

**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE
CONTROL AUTOMÁTICO

Grúa bifilar y problemas asociados

Tesis que presenta

M.C. Irandi Gutiérrez Carmona

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

En la Especialidad de

Control Automático

Directores de Tesis:

Dr. Joaquín Collado M.

México, D.F.

Marzo, 2017

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo incondicional, sus ánimos, y por enseñarme a buscar y lograr mis sueños y por inspirarme a ser mejor persona.

A mi asesor, por guiarme en la realización de esta tesis, por la paciencia en sus enseñanzas y por la confianza brindada.

A mis sinodales por sus acertados comentarios, críticas y correcciones a esta tesis.

A mis compañeros y amigos del Departamento de Control Automático que compartieron conmigo clases, preocupaciones, risas, logros y fracasos, gracias por su amistad y por hacer más amena y feliz la estancia en las aulas.

A todo el personal técnico y administrativo del Departamento de Control Automático, por brindarme su apoyo, por todo su trabajo, por hacer más fácil la estancia como estudiante.

Al CINVESTAV por permitirme ser parte de su gran y reconocida comunidad estudiantil.

Al CONACYT por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de Maestría.

Índice general

Agradecimientos	I
Índice de figuras	V
Abstract	VII
Resumen	VIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Estructura del Trabajo	2
1.3. Publicaciones Realizadas	3
2. Preliminares	5
2.1. Movimiento de una partícula	5
2.1.1. Restricción sobre la partícula	6
2.1.1.1. Restricciones Bilaterales	6
2.1.1.2. Restricciones Unilaterales	8
2.2. Ecuaciones dinámicas	8
2.2.1. Formalismo de Lagrange	9
2.2.2. Ecuaciones Dinámicas de Lagrange	10
2.3. Restricciones Unilaterales	11
2.3.1. Potenciales no-suaves	13

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
3. Grúa Torre	17
3.1. Modelo matemático	17
3.1.1. Ecuaciones Dinámicas	21
3.1.2. Control del movimiento de la grúa	26
3.1.2.1. Linealización	27
3.1.2.2. Controlador LQR	29
3.1.2.3. Conexión entre controlador y planta	30
3.2. Resultados experimentales y de simulación	33
3.2.1. Estabilización	33
3.2.1.1. Caso 1: $d \geq$ translación horizontal de la carga	36
3.2.1.2. Caso 2: $d \ll$ translación horizontal de la carga	37
3.2.2. Evasión de Obstáculos	39
3.2.2.1. Elevación de la carga	41
3.2.2.2. Rodeando el obstáculo	43
3.3. Análisis de la grúa bifilar	45
4. Grúa con restricciones unilaterales	46
4.1. Modelo matemático	46
4.2. Colisiones en el sistema	49
4.3. Grúa bifilar bajo excitación paramétrica	53
4.4. Simulación numérica	56
4.4.1. Movimiento de la carga sin fuerzas inerciales	58
4.4.2. Movimiento de la carga con excitación paramétrica	59
4.5. Análisis de Resultados	62
A. Péndulo de Kapitza	64
A.1. Modelo Matemático	64
A.1.1. Ecuaciones dinámicas	65
A.1.2. Zonas de estabilidad	66

A.2. Resultados numéricos y experimentales	71
A.3. Análisis y Conclusiones	73
Bibliografía	74

Índice de figuras

2.1. Relación entre fuerzas y velocidades en la ley de fricción de Coulomb	16
3.1. Grúa Torre	20
3.2. El nuevo cambio de coordenadas en la grúa	23
3.3. Esquema de controlador y planta	32
3.4. Prototipo en laboratorio de la grúa	34
3.5. Movimiento de la carga Caso 1.	37
3.6. Oscilación del cable	38
3.7. Movimiento de la carga Caso 2.	40
3.8. Levantando la carga sobre el obstáculo.	42
3.9. Seguimiento de trayectoria: Elevación	42
3.10. Seguimiento de trayectoria: Elevación en grúa real.	43
3.11. Esfuerzo de control en los cables	43
3.12. Trayectoria rodeando el obstáculo	44
3.13. Seguimiento de trayectoria: Rodeo	44
4.1. Grúa bifilar con restricciones unilaterales.	47
4.2. Tipos de colisiones en la grúa bifilar	51
4.3. Péndulo Unilateral	55
4.4. Región de estabilidad con restricciones unilaterales	56
4.5. Desplazamiento de la partícula cuando la distancia entre pivotes es pequeña	58
4.6. Desplazamiento de la partícula cuando la distancia entre pivotes es grande	59

4.7. Trayectorias de la partícula con $x \equiv 0$	60
4.8. Trayectorias de la partícula para $\beta = \{0.14, 0.16, 0.18\}$	61
4.9. Trayectorías para la excitación con parámetros $(\alpha, \beta) = (0.14, 0.20)$	61
4.10. Trayectorías para la excitación con parámetros $(\alpha, \beta) = (0.16, 0.20)$	62
A.1. Curvas paramétricas para distintos valores de λ	71
A.2. Zona de estabilidad del péndulo doble	72
A.3. Comportamiento del péndulo doble de Kapitsa	73

Abstract

In this work is studied the design of a bifilar crane in order to reduce oscillations in industrial cranes. Over the proposed crane design, the mathematical model is obtained using unconventional generalized coordinates that allow coordinating both cables to reduce load oscillations while following desired trajectories. It was proposed a linear controller, tuned to satisfy some quadratic cost functional. Simulations and experimental results validate the presented algorithm.

While performing experimental validation, unmodelled dynamics were observed; so, a second mechanical model was needed to represent collision type behaviour in the system. This second model is important to comprehend the influence of the mechanical configuration in the system behaviour; as well as the unstable dynamics induced by periodic external forces.

The difference, between the two mechanical models presented in this work, lies that in one model only bilateral constraints were considered for the cables; while in the other model, unilateral constraints were considered for the cables. The difference between restrictions allow to study more complex dynamics in the crane such as bouncing or collision-type behaviour, that may occur when shifting, at high velocities, the crane direction.

It was also found that in some situations, periodic external forces lead to what resembles chaotic behaviour, a situation that was not previously described.

Resumen

En el presente trabajo se estudia el diseño de una grúa bifilar con la finalidad de reducir oscilaciones en grúas industriales. Sobre el diseño propuesto, el modelo matemático es obtenido usando un sistema de coordenadas generalizadas poco convencional que permitirá coordinar ambos cables para reducir oscilaciones mientras que la carga es capaz de seguir determinadas trayectorias, el controlador propuesto es lineal y sintonizado para satisfacer una funcional de costo cuadrático. Simulaciones y resultados experimentales validan el algoritmo presentado.

Durante la realización de experimentos, se observaron comportamientos no contemplados en el primer modelo matemático, haciéndose necesario un segundo modelo capaz de representar un sistema mecánico con colisiones. El segundo modelo resulta de gran importancia para entender la influencia de la configuración mecánica en el comportamiento del sistema; así como también el efecto desestabilizador producido por fuerzas periódicas externas.

La diferencia fundamental entre ambos modelos matemáticos presentados en este trabajo radica, en que primero fueron consideradas restricciones bilaterales correspondientes a un cable comportándose como un cuerpo rígido; y posteriormente, fueron consideradas restricciones unilaterales correspondientes a un cable completamente flexible, inextensible y de masa despreciable. Esta diferencia permite estudiar movimientos más complejos en la carga, como los que ocurren cuando se tienen cambios de dirección a altas velocidades. Además, se encontró que las fuerzas periódicas externas conducen a dinámicas que asemejan caos. Situación que anteriormente no había sido descrita.

Introducción

El estudio de los sistemas mecánicos, su modelado, simulación y control es tan antiguo como la humanidad misma. La mecánica ha sido el detonante de áreas como la matemática, física, análisis de materiales, métodos numéricos así como de muchas otras áreas. En la actualidad el estudio de la mecánica es tan vigente como en sus inicios, y el entender como un sistema mecánico funciona permite el mejorar su rendimiento, incrementar el factor de seguridad, o desarrollar nuevos sistemas mecánicos.

1.1. Motivación

Las grúas son mecanismos ampliamente usados en prácticamente todas las industrias; sin embargo, su estudio ha sido desvalorado, inclusive por el autor de éste trabajo, y pese a su aparente simple construcción, presentan desafíos interesantes dignos de amplios tratados.

Puesto que las grúas son sistemas sub-actuados [1, 2] y la atenuación de oscilaciones se deja a manos de los operarios, obtenemos como resultado sistemas lentos. Una gran cantidad de técnicas de control han surgido para ayudar a los operarios en sus funciones; sin embargo, casi el mismo número de técnicas han sido descartadas por los operadores puesto que los algoritmos propuestos van en contra de la intuición del maquinista.

Por este motivo, se ha propuesto modificar el diseño de la grúa para ayudar a reducir las oscilaciones sin modificar la forma en la que los operarios interactúan con el sistema. Se tomó como base la denominada *Grúa Torre*, la cual se encuentra encima de casi todos los grandes edificios en

construcción, que consiste en una estructura rotatoria, un vehículo de carga y un cable que soporta la carga. Esta grúa cuenta con tres motores que modifican la rotación de la estructura, el desplazamiento del vehículo de carga y la longitud del cable, por su configuración, se tienen los mismos problemas que presentaría un péndulo: sin forma directa de controlar las oscilaciones y bajo amortiguamiento de las mismas. El agregar un segundo cable que soporte la carga permite un mejor control; sin embargo, aparece un nuevo desafío, el cómo controlar la carga de forma eficiente con esta nueva configuración.

1.2. Estructura del Trabajo

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera; en el capítulo dos, se enuncian las definiciones necesarias para entender el desarrollo de éste trabajo. A lo largo del trabajo, en caso de ser necesario, se hace referencia a las fuentes que aclaran algunos aspectos técnicos para lectores no tan allegados con el tema desarrollado; todo esto con el fin de mantener una lectura simple y no esconder las ideas principales del trabajo.

En el capítulo tres, se estudia la propuesta de diseño de la grúa que permitirá manipular la carga de forma más segura y eficiente; el nuevo diseño, el modelado matemático y un controlador lineal son presentados. Resultados numéricos y experimentales son mostrados para resaltar algunas de las propiedades del nuevo mecanismo. La verificación en prototipo de laboratorio, permitió observar movimientos del sistema que no correspondían a la dinámica obtenida mediante el formalismo de Lagrange sobre sistemas holonómicos; el comprender y modelar esta nueva dinámica no es tarea sencilla; entonces, en el capítulo cuarto explicaremos el problema de la grúa con restricciones unilaterales.

Finalmente, dedicamos una sección en el apéndice para el estudio del péndulo de Kapitsa, cuyo configuración mecánica no está muy alejada al problema de la grúa, se estudia el efecto de la resonancia paramétrica en el comportamiento del sistema. La parametrización de las fronteras de estabilidad, permite entender la fuerte relación que existe entre configuración mecánica y la sensibilidad frente a cambios periódicos en alguno de los parámetros.

1.3. Publicaciones Realizadas

Los artículos publicados, en revistas y congresos internacionales, producto de este trabajo de tesis son: *Estabilización del péndulo doble mediante excitación paramétrica* [3], *Control of a two-wired hammerhead crane* [4], *An LQR controller in the obstacle avoidance of a two-wires hammerhead crane* [5], *Obstacle Avoidance in a Two Wired Hammerhead Tower Crane* [6], and *Control of a novel two-wired crane* [7].

En este capítulo se presentan algunos conceptos y herramientas básicas para entender la formulación y desarrollo de esta tesis. Este capítulo no pretende aportar nada nuevo en cuanto al análisis de sistemas mecánicos, y sirve sólo como base para entender de forma sencilla el desarrollo y resultados del presente trabajo.

2.1. Movimiento de una partícula

El movimiento de una partícula en un marco inercial es descrito por la segunda ley de Newton en donde la aceleración que experimenta dicha partícula es proporcional a la fuerza que actúa sobre ella; se reconoce entonces, casi de forma instintiva la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Pese a su sencillez, en esta ecuación está fundamentado todo el desarrollo de la mecánica clásica.

Dadas las coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de una partícula en el tiempo t sobre un marco de referencia cartesiano; se pueden escribir las ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z, \quad (2.1)$$

donde $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ son la proyección en cada una de las direcciones de la fuerza aplicada a la masa m .

2.1.1. Restricción sobre la partícula

De la interacción de las partículas con su entorno se define la dinámica de las partículas. Las fuerzas a las que son sometidas las partículas son de distinta naturaleza, y pueden ser descompuestas como

$$X = X^{\text{con}} + X^{\text{ext}} + X^{\text{rest}} \quad (2.2)$$

donde

- X^{con} : son las **fuerzas conservativas**, que se pueden expresar por el gradiente de una función potencial, $X^{\text{con}} = -\frac{\partial U}{\partial x}$, en donde el trabajo que se realiza sobre la partícula depende únicamente de los extremos de la trayectoria.
- X^{ext} : son las **fuerzas externas** producidas por señales de control o perturbaciones externas.
- X^{rest} : son las **fuerzas de restricción** producidas por topes mecánicos o mecanismos similares.

Sobre estas últimas, las fuerzas de restricción son clasificadas según su naturaleza, en restricciones bilaterales y unilaterales. Antes de definirlas formalmente; pensemos en una cuenta de vidrio sobre una superficie, si la canica está obligada a permanecer sobre la superficie podemos hablar de restricciones bilaterales; si pensamos en la superficie de restricción como una mesa, la canica estará restringida únicamente a no traspasar la mesa, pero podrá brincar sobre ella, a este tipo de restricciones se les llama unilaterales.

2.1.1.1. Restricciones Bilaterales

Considere el movimiento de la partícula descrito por la ecuación (2.1), restringida a permanecer en una superficie de restricción $\psi(x, y, z, t) = 0$ donde $\psi \in C^2$. Todo movimiento admisible de la partícula debe satisfacer siempre esta restricción, se acostumbra expresar esta restricción como una ecuación de Pfaffian [8] de la forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = 0 \quad (2.3)$$

La superficie $\psi(x, y, z, t)$ ejercerá una fuerza de reacción normal, de cualquier magnitud y signo para que la partícula permanezca en la superficie de restricción.

Observación 2.1 ([8]). En el caso que la fuerza de restricción no dependa explícitamente del tiempo, $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$, ésta no realizará ningún trabajo sobre la partícula; en caso contrario, esta afirmación deja de ser cierta.

Cuando la ecuación (2.3) cumple $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$; sobre cualquier desplazamiento infinitesimal de la partícula, se tiene $X^{\text{res}} dx + Y^{\text{res}} dy + Z^{\text{res}} dz = 0$ y entonces

$$\lambda = \frac{X^{\text{res}}}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{Y^{\text{res}}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{Z^{\text{res}}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}}. \quad (2.4)$$

Esto es, las fuerzas de restricción mantienen una relación de proporcionalidad con el gradiente de la superficie de restricción; es decir, λ es la fuerza ejercida sobre la masa m debido a las restricciones.

Observación 2.2. El resultado anterior se puede extender para el caso donde $\frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0$ al incluir el concepto de *desplazamiento virtual*.

En el caso más general la ecuación de restricción (2.3) toma la forma

$$adx + bdy + cdz + pdt = 0. \quad (2.5)$$

En donde a, b, c, p son funciones de clase C^1 que dependen de x, y, z, t . Las siguientes definiciones se siguen inmediatamente.

Definición 2.1 (Sistemas holonómicos y no-holonómicos [8]). Cuando la ecuación (2.5) acepta un factor integrante el sistema es llamado *holonómico*; y recuperamos una restricción de la forma $\psi(x, y, z; t) = 0$. En caso contrario el sistema es llamado *no-holonómico* y se debe trabajar directamente con la ecuación de Pfaffian (2.3).

Con estas definiciones, se tiene que los sistemas holonómicos tienen restricciones sobre el espacio de configuraciones, mientras que los sistemas no-holonómicos tienen únicamente restricciones en las velocidades de sus trayectorias.

2.1.1.2. Restricciones Unilaterales

Los sistemas mecánicos con restricciones unilaterales tienen un comportamiento complejo. Las restricciones funcionan como paredes, no están activas hasta que son alcanzadas por alguna partícula del sistema; sólo en este instante, ejercen sobre el sistema una fuerza de magnitud arbitraria para evitar ser traspasadas. El contacto que ocurre entre la partícula y la frontera puede producir fuerzas pulsantes, lo que ocasiona comportamientos no suaves en la velocidad del sistema entendidos como 'brincos'. La dificultad de las restricciones unilaterales radica en identificar el momento en que la partícula alcanza la restricción, así como el cuantificar la cantidad de fuerza que la restricción ejerce sobre la partícula.

Las restricciones unilaterales que se presentan en éste trabajo son de la forma

$$\psi(x, y, z, t) \geq 0. \quad (2.6)$$

Es claro que hacemos alusión a sistemas mecánicos con restricciones integrables. Por su importancia, la descripción de las restricciones unilaterales se presenta en su propia sección más adelante.

2.2. Ecuaciones dinámicas

Considere el caso de un sistema de v partículas con restricciones bilaterales; tenemos $N = 3v$ coordenadas que describen la posición del sistema. Con N ecuaciones de la forma

$$m_s \ddot{x}_s = X_s, \quad s = 1, 2, \dots, N;$$

donde X_s denota la fuerza proyectada en la dirección x_s sobre la partícula. En el caso de una restricción, la ecuación de Pfaffian tiene la forma

$$A_1 \dot{x}_1 + A_2 \dot{x}_2 + A_3 \dot{x}_3 + \dots + A_N \dot{x}_N + A = 0;$$

o bien

$$\sum_{j=1}^N A_j \dot{x}_j + B = 0;$$

donde los coeficientes A_j y B están determinados por la naturaleza de la restricción. En el caso de L restricciones se tiene entonces

$$\sum_{j=1}^N A_{rj} \dot{x}_j + B_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, L. \quad (2.7)$$

Descomponiendo las fuerzas X_s como en (2.2) y usando (2.4), se puede escribir la ecuación dinámica de movimiento como

$$m_s \ddot{x}_s = X_s^{ext} + X_s^{pot} + \sum_{j=1}^L \lambda_j A_{js}, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

Así, (2.8) y (2.7), son las $N + L$ ecuaciones necesarias para determinar las $N + L$ variables $x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$, siempre y cuando se conozcan los valores de las posiciones y velocidades para un tiempo inicial.

En este formalismo aparecen explícitamente las fuerzas de restricción, la importancia de conocer estas fuerzas radica en la naturaleza y formulación propias del problema; por ejemplo, se verá que cuando se trabaja con restricciones unilaterales, es conveniente expresar las ecuaciones para poder calcular las fuerzas explícitamente.

Por completez, enunciemos la siguiente definición

Definición 2.2 (Grados de libertad). El número de *grados de libertad* de un sistema, está dado por la diferencia entre las coordenadas del sistema y el número de ecuaciones de restricción $k = N - L$.

2.2.1. Formalismo de Lagrange

El desarrollo de las ecuaciones presentado hasta ahora está basado en la representación en coordenadas cartesianas. Por otra parte, la mecánica es el arte de seleccionar las coordenadas correctas; entonces, se vuelve necesario introducir las denominadas coordenadas de Lagrange o generalizadas.

Las coordenadas de Lagrange son n parámetros q_1, q_2, \dots, q_n que al tiempo t determinan completamente la configuración del sistema. Para los sistemas holonómicos es posible escoger n coordenadas Lagrangianas igual a los k grados de libertad. Pero, para los sistemas no-holonómicos,

el valor mínimo para n es $k + l$ donde l dependerá del número de restricciones no integrables que tiene el sistema.

Para un sistema con restricciones unilaterales de la forma (2.6); cuando la restricción no está activa, i.e. $\psi(x, y, z; t) > 0$, se puede describir la dinámica del sistema mediante n coordenadas generalizadas; y con $n - 1$ coordenadas sobre la restricción $\psi(x, y, z; t) = 0$. Esta reducción de coordenadas del sistema es una característica, de muchas, que se comparte con los denominados Modos deslizantes cuando se alcanza la superficie de deslizamiento y se tiene una reducción de orden.

2.2.2. Ecuaciones Dinámicas de Lagrange

Las ecuaciones dinámicas del sistema pueden ser obtenidas a partir del Lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$ donde T denota la energía cinética y V denota la energía potencial que produce fuerzas conservativas expresadas en términos de los parámetros \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$.

Para un sistema homogéneo, las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = \sum_{s=1}^N X_s^{\text{ext}} \frac{\partial x_s}{\partial q_r} \quad r = 1, 2, \dots, n;$$

donde lado derecho denota las denominadas fuerzas generalizadas producidas por las fuerzas externas que actúan en la dirección de la r -ésima coordenada generalizada.

Observación 2.3. En los sistemas holonómicos las fuerzas de restricción "desaparecen". La selección adecuada de las coordenadas generalizadas, permite estudiar el comportamiento de los sistemas mecánicos sin la necesidad de conocer las fuerzas de restricción que operan sobre ellos.

Para un sistema no-holonómico con l restricciones no integrables, las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = \sum_{s=1}^N X_s^{\text{ext}} \frac{\partial x_s}{\partial q_r} + \sum_{m=1}^l \lambda_m A_{mr} \quad r = 1, 2, \dots, n;$$

asociadas a las ecuaciones de restricción

$$\sum_{s=1}^n A_{rs} \dot{q}_s + B_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, l;$$

recuperando así, las $n + l$ ecuaciones necesarias para definir el problema correctamente.

