CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Control de un cuadrirotor en ambientes no controlados

T E S I S

QUE PRESENTA

Pedro Fernando Flores Palmeros

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias
en la Especialidad de Control Automático

Directores de Tesis:

Dr. Fernando Castaños Luna

Dr. Pedro Castillo García

México, D.F. Noviembre, 2015

Agradecimientos

A mis padres y hermana

Por todo el apoyo, amor y paciencia que han tenido conmigo en toda mi vida.

A Alejandra

Por el amor y comprensión en este camino.

A mis amigos

Marco, Víctor, Blas, Diego, Carlos, Mire, Chairez, Richard, Angel, Kris, Kari, Eusebia, Diego, Israel, Hilario por ofrecerme su apreciada amistad.

A mis asesores, Dr. Pedro y Dr. Castaños

Por el gran apoyo que me dieron durante la realización de este trabajo.

Al CINVESTAV y al Departamento de Control Automático

Por abrirme las puertas de su casa y enseñarme el camino hacía nuevos conocimientos en el aspecto humano y académico.

A la UTC, HEUDYASIC

Por haberme recibido en la estancia y haberme hecho sentir como un integrante más del grupo de investigación

Al pueblo de México

Que por medio del CONACYT apoyaron e hicieron posible que siguiera con mi preparación académica

A mi hermana que donde esté me apoya siempre

Índice general

Resumen ix

Abstract x

1. Introducción 1
1.1. Estado del Arte . . . 2
1.2. Objetivos . . . 4
1.2.1. Objetivo general . . . 4
1.2.2. Objetivos específicos . . . 4
1.3. Contribuciones . . . 5

2. Modelo dinámico de un cuadrirotor 7
2.1. Introducción . . . 7
2.2. Principio Básico del Cuadrirotor . . . 7
2.3. Modelo dinámico del cuadrirotor . . . 8
2.3.1. Formalismo de Euler-Lagrange . . . 9
2.3.2. Formalismo de Newton-Euler . . . 11
2.4. Quaterniones . . . 17

3. Control del Cuadrirotor 19
3.1. Bases de Backstepping . . . 19
3.1.1. Generalización de Backstepping . . . 21
3.2. Generalización de Sliding Modes . . . 26
3.2.1. Aplicación de *Sliding Modes* al cuadrirotor . . . 28
3.3. Comparación entre controladores . . . 31
3.4. Conclusión . . . 35

4. Generación de trayectorias y evasión de obstáculos 37
4.1. Introducción . . . 37
4.2. Generación de trayectorias . . . 37
4.2.1. Punto a punto . . . 37
4.2.2. Conjunto de puntos (polinomial) . . . 38
4.3. Evasión de Obstáculos . . . 40
4.3.1. Campos potenciales . . . 40
4.4. Conclusión . . . 44

5. Desarrollo Experimental **45**
5.1. Introducción 45
5.2. Descripción de la plataforma 45
5.2.1. Hardware 45
5.2.2. Software 47
5.2.3. Optitrack 47
5.3. Adecuación de las señales 49
5.4. Implementación del controlador Sliding Modes 51
5.4.1. Orientación 51
5.5. Implementación del control Backstepping 54
5.5.1. Orientación 54
5.5.2. Posición 55
5.6. Evasión de Obstáculos 60
5.7. Conclusión 62

6. Conclusiones y perspectivas **63**
6.1. Conclusiones 63
6.2. Perspectivas 63

Bibliografía **64**

Apéndices **67**

A. Matriz de rotación **67**

B. Matriz de velocidades **69**

C. Filtro de Kalman **71**
C.0.1. Filtro de Kalman 71

Resumen

En este trabajo de tesis se estudia el diseño de dos controladores no lineales para la estabilización y seguimiento de trayectorias de un cuadrirotor. El vehículo es modelado como un cuerpo rígido libre, sujeto a tres momentos y una fuerza, además es subactuado, es decir, no es posible controlar todos sus estado empleando cuatro actuadores, en este caso se le da importancia a la posición y después a la orientación.

Se presenta el diseño y análisis de los controladores Sliding Modes y Backstepping, se simula el comportamiento del cuadrirotor con cada controlador y se muestra que en simulación el control por Sliding Modes presenta un mejor desempeño, mientras que con Backstepping, disminuye dicho desempeño.

Se presenta la metodología que se utilizó para la implementación de los controladores en un cuadrirotor AR.Drone 2 y se hace la comparación de los mismos, obteniendo un mejor desempeño con el control Backstepping. Se hace también el control de posición, seguimiento de trayectorias y la evasión de obstáculos utilizando la metodología de campos potenciales.

Abstract

This thesis presents the design and of two nonlinear contol laws for the stabilization and tracking of a quadrotor. The vehicle is modeled as a free rigid body, in which tree moments and a force are acting directly in the body, also is underactuated, i.e., all the quadrotor states can not be controlled directly, therefore the position is solved fist and then the desired angles are obtained for the attitude control.

Also presents the design and analysis of Sliding Modes and Backstepping, both controllers are simulated to compare the behavior of the quadrotor with each controller, in the simulation comparison the Sliding Mode controller has a better performance and in the Backstepping controller the performance decreases.

It presents the methodology used for the implementation of both controllers in an AR.Drone 2 quadrotor, a comparison is made with both controllers and the Backstepping has better performance. The position control is made and the tracking of trajectories with obstacle avoidance using potential fields.

Capítulo 1

Introducción

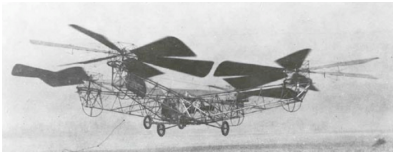
El estudio de vehículos aéreos no tripulados ha cobrado gran relevancia en los últimos años gracias a su enorme potencial como herramientas de exploración, supervisión, búsqueda y rescate, en aplicaciones civiles como militares. Aunado a las grandes mejoras alcanzadas en el desarrollo de materiales, sensores, actuadores, baterías y procesadores se ha podido dotar a dichos vehículos de una mayor precisión en el vuelo y autonomía, además de reducir considerablemente sus dimensiones y costos.

Particularmente los vehículos de ala rotativa han tomado enorme importancia gracia a su gran maniobrabilidad, la capacidad para efectuar despegue y aterrizaje vertical, volar a bajas alturas y permanecer en vuelo estacionario. Todo esto les permite desplazarse en espacios reducidos.

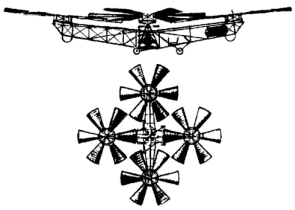
Un UAV por sus siglas en inglés *Unmanned Aerial Vehicle*, es una aeronave que vuela sin tripulación humana a bordo, controlado de forma autónoma o remotamente. Este tipo de vehículos tienen un gran número de aplicaciones gracias a la ausencia del piloto y consecuentemente pueden ser utilizados en zonas donde existen riesgos para las personas, tales como ambientes de alta toxicidad, tareas de control ambiental o exploración, etc. Estas aplicaciones pueden ser de uso civil o militar y las configuraciones aerodinámicas dependen del tipo de tarea a realizar. Algunos UAVs cuentan con cámaras abordo que permiten realizar misiones de reconocimiento y ataque en el ambiente militar, mientas que en el civil, las cámaras son utilizadas para vigilancia y cartografía.

Debido a la diversidad de aplicaciones para éstos vehículos existen diferentes configuraciones. Los vehículos de ala fija o aviones, pueden cubrir grandes distancias utilizando poco combustible, sin embargo, generalmente no realizan vuelo estacionario. Existen también los UAVs de ala rotativa estos pueden lograr maniobras en espacios reducidos y lograr vuelo estacionario pero no tienen la misma eficiencia energética que los aviones, por lo que no son viables para recorrer grandes distancias.

Dentro de los vehículos e ala rotativa, existen algunos que tienen múltiples rotores. El aumento de rotores permite incrementar la carga útil de vehículo, es decir, la carga que puede llevar el vehículo además de lo indispensable para que funciones por sí solo,



(a) Primer cuadrirotor



(b) Primer cuadrirotor vista frontal y superior

además entre más rotores tenga la dinámica de orientación es más rápida y útil para maniobras agresivas.

El cuadrirotor es una configuración de un vehículo de cuatro motores, se ha convertido en el vehículo aéreo dentro de esta gama más famoso gracias a la configuración de sus rotores puesto que los torques reactivos tienen a cancelarse simplificando su mecánica, facilitando considerablemente su análisis y mejorando su controlabilidad y maniobrabilidad.

1.1. Estado del Arte

Debido a la simplicidad de su mecánica, el diseño estructural de los cuadrirotores no ha cambiado mucho desde que fuera concebido por primera vez en 1922 por George Bothezat, Figura 1.1a. Desde entonces la principal tendencia ha sido la reducción de su peso y dimensiones hasta la escala de los centímetros como el el caso del *mesicopter* de la Universidad de Stanford que mide alrededor de 2.5 cm el cual se puede observar en la Figura 1.2.

Figura 1.2: Mesicopter

En la actualidad es posible encontrar múltiples modelos comerciales de cuadrirotores a precios accesibles, listos para volar aún por pilotos inexpertos, incluso los mismos cuadrirotores comerciales han sido modificados y utilizados como plataformas experimentales por universidades y centros de investigación en todo el mundo. Destacan los modelos de las compañías *Draganfly, Parrot, Mikrokopter y Ascending Technologies*

(a) Primera rotación (b) Segunda rotación (c) Tercera rotación

Figura 1.3: Cuadrirotores comerciales

cuyos ejemplares se pueden ver en la Figura 1.3a. Algunas universidades han desarrollado sus propios prototipos como el *STARTMAC* de la Universidad de Standford en colaboración de la Universidad de Berkeley, Figura 1.4.

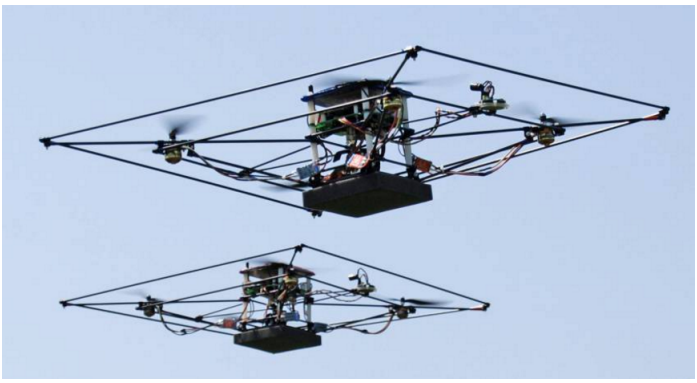


Figura 1.4: Starmac

Como ya se mencionó, durante los últimos años, universidades, empresas y centros de investigación han presentado especial atención a éste tipo de vehículos aéreos por su simplicidad y posible aplicaciones, aportando importantes avances principalmente en el área de control automático. Aún a la fecha, el vuelo autónomo de estos dispositivos representa un enorme reto debido a que no se cuenta con los sensores de posición ni velocidad suficientemente rápidos y confiables o sólo funcionan bien bajo ciertas condiciones especiales.

A continuación, se exponen algunos de los trabajos con cuadrirotores que pueden sen encontrados en la literatura, que van desde la estabilización para vuelo estacionario, seguimiento de trayectorias, evasión de obstáculos, pasando por gran variedad de técnicas de control validadas en diversas plataformas experimentales o simulaciones.

En el 2002 en [11] presentan el modelo del cuadrirotor por medio del formalismo de Newton y proponen un control de estabilización de la orientación basado en el desarrollo de funciones de Lyapunov, mientras que en [19] realizan el diseño y construcción de

un cuadrirotor de laboratorio con un control control linear de piloto aumentado. Para el 2004 en [5] documentan el primer control en tiempo real exitoso de un cuadrirotor, obtienen el modelo utilizando el formalismo de Lagrange y proponen un control por análisis de Lyapunov y saturaciones anidadas, presentan experimentos satisfactorios de estabilización, despegue y aterrizaje. En [21] realizan una comparación en el control de orientación de las técnicas PD y LQR, mostrando que el PD tiene mejor desempeño durante los experimentos. En el 2005 en [20] muestran el diseño de un control de seguimiento de trayectorias mediante análisis de Lyapunov y en 2006 [23] efectúan el control por modos deslizantes y muestran los resultado en simulaciones, al tiempo que [22] utilizan una representación por cuaterniones para comparar los controles de estabilización de un PD^2 con compensación de los torques giroscópicos y de Coriolis contra un PD lineal e independiente del modelo con resultados experimentales. En [**?**] se presenta el control por Backstepping, sin embargo, el documento carece de validación experimental, ésta sólo es numérica. en [**?**] y [**?**] hacen comparaciones entre el control de Sliding Modes y Backstepping mostrando los resultados sólo en orientación.

Como se puede apreciar, existe una vasta colección de trabajos en la literatura en lo que concierne al control de orientación y seguimiento de trayectorias, con los resultados analíticos, simulaciones y experimentos. Por mencionar otros documentos y resultados en [7],[**?**],[4] y [12] estudian estrategias de control lineal tipo PD, PD^2 y PID; [17], [6], [3], [1] y [24], [10] y [2] emplean la técnica de backstepping en sus diseños y en [3] y [18] se utilizan técnicas de modos deslizantes; en [16] y [13] trabajan con saturaciones anidadas.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

El objetivo de este trabajo de tesis es diseñar e implementar controles no lineales en el cuadrirotor, en orientación y en posición, hacer la comparativa entre los controles backstepping y modos deslizantes, y establecer una metodología para la evasión de obstáculos.

1.2.2. Objetivos específicos

- Estudiar a fondo los cuadrirotores y construir un prototipo para familiarizarse con ellos.
- Describir el modelo matemático de un cuadrirotor, con el que realizará la simulación del sistema, éste putno es básico para el desarrollo del sistema de control que se implementará en el vehículo, ya que se necesita corroborar el desempeño de la plataforma antes de ser implementada de manera real, debido al riesgo que la plataforma implica.
- Validar y comparar experimentalmente las estrategias de control.
- Implementar leyes de control para la posición y orientación del vehículo.

- Desarrollar algoritmos de evasión de obstáculos conociendo sólo la posición de éste.

1.3. Contribuciones

- Se diseñaron dos tipos de controladores no lineales para la orientación, Backstepping y Sliding Modes, los cuales se implementaron exitosamente en la plataforma experimental y se muestra el desempeño de cada controlador, se hace la comparación entre ambos controladores en simulación y en experimentación.

- Se diseñó el control de orientación con la metodología de Backstepping y además se realiza la generación y seguimiento de trayectorias en línea recta.

- Se implementa el Filtro de Kalman para mejorar las señales procedentes de los distintos sensores y así disminuir oscilaciones en el cuadrirotor.

- Se implementa el algoritmo de evasión de obstáculos utilizando campos potenciales y también se utiliza el algoritmo de campos potenciales virtuales disminuir las posibilidades de los mínimos locales que existen en esta metodología.

Estructura de tesis

Este trabajo de tesis consta de seis capítulos cuyo contenido general se describe a continuación.

Capítulo 2

Se exponen los tres formalismos comunes para la obtención del modelo del cuadrirotor, se explica también el principio de operación y se fundamentan las conceptos necesarios para la comprensión de los capítulos posteriores.

Capítulo 3

Se presenta la metodología utilizada para el diseño de los controladores y también se valida numéricamente los controladores diseñados para posición y orientación

Capítulo 4

En éste capítulo se establece la metodología para poder generar trayectorias y también el algoritmo utilizado para la evasión de obstáculos, se presentan sólo resultados de simulación

Capítulo 5

En este capítulo se explica y se describe detalladamente los experimentos que se realizaron en la plataforma, los experimentos involucran el control de orientación, posición, seguimiento de trayectorias y evasión de obstáculos.

Capítulo 6

Se enuncian las conclusiones y las principales aportaciones que resultaron de este trabajo. También se menciona el trabajo que se desarrollará en un futuro.

Capítulo 2

Modelo dinámico de un cuadrirotor

2.1. Introducción

El helicóptero es una de las más complejas máquinas voladoras. Eta complejidad se debe a su versatilidad y maniobrabilidad de ejecutar muchas clases de tareas. El helicóptero clásico está convencionalmente equipado con un motor principal y un rotor situado en la cola del vehículo. Sin embargo, existen otros tipos de helicópteros, incluyendo el el helicóptero de doble rotor y el helicóptero de rotor coaxial. En esta tesis el interés es en particular en el control de un helicóptero con cuatro motores, el cuadrirotor.

En este capítulo se presenta el modelo dinámico de un cuadrirotor obtenido por distintos formalismos, Newton-Euler, Euler-Lagrange y Cuaterniones.

2.2. Principio Básico del Cuadrirotor

La fuerza f_i producida por el motor i es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, esto es, $f_i = k\omega_i^2$. En este caso en específico un motor sólo puede girar en una dirección fija, por lo cual la fuerza producida será siempre positiva. Una característica importante del cuadrirotor es que el motor trasero y delantero giran en sentido horario mientras que los motores izquierdo y derecho giran en sentido anti-horario. Con ello, alguno efectos giroscópicos y momentos aerodinámicos tienden a cancelarse en vuelo estacionario. La fuerza principal es la suma de cada fuerza producida por cada motor, es decir:

$$U_1 = \sum_{i=1}^{4} f_i \tag{2.1}$$

Para la orientación del cuadrirotor se utilizan los ángulos de Euler para navegación: alabeo, cabeceo y guiñada (en inglés roll, pitch y yaw, respectivamente, se utilizará la notación en inglés por aspectos técnicos). El momento de *roll* es producido por la diferencia de las fuerzas $f_2 - f_4$, el momento *pitch* es producido por la diferencia de las fuerzas $f_1 - f_3$ y el momento de *yaw* es producido por la suma de todos los momentos generados por cada motor $\tau_{M_1} + \tau_{M_2} + \tau_{M_3} + \tau_{M_4}$, donde τ_{M_i} es el momento de reacción del motor i.

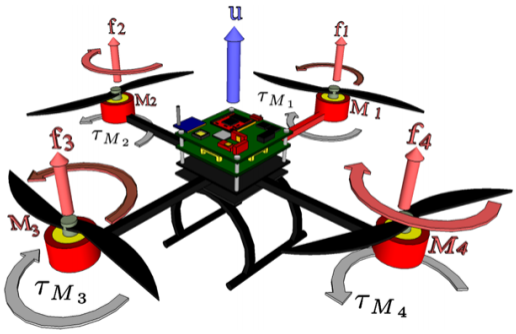


Figura 2.1: Fuerzas y torques generados por un cuadrirotor

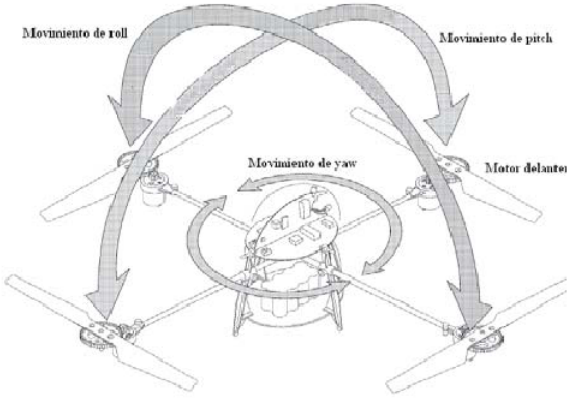


Figura 2.2: Momentos en $\psi, \quad \theta, \quad \phi$

Para el movimiento traslacional, la velocidad del motor M_3 se debe de aumentar y la del motor M_i se debe disminuir para que el cuadrirotor avance. De manera similar el movimiento lateral del vehículo se obtiene variando las velocidades de los motores laterales M_2 y M_4. El movimiento de yaw se obtiene incrementando el par delantero y trasero (τ_{M_1}, τ_{M_3}) mientras que se reduce el par en los motores laterales (τ_{M_2}, τ_{M_4}). Todo esto manteniendo la fuerza principal U_1 constante.

2.3. Modelo dinámico del cuadrirotor

El cuadrirotor puede representarse como un cuerpo rígido en el espacio con masa m y matriz de inercia I, sujeto a fuerzas aerodinámicas y gravitacionales como se puede ver en la Figura 2.3. Considérese un marco de coordenadas inercial $O = xyz$ fijo al piso y un marco de coordenadas $B = e_1, e_2, e_3$ sujeto al cuerpo del vehículo. Se definen dos vectores

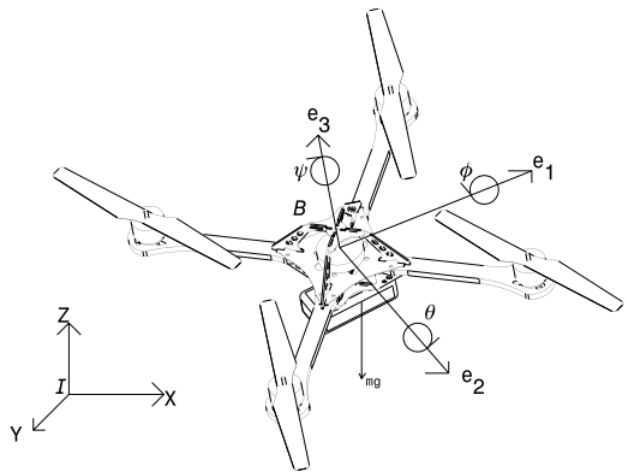


Figura 2.3: Marco de referencia inercial y fijo en el cuerpo

$$\xi = [x \;\; y \;\; z]^T \quad \in \mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$
$$\eta = [\phi \;\; \theta \;\; \psi]^T \quad \in \mathbb{R}^3 \tag{2.3}$$

donde ξ representa la posición del centro de gravedad del vehículo respecto al marco inercial O y η representa la orientación que se obtiene a través de los ángulos de Euler.

2.3.1. Formalismo de Euler-Lagrange

Para el vehículo se definen las coordenadas generalizadas

$$q = [\xi \;\; \eta]^T$$

Se define el *Lagrangiano* como

$$L(q, \dot{q}) = K_{Trans} + K_{Rot} - E_{pot} \tag{2.4}$$

donde la energía potencial del vehículo está definida por

$$E_{pot} = mgz \tag{2.5}$$

La masa del vehículo es m, la gravedad está simbolizada por g. K_{Trans} es la energía cinética de traslacional y su expresión matemática está dada por

$$K_{Trans} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} \tag{2.6}$$

donde m es la masa del cuadrirotor, $\dot{\xi}$ es el término asociado a la velocidad de traslación del centro de gravedad del vehículo respecto al eje referencial fijo . K_{Rot} es la energía cinética causada por las rotaciones en los ángulos de Euler cuya expresión es

$$K_{Rot} = \frac{1}{2} \omega^T I \omega \tag{2.7}$$

El vector e la velocidad angular ω respecto a los ejes de coordenadas del cuerpo se relacionan con las velocidades generalizadas $\dot{\eta}$, utilizando la relación estándar (ver Apéndice) de cinemática

$$\omega = W_\eta \dot{\eta} \tag{2.8}$$

donde

$$W_\eta = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Sustituyendo (2.8) y (2.9) en (2.7)

$$\begin{aligned} K_{Rot} &= \frac{1}{2}(\omega_\eta \dot{\eta})^T I (\omega_\eta \dot{\eta}) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\eta}^T \omega_\eta^T I \omega_\eta \dot{\eta} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Definiendo la matriz $\mathbb{J}(\eta) = \omega_\eta^T I \omega_\eta$ y se sustituye en la ecuación (2.10):

$$K_{Rot} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T \mathbb{J}(\eta)\dot{\eta} \tag{2.11}$$

La matriz $\mathbb{J}(\eta)$ es una matriz que contiene las términos inerciales expresados en función de las coordenadas generalizadas η. El Lagrangiano queda expresado por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^T J(\eta)\dot{\eta} - mgz \tag{2.12}$$

En la ecuación (2.12) no hay términos cruzados, es decir, no hay términos en donde el producto $\dot{\eta}\dot{\xi}$ esté presente, por lo que se pueden separar las dinámicas y se puede expresar el Lagrangiano como una sumatoria del Lagrangiano de traslación y el de rotación

$$L(q, \dot{q}) = L(\xi, \dot{\xi}) + L(\eta, \dot{\eta}) \tag{2.13}$$

donde $L(\xi, \dot{\xi})$ es el Lagrangiano asociado al movimiento traslacional, $L(\eta, \dot{\eta})$ está asociado al movimiento rotacional y se definen por la siguiente ecuación.

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^T\dot{\xi} - mgz \qquad\qquad L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T J\dot{\eta} \tag{2.14}$$

El modelo dinámico del cuadrirotor utilizando el método de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

donde $F_\xi \in \mathbb{R}^3$ es la fuerza traslacional aplicado al vehículo debido a la entrada de control pricipal, $\tau \in \mathbb{R}^3$ representa los momentos de *yaw*, *pitch* y *roll*.

La dinámica traslacional es:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \xi} = m\ddot{\xi} + mg_{E_z} = F_\xi = RU \tag{2.16}$$

donde E_z implica que es una fuerza sobre el eje z inercial, R es una matriz de rotación que representa la orientación del cuadrirotor respecto al marco de referencia inercial y U es la entrada de control, ecuación (2.1)

$$R = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\psi S_\theta & -S_\theta \\ C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & C_\theta S_\phi \\ C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

La dinámica rotacional es:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\tau}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \tau} = J(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} = \tau \tag{2.18}$$

donde $C(\eta,\dot{\eta}) = \dot{J}(\eta) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\dot{\eta}^T J(\eta))$ es matriz en la cual se encuentran los términos de aceleraciones de Coriolis.

Se define un vector auxiliar $\tilde{\tau}$ relacionado con el torque generalizado τ,

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{bmatrix} = J(\eta)^{-1}\left[\tau - C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta}\right] \tag{2.19}$$

Del sistema (2.16) y (2.18) el modelo dinámico del cuadrirotor se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u\sin\theta \\ m\ddot{y} &= u\cos\theta\sin\theta \\ m\ddot{z} &= u\cos\theta\cos\phi - mg \\ \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\phi \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\psi \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.3.2. Formalismo de Newton-Euler

Al igual que la robótica, en el cuadrirotor también se utilizan las matrices de rotación (R) y deben de cumplir las siguientes propiedades

$$RR^T = R^T R = I \tag{2.21}$$

$$\det R = 1 \tag{2.22}$$

En este modelo se utiliza una notación para el producto vectorial que es a través de la *Skew matrix*. Sea una matriz S, se dice que es *Skew* si:

$$S = -S^T \Rightarrow s_{ij} = -s_{ij} \quad i \neq j \tag{2.23}$$

El producto vectorial ($\times$) se puede denotar como:

$$\lambda \times a := S(\lambda)a \tag{2.24}$$

donde:

$$S(\lambda) = -S^T(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Dinámica del cuerpo rígido

Se utiliza la segunda ley de Newton, es decir, conservación del momento lineal y momento angular. Se define el momento lineal y su derivada como:

$$\vec{p_c} = m\vec{V_c} \qquad \dot{\vec{p_c}} = m\dot{\vec{V_c}} \tag{2.25}$$

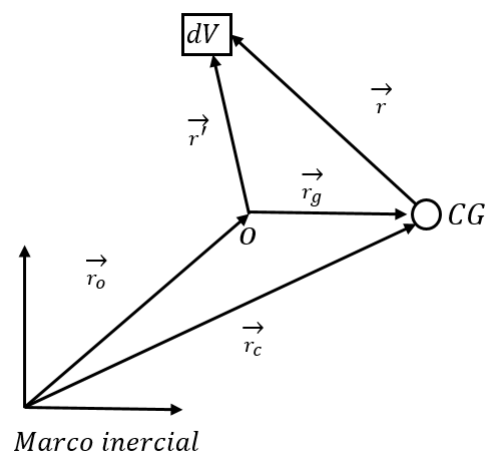


Figura 2.4: Momentos en $\psi, \quad \theta, \quad \phi$

Sea un cuerpo rígido en el espacio, se establecen dos sistemas de referncia, uno fijo e inercial y otro en el cuerpo, como se muestra en la figura 2.4, donde O es punto cualquiera en el cuerpo y CG representa al centro de gravedad del cuerpo. La velocidad de CG en el referencial del cuerpo está dada por:

$$V_c^b = V_o^b + \omega_{nb}^b \times r_g^b \tag{2.26}$$

donde V_o^b representa la velocidad del referencial del cuerpo, ω_{nb}^b es la velocidad angular del cuerpo y r_g^b está asociado al vector $\vec{r}_g$ en el referencial del cuerpo.

