Pol analizó el movimiento sincronizado de algunos sistemas electro-mecánicos.

En la década de 1960s, Lorenz reportó soluciones no periódicas de cierto tipo de flujos (Lorenz, 1963), mismas que en 1975 motivaron la conceptualización de caos (Li y Yorke, 1975). Desde entonces, el comportamiento caótico ha sido ampliamente estudiado.

Hoy en día, se define un sistema caótico como un sistema dinámico determinístico que presenta un comportamiento irregular (Hilborn, 2000) y posee las siguientes propiedades

- Una dinámica acotada.
- Una extrema sensibilidad a condiciones iniciales.

Debido a la segunda característica, en un inicio se pensó que la sincronización de este tipo de sistemas era imposible, sin embargo, algunas décadas después se demostró que de hecho es factible sincronizar los mismos al ligarlos a través de una señal o señales con ciertas características (Pecora y Carroll, 1990). Pecora y Carroll no fueron los primeros en sincronizar este tipo de sistemas, como bien ellos reconocen (Pecora y Carroll, 2015), pero si los primeros en señalar que condiciones se debían satisfacer para lograrlo.

Por otra parte, Pecora y Carroll destacaron por ser los primeros en sugerir una implementación, algo que Afraimovich no hizo pese a llegar antes a conclusiones similares (Afraimovich, Verichev, y Rabinovich, 1986). La propuesta de Pecora y Carroll consistió en acoplar unidireccionalmente (configuración maestro-escalvo) dos osciladores caóticos tal que la sincronización de los mismos implicara la perfecta reconstrucción de una señal emitida que se deseaba esconder, dando así lugar a lo que actualmente se conoce como comunicaciones seguras, misma que ha evolucionado desde 1992 a través de cuatro generaciones que han ido mejorando la eficiencia del ancho de banda (T. Yang, 2004).

Con el tiempo, la aplicación del fenómeno de sincronización de sistemas caóticos se diversificó, llegando a áreas como criptografía, telecomunicaciones, computación, neurociencia, biología, etc. (T. Yang, 2004; Xie, Chen, y Bollt, 2002; Zhang, Shu, Yang, y Li, 2011), gracias en gran parte al descubrimiento de la sincronización generalizada en 1995 (Rulkov y cols., 1995), la cual es capaz de involucrar sistemas estrictamente diferentes.

La sincronización generalizada, dada su complejidad, rápidamente recurrió a la teoría de control y actualmente se utilizan diferentes controladores para este fin, por ejemplo, control activo (Yassen, 2005), realimentación dinámica (Martínez-Guerra y cols., 2015), desigualdades lineales de matrices (F. Chen y Zhang, 2007), control difuso (Yau y Shieh, 2008), modos deslizantes (Martínez-Guerra y Yu, 2008), etc. Además, la implementación de la teoría de control permite hallar condiciones de sincronización global para ciertos sistemas.

Actualmente, el campo de sincronización de sistemas caóticos está enfocado al empleo de observadores de estado, en particular para sistemas oscilatorios (Martínez-Guerra y cols., 2006; X.-S. Yang y Chen, 2002; Xiao, Zhu, y Liaw, 2005) y a la utilización de leyes de control para sincronizar osciladores no lineales de diferente estructura y orden (Abarbanel y cols., 1996; H.-K. Chen, 2005; Martínez-Guerra y cols., 2015). En ambos tópicos, la sincronización generalizada toma partido.

# Capítulo 2

## Sistemas no diferencialmente planos y de Liouville.

La platitud diferencial es una propiedad que presentan algunos sistemas dinámicos y es equivalente a la propiedad de controlabilidad. Además, como se verá más adelante, también implica observabilidad de los estados del sistema a partir de la salida y sus derivadas temporales. El grado de platitud diferencial de un sistema se expresa con un número entero no negativo llamado defecto y es igual al número de estados y/o entradas que no pueden parametrizarse en términos de un conjunto finito de variables independientes y de sus respectivas derivadas temporales, esto es, que no satisfacen un polinomio diferencial de dichas variables (Sira-Ramirez y Agrawal, 2004).

Los sistemas que no presentan esta propiedad se conocen como sistemas no diferencialmente planos y constituyen un problema de parametrización para el cual, de ser posible, se recurre a integrales o funciones exponenciales de integrales de los estados que si se pueden expresar en función de la salida. Los sistemas para los cuales es posible lograr lo anterior se conocen como sistemas de Liouville.

### 2.1. Sistemas no diferencialmente planos.

Considere un sistema no lineal definido como

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x} = F(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  es el vector de estado del sistema,  $F$  es una función no lineal,  $h$  es una función analítica en general,  $y$  es la salida y  $u$  la entrada del sistema.

El sistema  $\Sigma$  se dice que es **diferencialmente plano** si todos sus estados y entradas satisfacen un polinomio diferencial de la salida, tal que

$$\begin{aligned} x_i &= P_i(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\alpha)}), & i &= 1, 2, \dots, n, & \alpha &\in \mathbf{N} \\ u_j &= P_j(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\beta)}), & j &= 1, 2, \dots, m, & \beta &\in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por el contrario, si  $\Sigma$  posee al menos un estado o una entrada que no satisface un polinomio diferencial del tipo (2.2), se denomina como **no diferencialmente plano**.

El **defecto** del sistema  $\Sigma$  es una medida que indica el número de estados y entradas que no satisfacen un polinomio diferencial del tipo (2.2). Entonces, el sistema se dice no diferencialmente plano si y sólo si su defecto es diferente de cero.

**Observación 2.1.** *Note como en función de su salida, el sistema  $\Sigma$  puede clasificarse como diferencialmente plano o no diferencialmente plano. Así, un sistema diferencialmente plano posee una salida plana y viceversa.*

**Observación 2.2.** *Observe que si el sistema  $\Sigma$  es no diferencialmente plano con un defecto menor a su número de estados y entradas totales, es posible definir un subsistema plano.*

### Ejemplo 2.1

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_3 - x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_1 + x_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sea su salida  $y = x_2$ . Note que el defecto del sistema es igual a cero ya que

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{y}, \\ x_2 &= y, \\ x_3 &= \frac{1}{\alpha} [\ddot{y} + \dot{y}y^2]. \end{aligned}$$

Por el contrario, la salida  $y = x_1$ , hace que el defecto algebraico del sistema sea igual con dos, puesto que

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ \dot{x}_2 &= y, \\ x_3 &= \frac{1}{\alpha} [\dot{y} + yx_2^2]. \end{aligned}$$

Entonces, el sistema (2.3) con salida  $y = x_1$  es no diferencialmente plano.

**Ejemplo 2.2**

Considere un sistema descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_3 - u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \beta x_3, \\ \dot{x}_3 &= \gamma x_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sea la salida del sistema  $y = x_3$ . Esta salida resulta ser una salida plana ya que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\ddot{y}}{\gamma} - \beta y, \\ x_2 &= \frac{\dot{y}}{\gamma}, \\ x_3 &= y, \\ u &= \alpha y - \frac{y^{(3)}}{\gamma} + \beta \dot{y}, \end{aligned}$$

Ahora, considere  $y = x_2$ , tal que al parametrizar las variables del sistema con respecto a la salida se tiene

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{y} - \beta x_3, \\ x_2 &= y, \\ \dot{x}_3 &= \gamma y, \\ u &= \alpha x_3 - \ddot{y} + \beta \gamma y. \end{aligned}$$

En este caso  $x_1, x_3$  y  $u$  no pueden expresarse como un polinomio diferencial de  $y$ , por lo tanto el sistema (2.4) es no diferencialmente plano.

**2.2. Sistemas de Liouville.**

Sea  $\Xi$  un subsistema plano de  $\Sigma$ . Se dice que el sistema  $\Sigma$  es de **Liouville** o **liouviliano** si los elementos de  $\Sigma - \Xi$  pueden ser obtenidos por la adición de una integral o de una exponencial de la integral de los elementos del subsistema plano  $\Xi$ .

**Observación 2.3.** *Note que la propiedad liouviliana de un sistema puede ser aprovechada para resolver el problema de parametrización que implica un sistema no diferencialmente plano. No obstante, no siempre es posible.*

**Ejemplo 2.3**

Considere el sistema del ejemplo 2.1 con salida  $y = x_1$ . Observe que la variable  $x_2$  puede ser obtenida a través de una integral, tal que las variables del sistema se pueden parametrizar respecto a la salida como

$$\begin{aligned}x_1 &= y, \\x_2 &= \int y, \\x_3 &= \frac{1}{\alpha} \left[ \dot{y} + y \left( \int y \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Entonces, el sistema (2.3) con salida  $y = x_1$  es de Liouville.

**Ejemplo 2.4**

Retomando el sistema del ejemplo 2.2 con salida  $y = x_2$ , se observa que  $x_3$  puede ser obtenida a través de una integral de la salida, tal que las variables del sistema se pueden expresar como

$$\begin{aligned}x_1 &= \dot{y} - \beta\gamma \int y, \\x_2 &= y, \\x_3 &= \gamma \int y, \\u &= \alpha\gamma \int y - \ddot{y} + \beta\gamma y.\end{aligned}$$

Entonces, el sistema (2.4) con salida  $y = x_2$  es de Liouville.

**2.3. Algunos sistemas caóticos.**

A continuación se enlista algunos sistemas caóticos que serán utilizados en capítulos posteriores. El caso no diferencialmente plano y de Liouville de estos sistemas será de particular interés en los capítulos subsecuentes.

**2.3.1. Sistema de Lorenz.**

El sistema de Lorenz o atractor de Lorenz está definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales, resultado del trabajo del matemático Edward N. Lorenz al estudiar

variaciones termales en el aire. La dinámica de este sistema está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Donde los parámetros  $\sigma, \rho$  y  $\beta$  son positivos. Curiosamente, existen valores de estos parámetros que hacen que el sistema de Lorenz pierda su comportamiento caótico y muestre órbitas periódicas.

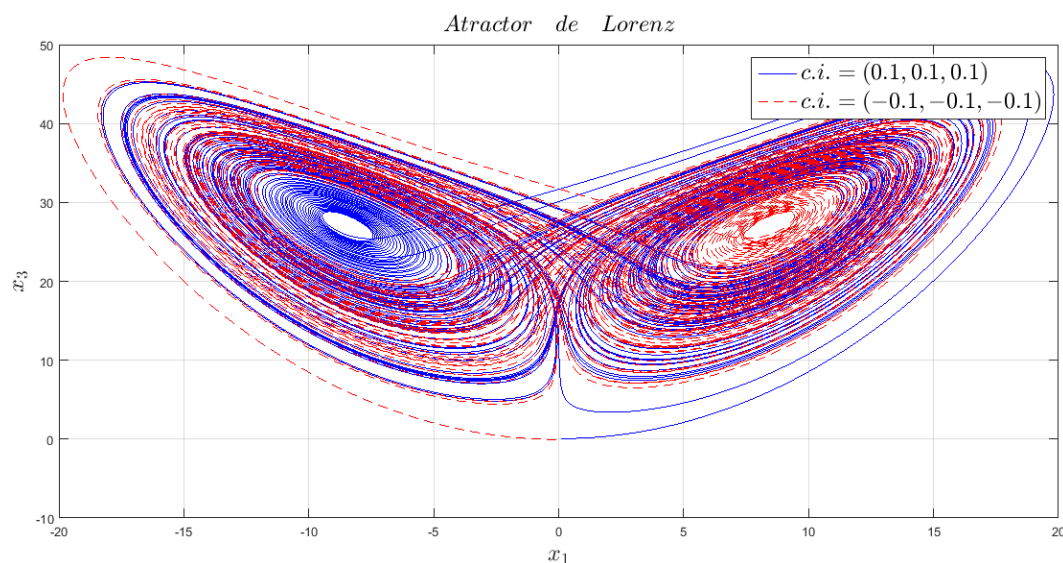


Figura 2.1: Evolución del sistema de Lorenz con condiciones iniciales distintas.

En la figura 2.1 se muestra la evolución del sistema de Lorenz. Es de especial interés su gran sensibilidad ante un ligero cambio de las condiciones iniciales (caos). Note que pese a no guardar relación entre sí, las trayectorias orbitan alrededor de una figura en común, esta figura es conocida como atractor de Lorenz y es de especial interés entre los matemáticos.

### 2.3.2. Sistema de Rössler.

El atractor de Rössler fue diseñado por el bioquímico alemán Otto Rössler en 1976. Su trabajo posteriormente llamó el interés de la comunidad científica al descubrirse su utilidad para modelar equilibrio en reacciones químicas. El sistema de Rössler está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= \alpha(x_2 - x_2^2) - \beta(x_3).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Los parámetros usualmente utilizados para este sistema son  $\alpha = \beta = 0.2$ .

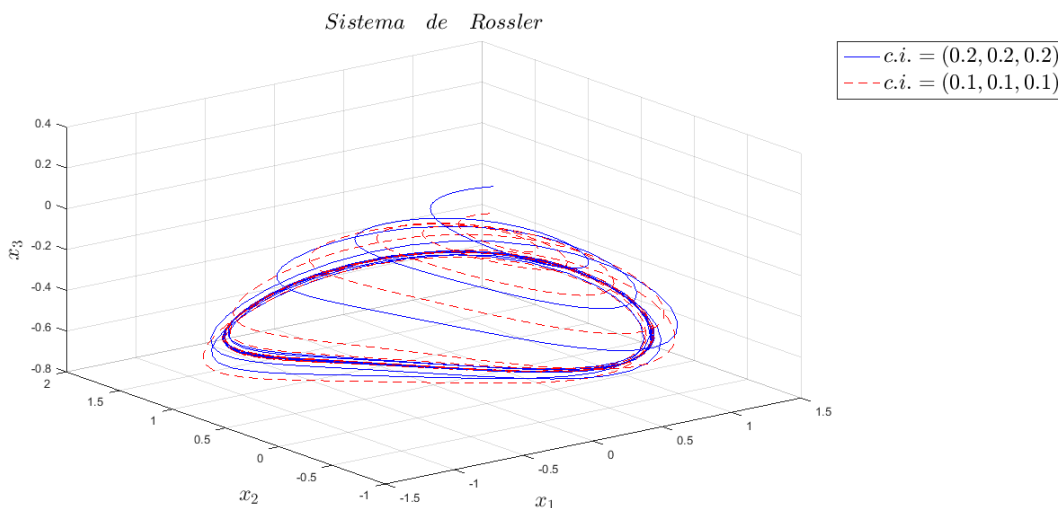


Figura 2.2: Espacio fase del sistema de Rössler con condiciones iniciales distintas.

La figura 2.2 muestra la trayectoria de un sistema de Rössler con condiciones iniciales diferentes. Observe que el sistema de Rössler posee una alta sensibilidad a condiciones iniciales así como una dinámica acotada.

### 2.3.3. Sistema de Chua.

El sistema de Chua fue el primer sistema caótico observado en un laboratorio, confirmado por una simulación en computadora y probado matemáticamente con rigor. Representa un circuito eléctrico y es descrito por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(x_2 - h(x_1)), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros de bifurcación y  $h$  es una función continua a pedazos tal que

$$h(x_1) = \begin{cases} m_1(x_1 + 1) - m_0 & \text{si } x_1 < -1 \\ m_0 x_1 & \text{si } -1 \leq x_1 \leq 1 \\ m_1(x_1 - 1) + m_0 & \text{si } x_1 > 1 \end{cases}$$



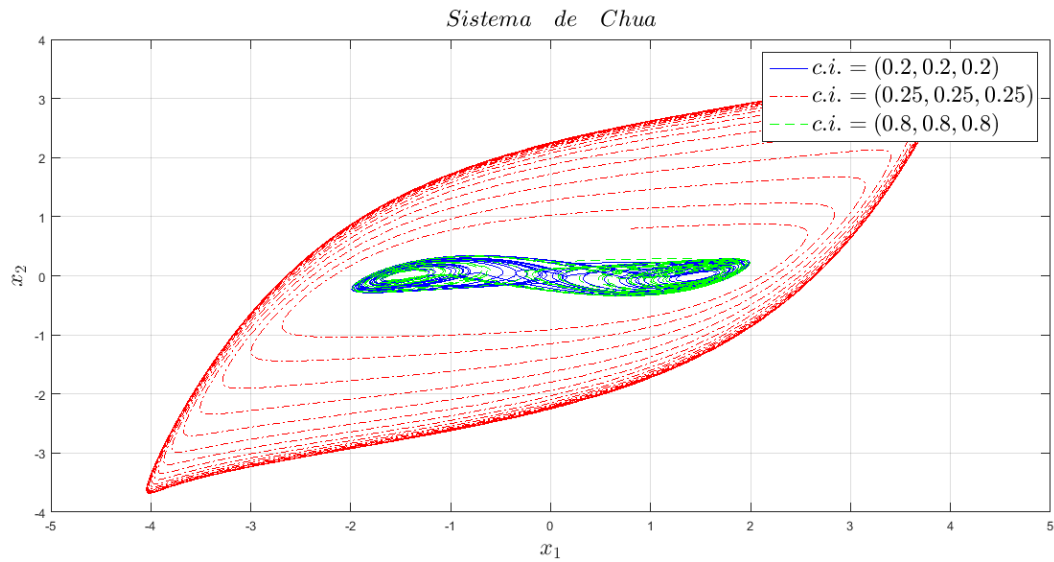


Figura 2.3: Evolución del sistema de Chua con condiciones iniciales distintas.

La figura 2.3 corresponde a la evolución de la trayectoria de un sistema de Chua partiendo de distintas condiciones iniciales. Observe como el sistema exhibe un comportamiento caótico con un mínimo cambio en sus condiciones iniciales e incluso exhibe un ciclo límite con un cambio ligeramente mayor.



## Capítulo 3

# Sincronización idéntica de sistemas caóticos vía un elemento generador diferenciable.

El problema de sincronización de sistemas caóticos es un tema de gran interés dentro del campo de sistemas no lineales, tanto por cuestiones teóricas como prácticas, por lo tanto, este problema ha sido planteado de diversas formas. En este capítulo, se considera el siguiente caso: dado un sistema caótico, denominado sistema maestro, acoplado unidireccionalmente a un segundo sistema idéntico, llamado sistema esclavo, se busca, mediante un controlador, forzar la respuesta del sistema esclavo tal que sea idéntica a la del sistema maestro (sincronización idéntica). Así, básicamente se habla de un problema conocido en teoría de control de sistemas como seguimiento de trayectorias.

Para resolver el problema, se empleará una metodología basada en polinomios diferenciales que únicamente requiere conocer la salida del sistema. Esta metodología parte de un elemento generador diferenciable con el cual es posible construir una transformación con la cual el sistema caótico en cuestión es llevado a una forma canónica de observabilidad generalizada. Posteriormente, se diseña un controlador de tipo dinámico que permite sincronizar los sistemas en las coordenadas transformadas para finalmente regresar a los mismos a sus coordenadas originales.

### 3.1. Planteamiento del problema de sincronización idéntica.

Considere dos sistemas no lineales estructuralmente equivalentes en configuración maestro-esclavo. El sistema maestro esta definido por

$$\Sigma_m := \begin{cases} \dot{x}_m = F_m(x_m, u_m) \\ y_m = h_m(x_m) \end{cases} \quad (3.1)$$

y el sistema esclavo es

$$\Sigma_s := \begin{cases} \dot{x}_s = F_s(x_s, u_s(x_s, y_m)) \\ y_s = h_s(x_s) \end{cases} \quad (3.2)$$

donde  $x_s = (x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}) \in \mathbb{R}^{n_s}$ ,  $x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}) \in \mathbb{R}^{n_m}$ ,  $h_s : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_m : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_m = (u_{1m}, u_{2m}, \dots, u_{lm}) \in \mathbb{R}^{l_m}$ ,  $u_s = (u_{1s}, u_{2s}, \dots, u_{ls}) \in \mathbb{R}^{l_s}$ .  $y_m, y_s \in \mathbb{R}$ .  $F_s, F_m, h_s$  y  $h_m$  son polinomios en sus respectivos argumentos.

Se dice que los sistemas (3.1) y (3.2), con condiciones iniciales distintas entre sí, alcanzan un estado de **sincronización idéntica** cuando estos evolucionan con el mismo comportamiento, es decir, siguen una trayectoria en común. Esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m - x_s\| = 0.$$

Suponga que los sistemas (3.1) y (3.2) son transformables a una forma canónica observable a través de un respectivo mapeo o transformación no lineal, tal que

$$\begin{aligned} \Phi_m(x_m) &= z_m, \\ \Phi_s(x_s) &= z_s. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donde  $z_m = (z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n})^T$  y  $z_s = (z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n})^T$  son los estados en las coordenadas transformadas del sistema maestro y esclavo respectivamente.

El primer elemento de cada transformación  $\Phi_r$  se denomina elemento generador diferenciable y es denotado por  $\delta_r$ . El elemento generador diferenciable es una combinación lineal de los estados y entradas medibles del sistema, tal que

$$\delta_r = \sum_{i_r} \alpha_{i_r} x_{i_r} + \sum_{j_r} \beta_{j_r} u_{j_r}, \quad \alpha_{i_r}, \beta_{j_r} \in \mathbb{R},$$

Por su parte, la transformación generada a partir de  $\delta_r$  satisface

$$z_r = \Phi_r(x_r) = \begin{pmatrix} \delta_r \\ \dot{\delta}_r \\ \ddot{\delta}_r \\ \vdots \\ \delta_r^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

**Observación 3.1.** *Note que si los estados en las coordenadas transformadas satisfacen*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_m - z_s\| = 0,$$

*en consecuencia, los sistemas (3.1) y (3.2) se sincronizan idénticamente en las coordenadas originales, dado que estos son estructuralmente equivalentes.*

Con fines prácticos y sin pérdida de generalidad, es posible elegir la entrada del sistema maestro como  $u_m = 0$ . Entonces, a partir del mapeo generado para cada sistema, se tiene que el sistema maestro en coordenadas transformadas es

$$\begin{aligned} \dot{z}_{m_j} &= z_{m_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{z}_{m_n} &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por su parte, el sistema esclavo transformado está dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_{s_j} &= z_{s_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{z}_{s_n} &= \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_s, \dots, u_s^{(\gamma-1)}) + u_s^{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donde  $u_1 = u_s, u_2 = \dot{u}_s, \dots, u_\gamma = u_s^{(\gamma-1)}$ . Defínase el error de sincronización como

$$e = z_m - z_s \quad (3.7)$$

Entonces, a partir de (3.5) y (3.6) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{e}_j &= e_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \dot{e}_n &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) - \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, \dots, u_\gamma) - \dot{u}_\gamma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Así, la señal de control se puede diseñar como

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= u_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq \gamma-1, \\ \dot{u}_\gamma &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) - \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, \dots, u_\gamma) + Ke. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde  $K = (k_1, \dots, k_n)^T$  es un vector de ganancias y define el comportamiento deseado en lazo cerrado.

**Observación 3.2.** *Note que (3.9) define un control de realimentación dinámico dado por una cadena de integradores.*

Finalmente, dado que en lazo cerrado se obtiene  $\dot{e} = Ae$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \dots & -k_n \end{pmatrix},$$

se elige  $K$  de tal manera que  $A$  sea Hurwitz y por lo tanto  $e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , alcanzando así un estado de sincronización idéntica.

## 3.2. Ejemplos numéricos de sincronización idéntica.

### 3.2.1. Sincronización idéntica de dos sistemas de Lorenz diferencialmente planos.

Para ilustrar la metodología propuesta, considere el siguiente sistema de Lorenz como el sistema maestro en una configuración maestro-esclavo

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1m} &= a(x_{2m} - x_{1m}), \\ \dot{x}_{2m} &= bx_{1m} - x_{2m} - x_{1m}x_{3m}, \\ \dot{x}_{3m} &= -cx_{3m} + x_{1m}x_{2m}, \\ y_m &= x_{1m} \end{aligned} \tag{3.10}$$

por otro lado, considere un sistema idéntico como sistema esclavo, dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1s} &= a(x_{2s} - x_{1s}), \\ \dot{x}_{2s} &= bx_{1s} - x_{2s} - x_{1s}x_{3s}, \\ \dot{x}_{3s} &= -cx_{3s} + x_{1s}x_{2s}, \\ y_s &= x_{1s} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Observe que los sistemas (3.10) y (3.11) son diferencialmente planos ya que ambos satisfacen

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \frac{1}{a}\dot{y} + y, \\ x_3 &= -\frac{1}{y} \left[ \frac{1}{a}\ddot{y} + \dot{y} - by + \frac{1}{a}\dot{y} + y \right] \end{aligned}$$

Elijase como elemento generador diferenciable de (3.10) a su salida  $z_{1m} = \delta_m = x_{1m}$ , tal que se propone la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_{1m} \\ z_{2m} \\ z_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_m \\ \dot{\delta}_m \\ \ddot{\delta}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ \dot{x}_{1m} \\ \ddot{x}_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ a(x_{2m} - x_{1m}) \\ (ab + a^2)x_{1m} - (a + a^2)x_{2m} - ax_{1m}x_{3m} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Empleando la transformación (3.12) podemos expresar (3.10) como

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1m} &= z_{2m}, \\ \dot{z}_{2m} &= z_{3m}, \\ \dot{z}_{3m} &= (ab + a^2)\dot{x}_{1m} - (a + a^2)\dot{x}_{2m} - a\dot{x}_{1m}x_{3m} - ax_{1m}\dot{x}_{3m} = \Psi_m(x_m), \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ahora, se escoge como elemento generador diferenciable de (3.11) a  $z_{1s} = \delta_s = x_{1s} + u_1$ , tal que se propone la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \\ z_{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1s} + u_1 \\ \dot{x}_{1s} + \dot{u}_1 \\ \ddot{x}_{1s} + \ddot{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1s} + u_1 \\ a(x_{2s} - x_{1s}) + u_2 \\ (ab + a^2)x_{1s} - (a + a^2)x_{2s} - ax_{1s}x_{3s} + u_3 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

misma que permite describir (3.11) como

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1s} &= z_{2s}, \\ \dot{z}_{2s} &= z_{3s}, \\ \dot{z}_{3s} &= (ab + a^2)\dot{x}_{1s} - (a + a^2)\dot{x}_{2s} - a\dot{x}_{1s}x_{3s} - ax_{1s}\dot{x}_{3s} + \bar{u} = \Psi_s(x_s) + \bar{u}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $\dot{u}_1 = u_2$ ,  $\dot{u}_2 = u_3$ ,  $\bar{u} = \dot{u}_3$ . Restando (3.15) de (3.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \\ \dot{e}_3 &= \Psi_m(x_m) - \Psi_s(x_s) - \bar{u}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

A continuación, se diseña  $\bar{u}$  como

$$\bar{u} = \Psi_m(x_m) - \Psi_s(x_s) + Ke, \quad (3.17)$$

tal que en lazo cerrado se tiene  $\dot{e} = Ae$  donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Finalmente, se escogen  $k_1, k_2$  y  $k_3$  tales que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| \rightarrow 0$ .

