



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL**

Unidad Zacatenco
Departamento de Control Automático

**El Discriminante de la Ecuación de Hill: Aproximación
y Aplicaciones**

Tesis que Presenta
Carlos Alberto Franco Tello

Para Obtener el Grado de
Doctor en Ciencias

En la Especialidad de
Control Automático

Director de la Tesis: Dr. Joaquín Collado Moctezuma

Ciudad de México, México

23 de Marzo de 2018

RESUMEN

En este trabajo presentamos una aproximación del discriminante asociado a las ecuaciones diferenciales periódicas de la forma $\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t))x = 0$ con $p(t + T) = p(t)$. El discriminante está definido como la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz de transición de estados evaluada en un periodo T . A lo largo de la tesis se muestra que el discriminante tiene un papel preponderante en el análisis de la estabilidad de las soluciones de la ecuación diferencial a la cual está asociado.

Al considerar al discriminante como una superficie dependiente de los parámetros α y β , podemos obtener nuevas e interesantes propiedades sobre el comportamiento de las soluciones de la ecuación periódica como son: la velocidad de crecimiento de las soluciones inestables, la cual se relaciona con las líneas de máxima energía y las curvas Iso- μ ; y la relación entre las zonas de estabilidad, en el plano de parámetros α - β , asociadas a ecuaciones diferenciales periódicas con y sin disipación.

La nueva aproximación es obtenida como una sumatoria recurrente de términos dependientes de la función de excitación $p(t)$ y de los parámetros α y β . Probamos que la aproximación es equivalente a una aproximación, en términos de integrales múltiples definidas, hecha por Lyapunov en su trabajo *The general problem of the stability of motion*. Esta aproximación nos permite calcular fácilmente el discriminante para cualquier función periódica $q(t) = \alpha + \beta p(t)$. Además, nos permite proponer una función periódica la cual, al ser sumada a la función de excitación $p(t)$, modifica el valor del discriminante a cualquier valor deseado, y así estabilizar o modificar las propiedades de las soluciones del sistema original.

Por último, describimos la relación entre las ecuaciones diferenciales periódicas y la ecuación de onda de un grado de libertad. Explicamos brevemente la relación que existe entre los diagramas de estabilidad de sistemas periódicos y los diagramas de dispersión o diagramas de Brillouin asociados a la ecuación de onda.

La mayor parte de las figuras presentadas en la presente tesis fueron obtenidas mediante la aproximación aquí descrita.

ABSTRACT

In this work we present an approximation of the discriminant associated to a periodic differential equations of the form $\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t))x = 0$ with $p(t+T) = p(t)$. The discriminant is defined as the summation of the main diagonal entries of the state transition matrix evaluated at the period T . Throughout the thesis we show that the discriminant has a preponderant role in the analysis of the stability of the periodic differential equations solutions.

By considering the discriminating as a surface, that depends on the parameters α and β , we can obtain new and interesting properties on the behavior of the solutions of the periodic equation such as: the speed of growth, of the unstable solutions, which is related to the lines of maximum energy and the Iso- μ curves; and the relation between the stability chart, in the plane of parameters α - β , associated to periodic differential equations with and without dissipation.

The new approximation is obtained as a recurrent summation of terms that depend on the excitation function $p(t)$ and on parameters α and β . We prove that the approximation is equivalent to an approximation, in terms of defined multiple integrals, done by Lyapunov. This approach allows us to easily calculate discriminant for any periodic function $q(t) = \alpha + \beta p(t)$. In addition, it allows us to propose a periodic function such that, when it is added to the excitation function $p(t)$, it modifies the value of the discriminant to any wished value, and thus to stabilize or to modify the properties of the solutions of a periodic system.

Finally, we described the relation between the periodic differential equations and the one degree of freedom wave equation. We briefly explain the relation between the stability charts of periodic systems and the Brillouin diagram associated to the wave equation.

Most of the figures displayed in the present thesis were obtained by means of the approximation here described.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia Esperanza, Ramon, Erik, Juan y Nataly por todo el apoyo y consejos que me han brindado.

Al doctor Joaquín Collado por su paciencia y por todo lo que me ha enseñado.

A los doctores Rubén A. Garrido Moctezuma, Alexander Poznyak Gorbach, Wen Yu Liu y Francisco J. Bejarano Rodríguez por sus comentarios y revisiones.

Al Conacyt por la beca otorgada.

ÍNDICE GENERAL

1.0 INTRODUCCIÓN	1
2.0 PRELIMINARES	5
2.1 Ecuaciones diferenciales periódicas	5
2.1.0.1 Sistemas Hamiltonianos	8
2.1.1 Discriminante	10
2.1.1.1 Diagramas de estabilidad	11
2.1.1.2 Curvas Iso- μ	12
3.0 SUPERFICIE DEFINIDA POR EL DISCRIMINANTE $\Delta(\alpha, \beta)$	16
3.1 Líneas de Máxima Energía (MEL)	17
3.1.1 Coexistencia	18
3.1.1.1 <i>Pockets</i> de inestabilidad	20
3.1.2 Aproximación de MEL para la ecuación de Meissner	21
3.2 Curvas Iso- μ	23
4.0 APROXIMACIÓN DEL DISCRIMINANTE $\Delta(\alpha, \beta)$	27
4.1 Aproximación de $\Delta(\alpha, \beta)$ en términos de las funciones Walsh	28
4.2 Simplificación de la aproximación $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$	31
4.3 Forma explícita de la aproximación del discriminante $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$	34
4.3.1 Eliminando la dependencia en las matrices inversas	37
4.4 Equivalencia de la nueva aproximación con un resultado de A. M. Lyapunov en ecuaciones diferenciales periódicas	42
4.5 Error y convergencia	47
5.0 ESTABILIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE HILL	52
5.1 Estabilización por medio de disipación	53
5.1.1 Eliminación de un <i>pocket</i> de inestabilidad	53
5.1.1.1 Ejemplo	55
5.1.2 Eliminación de zonas inestables debajo de una función $\beta = f(\alpha)$	56
5.1.2.1 Ejemplo	59

5.2 Estabilización añadiendo una función periódica $u(t + T) = u(t)$ a la función de excitación	60
5.2.1 Ejemplo	64
6.0 ECUACIÓN DE ONDA	66
6.1 Dispersión	69
6.1.1 $v(x) = \text{constante}$	70
6.1.2 $v(x)$ no constante y periódica	71
6.2 Dispersión compleja o atenuación de la onda	73
7.0 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	75
7.1 Trabajo futuro	76
APENDICE. INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES WALSH	78
BIBLIOGRAFÍA	83

1.0 INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales periódicas de segundo orden son frecuentemente encontradas en problemas de ingeniería y física y han sido estudiadas por más de cien años, siendo la ecuación de Hill

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\alpha + \beta p(t)) x &= 0, & p(t+T) &= p(t), & \alpha, \beta &\in \mathbb{R} & (1.1) \\ \int_0^T p(t) dt &= 0 \end{aligned}$$

un caso particular y muy representativo entre las ecuaciones periódicas, la función $p(t)$ es llamada función de excitación asociada a la ecuación (1.1) o simplemente función de excitación. La ecuación (1.1) recibe su nombre gracias al trabajo de G. W. Hill sobre la órbita lunar [14]. La ecuación de Hill puede describir desde los sistemas dinámicos más simples como: un niño jugando en un columpio o un sistema masa resorte con el coeficiente de amortiguamiento variante en el tiempo y periódico; hasta los más complejos como por ejemplo: el flujo de la luz en un cristal fotónico de una dimensión [26] o el movimiento de los cuerpos celestes [7]. Posiblemente el sistema dinámico más didáctico y conocido es el balanceo de una masa ligada a un soporte que se mueve periódicamente, donde el comportamiento inusual de los sistemas descritos por la ecuación de Hill puede apreciarse: Si una fuerza que varía periódicamente actúa sobre una masa de tal forma que ésta mueve la masa a su punto de equilibrio, uno podría esperar que la masa permaneciera en una vecindad de su punto de equilibrio. Una vez que la fuerza es suficientemente grande, en magnitud, para lograr este efecto, uno esperaría que una fuerza con magnitud mayor fuera más eficiente, pero este no es el caso, la masa puede oscilar con una amplitud cada vez mayor. Entonces, la estabilidad de la solución de una ecuación diferencial periódica puede cambiar con el más mínimo cambio de sus parámetros

Suponga que $y_1(t), y_2(t), \dots, y_{2n}(t)$ son $2n$ soluciones linealmente independientes de

$$\begin{aligned} \dot{y} + Q(t)y &= 0, & Q(t+T) &= Q(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, & y &\in \mathbb{R}^{2n} & (1.2) \\ Q(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ P(t) & 0 \end{bmatrix}, & P(t+T) &= P(t) \end{aligned}$$

sujetas a las condiciones iniciales

$$\begin{array}{cccc}
y_1(t_0) = 1 & y_2(t_0) = 0 & \dots & y_{2n}(t_0) = 0 \\
\dot{y}_1(t_0) = 0 & \dot{y}_2(t_0) = 1 & \dots & \dot{y}_{2n}(t_0) = 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(2n-1)}(t_0) = 0 & y_2^{(2n-1)}(t_0) = 0 & \dots & y_{2n}^{(2n-1)}(t_0) = 1
\end{array}$$

y sea la matriz

$$M = \begin{bmatrix}
y_1(T) & y_2(T) & \dots & y_n(T) \\
\dot{y}_1(T) & \dot{y}_2(T) & \dots & \dot{y}_n(T) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(2n-1)}(T) & y_2^{(2n-1)}(T) & \dots & y_{2n}^{(2n-1)}(T)
\end{bmatrix}$$

Es sabido que la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales periódicas (1.2) depende de la posición de los valores propios de la matriz M con respecto al círculo unitario (ver capítulo 2). En el caso particular de la ecuación¹ (1.1), los valores propios de M dependen únicamente del valor de

$$\Delta(\alpha, \beta) = x_1(T) + \dot{x}_2(T) \tag{1.3}$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de (1.1) y están sujetas a las condiciones iniciales $x_1(t_0) = 1$, $\dot{x}_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$, $\dot{x}_2(t_0) = 1$. La función $\Delta(\alpha, \beta)$ en (1.3) es conocida como el discriminante asociado a (1.1). La dependencia en los coeficientes α y β en (1.3) se escribe debido a que las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ cambian cuando los parámetros α y β lo hacen.

El propósito de este trabajo es introducir una nueva aproximación del discriminante asociado a la ecuación de Hill (ver capítulo 4). Lo cual es importante dado que no se conoce la forma exacta de las soluciones de (1.1) y por lo tanto el discriminante asociado a la ecuación (1.1) es desconocido. La aproximación es presentada en términos de sumatorias recurrentes de elementos dependientes de la función de excitación $p(t)$. La nueva aproximación nos permite la obtención de los diagramas de estabilidad así como de otras propiedades como la determinación de la velocidad de crecimiento de soluciones inestables (curvas Iso- μ) y los puntos y líneas en donde el crecimiento de las soluciones alcanza su máximo dentro de una zona inestable los cuales se denominan puntos y líneas de máxima energía respectivamente.

Además de lo mencionado, la aproximación nos brinda la posibilidad de recuperar la función de excitación, es decir, si el valor del discriminante $\Delta(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, con $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ fijos, es conocido pero la función de excitación es desconocida, entonces a partir de la aproximación es posible obtener un estimado de la función en cuestión, a decir verdad es posible encontrar

¹La ecuación (1.1) puede ser reescrita en el formato (1.2) haciendo el cambio de variables $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ y definiendo $y = [y_1 \ y_2]'$.

un número infinito de posibles funciones que satisfacen dicho problema (ver sección 5.2). Esta propiedad es utilizada para encontrar un método para estabilizar un punto en el plano de parámetros α - β , que se encuentre dentro de una zona inestable en un diagrama de estabilidad (ver Fig. 5.5).

Por último se presenta la estrecha relación que existe entre el discriminante asociado a una ecuación de Hill y el diagrama de dispersión o diagrama de Brillouin asociado a la ecuación de onda de un grado de libertad. Los diagramas de dispersión nos brindan información sobre la propagación de la onda en determinados medios, en nuestro caso los medios serán periódicos. Los diagramas de Brillouin son obtenidos a partir de la aproximación del discriminante. Cabe mencionar que todos los diagramas de estabilidad, curvas de transición, curvas Iso- μ , líneas de máxima energía y las superficies del discriminante definidas en el capítulo 3 fueron obtenidas mediante la aproximación del discriminante (capítulo 4).

El presente trabajo está organizado como sigue: En el capítulo 2 se presentan los teoremas y resultados principales relacionados con las ecuaciones diferenciales periódicas, se introducirán los diagramas de estabilidad y se mostrará que el discriminante de una ecuación de Hill de un grado de libertad tiene un papel preponderante en el análisis de dicho sistema; en el capítulo 3 se presenta la superficie formada por el discriminante de una ecuación diferencial periódica, se introduce el nuevo concepto de Líneas de Máxima Energía (*MEL*), el cual hace referencia al crecimiento de las soluciones inestables de (1.1). Después, utilizamos el concepto de *MEL* para dar una nueva caracterización de los puntos de coexistencia, es decir, de los puntos en el plano $\alpha - \beta$ en los cuales todas las soluciones son T o $2T$ periódicas. También se hace una descripción más detallada de las curvas Iso- μ . Todos los conceptos, de este capítulo, se presentan gráficamente sobre la superficie formada por el discriminante y en el plano de parámetros $\alpha - \beta$.

En el capítulo 4 obtendremos una aproximación del discriminante en términos de sumatorias recurrentes, estas sumatorias sólo dependen del muestreo temporal de la función de excitación $p(t)$. La nueva aproximación se obtiene en términos de las funciones Walsh. Dado que esta aproximación depende de la obtención de la inversa de dos matrices de grandes dimensiones era prácticamente intratable, pero, gracias a las propiedades de las funciones Walsh, las matrices en cuestión son transformadas similarmente a matrices triangulares superiores y la dependencia de las funciones Walsh es eliminada. Gracias a esta forma triangular la aproximación puede ser escrita como una suma de sumatorias recurrentes. Al final del capítulo 4 se prueba que la nueva aproximación es equivalente a la hecha por Lyapunov en su trabajo [21], es decir, puede ser escrita como una sumatoria de integrales múltiples del término $\alpha + \beta p(t)$, finalmente se realiza un breve estudio del error de la aproximación y se prueba la convergencia del método.

En el capítulo 5 se presentan tres diferentes formas de estabilizar una ecuación de Hill,

dos de ellas utilizan la relación existente entre las curvas de transición de una ecuación diferencial periódica con disipación y las curvas Iso- μ . La tercera forma de estabilización utiliza la nueva aproximación del discriminante, obtenida en el capítulo 4, para obtener una función $u(t+T) = u(t)$ que al ser sumada a la función de excitación $p(t)$ hace que el discriminante asociado a la ecuación $\ddot{x} + (\alpha + \beta(p(t) + u(t)))x = 0$, tome el valor deseado.

En el capítulo 6 se describe la relación existente entre las ecuaciones diferenciales periódicas y la ecuación de onda de un grado de libertad. Se presenta el vínculo entre el discriminante asociado a una ecuación de Hill con los diagramas de dispersión o diagramas de Brillouin. Esto último es de interés dado que los diagramas de Brillouin pueden ser utilizados en el estudio de la propagación de ondas como por ejemplo el flujo de la luz en medios periódicos y el movimiento de electrones a través de materiales con potencial periódico.

2.0 PRELIMINARES

Este capítulo está dedicado a la exposición de los resultados principales sobre las ecuaciones diferenciales periódicas y lineales. Se verá que la estabilidad de las soluciones de dichos sistemas depende únicamente de la posición, con respecto al círculo unitario de los valores característicos de la matriz de monodromía asociada a la ecuación diferencial; también se prueba que para sistemas de un grado de libertad la función denominada discriminante juega un papel preponderante en el análisis de la estabilidad de los sistemas periódicos. Por último se presenta un teorema que relaciona la velocidad con la que una solución inestable tiende a infinito con las soluciones de sistemas amortiguados, este último teorema es utilizado en los capítulos 3 y 5. La mayoría de las pruebas de los teoremas y lemas presentados en esta sección serán omitidas pueden ser encontradas en las monografías [1, 23, 36] entre muchas otras.

2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES PERIÓDICAS

Considere una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes periódicos de la forma

$$\ddot{y} + (\alpha + \beta p(t)) y = 0 \tag{2.1}$$

donde $p(t)$ es una función real y periódica, con período mínimo T , i.e. $p(t + T) = p(t)$. Diremos que el sistema (2.1) es estable si todas sus soluciones son acotadas, de lo contrario el sistema se dirá inestable. Sabemos que cualquier ecuación diferencial lineal de orden superior puede ser escrita como un sistema de primer orden, la ecuación (2.1) puede ser reescrita utilizando el usual cambio de variables $z_1 = y$ y $z_2 = \dot{y}$ como

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Sean y_1 y y_2 dos soluciones linealmente independientes de (2.1) sujetas a las condiciones iniciales $y_1(t_0) = 1$, $y_2(t_0) = 0$, $\dot{y}_1(t_0) = 0$ y $\dot{y}_2(t_0) = 1$, obviamente los vectores $x_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix}$

y $x_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$ satisfacen el sistema (2.2); La matriz de transición de estados $\Phi(t, t_0)$ está definida como aquella cuyas columnas son los vectores x_1 y x_2 [4], es decir

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Dado que los vectores de la matriz de transición de estados son soluciones de (2.2), la matriz $\Phi(t, t_0)$ satisface la misma ecuación. La propiedad más importante, y por la que la matriz $\Phi(t, t_0)$ recibe su nombre, es que $\Phi(t, t_0)$ mapea cualquier estado de un tiempo inicial t_0 a cualquier tiempo t , i.e. $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$.

La matriz de transición de estados de un sistema periódico puede ser factorizada en dos matrices no singulares y dependientes del tiempo. Esta factorización, quizá el resultado más importante en el área de sistemas periódicos lineales, fue propuesta por Floquet [23] y es presentada en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 (Floquet). *Sea la ecuación diferencial periódica $\dot{x} = A(t)x$, $A(t+T) = A(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ y sea $\Phi(t, 0)$ su matriz de transición de estados. La matriz $\Phi(t, 0)$ puede ser escrita como*

$$\Phi(t, 0) = P^{-1}(t)e^{Rt}, \quad P(t+T) = P(t) \quad (2.4)$$

ya donde R es una matriz cuadrada $2n \times 2n$ no necesariamente real.

Si el tiempo inicial t_0 es diferente de cero la factorización de Floquet puede ser escrita como [4]

$$\Phi(t, t_0) = P^{-1}(t)e^{R(t-t_0)}P(t_0), \quad P(t+T) = P(t) \quad (2.5)$$

debido a las propiedades $\Phi(t_1, t_2) = \Phi(t_1, t_3)\Phi(t_3, t_2)$ y $\Phi^{-1}(t_1, t_2) = \Phi(t_2, t_1)$.

Para entender la importancia del teorema de Floquet, consideremos momentáneamente el sistema periódico

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t+T) = A(t) \quad (2.6)$$

donde $A(t)$ es una matriz real periódica y $A(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Sea $\Phi(t, 0)$ la matriz de transición asociada a (2.6) y $x(t)$ una solución de (2.6) sujeta a alguna condición inicial $x(0) = x_0$, y para un $t > 0$ expresemos $t = kT + \tau$ donde k es un entero no negativo, T es el período de (2.6) y $\tau \in [0, T)$. Sabemos que la matriz de transición de estados mapea cualquier estado inicial x_0 , en el tiempo inicial $t_0 = 0$ al estado $x(t)$ en el tiempo t , por lo tanto

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, 0)x_0 \\ &= \Phi(kT + \tau, 0)x_0 \\ &= \Phi(kT + \tau, kT)\Phi(kT, (k-1)T)\dots\Phi(2T, T)\Phi(T, 0)x_0 \end{aligned}$$

Usando la expresión (2.5) es fácil ver que

$$\begin{aligned}
 \Phi(nT, (n-1)T) &= P^{-1}(nT) e^{TR} P((n-1)T) \\
 &= P^{-1}(T) e^{TR} P(0) \\
 &= P^{-1}(T) e^{TR} \\
 &= \Phi(T, 0)
 \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Phi(\tau, 0) \Phi(T, 0) \Phi(T, 0) \dots \Phi(T, 0) \Phi(T, 0) x_0 \\
 &= \Phi(\tau, 0) [\Phi(T, 0)]^k x_0
 \end{aligned}$$

Dado a que las columnas de $\Phi(t, t_0)$ son soluciones del sistema lineal (2.6), los elementos de la matriz $\Phi(\tau, 0)$ son acotados. El elemento que determina si la solución x tiende a infinito o se mantiene acotada cuando el tiempo t tiende a infinito es $[\Phi(T, 0)]^k$. Supongamos que el vector x_0 es un vector característico de la matriz $\Phi(T, 0)$ y μ es el valor característico asociado a x_0 . Utilizando el hecho de que $[\Phi(T, 0)]^k x_0 = \mu^k x_0$ podemos reescribir la solución x como

$$x(t) = \mu^k \Phi(\tau, 0) x_0$$

Por lo tanto, para el caso de los sistemas periódicos $\dot{x} = A(t)x$, $A(t+T) = A(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, podemos concluir dos cosas: a) La solución x , en cualquier tiempo t , puede ser obtenida al conocer su matriz de transición de estados en el intervalo $t \in [0, T]$; y b) La estabilidad de las soluciones depende de los valores característicos de la matriz $\Phi(T, 0)$.

Como se ha visto la matriz $\Phi(T, 0)$ juega un gran papel en la determinación de la estabilidad de los sistemas periódicos. En la literatura, la matriz $\Phi(T, 0)$ se denomina matriz de monodromía, aquí la denotaremos como M y sus valores característicos μ_i son llamados multiplicadores característicos. De la factorización de Floquet (2.4) podemos ver que M también puede escribirse como la matriz exponencial

$$M = e^{TR}$$

los valores propios ρ_i de la matriz R se denominan exponentes característicos y pueden ser escritos como

$$\mu_i = e^{T\rho_i} \tag{2.7}$$

de donde es fácil ver que los exponentes característicos dictan la velocidad con la que una solución, en caso de ser inestable, tiende a infinito. El siguiente teorema nos señala las condiciones, en términos de los multiplicadores característicos, que determinan la estabilidad de los sistemas periódicos.

Teorema 2.1.2. *Sea M la matriz de monodromía asociada a la ecuación diferencial periódica (2.6) y sean $\mu_i \in \sigma(M)$, entonces el sistema (2.6) será; a) Asintóticamente estable, si y sólo si todos los multiplicadores cumplen $|\mu_i| < 1$; b) Estable, si todos los multiplicadores satisfacen $|\mu_i| \leq 1$ y si algún $|\mu_j| = 1$ entonces μ_j debe ser una raíz simple del polinomio mínimo de M ; y c) Inestable, si al menos un multiplicador es $|\mu_i| > 1$ o si algún $|\mu_j| = 1$ entonces μ_j es una raíz múltiple del polinomio mínimo de M .*

El resultado de este teorema se explicara con mayor profundidad en el transcurso de esta sección.

2.1.0.1 Sistemas Hamiltonianos Antes de continuar con el análisis de la estabilidad de los sistemas periódicos, valdría la pena notar que, si añadimos las restricciones de que los bloques de la diagonal principal de la matriz $A(t)$ sean matrices de dimensiones $n \times n$ cuyas entradas sean igual a cero y los bloques de la anti diagonal sean simétricos, i.e. $A(t) = \begin{bmatrix} 0_n & A_{12} \\ A_{21} & 0_n \end{bmatrix}$ con $A'_{21} = A_{21}$ y $A'_{12} = A_{12}$, la ecuación (2.6) puede reescribirse como un sistema Hamiltoniano, es decir

$$\dot{x} = JH(t)x \quad (2.8)$$

donde J es la matriz anti-simétrica $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$, $H(t)$ es una matriz simétrica y $A(t) = JH(t)$.

Se puede demostrar que [25] que la matriz de transición de estados asociada a (2.8) es una matriz simpléctica, es decir, cumple con la condición

$$\Phi'(t, t_0) J \Phi(t, t_0) = J \quad (2.9)$$

para todo tiempo t . Por lo tanto la matriz de monodromía M asociada a (2.8) es simpléctica y satisface al ecuación

$$M'JM = J$$

Premultiplicando por J^{-1} y postmultiplicando por M^{-1} tenemos¹

$$J^{-1}M'J = M^{-1}$$

de donde podemos observar que M' es similar a M^{-1} . Por lo tanto $\sigma(M) = \sigma(M') = \sigma(M^{-1})$, dicho de otra forma, si $\mu \in \sigma(M) \Rightarrow \bar{\mu} \in \sigma(M) \Rightarrow \frac{1}{\mu} \in \sigma(M)$, es decir, los multiplicadores de M son simétricos con respecto al círculo unitario. La Fig. 2.1 muestra la

¹El determinante de toda matriz simpléctica es diferente de cero, lo anterior sigue de $\det(M'JM) = (\det(M))^2 = 1$. De hecho, puede ser demostrado que el determinante de cualquier matriz simpléctica es igual a 1, ver [25, 36].

posición de los multiplicadores y su relación con la estabilidad del sistema (2.8), ver teorema 2.1.2.

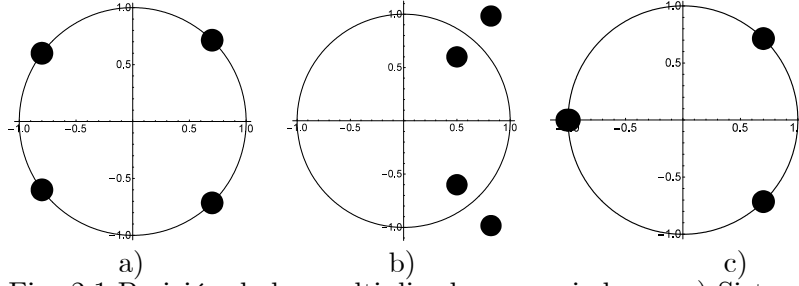


Fig. 2.1 Posición de los multiplicadores asociados a: a) Sistema estable, b) sistema inestable y c) sistema condicionalmente estable

Note que (2.2) puede ser escrita en el formato de (2.8) como

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha + \beta p(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, su matriz de monodromía es una matriz simpléctica y sus valores característicos son simétricos con respecto al círculo unitario, ver [25].

Los multiplicadores asociados al sistema (2.2) son la solución de la ecuación característica

$$\det(\mu I_2 - M) = \mu^2 - \Delta(\alpha, \beta) \mu + 1 = 0 \quad (2.10)$$

donde la función $\Delta(\alpha, \beta)$ es llamada discriminante y está definida como

$$\Delta(\alpha, \beta) = \text{tr}(M)$$

donde tr es el operador Traza. La función, $\Delta(\alpha, \beta)$, juega un papel preponderante en el análisis de sistemas periódicos de un grado de libertad como es el caso de (2.2).

El término independiente en (2.10) es igual a 1 debido al teorema de Liouville [19], es decir, sea la ecuación diferencial $\dot{x} = A(t)x$ donde $A(t)$ es una matriz real cuadrada. El determinante de la matriz transición de estados $\Phi(t, t_0)$ asociada a este sistema es

$$\det(\Phi(t, t_0)) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(\tau)) d\tau\right)$$

Puesto que la traza de la matriz de la ecuación (2.2) es igual a cero, podemos decir que el determinante de la matriz de transición de estados asociada a (2.2) es siempre igual a 1 y consecuentemente el determinante de la matriz de monodromía es igual a 1. Por lo tanto los dos multiplicadores asociados a M son

$$\mu_{1,2} = \frac{\Delta(\alpha, \beta) \pm \sqrt{(\Delta(\alpha, \beta))^2 - 4}}{2} \quad (2.11)$$

De (2.11) es fácil ver que multiplicadores $\mu_{1,2}$ dependen del valor de $\Delta(\alpha, \beta)$, es decir; si $\Delta(\alpha, \beta) \geq 2$ entonces los multiplicadores $\mu_{1,2}$ son reales, positivos y recíprocos ($\mu_1 = \frac{1}{\mu_2}$); si $\Delta(\alpha, \beta) \leq -2$ los multiplicadores $\mu_{1,2}$ son reales, recíprocos y negativos; y si $-2 < \Delta(\alpha, \beta) < 2$ los multiplicadores son complejos conjugados y $|\mu_{1,2}| = 1$. Por lo tanto, la estabilidad de (2.2) depende completamente del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$, si $-2 < \Delta(\alpha, \beta) < 2$ entonces el sistema (2.2) es estable; si $\Delta(\alpha, \beta) > 2$ o $\Delta(\alpha, \beta) < -2$ entonces el sistema es inestable. Cuando el discriminante es igual a ± 2 , $\Delta(\alpha, \beta) = \pm 2$, el sistema (2.2) puede ser estable si $\frac{\partial \Delta(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$ o inestable de lo contrario. Más aún, si se cumple el primer caso las soluciones del sistema son linealmente independientes y periódicas de período T si $\Delta(\alpha, \beta) = -2$, y de período $2T$ si $\Delta(\alpha, \beta) = 2$.

2.1.1 Discriminante

Como hemos dicho, el discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ es un término preponderante en el análisis de la estabilidad de los sistemas periódicos de un grado de libertad. Sus propiedades han sido ampliamente estudiadas [16] o [33]. Sus propiedades más importantes son que es una función entera y real con respecto a α , y su orden de crecimiento² es igual a $\frac{1}{2}$, lo que implica que es una función infinitamente diferenciable y que tiene un número infinito de intervalos de crecimiento alternados con un número infinito de intervalos de decrecimiento. La prueba de este interesante hecho fue realizada por Laguerre [33]. El siguiente teorema, introducido por Haupt, nos brinda condiciones en términos del discriminante para las cuales el sistema (2.2) es estable o inestable. El enunciado del teorema fue tomado de [23].