La velocidad del centro de gravedad en el referencial fijo, está dada por:

$$V_c^n = R_b^n V_c^b \tag{2.27}$$

Al sustituir (2.26) en (2.27) y derivando obtiene la aceleración angular en el marco inercial

$$\dot{V}_c^n = \dot{R}_b^n(V_o^b + \omega_{nb}^b \times r_g^b) + R_b^n(\dot{V}_o^b + \dot{\omega}_{nb}^b \times r_g^b + \omega_{nb}^b \times \dot{r}_g^b)$$

donde $\dot{R}_b^n$ es la velocidad con la que cambian los ángulos de Euler y tiene la siguiente forma

$$\dot{R}_b^n = R_b^n S(\omega_{nb}^n)$$

Introduciendo (2.24), (2.3.2) en (2.3.2) y asumiendo que $\vec{r}_g^b$ es constante

$$\dot{V}_c^n = R_b^n\Big(\dot{V}_o^b + S(\dot{\omega}_{nb}^b)r_g^b + S(\omega_{nb}^b)V_o^b + S^2(\omega_{nb}^b)r_g^b\Big) \tag{2.28}$$

La segunda ley de Newton está definida como

$$m\dot{V}_b^n = F_\xi \tag{2.29}$$

donde denota m la masa del cuadrirotor, F_ξ representa as fuerzas externas que actúan en el cuerpo teninedo como referencia el marco fijo.

Sustituyendo (2.28) en (2.29)

$$m\Big[R_b^n\Big(\dot{V}_o^b + S(\dot{\omega}_{nb}^b)r_g^b + S(\omega_{nb}^b)V_o^b + S^2(\omega_{nb}^b)r_g^b\Big)\Big] = F_\xi$$
$$m\big[\dot{V}_o^b + S(\dot{\omega}_{nb}^b)r_g^b + S(\omega_{nb}^b)V_o^b + S^2(\omega_{nb}^b)r_g^b\big] = F_\xi$$

Asumiendo que el origen del maco O coincide con el centro de gravedad del cuerpo

$$r_g^b = 0 \qquad f_o^b = f_c^b \qquad V_o^b = V_c^b \tag{2.30}$$

La dinámica por la segunda ley de Newton en conservación de momento lineal es:

$$m\big(\dot{V}_c^b + S(\omega_{nb}^b)V_c^b\big) = F_\xi \tag{2.31}$$

La dinámica del cuadrirotor desde el marco inercial es:

$$m\big(\dot{V}_c^b\big) = m\ddot{\xi} = F_\xi \tag{2.32}$$

donde $\xi = [x \quad y \quad z]^T$ es la posición del cuadrirotor.

Hay dos fuerzas externas que actúan en el cuadrirotor, la fuerza que genera la traslación del mismo vehículo y la fuerza generada por la gravedad, tal como se explicó en la sección el formalismo de Euler-Lagrange

$$F_\xi = Ru + mgE_z \tag{2.33}$$

Conservación de momento angular

Se define en momento angular y su derivada como:

$$\vec{h_c} = I_c \vec{\omega_{nb}} \qquad \dot{\vec{h_c}} = I_c \dot{\vec{\omega_{nb}}} \tag{2.34}$$

Considerando la figura 2.4 el momento del centro de gravedad está dado por la suma del momento angular del centro de gravedad respecto al marco de referncia en el cuerpo O y el momento angular del marco del cuerpo con el marco de referencia inercial o fijo.

El momento angular del punto O desde el marco fijo es:

$$h_o^b = I_o \omega_{nb}^b + m r_g^b \times V_o^b \tag{2.35}$$

donde:
I_o representa la matriz de inercia del cuadrirotor y ω_{nb}^b es la velocidad angular

La derivada del momento angular es:

$$\dot{h}_o^b = \dot{I}_o \omega_{nb}^b + I_o \dot{\omega}_{nb}^b + m\big(\dot{r}_g^b \times V_o^b + r_g^b \times \dot{V}_o^b\big) \tag{2.36}$$

Asumiendo que r_g^b e I_o son constantes, por lo que sus derivadas son nulas quedando la siguiente expresión:

$$\dot{h}_o^b = I_o \dot{\omega}_{nb}^b + m r_g^b \times v_o^b \tag{2.37}$$

El momento angular del centro de gravedad respecto al marco referencial O, está descrito por la siguiente ecuación:

$$h_c^b = h_o^b - m r_g^b \times V_c^b \tag{2.38}$$

donde V_c^b es la velocidad lineal del Centro de Gravedad respecto al marco fijo en el cuerpo y r_g^b es el vector que va del marco del cuerpo al centro de gravedad respecto al marco que está en el cuerpo.

Al derivar el momento angular.

$$\dot{h}_c^b = \dot{h}_o^b - m r_g^b \times v_c^b \tag{2.39}$$

Sustituyendo (2.37) en (2.39)

$$\begin{aligned} \dot{h}_c^b &= I_o \dot{\omega}_{nb}^b + m r_g^b \times \dot{V}_o^b - m r_g^b \times \dot{V}_c^b \\ &= I_o \dot{\omega}_{nb}^b + m r_g^b \times (\dot{V}_o^b - \dot{V}_c^b) \end{aligned} \tag{2.40}$$

El momento angular h_c respecto al marco fijo, está descrito por la siguiente expresión

$$h_c^n = R_b^n h_c^b \tag{2.41}$$

donde h_c^n es el momento angular del centro de gravedad en el marco referencial fijo, R_b^n representa la matriz de rotaciones que va del marco del cuerpo al marco fijo, h_c^b acereferencia al momento angular del centro de gravedad en el marco de referencia del cuerpo.

Derivando (2.41)

$$\begin{aligned}
\dot{h}_c^n &= R_b^n \dot{h}_c^b + \dot{R}_b^n h_c^b \\
&= R_b^n \dot{h}_c^b + R_b^n \big(S(\omega_{nb}^b)\big) h_c^b \\
&= R_b^n \big[\dot{h}_c^b + S(\omega_{nb}^b) h_c^b\big] \\
&= R_b^n \big[I_o \dot{\omega}_{nb}^b m r_g^b \times (\dot{V}_o^b - \dot{V}_c^b) + \omega_{nb}^b \times (h_o^b - m r_g^b \times V_c^b)\big] \\
&= R_b^n \big[I_o \dot{\omega}_{nb}^b m r_g^b \times (\dot{V}_o^b - \dot{V}_c^b) + \omega_{nb}^b \times (I_o \omega_{nb}^b + m r_g^b \times V_o^b - m r_g^b \times V_c^b)\big] \\
&= R_b^n \big[I_o \dot{\omega}_{nb}^b m r_g^b \times (\dot{V}_o^b - \dot{V}_c^b) + \omega_{nb}^b \times (V_o^b - V_c^b)\big]
\end{aligned}$$

$$\dot{h}_c^n = R_b^n \big[I_o \dot{\omega}_{nb}^b m r_g^b \times (\dot{V}_o^b - \dot{V}_c^b) + \omega_{nb}^b \times (V_o^b - V_c^b)\big] \tag{2.42}$$

La segunda ley de Newton se define como

$$\dot{h}_c^n = \tau \qquad\qquad h_c^n = I(\omega_{ib}) \tag{2.43}$$

El momento angular con referencia del centro de gravedad es:

$$\tau = R_b^n (m_o^b - r_g^b \times f_c^b) \tag{2.44}$$

Al sustituir (2.32) en (2.44) se obtiene la siguiente expresión.

$$\tau = R_b^n \Big[m_o^b - r_g^b \times m(\dot{V}_c^b + \omega_{nb}^b \times V_c^b)\Big] \tag{2.45}$$

Al igualar las ecuaciones (2.42) y (2.45)se obtiene la siguiente expresión

$$\big[I_o \dot{\omega}_{nb}^b + m r_g^b (\dot{v}_o^b - \dot{V}_c^b) + \omega_{nb}^b \times (I_o \omega_{nb}^b + m r_g^b \times (V_o^b - V_c^b))\big] = R_b^n \big[m_o^b - r_g^b \times m(\dot{V}_c^b + \omega_{nb}^b \times V_c^b)\big] \tag{2.46}$$

Al hacer las reducciones algebráicas correspondientes, se obtiene

$$I_o \dot{\omega}_{nb}^b + S(\omega_{nb}^b) I_o \omega_{nb}^b + m S(r_g^b) \dot{V}_o^b + m S(r_g^b) S(\omega_{nb}^b) V_o^b = m_o^b \tag{2.47}$$

Si $r_g^b = \vec{0}$ entonces.

$$I_o \dot{\omega}_{nb}^b + S(\omega_{nb}^b) I_c \omega_{nb} = m_c^b \tag{2.48}$$

Si m_c^b se define como τ que es el torque ejercido en el cuerpo, se puede reescribir de la siguiente manera:

$$I_o \dot{\omega}_{nb}^b = \tau - \omega_{nb}^b \times I_c \omega_{mb}^b \tag{2.49}$$

Los pares cinemáticos externos que actúan en el cuadrirotor son generados por los motores y sus rotaciones.

$$\tau_T = I_{rot} \dot{\omega} \tag{2.50}$$

donde τ_T es el esfuerzo de torsión total, I_{rot} está relacionado con el momento de inercia del motor sobre su eje, $\dot{\omega}$ representa la aceleración angular de la flecha del motor

El esfuerzo de torsión total del motor está dado por:

$$\tau_{M_i} - \tau_{drag} = I_{rot}\dot{\omega} \tag{2.51}$$

donde τ_{M_i} es par cinemático generado por el *M-ésimo* motor y τ_{drag} es la fricción aerodinámica que está descrita por la siguiente ecuación

$$\tau_{drag} = \frac{1}{2}\rho A v^2 \tag{2.52}$$

donde $\rho = \left[kgm^{-3}\right]$ es la densidad del aire, $A = \left[m^2\right]$ representa el área frontal de la hélice, $v = \left[\frac{m}{s^2}\right]$ es la velocidad relativa respecto al aire.

La velocidad angular en magnitud está dada por :

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega r = v \tag{2.53}$$

Al sustitur (2.53) en (2.52), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tau_{drag} &= \frac{1}{2}\rho A \omega^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho A r^2 \omega^2 \\ &= k_{drag}\omega^2 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Note que de la ecuación anterior la fricción aerodinámica depende de la velocidad angular. En el caso particular en que se puede considerar vuelo estacionario, implica que la velocidad angular es constante y por tanto la aceleración angular es cero.

Para los momentos, los cuatro actuadores están girando a una velocidad ω_i produciendo una fuerza F_i en el sentido del eje z del referencial del cuerpo, al mismo tiempo se generan pares (βF_i). Se propone una geometría simétrica y los motores son equidistantes con el centro de gravedad a una distancia L_i quedando la dinámica del subsistema de rotación.

$$\sum_i (F_i \times L_i) + \beta(-F_1 + F_2 - F_3 + F_4) - I\omega \times \omega - I_r\Omega \times \omega = I\dot{\omega}$$

Se pueden utilizar diferentes combinaciones de fuerzas F_i generadas por el giro de los motores como entradas e control al sistema, una fuerza principal U_1 y otras tres fuerzas virtuales U_2, U_3 y U_4 para el movimiento de *Pitch*, *Roll* y *Yaw* respectivamente.

$$\begin{aligned} U_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 = F_4 - F_2 &= b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ U_3 = F_3 - F_1 &= b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ U_4 = F_2 + F_4 - F_1 - F_3 &= \beta b(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{aligned} \tag{2.55}$$

la dinámica del sistema está dada por:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -(\sin\theta)\frac{1}{m}U_1 \\
\ddot{y} &= (\cos\theta\sin\phi)\frac{1}{m}U_1 \\
\ddot{z} &= (\cos\theta\cos\phi)\frac{1}{m}U_1 - g \\
\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{I_r}{I_x}\dot{\theta}\Omega + \frac{l}{Ix}U_2 \\
\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) - \frac{I_r}{I_y}\dot{\theta}\Omega + \frac{l}{Iy}U_3 \\
\ddot{\psi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{l}{I_z}U_4
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Cuya representación matricial es:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} x2 \\ -\sin\theta_1\frac{1}{m}U_1 \\ y_2 \\ \cos\theta_1\sin\phi_1\frac{1}{m}U_1 \\ z_2 \\ \cos\theta_1\cos\phi_1\frac{1}{m}U_1 - g \\ \phi_2 \\ \theta_2\psi_2 a_1 - a_2\theta_2\Omega + b_1U_2 \\ \theta_2 \\ \phi_2\psi_2 a_3 - a_4\phi_2\Omega + b_2U_3 \\ \psi_2 \\ \phi_2\theta_2 a_5 + b_3U_4 \end{bmatrix}
\tag{2.57}
$$

donde

$$
a_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x} \qquad a_2 = \frac{-I_r}{I_x} \qquad a_3 = \frac{I_z - I_x}{I_y} \qquad a_4 = \frac{-I_r}{I_y}
$$

$$
a_5 = \frac{I_x - I_y}{I_z} \qquad b_1 = \frac{l}{I_x} \qquad b_2 = \frac{l}{I_y} \qquad b_3 = \frac{1}{I_z}
$$

2.4. Quaterniones

Desde el modelo de Lagrange que se define ω_η en la ec (2.9), se puede ver que existen singularidades en:

$$
\theta = \frac{(2k-1)\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}
$$

Es por este motivo que se propone el uso de cuaterniones ya que con éstos no hay singularidades, además que computacionalmente es más sencillo obtener los parámetros que con las matrices de rotación, los cuaterniones se basan en el teorema de Euler en

el que cualquier desplazamiento se puede reducir a un a rotación α grados al rededor de un vector unitario (u). Se puede definir el cuaternión con la siguiente expresión:

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) u_1 \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) u_2 \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) u_3 \end{bmatrix}$$

La norma del cuaternión tiene que ser unitaria, es decir:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Para el modelo del cuadrirotor es necesario partir del modelo de Newton-Euler que anteriormente se obtuvieron, se tienen que retomar las ecuaciones (2.32) junto con las fuerzas externas, teniendo en cuenta que estas ecuaciones están definidas en el referencial del cuerpo.

$$m(\dot{V}_c^b + S(\omega_{nb}^b)V_c^b) = Q^T f_g + T_f$$

donde Q es similar y cumple la misma función de la matriz de rotación R

$$Q = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

Para finalizar y simplificar la parte de traslación es necesario pasar al marco inercial.

$$m\ddot{\xi} = f_g + QT_f \tag{2.58}$$

Y expresado en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + T_f \begin{bmatrix} 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

Para el susbsistema rotacional se deben de retomar las ecuaciones (2.49) de la cual hay que despejar el vector de velocidades.

$$v = I_o^{-1}\left(\tau - \omega_{nb}^b \times I_c\omega_{mb}^b\right) \tag{2.60}$$

quedando el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}qr - \frac{1}{I_{xx}}q + \frac{l}{I_{xx}}U_2 \\ \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}pr - \frac{1}{I_{yy}}p + \frac{l}{I_{yy}}U_2 \\ \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{zz}}pq + \frac{l}{I_{zz}}U_2 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Capítulo 3

Control del Cuadrirotor

Existen diferentes leyes de control para poder estabilizar el cuadrirotor desde leyes lineales y sencillas como puede ser un control Proporcional Derivativo (PD) o un control Proporcional Derivativo Integral (PID), hasta controles robustos y complejos, en éste apartado se proponen controladores basados en las técnicas de *Backstepping* y *Sliding Modes*, explicando primero la forma general de cada método y después las variaciones que se necesitan para la aplicación en la plataforma.

El cuadrirotor es un sistema subactuado ya que tiene seis grados de libertad y sólo tiene cuatro entradas de control, en este caso en particular se propone una ley de control para la posición, se obtienen los ángulos deseados de *roll* y *pitch* y después se hace seguimiento en orientación, la referencia para el ángulo de *yaw* es establecida por el usuario como se puede ver en la Figura (3.1)

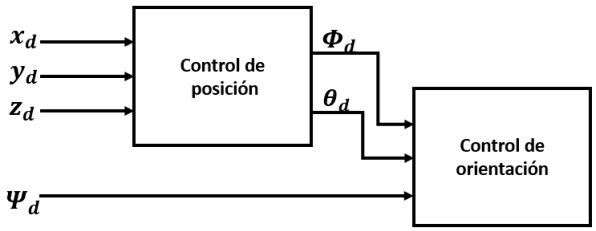


Figura 3.1: Diagrama de control general del cuadrirotor

3.1. Bases de Backstepping

Esta técnica tiene la característica de que se estabiliza estado por estado comenzando desde el primer estado hasta el *n-ésimo* estado. Considere el sistema no lineal (3.1a) (3.1b) y sea $D \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{\mu} = f(\mu) + g(\mu)\lambda \tag{3.1a}$$

$$\dot{\lambda} = u \tag{3.1b}$$

Donde $[\mu^T, \lambda] \in \mathbb{R}^{n+1}$ son los estados del sistema y $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, se considera que las funciones $f : D \to \mathbb{R}^n$ y $g : D \to \mathbb{R}^n$ son lo suficientemente suaves en el domino $D \in \mathbb{R}^n$ donde $\mu = 0$ y $f(0) = 0$ están contenidas en D y son conocidas. Se desea estabilizar el sistema en $\mu = 0$ y $\lambda = 0$.

El algoritmo de control consiste en estabilizar el primer estado y luego el segundo y así sucesivamente hasta que todos los estados del sistema tengan un comportamiento estable. Suponga el subsistema (3.1a) se pude estabilizar con una realimentación de estado de la forma $\lambda = \phi(\mu)$, el subsistema en lazo cerrado es

$$\dot{\mu} = f(\mu) + g(\mu)\phi(\mu)$$

Si el sistema es estable por la realimentación propuesta, entonces, existe una función definida positiva tal que su derivada debe de cumplir

$$\frac{\partial V}{\partial \mu}\left[f(\mu) + g(\mu)\phi(\mu)\right] \leq -W(\mu) \qquad \forall \mu \in D \tag{3.2}$$

Para el segundo estado, se propone un cambio de variables que está dado por el error $z = \lambda - \phi(\mu)$, por lo cual el sistema adquiere la forma siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= h(\mu) + g(\mu)z \\ \dot{z} &= v \end{aligned}$$

Se puede apreciar que el sistema es muy similar al inicial sólo que el primer estado ya tiene un comportamiento asintóticamente estable. Para estabilizar el segundo estado y al mismo tiempo elegir el control de todo el sistema se propone una función de Lyapunov

$$V(\mu, \lambda) = V(\mu) + \frac{1}{2}z^2 \tag{3.3}$$

cuya derivada es

$$\dot{V}(\mu, \lambda) = \frac{\partial V}{\partial \mu}\left[f(\mu) + g(\mu)\phi(\mu)\right] + \frac{\partial V}{\partial \mu}g(\mu)z + zv \tag{3.4}$$

De (3.2) en (3.4)

$$\dot{V}(\mu, \lambda) \leq -W(\mu) + \frac{\partial V}{\partial \mu}g(\mu)z + zv$$

Si se propone un control $v = -\frac{\partial V}{\partial \mu}g(\mu) - kz$ para valores $k > 0$, al evaluar el control en la función de Lyapunov se puede ver que el sistema es estable ya que la función es negativa semidefinida.

$$\dot{V}(\mu, \lambda) \leq -W(\mu) - kz^2$$

Lo cual implica que el origen $(\mu = 0, z = 0)$ es asintóticamente estable. Como $\phi(0) = 0$

se concluye que en el orgien ($\mu = 0, \lambda = 0$) es asintóticamente estable. La ley de control en las variables originales tiene la siguiente forma:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \mu}\left[f(\mu) + g(\mu)\lambda\right] - \frac{\partial V}{\partial \mu} g(\mu) - k\left[\lambda - \phi(\mu)\right]$$

El método de backstepping se limita sólo a sitemas de la forma (3.1a) (3.1b), sin embargo, en la sección de modelado se puede ver que las ecuaciones del cuadrirotor no son de éste tipo, por lo que es necesario hacer definir un control u para poder cancerlar términos y poder aplicar la técnica de *backstepping*.

Sea el sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= f(\mu) + g(\mu)\lambda \\ \dot{\lambda} &= f_a(\mu, \lambda) + g_a(\mu, \lambda)u\end{aligned}$$

Al elegir $u = \frac{1}{g_a(\mu,\lambda)}\left[u_a - f_a(\mu, \lambda)\right]$ el sistema en la lazo cerrado ya tiene la forma necesaria para poder utilizar la técnica de *backstepping*, una limitante que se tiene al hacer esta realimentación es que $g_a(\mu, \lambda) \neq 0$

3.1.1. Generalización de Backstepping

En el apartado de modelado del cuadrirotor se puede apreciar que los subsistemas en general se pueden representar como una cascada de integradores, en esta sección se plantea de forma general la metodología que se utiliza para el control de éste tipo de sistemas.

Sea el sistema

$$\dot{\mu}_1 = \mu_2 \tag{3.5a}$$

$$\dot{\mu}_2 = g(\omega, \gamma) + h(\omega, \gamma)u \tag{3.5b}$$

donde $f(\omega, \gamma)$ y $g(\omega, \gamma)$ son funciones conocidas que no dependen de los estados. Se desea estabilizar el subsistema (3.5a) en un punto arbitrario μ_1^d, se define el error de seguimiento (e_1) y su derivada.

$$e_1 = \mu_1^d - \mu_1 \qquad \dot{e}_1 = \dot{\mu}_1^d - \dot{\mu}_1 \tag{3.6}$$

Se establece una función definida positiva que depende del error e_1 y se obtiene su derivada

$$\mathrm{V}_1(e_1) = \frac{1}{2}e_1^2 \tag{3.7}$$

Derivando (3.6) y sustituyendo (3.5a) y (3.5b)

$$\dot{\mathrm{V}}_1(e_1) = e_1\dot{e}_1 = e_1(\dot{\mu}^d - \dot{\mu}_1) = e_1(\dot{\mu}^d - \mu_2) \tag{3.8}$$

Se plantea utilizar el segundo estado como una entrada de control virtual μ_2^{v} tal que $\dot{\mathrm{V}}_1(e_1) < 0$. Eligiendo μ_2^{v} como

$$\mu_2^{\mathrm{v}} = \dot{\mu}^d + \alpha_1 e_1 \tag{3.9}$$

Al sustitur (3.9) en (3.8)

$$\dot{\mathrm{V}}_1(e_1) = -\alpha_1 e_1^2 \leq 0 \tag{3.10}$$

Lo que implica que el primer estado es estable. Para estabilizar el segundo estado se define un error entre el control virtual y el segundo estado

$$e_2 = \mu_2 - \mu_2^{\mathrm{v}} \tag{3.11}$$

Reescribiendo el sistema en términos de los errores e_1 y e_2

$$\dot{e}_1 = -e_2 - \alpha_1 e_1 \tag{3.12a}$$

$$\dot{e}_2 = g(\omega, \gamma) + h(\omega, \gamma)u - \ddot{\mu}^d + \alpha_1(e_2 + \alpha_1 e_1) \tag{3.12b}$$

Se consideran pequeñas variaciones en los ángulos deseados por lo que $\ddot{\mu}^d = 0$. Se propone una función de Lyapunov que dependa de los errores e_1 y e_2

$$\mathrm{V}_2(e_1, e_2) = \mathrm{V}_1(e_1) + \frac{1}{2}e_2^2 \tag{3.13}$$

Derivando (3.13) y sustituyendo (3.12a) y (3.12b)

$$\dot{\mathrm{V}}_2(e_1, e_2) = -\alpha_1 e_1^2 - e_1 e_2 + e_2\big[g(\omega, \gamma) + h(\omega, \gamma)u + \alpha_1(e_2 + \alpha_1 e_1)\big] \tag{3.14}$$

Eligiendo u de la siguiente forma

$$u = \frac{1}{h(\omega, \gamma)}\left[-\alpha_1(e_2 + \alpha_1 e_1) - g(\omega, \gamma) + e_1 - \alpha_2 e_2\right] \tag{3.15}$$

Sustituyendo el control en (3.14)

$$\dot{\mathrm{V}}_2 = -\alpha_1 e_1^2 - \alpha_2 e_2^2 \leq 0 \tag{3.16}$$

Por lo tanto el sistema es asintóticamente estable.

Backstepping **aplicado al control de Cuadrirotor**

Retomando las ecuaciones del modelo del cuadrirotor

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ U_x \frac{1}{m} U_1 \\ y_2 \\ U_y \frac{1}{m} U_1 \\ z_2 \\ f_1(\theta_1, \phi_1)\frac{1}{m}U_1 - g \\ \phi_2 \\ g_1(\theta_2, \psi_2, \Omega) + b_1 U_2 \\ \theta_2 \\ g_2(\phi_2, \psi_2, \Omega) + b_2 U_3 \\ \psi_2 \\ g_3(\phi_2, \theta_2) + b_3 U_4 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

donde:

$$U_x = -\sin\theta_1 \qquad U_y = \cos\theta_1 \sin\phi_1 \tag{3.18a}$$

$$f_1(\theta 1, \phi 1) = \cos\theta_1 \cos\phi_1 \qquad g_1(\theta_2, \psi_2, \Omega) = \theta_2\psi_2 a_1 - a_2\theta_2\Omega \tag{3.18b}$$

$$g_2(\phi_2, \psi_2, \Omega) = \phi_2\psi_2 a_3 - a_4\phi_2\Omega \qquad g_3(\phi_2, \theta_2) = \phi_2\theta_2 a_5 \tag{3.18c}$$

$$a_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x} \quad a_2 = \frac{-I_r}{I_x} \quad a_3 = \frac{I_z - I_x}{I_y} \quad a_4 = \frac{-I_r}{I_y}$$

$$a_5 = \frac{I_x - I_y}{I_z} \quad b_1 = \frac{l}{I_x} \quad b_2 = \frac{l}{I_y} \quad b_3 = \frac{1}{I_z}$$

Para el control, se separa el modelo completo descrito en (3.17) en subsistemas, cada subsistema que se obtiene tiene la forma de (3.5a) y (3.5b), utilizando la metodología de la generalización del *backstepping* se pueden obtener los siguientes controles para orientación para *roll,pitch* y *yaw* respectivamente.

$$U_2 = \frac{1}{b_1}\left[-g_1(\theta_2, \psi_2, \Omega) + \alpha_1(e_2 + \alpha_1 e_1) + e_1 - \alpha_2 e_2\right] \tag{3.19a}$$

$$U_3 = \frac{1}{b_2}\left[-g_2(\phi_2, \psi_2, \Omega) + \alpha_3(e_4 + \alpha_3 e_3) + e_3 - \alpha_4 e_4\right] \tag{3.19b}$$

$$U_4 = \frac{1}{b_3}\left[-g_3(\phi_2, \theta_2) + \alpha_5(e_6 + \alpha_3 e_5) + e_5 - \alpha_6 e_6\right] \tag{3.19c}$$

donde $\alpha_i > 0$ son constantes, e_i son los errores de seguimiento entre el estado y el control virtual y b_i son constantes asociadas a la matriz de inercia del vehículo. En las Figuras 3.2, 3.3, 3.4 se grafica desempeño del controlador, en las que se puede apreciar la referencia o los valores deseados de alguna trayectoria y también se puede apreciar la salida del sistema.