Para la simulación numérica de este ejemplo se fijan los parámetros  $a = 10, b = 28, c = 8/3$ , el vector de ganancias  $K = (150, 790, 150)$  y las condiciones iniciales  $x_{m_0} = (0.2, 0.2, 0.2)$  y  $x_{s_0} = (0.25, 0.25, 0.25)$  para el sistema maestro y esclavo respectivamente.

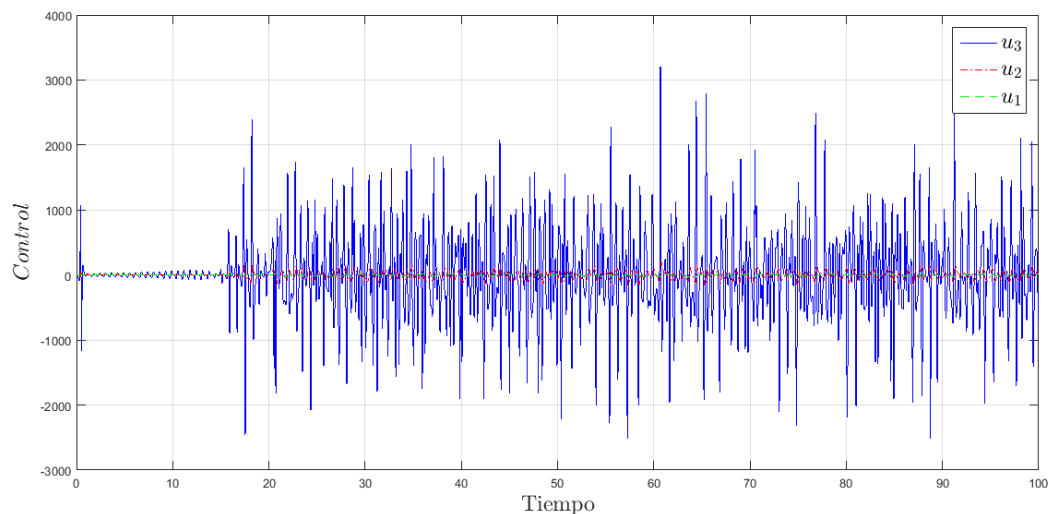


Figura 3.1: Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas de Lorenz.

Para observar los sistemas caóticos en su espacio fase original se puede emplear la inversa de la transformación (3.12) tanto para el sistema maestro y esclavo, dado que estos son idénticos.

En la figura 3.2 se observa la evolución de los sistemas maestro y esclavo en las coordenadas transformadas. Note como por efecto del controlador dinámico las trayectorias de los sistemas son idénticas, es decir, los sistemas se sincronizan. El mismo fenómeno se puede observar en el espacio fase de coordenadas originales, mostrado en la figura 3.3.

Observe además un incremento considerable en la magnitud de los estados  $x_2$  y  $x_3$  en las coordenadas originales respecto a sus análogos en las coordenadas transformadas. Este fenómeno se explica al analizar la expresión (3.14) y las señales de control mostradas en la figura 3.1. Note como la magnitud de las señales de control da lugar a un escalamiento diferente para cada estado, como resultado, el atractor del sistema de Lorenz es deformado al pasar de un espacio fase a otro.



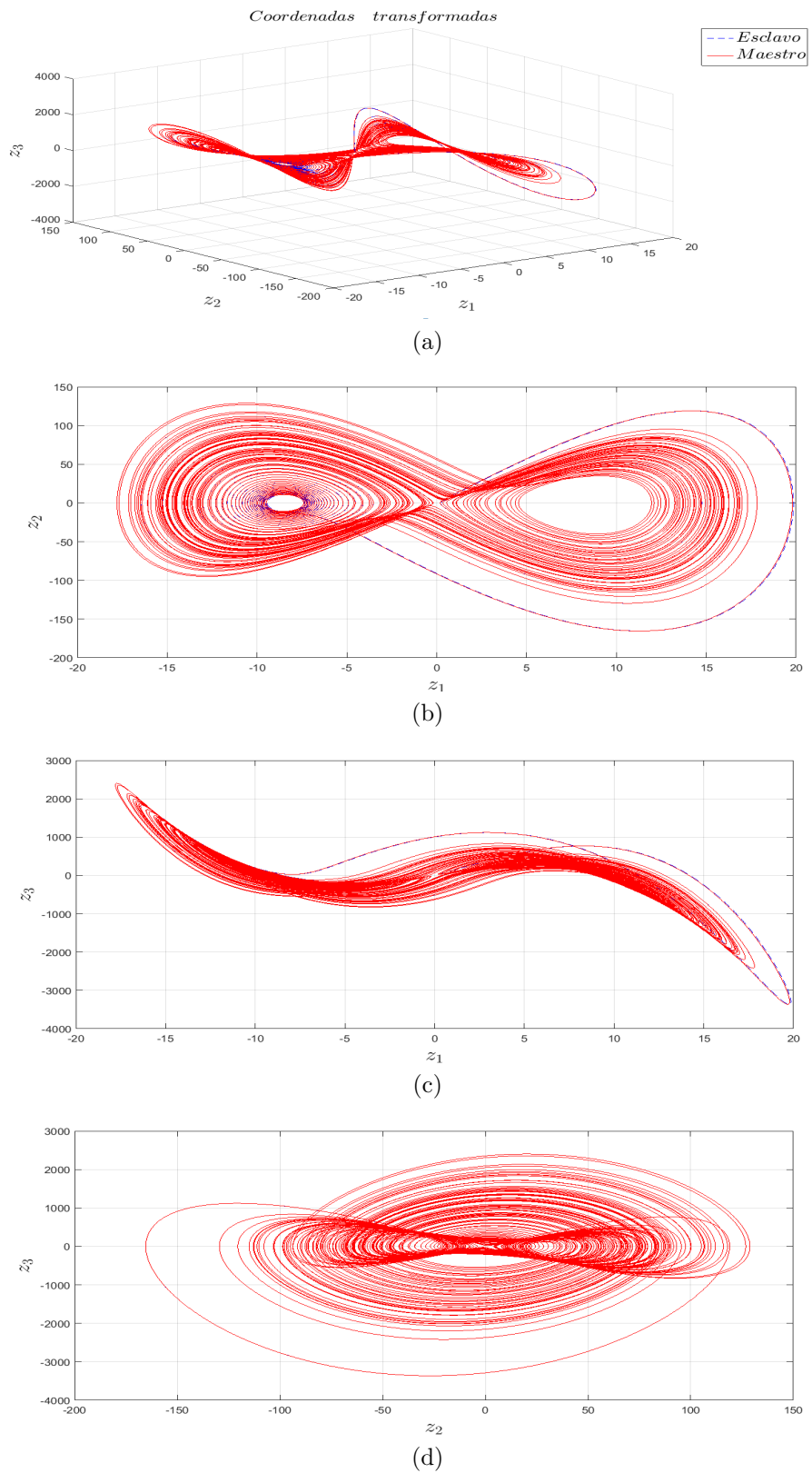


Figura 3.2: Evolución de los sistemas de Lorenz en las coordenadas transformadas.

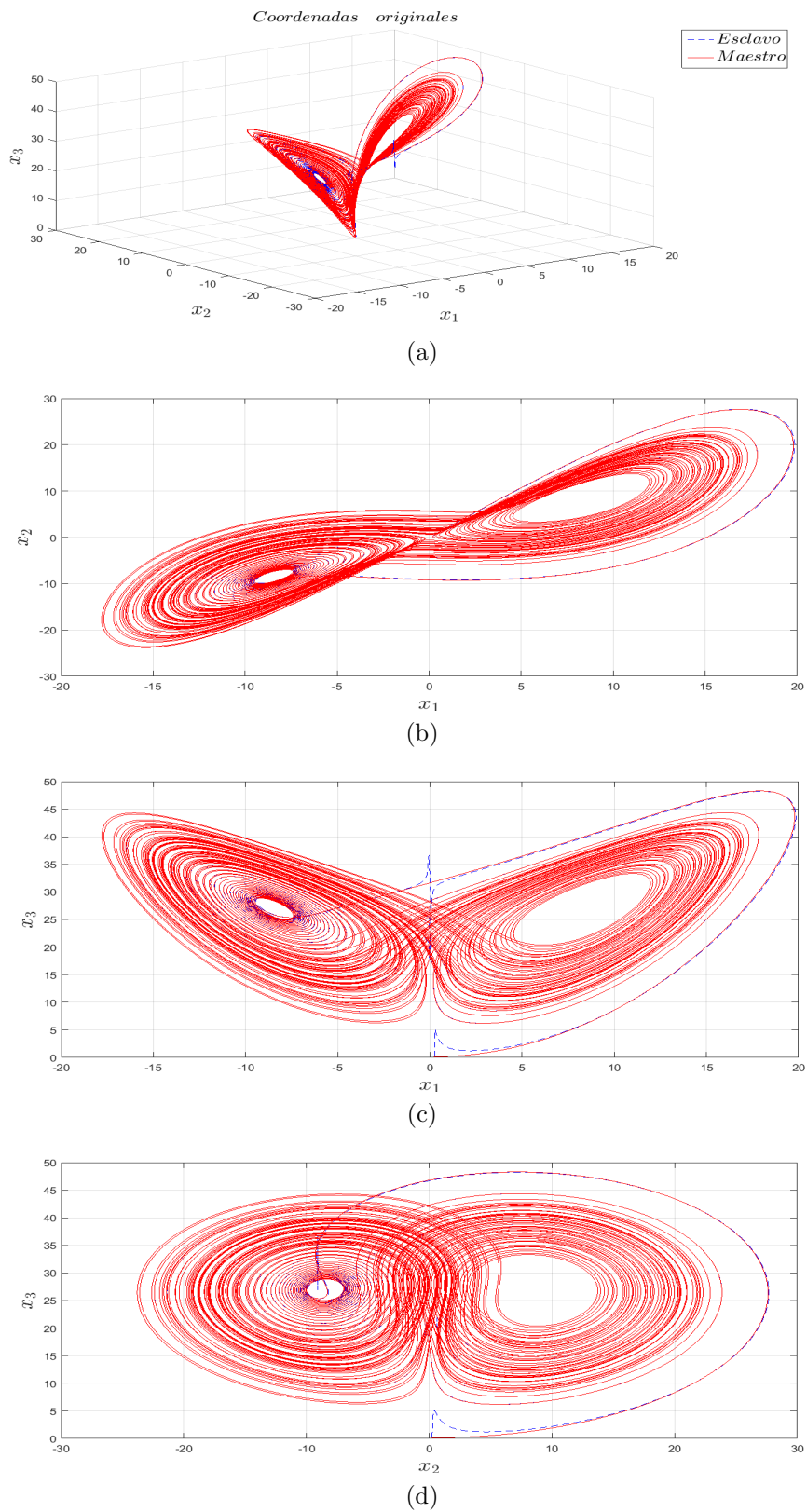


Figura 3.3: Evolución de los sistemas de Lorenz en las coordenadas originales.

### 3.2.2. Sincronización idéntica de dos sistemas de Rössler no diferencialmente planos.

Considere los siguientes sistemas de Rössler en una configuración maestro-esclavo

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1m} &= -x_{2m} - x_{3m}, \\
 \dot{x}_{2m} &= x_{1m}, \\
 \dot{x}_{3m} &= a(x_{2m} - x_{2m}^2) - bx_{3m}, \\
 y_m &= x_{1m},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

y

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1s} &= -x_{2s} - x_{3s}, \\
 \dot{x}_{2s} &= x_{1s}, \\
 \dot{x}_{3s} &= a(x_{2s} - x_{2s}^2) - bx_{3s}, \\
 y_s &= x_{1s}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Los sistemas son no diferencialmente planos, ya que en ambos se tiene

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y, \\
 \dot{x}_2 &= y, \\
 x_3 &= -x_2 - \dot{y}.
 \end{aligned}$$

Observe que para estos sistemas es posible hacer uso de una propiedad liouvilliana, tal que el elemento generador diferenciable de (3.19) puede elegirse como  $z_{1m} = \delta_m = \int y_m = x_{2m}$ , de tal manera que se obtiene la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_{1m} \\ z_{2m} \\ z_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int y_m \\ y_m \\ \dot{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2m} \\ x_{1m} \\ -x_{2m} - x_{3m} \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Así, la transformación (3.21) permite expresar (3.19) como

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{1m} &= z_{2m}, \\
 \dot{z}_{2m} &= z_{3m}, \\
 \dot{z}_{3m} &= -\dot{x}_{2m} - \dot{x}_{3m} = \Psi_m(x_m).
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por otra parte, para (3.20) se elige  $z_{1s} = \int \delta_s = \int y_s + u_1 = x_{2s} + u_1$ , a partir del cual se construye la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \\ z_{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_s \\ \dot{\delta}_s \\ \ddot{\delta}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2s} + u_1 \\ x_{1s} + u_2 \\ -x_{2s} - x_{3s} + u_3 \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

misma que lleva el sistema (3.20) a la siguiente forma canónica observable

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1s} &= z_{2s}, \\ \dot{z}_{2s} &= z_{3s}, \\ \dot{z}_{3s} &= -\dot{x}_{2s} - \dot{x}_{3s} + \bar{u} = \Psi_s(x_s) + \bar{u}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Así, el ejemplo se sigue como en la sección anterior. Para la simulación numérica se emplean los parámetros  $a = b = 0.2$ , el vector de ganancias  $K = (15, 15, 15)$  y las condiciones iniciales  $x_{m_0} = (0.2, 0.2, 0.2)$  y  $x_{s_0} = (0.5, 0.5, 0.5)$  para el sistema maestro y esclavo respectivamente.

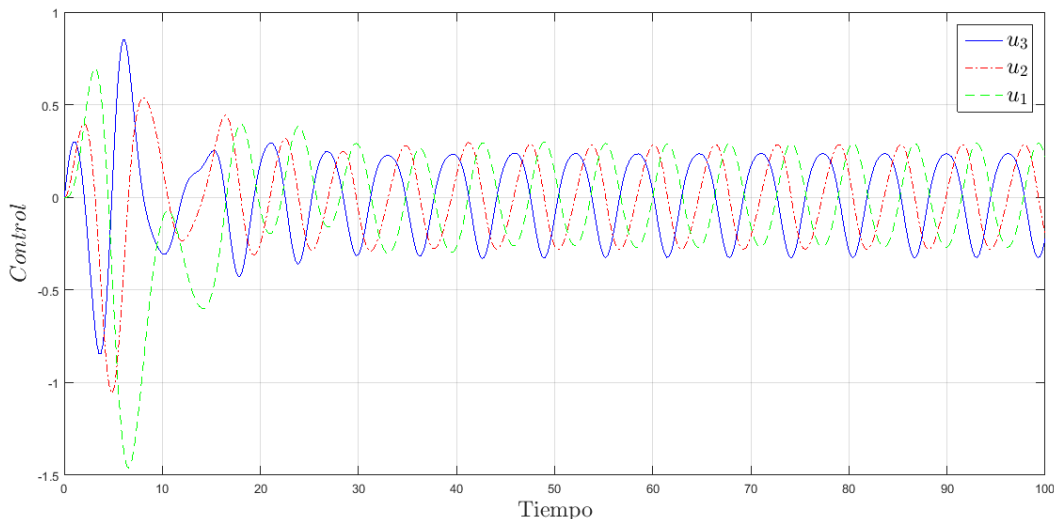


Figura 3.4: Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas de Rössler.

Observe la evolución en el espacio fase transformado de los sistemas de Rössler en la figura 3.5. Es posible apreciar como los sistemas se sincronizan gracias a la acción del controlador dinámico. Dado que se trata de sistemas idénticos, para observar la sincronización en las coordenadas originales (ver en la figura 3.6) se emplea la inversa de (3.21).

En la figura 3.4 se observa que las señales del controlador dinámico poseen una magnitud del mismo orden, como resultado, las trayectorias de los sistemas maestro y esclavo no son deformadas al ir de un espacio fase a otro, pues en ambos espacios conservan la forma de una espiral.

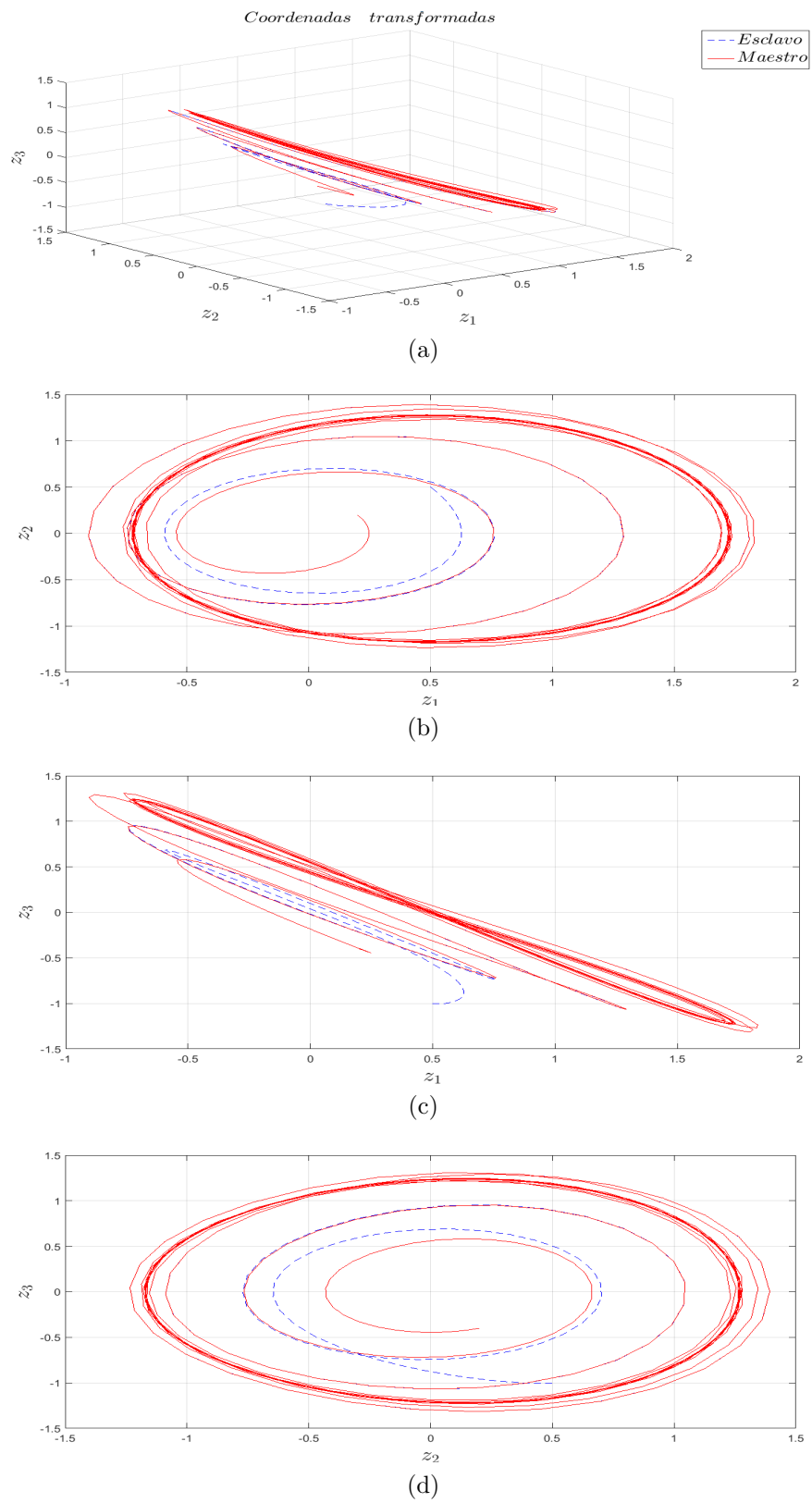


Figura 3.5: Evolución de los sistemas Rössler en las coordenadas transformadas.

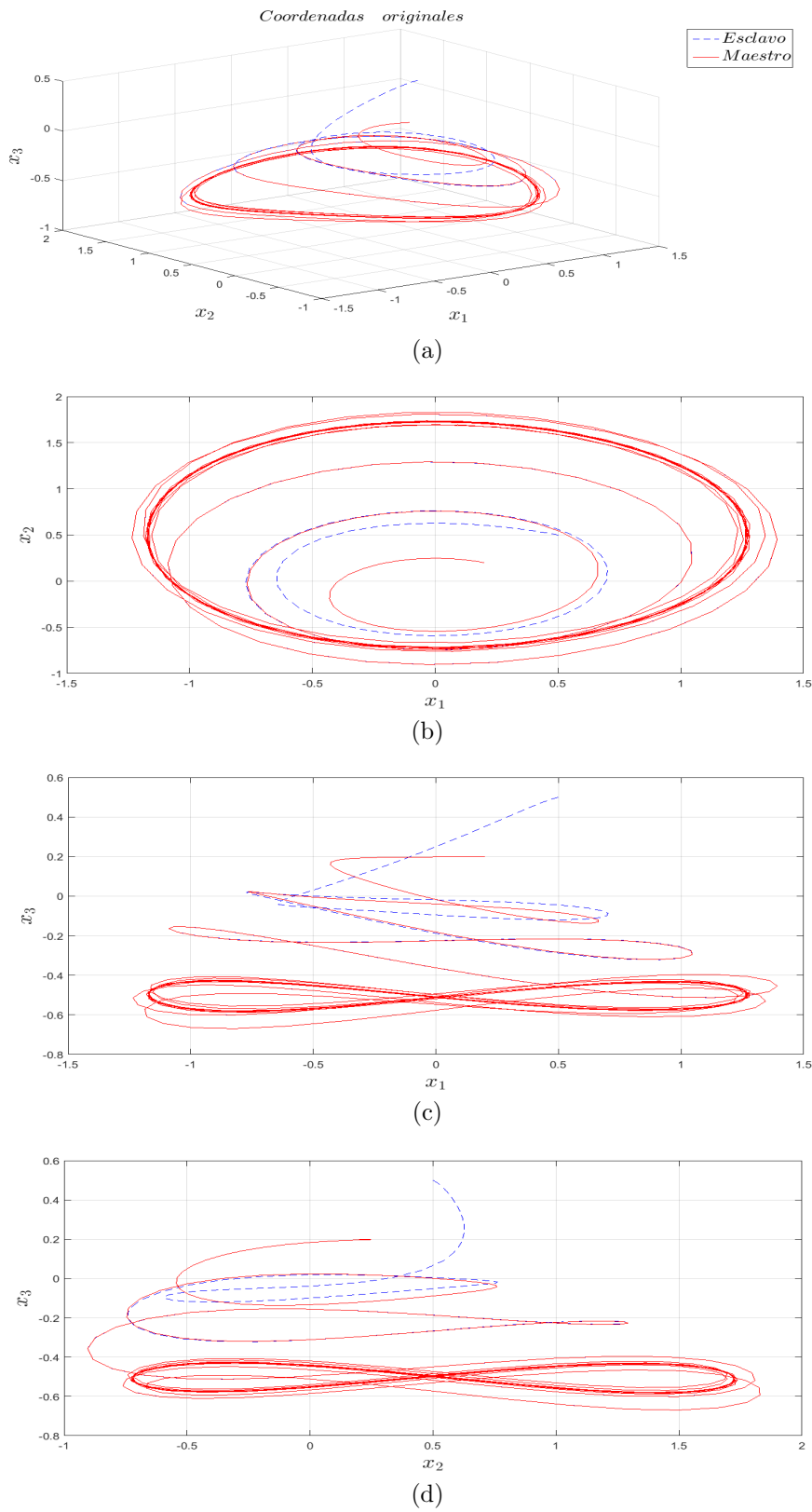


Figura 3.6: Evolución de los sistemas Rössler en las coordenadas originales.