2.3. Restricciones Unilaterales

En esta sección se abordarán algunas definiciones y teoremas fundamentales en la formulación de problemas mecánicos con restricciones unilaterales. Es necesario enunciar primero las siguientes definiciones [9, 10]

Definición 2.3 (Función semi-continua inferior). Una función $f(x)$ es semi-continua inferior si

$$\liminf_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;$$

Definición 2.4 (Función absolutamente continua). Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es absolutamente continua en $I \subset \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe una $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon,$$

para todo n y cualquier colección de intervalos $[a_i, b_i] \in I$ que satisfacen.

$$\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta.$$

Toda función Lipschitz continua en I es absolutamente continua en I .

Definición 2.5 (Sub-diferencial). Para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa semi-continua inferior que satisface

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) < +\infty,$$

la sub-diferencial de f en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\partial f(\mathbf{x})$, está dada por

$$\partial f(\mathbf{x}) = \{ \zeta : f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \zeta^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \forall \mathbf{y} \}$$

Definición 2.6 (Función conjugada). Sea f una función convexa. La función f^* es llamado el conjugado de f y se define como

$$f^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{x}^* - f(\mathbf{x}) \}$$

Usando el teorema de Fenchel-Moreau [11, 12], que establece la biyección del operador conjugado para cualquier función f semi-continua inferior, esto es $(f^*)^* = f$, se establece además que si \mathbf{x}^* es una sub-diferencial de f en \mathbf{x} , entonces

$$f^*(\mathbf{x}^*) + f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}^* \Leftrightarrow \mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{x}^*) \quad (2.9)$$

Definición 2.7 (Función conjunto-valuada). Una función conjunto valuada $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo que asocia a cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ un conjunto $\mathbf{F}(x) \subset \mathbb{R}^n$. Una función conjunto valuada, puede contener segmentos verticales en su gráfica

$$\text{Graph}(\mathbf{F}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbf{F}(\mathbf{x})\}.$$

Definición 2.8 (Conjunto máximo monótono). Una función conjunto-valuada $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es llamada monótona si

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \text{Graph}(\mathbf{F}), \quad \forall (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \text{Graph}(\mathbf{F}), \quad (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0.$$

$\mathbf{F}(x)$ es llamada maximal monótona si no existe otra función monótona cuya gráfica contenga la gráfica de $\mathbf{F}(x)$.

Definición 2.9 (Función conjunto-valuada semi-continua superior). Una función conjunto-valuada $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es semi-continua superior si para todo $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{y}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{x}) + B_\varepsilon$$

donde B_ε es una bola de radio ε .

Definición 2.10 (Solución de inclusiones diferenciales). Una función absolutamente continua $\mathbf{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, se dice solución de una inclusión diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \tag{2.10}$$

donde $\mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función conjunto valuada, si satisface (2.10) para casi todo $t \in [0, T]$.

El siguiente teorema que habla de la existencia de soluciones en inclusiones diferenciales se prueba en [13]

Teorema 2.1. *Sea \mathbf{F} una función conjunto valuada. Si \mathbf{F} es semi-continua superior y la imagen de (t, \mathbf{x}) bajo \mathbf{F} es cerrada, convexa y acotada para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ existe una $\tau > 0$ y una función absolutamente continua $\mathbf{x}(t)$ definida en $[0, \tau]$, que es una solución de problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

2.3.1. Potenciales no-suaves

Para el análisis de los sistemas con restricciones unilaterales, es necesario determinar la fuerza que ejerce la pared de restricción sobre las partículas. De forma similar a que las fuerzas conservativas son el gradiente de un potencial suave; las fuerzas de restricción serán obtenidas como la sub-diferencial de potenciales no-suaves, comúnmente llamados pseudo-potenciales [14, 15, 16]. Esto es, las fuerzas de restricción serán expresadas de la forma

$$-\lambda \in \partial \pi_{\text{no-suave}}(s),$$

donde λ es la fuerza, s es la variable de transición y $\pi_{\text{no-suave}}(s)$ es el (pseudo-)potencial. De esta última expresión, vemos que ahora se entiende a las fuerzas de restricción como funciones conjunto-valuadas y la dinámica de los sistemas deben ser entendidas en el sentido de inclusiones diferenciales.

El potencial total de un sistema mecánico $\pi(s)$, en su forma más general [9], es la composición de un potencial diferenciable $\pi_D(s)$, y un (pseudo-)potencial sub-diferenciable $\pi_{\text{no-suaves}}(s)$, formado a su vez por una función indicadora $\pi_S(s)$ y una función convexa $\pi_P(s)$ con un polihedro como epígrafo; sea entonces

$$\pi(s) = \pi_D(s) + \pi_S(s) + \pi_P(s).$$

Entonces, la fuerza que actúa sobre el sistema pueden ser, igualmente descompuesta mediante:

$$\lambda = \lambda_D + \lambda_S + \lambda_P,$$

donde $\lambda_D = -\nabla \pi_D(s)$, $\lambda_S = -\partial \pi_S(s)$ y $\lambda_P = -\partial \pi_P(s)$.

Para ejemplificar esto, dos de las fuerzas de restricción más importantes se detallan a continuación.

La ley de contacto de Signorini es la regla más elemental para describir la impenetrabilidad del punto de contacto entre dos cuerpos. Sea p la distancia entre dos partículas y λ_N la fuerza de contacto, solo dos situaciones pueden ocurrir

$$\begin{aligned} p = 0 \quad & \text{y} \quad \lambda_N \geq 0 \quad \text{en contacto,} \\ p > 0 \quad & \text{y} \quad \lambda_N = 0 \quad \text{sin contacto;} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Esta condición puede escribir simplemente como $p\lambda_N = 0$ ó como $0 \leq p\lambda_N \leq 0$; esto es, solo puede haber fuerza de contacto si la distancia entre dos partículas es cero.

Consideremos ahora la función indicadora

$$\psi_{\mathbb{R}^+}(p) = \begin{cases} \infty, & p < 0, \\ 0, & p \geq 0. \end{cases}$$

De la definición de sub-diferencial tenemos

$$\begin{aligned} \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(p) &= \left\{ \zeta : \psi_{\mathbb{R}^+}(y) - \psi_{\mathbb{R}^+}(p) \geq \zeta(y-p) \quad \forall y \right\}, \\ &= \left\{ \zeta : 0 \geq \zeta(y-p) \quad \forall y \in \mathbb{R}^+, p \in \mathbb{R}^+ \right\}, \\ &= \begin{cases} \zeta = \mathbb{R}^- & \text{si } p = 0, \\ \zeta = 0 & \text{si } p > 0; \end{cases} \end{aligned}$$

y comparando con la condición (2.11), es inmediato

$$-\lambda_N \in \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(p).$$

Más aún, de la definición de un cono normal

$$N_{\mathbb{R}^+}(p) = \left\{ \zeta : \zeta(y-p) \leq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^+, p \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

se tiene la relación

$$-\lambda_N = \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(p) = N_{\mathbb{R}^+}(p).$$

En el capítulo cuatro, se verá que ésta última relación facilitará el obtener los algoritmos para la simulación numérica.

La **ley de fricción de Coulomb** (o fricción estática) es otro ejemplo clásico de una fuerza que puede ser descrita como un potencial no-suave. La fuerza de fricción de Coulomb está definida como

$$-\lambda_T \in \begin{cases} \mu\lambda_N, & \text{si } \gamma_T > 0, \\ [-1, 1]\mu\lambda_N, & \text{si } \gamma_T = 0, \\ -\mu\lambda_N, & \text{si } \gamma_T < 0; \end{cases} \quad (2.12)$$

donde μ es el coeficiente de fricción, λ_N es la fuerza normal de contacto y γ_T es la velocidad relativa de deslizamiento entre dos cuerpos. Si definimos el potencial $\pi_T(\gamma_T) = \mu\lambda_N|\gamma_T|$, podemos interpretar la fuerza de fricción como la sub-diferencial

$$-\lambda_T = \partial\pi_T(\gamma_T) = \mu\lambda_N\text{Sign}(\gamma_T), \quad (2.13)$$

donde la función $\text{Sign}(\cdot)$ satisface (2.12).

Ahora bien, sea C_T el conjunto de fuerzas de fricción admisibles

$$C_T = \{-\lambda_T : \|\lambda_T\| \leq \mu\lambda_N\},$$

y dado que $\gamma_T\lambda_T = 0$, en analogía con la ley de Signorini, se puede escribir

$$\gamma_T \in \partial\psi_{C_T}(-\lambda_T),$$

y usando (2.9), la ecuación (2.13) es equivalente a

$$-\lambda_T \in \partial\psi_{C_T}^*(\gamma_T).$$

En la Figura 2.1 se muestra lo descrito para la ley de fricción de Coulomb.

Observación 2.4. Está formulación también permite entender la relación entre modos deslizantes e inclusiones diferenciales, al reconocer que la ecuación (2.12) tiene la misma estructura que el controlador en modos deslizantes convencional.

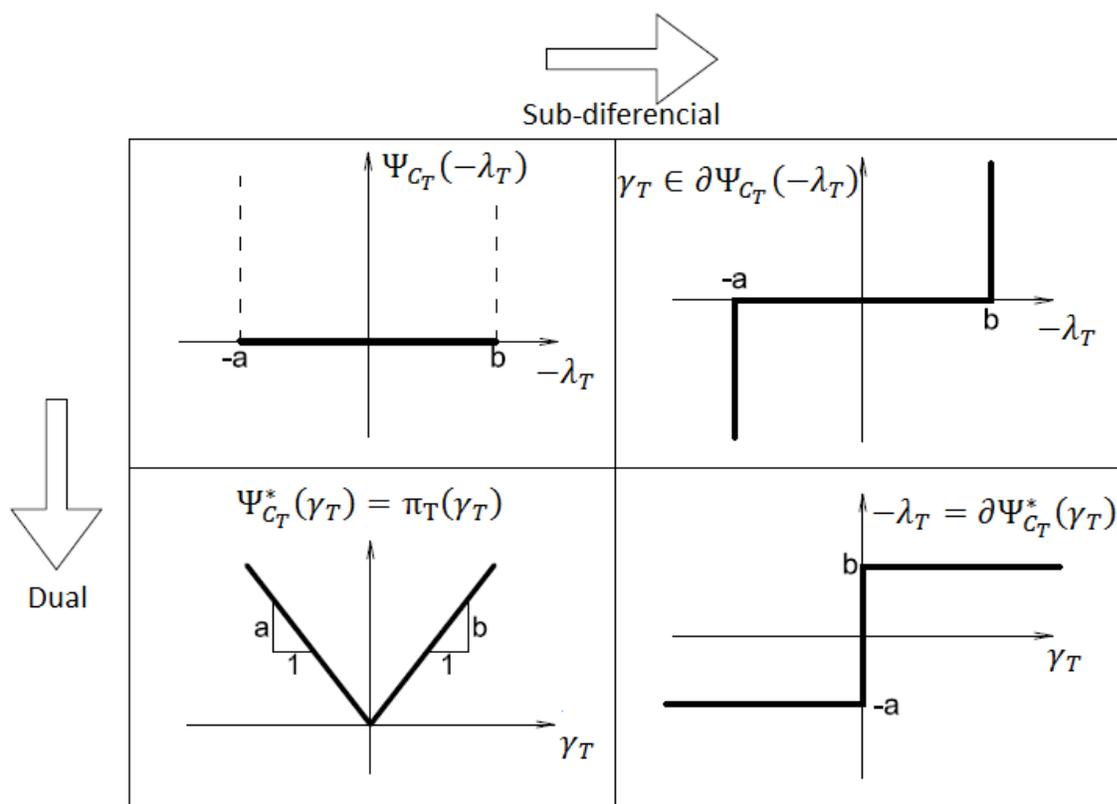


Figura 2.1: Relación entre fuerzas y velocidades en la ley de fricción de Coulomb

En el presente capítulo se estudia una nueva configuración de la denominada grúa torre, con la finalidad de mejorar su rendimiento y factor de seguridad. La motivación del presente trabajo es el uso extensivo de las grúas en casi todas las industrias, principalmente en la industria del transporte y carga de materiales que ha motivado un gran número de investigaciones; desde nuevas configuraciones mecánicas [17, 18], hasta nuevas técnicas de control [19, 20, 21, 22, 23] han surgido con la finalidad de reducir costos de producción, mejorar la eficiencia o prevenir accidentes.

En este trabajo se presenta un nuevo modelo mecánico que puede operar bajo las distintas técnicas de control que se han venido desarrollando, así como una ayuda a los operarios sin modificar su forma habitual de trabajo. El diseño para la grúa torre se detalla en la Figura 3.1, el mecanismo propuesto consiste en agregar un nuevo cable de suspensión que permite manipular la carga de una manera más eficiente, y de forma directa se incrementa el factor de seguridad. El nuevo cable permitirá tener un mayor control sobre la carga por lo tanto se reducirán oscilaciones; sin embargo, se debe resolver el problema de coordinar ambos cables para aprovechar esta nueva configuración. Diseños similares pueden encontrarse en [24, 25].

3.1. Modelo matemático

El modelo matemático presentado permitirá un sencillo análisis sobre los nuevos componentes del sistema, pero será suficientemente completo como para implementarse en una plataforma existente [4]. Entonces, para el desarrollo de las ecuaciones dinámicas se tienen las siguientes

consideraciones

- A1.** *Ambos cables están permanentemente tensos y son de masa despreciable en comparación con la masa de la carga.*
- A2.** *Todos los elementos del sistema, están representados por sus masas puntuales y sus respectivos momentos de inercia.*
- A3.** *No se consideran movimientos como deformaciones en los elementos de la grúa u otras fuerzas externas.*
- A4.** *Ambos motores se consideran en posiciones simétricas con respecto al centro de masas del vehículo de carga, alineados con el brazo de la grúa, ver Figura 3.1.*

La consideración **A1.** busca restricciones holonómicas para reducir el número de coordenadas generalizadas del sistema; además, los cables tensos se presentan en condiciones normales de operación, pues solo movimientos violentos producirán que la carga brinque y que **A1.** no se satisfaga, pero estos movimientos son evitados por razones de seguridad; mientras que cables de masa despreciable son una aproximación razonable puesto que la masa de la carga es generalmente mucho mayor a la masa de los cables.

La consideración **A2.** simplifica la obtención de las ecuaciones dinámicas. La consideración **A3.** puede ser relajada si se consideran parámetros de perturbación en el modelo final, pero este análisis se excluye en el proyecto de investigación actual. Finalmente, **A4.** define completamente el plano de actuación de ambos motores, resultando además en la configuración más natural para el nuevo sistema.

Para definir completamente el sistema de la grúa bifilar presentada en la Figura 3.1, definamos dos marcos de referencia $\{X, Y, Z\}$ y $\{X', Y', Z'\}$, el primero es un marco inercial fijado en la base de la grúa mientras que el segundo está fijado al vehículo de carga, la construcción de los ejes Z y Z' es paralela, X' está alineado con el brazo de la grúa y Y' simplemente es ortogonal al plano generado por los ejes $\{X', Z'\}$.

d	\equiv	Distancia entre los motores de elevación,
m_1	\equiv	Masa del vehículo de carga,
m_2	\equiv	Masa de carga,
\mathbf{r}_1	\equiv	Centro de masa del vehículo de carga,
$\mathbf{r}_{2,3}$	\equiv	Posición de los motores de elevación,
\mathbf{r}_4	\equiv	Posición de la carga,
$l_{1,2}$	\equiv	Longitud de los cables de elevación,
ρ	\equiv	Desplazamiento radial del vehículo de carga,
θ	\equiv	Rotación de la grúa,
P_1	\equiv	Plano que contiene a \mathbf{r}_2 , paralelo al plano $-Y'Z'$,
φ_1	\equiv	Ángulo de oscilación proyectado en P_1
ψ_1	\equiv	Ángulo de oscilación medido desde el plano $-P_1$ a la carga,
P_2	\equiv	Plano que contiene al punto \mathbf{r}_3 , paralelo al plano $-Y'Z'$,
φ_2	\equiv	Ángulo de oscilación proyectado en P_2
ψ_2	\equiv	Ángulo de oscilación medido desde el plano $-P_2$ a la carga,
u_0	\equiv	Fuerza sobre el vehículo de carga,
u_1	\equiv	Fuerza de elevación sobre el cable 1,
u_2	\equiv	Fuerza de elevación sobre el cable 2,
u_3	\equiv	Torque sobre la estructura de la grúa.

Cuadro 3.1: Elementos del sistema

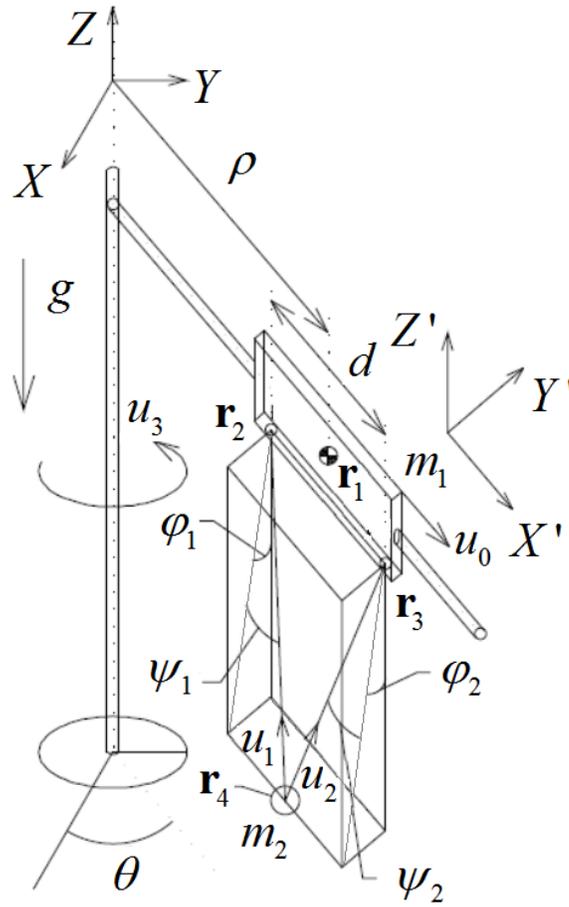


Figura 3.1: Grúa Torre

En el cuadro 3.1 se describe el conjunto de parámetros y variables que definen completamente el sistema en estudio. Como hemos mencionado, **A1.** define restricciones holonómicas obtenidas a partir de la geometría del sistema

$$\begin{aligned}
 0 &= d^2 + l_1^2 - l_2^2 - 2l_1d \cos(0.5\pi - \psi_1), \\
 0 &= d^2 + l_2^2 - l_1^2 - 2l_2d \cos(0.5\pi + \psi_2), \\
 0 &= \varphi_2 - \varphi_1,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

estas restricciones permitirán determinar la posición del segundo cable (l_2, ψ_2, φ_2) en función de la posición primer cable (l_1, ψ_1, φ_1) . Al considerar (3.1) y el vector

$$\begin{bmatrix} \rho & \theta & l_1 & \varphi_1 & \psi_1 \end{bmatrix}^T =: \mathbf{q} \tag{3.2}$$

como el vector de las coordenadas generalizadas, es descrito en su totalidad el espacio de configuraciones de nuestro sistema mecánico.

3.1.1. Ecuaciones Dinámicas

El sistema mecánico cuenta con tres cuerpos, la torre de la grúa, el vehículo de carga y la carga, cuyo espacio de configuraciones está completamente descrito por el vector (3.2).

Usando el formalismo de Lagrange denotamos la energía cinética (T_i) y potencial (V_i), $i = 1, 2, 3$; como

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2, & V_1 &= 0, \\ T_2 &= \frac{1}{2}(I_2 + m_1\rho)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\rho}^2, & V_2 &= 0, \\ T_3 &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^T K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, & V_3 &= -mgl_1c_{\varphi_1}c_{\psi_1}, \end{aligned}$$

donde los subíndices 1,2,3 corresponden a la torre, el vehículo y la carga respectivamente. En donde I_1 denota la inercia de la estructura de la grúa y I_2 la inercia del vehículo de carga. La matriz $K(\mathbf{q}) = K^T(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ es de la forma

$$K(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ E_{21} & E_{22} & * & * & * \\ s_{\psi_1} & \rho s_{\varphi_1} c_{\psi_1} & 1 & * & * \\ 0 & E_{42} & 0 & l_1^2 c_{\psi_1}^2 & * \\ l_1 c_{\psi_1} & E_{52} & 0 & 0 & l_1^2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} E_{21} &= -l_1 s_{\varphi_1} c_{\psi_1}, \\ E_{22} &= \rho^2 + l_1^2 (1 - c_{\varphi_1}^2 c_{\psi_1}^2) + 2l_1 \rho s_{\psi_1}, \\ E_{42} &= (l_1^2 s_{\psi_1} + l_1 \rho) c_{\varphi_1} c_{\psi_1}, \\ E_{52} &= -(l_1^2 + l_1 \rho s_{\psi_1}) s_{\varphi_1}; \end{aligned}$$

en donde, se ha adoptado la notación $s_X = \sin(X)$, $c_X = \cos(X)$. Con el Lagrangiano $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 (T_i - V_i)$, se pueden determinar las ecuaciones dinámicas de la forma

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = Q(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad (3.3)$$

donde $D(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ es la llamada matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y fuerzas de Coriolis y $G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^5$ es el vector de fuerzas potenciales. Se tiene además, el vector de fuerzas generalizadas $Q(\mathbf{q})\mathbf{u} \in \mathbb{R}^5$ de la forma

$$Q(\mathbf{q})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & s_{\psi_1} & s_{\psi_2} & 0 \\ 0 & (\rho - \frac{d}{2})c_{\psi_1}s_{\varphi_1} & (\rho + \frac{d}{2})c_{\psi_1}s_{\varphi_1} & 1 \\ 0 & -1 & -c_{(\psi_1 - \psi_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1s_{(\psi_1 - \psi_2)} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T.$$

Es inmediato de (3.2), (3.3) y (3.4) que los últimos renglones del vector $Q(\mathbf{q})\mathbf{u}$ corresponden a las fuerzas que actúan sobre las dinámicas de las rotaciones φ_1 y ψ_1 ; es decir, mediante los actuadores propuestos es imposible actuar directamente sobre la rotación φ_1 del plano definido por ambos cables y la oscilación ψ_1 será solo afectada, al menos directamente, por un solo motor de elevación.

