

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

**“Control robusto lineal de altitud
para un prototipo de laboratorio PVTOL”**

TESIS

Que presenta

Luis Ángel Blas Sánchez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE

Control Automático

Directores de la Tesis:

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Dr. Sergio Rosario Salazar Cruz

México, D.F.

Septiembre, 2015

Agradecimientos

Al CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

Resumen

En esta tesis se presentan esquemas de control lineal para regular el vuelo vertical de una maqueta PVTOL. Se estudia un modelo para el PVTOL. Posteriormente se aplica el control clásico: retroalimentación de estado con estimación del estado y un observador robusto de alta ganancia singularmente perturbado, que prescinde del conocimiento de los parámetros.

Se aplica un control lineal robusto basado en técnicas de perturbaciones singulares.

Se aborda el problema de regulación, se obtiene un modelo incremental y se reajusta el esquema clásico de control lineal.

Y finalmente se propone y aplica un control lineal robusto basado en las técnicas de detección de fallas. En cada caso se presentan resultados experimentales.

Abstract

In this thesis linear control schemes to regulate the vertical flight of a PVTOL are presented. First a model for the PVTOL is studied. Then we apply classical control: state feedback with state estimation and a singularly perturbed high gain robust observer that does not required knowledge of the parameters.

A robust linear control based on singularly perturbed techniques is applied.

The regulation problem is adressed, an incremental model is obtained and the classical control scheme is readjusted.

Finally we propose and implement a robust linear control based on fault detection techniques. In each case experimental results are presented.

Índice general

Agradecimientos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
Índice general	ix
1 Introducción	1
2 Despegue y aterrizaje vertical planar (PVTOL)	3
2.1 Descripción	3
2.2 Modelo teórico	7
2.3 Modelo real: Caso de desplazamiento vertical	8
2.3.1 Determinación del factor de escala de la fuerza propulsora	9
2.3.2 Rigidez elástica	13
2.3.3 Fuerza de propulsión en estado estacionario	18
2.3.4 Coeficiente de fricción	19
2.4 Conclusiones	23
3 Control lineal clásico: realimentación de estado	25
3.1 Descripción teórica	25
3.1.1 Realimentación de estado	25

3.1.1.1	Diseño numérico	27
3.1.2	Estimación de la velocidad	27
3.1.2.1	Estimación algorítmica: Método de Euler	28
3.1.2.1.1	Diseño numérico	28
3.1.2.2	Observador de estado clásico	29
3.1.2.2.1	Diseño numérico	29
3.1.2.3	Observador robusto de alta ganancia singularmente perturbado	30
3.1.2.3.1	Diseño numérico	34
3.2	Discretización	36
3.2.1	Cálculo de la matriz exponencial y su integral	37
3.3	Aspectos prácticos	39
3.3.1	Realimentación de estado LQR	39
3.3.2	Observador de estado clásico	42
3.3.3	Observador singularmente perturbado	44
3.3.4	Resultados experimentales	44
3.3.4.1	Realimentación utilizando medición directa del estado	44
3.3.4.2	Realimentación utilizando un estimado del estado	47
3.3.4.3	Observador singularmente perturbado	51
3.4	Conclusiones	53
4	Control robusto de alta ganancia	55
4.1	Descripción teórica	55
4.2	Análisis del caso de un sistema mecánico de segundo orden	60
4.2.1	Ley de control	60
4.2.2	Sistema en lazo cerrado	61
4.2.3	Propiedades para el caso $\varepsilon_c = 0$	62
4.2.3.1	Polos en lazo cerrado	63
4.2.3.2	Ceros del sistema	63

4.2.3.3	Función de transferencia	63
4.2.4	Propiedades para el caso $\varepsilon_c > 0$	64
4.2.4.1	Polos en lazo cerrado	65
4.2.4.2	Ceros del sistema	66
4.2.4.3	Función de transferencia	67
4.3	Discretización	67
4.4	Resultados experimentales	67
4.5	Conclusiones	73
5	Regulación	75
5.1	Modelo incremental	75
5.2	Realimentación de estado	78
5.3	Control robusto de alta ganancia	78
5.4	Resultados experimentales	79
5.5	Conclusiones	86
6	Regulación robusta utilizando detección de fallas	87
6.1	Descripción teórica	88
6.1.1	Representación de estado	88
6.1.2	Detección de fallas	88
6.1.2.1	Representación de estado	88
6.1.2.2	Filtro Beard-Jones	89
6.1.2.3	Función de transferencia	89
6.1.2.4	Respuesta temporal	90
6.1.2.5	Detector de fallas	90
6.1.2.6	Ley de control	90
6.1.2.7	Sistema en lazo cerrado	91
6.2	Análisis del caso de un sistema mecánico de segundo orden	91
6.2.1	Representación de estado	91

6.2.2	Ley de control	92
6.2.3	Sistema en lazo cerrado	93
6.2.3.1	Ceros del sistema	94
6.2.3.2	Polos en lazo cerrado	95
6.2.3.3	Función de transferencia	96
6.2.3.4	Solución temporal	98
6.3	Discretización	99
6.4	Resultados experimentales	101
6.5	Conclusiones	108
7	Conclusiones	109
	Bibliografía	111

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo de tesis se estudia el problema del control de altitud de un prototipo de laboratorio PVTOL mediante técnicas de control lineal.

Para esto se procede de la manera siguiente:

- 1 En el capítulo 1 se estudia el modelo matemático de un prototipo de laboratorio PVTOL.
- 2 En los capítulos 3 y 4 se prueban dos esquemas de control lineal, el esquema clásico retroalimentación de estado con observador de estado, y un esquema robusto basado en técnicas de perturbaciones sigulares.
- 3 En el capítulo 5 se considera el problema de regulación de altitud.
- 4 En el capítulo 6 se propone un esquema de control lineal, basado en las técnicas de detección de fallas.

En este trabajo de tesis solamente se reportan los resultados obtenidos en laboratorio. Cabe mencionar que todos los esquemas presentados en esta tesis, fueron primeramente probados en simulaciones numéricas. Todas las proposiciones de control lineal de esta tesis, funcionaron exitosamente en todas las simulaciones numéricas, aún cuando se agregaban incertidumbres en los parámetros. Fue hasta la etapa de experimentación, donde los esquemas de control empezaron a presentar problemas considerables. Por lo que fue necesario experimentar con los diferentes esquemas de control lineal, aquí presentados, para resolver tales problemas.

Capítulo 2

Despegue y aterrizaje vertical planar (PVTOL)

En este capítulo se estudia el modelo de un prototipo de laboratorio PVTOL. Para esto se procede de la manera siguiente:

- 1) En la sección 2.1 se describe el prototipo.
- 2) En la sección 2.2 se obtiene un modelo teórico.
- 3) En la sección 2.3 en el laboratorio se identifican los parámetros de un modelo de segundo orden.
- 4) En la sección 2.4 se concluye.

2.1 Descripción

El PVTOL (por sus siglas en inglés: planar vertical take-off and landing) cuya traducción es despegue y aterrizaje vertical planar; fue introducido por Hauser, Sastry y Meyer en [1], es un objeto volador cuyo movimiento está restringido en un plano vertical. Tiene tres grados de libertad: desplazamientos horizontal, vertical y angular, que corresponden a su posición y orientación en el plano. El PVTOL está compuesto de dos propulsores independientes que generan una fuerza y un momento en la máquina voladora [2]. En este trabajo de tesis se utiliza el cuadrirrotor mostrado en las figuras 2.1 y 2.2, el cual está restringido mecánicamente a un plano vertical.

Capítulo 2. Despegue y aterrizaje vertical planar (PVTOL)

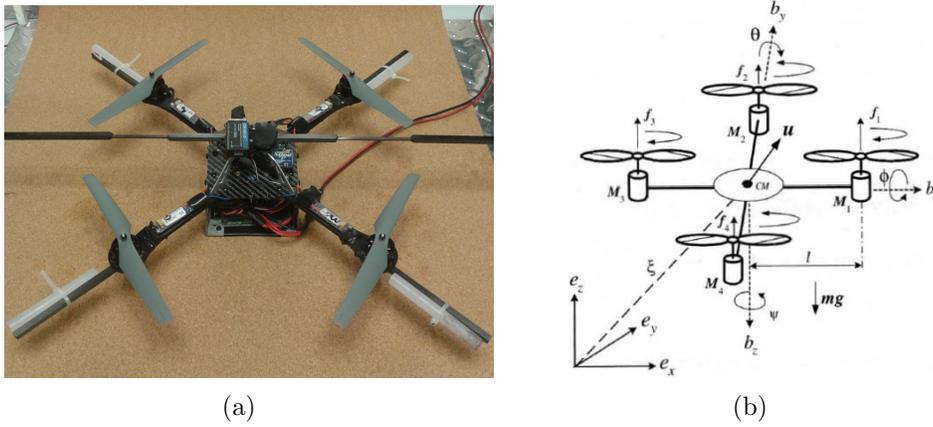


Figura 2.1: (a) Fotografía del cuadrirrotor en el laboratorio UMI LAFMIA, (b) diagrama esquemático.

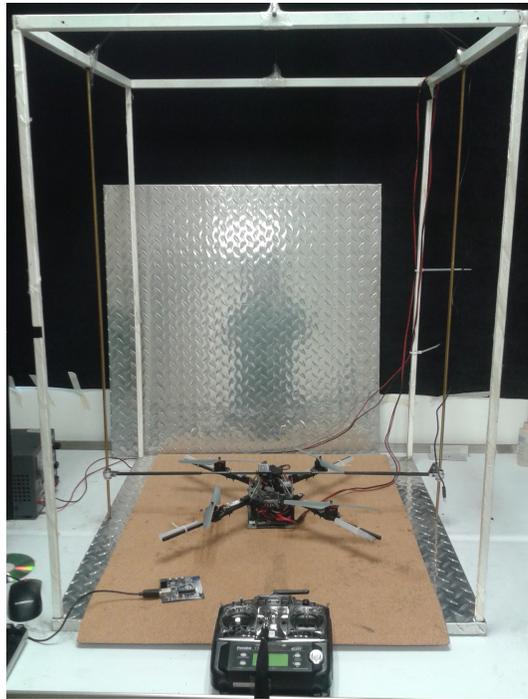


Figura 2.2: Fotografía de la plataforma.

El sistema está constituido por la estructura mecánica X-CSM, los cuatro brazos están hechos de fibra de carbono y madera de balsa. En cada brazo se encuentra montado uno de los cuatro motores *brushless* X-BL-52s de HACKER Motors Germany.

2.1. Descripción

Para cada motor se utiliza un controlador de motor brushless X-BLDC. Los controladores están diseñados para los motores X-BL-52s y así se asegura la mayor eficiencia posible. El dispositivo tiene cuatro hélices, dos hélices rotan en sentido horario y dos hélices rotan en sentido antihorario; esta doble rotación se realiza para evitar efectos indeseados de par.

En la figura 2.3 se muestra el sistema de comunicación del cuadrirrotor. Está constituido por los siguientes módulos:

- 1) 1 central inercial MicroStrain/3DM-GX3-25.
- 2) 1 sensor ultrasónico SRF08 .
- 3) 2 XBee Pro s1.
- 4) 1 tarjeta de interfaz XBee (XBIB-U-DEV rev 3).
- 5) 1 RabbitCore-RCM4300.
- 6) 1 receptor de radiocontrol.
- 7) 1 radiocontrol Futaba T7C
- 8) 1 fuente de alimentación.

La central inercial MicroStrain/3DM-GX3-25, combina un acelerómetro triaxial, un giroscopio triaxial, un magnetómetro triaxial, sensores de temperatura y un procesador a bordo ejecuta un algoritmo de fusión de sensores para proporcionar orientación estática y dinámica así como las mediciones inerciales.

El sensor ultrasónico SRF08 ubicado en la parte de inferior proporciona la señal de altura en centímetros. El rango de medición va de 3 centímetros a 6 metros. El voltaje de alimentación para este dispositivo es de 5V.

Se tienen dos módulos de radiofrecuencia transmisor/receptor XBee con antena de alambre a 2.4GHz. Uno de los módulos XBee está instalado en el PVTOL, el otro módulo XBee se encuentra acoplado a una tarjeta de interfaz XBee y esta a su vez está conectada vía USB a una computadora. El voltaje de alimentación es de 3.3 V, la potencia de salida es de 60 mW y opera a una frecuencia de 2.4GHz.

La tarjeta de interfaz XBee se encarga de realizar la conversión de datos de la computadora para ser enviados por radiofrecuencia mediante el XBee.

Capítulo 2. Despegue y aterrizaje vertical planar (PVTOL)

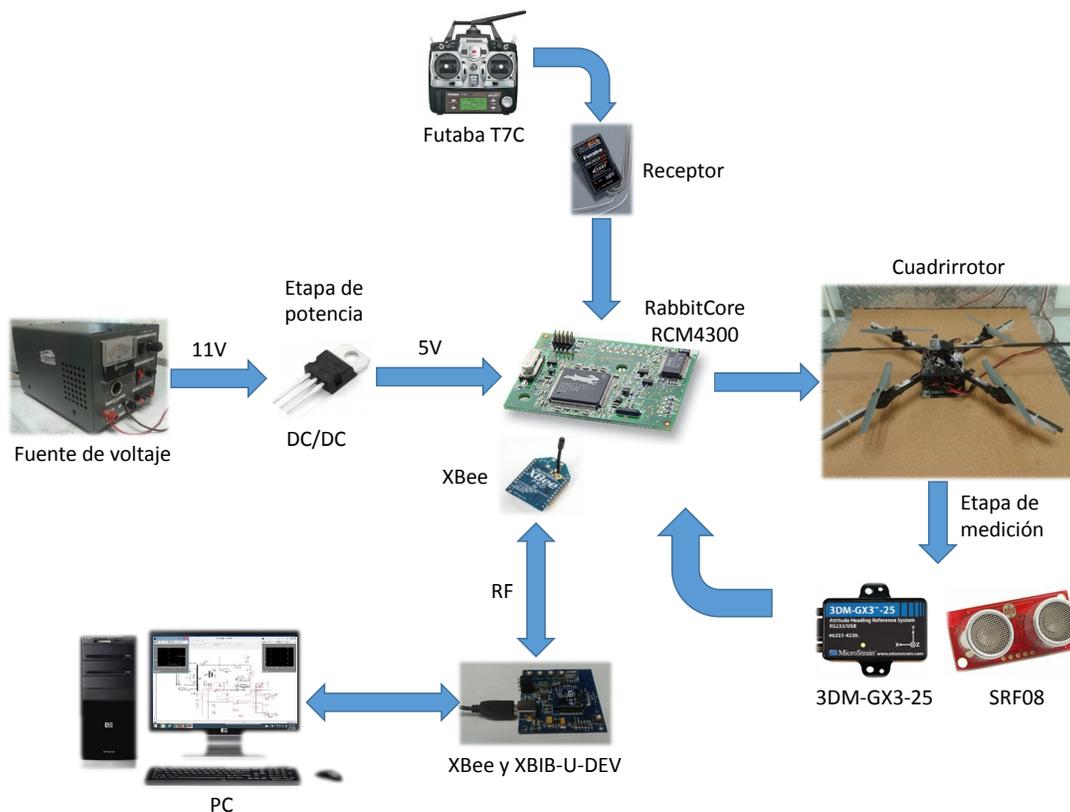


Figura 2.3: Sistema de comunicación del cuadricóptero.

La etapa de control del PVTOL está constituida por el módulo principal de microprocesamiento de las señales de control: RabbitCore-RCM4300 (Microprocesador). Se alimenta con 12 V, se programa vía USB y el código se crea en Dynamic C.

El radiocontrol Futaba de 7 canales a 2.4GHz envía una señal al receptor instalado en el PVTOL para actúe la señal de control recibida por el XBee. Este módulo es utilizado como un paro de emergencia.

La fuente de voltaje alimenta los motores brushless y las etapas de potencia para que proporcionen el voltaje adecuado para los dispositivos electrónicos.

La señal de control que se envía al PVTOL, mediante el sistema de comunicación Xbee (ver figura 2.3), es un número decimal, n_u , el cual determina la frecuencia de rotación de las hélices, ω_h . En la figura 2.4 se muestra la relación n_u vs ω_h .

2.2. Modelo teórico

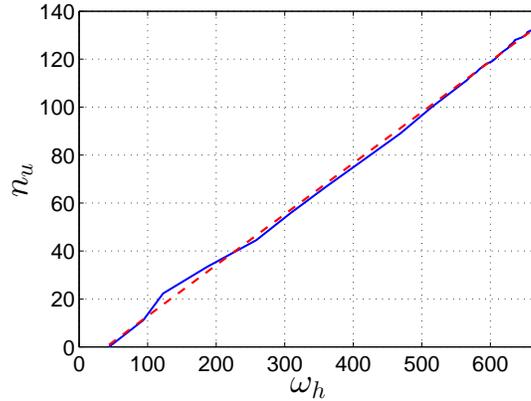


Figura 2.4: Gráfica de n_u como función de ω_h [rad/s]. Linealización: $n_u = 0.2126\omega_h - 8.4398$.

En la literatura [3] se muestra que la fuerza de propulsión es proporcional al cuadrado de la frecuencia de rotación de las hélices, es decir:

$$f_i = \mu\omega_{h_i}^2, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2.1)$$

2.2 Modelo teórico

En la figura 2.5a se muestra el diagrama esquemático del PVTOL, donde x , z y θ son los desplazamientos horizontal, vertical y angular, respectivamente; u_1 y u_2 son los actuadores. La masa total m y el momento de inercia J son (ver figura 2.5b):

$$\begin{aligned} m &= m_b + 2m_{th} = 2m_{th} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_b}{m_{th}} \right) \\ J &= \frac{1}{12}m_b(4L^2 + d^2) + 2m_{th} \left(\frac{1}{12}(3r^2 + h^2) + (L + r)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde: m_b y m_{th} son la masa de la viga y los propulsores, L y d son la longitud y la altura de la viga, h y r son la altura y el radio de los propulsores.

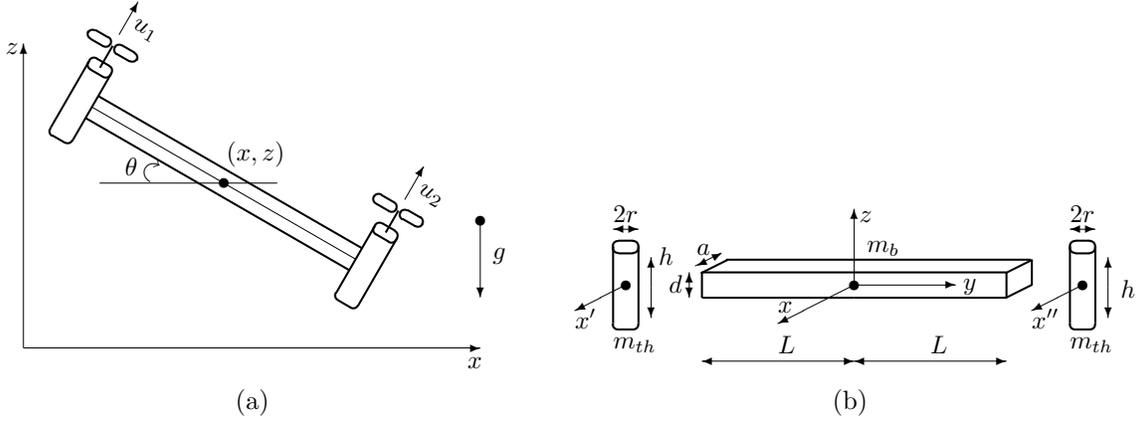


Figura 2.5: (a) Diagrama esquemático del PVTOL, (b) esquema de la viga y los propulsores.

Teóricamente las ecuaciones que describen el comportamiento del PVTOL son [4]:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 z}{dt^2} &= (u_1 + u_2) \cos \theta - mg \\
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= (u_1 + u_2) \sin \theta \\
 J \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= L(u_1 - u_2)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.3 Modelo real: Caso de desplazamiento vertical

De las ecuaciones dadas en (2.3) se tiene que para el desplazamiento vertical el ángulo θ es cero y $\cos \theta = 1$, por lo tanto el PVTOL teóricamente se comporta como un doble integrador puro:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = (u_1 + u_2) - mg \tag{2.4}$$

Experimentalmente se encontró que el PVTOL es caracterizado mediante el siguiente modelo general de segundo orden:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + f \frac{dz}{dt} + kz = u - mg \tag{2.5}$$

donde z [m] es el desplazamiento vertical, g es la aceleración de la gravedad, 9.81 m/s^2 , u [N] la acción de control, m [kg] es la masa total del PVTOL, f el coeficiente de fricción [kg/s] y k la rigidez elástica [kg/s²].

2.3. Modelo real: Caso de desplazamiento vertical

A continuación se analizan prácticamente los tres siguientes aspectos:

- 1) Factor de escala de la fuerza propulsora.
- 2) Rigidez elástica.
- 3) Fuerza de propulsión en estado estacionario.
- 4) Coeficiente de fricción.

2.3.1 Determinación del factor de escala de la fuerza propulsora

La expresión (2.5) representa un sistema lineal estable de segundo orden. Suponiendo una entrada tipo escalón, en estado estacionario se tiene:

$$kz = u - mg \quad (2.6)$$

Despejando z se obtiene:

$$z = \frac{1}{k}u - \frac{m}{k}g \quad (2.7)$$

A continuación se procede a encontrar el factor de escala entre la acción de control u [N] y el número decimal n_u enviado al sistema de comunicación Xbee. Para esto:

- 1) Se aplica una entrada tipo rampa escalonada.
- 2) Se registra la respuesta del sistema.
- 3) Se promedia la respuesta en un segmento de tiempo predeterminado.
- 4) Se grafica la respuesta promediada *vs* señal de control.

- 1) Entrada tipo rampa escalonada.

Con la finalidad de hallar la relación algebraica entre el desplazamiento vertical y la entrada de control, al PVTOL se le aplica una entrada tipo rampa escalonada n_u desde 114 hasta 126 con incrementos de dos, cada escalón dura 50 segundos. En la figura (2.6) se muestra la señal de entrada n_u .

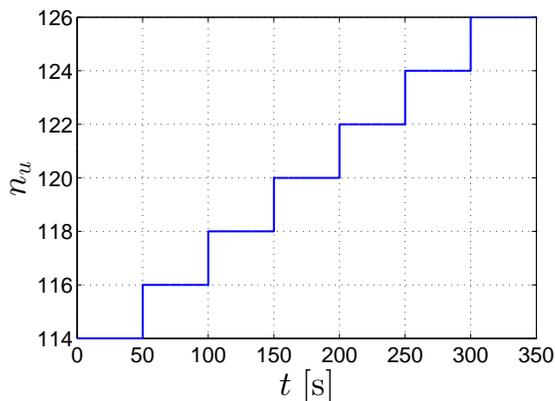


Figura 2.6: Señal de entrada n_u .

2) Respuesta del sistema.

Para la entrada tipo rampa escalonada, n_u , se obtiene la señal de respuesta z del sistema; esta se muestra en la figura 2.7.

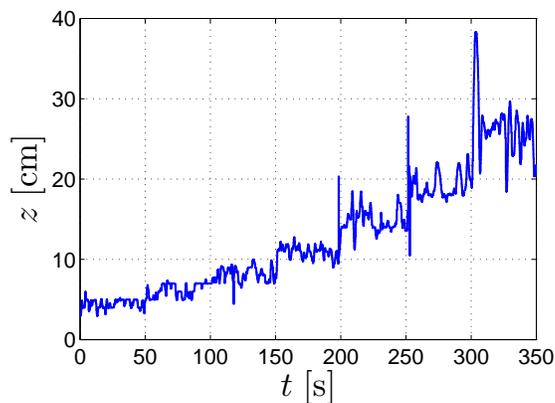


Figura 2.7: Respuesta del sistema.

3) Promedio sobre un segmento de tiempo.

A continuación se procede a calcular la altura promedio de la señal de salida correspondiente a cada escalón de la señal de entrada. Para esto se considera un intervalo de tiempo de diez segundos antes del inicio de siguiente escalón, éste intervalo se describe como $40 + 50l \leq t < 50 + 50l$ para $l = 0, 1, \dots, 6$. Por ejemplo: en la figura 2.8 se muestra la gráfica para z en el intervalo $240 \leq t < 250$.

2.3. Modelo real: Caso de desplazamiento vertical

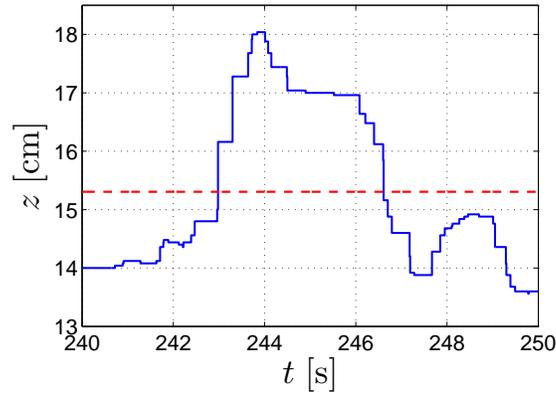


Figura 2.8: Respuesta del sistema comprendida en el intervalo $240 \leq t < 250$ en color azul y la altura promedio \bar{z} en color rojo.

4) Relación en estado estacionario entrada-salida.

Los datos de la respuesta del sistema z comprendidos en los intervalos antes mencionados se promedian para obtener la altura promedio \bar{z} ; con esto se genera la tabla 2.1.

n_u	114	116	118	120	122	124	126
\bar{z} [cm]	4.3804	6.9748	7.8263	10.6795	15.3058	20.2647	24.8415

Tabla 2.1: Entrada n_u y altura promedio \bar{z} en centímetros.

En la figura 2.9 se muestra la gráfica de \bar{z} como función de n_u correspondiente a la tabla 2.1.

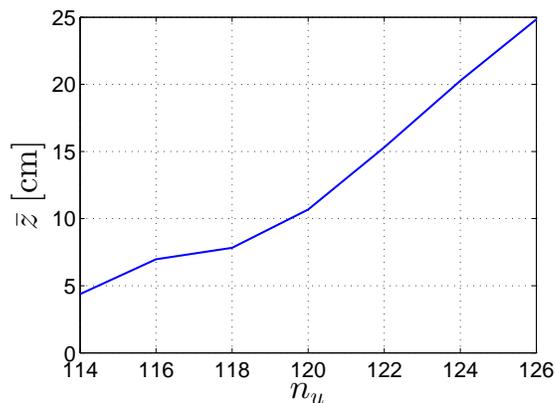


Figura 2.9: \bar{z} v.s n_u .

Fuerza de despegue. El PVTOL vence la fuerza de gravedad a partir de un determinado valor de n_u , al cual se le ha llamado número de despegue. Para hallar este número, al conjunto de pares de datos de la tabla 2.1, se le aplica un ajuste polinomial de grado uno con la función `polyfit` de Matlab. Esta función devuelve un vector con los coeficientes para un polinomio $p(u)$ de grado n , que es un ajuste de mínimos cuadrados para los datos en \bar{z} .

Los datos de la tabla 2.1 se ajustan a la ecuación de la línea recta:

$$\bar{z} = 1.7043n_u - 191.6236 \quad (2.8)$$

En la figura 2.10 se muestra la gráfica de la ecuación 2.8.

2.3. Modelo real: Caso de desplazamiento vertical

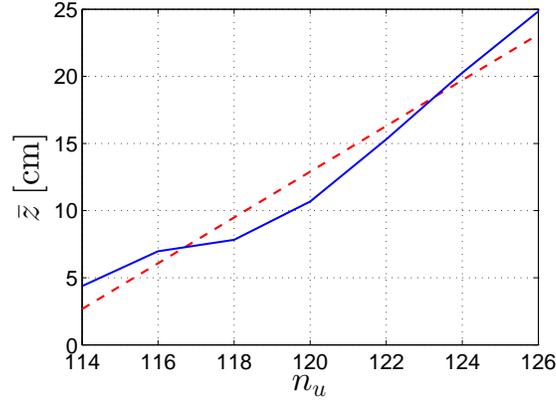


Figura 2.10: Gráfica de la ecuación (2.8).

Para obtener el número de despegue se despeja n_u de la ecuación (2.8) con $z = 0$, esto es:

$$n_{despegue} = 112.4333 \quad (2.9)$$

Ahora bien la fuerza propulsora de despegue corresponde al peso del vehículo, $mg = (0.597 \text{ Kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 5.8566 \text{ [N]}$, por lo que se tiene la siguiente relación entre la acción de control u y el número decimal n_u :

$$mg : 112.4333 \longrightarrow 5.8566 \text{ [N]} \quad (2.10)$$

Por lo que se tiene el siguiente factor de escala:

$$f_e = \frac{112.4333}{5.8566 \text{ N}} = 19.1978 \text{ [N}^{-1}] \quad (2.11)$$

2.3.2 Rigidez elástica

El modelo propuesto para el PVTOL en la sección 2.3 se reescribe como (*c.f.* (2.5)):

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_2 z = \frac{1}{m} u - g \quad (2.12)$$

donde $a_1 = \frac{f}{m}$ y $a_2 = \frac{k}{m}$.

El término del lado derecho de la ecuación (2.12) se lleva a la siguiente forma:

$$r = \frac{1}{m} u - g = (\bar{u} - 1) g = f_b g \quad (2.13)$$

Capítulo 2. Despegue y aterrizaje vertical planar (PVTOL)

donde $\bar{u} = \frac{1}{mg}u$ es la entrada normalizada.

En estado estacionario la ecuación (2.12) toma la siguiente forma (recordar (2.13)):

$$a_2 z = r \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.14) se despeja el coeficiente a_2 :

$$a_2 = \frac{r}{z} \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.13) en (2.15) se obtiene:

$$a_2 = \frac{f_b g}{z} \quad (2.16)$$

Para hallar el coeficiente a_2 se siguen los siguientes pasos:

- 1) Se aplican entradas escalón.
- 2) Se registra la respuesta del sistema.
- 3) Se promedia la respuesta en un segmento de tiempo predeterminado.
- 4) Se grafica la respuesta promediada *v.s.* señal de control.
- 5) El coeficiente a_2 es ajustado por una curva determinada.

- 1) Entradas escalón.

Al PVTOL se le aplican entradas escalón \bar{u} de¹ 1 a 1.1 con incrementos de 0.02, y de 1.11 a 1.2 con incrementos de 0.01. Cada escalón inicia con una rampa escalonada proporcional a² \bar{u} . Por ejemplo: en la figura 2.11 se muestra la señal de entrada $\bar{u} = 1.12$.

¹Recordar que \bar{u} corresponde al punto de despegue: $u = mg$.

²Al inicio se le aplica la entrada rampa escalonada, con el objeto de evitar respuestas abruptas del PVTOL; así se pone suavemente al sistema a punto de despegar

2.3. Modelo real: Caso de desplazamiento vertical

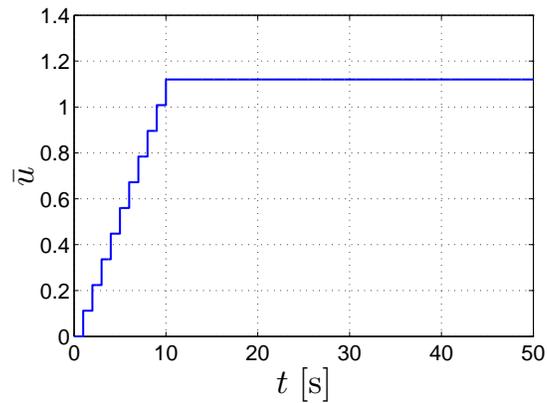


Figura 2.11: Señal de entrada.