### 3.2.3. Sincronización de un sistema de Chua no diferencialmente plano con un sistema de Chua diferencialmente plano.

Considere el siguiente sistema de Chua como el sistema maestro de una configuración maestro-esclavo

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1m} &= a(x_{2m} - x_{1m} - m_0 x_{1m} - m_1 x_{1m}^3), \\
 \dot{x}_{2m} &= x_{1m} - x_{2m} + x_{3m}, \\
 \dot{x}_{3m} &= -b x_{2m}, \\
 y_m &= x_{2m}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Note que el sistema (3.25) tiene un defecto igual a dos

$$\begin{aligned}
 x_{1m} &= \dot{y}_m + y_m + b \int y_m \\
 x_{2m} &= y_m \\
 x_{3m} &= -b \int y_m.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, considere como sistema esclavo al siguiente sistema idéntico

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1s} &= a(x_{2s} - x_{1s} - m_0 x_{1s} - m_1 x_{1s}^3), \\
 \dot{x}_{2s} &= x_{1s} - x_{2s} + x_{3s}, \\
 \dot{x}_{3s} &= -b x_{2s}, \\
 y_s &= x_{3s}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Observe que a diferencia de (3.25), el sistema (3.26) posee una salida plana, esto es

$$\begin{aligned}
 x_{1s} &= -\frac{1}{b} \ddot{y}_s - \frac{1}{b} \dot{y}_s - y_s \\
 x_{2s} &= -\frac{1}{b} \dot{y}_s \\
 x_{3s} &= y_s.
 \end{aligned}$$

Para el sistema (3.25) es posible elegir  $z_{1m} = -b \int y_m$  como elemento generador diferenciable, tal que se construye la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_{1m} \\ z_{2m} \\ z_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \int y_m \\ -b y_m \\ -b \dot{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{3m} \\ -b x_{2m} \\ -b(x_{1m} - x_{2m} + x_{3m}) \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

misma que permite expresar (3.25) como

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1m} &= z_{2m}, \\ \dot{z}_{2m} &= z_{3m}, \\ \dot{z}_{3m} &= -b(\dot{x}_{1m} - \dot{x}_{2m} + \dot{x}_{3m}) = \Psi_m(x_m).\end{aligned}\quad (3.28)$$

A su vez, el elemento generador diferenciable para (3.26) se escoge como  $z_{1s} = y_s + u_1 = x_{3s} + u_1$ , tal que se tiene la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \\ z_{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_s + u_1 \\ \dot{y}_s + u_2 \\ \ddot{y}_s + u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{3s} + u_1 \\ -bx_{2s} + u_2 \\ -b(x_{1s} - x_{2s} + x_{3s}) + u_3 \end{pmatrix}.\quad (3.29)$$

entonces, es posible escribir (3.26) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1s} &= z_{2s}, \\ \dot{z}_{2s} &= z_{3s}, \\ \dot{z}_{3s} &= -b(\dot{x}_{1s} - \dot{x}_{2s} + \dot{x}_{3s}) + \bar{u} = \Psi_s(x_s) + \bar{u}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Entonces, el ejemplo se sigue como en la sección 3.2.1. Para la simulación numérica se emplean los parámetros  $a = 9.5, b = 100/7, m_0 = -8/7, m_1 = 4/63$ , el vector de ganancias  $K = (15, 15, 15)$  y las condiciones iniciales  $x_{m_0} = (0.2, 0.2, 0.2)$  y  $x_{s_0} = (0.8, 0.9, 0.8)$  para el sistema maestro y esclavo respectivamente.

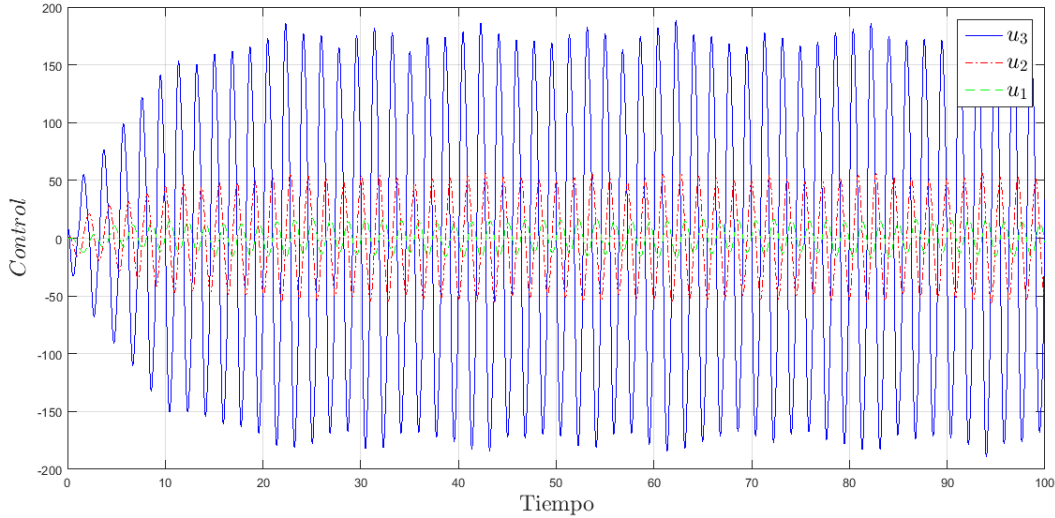


Figura 3.7: Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas de Chua.

En la figura 3.8 se puede observar la evolución en el espacio fase transformado de los sistemas maestro y esclavo. Note que el controlador dinámico consigue que los



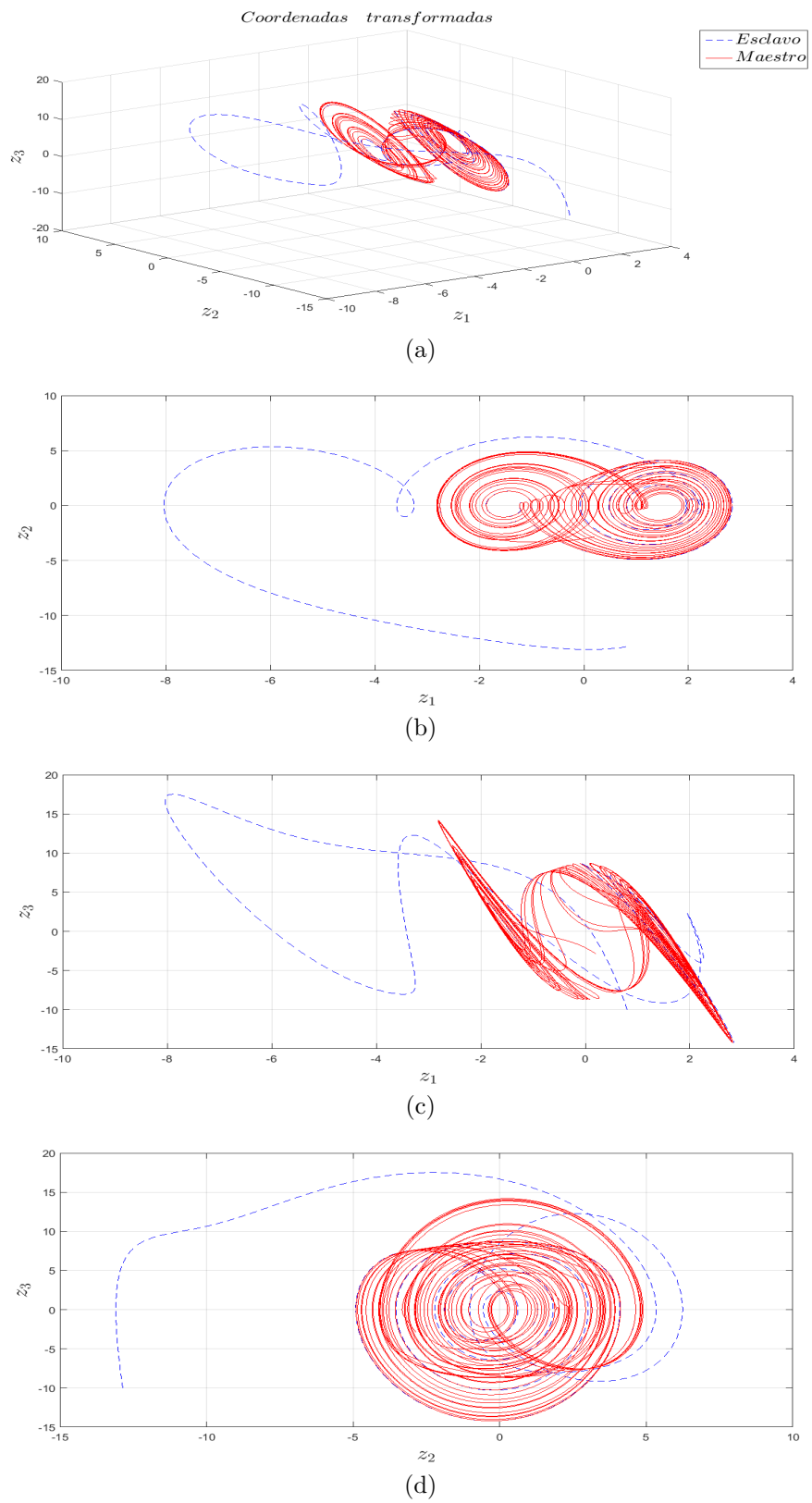


Figura 3.8: Evolución de los sistemas de Chua en las coordenadas transformadas.

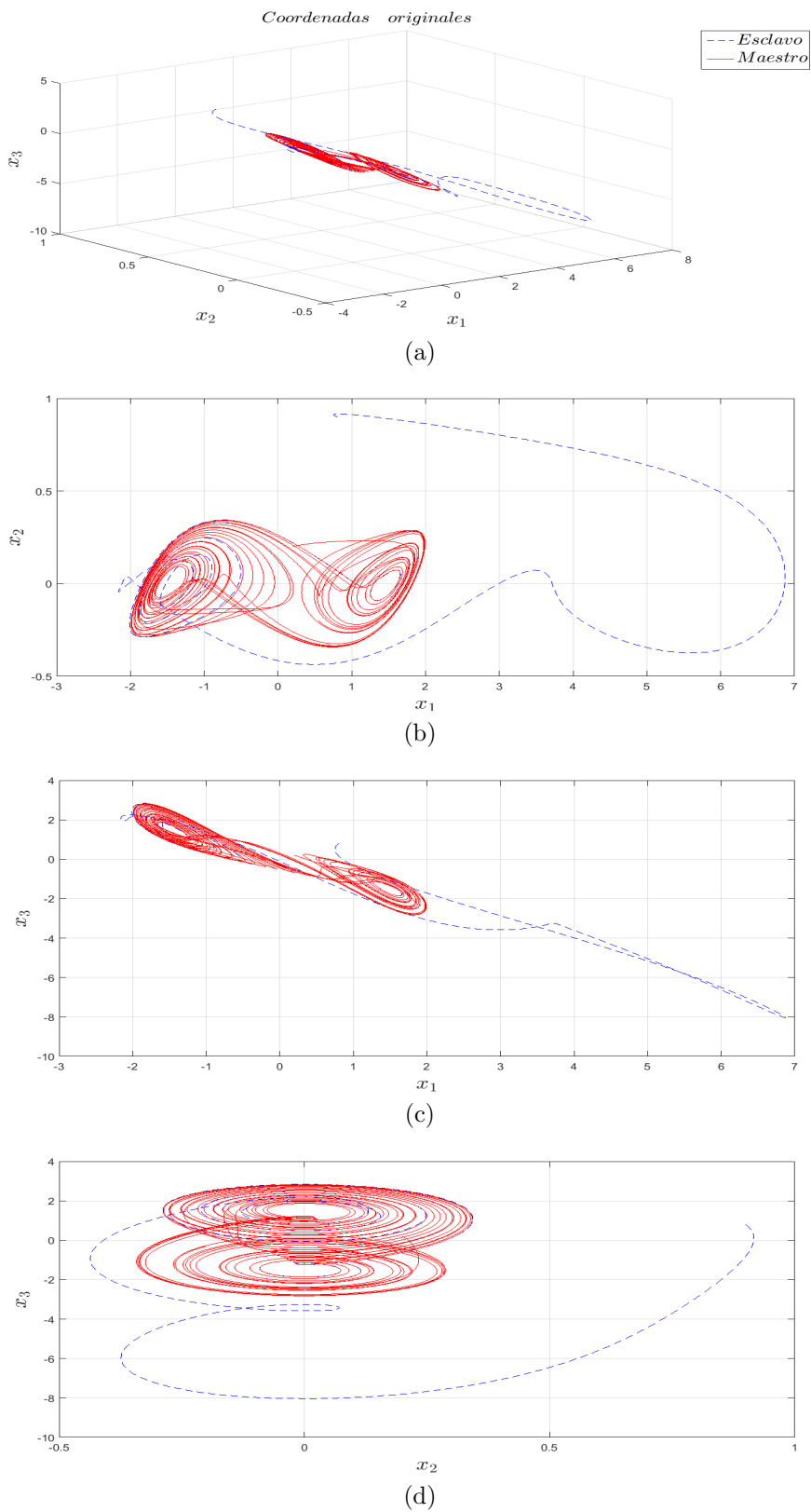


Figura 3.9: Evolución de los sistemas de Chua en las coordenadas originales.

sistemas se sincronicen, es decir, la trayectoria del sistema esclavo sigue a la del sistema maestro. A su vez, empleando la inversa de la transformación (3.27) es posible observar la sincronización en el espacio fase original.

Observe que las señales del controlador dinámico, figura 3.7, poseen diferente orden de magnitud entre sí, en consecuencia las trayectorias en el espacio fase original se deforman al pasar al espacio fase transformado y viceversa.

Note que en ninguno de los tres ejemplos anteriores se ha presentado la correspondiente figura del error de sincronización, esto es debido a que serán presentados en un capítulo posterior para llevar a cabo una comparación con la metodología de sincronización vía control activo.



# Capítulo 4

## Sincronización generalizada de sistemas caóticos vía un elemento generador diferenciable.

En la actualidad, lograr y explicar la sincronización de sistemas caóticos estrictamente diferentes es uno de los retos principales en ciencias no lineales dada su importancia teórica y práctica. Para abordar este problema, se utiliza el concepto de sincronización generalizada. Así, se dice que dos sistemas caóticos presentan una sincronización generalizada si los estados de un sistema son iguales a los del otro a través de un mapeo o transformación de coordenadas.

El concepto de sincronización generalizada fue introducido en 1995 (Rulkov y cols., 1995), entonces, se identificó y definió este concepto en base a propiedades geométricas presentes en el respectivo espacio fase de los sistemas caóticos, esto tras ser sincronizados. En este capítulo, la sincronización generalizada se define a partir de la existencia de un elemento generador diferenciable. A partir de este elemento se construye una transformación de coordenadas y posteriormente se diseña un controlador de tipo dinámico para lograr la sincronización de los sistemas caóticos.

### 4.1. Planteamiento del problema de sincronización generalizada.

Considere dos sistemas no lineales en configuración maestro-esclavo. El sistema maestro es

$$\Sigma_m := \begin{cases} \dot{x}_m = F_m(x_m, u_m) \\ y_m = h_m(x_m) \end{cases} \quad (4.1)$$

Por su parte, el sistema esclavo esta dado por

$$\Sigma_s := \begin{cases} \dot{x}_s = F_s(x_s, u_s(x_s, y_m)) \\ y_s = h_s(x_s) \end{cases} \quad (4.2)$$

Se dice que los sistemas  $\Sigma_m$  y  $\Sigma_s$  están en un estado de **sincronización generalizada** si existe un elemento generador diferenciable  $\delta$  a partir del cual se puede construir la transformación  $H_{ms} : \mathbf{R}^{n_s} \rightarrow \mathbf{R}^{n_m}$  con  $H_{ms} = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s$ , y a su vez existen los conjuntos  $B \subset \mathbf{R}^{n_m} \times \mathbf{R}^{n_s}$  y  $M = \{(x_s, x_m) | x_m = H_{ms}(x_s)\}$  tales que  $M \subset B$ , de tal manera que toda trayectoria con condiciones iniciales en  $B$  se aproxima y permanece en  $M$ , esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(x_s) - x_m\| = 0$$

**Observación 4.1.** *Note que la sincronización de dos sistemas idénticos es un caso particular de la sincronización generalizada, donde la transformación  $H_{ms} = I$ .*

Suponga que los sistemas (4.1) y (4.2) pueden ser transformados en una forma canónica observable, donde  $z_m = \Phi_m(x_m)$  y  $z_s = \Phi_s(x_s)$  son los vectores de estado en el espacio transformado de los sistemas maestro y esclavo respectivamente.

En las nuevas coordenadas es posible diseñar un control dinámico de la misma manera a como se muestra en la sección 3.1, consiguiendo que los sistemas maestro y esclavo se sincronicen en el espacio transformado. Sin embargo, el proceso inverso

$$\begin{aligned} \Phi_m^{-1}(z_m) &= x_m, \\ \Phi_s^{-1}(z_s) &= x_s, \end{aligned}$$

hace que los sistemas maestro y esclavo, al ser diferentes, sean llevados a espacios fase totalmente distintos entre sí. Para conseguir que estos alcancen un estado de sincronización generalizada, es necesario hallar la transformación  $H_{ms} = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s$ . Dado que los sistemas ya han sido sincronizados en el espacio transformado, se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(x_s) - x_m\| = 0$ , esto es, existe una sincronización en el espacio fase del sistema maestro gracias a la transformación  $H_{ms}$ .

## 4.2. Ejemplos numéricos de sincronización generalizada.

### 4.2.1. Sincronización generalizada de un sistema de Lorenz con un sistema de Rössler.

Considere dos sistemas caóticos en configuración maestro-esclavo. El sistema maestro es un atractor de Lorenz dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1m} &= a(x_{2m} - x_{1m}), \\ \dot{x}_{2m} &= bx_{1m} - x_{2m} - x_{1m}x_{3m}, \\ \dot{x}_{3m} &= -cx_{3m} + x_{1m}x_{2m}, \\ y_m &= x_{1m}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

A su vez, un sistema de Rössler actúa como sistema esclavo

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1s} &= -x_{2s} - x_{3s}, \\ \dot{x}_{2s} &= x_{1s}, \\ \dot{x}_{3s} &= \alpha(x_{2s} - x_{2s}^2) - \beta x_{3s}, \\ y_s &= x_{2s}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Tenemos que los sistemas (4.3) y (4.4) poseen salidas planas ya que

$$\begin{aligned}x_{1m} &= y_m, \\ x_{2m} &= \frac{1}{a}\dot{y}_m + y_m, \\ x_{3m} &= -\frac{1}{y_m} \left[ \frac{1}{a}\ddot{y}_m + \dot{y}_m - by_m + \frac{1}{a}\dot{y}_m + y_m \right]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}x_{1s} &= \dot{y}_s, \\ x_{2s} &= y_s, \\ x_{3s} &= -y_s - \ddot{y}_s,\end{aligned}$$

Se elije a  $z_{1m} = y_m = x_{1m}$  como elemento generador diferenciable del sistema (4.3), tal que se tiene la siguiente transformación de coordenadas

$$\Phi_m = \begin{pmatrix} z_{1m} \\ z_{2m} \\ z_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_m \\ \dot{y}_m \\ \ddot{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ a(x_{2m} - x_{1m}) \\ (ab + a^2)x_{1m} - (a + a^2)x_{2m} - ax_{1m}x_{3m} \end{pmatrix}\tag{4.5}$$

La transformación (4.5) permite llevar el sistema (4.3) a la siguiente forma canónica observable

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1m} &= z_{2m}, \\ \dot{z}_{2m} &= z_{3m}, \\ \dot{z}_{3m} &= (ab + a^2)\dot{x}_{1m} - (a + a^2)\dot{x}_{2m} - a\dot{x}_{1m}x_{3m} - ax_{1m}\dot{x}_{3m} = \Psi_m(x_m).\end{aligned}\quad (4.6)$$

Por otra parte, para el sistema (4.4) se elige  $z_{1s} = y_s + u_1 = x_{2s} + u_1$ , entonces se tiene la siguiente transformación de coordenadas

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \\ z_{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_s + u_1 \\ \dot{y}_s + \dot{u}_1 \\ \ddot{y}_s + \ddot{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2s} + u_1 \\ x_{1s} + u_2 \\ -x_{2s} - x_{3s} + u_3 \end{pmatrix}.\quad (4.7)$$

Así, con la transformación (4.7) es posible expresar (4.4) como

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1s} &= z_{2s}, \\ \dot{z}_{2s} &= z_{3s}, \\ \dot{z}_{3s} &= -\dot{x}_{2s} - \dot{x}_{3s} + \bar{u} = \Psi_s(x_s) + \bar{u}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

El error de sincronización es  $e = z_m - z_s$ , tal que se tiene

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \\ \dot{e}_3 &= \Psi_m(x_m) - \Psi_s(x_s) - \bar{u}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

La señal de control dinámico de (4.9) se diseña como

$$\bar{u} = \Psi_m(x_m) - \Psi_s(x_s) + Ke,\quad (4.10)$$

tal que en lazo cerrado ocurre que  $\dot{e} = Ae$ , en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}.\quad (4.11)$$

Se escoge  $K$  para que  $A$  sea Hurwitz y por lo tanto el error de sincronización sea cero.

Se realiza la correspondiente simulación numérica empleando los parámetros  $a = 10, b = 28, c = 8/3, \alpha = 0.2, \beta = 0.2$ , el vector de ganancias  $K = (150, 750, 150)$  y las condiciones iniciales  $x_{m0} = (0.2, 0.2, 0.2)$  y  $x_{s0} = (0.25, 0.25, 0.25)$  para el sistema maestro y esclavo respectivamente.



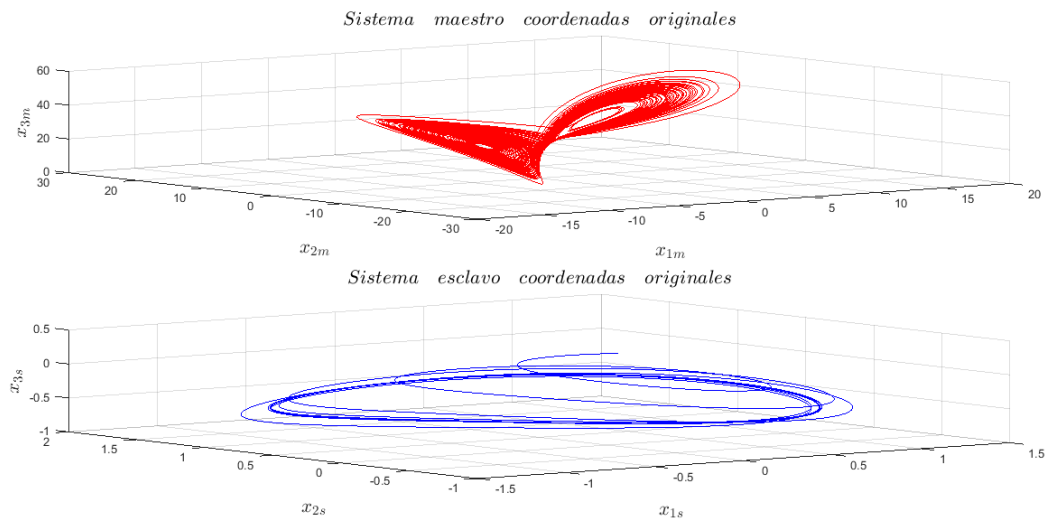


Figura 4.1: Sistemas caóticos (Lorenz y Rössler) en sus respectivas coordenadas originales

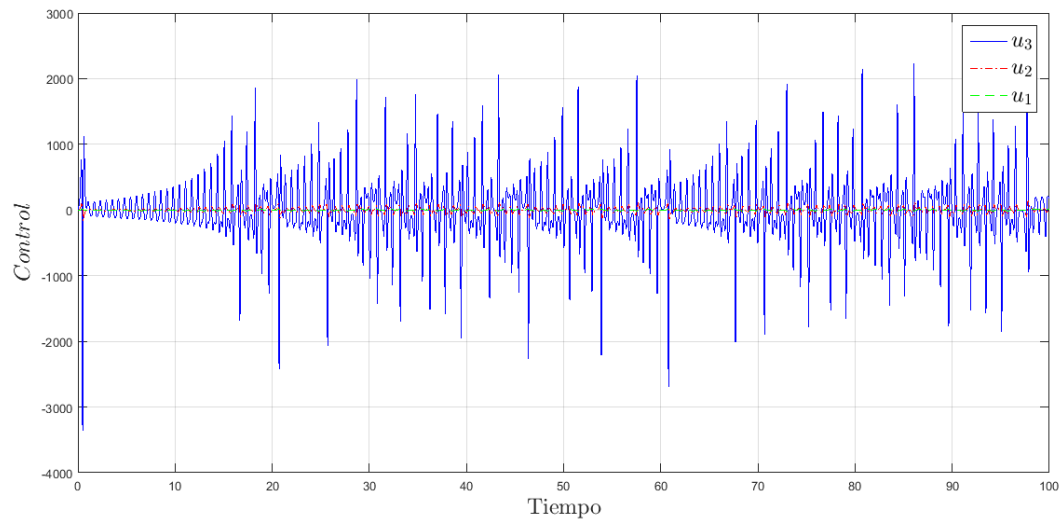


Figura 4.2: Señales del controlador dinámico para la sincronización Lorenz-Rössler

En la figura 4.3 se observa la evolución de los sistemas Lorenz y Rössler en un espacio fase transformado. Note que por efecto del controlador dinámico las trayectorias de los sistemas llegar a ser idénticas. Nuevamente las señales del controlador dinámico, figura 4.2, además de sincronizar los sistemas, escalan los estados  $x_2$  y  $x_3$  al pasar de un espacio fase a otro, deformando así las trayectorias de los sistemas.