Observación 3.1. Es claro que, aunque los cables son pensados como cuerpos rígidos, estos no pueden empujar la carga, está condición puede ser expresada como $u_1, u_2 \geq 0$. Así mismo, como los actuadores no pueden suministrar al sistema energía infinita se debe considerar una cota superior en la señal de control; esto es $0 < |u_i| \leq \beta_i$, donde β_i depende de la naturaleza de los actuadores que se escojan. Afortunadamente, dada la particular configuración del sistema en estudio, el control acotado no afectará la estabilidad de sistema, sólo su comportamiento transitorio [26, 27].

Cambio de coordenadas: Un nuevo enfoque

La selección de otro sistema de coordenadas permite apreciar diferentes aspectos de un mismo sistema; en el actual sistema de coordenadas, las oscilaciones en los cables son afectadas de forma directa sólo por la fuerza de tensión u_2 , vea (3.4), y no es claro cómo controlar la elevación de la

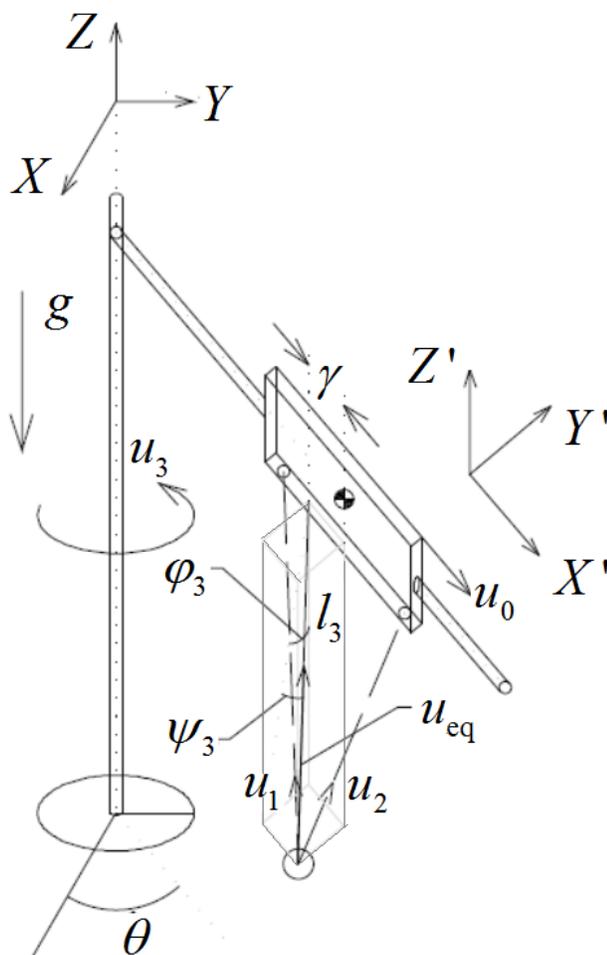


Figura 3.2: El nuevo cambio de coordenadas en la grúa

-
- \mathbf{u}_{eq} \equiv Control equivalente: $\mathbf{u}_{eq} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.
 - γ \equiv Distancia en X' del centro de masas al punto donde se aplica la fuerza equivalente \mathbf{u}_{eq} .
 - l_3 \equiv Distancia del punto γ a la carga.
 - P_3 \equiv Plano que contiene al punto γ paralelo al plano $-Y'Z'$.
 - φ_3 \equiv Ángulo de oscilación proyectado en el plano $-P_3$.
 - ψ_3 \equiv Ángulo de oscilación medido desde el plano $-P_3$ a la carga.
-

Cuadro 3.2: Elementos del nuevo sistema coordenado

carga. Volviéndose difícil apreciar muchas de las nuevas características que surgen después de añadir un segundo cable.

Se vuelve necesaria la búsqueda de un nuevo sistema coordenado que permita entender la forma en que colaboran ambos cables para reducir las oscilaciones en la carga.

Los principios Newtonianos establecen que el movimiento de la carga está definido por la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella, en este caso por la tensión ejercida por ambos cables, esto motiva la selección del nuevo sistema coordenado, cuyos principales elementos pueden verse en la Figura 3.2 y detallan en el cuadro 3.2.

Este nuevo sistema coordenado se interesa más en el movimiento de la carga que en el movimiento de los cables. La fuerza u_{eq} que actúa sobre la carga está contenida en el paralelogramo formado por los dos cables de izado; la distancia l_3 se puede entender como un cable virtual con un punto de suspensión o pivote variante en el tiempo con posición $\gamma(t) \in [-d/2, d/2]$ medida desde el centro de masas del vehículo de carga.

La variable γ está unívocamente definida por la relación de tensión de ambos cables, y jugará un papel fundamental en el control. Para entender el papel de γ , basta notar que si se busca que el cable izquierdo soporte toda la masa de la carga se tendrá $\gamma = -d/2$, o en caso de que el cable derecho deba soportar toda la masa de la carga se tendrá $\gamma = d/2$, y cualquier otra combinación de fuerzas admisibles en los motores de los cables, conducirá a valores de $\gamma \in (-d/2, d/2)$.

Usando los elementos descritos en el cuadro 3.2, se define entonces

$$\left[\rho \quad \theta \quad l_3 \quad \varphi_3 \quad \psi_3 \right]^T =: \tilde{\mathbf{q}},$$

como el nuevo vector de coordenadas generalizadas; note que los dos primeros componentes, ρ y θ , no cambian. Es inmediato de las relaciones geométricas encontrar el difeomorfismo $\mathbf{q} = T(\tilde{\mathbf{q}}; \gamma(t)) = T(\tilde{\mathbf{q}}; t)$ entre ambos sistemas coordenados. Explícitamente, escribamos

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \\ (l_3 c_{\psi_3}) \left(\cos \left(\arctan \left(\frac{\gamma + l_3 s_{\psi_3} + d/2}{l_3 c_{\psi_3}} \right) \right) \right)^{-1} \\ \phi_3 \\ \arctan \left(\frac{\gamma + l_3 s_{\psi_3} + d/2}{l_3 c_{\psi_3}} \right) \end{bmatrix},$$

cuya inversa $\tilde{\mathbf{q}} = T^{-1}(\mathbf{q}; t)$, está dada como

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \\ (l_1 c_{\psi_1}) \left(\cos \left(\arctan \left(\frac{l_1 s_{\psi_1} - \gamma - \frac{d}{2}}{l_1 c_{\psi_1}} \right) \right) \right)^{-1} \\ q_4 \\ \arctan \left(\frac{l_1 s_{\psi_1} - \gamma - \frac{d}{2}}{l_1 c_{\psi_1}} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Ambas relaciones fueron encontradas a partir de las relaciones geométricas del sistema.

La particularidad del cambio de coordenadas radica en la selección de un parámetro variante en el tiempo; que, aunque poco convencional resulta de gran utilidad. Se encuentra la energía cinética y potencial de los tres cuerpos en función del nuevo sistema de coordenadas $\tilde{\mathbf{q}}$, y a partir de la nueva ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{q}}} \tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}; t) \right) - \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}; t) = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

se obtienen las nuevas ecuaciones dinámicas

$$\tilde{D}(\tilde{\mathbf{q}}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{C}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{G}(\tilde{\mathbf{q}}) = \tilde{Q}'(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{F}(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.6)$$

Después de un cálculo directo, para este sistema particular se encontró $\tilde{D}(\tilde{\mathbf{q}}) = D(\tilde{\mathbf{q}})$, $\tilde{C}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = C(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ y $\tilde{G}(\tilde{\mathbf{q}}) = G(\tilde{\mathbf{q}})$. El lado derecho de la ecuación de movimiento (3.6) es

$$\begin{bmatrix} 1 & s_{\psi_3} & 0 \\ 0 & (\rho + \gamma) c_{\psi_3} s_{\varphi_3} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_{eq} \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 \\ ml_3 c_{\psi_3} s_{\alpha} \\ -ms_{\psi_3} \\ 0 \\ -ml_3 c_{\psi_3} \end{bmatrix} \ddot{\gamma}.$$

En donde aparece una fuerza externa proporcional a la aceleración del pivote virtual que puede ser entendida como una nueva variable de control $u_4 = \ddot{\gamma}$, reescribimos el lado derecho de la ecuación (3.6) como

$$Q(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{u}}) = B(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 & s_{\psi_3} & 0 & -m_2 \\ 0 & (\rho + \gamma) c_{\psi_3} s_{\varphi_3} & 1 & ml_3 c_{\psi_3} s_{\alpha} \\ 0 & -1 & 0 & -ms_{\psi_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ml_3 c_{\psi_3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.7)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_0 & u_{eq} & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^T.$$

Al comparar (3.3) y (3.6), se puede erróneamente inferir que nada aportará el cambio de coordenadas, la principal diferencia entre los vectores de fuerzas generalizadas (3.4) y (3.7), es que en la última expresión aparece de forma explícita como el variar la relación en el tensado de los cables afecta las oscilaciones, además de la fuerza equivalente que modifica la altura de la carga.

3.1.2. Control del movimiento de la grúa

En esta sección se abordará el control del nuevo diseño para la grúa. Se escogerá un esquema simple de control en base al modelo linealizado y un control sintonizado mediante un LQR con acción integral; en donde, el control óptimo tiene la estructura de un control PID.

3.1.2.1. Linealización

Recordando que la variable $\gamma(t)$ no define al espacio de configuraciones, pero define la relación que existe entre ambos cables de izado, se vuelve natural el considerar el vector

$$\mathbf{p} = \left[\rho \quad \theta \quad l_3 \quad \varphi_3 \quad \psi_3 \quad \gamma \right]^T, \quad (3.8)$$

como base de estudio para comprender la dinámica de nuestro sistema. La dinámica del vector (3.8), considerando (3.6) y (3.7) se reescribe como

$$\begin{bmatrix} D(\mathbf{p}) & \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} + \begin{bmatrix} C(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} + \begin{bmatrix} G(\mathbf{p}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(\mathbf{p}) \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}},$$

Como se asume que no se conoce con antelación la trayectoria que será necesaria por el sistema para evitar colisiones o la trayectoria que escogerá el operario de la maquinaria, se linealiza alrededor de un punto al interior del espacio de configuración. El error producido por la linealización se considera una incertidumbre en los parámetros que nuestro controlador debe compensar.

Particularmente, se linealiza alrededor del punto de equilibrio $\mathbf{p}_{ss} = \left[p_{ss} \quad \theta_{ss} \quad l_{3,ss} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$, donde $p_{i,ss}$ representa el punto medio de la i -ésima coordenada de \mathbf{p} , además de estar la carga libre de oscilaciones y equitativamente soportada por ambos cables, esto es

$$p_{i,ss} = \frac{p_{i,\max} - p_{i,\min}}{2} \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\varphi_{3,ss} = \psi_{3,ss} = \gamma_{ss} = 0.$$

El sistema linealizado puede escribirse como

$$\ddot{\mathbf{p}} = A\mathbf{p} + B\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.9)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{l_{3,ss}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{l_{3,ss}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_1 \rho_{ss}^2 + I} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho_{ss}}{l_{3,ss}} \left(\frac{1}{m_1 \rho_{ss}^2 + I} \right) & 0 \\ -\frac{1}{m_1 l_{3,ss}} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_{3,ss}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Observación 3.2. El sistema linealizado no actuado, se comporta como dos péndulos desacoplados con frecuencia natural $(g/l_{ss})^2$. Este comportamiento es habitual en este tipo de sistemas [1, 28]; por lo que es natural observarlo en el diseño actual.

Este sistema puede ser entendido como un sistema de primer orden 12–dimensional al definir $z = \begin{bmatrix} p^T & \dot{p}^T \end{bmatrix}^T$, con la dinámica

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 \tilde{u} \quad (3.10)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ A & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ B \end{bmatrix}.$$

Observación 3.3. La adición del segundo cable de izado se hizo en orden de incrementar la maniobrabilidad del sistema, también es un hecho bien conocido que las grúas son sistemas controlables; por lo tanto, uno debería esperar que la controlabilidad de este nuevo diseño se preserve. La controlabilidad es verificada mediante un cálculo directo sobre el rango de la matriz de controlabilidad $C(A_1, B_1) = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & A_1^2 B_1 & \dots & A_1^{11} B_1 \end{bmatrix}$. Como para cualesquiera valores admisibles de la grúa tenemos $C(A_1, B_1) = 12$, se tiene que el sistema es controlable.

Observación 3.4. La linealización se considero sobre el vector extendido (3.8). Este vector permitirá controlar no solo la posición de la carga, pero tambien la relación de tensión de los cables. Es posible controlar la dinámica mediante las variables $\tilde{\mathbf{q}}$; lo que permitirá reducir las oscilaciones de la carga si no es importante mantener la carga justo debajo del vehículo de carga.

3.1.2.2. Controlador LQR

En el modelo matemático se han despreciado términos de fricción, que son de interés propio [29] y cuentan también con resultados para su estimación y compensación [30]; por practicidad se optó únicamente por un control que pudiera rechazar fricción tipo Coulomb considerada como una perturbación constante, además de otros tipos de perturbaciones con características similares.

Como se menciona en [31], un criterio de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} \left(\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^T(t) R_1 \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) + \tilde{\mathbf{u}}^T(t) R_0 \tilde{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{z}^T(t) Q \mathbf{z}(t) \right) dt$$

con $Q = Q^T > 0$, $R_0 = R_0^T > 0$ y $R_1 = R_1^T \geq 0$, que resolviendo una ecuación algebraica de Ricatti (ARE), provee un control óptimo $\tilde{\mathbf{u}}^*(t)$ que puede ser entendido como un control PI de la forma

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = \int_0^t K_i \mathbf{z}(s) ds + K_p \mathbf{z}(t) \quad (3.11)$$

donde K_i y K_p son matrices de las dimensiones adecuadas. De este resultado, se obtiene el siguiente

Lema 3.1. El control PI (3.11) en coordenadas \mathbf{z} es equivalente a un control proporcional-integral-derivativo PID en coordenadas \mathbf{p} , definido como

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = \int_0^t G_i \mathbf{p}(s) ds + G_p \mathbf{p}(t) + G_d \dot{\mathbf{p}}(t)$$

Prueba: Mediante una expansión directa de (3.11) se obtiene

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} K_{i1} & K_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}(s) \\ \dot{\mathbf{p}}(s) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} K_{p1} & K_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix}$$

donde K_i y K_p se particionan para satisfacer las dimensiones correctas, por lo tanto

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = \int_0^t K_{i1} \mathbf{p}(s) ds + (K_{i2} + K_{p1}) \mathbf{p}(t) + K_{p2} \dot{\mathbf{p}}(t),$$

y definiendo

$$G_i := K_{i1}, \quad G_p := (K_{i2} + K_{p1}), \quad G_d := K_{p2} ;$$

se obtiene la expresión buscada. ■

Al resolver la ecuación de Ricatti se garantiza la estabilidad asintótica en el sistema y por la continuidad de soluciones el sistema será estable para pequeñas perturbaciones. Por lo que la linealización en el punto medio del espacio de configuraciones es también una buena opción frente a trayectorias desconocidas.

No existe un único método para seleccionar las matrices de ponderación Q , R_0 y R_1 ; un método conveniente se detalla en [32], el cual consiste en seleccionar matrices diagonales de tal forma que el i -ésimo elemento sea

$$\begin{aligned} Q_{ii}^{-1} &= \text{máximo valor aceptable de } [z_i(t)]^2 \quad \text{for } i = 1, \dots, 12 \\ R_{1,ii}^{-1} &= \text{máximo valor aceptable de } [u_i(t)]^2 \quad \text{for } i = 1, \dots, 6 \\ R_{2,ii}^{-1} &= \text{máximo valor aceptable de } [\dot{u}_i(t)]^2 \quad \text{for } i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Este método de sintonización permitirá ponderar ciertos comportamientos en la grúa para que el sistema cumpla con las restricciones impuestas al establecer el modelo.

3.1.2.3. Conexión entre controlador y planta

Hemos hablado de la naturaleza de las coordenadas y de la forma del controlador; sin embargo, es importante hacer notar que la señal generada por el control $\tilde{\mathbf{u}}$ no corresponde a los actuadores del sistema, por lo que se vuelve imprescindible el encontrar una transformación $\mathbf{u} = T_1(\tilde{\mathbf{u}}(t); t)$. Para este motivo enunciamos el siguiente

Lema 3.2. La transformación $\mathbf{u}(t) = T_1(\tilde{\mathbf{u}}(t), t)$, está dada por

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(t, \gamma(t)) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t, \gamma(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(t)$$

donde

$$\alpha(\gamma(t), t) = \frac{-\sin(\psi_2(t) - \psi_3(t, \gamma(t)))}{\sin(\psi_1(t) - \psi_2(t))},$$

$$\beta(\gamma(t), t) = \frac{-\sin(\psi_1(t) - \psi_3(t, \gamma(t)))}{\sin(\psi_1(t) - \psi_2(t))}.$$

Prueba: La fuerza sobre el vehículo de carga, así como el torque aplicado a la grúa se presentan en ambos sistemas coordinados sin necesidad de transformación alguna, volviéndose necesario solo descomponer la fuerza equivalente u_{eq} , mediante la relación entre tensiones $\gamma(t)$, en las fuerzas que deberán actuar sobre los cables.

Por la definición del control u_4 , se tiene que $\gamma(t)$ está perfectamente definida para todo el tiempo del experimentos pues $\gamma(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_2} u_4(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2$, con condiciones iniciales conocidas y en particular $\gamma(0) = 0$ y $\dot{\gamma}(t) = 0$; de (3.5), se tiene la relación

$$\psi_3(t, \gamma(t)) = \arctan\left(\frac{l_1 s_{\psi_1(t)} - \gamma(t) - \frac{d}{2}}{l_1 c_{\psi_1(t)}}\right).$$

y de la definición del control equivalente $u_{eq} = u_1 + u_2$, tenemos

$$u_{eq} \begin{bmatrix} s_{\psi_3} \\ c_{\psi_3} \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} s_{\psi_1} \\ c_{\psi_1} \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} s_{\psi_2} \\ c_{\psi_2} \end{bmatrix},$$

lo que puede ser reescrito como

$$u_{eq} \begin{bmatrix} s_{\psi_3} \\ c_{\psi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\psi_1} & s_{\psi_2} \\ c_{\psi_1} & c_{\psi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

y dado que

$$\det \begin{bmatrix} s_{\psi_1} & s_{\psi_2} \\ c_{\psi_1} & c_{\psi_2} \end{bmatrix} = s_{(\psi_1 - \psi_2)},$$

en donde $s_{(\psi_1 - \psi_2)} \neq 0$, $\psi_1 \neq \psi_2$ para todas las posibles configuraciones admisibles de la grúa; se tiene simplemente

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_{eq} \begin{bmatrix} s_{\psi_1} & s_{\psi_2} \\ c_{\psi_1} & c_{\psi_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_{\psi_3} \\ c_{\psi_3} \end{bmatrix},$$

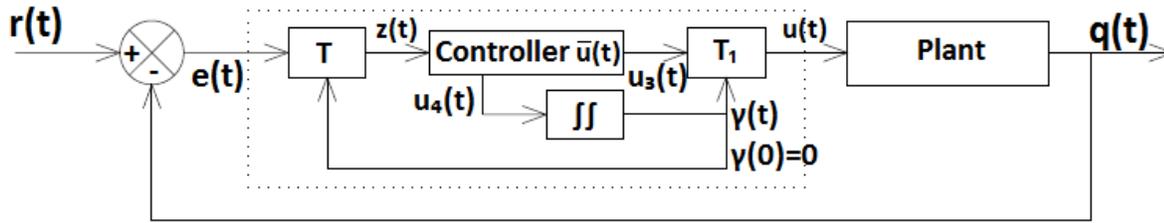


Figura 3.3: Esquema de controlador y planta

o bien

$$u_1 = \frac{-s(\psi_2 - \psi_3(\gamma))}{s(\psi_1 - \psi_2)} u_{eq},$$

$$u_2 = \frac{-s(\psi_1 - \psi_3(\gamma))}{s(\psi_1 - \psi_2)} u_{eq},$$

y el lema está probado. ■

Si se denota como $z = T(\mathbf{q})$ al conjunto de transformaciones del vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} al vector \mathbf{z} , usando además el Lema 3.2, se puede construir la interconexión entre la planta y el controlador como se muestra en la Figura 3.1.2.3. En donde una primera transformación adecua las coordenadas de la planta a las coordenadas del control, y una segunda transformación permite a los actuadores reconocer la señal producida por el algoritmo del controlador.

En particular el esquema de la conexión entre el controlador y la planta en la Figura 3.1.2.3 es independiente del tipo de controlador seleccionado.

Observación 3.5. Para un sistema planar, como sobre el cuál se realizaron los experimentos, solo basta hacer $\theta \equiv 0$ y $\varphi_i \equiv 0$ para $i = 1, 2, 3$; esto es una reducción en los grados de libertad, o lo que es equivalente a no considerar la rotación del plano generado por ambos cables. Todo el desarrollo presentado hasta este momento sigue siendo válido.