Teorema 2.1.3 (de oscilación de Haupt). *A cada ecuación diferencial periódica*

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t)) x = 0$$

con β constante y $p(T + t) = p(t)$ le corresponden dos secuencias infinitas monotónicamente crecientes de números reales

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2 \tag{2.12}$$

y

$$\lambda'_1, \quad \lambda'_2, \quad \lambda'_3 \tag{2.13}$$

tales que la ecuación diferencial tiene una solución de período T si y sólo si $\alpha = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; o una solución de período $2T$ si y sólo si $\alpha = \lambda'_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, Cada λ_n es

²Es decir, existe una constante positiva B tal que para una β fija la función $|\Delta(\alpha, \beta)| \exp(-B\sqrt{|\alpha|})$ está acotada para todo α [23]

solución de $\Delta(\alpha, \beta) = 2$ y cada λ'_n es solución de $\Delta(\alpha, \beta) = -2$. Los números λ_n y λ'_n se entrelazan y satisfacen las desigualdades

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \dots$$

Las soluciones de la ecuación diferencial periódica son estables en los intervalos

$$(\lambda_0, \lambda'_1), (\lambda'_2, \lambda_1), (\lambda_2, \lambda'_3), \dots$$

Los límites de cada intervalo son, en general, inestables. Las soluciones serán estables y T periódicas si $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ o anti periódicas si $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$.

La Fig. 2.2 muestra la forma clásica de la gráfica del discriminante para una β fija.

2.1.1.1 Diagramas de estabilidad Como se dijo anteriormente, el discriminante asociado a la ecuación de Hill depende de los parámetros α y β , ésto se debe a que las soluciones de (2.2) dependen directamente del par (α, β) , siendo cada solución diferente para diferentes valores del par (α, β) , es decir, suponga que la solución x es estable para algún par (α, β) , el más mínimo cambio de alguno de estos parámetros podría modificar los multiplicadores característicos μ_i de tal forma que el módulo de alguno de ellos sea mayor a uno y así producir inestabilidad en la solución.

En [10], I.M. Gelfand y V. B. Lidskii, introducen el termino *fuertemente estable* para referirse a la condición de robustez de la estabilidad de las soluciones basándose en el estudio de los multiplicadores característicos y su posición con respecto al círculo unitario. Para sistemas de un grado de libertad como es el caso de (2.2), las condiciones de Gelfand y Lidskii se reducen a que los multiplicadores característicos sean números complejos, es decir, que el valor absoluto del discriminante sea menor a dos. La estabilidad de los sistemas periódicos puede ser representada en el plano de parámetros $\alpha - \beta$ mediante un diagrama de estabilidad, la Fig. 2.3 muestra las zonas en las que el sistema (2.2) es estable e inestable. Las zonas inestables son llamadas *lenguas de Arnold* y las curvas que separan las zonas estables de las inestables se denominan *curvas de transición*.

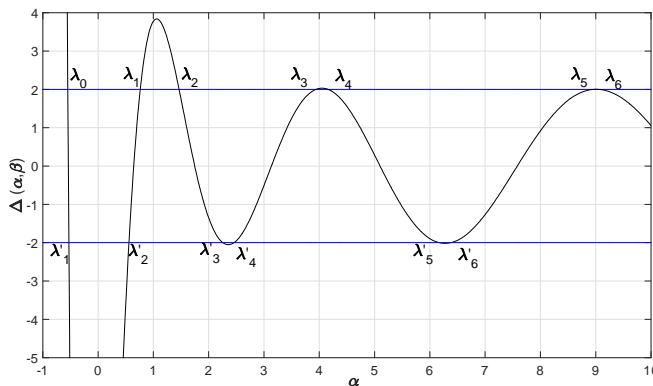


Fig. 2.2 Forma clásica de la gráfica del discriminante

Las *curvas de transición* limitan las zonas estables de las inestables y están formadas por el conjunto de valores (α, β) para los cuales existe al menos una solución, T o $2T$, periódica de (2.1). Si existe un punto $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ en el cual dos curvas de transición del mismo período se intersecan entonces diremos que el punto en cuestión es un punto de coexistencia, es decir, todas las soluciones de $\ddot{x} + (\bar{\alpha} + \bar{\beta})x = 0$ serán, T o $2T$, periódicas³.

Se puede demostrar [36] que en el plano $\alpha - \beta$, existe un número infinito de zonas inestables alternadas con un número infinito de zonas estables, en otras palabras, las zonas inestables forman conjuntos disjuntos. Las lenguas de Arnold son identificadas según su aparición, la lengua cero es la lengua más a la izquierda seguida por la lengua 1 y así sucesivamente, ver Fig. 2.3. Más aún, para $T = 2\pi$, la k -ésima lengua de Arnold "nace" en los puntos $(\frac{k^2}{4}, 0)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, [36]

La relación entre las lenguas de Arnold y el discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ será profundizada en el capítulo 3.

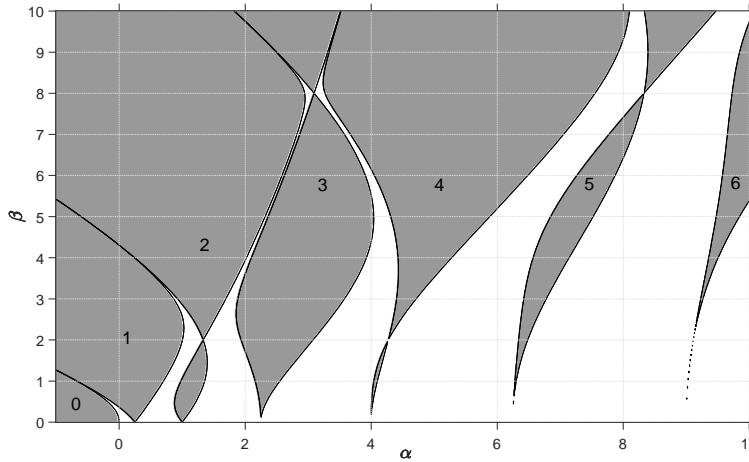


Fig. 2.3 Lenguas de Arnold de la ecuación $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \cos(2t)))x = 0$, zonas estables en blanco, zonas inestables en gris.

2.1.1.2 Curvas Iso- μ Las curvas Iso- μ son líneas dentro de las regiones de inestabilidad, están definidas por valores de α y β para las cuales las soluciones inestables tienen la misma velocidad de crecimiento. Como sabemos los exponentes característicos ρ_i determinan la velocidad con la que una solución inestable tiende a infinito. El crecimiento será mayor mientras mayor sea la parte real positiva de ρ_i . También sabemos que los exponentes característicos ρ_i están definidos con base a los multiplicadores, i.e. $\mu_i = e^{\rho_i T}$. Por lo tanto, podemos decir que mientras mayor sea el módulo de μ_i mayor será la velocidad con la que

³En términos del teorema de Haupt, la coexistencia se da cuando existe un $\alpha = \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+1}$ ó $\alpha = \lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+1}$.

la solución tienda a infinito. Definiremos la velocidad de crecimiento como

$$\gamma = \max_i \{|\sigma(M)|\} > 1$$

donde $\sigma(M) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ y $|\sigma(M)| = \{|\mu_1|, |\mu_2|, \dots, |\mu_n|\}$.

En [24] McLachlan utiliza los exponentes característicos para definir las curvas Iso- μ . Note que la definición utilizada por McLachlan y la utilizada en el presente trabajo son equivalentes. La Fig. 2.4 muestra las curvas Iso- μ de la ecuación $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \cos(2t)))x = 0$

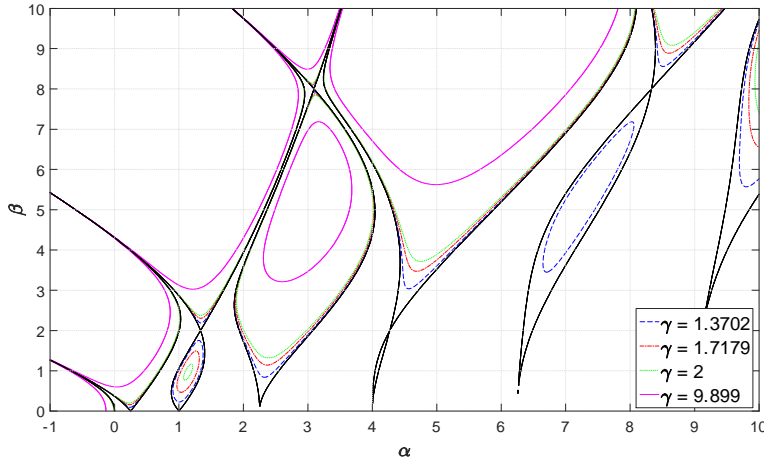


Fig. 2.4 Iso- μ curvas de la ecuación $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \cos(2t)))x = 0$, para diferentes valores de γ

Para finalizar el capítulo se presenta un teorema que relaciona los multiplicadores característicos asociados a un sistema periódico con término disipativo, con los multiplicadores asociados a un sistema inestable.

Teorema 2.1.4. *Sea la ecuación de Hill*

$$\ddot{y} + (\alpha + \beta p(t))y = 0 \quad (2.14)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y $p(t+T) = p(t)$. Una Iso- μ curva con la velocidad de crecimiento γ , es igual a las curvas de transición de la ecuación de Hill asociada

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (\alpha_1 + \beta q(t))x = 0 \quad (2.15)$$

con $\alpha_1, \delta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, si y sólo si

$$\gamma = e^{\frac{1}{2}\delta T} \quad (2.16)$$

y

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{4}\delta^2$$

donde $\gamma = \max [|\sigma(\Phi_y(T, 0))|]$, [9].

Prueba. Las ecuaciones (2.14) y (2.15) pueden reescribirse como

$$\dot{\bar{y}}(t) = A_1(t) \bar{y}(t) \quad (2.17)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_2(t) \bar{x}(t) \quad (2.18)$$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta q(t) & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 - \beta q(t) & -\delta \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$. Sean $\Phi_y(t, t_0)$, $\Phi_x(t, t_0)$ las matrices de transición de estados asociadas a (2.17) y (2.18) respectivamente. Definiendo el cambio de variable

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}\delta t} z(t) \quad (2.19)$$

y sustituyendo (2.19) en (2.15) obtenemos

$$\ddot{z}(t) + \left(-\frac{1}{4}\delta^2 + \alpha_1 + \beta q(t) \right) z(t) = 0$$

Si definimos $\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{4}\delta^2$, la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\ddot{z}(t) + (\alpha + \beta q(t)) z(t) = 0 \quad (2.20)$$

Resolviendo la ecuación (2.20) tenemos

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= \Phi_z(t, t_0) \bar{z}(t_0) \\ \bar{z} &= \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde $\Phi_z(t, t_0)$ es la matriz de transición de estados asociada a (2.20). Si suponemos que los coeficientes α y β en (2.14) y (2.20) son iguales, podemos decir que

$$\Phi_y(T, 0) = \Phi_z(T, 0)$$

Sustituyendo nuevamente, (2.19) en (2.21) obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(t) \bar{x}(t) &= \Phi_z(t, t_0) \Gamma(t_0) \bar{x}(t_0) \\ \bar{x}(t) &= \Gamma^{-1}(t) \Phi_z(t, t_0) \Gamma(t_0) \bar{x}(t_0) \end{aligned}$$

donde $\Gamma(t) = \Xi(t) \Lambda = \Lambda \Xi(t)$ y $\Xi(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}\delta t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\delta t} \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\delta & 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto

$$\Phi_z(t, t_0) = \Gamma(t) \Phi_x(t, t_0) \Gamma^{-1}(t_0)$$

y haciendo $t = T$ y $t_0 = 0$ se obtiene finalmente

$$\Phi_y(T, 0) = \Lambda \Xi(T) \Phi_x(T, 0) \Lambda^{-1}$$

Por lo que la matriz de monodromía $\Phi_y(T, 0)$ es similar a la matriz $\Xi(T) \Phi_x(T, 0)$ y

$$\max [|\sigma(\Phi_y(T, 0))|] = \max [|\sigma(\Xi(T) \Phi_x(T, 0))|]$$

Finalmente, definiendo $\gamma = \max [|\sigma(\Phi_y(T, 0))|] \geq 1$ y dado que estamos buscando las curvas de transición asociadas a (2.15), todos los multiplicadores característicos de $\Phi_x(T, 0)$ deben ser $|\sigma(\Phi_x(T, 0))| = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} \gamma &= \max [|\sigma(\Xi(T))|] = \max \left[\left| \sigma \left(e^{\frac{1}{2}\delta T} \right) \right| \right] \\ \gamma &= e^{\frac{1}{2}\delta T} \end{aligned}$$

□

Comentario 2.1.5. *Note que la transformación (2.19) nunca es una transformación de Lyapunov, $\forall \delta > 0$, es decir no preserva la propiedad de estabilidad de las soluciones.*

En resumen, la prueba del teorema 2.1.4 se basa en encontrar una transformación la cual tome el valor del módulo del máximo multiplicador γ de (2.14) y lo lleve a 1, i.e. la transformación encoge la solución inestable para que se convierta en una solución periódica. Como vimos anteriormente si el sistema (2.14) es inestable, sus multiplicadores son recíprocos y reales, por lo tanto uno es menor que 1 y el otro mayor que 1, supongamos que $\mu_1 < 1$ y $\mu_2 = \frac{1}{\mu_1} > 1$. En términos del teorema 2.1.4 $\gamma = \mu_2$, aplicando la transformación (2.19) hacemos que $\gamma = 1$, esta transformación también afecta a μ_1 reduciendo su módulo y así la solución asociada a μ_2 se convierte en una solución periódica y la solución asociada a μ_1 tiende aún más rápido a cero.

3.0 SUPERFICIE DEFINIDA POR EL DISCRIMINANTE $\Delta(\alpha, \beta)$

La función discriminante juega un papel crucial en el estudio de la estabilidad de sistemas periódicos. En particular, el discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ de la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t))x = 0, \quad p(t+T) = p(t) \quad (3.1)$$

es una función real, continua e infinitamente diferenciable con respecto a α y β . Para cada par α, β la solución de la ecuación (3.1) es diferente por lo que el discriminante depende de los coeficientes α y β . La propiedad de $\Delta(\alpha, \beta)$ de ser una función continua e infinitamente diferenciable proviene del hecho de que $\Delta(\alpha, \beta)$ es una función entera con orden de crecimiento igual a $\frac{1}{2}$ y del teorema de Laguerre [31] que dice: *Si $f(z)$ es una función entera, real para z real y su orden de crecimiento es menor a dos entonces, los ceros de $\frac{d}{dz}f(z)$ son reales y están separados, entre sí, por los ceros de $f(z)$.* De hecho, en [16] Hochstadt prueba el teorema de oscilaciones de Haupt utilizando las propiedades de las funciones enteras.

Puesto que el discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ es una función infinitamente diferenciable y continua con respecto a los parámetros α y β , podemos asegurar que $\Delta(\alpha, \beta)$ define una superficie suave en \mathbb{R}^3 . La superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ contiene toda la información sobre la estabilidad de la ecuación diferencial periódica a la que está asociada. Por ejemplo, es fácil ver que la proyección, sobre el plano $\alpha - \beta$, de la intersección entre la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ y los planos $surf_1 = \{(\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = 2\}$ y $surf_2 = \{(\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = -2\}$ definen las curvas de transición de la ecuación asociada a $\Delta(\alpha, \beta)$. Lo anterior se muestra en la Fig. 3.1.

En este capítulo se introduce una nueva definición, Líneas de Máxima Energía (MEL), las cuales son líneas en el plano $\alpha - \beta$, dentro de las zonas inestables y caracterizadas por tener las soluciones con el crecimiento más rápido dentro de un conjunto de soluciones, para un $\beta = \beta_0$ fijo. Basados en la definición de MEL damos una nueva caracterización de los puntos de coexistencia y se hace una aproximación de las MEL para la ecuación de Meissner. Al final del capítulo, mostramos gráficamente y damos una interpretación de las curvas Iso- μ . Los conceptos presentados serán ilustrados con ayuda de la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ y serán utilizados en el capítulo 5.

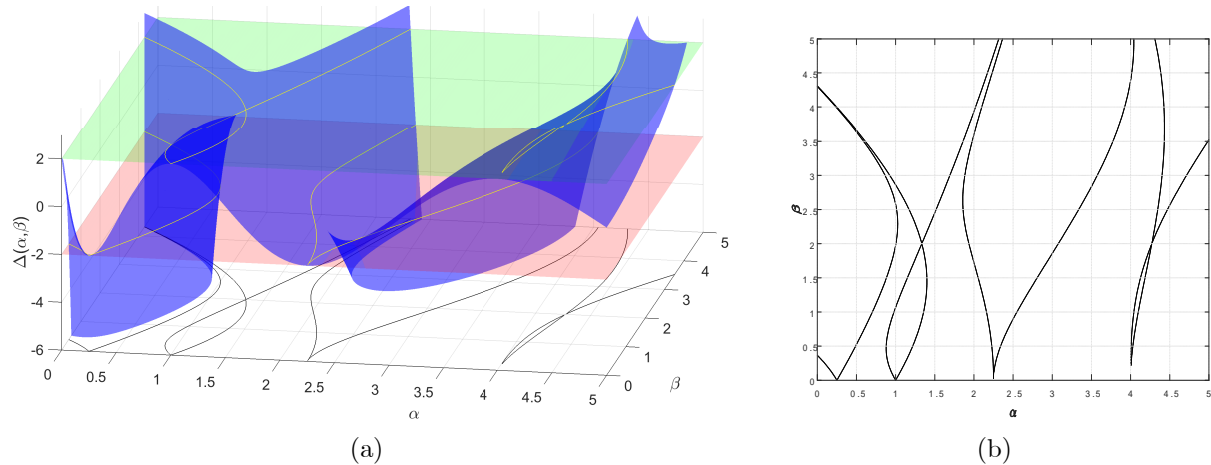


Fig. 3.1 a) Intersección de la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ y $surf_1$ y $surf_2$.
b) Proyección de la intersección.

3.1 LÍNEAS DE MÁXIMA ENERGÍA (MEL)

El teorema de oscilaciones de Haupt nos dice que dada una $\beta = \beta_0$ constante, la línea $\alpha \geq \alpha_0$ está dividida en un número infinito de intervalos en los que la ecuación diferencial periódica (3.1) es estable alternando con un número infinito de intervalos donde (3.1) es inestable. Los intervalos de estabilidad e inestabilidad están separados por valores de $\alpha = \alpha_n$ o α'_n , $n = 1, 2, \dots$, tales que la ecuación (3.1) tiene al menos una solución periódica, siendo α_n y α'_n soluciones de $\Delta(\alpha_n, \beta_0) - 2 = 0$ y $\Delta(\alpha_n, \beta_0) + 2 = 0$ respectivamente. Se puede probar que las funciones $\Delta(\alpha_n, \beta_0) \pm 2 = 0$ son funciones enteras de orden $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, tienen un número infinito de cruces por cero y los ceros de $\frac{\partial \Delta(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha} = 0$ están separados entre sí por los ceros de $\Delta(\alpha_n, \beta_0) \pm 2 = 0$. Es decir, sólo existe un cero de $\frac{\partial \Delta(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha}$ entre cada par de ceros de las funciones $\Delta(\alpha_n, \beta_0) - 2 = 0$ o $\Delta(\alpha_n, \beta_0) + 2 = 0$, vea la Fig. 2.2.

Podemos asegurar que en cada intervalo inestable $\alpha \in (\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n})$ ó $\alpha \in (\alpha'_{2n-1}, \alpha'_{2n})$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ existe un $\alpha = \phi$ tal que, la energía de la solución inestable¹ en el punto (ϕ, β_0) es mayor que la energía de todas soluciones inestables del intervalo $(\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n})$ ó $\alpha \in (\alpha'_{2n-1}, \alpha'_{2n})$. Es decir, defina $x_1^{(\phi, \beta_0)}$ como la solución de la ecuación diferencial (3.1) con $\alpha = \phi$ y $\beta = \beta_0$, entonces la solución

$$\left\| x_1^{(\phi, \beta_0)}(t) \right\|_2 \geq \max_{\bar{\alpha} \in F} \left\| x_1^{(\bar{\alpha}, \beta_0)}(t) \right\|_2$$

donde F es el segmento de recta al cual pertenece ϕ . Por lo anterior podemos introducir dos definiciones

¹Recuerde que las zonas inestables están caracterizadas por tener una solución exponencialmente inestable y una solución exponencialmente estable.

Definición 3.1.1. Para un $\beta = \beta_0$ constante el punto de máxima energía $\phi_n(\beta_0)$, en cada intervalo de inestabilidad, es el valor de α para el cual el módulo del multiplicador característico alcanza su máximo, este valor depende del valor actual de β_0 . El subíndice n hace referencia al orden de aparición² siendo el $n = 1$ el más a la izquierda.

Definición 3.1.2. La Línea de Máxima Energía (MEL) es la unión de los puntos de máxima energía $\phi_n(\beta)$ con el mismo subíndice n y para todo β

$$MEL_n = \cup_{\forall \beta} \phi_n(\beta)$$

Comentario 3.1.3. Note que la definición de puntos de máxima energía $\phi_n(\beta_0)$ implica que $\alpha = \phi_n(\beta_0)$ si y sólo si $\frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta(\alpha, \beta_0) = 0$ con β_0 constante. Y que debido a que $\Delta(\alpha, \beta)$ es una función continua, las MEL son líneas continuas y son dependientes de β y del número de identificación n .

La Fig. 3.2 a) muestra las líneas de máxima energía en la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ asociada a la ecuación diferencial $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \cos(2t)))x = 0$, y Fig. 3.2 b) muestra la proyección, en el plano $\alpha - \beta$, de las curvas de transición y MEL.

3.1.1 Coexistencia

Como sabemos, las curvas de transición asociadas a la ecuación de Hill, se caracterizan por tener al menos una solución T periódica si $\Delta(\alpha, \beta) = 2$, ó $2T$ periódica si $\Delta(\alpha, \beta) = -2$. El teorema de oscilaciones de Haupt nos dice que las curvas de transición asociadas a soluciones de dos períodos diferentes nunca se intersecaran, pero, puede darse el caso de que dos curvas asociadas a soluciones del mismo período se intersequen provocando que la zona de inestabilidad colapse y todas las soluciones de (3.1) sean T o $2T$ periódicas. El punto donde dos curvas de transición se intersecan se le conoce como punto de coexistencia, ver [34] o [35].

Usualmente la coexistencia se define en términos de la intersección de las curvas de transición, justo como lo acabamos de hacer. Una forma equivalente de definir la coexistencia es en términos de la derivada parcial del discriminante con respecto al parámetro α , es decir, el punto (α_0, β_0) define un punto de coexistencia: de soluciones T periódicas si y sólo si $\Delta(\alpha_0, \beta_0) = 2$ y $\left. \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = 0$; o de soluciones $2T$ periódicas si y sólo si $\Delta(\alpha_0, \beta_0) = -2$ y $\left. \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = 0$.

Observe que la condición $\left. \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = 0$ implica que α_0 pertenece a alguna línea de máxima energía, vea definición 3.1.2 y el comentario 3.1.3. Por lo tanto podemos introducir una nueva caracterización de los puntos de coexistencia.

²Note que el orden de aparición de los puntos de máxima energía coincide con el numero asociado a la zona de inestabilidad en el que se encuentra.

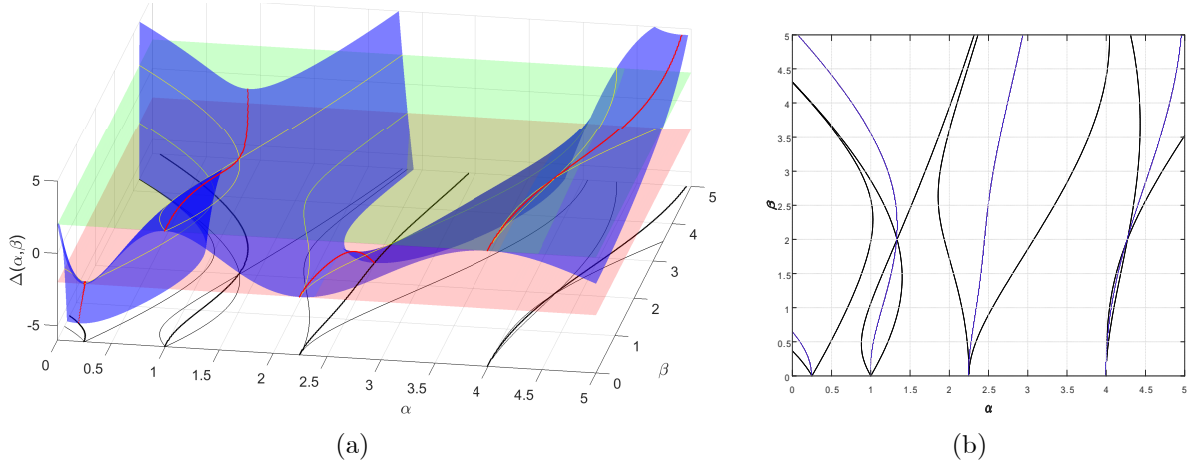


Fig. 3.2 a) MEL sobre la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ en rojo.
b) Proyección de la intersección.

Caracterización 3.1.4. *Un punto $(\alpha_0, \beta_0) \in MEL_{2n}$ es un punto de coexistencia de soluciones T -periódicas si y sólo si $\Delta(\alpha_0, \beta_0) = 2$. Y, el punto $(\alpha_0, \beta_0) \in MEL_{2n+1}$ corresponde a la coexistencia de dos soluciones $2T$ -periódicas si y sólo si $\Delta(\alpha_0, \beta_0) = -2$.*

Lema 3.1.5. *Si $\phi_n(0)$ es el n -ésimo punto de máxima energía asociado a la ecuación periódica diferencial $\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t))x = 0$, con $\beta = 0$ y $p(t+T) = p(t)$ entonces,*

$$\phi_n(0) = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 \quad (3.2)$$

para cualquier función de excitación periódica.

Prueba. El lema sigue obtener la matriz de transición de estados asociada a (3.1) con $\beta = 0$, y después obtener el discriminante asociado a la matriz de monodromía M , así podemos asegurar que

$$\Delta(\alpha, 0) = 2 \cos(\sqrt{\alpha}T)$$

para cualquier función de excitación periódica $p(t+T) = p(t)$. Sabemos que la función $\cos(t)$ es igual a ± 1 si y sólo si $t = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, por lo tanto, para que $\Delta(\alpha, 0) = \pm 2$, α debe ser igual a

$$\alpha = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2$$

donde T es el período mínimo de la función de excitación. Por lo tanto la relación (3.2) es verdadera. \square

De la nueva caracterización de los puntos de coexistencia podemos concluir que todos los $\phi_n(0)$, exceptuando $n = 0$, son puntos de coexistencia. De la teoría clásica de ecuaciones diferenciales periódicas [36] sabemos que las lenguas de Arnold nacen en los puntos $\left(\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2, 0\right)$, estos puntos coinciden con los puntos de máxima energía $\phi_n(0)$ por lo tanto,

podemos asociar la n -ésima línea de máxima energía con la n -ésima lengua de Arnold. Además, si la n -ésima lengua de Arnold tiene m puntos de coexistencia, entonces la MEL asociada a la n -ésima lengua tendrá los mismos m puntos de coexistencia.

Lema 3.1.6. *Si en la MEL_{2n} , existen m puntos donde dos soluciones T periódicas coexisten, el discriminante $\Delta(\phi_{2n}(\beta), \beta)$ será igual a 2 para m diferentes puntos $(\phi_{2n}(\beta), \beta)$; Si en la MEL_{2n+1} existen m puntos donde dos soluciones $2T$ periódicas coexisten, el discriminante $\Delta(\phi_{2n+1}(\beta), \beta)$ será igual a -2 para m diferentes puntos $(\phi_{2n+1}(\beta), \beta)$.*

En caso de que no existan puntos de coexistencia asociados a una lengua de Arnold, solamente podemos asegurar que $|\Delta(\phi_n(\beta), \beta)| > 2$ para todo β .

La prueba del lema 3.1.6 se realizara en la siguiente sección. La Fig 3.3 a) muestra el discriminante evaluado sobre la MEL_3 asociada a la ecuación $\ddot{x} + [\alpha + \beta(\cos(t) + \sin(3t))]x = 0$ (sin puntos de coexistencia); y la Fig 3.3 b) muestra la MEL_2 asociada a la ecuación $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \cos(2t)))x = 0$ (con 1 punto de coexistencia).