2) Respuesta del sistema.

Para cada entrada escalón se obtiene una señal de respuesta z . Por ejemplo: en la figura 2.12 se muestra la respuesta z del sistema para $\bar{u} = 1.12$.

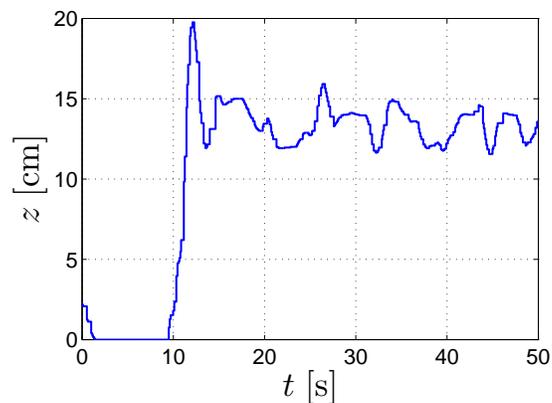


Figura 2.12: Respuesta del sistema para $\bar{u} = 1.12$.

3) Promedio sobre un intervalo de tiempo.

Para calcular la altura promedio de la señal de respuesta, se considera el intervalo de tiempo de $[25, 50]$. Los datos de la respuesta del sistema comprendidos en el intervalo antes mencionado se promedian para obtener la altura promedio \bar{z} . Por ejemplo: en la figura 2.13 se muestra la respuesta del sistema en el intervalo de tiempo $[25, 50]$ en azul y la altura promedio $\bar{z} = 13.4155$ cm en rojo, para $\bar{u} = 1.12$.

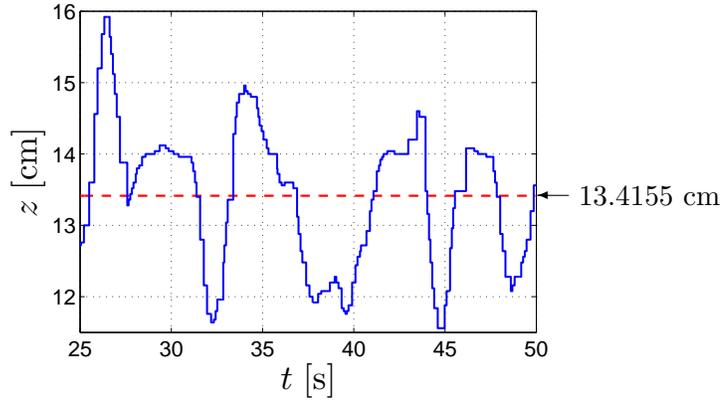


Figura 2.13: Respuesta del sistema y altura promedio en el intervalo de tiempo $[25, 50]$, para $\bar{u} = 1.12$. La altura promedio de esta respuesta es: 13.4155 cm.

4) Relación en estado estacionario entrada-salida.

Para cada escalón aplicado, se promedian los datos en el intervalo de tiempo $[25, 50]$. En la figura 2.14 se muestra la gráfica de \bar{z} v.s \bar{u} .

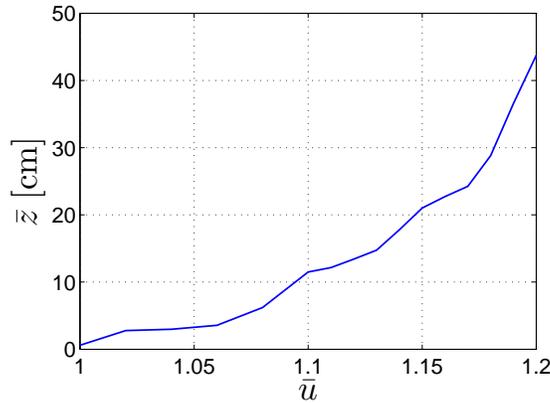


Figura 2.14: Gráfica de \bar{z} como función de \bar{u} .

5) Ajuste de curva.

Nótese en la figura 2.14 el comportamiento cuadrático de la curva, por lo que (ver (2.16) y (2.13)),

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{f_b g} \bar{z} = \frac{\bar{z}}{(\bar{u} - 1)g} \quad (2.17)$$

se aproxima a una línea recta. En la figura 2.15 se muestra la gráfica de obtenida.

2.3. Modelo real: Caso de desplazamiento vertical

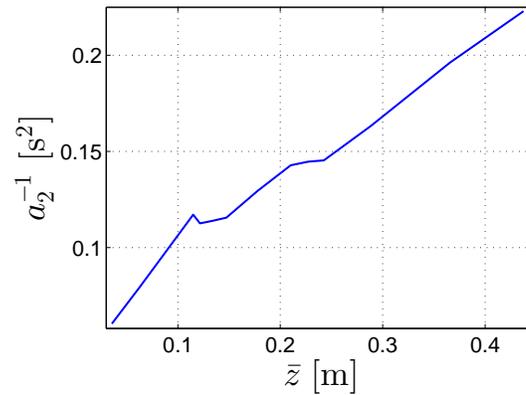


Figura 2.15: Gráfica de $\frac{1}{a_2}$.

A la gráfica de $\frac{1}{a_2}$ se le aplica un ajuste polinomial de orden uno. Utilizando la función Matlab `polyfit` se obtiene el siguiente ajuste:

$$\frac{1}{a_{2_{ajustada}}} = 0.3724\bar{z} + 0.0607 \quad (2.18)$$

En la figura 2.16 se grafican la curva ajustada (2.18) y la gráfica de (2.17).

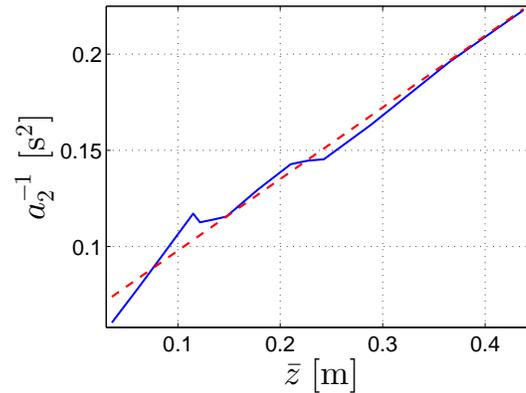


Figura 2.16: Gráfica de $\frac{1}{a_2}$ antes del ajuste polinomial en color azul y con ajuste polinomial en color rojo.

Por lo que el coeficiente a_2 es ajustado por:

$$a_{2_{ajustada}} = \frac{1}{0.3724\bar{z} + 0.0607} \quad (2.19)$$

En la figura 2.17 se muestran las gráficas de a_2 y $a_{2_{ajustada}}$.

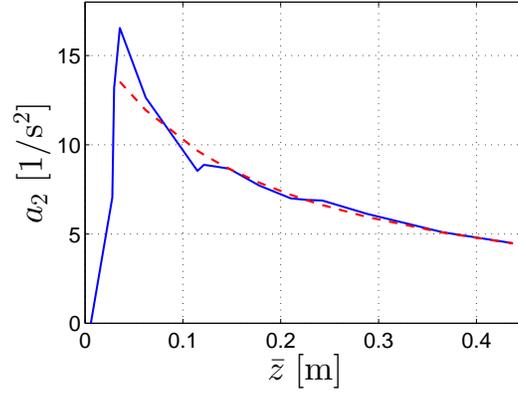


Figura 2.17: Gráfica de a_2 en azul y $a_{2_{ajustada}}$ en rojo (recordar (2.17) y (2.19)).

2.3.3 Fuerza de propulsión en estado estacionario

De (2.13) se obtiene:

$$\bar{u} = \frac{r}{g} + 1 \quad (2.20)$$

El inverso de (2.15) y la expresión (2.18) se reescriben como:

$$\frac{1}{a_2} = \frac{\bar{z}}{r} \quad (2.21)$$

y

$$\frac{1}{a_2} = a\bar{z} + b \quad (2.22)$$

donde \bar{z} es el promedio del desplazamiento vertical, $a = 0.3724$ y $b = 0.0607$.

Igualando (2.21) con (2.22), y despejando r , se obtiene:

$$r = \frac{\bar{z}}{a\bar{z} + b} \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.23) en (2.20), se obtiene:

$$\bar{u} = \frac{\bar{z}/g}{a\bar{z} + b} + 1 \quad (2.24)$$

2.3. Modelo real: Caso de desplazamiento vertical

La hipérbola (2.24) describe el comportamiento de la fuerza propulsora normalizada, \bar{u} , en función del desplazamiento vertical en estado estacionario, \bar{z} . En la figura 2.18 se muestra la grafica de (2.24), en donde:

$$\begin{aligned}\bar{u}_\infty &= \lim_{z \rightarrow \infty} \bar{u}(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}/g}{a\bar{z} + b} + 1 = \frac{1}{ag} + 1 \\ \frac{d}{dt}\bar{u}(0) &= \frac{1}{bg}\end{aligned}\tag{2.25}$$

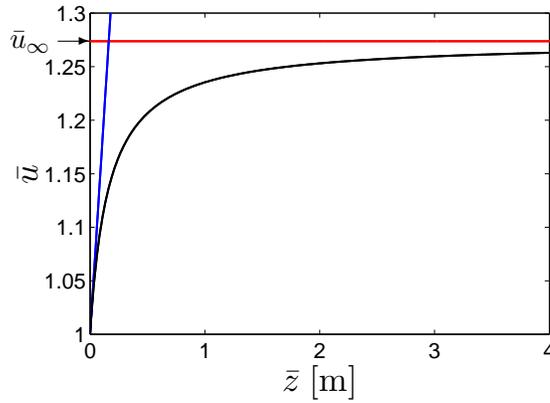


Figura 2.18: Gráfica de (2.24) en color negro, el límite \bar{u}_∞ en color rojo y la pendiente en el origen $\frac{d}{dt}\bar{u}(0)$, en azul.

2.3.4 Coeficiente de fricción

De las expresiones (2.12) y (2.13) se obtiene:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_2 z = r\tag{2.26}$$

La expresión para un sistema lineal de segundo orden es:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dz}{dt} + \omega_n^2 z = u\tag{2.27}$$

Igualando los términos de (2.26) y (2.27) se tiene que $a_2 = \omega_n^2$ y $a_1 = 2\zeta\omega_n$. Por lo tanto el coeficiente a_1 es:

$$a_1 = 2\zeta\sqrt{a_2}\tag{2.28}$$

Para hallar el coeficiente a_1 se siguen los siguientes pasos:

Capítulo 2. Despegue y aterrizaje vertical planar (PVTOL)

- 1) Se normalizan los datos obtenidos en la subsección 2.3.2.
 - 2) Se calcula la sobreelongación y el factor de amortiguamiento relativo.
 - 3) Se grafica el coeficiente a_1 y se ajusta por una curva.
- 1) Normalización de la respuesta del sistema.

Las respuestas z del sistema empleadas en este procedimiento son aquellas cuya entrada \bar{u} va de 1.1 a 1.2. Para normalizar la respuesta z , esta se multiplica por el inverso de la altura promedio, obtenida en la subsección 2.3.2 en el intervalo de tiempo [25, 50]. Por ejemplo: considérese la respuesta z para la entrada $\bar{u} = 1.12$ (ver figura 2.12) donde la altura promedio \bar{z} es igual a 13.4155 cm (ver figura 2.13). Multiplicando la respuesta del sistema por $\frac{1}{13.4155 \text{ cm}}$, se obtiene la respuesta normalizada del sistema, ver figura 2.19.

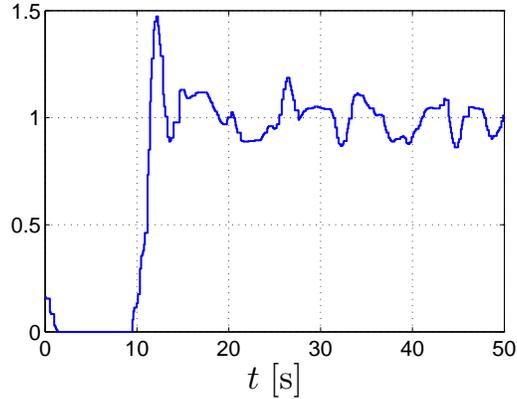


Figura 2.19: Gráfica normalizada de la respuesta del sistema para la entrada $\bar{u} = 1.12$ (*c.f.* figura 2.12).

- 2) Se calcula la sobreelongación y el factor de amortiguamiento relativo.
Después de normalizar las respuestas de salida z del sistema, se calcula la sobreelongación M_p como el máximo pico de la curva de respuesta medido a partir del escalón unitario. Y para calcular ζ se emplea la siguiente expresión[5]:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \quad (2.29)$$

Por ejemplo: de la gráfica mostrada en la figura 2.19, $M_p = 0.4729$. Sustituyendo este valor en (2.29) y despejando ζ se obtiene 0.2319.

2.3. Modelo real: Caso de desplazamiento vertical

3) Se grafica el coeficiente a_1 y se ajusta por una curva.

Una vez calculados M_p y ζ , se calcula a_1 empleando la ecuación (2.28). En la figura 2.20 se muestra la gráfica de $\frac{1}{a_1}$ como función de \bar{z} . Utilizando la función Matlab `polyfit` se obtiene el siguiente ajuste:

$$\frac{1}{a_{1_{ajustada}}} = 1.3816\bar{z} + 0.4963 \quad (2.30)$$

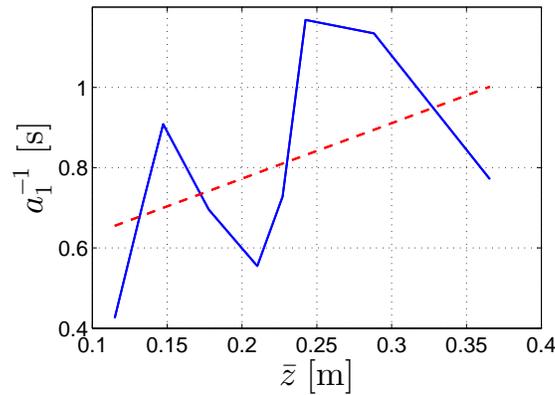


Figura 2.20: Gráfica de $\frac{1}{a_1}$ en función \bar{z} en color azul y el ajuste en rojo.

Por lo que el coeficiente a_1 es ajustado por:

$$a_{1_{ajustada}} = \frac{1}{1.3816\bar{z} + 0.4963} \quad (2.31)$$

En la figura 2.21 se muestra la gráfica de a_1 en función de \bar{z} .

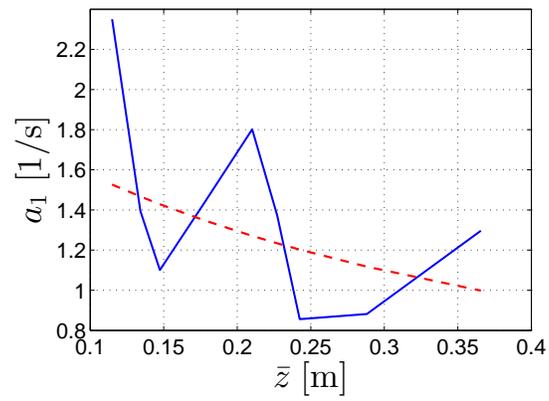


Figura 2.21: Gráfica de a_1 en función \bar{z} en color azul y el ajuste en rojo.

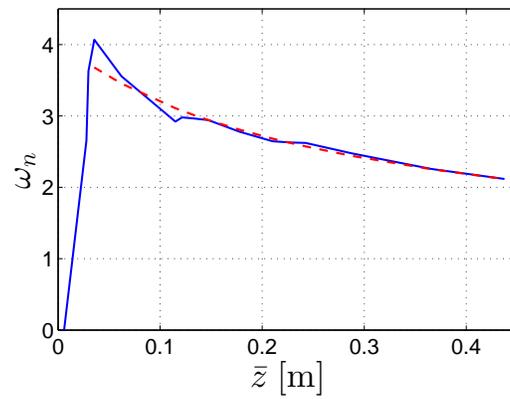


Figura 2.22: Gráfica de ω_n en función de \bar{z} en azul y el ajuste en rojo.

2.4. Conclusiones

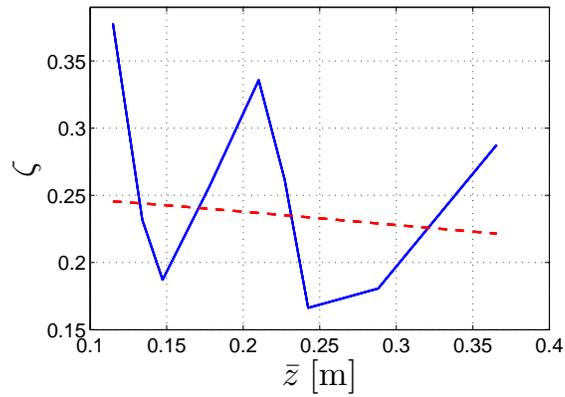


Figura 2.23: Gráfica de ζ en función \bar{z} en color azul y el ajuste en rojo.

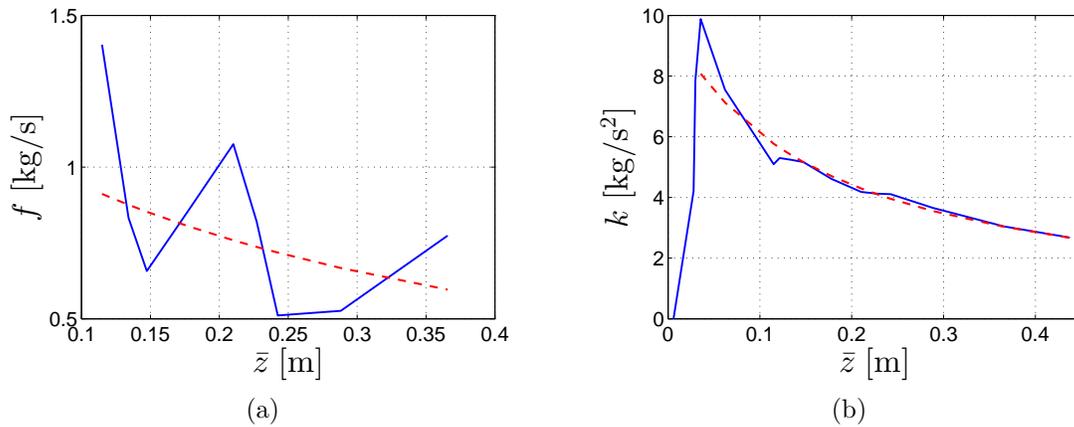


Figura 2.24: (a) Gráfica de f en función \bar{z} , (b) gráfica de k en función \bar{z} .

2.4 Conclusiones

En este capítulo se obtuvo un modelo matemático para un prototipo de laboratorio PVTOL. De este capítulo se concluye que el PVTOL tiene componentes de fricción y de rigidez elástica, los cuales no pueden ser despreciados.

Capítulo 3

Control lineal clásico: realimentación de estado

En este capítulo se propone un control lineal de altitud para el PVTOL. Como primera instancia se recurre al esquema clásico de control lineal: realimentación de estado con observación de estado. Para esto se procede de la manera siguiente:

- 1) En la sección 3.1 se da una descripción teórica.
- 2) En la sección 3.2 se discretiza al esquema de control.
- 3) En la sección 3.3 se muestran aspectos prácticos, así como también los resultados de laboratorio.
- 4) En la sección 3.4 se concluye.

3.1 Descripción teórica

3.1.1 Realimentación de estado

Si se elige a la entrada u como:

$$u = m(\bar{u} + g) \tag{3.1}$$

Entonces sustituyendo (3.1) en (2.12) se obtiene:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_2 z = \bar{u} \tag{3.2}$$

Para desarrollar una ecuación en espacio de estado, se selecciona la posición y la velocidad como las variables de estado, *i.e.*:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= z \\ \zeta_2 &= \dot{z}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Entonces de esta selección, se obtiene la ecuación de estado y la ecuación de salida como:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A\zeta + B\bar{u} \\ z &= C\zeta\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.\tag{3.5}$$

Asumiendo que todas las variables de estado son medibles y están disponibles para la realimentación de estado, se selecciona una ley de control para la entrada \bar{u} de la forma:

$$\bar{u} = r - F_1\zeta\tag{3.6}$$

donde F_1 es la matriz de ganancias de realimentación de estado.

Sustituyendo la ecuación (3.6) en la ecuación (3.4) se obtiene:

$$\dot{\zeta} = (A - BF_1)\zeta + Br\tag{3.7}$$

Antes de diseñar el controlador, primero se verifica que el sistema sea controlable. La matriz de controlabilidad del sistema toma la forma mostrada a continuación:

$$C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}\tag{3.8}$$

La matriz de controlabilidad es de rango dos, por lo tanto el sistema es controlable.

La realimentación de estado se diseña para tener una respuesta suave del sistema. Para esto se utilizará el regulador lineal cuadrático (LQR de sus siglas en inglés). El vector de ganancias de realimentación óptima F_1 :

$$\bar{u} = r - F_1\zeta\tag{3.9}$$

minimiza al índice de desempeño cuadrático:

$$J = \int_0^\infty (\zeta^T Q \zeta + \bar{u}^T \rho \bar{u}) dt\tag{3.10}$$

3.1. Descripción teórica

donde $Q = Q^T \geq 0$ y $\rho > 0$.

La matriz de ganancias de realimentación óptima F_1 , se obtiene resolviendo la siguiente ecuación algebraica de Riccati, para una matriz $P > 0$:

$$PA + A^T P - PB\rho^{-1}B^T P = 0 \quad (3.11)$$

Sustituyendo la matriz P en la siguiente ecuación, se obtiene el vector de ganancias de realimentación óptimo F_1 como (ver por ejemplo [6]):

$$F_1 = \rho^{-1}B^T P \quad (3.12)$$

Por lo tanto, la ley de control óptima se obtiene mediante la ecuación (3.9) donde F_1 se expresa en (3.12).

3.1.1.1 Diseño numérico

Para resolver la ecuación algebraica de Riccati se utiliza el comando `care` de Matlab. Este comando regresa la solución P de la ecuación algebraica de Riccati, los valores propios en lazo cerrado y la ganancia de realimentación óptima F_1 .

Como se vio en la sección 2.3.2 y 2.3.4, los coeficiente a_1 y a_2 varían con el desplazamiento vertical. Para resolver la ecuación de Riccati, se utilizan los valores superiores de a_1 y a_2 ; de las figuras 2.17 y 2.21, se observa que estos corresponden aproximadamente a: $a_2 = 11.5$ y $a_1 = 1.4$. Los valores seleccionados para Q y ρ son:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho = 0.1 \quad (3.13)$$

Entonces se tiene:

$$P = \begin{bmatrix} 2.6594 & 0.0427 \\ 0.0427 & 0.2180 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0.4269 & 2.1796 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\sigma(A - BF_1) = \{-1.7898 \pm 2.9535i\}$$

3.1.2 Estimación de la velocidad

Dado que en nuestro prototipo solo se dispone de la medición de la posición vertical, se tiene que estimar la velocidad vertical. Esto se realiza de tres maneras diferentes, a saber:

- 1) Estimación algorítmica: Método de Euler.
- 2) Observador de estado clásico.
- 3) Observador robusto de alta ganancia singularmente perturbado.

3.1.2.1 Estimación algorítmica: Método de Euler

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z), \quad z(t_0) = z_0 \quad (3.15)$$

El método de Euler con tamaño de paso h consiste en aplicar la fórmula iterativa

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(t_n, z_n) \quad (n \geq 0) \quad (3.16)$$

para calcular aproximaciones sucesivas z_1, z_2, z_3, \dots de los valores (reales) $z(t_1), z(t_2), z(t_3), \dots$ de la solución (exacta) $z = z(t)$ en los puntos t_1, t_2, t_3, \dots respectivamente [7].

3.1.2.1.1 Diseño numérico De la expresión (3.16) se conocen z_n, z_{n+1} y h , estos corresponden a las mediciones de la posición proporcionadas por el sensor ultrasónico.

De (3.16) se obtiene:

$$\frac{dz(nh)}{dt} = \frac{z_{n+1} - z_n}{h} \quad (n \geq 0) \quad (3.17)$$

Dado que el periodo de muestreo es de $0.01[s]$, entonces se selecciona $h = 0.01$.

Posteriormente a la derivada de la señal se le aplica un filtro Butterworth pasa bajas IIR¹. El orden del filtro se selecciona igual a: $N = 2$ y la frecuencia de corte se selecciona igual a $1/20$ de la frecuencia de muestreo, esto es: $f_c = (1/20)(1/0.01)[Hz] = 5[Hz]$. Utilizando la herramienta `fdatool` de Matlab para el diseño y análisis de filtros, se obtiene el siguiente filtro digital:

$$z_f(n) = 0.02(z_d(n) + 2z_d(n-1) + z_d(n-2)) - 1.561z_f(n-1) - 0.6413z_f(n-2) \quad (3.18)$$

¹De sus siglas en inglés: Infinite Impulse Response.

3.1. Descripción teórica

donde $z_f(n)$ es la señal filtrada y:

$$\begin{aligned}z_d(0) &= \frac{z_1}{h} \\z_d(1) &= \frac{z_2 - z_1}{h} \\&\vdots \\z_d(n) &= \frac{z_{n+1} - z_n}{h}\end{aligned}\tag{3.19}$$

3.1.2.2 Observador de estado clásico

El observador de estado clásico está dado por (ver por ejemplo [6]):

$$\dot{\hat{\zeta}}_{o,cl} = (A - K_1 C)\hat{\zeta}_{o,cl} + B\bar{u} + K_1 z\tag{3.20}$$

donde K_1 es la matriz de ganancia del observador.

3.1.2.2.1 Diseño numérico Para calcular la matriz de ganancia K_1 , primero se determinará el polinomio Butterworth con la dinámica deseada a partir de la siguiente expresión [8]:

$$B_n(s)B_n(-s) = 1 + (-1)^n s^{2n} = 0\tag{3.21}$$

donde B_n ha sido introducida para designar el polinomio Butterworth y cuyas raíces son de interés para nuestros propósitos.

Para $n = 2$ la ecuación (3.21) es:

$$1 + s^4 = 0 \quad \text{o} \quad s^4 = -1\tag{3.22}$$

Si escribimos $-1 + j0$ en forma polar:

$$-1 = 1\angle(180^\circ + k360^\circ)\tag{3.23}$$

para valores enteros de k y $k = 0$, entonces vemos que los ángulos de esta ecuación son:

$$\theta_k = \frac{180^\circ + k360^\circ}{4} = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ\tag{3.24}$$

Seleccionamos las raíces de la mitad izquierda del plano complejo y con radio de magnitud $1/\varrho$ para asociar con B_2 , así el polinomio Butterworth está dado por:

$$B_2(s) = \left(s + \frac{1}{\varrho\sqrt{2}} + j\frac{1}{\varrho\sqrt{2}}\right)\left(s + \frac{1}{\varrho\sqrt{2}} - j\frac{1}{\varrho\sqrt{2}}\right) = s^2 + \frac{\sqrt{2}}{\varrho}s + \frac{1}{\varrho^2}\tag{3.25}$$

Se desea que las raíces del polinomio Butterworth sean cinco veces más rápidas que las del LQR, por lo tanto:

$$\frac{1}{\varrho} = 5 * \varpi \quad \text{o} \quad \varrho = \frac{1}{5 * \varpi} \quad (3.26)$$

donde ϖ es el máximo del módulo de los valores propios en lazo cerrado de la realimentación de estado.

En la realimentación de estado se obtuvo un par de valores propios complejos conjugados (3.14), cuyo módulo es $\varpi = \sqrt{(-1.7898)^2 + (2.9535)^2} = 3.4535$. Sustituyendo este valor en la ecuación (3.26) se obtiene $\varrho = 0.0579$, y por lo tanto el polinomio Butterworth (3.25) es:

$$B_2(s) = s^2 + 24.4201s + 298.1715 \quad (3.27)$$

con raíces complejas en $\sigma = -12.2101 \pm 12.2101i$. Utilizando estas raíces como los polos en lazo cerrado, las matrices A , C y el comando `place` de Matlab, esto es: `place(A', C', sigma)`, se obtiene la siguiente matriz de ganancia del observador (3.20):

$$K_1 = \begin{bmatrix} 23.0201 \\ 254.4433 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.1.2.3 Observador robusto de alta ganancia singularmente perturbado

Un problema técnico del observador de estado clásico, es que es necesario conocer los valores (constantes) de las matrices de la representación de estado. Como se vio en las secciones 2.3.2 y 2.3.4 los parámetros a_2 y a_1 son variables (ver figuras 2.17 y 2.21), por lo que el desempeño del observador clásico no será adecuado para nuestro caso. Para resolver este inconveniente se utiliza un observador de alta ganancia, que prescinde del conocimiento de los parámetros de las matrices.

3.1. Descripción teórica

Considérese el siguiente observador ideal [9]:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{N \quad n \times n} \frac{dw_\infty}{dt} = w_\infty(t) - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Gamma \quad n \times 1} z \quad (3.29)$$

$$\zeta_{o,\infty} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times n} w_\infty$$

donde z , $\zeta_{o,\infty}$ y w_∞ son la entrada, la salida y la variable descriptora, respectivamente y $\bar{n} = n - 1$.

De aquí se obtiene:

$$\zeta_{o,\infty} = \frac{d^{\bar{n}} z}{dt^{\bar{n}}} \quad (3.30)$$

Dado que, hasta ahora, no es factible sintetizar a este observador ideal, entonces se utiliza la siguiente aproximación propuesta en [10, 11]:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\zeta_\ell}{dt} \\ \varepsilon_o \frac{d\zeta_\infty}{dt} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} -\beta_o & -\varepsilon_o^{\bar{n}+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \zeta_\ell \\ \zeta_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_o^{\bar{n}} q_{(1,2)} \\ -Q_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} z \quad (3.31)$$

$$\hat{\zeta}_{o,\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \zeta_\infty - \frac{1}{\varepsilon_o} q_{(1,2)} z$$

donde $\zeta_\ell \in \mathbb{R}^1$, $\zeta_\infty \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, y $\hat{\zeta}_{o,\infty} \in \mathbb{R}^1$. β_o y ε_o son dos números reales positivos.