Observe que, a diferencia de los ejemplos del capítulo anterior, al tratarse de sistemas diferentes la inversa de (4.5) sirve únicamente para observar el sistema maestro en sus coordenadas originales, mientras que para el sistema esclavo es necesario utilizar la inversa de (4.7).

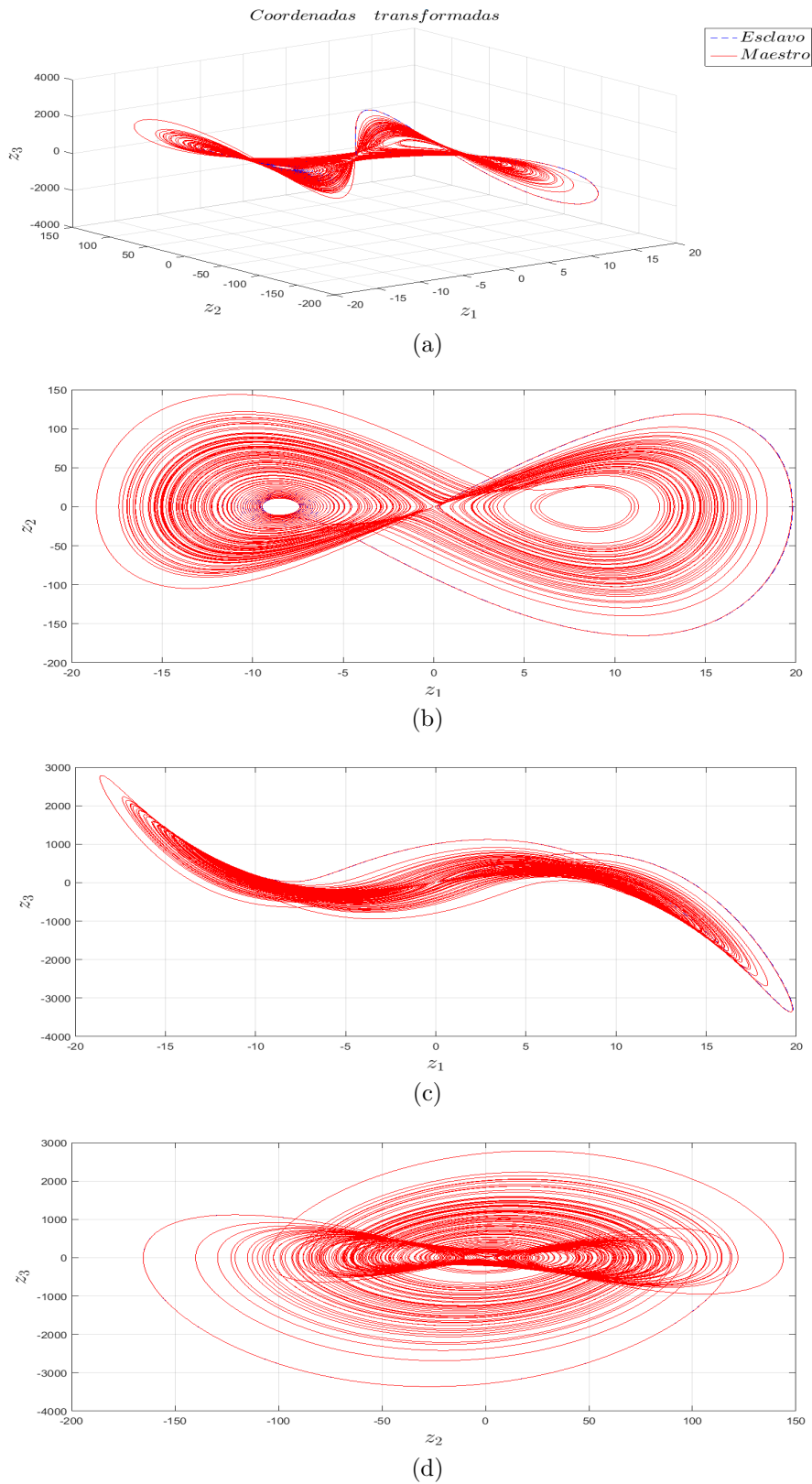


Figura 4.3: Sincronización de los sistemas Lorenz-Rössler en las coordenadas transformadas.

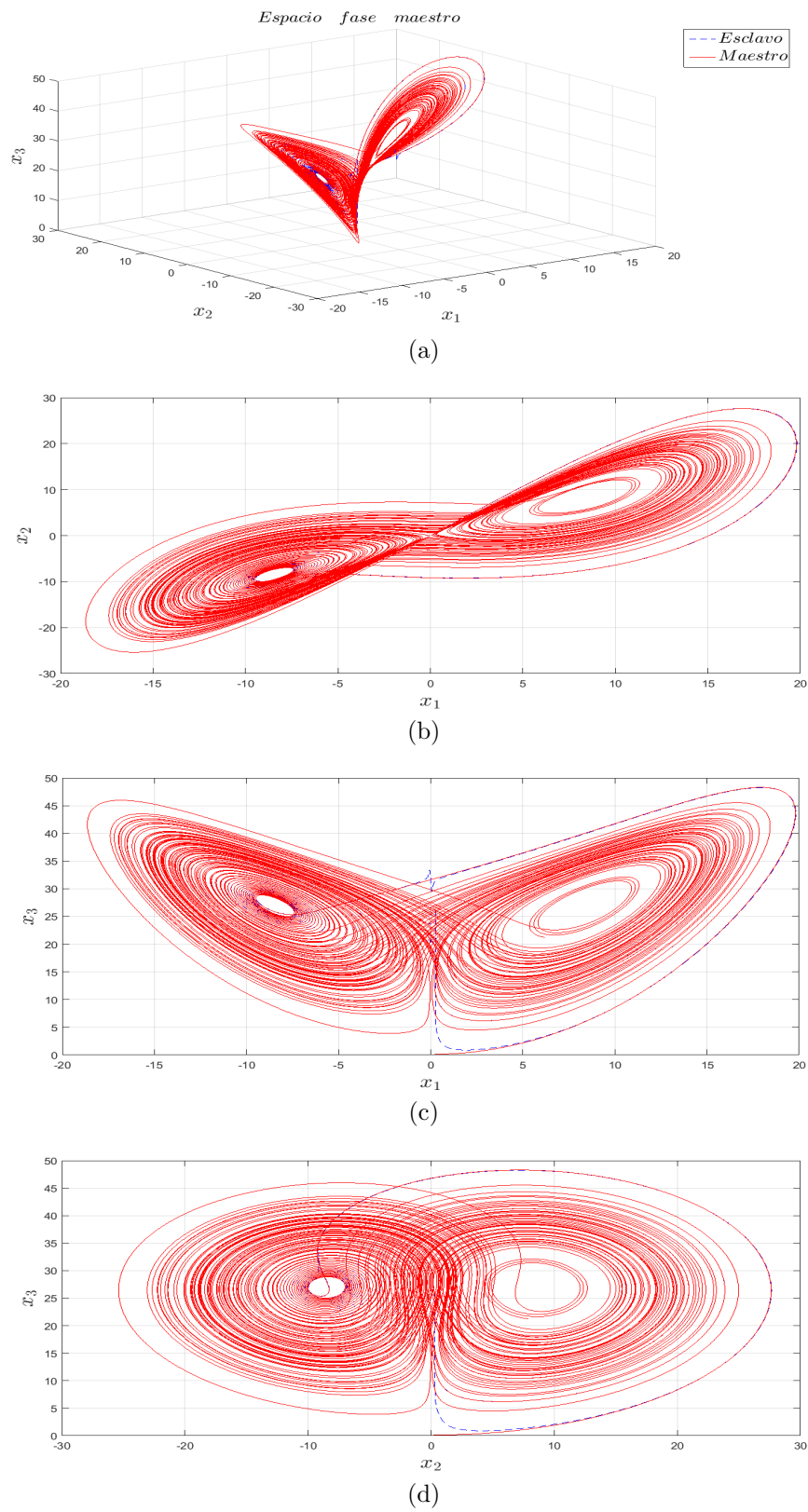


Figura 4.4: Sincronización generalizada de los sistemas Lorenz-Rössler.

Así, los sistemas pueden observarse en su respectivo espacio fase original en la figura 4.1, mientras que la sincronización generalizada de los sistemas Lorenz y Rössler es observada en la figura 4.4. Para esto es necesario emplear la transformación  $H_{ms} = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s$  tal que  $H_{ms}(x_s) = x_m$ .

### 4.2.2. Sincronización generalizada de un sistema de Chua con un sistema de Rössler.

Sean dos sistemas caóticos en configuración maestro-esclavo. Un sistema de Chua actúa como sistema maestro

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1m} &= a(x_{2m} - x_{1m} - m_0x_{1m} - m_1x_{1m}^3), \\ \dot{x}_{2m} &= x_{1m} - x_{2m} + x_{3m}, \\ \dot{x}_{3m} &= -bx_{2m}, \\ y_m &= x_{2m}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

El sistema esclavo es un sistema de Rössler definido por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1s} &= -x_{2s} - x_{3s}, \\ \dot{x}_{2s} &= x_{1s}, \\ \dot{x}_{3s} &= \alpha(x_{2s} - x_{2s}^2) - \beta x_{3s}, \\ y_s &= x_{1s}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Note como los sistemas (4.12) y (4.13) son no diferencialmente planos. Sucede que

$$\begin{aligned}x_{1m} &= \dot{y}_m + y_m - \dot{x}_{3m}, \\ x_{2m} &= y_m, \\ \dot{x}_{3m} &= -by_m,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}x_{1s} &= y_s, \\ \dot{x}_{2s} &= y_s, \\ x_{3s} &= -\dot{x}_{2s} - \dot{y}_s,\end{aligned}$$

Para el sistema maestro se elige  $z_{1m} = -b \int y_m$  como elemento generador diferenciable. Así, se obtiene la siguiente transformación de coordenadas

$$\Phi_m = \begin{pmatrix} z_{1m} \\ z_{2m} \\ z_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \int y_m \\ -by_m \\ -b\dot{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{3m} \\ -bx_{2m} \\ -b(x_{1m} - x_{2m} + x_{3m}) \end{pmatrix},\tag{4.14}$$

misma que permite escribir (4.12) como

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1m} &= z_{2m}, \\ \dot{z}_{2m} &= z_{3m}, \\ \dot{z}_{3m} &= -b(\dot{x}_{1m} - \dot{x}_{2m} + \dot{x}_{3m}) = \Psi_m(x_m).\end{aligned}\tag{4.15}$$

A su vez, el elemento generador diferenciable para (4.13) se escoge como  $z_{1s} = \int y_s + u_1 = x_{2s} + u_1$ . Con esto, se genera la siguiente transformación de coordenadas

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \\ z_{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int y_s + u_1 \\ y_s + \dot{u}_1 \\ \dot{y}_s + \ddot{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2s} + u_1 \\ x_{1s} + u_2 \\ -x_{2s} - x_{3s} + u_3 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Con (4.16) se expresa (4.13) como

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1s} &= z_{2s}, \\ \dot{z}_{2s} &= z_{3s}, \\ \dot{z}_{3s} &= -\dot{x}_{2s} - \dot{x}_{3s} + \bar{u} = \Psi_s(x_s) + \bar{u}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

El ejemplo se sigue como en el ejemplo anterior. La simulación numérica emplea los parámetros  $a = 9.5, b = 100/7, m_0 = -8/7, m_1 = 4/63, \alpha = \beta = 0.2$ , el vector de ganancias  $K = (15, 15, 15)$  y las condiciones iniciales  $x_{m_0} = (0.2, 0.2, 0.2)$  y  $x_{s_0} = (0.3, 0.3, 0.3)$  para el sistema maestro y esclavo respectivamente.

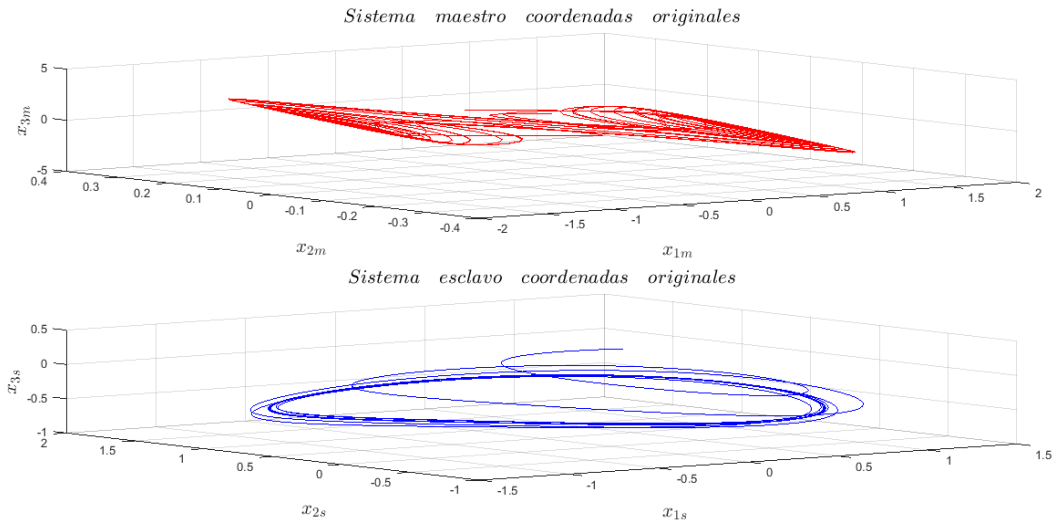


Figura 4.5: Sistemas caóticos (Chua y Rössler) en sus respectivas coordenadas originales.

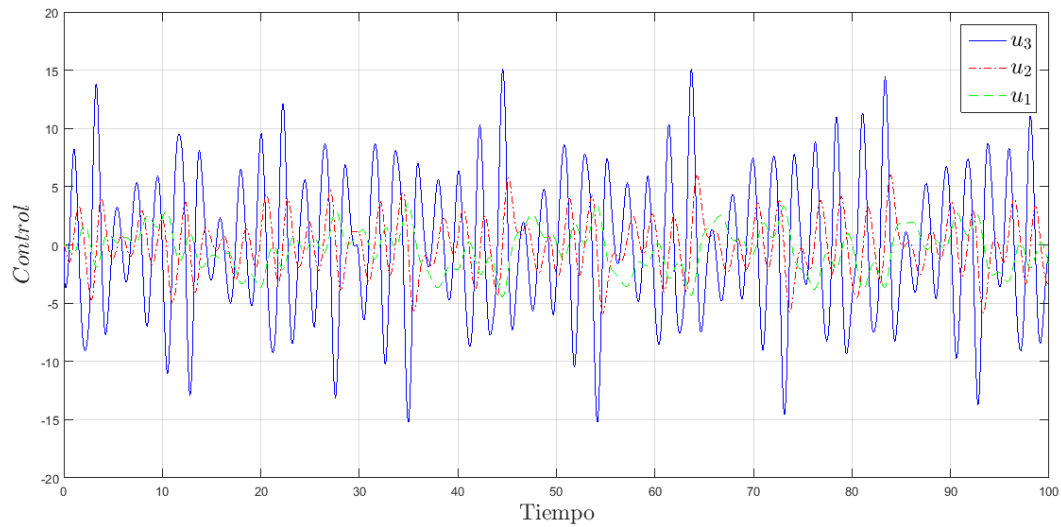


Figura 4.6: Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas Chua-Rössler.

La figura 4.7 corresponde a la evolución de los sistemas en el espacio fase transformado. Note que se logra la sincronización de estos sistemas gracias al controlador dinámico diseñado. En la figura 4.6 se observan las señales del controlador dinámico. Observe la deformación de las trayectorias, al ir de un espacio fase a otro, por efecto de la diferencia de magnitud de estas señales.

Para observar las trayectorias en sus correspondientes coordenadas originales, figura 4.5 se emplean la inversa de (4.14) y la de (4.16) para el sistema maestro y esclavo respectivamente. A su vez, la sincronización generalizada de estos sistemas, observada en la figura 4.8, se consigue al aplicar la transformación  $H_{ms}(x_s)$ .

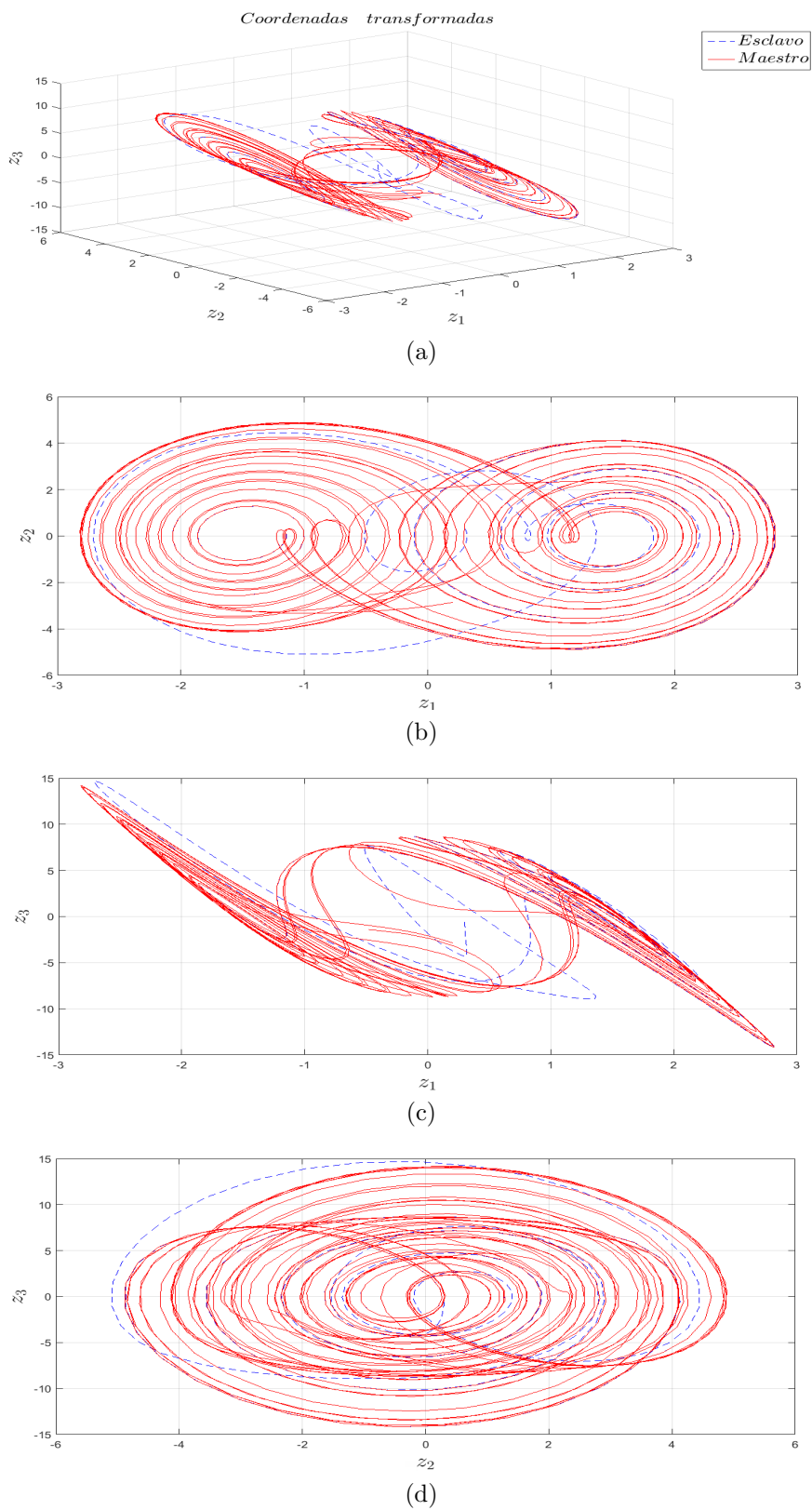


Figura 4.7: Sincronización de los sistemas Chua-Rössler en las coordenadas transformadas.



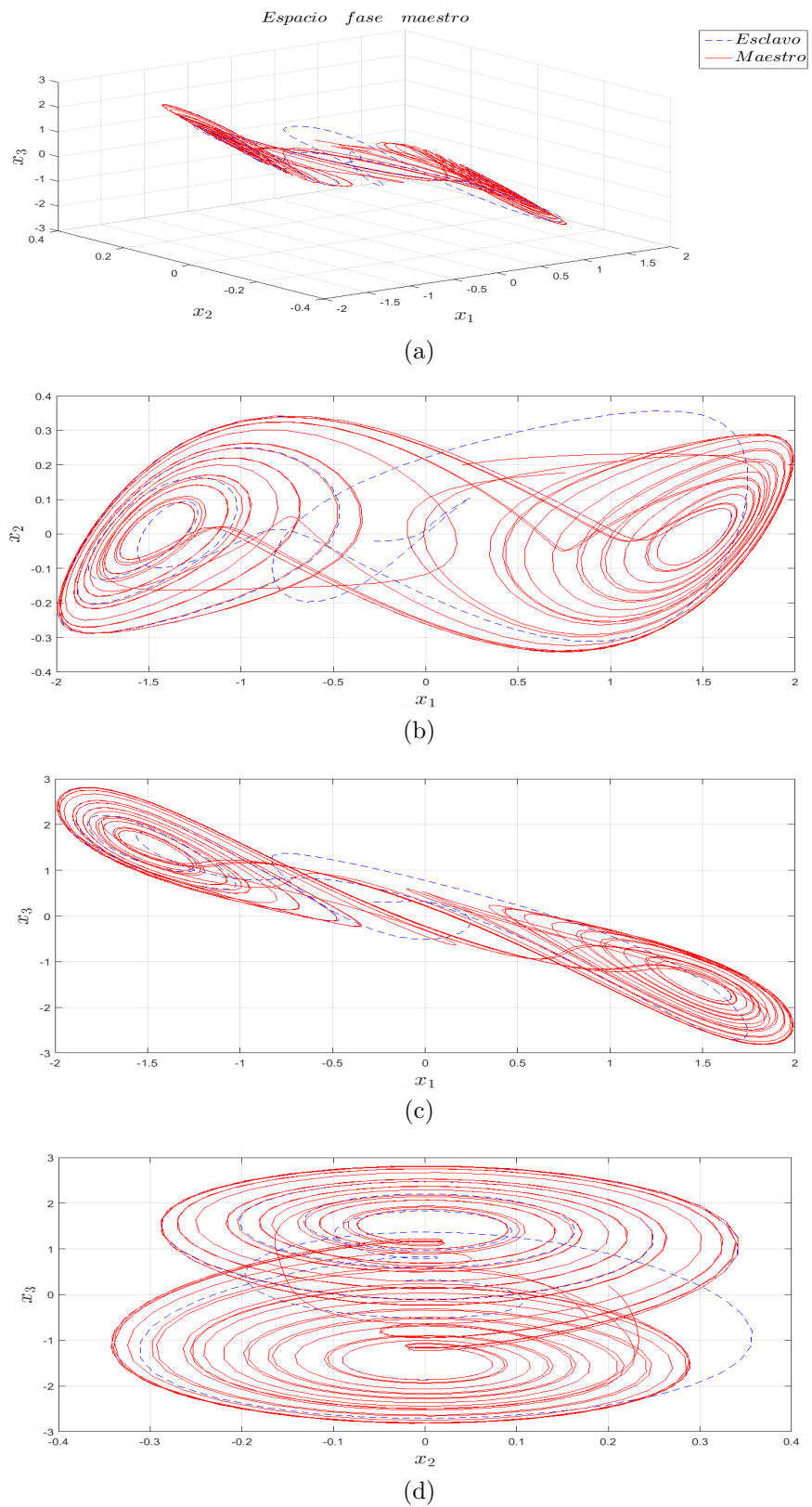


Figura 4.8: Sincronización generalizada de los sistemas Chua-Rössler.

### 4.2.3. Sincronización generalizada de un sistema de Chua con un sistema de Lorenz.

Considere un sistema de Chua dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1m} &= a(x_{2m} - x_{1m} - m_0x_{1m} - m_1x_{1m}^3), \\ \dot{x}_{2m} &= x_{1m} - x_{2m} + x_{3m}, \\ \dot{x}_{3m} &= -bx_{2m}, \\ y_m &= x_{2m},\end{aligned}\tag{4.18}$$

en configuración maestro-esclavo con un sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1s} &= \alpha(x_{2s} - x_{1s}), \\ \dot{x}_{2s} &= \beta x_{1s} - x_{2s} - x_{1s}x_{3s}, \\ \dot{x}_{3s} &= -\gamma x_{3s} + x_{1s}x_{2s}, \\ y_s &= x_{1s}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

El sistema maestro (4.18) resulta ser no diferencialmente plano, por su parte, el sistema (4.19) posee una salida plana.