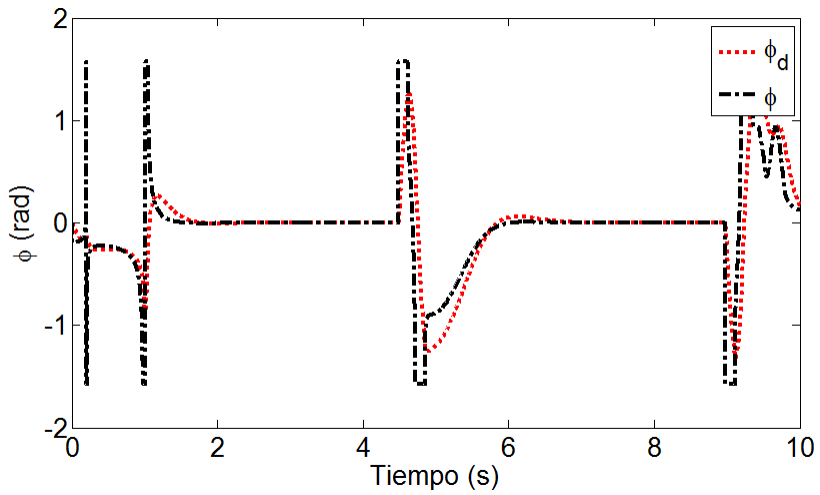


Figura 3.2: Respuesta del sistema en roll

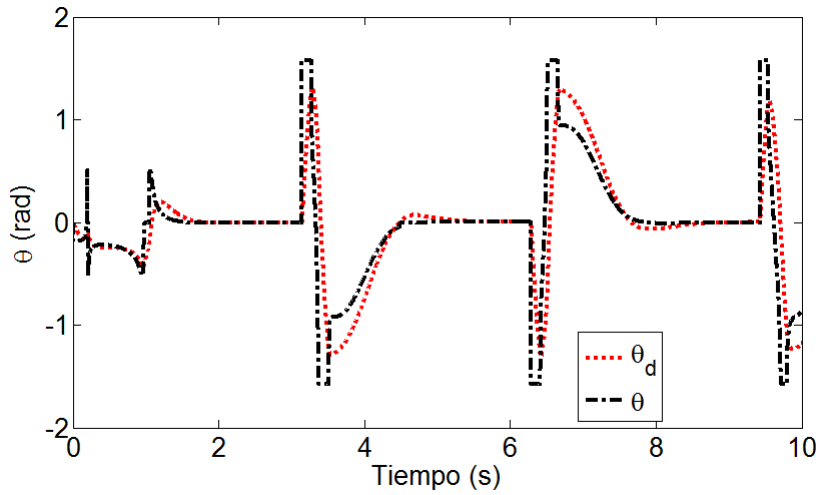


Figura 3.3: respuesta del sistema en *pitch*

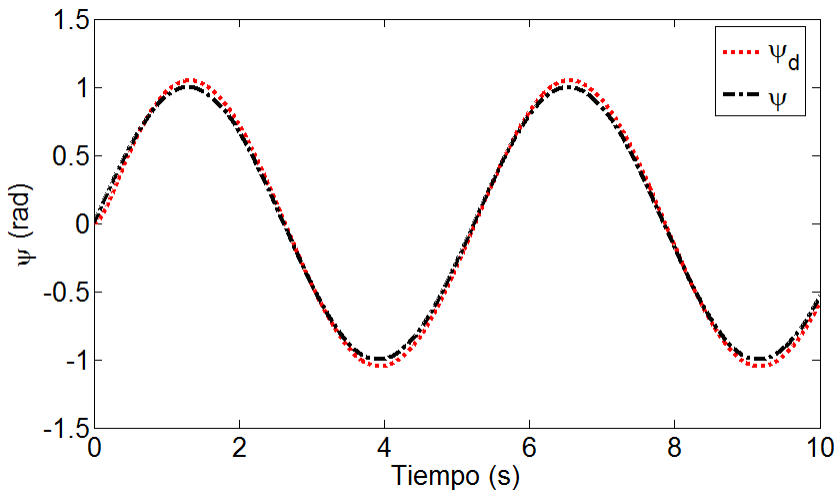


Figura 3.4: respuesta del sistema *yaw*

Para la posición se hace el control de altura z y después en x y y, aplicando la metodología que se usó para el control de orientación, se obtiene el control de altura U_1

$$U_1 = \frac{m}{f_1(\theta_1, \phi_1)}\Big[g - \alpha_7(e_8 + \alpha_7 e_7) + e_7 - \alpha_8 e_8\Big] \tag{3.20}$$

donde g es el término que representa la gravedad, $alpha_i > 0$ son ganancias y e_i es el error entre el estado y el control virtual.

Para el control de x y y se propone utilizar U_x y U_y como entradas de control virtual ya que si se modifica U_1 se corre el riesgo de desestabilizar el control de altura, se proponen los controles U_x y U_y

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{m}{U_1}\left[-\alpha_9(e_{10} + \alpha_9 e_9) + e_9 - \alpha_{10} e_{10}\right] \\ U_y &= \frac{m}{U_1}\left[-\alpha_{11}(e_{12} + \alpha_{11} e_{11}) + e_{11} - \alpha_{12} e_{12}\right] \end{aligned} \tag{3.21}$$

Note que en las ecuaciones anteriores U_1 está en el denominador, pero nunca se indetermina, ya que U_1 siempre tiene un término que debe de compensar la fuerza gravitacional y mantener el vehículo en el aire, en caso de que $U_1 = 0$ implica que el vehículo está en tierra.

De (3.18a) y (3.21) se obtienen los ángulos deseados que serán la referencia para el control de orientación ya descrito.

$$\theta_1^d = \arcsin\left(-U_x\right) \tag{3.22a}$$

$$\phi_1^d = \arcsin\left(\frac{U_y}{\cos(\theta_1^d)}\right) \tag{3.22b}$$

A continuación se muestran las gráficas de la simulación del control de posición del cuadrirotor, se puede apreciar el desempeño del controlador y la salida del sistema, que en comparación al control de orientación las referencias son más suaves

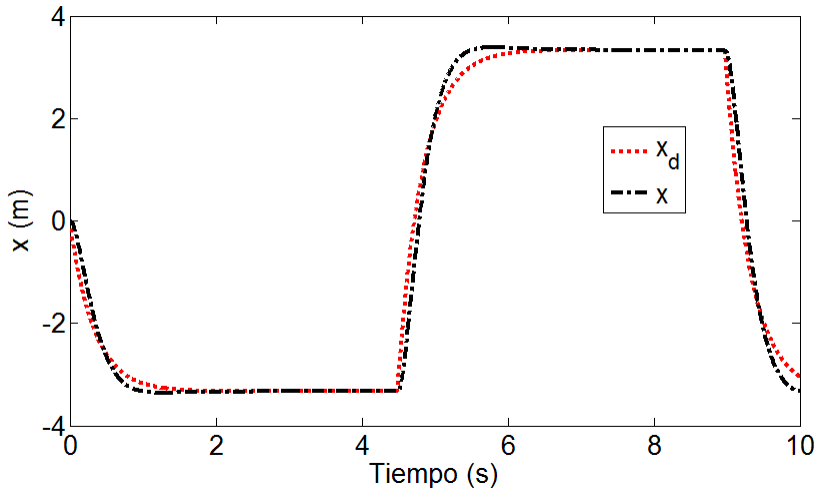


Figura 3.5: Respuesta del cuadrirotor en x

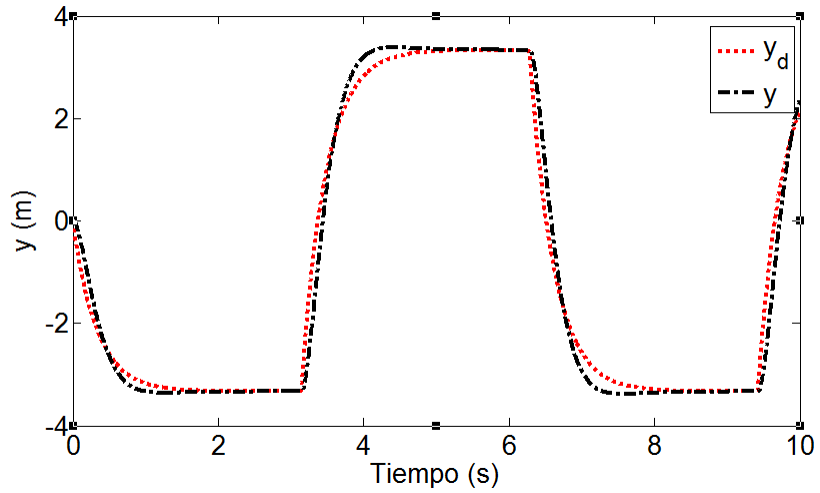


Figura 3.6: Respuesta del cuadrirotor en y

3.2. Generalización de Sliding Modes

Sea el sistema (3.5a) y (3.5b), se desea estabilizar en un punto deseado η_1^d aleatorio, se define el error de seguimiento, su derivada y su segunda derivada, representados por

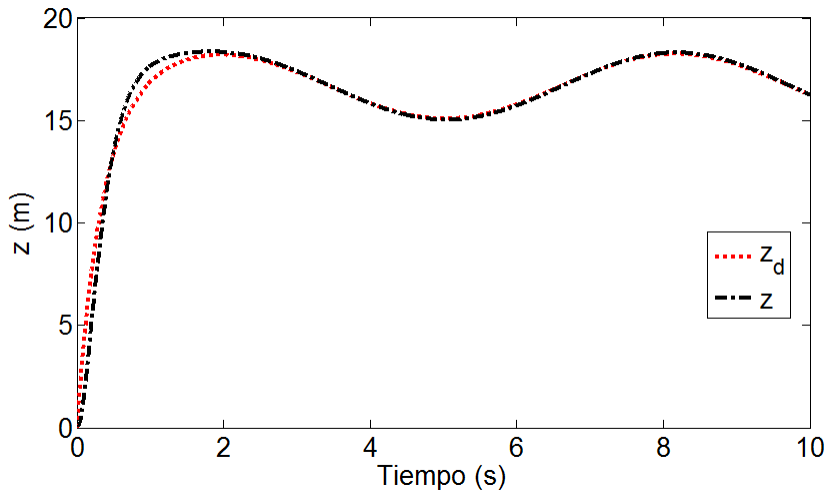


Figura 3.7: Respuesta del cuadrirotor en z

e_1, $\dot{e}_1$ y $\ddot{e}_1$ respectivamente

$$e_1 = \eta_1 - \eta_1^d \tag{3.23a}$$
$$\dot{e}_1 = \eta_2 - \dot{\eta}_1^d \tag{3.23b}$$
$$\ddot{e}_1 = g(\omega, \gamma) + h(\omega, \gamma)u \tag{3.23c}$$

Se definen e_1 y $e_2 = \dot{e}_1$ como los estados del sistema. Se plantea una región o superficie de deslizamiento la cual representa la dinámica que se quiere imponer para el comportamiento de los estados e_1 y e_2

$$\sigma = c_1 e_1 + \dot{e}_1 = c_1 e_1 + e_2 \tag{3.24}$$

Derivando (3.24)

$$\dot{\sigma} = c_1 \dot{e}_1 + \dot{e}_2 = c_1 e_2 + g(\omega, \gamma) + h(\omega, \gamma)u - \ddot{\eta}_1^d \tag{3.25}$$

$$V_1(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad \dot{V}_1(\sigma) = \sigma\dot{\sigma} \tag{3.26}$$

Introduciendo (3.25) en (3.26)

$$\dot{V}_1(\sigma) = \sigma\left[c_1 e_2 + g(\omega, \gamma) + h(\omega, \gamma)u\right] \tag{3.27}$$

Al elegir u de la siguiente manera

$$u = \frac{1}{h(\omega, \gamma}\left[-g(\omega, \gamma) - c_1 e_2 + k_1 \text{sign}(\sigma)\right] \tag{3.28}$$

Sustituyendo (3.28) en (3.27)

$$\dot{V}_1(\sigma) = k_1 \sigma \text{sign}(\sigma) \leq k_1 |\sigma| \leq 0 \qquad \forall \quad k_1 > 0 \tag{3.29}$$

Consecuentemente los estados son estables y además el error converge en tiempo finito.

3.2.1. Aplicación de *Sliding Modes* al cuadrirotor

Se consiera el modelo del cuadrirotor (3.17) para poder seguir la metodología expuesta en la generalización de *Sliding Modes* y estabilizar el subsistema de relacionado con la orientación, obteniendo los controles U_2, U_3 y U_3 para *roll, pitch* y *yaw* respectivamente.

$$U_2 = \frac{1}{b_1}\left[-g_1(\theta_2, \psi_2, \Omega) - c_1 e_2 - \eta_1 \text{sign}(\sigma_1)\right] \tag{3.30a}$$

$$U_3 = \frac{1}{b_2}\left[-g_2(\phi_2, \psi_2, \Omega) - c_2 e_4 - \eta_2 \text{sign}(\sigma_2)\right] \tag{3.30b}$$

$$U_4 = \frac{1}{b_3}\left[-g_3(\phi_2, \theta_2, \Omega) - c_3 e_6 - \eta_3 \text{sign}(\sigma_3)\right] \tag{3.30c}$$

donde $c_i, \eta_i > 0$ son constantes asociadas a la región de deslizamiento, e_i son los estados. A continuación se muestran las gráficas de las simulaciones donde se puede ver la referencia y la salida del sistema, también se puede ver que en comparación del *Backstepping* tiene un mejor desempeño.

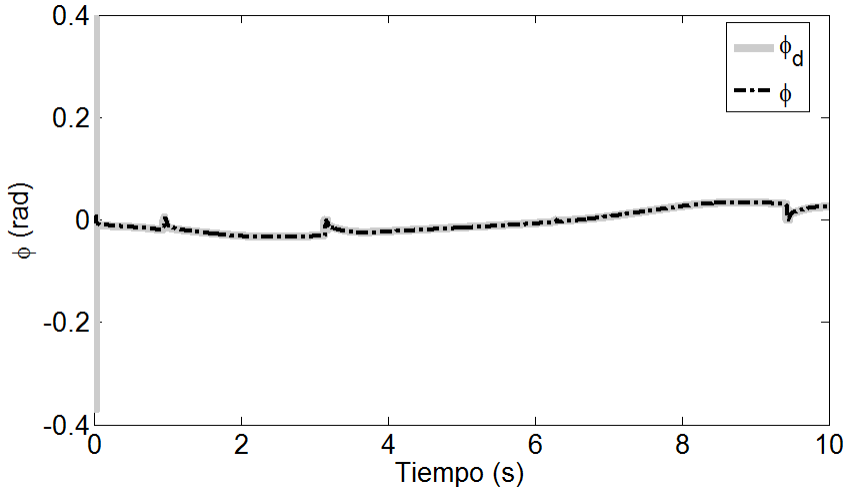


Figura 3.8: Respuesta del cuadrirotor en *roll* utilizando *sliding modes*

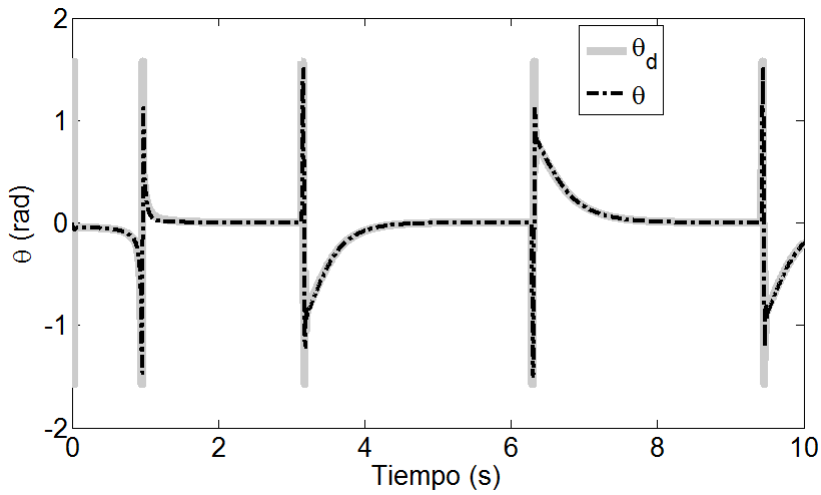


Figura 3.9: Respuesta del cuadrirotor en *pitch* utilizando *sliding modes*

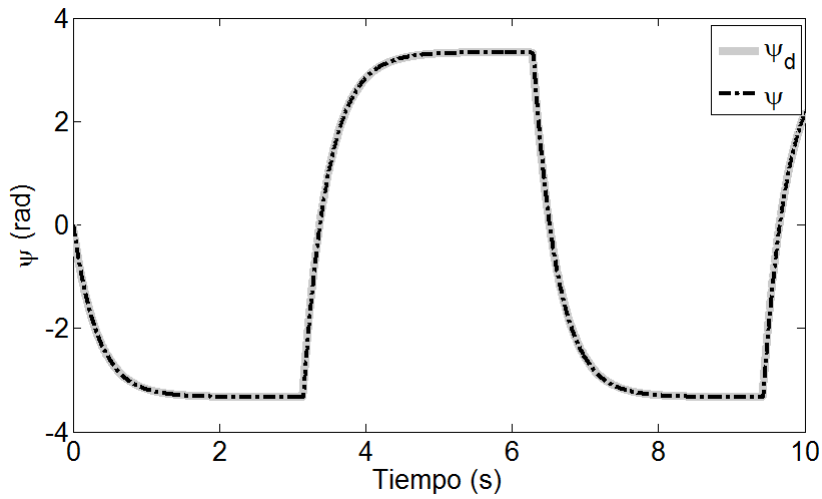


Figura 3.10: Respuesta del cuadrirotor en *yaw* utilizando *sliding modes*

Para el control de posición se plantea la misma metodología que se utilizó en *Backstepping*, se estabiliza el vehículo en altura y después para x y y se utilizan las entradas virtuales U_x y U_y para obtener los ángulos deseados que serán las referencias para el control de posición. Aplicando la metodología que se explicó en el apartado de la generalización de *Sliding Modes* se obtienen los siguientes controles para posición

$$U_1 = \frac{m}{f_1(\theta_1, \phi_1)} \left[-g - c_4 e_8 - \eta_4 \text{sign}(\sigma_4)\right] \tag{3.31a}$$

$$U_x = \frac{m}{U_1} \left[-c_4 e_8 - \eta_5 \text{sign}(\sigma_5)\right] \tag{3.31b}$$

$$U_y = \frac{m}{U_1} \left[-c_6 e_{12} - \eta_6 \text{sign}(\sigma_6)\right] \tag{3.31c}$$

donde $c_i, \eta_i > 0$ son constantes asociadas a la región de deslizamiento, σ_i es la región

de deslizamiento, e_i representan los estados y g es el término asociado a la gravedad.

En este caso en particular (3.31a) es discontinuo debido a la naturaleza del controlador, ya que contiene el término $\eta_i \text{sign}(\sigma_i)$ y se puede observar que en (3.31b) y (3.31c) U_x está en el denominador lo que afecta el desempeño del controlador, por lo que se propone utilizar la función *sigmoide* que está descrita por la siguiente expresión

$$\text{sign}(\sigma_i) \approx \frac{\sigma_i}{|\sigma_i| + \epsilon} \qquad \epsilon << 1 \tag{3.32}$$

Para los ángulos deseados se utilizan las ecuaciones (3.22a) y (3.22b)

En las Figuras (3.11) se puede apreciar el control U_1 donde se utiliza la función *sign* y en la Figura (3.12) se puede apreciar el control U_1 utilizando la aproximación del *sigmoide*, note que cuando se utiliza la función *sigmoide* el control que se obtiene es continuo y consecuentemente el efecto del *chattering* disminuye.

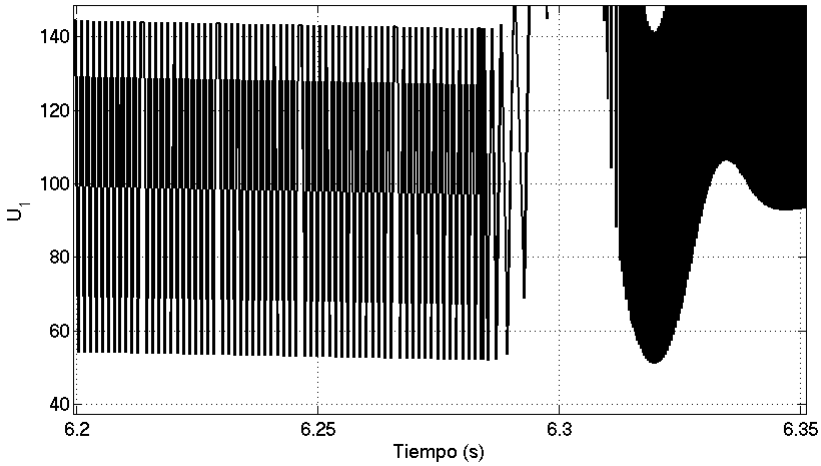


Figura 3.11: Acercamiento a la señal de control U_1 utilizando la función sign

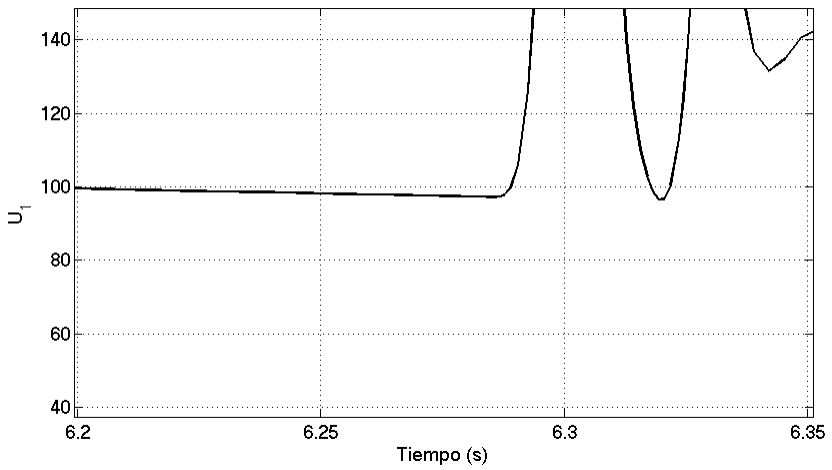


Figura 3.12: Acercamiento a la señal de control U_1 utilizando la aproximación *sigmoide*

En las Figuras 3.13, 3.14 y 3.15 se muestran las simulaciones correspondientes al control de posición en las cuales se utiliza la aproximación del *sigmoide*.

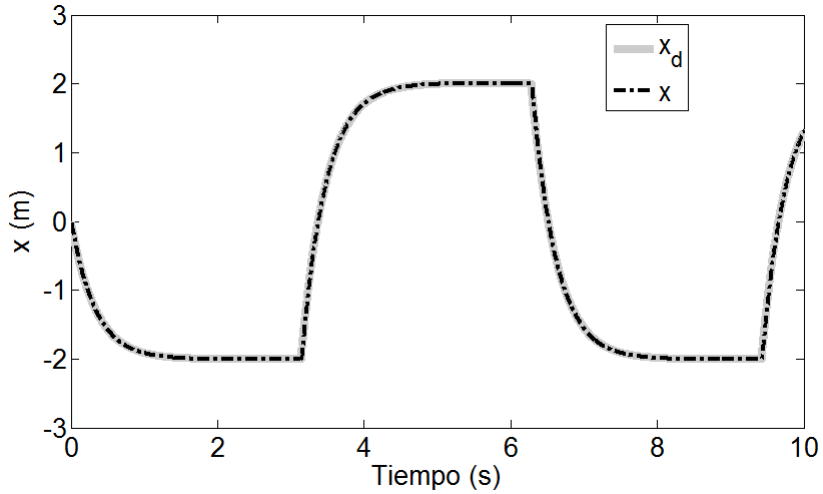


Figura 3.13: Respuesta del cuadrirotor en x utilizando *sliding modes*

3.3. Comparación entre controladores

En esta sección se presenta una comparativa entre los dos tipos de controladores, la referencia ambos es la misma y así poder visualizar en la simulación el desempeño de los controladores y poder observar de manera gráfica la eficiencia de cada controlador.

La trayectoria que se pretende seguir es una espiral en tres dimensiones cuyas ex-

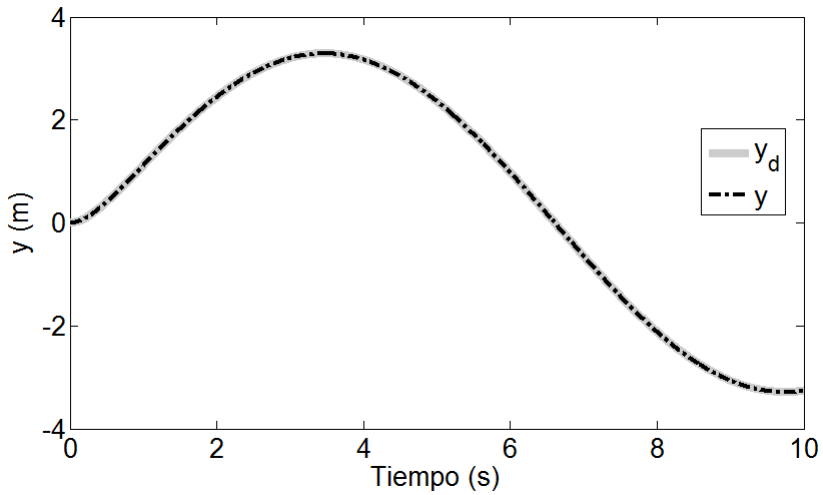


Figura 3.14: Respuesta del cuadrirotor en y utilizando *sliding modes*

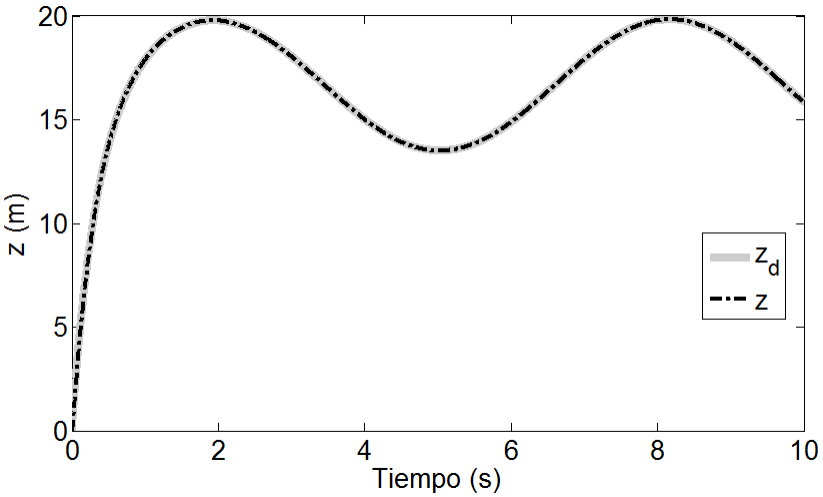


Figura 3.15: Respuesta del cuadrirotor en z utilizando *sliding modes*

presión paramétrica está dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \\ t \end{bmatrix}$$

En las Figuras 3.17 Y 3.16 se pude observar el controlador Backstepping aplicado al cuadrirotor. En el control en posición se puede observar que existe desfasamiento tanto en x y y y el control en z el único problema aparente es en el tiempo inicial después el controlador tiene un buen desempeño. En el control de orientación se puede ver que tanto en *pitch* y *roll* existen sobretiros en la referencia y el controlador no es capaz de seguirlo, sin embargo, cuando la referencia es suave el controlador tiene un buen desempeño, en el ángulo de *yaw* se puede observar que existe desfasamiento respecto a la referencia.