$U_{\bar{n}}$ y $M_{\bar{n}}$ son las siguientes matrices del filtro Butterworth [12]:

$$U_{\bar{n}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$M_{\bar{n}} = \begin{cases} BDM\{M_1, \dots, M_{\bar{n}/2}\} & , \text{ para } \bar{n} \text{ par} \\ BDM\{M_1, \dots, M_{(\bar{n}-1)/2}, 1\} & , \text{ para } \bar{n} \text{ impar} \end{cases},$$

donde $BDM\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ denota una matriz diagonal de bloques cuyos bloques diagonales son $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$. Y cada bloque:

$$M_j = \begin{bmatrix} \sin \theta_j & 0 \\ 0 & \sin \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos^2 \theta_j & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_1 = \pi/(2\bar{n}), \quad (3.33)$$

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \pi/\bar{n}, \quad j \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}.$$

La matriz $Q_0 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times (\bar{n}+1)}$ se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$Q_0 \left(\frac{1}{\varepsilon_o} N \right) + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} Q_0 = -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Con respecto a la existencia de solución de (3.34), obsérvese que los valores propios del filtro Butterworth son todos diferentes y se ubican en un semicírculo de radio $1/\varepsilon_o$, en la mitad izquierda del plano complejo [12], esto es:

$$\pi_B(\lambda) = \det(\lambda I_{\bar{n}} + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\bar{n}/2} ((\lambda + \sin \theta_i)^2 + \cos^2 \theta_i), & \text{ para } \bar{n} \text{ par} \\ (\lambda + 1) \prod_{i=1}^{(\bar{n}-1)/2} ((\lambda + \sin \theta_i)^2 + \cos^2 \theta_i), & \text{ para } \bar{n} \text{ impar} \end{cases} \quad (3.35)$$

Por otro lado los valores propios de la matriz nilpotente, N , son todos nulos, por lo que: $\sigma(N) \cap \sigma(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} = \emptyset$. Por lo tanto (3.34) tiene una única solución (ver sección VIII §3 de [13]). Y el número $q_{(1,2)}$ corresponde a la entrada (1, 2) de la matriz Q_0 .

3.1. Descripción teórica

En [10] se muestra que la aproximación (3.31) es externamente equivalente a la conexión en cascada del observador ideal (3.29), con el siguiente filtro Butterworth:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\zeta_\ell}{dt} \\ \varepsilon_o \frac{d\zeta_\infty}{dt} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} -\beta_o & -\varepsilon_o^{\bar{n}+1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \zeta_\ell \\ \zeta_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} z \quad (3.36)$$

$$\hat{\zeta}_{o,\infty} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \zeta_\infty$$

con condiciones iniciales: $\zeta_\ell(0) \in \mathbb{R}^1$ y $\zeta_\infty(0) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$. También se muestra que existe $\varepsilon_o^* \in (0, 1)$, tal que para cualquier $\varepsilon_o \in (0, \varepsilon_o^*)$, las respectivas funciones de transferencia de (3.29), (3.36) y (3.31) son:²

$$F_{OI}(s) = s^{\bar{n}}, \quad F_{FB}(s) = \frac{(s + \beta_o)}{(s + \beta_o)\pi_B(s)} \quad \text{y} \quad F_{OSP}(s) = \frac{(s + \beta_o)s^{\bar{n}}}{(s + \beta_o)\pi_B(s)} \quad (3.37)$$

De aquí se tiene:

$$\lim_{\varepsilon_o \rightarrow 0} F_{FB}(s) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon_o \rightarrow 0} F_{OSP}(s) = s^{\bar{n}} \quad (3.38)$$

También se prueba que:³

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{o,\infty}(t) &= \frac{d^{\bar{n}}}{dt^{\bar{n}}} z(t) + e^{-(\beta_o + \varepsilon_o^{\bar{n}+1})t} \zeta_\ell(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_o}) \\ &= \zeta_{\bar{n}+1}(t) + e^{-(\beta_o + \varepsilon_o^{\bar{n}+1})t} \zeta_\ell(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_o}) \quad \forall t \geq t^* \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde $t^* = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon_o}{\sin \theta_1 - \sqrt{2\varepsilon_o^{\bar{n}+1}}}\right) \ln(1/\sqrt{\varepsilon_o})$.

²Las siglas *OI*, *FB* y *OSP* significan Observador Ideal, Filtro Butterworth y Observador Singularmente Perturbado, respectivamente.

³Una función vectorial $f(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n$ se dice que es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en un intervalo $[t_1, t_2]$ si existen constantes positivas K y ε^* tal que $\|f(\varepsilon, t)\| \leq K\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*], \forall t \in [t_1, t_2]$, ver [14].

Capítulo 3. Control lineal clásico: realimentación de estado

Esto es, ε_o nos cuantifica la aproximación y β_o nos da la velocidad de convergencia (c.f. figura 3.1).

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{dw_\infty}{dt} = w_\infty - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z}_{\text{Observador-Ideal}} & \quad \begin{aligned} \frac{d\zeta_\ell}{dt} &= -\beta_o \zeta_\ell - [\varepsilon_o^3 \ 0] \zeta_\infty \\ \varepsilon_o \frac{d\zeta_\infty}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \zeta_\ell - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \zeta_\infty + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \zeta_{o,\infty} \end{aligned} \\
 \zeta_{o,\infty} = [0 \ 0 \ 1] w_\infty & \quad \Rightarrow \quad \hat{\zeta}_{o,\infty} = [1 \ 0] \zeta_\infty \\
 \underbrace{F_{OI}(s) = s^2}_{\text{Observador-Ideal}} & \quad \underbrace{F_{FB}(s) = \frac{(s+\beta_o)}{(s+\beta_o) \left[\left(\varepsilon_o s + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_o^3}{s+\beta_o} \right) \right]}}_{\text{Filtro-Butterworth}}; \quad \lim_{\varepsilon_o \rightarrow 0} F_{FB}(s) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\zeta_\ell}{dt} &= -\beta_o \zeta_\ell - [\varepsilon_o^3 \ 0] \zeta_\infty - \varepsilon_o z \\
 \varepsilon_o \frac{d\zeta_\infty}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \zeta_\ell - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \zeta_\infty - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon_o^2} \\ 0 \end{bmatrix} z \\
 \hat{\zeta}_{o,\infty} &= [1 \ 0] \zeta_\infty + \frac{1}{\varepsilon_o^2} z \\
 \underbrace{F_{OSP}(s) = \frac{(s+\beta_o)s^2}{(s+\beta_o) \left[\left(\varepsilon_o s + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_o^3}{s+\beta_o} \right) \right]}}_{\text{Observador-Singularmente-Perturbado}}; \quad \lim_{\varepsilon_o \rightarrow 0} F_{OSP}(s) = s^2
 \end{aligned}$$

Figura 3.1: Ejemplo ilustrativo para el caso $\bar{n} = 2$.

3.1.2.3.1 Diseño numérico Para obtener el observador dado en (3.31), se efectúan los siguientes cálculos:

Para $\bar{n} = n - 1 = 1$, las matrices asociadas al filtro Butterworth son:

$$U_1 = [0] \tag{3.40}$$

$$M_1 = BDM\{1\} \quad \text{para } \bar{n} \text{ impar} \tag{3.41}$$

El determinante es:

$$\pi_B(s) = \det(sI + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})) = s + 1 \tag{3.42}$$

3.1. Descripción teórica

Para hallar la matriz $Q_0 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ del observador (3.31), de la expresión (3.34) para $\bar{n} = 1$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 + 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon_o} \begin{bmatrix} \underline{q}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Igualando los términos del lado izquierdo a los del lado derecho se obtiene:

$$\underline{q}_1 = -\frac{1}{\varepsilon_o} \underline{q}_2 \quad y \quad \underline{q}_2 + 1 = 0 \quad (3.44)$$

Del par de ecuaciones dadas en (3.44) se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{q}_1 &= \frac{1}{\varepsilon_o} \\ \underline{q}_2 &= -1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Las expresiones dadas en (3.45) son las entradas de la matriz:

$$Q_0 = [\underline{q}_1 \quad \underline{q}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_o} & -1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Empleando las matrices calculadas y sustituyendo en (3.31) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\underline{\zeta}_\ell}{dt} \\ \varepsilon_o \frac{d\underline{\zeta}_\infty}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_o & -\varepsilon_o^2 \\ 1 & -(1-0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_\ell \\ \zeta_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(-1)\varepsilon_o}{-\left[\frac{1}{\varepsilon_o} \quad -1\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \end{bmatrix} z \quad (3.47)$$

$$\hat{\zeta}_{o,\infty} = [1] \zeta_\infty - \frac{1}{\varepsilon_o} (-1) z$$

Siendo su representación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}} &= A_\infty \hat{w} + B_\infty z \\ \hat{\zeta}_{o,\infty} &= C_\infty \hat{w} + D_\infty z \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_\infty &= \begin{bmatrix} -\beta_o & -\varepsilon_o^2 \\ \frac{1}{\varepsilon_o} & -\frac{1}{\varepsilon_o} \end{bmatrix}, & B_\infty &= \begin{bmatrix} -\varepsilon_o \\ -\frac{1}{\varepsilon_o^2} \end{bmatrix}, \\ C_\infty &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, & D_\infty &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_o} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} \zeta_\ell(t) \\ \zeta_\infty(t) \end{bmatrix}.$$

3.2 Discretización

Para sintetizar las leyes de control y/o observadores dinámicos, en el programa Simulink que comanda a la tarjeta interfaz XBee (ver figura 2.3), es necesario escribir sus versiones discretizadas. En el caso de los sistemas lineales representados por realizaciones de estado, esta discretización se realiza de una manera exacta, por medio de la solución explícita de la ecuación de estado [15, 16].

Sea la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.50}$$

La solución de la ecuación de estado es:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\tag{3.51}$$

Para $t = kT$ y $t = (k+1)T$, se tienen las siguientes expresiones:

$$x(kT) = e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau\tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}x((k+1)T) &= e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{AT}e^{AkT}x(0) + e^{AT} \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau\end{aligned}\tag{3.53}$$

Considerando (3.52), la expresión (3.53) se reescribe como:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau\tag{3.54}$$

El retenedor de orden cero mantiene constante a las señales en el intervalo entre dos instantes de muestreo consecutivos cualesquiera, es decir:

$$u(\tau) = u(kT), \quad kT \leq \tau < (k+1)T\tag{3.55}$$

Por lo que:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau \right) u(kT)\tag{3.56}$$

3.2. Discretización

Con el cambio de variable en la integral de τ a η tal que $\eta = (k+1)T - \tau$, la ecuación (3.56) se escribe como:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_0^T e^{A\eta} B d\eta \right) u(kT) \quad (3.57)$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{AT} \\ \Gamma_B &= \int_0^T e^{A\eta} d\eta B \end{aligned} \quad (3.58)$$

se obtiene las siguientes ecuaciones en diferencias estándar:

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= \Phi x(kT) + \Gamma_B u(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.2.1 Cálculo de la matriz exponencial y su integral

Para obtener el valor numérico de las expresiones dadas en (3.58), se deben calcular la matriz exponencial e^{At} y su integral de 0 a T . Existen diferentes métodos para calcular la matriz exponencial, el más simple es utilizar la forma canónica de Jordan (ver por ejemplo [13, 17]).

Dada una matriz A , existe una transformación de cambio de base T , tal que:

$$TAT^{-1} = J = D + N \quad (3.60)$$

donde D es una matriz diagonal, que contiene en su diagonal a los valores propios de A , y N es una matriz nilpotente, *i.e.* existe $\gamma \in \mathbb{N}$ tal que $N^\gamma = 0$, de la siguiente forma:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & 0 \\ & D_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & D_r \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} N_1 & & 0 \\ & N_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & N_r \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

donde:

$$D_i = \lambda_i I_{k_i}; \quad N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{k_i \times k_i} \quad (3.62)$$

Capítulo 3. Control lineal clásico: realimentación de estado

para r valores propios λ_i de multiplicidad k_i . Los índices de nilpotencia de cada N_i son γ_i , respectivamente.

Note que:

$$DN = ND \quad (3.63)$$

Por lo que:

$$e^{Jt} = e^{(D+N)t} = e^{Dt}e^{Nt} \quad (3.64)$$

donde:

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_1 t} \\ \hline & & \ddots \\ \hline & & e^{\lambda_r t} \\ & & \ddots \\ & & e^{\lambda_r t} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} e^{Nt} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (Nt)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\gamma-1} \frac{1}{j!} (Nt)^j; \quad \gamma = \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

De lo anterior se tiene:

$$\begin{aligned} e^{At} &= T e^{Jt} T^{-1} \\ &= T \left(e^{Dt} + \sum_{j=0}^{\gamma-1} \frac{1}{j!} (Nt)^j \right) T^{-1} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Para obtener la matriz Φ , se sustituye t por T en la expresión (3.67), esto es:

$$\Phi = e^{A\mathsf{T}} = T \left(e^{D\mathsf{T}} + \sum_{j=0}^{\gamma-1} \frac{1}{j!} (N\mathsf{T})^j \right) T^{-1} \quad (3.68)$$

3.3. Aspectos prácticos

Con respecto al cálculo de la integral, se utiliza el comando `int` de Matlab, es decir:⁴

$$\begin{aligned}\Gamma_B &= \text{int}(\exp At, t, 0, T) * B \\ \exp At &= e^{At}\end{aligned}\tag{3.69}$$

3.3 Aspectos prácticos

3.3.1 Realimentación de estado LQR

Inicialmente se aplicó la ley de control (3.9) con la ganancia de realimentación F_1 dada en (3.14).⁵

Con el valor de F_1 dado en (3.14), el PVTOL presentó oscilaciones que se incrementaban en amplitud. Esto se debe a los valores variables de los parámetros a_1 y a_2 (ver figuras 2.17 y 2.21). Para evitar esto, las ganancias se ajustaron empíricamente hasta obtener un comportamiento estable. El vector de realimentación de estado obtenido fue:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 - F_1 \zeta; \quad F_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\tag{3.70}$$

En la figura (3.2) se muestra el diagrama en Simulink para la realimentación de estado (3.70)

⁴Dado que este comando entrega un valor en modo simbólico, es también necesario aplicar el comando `double`.

⁵Para este caso se utilizó la estimación algorítmica de velocidad de la sección 3.1.2.1.

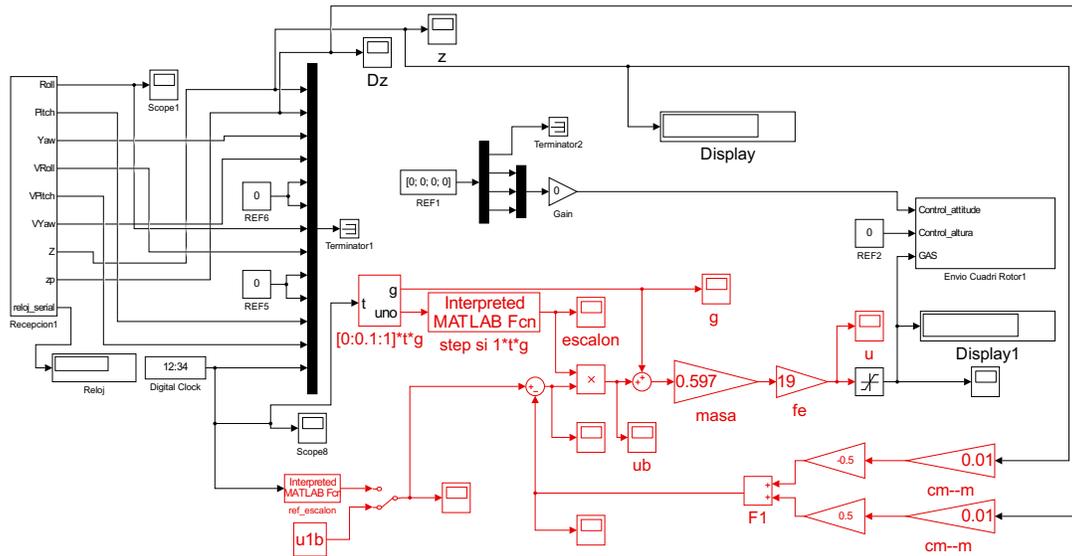


Figura 3.2: Realimentación de estado; f_e es el factor de escala obtenido en la subsección 2.3.1 y cm-m es la conversión a metros. El bloque $[0:0.1:1]*t*g$ entrega una rampa de arranque ascendente, para evitar reacciones bruscas del PVTOL. Se muestra con el período: $T = 0.01$ [s].

En la figura 3.3 se muestran las respuestas obtenidas.

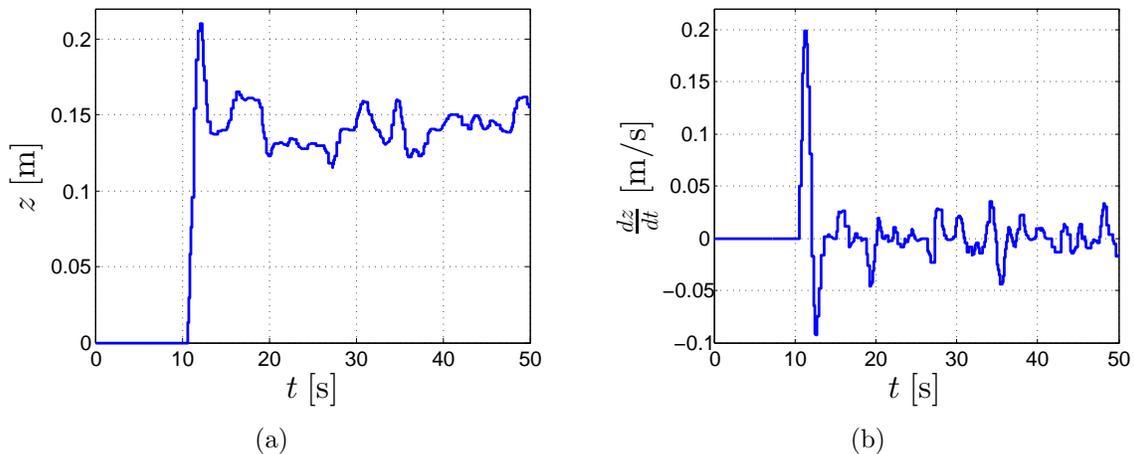


Figura 3.3: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado (3.70) con la referencia: $\bar{u}_1 = 1$; tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Posición z (z), (b) velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz).

3.3. Aspectos prácticos

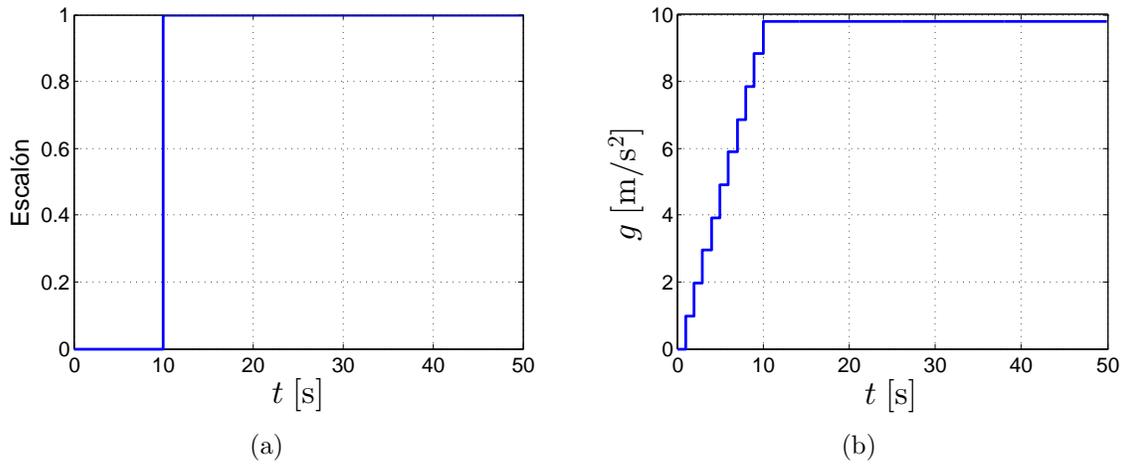


Figura 3.4: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado (3.70). (a) Habilitación de la acción de control (escalón), (b) Rampa de arranque con valor final: g (g).

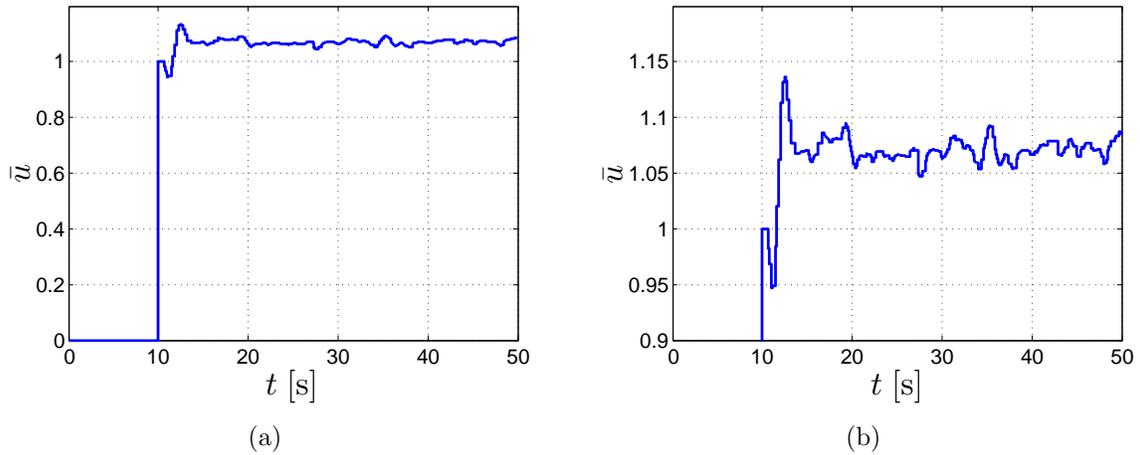


Figura 3.5: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado (3.70). (a) Señal \bar{u} (ub), (b) zoom de la señal \bar{u} (ub).

Una vez estabilizado el PVTOL, al sistema realimentado por (3.70) se le realizó un procedimiento similar al de la sección 2.3.1, para determinar los valores reales de a_2 y

a_1 en este punto de operación. Obteniéndose:

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= A_2\zeta + B_2\bar{u}_1 \\ z &= C_2\zeta\end{aligned}\tag{3.71}$$

donde:

$$\begin{aligned}A_2 = A - BF_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.8172 & -1.1194 \end{bmatrix}, & B_2 = B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2929 \end{bmatrix}, \\ C_2 = C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

A la representación de estado (A_2, B_2, C_2) se le aplicó una segunda realimentación de estado, F_2 , que minimice (3.10) con la asignación (3.13).

Obteniéndose:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1.4298 & 0.2593 \\ 0.2593 & 0.5587 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.7594 & 1.6364 \end{bmatrix},\tag{3.73}$$

$$\sigma(A_2 - B_2F_2) = \{-0.7993 \pm 1.1835i\}.$$

3.3.2 Observador de estado clásico

Con respecto al observador de estado, es necesario conocer cual es nuestra representación de estado real, en este punto de funcionamiento.

Dado que el sistema en lazo cerrado es (*c.f.* (3.71) y (3.72)):

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= (A - BF_1)\zeta + B\bar{u}_1 \\ z &= C\zeta\end{aligned}\tag{3.74}$$

Igualando las representaciones (3.71) y (3.74), se tiene:

$$\begin{aligned}A_2 &= A - BF_1 \\ B_2 &= B \\ C_2 &= C\end{aligned}\tag{3.75}$$

3.3. Aspectos prácticos

De (3.75), se despejan las matrices A , B , C :

$$\begin{aligned} A &= A_2 + B_2 F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \\ B &= B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \\ C &= C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Por lo que las matrices reales, en este punto de operación son (recordar (3.70)):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.9637 & -0.9730 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2929 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Con estos valores reales, se rediseña al observador clásico (3.20). Obteniéndose:

$$\dot{\hat{\zeta}}_{o,cl} = A_{F_1 K_2} \hat{\zeta}_{o,cl} + B \bar{u} + K_2 z \quad (3.78)$$

donde $A_{F_1 K_2} = (A - K_2 C)$ y la matriz de ganancia del observador son:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 9.1257 \\ 40.1486 \end{bmatrix}, \quad A_{F_1 K_2} = \begin{bmatrix} -9.1257 & 1 \\ -42.1122 & -0.9730 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

Para la discretización del observador de estado (3.78), se utiliza el procedimiento descrito en la sección 3.2, obteniéndose la siguiente ecuación en diferencias:

$$\hat{\zeta}_{o,cl}((k+1)T) = \Phi_2 \hat{\zeta}_{o,cl}(kT) + \Gamma_{B_2} \bar{u}(kT) + \Gamma_{K_2} z(kT) \quad (3.80)$$

donde (se muestra con el período: $T = 0.01$ [s]):

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= e^{A_{F_1 K_2} T} = \begin{bmatrix} 0.9108 & 0.0095 \\ -0.4002 & 0.9883 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{B_2} &= \int_0^T e^{A_{F_1 K_2} \eta} d\eta B_2 = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 291.2 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \\ \Gamma_{K_2} &= \int_0^T e^{A_{F_1 K_2} \eta} d\eta K_2 = \begin{bmatrix} 0.0891 \\ 0.3807 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.81)$$

3.3.3 Observador singularmente perturbado

Utilizando el procedimiento de la sección 3.2, se discretiza el observador singularmente perturbado (3.48) y (3.49), de esto se obtienen las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned}\hat{w}((k+1)T) &= \Phi_\infty \hat{w}(kT) + \Gamma_{B_\infty} z(kT) \\ \hat{\zeta}_{o,\infty}(kT) &= C_\infty \hat{w}(kT) + D_\infty z(kT)\end{aligned}\tag{3.82}$$

donde (se muestra con el período: $T = 0.01$ [s]):

$$\begin{aligned}\Phi_\infty &= e^{A_\infty T} \\ \Gamma_{B_\infty} &= \int_0^T e^{A_\infty \eta} d\eta B_\infty\end{aligned}\tag{3.83}$$

Con respecto a β_o , conservadoramente se consideró:

$$\beta_o = \frac{1}{\varepsilon_o}\tag{3.84}$$

3.3.4 Resultados experimentales

3.3.4.1 Realimentación utilizando medición directa del estado

En la figura 3.6 se muestra el diagrama en Simulink para la realimentación de estado (*c.f.* (3.73)):

$$\bar{u}_1 = r - F_2 \zeta, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.7594 & 1.6364 \end{bmatrix}\tag{3.85}$$

y el observador de estado (3.80) y (3.81).

3.3. Aspectos prácticos

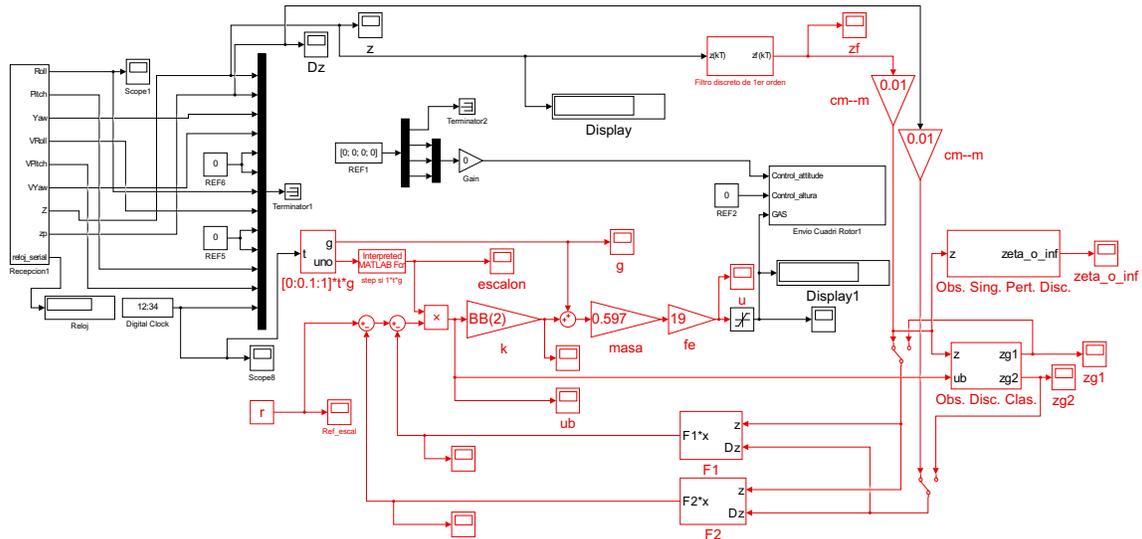


Figura 3.6: Diagrama de la realimentación de estado, observador de estado clásico y observador singularmente perturbado.

En las figuras 3.7 y 3.8 se muestran las señales obtenidas al emplear la realimentación (3.85), utilizando medición directa del estado.

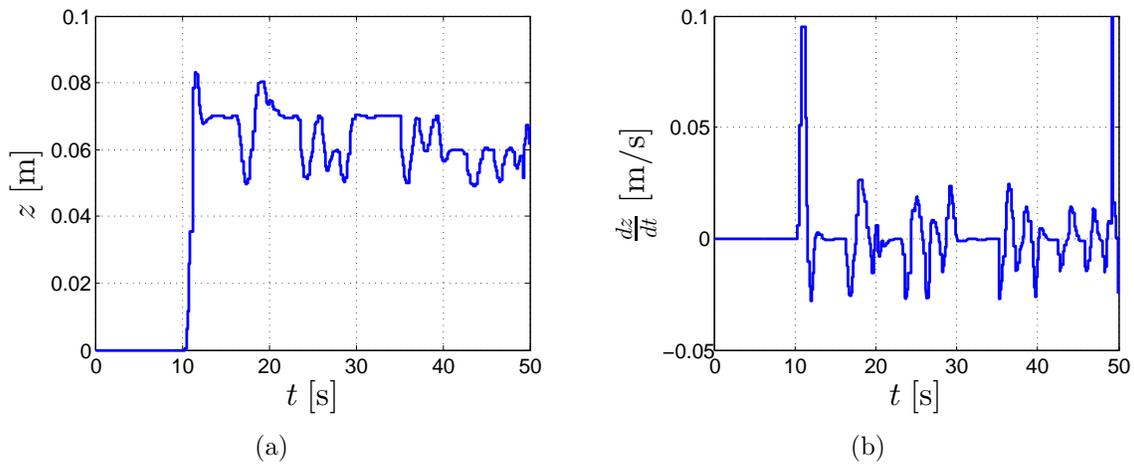


Figura 3.7: Respuestas obtenidas con la realimentación (3.70) y (3.85) con la referencia $r = 1.5$; utilizando medición directa del estado; tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Posición z (z), (b) velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz).

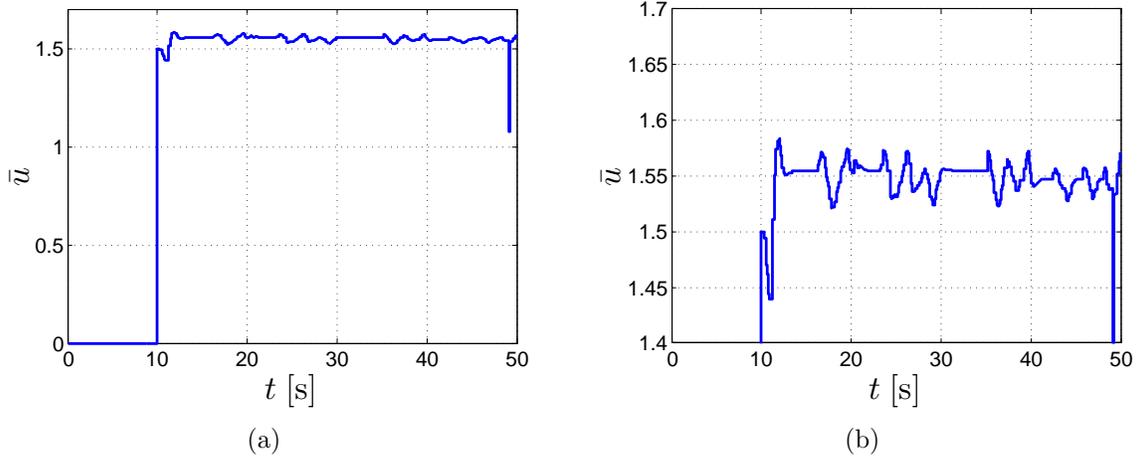


Figura 3.8: Respuestas obtenidas con la realimentación (3.70) y (3.85), utilizando medición directa del estado. (a) Señal $\bar{u} = r - (F_1 + F_2)\zeta(\mathbf{ub})$, (b) zoom de la señal $\bar{u}(\mathbf{ub})$.