3.2. Resultados experimentales y de simulación

En esta sección se presentan los resultados de simulaciones realizadas en Matlab, así como algunas pruebas realizadas sobre el prototipo experimental mostrado en la Figura 3.4, el cual consiste en una grúa modificada de INTECO[®], que consiste en dos motores de izado idénticos que al estar unidos conforman el vehículo de carga, el cual puede correr sobre un riel mediante la acción de un tercer motor. El diseño de esta grúa modificada, aunque no corresponde a una grúa torre permite reproducir el movimiento radial del sistema original y por la observación 3.5 se podrá comprobar algo del comportamiento descrito para la grúa torre bifilar. Todo movimiento que requiera la rotación de la torre solo podrá ser verificado numéricamente.

En este trabajo se considera el estudio de dos problemas fundamentales, la estabilización del sistema alrededor de un punto de operación [7] y el comportamiento del sistema al efectuar movimientos más complejos para lograr evadir obstáculos a partir del seguimiento de una trayectoria preestablecida [6, 5].

3.2.1. Estabilización

Para estabilizar la carga alrededor de un punto, se considera únicamente el movimiento radial de la carga y se reduce la dimensión del vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^6$ en (3.8) a un vector $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^4$ de la forma

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \rho & l_3 & \psi_3 & \gamma \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

La dinámica de este nuevo vector reducido se obtiene trivialmente de la ecuación (3.9), igualmente de la ecuación (3.10), volviendo constantes las coordenadas no consideradas y todo el desarrollo presentado hasta este momento sigue válido.

Es claro que, con la estructura de la nueva grúa, se es capaz de realizar movimientos más complejos de los que un sistema convencional; para demostrar la estabilidad del sistema con el controlador propuesto alrededor de un punto, se estudiarán las dos posibilidades para el desplazamiento radial de la carga. Primero, si la distancia entre los motores es suficientemente grande es posible mover la carga sin la necesidad de mover el vehículo de carga; segundo, y propósito funda-



Figura 3.4: Prototipo en laboratorio de la grúa

mental del nuevo diseño de la grúa, siendo la distancia entre los motores apenas una fracción del desplazamiento horizontal de la carga, mover la carga mediante el desplazamiento del vehículo de carga mientras el doble sistema de izado buscará exclusivamente atenuar las oscilaciones sin desplazar la carga.

Las ganancias del controlador son obtenidas al considerar los siguientes parámetros del sistema: $g = 9.81 \text{ (m/s}^2\text{)}$, $m_1 = 7 \text{ (kg)}$ y $m_2 = 1 \text{ (kg)}$. Y, después de la adecuación de las dimensiones de los vectores por (3.13), recordando que la funcional de costo tiene la forma

$$J = \int_0^{\infty} \left(\dot{\mathbf{u}}^T(t) R_1 \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}^T(t) R_0 \mathbf{u}(t) + \mathbf{z}^T(t) Q_0 \mathbf{z}(t) \right) dt,$$

se proponen las siguientes matrices de costo

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & 0 & 49 & 0 & & & \vdots \\ & & 0 & 9 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & 0 & 14 & 0 & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

y

$$R_1 = 20 \cdot I_{3 \times 3}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

El controlador de la forma (3.11)

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = \int_0^t K_i \mathbf{z}(s) ds + K_p \mathbf{z}(t),$$

está dado por las matrices

$$K_i = \left[\begin{array}{cccc|c} 1.4066 & 0 & -0.1609 & 0 & \\ 0 & -3.9511 & 0 & 0 & \\ 0.0033 & 0 & -23.0260 & 2.7602 & \end{array} \right] \mathbf{0}_{3 \times 4}$$

$$K_p = \left[\begin{array}{cccccc|cc} 3.6153 & 0 & -0.0731 & 0.0047 & 3.2441 & 0 & -0.0265 & -0.0059 \\ 0 & -6.4697 & 0 & 0 & 0 & -4.1386 & 0 & 0 \\ 0.0114 & 0 & -7.7966 & 6.2086 & -0.0087 & 0 & -2.9314 & 2.9315 \end{array} \right]$$

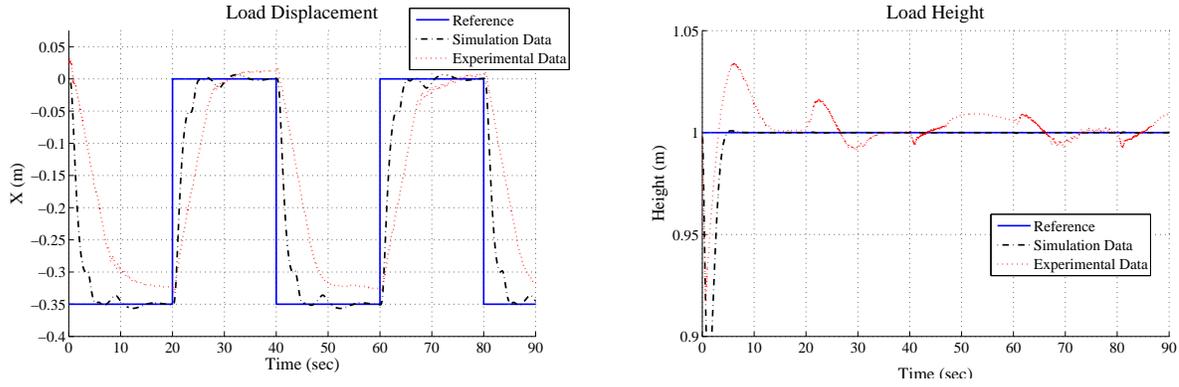
En este momento, recordamos que el controlador LQR puede ser mejorado usando técnicas como pre-filtros o conformación de la entrada mejor conocido como "input shaping" [33, 34], pero se omite su estudio pues por ahora sólo interesa mostrar el comportamiento de los cables de izado.

Observación 3.6. El controlador se seleccionó usando la condición (3.12) para evitar la saturación de los actuadores, así como compensar o evitar la dinámica no modelada tal como el rebote de la carga. Con ésta selección de control, nos aseguramos que las restricciones holonómicas dadas por la consideración **A1**. se mantengan durante todo el experimento; una mejor sintonización es posible, pero cualitativamente el comportamiento del sistema sera similar. Como el rebote de la carga no es considerado en el modelo matemático ni en la configuración de la grúa, los sensores, el controlador, los actuadores e inclusive el sistema de cables pueden presentar daños o comportamientos no deseados.

3.2.1.1. Caso 1: $d \geq$ translación horizontal de la carga

Recordemos que el nuevo diseño de la grúa no está pensado para mover la carga con solo los cables; sin embargo, éste experimento permite entender el comportamiento de la grúa, así como del cambio de coordenadas. En el nuevo sistema coordenado, $\gamma(t)$ es un punto de suspensión variable; por lo tanto, para mover la carga debemos de mover sólo la variable $\gamma(t)$ y la velocidad de translación estará dada por la velocidad de izado de los cables.

Para éste primer experimento se escogió $d = 0.84[m]$ y como el centro de masa del vehículo de carga centrado en el origen se tiene $\gamma(t) \in \left[-0.42 \quad 0.42 \right]$.



Movimiento horizontal de la carga.

Elevación de la carga.

Figura 3.5: Movimiento de la carga cuando $d \geq$ translación horizontal de la carga

Sean $\tilde{\mathbf{p}}_0$ y $\tilde{\mathbf{p}}_1$ dos posiciones para el sistema

$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -0.35 \end{bmatrix};$$

en $\tilde{\mathbf{p}}_0$ la carga estará equitativamente balanceada por los dos cables bajo el vehículo de carga, en $\tilde{\mathbf{p}}_1$ la carga se sitúa debajo del primer motor de izado.

En la Figura 3.5 se presenta la estabilización del sistema en los puntos $\tilde{\mathbf{p}}_0$ y $\tilde{\mathbf{p}}_1$, se cumplen los objetivos de control de trasladar la carga en el eje X mientras se mantiene la carga constante. La diferencia entre la simulación y los resultados experimentales se debe a la dinámica no modelada tal como la fricción o la construcción de los motores.

Observación 3.7. Este experimento solo busca mostrar la versatilidad del diseño de la grúa. Sin embargo, debemos resaltar que el movimiento de la carga mediante los cables sería más eficiente mediante una combinación de un controlador producto de un análisis cinemático y el controlador propuesto.

3.2.1.2. Caso 2: $d \ll$ translación horizontal de la carga

Cuando la translación de la carga es mayor que la distancia entre los motores de izado, entonces el movimiento total de la carga debe ser producido por el vehículo de carga. Esto permite

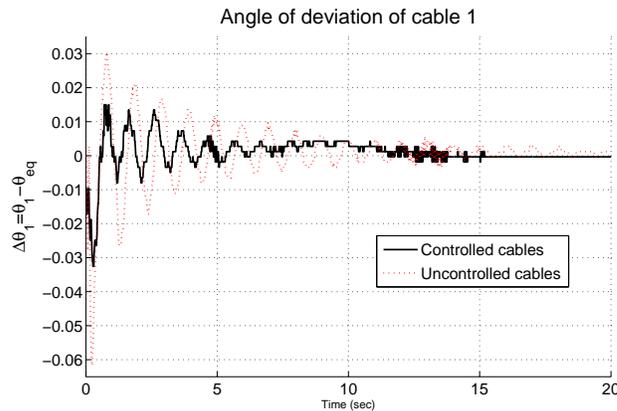


Figura 3.6: Oscilación del cable

que los cables se usen exclusivamente para reducir las oscilaciones y mantener la carga a la altura deseada. Esta configuración es la más cercana a las grúas actuales y por lo tanto resulta de particular interés su análisis.

Los motores de izado se ubicaron a una distancia de 0.27[m] y el vehículo de carga se movió el riel de 1[m] de longitud para inducir oscilaciones en la carga, y así mostrar como el diseño de la grúa es capaz de compensar oscilaciones. En trabajos previos [35] se mostró la capacidad mecánica de esta configuración para absorber energía del sistema a través de impactos en lazo abierto; ahora, se muestra que con la ley de control propuesta aún más energía puede ser disipada.

En la Figura 3.6, se muestra el resultado de dos experimentos; en el primero se aplicó la ley de control propuesta, en el segundo se aseguró que los cables solo mantuvieran la longitud correcta. Las oscilaciones en el sistema se midieron a través del ángulo uno de los cables, pues por **A1**, el movimiento del cable representa el movimiento de la carga, así las oscilaciones pueden ser entendidas como la desviación de uno de los cables con respecto a su posición de equilibrio $\theta_1(t) - \theta_{1,eq}$. Se nota entonces que los cables controlados pierden energía más rápidamente cayendo a un estado libre de oscilaciones, mientras que la energía del sistema no controlado se pierde más lentamente sin desaparecer completamente al final del experimento.

Podemos comparar cuantitativamente la desviación total de la oscilación mediante la funcional

$$\|\Delta\theta_1\|_2 = \left(\int_0^T (\theta_1(t) - \theta_{1,eq})^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.14)$$

obteniendo los siguientes resultados

	Sistema controlado	Sistema en lazo abierto
$\ \Delta\theta_1\ _2$	0.2908	0.4505

De donde se sigue que el sistema controlado oscila cerca de un 35% menos que el sistema no controlado.

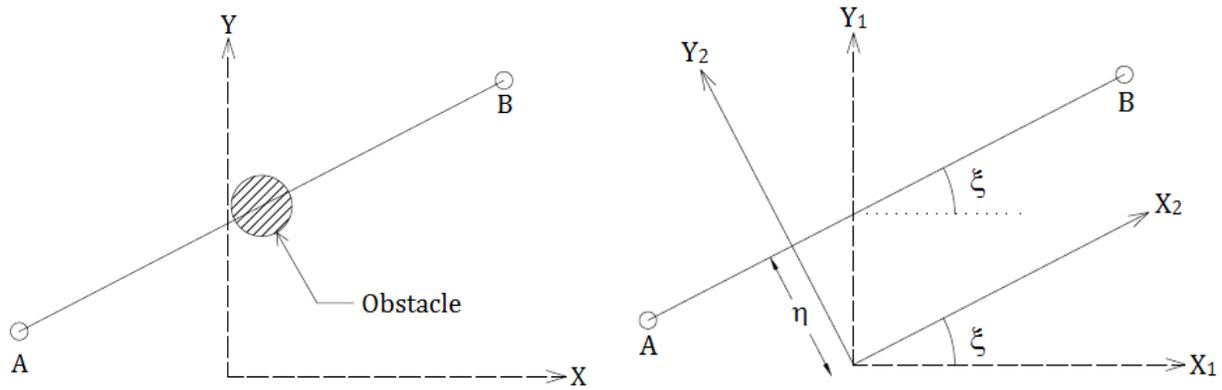
3.2.2. Evasión de Obstáculos

El manejo de grúas no consiste únicamente en estabilizar la carga, pero también en realizar movimientos más complejos para mover la carga mientras se evitan colisiones. En esta sección se muestra que el diseño de la grúa presentado también puede realizar estas acciones fácilmente.

El problema de evitar un obstáculo se mantendrá lo más simple posible, se consideran dos puntos cualesquiera en \mathbb{R}^3 , sean A y B , cuya proyección se ve en la Figura 3.7, el objetivo de control es mover la carga del punto A al punto B minimizando oscilaciones en la carga mientras se evita una región arbitraria de la zona de trabajo ocupada por un obstáculo. La política de no colisiones se desarrolla de dos formas distintas; la primera consiste en elevar la carga sobre el obstáculo, mientras que la segunda es seguir una trayectoria que rodee al obstáculo. Además, uno puede pensar que la mayoría de movimientos que un operador realiza durante un día de operación normal están representados por estos dos movimientos.

Para simplificar el análisis, recordemos que el marco inercial fijo $\{X, Y, Z\}$ es arbitrario, entonces usemos el siguiente lema

Lema 3.3. Considere cualesquiera dos puntos (p_1, p_2) que definen la posición inicial y final de la carga en el marco inercial $\{X_1, Y_1, Z_1\}$. Existe siempre otro marco inercial $\{X_2, Y_2, Z_2\}$ en el cual la línea que conecta los puntos (p_1, p_2) es paralela a uno de los nuevos ejes inerciales, por ejemplo X_2 .



Proyección de las coordenadas inicial
y final de la grúa en el plano XY.

Rotación de marcos de referencial inercial.

Figura 3.7: Movimiento de la carga evitando colisiones

Prueba: La prueba se tiene de forma inmediata por la simetría del sistema mecánico. Sea ξ la rotación de la línea definida por los puntos (p_1, p_2) en el plano X_1Y_1 , ver Figura 3.7; basta definir el plano X_2Y_2 como la rotación del marco inercial $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ sobre el eje Z_1 un ángulo ξ y puesto que la rotación de un marco inercial es también inercial el lema está probado. ■

Es evidente que el eje X_2 es paralelo a la línea \overline{AB} con una translación η desde el origen. Del lema 3.3, se sigue que todas las translaciones lineales de la carga son equivalentes de cierta forma. Por motivos de practicidad y de adecuarnos a la plataforma experimental con la que se cuenta, se estudiará el caso particular de $\eta \equiv 0$, es decir que los puntos, inicial y final, de la trayectoria se fijen sobre el eje X.

En las secciones subsecuentes, generaremos algunas trayectorias tratando de emular lo que haría un operador humano en orden de evitar las colisiones. Definamos entonces los puntos, inicial y final, de la trayectoria en el plano simplemente como $p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \end{bmatrix}$ y $p_2 = \begin{bmatrix} 49 & 0 & -10 \end{bmatrix}$.

Dado que el diseño de la grúa es nuevo y no existe un único método para comparar la reducción de oscilaciones en el sistema, en esta sección se considera una función distinta a la considerada

en (3.14), se prestará especial atención a la energía de oscilación del cable mediante la funcional

$$C := \int_0^T \left(\frac{d\psi_1}{dt} \right)^2 dt$$

en donde T representa el tiempo de simulación.

En esta sección también se buscará entender, al menos de forma numérica, la relación del parámetro de diseño d con el comportamiento general del sistema, para esto se graficará d vs C .

3.2.2.1. Elevación de la carga

Primero consideremos un operador moviendo la carga únicamente sobre el eje X , el operador habitualmente moverá la carga de forma lenta cerca de los puntos iniciales y finales mientras que en medio de la trayectoria incrementaría la velocidad. Este comportamiento es representado por la ecuación sigmoidea

$$x_{ref}(t) = 24 \tanh\left(\frac{2}{5}t - 6\right) + 25. \quad (3.15)$$

Puesto que la carga debe evitar la colisión con el obstáculo, el operador deberá modificar la longitud del cable, describamos este comportamiento mediante la ecuación

$$l(x_{ref}) = \begin{cases} 10 & \text{if } x_{ref} < 3, \\ 10 - 5\sqrt{1 - \frac{(x_{ref}-25)^2}{22^2}} & \text{if } 3 < x_{ref} < 47, \\ 10 & \text{if } 47 \leq x_{ref}; \end{cases}$$

El comportamiento descrito por estas dos ecuaciones se muestra en la Figura 3.8. En este movimiento en particular, se mantiene $y \equiv 0$.

Los resultados de simulación se muestran en la Figura 3.9, del lado izquierdo se muestra la velocidad de oscilación del cable para tres distintos valores del parámetro d (para el caso de la grúa simple tenemos $d = 0$); del lado derecho, observamos como decrece la energía del sistema al incrementar el parámetro de diseño d ; más aún, este análisis numérico muestra que para el controlador escogido existe un parámetro óptimo de diseño d en el cual la energía de oscilación es mínima. Esta última característica puede ser entendida en el contexto de que agregar un segundo cable me dará más control sobre el sistema, pero si la distancia de diseño d es demasiado grande,

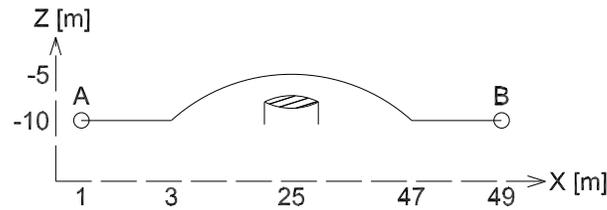
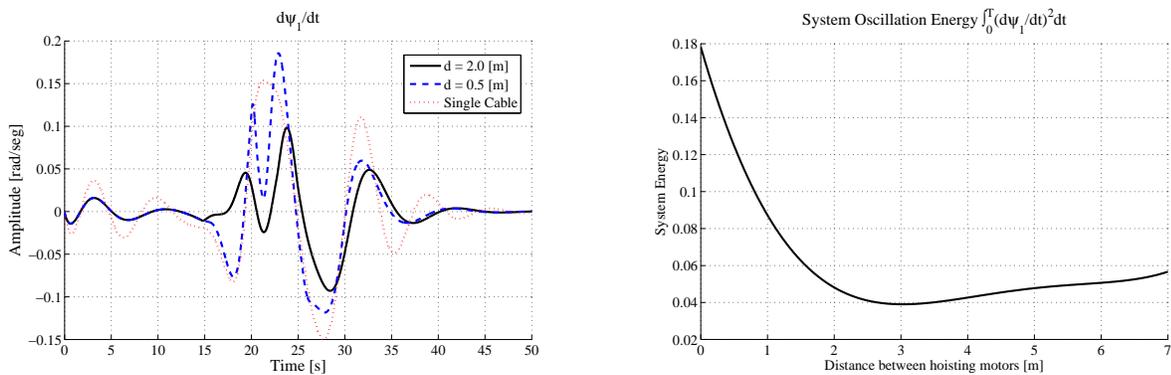


Figura 3.8: Levantando la carga sobre el obstáculo.



Velocidad angular del cable

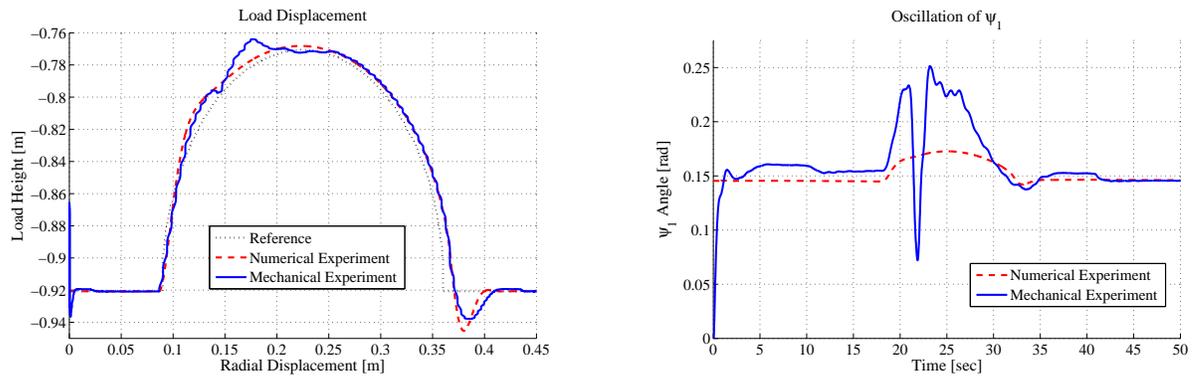
Energía de oscilación vs Parámetro de diseño d

Figura 3.9: Comportamiento del sistema frente a distintos parámetros de diseño d

también se complica el mantener la carga a una altura determinada. Este análisis numérico brinda un vistazo a la complejidad de este nuevo sistema de grúas.

El prototipo de la Figura 3.4 es capaz de seguir esta trayectoria, por lo que se realizaron algunas pruebas experimentales para comprobar la correcta coordinación de la carga durante el seguimiento de la trayectoria. Las trayectorias presentadas anteriormente fueron escaladas para satisfacer los espacios de trabajo del prototipo físico, así como ligeros ajustes en el valor del controlador para un mejor desempeño [5].

En la Figura 3.10 se muestra el seguimiento de trayectoria así como la oscilación en uno de los cables del prototipo físico y la correspondiente simulación en Matlab[®]. Se observa que el sistema es capaz de realizar movimientos complejos siguiendo los objetivos de control propuestos.