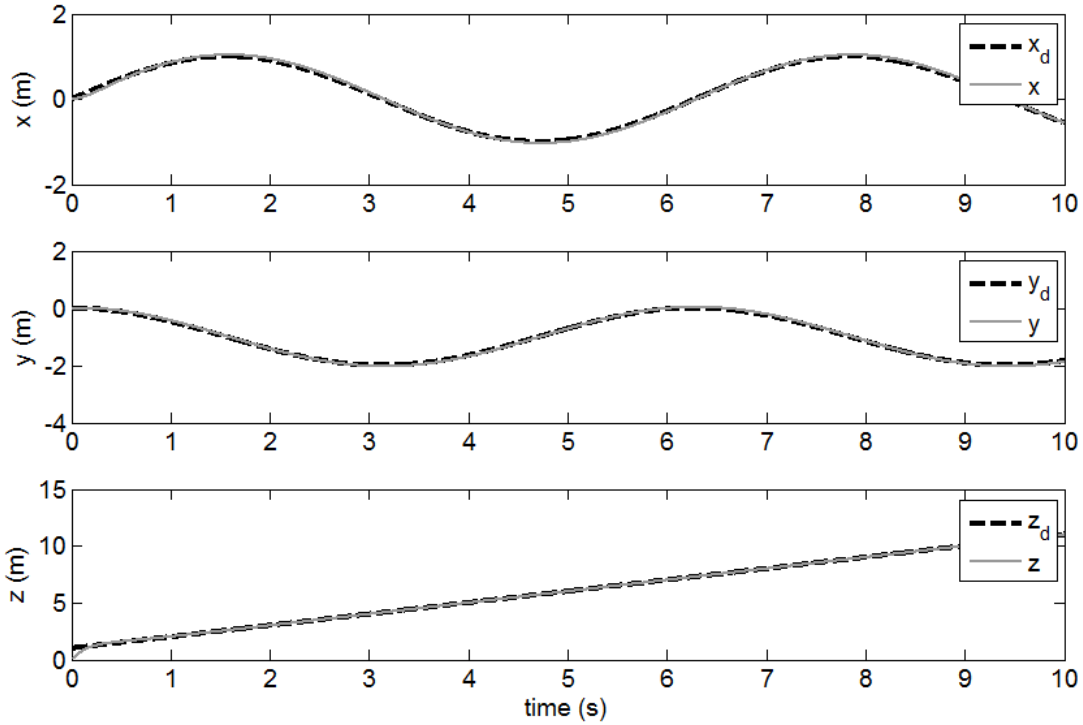


Figura 3.16: Respuesta del cuadrirotor en posición con Backstepping

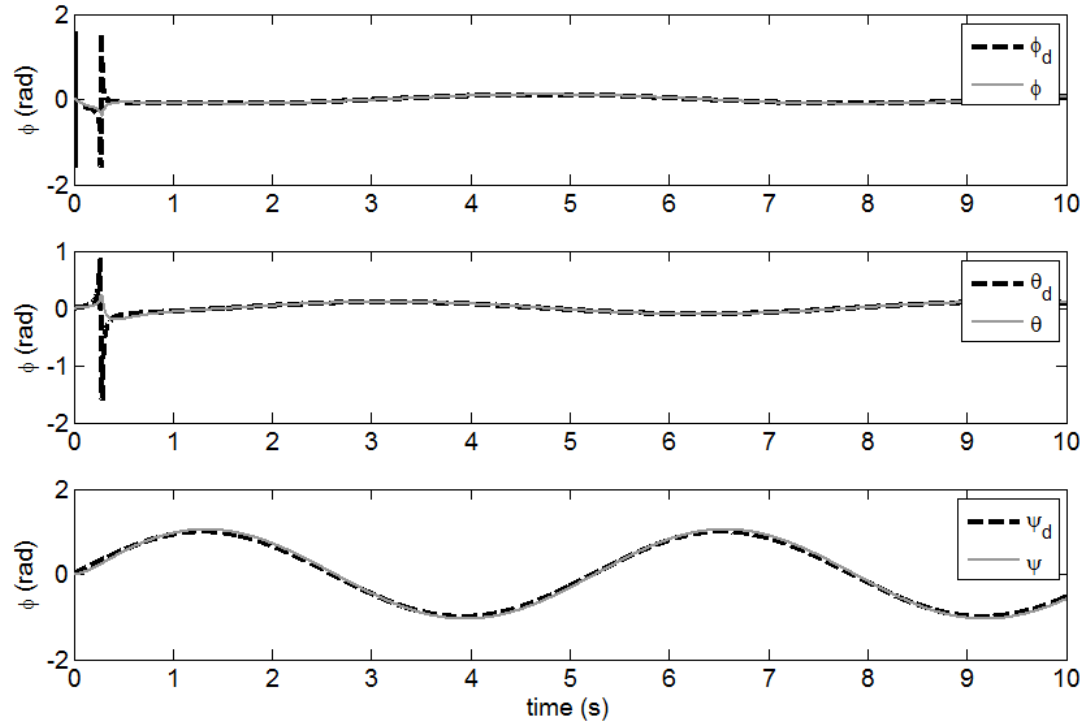


Figura 3.17: Respuesta del cuadrirotor en orientación con Backstepping

En las Figuras 3.18 y 3.19 se puede observar la salida de los subsistemas de posición y orientación respectivamente del cuadrirotor utilizando el control por Sliding Modes, a diferencia del control por Backstepping se pude observar que el controlador tiene un mejor desempeño, ya que no se visualizan desfases entre referencia y la salida, en el control de altura se pude observar que no hay problema en en el tiempo inicial para alcanzar la referencia. En la orientación, también hay referencias bruscas al iniciar la simulación y puede observar que el controlador es capaz de seguir dichas referencias.

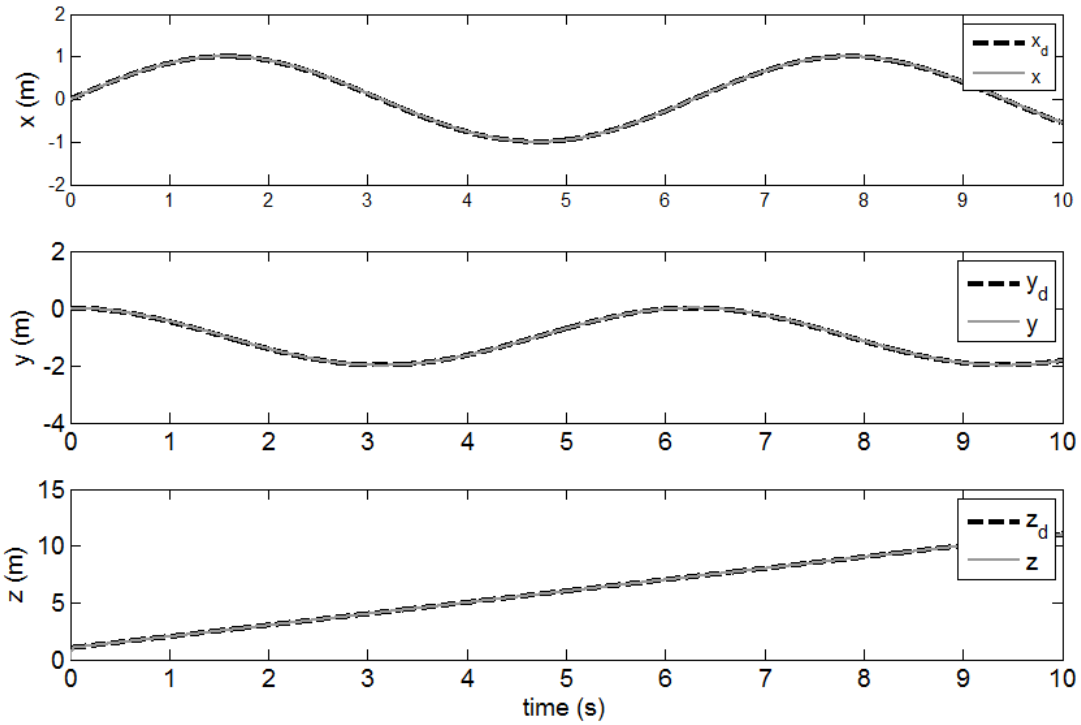


Figura 3.18: Respuesta del cuadrirotor en posición con Sliding Modes

En la Figura 3.20 se pueden observar los dos controladores y la referencia en tres dimensiones, observe que el control por Sliding Modes es el que tiene un mejor desempeño en el seguimiento de la señal de referencia.

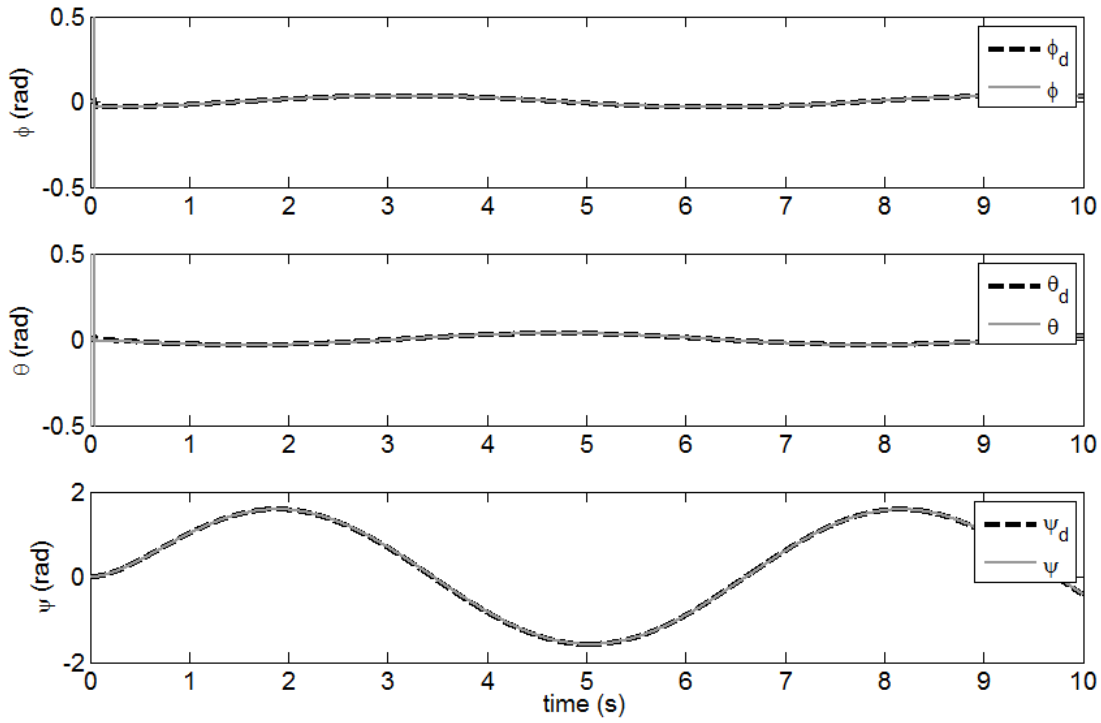


Figura 3.19: Respuesta del cuadrirotor en orientación con Sliding Modes

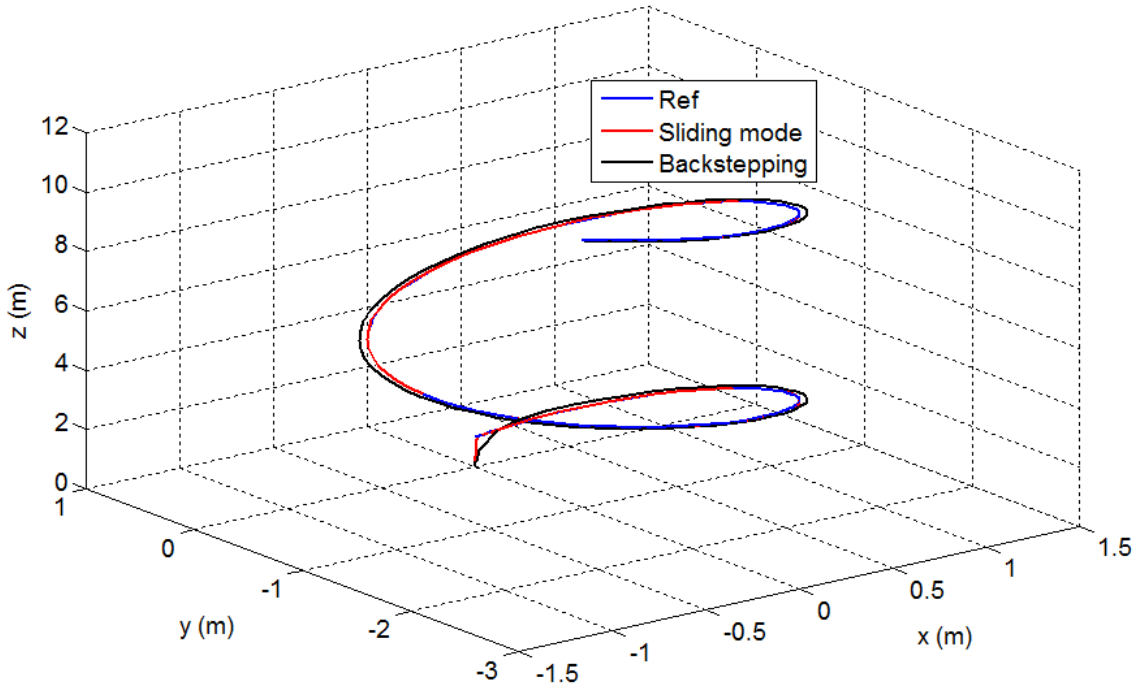


Figura 3.20: Respuesta del cuadrirotor en orientación con Sliding Modes

3.4. Conclusión

En este capítulo se desarrollaron dos tipos de controladores no lineales y su aplicación al los subsistemas de orientación y posición del cuadrirotor, se validó numérica-

mente el modelo y los controladores a través de simulaciones creadas en *Simulink*. Se muestra que el control por Sliding Modes tiene mejor desempeño que la metodología basada por Backstepping, ambos controladores son capaces de poder seguir referencias con cambios bruscos sin desestabilizar el sistema.

Capítulo 4

Generación de trayectorias y evasión de obstáculos

4.1. Introducción

Dentro del estudio y desarrollo de los drones cada vez se busca que el vehículo dependa menos de las decisiones del ser humano, por lo que uno de los problemas con mayor relevancia para lograr dicha autonomía radica en el proceso de generación de trayectorias en el que partiendo de una posición y orientación inicial se genera un camino el cual dirija al cuadrirotor a una posición y orientación final sin colisionar con algún objeto que se encuentre en su trayectoria.

El problema de la generación de trayectorias se divide en dos tareas, la primer tarea está relacionada con el que hacer, antes de que el cuadrirotor comience el vuelo, es decir, se establecen los puntos inicial y final para generar un camino utilizando algún algoritmo, en este caso en particular se plantean dos algoritmos para la generación del camino, punto a punto y polinomial.
La segunda tarea consiste en la evasión de obstáculos, para ésta se utiliza el método de campos potenciales, esta técnica es usada para guiar al cuadrirotor dirigiéndolo a un objetivo al tiempo que evita los obstáculos. Estos métodos utilizan la suma vectorial de la fuerza de repulsión virtual (debido al obstáculo) y la fuerza de atracción virtual (debida al punto final para guiar al cuadrirotor).

4.2. Generación de trayectorias

4.2.1. Punto a punto

Este método en su forma más simple consiste en la creación de una trayectoria entre dos puntos, de forma más general se puede extender para n puntos, sin embargo, las trayectorias entre todos los puntos se generarán utilizando la ecuación de la recta obteniendo una trayectoria al momento de cambiar de un punto a otro. Tiene la característica que es muy simple y es la más utilizada por diferentes *softwares* de

planificación de misiones o tareas para cuadrirotores como *QGround* y *Mission Planner*

Sea $X = [x_1 \;\; y_1]^T$ la posición del cuadrirotor y $X_d = [x_2 \;\; y_2]^T$ las coordenadas del punto final, la trayectoria se genera utilizando la ecuación de la línea recta.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Definiendo y como $P(x)$ y despejando, se obtiene la expresión que ne a dos puntos a través de una línea recta

$$P(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2$$

4.2.2. Conjunto de puntos (polinomial)

Este método a diferencia del método punto a punto tiene la capacidad de poder generar trayectorias uniendo los puntos con líneas curvas cuyas ecuaciones están dadas por polinomios de orden n por lo que son continuas y suaves, sin embargo, como es una aproximación polinomial se corre el riesgo de que no necesariamente pase por el punto sino por una vecindad cercana al punto.

Método de Newton

suponga que $P_n(x)$ es un polinomio de interpolación para los datos

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

al agregar el nuevo dato (x_{n+1}, y_{n-1}) se tiene que obtener un nuevo polinomio P_{n+1}, el método del polinomio de Newton, establece que se debe de utilizar el polinomio $P(x)$ y sólo agregar un término capaz de integrar el nuevo dato. la función polinomial entonces estaría dada por

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + A(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

donde $A(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ es un término de grado $n + 1$. El polinomio para que se único debe de cumplir con la siguiente condición

$$P_{n+1}(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

por lo que A tiene la siguiente expresión

$$A = \frac{P_{n+1}(x_{n+1} - P_n(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1)\ldots(x_{n+1} - x_n)}$$

Diferencias Divididas

Se utiliza la idea anterior para construir el polinomio de interpolación p_n de los datos (x_k, y_k) con $k = 0, \cdots, n$ de una muestra. Considere el polinomio

$$p_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + A_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \quad (4.1)$$

Definición

I Se define diferencia dividida de orden cero de la función f y se denota como $f[x_i]$ a y_i.

II Se define diferencia dividida de orden uno de la función f y se denota como $f[x_i, x_{i+1}]$ al coeficiente $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i} = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$.

III Se define diferencia dividida de orden dos de la función f y se denota como $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$.

de forma general cada diferencia dividida de orden $k \geq 1$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] &= \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x0} \\ f[x_i] &= y_i \qquad i = 0, 1, \cdots, n \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se debe de cumplir con las siguientes condiciones para asegurar que el polinomio involucre todos los puntos

$$\begin{aligned} p_n(x_0) = y_0 \quad &\Rightarrow y_0 = A_0 \\ p_n(x_1) = y_1 \quad &\Rightarrow y_1 = A_0 + A_1(x_1 - x_0) \\ p_n(x_i) = y_i \quad &\Rightarrow y_i = A_0 + A_1(x_i - x_0) + A_2(x_i - x_0)(x_i - x_1) + \cdots + A_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{n-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La recurrencia permite ir definiendo las diferencias divididas de orden superior a partir de las de un orden menos.

Tabla de diferencias divididas

Se propone realizar una tabla de diferencias divididas para facilitar el cálculo de los coeficientes A_i del polinomio p_n escrito en la forma de Newton.

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$
$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

x_i	y_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$
x_0	y_0	$f[x_0]$				
x_1	y_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	y_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
X_3	y_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_n	y_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n_2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$

A continuación se muestran las gráficas de una trayectoria generada a partir de varias lineas rectas y otra en donde se utiliza el método polinomial.

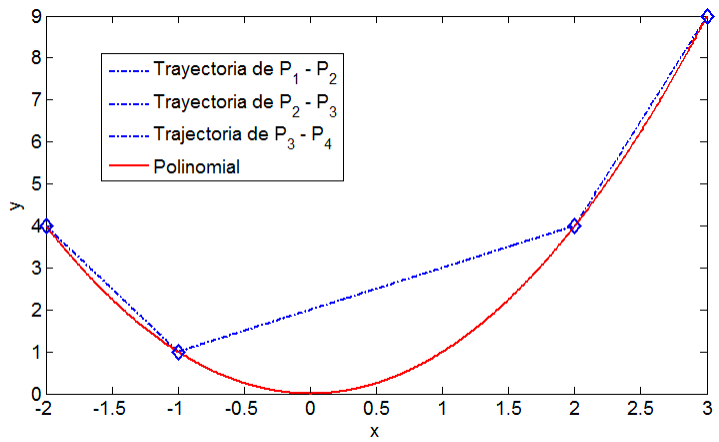


Figura 4.1: Trayectorias generadas por los distintos métodos

4.3. Evasión de Obstáculos

4.3.1. Campos potenciales

El método de campos potenciales se basa en una analogía donde una partícula con carga positiva transita a través de un campo electromagnético, el punto objetivo de la trayectoria tiene una carga negativa, por lo tanto existe una fuerza de atracción entre la partícula y el punto final, dentro de este campo electromagnético existen obstáculos que tienen una carga positiva, dichos obstáculos pueden ser fijos o móviles, por lo que se genera una fuerza de repulsión entre el vehículo y el obstáculo.

Se asume que el cuadrirotor está en un punto inicial y se desea posicionar en un punto deseado. Se asume que el gradiente del campo potencia tiene componentes en x y y

$$\nabla \mathcal{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

El campo potencial que actúa sobre el cuadrirotor está compuesto por

$$\mathcal{U}(q) = \mathcal{U}_{at} + \mathcal{U}_{rep} \tag{4.5}$$

donde $\mathcal{U}_{at}$ y $\mathcal{U}_{rep}$ son los campos de atracción y repulsión respectivamente y $q = [x \quad y]^T$ representa la posición del cuadrirotor. Al obtener el gradiente negativo del campo potencial se obtienen las fuerzas que actúan en la partícula que se mueve a través del campo

$$F(q) = -\nabla \mathcal{U}(q) = -\nabla \mathcal{U}_{at} - \nabla \mathcal{U}_{rep} = F_{at} + F_{rep} \tag{4.6}$$

El campo y la fuerza de atraccción están descritos por las siguiente expresiones.

$$\mathcal{U}_{at} = \frac{1}{2}\xi\rho^k(q, q_m) \qquad \xi, k > 0 \tag{4.7}$$

donde $q_m = [x_d \;\; y_d]$ son la posición deseada, $\rho(q, q_m)$ es una función positiva con un mínimo global en $q = q_m$, en este caso en particular se propone que sea la norma del error de posición $||q - q_m||$.

$$F_{at} = \frac{1}{2}\xi\frac{q - q_m}{||q - q_m||} \tag{4.8}$$

El campo y la fuerza de repulsión son de la siguiente forma

$$U_{rep} = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta\left(\frac{1}{\rho(q,q_{obs})} - \frac{1}{\rho_o}\right)^2 & \text{si} \quad \rho(q, q_m) \leq \rho_o \\ 0 & \text{si} \quad \rho(q, q_m) > \rho_o \end{cases} \qquad \eta > 0 \tag{4.9}$$

donde q_{obs} es la posición del obstáculo y $\rho(q, q_{obs})$ es la distancia que existe entre el vehículo y el obstáculo, ρ_o es la distancia a partir de la cual el campo potencial comienza a ejercer alguna fuerza de repulsión y $\eta > 0$. La fuerza de repulsión está descrita por la siguiente expresión

$$F_{rep} = \begin{cases} \eta\left(\frac{1}{\rho(q,q_{obs})} - \frac{1}{\rho_o}\right)\left(\frac{1}{\rho^3(q,q_{obs})}\right)(\rho(q, q_{obs})) & \text{si} \quad \rho(q, q_{obs}) \leq \rho_o \\ 0 & \text{si} \quad \rho(q, q_{obs}) > \rho_o \end{cases} \tag{4.10}$$

Simulación

Note que en (4.8) el cociente el error normalizado por lo tanto dicha ecuación se puede ver como un control proporcional, debido a esto, se omite la fuerza de atracción y sólo se utiliza al fuerza de repulsión en los controles. Es importante tener en cuenta que el análisis de la evasión de obstáculos sólo se hace en el plano xy, consecuentemente sólo es necesario modificar los controles U_x y U_y.
En la sección del diseño del controlador para el cuadrirotor, los controles *Backstepping* y Sliding Modes que se desarrollaron son para el seguimiento de trayectorias, para incorporar el algoritmo de campos potenciales a dichos controladores basta adicionar el término de la fuerza de repulsión a los controles de x y y, para el caso del control de *Backstepping* los controles quedan de la siguiente manera

$$U_x = \frac{m}{U_1}[-\alpha_9(e_{10} + \alpha_9 e_9) + e_9 - \alpha_{10}e_{10}] + F_{rep_x} \tag{4.11a}$$

$$U_y = \frac{1}{U_1}[-\alpha_{11}(e_{12} + \alpha_{11}e_{11}) + e_{11} - \alpha_{12}e_{12}] + F_{rep_y} \tag{4.11b}$$

donde F_{rep_x} y F_{rep_y} son las componentes de la fuerza de repulsión en x y y respectivamente. Para el control en x y y utilizando el algoritmo de *Sliding Modes* las ecuaciones son:

$$U_x = \frac{m}{U_1}[-c_4 e_8 - \eta_5 \text{sign}(\sigma_5)] + F_{rep_x} \tag{4.12a}$$

$$U_y = \frac{m}{U_1}[-c_6 e_{12} - \eta_6 \text{sign}(\sigma_6)] + F_{rep_y} \tag{4.12b}$$

En la figura 4.2 se muestra una trayectoria en el plano xy en la que puede apreciar la trayectoria sin obstáculo y la que se general al introducir un obstáculo en la trayectoria.

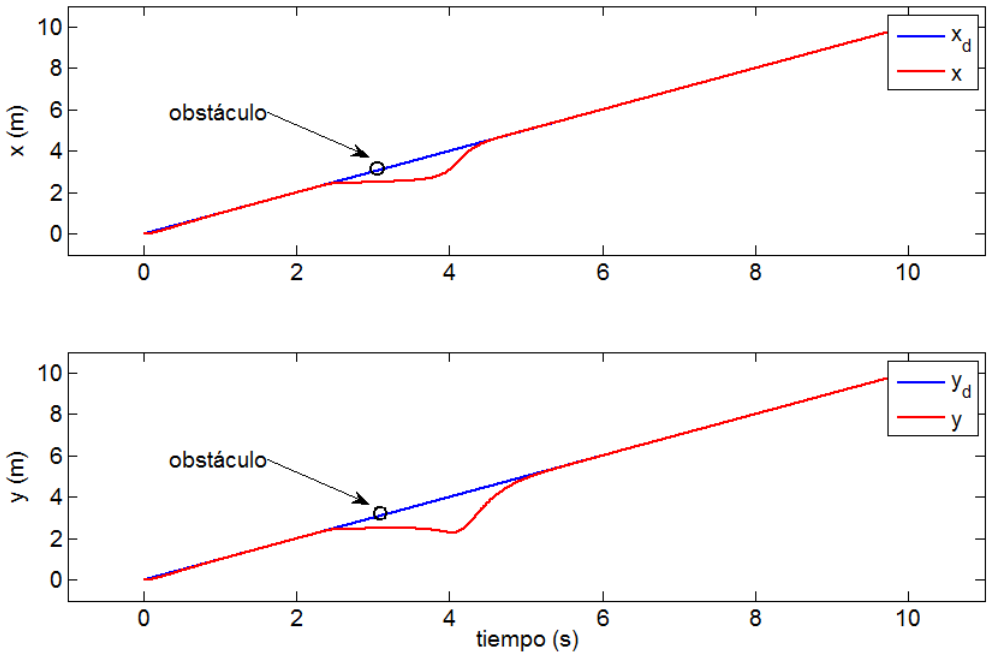


Figura 4.2: Trayectorias generadas con y sin obstáculo

Existe una desventaja en el método de campos potenciales, se mencionó al principio de este apartado que una manera de elegir el potencial de atracción es que debe tener un mínimo global en $q = q_m$, sin embargo, existen posibilidades de que existan mínimos locales lo que genera un estancamiento en la posición del cuadrirotor, tal como se puede ver en la Figura 4.4, para solucionar este problema es necesario buscar otra forma de establecer el campo potencial de repulsión.