En las figuras 3.9 y 3.10 se muestran las señales obtenidas al emplear la realimentación (3.85), utilizando medición directa del estado.

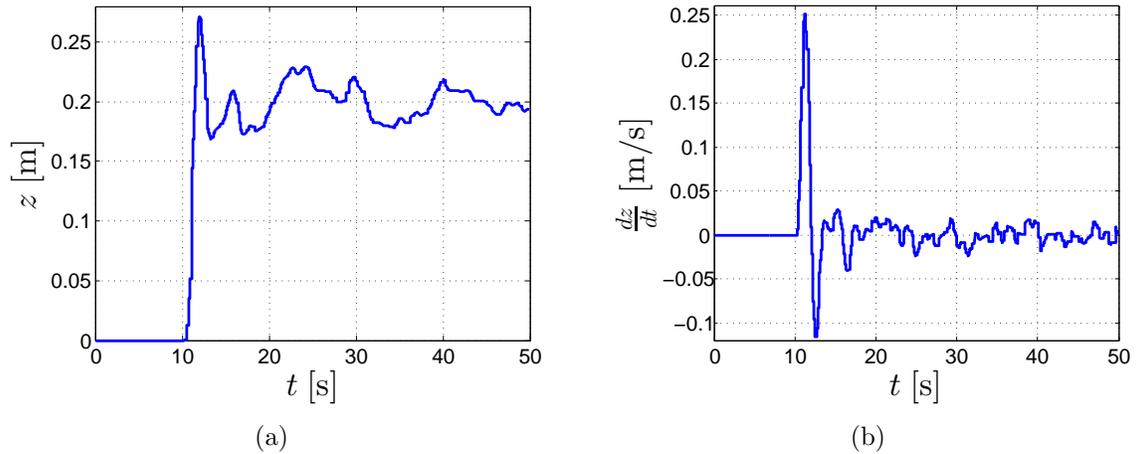


Figura 3.9: Respuestas obtenidas con la realimentación (3.70) y (3.85) con la referencia $r = 4$; utilizando medición directa del estado; tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Posición z (\mathbf{z}), (b) velocidad $\frac{dz}{dt}$ (\mathbf{Dz}).

3.3. Aspectos prácticos

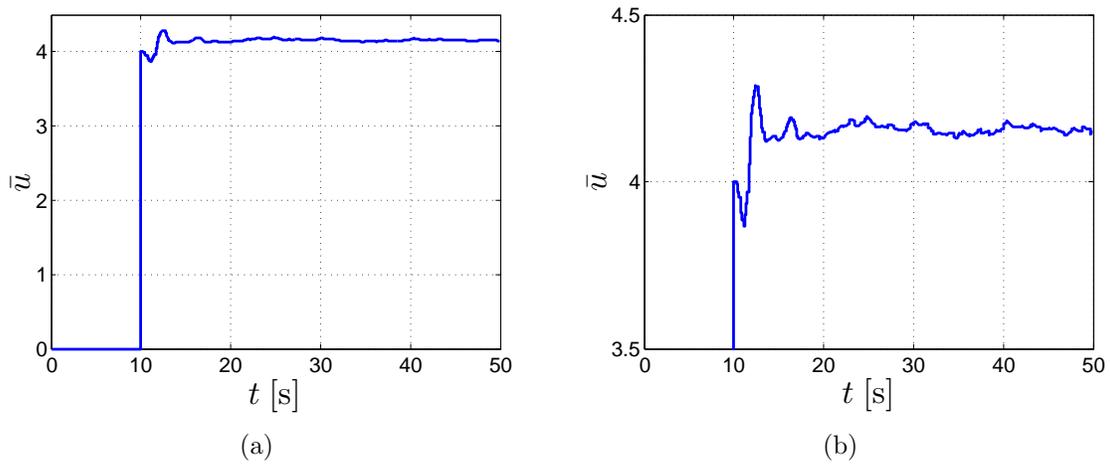


Figura 3.10: Respuestas obtenidas con la realimentación (3.70) y (3.85), utilizando medición directa del estado. (a) Señal $\bar{u} = r - (F_1 + F_2)\zeta(\mathbf{ub})$, (b) zoom de la señal $\bar{u}(\mathbf{ub})$.

3.3.4.2 Realimentación utilizando un estimado del estado

En la figura 3.11 se muestra el diagrama en Simulink del observador de estado clásico, dado por (3.80) y (3.81).

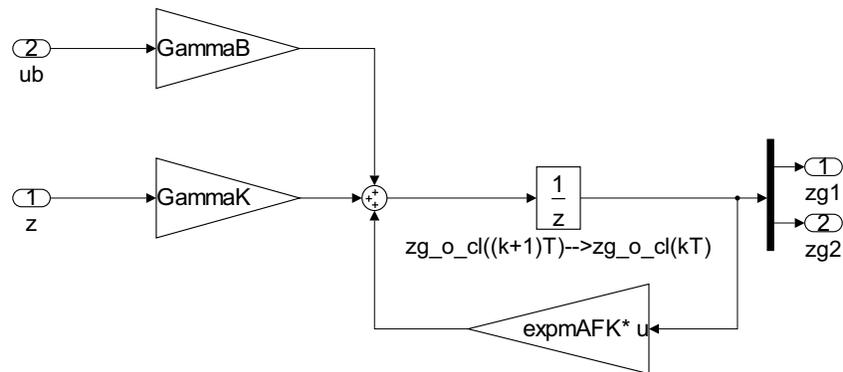


Figura 3.11: Observador de estado clásico (3.80) y (3.81), donde: $\text{expmAFK} = \Phi_2$, $\text{GammaB} = \Gamma_{B_2}$ y $\text{GammaK} = \Gamma_{K_2}$.

En las figuras 3.12, 3.13 y 3.14 se muestran los resultados obtenidos al utilizar la realimentación de estado estimado, con la referencia $r = 1.5$, (ver figuras 3.6 y 3.11).

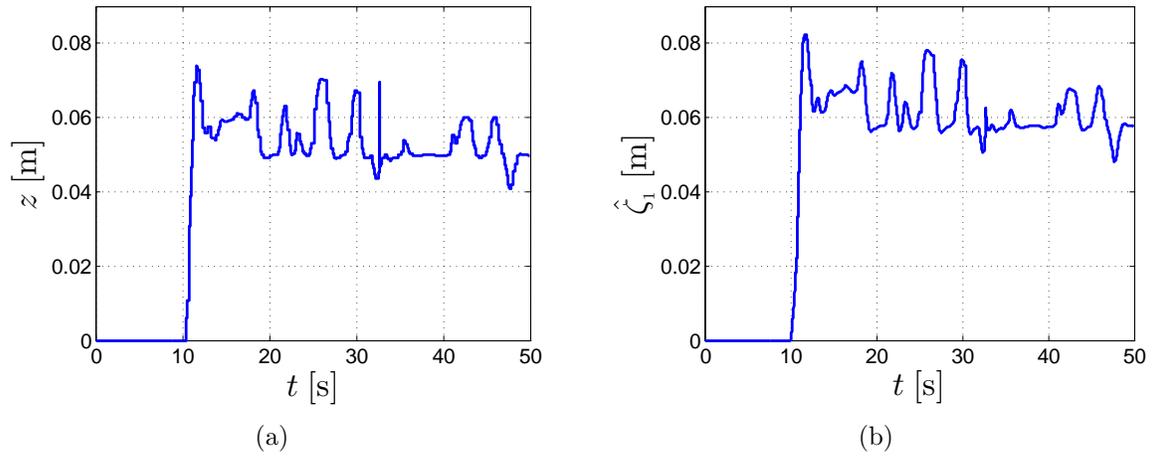


Figura 3.12: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado estimado (3.80) y (3.81); con la referencia $r = 1.5$ y tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Posición z (z), (b) posición estimada \hat{z}_1 (zg1).

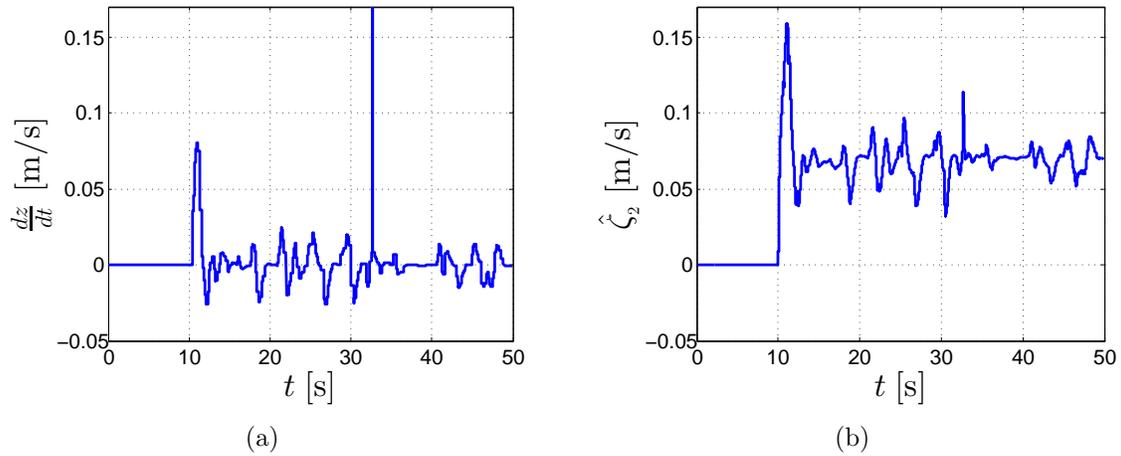


Figura 3.13: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado estimado (3.80) y (3.81); con la referencia $r = 1.5$. (a) Velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (b) velocidad estimada \hat{z}_2 (zg2).

3.3. Aspectos prácticos

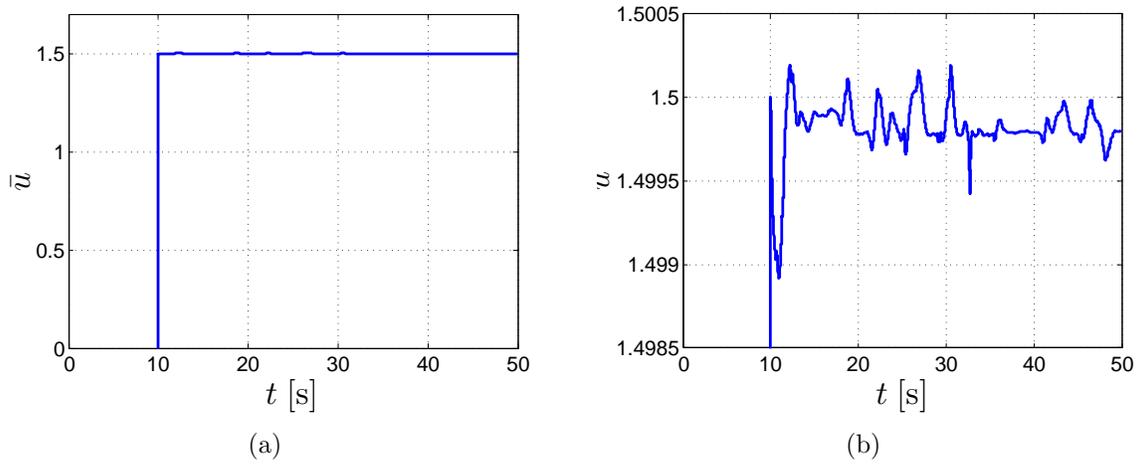


Figura 3.14: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado estimado (3.80) y (3.81); con la referencia $r = 1.5$. (a) Señal \bar{u} (u_b), (b) zoom de la señal \bar{u} (u_b).

En las figuras 3.15, 3.16 y 3.17 se muestran los resultados obtenidos al utilizar la realimentación de estado estimado, con la referencia $r = 4$, (ver figuras 3.6 y 3.11).

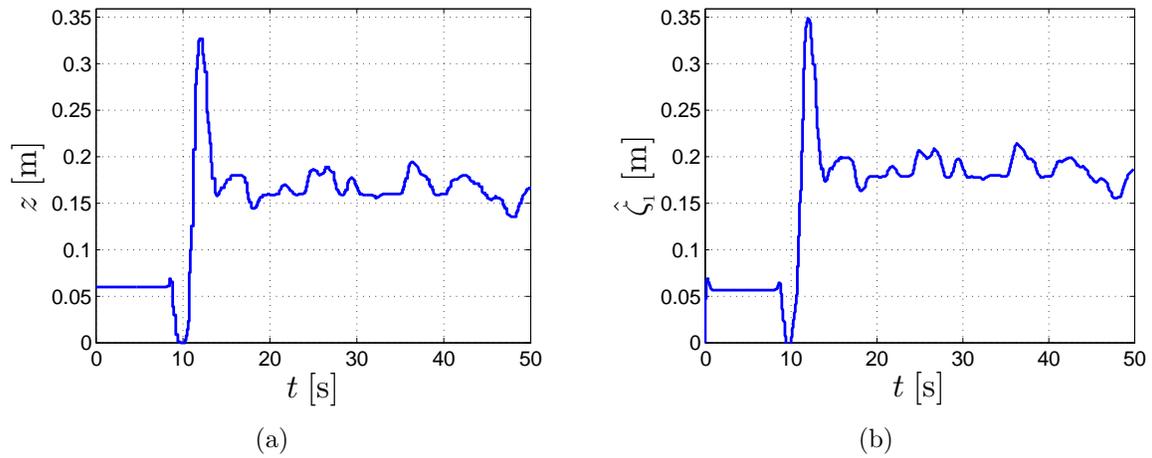


Figura 3.15: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado estimado (3.80) y (3.81); con la referencia $r = 4$ y tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Posición z (z), (b) posición estimada \hat{z}_1 (z_g1).

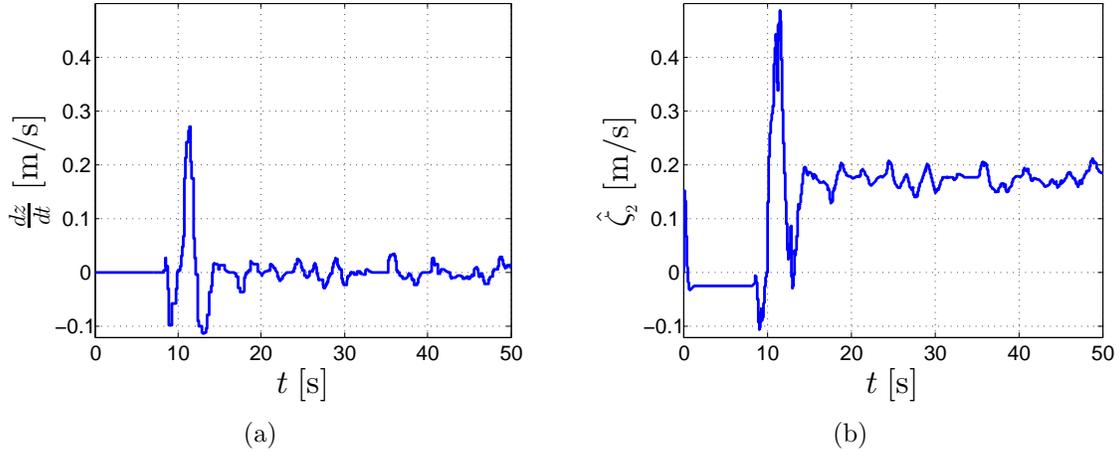


Figura 3.16: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado estimado (3.80) y (3.81); con la referencia $r = 4$. (a) Velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (b) velocidad estimada $\hat{\zeta}_2$ (zg2).

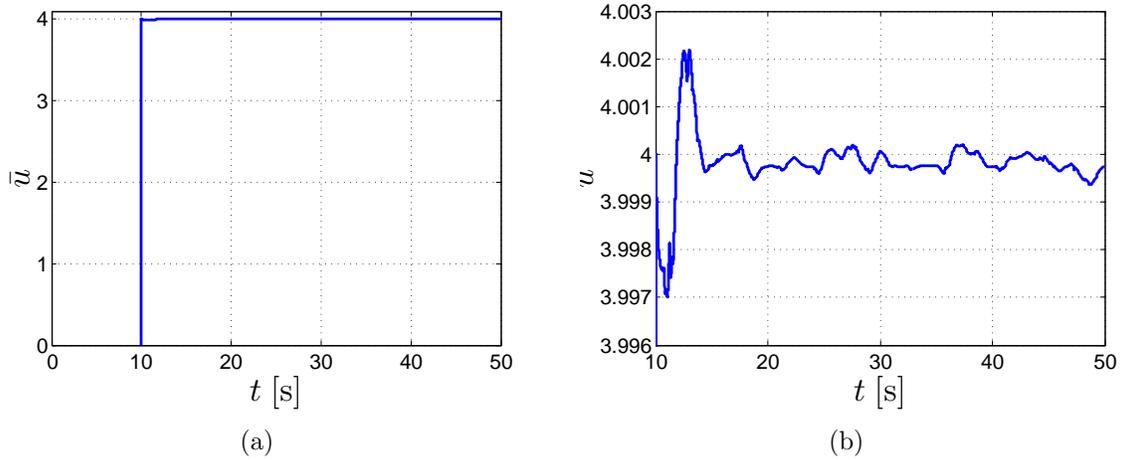


Figura 3.17: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado estimado (3.80) y (3.81); con la referencia $r = 4$. (a) Señal \bar{u} (ub), (b) zoom de la señal \bar{u} (ub).

Nótese que en las figuras 3.12, 3.13, 3.15 y 3.16 los estados estimados $\hat{\zeta}_1$ y $\hat{\zeta}_2$ presentan un corrimiento vertical. Esto es más notorio en la señal $\hat{\zeta}_2$.

3.3.4.3 Observador singularmente perturbado

En la figura 3.18 se muestra el diagrama en Simulink del observador singularmente perturbado, dado en (3.82).

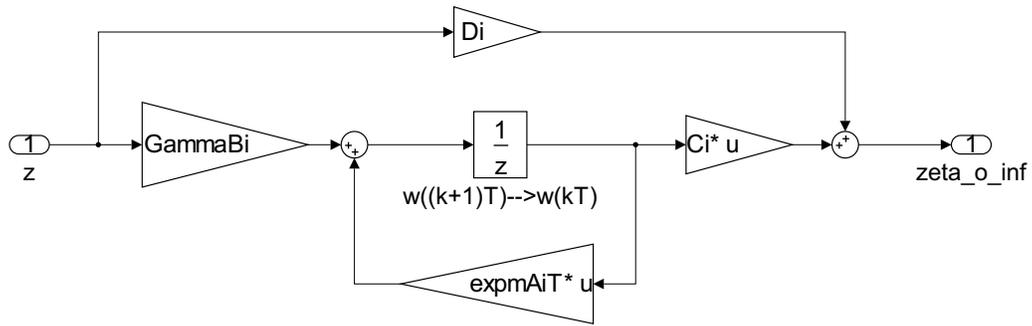


Figura 3.18: Implementación del observador singularmente perturbado (3.49), (3.82) y (3.83), donde: $\text{expmAiT} = \Phi_\infty$, $\text{GammaBi} = \Gamma_{B_\infty}$, $\text{Ci} = C_\infty$ y $\text{Di} = D_\infty$.

En la figura 3.19 se muestran las graficas obtenidas empleando la estimación algorítmica: método de Euler, (3.17) y (3.18), y el observador singularmente perturbado, (3.49), (3.82) y (3.83). Para este último se emplearon valores de ε_o igual a 0.1, 0.25 y 0.5, (recordar (3.84)).

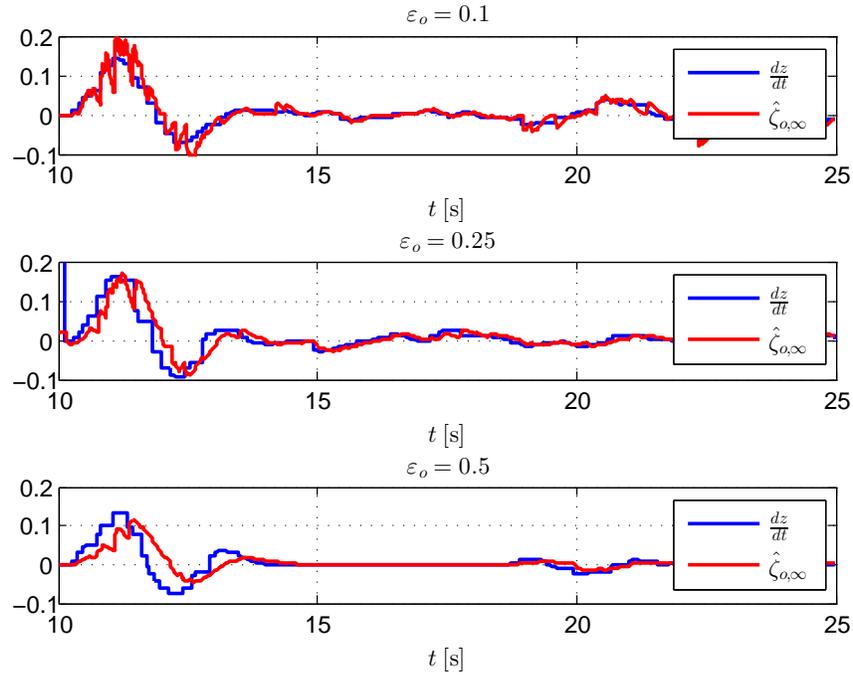


Figura 3.19: Comparación de $\frac{dz}{dt}$ y $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ obtenidas con la estimación algorítmica: método de Euler, (3.17) y (3.18), y el observador singularmente perturbado, (3.49), (3.82), (3.83) y (3.84), respectivamente, con diferentes valores de ε_o .

En la figura 3.20 se muestra el error de observación $|\frac{dz}{dt} - \hat{\zeta}_{o,\infty}|$ para las señales presentadas en la figura 3.19.

3.4. Conclusiones

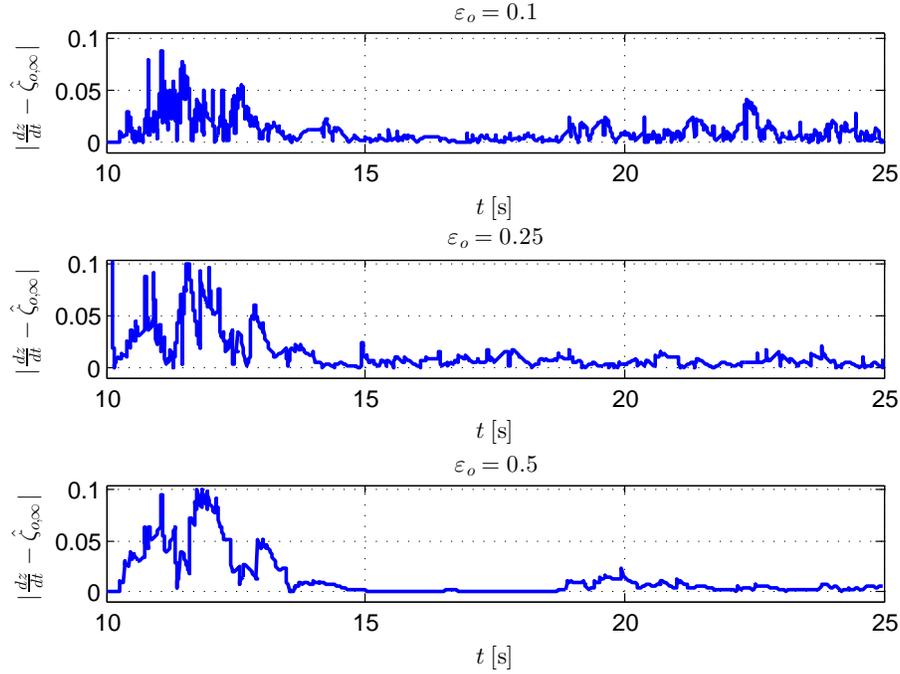


Figura 3.20: Errores de observación $\left| \frac{dz}{dt} - \hat{\zeta}_{o,\infty} \right|$ para $\varepsilon_o = 0.1, 0.25$ y 0.5 , (*c.f.* figura 3.19)

Nótese en la figura 3.19 que al aumentar ε_o , la señal observada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ disminuye en amplitud, es más suave y presenta un desfase de la señal $\frac{dz}{dt}$. De las figuras 3.19 y 3.20 podemos observar que la señal $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ que más se aproxima a $\frac{dz}{dt}$ corresponde a $\varepsilon_o = 0.25$. Por lo que se selecciona $\varepsilon_o = 0.25$. Entonces las matrices (3.83) serán:

$$\begin{aligned} \Phi_\infty &= \begin{bmatrix} 0.9608 & -0.0006 \\ 0.0384 & 0.9608 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{B_\infty} &= \begin{bmatrix} -0.0024 \\ -0.1569 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.86}$$

3.4 Conclusiones

En este capítulo, como primer ensayo, se aplicó el esquema clásico de control lineal, realimentación de estado con observador de estado.

Este esquema clásico de control no funcionó adecuadamente debido al comportamiento

Capítulo 3. Control lineal clásico: realimentación de estado

no lineal de los coeficientes a_1 y a_2 , ver figuras 2.17 y 2.21.

Los problemas enfrentados en este ensayo fueron los siguientes:

- 1) Fue necesario resintonizar empíricamente la realimentación de estado, para evitar respuestas violentas.
- 2) Esta resintonización tiene que hacerse para cada altura deseada.
- 3) La señal de referencia es también ajustada empíricamente.

En este capítulo también se analizó la cuestión de observación de estado.

Primero se utilizó un observador de estado clásico, el cual no funcionó adecuadamente debido a la incertidumbre del modelo.

Para evitar los problemas ligados a la incertidumbre del modelo, se recurrió a un observador de estado de alta ganancia, basado en una aproximación suave de la derivada. Finalmente en este capítulo se abordó la cuestión de la discretización de una representación de estado dada.

Capítulo 4

Control robusto de alta ganancia

En este capítulo se propone un control lineal robusto de altitud para el PVTOL.

El esquema de control lineal robusto propuesto, se basa en técnicas de perturbaciones singulares. Este esquema es una aproximación de una ley de control derivativa, el cual atenúa las incertidumbres mediante un parámetro ε_c , el cual al tender a cero se tiende a la solución ideal, eliminando a la incertidumbre.

Para esto se procede de la manera siguiente:

- 1) En la sección 4.1 se da una descripción teórica.
- 2) En la sección 4.2 se analiza al controlador cuando se aplica a un sistema de segundo orden.
- 3) En la sección 4.3 se discretiza al controlador.
- 4) En la sección 4.4 se muestran aspectos prácticos, así como también los resultados de laboratorio.
- 5) En la sección 4.5 se concluye.

4.1 Descripción teórica

Considere un sistema lineal variante en el tiempo de una entrada y una salida, cuya dinámica está representada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}y(t) + a_n(t)y(t) = b(t)u(t) \quad (4.1)$$

donde los parámetros variantes en el tiempo son desconocidos y sólo se conoce sus cotas. Con condiciones iniciales $y(t_0), \frac{d}{dt}y(t_0), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t_0)$.

Los coeficientes $a_i(t)$ y $b(t)$, son tales que:

H1 $a_i(t) \in \mathcal{C}^\infty, \quad \forall i = 1, \dots, n$, funciones reales continuas desconocidas, tal que $\|a_i(t)\| \leq L_{0,a}$ y $\|\frac{da_i(t)}{dt}\| \leq L_{1,a}$.

H2 $b(t) \in \mathcal{C}^\infty$ es una función real continua positiva desconocida, que satisface: $0 < b_1 \leq b(t) \leq b_2$ y $\|\frac{db(t)}{dt}\| \leq c$.

Definiendo las siguientes variables de estado: $\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \dots \quad \zeta_n]^T =$

$\left[y \quad \frac{d}{dt}y \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y \right]^T$, se obtiene la siguiente ecuación de estado lineal variante en el tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= A(t)\zeta(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C\zeta(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdot & \dots & -a_1(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

y la condición inicial es $\zeta(t_0) = \left[y(t_0) \quad \frac{d}{dt}y(t_0) \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t_0) \right]^T$.

Se desea que el comportamiento en lazo cerrado, esté determinado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \bar{a}_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \dots + \bar{a}_{n-1} \frac{d}{dt}y(t) + \bar{a}_n y(t) = r(t) \tag{4.4}$$

En el caso de que los coeficientes $a_1(t), \dots, a_n(t)$ y $b(t)$ sean conocidos entonces una solución trivial, es:

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left(\left[(-\bar{a}_n + a_n(t)) \quad \dots \quad (-\bar{a}_1 + a_1(t)) \right] \zeta(t) + r(t) \right) \tag{4.5}$$

4.1. Descripción teórica

En el caso de que los coeficientes sean desconocidos, y asumiendo que la diferenciación y los lazos algebraicos sean permitidos, entonces una solución ideal sería [18]:

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left(\frac{d}{dt} + \beta_c \right) \left(\frac{d}{dt} \zeta_n + [\bar{a}_n \ \cdots \ \bar{a}_1] \zeta(t) - r(t) \right) + (1 - \varepsilon_c)u(t) \quad (4.6)$$

donde $\beta_c > 0$ y $0 < \varepsilon_c \ll 1$. Sustituyendo (4.6) en (4.2) y (4.3) se obtiene:

$$\varepsilon_c b(t) u(t) = \left(\frac{d}{dt} + \beta_c \right) \left(\frac{d}{dt} \zeta_n + [\bar{a}_n \ \cdots \ \bar{a}_1] \zeta(t) - r(t) \right) \quad (4.7)$$

Cuando $\varepsilon_c \rightarrow 0$, entonces:

$$\frac{d}{dt} \zeta_n + [\bar{a}_n \ \cdots \ \bar{a}_1] \zeta(t) - r(t) = k e^{-\beta_c t} \quad (4.8)$$

esto es:

$$\frac{d}{dt} \zeta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{a}_n & -\bar{a}_{n-1} & \cdot & \cdots & -\bar{a}_1 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (r(t) + k e^{-\beta_c t}) \quad (4.9)$$

En [10] los autores proponen una aproximación singularmente perturbada a la solución ideal (4.6), compuesta por:

Controlador singularmente perturbado:

$$\varepsilon_c u(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Modelo de referencia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_n & \cdots & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 + (1 + \ell) \\ 0 & \cdots & 0 & -(\beta_c - 1) \end{bmatrix} \zeta(t) \\ &+ \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta_c - 1) & -\beta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde r es la señal de referencia, β_c , τ y ε_c son parámetros positivos y $\ell = 1/\tau - \beta_c$. Los parámetros $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ son los coeficientes del polinomio Hurwitz deseado:

$$p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} \lambda + \bar{a}_n \quad (4.12)$$

los cuales se eligen tal que:

$$\beta_c \geq \max\{-\Re e(\lambda) \mid p(\lambda) = 0\}, \quad \bar{a}_1 + \beta_c > 1, \quad -L_{0,a} - \bar{a}_1 + 1 - \beta_c + 1/\tau > 0 \quad (4.13)$$

El objetivo del modelo de referencia es asignar la dinámica en lazo cerrado, tal que su comportamiento sea un sistema lineal invariante en el tiempo con el polinomio Hurwitz característico $p(\lambda)$, (4.12), y asigna una velocidad de convergencia exponencial β_c a la dinámica deseada. El objetivo del controlador singularmente perturbado es cambiar la base de la representación de estado del sistema, para obtener un modelo singularmente perturbado, y para acoplar la dinámica deseada, por un orden ε_c .