Movimiento de la carga en el espacio de trabajo. Oscilación de la carga en uno de los cables.

Figura 3.10: Seguimiento de trayectoria: Elevación en grúa real.

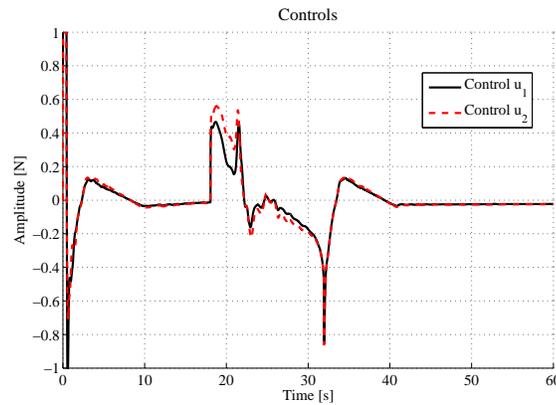


Figura 3.11: Esfuerzo de control en los cables

Por completes, en la Figura 3.11, se muestran el esfuerzo de control en los actuadores, en donde la carga aparece correctamente balanceada entre ambos motores, viéndose diferencias solo para amortiguar las oscilaciones presentes.

3.2.2.2. Rodeando el obstáculo

Otra estrategia empleada por el operador para evitar colisionar es rodear el obstáculo. Suponga nuevamente que para el desplazamiento de la carga en el eje X el operador se decide por la estrategia (3.15), pero sin levantar la carga, se rota la estructura de la grúa para evitar la coli-

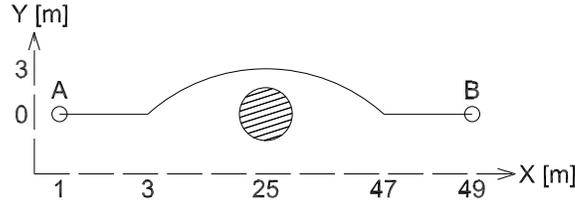
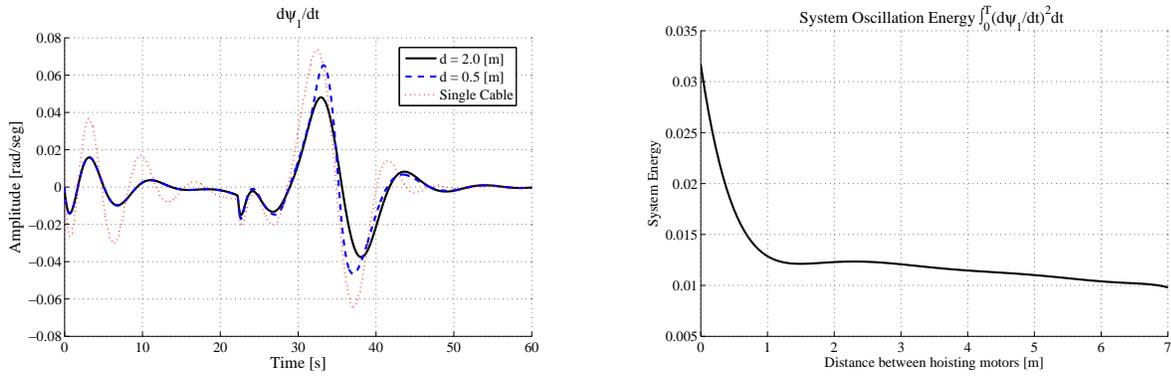


Figura 3.12: Trayectoria rodeando el obstáculo



Velocidad angular del cable

Energía de oscilación vs Parámetro de diseño d Figura 3.13: Comportamiento del sistema frente a distintos parámetros de diseño d

sión entonces la trayectoria que deberá seguir la carga en el plano XY será descrita mediante la función

$$y_{ref}(x_{ref}) = \begin{cases} 0 & \text{if } 1 \leq x_{ref} < 3, \\ 2\sqrt{1 - \frac{(x_{ref}-8)^2}{10^2}} & \text{if } 3 \leq x_{ref} < 47, \\ 0 & \text{if } 47 \leq x_{ref} < 49; \end{cases}$$

El comportamiento descrito en esta estrategia, en donde se mantiene constante la longitud del cable, se aprecia en la Figura 3.12. Por limitaciones del prototipo solo se realizaron pruebas numéricas en Matlab[®]. En la Figura 3.13 se muestra nuevamente la velocidad angular del cable para tres distintos valores del parámetro de diseño d , así como el comportamiento de la energía de oscilación en función del mismo parámetro de diseño d .

Observación 3.8. En la imagen derecha de 3.13 se tiene que la energía de oscilación decae monótonicamente en función del parámetro d , a diferencia del resultado producido por izar la carga en la Figura 3.9, puesto que en el movimiento de rodear el obstáculo se mantuvo la carga a una misma altura y no existe ese compromiso entre reducir las oscilaciones y modificar la altura.

3.3. Análisis de la grúa bifilar

En éste capítulo se ha presentado el análisis de la grúa bifilar, enfocándose en su modelado, la estabilidad alrededor de un punto de equilibrio y el control de trayectorias. Se ha presentado la grúa bifilar como una alternativa viable para incrementar la maniobrabilidad de las grúas convencionales, en donde el problema de coordinar los cables ha sido satisfactoriamente resuelto mediante un novedoso cambio de coordenadas. La principal dificultad radica en encontrar la técnica de control adecuada, así como un escalamiento en las dimensiones de la grúa que llevará a considerar la dinámica de los actuadores en el modelo y posiblemente otros comportamientos no modelados.

La estabilización del sistema, así como el seguimiento de trayectorias se realizó mediante técnicas de control lineal, siendo calculado un control óptimo tipo LQR alrededor de un punto de equilibrio dentro del espacio de trabajo del sistema mecánico. Es claro que este tipo de control es incapaz de aprovechar todas las ventajas de la nueva configuración mecánica: sin embargo, este método puede resolver de manera simple el problema de reducir las oscilaciones sin afectar la maniobrabilidad de un operario.

Grúa con restricciones unilaterales

En la dinámica de la grúa hemos considerado el cable como un cuerpo rígido, cuando debe ser entendido como un cuerpo flexible, y se supondrá también inextensible. Estas consideraciones sobre el cable, introducen nuevos comportamientos en el sistema siendo los impactos o colisiones los más importantes del actual análisis.

La dinámica del sistema presentado en este capítulo puede ser aproximada mediante métodos de elemento finito o ecuaciones diferenciales parciales; pero dado que en grúas reales, la masa del cable es despreciable comparada con la masa de la carga, no se considera la dinámica del cable excepto en el momento cuando alcanza su máxima elongación, entendiéndolo como una colisión/impacto.

En el presente capítulo se excluirá el problema de control, abordando exclusivamente el modelo matemático. Para esto, en vez de aparecer la fuerza de control sobre los motores, aparecerán sólo las fuerzas inerciales producto del desplazamiento del vehículo de carga.

Al permitir cables flexibles, se hace necesaria la presencia de restricciones unilaterales, aumentar el número de coordenadas generalizadas necesarias, y agregar multiplicadores de Lagrange que permitan cuantificar el efecto de las restricciones.

4.1. Modelo matemático

El sistema mecánico que se abordara en esta sección consta de un vehículo de carga que, soportando ambos cables, se desplaza rectangularmente en un marco de referencia inercial

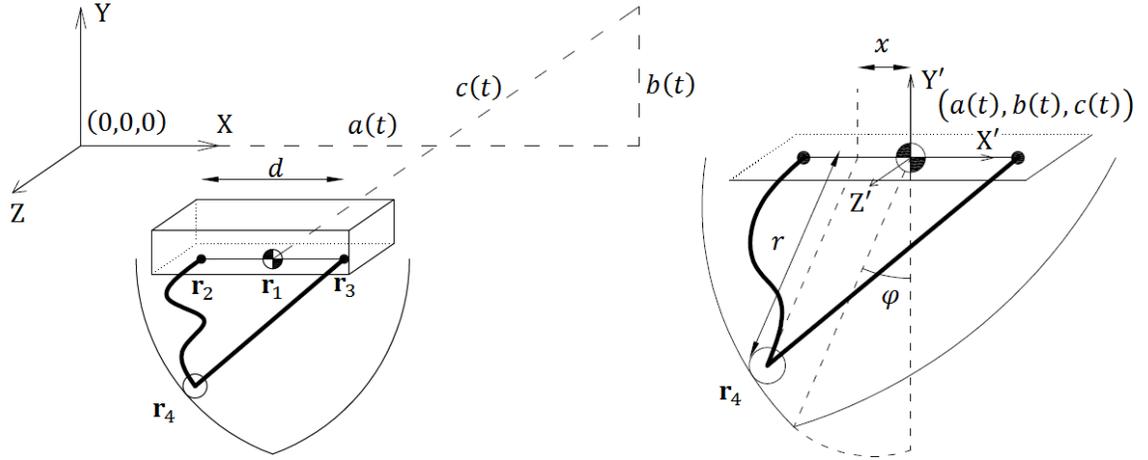


Figura 4.1: Grúa bifilar con restricciones unilaterales.

$\{X, Y, Z\}$, ver Figura 4.1. Sea entonces, el desplazamiento del centro de masa del vehículo de carga $\mathbf{r}_1(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) & c(t) \end{bmatrix}$, y las posiciones de los motores de elevación, $\mathbf{r}_{2,3}$,

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} a(t) - \frac{d}{2} & b(t) & c(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} a(t) + \frac{d}{2} & b(t) & c(t) \end{bmatrix}.$$

La posición de la carga en el marco de referencia $\{X', Y', Z'\}$, es $\mathbf{r}'_4 = \begin{bmatrix} x & r \cos \varphi & r \sin \varphi \end{bmatrix}$, siendo $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x & r & \varphi \end{bmatrix}$ las coordenadas necesarias para describir la posición de la carga. Se sigue que la posición de la carga en el marco de referencia inercial es $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}'_4 + \mathbf{r}_1$.

Recordando que $l_{1,2}$ son las elongaciones máximas de los cables; entonces, las restricciones unilaterales, definidas como la distancia admisible entre los pivotes y la carga, $f_1(\mathbf{q}) := l_1^2 - \|r_4 - r_2\|_2^2 \geq 0$ y $f_2(\mathbf{q}) := l_2^2 - \|r_4 - r_3\|_2^2 \geq 0$, o bien

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q}) &:= l_1^2 - \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - r^2 \geq 0, \\ f_2(\mathbf{q}) &:= l_2^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - r^2 \geq 0; \end{aligned}$$

definen al espacio de configuraciones admisibles $K = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : f_i(\mathbf{q}) \geq 0, \quad i = \{1, 2\}\}$ como un sólido de revolución.

Observación 4.1. Las restricciones unilaterales, no dependen de la coordenada φ , lo que implica que en esta dirección las fuerzas de restricción no actuarán directamente.

El Lagrangiano del nuevo sistema

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}_4^T \dot{r}_4 - mg(r \cos \varphi + b(t)) - \sum_{i \in H} \lambda_i f_i(\mathbf{q}), \quad (4.1)$$

donde $H(\mathbf{q}) := \{i : f_i(\mathbf{q}) = 0\}$ es el conjunto de restricciones activas, permite obtener las nuevas ecuaciones dinámicas, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \right) = 0$,

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) + F_{\text{ine}} \in -N_K(\mathbf{q}), \quad (4.2)$$

donde la matriz de inercia, la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas, y la matriz de fuerzas potenciales están dadas como

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{bmatrix}, \quad C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mr\dot{\varphi} \\ 0 & mr\dot{\varphi} & mr\dot{r} \end{bmatrix}, \quad G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \cos \varphi \\ -mgr \sin \varphi \end{bmatrix};$$

y la matriz de fuerzas inerciales F_{ine} , producto del desplazamiento del vehículo de carga, es

$$F_{\text{ine}} = \begin{bmatrix} m\ddot{a} \\ m\ddot{b} \cos \varphi + m\ddot{c} \sin \varphi \\ -mr\ddot{b} \sin \varphi + mr\ddot{c} \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

El cono de las fuerzas de restricción

$$N_K(\mathbf{q}) = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^3 : \omega = - \sum_{i \in H} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{q}}, \quad \lambda_i \geq 0 \right\},$$

coincide con la definición dada por Glocker y Brogliato [14, 15, 16, 36].

Observación 4.2. Algunas veces las ecuaciones dinámicas se plantean acompañadas de la condición complementaria

$$\lambda_i \cdot f_i(\mathbf{q}) \geq 0, \quad \text{donde } \lambda_i \geq 0, f_i(\mathbf{q}) \geq 0 \quad \text{para } i = \{1, 2\};$$

ó de forma compacta $0 \leq \lambda_i \perp f_i(\mathbf{q}) \geq 0$ para $i = \{1, 2\}$. La condición complementaria establece la relación entre las fuerzas de restricción y el espacio de configuraciones; esta condición ya está implícita mediante la ecuación (4.2).

Observación 4.3. En el caso de restricciones holonómicas, $f_i(\mathbf{q}) = 0$ para $i = \{1, 2\}$, se fijan las coordenadas

$$x \equiv \frac{l_1^2 - l_2^2}{2d}, \quad y \quad r \equiv \frac{1}{2} \left(l_1^2 + l_2^2 - 2x^2 - \frac{d^2}{2} \right);$$

y la ecuación (4.2) se reduce a la ecuación del péndulo

$$mr^2 - mgr \sin \varphi = F_{\text{ine}, \varphi},$$

donde $F_{\text{ine}, \varphi}$ es la fuerza producida por el movimiento de la grúa.

4.2. Colisiones en el sistema

Se analiza ahora como se presentan los impactos en nuestro sistema. Los impactos son variaciones instantáneas en la velocidad del sistema, por lo que, siguiendo lo descrito por Glocker [36], es necesario sustituir la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ por una función de variación acotada \mathbf{u} ; tal que el desplazamiento \mathbf{q} del sistema mecánico sea

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_A) + \int_{t_A}^t \mathbf{u} dt.$$

Por las discontinuidades, la derivada de $\mathbf{u}(t)$ no puede ser entendida en el sentido clásico, sino en el sentido de medidas. La velocidad del sistema puede ser obtenida de la integración de la medida diferencial $d\mathbf{u}$,

$$\mathbf{u}^+(t) = \mathbf{u}(t_A) + \int_{(t_A, t]} d\mathbf{u};$$

donde

$$\mathbf{u}^+(t_0) = \lim_{\tau \downarrow 0} \{\mathbf{u}(t_0 + \tau)\}, \quad \mathbf{u}^-(t_0) = \lim_{\tau \uparrow 0} \{\mathbf{u}(t_0 + \tau)\}.$$

La integral en la expresión anterior, puede ser descompuesta en una parte continua y una parte atómica

$$\int_{(t_A, t]} d\mathbf{u} = \int_{(t_A, t]} \dot{\mathbf{u}} dt + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) d\eta,$$

resultando después de la integración una parte absolutamente continua y una función escalón, respectivamente. La medida $d\eta$ es la suma de funciones Dirac $d\eta = \sum_i d\delta_i$.

Se escribe entonces la ecuación (4.2) como una ecuación diferencial en medida de la forma

$$M(\mathbf{q}) d\mathbf{u} + C(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \mathbf{u} dt + G(\mathbf{q}) dt + F_{ine} dt \in -N_K(\mathbf{q}). \quad (4.3)$$

Sea, además t_0 el tiempo en el que la partícula alcanza la frontera del espacio de configuraciones, esto es $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0 \in \partial K = \{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 : f_i(\boldsymbol{\omega}) = 0, \quad i = \{1, 2\}\}$, e integrando la ecuación (4.3) con respecto a la medida de Dirac en t_0 , obtenemos

$$M(\mathbf{q}_0) (\mathbf{u}^+(t_0) - \mathbf{u}^-(t_0)) \in -N_K(\mathbf{q}_0),$$

o equivalentemente

$$\mathbf{u}^+(t_0) - \mathbf{u}^-(t_0) \in -T_K^\perp(\mathbf{q}_0) := -M^{-1}(\mathbf{q}_0) N_K(\mathbf{q}_0);$$

Observación 4.4. $T_K(\mathbf{q})$ es el cono que corresponde al espacio de las velocidades, $T_K^\perp(\mathbf{q})$ es el correspondiente cono ortogonal, así como $N_K(\mathbf{q})$ es el cono que corresponde al espacio de las fuerzas sobre el sistema. El espacio de velocidades y el espacio de fuerzas son espacios duales, donde el isomorfismo entre ambos espacios duales está dado por la matriz $M(\mathbf{q})$, particularmente

$$\begin{aligned} T_K^\perp(\mathbf{q}) &= M^{-1}(\mathbf{q}) N_K(\mathbf{q}), \\ N_K^\perp(\mathbf{q}) &= M(\mathbf{q}) T_K(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

El comportamiento del sistema alrededor de \mathbf{q}_0 puede ser interpretado gracias a la versión geométrica de la ley de impactos de Moreau [36], la cual establece que las velocidades antes y después del impacto pueden ser descompuestas de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^-(t_0) &= \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{v}^\perp(t_0), \quad \mathbf{u}^+(t_0) = \mathbf{v}(t_0) - \varepsilon \mathbf{v}^\perp(t_0), \\ T_K(\mathbf{q}_0) \ni \mathbf{v}(t_0) \perp \mathbf{v}^\perp(t_0) &\in T_K^\perp(\mathbf{q}_0), \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $\varepsilon \in [0, 1]$ corresponde al coeficiente de amortiguamiento descrito en la ley de impactos de Newton. En la Figura 4.2 se muestra el comportamiento de los dos posibles impactos, con un sólo cable (lado izquierdo), como con ambos cables (lado derecho). De la ecuación (4.4) es inmediato que el sistema perderá energía a cada impacto, a menos que el impacto sea completamente elástico, $\varepsilon \equiv 1$.

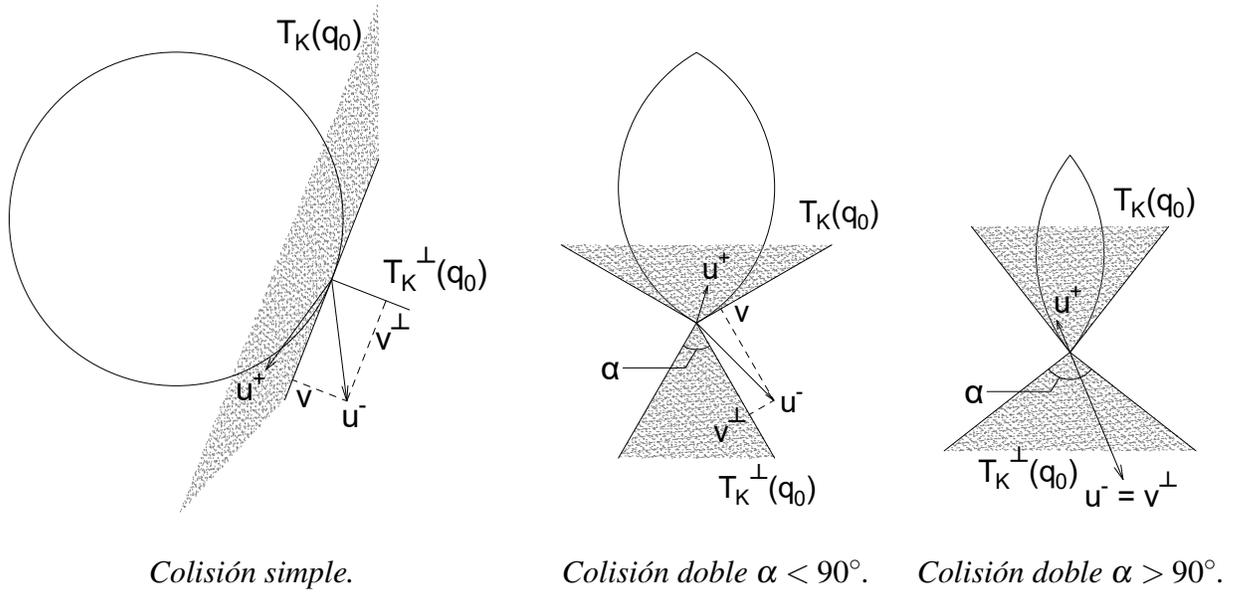


Figura 4.2: Tipos de colisiones en la grúa bifilar

Observación 4.5. Cabe recordar que para que la ecuación (4.4) tenga sentido, debemos tener $-\mathbf{u}^- \in T_K(\mathbf{q}_0)$; es decir, la velocidad antes del impacto debe pertenecer al espacio de velocidades admisibles.