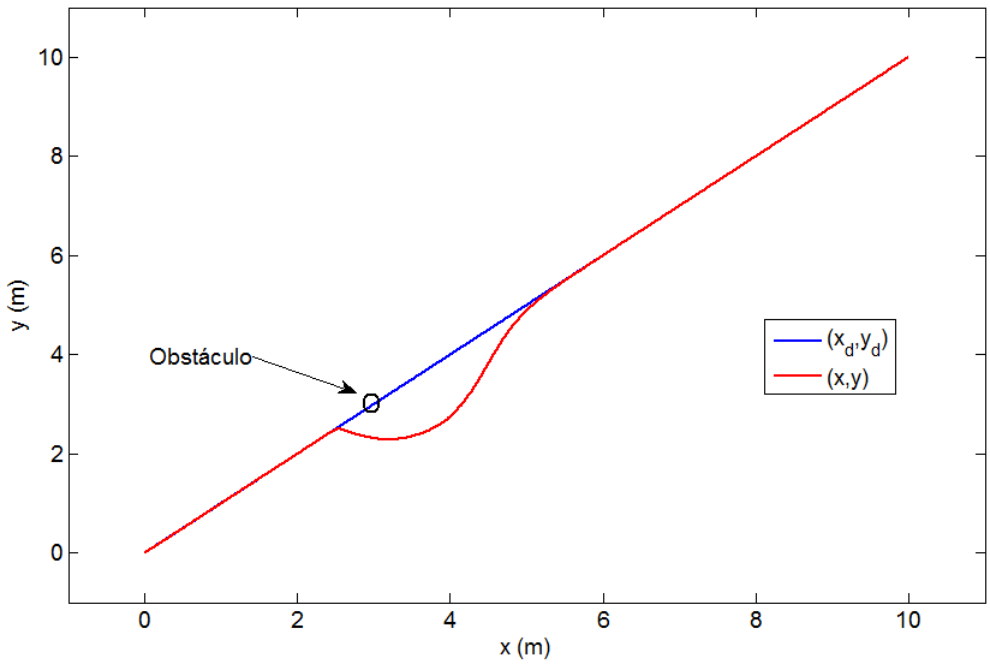


Figura 4.3: Trayectorias generadas con y sin obstáculo

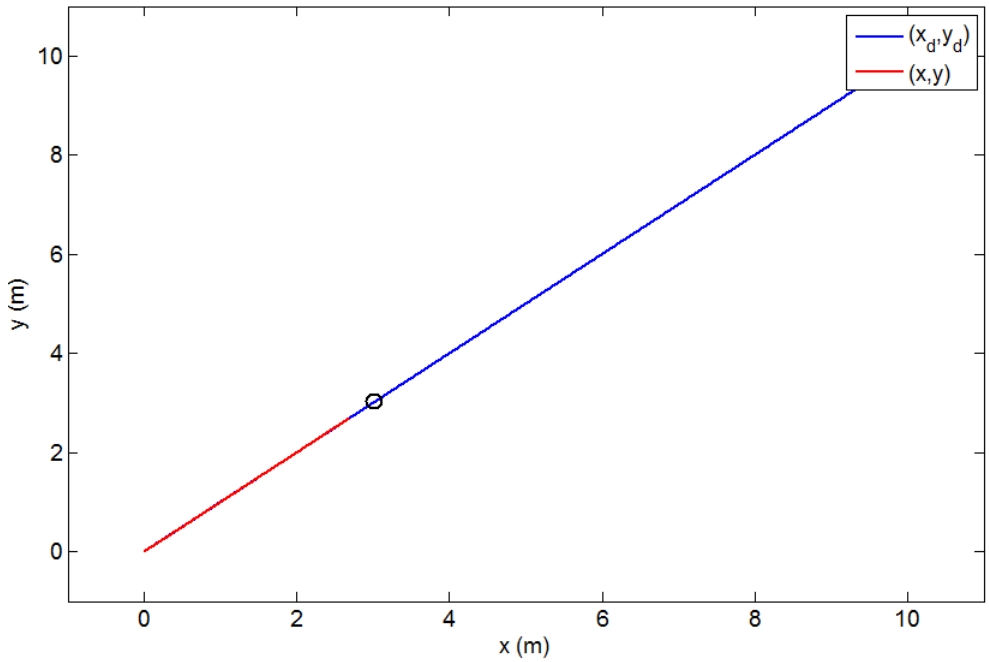


Figura 4.4: Trayectorias generadas con y sin obstáculo

Una solución que se propone utilizar para evitar el problema del mínimo local es generar un obstáculo virtual en la posición donde el cuadrirotor se encuentre en vuelo estacionario o esté oscilando alrededor de una vecindad cercana al mínimo local. Los

controles para la posición en el plano xy utilizando el control por Backstepping

$$U_x = \frac{m}{U_1}[-\alpha_9(e_{10} + \alpha_9 e_9) + e_9 - \alpha_{10} e_{10}] + F_{rep_x} + F_r ep_{x_v} \tag{4.13a}$$

$$U_y = \frac{1}{U_1}[-\alpha_{11}(e_{12} + \alpha_{11} e_{11}) + e_{11} - \alpha_{12} e_{12}] + F_{rep_y} + F_r ep_{y_v} \tag{4.13b}$$

Las ecuaciones para el control en posición utilizando Sliding Modes con el obstáculo virtual quedan definidas por

$$U_x = \frac{m}{U_1}[-c_4 e_8 - \eta_5 \text{sign}(\sigma_5)] + F_{rep_x} + F_{rep_{x_v}} \tag{4.14a}$$

$$U_y = \frac{m}{U_1}[-c_6 e_{12} - \eta_6 \text{sign}(\sigma_6)] + F_{rep_y} + F_{rep_{y_v}} \tag{4.14b}$$

4.4. Conclusión

En este capítulo se presentan los métodos que se utilizaron para la generación de trayectorias sin obstáculos para diferentes puntos, se estudiaron dos métodos, uno que une todos los puntos a través de líneas rectas, éste método es el más común dentro de los distintos programas computacionales que se utilizan para la estación en tierra y el segundo método a través de interpolación polinomial el cual une todos los puntos en una trayectoria continua y suave. Además se presenta el algoritmo de campos potenciales para la evasión de obstáculos, durante las simulaciones se observó que existe un problema en donde el vehículo realiza vuelo estacionario sin llegar a la posición deseada, este fenómeno se le conoce como mínimo local. Se propone una solución a través de la generación de un nuevo obstáculo virtual en donde se genera el mínimo local.

Capítulo 5

Desarrollo Experimental

5.1. Introducción

Este capítulo describe el enfoque propuesto para abarcar los objetivos de este trabajo de tesis y las herramientas empleadas en hardware y software. Al respecto del hardware, de describe totalmente el proyecto, sus componentes y arquitectura; en cuanto al software se describe la arquitectura de la aplicación que se utilizó.

En éste capítulo se menciona y se explican los experimentos que se hicieron con el cuadrirotor para la implementación de de los dos controladores no lineales que se desarrollaron en el capítulo 3, se hace una comparativa entre el desempeño de los controladores en la cual se pueden ver las ventajas y desventajas de cada controlador. También se explica el procedimiento que se utilizó para poder llevar a cabo los experimentos necesarios para la el seguimiento de una trayectoria recta y la evasión de obstáculos.

5.2. Descripción de la plataforma

La plataforma que se utilizó es un cuadrirotor inalámbrico presentado por la parca parrot, creado inicialmente par ser controlado mediante smartphone y disponible para sistemas operativos Android.El Ar. Drone 2.0 pesa 436 gramos y 51.5×51.5 con una carcasa protectora para vuelos en interiores como se muestra en la Figura 5.1.

5.2.1. Hardware

Estructura Mecánica

Tiene un esqueleto simétrico formado por tubos de fibra de carbono, la carcasa para vuelos en interior cuenta con piezas de plástico y espuma para aislar el centro de inercia de las vibraciones de los motores, los cascos son de polipropileno y tiene un revestimiento repelente a los líquidos en los sensores ultrasónicos y todas sus piezas pueden ser reemplazadas. Las característicamente del controlador de los motores entre otras especificaciones se pueden ver en la siguiente tabla

Figura 5.1: AR.Drone 2.0

4 motores de rotor interno de 14.5 W de potencia y 28.5W suspendido en el aire
Rodamientos de bolas en miniatura
Engranajes de bajo ruido
Eje de Hélices de acero templado
Alta fuerza de propulsión en las hélices debido al ángulo de ataque
Microcontrolador AVR de 8mips para control de motores
Batería recargable de 1200mAh
Controlador del motor re programable

Características Electrónicas

Como se menciona en [Bisteau (artículo del parrot)] el AR.Drone is un ejemplo sofisticado de el uso de sensores de bajo costo basado en tecnología MEMS. Por su bajo costo el AR.Drone tiene buenas características en lo que hardware respecta y esto facilita la implementación de las leyes de control. Los sensores que se usan son

I Un acelerómetro de tres ejes el cual se usa para medir las aceleraciones laterales.

II Dos giroscopios se usan para medir las aceleraciones angulares y un giroscopio se usa para medir la velocidad angular en *yaw* y es de mejor calidad para minimizar el efecto de deriva.

III Dos sensores ultrasónicos que se usan para medir la altura hasta 6 metros

IV Una cámara inferior para estimar la velocidad usando algoritmos de flujo óptico

Para el procesamiento de las señales provenientes de los sensores se utiliza un PIC a 40 HHz que se comunica con un microprocesador ARM9 cuya frecuencia de trabajo es de 460 HHz, el cual tiene Linux como sistema operativo y se encarga de las comunicaciones Wi-Fi, muestreo en las tomas de video, adquisición y adecuación de las señales de los sensores, toda esta información está disponible en tiempo real a través de la comunicación Wi-Fi.

5.2.2. Software

Generalmente el AR.Drone tiene instalado Linux que está ligado a ROS (Robot Operating System), sin embargo, en la Universidad Tecnológica de Compiègne (UTC) se modificó el software que viene instalado y con ello la configuración, adquisición y procesamiento de las señales. El firmware que se utiliza fue desarrollado en la UTC cuenta con la posibilidad de poder acceder a todas las variables y estados del sistema y así poder programar distintas leyes de control, en el firmware comercial no se tiene acceso al control de la orientación.

El firmware de la UTC corre en sistema operativo Linux, la distribución que se utilizo fue *LinuxMint*, la programación de la tarjeta embebida en el cuadrirotor se hace a través de compilación cruzada utilizando el software *CodeBlocks* y la comunicación con la computadora es a través de Wi-Fi. También se utiliza la computadora como estación en tierra y en ella se pueden visualizar en tiempo real todas las variables una interfaz que se adapta a las necesidades del usuario, además cuenta también con simuladores de vuelo para verificar que la ley de control programada tenga más probabilidades de funcionar al momento de ser implementada en el cuadrirotor, Figura **??**, en esta interfaz también se pueden cambiar las ganancias de los controladores programados incluso cuando el cuadrirotor está en vuelo. Para las pruebas el cuadrirotor fue controlado a través de un Joystick. El diagrama general de comunicación se puede observar en la Figura 5.2

Para el control de posición se utilizó un sistema de cámaras infrarrojas (Optitrack) con las cuales se estima la posición y velocidad del cuadrirotor sin necesidad de hacer uso de los sensores inerciales que tiene el cuadrirotor, el Optitrack se utilizó para estimar la posición del cuadrirotor en los ejes x, y y z, y la orientación en *yaw*.

5.2.3. Optitrack

Se emplea un sistema de captura de movimiento de la marca Optitrack, compuesto de doce cámaras infrarrojas, modelo V100:R2 la cual se muestra en la Fig 5.3. El Optitrack además de las cámaras infrarrojas, cuenta con un software *TrackingTools* el cual permite la el seguimiento de cuerpos rígidos de seis grados de libertad. Tres a siete marcadores especiales que reflejan la luz infrarroja emitida desde las mismas cámaras son utilizados para definir cada cuerpo rígido a ser seguido. La información obtenida por las doce cámaras es enviada a una computadora mediante el puerto USB

Figura 5.2: Diagrama de Comunicación

al ordenador central, el cual debe de tener instalado el software especial *TrackingTools* que se encarga de filtrar y procesar las imágenes capturadas y hacer seguimiento de hasta treinta y dos objetos definidos previamente mediante los marcadores, generando la posición y orientación de los mismos con una precisión milimétrica. La posición y orientación de cada objeto definido es transmitida a la red por un servidor utilizando un protocolo VRPN (Virtual Reality Peripheral Network) a una velocidad de 100 Hz, el diagrama general de funcionamiento se puede observar en la Figura 5.4

Figura 5.3: Cámara infrarroja

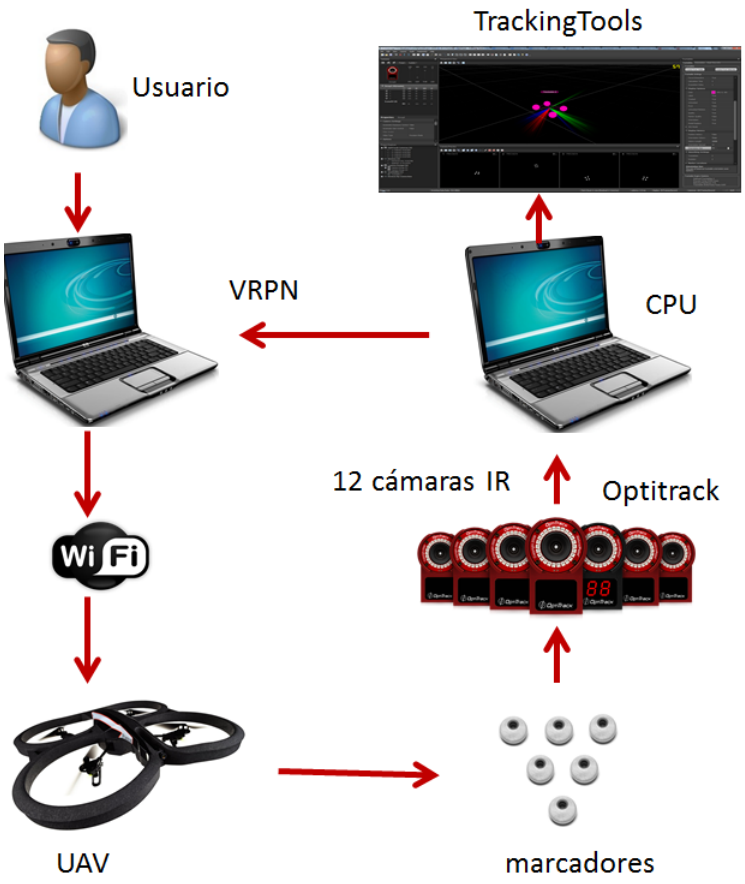


Figura 5.4: Diagrama de Optitrack

5.3. Adecuación de las señales

Debido a las modificaciones que se hicieron en la UTC, las señales d la central inercial del cuadrirotor se obtiene sin ningún tratamiento, en algunos casos sólo se tiene un filtro pasa-bajas, al momento de hacer las pruebas con el controlador Sliding Modes las oscilaciones eran demasiadas, se optó por hacer un análisis en las señales y se notó que eran muy ruidosas. Entonces las mediciones de los estados se ven afectadas no sólo por el *chattering* sino también por la etapa de acondicionamiento de la señal. En la Figura 5.5 se puede observar la señal de referencia y la salida del filtro pasa-bajas, note que la señal en general es muy ruidosa y este factor afecta el comportamiento del controlador y su desempeño.

Debido al problema antes mencionado se implementó el Filtro de Kalman para mejorar la calidad de la señal. En el Apéndice se explica de manera breve el algoritmo del filtro de Kalman que se utilizó para mejorar la calidad de las señales, en la Figura **??** se puede observar una señal antes y después de la implementación del filtro de Kalman, la cual se puede observar que mejoró notoriamente y al mismo tiempo repercute en un mejor comportamiento del controlador, también se puede apreciar la referencia de la velocidad angular en yaw. El filtro de Kalman se aplicó a las medidas de las otras dos

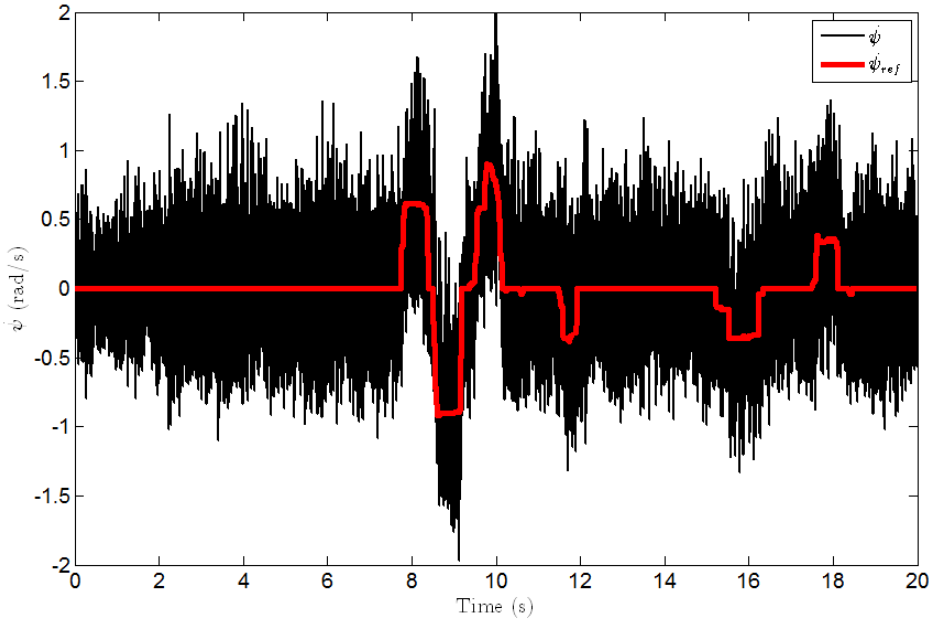


Figura 5.5: Velocidad angular en yaw con filtro pasa-baja y referencia

velocidades angulares.

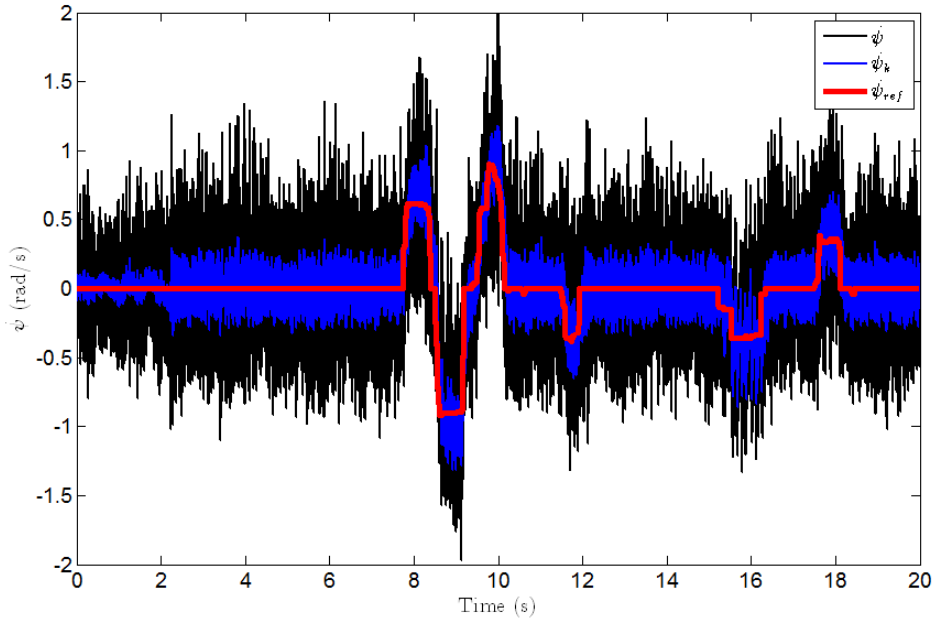


Figura 5.6: Comparativa de señales de velocidad angular

5.4. Implementación del controlador Sliding Modes

5.4.1. Orientación

Para la validación experimental de los controladores se procedió a comenzar a hacer pruebas con el cuadrirotor e ir implementando los controladores, comenzando con la orientación. El cuadrirotor al comenzar a funcionar tiene de manera predeterminada un control Proporcional Derivativo (PD) en la orientación y en la altura, en posición x, y no tiene ninguna ley de control. Primero se implementó el controlador Sliding Mode en *yaw* y se sintonizó de tal manera que el cuadrirotor era capaz de seguir la referencia deseada, los demás ángulos seguían con el control PD, después se prosiguió con la implementación del controlador en *pitch*, en éstas dos ángulos controlados por Sliding Modes no se utilizó la función sigmoide, en la Figura 5.7 se puede visualizar visualizar la salida del sistema cuando se quería estabilizar en cero, es decir las referencias para ambos subsistemas es cero, note que las oscilaciones están en un rango de $\pm 5°$ lo cual, por la naturaleza subactuada del cuadrirotor hace que no sólo esté oscilando en el ángulo de *pitch* sino que también tenga movimientos irregulares en x y y. En la Figura 5.8 se puede observar la señal de control, en la Figura 5.9 se hace un acercamiento a las señal de control para poder apreciar de mejor manera el efecto que genera la función sign en la señal de control.

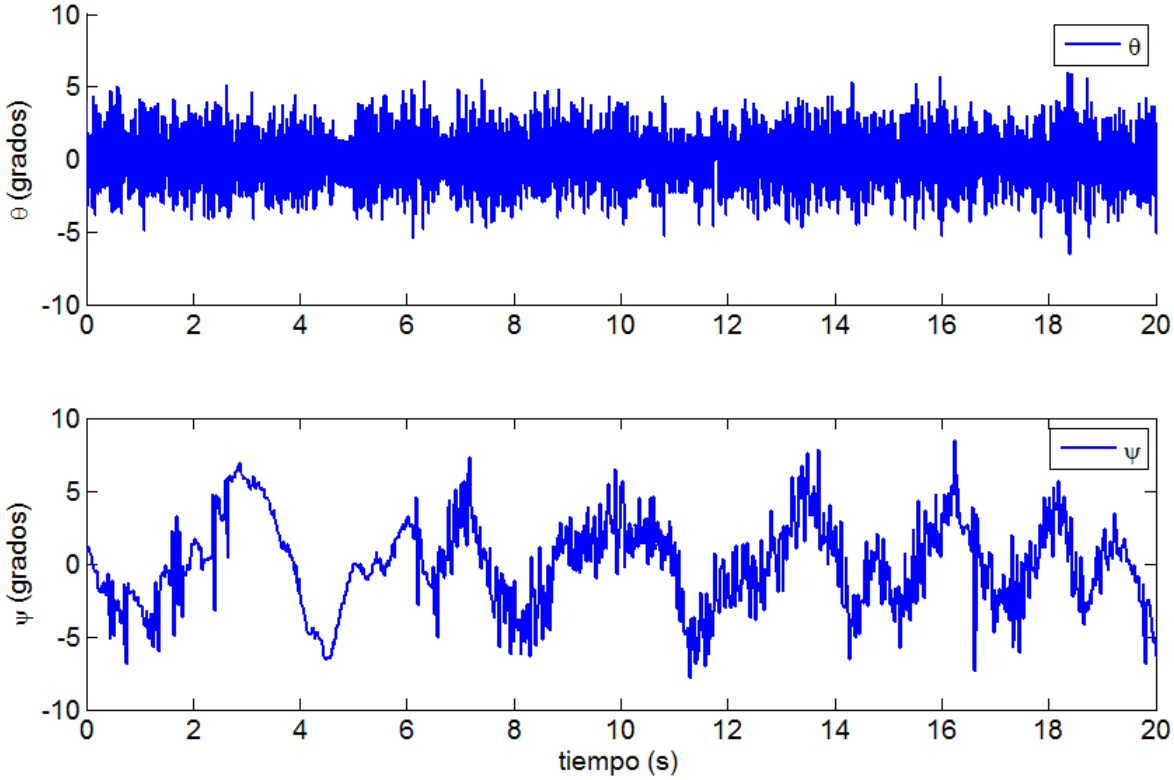


Figura 5.7: Salida del cuadrirotor para los ángulos de pitch y yaw utilizando la función sign

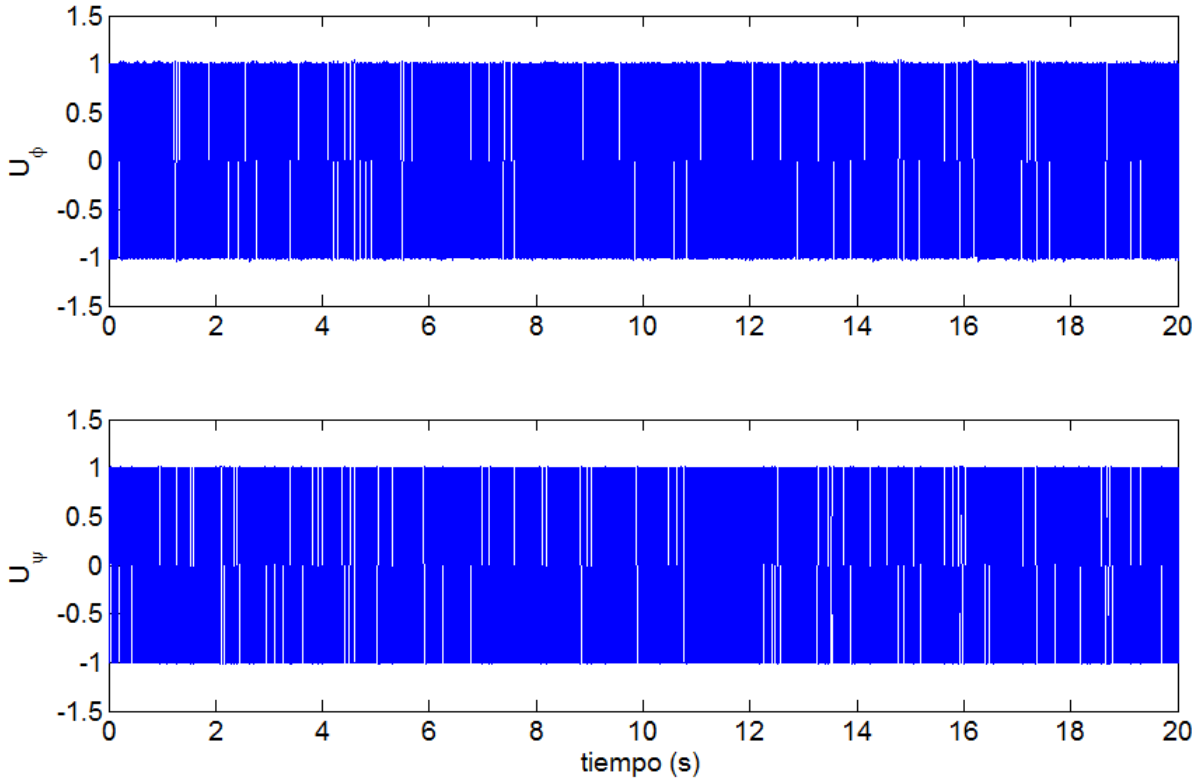


Figura 5.8: Señales de control para los ángulos de pitch y yaw utilizando la función sign

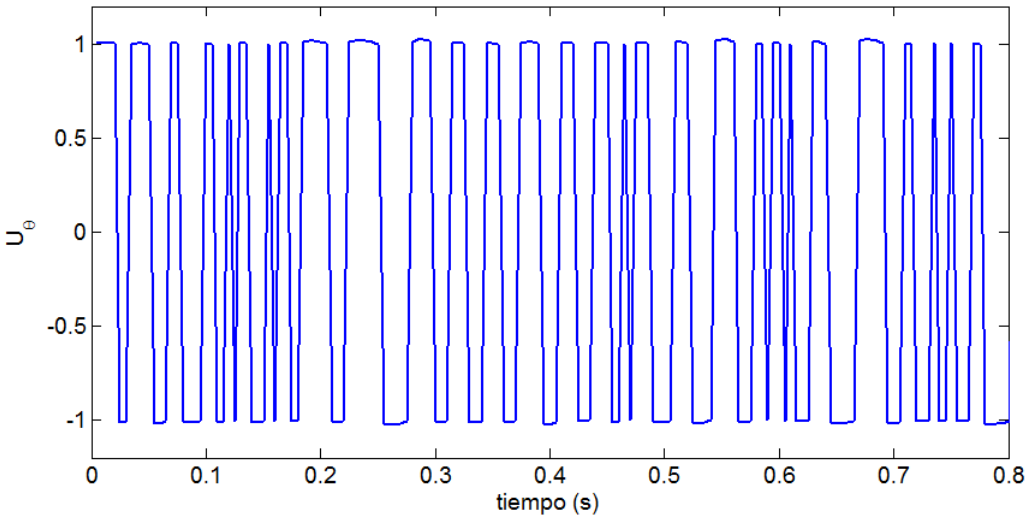


Figura 5.9: Acercamiento de la señal de Control en pitch

Debido a los problemas de oscilaciones antes mencionados se optó por utilizar la aproximación *sigmoide* el procedimiento de implementación es el mismo que se utilizó anteriormente, se implementa en yaw, se sintoniza el controlador, después en pitch y al último en roll. En la Figura 5.10 se puede visualizar la salida del sistema cuando

se quiso estabilizar el cuadrirotor en el punto de equilibrio

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

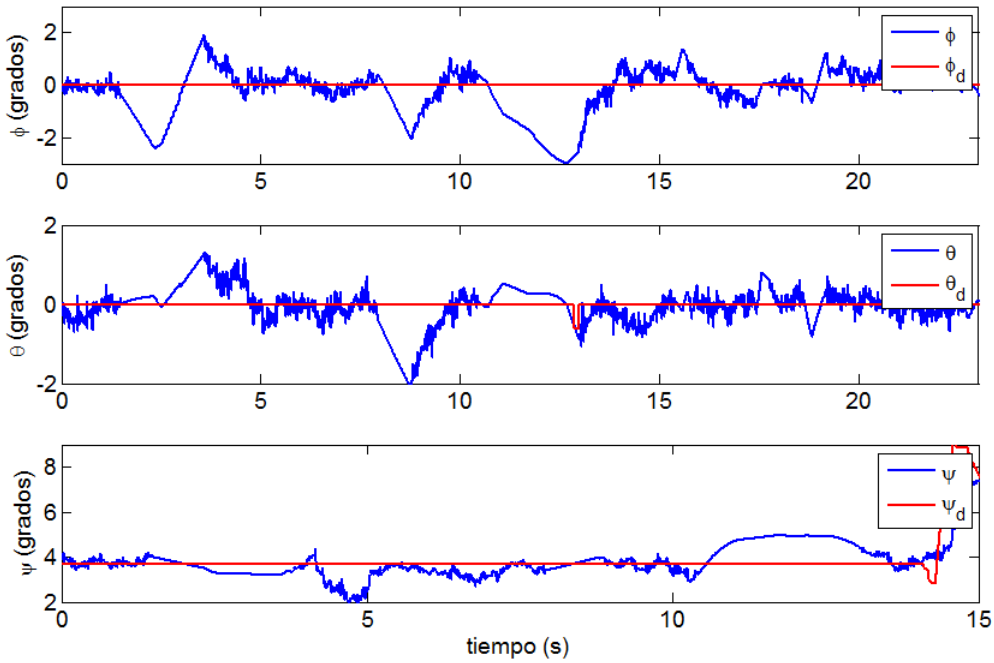


Figura 5.10: Respuesta de los subsistemas de orientación utilizando la función sigmoide para la estabilización en el punto de equilibrio

Se puede observar que el sistema sigue teniendo un comportamiento con oscilaciones debido al *chattering*, sin embargo, éstas han disminuido y no son mayores a $\pm 2°$ y es posible implementar el controlador en los diferentes ángulos disminuyendo las posibilidades de que el vehículo pierda altura o colisione. En la Figura 5.11 se pueden visualizar las señales de control para los diferentes ángulos de orientación, se pueden ver dos señales por cada ángulo, una corresponde a la señal de control si se utilizara la función sign y la otra señal está relacionada con la señal de control utilizando la aproximación sigmoide.