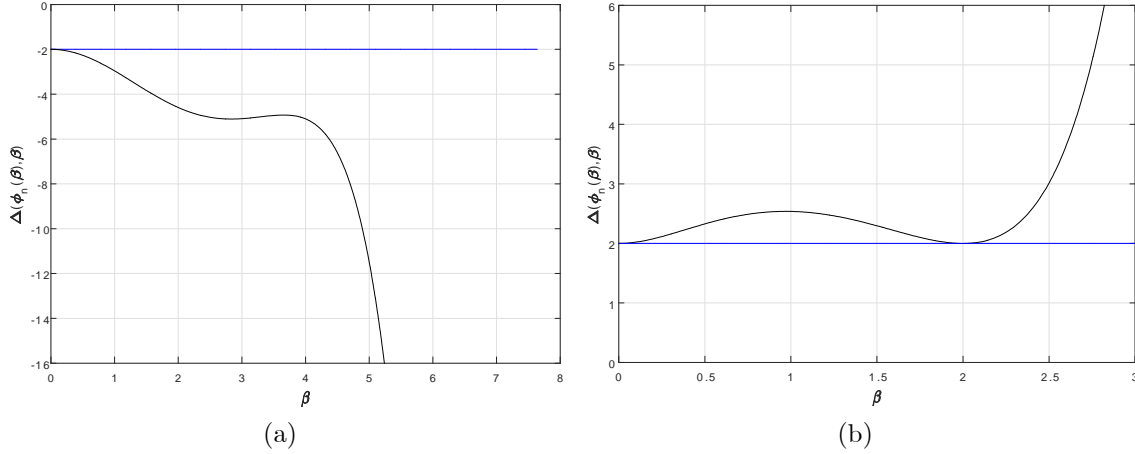


Fig. 3.3 a) Discriminante evaluado sobre MEL sin coexistencia.
b) Discriminante evaluado sobre MEL con coexistencia.

3.1.1.1 Pockets de inestabilidad Cuando dos curvas de transición, del mismo período, se intersectan en un punto, dos soluciones linealmente independientes del mismo período coexisten y el punto en cuestión es llamado punto de coexistencia. Denominaremos *pocket* de inestabilidad a la zona inestable que se encuentra entre dos puntos de coexistencia de la misma lengua, es decir, la zona limitada por dos curvas de transición que se intersectan.

Note que si existen $n \geq 1$ puntos de coexistencia entonces, habrán $n - 1$ *pockets* de inestabilidad. De la Fig. 2.4 se puede observar que la lengua 2 tiene 2 puntos de coexistencia por lo que tiene 1 *pockets* de inestabilidad. También vale la pena notar que las curvas Iso- μ asociadas a los *pockets* de inestabilidad son cerradas.

3.1.2 Aproximación de MEL para la ecuación de Meissner

Las soluciones de ecuaciones periódicas de la forma

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t)) x = 0$$

en general no pueden ser obtenidas de forma analítica, excepto por algunos ejemplos como: la ecuación de Meissner cuya función de excitación $p(t)$ es una función periódica constante a pedazos; la ecuación de Lamé donde $p(t)$ es una función elíptica de Jacobi; ó cuando $p(t)$ es una función lineal a pedazos (dientes de sierra), vea [23] ó [24]. En esta parte obtendremos una aproximación analítica de las MEL_n con $n = 1, 2, \dots$, de la ecuación de Meissner, este resultado se utilizará en el capítulo 5 donde se estabilizará un pocket de inestabilidad al añadir disipación a la ecuación diferencial periódica.

Considere la ecuación de Meissner

$$\ddot{y} + (\alpha + \beta \text{sign}(\sin(t))) y = 0 \quad (3.3)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Con las definiciones $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ y $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}'$, la ecuación (3.3) puede ser reescrita como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta \text{sign}(\sin(t))) & 0 \end{bmatrix} x \quad (3.4)$$

Por simplicidad, sólo obtendremos la solución de (3.4) para $\alpha > \beta$. La matriz de monodromía M para $\alpha > \beta$ es [28] :

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\pi w_2) & \frac{1}{w_2} \sin(\pi w_2) \\ -w_2 \sin(\pi w_2) & \cos(\pi w_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\pi w_1) & \frac{1}{w_1} \sin(\pi w_1) \\ -w_1 \sin(\pi w_1) & \cos(\pi w_1) \end{bmatrix}$$

donde $w_1 = \sqrt{\alpha + \beta}$ y $w_2 = \sqrt{\alpha - \beta}$. Sabemos que los multiplicadores característicos son

$$\mu_{1,2} = \frac{\Delta(\alpha, \beta) \pm \sqrt{\Delta(\alpha, \beta)^2 - 4}}{2}$$

y $\Delta(\alpha, \beta)$ es monotónica en los intervalos $\alpha \in [\phi_i, \phi_{i+1}]$ donde ϕ_i son los ceros de $\frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta(\alpha, \beta)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha, \beta) &= 2 \cos(\pi w_1) \cos(\pi w_2) \\ &\quad - \left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_2}{w_1} \right) \sin(\pi w_1) \sin(\pi w_2) \\ &= \frac{(w_1 + w_2)^2}{2w_1 w_2} \cos(\pi w_1 + \pi w_2) \\ &\quad - \frac{(w_1 - w_2)^2}{2w_1 w_2} \cos(\pi w_1 - \pi w_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta(\alpha, \beta) &= -\frac{(w_1^2 - w_2^2)^2}{4w_1^3 w_2^3} \cos(\pi w_1 + \pi w_2) \\
&+ \frac{(w_1^2 - w_2^2)^2}{4w_1^3 w_2^3} \cos(\pi w_1 - \pi w_2) \\
&- \frac{\pi (w_1 + w_2)^3}{4w_1^2 w_2^2} \sin(\pi w_1 + \pi w_2) \\
&- \frac{\pi (w_1 - w_2)^3}{4w_1^2 w_2^2} \sin(\pi w_1 - \pi w_2)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

si escogemos valores de α y β tales que

$$\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_2}{w_1} \approx 2$$

entonces, (3.5) y (3.6) son reescritas como

$$\Delta(\alpha, \beta) \approx 2 \cos(\pi w_1 + \pi w_2) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta(\alpha, \beta) \approx -\frac{\pi (w_1 + w_2)}{w_1 w_2} \sin(\pi w_1 + \pi w_2) \tag{3.8}$$

por lo tanto, la condición para que (3.8) sea igual a cero es

$$w_1 + w_2 = n$$

y la aproximación del n -ésimo máximo punto de energía es

$$\phi_n(\beta) \approx \frac{\beta^2}{n^2} + \frac{n^2}{4} \tag{3.9}$$

para $n \in \mathbb{Z}_+$

La Fig. 3.4 a) muestra las curvas de transición de la ecuación de Meissner, la aproximación de las líneas de máxima energía obtenidas en (3.9) y las MELs obtenidas numéricamente.

De la Fig. 3.4 a) podemos ver que la aproximación (3.9) es lo suficientemente buena para mostrar algunas de las propiedades de las líneas de máxima energía. De la Fig. 3.4 a), podemos observar que cada MEL_n pasa a través de los puntos de coexistencia asociados a cada lengua de Arnold, lo cual es consistente con la definición de MEL_n .

Sustituyendo (3.9) en (3.5) obtenemos que el estimado del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ evaluado en $(\alpha, \beta) = (\phi_n(\beta), \beta)$ es:

$$\Delta(\phi_n(\beta), \beta) \approx \frac{8\beta^2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\beta\right) - 2n^4 (-1)^n}{4\beta^2 - n^4}$$

la Fig. 3.4 b) muestra $\Delta(\phi_5(\beta), \beta)$, es decir, el valor del discriminante sobre la línea de máxima energía asociada a la quinta lengua de Arnold. Podemos observar que $|\Delta(\phi_n(\beta), \beta)| = 2$ en tres diferentes puntos, lo que significa que la lengua 5 tiene tres puntos de coexistencia.

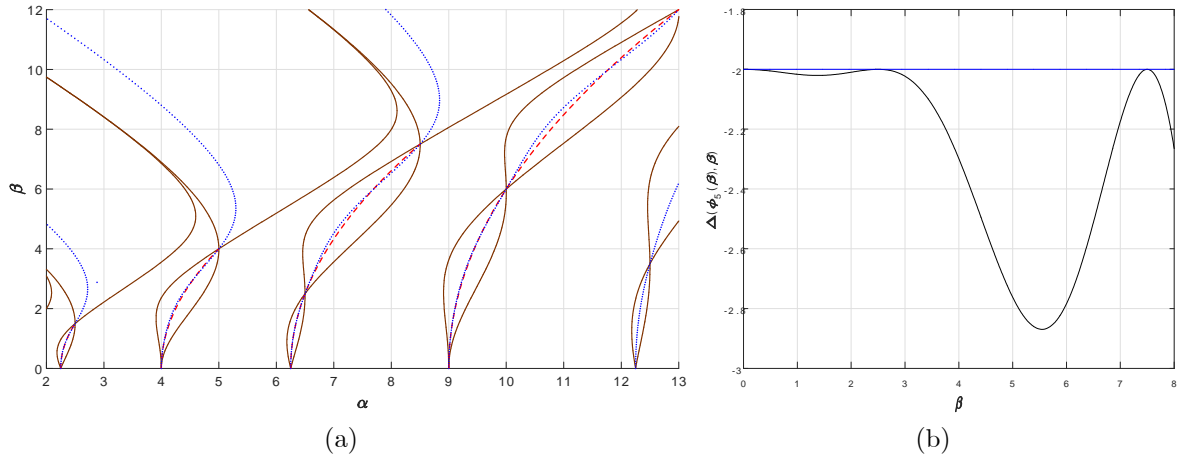


Fig. 3.4 a) Líneas de máxima energía de la ecuación de Meissner, las obtenidas en (3.9) en rojo y en azul las obtenidas numéricamente; b) Discriminante evaluado sobre MEL_5 .

3.2 CURVAS ISO- μ

En este apartado retomaremos el análisis de las curvas Iso- μ . Recuerde que las curvas Iso- μ fueron definidas en el capítulo 2 como líneas dentro de las regiones de inestabilidad que están formadas por valores de α y β para las cuales las soluciones inestables tienen la misma velocidad de crecimiento. Y la velocidad de crecimiento fue asociada con el máximo multiplicador característico

$$\gamma = \max \{|\sigma(M)|\} > 1$$

Además sabemos que debido a que la matriz de monodromía es simpléctica, los multiplicadores característicos son simétricos con respecto al círculo unitario y dado que la matriz de monodromía asociada a la ecuación (3.1) sólo tiene dos multiplicadores característicos, la única posibilidad para que el sistema sea inestable, es que ambos multiplicadores sean reales del mismo signo³. La ecuación (2.11) nos dice que los multiplicadores son

$$\mu_{1,2} = \frac{\Delta(\alpha, \beta) \pm \sqrt{(\Delta(\alpha, \beta))^2 - 4}}{2}$$

por lo tanto el absoluto del máximo multiplicador γ es

$$\gamma = \frac{|\Delta(\alpha, \beta)| + \sqrt{(\Delta(\alpha, \beta))^2 - 4}}{2}, \quad |\Delta(\alpha, \beta)| \geq 2 \quad (3.10)$$

³En sistemas de mayor grado de libertad, es decir, ecuaciones con la forma $\ddot{x} + (A + B(t))x = 0$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y donde A y $B(t)$ son matrices cuadradas $n \times n$, los multiplicadores asociados a sistemas inestables pueden ser números complejos.

Note que entre mayor sea $|\Delta(\alpha, \beta)|$ mayor será la velocidad de crecimiento γ . Más aún, de (3.10) podemos obtener

$$|\Delta(\alpha, \beta)| = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \quad (3.11)$$

lo que nos permite obtener el valor absoluto del discriminante, dado un determinado γ . Por lo tanto (3.11) nos brinda una condición para encontrar las curvas Iso- μ para una γ dada. Es decir, siguiendo los mismos argumentos utilizados para encontrar las curvas de transición al inicio del capítulo, podemos obtener las curvas Iso- μ asociada a la velocidad de crecimiento γ . La única diferencia es que las Iso- μ son la proyección, sobre el plano $\alpha - \beta$, de la intersección entre la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ y los planos $surf_1 = \left\{ (\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = \frac{1+\gamma^2}{\gamma} \right\}$ y $surf_2 = \left\{ (\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = -\frac{1+\gamma^2}{\gamma} \right\}$. Lo anterior se muestra en la Fig. 3.5.

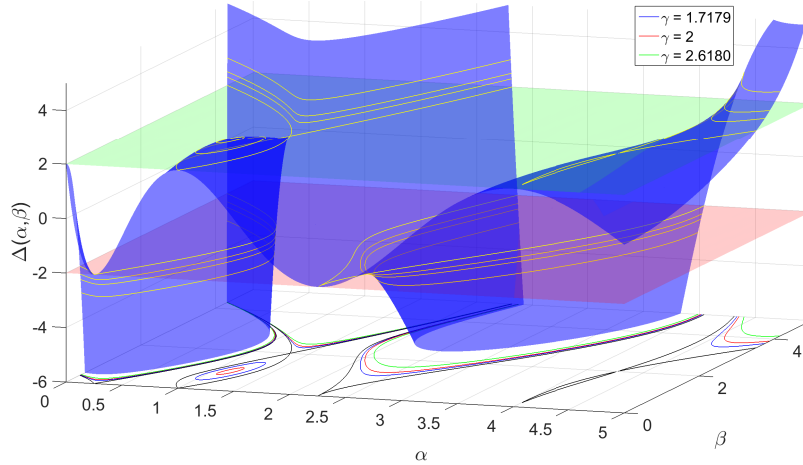


Fig. 3.5 Curvas Iso- μ , representadas sobre la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$

Antes de finalizar el capítulo probaremos gráficamente el lema 3.1.6 de la sección anterior. La Fig. 3.6 muestra las curvas Iso- μ , para diferentes valores de γ , y las líneas de máxima energía de la ecuación de Hill con $p(t) = \cos(t) + \cos(2t)$. Note que las curvas Iso- μ asociadas a un *pocket* de inestabilidad⁴ son curvas cerradas, parecidas a elipses, y son intersecadas por las líneas de máxima energía en los puntos donde el semieje mayor toca la frontera de la elipse. Es decir, las MEL_n que cruzan *pockets* de inestabilidad intersecan en dos ocasiones las curvas Iso- μ asociadas al *pocket*. Por continuidad de la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$, existe un punto dentro del *pocket* de inestabilidad en el cual la curva Iso- μ no es más que un simple punto, el cual obviamente pertenece a la MEL asociada y es un punto máximo (mínimo) local del discriminante evaluado sobre la MEL asociada.

Las curvas Iso- μ cerradas no son exclusivas de los *pockets* de inestabilidad, puede darse el caso que el discriminante evaluado en $(\alpha, \beta) = (\phi_n(\beta), \beta)$ tenga un máximo (mínimo)

⁴Recuerde que los *pockets* de inestabilidad son regiones inestables, que se encuentran entre dos puntos de coexistencia, pertenecientes a la misma lengua de Arnold.

local, sin llegar a tocar el valor -2 (ó 2), como se muestra en la Fig. 3.3 a), es decir, algunas curvas Iso- μ asociadas a una lengua sin puntos de coexistencia también serán cerradas, esto se puede ver en la Fig. 3.6 c), donde se presentan las Iso- μ curvas y las *MEL* asociadas a la ecuación $\ddot{x} + (\alpha + \beta (\cos(t) + \sin(3t))) x = 0$.

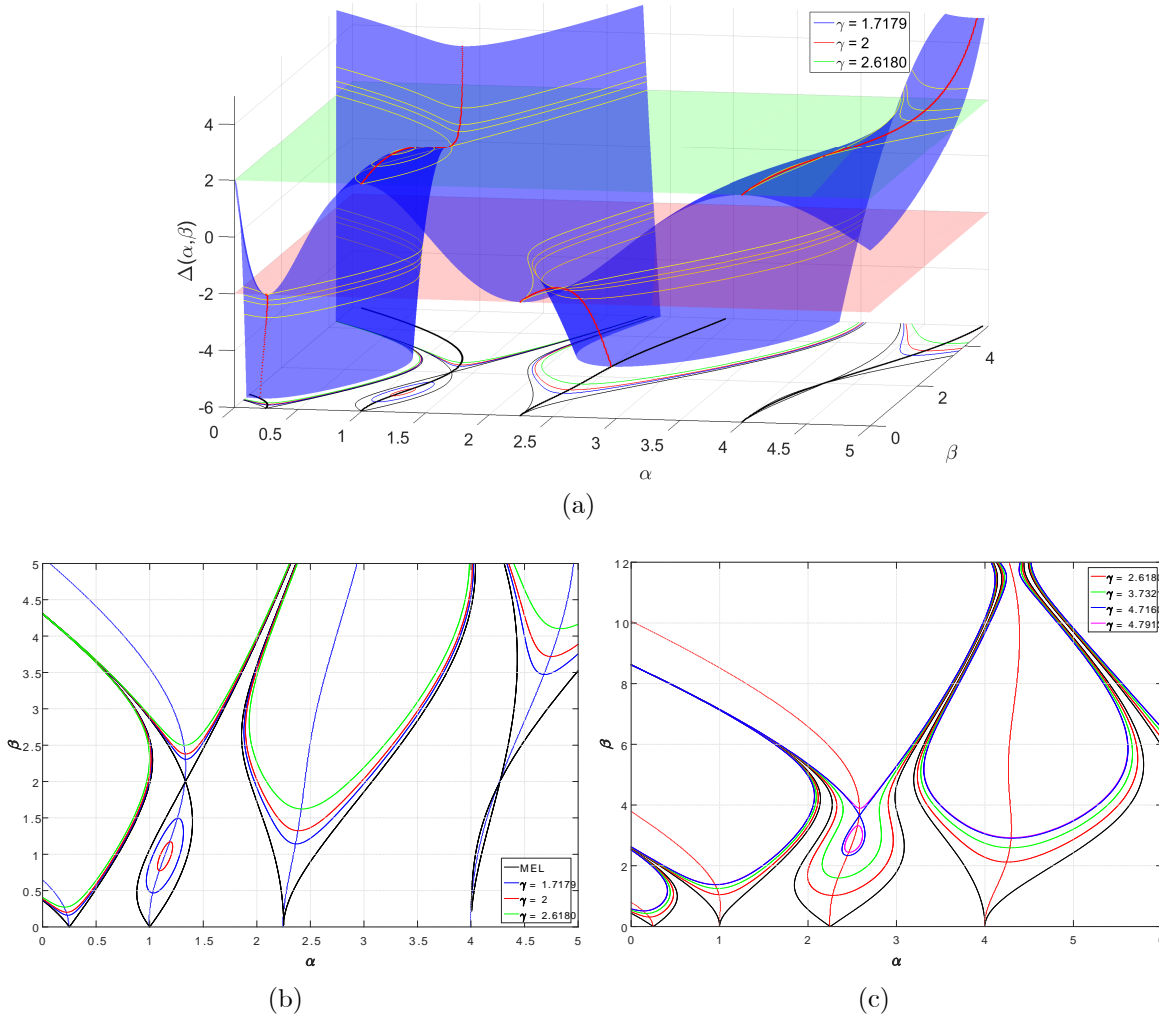


Fig. 3.6 a) Intersección de las curvas Iso- μ y *MEL*.
b) Proyección de la intersección de las curvas Iso- μ y *MEL*.

Por lo descrito anteriormente podemos decir que el discriminante evaluado sobre alguna *MEL* es:

a) Si la lengua asociada no tiene puntos de coexistencia entonces: $|\Delta(\phi_n(\beta), \beta)| = 2$ sólo cuando $\beta = 0$, y $|\Delta(\phi_n(\beta), \beta)| > 2$ para todo $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pueden existir valores de β para los cuales $\frac{\partial \Delta(\phi_n(\beta), \beta)}{\partial \beta} = 0$ pero el discriminante evaluado sobre la *MEL* nunca tendrá módulo igual a 2.

b) Si la lengua asociada tiene m puntos de coexistencia entonces: Si $\Delta(\phi_n(0), 0) = \pm 2$ entonces, $|\Delta(\phi_n(\beta), \beta)| \geq 2$, la igualdad sólo se alcanza para un número m de pares

diferentes $(\phi_n(\beta), \beta)$ y la derivada parcial $\frac{\partial \Delta(\phi_n(\beta), \beta)}{\partial \beta} = 0$ para, al menos, un número $2m - 1$ de pares diferentes $(\phi_n(\beta), \beta)$.

4.0 APROXIMACIÓN DEL DISCRIMINANTE $\Delta(\alpha, \beta)$

En este capítulo se obtiene una nueva aproximación del discriminante asociado a la ecuación de Hill en términos de sumatorias recurrentes, estas sumatorias solamente dependen de los parámetros α , β y del muestreo temporal de la función de excitación $p(t)$, i.e. en valores puntuales de la función $p(t)$. La nueva aproximación es obtenida, en un principio, en términos de las series de funciones Walsh, esta primera aproximación tiene la desventaja de depender de la inversa de dos matrices de grandes dimensiones; luego, mediante propiedades únicas de las funciones Walsh, la matriz inversa en la cual depende la aproximación, es llevada a una forma triangular superior y la dependencia de las funciones Walsh es eliminada; finalmente, mediante simples operaciones algebraicas la nueva aproximación es obtenida en términos de sumatorias recurrentes. Dado que las sumatorias recurrentes dependen del muestreo de la función de excitación, podemos decir que es una aproximación "discreta". La importancia de obtener la aproximación del discriminante mediante métodos numéricos o analíticos, radica en el desconocimiento de la solución exacta de la ecuación de Hill. Cabe mencionar que solo se conoce la solución para algunos ejemplos como la ecuación de Meissner cuya función de excitación $p(t)$ es una función periódica constante a pedazos; la ecuación de Lamé donde $p(t)$ es una función elíptica de Jacobi; o cuando $p(t)$ es una función dientes de sierra.

Se prueba que al hacer que el orden de la aproximación tienda a infinito, la dependencia del muestreo de $p(t)$ se transforma en una dependencia de integrales definidas. También se prueba que la nueva aproximación es equivalente a la hecha por Lyapunov en su brillante trabajo [21]. Otras aproximaciones del discriminante se pueden encontrar en [29] y [15], la primera se basa en el método aproximaciones sucesivas y la segunda se basa en propiedades del problema de Sturm-Liouville.

Al final del capítulo, se presenta un breve análisis del error y se prueba la convergencia del método, es decir, se prueba que cuando el orden de la aproximación tiende a infinito, está tiende al valor real del discriminante. La definición y las propiedades más importantes de las funciones Walsh son presentadas en el apéndice 1.

4.1 APROXIMACIÓN DE $\Delta(\alpha, \beta)$ EN TÉRMINOS DE LAS FUNCIONES WALSH

Sabemos que el problema de resolver la ecuación diferencial de segundo orden,

$$\ddot{z} + g(t)z = 0, \quad z(0) = a, \quad \dot{z}(0) = b \quad (4.1)$$

donde $g(t)$ es acotada para $t \geq 0$, es equivalente a resolver la ecuación integral asociada [6]

$$z = - \int_0^t \int_0^{t_1} g(t_2) z(t_2) dt_2 dt_1 + bt + a \quad (4.2)$$

En la literatura, existe una gran cantidad de métodos numéricos y semianalíticos por los cuales podemos aproximar la solución de (4.1) o (4.2), vea por ejemplo [13, 32]. En esta parte aproximaremos la solución en términos de las funciones Walsh, i.e. propondremos una solución de la forma $z = \bar{a}'\bar{w}_m$, donde \bar{a} es un vector de pesos $\bar{a} \in \mathbb{R}^{2^k}$ y $\bar{w}_{2^k}(t)$ es el vector de funciones Walsh, ver apéndice 1.

Considere el problema de resolver la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t))x = 0 \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (4.3)$$

en el intervalo $t \in [0, T]$ donde $p(t+T) = p(t)$ es una función real, acotada y de promedio cero; y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Este problema es equivalente a resolver la ecuación integral

$$x = - \int_0^t \int_0^{t_1} (\alpha + \beta p(t_2)) x(t_2) dt_2 dt_1 + t\dot{x}_0 + x_0 \quad (4.4)$$

Suponemos que la solución de (4.4) puede ser escrita en términos de las funciones Walsh

$$\hat{x} = \sum_{n=0}^{2^k-1} \nu_n w_n(t) = \bar{\nu}'\bar{w}_{2^k} \quad (4.5)$$

aquí, el vector de pesos $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^{2^k}$ es desconocido y $\bar{w}_{2^k}(t)$ es el vector de funciones $\bar{w}_{2^k}(t) = \begin{bmatrix} w_0(t) & \dots & w_{2^k-1}(t) \end{bmatrix}'$. Donde 2^k es el orden de la aproximación y k es un entero positivo. Dado que la función $p(t)$ es integrable, puede ser expresada en términos de las funciones Walsh como

$$p(t) \approx \sum_{n=0}^{2^k-1} r_n w_n(t) = \bar{r}'\bar{w}_{2^k} \quad (4.6)$$

donde el vector de pesos $\bar{r} \in \mathbb{R}^{2^k}$ es conocido.

Obteniendo la primer integral de (4.3) tenemos

$$\dot{x} = -\alpha \int_0^t x(t_1) dt_1 - \beta \int_0^t p(t_1) x(t_1) dt_1 + \dot{x}_0 \quad t \in [0, T]$$

sustituyendo (4.5) y (4.6) en la ecuación anterior obtenemos

$$\dot{\hat{x}} = -\alpha \int_0^t \bar{\nu}' \bar{w}_{2^k}(t_1) dt_1 - \beta \int_0^t \bar{r}' M_{2^k} \bar{\nu} dt_1 + \dot{x}_0 \quad t \in [0, T] \quad (4.7)$$

donde $M_{2^k} \triangleq \bar{w}_{2^k} \bar{w}'_{2^k}$ y tiene la forma (A.8), por el Lema .0.1 del apéndice, sabemos que la matriz M_{2^k} puede ser escrita como

$$M_{2^k}(t) = \left[\bar{w}_{2^k}(t), \Lambda_1^{(2^k)} \bar{w}_{2^k}(t), \dots, \Lambda_{2^{k-1}}^{(2^k)} \bar{w}_{2^k}(t) \right] \quad (4.8)$$

donde cada $\Lambda_i^{(2^k)}$ es una matriz de permutación simétrica, es decir, las columnas de M_{2^k} son permutaciones de los elementos del vector de funciones Walsh $\bar{w}_{2^k}(t)$.

Dado que el segundo término del lado derecho de la ecuación (4.7) no es lineal con respecto a $\bar{w}_{2^k}(t)$, no podemos utilizar la propiedad de integración (A.5) por lo que debemos buscar una forma de factorizar el vector \bar{w}_{2^k} para que el integrando pueda ser escrito como $\bar{r}' M_{2^k} \bar{\nu} = \bar{\nu}' Q \bar{w}_{2^k}$. Para realizar la factorización deseada, introducimos el siguiente lema tomado de [17]

Lema 4.1.1. Si $M_{2^k}(t) = \bar{w}_{2^k} \bar{w}'_{2^k}$ y $\gamma \in \mathbb{R}^{2^k}$ entonces, $M_{2^k} \gamma = \Lambda_\gamma \bar{w}_{2^k}$ donde

$$\Lambda_\gamma = \left[\gamma, \Lambda_1^{(2^k)} \gamma, \dots, \Lambda_{2^{k-1}}^{(2^k)} \gamma \right]$$

Prueba. Dado que las matrices $M_{2^k}(t)$ y $\Lambda_n^{(2^k)}$ son simétricas, la multiplicación $M_{2^k}(t) \gamma$ es

$$\begin{aligned} M_{2^k}(t) \gamma &= \begin{bmatrix} \bar{w}'_{2^k}(t) \gamma \\ \bar{w}'_{2^k}(t) \Lambda_1^{(2^k)} \gamma \\ \vdots \\ \bar{w}'_{2^k}(t) \Lambda_{2^{k-1}}^{(2^k)} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma' \bar{w}_{2^k}(t) \\ \gamma' \Lambda_1^{(2^k)} \bar{w}_{2^k}(t) \\ \vdots \\ \gamma' \Lambda_{2^{k-1}}^{(2^k)} \bar{w}_{2^k}(t) \end{bmatrix} \\ &= \left[\gamma, \Lambda_1^{(2^k)} \gamma, \dots, \Lambda_{2^{k-1}}^{(2^k)} \gamma \right] \bar{w}_{2^k}(t) \end{aligned}$$

definiendo $\Lambda_\gamma = \left[\gamma, \Lambda_1^{(2^k)} \gamma, \dots, \Lambda_{2^{k-1}}^{(2^k)} \gamma \right]$, el lema queda probado. \square

Por el Lema 4.1.1 y la definición de integración (A.5), $\int_0^t \bar{w}_{2^k}(t_1) dt_1 = TP\bar{w}_{2^k}(t)$, $P \triangleq P^{(2^k)}$ y $t \in [0, T]$, podemos reescribir (4.7) como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -\alpha \int_0^t \bar{v}' \bar{w}_{2^k}(t_1) dt_1 - \beta \int_0^t \bar{v}' \Lambda_{\bar{r}} \bar{w}_{2^k}(t_1) dt_1 + \dot{x}_0 \\ &= -T(\alpha \bar{v}' P + \beta \bar{v}' \Lambda_{\bar{r}} P) \bar{w}_{2^k}(t) + \dot{x}_0\end{aligned}$$

integrando nuevamente, obtenemos

$$\hat{x} = -T^2(\alpha \bar{v}' + \beta \bar{v}' \Lambda_{\bar{r}}) P^2 \bar{w}_{2^k}(t) + T \dot{x}_0 e_1' P \bar{w}_{2^k}(t) + x_0 \quad t \in [0, T] \quad (4.9)$$

donde $e_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

De la ecuación (4.5) recordamos que $\hat{x} = \bar{v}' \bar{w}_{2^k}$ y v' es el vector de pesos desconocido, por lo tanto

$$\bar{v}' \bar{w}_{2^k}(t) = (-T^2 \bar{v}' (\alpha I_{2^k} + \beta \Lambda_{\bar{r}}) P^2 + T \dot{x}_0 e_1' P + x_0 e_1') \bar{w}_{2^k}(t)$$

eliminando la dependencia de \bar{w}_{2^k} de los dos lados de la ecuación

$$\bar{v}' = -T^2 \bar{v}' (\alpha I_{2^k} + \beta \Lambda_{\bar{r}}) P^2 + T \dot{x}_0 e_1' P + x_0 e_1'$$

resolviendo para \bar{v}'

$$\bar{v}' = (T \dot{x}_0 e_1' P + x_0 e_1') \Gamma$$

donde

$$\Gamma = (I_{2^k} + T^2 (\alpha I_{2^k} + \beta \Lambda_{\bar{r}}) P^2)^{-1} \quad (4.10)$$

note que $\Gamma \in \mathbb{R}^{2^k \times 2^k}$ es una matriz de grandes dimensiones y su estructura depende, casi enteramente, de la matriz $\Lambda_{\bar{r}}$. Dado que las columnas de $\Lambda_{\bar{r}}$ son permutaciones del vector de pesos \bar{r} , la matriz Γ parece no tener una estructura reconocible.