Por requerirse posteriormente en el desarrollo del problema, se enuncia el siguiente lema:

Lema 4.1. *Se tiene la contención*

$$T_K^\perp(\mathbf{q}) \supset T_{T_K(\mathbf{q})}^\perp(\mathbf{v}) = T_{T_K(\mathbf{q})}^\perp\left(\frac{\mathbf{u}^+ + \varepsilon\mathbf{u}^-}{1 + \varepsilon}\right)$$

Prueba: *La prueba de este lema se puede encontrar en [15, 36, 37], aquí sólo presentamos un bosquejo de ésta. De la definición de un cono normal*

$$N_{T_K(\mathbf{q})}(\mathbf{v}) = \left\{ \mathbf{w} : \mathbf{w}^T(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{v}^* \in T_K(\mathbf{q}), \quad \mathbf{v} \in T_K(\mathbf{q}) \right\};$$

se tiene, usando el isomorfismo entre espacios,

$$T_{T_K(\mathbf{q})}^\perp(\mathbf{v}) = \left\{ \mathbf{w} : (\mathbf{w}, \mathbf{v}^* - \mathbf{v})_{M(\mathbf{q})} \leq 0, \quad \forall \mathbf{v}^* \in T_K(\mathbf{q}), \quad \mathbf{v} \in T_K(\mathbf{q}) \right\};$$

donde $(\cdot, \cdot)_{M(\mathbf{q})}$ es el producto escalar ponderado por la matriz $M(\mathbf{q})$, esta última expresión puede ser escrita de la forma

$$T_{T_K(\mathbf{q})}^\perp(\mathbf{v}) = \left\{ \mathbf{w} : (\mathbf{w}, \mathbf{z}^*)_{M(\mathbf{q})} \leq 0, \mathbf{v} \in T_K(\mathbf{q}), \forall \mathbf{z}^* \in T_K(\mathbf{q}) - \mathbf{v} \right\}.$$

Por otro lado, tenemos

$$T_K^\perp(\mathbf{q}) = \left\{ \mathbf{w} : (\mathbf{w}, \mathbf{v}^*)_{M(\mathbf{q})} \leq 0, \forall \mathbf{v}^* \in T_K(\mathbf{q}) \right\};$$

comparando estas dos últimas expresiones notamos inmediatamente que, usando $T_K(\mathbf{q}) - \mathbf{v} \supset T_K(\mathbf{q})$, $T_{T_K(\mathbf{q})}^\perp(\mathbf{v})$ es más restrictivo sobre \mathbf{w} , por lo tanto

$$T_{T_K(\mathbf{q})}^\perp(\mathbf{v}) \subset T_K^\perp(\mathbf{q}),$$

y en el caso particular $T_{T_K(\mathbf{q})}^\perp(\mathbf{0}) = T_K^\perp(\mathbf{q})$. Finalmente de la ecuación (4.4) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ + \varepsilon \mathbf{u}^- &= \mathbf{v} - \varepsilon \mathbf{v}^\perp + \varepsilon \mathbf{v} - \varepsilon \mathbf{v}^\perp, \\ &= (1 + \varepsilon) \mathbf{v}, \\ &\Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{u}^+ + \varepsilon \mathbf{u}^-}{1 + \varepsilon}; \end{aligned}$$

y el lema está probado. ■

Del lema anterior se puede establecer en el espacio de fuerzas el siguiente corolario.

Corolario 4.1. Se tiene la contención

$$N_{T_K(\mathbf{q})} \left(\frac{\mathbf{u}^+ + \varepsilon \mathbf{u}^-}{1 + \varepsilon} \right) \subset N_K(\mathbf{q}),$$

A partir de este momento para facilitar el análisis se asume las longitudes, de los cables de izado, idénticas, i.e. $l_1 \equiv l_2 \equiv l$. En el caso de la colisión simple el resultado del impacto es trivial, pero para la colisión doble donde la forma del impacto depende de la distancia entre los pivotes, se enuncia entonces el siguiente lema.

Lema 4.2. *Asumamos por simplicidad un impacto puramente plástico, $\varepsilon = 0$. Si la distancia entre los pivotes es suficientemente pequeña, $d < \sqrt{2}l$, el sistema perderá energía en cada colisión pero no detendrá su movimiento; pero si la distancia entre los pivotes es suficientemente grande, $d \geq \sqrt{2}l$, el sistema colisionara una única vez, deteniéndose inmediatamente.*

Prueba: *La prueba es puramente geométrica empleando la descomposición de Moreau (4.4). Por ser una variedad de Riemann, la apertura del cono T_K^\perp puede ser calculada mediante la expresión*

$$\cos \alpha = \frac{(\nabla f_1(q_0), \nabla f_2(q_0))_{M(q_0)}}{\|\nabla f_1(q_0)\|_{M(q_0)} \|\nabla f_2(q_0)\|_{M(q_0)}} = l^2 - \frac{d^2}{2}; \quad (4.5)$$

donde $\nabla f_i(q) := M^{-1}(q) \frac{\partial f_i}{\partial q}$, con norma $\|\cdot\|_{M(q_0)}^2 := (\cdot, \cdot)_{M(q_0)}$. De la ecuación (4.5), es inmediata la condición

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow d = \sqrt{2}l.$$

En la Figura 4.2 se puede observar que entre más alejados estén los motores de izado, mayor será la apertura de cono T_K^\perp y por lo tanto el componente de \mathbf{u}^- en T_K^\perp será mayor. Si la distancia, entre los motores de izado, es grande $d \geq \sqrt{2}l$, entonces es inmediato que $\mathbf{u}^- = \mathbf{v}^\perp \in T_K^\perp$, por lo que $\mathbf{u}^+ = 0$. Por el contrario, si $d < \sqrt{2}l$, se tiene $\mathbf{u}^+ = \mathbf{v} \neq 0$ por lo que el sistema permanecerá en movimiento hasta la siguiente colisión. Teóricamente, como se pierde energía geoméricamente, existe un punto de acumulación de impactos en tiempo finito, comúnmente llamado comportamiento Zeno. ■

Si $\varepsilon \in (0, 1)$, aunque el comportamiento durante las colisiones es determinista, las trayectorias se vuelven caóticas. Del lema anterior es inmediato también que a mayor distancia, entre los motores de izado, mayor es la cantidad de energía disipada.

4.3. Grúa bifilar bajo excitación paramétrica

Ya que se caracterizó el comportamiento en el impacto, estudiemos el efecto desestabilizador de un movimiento periódico en el pivote, bien conocido para el caso del péndulo rígido. Sea entonces,

la perturbación de la forma $a(t) = c(t) = 0$ y $b(t) = A \cos(\Omega t)$, provocando la aparición de una fuerza inercial que, ver ecuación (4.2), es equivalente a considerar una fuerza de gravedad variante en el tiempo.

Para analizar el comportamiento de este nuevo sistema es necesario desacoplar ciertas dinámicas del sistema. Consideremos primero que de alguna manera aparece la restricción bilateral $x \equiv 0$, lo que es equivalente a considerar una grúa de un sólo cable, ver Figura 4.3. Entonces, se tiene el siguiente lema:

Lema 4.3. Sean $\alpha := g \left(\Omega^2 \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right)^{-1}$ y $\beta := A \left(l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$. Si $\alpha - \beta \geq 0$ y la partícula se encuentra sobre la superficie de restricción $f_3(\mathbf{q}) = l_{eq} - r = 0$, el cable permanecerá tenso.

Prueba: La restricción $x = 0$ disminuye las dimensiones del sistema, resultando en la dinámica de un péndulo sobre un plano, ver Figura 4.3. Más aún, las restricciones $f_{1,2}(\mathbf{q})$ se vuelven redundantes y, para mantener la unicidad en la fuerza de restricción, se considera sólo una restricción de la forma

$$f_3(\mathbf{q}) = l_{eq} - r \geq 0,$$

donde $l_{eq} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$. Del Lagrangiano (4.1), notamos que las ecuaciones dinámicas se reducen a la forma

$$\begin{bmatrix} m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 r - m\tilde{g} \cos \varphi \\ m\ddot{\varphi} r^2 + 2m\dot{\varphi} \dot{r} r + m\tilde{g} r \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde \tilde{g} agrupa el término de gravedad y las fuerzas inerciales, $\tilde{g} = g + \ddot{b}(t)$,

$$b(t) = A \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{b}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t).$$

Es claro que el lado derecho de esta última ecuación corresponde a un cono normal, definido por la restricción $f_3(\mathbf{q})$. Si la partícula se encuentra en la superficie de restricción, $f_3(\mathbf{q}) = 0$, y dado que el cable no puede empujar, para que la partícula permanezca sobre esta superficie, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, se debe cumplir la condición:

$$\lambda = m\dot{\varphi}^2 r + m(g + A\omega^2 \cos(\Omega t)) \cos \varphi \geq 0; \quad (4.6)$$

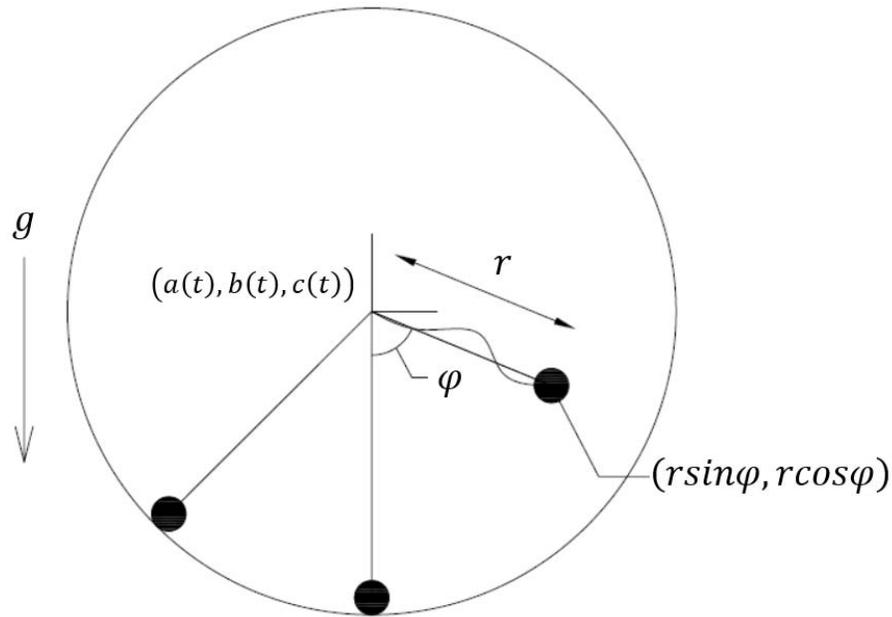


Figura 4.3: Péndulo Unilateral

siendo no-negativa para todo $\dot{\phi} \in \mathbb{R}$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, y $\Omega \in \mathbb{R}_+$ si y sólo si

$$\frac{g}{\Omega^2 l_{eq}} - \frac{A}{l_{eq}} \geq 0.$$

Equivalentemente, si $\alpha - \beta < 0$ existen valores de $\dot{\phi}$, ϕ , y Ω , para los cuales el cable podría perder rigidez y la carga se separaría de la frontera y finalmente ocurrirán impactos en el sistema.

■

Usando los resultados de Ptjor Kapitsa [38] para el péndulo rígido, donde el comportamiento del sistema es entendido sobre regiones en el plano (α, β) que determinan la estabilidad o inestabilidad, regiones denominadas también como lenguas de Arnold; se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.2. Las zonas de estabilidad o inestabilidad definidas por las lenguas de Arnold para un péndulo con cable flexible serán sólo válidas para valores $\alpha > \beta$.

Este corolario resulta de una vital importancia para entender el comportamiento de grúas bajo excitación paramétrica, como grúas en alta mar donde la perturbación periódica es inducida por el oleaje.

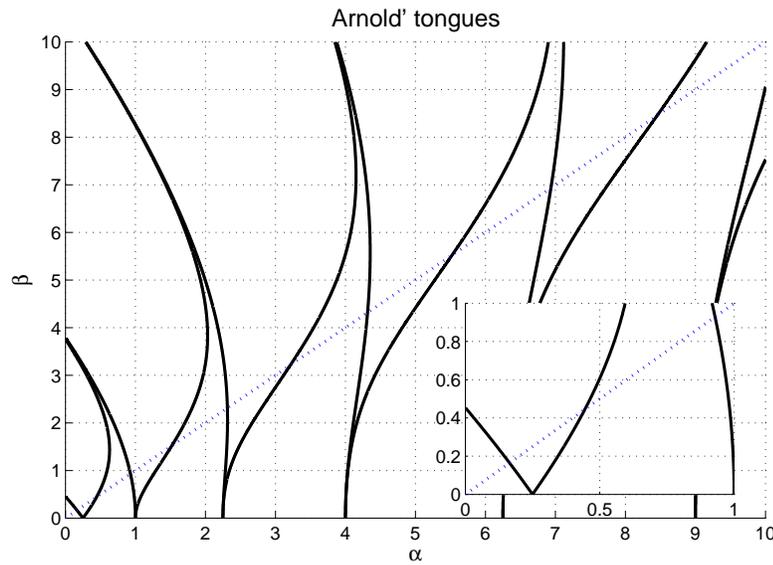


Figura 4.4: Región de estabilidad con restricciones unilaterales

Finalmente, el análisis general de la grúa bifilar, por su complejidad, será delegado a métodos numéricos.

4.4. Simulación numérica

En esta sección se hará un análisis del sistema, basándonos en experimentos numéricos. El algoritmo numérico se obtiene de la integración de la ecuación (4.3) en un intervalo de tiempo $(t_k, t_{k+1}]$,

$$\int_{(t_k, t_{k+1}]} M(\mathbf{q}) d\mathbf{u} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (C(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \mathbf{u} + G(\mathbf{q}) + F_{\text{ine}}) dt = \int_{(t_k, t_{k+1}]} dF, \quad (4.7)$$

con $dF \in -N(\mathbf{q})$. Definiendo $h := t_{k+1} - t_k$, y tomando el límite $h \downarrow 0$, podemos aproximar la solución del sistema a la forma

$$M(\mathbf{q}_k) (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) + h (C(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k + G(\mathbf{q}_k) + F_{\text{ine},k}) \in -N_K(\mathbf{q}_k). \quad (4.8)$$

Acary [15] propone formas más generales para aproximar la integral (4.7); sin embargo, la discretización propuesta en este trabajo arroja buenos resultados manteniendo el algoritmo lo más

sencillo posible. Es necesario reemplazar el cono del lado derecho de la ecuación (4.8) por el cono $N_{T(\mathbf{q}_k)}\left(\frac{\mathbf{u}_{k+1} + \varepsilon \mathbf{u}_k}{1 + \varepsilon}\right)$ (Moreau's Second Method), para robustecer el algoritmo numérico, permitir una discretización con tiempo fijo, e incluir el coeficiente de restitución durante el impacto, ver el corolario 4.1.

La ecuación (4.8), después de algunas manipulaciones algebraicas, es

$$M(\mathbf{q}_k) \left(\frac{\mathbf{u}_{k+1} + \varepsilon \mathbf{u}_k}{1 + \varepsilon} - H_k \right) \in -N_{V(\mathbf{q}_k)} \left(\frac{\mathbf{u}_{k+1} + \varepsilon \mathbf{u}_k}{1 + \varepsilon} \right), \quad (4.9)$$

donde

$$H_k = \mathbf{u}_k - \frac{h}{1 + \varepsilon} M^{-1}(\mathbf{q}_k) (C(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k + G(\mathbf{q}_k) + F_{\text{ine},k})$$

Observación 4.6. Existe un punto de singularidad en la ecuación (4.9), la matriz $M(\mathbf{q}_k)$ pierde rango cuando $r_k = 0$, situación que coincide cuando la partícula se alinea con los motores de izado, punto inviable en una grúa real por la existencia del vehículo de carga. Más si es importante estudiar el comportamiento de la partícula en $r_k \approx 0$, se deberá usar otro sistema de coordenadas o reducir el paso de integración.

Finalmente, la ecuación (4.9) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &= -\varepsilon \mathbf{u}_k + (1 + \varepsilon) \text{proj}_{M(\mathbf{q}_k)}(T_K(\mathbf{q}_k); H_k), \\ \mathbf{q}_{k+1} &= \mathbf{q}_k + h \mathbf{u}_{k+1}. \end{aligned}$$

con el operador de proyección

$$\text{proj}_{M(\mathbf{q}_k)}[T_K(\mathbf{q}_k); H_k] = \dots \left\{ \begin{array}{ll} H_k & \text{if } H_k \in T_K(\mathbf{q}_k) \\ [0, 0, H_k(3)]^T & \text{if } H_k \in T_K^\perp(\mathbf{q}_k) \\ H_k - \frac{(H_k, \nabla f_1)_{M(\mathbf{q}_k)}}{\|\nabla f_1\|_{M(\mathbf{q}_k)}} \nabla f_1 =: c_1 & \text{if } H_k \notin T_K(\mathbf{q}_k), H_k \notin T_K^\perp(\mathbf{q}_k), c_1 \in T_K(\mathbf{q}_k) \\ H_k - \frac{(H_k, \nabla f_2)_{M(\mathbf{q}_k)}}{\|\nabla f_2\|_{M(\mathbf{q}_k)}} \nabla f_2 =: c_2 & \text{if } H_k \notin T_K(\mathbf{q}_k), H_k \notin T_K^\perp(\mathbf{q}_k), c_2 \in T_K(\mathbf{q}_k) \end{array} \right. ;$$

definido usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt [39]. El término $H_k(3)$ es el tercer elemento del vector H_k , este término es entendido por lo descrito en la observación 4.1.

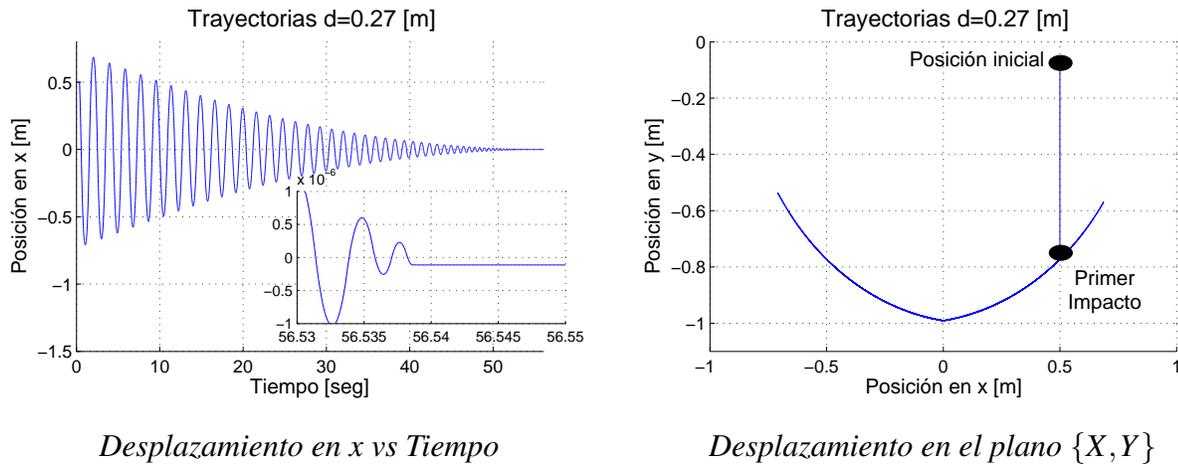


Figura 4.5: Desplazamiento de la partícula cuando la distancia entre pivotes es pequeña

4.4.1. Movimiento de la carga sin fuerzas inerciales

Recordemos que los cables en la grúa bifilar mantendrán la misma longitud en el análisis de este capítulo, sean entonces de longitud $l = 1[m]$, la partícula de masa $m = 1[kg]$ y la constante de gravedad $g = 9.81 [m/s^2]$. Analicemos primero el comportamiento de la carga descrito en el Lema 4.2, sin la presencia de fuerzas inerciales.

Sea primero, la distancia entre los pivotes $d = 0.27 [m]$ ($d < \sqrt{2}l$) y un coeficiente de restitución $\varepsilon = 0$. En la Figura 4.5 (derecha) se observa la trayectoria de la partícula en el plano $\{X, Y\}$ con condiciones iniciales $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}$, empieza en caída libre para posteriormente desplazarse sobre la frontera del espacio de configuraciones; en la misma Figura (izquierda) se observa el movimiento de la partícula en la coordenada x , notando que este comportamiento asemeja cualitativamente el comportamiento observado en la grúa real cuando los cables no están actuados, ver Figura 3.6.

En la Figura 4.6 mostramos finalmente, el comportamiento de la partícula cuando la distancia entre los pivotes es suficientemente grande $d = 1.51 [m]$ ($d > \sqrt{2}l$) y con condiciones iniciales $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.05 & 0 \end{bmatrix}$, el cuerpo permanece en caída libre hasta que alcanza una de las restricciones, permanece en ella hasta alcanzar la segunda y detener su movimiento, coincidiendo también con lo establecido en el Lema 4.2.

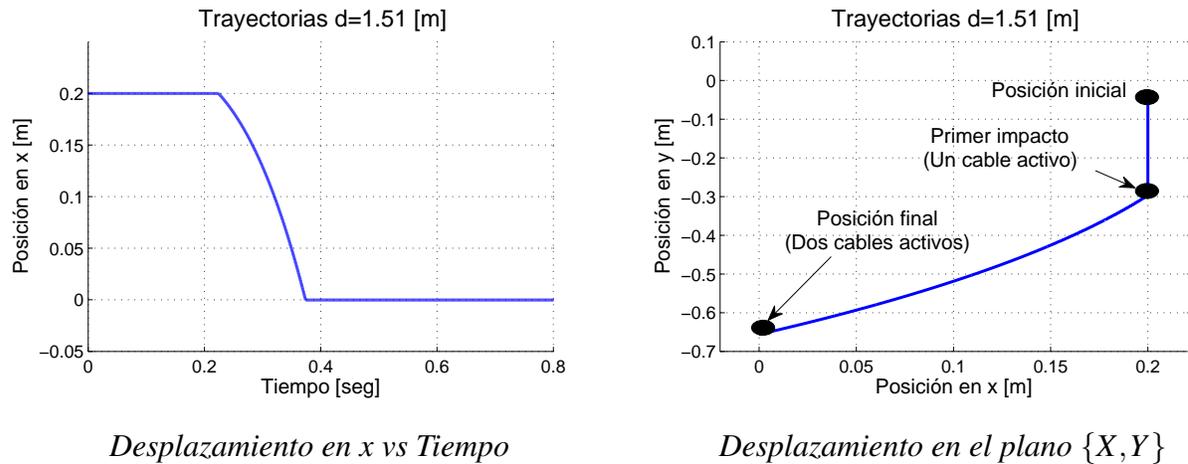


Figura 4.6: Desplazamiento de la partícula cuando la distancia entre pivotes es grande

4.4.2. Movimiento de la carga con excitación paramétrica

Se analiza ahora el comportamiento de la grúa, cuyos pivotes tienen un movimiento periódico vertical, $a(t) = c(t) = 0$ y $b(t) = A \cos(\Omega t)$. Primero, como en la sección anterior, consideremos el caso $x \equiv 0$ y observemos los resultados mostrados en el corolario 4.2. Dado que las regiones inestables son peligrosas, existan o no colisiones, enfoquémonos en lo que se suponen regiones estables en la gráfica de lenguas de Arnold, digamos $\alpha = 0.1$ y $\beta \in [0.1, 0.18]$, ver Figura 4.4, lo que equivale a incrementar la amplitud de oscilación manteniendo la frecuencia. En la Figura 4.7 (derecha), se observan las trayectorias para $\beta = \{ 0.1 \ 0.12 \ 0.14 \}$ y $\alpha = 0.1$. Se tiene que, como esperado, no ocurren impactos para $\beta = 0.1$ y la grúa se comporta como si los cables fueran rígidos; sin embargo, si $\beta = 0.12$ aparecen impactos, pero el sistema permanece estable, para $\beta = 0.14$ (2 cm más en la amplitud de oscilación) ocurren impactos en el sistema que podrían causar fallas en muchos sistemas mecánicos. En la Figura 4.7 (izquierda) se muestran las trayectorias para $\beta = \{ 0.14 \ 0.16 \ 0.18 \}$, conforme β aumenta, el sistema gana la suficiente energía a través de los impactos hasta que empieza una rotación continua, comportamiento descrito por Blechman [40] como rotaciones mantenidas por vibraciones.