Note que, cuando $\varepsilon_c = 0$ en (4.10) y (4.11), se obtiene (4.8), esto es:

$$\zeta_n = x_n(t) \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt}\zeta_n + \begin{bmatrix} \bar{a}_n & \cdots & \bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{bmatrix} \zeta(t) - r(t) = -\ell x_{n+1}(t) \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta_c\right) x_{n+1}(t) = 0 \quad (4.16)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.16) se obtiene:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta_c\right) \left(\frac{d}{dt}\zeta_n + \begin{bmatrix} \bar{a}_n & \cdots & \bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{bmatrix} \zeta(t) - r(t)\right) = 0 \quad (4.17)$$

En [10] se demuestran las siguientes afirmaciones (ver Teorema 1, Lema 1 y Teorema 2 de [10]).

Teorema 1 ([10])

1) *El modelo singularmente perturbado en lazo cerrado es $(x_i(t) = \zeta_i(t)$, para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y $\xi(t) = \zeta_n(t)$):*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}\xi(t) + B_1r(t) \\ \varepsilon_c \frac{d\xi}{dt}(t) &= A_{21}(\varepsilon_c, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon_c, t)\xi(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde las matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $A_{21}(\varepsilon_c, t) \in$

4.1. Descripción teórica

$\mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$, $A_{22}(\varepsilon_c, t) \in \mathbb{R}$, están definidas de la siguiente manera:

$$A_{11} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\bar{a}_n & -\bar{a}_{n-1} & \cdots & -\bar{a}_2 & -(1+\ell) & \ell \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (\beta_c - 1) & -\beta_c \end{array} \right] \quad (4.19)$$

$$A_{12} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\bar{a}_1 + (1+\ell) \\ -(\beta_c - 1) \end{array} \right], \quad B_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(\varepsilon_c, t) &= \left[-\varepsilon_c a_n(t) \quad \cdots \quad -\varepsilon_c a_2(t) \mid b(t) \quad 0 \right] \\ A_{22}(\varepsilon_c, t) &= [-\varepsilon_c a_1(t) - b(t)] \end{aligned} \quad (4.21)$$

2) Existen $K, \beta_c > 0$, tales que $\|\exp(A_0 \theta)\| \leq K e^{-\beta_c \theta}$, $\bar{a}_1 + \beta_c > 1$ y $\tau < 1/(\bar{a}_1 + \beta_c - 1)$, entonces existe $\varepsilon_c^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon_c \in (0, \varepsilon_c^*)$ el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}\xi(t) \\ \varepsilon_c \frac{d\xi}{dt}(t) &= A_{21}(\varepsilon_c, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon_c, t)\xi(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

es uniformemente asintóticamente estable.

3) El sistema singularmente perturbado (4.22), es uniformemente asintóticamente estable para toda $\varepsilon_c \in (0, \varepsilon_1^*)$, donde:

$$\varepsilon_1^* = \frac{\beta_c b_1}{\beta_c \bar{M}_2 + K \bar{M}_1 \bar{M}_3} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \sqrt{1 + (\bar{a}_n - 1/\tau)^2 + 2(1 - \beta_c)^2} \\ \bar{M}_2 &= |\bar{a}_n + \beta_c - 1/\tau - 1| \\ \bar{M}_3 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 + (\beta_c - 1/\tau)^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

4) Existe $\varepsilon_c^* > 0$ tal que para toda $\varepsilon_c \in (0, \varepsilon_c^*]$ las siguientes expresiones se mantienen uniformemente en $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon_c) \quad (4.25)$$

$$\xi(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x_s(t) + \xi_f\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon_c}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon_c) \quad (4.26)$$

donde la variable suave x_s corresponde a la dinámica lenta, la cual es solución de:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt}(t) &= A_0x_s(t) + B_1r(t) \\ A_0 &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

y la dinámica de aproximación ξ_f a la solución suave x_s , está determinada por la EDO:

$$\frac{d}{d\tau}\xi_f(\tau) = A_{22}(0, t_0)\xi_f(\tau) \quad (4.28)$$

con condiciones iniciales $x_s(t_0) = x_0$ y $\xi_f(0) = A_{22}^{-1}(0, t_0)A_{21}(t_0)x_0 + \xi_0$.

4.2 Análisis del caso de un sistema mecánico de segundo orden

4.2.1 Ley de control

Para un sistema de segundo orden, $n = 2$, las expresiones (4.10) y (4.11) se escriben como:

$$\varepsilon_c u(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 + (1 + \ell) \\ 0 & -(\beta_c - 1) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta_c - 1) & -\beta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (4.30)$$

El controlador singularmente perturbado (4.29) y el modelo de referencia (4.30) se pueden reescribir mediante la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{mrc} &= A_{mrc}x_{mrc} + B_{mrc}u_{mrc} \\ u &= \frac{1}{\varepsilon_c}C_{mrc}x_{mrc} + \frac{1}{\varepsilon_c}D_{mrc}u_{mrc} \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_{mrc} &= \begin{bmatrix} -(1+\ell) & -\ell \\ (\beta_c - 1) & -\beta_c \end{bmatrix}, & B_{mrc} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 + (1+\ell) & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right. \\ 0 & -(\beta_c - 1) & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right. \end{bmatrix}, \\
 C_{mrc} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & D_{mrc} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{bmatrix}, \\
 x_{mrc} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, & u_{mrc} &= \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ r(t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

4.2.2 Sistema en lazo cerrado

Dado que $x_1(t) = \zeta_1(t)$ y $\xi(t) = \zeta_2(t)$, esto es:

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

Entonces, al derivar (4.33) y considerando (4.2) y (4.3) se obtienen:

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = \zeta_2(t) = \xi(t) \tag{4.34}$$

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -a_2(t)x_1(t) - a_1(t)\xi(t) + b(t)u(t) \tag{4.35}$$

De (4.29) y (4.33) se obtiene:

$$\varepsilon_c u(t) = -\xi(t) + x_2(t) \tag{4.36}$$

A partir de (4.30) y considerando (4.33) se obtienen:

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -\bar{a}_2x_1(t) - (\bar{a}_1 + (1+\ell))\xi(t) - (1+\ell)x_2(t) - \ell x_3(t) + r(t) \tag{4.37}$$

y

$$\frac{d}{dt}x_3(t) = -(\beta_c - 1)\xi(t) + (\beta_c - 1)x_2(t) - \beta_c x_3(t) \tag{4.38}$$

De (4.2) y (4.33) se tiene:

$$y(t) = x_1(t) \tag{4.39}$$

La expresión (4.35) se multiplica por ε_c y se utiliza (4.36):

$$\varepsilon_c \frac{d}{dt}\xi(t) = -\varepsilon_c a_2(t)x_1(t) - \varepsilon_c a_1(t)\xi(t) - b(t)\xi(t) + b(t)x_2(t) \tag{4.40}$$

De (4.34), (4.37) y (4.38) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_{11}x(t) + A_{12}\xi(t) + B_1r(t) \quad (4.41)$$

Reescribiendo (4.40) se obtiene:

$$\varepsilon_c \frac{d}{dt}\xi(t) = A_{21}(\varepsilon_c, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon_c, t)\xi(t) \quad (4.42)$$

Y (4.39) se reescribe como:

$$y(t) = C_1x(t) \quad (4.43)$$

donde (*c.f.* (4.19), (4.20) y (4.21)):

$$A_{11} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline -\bar{a}_2 & -(1+\ell) & -\ell \\ 0 & (\beta_c - 1) & -\beta_c \end{array} \right] \quad (4.44)$$

$$A_{12} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -\bar{a}_1 + (1+\ell) \\ -(\beta_c - 1) \end{array} \right], \quad B_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(\varepsilon_c, t) &= \left[-\varepsilon_c a_2(t) \mid b(t) \quad 0 \right] \\ A_{22}(\varepsilon_c, t) &= [-\varepsilon_c a_1(t) - b(t)] \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$C_1 = \left[1 \quad 0 \quad 0 \right], \quad x(t) = \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right] \quad (4.47)$$

4.2.3 Propiedades para el caso $\varepsilon_c = 0$

Haciendo $\varepsilon_c = 0$, de (4.41) y (4.42) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}\xi(t) + B_1r(t) \\ 0 &= A_{21}(0, t)x(t) + A_{22}(0, t)\xi(t) \end{aligned} \quad (4.48)$$

De la segunda ecuación de (4.48) se obtiene (recordar **H2**):

$$\xi(t) = -A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x(t) \quad (4.49)$$

4.2. Análisis del caso de un sistema mecánico de segundo orden

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación de (4.48) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0x(t) + B_1r(t) \quad (4.50)$$

donde:

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) \quad (4.51)$$

A partir de las matrices dadas en (4.44)–(4.46) se obtiene:

$$A_0 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 & -\ell \\ 0 & 0 & -\beta_c \end{array} \right] \quad (4.52)$$

4.2.3.1 Polos en lazo cerrado

Los polos en lazo cerrado están determinados por el polinomio característico de A_0 , esto es:

$$\pi_0(s) = \det(sI - A_0) = (s + \beta_c)(s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2) \quad (4.53)$$

4.2.3.2 Ceros del sistema

La matriz sistema es:

$$\Sigma_0(s) = \left[\begin{array}{c|c} (sI - A_0) & B_1 \\ \hline -C_1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} s & -1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_2 & s + \bar{a}_1 & \frac{1}{\tau} - \beta_c & 1 \\ 0 & 0 & s + \beta_c & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.54)$$

Los ceros del sistema están determinados por el determinante de la matriz sistema, esto es:

$$\sigma_0(s) = \det \Sigma_0(s) = s + \beta_c \quad (4.55)$$

4.2.3.3 Función de transferencia

La función de transferencia es:

$$F_0(s) = C_1(sI - A_0)^{-1}B_1 = \frac{s + \beta_c}{(s + \beta_c)(s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2)} \quad (4.56)$$

4.2.4 Propiedades para el caso $\varepsilon_c > 0$

De (4.41) y (4.42) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}\xi(t) + B_1r(t) \\ \frac{d}{dt}\xi(t) &= \frac{1}{\varepsilon_c}A_{21}(\varepsilon_c, t)x(t) + \frac{1}{\varepsilon_c}A_{22}(\varepsilon_c, t)\xi(t) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Las expresiones dadas en (4.57) se reescriben como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = A_{\varepsilon_c} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + B_{\varepsilon_c}r(t) \quad (4.58)$$

y

$$y(t) = C_{\varepsilon_c} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

donde

$$A_{\varepsilon_c} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{1}{\varepsilon_c}A_{21} & \frac{1}{\varepsilon_c}A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{\varepsilon_c} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{\varepsilon_c} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

4.2.4.1 Polos en lazo cerrado

Los polos en lazo cerrado están determinados por el polinomio característico de A_{ε_c} , esto es:¹

$$\begin{aligned}
 \pi_{\varepsilon_c}(s) &= \varepsilon_c \tau \det(s\mathbf{I} - A_{\varepsilon_c}) \\
 &= b\tau(s^3 + \bar{a}_2s + \bar{a}_1s^2 + \beta_c s^2 + \bar{a}_2\beta_c + \bar{a}_1\beta_c s) \\
 &\quad + \varepsilon_c \left(\tau s^4 + (1 + \tau + \tau a_1)s^3 + (a_1 - 1 + 2\beta_c + \tau a_1 + \tau a_2 + 2\tau\beta_c - 2\tau\beta_c^2)s^2 \right. \\
 &\quad \left. + (a_2 - a_1 + 2\beta_c a_1 + \tau a_2 - 2\tau\beta_c^2 a_1 + 2\tau\beta_c a_1)s \right. \\
 &\quad \left. + (2\beta_c a_2 - a_2 - 2\tau\beta_c^2 a_2 + 2\tau\beta_c a_2) \right) \\
 &= b\tau(s + \beta_c)(s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2) \\
 &\quad + \varepsilon_c \left(\tau s^4 + (1 + \tau(1 + a_1))s^3 + (\tau a_2 + (1 + \tau)a_1)s^2 + (1 + \tau)a_2s \right. \\
 &\quad \left. + ((2\beta_c - 1) - 2\tau\beta_c(\beta_c - 1))(s^2 + a_1s + a_2) \right) \\
 &= b\tau(s + \beta_c)(s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2) \\
 &\quad + \varepsilon_c \left(\tau s^2(s^2 + a_1s + a_2) + (1 + \tau)s(s^2 + a_1s + a_2) \right. \\
 &\quad \left. + (2\beta_c - 1 - 2\tau\beta_c^2 + 2\tau\beta_c)(s^2 + a_1s + a_2) \right) \\
 &= b\tau(s + \beta_c)(s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2) \\
 &\quad + \varepsilon_c \tau \left(s^2 + \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)s + \left(2\beta_c \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) - 2\beta_c^2 - \frac{1}{\tau}\right) \right) (s^2 + a_1s + a_2)
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

La expresión obtenida en (4.61) se iguala a cero:

$$\begin{aligned}
 &b\tau(s + \beta_c)(s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2) \\
 &\quad + \varepsilon_c \tau \left(s^2 + \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)s + \left(2\beta_c \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) - 2\beta_c^2 - \frac{1}{\tau}\right) \right) (s^2 + a_1s + a_2) = 0
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Las raíces de (4.62) se determinan mediante el lugar de las raíces; para esto a la ecuación (4.62) se le lleva a la forma canónica GH , esto es:

$$GH = \frac{b}{\varepsilon_c} \frac{(s + \beta_c)(s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2)}{\left(s^2 + \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)s + \left(2\beta_c \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) - 2\beta_c^2 - \frac{1}{\tau}\right)\right) (s^2 + a_1s + a_2)} \tag{4.63}$$

¹Para los valores variables, $a_1(t)$ y $a_2(t)$ provenientes de (4.46), se asumirá en este análisis que tienen valores constantes, pero desconocidos, a_1 y a_2 , respectivamente.

De (4.63) se observa que el lugar de las raíces parte de las raíces del polinomio desconocido, $s^2 + a_1s + a_2$, y llega al polinomio propuesto, $s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2$. Por lo que cuando $\varepsilon_c \rightarrow 0$ se tienen las raíces deseadas del polinomio Hurwitz $s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2$ (junto con la dinámica β_c de la convergencia de aproximación). En la figura 4.1 se ilustra este comportamiento.

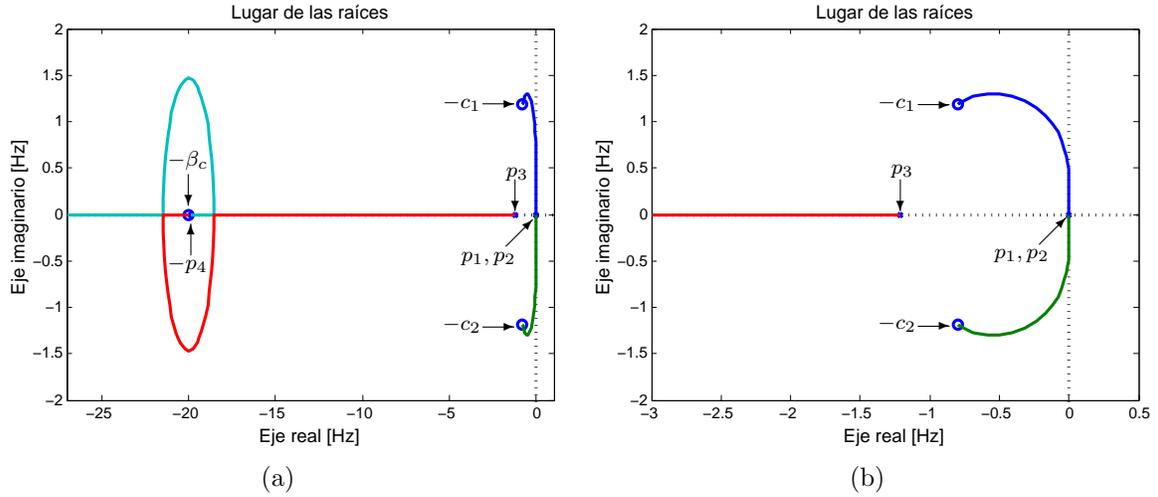


Figura 4.1: Lugar de las raíces obtenidos con los valores: $\varepsilon_c = 0.05$, $\beta_c = \frac{1}{\varepsilon_c} = 20$, $\tau = 0.0497$ y $\ell = 0.1053$. Siendo los polinomios $s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2 = (s + c_1)(s + c_2)$, $c_1 = -0.7993 + 1.1835i$, $c_2 = -0.7993 - 1.1835i$; $s^2 + a_1s + a_2 = (s + p_1)(s + p_2)$, $p_1 = p_2 = 0$; $s^2 + (1 + \frac{1}{\tau})s + (2\beta_c(1 + \frac{1}{\tau}) - 2\beta_c^2 - \frac{1}{\tau}) = (s + p_3)(s + p_4)$, $p_3 = -1.2117$, $p_4 = -19.8936$.

4.2.4.2 Ceros del sistema

La matriz sistema es:

$$\Sigma_{\varepsilon_c}(s) = \left[\begin{array}{c|c} (s\mathbf{I} - A_{\varepsilon_c}) & B_{\varepsilon_c} \\ \hline -C_{\varepsilon_c} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} s & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \bar{a}_2 & s - \beta_c + \frac{1}{\tau} + 1 & \frac{1}{\tau} - \beta_c & \bar{a}_1 + \beta_c - \frac{1}{\tau} - 1 & 1 \\ 0 & 1 - \beta_c & s + \beta_c & \beta_c - 1 & 0 \\ a_2 & \frac{-\beta_c}{\varepsilon_c} & 0 & s + \frac{(b+a_1\varepsilon_c)}{\varepsilon_c} & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.64)$$

4.3. Discretización

Los ceros del sistema están determinados por el determinante de la matriz sistema, esto es:

$$\sigma_{\varepsilon_c}(s) = \det \Sigma_{\varepsilon_c}(s) = \frac{b(s + \beta_c)}{\varepsilon_c} \quad (4.65)$$

4.2.4.3 Función de transferencia

La función de transferencia se encuentra dividiendo el polinomio $\sigma_{\varepsilon_c}(s)$, de la ecuación (4.65), con el polinomio correspondiente a los polos encontrados por el lugar de las raíces de (4.63), para un valor particular de ε_c . Como ya se hizo notar anteriormente, cuando $\varepsilon_c \rightarrow 0$ los polos de lazo cerrado tienden a los ceros de GH , es decir, el polinomio de los polos en lazo cerrado, tiende a $(s + \beta_c)(s^2 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2)$ (ver (4.63)).

4.3 Discretización

Para discretizar la representación de estado (4.31), se emplea el procedimiento descrito en la sección 3.2; con esto se obtienen las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x_{mrc}((k+1)T) &= \Phi_{mrc} x_{mrc}(kT) + \Gamma_{B_{mrc}} u_{mrc}(kT) \\ u(kT) &= \frac{1}{\varepsilon_c} C_{mrc} x_{mrc}(kT) + \frac{1}{\varepsilon_c} D_{mrc} u_{mrc}(kT) \end{aligned} \quad (4.66)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Phi_{mrc} &= e^{A_{mrc}T} \\ \Gamma_{B_{mrc}} &= \int_0^T e^{A_{mrc}\eta} d\eta B_{mrc} \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.4 Resultados experimentales

En la figura 4.2 se muestra el diagrama en Simulink para el observador singularmente perturbado, el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia.

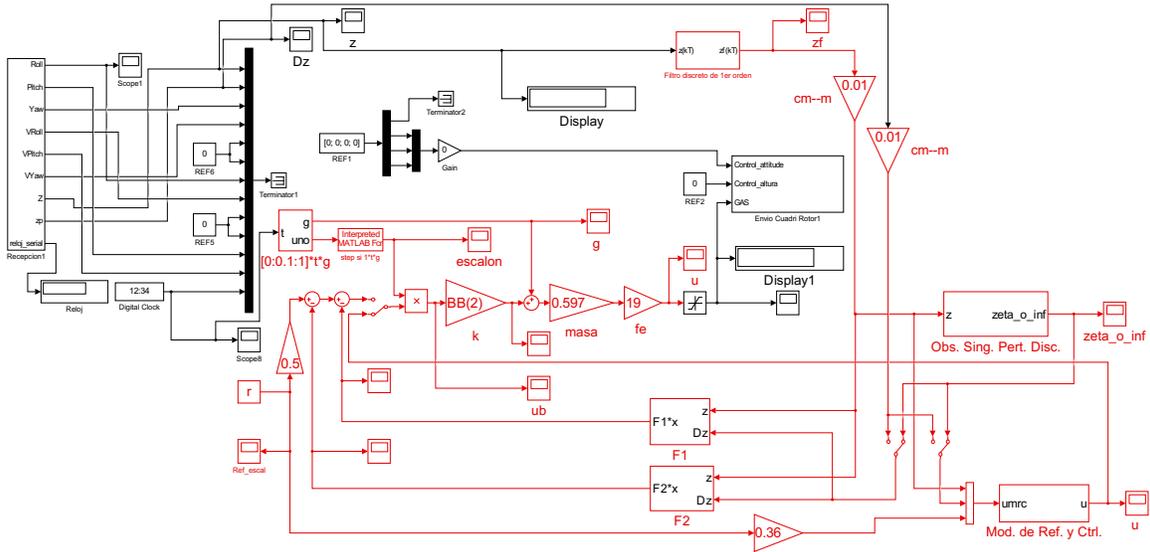


Figura 4.2: Diagrama en Simulink para el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia.

En la figura 4.3 se muestra el diagrama para el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia.

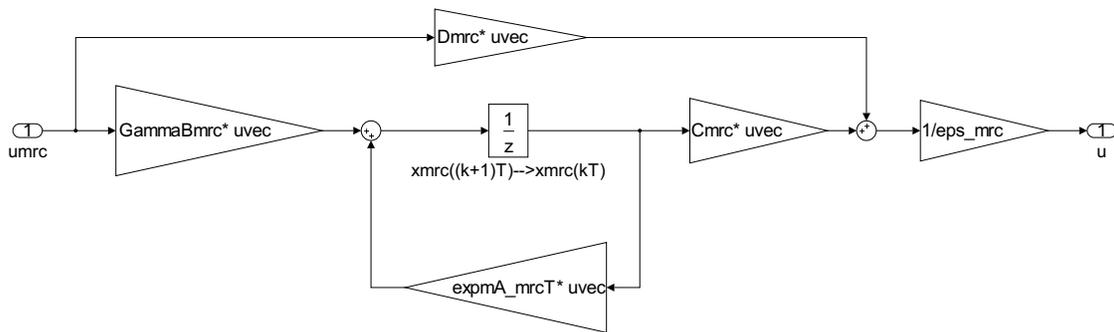


Figura 4.3: Controlador singularmente perturbado y modelo de referencia, (4.66) y (4.67), donde: $\text{expmA}_{mrcT} = \Phi_{mrc}$, $\text{GammaBmrc} = \Gamma_{B_{mrc}}$, $\text{Cmrc} = C_{mrc}$, $\text{Dmrc} = D_{mrc}$ y $1/\text{eps}_{mrc} = \frac{1}{\epsilon_c}$, (ver (4.67) y (4.32)).

Para el modelo de referencia (4.30) los parámetros \bar{a}_1 y \bar{a}_2 se eligieron igual a los coeficientes del polinomio Hurwitz correspondiente al espectro obtenido en la sección

4.4. Resultados experimentales

3.3.1 (ver (3.73)).

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1.5987\lambda + 2.0396 \quad (4.68)$$

Del polinomio Hurwitz (4.68), se tiene $\bar{a}_1 = 1.5987$ y $\bar{a}_2 = 2.0396$.

Entonces la primera condición de suficiencia dada en (4.13), es (ver (3.73)):

$$\beta_c \geq \max\{-\Re e(\lambda) \mid p(\lambda) = 0\} = 0.7993 \quad (4.69)$$

La segunda condición de suficiencia dada en (4.13) es:

$$\beta_c > 1 - \bar{a}_1 = -0.5987 \quad (4.70)$$

La tercera condición de suficiencia dada en (4.13) es:

$$1 - \beta_c + 1/\tau > L_{0,a} + \bar{a}_1 \quad (4.71)$$

Para satisfacer (4.71) se propone la siguiente relación

$$1 - \beta_c + 1/\tau = \frac{\beta_c + \alpha}{\beta_c - \alpha} \quad (4.72)$$

Entonces de (4.71) y (4.72) se tiene:

$$\alpha > \beta_c \frac{(L_{0,a} - \bar{a}_1) - 1}{(L_{0,a} + \bar{a}_1) + 1} \quad (4.73)$$

Si se considera al PVTOL como un doble integrador, se tiene: $L_{0,a} = 0$, y si se consideran las variaciones observadas en las secciones 2.3.2 y 2.3.4 se tiene (ver figuras 2.17 y 2.21): $L_{0,a} = 11.5$.

En la tabla 4.1 se muestran los cálculos para diferentes valores de β_c .

$L_{0,a} = 0$			$L_{0,a} = 11.5$		
$\beta_c = 10$	$\alpha > 2.3038$	$1/\tau = 10.5987$	$\beta_c = 10$	$\alpha > 8.5814$	$1/\tau = 22.0987$
$\beta_c = 20$	$\alpha > 4.6077$	$1/\tau = 20.5987$	$\beta_c = 20$	$\alpha > 17.1629$	$1/\tau = 32.0987$
$\beta_c = 30$	$\alpha > 6.9115$	$1/\tau = 30.5987$	$\beta_c = 30$	$\alpha > 25.7443$	$1/\tau = 42.0987$

Tabla 4.1: Tabla de valores para diferentes β_c considerando $L_{0,a} = 0$ y $L_{0,a} = 11.5$, (c.f. (4.73) y (4.72)).

Experimentalmente se observó que el valor de $1/\tau$ tiene que ser ligeramente mayor a β para evitar respuestas abruptas. Por lo que a partir de los valores de la tabla 4.1, se ajustó el valor de $1/\tau$ para obtener respuestas suaves, obteniéndose los valores experimentales de la tabla 4.2.

$\varepsilon_c = 0.5$	$\beta_c = 10$	$1/\tau = 10.22$
$\varepsilon_c = 0.5$	$\beta_c = 20$	$1/\tau = 20.10$
$\varepsilon_c = 0.5$	$\beta_c = 30$	$1/\tau = 30.07$

Tabla 4.2: Tabla de valores para diferentes β_c .

De (4.68) y de la tabla 4.2, las matrices (4.67) numéricamente son iguales a:

$$\begin{aligned} \Phi_{mrc} &= \begin{bmatrix} 0.9889 & -0.0009 \\ 0.1712 & 0.8186 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{Bmrc} &= \begin{bmatrix} -0.0203 & -0.0048 & 0.0099 \\ -0.0018 & -0.1726 & 0.0009 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Para el tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s], $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 20$ y $1/\tau = 20.10$.

En las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 se muestran los resultados obtenidos al utilizar la realimentación de estado (3.70) y (3.85). La velocidad es estimada con el observador singularmente perturbado (3.82), (3.83) y (3.86).²

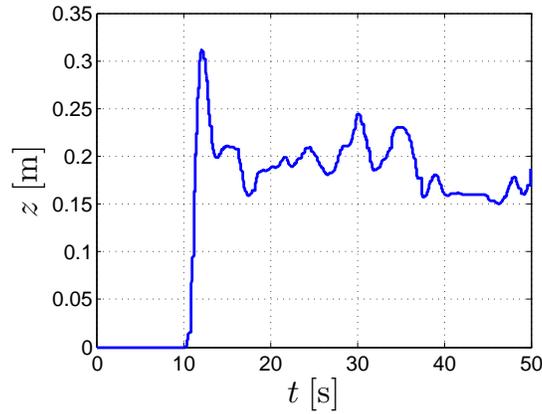


Figura 4.4: Respuesta obtenida con la realimentación de estado (3.70) y (3.85) y el observador singularmente perturbado (3.82), (3.83) y (3.86). La referencia es: $0.5r = 4$. El tiempo de muestreo es: $T = 0.01$ [s]. Posición z (z).

²En ambos casos, las referencias se multiplican por un factor de escala para tener un estado permanente de 0.2 [m].

4.4. Resultados experimentales

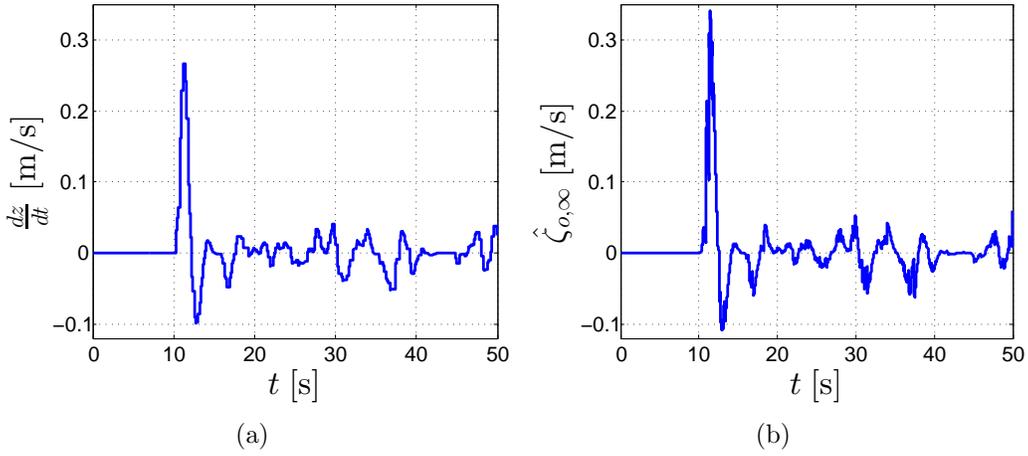


Figura 4.5: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado (3.70) y (3.85) y el observador singularmente perturbado (3.82), (3.83) y (3.86). La referencia es: $0.5r = 4$. El tiempo de muestreo es: $T = 0.01$ [s]. (a) Velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (b) velocidad estimada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ (zeta_o_inf).