Por lo tanto, la aproximación de la solución general x de la ecuación de Hill (4.3) y su derivada, en el intervalo $t \in [0, T]$ son

$$\begin{aligned}\hat{x} &= (T \dot{x}_0 e_1' P + x_0 e_1') \Gamma \bar{w}_{2^k}(t) \\ \dot{\hat{x}} &= -\frac{1}{T} (T \dot{x}_0 e_1' P + x_0 e_1') (I_{2^k} - \Gamma) P^{-1} \bar{w}_{2^k}(t) + \dot{x}_0\end{aligned} \quad (4.11)$$

y así, dos soluciones linealmente independientes de (4.4) son

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= e_1' \Gamma \bar{w}_{2^k}(t), \text{ para } x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0 \\ \hat{x}_2 &= T e_1' P \Gamma \bar{w}_{2^k}(t), \text{ para } x_0 = 0, \dot{x}_0 = 1\end{aligned}$$

y la aproximación de la matriz de transición de estados $\Phi(t, 0)$ es

$$\widehat{\Phi}(t, 0) = \begin{bmatrix} e_1' \Gamma \bar{w}_{2^k}(t) & T e_1' P \Gamma \bar{w}_{2^k}(t) \\ -\frac{1}{T} e_1' (I_{2^k} - \Gamma) P^{-1} \bar{w}_{2^k}(t) & e_1' (P \Gamma P^{-1}) \bar{w}_{2^k}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, T] \quad (4.12)$$

Finalmente, la aproximación del discriminante, $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = \widehat{x}_1(T) + \widehat{x}_2(T)$, es

$$\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = e_1' [\Gamma + P \Gamma P^{-1}] \bar{w}_{2^k}(T) \quad (4.13)$$

donde T es el período mínimo de la función de excitación asociada a la ecuación de Hill. El vector $\bar{w}_{2^k}(T)$ es la última columna de la matriz de Walsh W_H , ver apéndice.

Note que para determinar $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$ solamente se requiere el primer renglón de la matriz $\Gamma + P \Gamma P^{-1}$. El principal problema con (4.13) es que necesitamos obtener la matriz Γ de la ecuación (4.10), en otras palabras necesitamos calcular la inversa de una matriz cuyas dimensiones son $2^k \times 2^k$. Recuerde que 2^k es el orden de la aproximación y está íntimamente relacionado con su precisión. Sin embargo, (4.13) es fácilmente tratable como se verá en los siguientes apartados. La no singularidad de la matriz Γ se estudiará en el apartado 4.3.

4.2 SIMPLIFICACIÓN DE LA APROXIMACIÓN $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$

En esta sección simplificaremos la expresión (4.13) eliminando la dependencia de la última columna de W_H y probando que la matriz $\Gamma + P \Gamma P^{-1}$ es similar a una matriz triangular superior.

Sea $W_H \in \mathbb{R}^{2^k \times 2^k}$ la representación de las funciones Walsh en términos de la matriz de Hadamard, vea (A.1) en el apéndice. Utilizando el hecho que las funciones Walsh son ortogonales entre sí, podemos decir que $W_H^{-1} = \frac{1}{2^k} W_H' = \frac{1}{2^k} W_H$.

Además, podemos asegurar que la matriz $\Lambda_{\bar{r}}$ es similar a la matriz diagonal $\bar{\Lambda}_{\bar{r}} \triangleq W_H^{-1} \Lambda_{\bar{r}} W_H = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_{2^k})$, donde las constantes p_n están definidas como $p_n = p(n \frac{\tau}{2^k})$, $n = 1, 2, \dots, 2^k$, y donde $p(t)$ es la función de excitación de la ecuación de Hill. Más aún, podemos decir que p_n son los valores característicos de $\Lambda_{\bar{r}}$ y que las columnas de W_H son los vectores característicos asociados a cada p_n , es decir, $\Lambda_{\bar{r}} W_H = W_H \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_{2^k})$. Lo anterior es producto del Lema 4.1.1, para ver los detalles de la prueba ver [11]. Note que los elementos de la matriz diagonal $\bar{\Lambda}_{\bar{r}}$ son la función $p(t)$ evaluada al final del n -ésimo intervalo. La matriz $\bar{\Lambda}_{\bar{r}}$ puede ser vista como un operador de muestreo de la función $p(t)$.

Se puede demostrar [5] que el operador de integración P es similar a la matriz triangular superior $\bar{P} \triangleq W_H P W_H = \frac{1}{2}I_{2^k} + Q + Q^2 + \dots + Q^{2^k-1}$ donde Q es la matriz nilpotente

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2^k \times 2^k}$$

y que la inversa del operador de integración (operador de diferenciación) es similar a $\frac{\bar{P}^{-1}}{2^{2k+2}} \triangleq W_H P^{-1} W_H = \frac{1}{2}I_{2^k} - Q + Q^2 + \dots - Q^{2^k-1}$, la prueba puede ser encontrada en [5]. Por completes escribiremos los operadores $\bar{\Lambda}_{\bar{r}}$, \bar{P} y \bar{P}^{-1}

$$\bar{\Lambda}_{\bar{r}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{2^k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{2^k} \end{bmatrix}, \bar{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{y } \bar{P}^{-1} = 2^{2k+2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Hecho 4.2.1. *Las matrices*

$$\begin{aligned} \Gamma &= (I_{2^k} + T^2 (\alpha I_{2^k} + \beta \Lambda_R) P^2)^{-1} \\ \Gamma_P &\triangleq P \Gamma P^{-1} = (I_{2^k} + T^2 \alpha P^2 + T^2 \beta P \Lambda_{\bar{r}} P)^{-1} \end{aligned}$$

son similares a las matrices triangulares superiores

$$\bar{\Gamma} = \left(I_{2^k} + \frac{T^2}{2^{2k}} (\alpha I_{2^k} + \beta \bar{\Lambda}_{\bar{r}}) \bar{P}^2 \right)^{-1} \quad (4.14)$$

$$\bar{\Gamma}_P = \left(I_{2^k} + \frac{T^2 \alpha}{2^{2k}} \bar{P}^2 + \frac{T^2 \beta}{2^{2k}} \bar{P} \bar{\Lambda}_{\bar{r}} \bar{P} \right)^{-1} \quad (4.15)$$

Prueba. La prueba se basa en propiedades algebraicas elementales, simplemente debemos pre multiplicar y pos multiplicar a la matriz Γ por W_H^{-1} y W_H respectivamente y después utilizar las definiciones de $\bar{\Lambda}_{\bar{r}}$, \bar{P} y \bar{P}^{-1}

$$\begin{aligned}
W_H^{-1}\Gamma W_H &= W_H^{-1} (I_{2^k} + T^2 (\alpha I_{2^k} + \beta \Lambda_{\bar{r}}) P^2)^{-1} W_H \\
&= (W_H^{-1} (I_{2^k} + T^2 (\alpha I_{2^k} + \beta \Lambda_{\bar{r}}) P^2) W_H)^{-1} \\
&= (I_{2^k} + T^2 \alpha W_H^{-1} P^2 W_H + T^2 \beta W_H^{-1} \Lambda_{\bar{r}} P^2 W_H)^{-1} \\
&= (I_{2^k} + T^2 \alpha W_H^{-1} P W_H W_H^{-1} P W_H + T^2 \beta W_H^{-1} \Lambda_{\bar{r}} W_H W_H^{-1} P W_H W_H^{-1} P W_H)^{-1} \\
&= \left(I_{2^k} + \frac{T^2 \alpha}{2^{2k}} W_H P W_H W_H P W_H + \frac{T^2 \beta}{2^{2k}} W_H^{-1} \Lambda_{\bar{r}} W_H W_H P W_H W_H P W_H \right)^{-1} \\
&= \left(I_{2^k} + \frac{T^2 \alpha}{2^{2k}} \bar{P}^2 + \frac{T^2 \beta}{2^{2k}} \bar{\Lambda}_{\bar{r}} \bar{P}^2 \right)^{-1} \\
&= \left(I_{2^k} + \frac{T^2}{2^{2k}} (\alpha I + \beta \bar{\Lambda}_{\bar{r}}) \bar{P}^2 \right)^{-1} \\
&= \bar{\Gamma}
\end{aligned}$$

dado que \bar{P} es una matriz triangular superior; las matrices \bar{P}^2 y $\left(I_{2^k} + \frac{T^2}{2^{2k}} (\alpha I + \beta \bar{\Lambda}_{\bar{r}}) \bar{P}^2 \right)^{-1}$ también lo son. La prueba de la segunda parte del enunciado sigue la misma mecánica. \square

Ahora podemos reescribir la aproximación del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ como el siguiente

Lema 4.2.2. *Si las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ están definidas como en (4.14) y (4.15) respectivamente entonces, la aproximación del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ puede ser escrita como*

$$\hat{\Delta}(\alpha, \beta) = e' (\bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}_P) e_{2^k} \quad (4.16)$$

donde $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}'$ y $e_{2^k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}'$.

Prueba. La prueba se basa en el hecho 4.2.1

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}(\alpha, \beta) &= e' W_H W_H^{-1} (\Gamma + P \Gamma P^{-1}) W_H W_H^{-1} \bar{w}_{2^k}(T) \\
&= e' (W_H^{-1} (\Gamma + P \Gamma P^{-1}) W_H) e_{2^k} \\
&= e' (W_H^{-1} \Gamma W_H + W_H^{-1} P \Gamma P^{-1} W_H) e_{2^k} \\
&= e' (\bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}_P) e_{2^k}
\end{aligned}$$

donde $e = e'_1 W_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}'$ y $e_{2^k} = W_H^{-1} \bar{w}_{2^k}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}'$. \square

Note que la aproximación del discriminante es la sumatoria de los elementos de la última columna de la matriz $\bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}_P$, además la nueva forma de la aproximación del discriminante (4.16) ya no depende de las funciones Walsh.

A primera vista, las aproximaciones (4.13) y (4.16) tienen el mismo problema, ambas dependen de la inversa de una matriz de grandes dimensiones. La diferencia fundamental radica en la estructura de las matrices Γ y $\bar{\Gamma}$: la primera es una matriz llena de números y al parecer no tiene una estructura distinguible; por otro lado, la última es una matriz triangular superior y tiene una estructura distinguible, vea (4.17). Además, gracias a la forma triangular de $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ podemos obtener de forma explícita los elementos de la última columna de $\bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}_P$, lo que es hecho en el siguiente apartado.

Comentario 4.2.3. *Como hemos visto, el discriminante está definido como $\Delta(\alpha, \beta) = x_1(T) + \dot{x}_2(T)$. Si sustituimos $t_n = n \frac{T}{2^k}$ en lugar de T y cambiamos la notación del discriminante, para que muestre explícitamente la dependencia de t_n entonces, $\Delta(\alpha, \beta)$ cambia por $\Delta(\alpha, \beta, t_n) = x_1(t_n) + \dot{x}_2(t_n)$. De la aproximación de la matriz de transición de estados (4.12) es claro que $\hat{\Delta}(\alpha, \beta, t_n) = e^{T(\bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}_P)} e_n$, donde e_n es igual a un vector de dimensión $2^k \times 1$ con todos sus elementos igual a cero, excepto por el n -ésimo elemento que es igual a uno; lo cual sigue del hecho $W_H^{-1} \bar{w}_{2^k}(t_n) = e_n$. Por lo tanto, $\hat{\Delta}(\alpha, \beta, t_n)$ describe el valor de la suma $\hat{x}_1(t) + \dot{\hat{x}}_2(t)$ cuando el tiempo es $t = t_n$, es decir, $e^{T(\bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}_P)} e_n$ muestrea la suma $\hat{x}_1(t) + \dot{\hat{x}}_2(t)$. Por lo tanto, las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ pueden verse como los operadores de muestreo del discriminante $\hat{\Delta}(\alpha, \beta, t_n)$.*

4.3 FORMA EXPLÍCITA DE LA APROXIMACIÓN DEL DISCRIMINANTE $\hat{\Delta}(\alpha, \beta)$

En esta parte obtendremos la forma explícita de la aproximación del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$. Eliminaremos la necesidad de obtener las matrices inversas $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$, lo cual es posible gracias a su forma triangular. Antes de continuar, desarrollaremos las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ para observar su estructura

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{T^2(\alpha+\beta p_1)}{2^{2k+2}} & \frac{T^2(\alpha+\beta p_1)}{2^{2k}} & \dots & (2^k - 3) \frac{T^2(\alpha+\beta p_1)}{2^{2k}} & (2^k - 2) \frac{T^2(\alpha+\beta p_1)}{2^{2k}} & (2^k - 1) \frac{T^2(\alpha+\beta p_1)}{2^{2k}} \\ 0 & 1 + \frac{T^2(\alpha+\beta p_2)}{2^{2k+2}} & \dots & (2^k - 4) \frac{T^2(\alpha+\beta p_2)}{2^{2k}} & (2^k - 3) \frac{T^2(\alpha+\beta p_2)}{2^{2k}} & (2^k - 2) \frac{T^2(\alpha+\beta p_2)}{2^{2k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \frac{T^2(\alpha+\beta p_{2^k-2})}{2^{2k+2}} & \frac{T^2(\alpha+\beta p_{2^k-2})}{2^{2k}} & 2 \frac{T^2(\alpha+\beta p_{2^k-2})}{2^{2k}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 + \frac{T^2(\alpha+\beta p_{2^k-1})}{2^{2k+2}} & \frac{T^2(\alpha+\beta p_{2^k-1})}{2^{2k}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 + \frac{T^2(\alpha+\beta p_{2^k})}{2^{2k+2}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.17)$$

$$\bar{\Gamma}_P = \begin{bmatrix} 1 + \frac{T^2(\alpha + \beta p_1)}{2^{2k+2}} & \frac{T^2(\alpha + \frac{\beta}{2}(p_1 + p_2))}{2^{2k+2}} & \dots & \frac{T^2((2^k - 2)\alpha + \beta(\frac{1}{2}p_1 + p_2 + \dots + \frac{1}{2}p_{2^k - 1}))}{2^{2k+2}} & \frac{T^2((2^k - 1)\alpha + \beta(\frac{1}{2}p_1 + p_2 + \dots + \frac{1}{2}p_{2^k}))}{2^{2k+2}} \\ 0 & 1 + \frac{T^2(\alpha + \beta p_2)}{2^{2k+2}} & \dots & \frac{T^2((2^k - 3)\alpha + \beta(\frac{1}{2}p_2 + p_3 + \dots + \frac{1}{2}p_{2^k - 1}))}{2^{2k+2}} & \frac{T^2((2^k - 2)\alpha + \beta(\frac{1}{2}p_2 + p_3 + \dots + \frac{1}{2}p_{2^k}))}{2^{2k+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{T^2(\alpha + \frac{\beta}{2}(p_{2^k - 2} + p_{2^k - 1}))}{2^{2k+2}} & \frac{T^2(2\alpha + \beta(\frac{1}{2}p_{2^k - 2} + p_{2^k - 1} + \frac{1}{2}p_{2^k}))}{2^{2k+2}} \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \frac{T^2(\alpha + \beta p_{2^k - 1})}{2^{2k+2}} & \frac{T^2(\alpha + \frac{\beta}{2}(p_{2^k - 1} + p_{2^k}))}{2^{2k+2}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 + \frac{T^2(\alpha + \beta p_{2^k})}{2^{2k+2}} \end{bmatrix}^{-1}$$

Ahora que hemos escrito en forma explícita las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$, podemos obtener la condición de no singularidad de dichas matrices.

Comentario 4.3.1. *Por simple inspección de (4.17) podemos notar que la única oportunidad de que las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ sean singulares es que la función $q(t) \triangleq \alpha + \beta p(t)$ sea suficientemente grande, en módulo, tal que algún elemento de la diagonal principal sea igual a cero. En otras palabras, para que $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ sean singulares la condición*

$$\alpha + \beta p_n = -\frac{2^{2k+2}}{T^2} \quad (4.18)$$

debe ser satisfecha para algún $t_n = \frac{nT}{2^k}$, $n = 1, 2, \dots, 2^k$. Recuerde que $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ son matrices reales de dimensión $2^k \times 2^k$ y 2^k es el orden de la aproximación; (4.18) implica que para valores de α , β y $p(t_k)$ tales que $\alpha + \beta p_n \neq -\frac{2^{2k+2}}{T^2}$ la no singularidad de las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ está garantizada.

Como dijimos en el apartado anterior, el computo de la aproximación del discriminante (4.16) sólo requiere los elementos de la última columna de las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$. A partir de ahora denotaremos las constantes b_n y c_n con $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, como el $2^k - n$ elemento de la última columna de $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ respectivamente, i.e.

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * & b_{2^k - 1} \\ 0 & * & \dots & * & b_{2^k - 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\Gamma}_P = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * & c_{2^k - 1} \\ 0 & * & \dots & * & c_{2^k - 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & c_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \end{bmatrix}$$

por lo que la aproximación (4.16) puede ser reescrita como

$$\hat{\Delta}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{2^k - 1} (b_n + c_n) \quad (4.19)$$

Lo que resta por hacer es obtener los elementos de la última columna de una matriz triangular, para lo cual consideraremos una matriz U cuadrada, real y no singular de la forma

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n-2} & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2,n-2} & u_{2,n-1} & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-2,n-2} & u_{n-2,n-1} & u_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

y su inversa U^{-1}

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * & a_{n-1} \\ 0 & * & \cdots & * & * & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

los coeficientes a_m con $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, pueden ser obtenidos mediante el siguiente

Lema 4.3.2. *Sea U una matriz definida como en (4.20) y su inversa definida como (4.21) entonces, los elementos a_m , $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ son*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{u_{n,n}} \\ a_\ell &= \sum_{j=0}^{\ell-1} -a_j \frac{u_{n-\ell,n-j}}{u_{n-\ell,n-\ell}} \\ \ell &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Prueba. Sabemos que la inversa de una matriz no singular R es $R^{-1} = \frac{1}{\det(R)} \text{adj}(R)$. La no singularidad de U , garantiza que $\det(U) \neq 0$, más aún, $\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{i,i}$. Por cálculo directo del elemento ℓ tenemos

$$\begin{aligned} a_0 &\triangleq \frac{1}{\det(U)} \text{adj}(U)_{n,n} = \frac{1}{u_{n,n}} \\ a_1 &\triangleq \frac{1}{\det(U)} \text{adj}(U)_{n-1,n} = \frac{u_{n-1,n}}{u_{n,n}u_{n-1,n-1}} = -a_0 \frac{u_{n-1,n}}{u_{n-1,n-1}} \\ a_2 &\triangleq \frac{1}{\det(U)} \text{adj}(U)_{n-2,n} = \frac{u_{n-2,n-1}u_{n-1,n} - u_{n-2,n}u_{n-1,n-1}}{u_{n-2,n-2}u_{n-1,n-1}u_{n,n}} = -a_1 \frac{u_{n-2,n-1}}{u_{n-2,n-2}} - a_0 \frac{u_{n-2,n}}{u_{n-2,n-2}} \\ &\vdots \\ a_\ell &\triangleq \frac{1}{\det(U)} \text{adj}(U)_{n-\ell,n} = -a_{\ell-1} \frac{u_{n-\ell,n-\ell-1}}{u_{n-\ell,n-\ell}} - a_{\ell-2} \frac{u_{n-\ell,n-\ell-2}}{u_{n-\ell,n-\ell}} - \cdots - a_1 \frac{u_{n-\ell,n-1}}{u_{n-\ell,n-\ell}} - a_0 \frac{u_{n-\ell,n}}{u_{n-\ell,n-\ell}} \end{aligned}$$

y el Lema está probado. \square

Ahora estamos listos para obtener la aproximación del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ de forma explícita. Es decir, se eliminara la dependencia de las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ y la aproximación se escribirá como una sumatoria recursiva.

4.3.1 Eliminando la dependencia en las matrices inversas

El siguiente teorema nos brinda un método recursivo para obtener los coeficientes b_n y c_n asociados a las matrices $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$. Recuerde que 2^k es el orden de la aproximación.

Teorema 4.3.3 (4.2.2). *Si los operadores de muestreo $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ están definidos como en (4.14) y (4.15) respectivamente entonces, los coeficientes b_n y c_n son*

$$b_0 = c_0 = \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^k})} \quad (4.22)$$

$$b_n = -\psi_n \xi_n \sum_{i=0}^{n-1} S_i \quad (4.23)$$

$$c_n = -\psi_n \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_i \sum_{j=i+1}^n \mu_j \right) \quad (4.24)$$

para $n = 1, 2, \dots, 2^k - 1$ y donde

$$\begin{aligned} S_h &= \sum_{i=0}^h b_i \\ Z_h &= \sum_{i=0}^h c_i \\ \psi_h &= \frac{4T^2}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-h}})} \\ \xi_h &= \alpha + \beta p_{2^{k-h}} \\ \mu_h &= \alpha + \frac{\beta}{2}(p_{2^{k-h}} + p_{2^{k-h+1}}) \end{aligned}$$

La aproximación del discriminante es

$$\hat{\Delta}(\alpha, \beta) = S_{2^k-1} + Z_{2^k-1} \quad (4.25)$$

Prueba. Definiendo b_n , $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, como el $2^k - n$ elemento de la última columna de $\bar{\Gamma}$ y utilizando directamente el lema 4.3.2 en $\bar{\Gamma}$, ver ecuación (4.17), y haciendo operaciones algebraicas simples tenemos

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^k})} \\
b_1 &= -b_0 \frac{\frac{T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-1}})}{2^{2k}}}{1 + \frac{T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-1}})}{2^{2k+2}}} = 4T^2 \frac{\alpha + \beta p_{2^{k-1}}}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-1}})} (-b_0) \\
b_2 &= \frac{-b_1 \frac{T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-2}})}{2^{2k}} - 2b_0 \frac{T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-2}})}{2^{2k}}}{1 + \frac{T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-2}})}{2^{2k+2}}} \\
&= \frac{\frac{T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-2}})}{2^{2k}}}{\frac{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-2}})}{2^{2k+2}}} (-b_1 - 2b_0) \\
&= 4T^2 \frac{\alpha + \beta p_{2^{k-2}}}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-2}})} (-b_1 - 2b_0) \\
b_3 &= 4T^2 \frac{\alpha + \beta p_{2^{k-3}}}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-3}})} (-b_2 - 2b_1 - 3b_0) \\
&\vdots \\
b_n &= 4T^2 \frac{\alpha + \beta p_{2^{k-n}}}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-n}})} (-b_{n-1} - \dots - (n-1)b_2 - nb_0) \quad (4.26)
\end{aligned}$$

definiendo

$$S_h \triangleq \sum_{i=0}^h b_i \quad (4.27)$$

$$\psi_h \triangleq \frac{4T^2}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^{k-h}})} \quad (4.28)$$

$$\xi_h \triangleq \alpha + \beta p_{2^{k-h}} \quad (4.29)$$

las ecuaciones (4.26) pueden ser escritas como

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+2} + T^2(\alpha + \beta p_{2^k})} \\
b_n &= -\psi_n \xi_n \sum_{i=0}^{n-1} S_i
\end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \dots, 2^k - 1$. Realizando un procedimiento similar podemos obtener las fórmulas para los coeficientes c_n

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+2} + T^2 (\alpha + \beta p_{2^k})} \\ c_n &= -\psi_n \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_i \sum_{j=i+1}^n \mu_j \right) \\ Z_h &\triangleq \sum_{i=0}^h c_i \end{aligned}$$

donde

$$\mu_h \triangleq \alpha + \frac{\beta}{2} (p_{2^k-h} + p_{2^k-h+1}) \quad (4.30)$$

para $n = 1, 2, \dots, 2^k - 1$, ψ_h está definido como en (4.28).

El último enunciado del teorema sigue de la ecuación (4.19) y de las definiciones para S_h y Z_h \square

El Teorema 4.3.3 nos brinda un método recursivo para obtener los coeficientes b_n , c_n y la aproximación de $\Delta(\alpha, \beta)$. Note que si definimos la función $q(t) \triangleq \alpha + \beta p(t)$ entonces, los coeficientes sólo dependen de la sumatoria de $q(t_n)$ con $t_n = n \frac{T}{2^k}$ sobre un sub-conjunto J' de $J = \{1, 2, \dots, 2^k\}$. Es decir, b_n y c_n dependen de la sumatoria $\sum_{n \in J'} q(t_n)$ donde $J' \subset J$. Ahora, si hacemos que el orden 2^k de la aproximación sea suficientemente grande tal que $2^k \rightarrow \infty$ entonces, la sumatoria $\frac{T}{2^k} \sum_{n \in J'} q(t_n)$ se comporta como una integral definida de $q(t)$. Las siguientes preguntas surgen: ¿Podrían, los coeficientes b_n y c_n ser escritos en términos de integrales definidas? Más aún, ¿Podrían las sumatorias S_h y Z_h ser representadas como sumatorias de integrales definidas? El siguiente corolario dá la respuesta a las preguntas.

Corolario 4.3.4. *Si el orden 2^k de la aproximación (4.25) es tal que $2^k \rightarrow \infty$ y los coeficientes α y β satisfacen la condición $2^{2k+2} \gg T^2 (\alpha + \beta p_{2^k})$ entonces, la sumatoria de los primeros n coeficientes b_n y c_n , $S_n = \sum_{i=0}^n b_n$ y $Z_n = \sum_{i=0}^n c_n$, son*

$$\begin{aligned} S_0 &= Z_0 \approx 1 \\ S_n &\approx 1 - \delta \sum_{i=0}^{n-1} \left[S_i \int_{T-(n+1)\delta}^{T-(i+1)\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$Z_n \approx 1 - \delta \left[\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) Z_i \int_{T-(i+2)\delta}^{T-(i+1)\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right] \quad (4.32)$$

Prueba. Dado que estamos asumiendo que $2^{2k+2} \gg T^2 (\alpha + \beta p_{2^n})$ entonces (4.28) es

$$\delta^2 \triangleq \psi_h \approx \frac{T^2}{2^{2k}} \quad (4.33)$$

más aún

$$b_0 = c_0 \approx 1$$

Para probar la primer parte del corolario, debemos notar que la sumatoria $S_n = \sum_{i=0}^n b_i$ puede ser reescrita como

$$S_n \approx 1 - \delta^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left[S_i \sum_{j=i+1}^n \xi_j \right] \quad (4.34)$$

esto sigue de desarrollar la fórmula para b_n del teorema 4.3.3

$$\begin{aligned} b_0 &\approx 1 \\ b_1 &\approx -\delta^2 \xi_1 S_0 \\ b_2 &\approx -\delta^2 \xi_2 (S_0 + S_1) \\ &\vdots \\ b_n &\approx -\delta^2 \xi_n (S_0 + S_1 + \dots + S_{n-2} + S_{n-1}) \end{aligned}$$

sumando los coeficientes del b_0 al b_n y agrupando términos, obtenemos

$$\sum_{i=0}^n b_i \approx 1 - \delta^2 [S_0 (\xi_1 + \dots + \xi_n) + S_1 (\xi_2 + \dots + \xi_n) + \dots + S_{n-1} (\xi_n)]$$

por lo que (4.34) es verdad.

De las definiciones de ξ_h y δ , ecuaciones (4.29) y (4.33) respectivamente, uno puede notar que para $\ell < n$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{i=\ell}^n \xi_i \approx \int_{T-(n+1)\delta}^{T-(\ell+1)\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \quad (4.35)$$

entonces, podemos reescribir (4.34) como la sumatoria que depende de integrales definidas

$$S_n \approx 1 - \delta \sum_{i=0}^{n-1} \left[S_i \int_{T-(n+1)\delta}^{T-(i+1)\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right]$$

Para probar la segunda parte del corolario, utilizamos un argumento similar a (4.35) y lo aplicamos (4.24) para obtener

$$\begin{aligned} c_n &\approx -\delta^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_i \sum_{j=i+1}^n \mu_j \right) \\ &= -\delta \sum_{j=0}^{n-1} \left(c_j \int_{T-(n+1)\delta}^{T-(j+1)\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right) \end{aligned}$$

por lo tanto, si $Z_n = \sum_{i=0}^n c_n$

$$Z_0 \approx 1$$

$$Z_1 \approx 1 - \delta \left(c_0 \int_{T-2\delta}^{T-\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right)$$

$$Z_2 \approx 1 - \delta \left(c_0 \int_{T-2\delta}^{T-1\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt + c_0 \int_{T-3\delta}^{T-1\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt + c_1 \int_{T-3\delta}^{T-2\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right)$$

$$= 1 - \delta \left(2c_0 \int_{T-2\delta}^{T-1\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt + (c_0 + c_1) \int_{T-3\delta}^{T-2\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right)$$

$$Z_3 \approx 1 - \delta \left(3c_0 \int_{T-2\delta}^{T-1\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt + 2(c_0 + c_1) \int_{T-3\delta}^{T-2\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt + \right.$$

$$\left. + (c_0 + c_1 + c_2) \int_{T-4\delta}^{T-3\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right)$$

⋮

$$Z_n \approx 1 - \delta \left[\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) Z_i \int_{T-(i+2)\delta}^{T-(i+1)\delta} (\alpha + \beta p(t)) dt \right]$$

y el corolario queda probado. □

El corolario 4.3.4 no sólo nos brinda un método recursivo para obtener los coeficientes b_n y c_n , sino que, al hacer ciertas consideraciones transforma: la dependencia del muestreo de la función de excitación $p(t)$; en una dependencia de integrales definidas de la función continua $p(t)$. Debemos notar que las nuevas expresiones, de S_n y Z_n , están escritas en términos de δ y de sumatorias de un gran número de integrales definidas, lo cual nos hace pensar que $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = S_{2^k-1} + Z_{2^k-1}$ podría ser aún más reducido.