Se elige como elemento generador diferenciable para el sistema maestro a  $z_{1m} = -b \int y_m$ , con el cual se genera la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_{1m} \\ z_{2m} \\ z_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \int y_m \\ -by_m \\ -b\dot{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{3m} \\ -bx_{2m} \\ -b(x_{1m} - x_{2m} + x_{3m}) \end{pmatrix}.\tag{4.20}$$

Por otro lado, para el sistema (4.19) se elige  $z_{1s} = y_s + u_1 = x_{1s} + u_1$  como elemento generador diferenciable. La transformación de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \\ z_{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_s + u_1 \\ \dot{y}_s + \dot{u}_1 \\ \ddot{y}_s + \ddot{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1s} + u_1 \\ \alpha(x_{2s} - x_{1s}) + u_2 \\ (\alpha\beta + \alpha^2)x_{1s} - (\alpha + \alpha^2)x_{2s} - \alpha x_{1s}x_{3s} + u_3 \end{pmatrix}.\tag{4.21}$$

Las transformaciones (4.20) y (4.21) permiten llevar respectivamente a los sistemas maestro y esclavo a una forma canónica observable y se procede con la misma metodología.

La simulación numérica emplea los parámetros  $a = 9.5, b = 100/7, m_0 = -8/7, m_1 = 4/63, \alpha = 10, \beta = 28, \gamma = 8/3$ , el vector de ganancias  $K = (150, 750, 150)$  y las condiciones iniciales  $x_{m_0} = (0.2, 0.2, 0.2)$  y  $x_{s_0} = (0.25, 0.25, 0.25)$  para el sistema maestro y esclavo respectivamente.

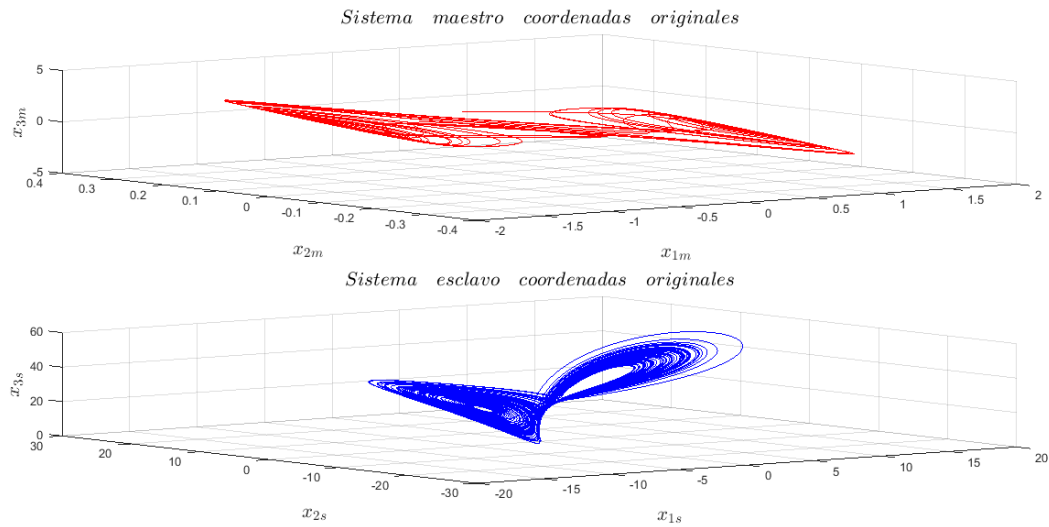


Figura 4.9: Sistemas caóticos (Chua y Lorenz) en sus respectivas coordenadas originales.

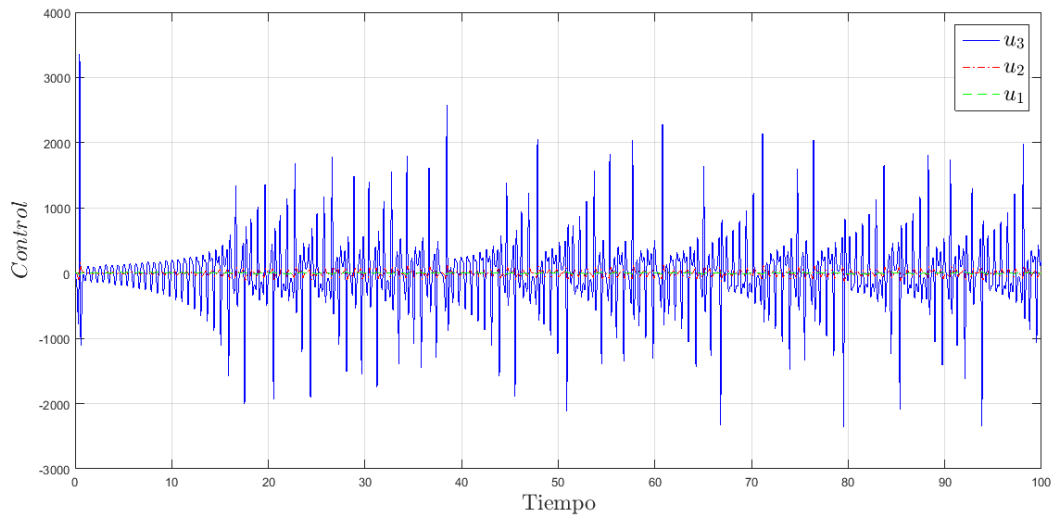


Figura 4.10: Señales del controlador dinámico para la sincronización de los sistemas Chua-Lorenz.

Observe en la figura 4.11 la evolución de los sistemas en el espacio fase transformado. Se aprecia que el controlador dinámico consigue que las trayectorias sean idénticas, esto es, los sistemas se sincronizan en el espacio fase transformado. Note que el escalamiento de los estados al pasar del espacio fase transformado al espacio fase del sistema maestro, dado por el distinto orden de magnitud de las señales del controlador dinámico mostradas en la figura 4.10, tiene como consecuencia una deformación de las trayectorias.

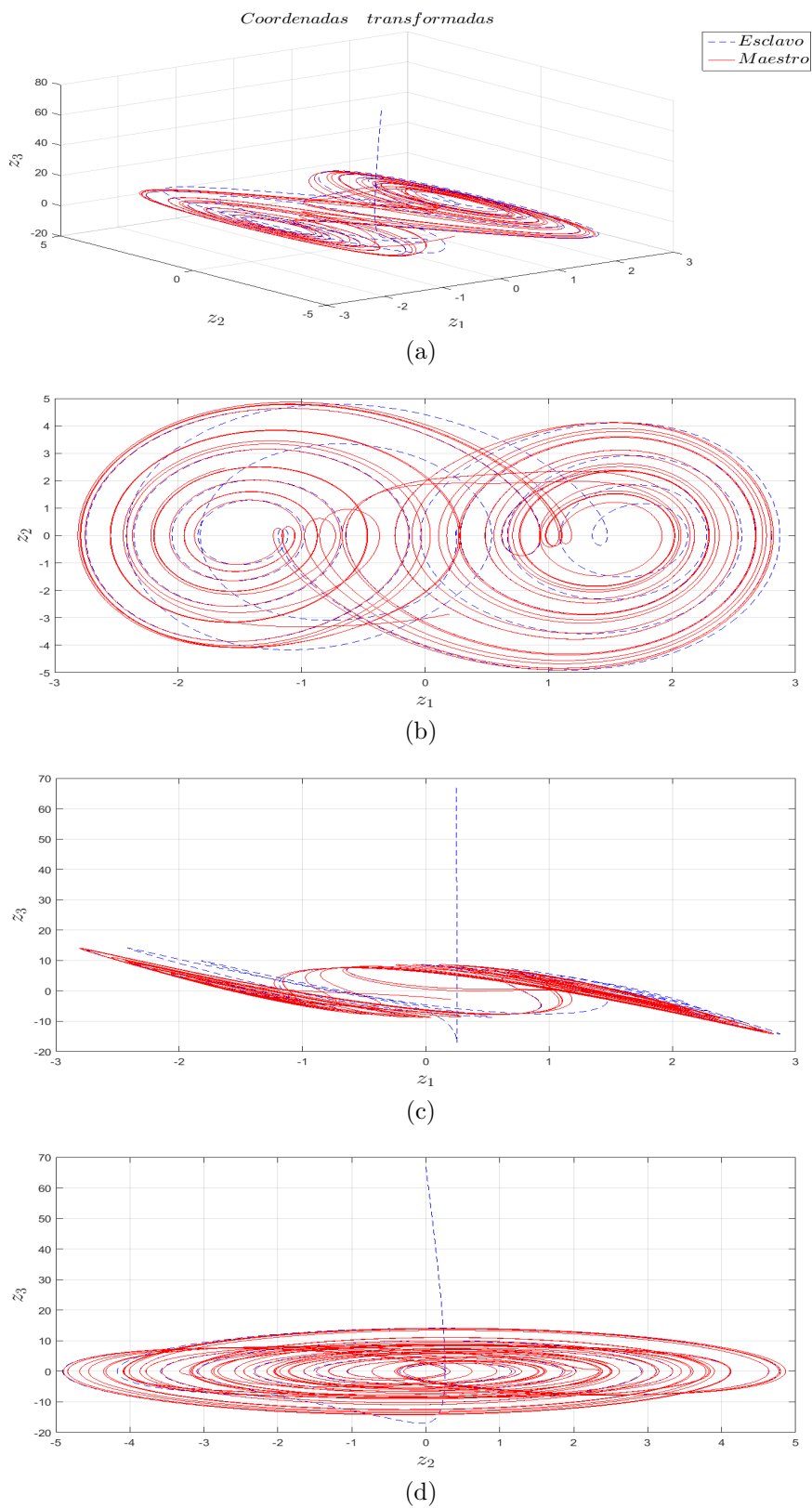


Figura 4.11: Sincronización de los sistemas Chua-Lorenz en las coordenadas transformadas.

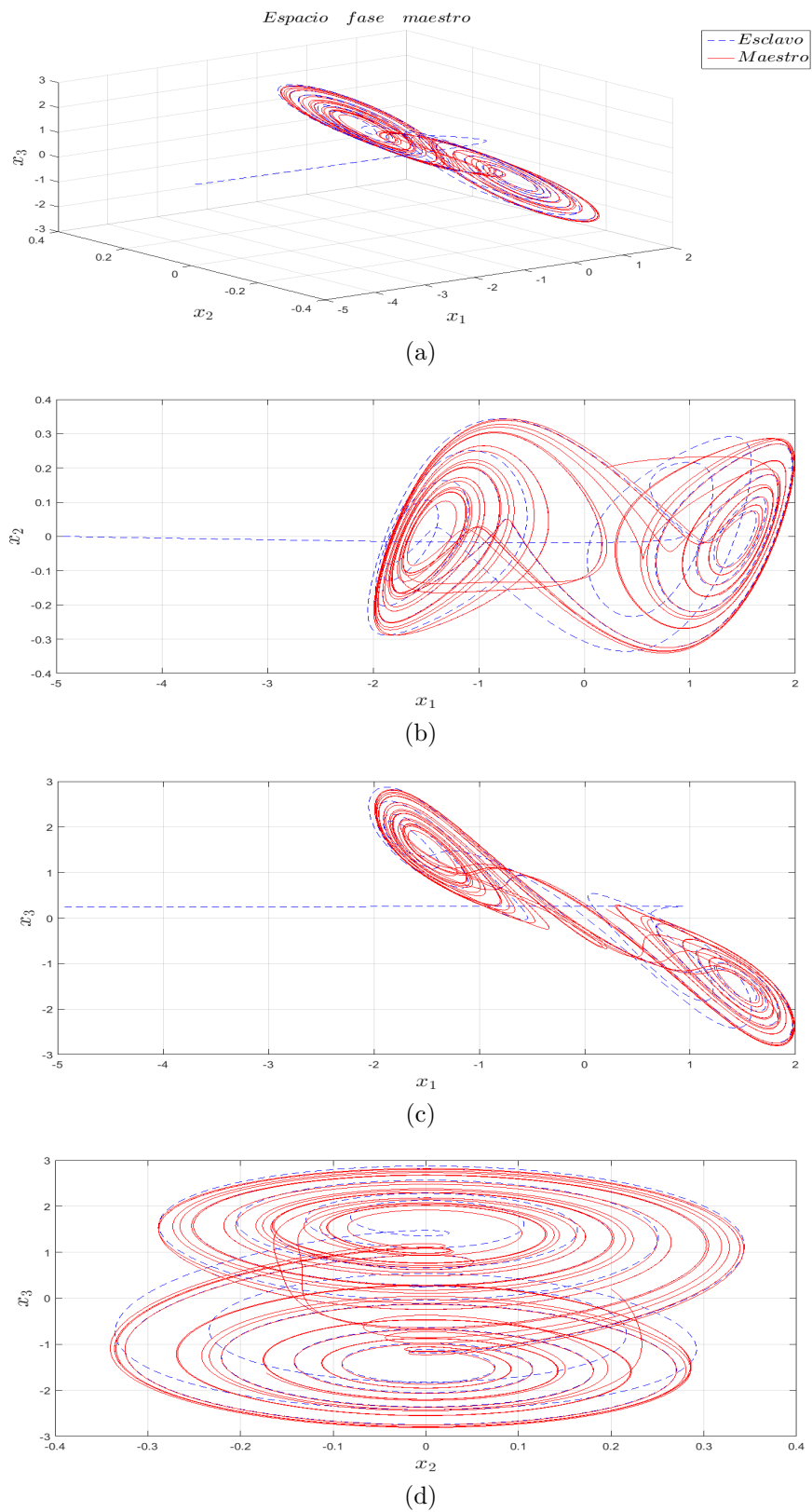


Figura 4.12: Sincronización generalizada de los sistemas Chua-Lorenz.

Por otro lado, en la figura 4.5 es posible observar los sistemas caóticos en su respectivo espacio fase original, para ello se emplean la inversa de (4.20) para el sistema maestro y la de (4.21) para el sistema esclavo. Finalmente, en la figura 4.12, se observa la sincronización generalizada de estos sistemas al aplicar la transformación  $H_{ms}$  tal que  $x_m = H_{ms}(x_s)$ .

# Capítulo 5

## Observadores de estado para sistemas caóticos.

Observe que la metodología del elemento generador diferenciable requiere que todos los estados del sistema caótico en cuestión estén disponibles. Al observar el plantamiento del problema, resulta que tanto para el sistema maestro como para el esclavo se asume que sólo un estado es conocido a través de la salida. La anterior, es una situación muy común en la práctica, ya sea por falta de instrumentación o por el simple hecho de que es imposible medir ciertas variables, por lo tanto, es necesario recurrir a un observador de estado.

En este capítulo, se propone un observador de estado inspirado en una definición alternativa de la propiedad de observabilidad de los sistemas dinámicos, conocida como observabilidad algebraica, inicialmente planteada en (Martínez-Guerra y Mendoza-Camargo, 2004) y posteriormente ampliada en (Martínez-Guerra y cols., 2006). Se hace uso de esta propiedad dado que, como se verá a continuación, guarda una cercana relación con el concepto de plitud diferencial.

### 5.1. Condición algebraica de observabilidad.

Considere el siguiente sistema no lineal

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (5.1)$$

En donde  $f \in \mathbb{R}^n$  es una función no lineal continuamente diferenciable,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  es el vector de estado,  $y$  es la salida y  $h$  es una función analítica en general.

El sistema  $\Sigma$  se dice **algebraicamente observable** si satisface el siguiente polinomio diferencial

$$x_i(t) = \phi_i(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\alpha)}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

Con  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ . La expresión (5.2) se conoce como condición algebraica de observabilidad (AOC).

**Observación 5.1.** *Observe que si el sistema  $\Sigma$  es diferencialmente plano entonces es algebraicamente observable.*

**Observación 5.2.** *Si el sistema  $\Sigma$  es no diferencialmente plano con un defecto menor a su dimensión, existe al menos un estado que satisface la AOC.*

Aprovechando la AOC se diseña un observador de estado para el sistema  $\Sigma$ . Para ello, definase una nueva variable  $\eta(x)$ . Esta nueva variable contiene los estados desconocidos del sistema, tal que se tiene el siguiente sistema extendido

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, \eta(x)), \\ \dot{\eta}(x) &= g(x, u), \\ y(t) &= h(x, u), \end{aligned} \quad (5.3)$$

**Observación 5.3.** *Los estados conocidos del sistema pueden ser incluidos en  $\eta(x)$ , en consecuencia, la estimación de los estados desconocidos depende de la elección de  $\eta(x)$ .*

Observe que el problema ahora es observar  $\eta(x)$ . Así, se propone un observador bajo las siguientes hipótesis

**Hipótesis 5.1.** *La dinámica  $g(x, u)$  está acotada tal que  $\|g(x, u)\| \leq N$ , donde  $0 < N < \infty$*

**Hipótesis 5.2.**  *$\eta(x)$  es algebraicamente observable respecto a la salida del sistema.*

## 5.2. Propuesta de observador.

Ahora, para el sistema  $\Sigma$  se propone el siguiente observador proporcional integral (PIO) de orden reducido

$$\dot{\hat{\eta}}(x) = k_p [\eta(x) - \hat{\eta}(x)] + k_i \int_{x_0}^x [\eta(\sigma) - \hat{\eta}(\sigma)] d\sigma, \quad (5.4)$$

Donde  $\hat{\eta}(x)$  es el estimado de  $\eta(x)$ . Definase el error de estimación  $e(t)$  como

$$e(t) = \eta(x) - \hat{\eta}(x). \quad (5.5)$$



Tal que (5.4) puede expresarse como

$$\dot{\hat{\eta}}(x) = k_p e(t) + k_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau, \quad (5.6)$$

**Teorema 5.1.** *Se dice que (5.6) es un Observador Proporcional Integral (PIO) de orden reducido para  $\eta(x)$ , con  $k_i$  y  $k_p$  reales positivas, si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\eta}(t) = \eta(t) \quad (5.7)$$

o equivalentemente si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (5.8)$$

*Demostración.* Sea el vector de error de estimación

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \hat{\eta} \\ \int (\eta - \hat{\eta}) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

tal que (5.6) puede ser expresado como

$$\dot{\hat{\eta}} = k_p e_1 + k_i e_2. \quad (5.10)$$

La dinámica del vector de error de estimación es

$$\dot{\bar{e}} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}} \\ \eta - \hat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x, u) - k_p e_1 - k_i e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

tal que se tiene

$$\dot{\bar{e}} = - \begin{pmatrix} k_p & k_i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x, u) \\ 0 \end{pmatrix} = -K\bar{e} + \Omega. \quad (5.12)$$

Observe que como  $k_p, k_i > 0$ , entonces la matriz  $K$  es positiva definida, en consecuencia todos los valores propios  $Re\lambda_i(K) > 0$ .

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\bar{e}) = \frac{1}{2} \bar{e}^T P \bar{e}, \quad (5.13)$$

Derivando  $V(\bar{e})$  a lo largo de las trayectorias de (5.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}) &= \frac{1}{2} (\dot{\bar{e}}^T \bar{e} + \bar{e}^T \dot{\bar{e}}) \\ &= \frac{1}{2} (2\bar{e}^T \dot{\bar{e}}) \\ &= \bar{e}^T \dot{\bar{e}} \\ &= \bar{e}^T (-K\bar{e} + \Omega) \\ &= -\bar{e}^T K \bar{e} + \bar{e}^T \Omega \end{aligned} \quad (5.14)$$

Empleando la desigualdad de Rayleigh en (5.14) se llega a

$$\dot{V}(\bar{e}) \leq -\lambda_{\min}(K)\|\bar{e}\|^2 + \bar{e}^T \Omega. \quad (5.15)$$

De la hipótesis 1, se tiene que  $\|\bar{e}^T \Omega\| \leq \|\bar{e}\|\|\Omega\| \leq \|\bar{e}\|N$ , tal que se puede escribir

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}) &\leq -\lambda_{\min}(K)\|\bar{e}\|^2 + \|\bar{e}\|N \\ &\leq -[\lambda_{\min}(K)\|\bar{e}\| - N]\|\bar{e}\| \end{aligned} \quad (5.16)$$

Entonces,  $\dot{V}(\bar{e}) < 0$  en  $B = \left\{ \bar{e} : \|\bar{e}\| > \frac{N}{\lambda_{\min}(K)} = \delta \right\}$ .

Para asegurar que el conjunto  $B$  existe, es necesario que  $\|\bar{e}\|$  tenga una cota superior. Sean  $c$  y  $\varepsilon$  dos cotas superiores de  $V(\bar{e})$  tales que

$$\frac{\delta^2}{2} < \varepsilon < c, \quad (5.17)$$

Note que  $\dot{V}(\bar{e})$  es negativa en  $B_{\varepsilon,c} = \{\bar{e} : \varepsilon \leq V(\bar{e}) \leq c\}$ . Así, en  $B_{\varepsilon,c}$ , la función  $V(\bar{e})$  decrece monótonamente hasta llegar a la solución en el conjunto  $B_\varepsilon = \{\bar{e} : V(\bar{e}) \geq \varepsilon\}$ . Como la solución en  $B_c = \{\bar{e} : V(\bar{e}) \leq c\}$  permanece ahí para todo  $t \geq 0$ , es posible fijar  $\varepsilon = \frac{\delta^2}{2}$  de tal manera que debido a  $V(\bar{e}) = \frac{1}{2}\|\bar{e}\|^2$  se tiene que

$$\frac{1}{2}\|\bar{e}\|^2 = \frac{\delta^2}{2} \quad (5.18)$$

es decir, la cota última de  $\bar{e}$  es

$$\|\bar{e}\| \leq \delta = \frac{N}{\lambda_{\min}(K)} \quad (5.19)$$

entonces,  $\dot{V}(\bar{e}) < 0$  con cota última  $\delta$ . Finalmente, se asegura que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ .  $\square$

### 5.3. Ejemplo.

Para ejemplificar el diseño de un PIO haciendo uso de la AOC, considere un atractor de Lorenz dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3, \\ y &= x_2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Los parámetros  $\sigma, \rho$  y  $\beta$  son conocidos y tales que el sistema exhibe un comportamiento caótico. Note que el sistema (5.20) es no diferencialmente plano con un defecto igual a dos puesto que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y - x_1), \\ x_2 &= y, \\ x_3 &= \rho - \frac{\dot{y} + y}{x_1}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Donde  $x_1 \neq 0$ . Para resolver el problema, se define  $\eta(x)$  como

$$\eta(x) = \frac{\dot{x}_1}{\sigma} + x_1 = y \quad (5.22)$$

Observe que  $\eta(x)$  satisface la AOC. A partir de (5.22) y (5.4) se tiene la siguiente expresión

$$\dot{\hat{\eta}} = k_{p1}(y - \hat{\eta}) + k_{i1} \int (y - \hat{\eta}). \quad (5.23)$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene  $\hat{\eta}$ . De la ecuación (5.22), el estimado de  $x_1$  se puede hallar con

$$\dot{\hat{x}}_1 = \sigma(\hat{\eta} - \hat{x}_1). \quad (5.24)$$

Cuya solución proporciona  $\hat{x}_1$ . Note que para  $x_3$  se puede emplear el estimado  $\hat{x}_1$  y la salida del sistema, de tal manera que

$$x_3 = \frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{x}_3) \quad (5.25)$$

Por lo tanto, a partir de la expresión anterior y de (5.4) se llega a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_3 &= k_{p3} \left[ \frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{x}_3) - \hat{x}_3 \right] \\ &+ k_{i3} \int \left[ \frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{x}_3) - \hat{x}_3 \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

Note que la variable  $\dot{x}_3$  es desconocida, sin embargo, puede aproximarse a  $\dot{\hat{x}}_3$  en una región donde  $\|\dot{x}_3 - \dot{\hat{x}}_3\| < \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ , de tal manera que (5.26) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_3 &= k_{p3} \left[ \frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{\hat{x}}_3) - \hat{x}_3 \right] \\ &+ k_{i3} \int \left[ \frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{\hat{x}}_3) - \hat{x}_3 \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

Manipulando algebraicamente (5.27) se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_3 &= \frac{\beta \hat{x}_1}{\beta + k_{p3}} y - \left[ \frac{\beta(k_{p3} + k_{i3})}{\beta + k_{p3}} \right] \hat{x}_3 \\ &\frac{\beta k_{i3}}{\beta + k_{p3}} \int \left( \frac{\hat{x}_1}{\beta} y - \hat{x}_3 \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Finalmente, el estimado  $\hat{x}_3$  puede obtenerse al solucionar (5.28).

## 5.4. Simulación numérica.

Para la simulación numérica se emplean las siguientes condiciones iniciales  $x(0) = [1, 0, -5]$ ,  $\hat{x}_1(0) = 4$  y  $\hat{x}_3(0) = 2$ . Las ganancias del observador PI son  $k_{p1} = 15$ ,  $k_{i1} = 2450$ ,  $k_{p3} = 2800$  y  $k_{i3} = 2$ . Para el sistema se elige  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  y  $\beta = 8/3$ .

En las figuras 5.1 y 5.2 se observa la estimación de los estados desconocidos,  $x_1$  y  $x_3$  respectivamente, realizada por el PIO. La figura 5.3 corresponde al error de estimación y demuestra que el buen desempeño del PIO. Se puede concluir que es posible utilizar un PIO diseñado a partir de un elemento generador diferenciable para proceder a resolver la sincronización de sistemas caóticos vía un elemento generador diferenciable.