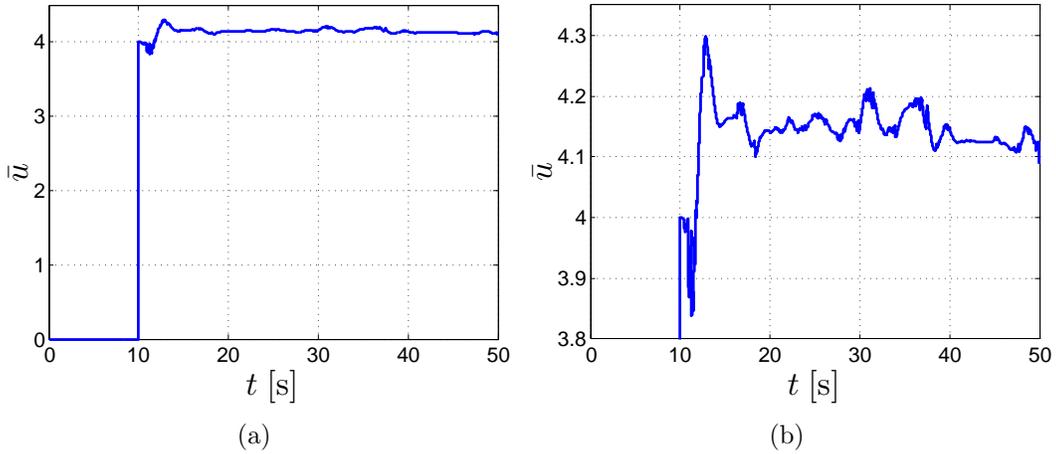


Figura 4.6: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado (3.70) y (3.85) y el observador singularmente perturbado (3.82), (3.83) y (3.86). La referencia es: $0.5r = 4$. El tiempo de muestreo es: $T = 0.01$ [s]. (a) Señal \bar{u} (ub), (b) zoom de la señal \bar{u} (ub).

En las figuras (4.7), (4.8) y (4.9) se muestran las gráficas obtenidas al utilizar el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia (ver (4.66) y (4.67)).

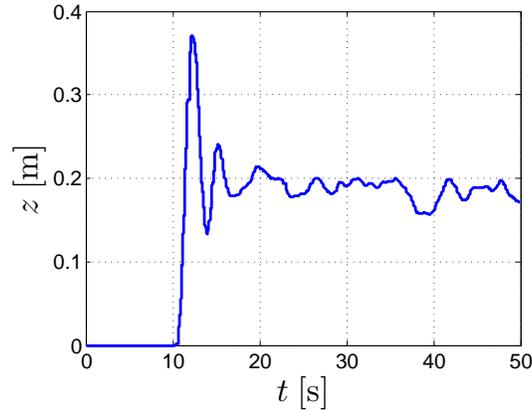


Figura 4.7: Respuesta obtenida con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia, (4.66), (4.67) y (4.74); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 20$, $1/\tau = 20.10$, $\ell = 0.1$, $\bar{a}_1 = 1.5987$ y $\bar{a}_2 = 2.0396$; el observador singularmente perturbado (3.82), (3.83) y (3.86). La referencia es: $0.36r = 2.88$. El tiempo de muestreo es: $T = 0.01$ [s]. Posición z (z).

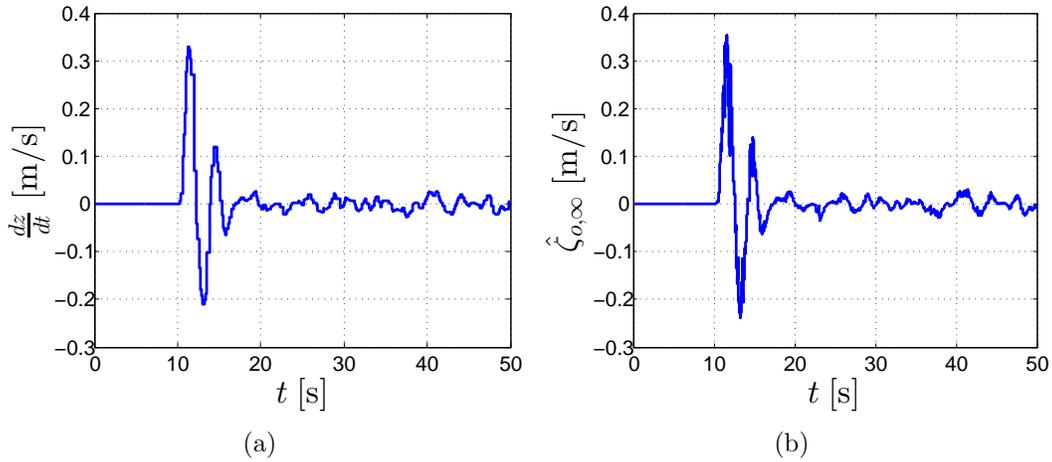


Figura 4.8: Respuestas obtenidas con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia, (4.66), (4.67), (4.74); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 20$, $1/\tau = 20.10$, $\ell = 0.1$, $\bar{a}_1 = 1.5987$ y $\bar{a}_2 = 2.0396$; el observador singularmente perturbado (3.82), (3.83) y (3.86). La referencia es: $0.36r = 2.88$. El tiempo de muestreo es: $T = 0.01$ [s]. (a) Velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (b) velocidad estimada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ (zeta_o_inf).

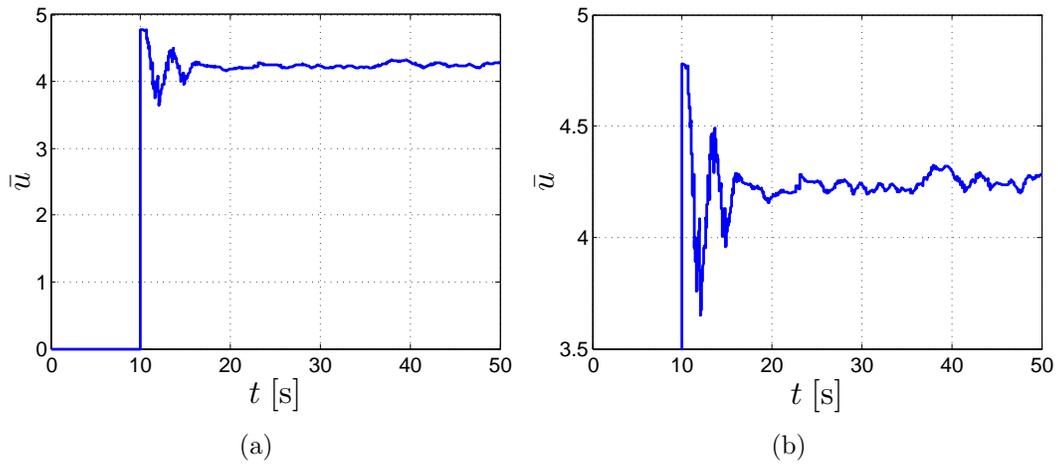


Figura 4.9: Respuestas obtenidas con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia, (4.66), (4.67) y (4.74); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 20$, $1/\tau = 20.10$, $\ell = 0.1$, $\bar{a}_1 = 1.5987$ y $\bar{a}_2 = 2.0396$; el observador singularmente perturbado (3.82), (3.83) y (3.86). La referencia es: $0.36r = 2.88$. El tiempo de muestreo es: $T = 0.01$ [s]. (a) Señal \bar{u} (ub), (b) zoom de la señal \bar{u} (ub).

4.5 Conclusiones

El esquema de control lineal robusto funcionó mejor que el esquema clásico de control, realimentación utilizando un estimado del estado. Con este esquema ya no es necesario la resintonización del controlador para cada elevación deseada.

Pero aún se tienen problemas con la referencia, la cual tiene que ser arbitrariamente ajustada para obtener una altitud deseada.

Capítulo 5

Regulación

Para evitar el problema del ajuste arbitrario de la señal de referencia, en este capítulo se aborda el problema de regulación. Esto es se cambia al punto de equilibrio en la altitud deseada, siendo siempre la referencia nula.

Para esto se procede de la manera siguiente:

- 1) En la sección 5.1 se obtiene un modelo incremental, es decir un modelo alrededor del punto de funcionamiento.
- 2) En la sección 5.2 se reajusta al esquema clásico de control lineal del capítulo 3 para el modelo incremental.
- 3) En la sección 5.3 se reajusta al esquema de control lineal robusto del capítulo 4 para el modelo incremental.
- 4) En la sección 5.4 se muestran los resultados de laboratorio
- 5) En la sección 5.5 se concluye.

5.1 Modelo incremental

A continuación se obtiene un modelo incremental del sistema representado por las matrices (3.76), esto es, se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_2 z = b \bar{u}_1 \quad (5.1)$$

Se definen:

$$\begin{aligned} z &= z_r + \Delta z \\ \bar{u}_1 &= \bar{u}_r + \Delta u \\ \bar{u}_r &= \frac{a_2}{b} z_r \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde (z_r, \bar{u}_r) es el punto de operación, y $(\Delta z, \Delta u)$ son las variaciones alrededor del punto de operación.

Sustituyendo (5.2) en (5.1), se obtiene:

$$\frac{d^2}{dt^2}(z_r + \Delta z) + a_1 \frac{d}{dt}(z_r + \Delta z) + a_2(z_r + \Delta z) = b\bar{u}_1 \quad (5.3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z + a_1 \frac{d}{dt}\Delta z + a_2\Delta z = b\Delta u + (b\bar{u}_r - a_2 z_r) \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z + a_1 \frac{d}{dt}\Delta z + a_2\Delta z = b\Delta u \quad (5.5)$$

Definiendo las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_1 &= \Delta z \\ \hat{\zeta}_2 &= \frac{d}{dt}\Delta z = \frac{d}{dt}z \end{aligned} \quad (5.6)$$

Se obtiene la primera representación de estado del modelo incremental (5.5) (ver figura 5.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\zeta} &= A_{mi}\hat{\zeta} + B_{mi}\Delta u \\ \Delta z &= C_{mi}\hat{\zeta} \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{mi} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, & B_{mi} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \\ C_{mi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\zeta} &= \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 \\ \hat{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z - z_r) \\ \frac{d}{dt}z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.1. Modelo incremental

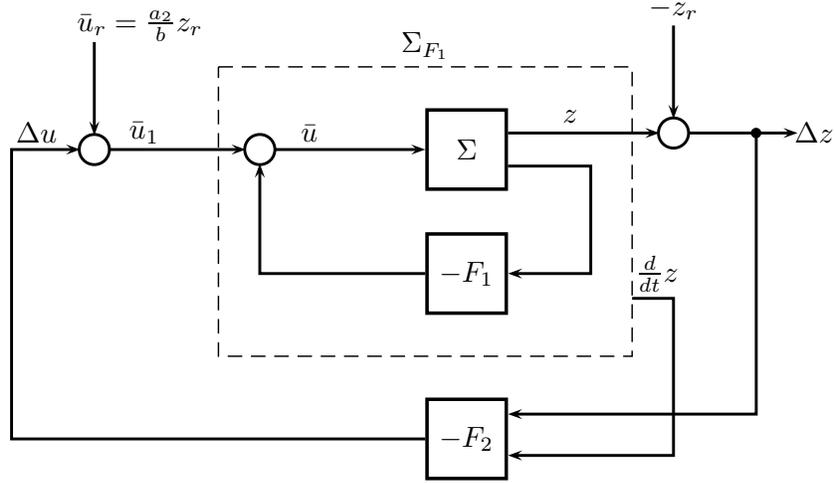


Figura 5.1: Primera representación de estado, (5.7) y (5.8), del modelo incremental (5.5).

Otro modelo incremental, sería considerando al término $a_2 z_r$ de (5.3) como una perturbación, esto es:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta z + a_1 \frac{d}{dt} \Delta z + a_2 \Delta z = b \bar{u}_1 + q \quad (5.9)$$

donde $q = -a_2 z_r$.

Definiendo las variables de estado como en (5.6), se obtiene la segunda representación de estado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\zeta} &= A_{mi} \hat{\zeta} + B_{mi} \bar{u}_1 + S_{mi} q \\ \Delta z &= C_{mi} \hat{\zeta} \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{mi} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, & B_{mi} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, & S_{mi} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_{mi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\zeta} &= \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 \\ \hat{\zeta}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.2 Realimentación de estado

De (3.85), se tiene que la realimentación de estado, para la primera representación de estado (5.7), es (*c.f.* (5.2) y figura 5.1):

$$\bar{u}_1 = \frac{a_2}{b} z_r - F_2 \begin{bmatrix} (z - z_r) \\ \frac{d}{dt} z \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

5.3 Control robusto de alta ganancia

El controlador y el modelo de referencia (4.29) y (4.30), para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11), son (recuerde que ahora $r = 0$):

$$\varepsilon_c \bar{u}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\zeta}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 + (1 + \ell) \\ 0 & -(\beta_c - 1) \end{bmatrix} \hat{\zeta}(t) + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta_c - 1) & -\beta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Siendo su representación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{mrc,0} &= A_{mrc,0} x_{mrc,0} + B_{mrc,0} \hat{\zeta} \\ \bar{u}_1 &= \frac{1}{\varepsilon_c} C_{mrc,0} x_{mrc,0} + \frac{1}{\varepsilon_c} D_{mrc,0} \hat{\zeta} \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{mrc,0} &= \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta_c - 1) & -\beta_c \end{bmatrix}, & B_{mrc,0} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 + (1 + \ell) \\ 0 & -(\beta_c - 1) \end{bmatrix}, \\ C_{mrc,0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & D_{mrc,0} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ x_{mrc,0} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

La discretización de (5.15) y (5.16) es:

$$\begin{aligned} x_{mrc,0}((k+1)T) &= \Phi_{mrc,0} x_{mrc,0}(kT) + \Gamma_{B_{mrc,0}} \hat{\zeta}(kT) \\ \bar{u}_1(kT) &= \frac{1}{\varepsilon_c} C_{mrc,0} x_{mrc,0}(kT) + \frac{1}{\varepsilon_c} D_{mrc,0} \hat{\zeta}(kT) \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.4. Resultados experimentales

donde:

$$\begin{aligned}\Phi_{mrc,0} &= e^{A_{mrc,0}\mathsf{T}} \\ \Gamma_{B_{mrc,0}} &= \int_0^{\mathsf{T}} e^{A_{mrc,0}\eta} d\eta B_{mrc,0}\end{aligned}\tag{5.18}$$

Las matrices (5.18) numéricamente son:

$$\begin{aligned}\Phi_{mrc,0} &= \begin{bmatrix} 0.9878 & -0.0021 \\ 0.0851 & 0.9047 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{B_{mrc,0}} &= \begin{bmatrix} -0.0146 & -0.0101 \\ -0.0006 & -0.0861 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.19}$$

Para el tiempo de muestreo de: $\mathsf{T} = 0.01$ [s], $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 10$, $1/\tau = 10.20$, $\ell = \frac{1}{\tau} - \beta_c = 0.2$, $\bar{a}_1 = 2.2525$ y $\bar{a}_2 = 1.4645$.

5.4 Resultados experimentales

En la figura 5.2 se muestra el diagrama en Simulink para la primera representación de estado, (5.7) y (5.8), del modelo incremental (5.5), y la realimentación de estado (5.12) con F_2 dada en (3.85).¹

¹Con respecto al valor a_2 , este se seleccionó como 1.8172 (ver figura 2.17). Y con respecto al valor de b , este corresponde al elemento (2,1) de la matriz B_2 y es igual a 0.2929 (ver (3.72)).

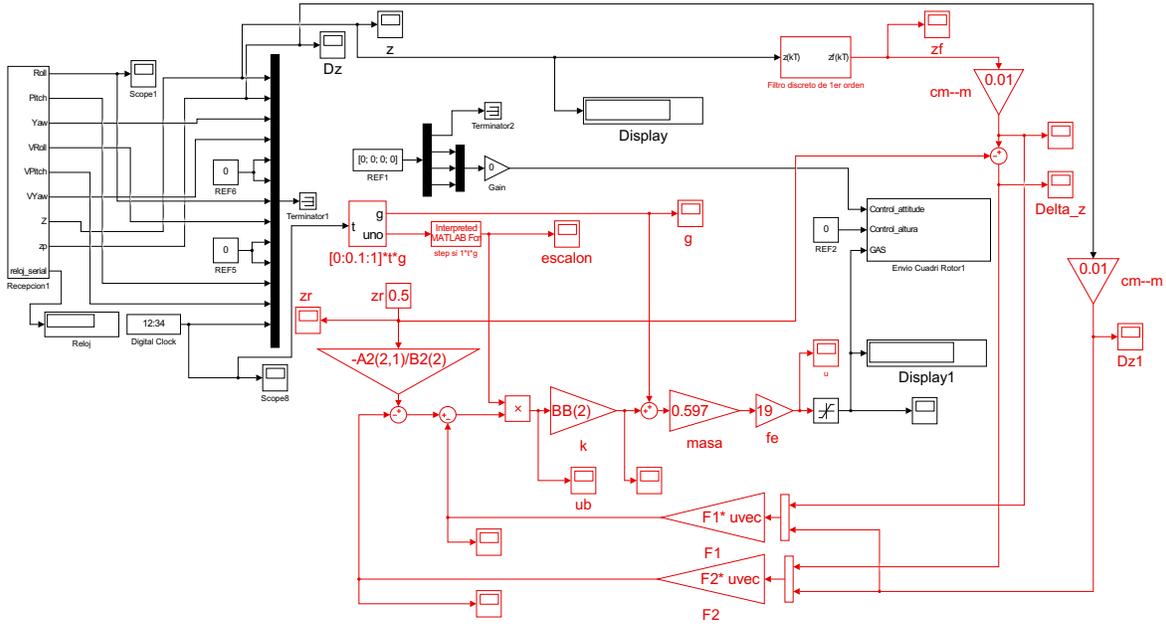


Figura 5.2: Diagrama de la primera representación de estado, (5.7) y (5.8), del modelo incremental (5.5). En el diagrama (ver (3.72)) $-A2(2, 1)/B2(2) = \frac{-(-1.8172)}{0.2929}$, es decir $\frac{a_2}{b}$.

En las figuras 5.3 y 5.4 se muestran las respuestas obtenidas para $z_r = 0.5$ [m].

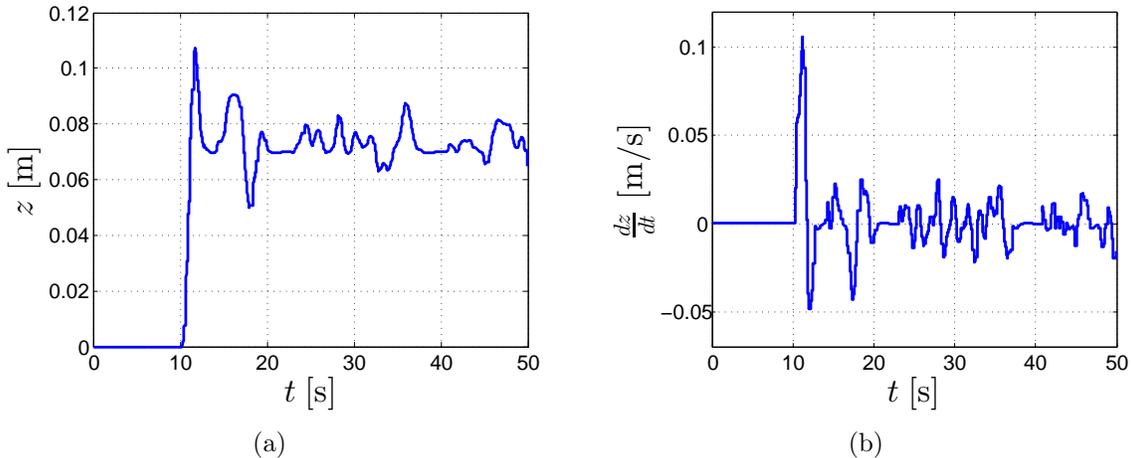


Figura 5.3: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado, (5.12), $z_r = 0.5$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Posición z (z), (b) velocidad $\frac{dz}{dt}$ ($Dz1$).

5.4. Resultados experimentales

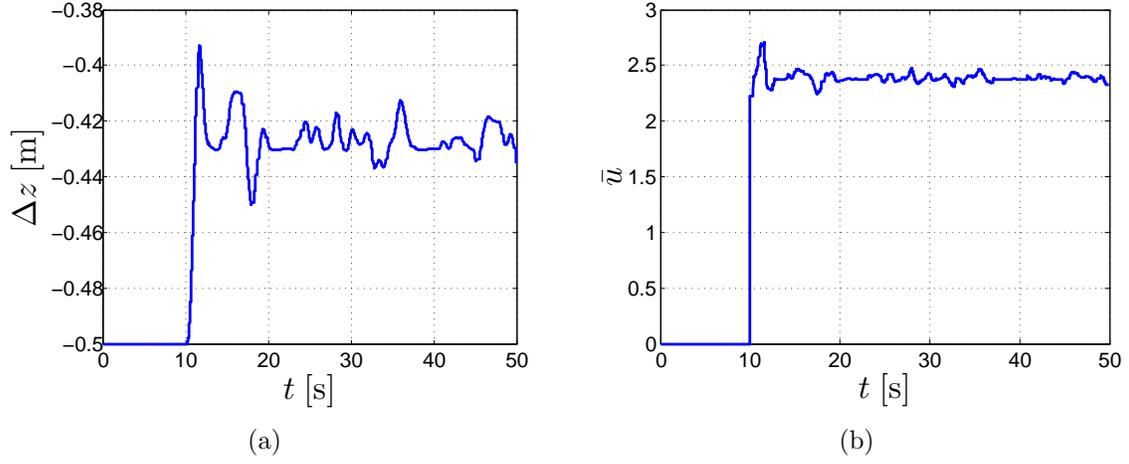


Figura 5.4: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado, (5.12), $z_r = 0.5$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Δz (Δz), (b) señal \bar{u} (u).

En las figuras 5.5 y 5.6 se muestran las respuestas obtenidas para $z_r = 0.8$ [m].

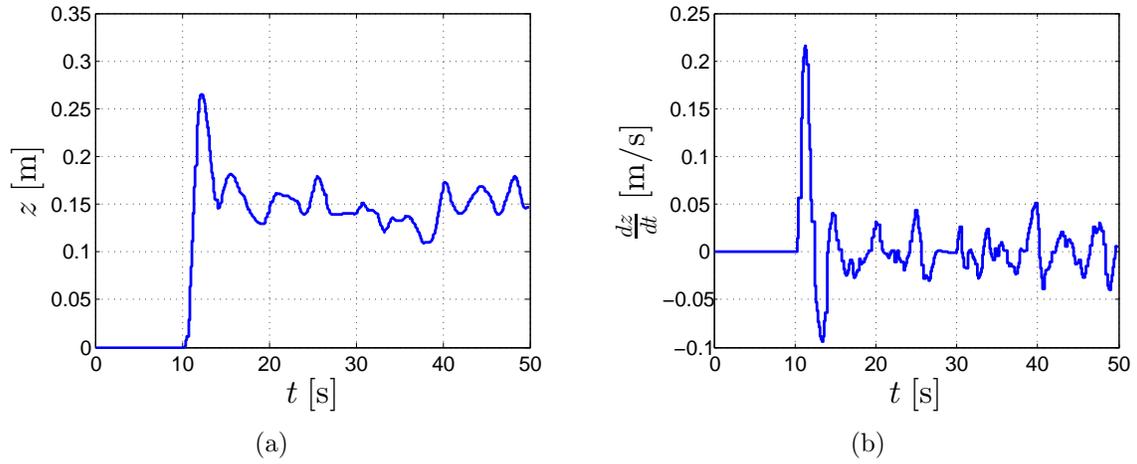


Figura 5.5: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado, (5.12), $z_r = 0.8$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Posición z (z), (b) velocidad $\frac{dz}{dt}$ ($Dz1$).

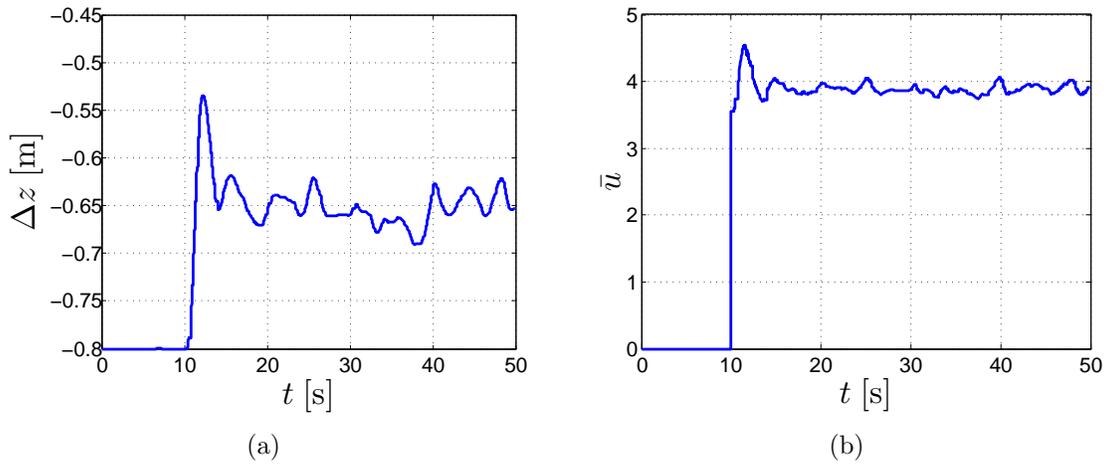


Figura 5.6: Respuestas obtenidas con la realimentación de estado, (5.12), $z_r = 0.8$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Δz (Delta_z), (b) señal \bar{u} (ub).

En la figura 5.7 se muestra el diagrama del controlador y el modelo de referencia (5.17) y (5.19), para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11).

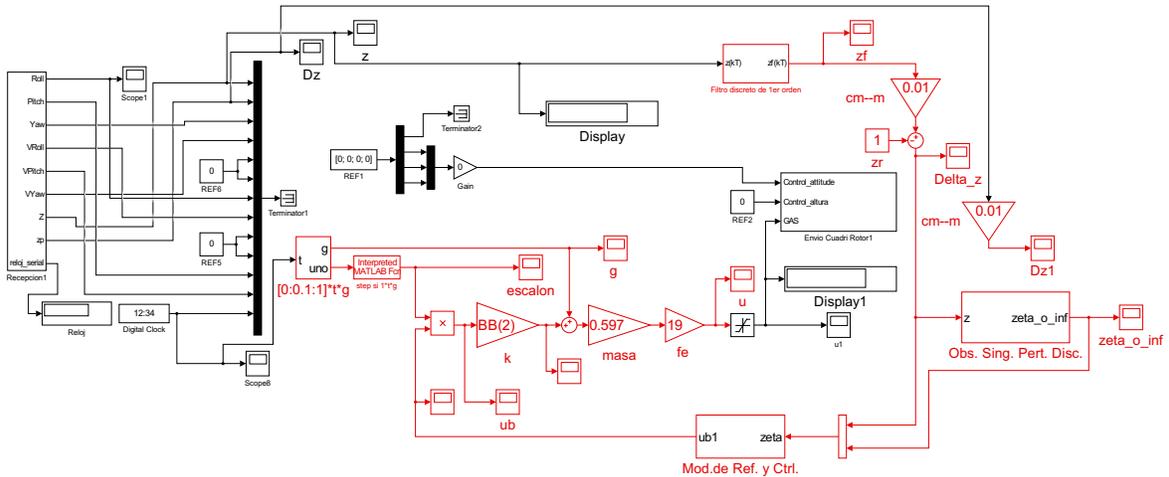


Figura 5.7: Diagrama del controlador y el modelo de referencia (5.17) y (5.19), para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11). Y $BB(2)$ es igual a 0.2929 (ver (3.77)).

5.4. Resultados experimentales

En la figura (5.8) se muestra el diagrama en Simulink para el controlador y el modelo de referencia (5.17) y (5.19).

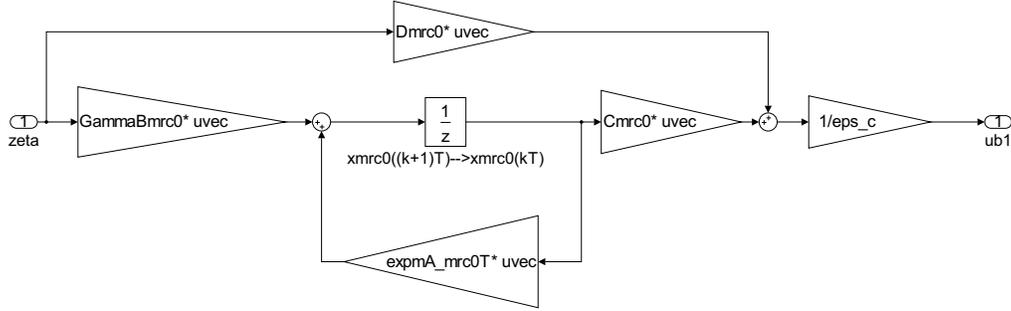


Figura 5.8: Diagrama del controlador singularmente perturbado y modelo de referencia, (5.17) y (5.19), donde: $\text{expmA_mrc0T} = \Phi_{mrc,0}$, $\text{GammaBmrc0} = \Gamma_{B_{mrc,0}}$, $\text{Cmrc0} = C_{mrc,0}$, $\text{Dmrc0} = D_{mrc,0}$ y $1/\text{eps_c} = \frac{1}{\varepsilon_c}$, (ver (5.16) y (5.19)).

En las figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se muestran las respuestas del sistema para $z_r = 1$ [m].

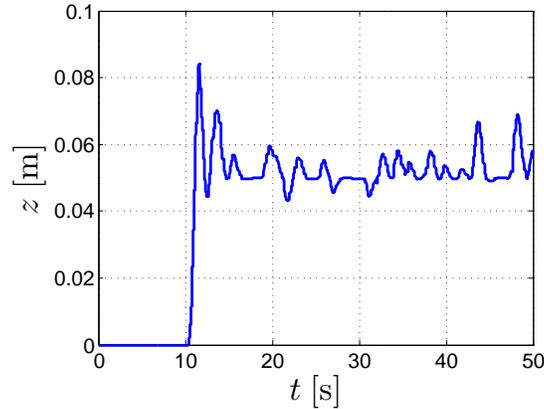


Figura 5.9: Respuesta obtenida con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia (5.17) y (5.19); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 10$, $1/\tau = 10.2$, $\ell = 0.22$, $\bar{a}_1 = 2.2525$ y $\bar{a}_2 = 1.4645$ para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11); $z_r = 1$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. Posición z (z).