En la Figura 4.8 se analizan la forma en la que se llevan a cabo los impactos durante el experimento numérico, particularmente el caso $\alpha = 0.1$ y $\beta = 0.18$. La discretización con un tiempo fijo

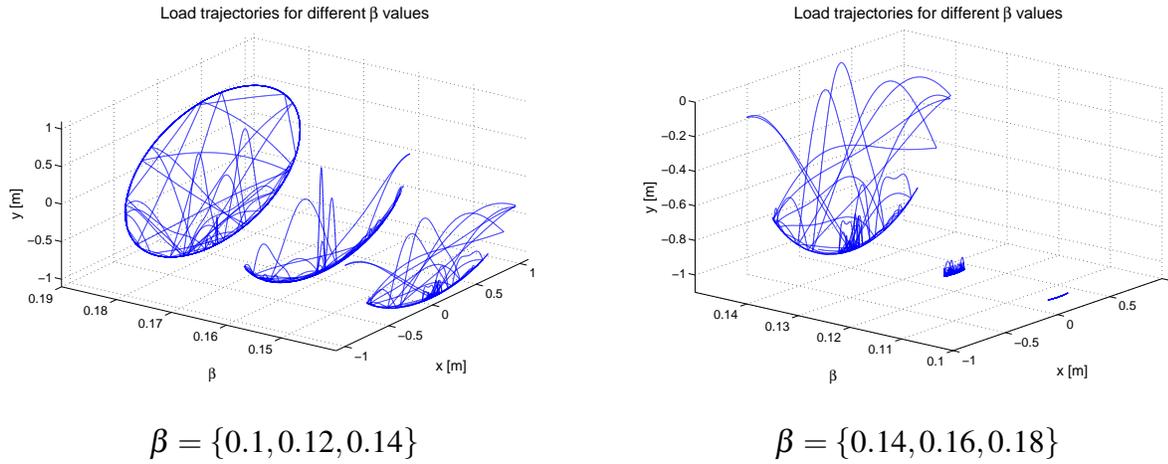


Figura 4.7: Trayectorias de la partícula con $x \equiv 0$

evita la posibilidad de una dinámica Zeno; más aún, el número de impactos puede cuantificarse explícitamente (337 para este experimento numérico). Además, se muestra que cuando la partícula se mantiene rotando, la fuerza de restitución es igual a la calculada para el caso holonómico, ver ecuación (4.6).

Finalmente, consideremos el sistema general, sin la restricción artificial $x \equiv 0$. Por el Corolario 4.2, el comportamiento del sistema para valores de $\alpha > \beta$ coincide con los de un sistema con cables rígidos, por lo que se considerará únicamente el caso $\alpha < \beta$.

Consideremos una grúa bifilar, con una separación entre pivotes $d = 0.5$, una longitud máxima de $l = 1$ [m], y con las condiciones iniciales $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -0.9375 & 0.01 \end{bmatrix}$ tal que ambos cables permanecen tensos al tiempo inicial, sometida a las perturbaciones

$$b_1(t) = 0.19 \cos(8.5t) \quad \text{respectivamente} \quad (\alpha_1, \beta_1) = (0.14, 0.20)$$

$$b_2(t) = 0.19 \cos(7.95t) \quad \text{respectivamente} \quad (\alpha_2, \beta_2) = (0.16, 0.20)$$

La perturbación correspondiente a (α_1, β_1) corresponde a una región de estabilidad en las lenguas de Arnold, mientras que (α_2, β_2) a una inestable. En la Figura 4.9 se observa el comportamiento del sistema frente a la que sería una perturbación estable si el cable fuera rígido, se observa el comportamiento de la partícula en el plano definido por los pivotes y la carga (izquierda) y en el plano $\{X', Z'\}$ (derecha). Numéricamente no aparece ningún atractor, y las trayectorias recuerdan el comportamiento de sistemas caóticos.

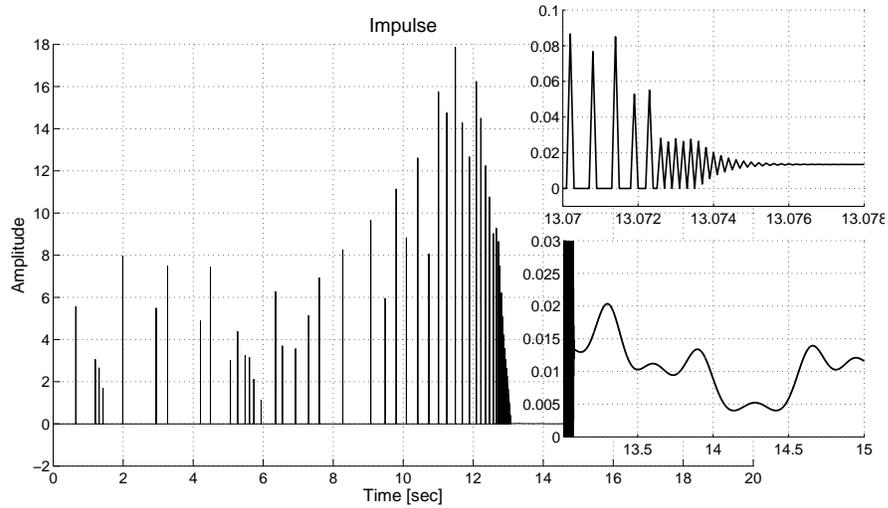
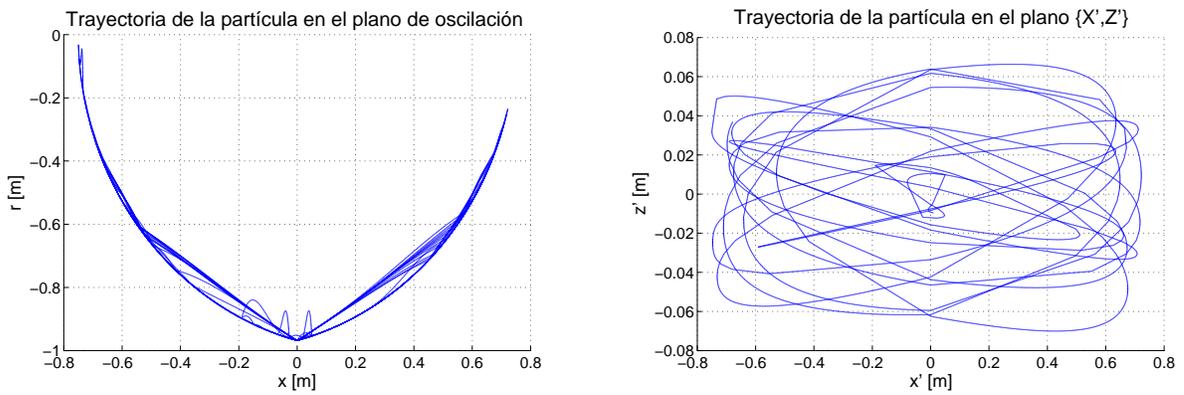


Figura 4.8: Trayectorias de la partícula para $\beta = \{0.14, 0.16, 0.18\}$



Desplazamiento en x vs Tiempo

Desplazamiento en el plano {X',Y}

Figura 4.9: Trayectorías para la excitación con parámetros $(\alpha, \beta) = (0.14, 0.20)$

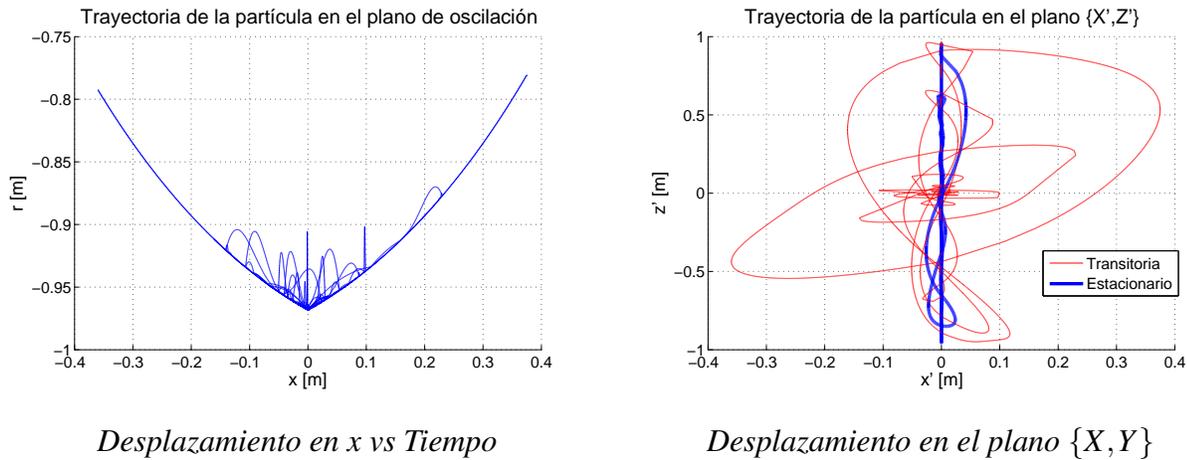


Figura 4.10: Trayectorías para la excitación con parámetros $(\alpha, \beta) = (0.16, 0.20)$

En la Figura 4.10 se observa el comportamiento del sistema frente a lo que sería una perturbación inestable en lenguas de Arnold. Al igual que en el caso anterior, se observa movimiento de la partícula en el plano definido por los pivotes y la carga (derecha), sin embargo, la amplitud alcanzada es mucho menor que en el caso anterior; este comportamiento se debe a que la perturbación transferirá la mayor cantidad de energía a la coordenada φ (izquierda).

4.5. Análisis de Resultados

En este capítulo hemos estudiado el comportamiento de la grúa bifilar al incluir colisiones en el modelo matemático. Se dividió el comportamiento de la grúa en dos partes para su análisis; primero, se analizó el comportamiento de la partícula en el plano definido por los pivotes y la carga, analizando la influencia de la configuración mecánica en el movimiento de la partícula y estableciendo que siempre ocurrirán impactos que drenarán energía del sistema. Finalmente, se estableció una relación entre la bien conocida excitación paramétrica y nuestro sistema; se encontró que nuestro sistema puede comportarse tanto como un sistema con cables rígidos como flexibles. Se encontró que cuando se presentan colisiones, es preferible tener una excitación paramétrica que induzca oscilaciones pues de esta manera está bien definido el atractor del sistema.

Los resultados mostrados son sólo un vistazo a las características dinámicas de este nuevo

sistema mecánico. Quedan pendientes algunos tópicos importantes, cómo entender el comportamiento del sistema con colisiones cuando la longitud máxima de los cables es variante en el tiempo, y así mejorar el desempeño del controlador presentado en el capítulo anterior.

Apéndice A

Péndulo de Kapitsa

El efecto de movimientos o fuerzas periódicas en la estabilidad son de gran interés, pues modifican radicalmente el comportamiento de los sistemas [41, 40, 42]. En este apéndice, solo hacemos mención del efecto de fuerzas periódicos sobre el sistema, como se observa en grúas montadas sobre plataformas en altamar [43]. Se presenta el análisis del péndulo invertido de n eslabones con la finalidad de ejemplificar el comportamiento de sistemas mecánicos frente a excitaciones periódicas, o resonancias paramétricas.

Desde inicios del siglo pasado se describió la inferencia de una excitación periódica en el pivote del péndulo [44], posteriormente la estabilidad del péndulo invertido fue explicada y verificada experimentalmente por Pjotr Kapitsa [38]. Posteriormente, con nuevas herramientas se logró demostrar la estabilidad de un péndulo invertido de n -eslabones [45, 46, 47].

A.1. Modelo Matemático

Considere el péndulo de la Figura 1. Tenemos un sistema holonómico de n grados de libertad con un vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n]$, donde φ_i es el ángulo medido entre la vertical y el i -ésimo eslabón. Sea la coordenada cartesiana del i -ésimo eslabón definida como $(x_i, y_i) = (x_{i-1} + l_i \sin \varphi_i, y_{i-1} + l_i \cos \varphi_i)$ con $(x_0, y_0) = (0, p(t))$, donde $p(t)$ describe el desplazamiento del pivote. Entonces, la energía cinética y potencial del sistema están dadas por las funciones

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2), \quad V = g \sum_{i=1}^n m_i y_i,$$

con g como la constante de gravedad. Las ecuaciones dinámicas son obtenidas a partir de la ecuación de Euler-Lagrange, los cálculos se omiten por no aportar nada a la discusión, y su deducción es de forma rutinaria.

A.1.1. Ecuaciones dinámicas

Sea la función de excitación $p(t) = A \cos \Omega t$, entonces las ecuaciones linealizadas del péndulo de n eslabones pueden escribirse de forma compacta como

$$M\mathbf{q}'' + (\alpha + \beta \cos \tau) K\mathbf{q} = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde $(\cdot)''$ denota la segunda derivada con respecto a la variable τ , una frecuencia normalizada de excitación $\tau := \Omega t$, y las constantes

$$\alpha = -\frac{g}{l_1 \Omega^2}, \quad \beta = \frac{A}{l_1}; \quad (\text{A.2})$$

que contienen la información sobre la amplitud A y la frecuencia angular Ω del movimiento del pivote. La matriz de inercia

$$M = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n k_i & r_2 \sum_{i=2}^n k_i & r_3 \sum_{i=3}^n k_i & r_n k_n \\ r_2 \sum_{i=2}^n k_i & r_2^2 \sum_{i=2}^n k_i & r_2 r_3 \sum_{i=3}^n k_i & \dots & r_2 r_n k_n \\ r_3 \sum_{i=3}^n k_i & r_2 r_3 \sum_{i=3}^n k_i & r_3^2 \sum_{i=3}^n k_i & & r_3 r_n k_n \\ & \vdots & & \ddots & \\ r_n k_n & r_2 r_n k_n & r_3 r_n k_n & & r_n^2 k_n \end{bmatrix},$$

y la matriz de rigidez

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n k_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 \sum_{i=2}^n k_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \sum_{i=3}^n k_i & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & r_n k_n \end{bmatrix},$$

se obtienen usando las relaciones de proporcionalidad entre las masas $m_i = k_i m_1$ y los eslabones $l_i = r_i l_1$ con $k_i, r_i > 0$.

Observación A.1. En el caso de masas y eslabones idénticos, recuperamos una estructura similar a la descrita en [45]. Este capítulo es entendido como una generalización de dicho trabajo.

A.1.2. Zonas de estabilidad

Como M es una matriz no singular, una propiedad común en sistemas mecánicos, la ecuación (A.1) puede escribirse como

$$\mathbf{q}'' + (\alpha + \beta \cos \tau) A \mathbf{q} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Observación A.2. La ecuación (A.3) se conoce como la ecuación de Mathieu. La estructura resultante para este problema en particular, resulto ser una de las más simples para su análisis [42, 48, 49].

La ecuación (A.3), es una ecuación diferencial homogénea, su estabilidad depende del valor de los parámetros (α, β) cuyas combinaciones forman un diagrama de estabilidad, conocido también como lenguas de Arnold.

Se presenta únicamente el estudio de las zonas de estabilidad mediante la parametrización de las fronteras buscando soluciones periódicas de la ecuación (A.3); existen otras fronteras que no contienen soluciones periódicas (lenguas de combinación), pero estas no intervienen en nuestro problema [42]. La solución del sistema libre de resonancia paramétrica, por continuidad de soluciones, debe ser parecida a la solución del sistema cuando $\beta \ll 1$. Mediante el método de pequeñas perturbaciones se propone una solución para $\mathbf{q}(\tau)$ de la forma $\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_0(\tau) + \beta \mathbf{q}_1(\tau) + \beta^2 \mathbf{q}_2(\tau) + o(\beta^2)$, así como la variación de α

$$\alpha = \alpha_0 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \alpha_2 + o(\beta^2). \quad (\text{A.4})$$

Expandiendo (A.3) en términos de β , se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} & \mathbf{q}''_0(\tau) + \beta \mathbf{q}''_1(\tau) + \beta^2 \mathbf{q}''_2(\tau) + \dots \\ & \dots (\alpha_0 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \alpha_2 + \beta \cos \tau) (A \mathbf{q}_0(\tau) + \beta A \mathbf{q}_1(\tau) + \beta^2 A \mathbf{q}_2(\tau)) + o(\beta^2) = 0, \end{aligned}$$

y al igualar términos con respecto a β , obtenemos el sistema de ecuaciones a ser resueltos de forma secuencial

$$\begin{aligned} \mathbf{q}''_0(\tau) + \alpha_0 A \mathbf{q}_0(\tau) &= 0 \\ \mathbf{q}''_1(\tau) + \alpha_0 A \mathbf{q}_1(\tau) &= -(\alpha_1 + \cos \tau) A \mathbf{q}_0(\tau) \\ \mathbf{q}''_2(\tau) + \alpha_0 A \mathbf{q}_2(\tau) &= -(\alpha_1 + \cos \tau) A \mathbf{q}_1(\tau) - \alpha_2 A \mathbf{q}_0(\tau) \\ &\dots \end{aligned} \tag{A.5}$$

Los parámetros α_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ que produzcan una solución periódica en el sistema son los que determinan frontera de estabilidad (A.4). Es claro que α_0 corresponde al punto donde las curvas tocan $\beta = 0$.

Parametrización de las curvas

La parametrización de las fronteras de estabilidad requiere que antes se enuncien los siguientes lemas.

Lema A.1. Sean $M, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $M = M^T > 0$ y $K = K^T > 0$, entonces $\exists Q$ no singular tal que

$$Q^T M Q = I, \quad Q^T K Q = \text{Diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \};$$

donde $\lambda_i \in \sigma(M^{-1}K)$ son reales positivos.

Prueba: La prueba se puede consultar en [50].

■

Lema A.2. Sea A una matriz diagonalizable, sean $\{ \lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2 \} = \sigma(A)$, que satisfacen $A \mathbf{v}_i = \lambda_i^2 \mathbf{v}_i$. Entonces, la solución del sistema de ecuaciones homogéneo $\mathbf{q}'' + A \mathbf{q} = 0$, es

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n c_i \cos \left(\lambda_i \alpha^{\frac{1}{2}} \tau + d_i \right) \mathbf{v}_i$$

Prueba: Por el lema A.1, y la forma en la que se construyó la matriz A , existe un cambio de coordenadas $\mathbf{q} = Q \zeta$ tal que $Q A Q^{-1} = \text{diag} \{ \lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2 \}$; particularmente $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$.

La solución del sistema desacoplado $\zeta''(\tau) + \alpha D \zeta(\tau) = 0$ es

$$\zeta(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_1 \alpha^{\frac{1}{2}} \tau + d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos(\lambda_2 \alpha^{\frac{1}{2}} \tau + d_2) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \cos(\lambda_n \alpha^{\frac{1}{2}} \tau + d_n) \end{bmatrix} \zeta(0).$$

Entonces, la solución del problema en las coordenadas \mathbf{q} es

$$\mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \cos(\lambda_1 \alpha^{\frac{1}{2}} \tau + d_1) \\ c_2 \cos(\lambda_2 \alpha^{\frac{1}{2}} \tau + d_2) \\ \vdots \\ c_n \cos(\lambda_n \alpha^{\frac{1}{2}} \tau + d_n) \end{bmatrix},$$

con constantes c_i y d_i $i = 1, 2, \dots, n$ que dependen de las condiciones iniciales. Como la post-multiplicación opera sobre las columnas de una matriz, tenemos

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n c_i \cos(\lambda_i \alpha^{\frac{1}{2}} \tau + d_i) \mathbf{v}_i$$

y el lema está probado. ■

Observación A.3. Al considerar $\sigma(A) = \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2\}$, se pueden ordenar los valores característicos de la forma

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_n^2. \quad (\text{A.6})$$

Lema A.3. Considere la ecuación no homogénea

$$\mathbf{q}''(\tau) + \frac{1}{4\lambda_k^2} A \mathbf{q}(\tau) = c_j \cos\left(\frac{\lambda_j \tau}{\lambda_k} + d_j\right) \mathbf{v}_j;$$

donde λ_j es el valor característico asociado al vector característico \mathbf{v}_j . Entonces, el sistema tiene al menos una solución no acotada de la forma

$$\mathbf{q}(\tau) = c_j \tau \sin\left(\frac{\lambda_j \tau}{\lambda_k} + d_j\right) \mathbf{v}_j$$

Prueba: La prueba se sigue de forma inmediata. ■

Lema A.4. Las fronteras de estabilidad e inestabilidad en el plano (α, β) para el sistema (A.3), pasan por los puntos $\left(\frac{k^2}{4\lambda_j^2}, 0\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2$.