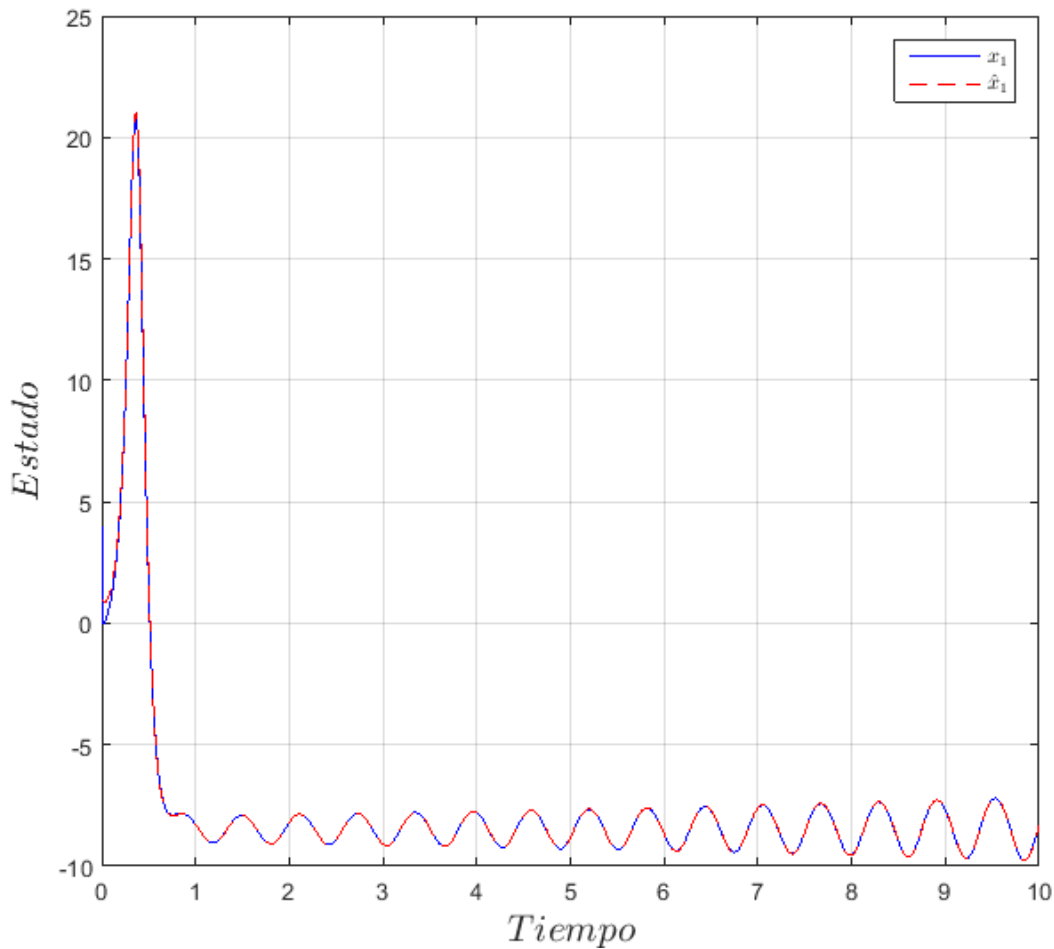
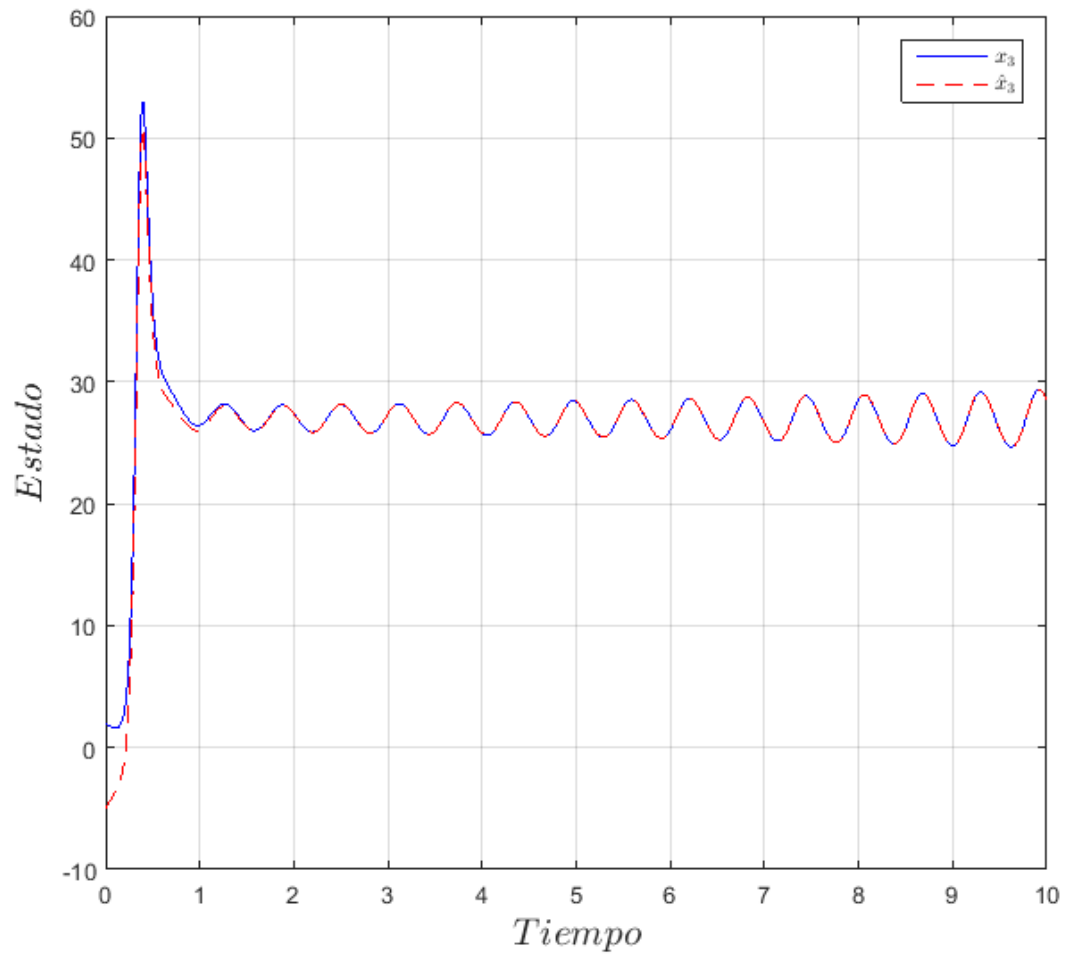


Figura 5.1: Estado real  $x_1$  y estimado  $\hat{x}_1$ .

Figura 5.2: Estado real  $x_3$  y estimado  $\hat{x}_3$ .

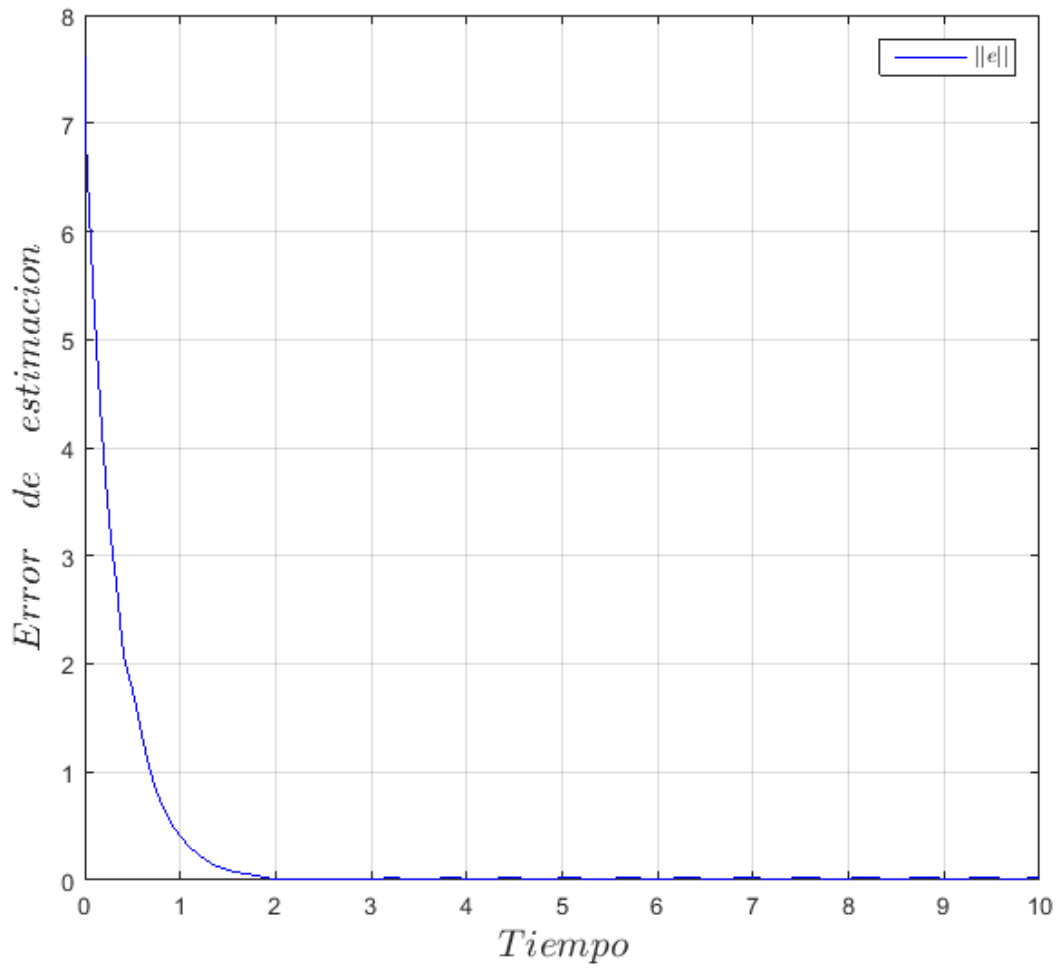


Figura 5.3: Error de estimación del PIO.

# Capítulo 6

## Estudio comparativo.

El problema de sincronización, como ya se ha mencionado, puede ser atacado a través de diferentes metodologías. Debido a sus excelentes resultados al tratar con sistemas estructuralmente equivalentes, una de las metodologías más utilizadas en la literatura es la basada en un controlador activo (Yassen, 2005; H.-K. Chen, 2005). Por su parte, al lidiar con sistemas diferentes, existen algunos antecedentes de que esta metodología puede funcionar (Bhalekar y Daftardar-Gejji, 2010). En este capítulo se muestran los resultados obtenidos al solucionar, mediante la metodología de control activo, los ejemplos presentados de los capítulos 3 y 4.

La idea del capítulo es comparar la metodología del elemento generador diferenciable (control dinámico) con la del control activo, ya que la del último es, en primera instancia, una metodología mucho más corta y fácil de entender. No obstante, se busca determinar si la sincronización alcanzada con este controlador posee un mejor desempeño a la conseguida con el control dinámico, para ello se emplea el error cuadrático medio del error de sincronización como índice de desempeño.

### 6.1. Sincronización de sistemas empleando un control activo.

A continuación, se expone rápidamente la metodología del control activo. Considere dos sistemas no lineales dados por

$$\Sigma_m := \begin{cases} \dot{x}_{i_m} = f_{i_m}(x_m, u_m), & i = 1, 2, \dots, n \\ y_m = h_m(x_m) \end{cases} \quad (6.1)$$

y

$$\Sigma_s := \begin{cases} \dot{x}_{i_s} = f_{i_s}(x_s, u_s), & i = 1, 2, \dots, n \\ y_s = h_s(x_s). \end{cases} \quad (6.2)$$

En donde  $x_s = (x_{1_s}, x_{2_s}, \dots, x_{n_s}) \in \mathbf{R}^{n_s}$ ,  $x_m = (x_{1_m}, x_{2_m}, \dots, x_{n_m}) \in \mathbf{R}^{n_m}$ ,  $h_s : \mathbf{R}^{n_s} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h_m : \mathbf{R}^{n_m} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $u_m = (u_{1_m}, u_{2_m}, \dots, u_{l_m}) \in \mathbf{R}^{l_m}$ ,  $u_s : \mathbf{R}^{n_s} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $y_m, y_s \in \mathbf{R}$ ,  $f_{i_s}, f_{i_m}, h_s$  y  $h_m$  son polinomios de sus respectivos argumentos.

Sin pérdida de generalidad, se asume que  $u_m = 0$ . Retomando el sistema esclavo (6.2), se inyectan los controles no lineales  $u_{i_s}$ , tales que

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i_s} &= f_{i_s}(x_s) + u_{i_s}(x_s, y_m), & i = 1, 2, \dots, n \\ y_s &= h_s(x_s). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Se define el error de sincronización como  $e = x_m - x_s$ , tal que se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{e}_i = g_i(e) - u_{i_s}(x_s, y_m) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.4)$$

Donde  $g_i = f_{i_m} - f_{i_s}$ . Entonces, las señales de control  $u_{i_s}$  del sistema (6.4) se diseñan tal que en lazo cerrado se obtiene  $\dot{e} = Ae$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \dots & -k_n \end{pmatrix}.$$

Es decir, las señales de control serán

$$\begin{aligned} u_{i_s}(x_s, y_m) &= g_i(e) + e_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ u_{n_s}(x_s, y_m) &= g_n(e) + Ke. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Donde  $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  es un vector de ganancias que se elige para que la matriz  $A$  sea Hurwitz y por tanto se asegure que  $e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 6.2. Resultados numéricos empleando un control activo.

Empleando la metodología de control activo, se resuelve el problema de sincronización para los ejemplos expuestos en los capítulos 3 y 4. Los ejemplos son simulados



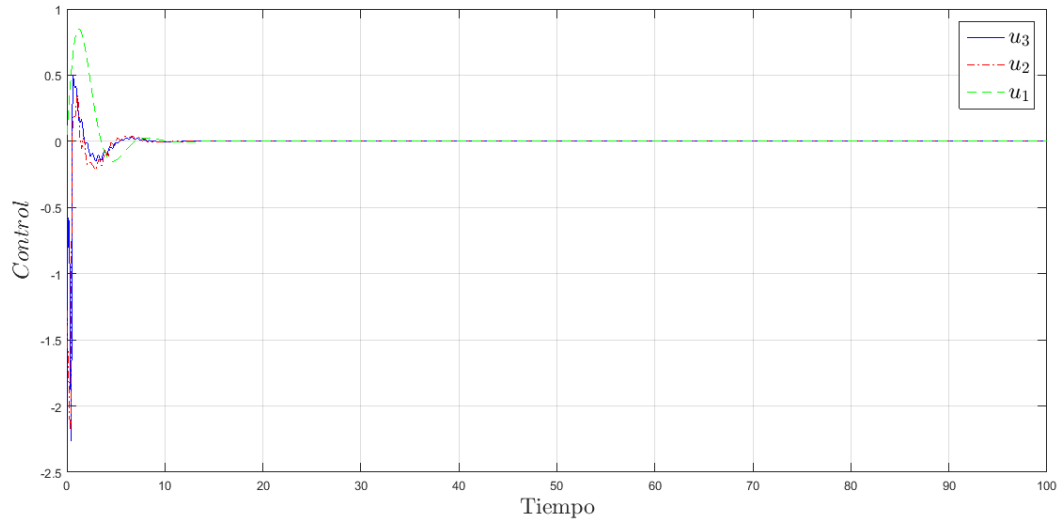


Figura 6.1: Señales del control activo para la sincronización de los sistemas de Lorenz

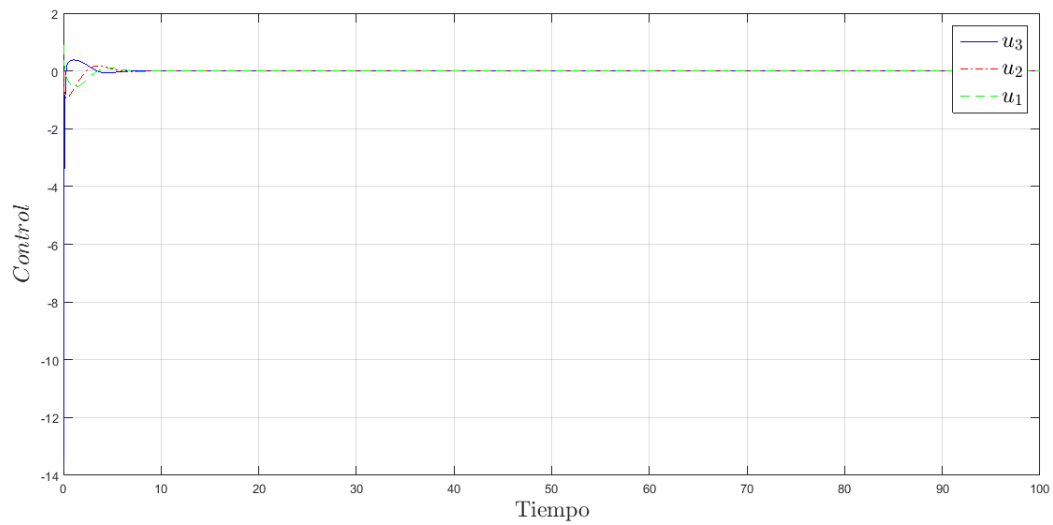


Figura 6.2: Señales del control activo para la sincronización de los sistemas de Rössler

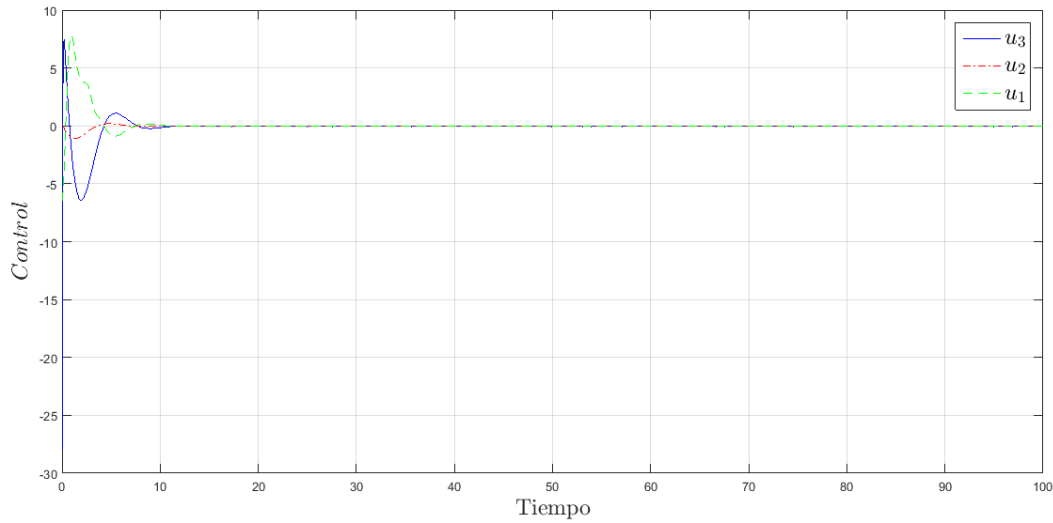


Figura 6.3: Señales del control activo para la sincronización de los sistemas de Chua

utilizando los mismos parámetros y condiciones iniciales. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

Las figuras 6.4, 6.5 y 6.6 muestran la sincronización de sistemas idénticos (ejemplos capítulo 3) gracias a la acción del control activo. Cabe señalar que los recursos numéricos necesarios para realizar la sincronización con un control activo son considerablemente menores a los utilizados con la metodología del control dinámico.

Por otro lado, en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3 se observan las señales del control activo correspondientes a cada caso. Dado que este controlador depende del error de sincronización, al llegar este último a un valor igual con cero sucede lo mismo con las señales del controlador, esto es, el control deja de actuar. Note que el fenómeno anteriormente descrito sucede en todos los casos de sincronización idéntica.

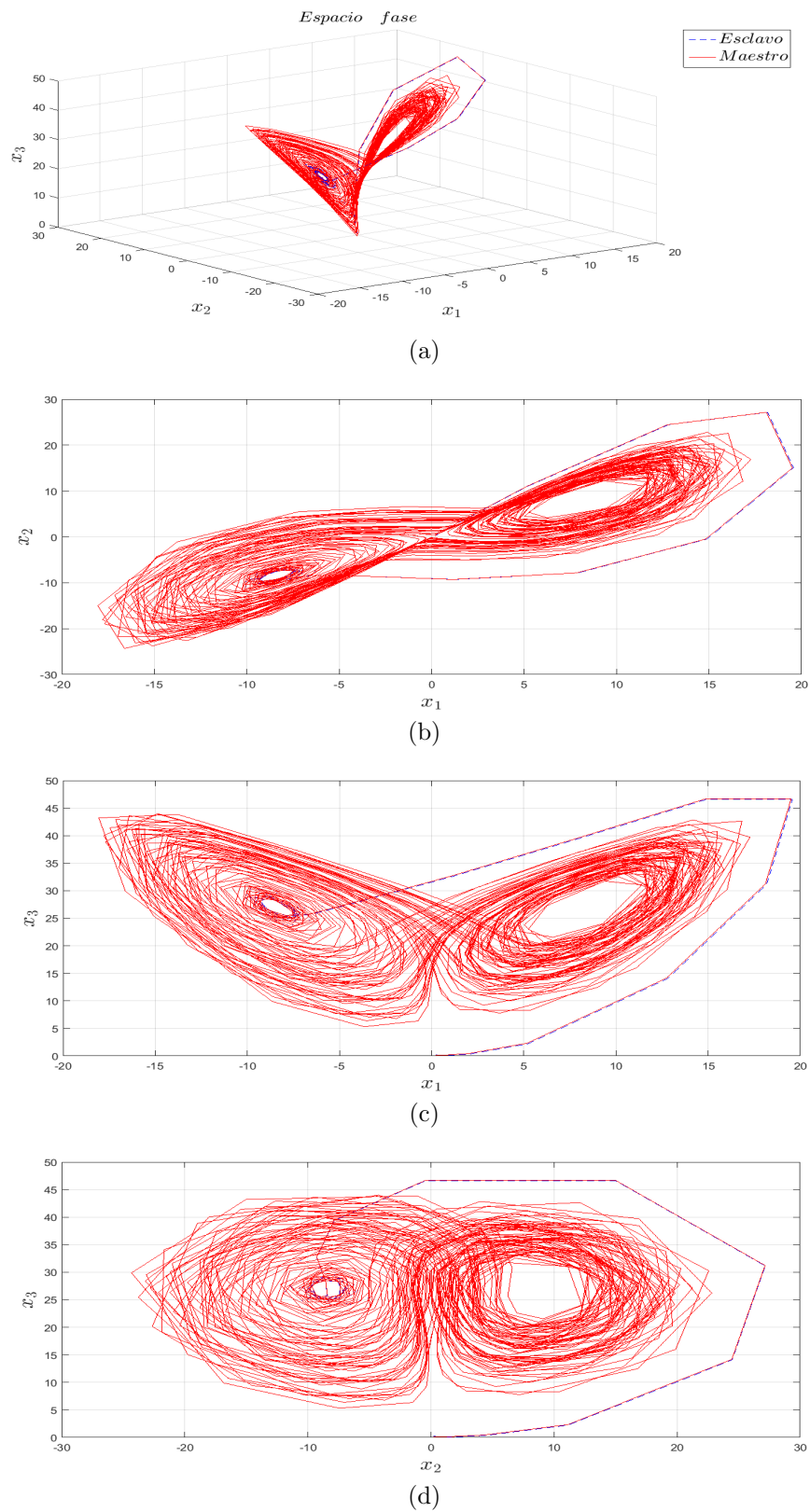


Figura 6.4: Sincronización de dos sistemas de Lorenz idénticos con  $K = [15, 15, 15]$