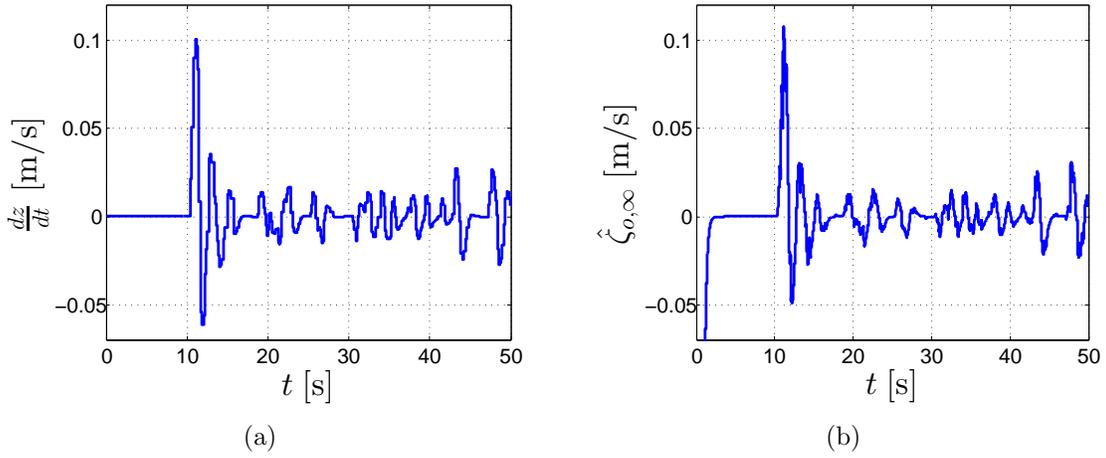


Figura 5.10: Respuestas obtenidas con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia (5.17) y (5.19); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 10$, $1/\tau = 10.2$, $\ell = 0.22$, $\bar{a}_1 = 2.2525$ y $\bar{a}_2 = 1.4645$ para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11); $z_r = 1$ [m] (zr), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (b) velocidad estimada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ (zeta_o_inf).

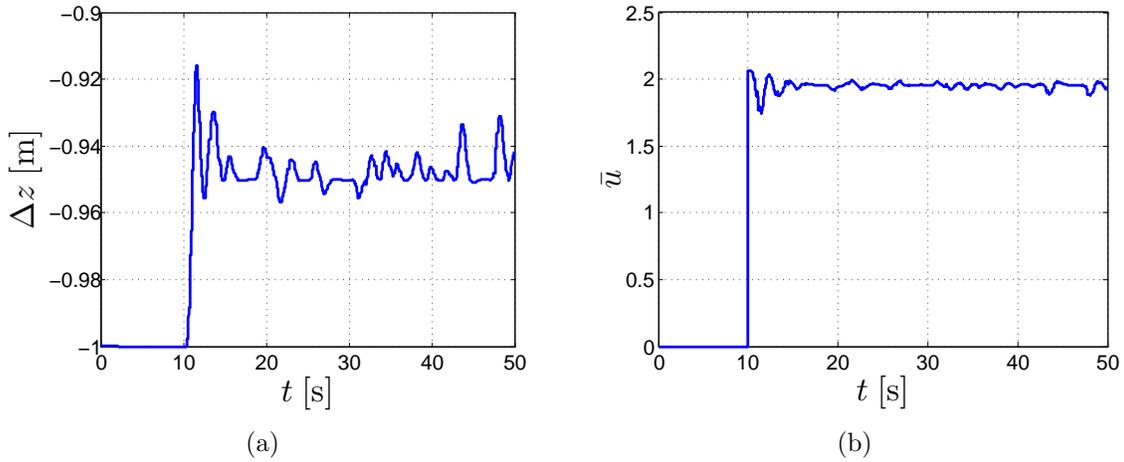


Figura 5.11: Respuestas obtenidas con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia (5.17) y (5.19); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 10$, $1/\tau = 10.2$, $\ell = 0.22$, $\bar{a}_1 = 2.2525$ y $\bar{a}_2 = 1.4645$ para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11); $z_r = 1$ [m] (zr), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Δz (Delta_z), (b) señal \bar{u} (ub).

5.4. Resultados experimentales

En las figuras 5.12, 5.13 y 5.14 se muestran las respuestas del sistema para $z_r = 2$ [m].

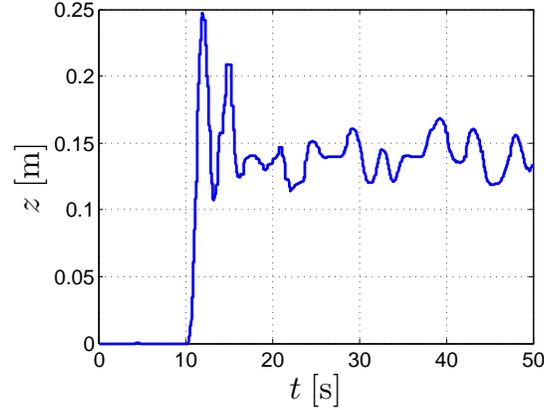


Figura 5.12: Respuesta obtenida con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia (5.17) y (5.19); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 10$, $1/\tau = 10.2$, $\ell = 0.22$, $\bar{a}_1 = 2.2525$ y $\bar{a}_2 = 1.4645$ para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11); $z_r = 2$ [m] (zr), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. Posición z (z).

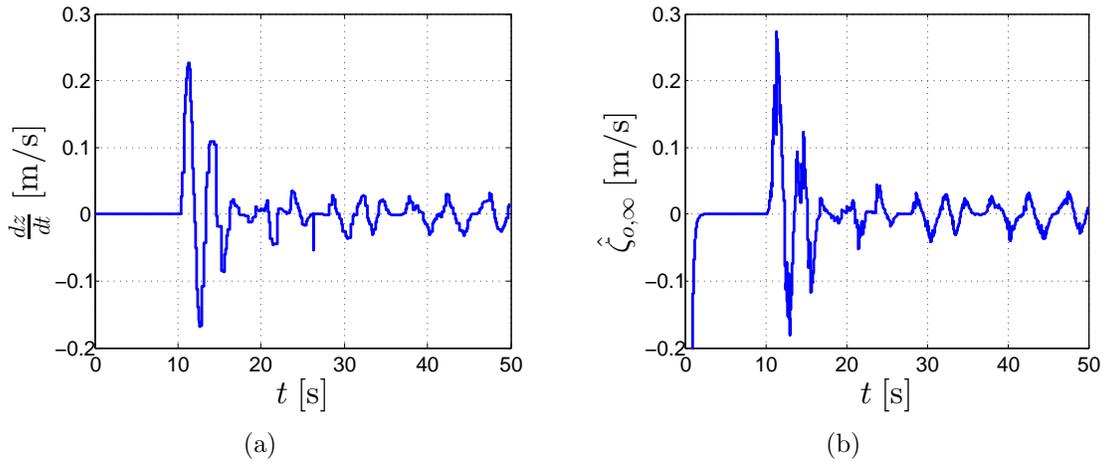


Figura 5.13: Respuestas obtenidas con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia (5.17) y (5.19); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 10$, $1/\tau = 10.2$, $\ell = 0.22$, $\bar{a}_1 = 2.2525$ y $\bar{a}_2 = 1.4645$ para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11); $z_r = 2$ [m] (zr), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (b) velocidad estimada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ (zeta_o_inf).

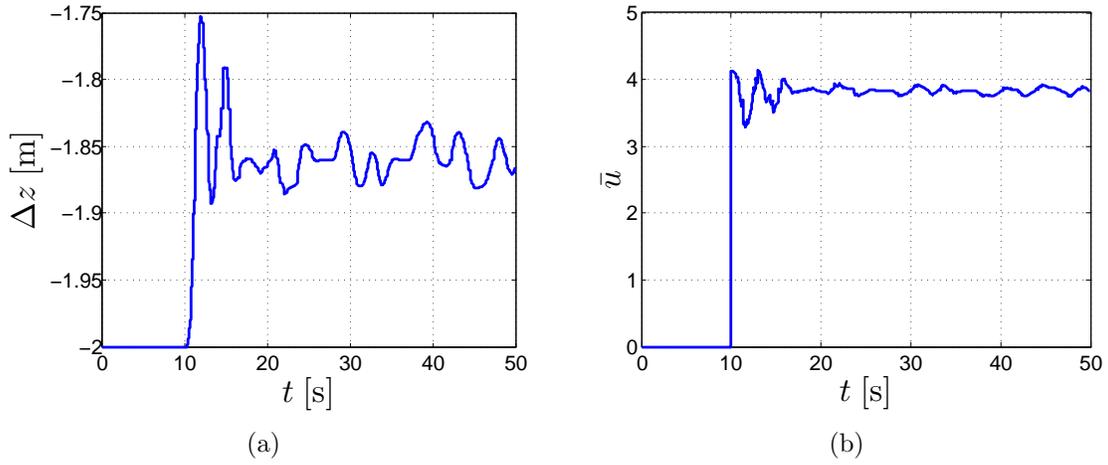


Figura 5.14: Respuestas obtenidas con el controlador singularmente perturbado y el modelo de referencia (5.17) y (5.19); con: $\varepsilon_c = 0.5$, $\beta_c = 10$, $1/\tau = 10.2$, $\ell = 0.22$, $\bar{a}_1 = 2.2525$ y $\bar{a}_2 = 1.4645$ para la segunda representación de estado (5.10) y (5.11); $z_r = 2$ [m] (zr), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Δz (Delta.z), (b) señal \bar{u} (ub).

5.5 Conclusiones

Nuevamente el esquema de control lineal robusto funcionó mejor que el esquema clásico de control, realimentación utilizando un estimado del estado.

Pero aún continúan los problemas con el ajuste del punto de funcionamiento, el cual tiene que ajustarse arbitrariamente en cada altitud deseada.

Capítulo 6

Regulación robusta utilizando detección de fallas

Para evitar el problema del ajuste arbitrario de la señal de referencia, en este capítulo se propone un esquema de control lineal basado en las técnicas de detección de fallas. Para esto se procede de la manera siguiente:

- 1) En la sección 6.1 se da una descripción teórica.
- 2) En la sección 6.2 se analiza al controlador cuando se aplica a un sistema de segundo orden.
- 3) En la sección 6.3 se discretiza al controlador.
- 4) En la sección 6.4 se muestran aspectos prácticos, así como también los resultados de laboratorio.
- 5) En la sección 6.5 se concluye.

6.1 Descripción teórica

6.1.1 Representación de estado

De (2.12) y (5.2), se tiene el siguiente modelo incremental para el PVTOL (recordar figuras 2.17 y 2.21):

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z + a_1(z)\frac{d}{dt}\Delta z + a_2(z)\Delta z = \frac{1}{m}u - g \quad (6.1)$$

Comparando (6.1) con (5.9) y (5.10) se tiene la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\zeta} &= A_f\hat{\zeta} + B_f\left(\frac{1}{m}u - g\right) \\ \Delta z &= C_f\hat{\zeta} \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(z) & -a_1(z) \end{bmatrix}, & B_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\zeta} &= \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 \\ \hat{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z \\ \frac{d}{dt}\Delta z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.1.2 Detección de fallas

6.1.2.1 Representación de estado

La representación de estado (6.2) también se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\zeta} &= A_{f_0}\hat{\zeta} + B_f\varphi + B_fq \\ \Delta z &= C_f\hat{\zeta} \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{f_0} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & B_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi &= \frac{1}{m}u - g, & q &= \begin{bmatrix} -a_2(z) & -a_1(z) \end{bmatrix}\hat{\zeta}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

De esta manera las incertidumbres de los parámetros, $a_1(z)$ y $a_2(z)$, se están manejando como fallas.

6.1. Descripción teórica

Note que la representación de estado (6.4) y (6.5) es controlable y observable, en efecto:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B_f & A_{f_0}B_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C_f \\ C_f A_{f_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

6.1.2.2 Filtro Beard-Jones

La representación de estado (6.4) tiene la forma estándar para la detección de fallas [19].

Para detectar la falla q se utiliza el filtro Beard-Jones [20]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w_f &= (A_{f_0} + K_f C_f)w_f + B_f \varphi - K_f \Delta z \\ \widehat{\Delta z} &= C_f w_f \end{aligned} \quad (6.7)$$

De (6.4) y (6.7) se obtiene el siguiente generador de residuos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e_f &= A_{K_f} e_f - B_f q \\ r_f &= C_f e_f \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde $e_f = w_f - \hat{\zeta}$, $r_f = \widehat{\Delta z} - \Delta z$, r_f es el residuo, el cual es nulo cuando la falla q es idénticamente igual a cero, y $K_f = \begin{bmatrix} -k_{1_f} \\ -k_{2_f} \end{bmatrix}$, la cual se selecciona de tal manera que la matriz:

$$A_{K_f} = A_{f_0} + K_f C_f = \begin{bmatrix} -k_{1_f} & 1 \\ -k_{2_f} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

sea Hurwitz.

El espectro de A_{K_f} está determinado por el siguiente polinomio Hurwitz:

$$\sigma_{K_f}(s) = \det(sI - A_{K_f}) = s^2 + k_{1_f}s + k_{2_f} \quad (6.10)$$

6.1.2.3 Función de transferencia

La función de transferencia del generador de residuos (6.8) es:

$$F_{e_f}(s) = \frac{-1}{s^2 + k_{1_f}s + k_{2_f}} \quad (6.11)$$

6.1.2.4 Respuesta temporal

La solución de la ecuación de estado (6.8) es:

$$e_f(t) = e^{A_{K_f}t}e_f(0) - \int_0^t e^{A_{K_f}(t-\tau)}B_fq(\tau)d\tau \quad (6.12)$$

Sustituyendo la solución (6.12) en la ecuación de salida (6.8), se tiene:

$$r_f = C_f \left(e^{A_{K_f}t}e_f(0) - \int_0^t e^{A_{K_f}(t-\tau)}B_fq(\tau)d\tau \right) \quad (6.13)$$

Note que cuando q es igual a una constante \bar{q} y t tiende a ∞ , de las ecuaciones (6.11) y (6.13) se obtiene la siguiente respuesta en estado permanente:

$$r_{f,\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} r_f = \lim_{s \rightarrow 0} F_{e_f}(s) = \frac{-1}{k_{2_f}}\bar{q} \quad (6.14)$$

6.1.2.5 Detector de fallas

Tomando en cuenta (6.14) en (6.7), se tiene el siguiente estimador de fallas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w_f &= (A_{f_0} + K_f C_f)w_f + B_f\varphi - K_f\Delta z \\ \hat{q} &= k_{2_f}(C_f w_f - \Delta z) \end{aligned} \quad (6.15)$$

6.1.2.6 Ley de control

Se propone la siguiente ley de control:

$$u = m(u_r + F_f\hat{\zeta} + \hat{q} + g) \quad (6.16)$$

donde u_r es la entrada, F_f es el vector de ganancias de realimentación, \hat{q} es la falla estimada por (6.15) y g es la gravedad.

6.1.2.7 Sistema en lazo cerrado

De (6.4), (6.5), (6.15) y (6.16) se tiene la siguiente representación de estado del sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\zeta} &= A_{F_f}\hat{\zeta} + B_f u_r + B_f(\hat{q} + q) \\ \frac{d}{dt}e_f &= A_{K_f}e_f - B_f q \\ \hat{q} &= k_{2_f}C_f e_f \\ \Delta z &= C_f \hat{\zeta}\end{aligned}\tag{6.17}$$

donde:

$$A_{F_f} = A_{f_0} + B_f F_f\tag{6.18}$$

6.2 Análisis del caso de un sistema mecánico de segundo orden

6.2.1 Representación de estado

El modelo del PVTOL se puede expresar en la siguiente representación de estado (*c.f.* (6.4) y (6.5)):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\zeta} &= A_{f_0}\hat{\zeta} + B_f \varphi + B_f q \\ \Delta z &= C_f \hat{\zeta}\end{aligned}\tag{6.19}$$

donde:

$$\begin{aligned}A_{f_0} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & B_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi &= \frac{1}{m}u - g, & q &= \mathbf{a}\hat{\zeta}, & \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} -a_2(z) & -a_1(z) \end{bmatrix}, \\ \hat{\zeta} &= \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 \\ \hat{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z \\ \frac{d}{dt}z \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6.20}$$

6.2.2 Ley de control

La ley de control (6.16) es (recordar (6.20), (6.15), (6.19)):

$$\begin{aligned}\varphi &= u_r + F_f \hat{\zeta} + \hat{g} \\ &= u_r + (F_f - k_{2_f} C_f) \hat{\zeta} + k_{2_f} C_f w_f\end{aligned}\quad (6.21)$$

donde u_r es la entrada, $F_f = \begin{bmatrix} -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \end{bmatrix}$ es el vector de ganancias de realimentación, \hat{g} es la falla estimada por (6.15), y g es la gravedad.

El vector de ganancias de la realimentación de estado F_f se obtiene utilizando el LQR, la matrices empleadas en el LQR son A_{f_0} y B_f dadas en (6.20), y los valores para Q y ρ son:¹

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho = 60. \quad (6.22)$$

Con el comando `care` de Matlab se obtiene:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4.0610 & 7.7460 \\ 7.7460 & 31.4566 \end{bmatrix}, \quad F_f = \begin{bmatrix} -0.1291 & -0.5243 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$\sigma(A_{f_0} + B_f F_f) = \{-0.2621 \pm 0.2457i\}.$$

Para calcular la ganancia K_f del detector de fallas (6.15), se emplea el máximo módulo de los valores propios de la matriz en lazo cerrado A_{F_f} (ver (6.18) y (6.23)) y se seleccionan las raíces del polinomio Butterworth para $n = 2$, (3.25). El módulo de los valores propios es $\varpi = 0.3593$ y la dinámica deseada se elige cinco veces más rápida que la de la realimentación. Multiplicando las raíces del polinomio Butterworth por $5 * \varpi = 1.7965$, se obtiene $\sigma(A_{f_0} + K_f C_f) = \{-1.2703 \pm 1.2703i\}$. Utilizando éstas raíces, las matrices A_{f_0} , C_f y el comando `place` de Matlab, esto es: `place(AF0', Cf', sigma).'`, se obtiene la siguiente matriz de ganancia para el detector de fallas:

$$K_f = \begin{bmatrix} -2.5407 \\ -3.2275 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A_{f_0} + K_f C_f) = \{-1.2703 \pm 1.2703i\}. \quad (6.24)$$

¹El valor de ρ se obtuvo experimentalmente.

6.2.3 Sistema en lazo cerrado

De (6.19), (6.20) y (6.21) se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\zeta} &= (A_{f_0} + B_f\mathbf{a})\hat{\zeta} + B_f(u_r + (\mathbf{F}_f - k_{2_f}C_f)\hat{\zeta} + k_{2_f}C_fw_f) \\ &= (A_{F_f} + B_f(\mathbf{a} - k_{2_f}C_f))\hat{\zeta} + k_{2_f}B_fC_fw_f + B_fu_r\end{aligned}\quad (6.25)$$

De (6.15) y (6.21) se tiene (recordar (6.9)):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}w_f &= A_{K_f}w_f + B_f(u_r + (\mathbf{F}_f - k_{2_f}C_f)\hat{\zeta} + k_{2_f}C_fw_f) - K_fC_f\hat{\zeta} \\ &= (A_{K_f} + k_{2_f}B_fC_f)w_f + (B_f\mathbf{F}_f - (k_{2_f}B_f + K_f)C_f)\hat{\zeta} + B_fu_r\end{aligned}\quad (6.26)$$

Las expresiones (6.25) y (6.26) se llevan a la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x} &= A_{LC}\mathbf{x} + B_{LC}u_r \\ \Delta z &= C_{LC}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (6.27)$$

donde:

$$\begin{aligned}A_{LC} &= \begin{bmatrix} (A_{F_f} + B_f(\mathbf{a} - k_{2_f}C_f)) & k_{2_f}B_fC_f \\ (B_f\mathbf{F}_f - (k_{2_f}B_f + K_f)C_f) & (A_{K_f} + k_{2_f}B_fC_f) \end{bmatrix}, & B_{LC} &= \begin{bmatrix} B_f \\ B_f \end{bmatrix}, \\ C_{LC} &= \begin{bmatrix} C_f & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ w_f \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (6.28)$$

Sea el siguiente cambio de variable:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}\quad (6.29)$$

donde $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ e_f \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ y su inversa es $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}} &= \bar{A}_{LC}\bar{\mathbf{x}} + \bar{B}_{LC}u_r \\ \Delta z &= \bar{C}_{LC}\bar{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{6.30}$$

donde:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{LC} &= \mathbf{T}A_{LC}\mathbf{T}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{F_f} + B_f(\mathbf{a} - k_{2_f}C_f)) & k_{2_f}B_fC_f \\ (B_fF_f - (k_{2_f}B_f + K_f)C_f) & (A_{K_f} + k_{2_f}B_fC_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{F_f} + B_f\mathbf{a} & k_{2_f}B_fC_f \\ -B_f\mathbf{a} & A_{K_f} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}\bar{B}_{LC} &= \mathbf{T}B_{LC} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_f \\ B_f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_{LC} &= C_{LC}\mathbf{T}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} C_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_f & \mathbf{0} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.33}$$

6.2.3.1 Ceros del sistema

La matriz sistema del sistema en lazo cerrado, representado por (6.30) y (6.31), es:

$$\Sigma_{LC}(s) = \left[\begin{array}{c|c} (s\mathbf{I} - \bar{A}_{LC}) & \bar{B}_{LC} \\ \hline -\bar{C}_{LC} & \mathbf{0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} (s\mathbf{I} - (A_{F_f} + B_f\mathbf{a})) & -k_{2_f}B_fC_f & B_f \\ B_f\mathbf{a} & (s\mathbf{I} - A_{K_f}) & \mathbf{0} \\ \hline -C_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]\tag{6.34}$$

6.2. Análisis del caso de un sistema mecánico de segundo orden

Los ceros del sistema están determinados por el determinante de la matriz sistema, esto es (recordar (6.20)):²

$$\begin{aligned}
 \sigma_{LC}(s) &= \det \Sigma_{LC}(s) \\
 &= \left| \begin{array}{cc|c} (s\mathbf{I} - (A_{F_f} + B_f\mathbf{a})) & -k_{2_f}B_fC_f & B_f \\ B_f\mathbf{a} & (s\mathbf{I} - A_{K_f}) & 0 \\ \hline -C_f & 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & k_{2_f}C_f & \mathbf{I} \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cc|c} (s\mathbf{I} - (A_{F_f} + B_f\mathbf{a})) & 0 & B_f \\ B_f\mathbf{a} & (s\mathbf{I} - A_{K_f}) & 0 \\ \hline -C_f & 0 & 0 \end{array} \right| \\
 &= |s\mathbf{I} - (A_{F_f} + B_f\mathbf{a})| |s\mathbf{I} - A_{K_f}| |C_f(s\mathbf{I} - (A_{F_f} + B_f\mathbf{a}))^{-1}B_f| \\
 &= \sigma_{K_f}(s) C_f \text{Adj}(s\mathbf{I} - (A_{F_f} + B_f\mathbf{a}))B_f \\
 &= \sigma_{K_f}(s)
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

donde $\sigma_{K_f}(s) = |s\mathbf{I} - A_{K_f}|$.

6.2.3.2 Polos en lazo cerrado

Para calcular los polos en lazo cerrado, se asume que los coeficientes, $a_1(z)$ y $a_2(z)$, tienen valores fijos, a_1 y a_2 , respectivamente.

Los polos en lazo cerrado están determinados por el polinomio característico de la matriz \bar{A}_{LC} , esto es (recordar (6.20)):³

$$\begin{aligned}
 \pi_{LC}(s) &= \det(s\mathbf{I} - \bar{A}_{LC}) \\
 &= \left| \begin{array}{cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{I} & (s\mathbf{I} - (A_{F_f} + B_f\mathbf{a})) & -k_{2_f}B_fC_f \\ 0 & \mathbf{I} & B_f\mathbf{a} & (s\mathbf{I} - A_{K_f}) \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cc|c} (s\mathbf{I} - A_{F_f}) & (s\mathbf{I} - A_{K_f} - k_{2_f}B_fC_f) & \\ B_f\mathbf{a} & (s\mathbf{I} - A_{K_f}) & \end{array} \right| \\
 &= |s\mathbf{I} - A_{F_f}| |(s\mathbf{I} - A_{K_f}) - B_f\mathbf{a}(s\mathbf{I} - A_{F_f})^{-1}(s\mathbf{I} - A_{K_f} - k_{2_f}B_fC_f)| \\
 &= \pi_{F_f}(s) |I - B_f\mathbf{a}(s\mathbf{I} - A_{F_f})^{-1}(I - k_{2_f}B_fC_f(s\mathbf{I} - A_{K_f})^{-1})| \sigma_{K_f}(s) \\
 &= \pi_{F_f}(s)\sigma_{K_f}(s) + (\sigma_{K_f}(s) - k_{2_f})(a_1s + a_2)
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

²Recordar que: $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}; \left| \begin{array}{cc} A & D \\ C & B \end{array} \right| = |A||B - CA^{-1}D|$ (ver por ejemplo el apéndice de [6]).

³Recordar el pie de página ².

donde:

$$\pi_{F_f}(s) = |s\mathbf{I} - A_{F_f}| = s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2 \quad (6.37)$$

Para obtener (6.35) y (6.36) se han considerado los resultados siguientes:

$$B_f \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

$$k_{2_f} B_f C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{2_f} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

$$(s\mathbf{I} - A_{F_f})^{-1} = \frac{1}{\pi_{F_f}(s)} \begin{bmatrix} s + \bar{a}_1 & 1 \\ -\bar{a}_2 & s \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

$$(s\mathbf{I} - A_{K_f})^{-1} = \frac{1}{\sigma_{K_f}(s)} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -k_{2_f} & s + k_{1_f} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

6.2.3.3 Función de transferencia

Para estudiar la variación de los polos en lazo cerrado, en función de las variaciones de los parámetros del sistema, $a_1(z)$ y $a_2(z)$, se recurre al lugar de las raíces.

Igualando a cero (6.36), se obtiene la forma canónica GH , esto es (recordar (6.10)):

$$GH = \frac{s(s + k_{1_f})(s + \frac{a_2}{a_1})a_1}{\pi_{F_f}(s)\sigma_{K_f}(s)} \quad (6.42)$$

De (6.37), (6.23) y (6.20), se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi_{F_f}(s) &= (s + 0.2621 + 0.2457i)(s + 0.2621 - 0.2457i) \\ &= s^2 + 0.5243s + 0.1291 \\ &= s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

De (6.10), (6.24) y (6.20), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{K_f}(s) &= (s + 1.2703 + 1.2703i)(s + 1.2703 - 1.2703i) \\ &= s^2 + 2.5407s + 3.2275 \\ &= s^2 + k_{1_f}s + k_{2_f} \end{aligned} \quad (6.44)$$

6.2. Análisis del caso de un sistema mecánico de segundo orden

Con respecto al comportamiento de $a_2(z)$ y $a_1(z)$, de (2.19) y (2.31), se infiere que la relación $\frac{a_2(z)}{a_1(z)}$ tiende a un valor constante conforme el PVTOL asciende, en efecto (*c.f.* figura 6.1):

$$\frac{a_2}{a_1} = \lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} \frac{1.3816\bar{z} + 0.4963}{0.3724\bar{z} + 0.0607} = 3.71 \quad (6.45)$$

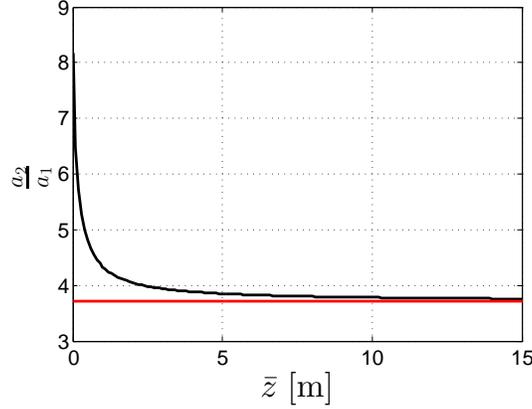


Figura 6.1: Comportamiento de $\frac{a_2}{a_1}$ en función de la altura \bar{z} .

En la figura 6.2 se muestra el lugar de las raíces de (6.42), con los valores (6.43) y (6.44) y la hipótesis (6.45), con respecto a a_1 . Se puede observar que los polos en lazo cerrado se mueven de las raíces de $\pi_{F_f}(s)\sigma_{K_f}(s)$ a las raíces de $s(s + k_{1_f})(s + \frac{a_2}{a_1})$. Conforme el PVTOL asciende, el valor de a_1 tiende a cero (ver figuras 2.17 y 2.21), por lo que los polos en lazo cerrado tienden a las raíces de $\pi_{F_f}(s)$ y $\sigma_{K_f}(s)$.

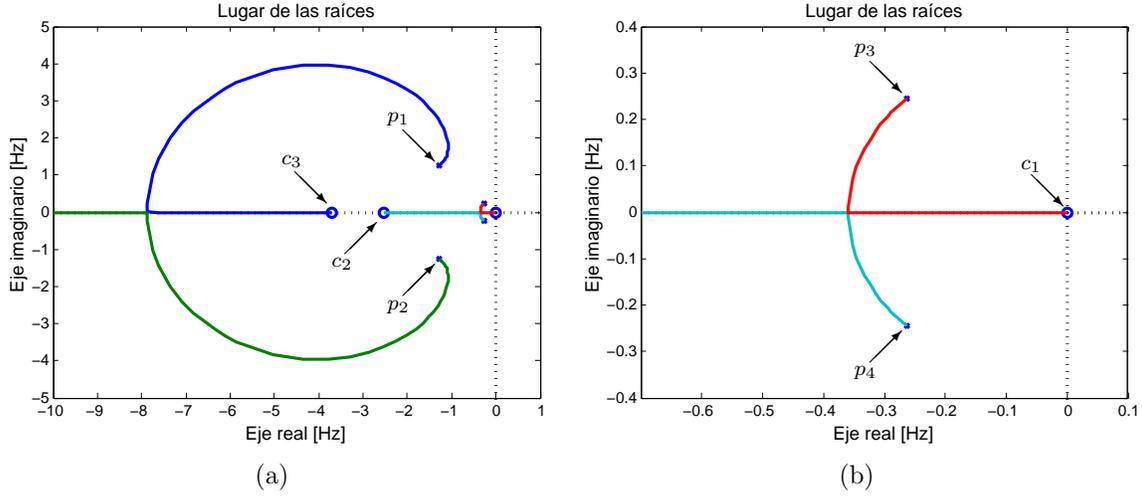


Figura 6.2: Lugar de las raíces, siendo los polinomios para los polos: $\sigma_{K_f}(s) = s^2 + k_{1_f}s + k_{2_f} = (s+p_1)(s+p_2)$ con $p_1 = -1.2703 + 1.2703i$, $p_2 = -1.2703 - 1.2703i$; $\pi_{F_f}(s) = s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2 = (s+p_3)(s+p_4)$ con $p_3 = -0.2621 + 0.2457i$, $p_4 = -0.2621 - 0.2457i$. Y los ceros se ubican en $c_1 = 0$, $c_2 = -k_{1_f} = -2.5407$ y $c_3 = -\frac{a_2}{a_1} = -3.71$.