Cuando se logró la estabilización del cuadrirotor, se prosiguió con pruebas para verificar la capacidad que tienen el cuadrirotor con el controlador propuesto para poder seguir referencias, en la Figura 5.12 se muestran las salidas de cada subsistema asociado a los ángulos de navegación, además también se pude observar la señal de referencia, ésta es obtenida a través del joystick de manera manual. Note que a pesar del comportamiento oscilatorio que tiene el cuadrirotor es capaz de seguir la referencia aunque en algunos puntos existen sobretiros. Debido a las oscilaciones y los sobretiros, el cuadrirotor puede seguir referencias con cambios bruscos pero existen muchas probabilidades

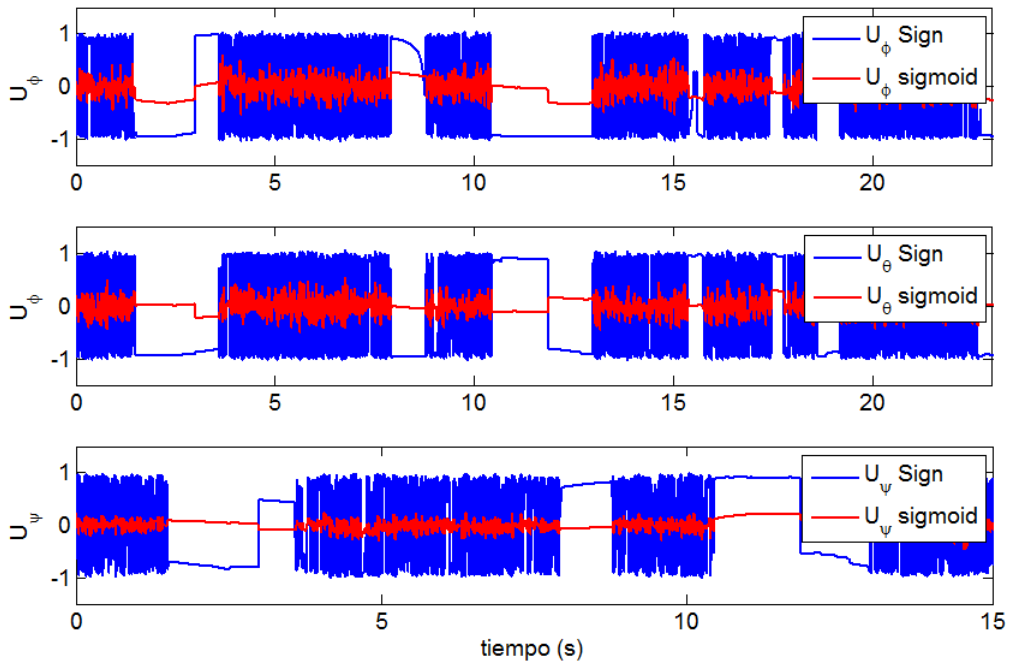


Figura 5.11: Señal de control utilizando la función sign y sigmoide, para el control de orientación

de que el cuadrirotor se desestabilice y caiga al suelo, sin embargo, el cuadrirotor es capaz de poder seguir referencias suaves.

Debido a las constantes oscilaciones en el sistema, se decidió no implementar el algoritmo de Sliding Modes al control de posición ya que debido a la forma en que se calculan los ángulos de referencia en (3.22a) y (3.22b) no se puede garantizar que la referencias sen suaves y continuas.

5.5. Implementación del control Backstepping

5.5.1. Orientación

Para la implementación del control Backstepping se utilizó la misma metodología que se usó para Sliding Modes, se comenzó por el control en *yaw* y después se prosiguió con los ángulos de navegación restantes. En la Figura 5.13 se muestra el comportamiento de todos los ángulos de referencia cuando se estabiliza en el punto de equilibrio, a comparación del control por Sliding Modes se puede observar que las oscilaciones han disminuido de manera considerable.

En la Figura 5.14 se pueden observar las pruebas que se hicieron en seguimiento, se puede observar que el aunque la referencia sea brusca el cuadrirotor trata de seguir esos cambios sin presentar muchas oscilaciones ni sobretiros, con referencias. Debido a la capacidad de poder seguir referencias con cambios abruptos se decidió seguir con éste controlador para la implementación del control en posición.

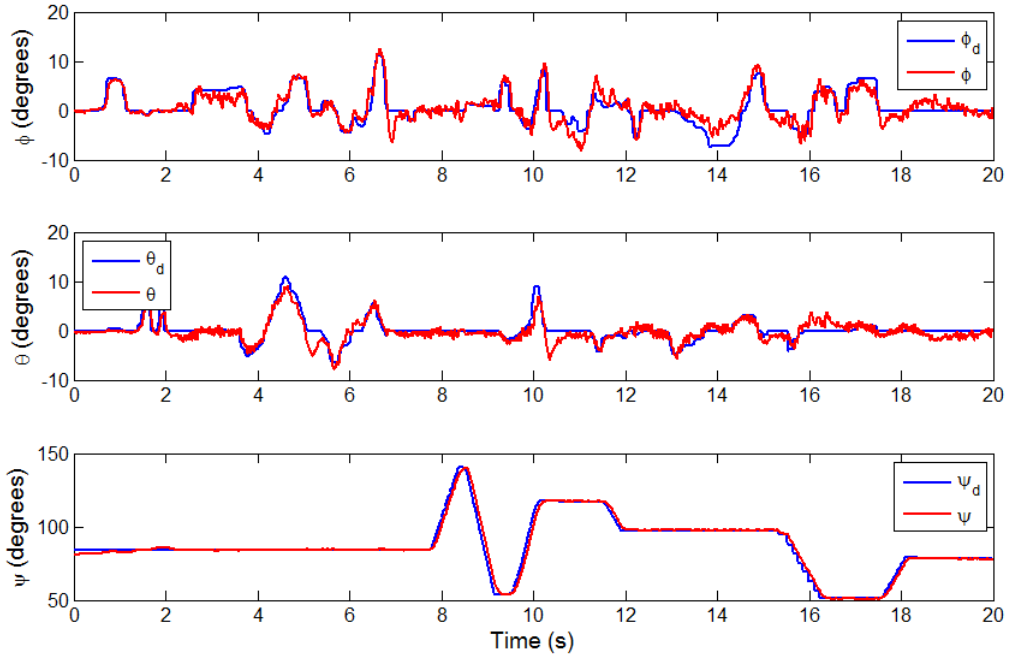


Figura 5.12: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control sliding modes

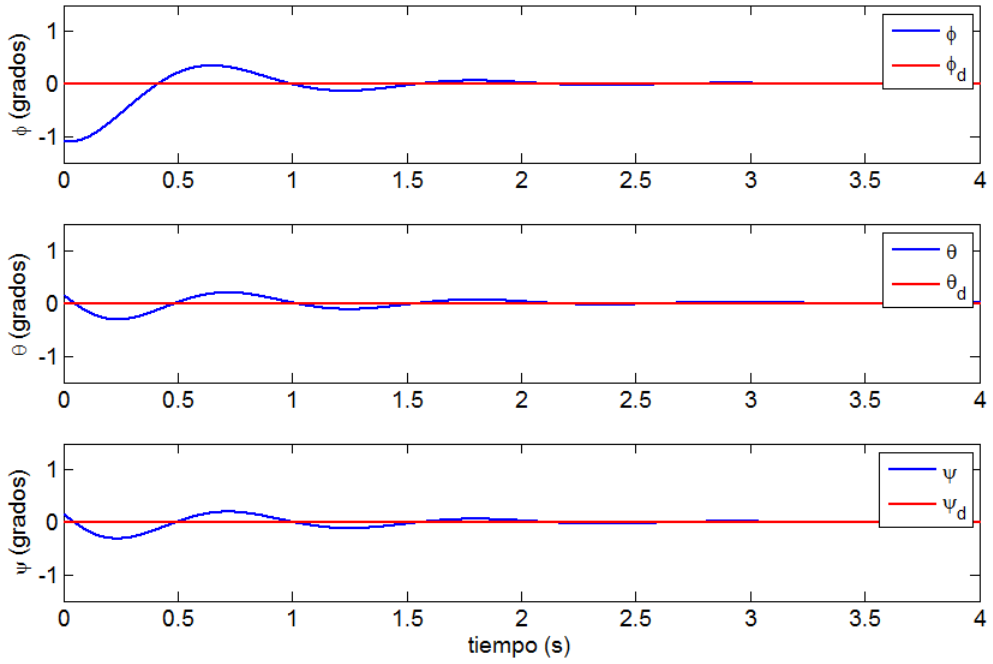


Figura 5.13: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

5.5.2. Posición

En los cuadrirotores comerciales cuando se hace el control de posición la rutina que sigue el vehículo es orientar el frente del cuadrirotor en al punto de referencia y des-

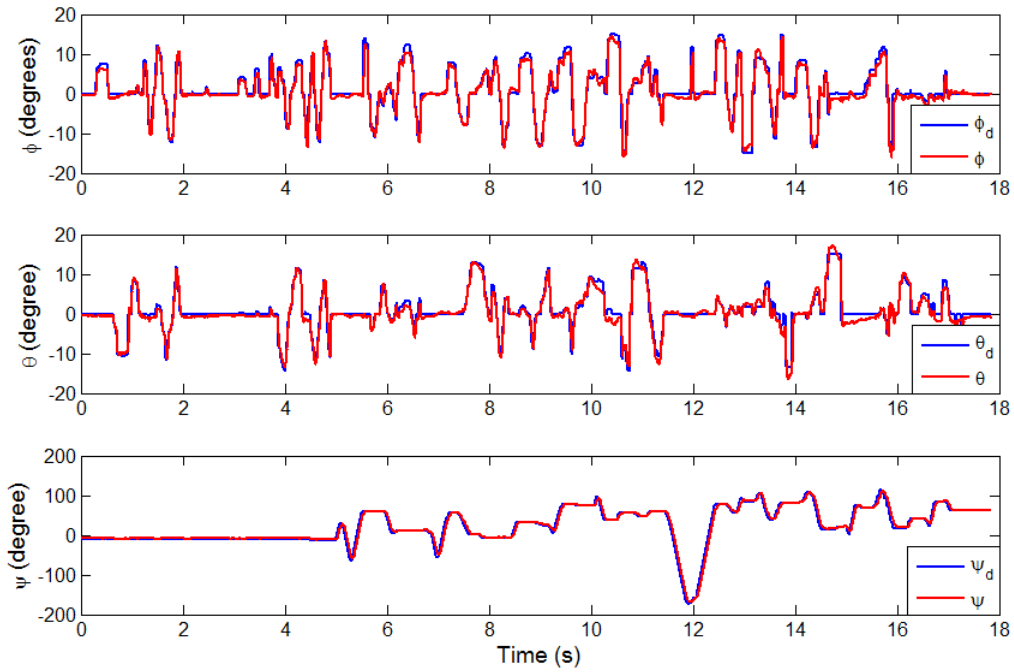


Figura 5.14: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

pués sólo avanzar hacia el frente modificando el ángulo de *roll*, en ésta tesis se propone mantener el ángulo de *yaw* en un ángulo deseado que en éste caso se propone $\psi = 0$ y solamente a través de los movimientos en *roll y pitch* llegar al punto deseado manteniendo el ángulo de *yaw* fijo, de esta manera se evita las posibles discontinuidades que se pueden generar por los sensores y algoritmos numéricos para la estimación de las posiciones angulares.

Debido a la forma en que se calculan los ángulos deseados en (3.22a) y (3.22b), es necesario tener en cuenta que la función arcsin(•) tiene un dominio en $[-1, 1]$ y codominio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, es decir que los ángulos deseados sólo pueden variar entre $\pm 90°$, sin embargo, esta cota es muy grande ya que si el cuadrirotor tiene en *roll* o *pitch* un ángulo de esa magnitud, la componente vertical de la fuerza de sustentación se ve disminuida y el vehículo caería, es por eso que se decide poner una saturación para cada argumento de la función arcsin y así evitar este fenómeno.

Para el control en posición se prosiguió a estabilizar el cuadrirotor en una posición deseada, en este caso caso se escogió la el punto

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para hacer este experimento se comienza volando el cuadrirotor con el control PD y después se lleva de forma manual a cualquier punto aleatorio y después a través de una consigna del joystick actúa el control de posición y con él también el de orienta-

ción. En la Figura 5.15 se puede observar la evolución del control de posición una vez que el PD deja de funcionar y el cuadrirotor se controla con el algoritmo de Backstepping. En la Figura 5.16 se puede observar la evolución de los estados a través del tiempo.

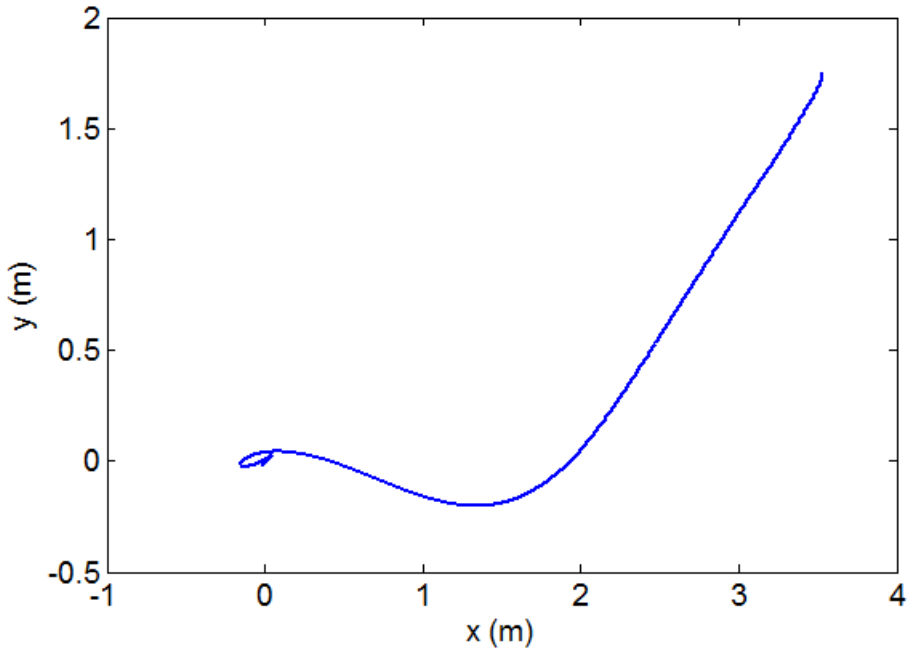


Figura 5.15: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

En la Figura 5.17 se puede apreciar la evolución de los ángulos en el tiempo, note la relación que existe en la evolución y de los ángulos y la posición en x y y, observe que en los máximos y mínimos de los sobretiros en posición existe un cambio de signo en la orientación, esto es debido a la naturaleza subactuada en la que que para que el cuadrirotor pueda moverse en el plano x, y es necesario hacer cambio en los ángulos (pitch y roll). Note también que el control en *yaw* está diseñado para mantener estabilizado el ángulo en cero, tal como se había mencionado previamente.

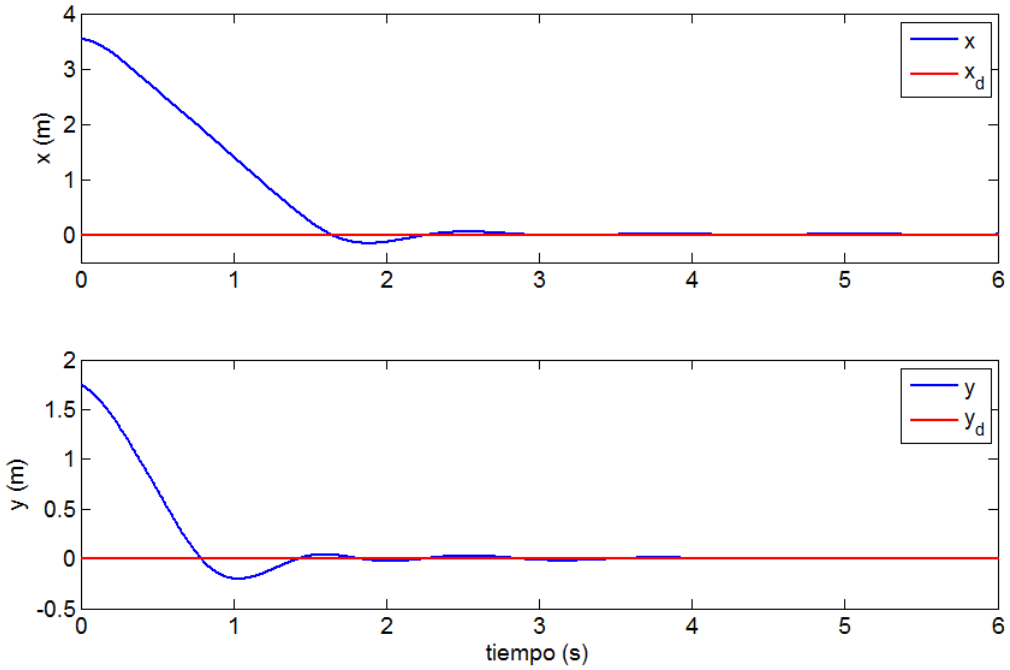


Figura 5.16: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

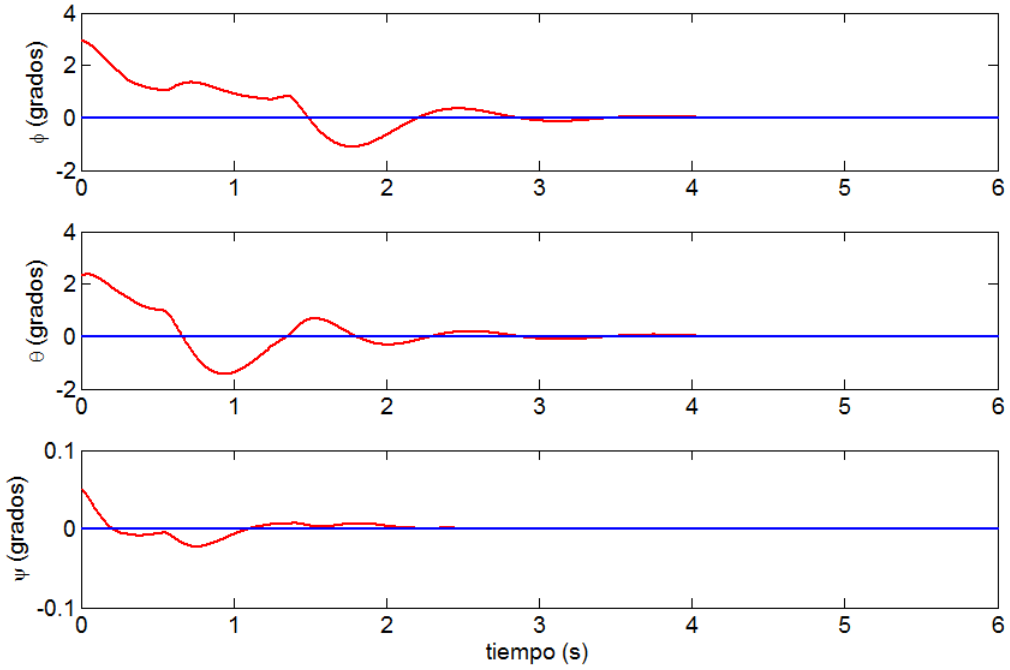


Figura 5.17: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

Una vez que se hicieron las pruebas correspondientes a la estabilización en un punto, el siguiente paso fue hacer pruebas haciendo seguimiento, en las figuras 5.18 y 5.19

se pueden observar la trayectoria de referencia y el comportamiento del cuadrirotor, de manera general el vehículo es capaz de seguir la referencia, sin embargo, existen sobretiros al llegar al momento de hacer el cambio de dirección.

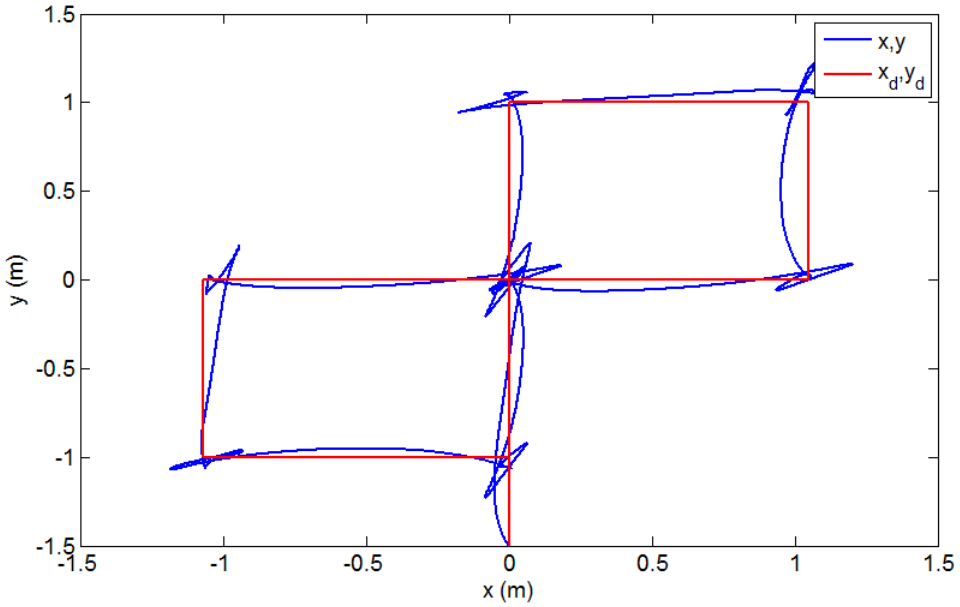


Figura 5.18: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

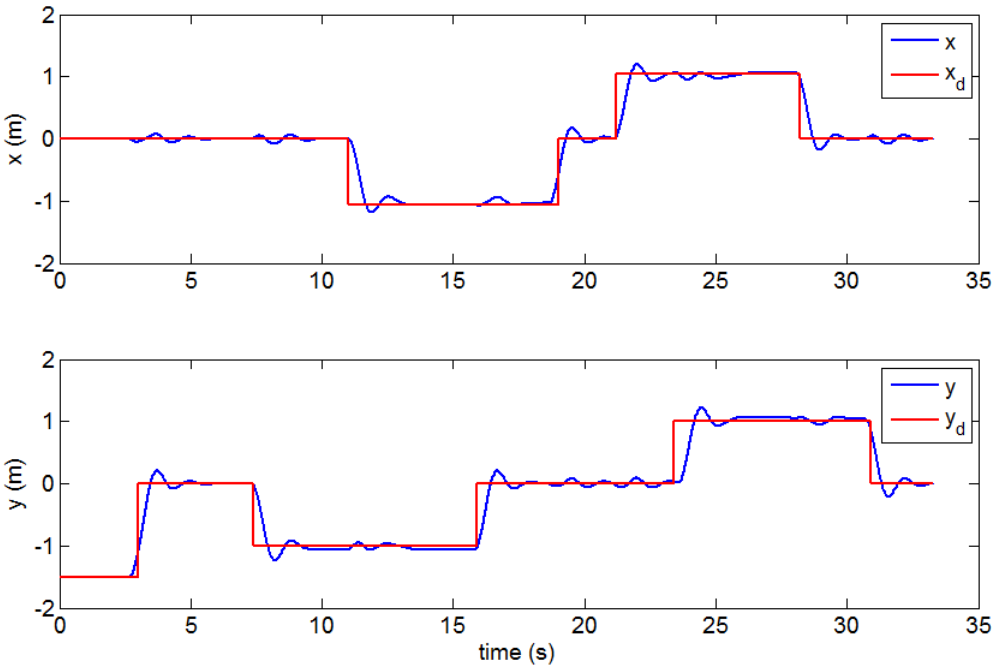


Figura 5.19: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

5.6. Evasión de Obstáculos

Después de haber hecho suficientes pruebas del control de posición y poder seguir trayectorias, se comenzaron la pruebas para la evasión de obstáculos utilizando el método de campos potenciales que se mencionó en el capítulo 4, es importante mencionar que tanto el control de posición como la evasión de obstáculos se implementaron sólo en el plano xy, mientras z mantenía un valor constante.

En la Figura 5.20 se puede observar el control de posición con la evasión de obstáculos implementada en el plano xy, como se mencionó en el capítulo 4 en esta metodología es necesaria conocer la ubicación del obstáculo aunque no las dimensiones, ya que éstas están de forma indirecta en las variables que se utilizan para cálculo de la fuerza potencial.

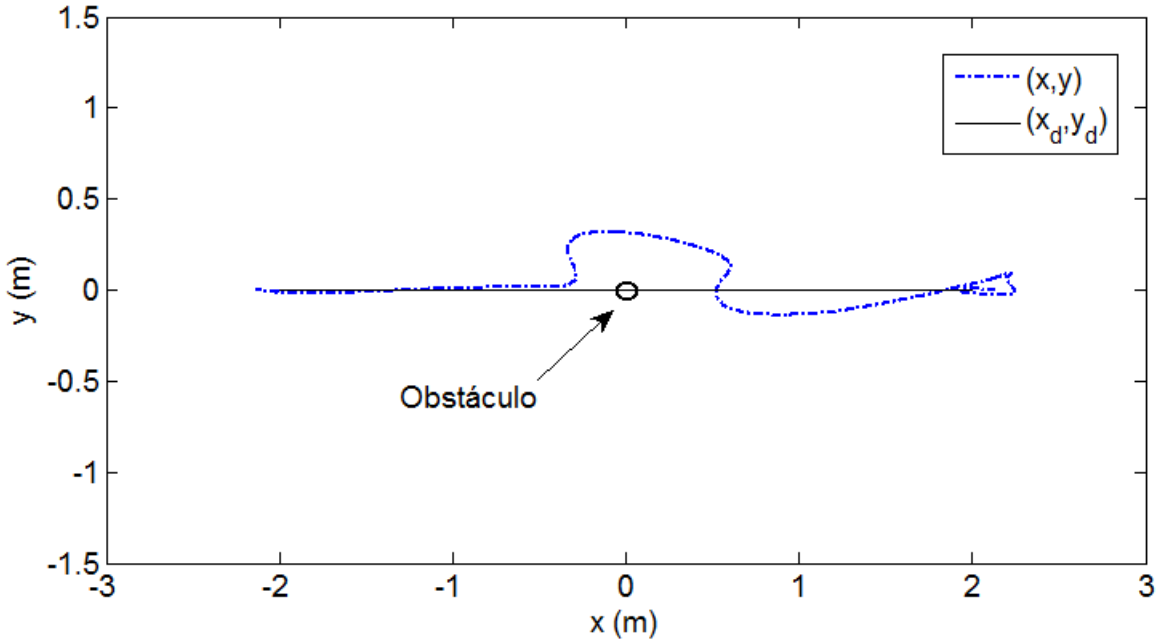


Figura 5.20: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

Durante la implementación se pudo observar también el fenómeno del mínimo local, en donde los controles U_x y U_y se igualan con la fuerza potencial que ejerce el obstáculo y se éste genera que el cuadrirotor se quede en vuelo estacionario o que esté oscilando en una vecindad cercana al obstáculo, en la Figura 5.22 se puede observar este fenómeno.