Prueba: La prueba se puede consultar en [48]. ■

El resultado del presente capítulo se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema A.1. Las fronteras de estabilidad del péndulo de n eslabones, están dadas por las ecuaciones paramétricas

$$P: \alpha = -\frac{1}{2}\lambda_n^2\beta^2, \quad y \quad G: \alpha = \frac{1}{4\lambda_1^2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{\lambda_1^2}{8}\beta^2,$$

donde λ_1 y λ_n son los valores característicos, que satisfacen (A.6), de la matriz A definida en (A.3).

Prueba: Por el lema A.4, conocemos los puntos α_0 de las curvas paramétricas. Analicemos primero la parametrización de la curva P que pasa en el punto $\alpha_0 = 0$. Re-escribiendo (A.5), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{q}''_0(\tau) &= 0, \\ \mathbf{q}''_1(\tau) &= -(\alpha_1 + \cos \tau)A\mathbf{q}_0(\tau), \\ \mathbf{q}''_2(\tau) &= -(\alpha_1 + \cos \tau)A\mathbf{q}_1(\tau) - \alpha_2 A\mathbf{q}_0(\tau). \end{aligned}$$

La integración es inmediata, entonces $\mathbf{q}_0(\tau) = \mathbf{q}_0(0) \equiv \text{const}$ es la única solución periódica no trivial de $\mathbf{q}_0(\tau)$. Al substituirse e integrar $\mathbf{q}_1(\tau)$ obtenemos

$$\mathbf{q}_1(\tau) = \left(\cos \tau - \frac{1}{2}\alpha_1\tau^2\right)A\mathbf{q}_0(0)$$

en donde existe una solución periódica no trivial al hacer $\alpha_1 = 0$. Finalmente, la dinámica de $\mathbf{q}_2(\tau)$ está dada por

$$\mathbf{q}''_2(\tau) = -A \left(\frac{1}{2}A + \alpha_2 I_3 + \frac{1}{2} \cos(2\tau)A \right) \mathbf{q}_0(\tau),$$

en donde se usó la equivalencia $2\cos^2\tau = 1 + \cos(2\tau)$, sin la necesidad de resolver esta última ecuación es inmediato que existirá una solución periódica si y solo si $(A + 2\alpha_2 I_3)\mathbf{q}_0(0) = 0$, lo que es equivalente a decir que $-2\alpha_2 \in \sigma(A)$. Tenemos que la parametrización de la frontera está dada como

$$P: \alpha = -\frac{1}{2}\lambda_j^2\beta^2.$$

Para algún $j = 1, \dots, n$. Sabemos que P es la frontera izquierda de nuestra zona de estabilidad, es inmediato demostrar [45], que $\lambda_j = \lambda_n$ es la frontera más restrictiva. Y así hemos demostrado la primera parte del teorema.

Para la segunda parte, analizemos la parametrización de la curva G que pasa por el punto $\alpha_0 = \frac{1}{4\lambda_1^2}$. Se tiene entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{q}''_0(\tau) + \frac{1}{4\lambda_1^2}A\mathbf{q}_0(\tau) &= 0 \\ \mathbf{q}''_1(\tau) + \frac{1}{4\lambda_1^2}A\mathbf{q}_1(\tau) &= -(\alpha_1 + \cos\tau)A\mathbf{q}_0(\tau) \\ \mathbf{q}''_2(\tau) + \frac{1}{4\lambda_1^2}A\mathbf{q}_2(\tau) &= -\left(\alpha_1^{(2)} + \cos\tau\right)A\mathbf{q}_1(\tau) - \alpha_2A\mathbf{q}_0(\tau) \end{aligned}.$$

Usando el lema (A.2) se tiene que la solución para $\mathbf{q}_0(\tau)$ es

$$\mathbf{q}_0(\tau) = c_1 \cos\left(\frac{\tau}{2} + d_1\right)\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n c_j \cos\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\frac{\tau}{2} + d_i\right)\mathbf{v}_i$$

Es sencillo demostrar usando el lema A.3 que los términos agrupados en la sumatoria producirán términos seculares para \mathbf{q}_1 que no podrán ser compensados; entonces, se considera como la única respuesta periódica no trivial a

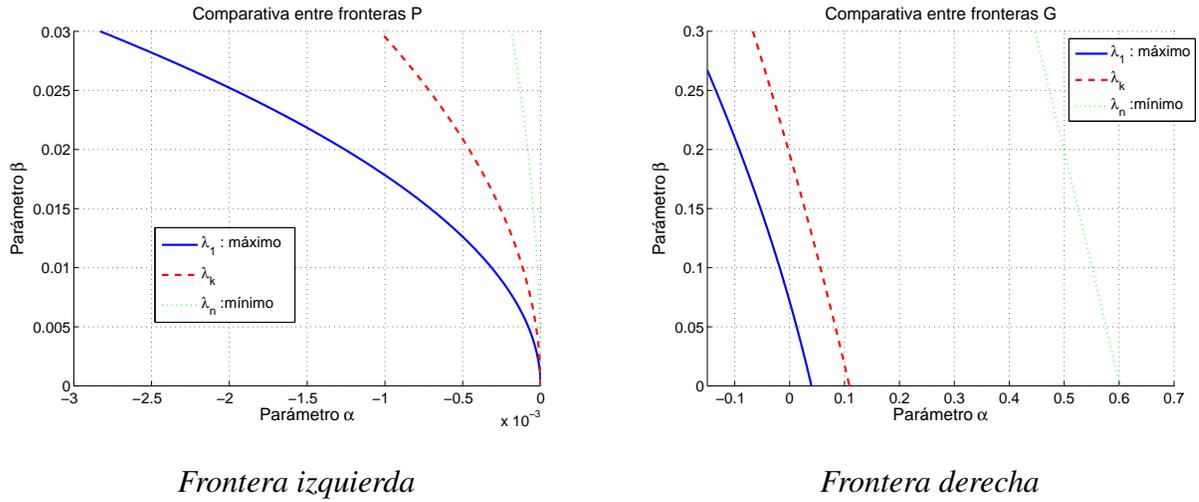
$$\mathbf{q}_0(\tau) = c_1 \cos\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathbf{v}_1,$$

en donde, bajo ciertas condiciones iniciales adecuadas (velocidad inicial igual a cero), se ha establecido $d_1 = 0$ pues además la fase no juega un rol importante en determinar la solución periódica.

Substituyendo en la dinámica de \mathbf{q}_1 , se tiene

$$\mathbf{q}''_1(\tau) + \frac{1}{4\lambda_1^2}A\mathbf{q}_1(\tau) = -c_1 \left(\left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \right) \lambda_1^2 \cos\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \cos\frac{3\tau}{2} \right) \mathbf{v}_1,$$

en donde se han usado las propiedades $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1^2\mathbf{v}_1$ y $\cos\left(\frac{\tau}{2}\right)\cos(\tau) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\tau}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\tau}{2}\right)\right)$. Se vuelve necesario eliminar del lado derecho el término forzante $\cos\frac{\tau}{2}$; entonces se hace $\alpha_1 = -1/2$.


 Figura A.1: Curvas paramétricas para distintos valores de λ

Resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene

$$\mathbf{q}_1(\tau) = \frac{c_1}{4} \lambda_1^2 \cos \frac{3\tau}{2} \mathbf{v}_1.$$

Sustituyendo \mathbf{q}_0 y \mathbf{q}_1 en la dinámica de \mathbf{q}_2 , obtenemos

$$\mathbf{q}_2''(\tau) + \frac{1}{4\lambda_1^2} A \mathbf{q}_2(\tau) = \frac{c_1 \lambda_1^4}{8} \left(\cos \frac{3\tau}{2} - \cos \frac{5\tau}{2} \right) \mathbf{v}_1 - \left(\frac{1}{8} \lambda_1^2 + \alpha_2 \right) c_1 \lambda_1^2 \cos \frac{\tau}{2} \mathbf{v}_1$$

en donde se ha usado la equivalencia $\cos(\tau) \cos\left(\frac{3\tau}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\tau}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\tau}{2}\right) \right)$, para eliminar el término forzante $\cos \frac{\tau}{2}$, basta tener $\alpha_2 = \frac{-1}{8} \lambda_1^2$. Y, la ecuación paramétrica de la segunda frontera de estabilidad queda simplemente como

$$G: \alpha = \frac{1}{4\lambda_1^2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{\lambda_1^2}{8}\beta^2$$

■

En la Figura A.1, se muestran las curvas G y P para distintos valores de λ .

A.2. Resultados numéricos y experimentales

Los resultados presentados fueron validados en una plataforma experimental de dos eslabones de masa y longitud similares. La amplitud de la excitación paramétrica se varía ajustando un

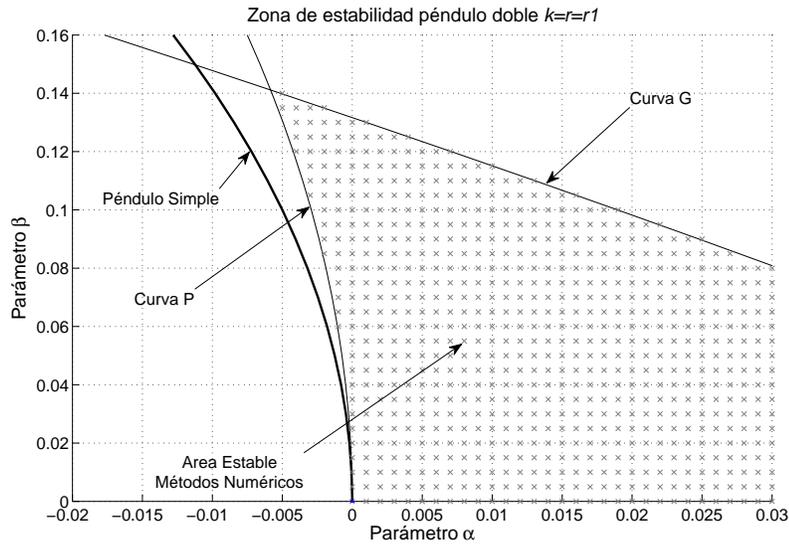


Figura A.2: Zona de estabilidad del péndulo doble

sistema biela-manivela, mientras que la frecuencia se ajusta con la velocidad del eje del motor.

Como $r = k = 1$, tenemos $\sigma(A) = \{0.5858, 3.4142\}$ y las curvas

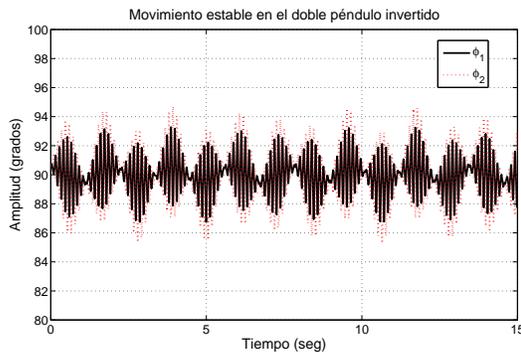
$$P : \alpha = -0.2929\beta^2$$

$$G : \alpha = 0.0732 - 0.5\beta - 0.4267\beta^2.$$

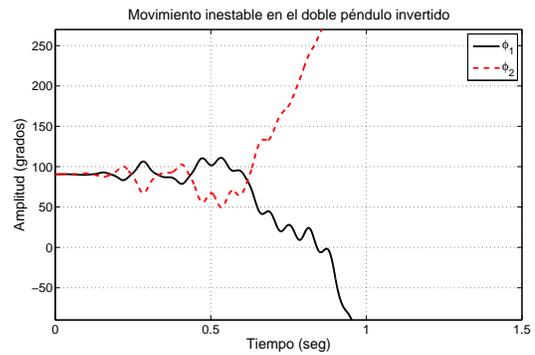
delimitan la zona de estabilidad del prototipo. En la Figura A.2 se muestra la zona de estabilidad obtenida mediante las curvas paramétricas, así como por métodos numéricos.

La frecuencia máxima del prototipo en laboratorio corresponde a $\Omega = 100[\text{rad/seg}]$ y una la longitud de eslabones de $l = 0.25[\text{m}]$. En la Figura A.2 se aprecia que para un valor, escogido arbitrariamente, de $\alpha \approx -4e^3$ y valores de $\beta \in (0.118, 0.136)$ estabilizaremos el péndulo. Equivalentemente por las relaciones (A.2), tenemos que con una excitación periódica de la forma $p(t) = B\cos(100t)$ donde $B \in (2.95, 3.5) [\text{cm}]$, estabilizaremos el péndulo invertido.

En la Figura A.3 se muestra la simulación de la dinámica completa del doble péndulo, en donde se escogieron puntos muy cercanos tanto inestables como estables. Los resultados experimentales se pueden ver en el video '<https://www.youtube.com/watch?v=4iv5il7XwLg>'.



Comportamiento estable
 $(\alpha, \beta) = (-0.004, 0.14)$.



Comportamiento inestable
 $(\alpha, \beta) = (-0.004, 0.16)$.

Figura A.3: Comportamiento del péndulo doble de Kapitza

A.3. Análisis y Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado la resonancia paramétrica en uno de los sistemas más populares, el péndulo de Kapitza. Se analizó como la excitación paramétrica depende fuertemente de la geometría de los sistemas en estudio, así como la forma en que una pequeña variación en el diseño mecánico o en la forma de excitación puede influir grandemente en el comportamiento general del sistema.

Algunas veces se vuelve imposible determinar de forma analítica las zonas de estabilidad e inestabilidad de los sistemas, por lo que se vuelve necesario recurrir a métodos numéricos.

Para más resultados sobre este prototipo, referirse a [3].

Bibliografía

- [1] E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, and Z. N. Masoud, “Dynamics and control of cranes: A review,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 9, no. 7, pp. 863–908, 2003.
- [2] R. Ghigliazza and P. Holmes, “On the dynamics of cranes, or spherical pendula with moving supports,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 37, no. 7, pp. 1211–1221, 2002.
- [3] I. Gutierrez, J. Collado, and J. Tellez, “Estabilizacion del pendulo doble mediante excitacion parametrica,” XVI Congreso Latinoamericano de Control Automatico, CLCA 2014, 2014.
- [4] I. Gutierrez and J. Collado, “Control of a two wired hammerhead tower crane,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 84, pp. 1–12, 2016.
- [5] —, “An lqr controller in the obstacle avoidance of a two-wires hammerhead crane,” *Neurocomputing*, 2016.
- [6] —, “Obstacle avoidance in a two wired hammerhead tower crane,” 12th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 2015.
- [7] —, “Control of a novel two wired crane,” 2016 American Control Conference, 2015.
- [8] L. A. Pars, *A treatise on analytical dynamics*. Wiley, 1965.
- [9] R. Leine and N. Wouw, *Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints*. Springer Science & Business Media, 2007, vol. 36.

- [10] *F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski*, Nonsmooth analysis and control theory. *Springer Science & Business Media*, 2008, vol. 178.
- [11] *R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets*, Variational analysis. *Springer Science & Business Media*, 2009, vol. 317.
- [12] *J.-P. Aubin and I. Ekeland*, Applied nonlinear analysis. *Courier Corporation*, 2006.
- [13] *J. P. Aubin and A. Cellina*, Differential Inclusions: Set-valued Maps and Viability Theory: with 29 Figures. *Springer-Verlag*, 1984.
- [14] *C. Glocker*, Set-valued force laws: dynamics of non-smooth systems. *Springer Science & Business Media*, 2013, vol. 1.
- [15] *V. Acary and B. Brogliato*, Numerical methods for nonsmooth dynamical systems: applications in mechanics and electronics. *Springer Science & Business Media*, 2008.
- [16] *B. Brogliato*, Nonsmooth mechanics: models, dynamics and control. *Springer Science & Business Media*, 2012.
- [17] *B. Jerman and J. Kramar*, “A study of the horizontal inertial forces acting on the suspended load of slewing cranes,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, no. 3, pp. 490–500, 2008.
- [18] *F. Ju, Y. Choo, and F. Cui*, “Dynamic response of tower crane induced by the pendulum motion of the payload,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. 2, pp. 376–389, 2006.
- [19] *H.-H. Lee*, “A new approach for the anti-swing control of overhead cranes with high-speed load hoisting,” *International Journal of Control*, vol. 76, no. 15, pp. 1493–1499, 2003.
- [20] *J. Auernig and H. Troger*, “Time optimal control of overhead cranes with hoisting of the load,” *Automatica*, vol. 23, no. 4, pp. 437–447, 1987.

- [21] U. H. Shah and K.-S. Hong, "Input shaping control of a nuclear power plants fuel transport system," *Nonlinear Dynamics*, vol. 77, no. 4, pp. 1737–1748, 2014.
- [22] N. Sun, Y. Fang, and H. Chen, "Adaptive antiswing control for cranes in the presence of rail length constraints and uncertainties," *Nonlinear Dynamics*, pp. 1–11, 2015.
- [23] M. Daqaq, C. Reddy, and A. Nayfeh, "Input-shaping control of nonlinear mems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 54, no. 1-2, pp. 167–179, 2008.
- [24] A. K. Kamath, N. M. Singh, F. Kazi, and R. Pasumarthi, "Dynamics and control of 2d spider-crane: A controlled lagrangian approach." in *Conference on Decision and Control, 2010*, pp. 3596–3601.
- [25] R. J. Whitaker, "Harmonographs. i. pendulum design," *American Journal of Physics*, vol. 69, no. 2, pp. 162–173, 2001.
- [26] A. Formalskii, "Stabilization of unstable mechanical systems," *Journal of optimization theory and applications*, vol. 144, no. 2, pp. 227–253, 2010.
- [27] A. Fuller, "In-the-large stability of relay and saturating control systems with linear controllers," *International Journal of Control*, vol. 10, no. 4, pp. 457–480, 1969.
- [28] H.-H. Lee, "Modeling and control of a three-dimensional overhead crane," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 120, no. 4, pp. 471–476, 1998.
- [29] H. Olsson, K. J. Åström, C. C. De Wit, M. Gäfvert, and P. Lischinsky, "Friction models and friction compensation," *European journal of control*, vol. 4, no. 3, pp. 176–195, 1998.
- [30] L. Cui, H. Zhang, B. Chen, and Q. Zhang, "Asymptotic tracking control scheme for mechanical systems with external disturbances and friction," *Neurocomputing*, vol. 73, no. 7, pp. 1293–1302, 2010.
- [31] B. D. Anderson and J. B. Moore, *Linear optimal control*. Prentice-hall Englewood Cliffs, 1971, vol. 197, no. 1.

- [32] A. E. Bryson and Y.-C. Ho, *Applied optimal control: optimization, estimation and control*. CRC Press, 1975.
- [33] J. Vaughan, D. Kim, and W. Singhose, "Control of tower cranes with double-pendulum payload dynamics," *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol. 18, no. 6, pp. 1345–1358, 2010.
- [34] W. Singhose, L. Porter, M. Kenison, and E. Kriikku, "Effects of hoisting on the input shaping control of gantry cranes," *Control engineering practice*, vol. 8, no. 10, pp. 1159–1165, 2000.
- [35] A. Dendis and F. Papoulias, "Oscillations of a multi-string pendulum," *Naval Postgraduate School, Tech. Rep.*, 2007.
- [36] C. Glocker, "An introduction to impacts," in *Nonsmooth mechanics of solids*. Springer, 2006, pp. 45–101.
- [37] B. Brogliato, A. Daniilidis, C. Lemaréchal, and V. Acary, "On the equivalence between complementarity systems, projected systems and differential inclusions," *Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 1, pp. 45–51, 2006.
- [38] P. Kapitsa, "Dynamic stability of the pendulum when the point of suspension is oscillating," *Sov Phys JETP*, vol. 21, p. 588, 1951, in Russian (English translated).
- [39] D. G. Luenberger, *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, 1969.
- [40] I. Blechman, "Vibrational mechanics: nonlinear dynamic effects, general approach, applications," 2003.
- [41] E. I. Butikov, "On the dynamic stabilization of an inverted pendulum," *American Journal of Physics*, vol. 69, no. 7, pp. 755–768, 2001.
- [42] V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinski, *Linear differential equations with periodic coefficients*. Wiley, 1975, vol. 2.

-
- [43] C.-M. Chin, A. H. Nayfeh, and D. T. Mook, “Dynamics and control of ship-mounted cranes,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 7, no. 6, pp. 891–904, 2001.
- [44] A. Stephenson, On a new type of dynamical stability. *Manchester Memoirs*, 1908, vol. lii.
- [45] S. Otterbein, “Stabilization of the n -pendulum and the indian link trick,” *Archive for rational mechanics and analysis*, vol. 78, no. 4, pp. 381–393, 1982.
- [46] S. P. Weibel and J. Baillieul, “Open-loop oscillatory stabilization of an n -pendulum,” *International Journal of Control*, vol. 71, no. 5, pp. 931–957, 1998.
- [47] A. Seyranian and A. Seyranian, “The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point,” *Journal of applied mathematics and mechanics*, vol. 70, no. 5, pp. 754–761, 2006.
- [48] J. Hansen, “Stability diagrams for coupled Mathieu-equations,” *Ingenieur-Archiv*, vol. 55, no. 6, pp. 463–473, 1985.
- [49] W. Magnus and S. Winkler, Hill’s equation. *Courier Corporation*, 2013.
- [50] F. R. Gantmacher, Applications of the Theory of Matrices. *Courier Corporation*, 2005.