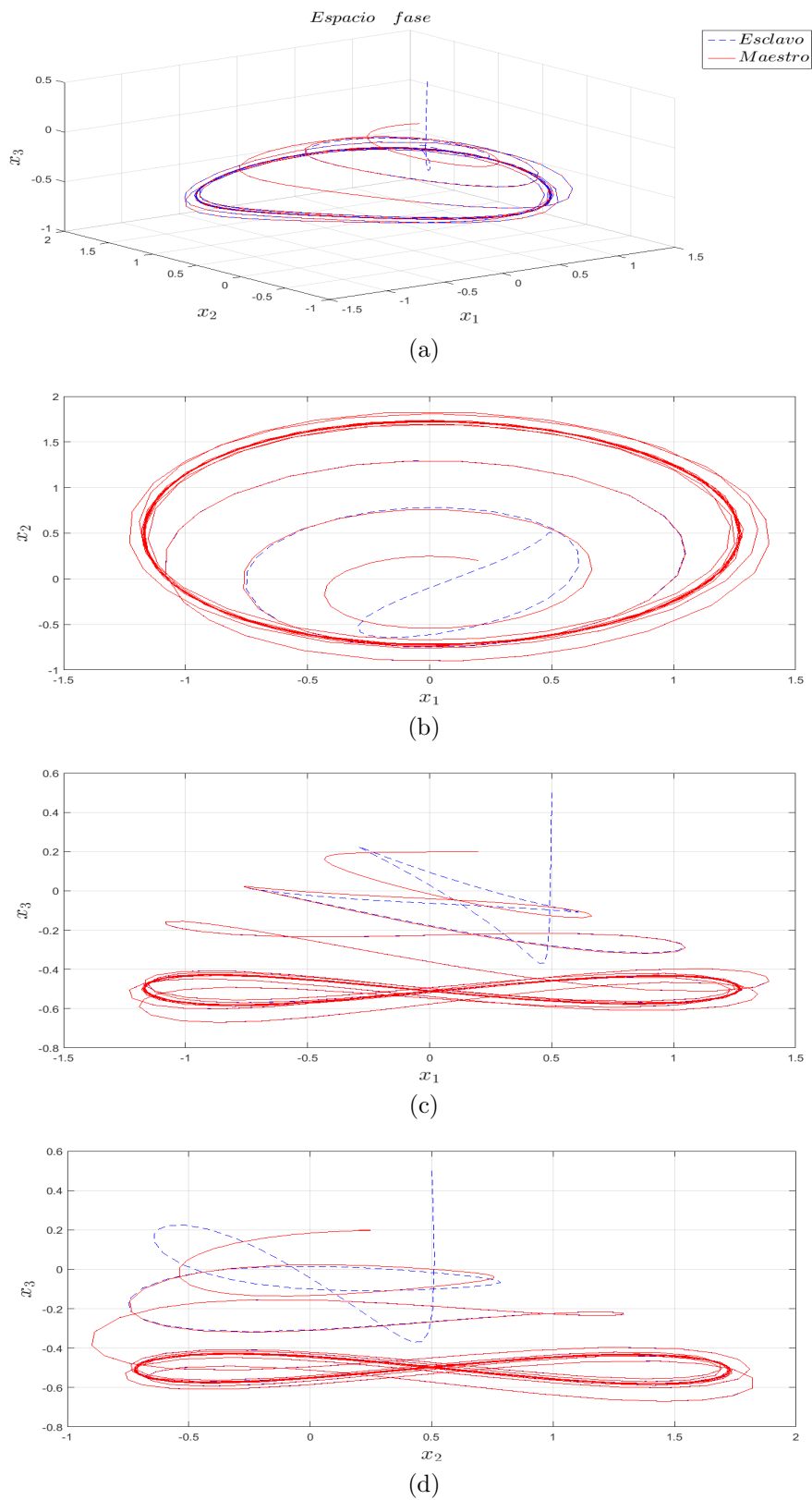


Figura 6.5: Sincronización de dos sistemas de Rössler idénticos con  $K = [15, 15, 15]$

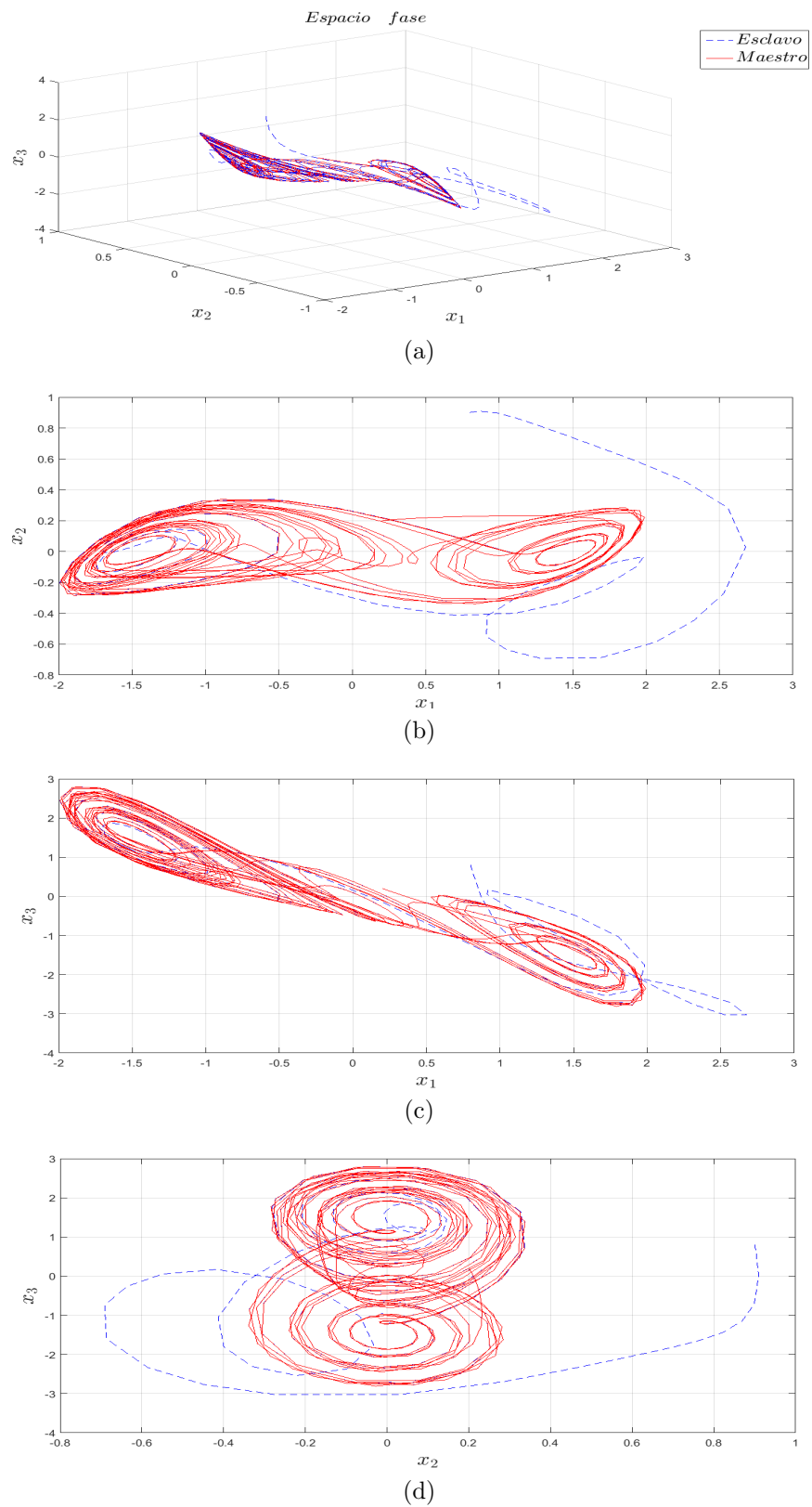


Figura 6.6: Sincronización de dos sistemas de Chua idénticos con  $K = [20, 20, 20]$

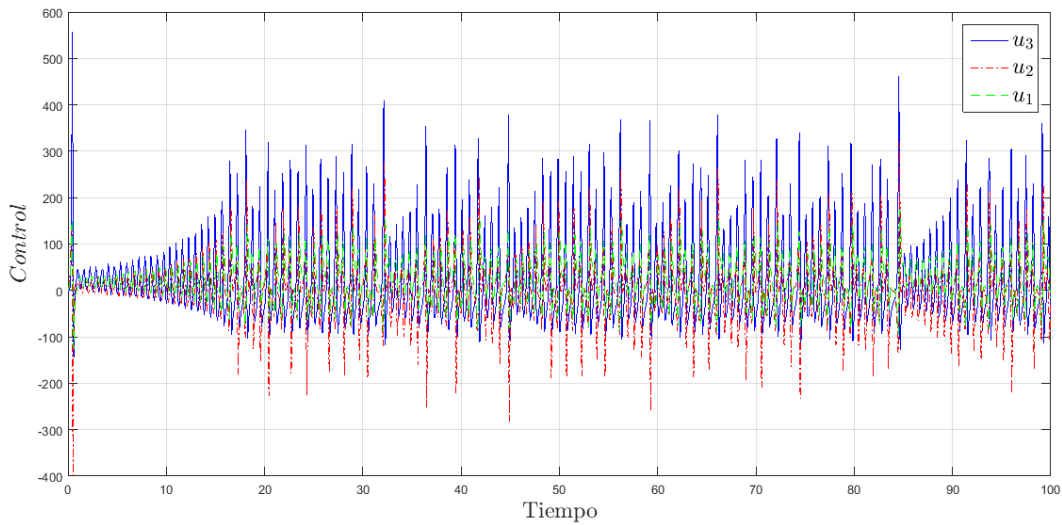


Figura 6.7: Señales del control activo para la sincronización de los sistemas Lorenz-Rössler

Observe la evolución de los sistemas maestro y esclavo de cada caso de sincronización de sistemas diferentes (ejemplos capítulo 4) en las figuras 6.10, 6.11 y 6.12. Note que gracias al control activo es posible sincronizar sistemas caóticos diferentes, no obstante, una interesante observación resulta al analizar la definición de sincronización generalizada, esta es, dado que no existe una transformación, no es posible hablar de sincronización generalizada en estos casos.

Al analizar las señales del control activo para cada caso, presentadas en las figuras 6.7, 6.8 y 6.9, se aprecia que estas no convergen a cero, es decir, el control activo constantemente actúa. Lo anterior, debido a la forma en que está definido el control activo, implica una oscilación persistente en el error de sincronización.

Como observación final, note que las ganancias utilizadas para el control dinámico y para el control activo son muy similares entre sí, con excepción de aquellos casos donde interviene el sistema de Lorenz. Esto es debido a que el control dinámico es diseñado en base a una linealización del tipo entrada-estado, es decir, este no es función del error de sincronización y por lo tanto su velocidad de convergencia depende en gran medida de las ganancias empleadas. Así, al lidiar con el sistema de Lorenz, cuyos estados poseen un orden de magnitud mayor a del resto de sistemas, es necesario emplear ganancias más grandes.

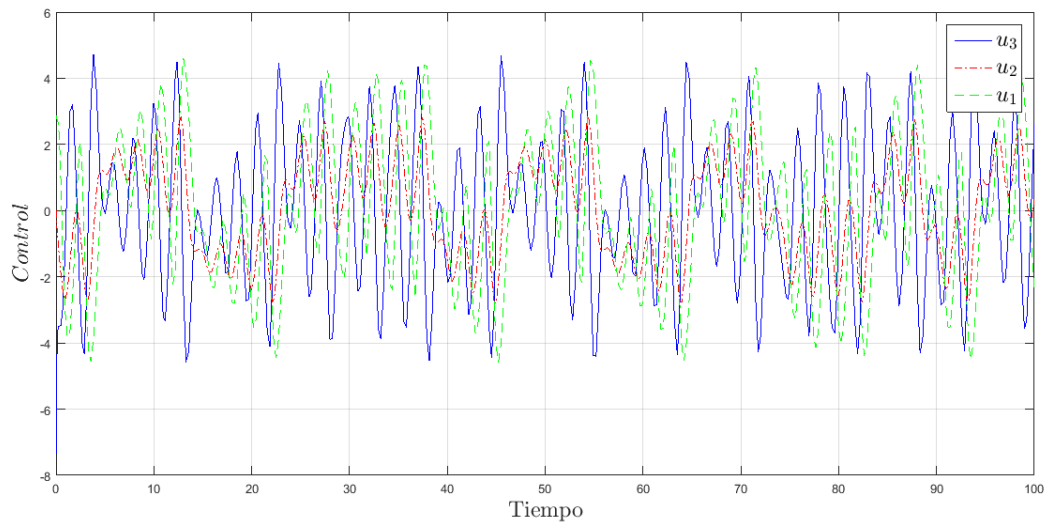


Figura 6.8: Señales del control activo para la sincronización de los sistemas Chua-Rössler

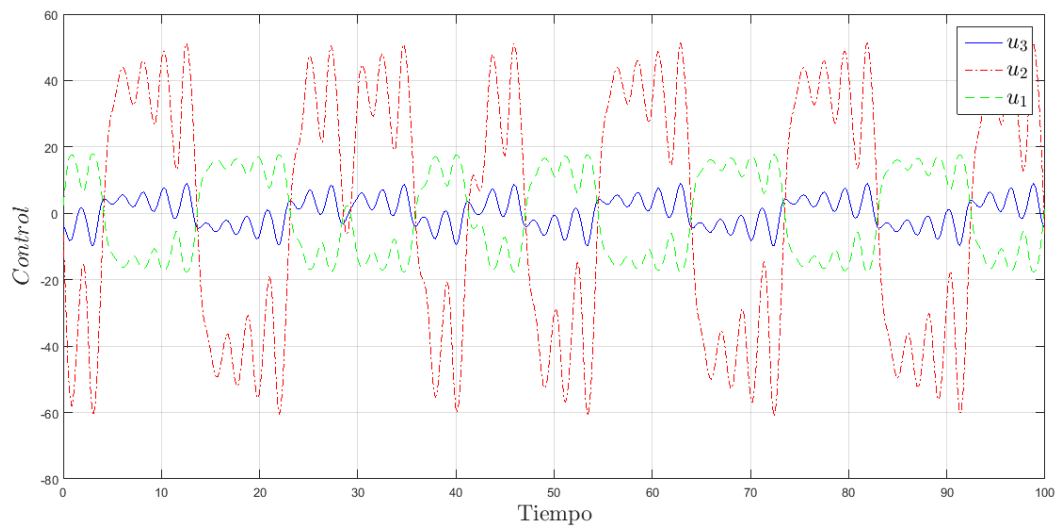


Figura 6.9: Señales del control activo para la sincronización de los sistemas Chua-Lorenz

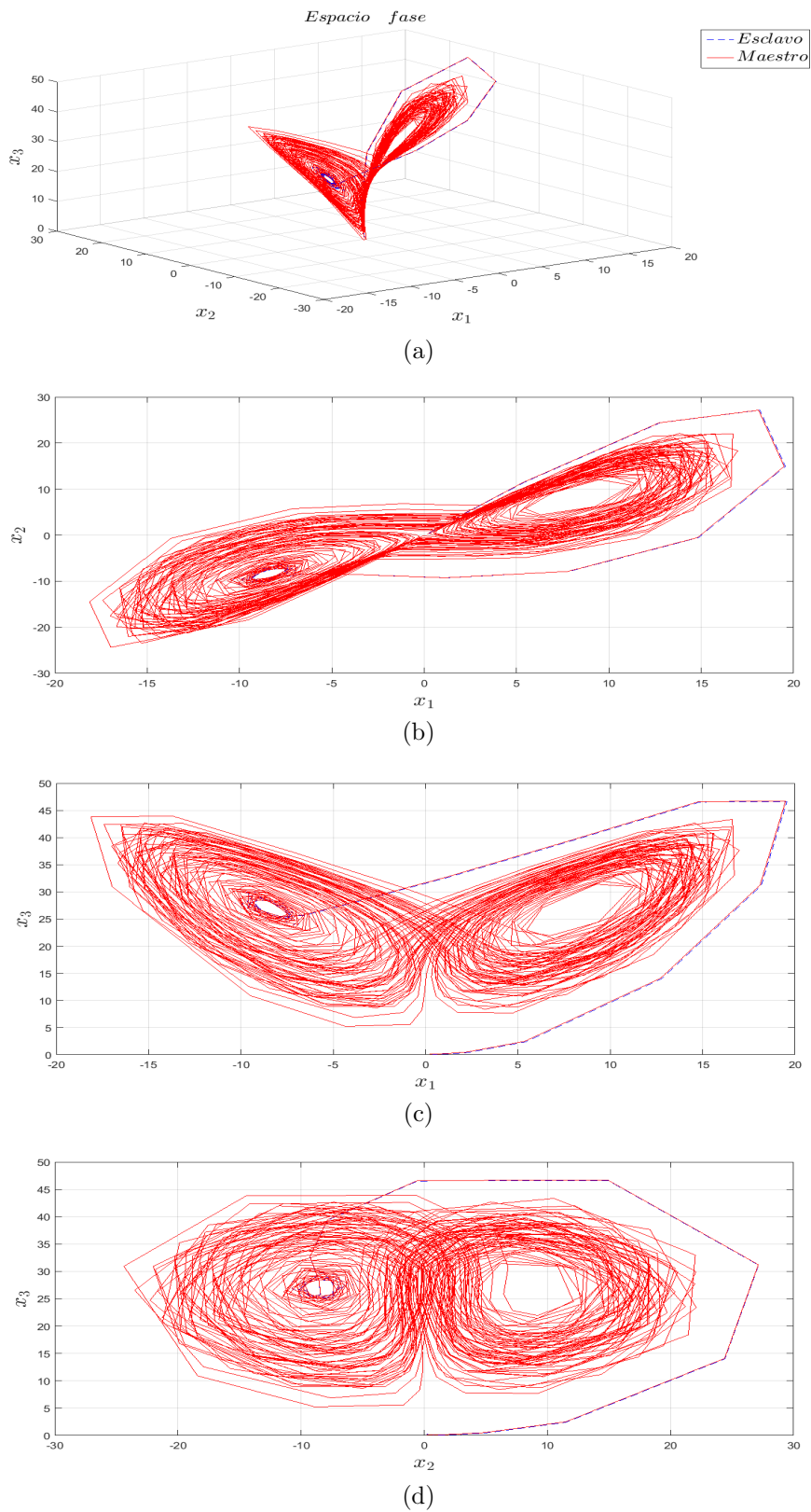
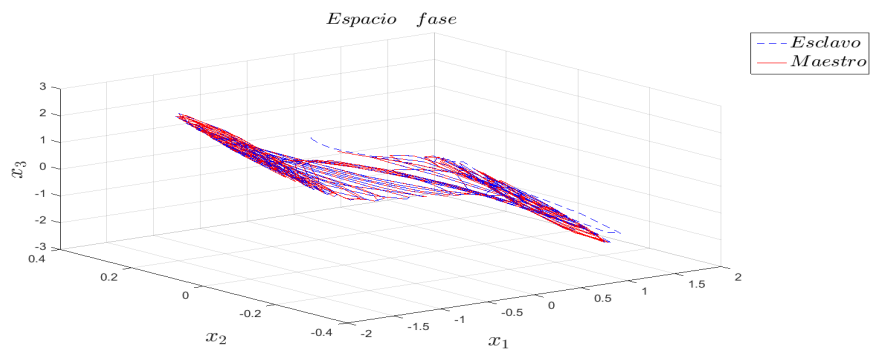
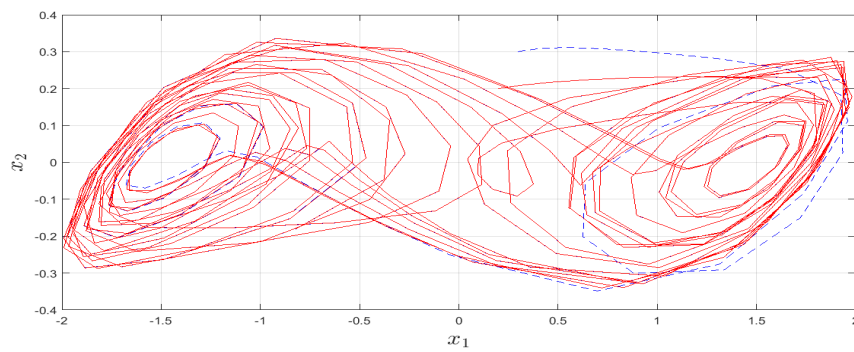


Figura 6.10: Sincronización de sistemas Lorenz-Rössler con  $K = [25, 25, 25]$ .

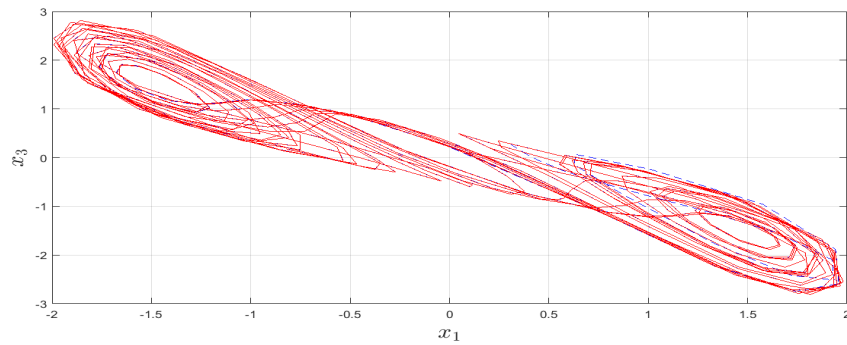




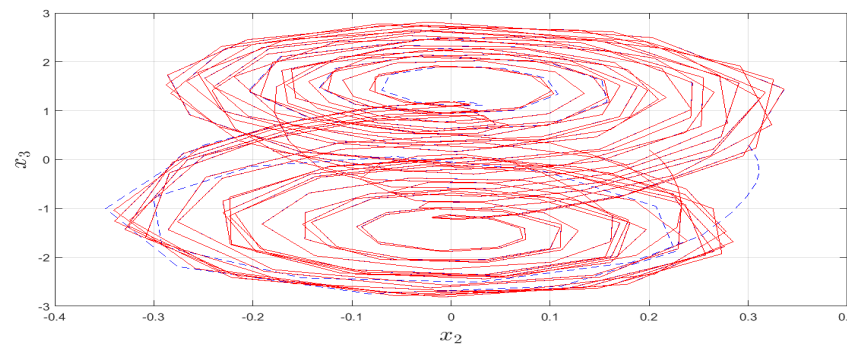
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.11: Sincronización de sistemas Chua-Rössler con  $K = [15, 15, 15]$ .

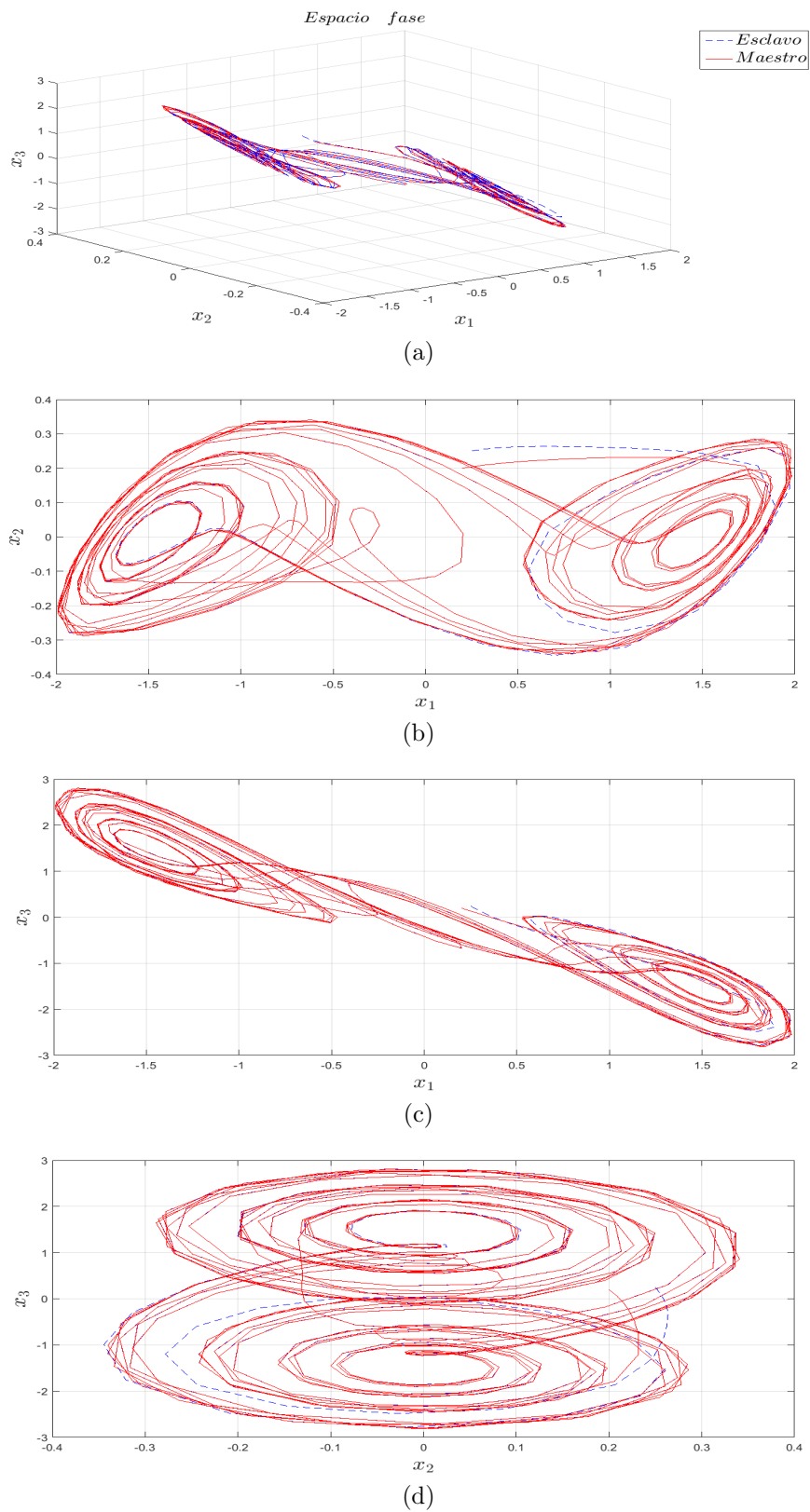


Figura 6.12: Sincronización de sistemas Chua-Lorenz con  $K = [20, 20, 20]$ .

### 6.3. Control dinámico contra control activo.

En las siguientes figuras, se presenta el error de sincronización resultante de utilizar la metodología del elemento generador diferenciable y el obtenido al emplear el control activo en los diferentes ejemplos de sincronización presentados a lo largo de esta tesis. Estas figuras resultan de especial interés dado que el error de sincronización revela que metodología presenta un mejor desempeño, es decir, que metodología es más precisa al momento de llevar a cabo la sincronización de estos sistemas.