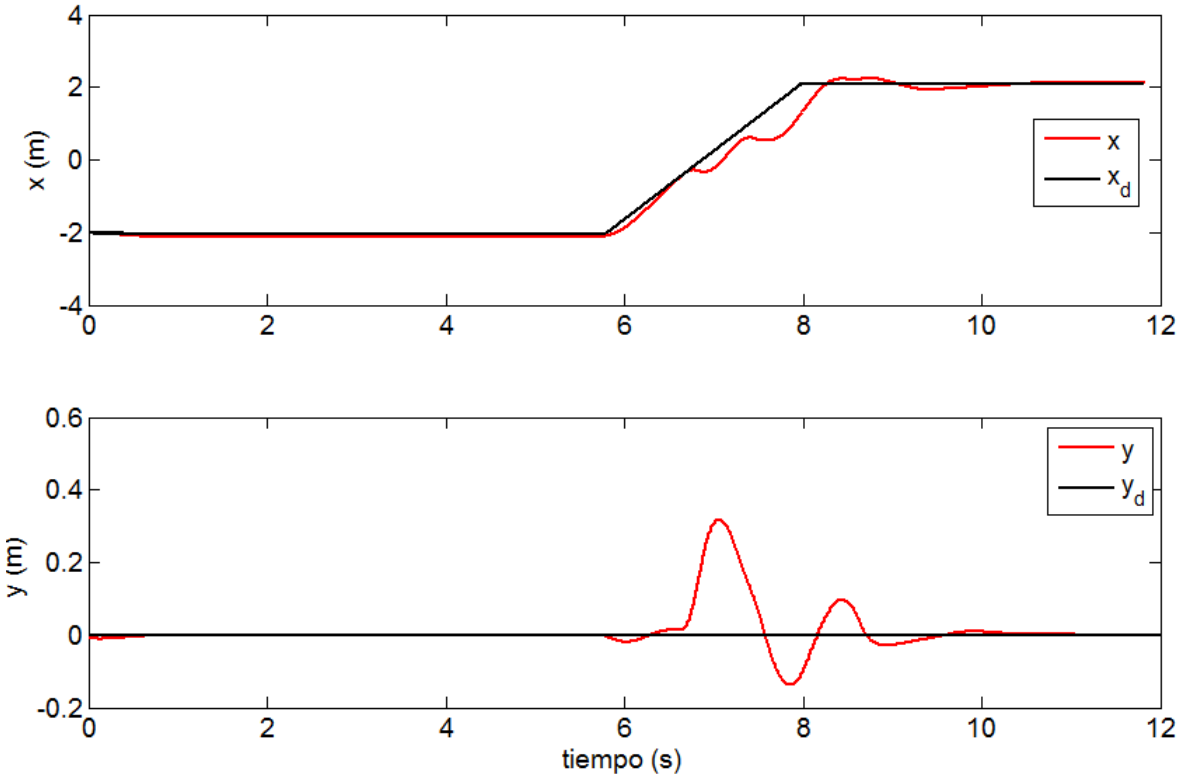


Figura 5.21: Trayectorias deseadas en x y y respecto al tiempo

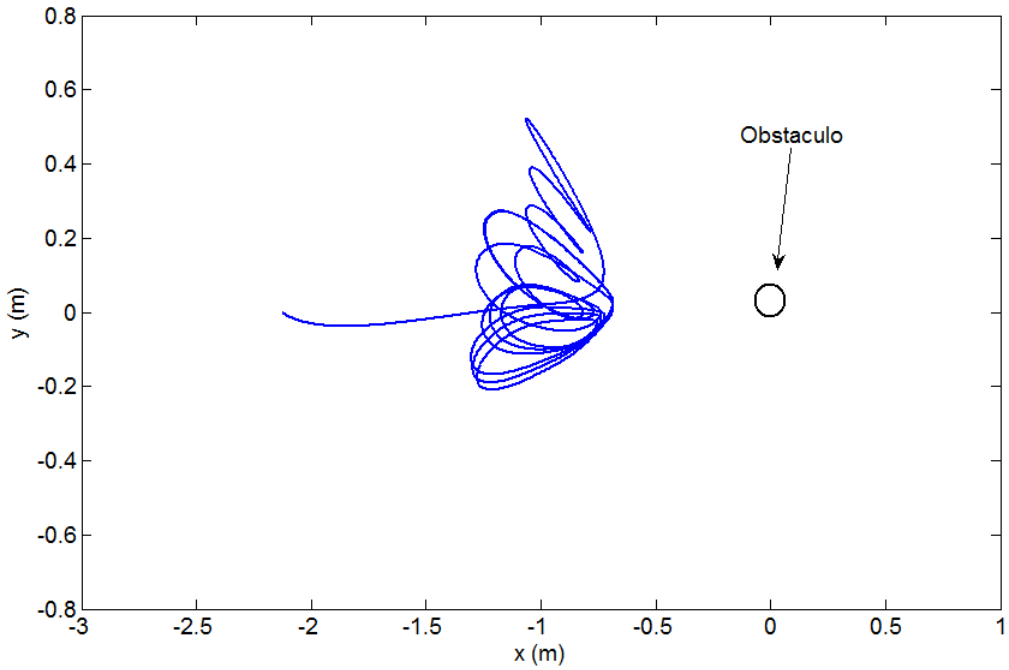


Figura 5.22: Referencias y salidas de los subsistemas de orientación con el control Backstepping

5.7. Conclusión

En este capítulo se muestran los resultados y validación experimental de los controladores propuestos en el capítulo 3, se pudo verificar que aunque en capítulo 3 el control por Sliding Modes es robusto y tiene mayores ventajas si se compara con otros controladores no lineales, tiene una gran desventaja, el *chattering*. Debido a las oscilaciones del sistema con éste controlador se decidió no seguir con los experimentos de posición y evasión de obstáculos.

También se muestra que aunque teóricamente el control por Backstepping tiene desventajas ante el de Sliding Modes, en la práctica mostró lo contrario debido a su naturaleza continua. A consecuencia del buen desempeño todos experimentos que se realizaron fueron con éste controlador.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

6.1. Conclusiones

En el presente trabajo se estudian los

En el presente trabajo se estudian los sistemas periódicos con retardos múltiples en el marco de trabajo de funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo. Las principales aportaciones de esta tesis son:

- Prueba de nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov para sistemas periódicos con retardo.
- Desarrollo de una nueva herramienta para el análisis de estabilidad de sistemas periódicos con retardos, mediante la obtención de condiciones necesarias de estabilidad exponencial, cuya característica principal es que depende únicamente de la matriz de Lyapunov. Además, las condiciones obtenidas no requieren, a diferencia de otros métodos, de una transformación del sistema original.
- Propuesta de un esquema numérico para la construcción de la función de Lyapunov para el caso particular en que el sistema periódico es de tipo escalar, y el periodo del sistema es igual al retardo del mismo.

6.2. Perspectivas

El trabajo realizado muestra el potencial del enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Algunas direcciones de investigación prometedoras son:

- Aplicar los resultados de este enfoque al análisis y control de procesos modelados por ecuaciones diferenciales funcionales retardadas periódicas, como máquinas herramientas.
- Extender las condiciones necesarias a condiciones necesarias y suficientes.
- Proponer un esquema numérico que permita la construcción de la matriz de Lyapunov para el caso multidimensional con múltiple retardo, así como también para el caso en que el periodo es diferente al retardo.

Bibliografía

[1] A. Benallegue, T. Mandani, Çontrol of a quadrotor mini-helicopter via fll state backstepping technique". *Proceedings of the 15th conferecne on Decision and control*, 2006.

[2] A. Benallegue, T. Mandani, "Backstepping control for a quadrotor helicopter". *Proceedings of the 2006 IEE/RSJ International Conference on Itelligent Robots and Systems*, 2006.

[3] S. Bouabdallah and R. Sierwart. "Backstepping and sliding-mode techniques controller formiature VTOL UAVs: Design and stability analysis using singular perturbation theory", *In Proc. IEEE International Conference on Intelligent robot and Automation*, 2005.

[4] S. Bouabdallah "Design and control of quadrotor with application to autonomous flying". *PhD thesis, Ècole Polytechnique Fèderale de Lausanne*, 2007.

[5] P. Castillo, A. Dzul y R. Loazno. Real-Time stabilization and tracking of a four-rotor minirotorcraft", *IEEE Transactions on Control System Technology*, 2004.

[6] R. F. Diaz and N.K. MóSirdi. L. Mederreg. "Nonlinear backstepping control with observer desgin for a 4 rotor helicopter"*In Proc. of IFAC Internatioal Conference on Advances in Vehicle Control and Safety*, 2004/

[7] B. Erginer y E. Altug, "Modeling and PD Control of a Quadrotor VTOL Vehicle". *In Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, 2007.

[8] J. A. Guerrero y R. Lozano. "Flight Formation of multiple Mini Rotorcraft based on Nested Saturations".*In IEEE/RSJ International Conference on Itellgent robots and Systems*, 2011.

[9] J. A. Guerrero, P. Castillo, S. Salazar and R. Lozano. "Mini rotorcraft flight formation, control using bounded inputs". *In Journal of Intelligent and robotic systems*, 65, 175-186, 2011.

[10] W. Haiwei Y. yali, J. Saadi and H. Ifassiouen. "Backstepping control of each channel for quadrotor aerial robot", *In International Conference on Computer, Mechactonics, Control adn Electronic engineering (CMCE)*, 2010.

[11] T. Hamel, R. Mahony, R. Lozano y J. Ostrowski. "Dynamic modeling and configuration stabilization for a X4-flyer", *IFAC 15th Triennial World Congress*, 2002.

[12] T. Hamel, F. Derks N. Metni. "Visual tracking control for aerial robotic systems with adaptative depth estimation", *Proceedings of the CDC/ECC*, 2005.

[13] F. Kendoul, D. Lara, I. Fantoni and R. Lozano. "Nonlinear control for systems with bounded inputs: real-time embedded control applied to UAVs". *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006.

[14] K. Kondak, M. Bernard, N. Meyer and G. Hommel. .Autonomously flying VTOL-Robotics and Automation", *IEEE Internation Conference on Robotics and Automation*, 2007

[15] X. Liu, X. Zhao, H. Gu and A. Sanchez. .Applicaction and design of real-time control system for the quad-rotor helicopter". *In International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*, 2009.

[16] R. Lozano, P. Castillo, P. García, "Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores", *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2007.

[17] R. Mahony y T. Hamel. Robust trajectory tracking for a scale model autonomous helicopter". *International Journal of Robust ad Nonlinear Control*, 2004.

[18] H. A. F. Mohamed, S. S. Yang y M. Moghavvemi. "Sliding MOde Controller Design for a Flying Quadrotor with Simplified Action Planner", *in ICROSSICE International Joint Conference,*, 2009.

[19] P. Pounds, R. Mahony, P. Hynes y J. Roberts. "Desgin of a four-rotor aerial robot". *En Australian Conference on Robotics and Automation*, 2002

[20] S. Salzar-Cruz, A. Palomino and R. Lozano. "Trajectory tracking for a four rotor mini-aircraft". *In Preceedings of the 44th IEEE Convference on Decision adnd Control , and the European Control Conference*, Sevilla, España, 2005.

[21] R. Siewart S. Bouabdallah, A. North, "PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor", *In Proc. IEEE International Conference on Inteligent Robots and Systems*, 2004.

[22] A. Rayebi and S. McGilvray. "Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft". *in IEEE transactions on control Systems Tecnonlogy*, 2006.

[23] R. Xu and U. Ozguner, "Sliding mode control of a quadrotor helicpter". *En Proc, 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006

[24] A. S. I. Zinover A. J. Koshkouie, R. E. Mills, "Adaptive backstepping control". Department of applied mathematics.

Apéndice A

Matriz de rotación

En la aeronáutica es necesario tener una matriz de rotación que nos relacione el marco referencial inercial o fijo en la superficie de la Tierra con el marco en el cuerpo, para esta matriz se utilizan los ángulos de Euler y la secuencia de rotación se puede ver en la Figura ().

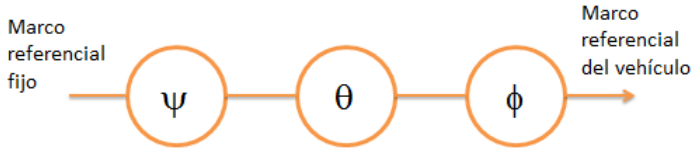


Figura A.1: Diagrama de secuencia de rotaciones

En este trabajo el marco referencial del cuadrirotor se definió como si se tratara de un aeroplano, el eje x se ubica a lo largo del eje longitudinal del avión, el eje y se localiza en el ala derecha del vehículo y el eje z es un eje normal a los ejes x y y apuntando hacia abajo, de esta manera se tiene un sistema referencial derecho.

El marco referencial inercial o fijo se define en función del plano tangente local y el Norte o NED (por sus siglas en inglés, North-East-Down), es decir, el eje z positivo se tiene la dirección hacia el centro de la Tierra, el eje x positivo se alinea al Norte y el eje y apunto hacia el Este. Tal como se muestra en la Figura () .

Estos dos marcos están relacionados por las rotaciones que se muestran en la Figura(). Partiendo del marco inercial o fijo, la primera rotación es de ψ alrededor del eje z. la segunda rotación es θ unidades alrededor del nuevo eje y y la última rotación es alrededor del nuevo eje x ϕ unidades.

La orientación relativa de estos estos dos marcos referenciales se puede observar en

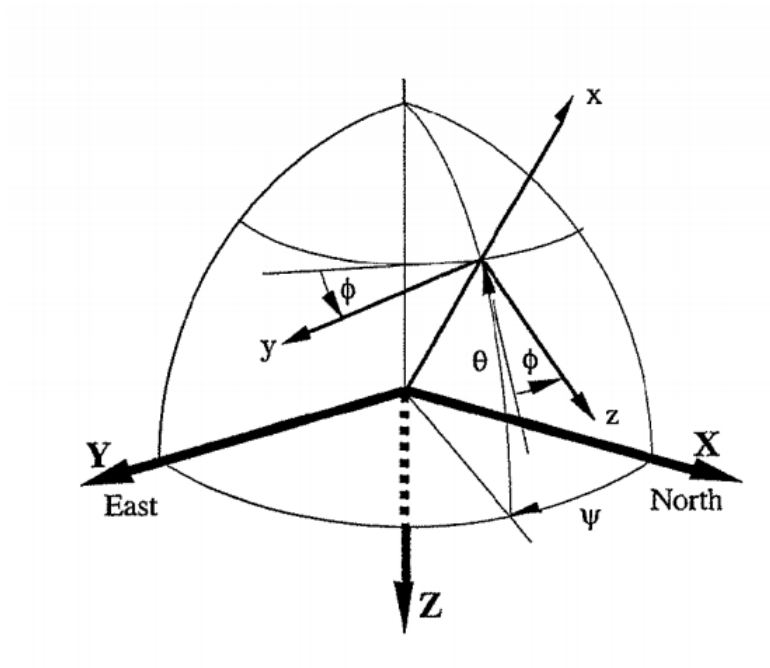


Figura A.2: Ciclo del filtro de Kalman

la Figura () y se puede expresar a través del producto de matrices

$$
\begin{aligned}
R &= R_{\phi}^{x} R_{\theta}^{y} R_{\psi}^{z} \\
&= R_{\phi}^{x} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -sin\psi & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\psi - \sin\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Apéndice B

Matriz de velocidades

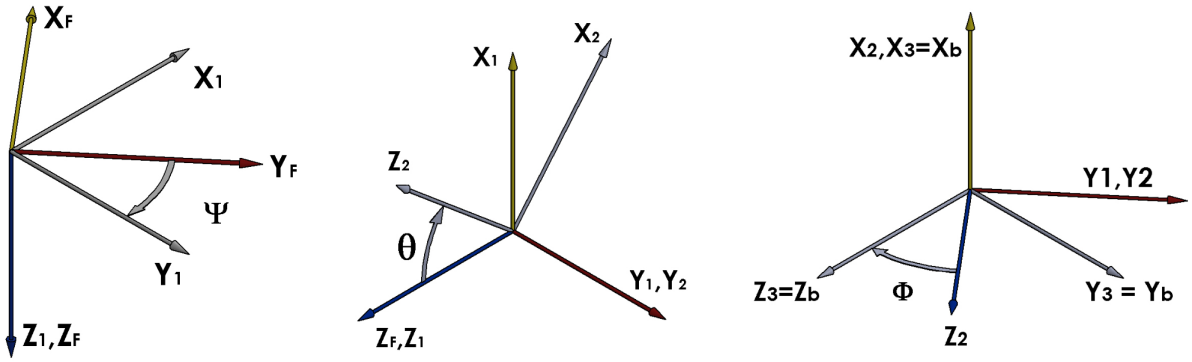
Con los ángulos de Euler, se pueden determinar las componentes de la velocidad de vuelo respecto al marco de referencia fijo. Para esto, las componentes de las velocidades a lo largo de los ejes (x_f, y_f, z_f) serán $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, de manera similar los subíndices 1 y 2 denotan las componentes a lo largo del los ejes (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) respectivamente. Examinando la Figura B.1 se pueden obtener las velocidades:

Nota: a partir de este momento se utilizará la siguiente notación: $S_\psi = \sin\psi$, $C_\psi = \cos\psi$

$$\frac{dx}{dt} = u_1 \cos\psi - v_1 \sin\psi \qquad \frac{dy}{dt} = u_1 \sin\psi + v_1 \cos\psi \qquad \frac{dz}{dt} = w_1 \quad \text{(B.1)}$$

donde los coeficientes u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 C_\theta + w_2 S_\theta & v_1 &= v2 & w_1 &= -u_2 S_\theta + w_2 C_\theta \\ u_2 &= u & v_2 &= v C_\phi - w S_\phi & w_2 &= v S_{phi} + w C_{phi} \end{aligned}$$



(a) Primera rotación (b) Segunda rotación (c) Tercera rotación

Figura B.1: Rotaciones

La representación matricial de las velocidades es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_p si & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C\theta & C\phi C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

Al integrar estas ecuaciones se obtiene la posición del vehículo respecto al marco fijo. La relación entre la velocidad angular en el marco del cuerpo (p, q, r) y la velocidad con que cambian los ángulos de Euler $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ está dada por:

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\theta & C_\theta S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

$$\omega = \omega_\eta \dot{\eta} \tag{B.4}$$

Apéndice C

Filtro de Kalman

C.0.1. Filtro de Kalman

El filtro describe una solución recursiva para el problema del filtrado lineal de datos discretos. La derivación de Kalman fue dentro de un amplio contexto de modelos espacio de estado, en donde el núcleo es la estimación por medio de mínimos cuadrados recursivos. Desde ese momento, debido en gran parte al avance en el cálculo digital, el filtro de Kalman ha sido objeto de una extensiva investigación y aplicación, particularmente en el área de la navegación autónoma y asistida.

el filtro es un procedimiento matemático que opera por medio de un mecanismo de predicción y corrección. en esencia este algoritmo pronostica el nuevo estado a partir de u estimación previa añadiendo un término de corrección proporcional al error de predicción, del tal forma que este últmo es minimizado estadísticamente.

El filtro de Kalman es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos representados en la forma de variables de estado. El estado contiene toda la información relativa al sistema a un cierto punto en el tiempo. Esta información debe permitir la inferencia del comportamiento pasado del sistema, con el objetivo de predecir su comportamiento futuro.

El filtro es muy atractivo en diferentes aplicaciones debido a la característica que es capaz de predecir el estado de un sistema en el pasado, presente y futuro, aún cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida. En la práctica, las variables de estado individuales de un sistema dinámico no pueden ser exactamente determinadas por una medición directa.

El filtro de Kalman tiene como objetivo resolver el problema general de estimar el estado $x \in \mathbb{R}^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto, el cual es dominado por una ecuación lineal en diferencia de la siguiente forma

$$X_t = AX_{t-1} + w_{t-1}$$

con una medida $Z \in \mathbb{R}^m$ que es

$$Z_t = HX_t + v_t$$

Las variables aleatorias w_t y v_t representan el error del proceso y de la medida respectivamente. Se asume que son independientes entre ellas, que son ruido blanco y con distribución de probabilidad normal

$$p(w) \cong N(0, Q)$$
$$p(v) \cong N(0, R)$$

En la práctica las matrices de covarianza de la perturbación del proceso, Q, y de la perturbación medida, R, podrían cambiar con el tiempo pero por simplicidad en general se asumen que son constantes.

La matriz A se asume de una dimensión $n \times n$ y relaciona el estado en el tiempo previo $t-1$ con el estado en el momento t. La matriz H es de dimensión $m \times n$ y relaciona al estado con la medición Z_t, estas matrices pueden cambiar con el tiempo, pero en general se asumen constantes.

El filtro de Kalman estima el proceso anterior utilizando una especie de control de realimentación, esto es, estima el proceso y obtiene la realimentación por medio de datos observados.

Desde este punto de vista las ecuaciones que se utilizan para derivar el filtro de Kalman se pueden dividir en dos grupos, las que actualizan el estado actual o ecuaciones de predicción y las que actualizan los datos observados o ecuaciones de actualización. Las del primer grupo son responsables de la proyección del estado al momento t tomando como referencia el estado en el tiempo $t-1$ y dela actualización intermedia de la matriz de covarianza del estado. El segundo grupo de ecuaciones on responsable de la realimentación, es decir, incorporan nueva información dentro de la estimación anterior con lo cual se llega a una estimación mejorada del estado.

Las ecuaciones que actualizan el tiempo pueden también ser pensadas como ecuaciones de perdición, mientras que las ecuaciones que incorporan nueva información pueden considerarse como ecuaciones de corrección. El algoritmo del filtro funciona por medio de un mecanismo de proyección y corrección al estimar el nuevo estado y su incertidumbre y corregir la proyección con la medida. Esto ciclo se muestra en la Figura C.1

El primer paso consiste en generar una estimación del estado hacia adelante en el tiempo tomando en cuenta toda la información disponible en ese momento y en segundo paso, se genera una estimación del estado, de tal manera que el error es minimizado estadísticamente. Las ecuaciones específicas para la estimación y la corrección del estado están dadas por

$$\hat{X}_t = A\hat{X}_{t-1}$$
$$P_t = AP_{t-1}A^T + Q$$

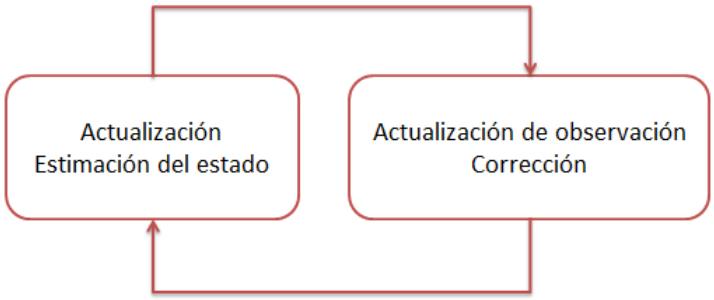


Figura C.1: Ciclo del filtro de Kalman

Note como las ecuaciones anteriores estiman el estado y la covarianza hacia delante desde $t-1$ a t. La matriz A relaciona el estado en el momento previo $t-1$ con el estado al momento actual, esta matriz podría cambiar para los diferente momentos en el tiempo, Q representa la covarianza de la perturbación aleatoria del proceso que trata de estimar el estado.

La primer tarea durante la corrección de la proyección del estado es el cálculo e la ganancia de Kalman denotada por K_t,

$$K_t = P_t H^T (H P_t H^T + R)^{-1}$$

Ésta ganancia s un factor de ponderación que es seleccionado de tal forma que minimice la covarianza del error de la nueva estimación del estado. El siguiente paso es realmente medir el proceso para obtener Z_t y entonces generar una nueva estimación del estado que incorpora la nueva observación tal como se puede verificar en la siguiente ecuación

$$\hat{X}_t = \hat{X}_t + K_t(Z_t - H\hat{X}_t)$$

El paso final es obtener una nueva estimación de la covarianza del error mediante la siguiente expresión

$$P_t = (I - K_t H) P_t$$

Después de cada par de actualizaciones, tanto en el tiempo como en la medida, el proceso es repetido tomando como punto de partida las nuevas estimaciones del estado y la covarianza del error. Esta naturaleza recursiva es una de las características del filtro de Kalman. En la Figura C.2 se puede observar un cuadro completo de la operación del filtro.

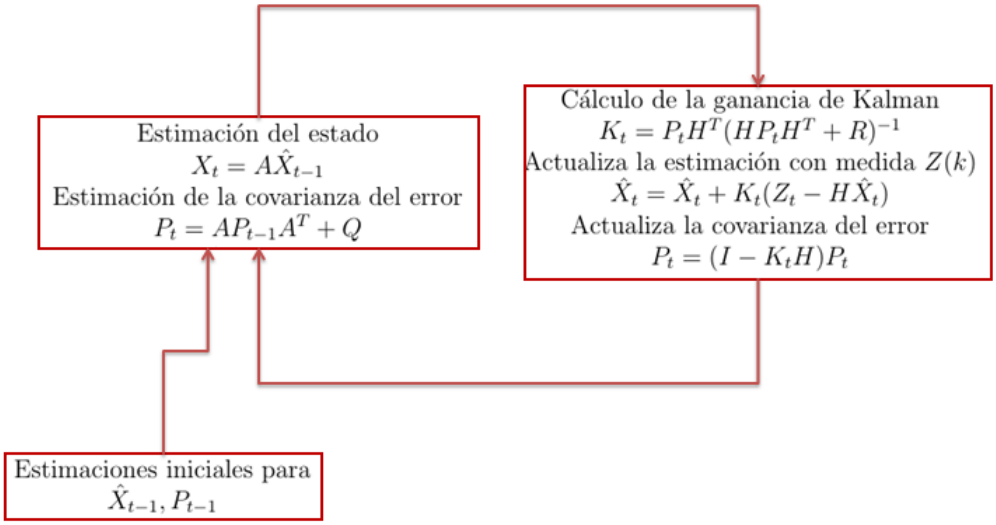


Figura C.2: Diagrama del filtro de Kalman

Backstepping control for a Quadrotor vehicle

Pedro Flores Palmeros
CINVESTAV-DCA
Mexico DF
Email: pflores@ctrl.cinvestav.mx

Pedro Castillo
Sorbonne Universités
Université de Technologie de Compiègne
CNRS, UMR 7253 Heudiasyc
Compiègne, France
Email: castillo@hds.utc.fr

Fernando Castaños
CINVESTAV-DCA
Mexico DF
Email: fcastanos@ctrl.cinvestav.mx

***Abstract*—This paper presents a Backstepping controller based on $SE(3)$ to track the desired trajectory for a quadrotor unmanned aerial vehicle. The controller is conceived in two parts, the attitude controller and the position controller. The Backstepping controller uses virtual inputs to stabilize and realizes the convergence of them to zero. The stability analysis of the controller is realized using the Lyapunov theory. To show effectiveness of the proposed algorithm, simulation results are performed. In addition flight test are performed to validate and to compare in real-time the control strategy.**

I. Introduction

The UAVs (Unmanned Aerial Vehicles) are becoming popular because their ability to perform a variety of missions such as motoring of civil and military areas, also monitoring different kind of natural disasters or the inspection of any dangerous environments, in the agriculture the UAVs are used to inspect the irrigation areas.

Quadrotors are special class among different types of helicopters. Quadrotor helicopters have gained a lot of research interest due to the clear advantages posed by their vertical take-off and landing, hovering capability and slow precise movements. The vehicle consist of four rotors in total, with two pairs of counter-rotating, fixed-pitch blades located at the four corners of the aircraft. The quadrotor control is involved in controlling attitude (*roll, pitch and yaw*) and position (*x, y, z*) either separately or in a coupled way. Due to the unique body structure of a rotorcraft, as well as the rotor dynamics, the rotorcraft attitude dynamics and position dynamics are strongly coupled. Therefore, it is very difficult to design a decoupled control law of good structure that stabilizes the faster and slower dynamics simultaneously.

The dynamics of a quadrotor include under actuation, strong coupling multi-input and multi-output design, and unknown nonlinearities. In the quadrotor the movement is caused by the resultant forces and moments of four independent rotors.

The quadrotor dynamics involve four input forces, six output coordinators and have highly coupled and unstable nonlinear and time varying dynamics, even though many aerodynamic effects are simplified or neglected, hence, the control and the mathematical model to achieve a good performance and autonomous flight is a difficult task.

Several solutions to stabilized the quadrotor have been proposed. For example, in [1] two controllers are proposed, the PID and LQR algorithms, the authors compared the performance of both controllers and they concluded that the LQR has a better response. Nevertheless this comparison was only made in simulation. In [2] a PID controller was tested experimentally but there are some problems in the signals measurements. The result was that the system is able to track the reference but it has many oscillations and overshootings. In [3] the authors presented the model, simulation and the implementation of a saturated PI in the attitude.

In addition, several nonlinear methodologies have been used to stabilize the quadrotor such as in [4], [5], a feedback linearization is used, this technique is widely used in the flight control law design, however, this method relies on a known model of the helicopter with precise parameters but all of the nonlinear terms are eliminated with this method, which limits its operation in the linearization point, also its robustness is limited. Therefore the necessity of develop other types of non linear controllers.