4.4 EQUIVALENCIA DE LA NUEVA APROXIMACIÓN CON UN RESULTADO DE A. M. LYAPUNOV EN ECUACIONES DIFERENCIALES PERIÓDICAS

Antes de continuar, debemos hacer un paréntesis para introducir un resultado en relación con el discriminante asociado a las ecuaciones diferenciales lineales y periódicas. En [21] A. M. Lyapunov obtuvo una aproximación del discriminante en términos de series alternantes¹

$$A = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots + (-1)^n A_n + \dots \quad (4.36)$$

Los coeficientes A_k están definidos, mediante aproximaciones sucesivas [20], como

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_1 &= \frac{T}{2} \int_0^T q(t) dt \\ A_2 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^{t_1} (T - t_1 + t_2) (t_1 - t_2) q(t_1) q(t_2) dt_2 dt_1 \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} (T - t_1 + t_n) (t_1 - t_2) \dots (t_{n-1} - t_n) q(t_1) \dots q(t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n \end{aligned}$$

donde $q(t) = \alpha + \beta p(t)$ y T es el período mínimo de $p(t)$, i.e. $q(t+T) = q(t)$. En [22] A. M. Lyapunov hizo un análisis detallado de su aproximación y probó la convergencia de su método. Él obtuvo las series (4.36) al considerar la ecuación

$$\ddot{x} + \lambda q(t) x = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Él propuso dos soluciones linealmente independientes, $f(t)$ y $g(t)$, sujetas a las condiciones iniciales $f(T) = 1$, $\dot{f}(T) = 0$ y $g(T) = 0$, $\dot{g}(T) = 1$; luego, expandió las soluciones y el discriminante $A(\lambda)$ en series de potencias de λ

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A_0 - A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots + (-1)^n A_n \lambda^n + \dots \\ f(t) &= f_0(t) - \lambda f_1(t) + \lambda^2 f_2(t) - \dots \\ g(t) &= g_0(t) - \lambda g_1(t) + \lambda^2 g_2(t) - \dots \end{aligned}$$

¹A. M. Lyapunov denotó el discriminante con la literal A . La mayoría los trabajos, realizados sobre dicha función, lo denotan como $\Delta(\alpha, \beta)$. La única diferencia entre ambos enfoques es que A. M. Lyapunov definió a A como un medio de la traza de la matriz de monodromía, es decir $A = \frac{1}{2} \Delta(\alpha, \beta)$.

donde

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2} (f_k(T) + \dot{g}_k(T)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ f_k(t) &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} q(t_2) f_{k-1}(t_2) dt_2 \\ g_k(t) &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} q(t_2) g_{k-1}(t_2) dt_2 \end{aligned}$$

con $f_0(t) = 1$ y $g_0(t) = t$; finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones en recurrencia

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, A_1 = \frac{T}{2} \int_0^T q(t) dt \\ A_2 &= \frac{1}{2} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} (T - t_1 + t_2) (t_1 - t_2) q(t_1) q(t_2) dt_2 \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{1}{2} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} (T - t_1 + t_n) (t_1 - t_2) \dots (t_{n-1} - t_n) q(t_1) \dots q(t_n) dt_n \end{aligned}$$

y haciendo $\lambda = 1$ obtuvo la serie (4.36).

Regresando al tema en cuestión, probaremos que al realizar la suposición $2^k \rightarrow \infty$, la aproximación hecha en el Teorema 4.3.3 se reduce a la aproximación hecha por A. M. Lyapunov. Esto se enuncia en el siguiente

Teorema 4.4.1. *Si $\Delta(\alpha, \beta)$ es el discriminante de la ecuación diferencial periódica*

$$\ddot{x} + q(t)x = 0, \quad q(t+T) = q(t)$$

entonces, $\Delta(\alpha, \beta)$ puede ser expresada en términos de la serie

$$\Delta(\alpha, \beta) \approx 2 - A_1 + A_2 + \dots + (-1)^n A_n$$

donde las constantes A_n $n = 1, 2, \dots, 2^k - 1$ están definidas como

$$\begin{aligned} A_0 &= 2, \quad A_1 = T \int_0^T q(t_1) dt_1 \\ A_2 &= \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} (T - t_1 + t_2) (t_1 - t_2) q(t_1) q(t_2) dt_2 \\ &\vdots \\ A_n &= \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} (T - t_1 + t_n) (t_1 - t_2) \dots (t_{n-1} - t_n) q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n) dt_n \end{aligned}$$

Prueba. Sabemos, por el teorema 4.3.3 que la aproximación del discriminante puede ser escrita como $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = S_{2^k-1} + Z_{2^k-1}$. Al hacer la suposiciones de que el orden 2^k de la aproximación es suficientemente grande tal que $2^k \rightarrow \infty$ y $2^{2k+2} \gg T^2(\alpha + \beta p_{2^k})$ las sumatorias S_{2^k-1} y Z_{2^k-1} pueden ser escritas como sumatorias de integrales definidas. La prueba de el teorema 4.4.1 se basa en la reescritura de las fórmulas para S_n y Z_n , esta reescritura debe reemplazar la recursión por una expansión en términos del parámetro $\delta = \frac{T}{2^k}$. Para abreviar la escritura de las integrales definidas, introducimos la nomenclatura

$$\mathbb{I}_{n,m} \triangleq \int_{T-n\delta}^{T-m\delta} q(t_1) dt_1$$

entonces, S_n y Z_n , ecuaciones (4.31) y (4.32) respectivamente, son

$$\begin{aligned} S_0 &= Z_0 = 1 \\ S_n &= 1 - \delta \sum_{i=0}^{n-1} [S_i \mathbb{I}_{n+1, i+1}] \\ Z_n &= 1 - \delta \left[\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) Z_i \mathbb{I}_{i+2, i+1} \right] \end{aligned}$$

Si siguiendo las formulas recursivas de S_n y Z_n , y agrupando en términos de potencias de δ obtenemos

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - \delta \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{n+1, i} + \delta^2 \sum_{i=2}^n \mathbb{I}_{n+1, i} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_{i, j} - \delta^3 \sum_{i=3}^n \mathbb{I}_{n+1, i} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_{i, j} \sum_{l=1}^j \mathbb{I}_{j, l} + \dots \\ &\quad + (-1)^{\bar{n}} \delta^{\bar{n}} \sum_{i=\bar{n}}^n \mathbb{I}_{n+1, i} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_{i, j} \sum_{l=1}^j \mathbb{I}_{j, l} \dots \sum_{y=1}^x \mathbb{I}_{x, y} \\ Z_n &= 1 - \delta \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{I}_{i, 1} + \delta^2 \sum_{i=2}^n \mathbb{I}_{i, 1} \sum_{j=i+1}^{n+1} \mathbb{I}_{j, i} - \delta^3 \sum_{i=2}^{n-1} \mathbb{I}_{i, 1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{I}_{j, i} \sum_{l=j+1}^{n+1} \mathbb{I}_{l, j} + \dots \\ &\quad + (-1)^{\bar{n}} \delta^{\bar{n}} \sum_{i=2}^{n+2-\bar{n}} \mathbb{I}_{i, 1} \sum_{j=i+1}^{n+3-\bar{n}} \mathbb{I}_{j, i} \dots \sum_{y=x+1}^{n+1} \mathbb{I}_{y, x} \end{aligned}$$

Debido que $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$ es igual a la suma de S_{2^k-1} y Z_{2^k-1} , entonces $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$ puede ser escrita en términos de potencias de δ . Si definimos los coeficientes A_n , $n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$,

como los términos asociados con la n -ésima potencia de δ , i.e.

$$\begin{aligned}
A_0 &= 2 \\
A_1 &= \delta \left(\sum_{i=1}^{2^k-1} \mathbb{I}_{2^k,i} + \sum_{i=2}^{2^k} \mathbb{I}_{i,1} \right) \\
A_2 &= \delta^2 \left[\sum_{i=2}^{2^k-1} \left(\mathbb{I}_{2^k,i} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_{i,j} \right) + \sum_{i=2}^{2^k-1} \left(\mathbb{I}_{i,1} \sum_{j=i+1}^{2^k-1+1} \mathbb{I}_{j,i} \right) \right] \\
A_3 &= \delta^3 \left[\sum_{i=3}^n \left(\mathbb{I}_{n+1,i} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_{i,j} \sum_{l=1}^j \mathbb{I}_{j,l} \right) + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\mathbb{I}_{i,1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{I}_{j,i} \sum_{l=j+1}^{n+1} \mathbb{I}_{l,j} \right) \right] \\
&\vdots \\
A_n &= \delta^n \left[\sum_{i=n}^{2^k-1} \left(\mathbb{I}_{2^k,i} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_{i,j} \sum_{l=1}^j \mathbb{I}_{j,l} \dots \sum_{y=1}^x \mathbb{I}_{x,y} \right) + \sum_{i=2}^{2^k+1-n} \left(\mathbb{I}_{i,1} \sum_{j=i+1}^{2^k+2-n} \mathbb{I}_{j,i} \dots \sum_{y=x+1}^{2^k} \mathbb{I}_{y,x} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

la aproximación del discriminante puede ser escrito como

$$\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = A_0 - A_1 + A_2 + \dots + (-1)^n A_n$$

Note que los coeficientes A_n en (4.37) pueden ser reescritos en términos de las integrales definidas

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{T-\delta} \int_0^{t_1} q(t_2) dt_2 dt_1 + \int_0^{T-\delta} \int_{t_1}^{T-\delta} q(t_2) dt_2 dt_1 \\
A_2 &= \int_\delta^{T-\delta} \int_0^{t_1} q(t_2) \int_{t_1}^{T-\delta} \int_{t_1}^{t_3} q(t_4) dt_4 \dots dt_1 + \int_\delta^{T-\delta} \int_{t_1}^{T-\delta} q(t_2) \int_0^{t_1} \int_{t_3}^{t_1} q(t_4) dt_4 \dots dt_1 \\
A_3 &= \int_\delta^{T-3\delta} \int_0^{t_1} q(t_2) \int_{t_1}^{T-\delta} \int_{t_1}^{t_3} q(t_4) \int_{t_3}^{T-\delta} \int_{t_3}^{t_5} q(t_6) dt_6 dt_5 \dots dt_1 \\
&\quad + \int_{2\delta}^{T-\delta} \int_{t_1}^{T-\delta} q(t_2) \int_\delta^{t_1} \int_{t_3}^{t_1} q(t_4) \int_0^{t_3} \int_{t_5}^{t_3} q(t_6) dt_6 dt_5 \dots dt_1 \\
&\vdots \\
A_n &= \int_\delta^{T-n\delta} \int_0^{t_1} q(t_2) \dots \int_{t_{2n-5}}^{T-\delta} \int_{t_{2n-5}}^{t_{2n-3}} q(t_{2n-2}) \int_{t_{2n-3}}^{T-\delta} \int_{t_{2n-3}}^{t_{2n-1}} q(t_{2n}) dt_{2n} dt_{2n-1} \dots dt_1 \\
&\quad + \int_{2\delta}^{T-\delta} \int_{t_1}^{T-\delta} q(t_2) \dots \int_\delta^{t_{2n-5}} \int_{t_{2n-3}}^{t_{2n-5}} q(t_{2n-2}) \int_0^{t_{2n-3}} \int_{t_{2n-1}}^{t_{2n-3}} q(t_{2n}) dt_{2n} dt_{2n-1} \dots dt_1
\end{aligned}$$

Dado que, por hipótesis $2^k \rightarrow \infty$ entonces, $\delta \rightarrow 0$ y para valores de \bar{n} tales que $\bar{n}\delta \rightarrow 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^T \int_0^{t_1} q(t_2) dt_2 dt_1 + \int_0^T \int_{t_1}^T q(t_2) dt_2 dt_1 \\
A_2 &= \int_0^T \int_0^{t_1} \int_{t_1}^T \int_{t_1}^{t_3} q(t_2) q(t_4) dt_4 dt_3 dt_2 dt_1 + \int_0^T \int_{t_1}^T \int_0^{t_1} \int_{t_3}^{t_1} q(t_2) q(t_4) dt_4 dt_3 dt_2 dt_1 \\
A_3 &= \int_0^T \int_0^{t_1} \int_{t_1}^T \int_{t_1}^{t_3} \int_{t_3}^T \int_{t_3}^{t_5} q(t_2) q(t_4) q(t_6) dt_6 dt_5 \dots dt_1 \\
&\quad + \int_0^T \int_{t_1}^T \int_0^{t_1} \int_{t_3}^{t_1} \int_0^{t_3} \int_{t_5}^{t_3} q(t_2) q(t_4) q(t_6) dt_6 dt_5 \dots dt_1 \\
&\quad \vdots \\
A_{\bar{n}} &= \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_{t_{2\bar{n}-5}}^T \int_{t_{2\bar{n}-5}}^{t_{2\bar{n}-3}} \int_{t_{2\bar{n}-3}}^T \int_{t_{2\bar{n}-3}}^{t_{2\bar{n}-1}} q(t_2) \dots q(t_{2\bar{n}-2}) q(t_{2\bar{n}}) dt_{2\bar{n}} dt_{2\bar{n}-1} \dots dt_1 \\
&\quad + \int_0^T \int_{t_1}^T \dots \int_0^{t_{2\bar{n}-5}} \int_{t_{2\bar{n}-3}}^{t_{2\bar{n}-5}} \int_0^{t_{2\bar{n}-3}} \int_{t_{2\bar{n}-1}}^{t_{2\bar{n}-3}} q(t_2) \dots q(t_{2\bar{n}-2}) q(t_{2\bar{n}}) dt_{2\bar{n}} dt_{2\bar{n}-1} \dots dt_1
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Ahora solo resta probar que los coeficientes A_n en (4.38) son iguales a los obtenidos por A. M. Lyapunov, lo cual se logra con un simple reordenamiento de las variables y límites de integración

$$\begin{aligned}
A_1 &= T \int_0^T q(t_2) dt_2 \\
A_2 &= \int_0^T \int_0^{t_2} (T - t_2 + t_1) (t_2 - t_1) q(t_1) q(t_2) dt_1 dt_2 \\
A_3 &= \int_0^T \int_0^{t_6} \int_0^{t_4} (T - t_6 + t_2) (t_6 - t_4) (t_4 - t_2) q(t_2) q(t_4) q(t_6) dt_2 dt_4 dt_6
\end{aligned}$$

y el termino general

$$A_n = \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} (T - t_1 + t_n) (t_1 - t_2) \dots (t_{n-1} - t_n) q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n) dt_n$$

de donde sigue el teorema. □

Note que los coeficientes A_n del teorema 4.4.1 son iguales a los coeficientes de la aproximación de A. M. Lyapunov excepto por el factor $\frac{1}{2}$, esta diferencia se debe a que nosotros consideramos el discriminante como $\Delta(\alpha, \beta) = x_1(T) + \dot{x}_2(T)$ y A. M. Lyapunov lo considera como $A = \frac{1}{2}(x_1(T) + \dot{x}_2(T))$.

Comentario 4.4.2. Debido a que la aproximación hecha por A. M. Lyapunov depende de múltiples integrales (el orden de las integrales múltiples que son necesarias para calcular cada coeficiente A_n es igual al subíndice n), es muy difícil de calcular en sentido computacional. El teorema 4.3.3 nos da un método recursivo para obtener la aproximación de $\Delta(\alpha, \beta)$.

Al hacer el orden 2^k de la aproximación (4.25) tienda a infinito ($2^k \rightarrow \infty$) hemos hecho que la aproximación del teorema 4.3.3 la cual depende de valores discretos de la función de excitación $q(t)$, se transformara en una aproximación que depende de las integrales definidas de la función continua $q(t)$.

Comentario 4.4.3. Por lo anterior, podemos decir que el teorema 4.3.3 puede ser visto como la forma "discreta" de la aproximación hecha por A. M. Lyapunov.

Como comentario final, debemos decir que la aproximación obtenida en este capítulo fue posible gracias a las propiedades únicas de las funciones Walsh. Es cierto que todas las series de funciones ortogonales, como son las series de Fourier o de Bessel, comparten algunas propiedades como por ejemplo; la posibilidad de obtener operadores integración o derivación; o la cerradura bajo la multiplicación, es decir, si $f(t)$ y $g(t)$ pertenecen a un conjunto **infinito** de funciones ortogonales entonces, la multiplicación $f(t)g(t)$ puede ser representada en términos del conjunto **infinito** de funciones. Pero, las funciones Walsh tienen algunas propiedades extra por ejemplo; Si dos funciones Walsh, digamos w_n y w_m , pertenecen a un conjunto **finito** de funciones, la multiplicación $w_n w_m$ puede ser expresada en términos del mismo conjunto **finito** al que pertenecen; otra propiedad, es la presentada en el Lema 4.1.1, la cual, nos permite reescribir la multiplicación $\bar{w}_{2^k} \bar{w}'_{2^k} \gamma$, como $\Lambda_\gamma \bar{w}_{2^k}$, gracias a esta propiedad pudimos obtener la aproximación de la matriz de transición de estados en (4.12); Y finalmente, la similaridad de las matrices: $\bar{\Lambda}_{\bar{r}} = W_H^{-1} \Lambda_{\bar{r}} W_H$ (matriz de muestreo de $p(t)$), $\bar{P} = W_H P W_H$ (operador de integración), $\bar{\Gamma} = W_H^{-1} \Gamma W_H$ y $\bar{\Gamma}_P = W_H^{-1} \Gamma_P W_H$ (matrices de muestreo del discriminante), las cuales fueron las propiedades fundamentales para la obtención de la aproximación del discriminante en el teorema 4.3.3.

4.5 ERROR Y CONVERGENCIA

En la esta sección presentamos un breve análisis del error de la aproximación del discriminante y probamos que ésta converge al discriminante exacto cuando el orden de la aproximación tiende a infinito, i.e. $2^k \rightarrow \infty$. Para empezar probaremos el siguiente lema, el cual nos da una cota superior del error de aproximación de una función en términos de funciones Walsh.

Lema 4.5.1. Sea $f(t)$ una función derivable en el intervalo $t \in [0, T]$ y $\left\| \frac{d}{dt} f(t) \right\| < L$, con

$L \in \mathbb{R}$ constante. Si $\widehat{f}(t)$ es la aproximación de la función $f(t)$ en términos de funciones Walsh entonces, la norma $L_2[0, T]$ de la aproximación es

$$\|f(t) - \widehat{f}(t)\|_2^2 \leq \frac{T^3}{2^{2k}} L^2$$

Prueba. La función $f(t)$ puede ser aproximada en términos de funciones Walsh como

$$\widehat{f}(t) = R' \bar{w}(t) \quad (4.39)$$

donde $\bar{w}(t)$ es el vector de funciones Walsh definidas en el intervalo $t \in [0, T]$ y R es el vector de pesos, ambos son vectores reales de dimensión 2^k . Podemos escribir la norma del error de la aproximación (4.39) como

$$\|e\|_2^2 = \int_0^T [f(\tau) - R' \bar{w}(\tau)]^2 d\tau \quad (4.40)$$

Recuerde que la aproximación $R' \bar{w}(t)$ es una función constante a pedazos y el número de divisiones del intervalo $t \in [0, T]$ en el cual $R' \bar{w}(t)$ toma diferentes valores es igual a 2^k . Definamos \widehat{f}_n como el valor de la aproximación en el intervalo

$$I_n = \left[\frac{nT}{2^k}, \frac{(n+1)T}{2^k} \right) \quad (4.41)$$

note que $\cup_{n=0}^{2^k-1} I_n = [0, T]$. Haciendo lo anterior podemos decir que el error en cada intervalo I_n es

$$\|e_n\|_2^2 = \int_{\frac{nT}{2^k}}^{\frac{(n+1)T}{2^k}} [f(\tau) - \widehat{f}_n]^2 d\tau$$

utilizando el teorema del valor medio para la integral podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\|e_n\|_2^2 = \frac{T}{2^k} [f(\eta) - \widehat{f}_n]^2 \quad \eta \in I_n$$

dato que definimos el coeficiente \widehat{f}_n como el valor de la aproximación en el intervalo I_n lo podemos escribir como

$$\widehat{f}_n = \sum_{i=0}^{2^k-1} r_i w_i(\vartheta), \quad \vartheta \in I_n \quad (4.42)$$

donde r_i son los pesos de la aproximación asociados a la i -ésima función Walsh, $w_i(\vartheta)$. Por lo tanto el coeficiente

$$\widehat{f}_n = f(\vartheta), \quad \vartheta \in I_n$$

Esto último proviene de la definición de los pesos r_i i.e.

$$r_i = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) w_i(\tau) d\tau$$

y del hecho de que cada una de las funciones Walsh son constantes en un intervalo I_n .

Así la ecuación del error puede ser escrita como

$$\|e_n\|_2^2 = \frac{T}{2^k} [f(\eta) - f(\vartheta)]^2 \quad \eta, \vartheta \in I_n$$

utilizando la propiedad de $f(t)$ Lipschitz y $\left\| \frac{d}{dt} f(t) \right\| \leq L$ tenemos

$$\begin{aligned} \|e_n\|_2^2 &\leq \frac{T}{2^k} L^2 [\eta - \vartheta]^2 \\ &\leq \frac{T}{2^k} L^2 \left[\frac{T}{2^k} \right]^2 \\ &\leq \frac{T^3}{2^{3k}} L^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

finalmente, el error total de la aproximación es igual a la suma de todos los errores (4.43), i.e.

$$\|e\|_2^2 = \sum_{n=0}^{2^k-1} \|e_n\|_2^2 \leq \frac{T^3}{2^{2k}} L^2$$

□

Ahora para probar la convergencia de la aproximación del discriminante y encontrar una cota superior del error suponga que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación periódica $\ddot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$ con $q(t+T) = q(t)$, sujetas a las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ y $\dot{x}_2(0) = 1$, y defina

$$\Upsilon(t) = x_1(t) + \dot{x}_2(t)$$

sean $\hat{x}_1(t)$ y $\hat{x}_2(t)$ la aproximación de dos soluciones anteriores², y defina

$$\hat{\Upsilon}(t) = \hat{x}_1(t) + \dot{\hat{x}}_2(t)$$

el error de la aproximación puede ser escrito como

$$e = \Upsilon(t) - \hat{\Upsilon}(t)$$

²La aproximación de las soluciones fue obtenida anteriormente y tienen la forma $\hat{x}_1(t) = e_1' \Gamma \bar{\omega}_{2^k}(t)$ y $\hat{x}_2(t) = e_1' P \Gamma P^{-1} \bar{\omega}_{2^k}(t)$

ahora suponga que $\tilde{\Upsilon}(t)$ es la representación de $\Upsilon(t)$ en términos de funciones Walsh. La ecuación del error puede ser escrita como

$$e = \Upsilon(t) - \hat{\Upsilon}(t) + \tilde{\Upsilon}(t) - \bar{\Upsilon}(t)$$

y su norma L_2 es

$$\begin{aligned} \|e\|_2 &= \left\| \Upsilon(t) - \hat{\Upsilon}(t) + \tilde{\Upsilon}(t) - \bar{\Upsilon}(t) \right\|_2 \\ &\leq \left\| \Upsilon(t) - \bar{\Upsilon}(t) \right\|_2 + \left\| \tilde{\Upsilon}(t) - \hat{\Upsilon}(t) \right\|_2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

supongamos que $\left| \frac{d}{dt} \Upsilon(t) \right| < M$. Por lo tanto, siguiendo el lema 4.5.1, podemos decir que

$$\left\| \Upsilon(t) - \bar{\Upsilon}(t) \right\|_2 \leq \frac{T^{\frac{3}{2}}}{2^k} M \quad (4.45)$$

Para calcular el segundo término del lado derecho de la ecuación (4.44) debemos notar que ambas funciones, $\bar{\Upsilon}(t)$ y $\hat{\Upsilon}(t)$, son constantes cuando t pertenece a los intervalos I_n definidos en (4.41). Definamos la notación $\bar{\Upsilon}_n$ y $\hat{\Upsilon}_n$ para el valor de las funciones $\bar{\Upsilon}(t)$ y $\hat{\Upsilon}(t)$ cuando $t \in I_n$, por lo que la norma del error en cada intervalo I_n es

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\Upsilon}_n - \hat{\Upsilon}_n \right\|_2 &= \left(\int_{I_n} (\bar{\Upsilon}_n - \hat{\Upsilon}_n)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{T}{2^k} \right)^{\frac{1}{2}} |\bar{\Upsilon}_n - \hat{\Upsilon}_n| \\ &\leq \left(\frac{T}{2^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{\Upsilon}(t) - \hat{\Upsilon}(t) \right\|_{\infty} \end{aligned} \quad (4.46)$$

de las ecuaciones (4.45) y (4.46) podemos decir que el error $e = \Upsilon(t) - \hat{\Upsilon}(t)$ cuando $t \in I_n$ es

$$\|e_n\|_2 \leq \frac{T^{\frac{3}{2}}}{2^k} M + \left(\frac{T}{2^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{\Upsilon}(t) - \hat{\Upsilon}(t) \right\|_{\infty}$$

de donde podemos ver que si $2^k \rightarrow \infty$ entonces la aproximación $\hat{\Upsilon}(t) \rightarrow \Upsilon(t)$, i.e.

$$\lim_{2^k \rightarrow \infty} \hat{\Upsilon}(t) = \Upsilon(t)$$

Finalmente, recordando que el discriminante asociado a la ecuación de Hill es igual a la traza de la matriz de monodromía, es decir

$$\Delta(\alpha, \beta) = x_1(T) + \dot{x}_2(T) = \Upsilon(T)$$

y la aproximación del discriminante es

$$\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = \widehat{\Upsilon}(T)$$

Por lo tanto cuando $2^k \rightarrow \infty$ entonces la aproximación $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) \rightarrow \Delta(\alpha, \beta)$, i.e.

$$\lim_{2^k \rightarrow \infty} \widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = \Delta(\alpha, \beta) \quad (4.47)$$

y la norma del error de la aproximación del discriminante es

$$\left\| \Delta(\alpha, \beta) - \widehat{\Delta}(\alpha, \beta) \right\|_2 \leq \frac{T}{2^k} M + \left(\frac{T}{2^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{\Delta}(\alpha, \beta) - \widehat{\Delta}(\alpha, \beta) \right\|_{\infty}$$

donde $\bar{\Delta}(\alpha, \beta) = \bar{\Upsilon}(T)$.

La Figura 4.1 a) muestra el discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ asociado a la ecuación diferencial $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \cos(2t)))x = 0$, con $\beta = 1$ y el discriminante aproximado $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$ para tres diferentes órdenes de aproximación. La Figura 4.1 b) muestra el valor absoluto del error de las aproximaciones i.e. $|\Delta(\alpha, \beta) - \widehat{\Delta}(\alpha, \beta)|$ para $\beta = 1$ y $\alpha \in [0, 5]$. Note que el error es menor cuando el orden de la aproximación es mayor, esto último concuerda con lo dicho en los párrafos anteriores, ecuación (4.47).

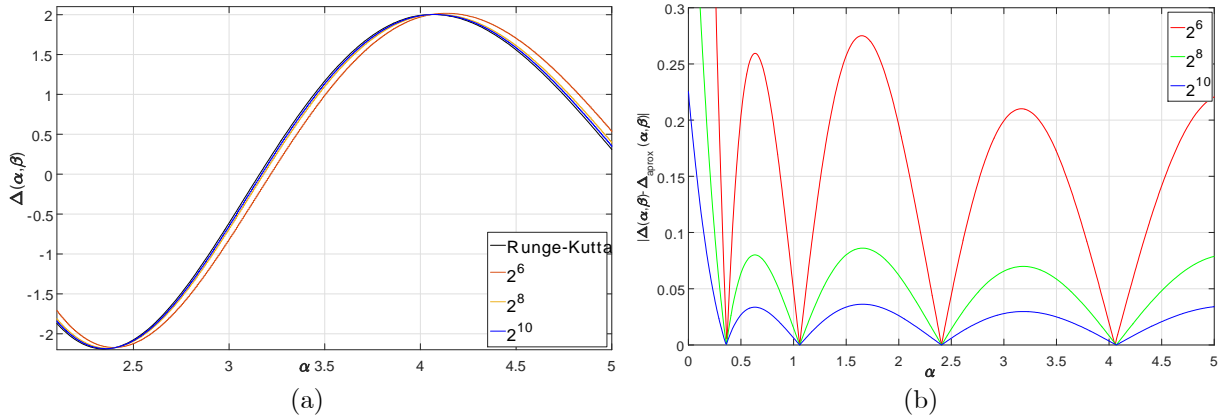


Fig. 4.1 a) Discriminante asociado a la ecuación $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \cos(2t)))x = 0$
b) Error de la aproximación con diferentes órdenes ($2^6, 2^8, 2^{10}$)

5.0 ESTABILIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE HILL

En este capítulo se presentan 3 diferentes formas de estabilizar las soluciones inestables de la ecuación diferencial periódica

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t)) x = 0 \quad (5.1)$$

El capítulo se divide en dos partes: En el primero usaremos el amortiguamiento para estabilizar las zonas inestables; y en el segundo utilizaremos la aproximación del discriminante obtenida en el capítulo anterior para definir una función periódica $u(t)$ tal que al ser sumada a la función de excitación $p(t)$ la solución (inestable) se estabilice.