6.2.3.4 Solución temporal

La solución temporal de (6.30), junto con (6.31), (6.32) y (6.33) es:

$$\hat{\zeta}(t) = e^{A_{F_f}t}\hat{\zeta}(0) + \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f u(\nu) d\nu + \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f (\mathbf{a}\hat{\zeta}(\nu) + k_{2_f} C_f e_f(\nu)) d\nu \quad (6.46)$$

$$e_f(t) = e^{A_{K_f}t} e_f(0) - \int_0^t e^{A_{K_f}(t-\tau)} B_f \mathbf{a}\hat{\zeta}(\tau) d\tau \quad (6.47)$$

Sustituyendo (6.47) en (6.46) se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(t) &= e^{A_{F_f}t}\hat{\zeta}(0) + \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f u(\nu) d\nu \\ &\quad + \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f \left(\mathbf{a}\hat{\zeta}(\nu) + k_{2_f} C_f \left(e^{A_{K_f}\nu} e_f(0) - \int_0^\nu e^{A_{K_f}(\nu-\tau)} B_f \mathbf{a}\hat{\zeta}(\tau) d\tau \right) \right) d\nu \\ &= e^{A_{F_f}t}\hat{\zeta}(0) + \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f u(\nu) d\nu + k_{2_f} \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f C_f e^{A_{K_f}\nu} e_f(0) d\nu \\ &\quad + \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f \left(\mathbf{a}\hat{\zeta}(\nu) - k_{2_f} \int_0^\nu C_f e^{A_{K_f}(\nu-\tau)} B_f \mathbf{a}\hat{\zeta}(\tau) d\tau \right) d\nu \end{aligned} \quad (6.48)$$

6.3. Discretización

Definiendo:

$$\tilde{q} = q - k_{2f} \int_0^\nu C_f e^{A_{K_f}(\nu-\tau)} B_f q(\tau) d\tau \quad (6.49)$$

donde (recordar (6.20)) $q = \mathbf{a}\hat{\zeta}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(t) &= e^{A_{F_f}t} \hat{\zeta}(0) + k_{2f} \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f C_f e^{A_{K_f}\nu} d\nu e_f(0) \\ &+ \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f u(\nu) d\nu \\ &+ \int_0^t e^{A_{F_f}(t-\nu)} B_f \tilde{q}(\nu) d\nu \end{aligned} \quad (6.50)$$

De (6.50) y (6.49) se deduce que la señal q pasa por el filtro pasabajas determinado por la realización de estado $(A_{K_f}, B_f, k_{2f}C_f)$, con la función de transferencia (recordar (6.20), (6.9) y (6.10)):

$$F.T. = -\frac{k_{2f}}{s^2 + k_{1f}s + k_{2f}} \quad (6.51)$$

Por lo que en la señal \tilde{q} , se han eliminado el contenido en frecuencias bajas de q , ver figura 6.3. Esto es, la falla es eliminada en el espectro bajo de frecuencias, determinado por $\sigma_{K_f}(s)$. Así que \tilde{q} es un ruido de frecuencias altas, el cual es naturalmente atenuado por la dinámica intrínseca del PVTOL, determinada por π_{F_f} .

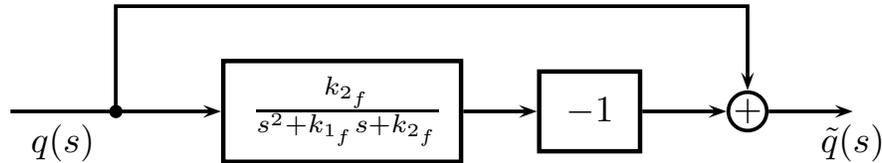


Figura 6.3: Eliminación del espectro bajo en frecuencias de la falla $q = \mathbf{a}\hat{\zeta}$.

6.3 Discretización

El estimador de fallas (6.15) y la ley de control (6.16) se puede expresar como:

$$\frac{d}{dt}w_f = A_{K_f}w_f + gB_f \left(\frac{1}{mg}u - 1 \right) - K_f\Delta z \quad (6.52)$$

$$\frac{u}{mg} = \frac{1}{g}u_r + \frac{1}{g}F_f\hat{\zeta} + \frac{k_{2f}}{g}(C_f w_f + \Delta z) + 1 \quad (6.53)$$

Sustituyendo (6.53) en (6.52) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}w_f = (A_{K_f} + k_{2f}B_f C_f)w_f + B_f F_f \hat{\zeta} - (k_{2f}B_f + K_f)\Delta z + B_f u_r \quad (6.54)$$

Las expresiones (6.53) y (6.54) llevan a la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w_f &= A_{c_f}w_f + B_{c_f}\bar{v} \\ \frac{u}{mg} &= C_{c_f}w_f + D_{c_f}\bar{v} + 1 \end{aligned} \quad (6.55)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{c_f} &= (A_{K_f} + k_{2f}B_f C_f), & B_{c_f} &= \begin{bmatrix} B_f F_f & -(k_{2f}B_f + K_f) & B_f \end{bmatrix}, \\ C_{c_f} &= \frac{k_{2f}}{g}C_f, & D_{c_f} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{g}F_f & -\frac{k_{2f}}{g} & \frac{1}{g} \end{bmatrix}, \\ \bar{v} &= \begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \Delta z \\ u_r \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

La discretización de (6.55) y (6.56) es:

$$\begin{aligned} w_f((k+1)T) &= \Phi_{c_f}w_f(kT) + \Gamma_{B_{c_f}}\bar{v}(kT) \\ \frac{1}{mg}u(kT) &= C_{c_f}w_f(kT) + D_{c_f}\bar{v}(kT) + 1 \end{aligned} \quad (6.57)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Phi_{c_f} &= e^{A_{c_f}T} \\ \Gamma_{B_{c_f}} &= \int_0^T e^{A_{c_f}\eta} d\eta B_{c_f} \end{aligned} \quad (6.58)$$

Las matrices numéricas para (6.58) son (ver (6.56) (6.20), (6.23), (6.24) y (6.44); recordar también la sección 3.2):

$$\begin{aligned} \Phi_{c_f} &= \begin{bmatrix} 0.9749 & 0.0099 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{B_{c_f}} &= \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & 0.0251 & 0.0000 \\ -0.0013 & -0.0052 & 0 & 0.0100 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.59)$$

6.4 Resultados experimentales

En la figura 6.4 se muestra el diagrama en Simulink para (6.57) y (6.59), el observador singularmente perturbado (3.82) y (3.86)

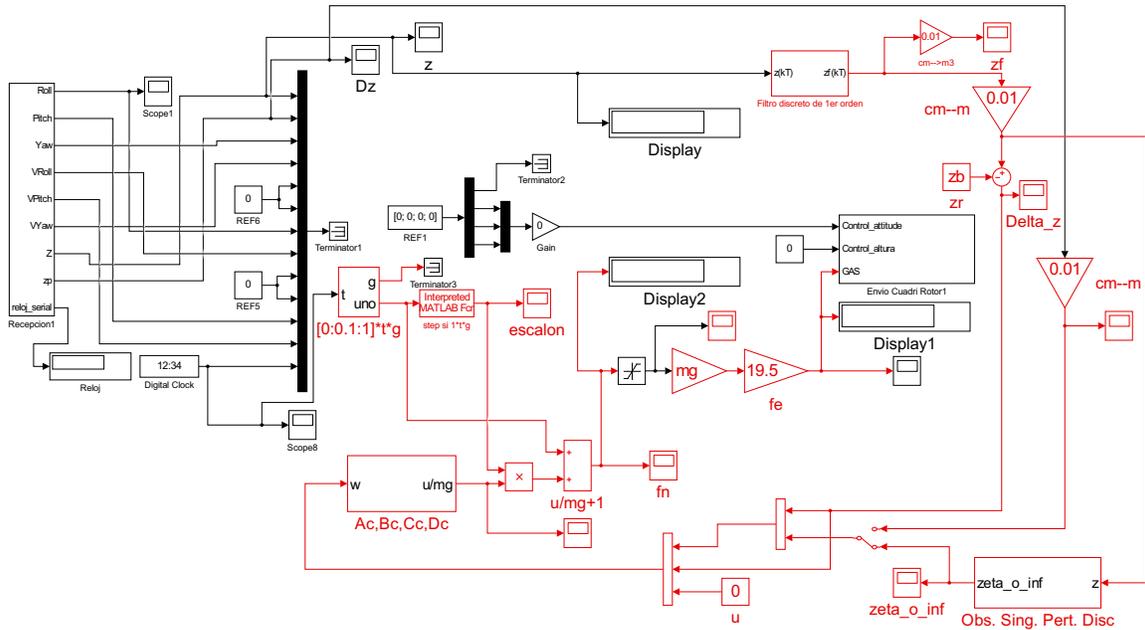


Figura 6.4: Diagrama en Simulink para (6.57) y (6.59), el observador singularmente perturbado (3.82) y (3.86).

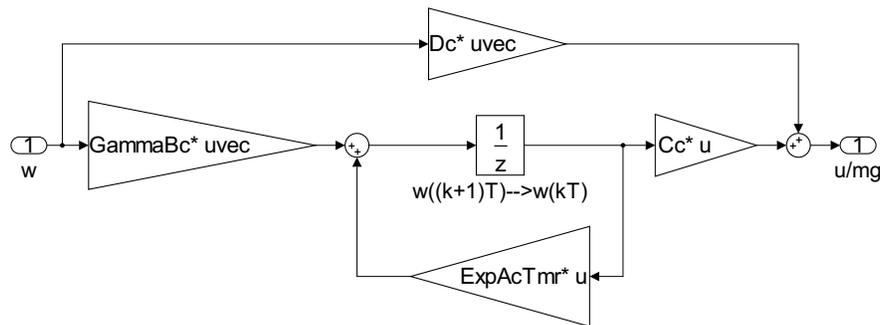


Figura 6.5: Diagrama en Simulink para (6.57) y (6.58), donde: $\text{ExpAcTmr} = \Phi_c$, $\text{GammaBc} = \Gamma_{B_c}$, $\text{Cc} = C_c$ y $\text{Dc} = D_c$.

En las figuras 6.6, 6.7 y 6.8 se muestran las respuestas del sistema para $z_r = 0.2$ [m].

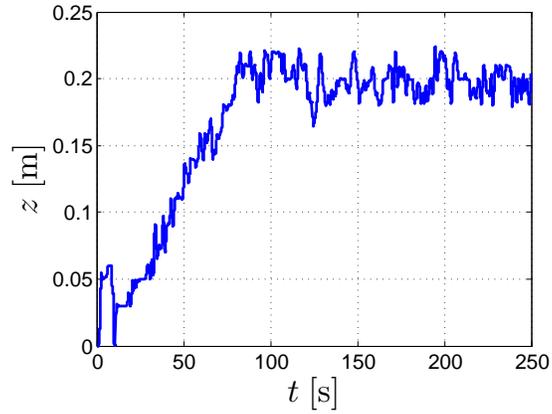


Figura 6.6: Respuesta obtenida usando realimentación de estado y detección de fallas, $z_r = 0.2$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. Posición z (z).

6.4. Resultados experimentales

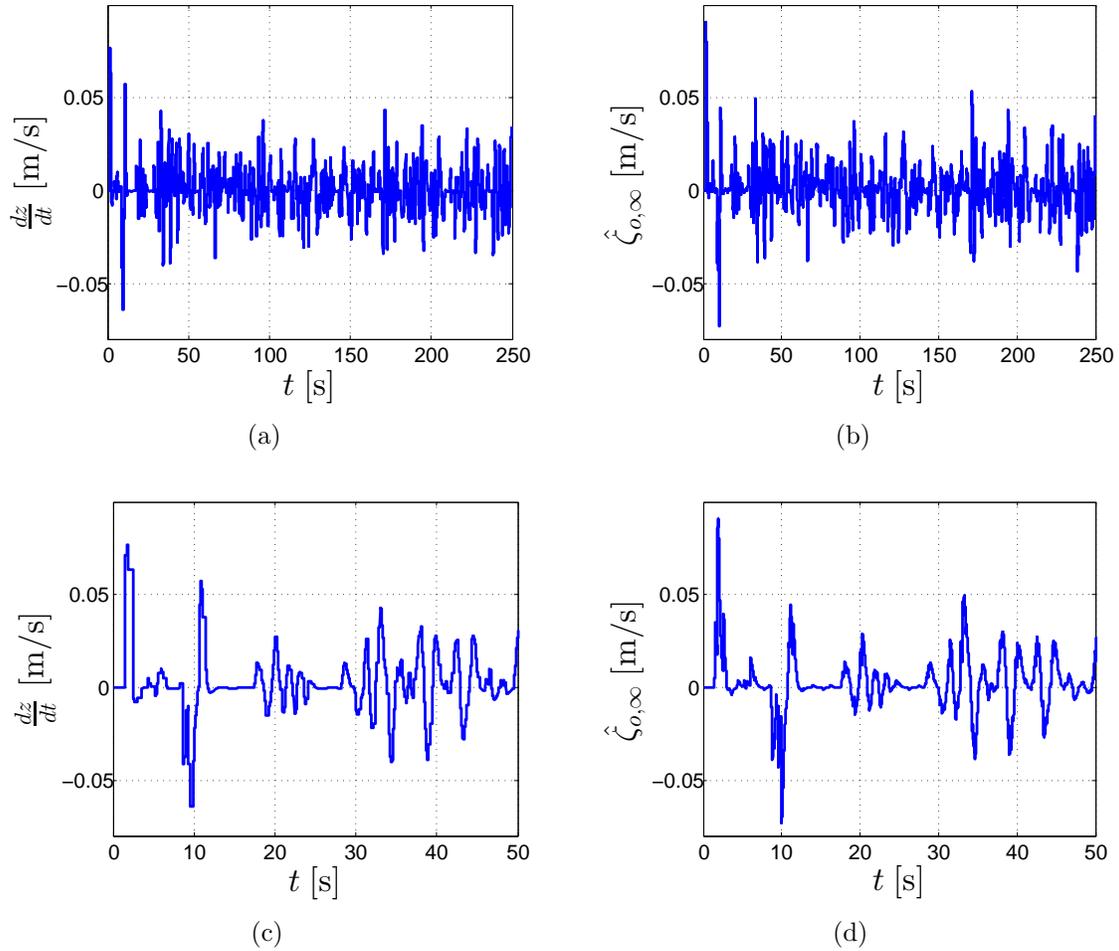


Figura 6.7: Respuesta obtenida usando realimentación de estado y detección de fallas, $z_r = 0.2$ [m] (zr), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (b) velocidad estimada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ (zeta_o_inf), (c) zoom de la velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (d) zoom de la velocidad estimada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ (zeta_o_inf).

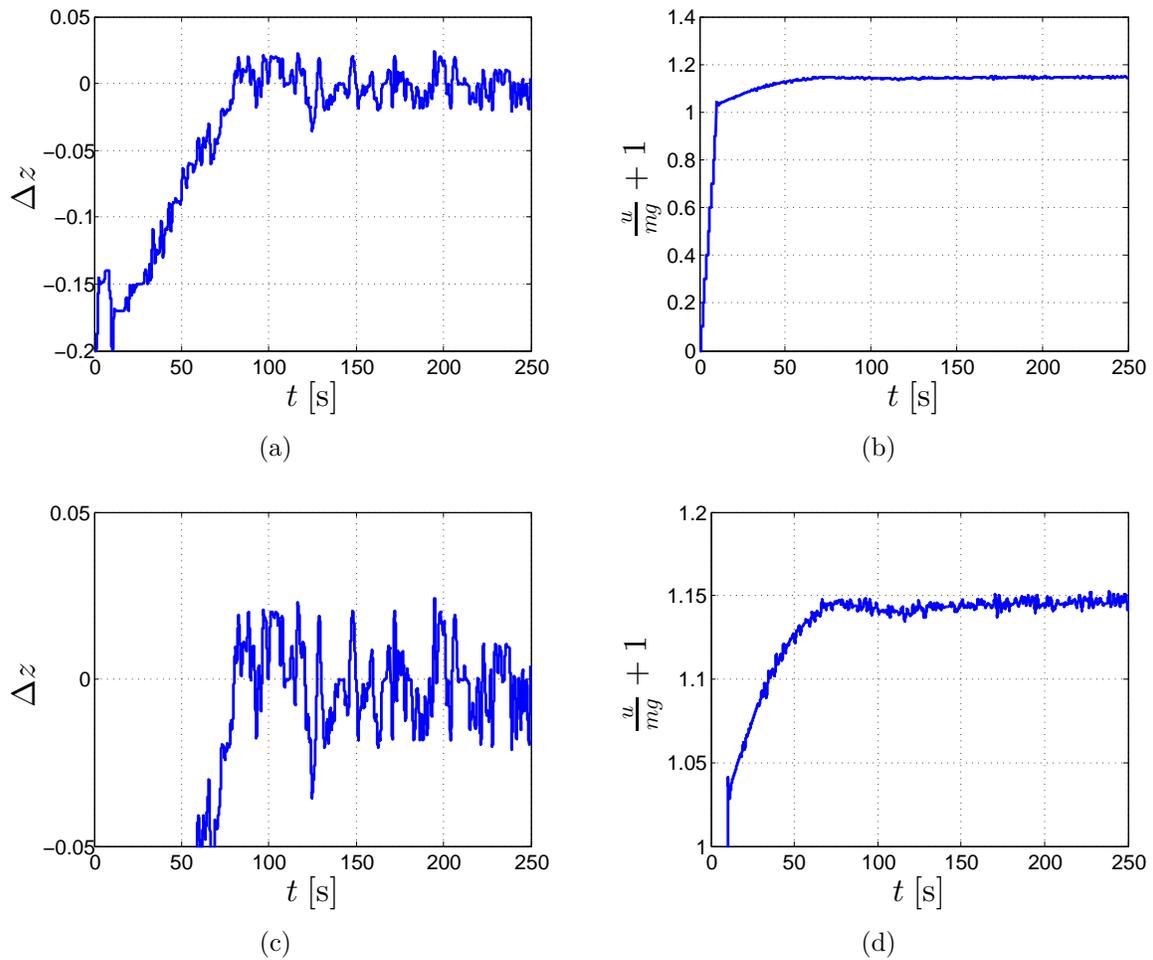


Figura 6.8: Respuesta obtenida usando realimentación de estado y detección de fallas, $z_r = 0.2$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Δz (Δz), (b) señal $\frac{u}{mg} + 1$ (fn), (c) zoom de Δz (Δz), (d) zoom de la señal $\frac{u}{mg} + 1$ (fn).

6.4. Resultados experimentales

En las figuras 6.6, 6.7 y 6.8 se muestran las respuestas del sistema para $z_r = 0.4$ [m].

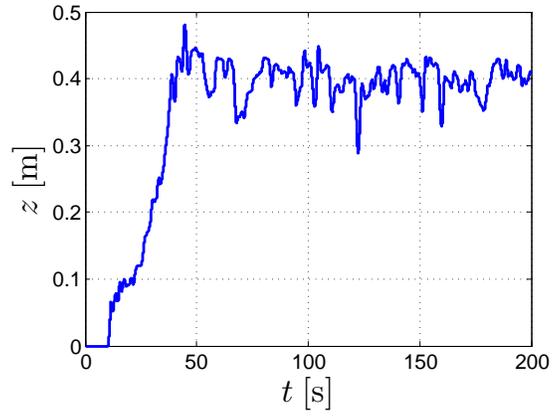


Figura 6.9: Respuesta obtenida usando realimentación de estado y detección de fallas, $z_r = 0.4$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. Posición z (z).

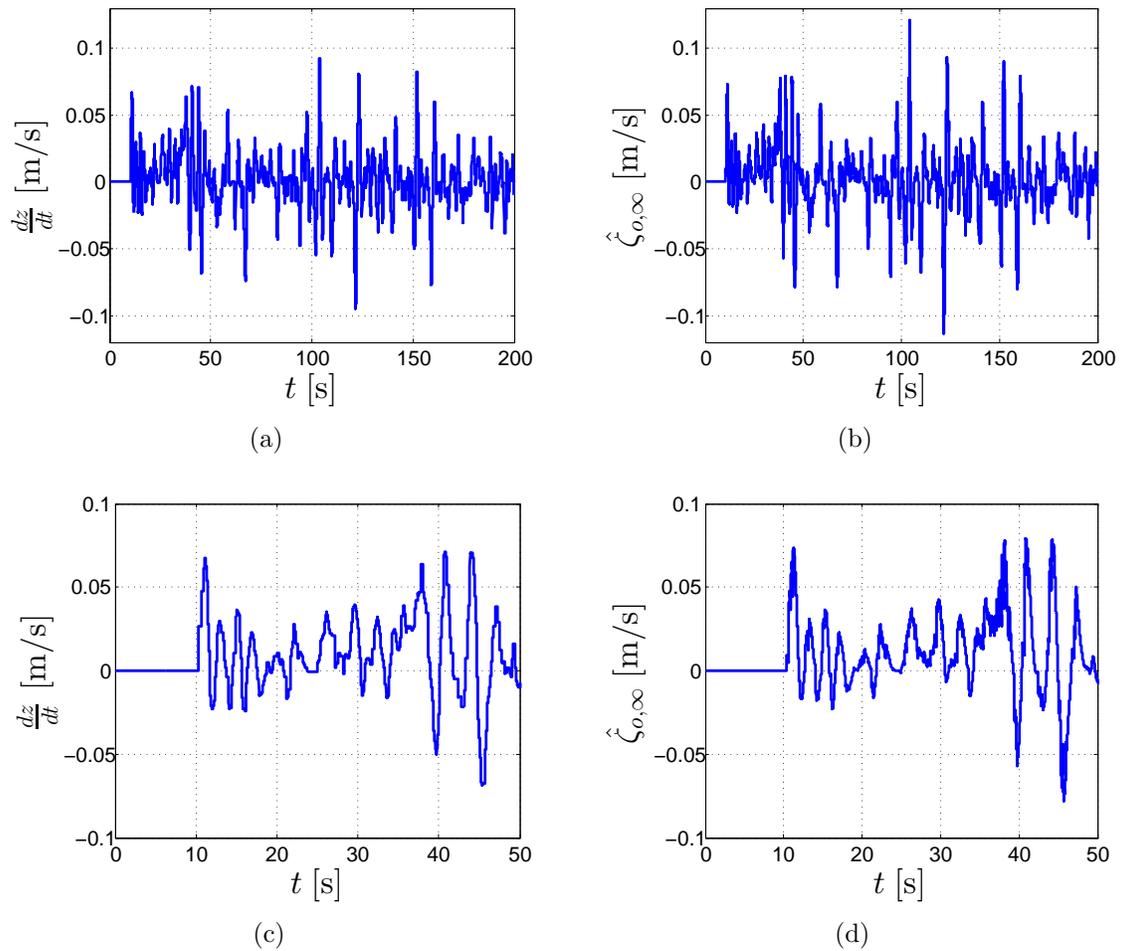


Figura 6.10: Respuesta obtenida usando realimentación de estado y detección de fallas, $z_r = 0.4$ [m] (zr), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (b) velocidad estimada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ (zeta_o_inf), (c) zoom de la velocidad $\frac{dz}{dt}$ (Dz), (d) zoom de la velocidad estimada $\hat{\zeta}_{o,\infty}$ (zeta_o_inf).

6.4. Resultados experimentales

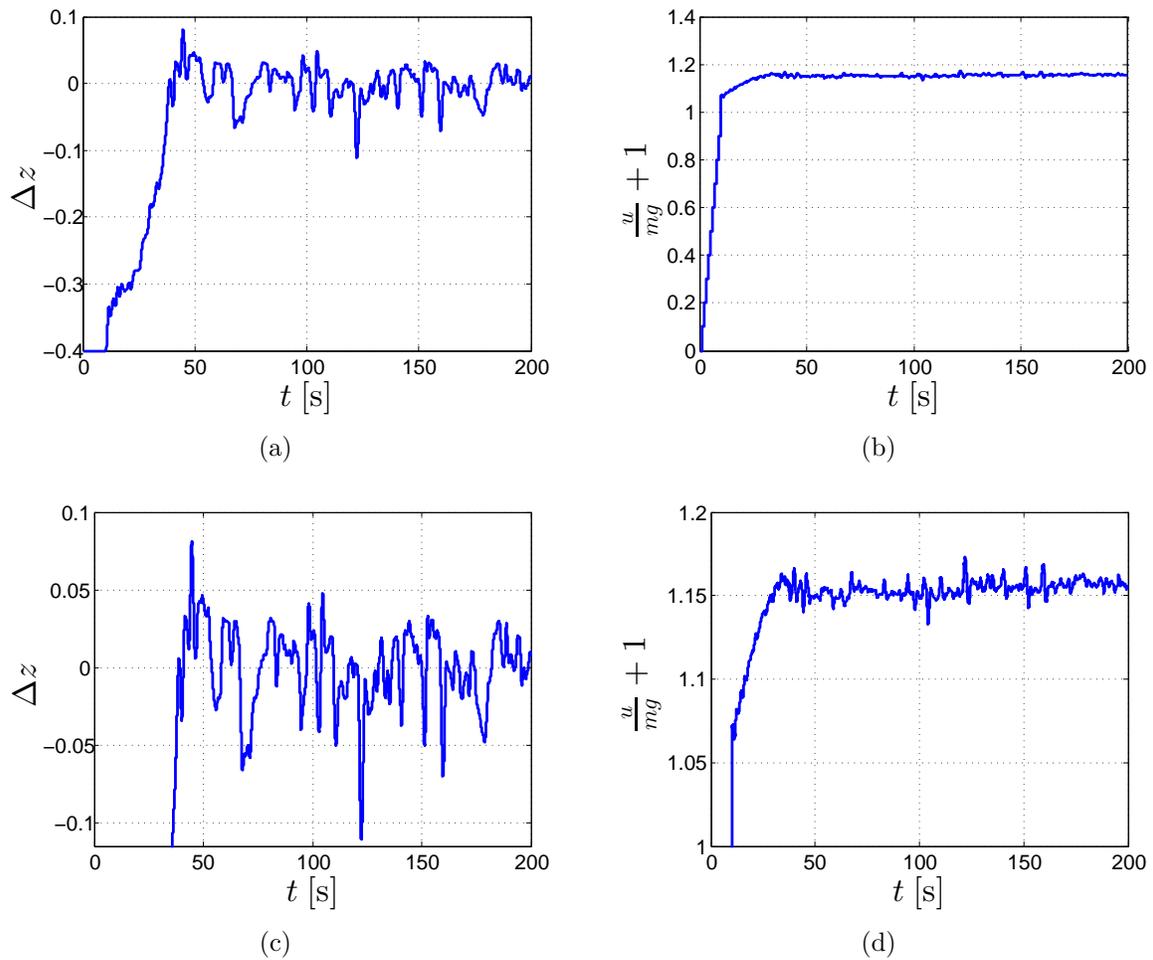


Figura 6.11: Respuesta obtenida usando realimentación de estado y detección de fallas, $z_r = 0.4$ [m] (z_r), tiempo de muestreo $T = 0.01$ [s]. (a) Δz (Δz), (b) señal $\frac{u}{mg} + 1$ (fn), (c) zoom de Δz (Δz), (d) zoom de la señal $\frac{u}{mg} + 1$ (fn).

6.5 Conclusiones

El esquema de control lineal, basado en las técnicas de detección de fallas, funcionó adecuadamente resolviendo los dos problemas anteriores, es decir: no es necesario la resintonización del controlador, ni tampoco se necesita estar modificando al punto de funcionamiento.

En este esquema de control se considera al PVTOL como un doble integrador puro, y la incertidumbre del modelo es tomada en cuenta por una señal de falla. Con la ayuda de un detector de fallas, las frecuencias bajas de la incertidumbre son canceladas por el control lineal. Las frecuencias altas de la incertidumbre son naturalmente atenuadas por la dinámica del PVTOL.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió el problema del control de altitud de un prototipo de laboratorio PVTOL, mediante técnicas de control lineal.

En el capítulo 2 se mostró que el prototipo de laboratorio se caracteriza por un modelo mecánico de segundo orden, cuyos coeficientes de fricción y rigidez elástica no son nulos, y además varían en función de la altitud alcanzada.

En los capítulos 3 y 4 se probaron dos esquemas de control lineal, el esquema clásico realimentación utilizando un estimado del estado, y un esquema robusto basado en técnicas de perturbaciones singulares. Debido al comportamiento no lineal de los parámetros del modelo, el esquema clásico no funcionó adecuadamente, siendo necesario tanto la resintonización de la realimentación, como el reajuste de la señal de referencia para cada altura deseada.

El esquema de control lineal robusto funcionó mejor que el esquema clásico, ya que no fue necesario la resintonización del controlador para cada altura deseada; pero aún se presentaron problemas con el ajuste de la referencia, la cual se tuvo que ajustar arbitrariamente, para obtener una altitud deseada.

En el capítulo 6 se propuso un esquema de control lineal basado en las técnicas de detección de fallas, el cual resolvió adecuadamente los problemas anteriores, es decir, no fueron necesarios la resintonización del controlador, ni la modificación del punto de funcionamiento. La incertidumbre del modelo es tomada en cuenta por una señal de falla. Mediante un detector de fallas se cancelan las frecuencias bajas de la incertidumbre y las frecuencias altas son naturalmente atenuadas por la dinámica del PVTOL.

Bibliografía

- [1] John Hauser, Shankar Sastry, and George Meyer. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: application to v/stol aircraft. *Automatica*, 28(4):665–679, 1992.
- [2] Pedro Castillo Garcia, Rogelio Lozano, and Alejandro Enrique Dzul. *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [3] Iván González, Sergio Salazar, and Rogelio Lozano. Chattering-free sliding mode altitude control for a quad-rotor aircraft: Real-time application. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 73:137 – 155, 2014.
- [4] M. Bonilla, S. Salazar, and Rogelio Lozano. Trajectory tracking for inertial systems using a right inverse approach. In *Control Conference (ECC), 2014 European*, pages 2322–2327. IEEE, 2014.
- [5] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson Education, Madrid, 4th edition, 2003.
- [6] Thomas Kailath. *Linear systems*, volume 1. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [7] William E. Boyce and Richard C. Dippima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa, 1972.
- [8] M. E. Van Valkenburg. *Analog filter design*. Holt, Rinehart, and Winston, 1982.
- [9] Albert S. Jackson. *Analog computation*. New York: McGraw-Hill, 1960.
- [10] S. Puga, M. Bonilla, M. Malabre, and R. Lozano. Singularly perturbed implicit control law for linear time varying siso systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24:1530–1549, 2014.

- [11] M. Bonilla, S. Salazar, and Rogelio Lozano. Singularly perturbed derivative coupling-filter: The siso case. In *3rd IFAC Symposium on Power System, Structure and Control (2007)*, volume 3, pages 34–39, 2007.
- [12] R. Daniels. *Approximation Methods for Electronic Filter Design*. McGraw-Hills, New York, USA, 1974.
- [13] Feliks R. Gantmacher. *The theory of matrices*, volume 1. Chelsea, New York, 1959.
- [14] G. H. Hardy. *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge University Press, 1975.
- [15] Benjamin C. Kuo. *Discrete-data control systems*. Prentice Hall, 1970.
- [16] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Prentice-Hall, 1980.
- [17] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. *Linear Algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey, 4th edition, 1971.
- [18] M. Bonilla E., Michel Malabre, W Cheang, et al. Disturbance rejection by proportional and derivative output feedback. *Kybernetika*, 31(6):669–681, 1995.
- [19] Alan S. Willsky. A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. *Automatica*, 12(6):601 – 611, 1976.
- [20] Rolf Isermann. Process fault detection based on modeling and estimation methods - a survey. *Automatica*, 20(4):387 – 404, 1984.