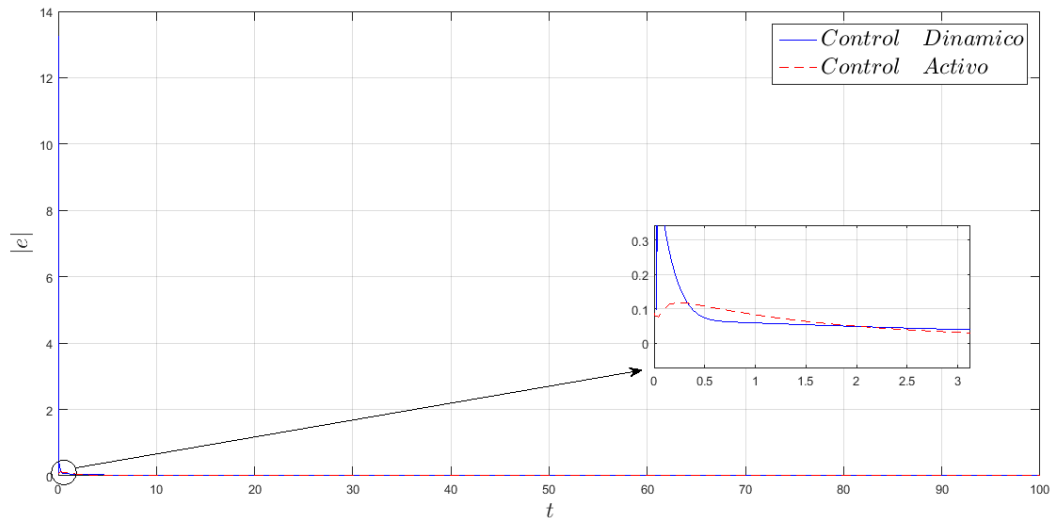


Figura 6.13: Error de sincronización para los sistemas de Lorenz

En la figura 6.13 se observa que el error de sincronización obtenido con el control activo converge antes a cero de lo que lo hace el del control dinámico. Además, el valor máximo de este error de sincronización es muy pequeño, mientras que con el control dinámico existe por un instante un error de sincronización bastante amplio. Lo anterior es debido a que el control dinámico depende directamente de los estados de cada sistema y no del error de sincronización. En las figuras siguientes, se muestra que este fenómeno sucede cada vez que se utiliza el control dinámico.

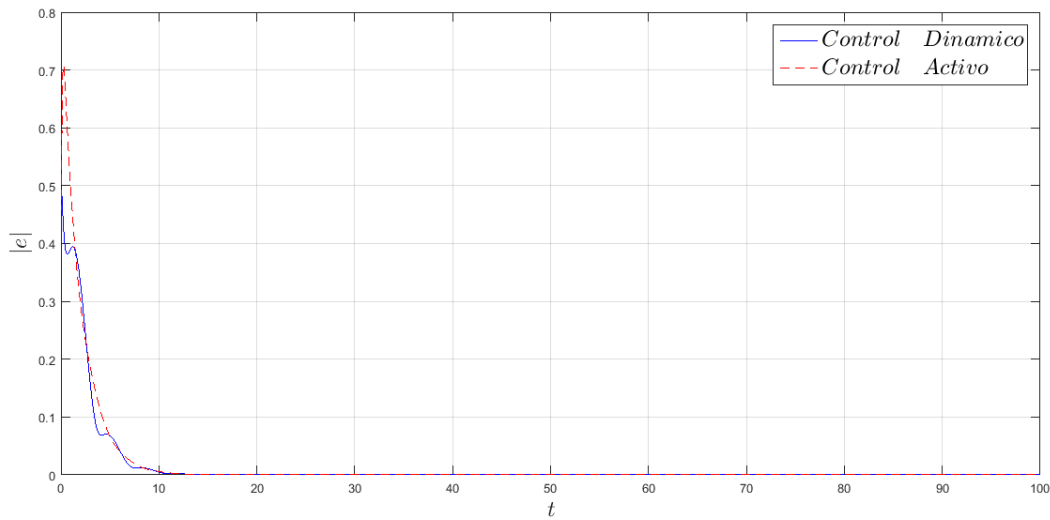


Figura 6.14: Error de sincronización para los sistemas de Rössler

La figura 6.14 muestra que los errores de sincronización del control activo y del control dinámico convergen a cero prácticamente al mismo tiempo. Note que el error máximo del control activo es mayor, aunque no por mucho respecto al control dinámico.

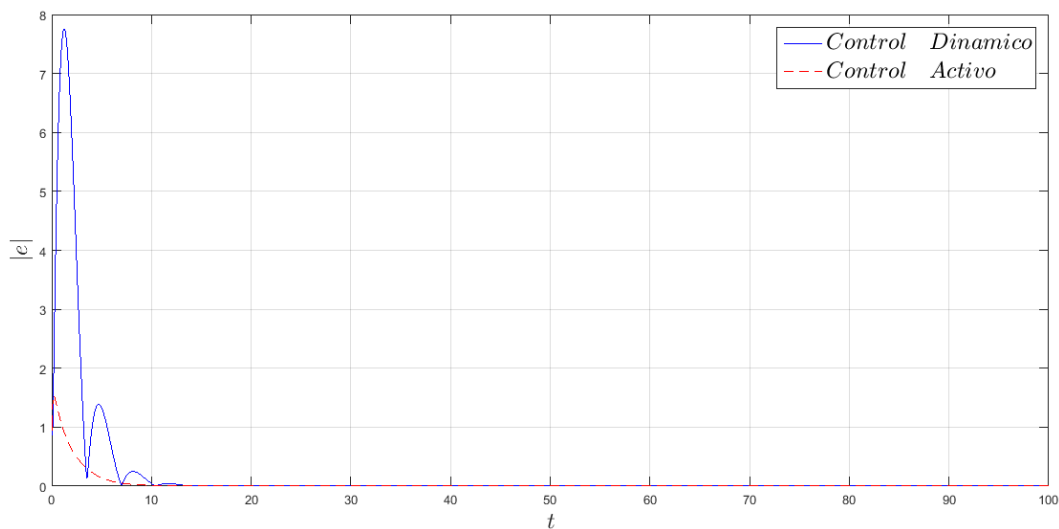


Figura 6.15: Error de sincronización para los sistemas de Chua

Es fácil notar en la figura 6.15 que al sincronizar dos sistemas de Chua, el error de sincronización con el control activo es mucho mejor al obtenido con el control dinámico, pues con el control dinámico el error tarda bastante en converger a cero.

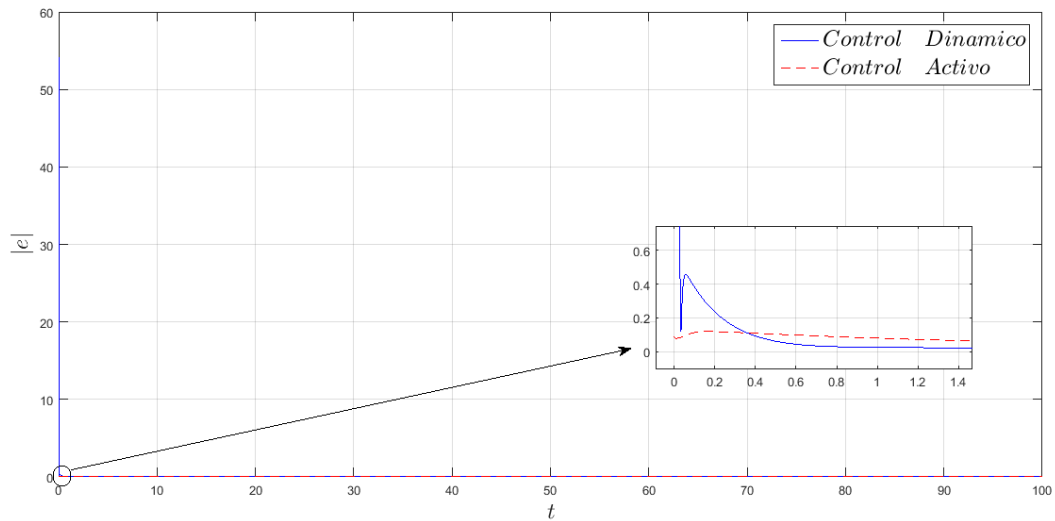


Figura 6.16: Error de sincronización para los sistemas Lorenz-Rössler

La figura 6.16 muestra nuevamente que la presencia del sistema de Lorenz provoca por un instante un error de sincronización bastante grande al emplear el control dinámico, no obstante, este rápidamente converge a cero. Observe en el acercamiento de la figura que incluso el error del control dinámico converge a cero antes de lo que lo hace el error del control activo.

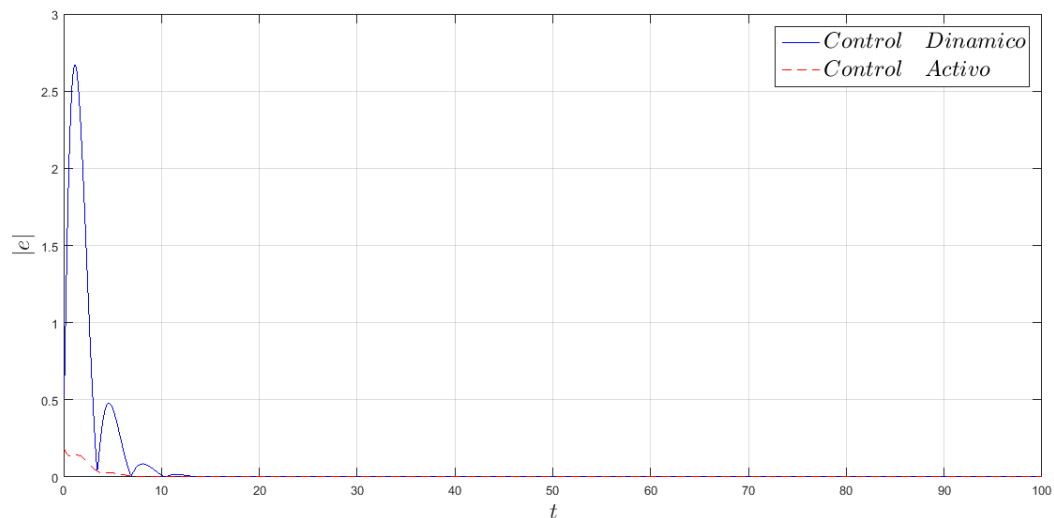


Figura 6.17: Error de sincronización para los sistemas Chua-Rössler

Observe en la figura 6.17 que el error de sincronización resultante de emplear un control activo se aproxima asintóticamente a cero, en cambio el error de sincronización del control dinámico presenta una serie de sobretiros.

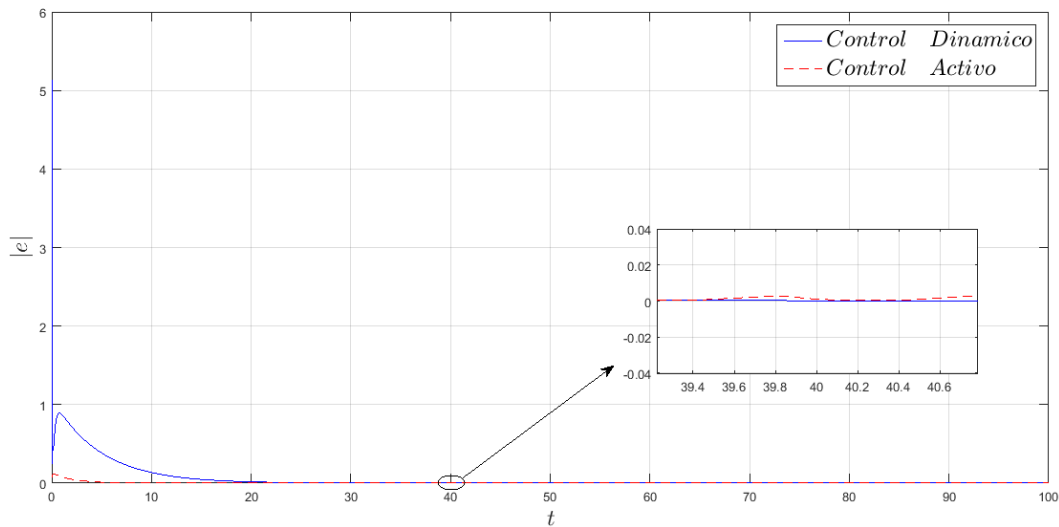


Figura 6.18: Error de sincronización para los sistemas Chua-Lorenz

Finalmente, la figura 6.18 muestra que con el control activo se consigue que las trayectorias del sistema maestro y esclavo sean idénticas antes de lo que lo hace el control dinámico. No obstante, observe en el acercamiento de la figura que el error de sincronización del control activo oscila cerca de cero, mientras que el del control dinámico no.

El análisis visual de las figuras anteriores indica que la metodología del control activo es, en general, mejor a la metodología del control dinámico, tanto para la sincronización de sistemas idénticos como para la de sistemas diferentes. Sin embargo, la comparación de estos controladores requiere rigor, por lo tanto, se recurre a la información numérica obtenida de las simulaciones. Así, como índice de desempeño se utiliza el error cuadrático medio del error de sincronización, pero esto sólo en base a la información correspondiente al estado estacionario del error de sincronización de cada caso. Lo anterior, debido a que existe la sospecha de que el control dinámico consigue sincronizar con mayor precisión los sistemas maestro y esclavo, especialmente en los casos con sistemas diferentes.

En las siguientes tablas se presenta el error cuadrático medio (ECM) del error de sincronización obtenido con ambas metodologías. La tabla 6.1 corresponde a los casos de sincronización de sistemas idénticos y la tabla 6.2 muestra el ECM obtenido al sincronizar sistemas diferentes.

Cuadro 6.1: Sincronización de sistemas idénticos

Error cuadrático medio del error de sincronización obtenido		
Caso	Control dinámico	Control activo
Lorenz-Lorenz	0.011675234	0.000193411
Rössler-Rössler	0.08299477	0.011935049
Chua-Chua	0.659681118	0.047041326

Cuadro 6.2: Sincronización de sistemas diferentes

Error cuadrático medio del error de sincronización obtenido		
Caso	Control dinámico	Control activo
Lorenz-Rössler	0.0808*1.0e-04	0.3756*1.0e-04
Chua-Rössler	0.000162398	0.000873195
Chua-Lorenz	0.0111*1.0e-05	0.1515*1.0e-05

Observe en la tabla 6.1 que en todos los casos de sincronización idéntica, el ECM del error de sincronización obtenido con el control activo es menor e incluso de menor orden de magnitud a sus análogos resultantes del control dinámico, esto es, la sincronización obtenida con el control activo posee una mayor precisión. Por lo tanto, aunado a las observaciones visuales realizadas en las figuras 6.13, 6.14 y 6.15, es posible afirmar que el desempeño de la metodología del elemento generador diferenciable está por debajo al del control activo.

Por otro lado, en la tabla 6.2 se observa lo opuesto, esto es, la sincronización de sistemas diferentes presenta un ECM menor con el control dinámico, es decir, la precisión de la sincronización de estos sistemas es mejor con este tipo de controlador. Si bien las observaciones visuales de las figuras 6.16, 6.17 y 6.18 no favorecen al controlador dinámico, se obtiene una mayor precisión con este tipo de controlador, factor que puede resultar clave en ciertas aplicaciones.





# Capítulo 7

## Conclusiones y Perspectivas.

Tras realizar y analizar las simulaciones numéricas de los ejemplos presentados a lo largo de esta tesis, se puede afirmar que la metodología del elemento generador diferenciable es capaz de sincronizar adecuadamente sistemas idénticos así como diferentes. El proceso de sincronización a través de esta metodología se puede resumir como un proceso de linealización entrada-estado en donde el cambio de coordenadas da lugar a un controlador por realimentación dinámico. Adicionalmente, el concepto de planitud diferencial, en el cual se basa la metodología del elemento generador diferenciable, puede ser utilizado para diseñar un observador de estado (necesario para ambas metodologías exploradas aquí) y así ayudar al lector a entender mejor los conceptos de diferencialmente plano y no diferencialmente plano.

Ahora bien, ciertamente la metodología del control dinámico es capaz de sincronizar sistemas idénticos no obstante, el ECM del error de sincronización, el comportamiento transitorio del error de sincronización (un error de sincronización máximo pequeño), las señales del controlador y un proceso de diseño notablemente más simple, indican que la metodología del control activo es mejor en estos casos.

Por otro lado, al tratar con sistemas caóticos diferentes, el control dinámico arroja mejores resultados. Si bien el error de sincronización con esta metodología presenta un error máximo mayor, se observa que a largo plazo la sincronización conseguida es más precisa, es decir, a diferencia del control activo, no existe una oscilación persistente en el error de sincronización, hecho que se ve reflejado en el ECM de éste. Esta característica, aparentemente despreciable numéricamente hablando, resulta esencial en ciertas aplicaciones, por ejemplo, en comunicaciones seguras, donde esta característica da lugar a una mayor dificultad para descifrar un mensaje.

Además, al emplear un control activo, de acuerdo a la definición, no es posible hablar de sincronización generalizada, pues no existe una transformación que relacione a los sistemas. Observe que la metodología del control dinámico en realidad dicta un comportamiento para cada sistema en su espacio fase original y posteriormente, mediante una transformación, permite visualizar la sincronización de los sistemas en el espa-

cio fase maestro. En cambio, el control activo fuerza directamente la trayectoria del sistema esclavo a ir al espacio fase del sistema maestro. Lo anterior, tiene una implicación práctica, por ejemplo, suponga dos circuitos eléctricos que oscilan caóticamente, ambos poseen determinado amperaje, voltaje, etc. Suponga que la corriente del circuito esclavo no es más que de unos cuantos miliamperes, mientras que el sistema maestro trabaja en amperes, al aplicar la metodología del control activo para sincronizar estos sistemas, el sistema esclavo, para seguir la trayectoria del maestro tendría que aumentar considerablemente su amperaje, comprometiendo el circuito. En cambio la sincronización generalizada, conseguida vía el control dinámico, conservaría el amperaje de ambos circuitos.

Con los argumentos anteriores se puede afirmar que, aún siendo más extensa y quizá complicada, la metodología del elemento generador diferenciable para sincronizar sistemas caóticos merece ser estudiada, particularmente cuando se trabaja con sistemas caóticos diferentes.

El trabajo de tesis presentado es totalmente teórico, e incluso fue ejemplificado con sistemas caóticos puramente académicos, tal que se plantea como una posibilidad implementar en un futuro lo estudiado aquí en cuestiones prácticas. De particular interés resultan los sistemas biológicos, donde existe evidencia de que muchos de estos presentan comportamientos caóticos y más aún, de que algunos de estos se sincronizan entre sí, como es el caso del aparato respiratorio y el aparato circulatorio. Así, se propone estudiar este tipo de fenómenos a través de esta metodología y de ser posible, se podría considerar la idea de manipular la forma en que se sincronizan estos sistemas.

Actualmente existe una tendencia por estudiar sistemas caóticos y la sincronización de estos a través del cálculo fraccionario. Esta herramienta matemática aún carece de una interpretación física, es decir, se sabe que la primera derivada de la posición corresponde a la velocidad, la segunda derivada a la aceleración pero la media derivada no puede ser relacionada con ningún concepto físico conocido. Sin embargo, los resultados experimentales justifican el uso de este tipo de cálculo, pues se ha hallado que al utilizar esta herramienta matemática se llega a resultados numéricos que se acoplan mejor a aquellos obtenidos en el laboratorio. Lo anterior es particularmente cierto para modelos de crecimiento poblacional y en dinámica de fluidos. Entonces, migrar al campo del cálculo fraccionario parece ser inevitable si se desea sincronizar sistemas caóticos reales.

Los abajo firmantes, integrantes del jurado para el examen de grado que presentará el **C. Juan Pablo Flores Flores**, declaramos que hemos revisado la tesis titulada:

Sincronización Generalizada de sistemas no diferencialmente planos y de Liouville

Y consideramos que cumple con los requisitos para obtener el Grado de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Control Automático.

Atentamente,

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Dr. Carlos Fernando Aguilar Ibáñez

Dr. Rafael Martínez Guerra

## Referencias

- Abarbanel, H. D., Rulkov, N. F., y Sushchik, M. M. (1996). Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Physical Review E*, 53(5), 4528.
- Afraimovich, V., Verichev, N., y Rabinovich, M. (1986). Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems. *Radiofizika*, 29, 1050–1060.
- Bhalekar, S., y Daftardar-Gejji, V. (2010). Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(11), 3536–3546.
- Chen, F., y Zhang, W. (2007). Lmi criteria for robust chaos synchronization of a class of chaotic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67(12), 3384–3393.
- Chen, H.-K. (2005). Global chaos synchronization of new chaotic systems via nonlinear control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(4), 1245–1251.
- Hilborn, R. C. (2000). *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press on Demand.
- Kocarev, L., y Parlitz, U. (1996). Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Physical review letters*, 76(11), 1816.
- Kostur, M., Hänggi, P., Talkner, P., y Mateos, J. L. (2005). Anticipated synchronization in coupled inertial ratchets with time-delayed feedback: a numerical study. *Physical review E*, 72(3), 036210.
- Li, T.-Y., y Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10), 985–992.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2), 130–141.
- Lotrič, M. B., y Stefanovska, A. (2000). Synchronization and modulation in the human cardiorespiratory system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 283(3-4), 451–461.
- Machuca, J. M. (2013). *Diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Mahmoud, G. M., y Mahmoud, E. E. (2010). Complete synchronization of chaotic complex nonlinear systems with uncertain parameters. *Nonlinear Dynamics*, 62(4), 875–882.
- Martínez-Guerra, R., Cruz-Victoria, J., Gonzalez-Galan, R., y Aguilar-Lopez, R. (2006). A new reduced-order observer design for the synchronization of Lorenz systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 28(2), 511–517.
- Martínez-Guerra, R., Gómez-Cortés, G., y Pérez-Pinacho, C. (2015). *Synchronization of integral and fractional order chaotic systems*. Springer.
- Martínez-Guerra, R., y Mendoza-Camargo, J. (2004). Observers for a class of Liouvillean and, non-differentially flat systems. *IMA Journal of Mathematical Control*

- and Information*, 21(4), 493–509.
- Martínez-Guerra, R., y Pasaye, J. J. R. (2009). Synchronization and anti-synchronization of chaotic systems: A differential and algebraic approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(2), 840–846.
- Martinez-Guerra, R., y Yu, W. (2008). Chaotic synchronization and secure communication via sliding-mode observer. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(01), 235–243.
- Mosekilde, E., Maistrenko, Y., y Postnov, D. (2002). *Chaotic synchronization: applications to living systems* (Vol. 42). World Scientific.
- Moskalenko, O. I., Koronovskii, A. A., y Hramov, A. E. (2010). Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise. *Physics Letters A*, 374(29), 2925–2931.
- Nguyen, N. T., Prodan, I., Stoican, F., y Lefevre, L. (2017). Reliable nonlinear control for quadcopter trajectory tracking through differential flatness. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 6971–6976.
- Oliveira, H. M., y Melo, L. V. (2015). Huygens synchronization of two clocks. *Scientific reports*, 5, 11548.
- Pal, S., Sahoo, B., y Poria, S. (2013). Generalized lag synchronization of delay coupled chaotic systems via linear transformations. *Physica Scripta*, 87(4), 045011.
- Pecora, L. M., y Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8), 821.
- Pecora, L. M., y Carroll, T. L. (2015). Synchronization of chaotic systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(9), 097611.
- Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., y Kurths, J. (1996). Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical review letters*, 76(11), 1804.
- Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., y Kurths, J. (1997). From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78(22), 4193.
- Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S., y Abarbanel, H. D. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51(2), 980.
- Sira-Ramirez, H., y Agrawal, S. K. (2004). *Differentially flat systems*. Crc Press.
- Van Nieuwstadt, M. J., y Murray, R. M. (1997). Real time trajectory generation for differentially flat systems.
- Wang, Y.-W., y Guan, Z.-H. (2006). Generalized synchronization of continuous chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(1), 97–101.
- Xiao, Y., Zhu, K., y Liaw, H. C. (2005). Generalized synchronization control of multi-axis motion systems. *Control engineering practice*, 13(7), 809–819.
- Xie, Q., Chen, G., y Bollt, E. M. (2002). Hybrid chaos synchronization and its application in information processing. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(1-2), 145–163.
- Yang, T. (2004). A survey of chaotic secure communication systems. *International journal of computational cognition*, 2(2), 81–130.

- Yang, T., y Chua, L. O. (1999). Generalized synchronization of chaos via linear transformations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(01), 215–219.
- Yang, X.-S., y Chen, G. (2002). Some observer-based criteria for discrete-time generalized chaos synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, 13(6), 1303–1308.
- Yassen, M. (2005). Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(1), 131–140.
- Yau, H.-T., y Shieh, C.-S. (2008). Chaos synchronization using fuzzy logic controller. *Nonlinear analysis: Real world applications*, 9(4), 1800–1810.
- Zhang, F., Shu, Y., Yang, H., y Li, X. (2011). Estimating the ultimate bound and positively invariant set for a synchronous motor and its application in chaos synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(1-3), 137–144.