En la primera parte del capítulo se presentan dos formas de estabilizar: La primera, utiliza la definición de líneas de máxima energía para calcular la mínima cantidad de amortiguamiento necesario para hacer desaparecer un *pocket* de inestabilidad; la segunda, utiliza la aproximación del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ para encontrar la disipación necesaria para eliminar todas las zonas inestables que se encuentren por debajo de una función continua $\beta = f(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Ambas formas se basan en el teorema 2.1.4, es decir, en la relación que existe entre las curvas de transición de un sistema con disipación y las curvas Iso- μ .

En la segunda parte del capítulo se muestra que dados los coeficientes b_n y c_n , del teorema 4.3.3, es posible reconstruir la función de excitación $p(t)$, y utilizando esta singular propiedad podemos definir una función periódica $u(t)$ que modifique el valor del discriminante, llevándolo a algún valor deseado.

Para facilitar la lectura de este capítulo copiaremos el teorema 2.1.4

Teorema 5.0.2. *Sea la ecuación de Hill*

$$\ddot{y} + (\alpha + \beta p(t)) y = 0$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y $p(t+T) = p(t)$. Una Iso- μ curva con la velocidad de crecimiento γ , es igual a las curvas de transición de la ecuación de Hill asociada

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (\alpha_1 + \beta q(t)) x = 0$$

con $\alpha_1, \delta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, si y sólo si

$$\gamma = e^{\frac{1}{2}\delta T}$$

y

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{4}\delta^2$$

donde $\gamma = \max [|\sigma(\Phi_y(T, 0))|]$.

5.1 ESTABILIZACIÓN POR MEDIO DE DISIPACIÓN

Esta sección mostraremos dos formas de estabilizar una ecuación de Hill por medio de la adición de un término disipativo $\delta\dot{x}$. Antes de comenzar recordemos que las curvas Iso- μ son líneas, dentro de las zonas inestables, que están formadas por valores de α , β para los cuales las soluciones inestables tienen la misma velocidad de crecimiento γ . Sabemos que la relación entre γ y el valor absoluto del discriminante es

$$|\Delta(\alpha, \beta)| = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \quad (5.2)$$

es decir las curvas Iso- μ pueden ser vistas como la proyección, en el plano $\alpha - \beta$, de la intersección de la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ con los planos $surf_1 = \left\{ (\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = \frac{1+\gamma^2}{\gamma} \right\}$ y $surf_2 = \left\{ (\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = -\frac{1+\gamma^2}{\gamma} \right\}$.

5.1.1 Eliminación de un *pocket* de inestabilidad

Recuerde que los *pockets* de inestabilidad son zonas inestables que se encuentran entre dos puntos de coexistencia asociados a una misma lengua de Arnold. Como vimos al final del capítulo 3 el discriminante evaluado sobre las líneas de máxima energía, i.e. $\Delta(\phi_n(\beta), \beta)$, asociadas a las lenguas con m puntos de coexistencia tiene al menos $2m - 1$ puntos críticos, donde $m - 1$ puntos corresponden a un máximo o mínimo¹ local de $\Delta(\phi_n(\beta), \beta)$. Considere el conjunto $PI = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \alpha, \beta \text{ pertenecen a un } pocket \text{ de inestabilidad}\}$, y sea $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in PI$ un par tal que pertenece a los $m - 1$ puntos anteriormente referidos, es decir $\frac{\partial \Delta(\phi_n(\beta), \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\phi_n(\beta)=\bar{\alpha}} = 0$. Entonces, la velocidad de crecimiento $\bar{\gamma}$ de la solución inestable en $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ es la mayor entre todas las velocidades asociadas a cada punto en el conjunto en PI , esto es

$$\bar{\gamma} \triangleq \max_{(\alpha, \beta) \in PI} \{ \gamma_{(\alpha, \beta)} \} \quad (5.3)$$

¹Si $\Delta(\phi_n(0), 0) = 2$ será un máximo local, y si $\Delta(\phi_n(0), 0) = -2$ será un mínimo local.

donde $\gamma_{(\alpha,\beta)}$ es la velocidad de crecimiento asociado a la solución inestable en el punto (α, β) .

Por lo anterior podemos enunciar el siguiente

Lema 5.1.1. *Sea PI el conjunto de todos los pares (α, β) que pertenecen a un pocket de inestabilidad; considere el par $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in PI$ con $\frac{\partial \Delta(\phi_n(\beta), \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\substack{\phi_n(\beta)=\bar{\alpha} \\ \beta=\bar{\beta}}} = 0$ y sea $\bar{\gamma}$ definida como en (5.3). El pocket de inestabilidad desaparecerá si el termino $\delta \dot{y}$ es sumado a la ecuación de Hill y la cantidad mínima de amortiguamiento δ necesario es*

$$\delta = \frac{2}{T} \ln(\bar{\gamma}) \quad (5.4)$$

donde T es el período mínimo de $p(t)$ in (5.1).

Prueba. Por hipótesis sabemos que $\bar{\gamma}$ es la velocidad de crecimiento de la solución inestable asociada a $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ y que $\bar{\gamma}$ es el valor máximo entre todas las velocidades $\gamma_{(\alpha,\beta)}$ asociadas a cada $(\alpha, \beta) \in PI$. Además, sabemos que $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ pertenece a la línea de máxima energía que cruza el *pocket* de inestabilidad, es decir, $\bar{\alpha}$ es un punto de máxima energía $\phi_n(\bar{\beta})$. El discriminante en el punto de máxima velocidad es $\Delta(\phi(\bar{\beta}), \bar{\beta})$ y la máxima velocidad $\bar{\gamma}$ es

$$\bar{\gamma} = \frac{|\Delta(\phi(\bar{\beta}), \bar{\beta})| + \sqrt{(\Delta(\phi(\bar{\beta}), \bar{\beta}))^2 - 4}}{2}, \quad |\Delta(\alpha, \beta)| \geq 2$$

Si existiera una relación que nos permitiera hacer que la curva Iso- μ , definida por la velocidad de crecimiento $\bar{\gamma}$, coincida con la curva de transición de la ecuación $\ddot{y} + \delta \dot{y} + (\alpha + \beta p(t))y = 0$ entonces habremos terminado. Como sabemos el Teorema 5.0.2 nos brinda dicha relación, es decir, nos brinda la relación de equivalencia que existe entre las curvas de transición de una ecuación con amortiguamiento y las curvas Iso- μ . Por lo tanto la mínima disipación necesaria para eliminar un *pocket* de inestabilidad es

$$\delta = \frac{2}{T} \ln(\bar{\gamma})$$

y el Lema queda probado. □

Comentario 5.1.2. *Note que el Lema 5.1.1 toma el multiplicador de la solución "más inestable" dentro un pocket de inestabilidad y lo reescala con un factor de $e^{-\frac{\delta T}{2}}$, esto provoca que el módulo multiplicador sea igual a uno, estabilizando a la solución inestable. La Fig. 5.1 muestra este efecto.*

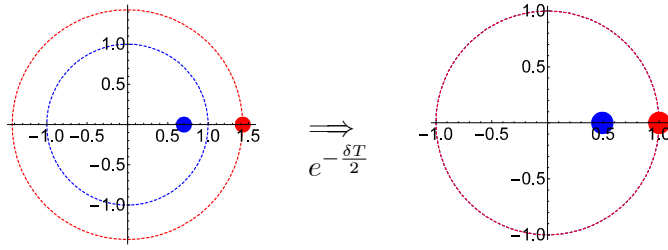


Fig. 5.1 Reescalamiento de los multiplicadores.

5.1.1.1 Ejemplo Considere la ecuación de Meissner

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \text{sign}(\cos(t)))x = 0$$

en el capítulo 3 obtuvimos una aproximación de las *MEL* como

$$\phi_n(\beta) \approx \frac{\beta^2}{n^2} + \frac{n^2}{4}$$

y el discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ evaluado sobre cada *MEL*

$$\Delta(\phi_n(\beta), \beta) = \frac{8\beta^2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\beta\right) - 2n^4(-1)^n}{4\beta^2 - n^4}$$

La Fig. 3.4 b) muestra $\Delta(\phi_5(\beta), \beta)$, i.e. el valor del discriminante sobre la línea de máxima energía asociada a la quinta lengua de Arnold. Podemos observar que $|\Delta(\phi_5(\beta), \beta)| = 2$ en tres diferentes valores de β , i.e. la lengua 5 tiene 3 puntos de coexistencia, y por lo tanto $\frac{\partial \Delta(\phi_5(\beta), \beta)}{\partial \beta} = 0$ para 5 diferentes valores de β . Al tener tres puntos de coexistencia la lengua 5 tiene dos *pockets* de inestabilidad, y dos de los 5 valores críticos corresponden a puntos (α, β) en los cuales la velocidad de crecimiento de las soluciones inestables tienen su máximo.

Los valores críticos de β asociados a los puntos de coexistencia son: $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2.5$ y $\beta_3 = 7.5$. Y aquellos asociados a valores de velocidad de crecimiento máximo son: $\bar{\beta}_1 = 1.3754$ y $\bar{\beta}_2 = 5.5462$. Por lo tanto, los puntos dentro de los *pockets* de inestabilidad de la lengua 5 donde la velocidad de crecimiento es máxima $\bar{\gamma}$ son $(6.325, 1.3754)$ y $(7.480, 5.5462)$. El valor $\bar{\gamma}$ en cada punto es:

$$\begin{aligned} |\mu_{1,\max}| &= 1.1546 \\ |\mu_{2,\max}| &= 2.4636 \end{aligned}$$

Utilizando el Lema 5.1.1, si añadimos el termino disipativo $\delta\dot{x}$ a la ecuación de Meissner, podemos eliminar los *pockets* de inestabilidad. La aproximación de la cantidad mínima de disipación δ necesaria para eliminar cada *pocket* es

$$\delta_1 = 0.0456$$

$$\delta_2 = 0.2870$$

Utilizando el cálculo numérico de la MEL_5 obtenemos que la cantidad mínima de disipación necesaria para eliminar cada *pocket*, es

$$\delta_1 = 0.0465$$

$$\delta_2 = 0.2921$$

La Fig. 5.2 a) muestra las lenguas de Arnold de la ecuación de Meissner con disipación $\delta = 0.0456$, podemos observar que aún existe una pequeña zona de inestabilidad perteneciente al primer *pocket*, al rededor del punto $(6.325, 1.38)$. Esto se debe a la aproximación hecha en (3.9). Si utilizamos el coeficiente de disipación obtenido por medio de la aproximación numérica, $\delta = 0.0465$, obtenemos que todo el *pocket* de inestabilidad desaparece, vea Fig. 5.2 b).

5.1.2 Eliminación de zonas inestables debajo de una función $\beta = f(\alpha)$

En esta parte se utilizará la aproximación del discriminante del Teorema 4.3.3 y el Teorema 5.0.2 para encontrar la disipación mínima necesaria para estabilizar zonas inestables, en el plano $\alpha - \beta$, que se encuentren por debajo de una función continua dependiente de $\alpha \in \mathbb{A} = \{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 : \alpha_1 > 0\}$, i.e. una función con la forma $\beta = f(\alpha)$.

Gracias a la aproximación del discriminante del Teorema 4.3.3 y a que la $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ es una superficie suave, somos capaces de aproximar el valor máximo (mínimo) del discriminante evaluada sobre cualquier función continua $\beta = f(\alpha)$. Definamos ϱ como el valor absoluto máximo de la aproximación del discriminante evaluado sobre la función $\beta = f(\alpha)$, es decir

$$\varrho \triangleq \max_{\alpha \in \mathbb{A}} |\Delta(\alpha, f(\alpha))| \tag{5.5}$$

mediante un argumento similar al hecho en la sección anterior, podemos decir que si añadimos un término disipativo $\delta\dot{x}$ con la cantidad adecuada de amortiguamiento δ , podemos estabilizar las zonas que se encuentran debajo de la función $\beta = f(\alpha)$.

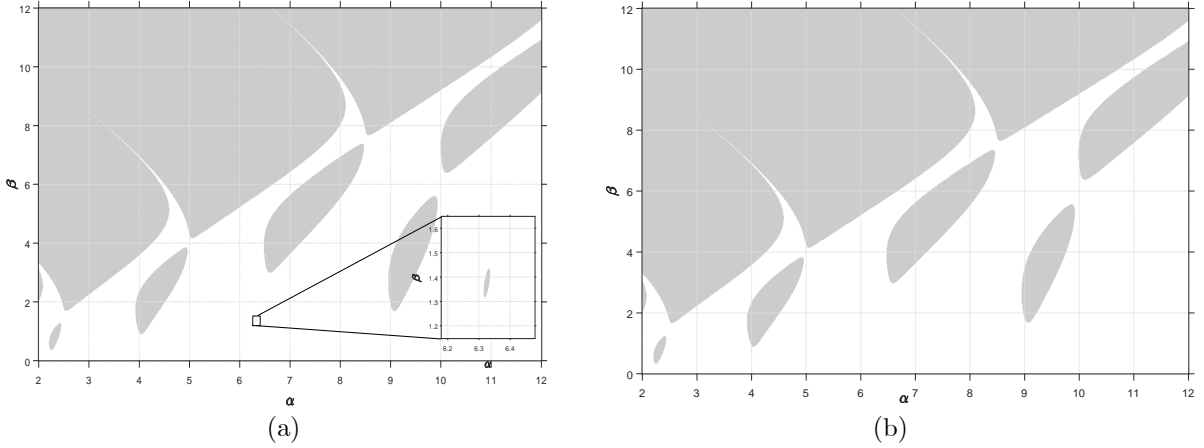


Fig. 5.2 Zonas estables e inestables de: a) $\ddot{x} + 0.0456\dot{x} + (\alpha + \beta \text{sign}(\cos(t)))x = 0$,
b) $\ddot{x} + 0.0465\dot{x} + (\alpha + \beta \text{sign}(\cos(t)))x = 0$.

Lema 5.1.3. Sea $f(\alpha)$ una función continua para toda $\alpha \in \mathbb{A} = \{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 : \alpha_1 \geq 0\}$ tal que $f(\alpha) > 0 \forall \alpha \in \mathbb{A}$, y defina η_n como el máximo valor absoluto del discriminante evaluado sobre la función la n -ésimo línea de máxima energía, donde $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\alpha_1 < \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 < \alpha_2$, es decir

$$\eta_n \triangleq \max_{0 \leq \beta \leq f(\alpha)} [|\Delta(\phi_n(\beta), \beta)|]$$

y defina

$$\xi \triangleq \max_{\alpha_1 < \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 < \alpha_2} [\eta_n, \varrho]$$

donde ϱ es definida en (5.5). Entonces, todas las zonas inestables en la región

$$D = \left\{ (\alpha, \beta) : \alpha \in \mathbb{A} \text{ y } 0 \leq \beta \leq f\left(\alpha - \frac{\delta^2}{4}\right) \right\}$$

desaparecerán si añadimos el termino de disipación $\delta\dot{x}$ donde

$$\delta = \frac{2}{T} \ln \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 4}}{2} \right)$$

Prueba. La prueba sigue del teorema 5.0.2. Debemos encontrar el punto dentro de las zonas inestables donde la velocidad de crecimiento sea máxima. Es decir, debemos encontrar el valor absoluto máximo del discriminante en las zonas inestables debajo de la función $\beta = f(\alpha)$. Sabemos que las curvas Iso- μ están relacionadas con las curvas de transición de un sistema con disipación, i.e. las curvas en el plano $\alpha - \beta$ donde las soluciones de la ecuación de Hill tienden a infinito con la misma velocidad de crecimiento, pueden ser obtenidas calculando las curvas donde al menos una solución del sistema amortiguado es periódica. Sea $\beta = f(\alpha)$ una función real para toda $\alpha \in \mathbb{A} = \{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 : \alpha_1 \geq 0\}$ tal

que $f(\alpha) > 0 \forall \alpha$ y sea F el conjunto de pares (α, β) que pertenecen a las zonas inestables debajo de la función $\beta = f(\alpha)$ y sobre el eje α , esto es

$$F = \{(\alpha, \beta) : |\Delta(\alpha, \beta)| \geq 2, \forall \alpha \in \mathbb{A} \text{ y } 0 \leq \beta \leq f(\alpha)\}$$

Entonces, para eliminar las zonas inestables F necesitamos encontrar el valor absoluto máximo del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ para $(\alpha, \beta) \in F$. Por definición cada MEL_n contiene los puntos de máxima energía $(\phi(\beta), \beta)$ de cada lengua en F , por lo tanto podemos definir

$$\eta_n = \max_{0 \leq \beta \leq f(\alpha)} [|\Delta(\phi_n(\beta), \beta)|]$$

el subíndice n hace referencia a la n th zona inestable. Dado que, sólo estamos buscando eliminar las zonas inestables debajo de una función cuyo dominio es $\alpha \in \mathbb{A} = \{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 : \alpha_1 \geq 0\}$, solamente necesitamos analizar las lenguas cuyo identificador n sea $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\alpha_1 < \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 < \alpha_2$. En general, el máximo valor $\max_{\alpha_1 < \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 < \alpha_2} \{\eta_n\}$ puede no ser el máximo entre todos los $|\Delta(\alpha, \beta)| \forall (\alpha, \beta) \in Z$. Puede darse el caso de que el máximo valor absoluto de $\Delta(\alpha, \beta)$ se encuentre sobre la función $\beta = f(\alpha)$, es decir, en algún punto $(\alpha, f(\alpha))$. Utilicemos la definición de ϱ en (5.5), esto es

$$\varrho = \max_{\alpha \in \mathbb{A}} |\Delta(\alpha, f(\alpha))|$$

Y así el máximo valor absoluto del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ para todos los pares $(\alpha, \beta) \in Z$ es

$$\xi = \max_{n=1,2,\dots} [\eta_n, \varrho]$$

utilizando el Teorema 5.0.2 la mínima cantidad de disipación necesaria para eliminar las zonas inestables debajo de la función $f(\alpha)$ es

$$\delta = \frac{2}{T} \ln \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 4}}{2} \right)$$

Y por la segunda condición del Teorema 5.0.2, debemos restar la constante $\frac{\delta^2}{4}$ al argumento de la función, es decir, $f\left(\alpha - \frac{\delta^2}{4}\right)$. Por lo tanto, la región libre de zonas inestables es $D = \left\{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathbb{A} \text{ y } 0 \leq \beta \leq f\left(\alpha - \frac{\delta^2}{4}\right)\right\}$. \square

5.1.2.1 Ejemplo Si definimos $f(\alpha) = \ell\alpha$, con $\ell \geq 0$, entonces las fórmulas para calcular los coeficientes b_n y c_n pueden ser reescritos como

$$b_0 = c_0 = \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+2} + T^2\alpha(1 + \ell p_{2^k})} \quad (5.6)$$

$$b_n = -\frac{4T^2\alpha(1 + \ell p_{2^k-n})}{2^{2k+2} + T^2\alpha(1 + \ell p_{2^k-n})} \sum_{i=0}^{n-1} S_i \quad (5.7)$$

$$c_n = -\frac{4T^2}{2^{2k+2} + T^2\alpha(1 + \ell p_{2^k-n})} \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_i \sum_{j=i+1}^n \alpha \left(1 + \frac{\ell}{2} (p_{2^k-j} + p_{2^k-j+1}) \right) \right) \quad (5.8)$$

y la aproximación del discriminante sobre la línea $f(\alpha) = \ell\alpha$ es

$$\widehat{\Delta}(\alpha, \alpha\ell) = \sum_{n=0}^{2^k-1} b_n + c_n \quad (5.9)$$

dado que la aproximación del discriminante define la superficie suave $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$, podemos asegurar que la función (5.9) no es singular $\forall\alpha$ y $\forall\ell$.

La Fig. 5.3 a) muestra las zonas de estabilidad y las curvas de transición de la ecuación de $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \sin(3t)))x = 0$. En la Fig. 5.3 b) se muestra la aproximación del discriminante evaluado sobre la función $\beta = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{A} = \{0 \leq \alpha \leq 3\}$

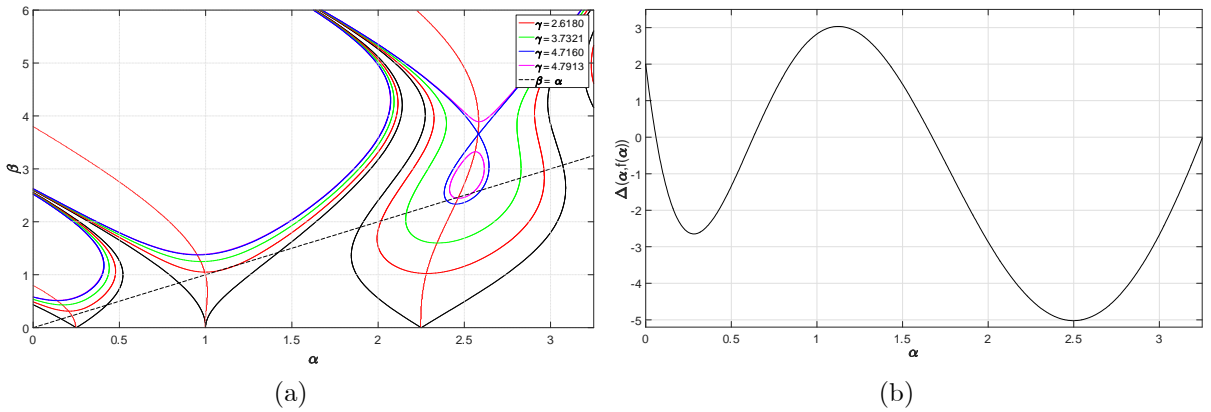


Fig.5.3 a) Zonas de estabilidad de $\ddot{x} + (\alpha + \beta(\cos(t) + \sin(3t)))x = 0$,
b) aproximación del discriminante evaluado en $\beta = \alpha$.

Los valores η_n y ϱ son

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 2.52 & \eta_2 &= 2.826 \\ \eta_3 &= 5.013 & \varrho &= 5.0227 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\xi = 5.0227$$

y

$$\delta = .5003$$

La Fig. 5.4 muestra el diagrama de estabilidad de la ecuación

$$\ddot{x} + 0.5003\dot{x} + (\alpha + \beta (\cos(t) + \sin(3t)))x = 0$$

Note que las zonas de inestabilidad debajo de $\beta = \alpha - \frac{\delta^2}{4}$ desaparecieron.

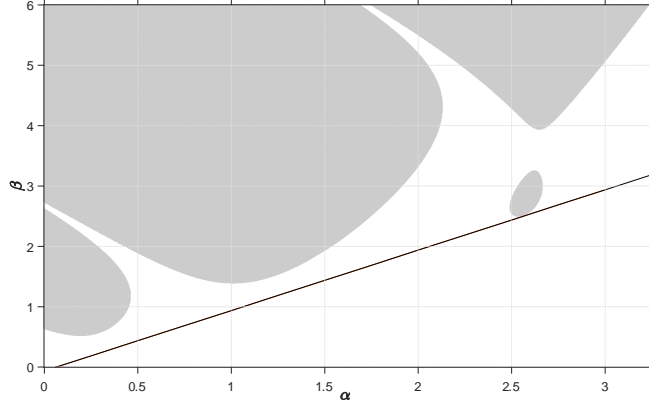


Fig. 5.4 Zonas de estabilidad de $\ddot{x} + 0.5003\dot{x} + (\alpha + \beta (\cos(t) + \sin(3t)))x = 0$, y línea $\beta = \alpha$.

5.2 ESTABILIZACIÓN AÑADIENDO UNA FUNCIÓN PERIÓDICA $U(T + T) = U(T)$ A LA FUNCIÓN DE EXCITACIÓN

Del Teorema 4.3.3 podemos notar que para α y β constantes los coeficientes b_n y c_n son unívocamente definidos por la función de excitación periódica $p(t)$. Más aún, si los coeficientes b_n y c_n son dados, entonces podemos obtener el muestreo de función $p(t)$ que los define. Para facilitar la lectura de esta sección copiaremos el Teorema 4.3.3 como el

Teorema 5.2.1. *Si los operadores de muestreo $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_P$ están definidos como en (4.14) y (4.15) respectivamente entonces, los coeficientes b_n y c_n son*

$$b_0 = c_0 = \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+2} + T^2 (\alpha + \beta p_{2k})} \quad (5.10)$$

$$b_n = -\psi_n \xi_n \sum_{i=0}^{n-1} S_i \quad (5.11)$$

$$c_n = -\psi_n \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_i \sum_{j=i+1}^n \mu_j \right) \quad (5.12)$$

para $n = 1, 2, \dots, 2^k - 1$ y donde

$$\begin{aligned}
S_h &= \sum_{i=0}^h b_i \\
Z_h &= \sum_{i=0}^h c_i \\
\psi_h &= \frac{4T^2}{2^{2k+2} + T^2 (\alpha + \beta p_{2^k-h})} \\
\xi_h &= \alpha + \beta p_{2^k-h} \\
\mu_h &= \alpha + \frac{\beta}{2} (p_{2^k-h} + p_{2^k-h+1})
\end{aligned}$$

La aproximación del discriminante es

$$\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = S_{2^k-1} + Z_{2^k-1} \quad (5.13)$$

De las ecuaciones (5.10)-(5.12) podemos observar que: los coeficientes b_0 y c_0 sólo dependen de p_{2^k} , i.e. ambos coeficientes dependen sólo del valor de la función de excitación $p(t)$ cuando $t = T$; b_1 y c_1 dependen de $p_{2^{k-1}} = p\left(\left(2^k - 1\right) \frac{T}{2^k}\right)$ y p_{2^k} y así sucesivamente. Note que el valor del muestreo p_{2^k-n} puede ser obtenido al despejarlo del coeficiente b_n , c_n o de la suma de ambos $b_n + c_n$. Debido a que estamos interesados en modificar la función $p(t)$, es decir, en encontrar una función periódica $u(t+T) = u(t)$ tal que al ser sumada a $p(t)$ modifique el discriminante (5.13) debemos utilizar la suma de los coeficientes b_n y c_n .

Si definimos χ_n como la suma de b_n y c_n ,

$$\chi_n = b_n + c_n \quad (5.14)$$

sustituyendo (5.10)-(5.12) en (5.14) y resolviendo para p_n obtenemos

$$\begin{aligned}
p_{2^k} &= \frac{2^{2k+3} - (2^{2k+2} + T^2 \alpha) \chi_0}{T^2 \beta \chi_0} \quad (5.15) \\
p_{2^k-n} &= \frac{4T^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha (S_i + c_i) + \frac{\beta}{2} p_{2^k-n+1} c_i + c_i \sum_{j=i+1}^{n-2} \mu_j \right] + \chi_n (2^{2k+2} + T^2 \alpha)}{T^2 \beta \left(\chi_n + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \left[S_i + \frac{1}{2} c_i \right] \right)} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si conocemos b_n y c_n podemos reconstruir el muestreo de la función de excitación $p\left(\left(2^k - n\right)\frac{T}{2^k}\right)$, empezando por $p(T)$ y terminando en $p\left(\frac{T}{2^k}\right)$. Para que las ecuaciones (5.15) y (5.16) exista, los coeficientes χ_n deben cumplir lo siguiente

$$\begin{aligned}\chi_0 &\neq 0 \\ \chi_n &\neq -4 \sum_{i=0}^{n-1} \left[S_i + \frac{1}{2} c_i \right] \\ \beta &\neq 0\end{aligned}$$

La aproximación del discriminante (5.13) puede ser escrita como la sumatoria de χ_n , con $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$,

$$\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \chi_n \quad (5.17)$$

suponga que fijamos el valor del discriminante $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = \theta$ con α, β fijos y que desconocemos la función $p(t)$ que los genero. Al escoger los coeficientes χ_n tal que $\sum_{n=0}^{2^k-1} \chi_n = \theta$, nosotros somos capaces de obtener un número infinito de posibles funciones de excitación $p(t)$.

Ahora, considere el discriminante $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$ asociado a una ecuación periódica diferencial con alguna función de excitación periódica $p(t)$, suponga que para $(\alpha, \beta) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ el discriminante es igual a una constante θ , $\widehat{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \theta$. Por el Teorema 4.3.3 somos capaces de obtener unívocamente los coeficientes χ_n pero, ¿Es posible cambiar el valor del discriminante $\widehat{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ sin alterar el valor de los de los parámetros $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$? La respuesta a esta pregunta es sí, y la prueba es dada por el siguiente

Teorema 5.2.2. *Considere la ecuación diferencial periódica $\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t))x = 0$ donde α y β son constantes reales, $p(t)$ es una función T periódica y sea $\widehat{\Delta}(\alpha, \beta)$ su discriminante. Fije el par $(\alpha, \beta) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ y suponga que $\widehat{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces, existe un número infinito de funciones periódicas $u(t+T) = u(t)$ tales que el discriminante de la ecuación $\ddot{x} + (\bar{\alpha} + \bar{\beta}(p(t) + u(t)))x = 0$ es $\Delta(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \vartheta$, donde ϑ es cualquier número real deseado.*

Prueba. La prueba se basa en el Teorema 5.2.1. Considere la ecuación diferencial periódica $\ddot{x} + (\bar{\alpha} + \bar{\beta}p(t))x = 0$ donde $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ con constantes reales y $p(T+t) = p(t)$. Sabemos que su discriminante puede ser aproximado con (5.17), $\widehat{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \chi_n$, donde $\chi_n = b_n + c_n$ están unívocamente definidos por la función periódica $p(t)$. Por lo tanto, no podemos modificar los parámetros χ_n . Lo que podemos hacer, para modificar el discriminante $\widehat{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ de tal forma que sea igual al valor deseado ϑ , es sumar un número real ϵ_n a cada χ_n , esto es

$$\widehat{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \chi_n + \epsilon_n = \vartheta$$

por hipótesis $\sum_{n=0}^{2^k-1} \chi_n = \theta$, por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{2^k-1} \epsilon_n = \vartheta - \theta \quad (5.18)$$

puesto que los números ϵ_n no tienen ninguna restricción, existe un número infinito de posibles elecciones de ϵ_n tales que (5.18) se cumpla.