Backstepping is a recursive procedure in which the feedback control is made by proposing a Lyapunov function. One of the interesting characteristics of this controller is that by well choosing the gains implies that the quadrotor can be stabilized without eliminating the nonlinear dynamics. Many Backstepping controllers have been applied to a number of different design tasks. In [6] the authors improved the Backstepping procedure and added an integral term to eliminate the steady state error and is compared with a PID controller. A very important characteristic of the Backstepping approach is that it can be mixed with other controllers, for example in [7], the authors mixed the Backstepping approach with a Sliding Mode controller, the first state is controlled by using the Backstepping procedure and the second state is controlled with the Sliding Mode methodology, this is to avoid the chattering characteristic of the Sliding Mode controller. Similarly, Fuzzy or adaptative controllers are used to improve

the closed-loop response of a quadrotor vehicle, see [8] and [9]. Nevertheless, in many works they just include numerical validation in attitude and/or position. In this paper we present the mathematical analysis and the experimental results of Backstepping controllers used to stabilize a quadrotor.

II. Problem statement

Designing control algorithms for stabilization and autonomous navigation of a quadrotor vehicles is now relative easy task for researchers. Nevertheless, design a good control algorithm with good behavior in real-time is not relatively easy and several researches work in.

In this work, a nonlinear controller to stabilize the position and the attitude of a quadrotor vehicle is presented. The novelty of this work is that the nonlinear controller is considered simple and easy to implement, that is not really the case for this kind of controllers.

The nonlinear dynamic equations for the quadrotor are well known and can be written as

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -(\sin\theta)\frac{1}{m}U_1 \\
\ddot{y} &= (\cos\theta\sin\phi)\frac{1}{m}U_1 \\
\ddot{z} &= (\cos\theta\cos\phi)\frac{1}{m}U_1 - g \\
\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{I_r}{I_x}\dot{\theta}\Omega + \frac{l}{I_x}U_2 \\
\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) - \frac{I_r}{I_y}\dot{\phi}\Omega + \frac{l}{I_y}U_3 \\
\ddot{\psi} &= \dot{\theta}\dot{\phi}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{l}{I_z}U_4
\end{aligned}$$

where the position coordinates are x, y, z and the orientation is given by the Euler angles; roll (ϕ), pitch (θ) and yaw (ψ). The distance between each motor to the gravity center of the vehicle is denoted by l and m defines the quadrotor mass. The inertia of the vehicle in each axis is defined by I_x, I_y and I_z while the inertia of the motor is represented by I_r, U_i defines the control input and the speed of the rotor is defined by Ω.

For control design the quadrotor dynamic equations are rewritten as

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{U_x U_1}{m} \\ y_2 \\ \frac{U_y U_1}{m} \\ z_2 \\ \frac{\cos\theta_1\cos\phi_1 U_1}{m} - g \\ \phi_2 \\ f_\phi + g_\phi U_2 \\ \theta_2 \\ f_\theta + g_\theta U_3 \\ \psi_2 \\ f_\psi + g_\psi U_4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

with $f_\phi = \theta_2\psi_2\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{I_r}{I_x}\theta_2\Omega$, $f_\theta = \phi_2\psi_2\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) - \frac{I_r}{I_y}\phi_2\Omega$, $f_\psi = \theta_2\phi_2\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)$, $g_\phi = \frac{l}{I_x}$, $g_\theta = \frac{l}{I_y}$ and $g_\psi = \frac{l}{I_z}$; where $f_i(\bullet)$, $g_i(\bullet)$ are nonlinearities related to the Coriolis forces and the moments generated by the motors, $U_x = -\sin(\theta_1)$ and $U_y = \cos\theta_1\sin\phi_1$ will be cosiderated as virtual control inputs used for position control.

III. Controller design

The nonlinear approach based on the Backstepping technique is proposed to stabilize two integrators in cascade. After that, this methodology will be applied for the quadrotor vehicle.

A. Backstepping

System (C.1) can be studied in many subsystems and each one could be denoted as double integrator chain with the form

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\
\dot{\eta}_2 &= g(\omega,\gamma) + h(\omega,\gamma)u
\end{aligned} \tag{2}$$

where $g(\omega,\gamma)$, $h(\omega,\gamma)$ are known nonlinear functions and u denotes the control input. For tracking is necessary to stabilize the state in a desired vale η_d. Thus the error tracking is $e_1 = \eta_1^d - \eta_1$ then $\dot{e}_1 = \dot{\eta}_1^d - \eta_2$. Then, propose a positive defined function and its time derivative derivate as:

$$V(e_1) = \frac{1}{2}e_1^2 \tag{3a}$$

$$\dot{V}(e_1) = e_1(\dot{\eta}_1^d - \eta_2) \tag{3b}$$

Defining a virtual control input (η_2^v) such that $\eta_2 \rightarrow \eta_2^v = \dot{\eta}_1^d + \alpha_1 e_1$ with $\alpha_1 > 0$ is a positive constant and introducing it into (C.3b) then the states decreases.

The second error (e_2) is defined as $e_2 = \eta_2 - \dot{\eta}_2^v$. Then defining a candidate Lyapunov function

$$V_2(e_1,e_2) = V_1(e_1) + \frac{1}{2}e_2^2$$

Thus

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e_1,e_2) =& e_1(-\alpha_1 e_1 - e_2) + e_2[g(\omega,\gamma) + \\
& h(\omega,\gamma)u + \alpha_1(e_2 + \alpha_1 e_1)]
\end{aligned} \tag{4}$$

Hence, the controller yields

$$u = \frac{1}{h(\omega,\gamma)}\left[-\alpha_1(e_2 + \alpha_1 e_1) - g(\omega,\gamma) + e_1 - \alpha_2 e_2\right] \tag{5}$$

where α_i is a positive constant. Introducing (C.5) into (C.4)

$$\dot{V}_2 = -\alpha_1 e_1^2 - \alpha_2 e_2^2 \leq 0$$

Therefore the subsystem has an asymptotically stable behavior.

1) Attitude Backstepping control: The quadrotor control is made in two different levels, the first takes the most quickly dynamic, i.e. the attitude and the second level deals with the translational motion.

Notice from (C.1) that the orientation subsystem has the form (C.2), therefore applying the previous procedure we can define the following control laws

$$\begin{aligned} U_2 =& \frac{I_x}{l}[-\alpha_1(\overline{e}_2+\alpha_1\overline{e}_1)-\theta_2\psi_2\left(\frac{I_y-I_z}{I_x}\right)+\frac{I_r}{I_x}\theta_2\Omega+ \\ & \overline{e}_1-\alpha_2\overline{e}_2] \\ U_3 =& \frac{I_y}{l}[-\alpha_3(\overline{e}_4+\alpha_3\overline{e}_3)-\phi_2\psi_2\left(\frac{I_z-I_x}{I_y}\right)+\frac{I_r}{I_y}\phi_2\Omega+ \\ & \overline{e}_3-\alpha_4\overline{e}_4] \\ U_4 =& \frac{I_z}{l}[-\alpha_5(\overline{e}_6+\alpha_5\overline{e}_5)-\theta_2\phi_2\left(\frac{I_x-I_y}{I_z}\right)+\overline{e}_5-\alpha_6\overline{e}_6] \end{aligned} \tag{6}$$

where $\overline{e}_i$ represents the tracking error, α_i is a positive constant.

2) Position Backstepping control: Once orientation has been stabilized, we proceed to design the control laws for the vehicle position. Thus we can propose the following control law for altitude

$$U_1 = \frac{m}{\cos\theta_1\cos\phi_1}\Big[g-\alpha_7(\overline{e}_8+\alpha_7\overline{e}_7)+\overline{e}_7-\alpha_8\overline{e}_8\Big] \tag{7}$$

The quadrotor is an underactuated system, this means that there are more degrees of freedom than control inputs. Notice that the desired angles used for tracking depend on the vehicle position. Observe from (C.1) that dynamics for x and y have the form (C.2) with $g(\omega,\rho)=0$ and U_x, U_y as control inputs. Then applying the Backstepping procedure the virtual controllers become

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{m}{U_1}\left[-\alpha_9(\overline{e}_{10}+\alpha_9\overline{e}_9)+e_9-\alpha_{10}\overline{e}_{10}\right] \\ U_y &= \frac{m}{U_1}\left[-\alpha_{11}(\overline{e}_{12}+\alpha_{11}\overline{e}_{11})+e_{11}-\alpha_{12}\overline{e}_{12}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Remark from (C.8), that even if the attitude errors are zero, $U_1 \neq 0$ there is no singularity in the control laws. Therefore the desired angles for U_2 and U_3 in (C.6) can be computed from (C.1) and (C.8) as

$$\theta_1^d = \arcsin\left(-U_x\right) \tag{9a}$$

$$\phi_1^d = \arcsin\left(\frac{U_y}{\cos(\theta_1^d)}\right) \tag{9b}$$

IV. Numerical Validation

The nominal parameters of the quadrotor for simulation purposes and the gains used in simulations are

Parameter	Value	Parameter	Value
Ω	0.01	g	9.81 $\frac{m}{s^2}$
$\frac{I_z-I_x}{I_y}$	0.01	m	0.5 kg
$\frac{I_x-I_y}{I_z}$	0.001	$\frac{I_y-I_z}{I_x}$	0.001
$\frac{I_r}{I_y}$	0.001	$\frac{I_r}{I_x}$	0.001
$\frac{I_r}{I_y}$	0.001	$\frac{l}{I_x}$	0.15
$\frac{l}{I_y}$	0.15	$\frac{1}{I_z}$	0.15
α_i	5		

For simulation we used a 3D trajectory as shown in Figure C.3 in which the good behavior of the system using the Backstepping control laws can be viewed.

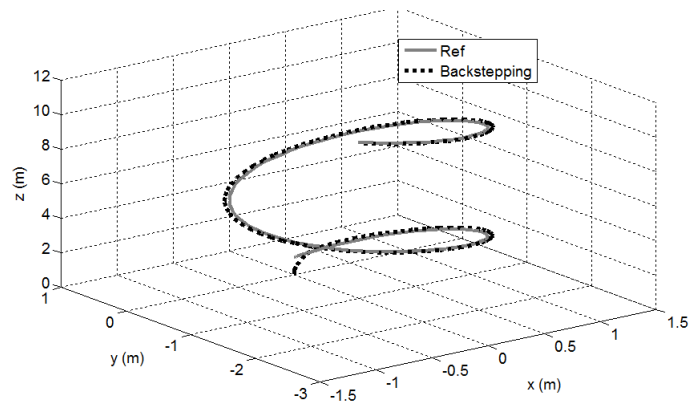


Fig. 1. Quadrotor response for position using Backstepping algorithm

The references and every subsystem response for the attitude is shown in Figure C.4, notice that in the beginning there are some abrupt changes in the reference and the controller is not able to follow those references.

The translational motion and the control inputs it can be seen in Figure C.5 in which the good performance of the controller can be seen. The system is able to track soft references in attitude and translational motion.

V. Experimental Results

The prototype used is the AR Drone which can be seen in the Figure C.6, it has on board Linux 2.6.32, the embedded processor is an ARM Cortex A8 at 1 GHz, it also has a DDR2 RAM of 1 GB at 200 MHz, the sampling frequency is 200 Hz. The sensors for the navigation we are a three axis gyroscope with $2000°/seg$, an accelerometer which accuracy is $+/-50mg$. The hardware of the Parrot vehicle has been used, nevertheless several changes have been made in software in order to access all states and variables that usually can not be modified in the original software and firmware of Parrot.

We realized some manual tests to analyze the states measurements, for example, we checked over the inertial

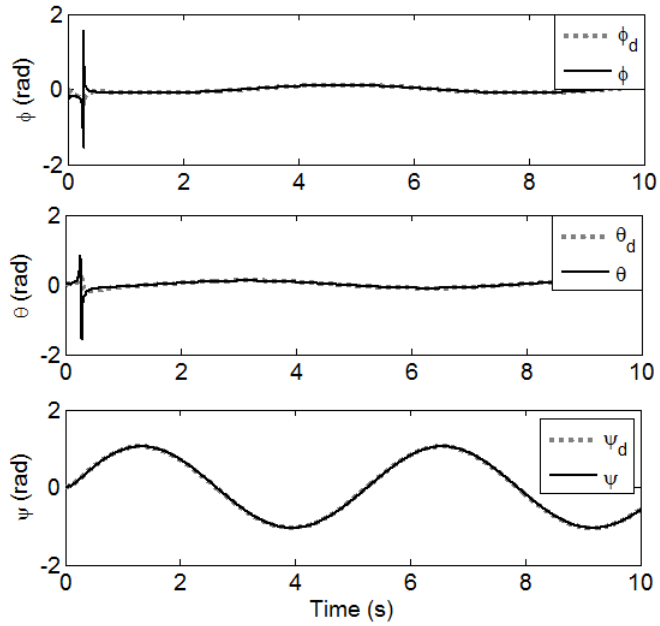


Fig. 2. Attitude quadrotor response using Backstepping

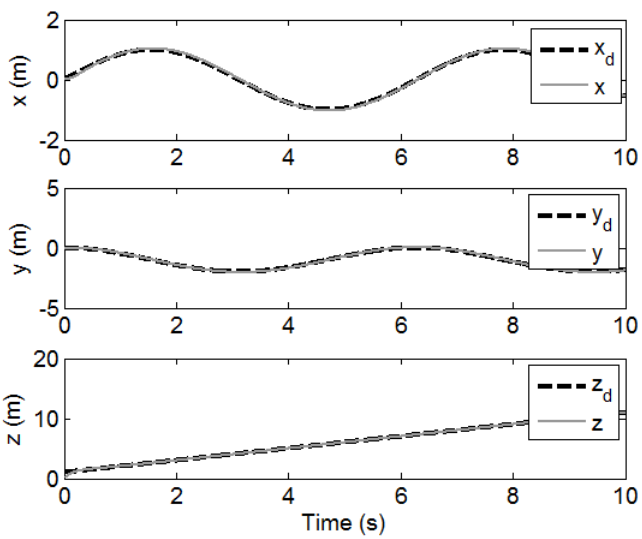


Fig. 3. Position quadrotor response using Backstepping

Fig. 4. AR Drone 2.0 Quadcopter

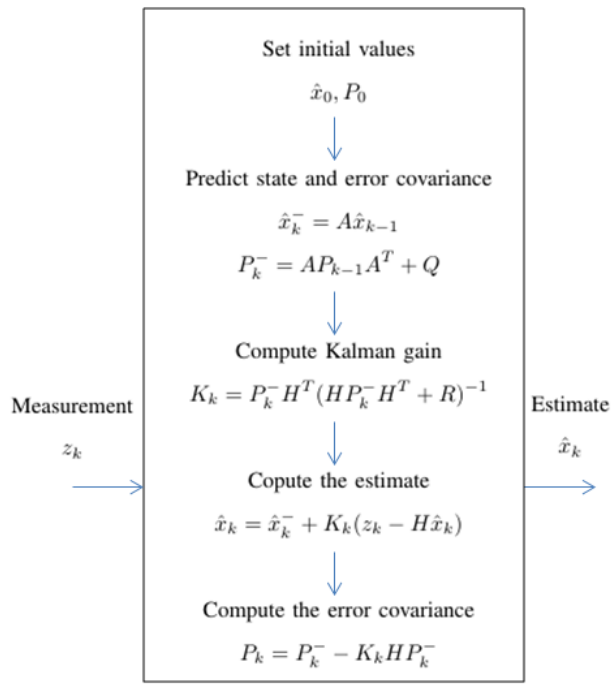


Fig. 5. Kalman Filter algorithm

sensors that are used to measure the vehicle's attitude and we observed several noise in the measurements. In Figure C.8 we illustrate this fact when measuring the yaw angular rate.

We propose the implementation of the Kalman Filter to improve the signals. This filter is popular in the UAV applications because is easy to implement in high level program language and at the time to execute the code the computational load is low. The Kalman filter has two steps, the prediction which is the responsible of the projection of the state at time k but having the time $k-1$ as reference and the actualization of the covariance matrix. And the second step is the correction, in which the values are update and a correction is made to the estimation.

We propose to use a linear Kalman Filter, hence in Figure C.7 the parameter related to the linear system in the filter is given by A, the state at time k and the state at time $k-1$ is denoted by $\hat{x}_k$ and $\hat{x}_{k-1}$ respectively, P denotes the a priori estimation and Q is a constant that represents the noise in the process, K is the Kalman Gain, H and R are constants related to the covariance and uncertainties of the measurement process.

In figure C.8 we can observe the signal after the filtering process. Notice that the signal was considerable ameliorated

and the noise was reduced.

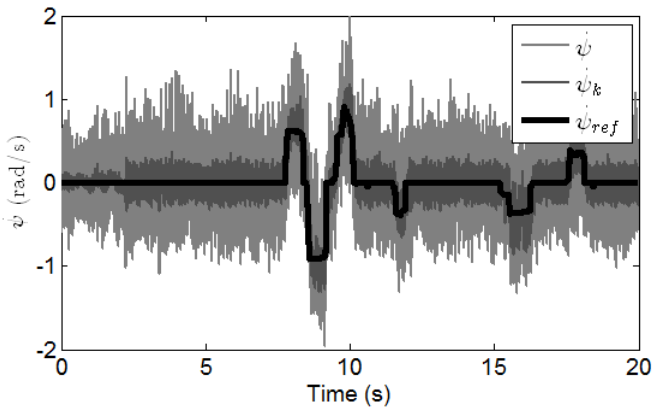


Fig. 6. Yaw rate response when using Kalman Filter

After that to validate the proposed controllers some flight tests were done. The first step was to implement the Backstepping control in the yaw angle and tune it. In this step PD (Proportional Derivative) control was implemented in roll and pitch angles. Once the yaw angle was stable, we proceed to implement the Backstepping controller in the roll angle, after the tunning process, the control law was implemented in the pitch angle. The reference to follow was given in manual form by a joystick.

The experimental gains are:

Parameter	Value	Parameter	Value
Ω	0.01	g	9.81 $\frac{m}{s^2}$
$\frac{I_z-I_x}{I_y}$	0.01	m	0.5 kg
$\frac{I_x-I_y}{I_z}$	0.001	$\frac{I_y-I_z}{I_x}$	0.001
$\frac{I_r}{I_y}$	0.001	$\frac{I_r}{I_x}$	0.001
$\frac{I_r}{I_y}$	0.001	$\frac{l}{I_x}$	0.15
$\frac{l}{I_y}$	0.15	$\frac{1}{I_z}$	0.15
c_i	0.5	k_i	2
α_i	5	ϵ	0.01

The experimental results of each navigation angle can be observed in Figure C.9 notice that the controller is able to follow the reference with abrupt changes although in $roll$ there are overshooting.

The control signal for each navigation angle is shown in Figure C.10 observe every control signal is bounded in ∓ 0.5 thus the controller is not overloading the quadrotor.

After the attitude stabilization was accomplished, the Backstepping control law for position or translational motion was implemented, the performance of the controller can be seen in Figure C.11, notice that the system is able to track the reference input, although it has oscillations and overshooting. In Figure C.12

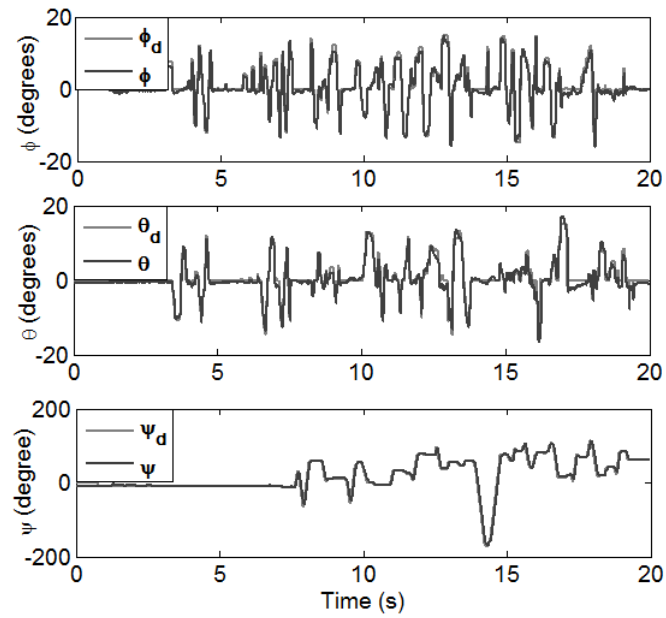


Fig. 7. Attitude response for tracking using Backstepping controller

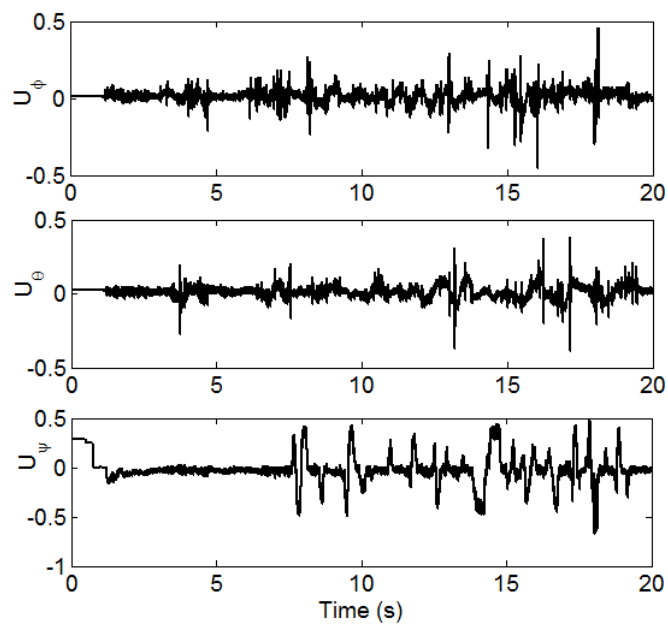


Fig. 8. Control signals for the attitude tracking using Backstepping

VI. Conclusion and Discussion

The stabilization ability of the nonlinear controller is examined through nonlinear simulation and the results indicate effectiveness of the proposed control strategy for the quadrotor helicopter.

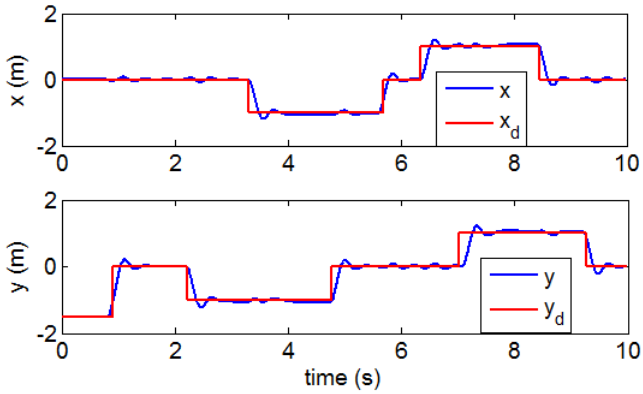


Fig. 9. Position response for tracking using Backstepping controller

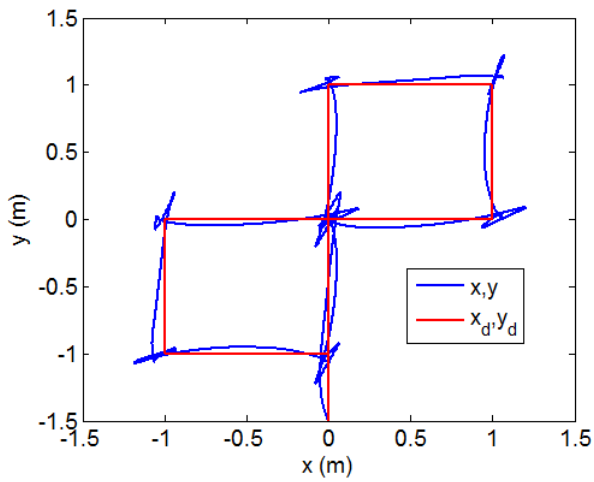


Fig. 10. Trajectory tracking

Backstepping is a recursive procedure that interlaces the choice of a Lyapunov function with the design of feedback control. It breaks a design problem for the full system into a sequence of design problems for lower order subsystems, Backstepping can often solve stabilization, tracking, and robust control problems under certain conditions less restrictive than other non-linear controllers.

The performance of the controller was tested in simulation and real-time and it presented a good behavior to follow the desired reference.

Future work includes the implementation of more complex trajectories, the obstacle avoidance and the implementation of controllers to make comparisons between each controller. And the implementation of the algorithms for outdoor tests.

REFERENCES

[1] S. Khatoon, D Gupta and L. K. Das, "PID and LQR confotr for a Quadrotor: Modeling and Simulation, in Advances in Computing, Communications and Informatics, New Delhi, 2014.

[2] R. Cavalcante, A. Luiz C. and A.T. Varela, " Construction and Control for Stability of an Unmanned Aerial Vehicle of the Type Quadrotor", in *Latin American Robotics Symp.*, Arequipa, 2013

[3] Fernando H.C.T.E, De Silva A.T.A., De Zoysa M.D.C., Dilshan K.A.D.C. and Munasinghe S.R. " Modeling, simulation and Implementation of a Quadrotor UAV", in *Int. Conference and Information Systems*, Sri Lanka, Aug 2013.

[4] Kanellakopoulos I., Kokotovic V., Morse S."Systematic Desgin of Adative Controller for Feedback Linearizable System" . *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991.

[5] Zhou Fang, Zhang Zhi, Liang Jun, "Feedback linearization and continuous sliding mode control for a quadrotor UAV", *Proceedings of the* 27th *Chinese Control Conference*, 2008.

[6] M. Bouchoucha, S. Seghour, H. Osmani "Integral Backstepping for Attitude Tracking of a quadrotor system."*Electronics and Electrical Engineering*, 2011

[7] S. Bouabdallah, R. Siegwart, "Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor", *International Conference on Robotics and Automation*,Spain 2005.

[8] Al-Younes, Y, M. A. Jarrah, "Attitude stabilization of quadrotor UAV using Backstepping fuzzy logic and Backstepping Least-Mean-Square controllers",*International Symposium on Mechatronics and its Applications*, Amman, Jordan, May 2008.

[9] Z. Fang, W. Gao, "Adaptive Integral Backstepping Control of a Micro-Quadrotor", International Conference on Intelligent Control and Information Processing, July 2011

[10] H. Kumar and N. Michael, "Opportunities and challenges with autonomous micro aerial vehicles" in, *Int. Symp. on Robotics Research*, 2011.

[11] G. Hoffmann, S. Waslander, and C. Tolin, "Quadrotor helicopter trajectory tracking control", in *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Honolulu, Hawaii, 2008.

[12] F. Kenul, Y. Zhenyu and K. Nonami, "Embedded autopilot for accurate waypoint navigation and trajectory tracking: Application to miniature rotorcraft uavs", in *IEEE International Confrerence on Robotics and Automation*, May 2009, pp. 2884-2890.

[13] S. Bouabdallah, A. North, and R. Siegwart, "PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor", in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, vol. 3, Sept.-2 Oct. 2004, pp. 2451-2456

[14] P Castillo, P Garca, R Lozano, P Albertos, "Revista Iberoamericana de Automtica e Informtica Industrial RIAI 4(1), 41-57

[15] H. Kumar and N. Michael, "Opportunities and challenges with autonomous micro aerial vehicles" in, *Int. Symp. on Robotics Research*, 3rd ed. Harlow, England: Addison-Wesley, 1999.

[16] Cunha R., Cabecinhas D., Silvestre C., "Nonlinear trajectory tracking control of a quadrotor vehicel". In: European Control Conf. (2009).

[17] Das A., Lewis F., Hubbarao K., "Backstepping Approach for Controlling a Quadrotor Using Lagrange Form Dynamics", In J. Intell Robot Syst. (2009).

[18] Ramirez-Rodriguez H., Parra-Vega V., Sanchez-Orta A., Garcia-Salazar O, "Robust Backstepping Control Based on Integral Sliding Modes for Tracking Quadrotors", In J. Intell Robot Syst (2004).

[19] Bouadi H., Bouchoucha M., Tadjine M. "Sliding Mode based on Backstepping Approach for an UAV Type-Quadrotor", In World Acad. Sci. Eng. Technol. 2, 2227 (2007)

[20] Luque-Vega L., Castillo-Toledo B., Loukianov A. "Robust block second order sliding mode control for a quadrotor", In J. Intell Robot Syst (2014).

[21] Mandani T. Benallegue A., " Backstepping Control with 2-Sliding Mode Estimation for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle". In J International Conference on Intelligent Robot and Systems (2007).

[22] Mandani T., Bernallegue A.. "Backstepping Control for a Quadrotor Helicopter". In International Conference on Intelligent Robots and Systems (2006)

[23]