Al utilizar las ecuaciones (5.15) y (5.16) somos capaces de obtener la función $g(t) = p(t) + u(t)$ evaluada en $t = (2^k - n) \frac{T}{2^k}$, esto es

$$g_{2^k} = \frac{2^{2k+3} - \vartheta_0 (2^{2k+2} + T^2 \alpha)}{\vartheta_0 T^2 \beta} \quad (5.19)$$

$$g_{2^k-n} = \frac{4T^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha (S_i + c_i) + \frac{\beta}{2} g_{2^k-n+1} c_i + c_i \sum_{j=i+1}^{n-2} \mu_j \right] + (2^{2k+2} + T^2 \alpha) \vartheta_n}{T^2 \beta \left(\vartheta_n + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \left[S_i + \frac{1}{2} c_i \right] \right)} \quad (5.20)$$

con $\vartheta_n = \chi_n + \epsilon_n$ y donde S_n , b_n y c_n están definidas como en el Teorema 5.2.1 pero como g_n en lugar de p_n , es decir

$$\begin{aligned} b_0 &= c_0 = \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+2} + T^2 (\alpha + \beta g_{2^k})} \\ b_n &= -\psi_n \xi_n \sum_{i=0}^{n-1} S_i \\ c_n &= -\psi_n \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_i \sum_{j=i+1}^n \mu_j \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

para $n = 1, 2, \dots, 2^k - 1$ y donde

$$\begin{aligned} S_h &= \sum_{i=0}^h b_i \\ Z_h &= \sum_{i=0}^h c_i \\ \psi_h &= \frac{4T^2}{2^{2k+2} + T^2 (\alpha + \beta g_{2^k-h})} \\ \xi_h &= \alpha + \beta g_{2^k-h} \\ \mu_h &= \alpha + \frac{\beta}{2} (g_{2^k-h} + g_{2^k-h+1}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

por último el muestreo de la función u_n es

$$u_n = g_n - p_n$$

y el teorema queda probado. □

5.2.1 Ejemplo

Considere la ecuación diferencial periódica

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta (\cos(t) + \cos(2t))) x = 0 \quad (5.23)$$

las zonas estables e inestables, asociadas a (5.23), son mostradas en la Fig. 5.5. Note que el punto $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (2.5, 1)$ pertenece a una zona inestable con $\widehat{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = -2.0810$. En este apartado utilizaremos el Teorema 5.2.2 para obtener una función $u(t + 2\pi) = u(t)$ tal que, al ser sumada a la función de excitación $\cos(t) + \cos(2t)$, el punto $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ se convierta en un punto estable con

$$\widehat{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 0$$

para lo cual: primero obtendremos los coeficientes χ_n , $n = 0, \dots, 2^k - 1$ y

$$\chi = \left[\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{2^k-1} \right]'$$

y definiremos

$$\epsilon = \left[\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{2^k-1} \right]'$$

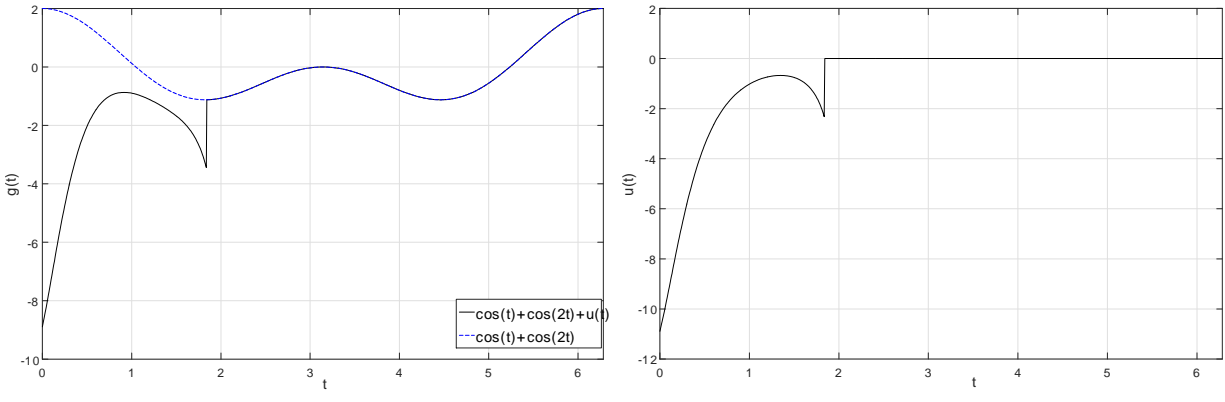
con los primeros 300 elementos igual a $\epsilon_j = \frac{2.0810}{300}$, $j = 0, \dots, 299$, y los elementos restantes los fijamos en cero, $\epsilon_\ell = 0$, $\ell = 301, \dots, 2^k - 1$; luego, definiremos $\vartheta_n = \chi_n + \epsilon_n$ y utilizamos el conjunto de ecuaciones (5.21) y (5.22) para obtener los coeficientes B_n , C_n y el muestreo de $g(t) = \cos(t) + \cos(2t) + u(t)$; finalmente, obtenemos la función

$$u(t_n) = g(t_n) - \cos(t_n) - \cos(2t_n)$$

con $t_n = \frac{nT}{2^k}$, $n = 1, \dots, 2^k$. La Fig. 5.5 a) muestra la función $g(t)$, en b) la función $u(t)$ y en c) muestra las curvas de transición de la ecuación diferencial periódica

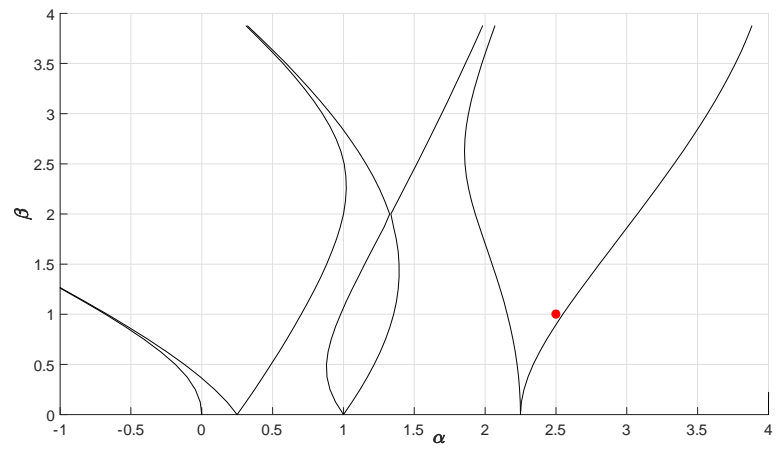
$$\ddot{x} + (\alpha + \beta (\cos(t) + \cos(2t) + u(t))) x = 0$$

Comentario 5.2.3. *Note que con este procedimiento, el promedio de la nueva función T periódica $p(t) + u(t)$, ya no es cero.*

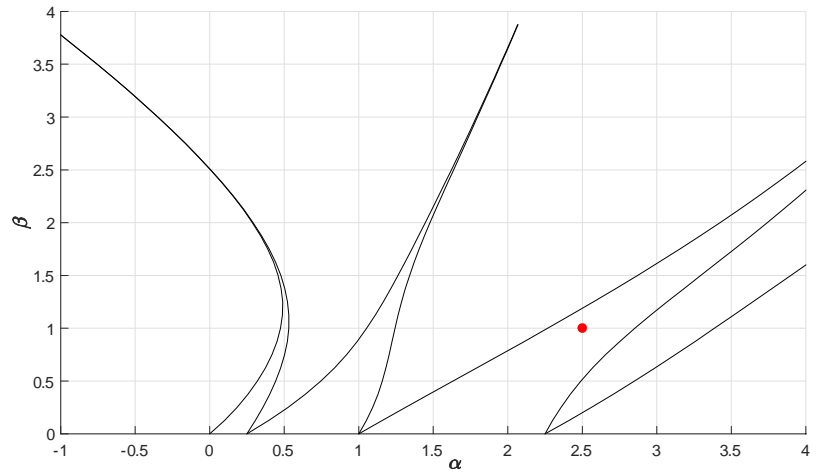


(a)

(b)



(c)



(d)

Fig. 5.5 a) Función de excitación $g(t)$ obtenida utilizando el Teorema 5.2.2, b) función $u(t)$,
 c) curvas de transición de $\ddot{x} + (\alpha + \beta (\cos(t) + \cos(2t)))x = 0$
 d) curvas de transición de $\ddot{x} + (\alpha + \beta (\cos(t) + \cos(2t) + u(t)))x = 0$

6.0 ECUACIÓN DE ONDA

La ecuación de onda es una de las ecuaciones más conocida y empleada en diversos ámbitos científicos como: la acústica, electromagnetismo y la mecánica cuántica. Es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en términos de la variable temporal y las variables espaciales. Esta ecuación describe la propagación de ondas de sonido, luz y hasta la probabilidad de que un electrón esté en cierta posición en determinado tiempo.

En el presente capítulo mostraremos el bien conocido hecho de que cuando el medio en el que se propaga una onda (uno dimensional) es periódico, o bien cuando una cuerda (uno dimensional) está formada por secciones con diferentes densidades y tales secciones forman un patrón periódico entonces, la ecuación de onda tiene una estrecha relación con la ecuación de Hill.

A lo largo del capítulo utilizaremos la ecuación de onda en una cuerda de longitud infinita la cual tiene la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\psi}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tau}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(t, x) \right] \quad (6.1)$$

donde ρ es la densidad de la cuerda, es decir la masa por unidad de longitud x y τ es la tensión a la cual es sometida la cuerda. Si asumimos que la tensión τ es constante y la densidad de la cuerda es homogénea entonces la ecuación de la onda en una cuerda es

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\psi}(t, x) = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\psi}(t, x) \quad (6.2)$$

Si suponemos que la densidad de la cuerda ρ cambia dependiendo de la posición es decir que ρ está en función de la variable espacial x y que el cambio de densidad es periódico con período X , i.e. $\rho(x + X) = \rho(x)$ entonces, la ecuación (6.1) se puede leer como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\psi}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{v}(x) \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(t, x) \right] \quad (6.3)$$

con $\bar{v}(x + X) = \bar{v}(x) = \frac{\tau}{\rho(x)}$. Note que el lado derecho de la ecuación anterior no es tan simple como el de la ecuación (6.2). Para simplificarla un poco, definamos

$$\bar{\psi}(t, x) = \frac{\psi(t, x)}{\sqrt{\bar{v}(x)}}$$

y al sustituirla en (6.3) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,x) &= \bar{v}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x) - \sqrt{\bar{v}(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2\sqrt{\bar{v}(x)}}\frac{\partial}{\partial x}\bar{v}(x)\right]\psi(t,x) \\ &= \bar{v}(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x) - \left[-\left(\frac{\bar{v}'(x)}{2\bar{v}(x)}\right)^2 + \frac{\bar{v}''(x)}{2\bar{v}(x)}\right]\psi(t,x)\right)\end{aligned}\quad (6.4)$$

con $\bar{v}'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\bar{v}(x)$ y $\bar{v}''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{v}(x)$.

Suponiendo separabilidad de la onda, es decir suponiendo que la onda $\psi(t,x)$ puede ser escrita como la multiplicación de una función que depende del tiempo y otra de una función que depende de la variable espacial x , i.e.

$$\psi(t,x) = R(t)y(x)$$

sustituyéndola en (6.4) y agrupando los términos que dependen de la misma variable tenemos

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2}R(t)}{R(t)} = \bar{v}(x)\frac{\frac{d^2}{dx^2}y(x) - \left[\left(\frac{\bar{v}'(x)}{2\bar{v}(x)}\right)^2 + \frac{\bar{v}''(x)}{2\bar{v}(x)}\right]y(x)}{y(x)}\quad (6.5)$$

Suponiendo que $R(t)$ satisface la relación

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2}R(t)}{R(t)} = -\omega^2$$

la ecuación (6.5) puede ser reescrita como

$$\frac{-\omega^2}{\bar{v}(x)}y(x) = \frac{d^2}{dx^2}y(x) + \left[\left(\frac{\bar{v}'(x)}{2\bar{v}(x)}\right)^2 - \frac{\bar{v}''(x)}{2\bar{v}(x)}\right]y(x)$$

definiendo

$$\frac{\omega^2}{v(x)} = \left(\frac{\bar{v}'(x)}{2\bar{v}(x)}\right)^2 + \frac{2\omega^2 - \bar{v}''(x)}{2\bar{v}(x)}$$

y reorganizando los términos tenemos

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{\omega^2}{v(x)}y(x) = 0\quad (6.6)$$

Note que debido a la periodicidad de $\bar{v}(x)$, la función $\frac{\omega^2}{v(x)}$ también es periódica con período X .

No es difícil ver que la ecuación (6.6) corresponde a una ecuación diferencial parcial de la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,x) = v(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x)\quad (6.7)$$

donde $\psi(t, x)$ es la función de onda, x y t son las variables espacial y temporal respectivamente y $v(x)$ es una función X periódica que depende de la posición x . Asumiendo separabilidad de la solución $\psi(t, x)$, es decir asumiendo que la función de onda puede ser escrita como una multiplicación de dos funciones

$$\psi(t, x) = y(x) e^{i\omega t} \quad (6.8)$$

podemos reescribir (6.7) como

$$-\omega^2 y(x) e^{i\omega t} = v(x) y''(x) e^{i\omega t}$$

donde $y''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) = \frac{d^2}{dx^2} y(x)$. Reescribiendo la ecuación anterior y definiendo $q(x + X) = q(x) = 1/v(x)$ obtenemos

$$y''(x) + \omega^2 q(x) y(x) = 0 \quad (6.9)$$

que es igual a la ecuación (6.6).

Note que la ecuación (6.9) es la ecuación de Hill. La diferencia fundamental entre la ecuación de Hill que hemos estudiado hasta ahora con la ecuación (6.9) es que: la primera depende del tiempo y la segunda de la posición. Lo anterior parecería no tener importancia, lo cual es cierto matemáticamente hablando, pero la interpretación física es distinta. Nosotros podríamos esperar que para ciertos valores de amplitud y frecuencia, asociadas a la función de excitación $q(x)$, la solución de (6.9) se amplificara por el hecho de estar en una zona de "inestabilidad". Pero este no es el caso, la función periódica $q(x)$ está relacionada con la variación de la densidad $\rho(x)$ en (6.1) por lo tanto no existe una fuente de donde tomar la energía para tal amplificación [27].

Sabemos que la solución general de (6.9) puede ser escrita como

$$y(x) = C_1 A(x) e^{\mu x} + C_2 B(x) e^{-\mu x} \quad (6.10)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, las funciones $A(x)$ y $B(x)$ tienen período X y el coeficiente ρ es el exponente característico asociado a (6.9), por lo tanto la solución (6.10) puede ser vista como la superposición de dos ondas que se propagan o atenúan en dirección opuesta [3].

De la teoría de ecuaciones diferenciales periódicas, en un grado de libertad, sabemos que los exponentes característicos serán reales si y sólo si el discriminante asociado en módulo es mayor que dos $|\Delta(\alpha, \beta)| > 2$ y serán puramente imaginarios si y sólo si el módulo del discriminante es menor que dos $|\Delta(\alpha, \beta)| < 2$.

Recuerde que las soluciones de la ecuación de Hill en el tiempo serán inestables si el exponente característico ρ es real y positivo, por lo tanto el término que determina la inestabilidad de las soluciones es $e^{\rho t}$ para $t > 0$. En el caso de que la ecuación de Hill dependa

de la posición x , ver ecuación (6.9), el término que describe el comportamiento de la onda dentro de las zonas "inestables", es el término asociado a $e^{-\rho x}$ y la onda asociada $\psi(t, x)$ se atenúa. Esto se debe a que no existe una fuente de energía que haga que la amplitud de la onda crezca sin límites; En el caso de que el exponente característico sea puramente imaginario la solución de la ecuación de Hill en el tiempo y la posición será acotada por lo tanto la onda $\psi(t, x)$ se propagará en el medio.

Por lo anterior la ecuación de Hill espacial¹ puede ser vista como un filtro que permite el paso de ciertas frecuencias ρ asociadas a la variable espacial. Note que las frecuencias ρ dependen de la elección de la frecuencia ω asociada a la variable temporal, ver la ecuación (6.8). Es decir, si los parámetros α y β dependen de ω , los diagramas de estabilidad de la ecuación en el tiempo nos brindan información de la propagación o atenuación de onda $\psi(t, x)$. La Figura 6.1 a) muestra las zonas del diagrama de estabilidad de la ecuación $y''(t) + (\alpha + \beta(\cos(t) + \cos(2t)))y(t) = 0$, la Fig 6.1 b) muestra el valor del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ evaluado sobre la línea roja de la Fig. 6.1 a), este discriminante se utilizara en el resto de esta sección

6.1 DISPERSIÓN

El diagrama de dispersión de la ecuación de onda (6.7) nos brinda la relación entre las frecuencias ω y ρ , ver Fig. 6.2. Dado que estamos interesados en conocer la relación entre frecuencias, temporal y espacial, y puesto que sólo las ondas asociadas a los exponentes característicos puramente imaginarios se propagan podemos definir

$$\rho = i\lambda$$

por lo tanto, la relación de dispersión puede ser definida como [18]:

Definición 6.1.1. *La relación de dispersión de la función de onda $\psi(t, x)$ es el subconjunto de $\mathbb{R}_\omega \times \mathbb{R}_\lambda$ definido como*

$$B_\psi = \{(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid y''(x) + \omega^2 q(x)y(x) = 0 \text{ tenga la solución de Floquet } y(x) = B(x)e^{i\lambda x}\}$$

Si definimos $q(x) = \alpha_0 + \beta_0 p(t)$, con $p(x + X) = p(x)$ y la sustituimos en (6.9), obtenemos la forma de la ecuación de Hill que hemos trabajado. Sabemos que el discriminante

¹El término "ecuación de Hill espacial" es usado para remarcar que la variable independiente es x y no t como en los capítulos anteriores.

está definido como la suma de los multiplicadores característicos asociados a la matriz de monodromía, i.e.

$$\begin{aligned}\Delta(\omega^2\alpha_0, \omega^2\beta_0) &= e^{i\lambda X} + e^{-i\lambda X} \\ &= 2 \cos(\lambda X)\end{aligned}\tag{6.11}$$

despejando λ de la ecuación (6.11) y haciendo $\alpha = \omega^2\alpha_0$, $\beta = \omega^2\beta_0$, tenemos

$$\lambda = \frac{1}{X} \operatorname{Re} [\operatorname{arc} \cos (\Delta(\alpha, \beta) / 2)]\tag{6.12}$$

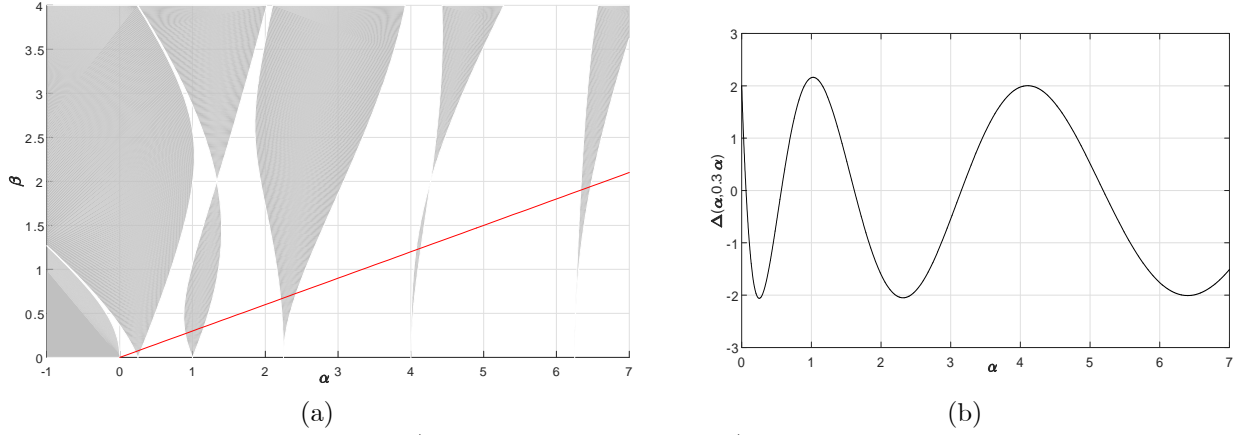


Fig. 6.1 a) Zonas de estabilidad. b) Discriminante.

Por lo tanto la relación de dispersión puede ser obtenido en función del discriminante asociado a la ecuación (6.9). Note que la ecuación (6.11) es una función multi-valuada. Es decir que existe un número infinito de valores de λ tales que $2 \cos(\lambda X)$ es igual a valor fijo de la función $\Delta(\omega^2\alpha_0, \omega^2\beta_0)$. Además, la siguiente relación siempre se cumple

$$2 \cos(\lambda X \pm 2n\pi) = \Delta(\omega^2\alpha_0, \omega^2\beta_0)\tag{6.13}$$

6.1.1 $v(x) = \text{constante}$

Sabemos que el discriminante asociado a la ecuación (6.9) con $\beta_0 = 0$ y $\alpha_0 = \text{const}$ es

$$\Delta(\alpha, 0) = 2 \cos(\sqrt{\alpha}X)$$

por lo tanto, la relación de dispersión es

$$2 \cos(\lambda X) = 2 \cos(\sqrt{\alpha}X)$$

resolviendo para λ tenemos

$$\lambda \pm \frac{2n\pi}{X} = \sqrt{\alpha}\tag{6.14}$$

la Fig. 6.2 a) muestra la relación de dispersión (6.14) de la onda $\psi(t, x)$ con $X = 2\pi$ y $v(x)$ constante², i.e. $\beta_0 = 0$.

²Recuerde que $q(x) = \frac{1}{v(x)}$. Si $\alpha_0 = \text{const}$ y $\beta_0 = 0$ entonces, $v(x)$ y $q(x)$ son constantes.

De la Figura 6.2 a) podemos notar que las curvas de color (azul, rojo y verde) son iguales a la curva color negro excepto por el desplazamiento $\pm \frac{2n\pi}{X}$, esto no es de extrañar debido a la periodicidad del coseno, ver la ecuación (6.13). Note que la región limitada por $-\frac{n\pi}{X} \leq \lambda \leq \frac{n\pi}{X}$ en la Figura 6.2 b) contiene la misma información que el diagrama de dispersión completo. Es decir, el diagrama de dispersión se puede obtener replicando las curvas dentro de los límites $-\frac{n\pi}{X} \leq \lambda \leq \frac{n\pi}{X}$, a la izquierda y a la derecha. El diagrama de dispersión también es conocido como diagrama de Brillouin (Figura 6.2 a)) y el diagrama de la Figura 6.2 b) es conocido como diagrama reducido o primera zona de Brillouin [18, 27].

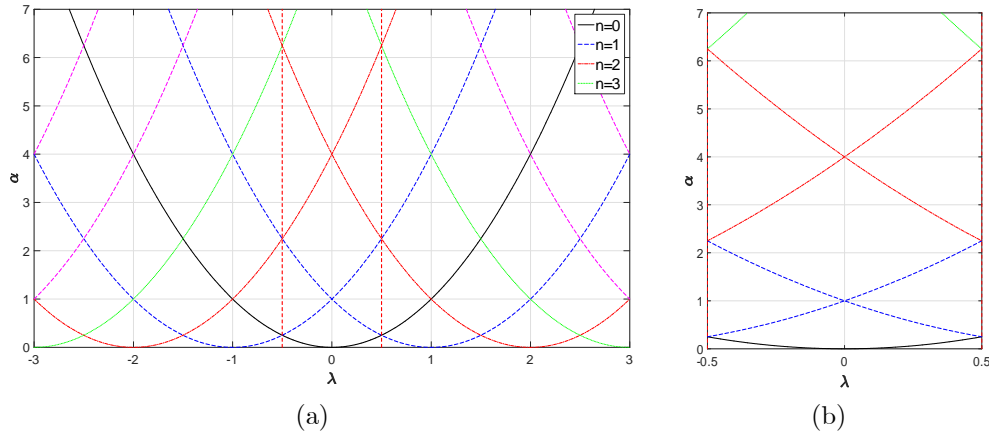


Fig. 6.2 Diagrama de dispersión con $v(x)$ constante

La parábola en color negro de la figura 6.2 a) nos da la información de dispersión de la ecuación de onda $\psi(t, x)$, i.e. nos brinda la relación entre la frecuencia asociada al tiempo ω^2 y la frecuencia asociada a la posición λ . Es importante notar que a toda frecuencia ω^2 le corresponden dos frecuencias λ , es decir; para una ω^2 fija, la solución $y(x)$ de la parte de la ecuación de onda que depende de la posición será de la forma

$$y(x) = C_1 A(x) e^{i\lambda x} + C_2 B(x) e^{-i\lambda x} \quad (6.15)$$

donde las constantes C_1, C_2 y las funciones $A(x)$ y $B(x)$ son como en (6.10).

6.1.2 $v(x)$ no constante y periódica

Cuando la función $v(x)$ en la ecuación de onda (6.7) es una función X periódica, la relación de dispersión no puede ser obtenida en forma cerrada. Esto se debe a que la matriz de monodromía asociada a la parte de la ecuación de onda que depende de la posición x , no puede ser obtenida analíticamente y por lo tanto el discriminante asociado no puede

ser calculado. Afortunadamente existen diversos métodos que nos permiten aproximar el deseado discriminante, ver capítulo 4.

Definamos

$$\frac{1}{v(x)} = \alpha + \beta (\cos(x) + \cos(2x)) \quad (6.16)$$

con $\alpha = \omega^2 \alpha_0$ y $\beta = \omega^2 \beta_0$, $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$ constantes. La parte de la función de onda $\psi(t, x)$ en términos de la posición debe satisfacer

$$y''(x) + [\alpha + \beta (\cos(x) + \cos(2x))] y(x) = 0 \quad (6.17)$$

utilizando la aproximación del discriminante del capítulo 4 y la relación de dispersión (6.12), obtenemos el siguiente diagrama de dispersión³

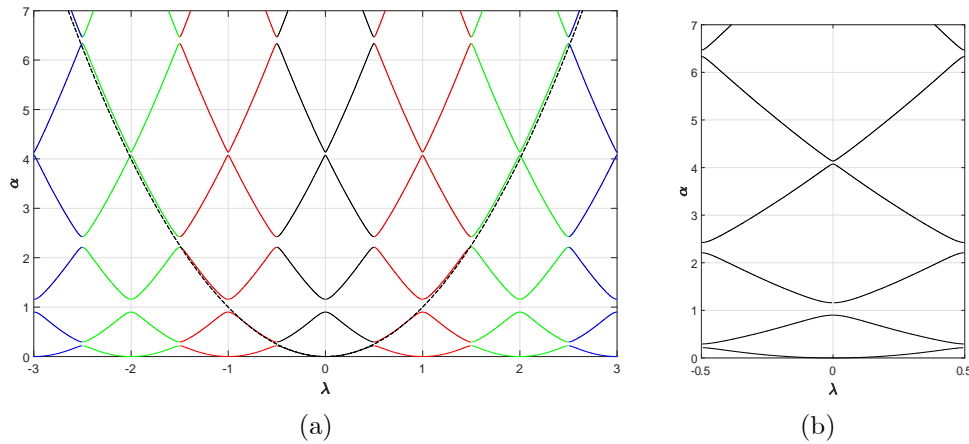


Fig. 6.3 Diagramas de dispersión de la ecuación (6.17) con $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0.3$, $X = 2\pi$

La línea negra punteada, en la Figura 6.3 a) corresponde a la relación de dispersión del caso $v(x) = \text{constante}$. Al hacer que la función $v(x)$ sea periódica el diagrama de dispersión deja de ser continuo, i.e. existen intervalos en los cuales la relación entre la frecuencias ω^2 y λ no existe (λ deja de ser real, este caso se tratará en los siguientes párrafos). En el caso de que la relación de dispersión exista entonces, la solución de la parte de la ecuación de onda que depende de la posición tendrá la misma forma de la ecuación (6.15) y la onda $\psi(t, x)$ se propagara por el medio periódico, de lo contrario la ecuación de onda $\psi(t, x)$ se atenuara como se dijo al inicio del capítulo.

Dado que la relación de dispersión depende del discriminante y por el hecho de que no para todas las frecuencias ω^2 existe el número de onda λ (real). Dicho de otra forma, no toda onda se propaga en un medio periódico $v(x)$. La ecuación de Hill (6.9) puede ser vista como un filtro que permite la propagación de ondas $\psi(t, x)$ con ciertas frecuencias (ω^2, λ) y

³El discriminante asociado a la ecuación (6.17) se muestra en la Fig. 1 b).

la atenuación de otras ondas $\psi(t, x)$ con frecuencia temporal ω^2 , ver [3]. La Figura 6.4 a) muestra sólo la relación de dispersión de la onda $\psi(t, x)$ con $v(x)$ definida como en (6.16) alrededor de la parábola $\alpha = \lambda^2$ (línea negra punteada en las figura 6.3 a) y 6.4 a)).

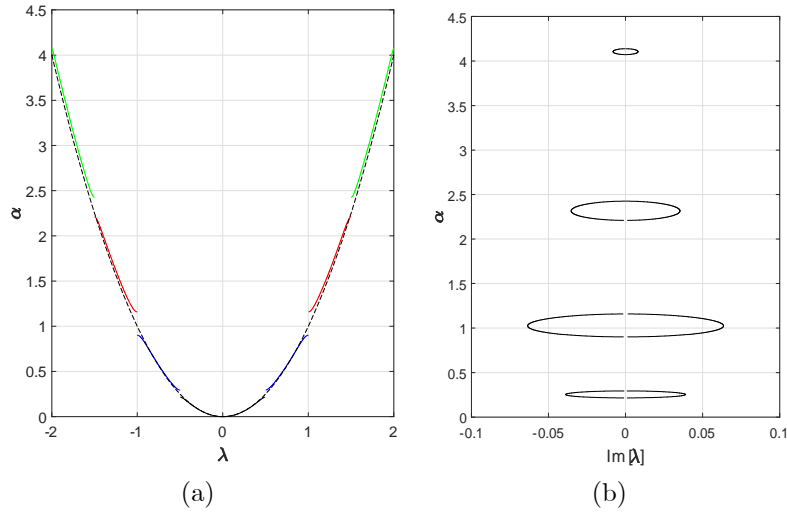


Fig. 6.4 Diagramas de dispersión a) real y b) compleja

6.2 DISPERSIÓN COMPLEJA O ATENUACIÓN DE LA ONDA

Hasta ahora sólo hemos estudiado el caso en el que la relación de dispersión es real. Sabemos que existen intervalos del eje ω^2 para los cuales la onda $\psi(t, x)$ se propaga por el medio periódico, y otros intervalos donde la onda se atenúa. En esa sección se mostrara que dicha atenuación no es la misma para cada valor ω^2 para lo cual presentaremos los diagramas de atenuación [3][18].

Sabemos que la función $f = \arccos(s)$ sólo está definida en los reales cuando s está dentro del intervalo $[-1, 1]$, de lo contrario la función f tomara un valor imaginario. También, sabemos que existen intervalos del eje ω^2 en los cuales el módulo del discriminante es mayor que dos, i.e. $|\Delta(\omega^2\alpha_0, \omega^2\beta_0)| > 2$ las ondas $\psi(t, x)$ con frecuencia temporal ω se atenúan. La Fig. 6.4 b) muestra la parte imaginaria de la relación de dispersión (6.12)

$$\lambda = \text{Im} \left[\frac{1}{X} \arccos(\Delta(\alpha, \beta)/2) \right]$$

Por lo tanto podemos decir que en los segmentos del eje $\alpha = \omega^2\alpha_0$, que corresponden a intervalos de atenuación, la frecuencia λ es un número complejo: la parte real de λ es el valor en donde el diagrama de dispersión (real) tiene una discontinuidad, ver Figura 6.4 a); y la

parte imaginaria de λ esta dada por el valor correspondiente en el diagrama de dispersión compleja, Figura 6.4 b). En el presente caso (el período de $v(x)$ es $X = 2\pi$) la parte real de λ es $n/2$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, el parámetro n es el número de discontinuidad de la dispersión (real).

Para aclarar lo anterior, supongamos que queremos saber el comportamiento de la onda $\psi(t, x)$, ecuación (6.7), con $v(x)$ definida en (6.16), cuando $\omega^2 = 1$: Primero, notamos que $\omega^2 = 1$ pertenece al segundo intervalo de discontinuidad del diagrama de dispersión (Figura 6.4 a)) por lo tanto la parte real de λ es igual a 1; la parte imaginaria de λ se obtiene directamente del diagrama de la Figura 6.4 b), entonces $\text{Im}[\lambda] = 0.0623$. Por lo tanto cuando la frecuencia $\omega^2 = 1$, la frecuencia espacial es $\lambda = 1 + 0.0623i$, por lo que la onda $\psi(t, x)$ se atenúa a razón de $e^{-0.0623x}$.

La Figura 6.5 a) muestra una onda que se propaga por un medio periódico $\frac{1}{v(x)} = \alpha + \beta(\cos(x) + \cos(2x))$, con $\omega^2 = 1.4$, $\lambda = 1.158$, $\alpha_0 = 1$ y $\beta_0 = 0.3$. La Figura 6.5 b) muestra una onda que se atenúa con $\omega^2 = 1$, $\lambda = 1 + 0.0623i$.

En ambas figuras el tiempo se fijó en $t = 22$ y las soluciones fueron obtenidas numéricamente mediante Mathematica 10.0, las condiciones iniciales y de frontera son

$$\begin{aligned} \psi(0, x) &= e^{i\lambda x}, & \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x)|_{t=0} &= i\omega e^{i\lambda x} \\ \psi(t, 0) &= e^{i\omega t}, & \psi(t, 8\pi) &= e^{i\omega t} e^{i\lambda 8\pi} \end{aligned}$$

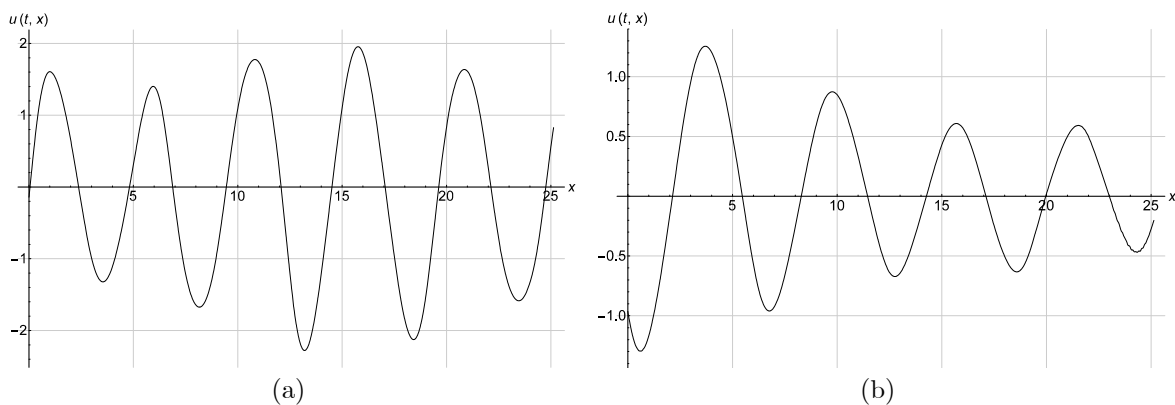


Fig. 6.5 Forma de onda en un medio periódico, a) $\psi(t, x)$ se propaga, b) se atenúa

7.0 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En el presente trabajo mostramos que el discriminante asociado a la ecuación de Hill juega un papel preponderante en el análisis de la estabilidad de sus soluciones. Mostramos que la superficie definida por el discriminante no sólo contiene información sobre la estabilidad del sistema, también nos brinda información sobre las curvas Iso- μ (curvas dentro de las zonas inestables en las cuales las soluciones inestables crecen con la misma velocidad) y de las líneas de máxima energía *MEL* (Líneas, dentro de cada zona inestable, donde el crecimiento de la solución inestable es el máximo). La siguiente tabla muestra la relación de la superficie $(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta))$ y las curvas de transición, Iso- μ , *MEL* y zonas estables e inestables asociadas a una ecuación periódica.

Zonas estables	$-2 < \Delta(\alpha, \beta) < 2$
Zonas inestables	$\Delta(\alpha, \beta) < -2$ o $\Delta(\alpha, \beta) > 2$
Curvas de transición	$(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta)) \cap \{sur f_1, sur f_2\}$ $sur f_1 = \{(\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = 2\}$ $sur f_2 = \{(\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = -2\}$
Curvas Iso- μ	$(\alpha, \beta, \Delta(\alpha, \beta)) \cap \{sur f_1, sur f_2\}$ $sur f_1 = \left\{ (\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = \frac{1+\gamma^2}{\gamma} \right\}$ $sur f_2 = \left\{ (\alpha, \beta, z) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z = -\frac{1+\gamma^2}{\gamma} \right\}$ $\gamma = \max \{ \sigma(M) \} > 1$
<i>MEL</i>	$\frac{\partial \Delta(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$
Puntos de coexistencia	$\frac{\partial \Delta(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$ $ \Delta(\alpha, \beta) = 2$

Se obtuvo una aproximación del discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ por medio de las funciones Walsh. Dado que la aproximación dependía de la inversa de dos matrices de grandes dimensiones, se utilizaron algunas propiedades de las funciones Walsh para transformarlas (similarmente) a matrices triangulares superiores y luego reducir la aproximación a una sumatoria recursiva cuyos términos son dependientes del muestreo de la función de excitación $p(t)$. Se probó que el error de la aproximación es menor cuando el orden 2^k es mayor, también se demostró que si $2^k \rightarrow \infty$ entonces la aproximación tiende al valor real del discriminante, i.e. $\lim_{2^k \rightarrow \infty} \widehat{\Delta}(\alpha, \beta) = \Delta(\alpha, \beta)$.

Haciendo uso de la aproximación obtenida se propuso un método para la estabilización de las soluciones inestables de la ecuación de Hill, se probó que existe un número infinito de funciones $u(t+T) = u(t)$ tales que al ser sumadas a la función de excitación $p(t)$ el discriminante $\Delta(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, con $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ constantes, puede tomar cualquier valor deseado. También, se mostró que la aproximación obtenida en el presente trabajo es equivalente a la aproximación del discriminante de ecuaciones periódicas hecha por A.M. Lyapunov, la cual es una sumatoria de integrales definidas de la función periódica $q(t) = \alpha + \beta p(t)$.

Se expuso la estrecha relación que existe entre la ecuación de onda en un medio periódico y la ecuación de Hill, se mostró que los diagramas de dispersión de una onda pueden ser obtenidos a partir del discriminante asociado a la ecuación de Hill. Y se probó que la ecuación de Hill, cuando es dependiente del espacio (ver capítulo 6), puede ser vista como un filtro que permite el paso de ciertas frecuencias (asociadas a las zonas de estabilidad) y limita el paso de otras frecuencias (asociadas a las zonas de inestabilidad o zonas prohibidas).

7.1 TRABAJO FUTURO

Como trabajo futuro, se pretende continuar con el desarrollo de la última forma de estabilización, Teorema 5.2.2, descrita en capítulo 5.

Se desea introducir una restricción en el promedio de la función de excitación

$$\int_0^T g(t) dt = \int_0^T (p(t) + u(t)) dt = 0$$

además, encontrar las condiciones para las cuales la función (5.20),

$$g_{2^k-n} = - \frac{4T^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha(S_i + c_i) + \frac{\beta}{2} g_{2^k-n+1} c_i + c_i \sum_{j=i+1}^{n-1} \mu_j \right] + (2^{2k+2} + T^2 \alpha) \vartheta_n}{T^2 \beta \left(\vartheta_n + 4 \sum_{i=0}^{n-1} [S_i + \frac{1}{2} c_i] \right)}$$

no se indetermine, es decir

$$\vartheta_n + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \left[S_i + \frac{1}{2} c_i \right] \neq 0$$

ó cuando

$$\vartheta_n + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \left[S_i + \frac{1}{2} c_i \right] = 0$$

↓

$$4T^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha (S_i + c_i) + \frac{\beta}{2} g_{2^k-n+1} c_i + c_i \sum_{j=i+1}^{n-1} \mu_j \right] + (2^{2k+2} + T^2 \alpha) \vartheta_n = 0$$

y $g_{2^k-n} < \infty$

las cuales no son restricciones triviales, recuerde que cada b_n y c_n dependen de algunos muestreos de la función $g(t) = p(t) + u(t)$, en específico dependen de $\{g_{2^k}, g_{2^k-1}, \dots, g_{2^k-n}\}$, vea el conjunto de ecuaciones (5.21) y (5.22), además de que el conjunto de ϑ_n debe cumplir $\sum_{n=0}^{2^k-1} \vartheta_n = \vartheta$, donde ϑ es el valor deseado del discriminante $\Delta(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \vartheta$.

También se desea encontrar $u^*(t)$ tal que

$$u^*(t) = \min_{u(t) \in U} \|u(t)\|$$

donde U es el conjunto de todas las funciones $u(t)$ tales que al ser sumadas a la función de excitación $p(t)$ llevan el discriminante asociado a la ecuación periódica

$$\ddot{x} + (\bar{\alpha} + \bar{\beta}(p(t) + u(t))) x = 0$$

al valor deseado $\Delta(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \vartheta$.

APENDICE

INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES WALSH

En esta parte describiremos de forma breve las propiedades principales de las series de Walsh, algunas de ellas son probadas.

Las funciones de Walsh, denotadas como $w_n(t)$, forman un conjunto ordenado de ondas cuadradas; sólo pueden tomar dos amplitudes, más uno o menos uno; y forman un conjunto ortogonal de funciones cuadradas e integrables en sentido de Lebesgue, vea [2], i.e.

$$\int_0^1 w_n(t) w_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{if } n = m \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases}$$

Para completar la definición de cada $w_n(t)$, son requeridos dos argumentos: un período de tiempo t , usualmente se toma el intervalo $t \in [0, 1]$ pero, puede ser fácilmente transformado a cualquier otro intervalo $[a, b]$; y un número de identificación n , este número está relacionado con la forma de cada función de Walsh [2], ver Fig. A.1.

Comentario .0.1. *El número de funciones Walsh siempre es una potencia de 2, i.e. $\{w_0, w_1, \dots, w_{2^k-1}\}$ para algún entero positivo k .*

Las funciones Walsh pueden ser obtenidas de diferentes maneras, por ejemplo: mediante las funciones Rademacher¹ [2]

$$w_n(t) = \text{sign} \left[(\sin 2\pi t)^{b_0} \prod_{k=1}^m (\cos 2^k \pi t)^{b_k} \right], \quad t \in [0, 1]$$

donde $b_0 \dots b_m$ son los coeficientes de la representación del número n como una expansión diádica ("dyadic expansion"), es decir

$$n = \sum_{i=0}^m b_i 2^i$$

¹Las funciones Rademacher están definidas como $r_k(t) = \text{sgn}(\sin(2^{k+1}\pi t))$, $\forall t \in [0, 1]$ y para cualquier entero $k \geq 0$.

donde b_m es 1 y b_0 es 0 ó 1. También pueden ser obtenidas mediante síntesis Booleana y mediante las matrices Hadamard, siendo la última la forma más conocida y utilizada. Las ocho primeras funciones de Walsh se muestran en la Fig. A.1

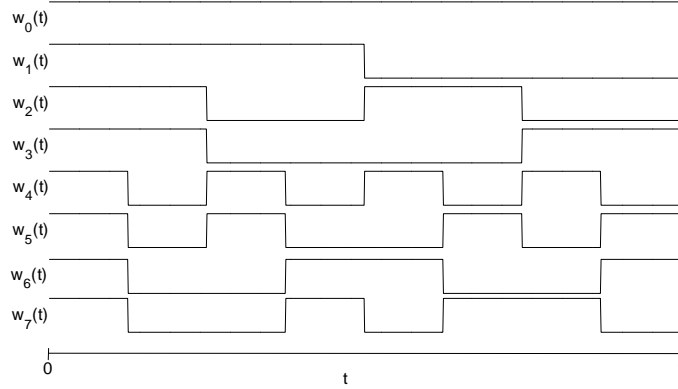


Fig. A.1. Primeras ocho funciones Walsh, $w_0 = 1 \forall t \in [0, 1]$.

La representación de las funciones de Walsh en términos de las matrices de Hadamard² es conocida como la matriz de Walsh, nosotros la denotaremos como W_H . La matriz W_H es obtenida al re-acomodar los renglones de las matrices de Hadamard. En el presente trabajo, los renglones se re-acomodarán en el sentido diádico [12].

La matriz de Walsh asociada a las primeras ocho funciones $w_n(t)$ mostradas en la Fig. A.1 es

$$W_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Cada renglón de W_H corresponde a una función Walsh, es decir, cada elemento de los renglones de W_H es la amplitud de la función $w_n(t)$ representada; la primer entrada de la primer columna es $w_1(0)$ y la última entrada es $w_1(1)$. Note que $W_H \in \mathbb{R}^{2^k \times 2^k}$ es una matriz simétrica y casi ortogonal, $W_H' = W_H$ y $W_H^{-1}W_H = 2^k I_{2^k}$, el símbolo $'$ denota el operador transpuesta.

²Recuerde que las matrices de Hadamard son matrices no singulares de dimensión $2^k \times 2^k$, donde k es un entero positivo. Los elementos de dichas matrices son unos y menos unos, y sus columnas y renglones son ortogonales entre sí.

Toda función $f(t)$ integrable en sentido de Lebesgue y definida en el intervalo $t \in [0, 1]$ puede ser aproximada en términos de series de Walsh

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{2^k-1} a_n w_n(t) = \bar{a}' \bar{w}_{2^k}(t) \quad (\text{A.2})$$

donde $\bar{a}' = [a_0, \dots, a_{m-1}] \in \mathbb{R}^{2^k}$ son los pesos asociados a cada función Walsh, $\bar{w}_{2^k}(t) = [w_0(t), \dots, w_{2^k-1}(t)]' \in \mathbb{R}^{2^k}$ y k es un entero positivo; mientras más grande sea k , mejor será la aproximación (A.2). A partir de ahora, denotaremos 2^k como el orden de la aproximación en términos de funciones Walsh. Por ser, el conjunto de funciones Walsh, un conjunto ortogonal; los pesos a_n están dados por [20]

$$a_n = \int_0^1 f(t) w_n(t) dt \quad (\text{A.3})$$

Note que la ecuación (A.2) también puede ser escrita en términos de W_H , es decir, $f(t) \approx \bar{a}' W_H$. Cada elemento del vector $\bar{a}' W_H$ es el valor de la representación de la función $f(t)$ en un intervalo de tiempo como se muestra en la Fig. A.2

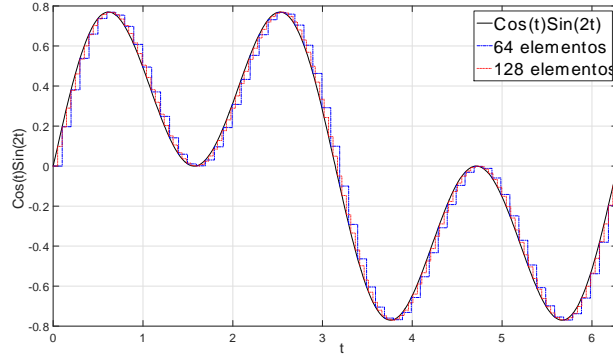


Fig. A.2. Representación de la función $f(t) = \cos(t) \sin(2t)$ en términos de funciones Walsh.

Una de las propiedades más atractivas de las funciones de Walsh es que; si una función $w_n(t)$ pertenece al conjunto finito $\{w_0, w_1, \dots, w_{2^k-1}\}$ entonces, la integral de w_n puede ser representada en términos las funciones del mismo conjunto [8]. Para ilustrar esta propiedad, integremos la función $w_0(t)$ y luego tratemos de representarla como en (A.2) con $k = 2$ y para el intervalo $t \in [0, 1]$

$$\int_0^t w_0(\tau) d\tau = t$$

si sustituimos $f(t) = t$ en (A.3), obtenemos

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 t w_0(t) dt = \frac{1}{2} & a_1 &= \int_0^1 t w_1(t) dt = -\frac{1}{4} \\ a_2 &= \int_0^1 t w_2(t) dt = -\frac{1}{8} & a_3 &= \int_0^1 t w_3(t) dt = 0 \end{aligned}$$

por lo que la representación truncada (A.2) de $f(t) = \int_0^t w_0(t) = t$ es

$$\int_0^t w_0(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \bar{w}_4(t)$$

similarmente, la primer integral de la funciones $w_1(t)$, $w_2(t)$ y $w_3(t)$ son

$$\begin{aligned} \int_0^t w_1(t_1) dt_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \bar{w}_4(t) \\ \int_0^t w_2(t_1) dt_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{w}_4(t) \\ \int_0^t w_3(t_1) dt_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{w}_4(t) \end{aligned}$$

reescribiendo las últimas 4 integrales

$$\begin{aligned} \int_0^t \bar{w}_4(t_1) dt_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{w}_4(t) \\ &= P^{(4)} \bar{w}_4 \end{aligned} \tag{A.4}$$

utilizando argumentos similares podemos generalizar (A.4) como

$$\int_0^t \bar{w}_m(t) = P^{(m)} \bar{w}_m(t) \tag{A.5}$$

donde $P^{(m)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m = 2^k$, y

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= \begin{bmatrix} P^{(n-1)} & -\frac{1}{2^{n+1}} I_{2^{n-1}} \\ \frac{1}{2^{n+1}} I_{2^{n-1}} & 0_{2^{n-1}} \end{bmatrix} \\ P^{(0)} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{A.6}$$

La matriz $P \triangleq P^{(2^k)}$ es conocida como el operador de integración asociado a las funciones Walsh. Debido a que el determinante P es $\det(P) = \frac{1}{2^k}$, el operador P es no singular.

Otra propiedad realmente útil de las funciones en cuestión es que el conjunto finito $\{w_0, w_1, \dots, w_{2^k-1}\}$ es cerrado bajo la multiplicación de dos de sus elementos. Lo anterior se debe a que la multiplicación de dos funciones Walsh satisface

$$w_n(t) w_m(t) \triangleq w_{n \oplus m}(t) \tag{A.7}$$

donde \oplus representa la suma modulo-2 sin acarreo³ [2]. De la definición (A.7) podemos notar que si $w_n(t)$ y $w_m(t)$ pertenecen al conjunto finito $\{w_0, w_1, \dots, w_{2^k-1}\}$ y dado que no existe ningún $m, n < 2^k - 1$ tales que $n \oplus m > 2^k - 1$ entonces, la multiplicación $w_n(t) w_m(t)$ es un elemento del mismo conjunto. Por ejemplo

$$\begin{aligned} w_0(t) w_5(t) &= w_5(t) \\ w_2(t) w_6(t) &= w_4(t) \end{aligned}$$

Para finalizar este apartado presentaremos en forma de lema una última propiedad de las funciones Walsh. Considere la matriz $M_{2^k} = \bar{w}_{2^k}(t) \bar{w}'_{2^k}(t)$, siguiendo la definición (A.7) M_{2^k} puede ser escrita como

$$M_{2^k} = \begin{bmatrix} w_{0\oplus 0} & w_{1\oplus 0} & \cdots & w_{2^k-1\oplus 0} \\ w_{0\oplus 1} & w_{1\oplus 1} & \cdots & w_{2^k-1\oplus 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{0\oplus 2^k-1} & w_{1\oplus 2^k-1} & \cdots & w_{2^k-1\oplus 2^k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_{2^k-1} \\ w_1 & w_0 & \cdots & w_{2^k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{2^k-1} & w_{2^k-2} & \cdots & w_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

el siguiente lema nos dice que las columnas de la matriz M_{2^k} son permutaciones de la primer columna

Lema .0.2 (4.0.1). *Sea $\bar{w}_{2^k}(t)$ el vector cuyos elementos son las primeras 2^k funciones Walsh $w_n(t)$, $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, y $M_{2^k} = \bar{w}_{2^k} \bar{w}'_{2^k}$ entonces, las columnas de la matriz M_{2^k} son permutaciones de los elementos del vector $\bar{w}_{2^k}(t)$, es decir*

$$M_{2^k}(t) = \left[\bar{w}_{2^k}(t), \Lambda_1^{(2^k)} \bar{w}_{2^k}(t), \dots, \Lambda_{2^k-1}^{(2^k)} \bar{w}_{2^k}(t) \right]$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda_i^{(2^k)} &= \begin{bmatrix} \Lambda_i^{(2^k/2)} & 0_{(2^k/2)} \\ 0_{(2^k/2)} & \Lambda_i^{(2^k/2)} \end{bmatrix} \\ \Lambda_{i+(2^k/2)}^{(2^k)} &= \begin{bmatrix} 0_{(2^k/2)} & \Lambda_i^{(2^k/2)} \\ \Lambda_i^{(2^k/2)} & 0_{(2^k/2)} \end{bmatrix} \\ \Lambda_0^{(2^k)} &= I_{2^k} \\ \Lambda_i^{(2^k)} &\in R^{2^k \times 2^k} \end{aligned}$$

La prueba del Lema puede ser encontrada en [30].

³Por ejemplo, la suma módulo 2 sin acarreo de 7 y 2 es igual a 5, dado que $(111)_B \oplus (010)_B = (101)_B$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Adrianova, L. Y. *Introduction to linear systems of differential equations*. American Mathematical Soc., 1995.
- [2] Beauchamp, K. G., *Walsh functions and their applications*. Academic press, 1975.
- [3] Brillouin, L., *Wave propagation in periodic structures*. Dover publications, 2nd ed. 1953.
- [4] Brockett, W. R., *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley, 1969. Reimpreso en SIAM, 2015.
- [5] Chen, C.F. and Tsay Y.T., *Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and Their Application to Distributed Systems*. Journal of the Franklin Institute, 303(3), 267-284, 1977.
- [6] Collins, P. J., *Differential and integral equations*. Oxford University Press. 2006.
- [7] Dvorak, R., Lhotka, C., *Celestial dynamics: chaoticity and dynamics of celestial systems*. John Wiley & Sons. 2013.
- [8] Fine, N. J., *On the Walsh functions*. Transactions of the American Mathematical Society, 65(3), 372-414, 1949.
- [9] Franco, C. and Collado, J., *Damped Hill's equation and iso- μ curves of a related second Hill's equation*, CDC 2015.
- [10] Gel'fand I. M., Lidskii V. B., *On the structure of the regions of stability of linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients*. English translation Amer. Math. Soc. Transl., 8, 143-181, 1958.
- [11] Gulamhusein M. N., *Simple Matrix Theory Proof of the Discrete Dyadic Convolution Theorem*. Electronics Letters, 10(9), 238-239, 1973.
- [12] Harmuth, H. F., Ahmed, N., *Sequency theory: foundations and applications*. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, 9(5), 312-312, 1979.
- [13] He, J. H., *Homotopy perturbation technique*. Computer methods in applied mechanics and engineering. 178(3), 257-262, 1999.
- [14] Hill, G. W., *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*. Acta mathematica, 8(1), 1-36, 1886.

- [15] Hochstadt, H., *Asymptotic estimates for the Sturm-Liouville spectrum*. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 14, no 4, p. 719 - 764, 1961.
- [16] Hochstadt H., *Functiontheoretic properties of the discriminant of Hill's equation*. Mathematische Zeitschrift, vol. 82, no 3, p. 237-242, 1963.
- [17] Karanam, V. R., Frick, P. A., & Mohler, R. R., *Bilinear system identification by Walsh functions*. Automatic Control, IEEE Transactions on, 23(4), 709-713, 1978.
- [18] Kuchment, P., An overview of periodic elliptic operators. Bulletin of the American Mathematical Society, 53(3), 343-414, 2016.
- [19] Lancaster, P., and Tismenetsky, M., *The theory of matrices: with applications*. Academic Press. 1985.
- [20] Luenberger, D., *Optimization by vector space methods*, Wiley 1969.
- [21] Lyapunov A.M., *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor and Francis, 1992.
- [22] Lyapunov A.M., *On the series, encountered in the theory of linear second order differential equation with periodic coefficients*. Academy of Science's notes on the physics-mathematical department, Series VIII, pp. 1-70. 1902. (In Russian).
- [23] Magnus W., Winkler S., *Hill's equation*. Dover Phoenix Editions, 2004; Originally published by John Wiley and Sons, 1966.
- [24] McLachlan, N., *Theory and Applications of Mathieu Functions*. Oxford Press, 1951.
- [25] Meyer, K., Hall, G., Offin, D., *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem* 2nd Ed. (Vol. 90). Springer Science & Business Media. 2009.
- [26] Nusicinsky I., and Hardy A.A., *Band-gap analysis of one-dimensional photonic crystals and conditions for gap closing*. Phys. Rev. B 73, 2006.
- [27] Rabinovich, M. I., & Trubetskov, D. I. *Oscillations and waves: in linear and nonlinear systems* (Vol. 50). Springer Science & Business Media, 2012.
- [28] Seyranian, A. P. and Mailybaev, A. A. *Multiparameter stability theory with mechanical applications*. World Scientific, 2003, vol. 13.
- [29] Shi J., *A new form of discriminant for Hill's equation*. Ann. of Diff. Eqs. 15 : 2, 191 - 210. 1999.
- [30] Stavroulakis, P., Tzafestas, S., *Distributed-parameter observer-based control implementation using finite spatial measurements*. Mathematics and Computers in Simulation, 22(4), 373-379, 1980
- [31] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions: 2d Ed*. Oxford University Press, 1964.
- [32] Trefethen, L. N., Embree, M., *Spectra and pseudospectra: the behavior of nonnormal matrices and operators*. Princeton University Press, 2005.
- [33] Ungar P., *Stable Hill equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1961, vol. 14, no 4, p. 707-710.

- [34] Volkmer, H., *Coexistence of periodic solutions of Ince's equation*, Analysis, vol. 23, no. 1 pp 37-106, 2003.
- [35] Winkler S. and Magnus W., *The coexistence problem for Hill's equation*. Dissertation, New York University, 1958.
- [36] Yakubovich V.A., Starzhinskii V., *Linear differential equations with periodic coefficients*, 2 vols. Wiley, 1975.